Fonctions presque-périodiques et équations différentielles

Dhaou Lassoued

▶ **To cite this version:**

Dhaou Lassoued. Fonctions presque-périodiques et équations différentielles. Sociologie. Université Panthéon-Sorbonne - Paris I, 2013. Français. NNT : 2013PA010045 . tel-01894482

HAL Id: tel-01894482
https://theses.hal.science/tel-01894482

Submitted on 12 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris I Panthéon-Sorbonne
Laboratoire SAMM

Thèse

présentée en première version en vue d'obtenir le grade de
Docteur, spécialité « Mathématiques »

par

Dhaou Lassoued

Fonctions Presque-Périodiques et Équations Différentielles

Thèse soutenue le la date de soutenance devant le jury composé de :

Pr.	Gisèle Mophou	Université des Antilles et de la Guyane	(Rapporteur)
D.R.	Mostafa Adimy	INRIA, Antenne Lyon La Doua	(Rapporteur)
Pr.	Joël Blot	Université Paris I Panthéon-Sorbonne	(Directeur)
Pr.	Jean Pierre Françoise	Université Paris 6 Pierre et Marie Curie	(Président du Jury)
Pr.	Jean-Bernard Baillon	Université Paris I Panthéon-Sorbonne	(Examinateur)
Pr.	Bruno Nazaret	Université Paris I Panthéon-Sorbonne	(Examinateur)

À mes parents...

" As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain ;
as far as they are certain, they do not refer to reality"
Albert Einstein

Table des matières

Table des matières v

Liste des figures vii

Préface 1

1 Quelques éléments sur les fonctions presque-périodiques 7
1.1 Définitions et premières propriétés des fonctions presque-périodiques . . . 9
1.1.1 Espace vectoriel de fonctions presque-périodiques 9
1.1.2 Analyse de Fourier des fonctions presque-périodiques . . 11
1.1.3 Dérivation et intégration des fonctions presque-périodiques 13
1.2 Fonctions presque-périodiques à paramètres 14
1.2.1 Introduction aux fonctions presque-périodiques à paramètres 14
1.2.2 Fonctions presque-périodiques avec un ensemble de paramètres compact 16
1.2.3 Fonctions presque-périodiques avec un ensemble de paramètres dénombrable à l'infini 18
1.2.4 Opérateurs de Nemytskii 20
1.3 Fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch et Espaces de type Sobolev 24
1.3.1 Espaces de Besicovitch 24
1.3.2 Espaces de Sobolev-Besicovitch 27
1.4 Fonctions presque-périodiques et compactification de Bohr 29
1.5 Distributions presque-périodiques 30

Bibliographie 33

2 Bosses et Oscillations presque-périodiques 37
2.1 Notations 39
2.2 Présentation du problème 39
2.2.1 Introduction 39
2.2.2 Définition 40
2.2.3 Hypothèses 40
2.3 Théorème d'existence 41
2.4 Lemmes 42
2.5 Démonstration du Théorème 55

Bibliographie 57

3 Semi-groupes et familles d'évolution 59
3.1 Semi-groupes d'opérateurs 61
3.1.1 Résultats préliminaires 61
3.1.2 Éléments de Théorie Spectrale 63
3.1.3 Caractérisation de la Stabilité Exponentielle Uniforme . . 64
3.2 Famille d'évolution périodique 69

Bibliographie 73

4 Solutions exponentiellement stables et uniformément bornées des problèmes de Cauchy non autonomes périodiques. Une approche basée sur un semi-groupe d'évolution 79
4.1 Description du Problème 81
4.2 Semi-groupe d'évolution opérant sur $E(\mathbb{R}, X)$ 82
4.2.1 Propriétés du semi-groupe d'évolution 82
4.2.2 Relation entre le comportement asymptotique de la famille d'évolution et celui du semi-groupe associé à cette famille 84
4.3 L'espace de Hilbert $L^2([0, q], H)$ 92
4.4 Stabilité exponentielle et bornitude uniforme par rapport aux paramètres 94
4.5 Formulation du problème précédent en termes de Problème de Cauchy abstrait bien posé 102

Bibliographie 107

5 Introduction à la dichotomie exponentielle 113
5.1 Définitions 115
5.2 Dichotomie exponentielle de systèmes différentiels autonomes 116
5.3 Dichotomie exponentielle de systèmes différentiels dans le cas général 118

Bibliographie 121

6 Dichotomie exponentielle des systèmes non autonomes périodiques en termes de la bornitude de certains problèmes de Cauchy périodiques 123
6.1 Introduction 125
6.2 Résultats préliminaires 125
6.3 Dichotomie exponentielle de la famille d'évolution $\mathcal{U}$ 129

Bibliographie 135

Notations 137

Liste des figures

1.1 **Représentation graphique de la fonction f.** 10

3.1 **Déformation du contour d'intégration.** 67

4.1 **Représentation graphique des fonctions particulières de span$\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}$.** 98

6.1 **Représentation graphique des fonctions h_1 et h_2.** 129

Préface

La théorie des équations d'évolution est une branche des Mathématiques très importante. En effet, les équations d'évolution interviennent dans la modélisation d'un très grand nombre de problèmes notamment en physique, mécanique, dynamique des populations et beaucoup d'autres phénomènes qui évoluent dans le temps.

Par une "modélisation", on veut dire un ensemble d'équations (ou d'inéquations) qui, avec des conditions aux limites (exprimées sur les bords du domaine où le phénomène est étudié) et lorsque ce phénomène est évolutif à partir des conditions initiales, permettent de définir l'état du système. Naturellement, la description du modèle est une étape importante mais non décisive. Autrement dit, une étude qualitative ou quantitative est exigée afin de satisfaire certaines conditions préalablement démandées mais aussi pour donner une information plus complète sur le système en question.

L'une des théories qui sont en lien avec les équations d'évolution et qui ont connu un progrès très important durant les dernières décennies est celle de la presque-périodicité. Historiquement parlant, la notion de la presque-périodicité remonte au mathématicien danois **Harald BOHR** [1] (le frère de **Niels BOHR**, le prix Nobel en 1922 pour ses travaux sur la physique atomique).

La presque-périodicité, comme propriété structurelle, est une généralisation de la périodicité pure et les méthodes originales de **H. BOHR** pour établir les résultats fondamentaux de cette théorie ont toujours été basées sur la réduction du problème en un problème lié aux fonctions purement périodiques. Mais quoique l'idée sous-jacente de la méthode de Bohr soit claire et simple, les démonstrations des résultats principaux étaient difficiles et compliquées. Par ailleurs, d'autres méthodes ont été fournies par **Norbert WIENER** [2] et **Hermann WEYL** [3], par qui les résultats étaient obtenus d'une manière plus courte. Mais ces méthodes n'ont pas gardé les propriétés élémentaires des méthodes de Bohr. Cependant, plus tard, le mathématicien belge **Charles-Jean DE LA VALLÉE POUSSIN** [4] a réussi à donner de nouvelles preuves (basées partiellement sur les idées de **H. Weyl**) plus courtes tout en se basant entièrement sur les résultats classiques relatifs aux fonctions périodiques.

Les fonctions presque-périodiques de Bohr sont restreintes à la classe

1. Né le 22 Avril 1887 à Copenhague, Danemark - mort le 22 Janvier 1951 à Copenhague
2. Né le 26 novembre 1894 à Columbia (Missouri), États-Unis, mort le 18 mars 1964 à Stockholm, Suède
3. Né le 9 Novembre 1885 à Elmshorn - mort le 8 Décembre 1955 à Zurich
4. Né à Louvain, le 14 Août 1866- mort le 2 Mars 1962 à Bruxelles

des fonctions uniformément continues. D'autres efforts ont visé, par la suite, à généraliser cette théorie. On en retrouve notammement, les travaux de **Vyacheslav STEPANOV**, **Norbert WIENER**, **Hermann WEYL**, **Abram Samoilovitch BESICOVITCH**[5]et d'autres généralisations ont été établies.

Dans le premier chapitre de cette thèse, on introduit les fonctions presque-périodiques. On présentera quelques résultats liés aux fonctions presque-périodiques au sens de Bohr ainsi qu'au sens de Besicovitch. On introduira, en particulier, les opérateurs de superposition, ou aussi appelés opérateurs de **Nemystkii**[6]. Un nouvelle notion de dérivation, qui trouve ses origines dans les travaux de **Joël BLOT** sera aussi mise en évidence.

Le deuxième chapitre de cette thèse a pour objectif d'établir l'existence d'une solution presque-périodique de Besicovitch pour l'équation différentielle de second ordre suivante :

$$u'(t) + D_1 V(u(t), t) = 0$$

sous certaines hypothèses, notamment, lorsque le potentiel $V(\cdot, t)$ possède une bosse entourée par des cavités. L'idée principale de la démonstration repose sur l'utilisation d'un formalisme variationnel adapté au cas presque-périodique et qui prend ses racines dans les travaux de **J. BLOT**.

Une autre approche pour étudier les équations d'évolution, notamment les linéaires, se base sur la théorie des semi-groupes à un paramètre réel. En effet, la théorie de semi-groupes d'opérateurs linéaires sur des espaces de Banach a débuté dans la première moitié du vingtième siècle et c'est à partir de 1948 que cette théorie a obtenu des remarquables succès particulièrement avec la génération du théorème de Hille-Yosida. Cette théorie a atteint son premier apex avec l'édition de 1957 de *Semigroups and Functional Analysis* par **Carl Einar HILLE**[7] et **Ralph Saul PHILLIPS**[8]. Dans les années 1970 et les années 1980, grâce aux efforts de plusieurs écoles différentes, la théorie a été perfectionnée, ce qui est bien présenté dans les monographies de **Edward Brian DAVIES**, **Jerome (Jerry) Arthur GOLDSTEIN**[9] en 1985, **Amnon PAZY**[10] en 1983 et d'autres.

Des applications diversifiées de cette théorie, non seulement aux domaines traditionnels comme des équations aux dérivées partielles ou des processus stochastiques, caractérisent son utilité. En effet, les semi-groupes sont devenus des outils importants pour les équations différentielles et les équations différentielles fonctionnelles, dans la mécanique quantique ou dans la théorie du contrôle en dimension infinie. Les méthodes de semi-groupe sont également appliquées avec un grand succès au traitement d'équations concrètes, par exemple, dans la dynamique des populations ou la théorie du transport. Il tout à fait naturel, cependant,

5. Né le 23 Janvier 1891 à Berdiansk - mort le 2 Novembre 1970 à Cambridge
6. Viktor Vladimirovich : né le 22 Novembre 1900 à Smolensk mort le 7 Août 1967 à Moscow.
7. Né le 28 Juin 1894 à New York mort le 12 Février 1980 à Califonie
8. Né le 23 Juin 1913 à Californie mort le 23 Novembre 1998 à Californie
9. Né le 5 Août 1941 à Pittsburgh, Pennsylvania -.
10. Né en 1936-mort en 2006

qu'à coté de la théorie des semi-groupes existent des approches alternatives dans tous ces champs.

L'objectif du troisième chapitre de cette thèse est d'exposer quelques résultats concernant la théorie de semi-groupes et de familles d'évolution. De célèbres résultats existants seront mis en relief. Ce chapitre vise à introduire au chapitre suivant qui sera basé sur les semi-groupes et les familles d'évolution. La stabilité exponentielle sera en particulier l'une des propriétes fondamentales étudiée. En effet, divers types de stabilité peuvent être discutés pour les solutions d'équations différentielles décrivant les systèmes dynamiques. Le type le plus important est celui concernant la stabilité de solutions au voisinage d'un point d'équilibre. Ceci peut être interpreté selon la théorie de Lyapunov. En termes simples, si toutes les solutions du système dynamique qui partent près d'un point d'équilibre restent proches de ce point, elles sont alors stables au sens de Lyapunov. D'une manière plus forte, si x_e est Lyapunov-stable et si toutes les solutions qui partent d'un voisinage de la valeur initiale x_e convergent vers x_e, alors x_e est asymptotiquement stable. La notion de stabilité exponentielle garantit un taux minimal de "décrépitude", c'est-à-dire une évaluation de la vitesse de convergence des solutions. Dans la théorie du contrôle, un système linéaire ne dépendant pas du temps est exponentiellement stable si et seulement si les valeurs propres du système sont à partie réelle strictement négative (i.e. dans le demi-plan gauche). Un système exponentiellement stable est alors un système qui n'explose pas (i.e. ne donne pas de sorties infinies au temps infini) lorsqu'on lui infère une entrée finie ou une condition initiale non nulle. Quelques caractérisations de le stabilité exponentielle de systèmes linéaires sont données dans ce chapitre.

Le quatrième chapitre de cette thèse se base sur la théorie des semi-groupes et des familles d'évolution. Plus précisément, si l'on note par $u_{\mu,x,s}(\cdot,0)$ la solution du problème de Cauchy non homogène bien posé défini sur un espace de Banach complexe X

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A(t)u(t) + e^{i\mu t}x, & t > s \\ u(s) = 0, \end{cases}$$

où x est un vecteur donné de X, μ est un nombre réel, q est un nombre réel strictement positif et $A(\cdot)$ est une fonction q-périodique à valeurs opératorielles, sous certaines hypothèses sur la famille d'évolution $\mathcal{U} = \{U(t,s) : t \geq s\}$ engendrée par la famille $(A(t))_t$, on prouve que si pour tout réel μ, pour tout $s \geq 0$ et pour toute vecteur x, la solution $u_{\mu,x,s}(\cdot,0)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par une constante postive ne dépendant que de x, alors la famille d'évolution $\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable. La technique utilisée est basée essentiellement sur la théorie des semi-groupes d'évolution.

L'étude du comportement asymptotique des problèmes de Cauchy a prouvé sa grande utilité, puisque, via cette étude, on peut avoir une information assez complète sur le système dynamique en question. Autrement dit, étant donnée une famille d'évolution $(U(t,s))_{t\geq s}$, une question assez importante qui se pose est la suivante :

comment se comporte $U(t,s)$ lorsque $t-s>0$ devient assez grand ?

Ou, en particulier,

$$\text{la limite } \lim_{t\to\infty} U(t,s) \text{ existe-t-elle dans un certain sens ?}$$

Pour les semi-groupes fortement continus $(T(t))_{t\geq 0}$, une approche possible pouvant répondre à ces questions consiste à décomposer l'espace sous-jacent X en deux sous-espaces de la manière suivante :

$$X = X_R \oplus X_S$$

et le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est découpé en deux parties comme suit :

$$(T(t))_{t\geq 0} = (T_R(t))_{t\geq 0} + (T_S(t))_{t\geq 0},$$

tels que $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X_S (la partie stable) converge (dans un sens précis) vers zéro lorsque t tend vers l'infini alors que $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X_R (la partie réversible) puisse être intérpreté et contrôlé.

L'exemple le plus simple (et sans doute le plus classique) d'une telle décomposition a été fourni par **Lyapunov** [11] en 1899. Cet exemple consiste à contrôler le semi-groupe de la façon suivante

$$\|T_S(t)\| \leq Me^{-\varepsilon t}, \qquad \text{et} \qquad \|T_R^{-1}(t)\| \leq Me^{-\varepsilon t},$$

pour certaines constantes $\varepsilon > 0$ et $M \geq 1$. De tels semi-groupes sont dits **hyperboliques** [12] et peuvent être caractérisés dans de nombreux cas par le fait que les valeurs propres du générateur A ne sont pas purement imaginaires, i.e.

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset.$$

La situation pour les problèmes de Cauchy non autonomes devient beaucoup plus difficile puisque les spectres de $A(t)$ ne peuvent pas à eux seuls déterminer le comportement asymptotique des solutions de ces problèmes [13]. Une approche possible pour surmonter cette difficulté est d'associer un semi-groupe d'évolution $T_{\mathcal{U}}$ à la famille d'évolution $(U(t,s))_{t\geq s}$ provenant du système. Ce semi-groupe d'évolution est généralement défini par $(T_{\mathcal{U}} f)(\cdot) = U(\cdot, \cdot - t)f(\cdot - t)$. Formellement, le générateur de ce semi-groupe est $Gf := -f' + A(\cdot)f$, et par le théorème de l'Application Spectrale (*Spectral Map Theorem*) [14] 9.16, on obtient que la condition $\sigma(G) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ est équivalente à l'hyperbolicité du semi-groupe d'évolution $T_{\mathcal{U}}$, qui est à son tour équivalente à la dichotomie exponentielle de la famille d'évolution.

Le cinquième chapitre de cette thèse introduit brièvement la notion de dichotomie exponentielle qui sera l'objectif du sixième chapitre.

11. Alexandre- : né le 6 Juin 1857 à Iaroslavl - mort le 3 Novembre 1918 à Odessa

12. On peut consulter les chapitres V.1 et VI.9 de "**One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations**", par K.-J. Engel et R. Nagel, édition Springer-Verlag, 2000

13. Voir par exemple *Example 2.5* de "**Semigroup methods for nonautonomous Cauchy problems. Evolution Equations**", R. Nagel, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **168**(p. 301-316), 1995

14. On peut regarder par exemple "**One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations** [Chapter VI, Theorem 9.16]", K.-J. Engel et R. Nagel, édition Springer-Verlag, 2000

Dans le sixième chapitre, on s'intéresse aux problèmes de Cauchy opératoriels suivants

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{X}(t) & = A(t)X(t) + e^{i\mu t}P, \quad X(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n),\ t \in \mathbb{R} \\ X(0) & = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

et

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{Y}(t) & = -Y(t)A(t) + e^{i\mu t}Q, \quad Y(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n),\ t \geq s \\ Y(s) & = 0, \end{array}\right\} \tag{2}$$

où $Q := I - P$.

On se propose, en particulier, d'étudier la dichotomie exponentielle de la famille d'évolution engendrée par le système homogène associé. On prouve, en effet, que cette famille d'évolution admet une dichotomie exponentielle relativement à un projecteur P si et seulement si la solution du premier problème est bornée, uniformément par rapport au paramètre réel μ, et la solution $V_\mu(\cdot)$ du deuxième problème admet une limite dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ lorsque $s \to -\infty$; autrement dit, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{t} e^{i\mu\tau}QU(\tau,t)d\tau$ existe dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, et que

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big\| \int_{-\infty}^{t} e^{i\mu s}QU(s,t)ds \Big\| := M_2 < \infty,$$

où $M_2 > 0$ est une constante réelle absolue.

1 Quelques éléments sur les fonctions presque-périodiques

Ce chapitre est introductif. Il a pour objectif de présenter la notion de fonction presque-périodique (p.p.), ses principales propriétés et de donner certains résultats sur ce type de fonctions. On présente, en outre, la notion de fonction presque-périodique à paramètre qui sera utile pour assurer que les opérateurs de Nemytskii construits sur ces fonctions envoient l'espace des fonctions p.p. dans un espace de fonctions p.p..

Pour plus de détails concernant les résultats cités dans ce chapitre, on peut se référer aux livres de (Besicovitch, 1954), (Bohr, 1947),(Amerio, Prouse, 1971),(Corduneanu, 1989),(Pankov, 1990) et à (Blot, 1996), ainsi qu'à leurs abondantes bibliographies. On renvoie aussi à (Favard, 1933) qui constitue une réference historique pour l'étude des solutions presque-périodiques des équations différentielles. On apprécie également (Corduneanu, 1989) mais aussi (Fink, 1974). Ces deux ouvrages sont très importants dans l'étude de la presque-périodicité et les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles (EDP).

1.1 Définitions et premières propriétés des fonctions presque-périodiques

On se donne un espace de Banach $\mathbb{E}$ muni de la norme $|\cdot|_{\mathbb{E}}$ et un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ pour le produit scalaire $\cdot_{\mathbb{H}}$ dont la norme associée est notée par $|\cdot|_{\mathbb{H}}$.

1.1.1 Espace vectoriel de fonctions presque-périodiques

Définition 1.1 *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ est* presque-périodique (au sens de Bohr) *si elle est continue et elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \ell > 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \exists \tau \in [a, a+\ell],\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x+\tau) - f(x)|_{\mathbb{E}} < \varepsilon$.
   Ici, τ est dit **presque-période** *attachée à ε, et ℓ est dite longueur d'inclusion attachée à ε.*
2. *f vérifie la* **propriété de normalité** *: de toute suite de translatées $(\tau_{h_n} f)_n$, on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$.*
3. *f vérifie la* **propriété d'approximation** *: f est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques, c'est-à-dire qu'il existe une suite double $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ où pour tout n, $(a_{n,p})_{p\in\mathbb{Z}}$ est presque-nulle, telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| f - \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{n,p} e_p \right\|_\infty = 0.$$

   (où $e_p(t) := e^{ipt}$, cf. Notations)

On note $AP^0(\mathbb{E})$ (ou $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$, ou $AP(\mathbb{E})$ ou enfin $AP(\mathbb{R},\mathbb{E})$) l'ensemble des fonctions presque-périodiques de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{E}$.

Remarque 1.1 *On écrira souvent $a_{n,p}$, qui est un vecteur, avant e_p, qui est une fonction à valeurs scalaires (cf. Notations) alors qu'il paraît plus naturel d'écrire la fonction en dernier tout en se rappelant que $a_{n,p}e_p$ désigne en réalité la fonction $t \mapsto e_p(t)a_{n,p}$. Cet abus de notations sera désormais commis !*

Remarque 1.2 *Une famille presque nulle est une famille telle que la sous-famille de ses termes non nuls est finie. En particulier, une suite presque nulle est une suite dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang.*

Exemples

1. Toute fonction périodique est presque-périodique.
2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) := \sin(2\pi x) + \sin(\sqrt{2}\pi x).$$

   La fonction f ainsi introduite est presque-périodique au sens de Bohr. En effet, on choisit τ un entier et $\tau\sqrt{2}$ différent d'un autre entier par moins de $\varepsilon/2\pi$. Alors, il est clair que

$$f(x+\tau) = \sin(2\pi x) + \sin(2\pi x\sqrt{2} + \theta\varepsilon).$$

En vertu du théorème des Accroissements Finis appliqué à la fonction sinus entre $A := 2\pi x\sqrt{2}$ et $B := 2\pi x\sqrt{2} + \theta\varepsilon$, il existe un certain $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$f(B) - f(A) = f'(A + \alpha(B - A)).(B - A),$$

ou encore,

$$\sin(2\pi x\sqrt{2} + \theta\varepsilon) - \sin(2\pi x\sqrt{2}) = \cos(2\pi x\sqrt{2} + \alpha\theta\varepsilon).\theta\varepsilon = \theta'\varepsilon,$$

où $\theta' = \cos(2\pi x\sqrt{2} + \alpha\theta\varepsilon).\theta$ et donc $|\theta'| \leq 1$.
Ceci entraîne que $\sin(2\pi x\sqrt{2} + \theta\varepsilon) = \sin(2\pi x\sqrt{2}) + \theta'\varepsilon$ et donc en revenant à la formule avec f on obtient que $f(x + \tau) = f(x) + \theta'\varepsilon$. Il en résulte que la première assertion de la définition 1.1 est satisfaite. Du point de vue géométrique, on observe l'existence de presque-périodes à partir de l'allure de sa courbe reprśentative donné par la figure 1.1.

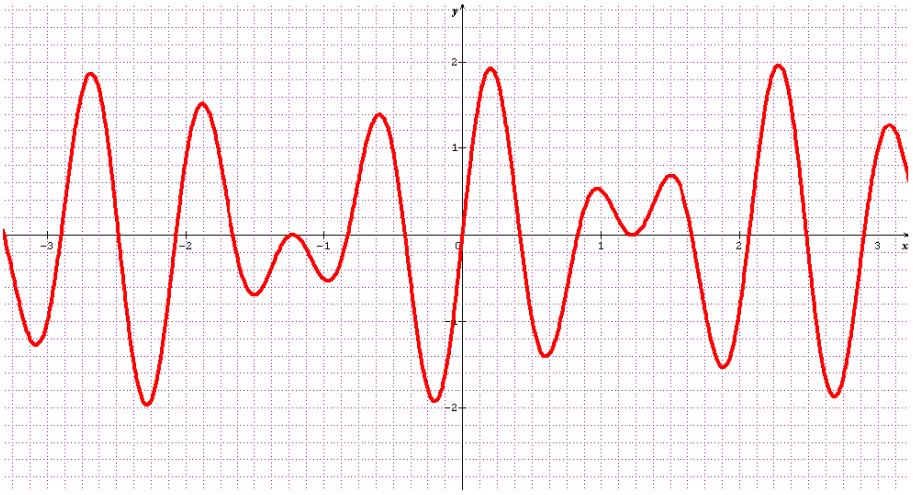


FIGURE 1.1 – **Représentation graphique de la fonction f.**

Le point **3.** de la définition précédente peut être exprimée de la façon suivante :" $AP^0(\mathbb{E})$ est aussi la fermeture pour la norme de la convergence uniforme de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des fonctions continues périodiques." Par conséquent, muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|_{\mathbb{E}}$, $AP^0(\mathbb{E})$ **est en particulier un espace de Banach**.

La proposition suivante expose certaines propriétés des fonctions presque-périodiques. Pour les démonstrations (et plus de détails), on renvoie aux livres (Besicovitch, 1954) et (Corduneanu, 1989) :

Proposition 1.1 *$AP^0(\mathbb{E})$ jouit des propriétés suivantes :*

1. *Tout élément de $AP^0(\mathbb{E})$ est borné, uniformément continu et à image relativement compacte.*
2. *Si $\mathbb{E}_i$, $i = 1,2$ sont deux espaces de Banach, et si $f \in AP^0(\mathbb{E}_1)$ et $F : \mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}_2$ est uniformément continue sur $\overline{f(\mathbb{R})}$, alors $F \circ f \in AP^0(\mathbb{E}_2)$. En particulier, si $f \in AP^0(\mathbb{E})$, alors $[t \mapsto |f(t)|_{\mathbb{E}}] \in AP^0(\mathbb{R})$.*

3. *Si $f \in AP^0(\mathbb{E})$ et $\varphi \in AP^0(\mathbb{K})$, alors : $\varphi.f \in AP^0(\mathbb{E})$.*
4. *Si pour $i = 1, \cdots, p$, $f_i \in AP^0(\mathbb{E}_i)$, $\mathbb{E}_i$ étant un espace de Banach, alors $(f_i)_{1\leq i\leq p} \in AP^0\left(\prod_{1\leq i\leq p} \mathbb{E}_i\right)$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre de translation commun à toutes les fonctions $f_1, \cdots, f_p$.*

Dans le paragraphe suivant, on se propose d'étudier plus profondément l'espace AP^0. On démontrera principalement que toute fonction presque-périodique admet un unique développement en série de Fourier-Bohr. Ce résultat qui peut être vu comme une extension des séries de Fourier des fonctions périodiques de par les propriétés remarquables de la série de Fourier-Bohr permettra de résoudre de nombreux problèmes.

1.1.2 Analyse de Fourier des fonctions presque-périodiques

Proposition 1.2 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{E})$. Alors, la limite suivante existe dans $\mathbb{E}$ et ne dépend pas de $a \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt.$$

Cette limite s'appelle moyenne de *f et se note $\mathcal{M}\{f\}$ ou $\mathcal{M}\{f(t)\}_t$. Elle vérifie de plus la propriété suivante :*

$$\forall A \in \mathbb{E}', \quad A \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} \mathcal{M}\{f\} = \mathcal{M}\left\{A \cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}} f\right\}.$$

Plus généralement, la fonctionnelle $\mathcal{M} : f \mapsto \mathcal{M}(f)$ est une forme linéaire continue de $AP^0(\mathbb{E})$ dans $\mathbb{C}$ et elle satisfait $|\mathcal{M}(f)| \leq \mathcal{M}(\|f\|_{\mathbb{E}}) \leq \|f\|_\infty$.

Remarques 1.1 *Il est important de signaler les aspects suivants :*

1. *L'intégrale considérée est, comme souvent tout au long de cette thèse, l'intégrale d'une fonction à valeurs dans un espace de Banach. Nous supposerons toujours qu'il s'agit d'intégrales au sens de Bochner-Lebesgue, ou intégrales au sens fort (sur ces questions, par exemple, (Lang, 1993)).*
2. *Lorsque f est continue et T-périodique, on a :*

$$\mathcal{M}\{f\} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

3. *On notera souvent $\mathcal{M}_t\{f(t)\}$ pour signifier que la moyenne est calculée par rapport à la variable t.*

Définition 1.2 *Pour $f \in AP^0(\mathbb{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit le coefficient de Fourier-Bohr d'indice λ de f par :*

$$a_\lambda(f) = \mathcal{M}\{e_{-\lambda}.f\},$$

où $e_{-\lambda}$ est l'application $t \mapsto e^{-i\lambda t}$ (cf. Notations)

Remarque 1.3 *Dans le cas où le corps des scalaires sous-jacent est $\mathbb{R}$, il est facile à vérifier les relations supplémentaires suivantes :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad a_{-\lambda}(f) = \overline{a_\lambda(f)}.$$

On peut aussi remarquer que dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'analyse de Fourier est plus simple que dans l'autre cas !

Définition 1.3 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{E})$. On définit le spectre de la fonction f comme l'ensemble :*

$$\Lambda(f) := \{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ a_\lambda(f) \neq 0\}$$

qui est au plus dénombrable.

Proposition 1.3 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{E})$. Alors f est développable en série de Fourier-Bohr :*

$$f \sim \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a_\lambda e_\lambda$$

la convergence ayant lieu en moyenne quadratique (au sens des familles sommables) et $\sim$ est la notation introduite par Hurwitz. De plus, si $\mathbb{E} = \mathbb{H}$ (un espace de Hilbert), l'égalité de Parseval est valide :

$$\mathcal{M}\{|f|^2_{\mathbb{H}}\} = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |a_\lambda|^2_{\mathbb{H}}.$$

Remarques 1.2 *Cette proposition appelle les remarques suivantes.*

1. *On a l'unicité du développement en série de Fourier-Bohr, au sens où si*

$$f \sim \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \alpha_\lambda e_\lambda$$

alors $a_\lambda(f) = \alpha_\lambda$ pour tout λ.

2. *L'espace qui réalise la synthèse harmonique n'est pas $AP^0(\mathbb{H})$ (il sera introduit plus tard).*

Les polynômes de Bochner.
Suivant la méthode de Féjer sur la Césaro-sommabilité des séries de Fourier, Bochner a construit explicitement une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers une fonction presque-périodique donnée. L'exposé suivant reprend celui de (Amerio, Prouse, 1971) (pp.25–29) ; on peut aussi consulter (Corduneanu, 1989), (Theorem 6.15 p.152).
Fixons $f \in AP^0(\mathbb{E})$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, **le noyau de Féjer** :

$$K_n(t) := \sum_{\nu=-n}^{n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right) e^{-i\nu t} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

On se donne également une famille $B = (\beta_k)_{k \in I}$ (I intervalle de $\mathbb{N}$ commençant à 1) $\mathbb{Z}$-libre de sorte que tout élément de $\Lambda(f)$ soit combinaison linéaire à coefficients rationnels d'éléments de B. On définit **le polynôme de Bochner** par :

$$Q^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{n_1 \cdots n_k}(f)(t) := \mathcal{M}\left\{ f(s+t) \prod_{j=1}^{k} K_{n_j}(\alpha_j s) \right\}_s.$$

Lorsque B est infinie, on pose :

$$f_m := Q^{\frac{\beta_1}{m!} \cdots \frac{\beta_m}{m!}}_{(m!)^2 \cdots (m!)^2}(f)$$

et si B est finie de cardinal q, on pose pour $m \geq q$:

$$f_m := Q^{\frac{\beta_1}{m!} \cdots \frac{\beta_q}{m!}}_{(m!)^2 \cdots (m!)^2}(f).$$

Alors on démontre que la suite $(f_m)_m$ converge uniformément vers f.

■

Proposition 1.4 *Soit $(a_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{E}$. Alors la somme suivante :*

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} a_\lambda e_\lambda$$

a un sens et définit une fonction presque-périodique.

Démonstration. La sommabilité d'une famille est équivalente à son absolue sommabilité. Comme $|e_\lambda| = 1$, l'existence de la somme est acquise. On note f la fonction définie par cette somme. Soit $(A_n)_n$ une suite croissante de sous-ensembles finis de $\mathbb{R}$, de réunion $\Lambda(f)$ (cette suite existe car $\Lambda(f)$ est au plus dénombrable). On note alors :

$$x_n = \sum_{\lambda\in A_n} a_\lambda e_\lambda.$$

La suite $(x_n)_n$ est une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f, puisque :

$$\|f - x_n\|_\infty \leq \sum_{\lambda\notin A_n} |a_\lambda|_{\mathbb{E}} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On en déduit que f est presque-périodique.

■

1.1.3 Dérivation et intégration des fonctions presque-périodiques

Lorsqu'une fonction périodique est dérivable, sa dérivée est automatiquement périodique. Pour des fonctions presque-périodiques, ceci n'est pas vrai, puisque rien n'assure que la dérivée soit uniformément continue, ce qui est nécessaire pour être presque-périodique. En fait, un résultat remarquable assure que cette condition est suffisante :

Proposition 1.5 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{E})$ dérivable. Alors la dérivée est presque-périodique si et seulement si elle est uniformément continue.*

On note, pour $k \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$:

$$AP^k(\mathbb{E}) := \{f \in C^k(\mathbb{R},\mathbb{E}) \ : \ \forall j \leq k, f^{(j)} \in AP^0(\mathbb{E})\}.$$

On munit l'espace $AP^k(\mathbb{E})$ de la norme définie par $\|u\|_k := \sum_{j=0}^{j=k} \|u^{(j)}\|_\infty$.

On peut vérifier que l'espace $AP^k(\mathbb{E})$ muni de cette norme est un espace de Banach.

Remarques 1.3

1. *Il est facile de prouver que $\|.\|_k$ est bien une norme sur l'espace $AP^k(\mathbb{E})$.*
2. *L'espace $AP^\infty(\mathbb{E})$ se définit de la même manière. En particulier, il est plus commode d'écrire, que $AP^\infty(\mathbb{E}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} AP^k(\mathbb{E})$. Lorsqu'on munit cet espace de la famille de semi-normes $\{\|\cdot\|_k; k \in \mathbb{N}\}$, on vérifie qu'il s'agit d'un espace de Fréchet (Pankov, 1990).*

Pour une fonction périodique continue, la condition d'être de moyenne nulle assure que les primitives soient presque-périodiques. Pour les fonctions presque-périodiques, cette condition ne suffit pas. Par exemple, si l'on note f la fonction :

$$f := \sum_{n\geq 1} \frac{e_{1/n}}{n^{11/10}},$$

cette fonction est presque-périodique en vertu de la proposition 1.4, et de moyenne nulle en vertu de l'unicité du développement. En revanche, si ses primitives étaient presque-périodiques, leurs développements seraient (à une constante près) :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e_{1/n}}{n^{1/10}}$$

qui n'est pas une fonction presque-périodique en raison de la relation de Parseval et de la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/5}}$.

En effet, la condition de relative compacité de l'image des primitives (qui est nécessaire) n'est pas automatiquement satisfaite. Cependant, la proposition suivante prouve que cette condition est aussi une condition suffisante :

Proposition 1.6 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{E})$ et F une primitive de f. L'une des conditions suivantes assure que les primitives soient presque-périodiques.*

1. *L'image de F est relativement compacte.*
2. *F est bornée et $\mathbb{E}$ est uniformément convexe* [1].

Le premier énoncé est dû à Bochner, le second à Amerio, cf. (Amerio, Prouse, 1971), [Chapitre 4].

1.2 Fonctions presque-périodiques à paramètres

On rappelle, ici, la définition d'une fonction presque-périodique uniformément par rapport à un paramètre ainsi que ses principales propriétés et on démontre l'isomorphisme avec un espace de fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach. Ce type de fonctions joue un rôle très important dans la construction des opérateurs de Nemytskii (dits aussi opérateurs de superposition) dans les différents espaces de fonctions presque-périodiques. Sous certaines hypothèses sur la fonction presque-périodique à paramètres, on peut assurer que les opérateurs correspondant envoient, en réalité, un espace des fonctions p.p. sur un autre espace des fonctions p.p.

1.2.1 Introduction aux fonctions presque-périodiques à paramètres

Préliminaires et outils topologiques :
Soit X un espace de Banach et K une partie de X satisfaisant l'une des deux conditions suivantes :

1. On pourrait regarder (Amerio, Prouse, 1971) p.49 et (Brezis, 1993) p.51. En effet, les espaces uniformément convexes sont réflexifs, à titre d'exemple les espaces ℓ^p et L^p sous la condition $1 < p < +\infty$, de même un espace Hilbert est toujours uniformément convexe.

i. K est compacte.

ii. Il existe une suite exhaustive de compacts, i.e. une suite croissante de compacts non vides $(K_n)_{n\geq 1}$ telle que $K = \bigcup_{n\geq 1} K_n$ et pour tout $n \geq 1$, on ait $K_n \subset \text{Int } K_{n+1}$.

Lorsque K remplit la deuxième condition, on dira que K est **dénombrable à l'infini**. (Un espace topologique est dit dénombrable à l'infini s'il est localement compact et s'il admet un recouvrement dénombrable compact)

Remarque 1.4 *Tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^p$ est dénombrable à l'infini. On peut en effet prendre :*

$$K_n := \{x \in \mathbb{R}^p \quad : \quad d(x, \Omega^c) \geq 1/n \text{ et } |x| \leq n\}.$$

On désignera toujours (cf. Notations) par Y^X l'ensemble des fonctions définies sur X et à valeurs dans Y.
Soit P une partie (sous-entendu non vide) de X. On se donne une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ et on définit l'opérateur de Nemytskii construit sur f de $P^{\mathbb{R}}$ vers $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ comme étant :

$$\forall \varphi \in P^{\mathbb{R}}, \quad \mathcal{N}_f(\varphi) := [t \mapsto f(t, \varphi(t))] \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}.$$

Même si pour tout $\alpha \in P$, la fonction $f(\cdot, \alpha)$ est presque-périodique, l'opérateur de Nemytskii n'associe pas toujours une fonction presque-périodique. Une certaine uniformité par rapport à α sur le choix du l de la définition paraît nécessaire, (cf. (Blot, 1996), (Fink, 1974) mais aussi (Yoshizawa, 1975)). En effet, à titre d'exemple, en dépit de la presque-périodicité de la fonction $t \mapsto \sin(t)$ et celle de la fonction $F(\cdot, t)$ où $F(x, t) = \sin(tx)$, pour tous $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (puisqu'elles sont 2π-périodiques et donc p.p.), la fonction $t \mapsto F(\sin t,\ t)$ ne peut jamais être p.p. par manque d'uniforme continuité (car toute fonction pp est forcément uniformément continue). On retient, pour ce faire et compte tenu de ce qui précède, la définition suivante qui paraîtra plus naturelle du point de vue des espaces fonctionnels.

Définition 1.4 *Soit Q une partie non vide de X et $f \in C^0(\mathbb{R}, Q, \mathbb{E})$. On dit que f est presque-périodique en t, uniformément par rapport à α si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall K \in \mathcal{K}(Q), \exists \ell > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a + \ell[$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\alpha\in K} |f(t + \tau, \alpha) - f(t, \alpha)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon.$$

où $\mathcal{K}(Q)$ est l'ensemble des compacts de Q.
On notera $APU(\mathbb{R}, Q, \mathbb{E})$ la classe des telles fonctions.

Les principales propriétés de ces fonctions sont rassemblées dans (Blot, 1996). Deux de ces propriétés seront données, ici, sans démonstration.
La première propriété indique que cette classe de fonction résout bien le problème préalablement posé.

Proposition 1.7 *Soit Q une partie non vide de X et $f \in APU(\mathbb{R}, Q, \mathbb{E})$, et $\varphi \in AP^0(X)$ telle que $\varphi(\mathbb{R}) \subset Q$. Alors :*

$$[t \mapsto f(t, \varphi(t))] \in AP^0(\mathbb{E}).$$

La proposition suivante cite la deuxième propriété de ces fonctions. Elle découle directement des propriétés des fonctions p.p.

Proposition 1.8 *Tout élément de $APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$ est uniformément continu et borné, lorsque K est compact.*

1.2.2 Fonctions presque-périodiques avec un ensemble de paramètres compact

On suppose ici que K est un compact. Autrement dit, on se restreint à un ensemble des paramètres compact.

On munit $APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$ de la norme :

$$\|f\|_{APU(\mathbb{R},K,\mathbb{E})} := \sup_{(t,\alpha)\in\mathbb{R}\times K} |f(t,\alpha)|_{\mathbb{E}}$$

et on verra immédiatement que, avec cette norme, on obtient un espace de Banach.

La propostion suivante permet de voir $APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$ comme un espace de fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach (via un isomorphisme isométrique).

Proposition 1.9 *Soit K un compact de X. L'application*

$$\Phi_K : APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E}) \to AP^0(C^0(K, \mathbb{E}))$$

définie par :

$$\Phi_K(f) := [t \mapsto f(t, \cdot)]$$

est bien définie et est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach.

Démonstration. Existence de Φ_K.
Soit $f \in APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$. Elle est uniformément continue, donc continue, et donc $f(t, \cdot) \in C^0(K, \mathbb{E})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, comme f est uniformément continue, étant donné $\varepsilon > 0$:

$$\exists \eta > 0, \quad \left[\max\{|t - t'|; |\alpha - \alpha'|\} \leq \eta\right] \Longrightarrow [|f(t,\alpha) - f(t',\alpha')|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon]$$

et en prenant $\alpha' = \alpha$, puis en passant au sup sur α, il vient :

$$(|t - t'| \leq \eta) \Longrightarrow (\|f(t,\cdot) - f(t',\cdot)\|_{C^0(K,\mathbb{E})} \leq \varepsilon).$$

Ainsi, $\Phi_K(f) \in C^0(\mathbb{R}, C^0(K, \mathbb{E}))$. Montrons maintenant qu'elle est presque-périodique. Comme $f \in APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$, par définition, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a + \ell[, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\alpha\in K} |f(t + \tau, \alpha) - f(t, \alpha)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a + \ell[, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t + \tau, \cdot) - f(t, \cdot)\|_{C^0(K,\mathbb{E})} \leq \varepsilon.$$

Finalement Φ_K est bien définie.
Φ_K est linéaire et isométrique (donc injective et continue). Ces deux points sont évidents, le second résultant de :

$$\|\Phi_K(f)\|_{AP^0(C^0(K,\mathbb{E}))} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t,.)\|_{C^0(K,\mathbb{E})} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\alpha\in K} |f(t,\alpha)|_{\mathbb{E}} = \|f\|_{APU(\mathbb{R},K,\mathbb{E})}.$$

Φ_K est surjective (donc bijective, et donc bicontinue puisque isométrique). Soit $\phi \in AP^0(C^0(K,\mathbb{E}))$. Pour alléger, on note ϕ_t au lieu de $\phi(t)$, et c'est alors un élément de $C^0(K,\mathbb{E})$. Le candidat naturel à vérifier $\Phi_K(f) = \phi$ est $f(t,\alpha) := \phi_t(\alpha)$. Il y a juste à vérifier que l'on a bien un élément de $APU(\mathbb{R},K,\mathbb{E})$. Commençons par la continuité. Fixons $(t_0,\alpha_0) \in \mathbb{R}\times K$. On a :

$$|f(t,\alpha) - f(t_0,\alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq |f(t,\alpha) - f(t_0,\alpha)|_{\mathbb{E}} + |f(t_0,\alpha) - f(t_0,\alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq$$

$$\|\phi_t - \phi_{t_0}\|_{C^0(K,\mathbb{E})} + |\phi_{t_0}(\alpha) - \phi_{t_0}(\alpha_0)|_{\mathbb{E}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme ϕ est continue :

$$\exists\delta > 0, \quad (|t - t_0| \leq \delta) \Longrightarrow (\|\phi_t - \phi_{t_0}\|_{C^0(K,\mathbb{E})} \leq \varepsilon/2)$$

et comme ϕ_{t_0} est continue :

$$\exists\delta' > 0, \quad (|\alpha - \alpha_0| \leq \delta') \Longrightarrow (|\phi_{t_0}(\alpha) - \phi_{t_0}(\alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon/2).$$

Finalement, pour $(t,\alpha) \in \mathbb{R}\times K$ suffisamment voisin de (t_0,α_0), on a $|f(t,\alpha) - f(t_0,\alpha_0)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon$, d'où la continuité.
Comme ϕ est presque-périodique, on tire :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\ell > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists\tau \in [a, a+\ell[, \quad \|\phi_{t+\tau} - \phi_t\|_{C^0(K,\mathbb{E})} \leq \varepsilon$$

d'où :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\ell > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists\tau \in [a, a+\ell[, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\alpha\in K} |f(t+\tau,\alpha) - f(t,\alpha)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon.$$

ϕ_K est donc bien surjective. Comme l'espace d'arrivée est un Banach et que Φ_K est bicontinue, $APU(\mathbb{R},K,\mathbb{E})$ est bien un espace de Banach.
Ce qu'il fallait démontré.

■

Il découle, naturellement, de cette proposition que les propriétés générales sur les fonctions presque-périodiques s'étendent, sans problème, à $APU(\mathbb{R},K,\mathbb{E})$. En particulier, le résultat de la densité de polynômes trigonométriques à coefficients continus reste valide et on a par suite :

Proposition 1.10 *Soit $f \in APU(\mathbb{R},K,\mathbb{E})$. Alors il existe une famille d'éléments de $C^0(K,\mathbb{E})$, $(a_\lambda^{(n)})_{(n,\lambda)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}}$, telle que :*

- *pour tout n, $(a_\lambda^{(n)})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est presque-nulle*
- *on ait :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{(t,\alpha)\in\mathbb{R}\times K} \left| f(t,\alpha) - \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} a_\lambda^{(n)}(\alpha) e_\lambda(t) \right|_{\mathbb{E}} = 0.$$

Démonstration.

$\Phi_K(f)$ est approchable par des polynômes trigonométriques à coefficients dans $C^0(K,\mathbb{E})$. Il existe donc une famille $(a_\lambda^{(n)})_{(n,\lambda)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}}$ d'éléments de $C^0(K,\mathbb{E})$ telle que :

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\quad (a_\lambda^{(n)})_{\lambda\in\mathbb{R}} \text{ est presque} - \text{nulle}$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\Phi_K(f)(t,\cdot)-\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}a_\lambda^{(n)}(\cdot)e_\lambda(t)\right\|_{C^0(K,\mathbb{E})}=0.$$

Comme Φ_K est une isométrie, la seconde relation donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{(t,\alpha)\in\mathbb{R}\times K}\left|f(t,\alpha)-\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}a_\lambda^{(n)}(\alpha)e_\lambda(t)\right|_{\mathbb{E}}=0$$

Ce qui donne le résultat.

■

1.2.3 Fonctions presque-périodiques avec un ensemble de paramètres dénombrable à l'infini

On se fixe une fois pour toutes une famille croissante de compacts non vides $(K_n)_{n\geq1}$ telle que $K=\bigcup_n K_n$ et pour tout n, $K_n\subset \text{Int } K_{n+1}$. Ce qui correspond à un ensemble des paramètres dénombrable à l'infini.

Lorsque l'ensemble de paramètres est dénombrable à l'infini, l'espace de fonctions presque-périodiques à paramètres $APU(\mathbb{R},P,\mathbb{E})$ est un espace de Fréchet comme on le verra dans le lemme 1.2 et donc l'ismorphisme établi dans la proposition 1.9 devient un ismorphisme d'espaces de Fréchet (cf. Proposition 1.11).

On commence par un lemme topologique qui sera important dans la suite :

Lemme 1.1 *Soit C un compact de K. Alors il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $C\subset \text{Int}K_n$.*

Preuve. On a $C\subset\bigcup\limits_{n\geq1}K_n$, donc en vertu de l'hypothèse sur la suite de compacts :

$$C\subset\bigcup_{n\geq2}\text{Int } K_n.$$

Mais on a ainsi un recouvrement ouvert de C, donc par Borel-Lebesgue, il existe un entier $n\geq2$ tel que :

$$C\subset\bigcup_{2\leq p\leq n}\text{Int } K_p=\text{Int } K_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

■

On munit $APU(\mathbb{R}, K, \mathbb{E})$ d'une structure d'e.v.t.l.c. (espace vectoriel topologique localement convexe) à base dénombrable filtrante de semi-normes $(p_n)_{n\geq 1}$, où :

$$p_n(f) := \sup_{(t,\alpha)\in\mathbb{R}\times K_n} |f(t,\alpha)|_{\mathbb{E}} = \left\| f_{|_{\mathbb{R}\times K_n}} \right\|_{APU(\mathbb{R},K_n,\mathbb{E})}.$$

On voit immédiatement que cette topologie est séparée.
Rappelons que cette topologie peut aussi être définie par la distance d, où :

$$d(f;g) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}.$$

Lemme 1.2 *$APU(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ est un espace de Fréchet.*

Preuve.

On utilise la structure métrique. Soit $(f_p)_p$ une suite de Cauchy dans $APU(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$ muni de d.
Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists P_0,\ \ \forall p \geq P_0,\ \ \forall q,\ \ d(f_{p+q}; f_p) < \varepsilon.$$

En particulier, ayant fixé un $n \geq 1$ et choisi $\varepsilon < 2^{-n}$, on a :

$$\exists P_0,\ \ \forall p \geq P_0,\ \ \forall q,\ \ \frac{p_n(f_{p+q}-f_p)}{1+p_n(f_{p+q}-f_p)} < \varepsilon$$

donc :

$$\exists P_0,\ \ \forall p \geq P_0,\ \ \forall q,\ \ p_n(f_{p+q}-f_p) < \frac{2^n\varepsilon}{1-2^n\varepsilon}.$$

$(f_{p_{|_{\mathbb{R}\times K_n}}})_p$ est donc de Cauchy dans le Banach $APU(\mathbb{R}, K_n, \mathbb{E})$ donc converge vers un élément $f^{(n)} \in APU(\mathbb{R}, K_n, \mathbb{E})$.
Par unicité de la limite, on a si $m \geq n$, $f^{(m)}_{|_{\mathbb{R}\times K_n}} = f^{(n)}$, donc il est légitime de poser :

$$f(t,\alpha) := f^{(n)}(t,\alpha) \quad \text{si } \alpha \in K_n$$

(il existe un tel K_n en raison de 1.1).
Soit $(t_0, \alpha_0) \in \mathbb{R} \times P$ et n tel que $\alpha_0 \in \mathrm{Int}K_n$. Alors $\mathbb{R} \times \mathrm{Int}K_n$ est un voisinage ouvert de (t_0, α_0) dans $\mathbb{R} \times P$, et sur ce voisinage, f est égale à la fonction continue $f^{(n)}$. On en déduit que f est continue en (t_0, α_0), donc partout.
Soit maintenant K un compact fixé. Par le lemme 1.1, il existe N tel que $K \subset K_N$. Comme $f^{(N)}$ est presque-périodique, on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a; a+\ell[,\ \ \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\alpha\in K_N} |f(t+\tau,\alpha) - f(t,\alpha)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon,$$

donc on a bien :

$$\begin{cases} \forall K \in \mathcal{K}(P),\ \forall \varepsilon > 0, \exists \ell > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a; a+\ell[, \\ \\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \sup\limits_{\alpha\in K} |f(t+\tau,\alpha) - f(t,\alpha)|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Ainsi $f \in APU(\mathbb{R}, P, \mathbb{E})$.

■

De même, on munit $AP^0(C^0(P,\mathbb{E}))$ d'une structure d'e.v.t.l.c. à base dénombrable filtrante de semi-normes $(\pi_n)_{n\geq 1}$, où :

$$\pi_n(f) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t,\cdot)\|_{C^0(P,\mathbb{E})}.$$

On voit que cette topologie est séparée et qu'elle peut aussi être définie par la distance D, où :

$$D(f;g) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{\pi_n(f-g)}{1+\pi_n(f-g)}.$$

On démontrerait d'une manière analogue :

Lemme 1.3 *$AP^0(C^0(P,\mathbb{E}))$ est un espace de Fréchet.*

La proposition suivante expose la version pour les espaces de Fréchet du resultat donné dans la proposition 1.9 :

Proposition 1.11 *L'application $\Phi_P : APU(\mathbb{R},P,\mathbb{E}) \to AP^0(C^0(P,\mathbb{E}))$ définie par :*

$$\Phi_P(f) := [t \longmapsto f(t,\cdot)]$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Fréchet.

Démonstration. Soit $\alpha \in P$, et n un entier tel que $\alpha \in \mathrm{Int}K_n$. On a alors :

$$\Phi_P(f)(t,\alpha) = \Phi_{K_n}(t)(t,\alpha)$$

ce qui justifie l'existence de Φ_P, montre son caractère linéaire et isométrique. Il ne reste qu'à démontrer la surjectivité.
Etant donné $\phi \in AP^0(C^0(P,\mathbb{E}))$, on pose :

$$f(t,\alpha) := \Phi_{K_n}^{-1}(\phi)(t,\alpha)$$

où n est un entier quelconque tel que $\alpha \in \mathrm{Int}K_n$ (la définition de f ne dépend pas du choix de n). Par construction même, pour tout n, $f_{|\mathbb{R}\times K_n} \in APU(\mathbb{R},K_n,\mathbb{E})$, et comme tout compact K s'injecte dans un K_n (cf. 1.1), on peut conclure que $f \in APU(\mathbb{R},P,\mathbb{E})$.
Enfin, le fait que $\Phi_P(f) = \phi$ est immédiat par construction.

■

1.2.4 Opérateurs de Nemytskii

On considère, maintenant, un autre espace de Banach $(Y,\|.\|_Y)$, et une fonction $F : X \times \mathbb{R} \to Y$, qui à chaque couple de variables $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$, associe $F(x,t)$.

Définition 1.5 L'opérateur de Nemytskii *(dit aussi* opérateur de superposition*), construit sur la fonction F, est défini comme suit :*

$$[t \mapsto u(t)] \mapsto [\mathcal{N}_F(u(t),t) := F(u(t),t)]$$

pour toute fonction $u : \mathbb{R} \to X$.

Une question naturelle se pose : "Sous quelles conditions sur F, peut-on affirmer que les images de fonctions presque-périodiques par cet opérateur $\mathcal{N}_F$ sont aussi presque-périodiques ?".

Dans le but de répondre à cette question, on introduit l'espace de fonctions presque-périodiques uniformément par rapport à un paramétre.

Pour des raisons de clarté, on rappelle, ici, la définition d'une fonction f presque-périodique uniformément par rapport à un paramètre.

Définition 1.6 *(Yoshizawa, 1975) Soit $f : X \times \mathbb{R} \to Y$. On dit que f est* presque-périodique uniformément par rapport à un paramètre *si f est déjà continue et si elle satisfait la condition suivante : Pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute partie compacte K dans X, on peut trouver $\ell = \ell(\varepsilon, K)$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $\tau \in [\alpha, \alpha + \ell]$ vérifiant $\|f(x, t + \tau) - f(x, t)\|_Y \leq \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in K$*

L'ensemble de fonctions presque-périodiques uniformément par rapport à un paramètre sera désigné par $APU(X \times \mathbb{R}, Y)$.

Proposition 1.12 *(Blot, Cieutat, N'Guérékata, Pennequin, 2009, Page 45)*

1. *Si l'on se donne une fonction $F \in APU(X \times \mathbb{R}, Y)$, alors l'opérateur $\mathcal{N}_F$ de Nemytskii construit sur F, envoie continûment l'espace $AP^0(\mathbb{R}, X)$ sur l'espace $AP^0(\mathbb{R}, Y)$, autrement dit, $\mathcal{N}_F \in \mathcal{C}^0(AP^0(\mathbb{R}, X); AP^0(\mathbb{R}, Y))$.*
2. *On suppose que $F \in APU(X \times \mathbb{R}, Y)$ telle que la dérivée partielle par rapport à la variable vectorielle x, à savoir $D_x F(x, t)$, existe pour tout $(x, t) \in X \times \mathbb{R}$ et que $D_x F \in APU(X \times \mathbb{R}, \mathcal{L}(X, Y))$. Alors, l'opérateur de Nemytskii construit sur F, $\mathcal{N}_F : AP^0(\mathbb{R}, X) \to AP^0(\mathbb{R}, Y)$ est continûment différentiable sur $AP^0(\mathbb{R}, X)$. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$ et toutes fonctions $u,\ h \in AP^0(\mathbb{R}, X)$, sa différentielle est donnée par $(D\mathcal{N}_F(u).h)(t) = D_x F(u(t), t).h(t)$.*

Démonstration. Pour démontrer ces deux assertions, on utilisera le lemme suivant :

Lemme 1.4 *Soit K une partie compacte de $AP^0(\mathbb{R}, X)$. Alors, l'ensemble*

$$S := \{u(t) : \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in K\}$$

est relativement compact de X

Preuve. Par définition, une partie d'un espace de Banach est dite compacte si et seulement si elle est complète et pour tout réel strictement positif ε, on peut trouver un recouvrement fini de cette partie par des boules de rayon ε.

On considère une partie compacte K de l'espace de Banach $AP^0(\mathbb{R}, X)$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, il existe p fonctions de $AP^0(\mathbb{R}, X)$, qu'on notera $u_1, \cdots, u_p$ telles que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p} \{v \in AP^0(\mathbb{R}, X) \ : \ \|v - u_j\| \leq \varepsilon/2\}.$$

Comme u_j sont presque-périodiques au sens de Bohr, les ensembles $u_j(\mathbb{R})$ sont relativement compacts pour tout $j = 1, \cdots, p$. Il en résulte

que l'ensemble $\cup_{j=1}^{p}\{u_j(t) : \quad t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact de X. Par conséquent, on peut trouver q réels $t_1, \cdot, t_q$ tels que

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{p}\{u_j(t) : \quad t \in \mathbb{R}\}} \subset \bigcup_{j=1}^{p}\bigcup_{i=1}^{q}\{x \in X \ : \ \|x - u_j(t_i)\| \leq \varepsilon/2\}. \tag{1.1}$$

Soit $x \in S$. Il existe alors $v \in K$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $v(t) = x$. Donc, p fonctions $u_1, \cdots, u_p$ de $AP^0(\mathbb{R}, X)$ existent telles que $\|v - u_j\|_\infty \leq \varepsilon/2$. Il s'en suit que $\|v - u_j(t)\| \leq \varepsilon/2$.

En vertu de 1.1, on obtient que

$$\exists k \in \{1, \cdots, p\}, j \in \{1, \cdots, q\} \text{ tels que } \|u_j(t) - u_k(t_i)\|\varepsilon,$$

ce qui entraîne que

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{p} \cup_{i=1}^{q}\{x \in X \ : \ \|x - u_j(t_i)\| \leq \varepsilon\}.$$

Ceci prouve que S est une partie compacte de X, et compte tenu du fait que X est complet, on en déduit que S est relativement compact (Dieudonné 1, 1969, Théorème 1.17.5, page 63)

■

1. Soit $F \in APU(X \times \mathbb{R}, Y)$. Il est alors clair que lorsque $u \in AP^0(\mathbb{R}, X)$, $\mathcal{N}_F(u) \in AP^0(\mathbb{R}, Y)$.

Soit K une partie compacte de $AP^0(\mathbb{R}, X)$, $u \in K$ et $\varepsilon > 0$ fixés. On pose

$$S := \{u(t) : \quad t \in \mathbb{R}, \ u \in K\}.$$

D'après le Lemme précédent, S est relativement compact de X, et donc, $\bar{S}$ est compact de X. Comme $F \in APU(X \times \mathbb{R}, Y)$, par définition, il existe un longueur $l > 0$ telle que tout intervalle de longueur l contienne au moins un nombre τ vérifiant

$$\sup\{\|F(x, s + \tau) - F(x, s)\|_Y : \ s \in \mathbb{R}, x \in S\} \leq \varepsilon/3.$$

Puisque $\bar{S} \times [0, l]$ est un compact, F est uniformément continue sur cet ensemble, ce qui donne qu'il existe $\delta := \delta(\bar{S} \times [0, l]) > 0$ tel que pour tout s_1, s_2 de $[0, l]$ et tous x_1, x_2 de $\bar{S}$ on ait

$$(\|x_1 - x_2\|_X \leq \delta, \ |s_1 - s_2|) \Rightarrow \|F(x_1, s_1) - F(x_2, s_2)\| \leq \varepsilon/3.$$

D'où,

$$(\|x_1 - x_2\|_X \leq \delta \Rightarrow \|F(x_1, s) - F(x_2, s)\| \leq \varepsilon/3, \forall s \in [0, l].$$

Soit $v \in K$ tel que $\|u - v\|_\infty \leq \delta$. D'après les deux inégalités précédentes, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|F(u(t), t) - F(v(t), t)\|_Y \quad \leq \quad & \|F(u(t), t) - F(u(t), t - \tau)\|_Y \\ & + \|F(u(t), t - \tau) - F(v(t), t - \tau)\|_Y \\ & + \|F(v(t), t - \tau) - F(v(t), t)\|_Y \\ \leq \quad & 3.\frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Il en découle que

$$\sup\{\|F(u(t),t)-F(v(t),t)\|_Y : \quad t\in\mathbb{R}\}\leq\varepsilon,$$

ou encore

$$\|\mathcal{N}_F(u)-\mathcal{N}_F(v)\|_\infty\leq\varepsilon.$$

Ainsi est démontré que la restriction de $\mathcal{N}_F$ à tout compact K de $AP^0(\mathbb{R},X)$ est continue tout en sachant que $AP^0(\mathbb{R},X)$ et $AP^0(\mathbb{R},Y)$ sont des espaces de Banach, et par conséquent, $\mathcal{N}_F$ est continu sur $AP^0(\mathbb{R},X)$

2. Soit $F\in APU(X\times\mathbb{R},Y)$ telle que la dérivée partielle par rapport à la variable vectorielle x, $D_xF(x,t)$, existe pour tout $(x,t)\in X\times\mathbb{R}$ et que $D_xF\in APU(X\times\mathbb{R},\mathcal{L}(X,Y))$. D'après la première assertion, $\mathcal{N}_F\in\mathcal{C}^0(AP^0(\mathbb{R},X),AP^0(\mathbb{R},Y))$, et, $\mathcal{N}_{D_xF}\in\mathcal{C}^0(AP^0(\mathbb{R},X),AP^0(\mathbb{R},\mathcal{L}(X,Y))$, où

$$[\mathcal{N}_{D_xF}(u)](t):=D_xF(u(t),t),\text{ pour tout } t\in\mathbb{R}.$$

Si la fonction $h\in AP^0(\mathbb{R},X)$, alors la fonction $t\mapsto D_xF(u(t),h(t))$ est dans $AP^0(\mathbb{R},Y)$ (cf. (Amerio, Prouse, 1971, Chapitre VII page 6 et Chapitre IX page 10)).
On définit L_u l'opérateur linéaire suivant

$$\begin{aligned}L_u: AP^0(\mathbb{R},X) &\to AP^0(\mathbb{R},Y)\\ h &\mapsto L_u.h,\end{aligned}$$

avec $(L_u.h)(t):=D_xF(u(t),t).h(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
Soit $h\in AP^0(\mathbb{R},X)$ telle que $\|h\|_\infty\leq 1$. On a alors

$$\begin{aligned}\|[L_u.h](t)\|_Y &= \|D_xF(u(t),t).h(t)\|_Y\\ &\leq \|D_xF(u(t),t)\|_{\mathcal{L}(Y,Y)}\|h(t)\|_Y\\ &\leq \|\mathcal{N}_{D_xF}\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}}\|D_xF(u(t),t)\|_Y<\infty\end{aligned}$$

puisque la fonction $t\mapsto D_xF(u(t),t)$ est dans $AP^0(\mathbb{R},\mathcal{L}(Y,Y))$ ce qui sous-entend qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$.
Il en découle alors que l'application linéaire L_u est continue sur $AP^0(\mathbb{R},X)$.
En outre, pour $h\in AP^0(\mathbb{R},X)$ telle que $\|h\|_\infty\leq 1$, on a

$$\|[D_xF(u(t),t)-D_xF(v(t),t)].h(t)\|_Y\leq\|\mathcal{N}_{D_xF}(u)-\mathcal{N}_{D_xF}(v)\|_Y.$$

Par conséquent, comme l'applications $\mathcal{N}_{D_xF}(v)$ est continue, on déduit que

$$\begin{aligned}L: AP^0(\mathbb{R},X) &\to \mathcal{L}(AP^0(\mathbb{R},X),AP^0(\mathbb{R},AP^0(\mathbb{R},Y)))\\ u &\mapsto L_u\end{aligned}$$

est continue.

Soit $u, h \in AP^0(\mathbb{R}, X)$ et $\theta \in [0,1]$. La fonction $t \mapsto u(t) + \theta v(t)$ est clairement dans $AP^0(\mathbb{R}, X)$. D'après le théorème de la moyenne, on peut écrire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\|F(u(t)+h(t),t) - F(u(t),t) - D_xF(u(t),t).h(t)\|_Y \\
&\leq \int_0^1 \|[D_xF(u(t)+\theta h(t),t) - D_xF(u(t),t)].h(t)\|_Y d\theta \\
&\leq \int_0^1 \|D_xF(u(t)+\theta h(t),t) - D_xF(u(t),t)\|_Y d\theta \|h\|_\infty \\
&\leq \zeta(h)\|h\|_\infty,
\end{aligned}$$

où $\zeta(h) = \sup\{D_xF(u(t),t) - D_xF(v(t),t)\|_Y;\ v \in AP^0(\mathbb{R}, X),\ \|u - v\|_\infty \leq \|h\|_\infty\}$.
Ainsi est prouvée l'inégalité suivante

$$\|\mathcal{N}_F(u+h) - \mathcal{N}_F(u) - L_u.h\| \leq \|h\|_\infty.\zeta(h).$$

Par passage à la limite lorsque $h \to 0$ dans $AP^0(\mathbb{R}, X)$, et compte tenu du fait que $\lim_{h\to 0} \zeta(h) = 0$, on en conclut que $\mathcal{N}_F$ est Fréchet-différentiable et que pour tout $u \in AP^0(\mathbb{R}, X)$, on a $D\mathcal{N}_F(u).h = L_u.h$
Comme, en outre cette dérivée est continue à la lumière de ce qui précède, on obtient finalement que $\mathcal{N}_F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $AP^0(\mathbb{R}, X)$

■

1.3 Fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch et Espaces de type Sobolev

Il s'agit de construire des espaces jouant un rôle analogue dans le cas presque-périodique à l'espace L^2 et aux espaces de Sobolev.

1.3.1 Espaces de Besicovitch

Définition 1.7 *Soit f une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'espace de Banach X, et p un nombre réel de $[1,\infty)$. On dit que la fonction f est* localement p-intégrable, *ou plus précisément $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, X)$ si pour tout $a \in \mathbb{R}$ la quantité*

$$\int_{-a}^{a} \|f(t)\|_X^p dt := \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-a,a]}(t)\|f(t)\|_X^p dt$$

est finie.

L'espace $L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ est appelé alors l'espace de fonctions localement de puissance p Lebesgue-intégrables à valeurs dans un espace de Hilbert H.

Dans le pragraphe suivant, on expose, globalement, certaines modalités de construction de l'espace de fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch.

Construction de l'espace $B^p(\mathbb{H})$

On considère, à présent, la formule suivante, définie pour $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$, par

$$\overline{\mathcal{M}}\{\|u\|^p\}^{1/p} := \Big(\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_T^T \|u(t)\|^p dt \Big)^{1/p}.$$

On peut vérifier aisément que cette formule définit, par manque d'injectivité, une semi-norme au lieu d'une norme. En effet, on est capable de trouver une fonction u non-nulle (même sur une partie de mesure infinie) tandis que $\overline{\mathcal{M}}\{\|u\|^p dt\}^{1/p} = 0$.

En complétant l'espace $AP^0(\mathbb{H})$ dans l'espace de Lebesgue $L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ par rapport à cette semi-norme, on obtient l'espace $\mathcal{B}^p(\mathbb{H})$. Étant donnée $u \in \mathcal{B}^p(H)$, il existe une suite $(u_n)_n \in (AP^0(\mathbb{H}))^{\mathbb{N}}$ telle que $\overline{\mathcal{M}}\{\|u_n - u\|^p\}^{1/p}$ converge vers zéro.

Par analogie avec les espaces de Lebesgue (de fonctions intégrables), on définit, sur $\mathcal{B}^p(\mathbb{H})$, la relation $\sim_p$ par

$$u \sim_p v \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{M}}\{\|u - v\|^p\} = 0.$$

Il est facile à vérifier que cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathcal{B}^p(\mathbb{H})$. Ce qui permet de définir l'espace quotient, $B^p(H)$, comme étant $B^p(H) := \mathcal{B}^p(\mathbb{H})/\sim_p$, qui reste un espace vectoriel. Sur ce dernier espace, la semi-norme, précédemment introduite, devient une norme et d'où l'obtention d'une structure vectorielle normée $(B^p(\mathbb{H}), \mathcal{M}\{\|.\|^p\}^{1/p})$, où $\mathcal{M}\{\|u\|^p\}^{1/p} := \Big(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_T^T \|u(t)\|^p dt \Big)^{1/p}$.

Remarques 1.4

1. *Sauf mention explicite du contraire, on ne distinguera pas la fonction de sa classe pour la relation d'équivalence $\sim_p$. En réalité, les éléments des espaces quotients $B^p(\mathbb{H})$ sont des classes de fonctions $[f]_p$ définies par l'équivalence : $u \in [f]_p$ si et seulement si $\mathcal{M}\{\|u - f\|^p\} = 0$. Mais, pour alléger l'écriture, on ne fera pas, dans la suite, la distinction entre un répresentant u et sa classe d'équivalence $[f]_p$. Les (classes de) fonctions de B^p sont dites* des fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch *et sur B^p, on peut remplacer* lim sup *par* lim *dans la définition de la semi-norme.*
2. *$B^2(\mathbb{H})$ est parfois noté B^2 quand il n'y a pas de confusion.*

Proposition 1.13 (Inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski) *On a l'inclusion suivante : $B^2(\mathbb{H}) \subset B^1(\mathbb{H})$. De même, l'inégalité $\|u\|_{B^1} \leq \|u\|_{B^2}$ est vérifiée pour toute fonction $u \in B^2(\mathbb{H})$.*

La démonstration de cette inégalité est donnée, par exemple, dans (Besicovitch, 1932, page 69), dans le cas où $\mathbb{H} = \mathbb{C}$, et la démonstration est similaire pour un espace de Hilbert général. En vertu de cette inégalité, on remarque que l'inclusion en découle immédiatement.

Soit $\mathcal{B}^2(\mathbb{E})$ la fermeture de $AP^0(\mathbb{E})$ dans $\mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{E})$ pour la semi-norme $f \mapsto \overline{\mathcal{M}}\{|f|^2\}^{1/2}$. On note $f \sim_2 g$ si $\overline{\mathcal{M}}\{|f - g|^2\} = 0$. Le quotient de $\mathcal{B}^2(\mathbb{E})$ pour cette relation d'équivalence se note $B^2(\mathbb{E})$ et s'appelle l'espace des fonctions presque-périodique au sens de Besicovitch.

Ces espaces sont complets, et si de plus $\mathbb{E} = \mathbb{H}$ (un espace de Hilbert), ce sont des espaces de Hilbert lorsqu'ils sont munis de :

$$< u; v >_{B^2} = \mathcal{M}\{u \cdot_{\mathbb{H}} v\}.$$

On peut bien entendu développer les éléments de ces espaces en série de Fourier-Bohr, et si $\mathbb{E} = \mathbb{H}$, leur développement satisfait l'égalité de Parseval.

Remarques 1.5 *Il est à remarquer que :*

1. *La définition intiale des fonctions presque-périodique au sens de Besiocvitch s'avère très difficile à utiliser compte tenu de son aspect abstrait, en effet, cette défintion affirme que la fonction f, de classe L^p_{loc}, est B^p-presque périodique si à tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un ensemble uniforme d'une façon satisfaisante des nombres E=$\{\tau_i\ ;\ i \in \mathbb{Z}\}$tel que l'on ait :*

$$\forall i \in \mathbb{Z};\ \ \overline{\mathcal{M}_x}\{|f(x+\tau_i) - f(x)|^p\} < \varepsilon^p$$

et

$$\forall c > 0;\ \ \overline{\mathcal{M}}_x\overline{\mathcal{M}}_i\frac{1}{c}\int_x^{x+c} |f(x+\tau_i) - f(x)|^p dx < \varepsilon^p$$

où

$$\overline{\mathcal{M}}_x\{U(x)\} = \limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} U(x)dx$$

et

$$\overline{\mathcal{M}}_i\{U(x)\} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{i=+n} U(x)$$

pour toute fonction U. L'ensemble des nombres réels E est dit uniforme d'une façon satisfaisante *si l'on peut trouver un nombre $\ell > 0$ tel que le rapport entre le nombre maximal $\nu(\ell)$ des termes de E contenus dans un intervalle de longueur ℓ et le nombre minimal $\mu(\ell)$ soit inferieur à 2 i.e. $\nu(\ell) < \mu(\ell)$.*

2. *On relève une analogie formelle entre la construction de l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch et l'espace des fonctions de carré Lebesgue-intégrable.*

Proposition 1.14 *Tout $f \in B^2(\mathbb{E})$ admet un développement en série de Fourier-Bohr :*

$$f \sim_2 \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} a(f;\lambda)e_\lambda$$

et si $\mathbb{E} = \mathbb{H}$, f satisfait la relation de Parseval suivante :

$$\mathcal{M}\{|f|^2_{\mathbb{H}}\} = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} |a(f;\lambda)|^2_{\mathbb{H}}.$$

Encore mieux, le théorème de Riesz-Fisher-Besicovitch suivant montre que ces espaces réalisent en fait la synthèse harmonique, et jouent donc bien un rôle analogue à $L^2(0,T,\mathbb{H})$ pour les fonctions T-périodiques :

Théorème 1.1 **(Riesz-Fisher-Besicovitch)** *L'application suivante est un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert.* $\Phi : B^2(\mathbb{H}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ *défini par :*

$$\Phi(f) := (a(f;\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}.$$

Pour la démonstration de ce théorème, on renvoie à (Besicovitch, 1954), Chapitre 2, où Besicovitch traite le cas $H = \mathbb{C}$, mais la même preuve reste valable pour un espace de Hilbert général.

La section suivante est consacrée à expliciter et décrire une nouvelle notion de dérivation, introduite préalablement par **Blot**, dans ses différents travaux. En s'inspirant de Vo-Khac, il a défini son propre espace $B^{1,2}$ analogue au classique $W^{1,2}$. Cet espace est fréquemment utilisé dans l'étude de différents types d'équations différentielles en utilisant un formalisme variationnel qui prend également son origine dans les travaux de **Blot** et al. (voir par exemple (Blot1, 1991, Ayachi, Blot, 2009)). Ce formalisme variationnel relatif au cas presque-périodique joue un rôle fondamental dans l'étude des solutions presque-périodiques au sens de Besicovitch de ces équations dans le sens qu'il généralise le cas de l'espace de Sobolev classique et les méthodes variationnelles ordinaires.

1.3.2 Espaces de Sobolev-Besicovitch

Auparavant, on définit l'espace $B^{1,2}$, inspiré de l'espace classique de Sobolev $W^{1,2}$ des problèmes aux limites, comme un espace des fonctions presque-périodiques de Besicovitch qui admettent une dérivée généralisée. Cette dérivée généralisée, utilisée par Vo-Khac (Vo-Khac, 1966) pour les fonctions moyennisables, est symbolisée par la lettre ∇.

On considère la famille d'opérateurs $(\tau_r)_{r\in\mathbb{R}}$ définie sur B^2, par $\tau_r u(\cdot) := u(\cdot + r)$. Il est facile de prouver que cette famille constitue un groupe fortement continu d'opérateurs linéaires continus sur B^2, ou plus brièvement, un C^0-groupe d'opérateurs linéaires.

Le générateur infinitésimal de ce groupe sera noté par ∇ et défini selon Vo-Khac par

$$\nabla u := \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}(u(\cdot + \tau) - u(\cdot)).$$

L'opérateur ∇ est linéaire non-borné de B^2, en outre, il est de graphe fermé dans $B^2 \times B^2$.

On dit que $u \in B^2$ est $\mathcal{M}^2$-dérivable si u appartient au domaine de ∇. Dans ce cas, la $\mathcal{M}^2$-dérivée ou la dérivée généralisée est notée $\nabla u \in B^2$.

Notons alors par $B^{1,2}$ l'ensemble de fonctions qui sont $\mathcal{M}^2$-dérivables. Autrement dit, on a

$$B^{1,2}(\mathbb{H}) := \left\{ u \in B^2(\mathbb{H});\ \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}(u(\cdot + \tau) - u(\cdot)),\ \text{existe dans } B^2(\mathbb{H}) \right\}.$$

Lorsqu'on dit que $\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}(u(\cdot + \tau) - u)$ existe dans $B^2(\mathbb{H})$, on veut affirmer, bien entendu, qu'on peut trouver une fonction, qu'on notera simplement ∇u, dans $B^2(\mathbb{H})$ telle que $\lim_{\tau\to 0}(\mathcal{M}_t\{\|\frac{1}{\tau}(u(\cdot + \tau) - u(\cdot)) - \nabla u\|^2\})^{1/2} = 0$. L'espace $B^{1,2}$ ainsi introduit est appelé **espace de Sobolev-Besicovitch**.

Proposition 1.15 Les assertions suivantes sont satisfaites.

1. *Muni du produit scalaire* $(u \mid v)_{B^{1,2}} := (u \mid v)_{B^2} + (\nabla u \mid \nabla v)_{B^2}$, *l'espace* $B^{1,2}(\mathbb{H})$ *est un espace de Hilbert.(Blot 1, 1991), (Blot, 1994)*
2. *Soit k un entier naturel tel que* $1 \leq k \leq \infty$. *Alors* $AP^k(\mathbb{H})$ *est dense dans* $B^{1,2}(\mathbb{H})$.
3. *Soit* $f \in B^{1,2}(\mathbb{H})$ *et* $g \in AP^1(\mathbb{H})$. *Alors* $f \cdot g \in B^{1,2}(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{M}\{\nabla f.g\} = -\mathcal{M}\{f.g^{'}\}$.

Remarque 1.5 *Par itération, on définit d'une façon analogue l'espace* $B^{j,2}(\mathbb{H})$, *lorsque* $j = 2, 3, \cdots$. *Plus particulièrement, on aura besoin plus loin de l'espace* $B^{2,2}(\mathbb{H})$ *des fonctions presque-périodiques de Besicovitch u qui admettent une dérivée généralisée première et une dérivée généralisée seconde, qu'on notera respectivement* ∇u *et* $\nabla^2 u$.

Les propriétés citées dans la proposition précédente ainsi que d'autres propriétés se trouvent, avec leurs démonstrations détaillées dans (Blot 1, 1991) ou (Blot, 1994). Les modifications nécessaires pour généraliser à un espace de Hilbert ont été indiquées par P. Cieutat dans sa thèse (cf. (Cieutat, 1996)).

Signalons sans démonstration les propriétés suivantes (cf. Blot (Blot, 1994)) :

Proposition 1.16 *Les propriétés suivantes sont vraies.*

1. *Si* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$ *et* $r \in \mathbb{R}$, *alors* $\nabla(\tau_r u) \sim_2 \tau_r(\nabla u)$.
2. *Si* $u \in AP^1(\mathbb{E})$, *alors* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$*et* $\nabla u \sim_2 \dot{u}$.
3. *Si* $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, *alors* $AP^k(\mathbb{E})$ *est dense dans* $B^{1,2}(\mathbb{E})$.
4. *Si* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$, *alors* $\mathcal{M}\{\nabla u\} = 0$.
5. *Si* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$, *alors* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $a(\nabla u; \lambda) = i\lambda a(u; \lambda)$.
6. *Si* $u \in AP^0(\mathbb{E}) \cap H^1_{loc}(\mathbb{E})$ *et si* $\dot{u} \in B^2(\mathbb{E})$, *alors* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E})$.
7. *Si* $u \in B^{1,2}(\mathbb{E}')$ *et* $v \in AP^1(\mathbb{E})$, *alors* $u \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} v \in B^{1,2}(\mathbb{R})$, *et :*

$$\nabla(u \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} v) = \nabla u \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} v + u \cdot_{\mathbb{E}' \times \mathbb{E}} \dot{v}.$$

Remarque 1.6 *Le point* **5.** *de la proposition indique que pour dériver une fonction de* $B^{1,2}(\mathbb{E})$, *il suffit de dériver terme à terme la série de Fourier-Bohr.*

On a la propriété essentielle suivante de Blot qui caractérise l'espace $B^{1,2}$ en termes des coefficients de Fourier-Bohr :

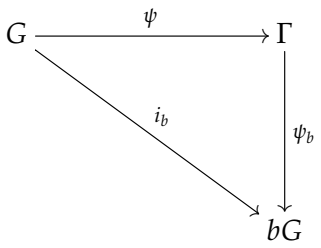
Proposition 1.17 *Soit* $u \in B^2(\mathbb{H})$. *On a la caractérisation suivante :*

$$\Big(u \in B^{1,2}(\mathbb{H})\Big) \Leftrightarrow \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(1 + |\lambda|^2\right) |a_\lambda(u)|^2_{\mathbb{H}} < +\infty\right).$$

La caractéristation donnée paraît un moyen très efficace et très pratique pour démontrer l'appartenance d'une fonction donnée à l'espace $B^{1,2}$, ou encore la $\mathcal{M}^2$-différentiabilité.
On pourrait définir, en partant de cette définition de $B^{1,2}$, canoniquement les espaces $B^{j,2}(\mathbb{E})$ par itération sur j un entier naturel.

1.4 Fonctions presque-périodiques et compactification de Bohr

Définition 1.8 *Soit G un groupe localement compact. On appelle compactifié de Bohr de G, le couple (bG, i_b) où bG est un groupe abélien compact et $i_b : G \to bG$ est un homomorphisme de groupe, tels que pour tout homomorphisme $\psi : G \to \Gamma$ de G dans un groupe abélien compact Γ, il existe un unique homomorphisme $\psi_b : bG \to \Gamma$ tel que $\psi = \psi_b \circ i_b$, C'est-à-dire que le digramme suivant est commutatif :*



De cette définition, on déduit directement les propriétés suivantes :

Proposition 1.18

1) *Le noyau de l'isomorphisme i_b est réduit au élément nul i.e* $\ker(i_b) = \{0\}$ *et l'image de G par i_b, $i_b(G)$ est dense dans bG.*
2) *Le compactifié de Bohr est défini d'une manière unique via un isomorphisme prés.*

La compactification de Bohr permet de carctériser autrement les fonctions presque-périodiques. Pour ce faire, on cite le théorème suivant dont on trouvera une démonstration dans (Pankov, 1990) :

Théorème 1.2 *f appartient à $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ si et seulement si il existe une fonction $\bar{f} \in C^0(b\mathbb{R}, \mathbb{E})$ telle que*

$$f = \bar{f} \circ i_b =: i_b^* \circ \bar{f}$$

(i.e f possède une extension continue sur $b\mathbb{R}$).

Remarque 1.7 *L'extension $\bar{f}$ est unique et satisfait*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|_{\mathbb{E}} = \sup_{s \in b\mathbb{R}} |\bar{f}(s)|_{\mathbb{E}}.$$

La compactification de Bohr permet alors d'identifier l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr à l'espace de fonctions continues sur le compacitfié de Bohr $b\mathbb{R}$ via un ismoporphisme isométrique. En outre, si μ désigne la mesure de Haar normalisée sur $b\mathbb{R}$, on peut voir l'espace de fonctions presque périodiques au sens de Besicovitch $B^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, comme l'espace de fonctions p-ième intégrables $L^p(b\mathbb{R})$ par rapport à μ. Ce qui sous-entend que pour tout $1 < p < +\infty$, on a

$$\|f\|_p = \begin{cases} \Big(\int_{b\mathbb{R}} |\bar{f}(t)|_{\mathbb{E}}^p d\mu(t) \Big)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \\ \sup ess |\bar{f}(t)|_{\mathbb{E}} & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

Remarques 1.6 *On en déduit immédiatement, par les propriétés des espaces L^p, que :*

1). *Les espaces de Besicovitch $B^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ sont des espaces de Banach pour les normes $\|f\|_p$ définies précédemment.*

2). *l'espace $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ s'injecte continûment dans $B^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et on a une inclusion dense $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}) \subset B^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$.*

3). *L'espace particulier $B^2(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant :*

$$(u,v)_{B^2} := \mathcal{M}(u,v) = \int_{b\mathbb{R}} (u(t),v(t))dt$$

où $(.,.)$ est la dualité entre $\mathbb{E}'$ et $\mathbb{E}$.

Commentaire :

Une autre construction de l'espace de fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch est possible à l'aide de la compactification de Bohr. Plus exactement, on s'est aperçu que l'espace $B^2(\mathbb{H})$ peut également être considéré comme l'espace de fonctions de carrés intégrables sur le compactifié de Bohr par rapport à la mesure de Haar. Autrement dit, on a, à un ismorphisme prés, $B^2(\mathbb{R},\mathbb{H}) \cong L^2(b\mathbb{R},\mathbb{H},\mu)$ où μ est la mesure de haar normalisée sur le compactifié de Bohr $b\mathbb{R}$. Pour plus de détails sur ces notions, on se réfère à (Pankov, 1990, Rudin, 1962, Weil, 1940). De ce fait, il est tout à fait logique que l'espace de Besicovitch possède des propriétés similaires à celles de l'espace de Lebesgue, comme indiqué dans ce qui précède.

La notion de la presque-périodicité s'étend aux distributions, ce qui lui confère une importance encore plus grande. On s'intéresse au paragraphe suivant aux particularités de telles distributions. On renvoie à (Schwartz, 1957) et (Schwartz, 1966) pour plus de détails.

1.5 Distributions presque-périodiques

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.9 *Soit f une fonction définie sur Ω. On appelle le support de la fonction f, qu'on notera $supp(f)$, l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels la fonction ne s'annule pas. Autrement dit,*

$$supp(f) := \overline{\{x \in X \ : f(x) \neq 0\}}.$$

On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables à support compact. Il est facile de vérifier que $\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, on omet Ω.

Notation : Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha := (\alpha_1,\cdots,\alpha_n), \alpha_j \in \mathbb{N}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, on utilisera la notation suivante :

$$\begin{aligned} D^\alpha\phi &:= \phi, \text{ si } \alpha = (0,\cdots,0) \\ D^\alpha\phi &:= \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}, \text{ sinon.} \end{aligned}$$

avec $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ désigne la longueur de α.

Définition 1.10 *Soit $(\phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On dit que (ϕ_p) converge au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Il existe un ensemble compact K fixe, indépendant de p, avec $K \subset \Omega$ tel que $supp(\phi) \subset \Omega$, pour tout entier p et $supp(\phi) \subset K$.*
2. *Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $(D^\alpha \phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $D^\alpha\phi$, c'est-à-dire que*

$$\sup_{x\in K} \left| D^\alpha \phi_p(x) - D^\alpha \phi(x) \right| \to 0, \text{lorsque } p \to +\infty.$$

Définition 1.11 *On appelle distribution sur Ω toute application linéaire et continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une application $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une distribution sur Ω si elle satisfait les deux conditions suivantes :*

1. *T est linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.*
2. *Pour toute suite $(\phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers zéro au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$, on a $T(\phi_p)$ converge vers zéro dans $\mathbb{R}$ (continuité).*

On appelle le dual topologique de $\mathcal{D}$, noté par $\mathcal{D}'$ l'ensemble des distributions.

D'une manière analogue, on note par $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables qui sont bornées et $\mathcal{B}'$ son dual qui rassemble les distributions dites également bornées.

Définition 1.12 *Une fonction $\phi \in \mathcal{B}$ est dite presque-périodique si l'ensemble des translatées de ϕ défini par $\{\tau_a(\phi) = \phi(\cdot + a); a \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans $\mathcal{B}$. Ceci est équivalent à dire que ϕ et toutes ses dérivées sont des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr.*

On note $\mathcal{B}_{pp}$ l'ensemble de ces fonctions. $\mathcal{B}_{pp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}$.

Définition 1.13 *Soit $T \in \mathcal{B}'$. On dit que T est une distribution presque-périodique si l'ensemble de ses translatées $\tau_a(T)$ est relativement compact dans $\mathcal{B}'$. On rappelle que $\tau_a(T)$ est défini pour une fonction test u par $\tau_a(T) : u \mapsto Tu(\cdot + a)$.*
En d'autres termes, une distribution T est presque-périodique dans $\mathcal{B}'$ si la fonction $a \mapsto \tau_a(T)$ est presque-périodique au sens de Bohr de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{D}'$.

Ceci permet de remarquer que l'espace $\mathcal{B}'_{pp}$ des distributions presque-périodiques est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}'$.

La dérivée d'une fonction $f \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas forcément une fonction presque-périodique. Cependant, cette dérivée répresente une distribution presque-périodique. Mieux encore, on a le resultat suivant dont on trouvera une démonstration dans (Schwartz, 1957), Chapitre VI, paragraphe 9 :

Théorème 1.3 *Soit T une distribution de $\mathcal{D}'$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1). $T \in \mathcal{B}'_{pp}$.

2). T est une somme finie de dérivées de fonctions presque-périodiques au sens usuel de Bohr.

Propriétés 1.1

1). L'opérateur de la moyenne $\mathcal{M} : AP^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *se prolonge d'une manière unique et continûment à l'espace* $\mathcal{B}'_{pp}$.

2). Toute distribution presque-périodique est développable en série de Fourier-Bohr dont les coefficients de Fourier sont définies, comme pour les fonctions pp, par

$$a(T,\lambda) := \mathcal{M}\{e^{-i\lambda t}T\}.$$

3). Le module de fréquence, à savoir l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R}; a(T,\lambda) \neq 0\}$ *est au plus dénombrable.*

*4). (***Unicité***) L'unique distribution T dont tous les coefficients de Fourier-Bohr sont nuls est la distribution nulle.*

5). Si $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, *alors* $\mathcal{M}(\mathcal{D}T) = 0$ *ou* $\mathcal{D}$ *est la dérivée au sens de distibutions.*

6). Pour tout $T \in \mathcal{B}'_{pp}$ *et* $\phi \in AP^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *on a le resultat important suivant :*

$$\mathcal{M}\{\phi.\mathcal{D}T\} = -\mathcal{M}\{\mathcal{D}\phi.T\}.$$

Bibliographie

[Amerio, Prouse, 1971] L. Amerio, G. Prouse, **Almost Periodic Functions and Functional Equations**, van Nostrand Reinhold Company, 1971. (Cité pages 7, 12, 14 et 23.)

[Besicovitch, 1954] A.S. Besicovitch, **Almost Periodic Functions**, Cambridge University Press, Cambridge 1932 (Dover, 1954). (Cité pages 7, 10 et 27.)

[Blot, 1988] J. Blot, Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.134, n^{o}2, 1988, pp.312-321.

[Blot1, 1989] J. Blot, Lagrange Multipliers in Variational Problems in Mean, Optimization (Mathematische Operations-Forschung und Statistik), vol.20, n^{o}1, 1989, pp.15-25.

[Blot2, 1989] J. Blot, Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians II, Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol.40, n^{o}3, 1989, pp.457-463.

[Blot3, 1989] J. Blot, Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians III, Israel Journal of Mathematics, vol.67, n^{o}3, 1989, pp.337-344.

[Blot, 1990] J. Blot, Trajectoires presque-périodiques des systèmes lagrangiens convexes, Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 310, Série I, 1990, pp.761-763.

[Blot1, 1991] J. Blot, Une méthode Hilbertienne pour les trajectoires presque-périodiques, Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 313, Série I, 1991, pp.487-490. (Cité page 27.)

[Blot3, 1991] J. Blot, Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians IV, Ricerche di Mathematica, vol.XL, n^{o}1, 1991, pp.3-18.

[Blot4, 1991] J. Blot, Almost periodic solutions of forced second order hamiltonian systems, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. XIII, n^{o}3, 1991, pp.351-363.

[Blot1, 1993] J. Blot, Almost Periodic Forced Pendulum, Funkcialaj Ekvacioj, vol.36, n^{o}2, 1993, pp.235-250.

[Blot, 1994] J. Blot, Oscillations presque-périodiques forcées d'équations d'Euler-Lagrange, Bulletin de la Société Mathématique de France, vol.122, 1994, pp.285-304. (Cité page 28.)

[Blot, 1996] J. Blot, Variational Methods for the Almost Periodic Lagrangian Oscillations, cahiers Eco et Maths n^o 96.44, 1996. (Cité pages 7 et 15.)

[Blot, Cieutat, N'Guérékata, Pennequin, 2009] J. Blot, P. Cieutat, G.M. N'Guérékata & D. Pennequin, Superposition operators between various almost periodic function spaces and applications, Communications in Mathematical Analysis **6**(1) 2009, 42-70. (Cité page 21.)

[Bohr, 1947] H. Bohr, **Almost Periodic Functions**, Julius Springer, Berlin, 1933 (Chelsea Publishing Company, N.Y., 1947). (Cité page 7.)

[Bourbaki, 1971] N. Bourbaki, **Topologie Générale**, Chapitres 1–4, Hermann, Paris, 1971.

[Brezis, 1993] H. Brezis, **Analyse Fonctionnelle**, Masson, Paris, 1993. (Cité page 14.)

[Broer, Huitemag, Sevryuk, 1996] H.W. Broer, B. Huitemag, M.B. Sevryuk, **Quasi-Periodic Motions in families of Dynamical Systems**, Lecture Notes in Mathematics, n^{o}1645, Springer, Berlin, 1996.

[Choquet, 1973] G. Choquet, **Topologie**, Masson, Paris, 1973.

[Chou, 1983] C.C. Chou, **Séries de Fourier et théorie des distributions**, Editions scientifiques, Science Press, Beijing, 1983.

[Cieutat, 1996] P. Cieutat, **Solutions presque-périodiques d'équations d'évolution et de systèmes différentiels non linéaires**, Thèse de Doctorat de Mathématiques, Université de Paris 1, 1996. (Cité page 28.)

[Corduneanu, 1989] C. Corduneanu, **Almost Periodic Functions**, Chelsea, 1989. (Cité pages 7, 10 et 12.)

[Dieudonné 1, 1969] J. Dieudonné, **Eléments d'analyse**, Tome 1 : fondements de l'analyse moderne, Gauthier-Villars, Paris, 1969. (Cité page 22.)

[Dieudonné 2, 1969] J. Dieudonné, **Eléments d'analyse**, tome 2, Gauthiers-Villars, Paris, 1969.

[Dieudonné 8, 1978] J. Dieudonné, **Eléments d'analyse**, tome 8, Gauthiers-Villars, Paris, 1978.

[Dieudonné 9, 1982] J. Dieudonné, **Eléments d'analyse**, tome 9, Gauthiers-Villars, Paris, 1982.

[Dhombres , 1985] J. Dhombres, **Moyennes**, *in* Espaces de Marcinkiewicz, Corrélations, Mesures, Systèmes Dynamiques, J. BASS Ed., Masson, Paris, 1985.

[Dunford, Schwartz, 1962] N. Dunford, J.T. Schwartz, **Linear Operators**, tome 1, Interscience Publishers Inc., NY, 1962.

[Evans, Gariepy, 1992] L.C. Evans, R.F. Gariepy, **Measure Theory and Fine Properties of Functions**, CRC Press, 1992.

[Favard, 1933] J. Favard, **Leçons sur les fonctions presque-périodiques**, Gauthiers-Villars, Paris, 1933. (Cité page 7.)

[Fink, 1974] A.M. Fink, **Almost Periodic Differential Equations**, Lectures Notes in Mathematics n^{o}377, Springer-Verlag, Berlin, 1974. (Cité pages 7 et 15.)

[Flett, 1980] T.M. Flett, **Differential Analysis : Differentiation, Differential Equations and Differential Inequalities**, Cambridge University Press, 1980.

[Lang, 1971] S. Lang, **Algebra**, Addison-Wiley, 1971.

[Lang, 1993] S. Lang, **Real and Functional Analysis**, Springer Verlag, N.Y., 1993. (Cité page 11.)

[Levitan, Zhikov, 1982] B.M. Levitan, V.V. Zhikov, **Almost periodic functions and differential equations**, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[Pankov, 1990] A.A. Pankov, **Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operators Differential Equations**, Kluwer Academic Publishers, 1990. (Cité pages 7, 29 et 30.)

[Rudin, 1962] W. Rudin, **Fourier Analysis on Groups**, Interscience Publishers, N.Y., 1962. (Cité page 30.)

[Schwartz, 1957] L. Schwartz, Distributions à valeurs vectorielles, Annales de l'Institut Fourier, tome 7, pp.1–141, 1957. (Cité pages 30 et 31.)

[Schwartz, 1966] L. Schwartz, **Théorie des distributions**, Hermann, Paris, 1966. (Cité page 30.)

[Vo-Khac, 1966] K. Vo-Khac, Étude des fonctions quasi-stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles, Mémoire n°6 du Bulletin de la Société Mathématique de France, 1966. (Cité page 27.)

[Vo-Khac, 1971] K. Vo-Khac, **Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles**, tome 1, Vuibert, Paris, 1971.

[Vo-Khac, 1972] K. Vo-Khac, **Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles**, tome 2, Vuibert, Paris, 1972.

[Weil, 1940] A. Weil, **L'intégration dans les Groupes Topologiques**, Hermann, Paris, 1940. (Cité page 30.)

[Yoshizawa, 1975] T. Yoshizawa, **Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions**, Springer-Verlag, N.Y., 1975. (Cité pages 15 et 21.)

Bosses et Oscillations presque-périodiques

2

Dans ce chapitre, on considère un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ et une fonction $V : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable par rapport à sa variable vectorielle et presque-périodique par rapport à sa variable réelle. On se propose alors d'étudier le problème d'existence de solutions presque-périodiques de l'équation différentielle de second ordre suivante :

$$u''(t) + D_1 V(u(t), t) = 0,$$

où $D_1 V$ désigne la différentielle partielle de V par rapport à la première variable vectorielle de la fonction V.

Sous certaines hypothèses, on établira l'existence d'une solution presque-périodique au sens de Besicovitch de ce problème lorsque le graphe du potentiel $V(\cdot, t)$ peut être vu comme "des douves" qui entourent "une montagne".

Pour ce faire, on utilisera un formalisme variationnel sur un espace de fonctions presque-périodiques de Besicovitch par l'intermédiaire de la fonctionnelle

$$J(u) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big(\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 - V(u(t), t)\Big) dt,$$

où ∇u est la dérivée généralisée de u (cf. Chapitre 1.).

En premier lieu, on explicitera les éléments nécessaires dans la section 2.1 de ce chapitre. Ensuite, on présentera les hypothèses utiles (cf. section 2.2) au résultat principal dans la section 2.3. Des lemmes seront à la base de la démonstration de ce résultat. On les prouvera dans la section 6.1. Finalement, on démontrera le théorème d'existence 2.5 à l'aide de ces lemmes.

Le pragraphe suivant a pour objectif d'expliciter quelques notations qui seront, pour l'instant, exclusivement utilisées dans ce chapitre.

2.1 Notations

Dans ce court paragraphe, on introduit les notations realtives à ce chapitre.
Lorsque E est un sous-ensemble non vide de l'espace $\mathbb{H}$, on adoptera, dans tout ce chapitre, les notations suivantes :

1. $AP^0(E) := \{u \in AP^0(\mathbb{H}) : u(\mathbb{R}) \subset E\}$, c'est-à-dire que $AP^0(E)$ est le sous-espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr qui prennent leurs valeurs dans E.
2. $AP^k(E) := AP^k(\mathbb{H}) \cap AP^0(E)$. Autrement dit, les fonctions presque-périodiques de Bohr à valeurs dans E qui sont k-fois continûment différentiables et dont les k-dérivées sont également Bohr-presque-périodiques constituent l'espace $AP^k(E)$.
3. $B^2(E)$ désigne le fermeture de $AP^0(E)$ dans $B^2(\mathbb{H})$, i.e
$$B^2(E) := \overline{AP^0(E)}^{B^2(\mathbb{H})}.$$
4. $B^{1,2}(E)$ est la fermeture de $AP^1(E)$ dans $B^{1,2}(\mathbb{H})$, i.e
$$B^{1,2}(E) := \overline{AP^1(E)}^{B^{1,2}(\mathbb{H})}.$$

2.2 Présentation du problème

2.2.1 Introduction

On s'intéresse à l'étude d'un type particulier d'équations différentielles définies sur un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. Il s'agit, principalement, d'établir l'existence de solutions presque-périodiques de Besicovitch de l'équation différentielle suivante

$$u''(t) + D_1V(u(t), t) = 0 \tag{2.1}$$

lorsque le potentiel $V(\cdot, t)$ admet une bosse entourée d'une cavité.
Ici, $V : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction qui est différentiable par rapport à sa première variable vectorielle et est presque-périodique par rapport à sa deuxième variable réelle. La notation D_1V désigne la différentielle de V par rapport à sa première variable vectorielle.

Cette équation est une généralisation à la dimension infinie de l'équation du pendule.

Les éléments nécessaires pour la compréhension de ce chapitre étant explicités, notre approche pour étudier l'équation 2.1 se base sur des méthodes variationnelles relatives au cas presque-périodiques appliquées sur l'espace de Hilbert de fonctions presque-périodiques de Besicovitch.

Remarque 2.1 *Les résultats présentés dans la suite de ce chapitre sont des résultats originiaux initialement publiés dans l'article (Blot, Lassoued, 2011).*

On rappelle, ci-dessous, la définition d'**une solution presque-périodique de Besicovitch** dite **solution presque-périodique faible**.

2.2.2 Définition

Une solution presque-périodique faible (ou de Besicovitch) de 2.1 est une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ qui est presque-périodique au sens de Besicovitch (Blot, 1994) et qui possède une dérivée généralisée première et une dérivée généralisée seconde. De plus, l'égalité dans 2.1 signifie que la différence entre les deux membres est de moyenne quadratique nulle.

2.2.3 Hypothèses

On rappelle, ici, les définitions suivantes :

Remarques 2.1

1. *Une partie $A \subset \mathbb{H}$ est dite convexe si pour tout scalaire λ de $(0,1)$ et tous vecteurs a, b de A, l'élement $\lambda a + (1-\lambda)b$ reste également dans A.*
2. *Une fonction h est dite concave sur la partie convexe A si pour tout réel $\lambda \in (0,1)$ et tous vecteurs $x, y \in A$, on a $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$.*
3. *On assimilera le dual topologique de l'espace de Hilbert $\mathbb{H}^* := \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$, à savoir l'ensemble de formes linéaires continues définies sur $\mathbb{H}$, à l'espace $\mathbb{H}$ lui-même, i.e. $\mathbb{H}^* \cong \mathbb{H}$.*

L'objectif est alors de prouver l'existence de solutions presque-périodiques sur l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$ de l'équation différentielle de second-ordre suivante

$$u''(t) + D_1 V(u(t), t) = 0.$$

On aura besoin, dans la suite, de quelques hypothèses qui portent essentiellement sur l'espace $\mathbb{H}$ mais aussi sur le potentiel, ou la fonction, V.

En premier lieu, on suppose que l'on peut trouver un sous-ensemble, qu'on notera S, de $\mathbb{H}$ tel que

$$S \text{ est non vide convexe, fermé, et borné.} \tag{2.2}$$

Comme l'opérateur de Nemytskii sera utilisé, on aura aussi besoin de l'hypothèse suivante qui porte, bien évidemment, sur la fonction V

$$V \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \tag{2.3}$$

Ce qui signifie que V est supposée presque-périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément par rapport au paramètre $x \in \mathbb{H}$ dans le sens de Yoshizawa. On peut se référer par exemple à (Blot, Cieutat, N'Guérékata, Pennequin, 2009, page 45).

$$\text{Pour tout } (x,t) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}, D_1 V(x,t) \text{ existe, et } D_1 V \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^*). \tag{2.4}$$

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, V(\cdot, t) \text{ est concave sur } S. \tag{2.5}$$

L'ensemble non vide S étant borné, on posera $R_0 := \sup_{x\in S} \|x\|$, qui est, bien sûr, un réel strictement positif. On suppose, alors, vraie l'hypothèse suivante :

$$\left.\begin{array}{c} \text{Il existe } R \in (R_0, \infty) \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}, \\ \\ \forall x \in S, \forall y \in B(0,R) \setminus S, V(x,t) \geq V(y,t) \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

Cette dernière hypothèse se traduit géometriquement de la manière suivante : Le graphe du potentiel $V(\cdot, t)$ peut être vu comme une montagne sur S et la partie de ce graphe sur la boule ouverte $B(0,R)$ en déhors de S peut être regardée comme les douves qui entourent cette montagne.

Cette hypothèse permet d'éviter une condition de coercivité sur la fonctionnelle dont on cherchera les points critiques.

L'approche utilisée est fondée sur l'utilisation des méthodes variationnelles sur l'espace de fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch par l'intermédiaire de la fonctionnelle J définie par

$$\begin{aligned} J(u) &:= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big(\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 - V(u(t),t)\Big) dt \\ &= \mathcal{M}_t\Big\{\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 - V(u(t),t)\Big\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Avant d'exposer le théorème principal, on aura besoin de supposer les trois conditions suivantes :

$$\text{Il existe } c > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{H}, \forall t \in \mathbb{R}, |V(x,t) - V(y,t)| \leq c.\|x-y\|. \tag{2.8}$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{Il existe } c_1 > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{H}, \forall t \in \mathbb{R}, \\ \\ \|D_1 V(x,t) - D_1 V(y,t)\| \leq c_1.\|x-y\|. \end{array}\right\} \tag{2.9}$$

$$V \text{ est bornée sur } S \times \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Partant du principe variationnel, l'idée consiste à minimiser la fonctionnelle J sur un sous-espace de fonctions à valeurs dans S. Grâce aux " douves " se trouvant autour de S, on vise à prouver que ce minimum obtenu est aussi un point critique de J sur l'espace de toutes les fonctions prenant leurs valeurs dans un ouvert contenant S, ce qui évitera la présence de multiplicateurs dans l'équation d'Euler-Lagrange. Une fois ce minimum determiné, on déduira qu'il s'agit , en réalité, d'une solution presque-périodique de Besicovitch.

Les hypothèses necessaires étant introduites, on est en mesure d'exposer le résultat principal de ce chapitre. C'est, en effet, un résultat d'existence d'une solution presque-périodique de Besicovitch du problème en question.

2.3 Théorème d'existence

Maintenant, on énonce le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses (2.2-2.6) et (3.1-2.10), l'équation (2.1) admet une solution presque-périodique de Besicovitch, i.e. il existe $u_* \in B^{1,2}(S)$ satisfaisant $\nabla^2 u_*(t) + D_1V(u_*(t), t) = 0$ (avec égalité dans $B^2(\mathbb{H})$).*

Puisque V dépend de t, on n'est pas assuré de l'existence d'une solution triviale constante.

Sachant que toute fonction concave de classe $\mathcal{C}^1$ est faiblement semi-continue supérieurement, lorsqu'on se place dans le cas où les hypothèses (2.5-2.6) et (2.10) sont bien réalisées pour n'importe quel réel t, on obtient l'existence d'un certain vecteur de S qu'on notera $x_*(t)$. Ce vecteur vérifie bien l'inégalité $V(x_*(t), t) \geq V(y, t)$ pour tout vecteur y de la boule ouverte $B(0, R)$. Il s'ensuit immédiatement que $D_1V(x_*(t), t) = 0$. Mais, puisque la fonction $t \mapsto x_*(t)$ n'est pas obligée d'être constante, on constate directement qu'on n'a pas forcément l'existence d'un vecteur constant $\overline{x}$ de l'ensemble S qui soit une solution de l'équation de départ (2.1).

P. Cieutat a établi dans le Théorème 1.1 de son papier (Cieutat, 2003) un résultat d'existence d'une solution presque-périodique au sens de Bohr d'une équation différentielle de second ordre sur un sous-ensemble compact d'un espace de dimension finie. Ici, on n'a pas cette compacité car la dimension de $\mathbb{H}$ est infinie.

Pour démontrer le théorème 2.1, on établit dans un premier temps des lemmes qui seront utiles à cette démonstration. Ils donnent principalement des résutats liés à la fonctionnelle J ainsi qu'à l'espace $B^{1,2}$, le cadre du résultat.

2.4 Lemmes

Dans la suite, on suppose que les hypothèses (2.2-2.6) et (3.1-2.10), introduites dans ce qui précède, sont toutes bien vérifiées.

Lemme 2.1 Les assertions suivantes sont vraies.

1. *$J \in C^1(B^{1,2}(\mathbb{H}), \mathbb{R})$ et $DJ(u).h = (\nabla u \mid \nabla h)_{B^2} - (D_1V(u(\cdot), \cdot) \mid h)_{B^2}$ pour toutes fonctions $u, h \in B^{1,2}(\mathbb{H})$.*
2. *$B^{1,2}(S)$ est un ensemble convexe, en outre il est fermé dans $B^{1,2}(\mathbb{H})$. La fonctionnelle J est convexe sur $B^{1,2}(S)$.*
3. *La fonctionnelle J est faiblement semi-continue inférieurement sur $B^{1,2}(S)$.*

Preuve.

1. Montrons que la fonction J est continûment différentiable sur $B^{1,2}(\mathbb{H})$.

Puisque $V \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ (2.3) et que $D_1V \in APU(\mathbb{H} \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^*)$ (2.4), la fonction $t \mapsto V(u(t), t)$ appartient à $AP^0(\mathbb{R})$ et la fonction $t \mapsto D_1V(u(t), t)$ appartient à $AP^0(\mathbb{H})$ lorsque $u \in AP^0(\mathbb{H})$, (cf. Chapitre 1). On peut aussi consulter (Blot, Cieutat, N'Guérékata, Pennequin, 2009) (Lemma 3.4).

Soit u un élément de $B^2(\mathbb{H})$. L'espace $B^2(\mathbb{H})$ étant défini comme la fermeture de l'espace $AP^0(\mathbb{H})$ pour la norme $\|\cdot\|_{B^2}$ (cf. Notations), il

existe une suite $(u_m)_m$ à valeurs dans $AP^0(\mathbb{H})$ telle que $\lim_{m\to\infty} \|u - u_m\|_{B^2} = 0$.

Compte tenu de l'inégalité (3.1), on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|V(u(t),t) - V(u_m(t),t)| \leq c.\|u(t) - u_m(t)\|.$$

Ce qui entraîne par croissance de l'intégrale et de la limite supérieure, que

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |V(u(t),t) - V(u_m(t),t)|^2 dt \leq c^2.\|u - u_m\|_{B^2}^2.$$

Par passage à la limite lorsque $m \to \infty$, on obtient, en vertu de deux inégalités précédentes, que $\lim_{m\to\infty} \mathcal{M}_t\{|V(u(t),t) - V(u_m(t),t)|^2\} = 0$. Ceci implique que la fonction $t \mapsto V(u(t),t) \in B^2(\mathbb{R})$. En effet, comme les fonctions $t \mapsto V(u_m(t),t)$ appartiennent à $AP^0(\mathbb{R})$ (d'après ce qui précède et le fait que $u_m \in AP^0(\mathbb{H})$), on a forcément $t \mapsto V(u(t),t) \in B^2(\mathbb{R})$ puisque $B^2(\mathbb{R})$ est l'adhérence de $AP^0(\mathbb{R})$ pour $\|.\|_{B^2}$.

Il en résulte que l'opérateur de Nemytskii

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_V : B^2(\mathbb{H}) &\to B^2(\mathbb{R}) \\ u &\mapsto \mathcal{N}_V(u)(t) := V(u(t),t), \end{aligned} \tag{2.11}$$

est bien défini.

De plus, les calculs précédents montrent que cet opérateur $\mathcal{N}_F$ satisfait l'inégalité suivante pour tous $u, v \in B^2(\mathbb{H})$.

$$\|\mathcal{N}_V(u) - \mathcal{N}_V(v)\|_{B^2} \leq c.\|u - v\|_{B^2}. \tag{2.12}$$

En raisonnant d'une manière analogue, on prouve que l'opérateur de Nemytskii construit sur D_1V

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{D_1V} : B^2(\mathbb{H}) &\to B^2(\mathbb{H}) \\ u &\mapsto \mathcal{N}_{D_1V}(u)(t) := D_1V(u(t),t) \end{aligned} \tag{2.13}$$

est également bien défini et il remplit l'inégalité suivante

$$\|\mathcal{N}_{D_1V}(u) - \mathcal{N}_{D_1V}(v)\|_{B^2} \leq c_1.\|u - v\|_{B^2}. \tag{2.14}$$

pour tous $u, v \in B^2(\mathbb{H})$.

A ce stade, on peut définir la fonctionnelle Ψ suivante

$$\begin{aligned} \Psi : B^2(\mathbb{H}) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Psi(u) := \mathcal{M}_t\{V(u(t),t)\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

En utilisant l'inégalité (2.12), on obtient, pour toutes fonctions $u, v \in B^2(\mathbb{H})$, compte tenu du fait que la moyenne $\mathcal{M} : (B^2(\mathbb{R}), \|.\|_{B^2}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un opérateur 1-lipschitzien que

$$\begin{aligned} |\Psi(u) - \Psi(v)| &\leq \mathcal{M}_t\{|V(u(t),t) - V(v(t),t)|\} \\ &\leq \|\mathcal{N}_V(u) - \mathcal{N}_V(v)\|_{B^2} \\ &\leq c.\|u - v\|_{B^2}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que Ψ est une fonction c-lipschitzienne et par conséquent qu'elle est continue.

D'autre part, en utilisant l'inégalité de la moyenne appliquée sur la fonction à variable vectorielle $x \mapsto V(\cdot, t)$ et dont on trouvera une version dans (Lang, 1993) (Corollary 4.4, p. 342), et en tenant compte de l'inégalité (2.14), on obtient, pour $u, h \in B^2(\mathbb{H})$ que

$$\begin{aligned}
&|V(u(t)+h(t),t) - V(u(t),t) - D_1V(u(t),t).h(t)| \\
&\leq \sup_{z\in[u(t),u(t)+h(t)]} \|D_1V(z,t) - D_1V(u(t),t)\|.\|h(t)\| \\
&\leq c_1.\Big(\sup_{z\in[u(t),u(t)+h(t)]} \|z-u(t)\|\Big).\|h(t)\| \leq c_1.\|h(t)\|^2.
\end{aligned}$$

En prenant la moyenne par rapport à t, ces dernières inéquations donnent, par linéarité et lipschitzianité de l'opérateur de moyenne, que

$$\begin{aligned}
&|\Psi(u+h) - \Psi(u) - N_{D_1V}(u).h| \\
&\leq \mathcal{M}_t\{|V(u(t)+h(t),t) - V(u(t),t) - D_1V(u(t),t).h(t)|\} \\
&\leq c_1.\mathcal{M}_t\{\|h(t)\|^2\} = c_1.\|h\|_{B^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre h vers *zéro*, on déduit que la fonction ψ est Fréchet-différentiable en u et que sa différentielle est donnée, pour tous $u, h \in B^2(\mathbb{H})$, par

$$D\Psi(u).h = \mathcal{M}_t\{D_1V(u(t),t).h(t)\}. \tag{2.16}$$

On pose, maintenant, u, v deux fonctions de $B^2(\mathbb{H})$ et h une autre fonction de $B^2(\mathbb{H})$ telle que $\|h\|_{B^2} \leq 1$.

Comme la valeur moyenne $\mathcal{M}$ est 1-lipschitzienne, on a

$$|(D\Psi(u) - D\Psi(v)).h| \leq \mathcal{M}_t\{|(D_1V(u(t),t) - D_1V(v(t),t)).h(t)|\}.$$

Mais, par définition de la norme d'un opérateur et la croissance de la moyenne, on déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_t\{|(D_1V(u(t),t) - D_1V(v(t),t)).h(t)|\} \\
&\leq \mathcal{M}_t\{\|(D_1V(u(t),t) - D_1V(v(t),t))\|.\|h(t)\|\}
\end{aligned}$$

D'autre part, en vertu de la condition 2.3, on peut écrire que

$$\mathcal{M}_t\{\|(D_1V(u(t),t) - D_1V(v(t),t))\|.\|h(t)\|\} \leq \mathcal{M}_t\{c_1.\|u(t)-v(t)\|.\|h(t)\|\}$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski (Besicovitch, 1932, page 69) (cf. Chapitre 1), on a

$$\|(u_v).h\|_{B^1} := \mathcal{M}_t\{\|u(t)-v(t)\|.\|h(t)\|\} \leq \|u-v\|_{B^2}.\|h\|_{B^2}.$$

Par conséquent, par les inégalités précédentes, on obtient que

$$|(D\Psi(u) - D\Psi(v)).h| \leq c_1.\|u-v\|_{B^2}.\|h\|_{B^2}.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction $h \in B^2(H)$ telle que $\|h\|_{B^2} \leq 1$, il s'en suit que $\|D\psi(u) - D\Psi(v)\|_{\mathcal{L}} \leq c_1.\|u-v\|_{B^2}$, où $\|.\|_{\mathcal{L}}$ désigne la norme d'un opérateur linéaire.

On rappelle que la norme d'un opérateur linéaire $A : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$, défini entre deux espaces vectoriels normés, est donnée par $\|A\|_{\mathcal{L}} := \sup_{x \in X; \|h\|_X \leq 1} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$.

D'après l'inégalité précédente, la fonction $u \mapsto D\Psi(u)$ est c_1-lipschitzienne de $(B^2(\mathbb{H}), \|.\|_{B^2})$ dans $(\mathcal{L}(B^2(\mathbb{H}), \mathbb{R}), \|.\|_{\mathcal{L}})$, et donc forcément continue.

Il est résulte que Ψ est une fonction continûment différentiable sur $B^2(\mathbb{H})$, i.e. de classe $\mathcal{C}^1(B^2(\mathbb{H}), \mathbb{R})$.

On note l'injection canonique de $B^2(\mathbb{H})$ dans $B^{1,2}(\mathbb{H})$ par

$$\begin{aligned} in : B^{1,2}(\mathbb{H}) &\to B^2(\mathbb{H}) \\ u &\mapsto in(u) := u. \end{aligned}$$

Il est évident que l'application in est linéaire et que pour tout $u \in B^{1,2}(\mathbb{H})$, $\|in(u)\|_{B^2} \leq \|u\|_{B^{1,2}}$.
Elle est donc une application linéaire continue et par suite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $B^{1,2}(\mathbb{H})$, cf. (Cartan, 1967, Proposition 2.4.2 p.33).

Étant un produit scalaire et en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski, $(\cdot \mid \cdot)_{B^2}$ est clairement un application bilinéaire continue. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$, cf. (Cartan, 1967, Théorème 2.4.3 p.33).

On définit la fonction d sur $B^2(\mathbb{H})$ et à valeurs dans $B^2(\mathbb{H}) \times B^2(\mathbb{H})$, par $d(u) := (u, u)$. On constate immédiatement que cette fonction est linéaire continue.

L'opérateur de différentiation $\nabla : B^{1,2} \to B^2(\mathbb{H})$, introduit précédemment, est clairement linéaire et continu puisqu'il vérfie que $\|\nabla u\|_{B^2} \leq \|u\|_{B^{1,2}(\mathbb{H})}$. Il est alors de classe $\mathcal{C}^1$.

Écrivant que

$$J = \frac{1}{2}(\cdot \mid \cdot)_{B^2} \circ d \circ \nabla - \Psi \circ in, \tag{2.17}$$

on déduit du raisonnement précédent que la fonctionnelle J est de classe $\mathcal{C}^1$ comme étant la différence de composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

De plus, appliquant la formule de différentiation d'une composée de fonctions différentiables sur 2.17 et connaissant la formule de la différentielle d'une application linéaire continue ainsi que celle de la différentielle d'une application bilinéaire continue on obtient que, pour toutes fonctions u et h de $B^2(\mathbb{H})$ on a

$$DJ(u).h = (u \mid h)_{B^2} - \mathcal{M}_t\{D_1V(u(t), t).h(t)\}. \tag{2.18}$$

Ainsi est démontrée la première assertion du lemme.

2. • Montrons, tout d'abord, que l'ensemble $B^{1,2}(S)$ est convexe.

Cela revient à prouver que pour tous $u, v \in B^{1,2}(S)$ et $\lambda \in (0,1)$, l'élément $(1-\lambda)u + \lambda v$ reste dans $B^{1,2}(S)$.

Soit $u, v \in B^{1,2}(S)$ et $\lambda \in (0,1)$.

Par définition de $B^{1,2}(S)$ (cf. Notations), il existe deux suites $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $AP^1(S)$ telles que $\lim\limits_{m\to\infty} \|u - u_m\|_{B^{1,2}} = 0$ et $\lim\limits_{m\to\infty} \|v - v_m\|_{B^{1,2}} = 0$.

Puisque toutes les fonctions u_m et v_m sont à valeurs dans S (i.e. $u_m(\mathbb{R}) \subset S$ et $v_m(\mathbb{R}) \subset S$) et que S est, par hypothèse, un ensemble convexe, on a, pour tout réel t et tout entier m, $(1-\lambda)u_m(t) + \lambda v_m(t) \in S$, ce qui entraîne que la suite de fonctions $((1-\lambda)u_m + \lambda v_m)_m$ est à valeurs dans $AP^1(S)$.

En outre, on voit que

$$\begin{aligned}
&\|(1-\lambda)u + \lambda v - ((1-\lambda)u_m + \lambda v_m)\|_{B^{1,2}} \\
&= \|(1-\lambda)(u - u_m) + \lambda(v - v_m)\|_{B^{1,2}} \\
&\leq (1-\lambda)\|u - u_m\|_{B^{1,2}} + \lambda\|v - v_m\|_{B^{1,2}}.
\end{aligned}$$

Alors, compte tenu de ce qui précède, par passage à la limite lorsque m tends vers l'infini, il résulte que

$$\lim_{m\to\infty} \|(1-\lambda)u + \lambda v - ((1-\lambda)u_m + \lambda v_m)\|_{B^{1,2}} = 0.$$

Autrement dit, la suite $((1-\lambda)u_m + \lambda v_m)_m$ converge dans $B^{1,2}(S)$ vers $(1-\lambda)u + \lambda v$. Du fait que $B^{1,2}(S)$ est exactement l'adhérence de $AP^1(S)$ pour $\|.\|_{B^{1,2}}$, il découle que $(1-\lambda)u + \lambda v \in B^{1,2}(S)$.

Ainsi a-t-on

$$B^{1,2}(S) \text{ est convexe.} \tag{2.19}$$

Par ailleurs, $B^{1,2}(S)$ est fermé dans $B^{1,2}(\mathbb{H})$ puisqu'il est défini comme la fermeture de $AP^1(S)$ dans $B^{1,2}(\mathbb{H})$ (cf. Notations).

• Montrons, à présent, que la fonctionnelle J est convexe sur $B^{1,2}(S)$.

Pour ce faire, on découpe la fonctionnelle J en deux parties. On définit J_1 et J_2 sur $B^{1,2}(S)$ comme suit

$$J_1 := \frac{1}{2}\|.\|_{B^2} \circ \nabla \quad \text{et} \quad J_2 := -\Psi \circ in$$

de sorte que $J = J_1 + J_2$.

Prouvons, dans un premier lieu, que la fonction J_2 est convexe sur $B^{1,2}(S)$.

Puisque in est linéaire sur $B^{1,2}(\mathbb{H})$ et que l'opposé d'une fonction convexe est concave, il suffit de vérifier que la fonction Ψ est concave.

Soit alors $u, v \in B^{1,2}(S)$ et $\lambda \in (0,1)$. On veut prouver que

$$\Psi((1-\lambda)u + \lambda v) \geq (1-\lambda)\Psi(u) + \lambda\Psi(v).$$

La définition de $B^{1,2}(S)$ assure l'existence de deux suites $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $AP^1(S)$ telles que $\lim_{m\to\infty}\|u-u_m\|_{B^{1,2}} = 0$ et $\lim_{m\to\infty}\|v-v_m\|_{B^{1,2}} = 0$.

Puisque l'espace $B^{1,2}$ s'injecte continûment dans B^2, on en déduit que $\lim_{m\to\infty}\|u-u_m\|_{B^2} = 0$ ainsi que $\lim_{m\to\infty}\|v-v_m\|_{B^2} = 0$.

Le potentiel $V(\cdot,t)$ étant supposé concave sur S, d'après (2.5), on a, pour tout réel t,

$$V((1-\lambda)u_m(t)+\lambda v_m(t)) \geq (1-\lambda)V(u_m(t),t)+\lambda V(v_m(t),t).$$

Autrement dit, en termes d'opérateur de *Nemytskii*,

$$\mathcal{N}_V((1-\lambda)u_m+\lambda v_m) \geq (1-\lambda)\mathcal{N}_V(u_m)+\lambda\mathcal{N}_V(v_m).$$

En faisant tendre m vers l'infini, par continuité de $\mathcal{N}_V$, résultat déjà établi dans **1.**, il découle de cette inégalité que

$$\mathcal{N}_V((1-\lambda)u+\lambda v) \geq (1-\lambda)\mathcal{N}_V(u)+\lambda\mathcal{N}_V(v).$$

Donc, par croissance et linéarité de la moyenne, on aboutit à $\Psi((1-\lambda)u+\lambda v) \geq (1-\lambda)\Psi(u)+\lambda\Psi(v)$. ce qui traduit la concavité de Ψ sur $B^{1,2}(S)$.

Par conséquent, la fonction $J_2 = -\Psi\circ in$ est convexe sur $B^{1,2}(S)$.

• Montrons maintenant que la fonction J_1 est également convexe.

Étant une norme, il est clair que $\frac{1}{2}\|.\|_{B^2}$ est convexe sur $B^2(\mathbb{H})$. De même, compte tenu de la linéarité de ∇, J_1 est convexe sur $B^{1,2}(S)$ comme composée d'une fonctionnelle convexe et d'un opérateur linéaire.

• On conclut que la fonction J est convexe sur $B^{1,2}(S)$ comme une somme de deux fonctions convexes, ce qui achève la preuve de la deuxième assertion du lemme.

3. Montrons que la fonctionnelle J est faiblement semi-continue inférieurement.

Comme la fonctionnelle $J : B^2(\mathbb{H}) \to \mathbb{R}$ est convexe, il résulte de (i.), que tous ses ensembles de niveau sont convexes. Puisque la fermeture pour la topologie forte et la fermeture pour la topologie faible concident pour les ensembles de niveaux (cf. (EKeland, Temam, 1972), Corollaire 1.4 et ses commentaires p. 5-6) et que l'image reciproque $J^{-1}((-\infty,\alpha])$ est fermée pour la topologie forte par continuité (et donc semi-continuité forte) de J, on en déduit que $J^{-1}((-\infty,\alpha])$ est aussi faiblement fermée et d'où la semi-continuité faible de J. Ainsi, J est faiblement semi-continue sur $B^2(\mathbb{H})$ par (iii.)

■

Remarque 2.2 (EKeland, Temam, 1972) On a utilisé les résultats élémentaires suivants d'analyse fonctionnelle dans la démonstration de la dernière assertion du lemme précédent.

i. Soit f une fonction convexe de domaine M.
Alors l'ensemble de niveau $\alpha \in \mathbb{R}$ de f est défini par

$$[f \leq \alpha] := \{x \in M; f(x) \leq \alpha\}.$$

Pour tout réel α, $[f \leq \alpha]$ est un ensemble convexe.

ii. Soit K un ensemble convexe. Alors K est fermé pour la topologie forte si et seulement si K est fermé pour la topologie faible.

iii. Toute fonction convexe $f : M \to (-\infty, \infty]$ est fortement semi-continue inférieurement si et seulement si elle est faiblement semi-continue inférieurement.

iv. Soit $F : X \to \mathbb{R}$ où X est un espace topologique quelconque. la fonctionnelle F est semi-continue inférieurement si et seulement si l'image réciproque de tout ensemble $(-\infty, r]$ est un fermé de X.

Le lemme suivant montre qu'on peut minimiser J sur l'ensemble $B^{1,2}(S)$. Autrement dit, l'infimum de la fonctionnelle J sur $B^{1,2}$ est atteint.

Lemme 2.2 *Il existe une fonction $u_* \in B^{1,2}(S)$ telle que*

$$J(u_*) = \inf J(B^{1,2}(S)).$$

Preuve.
Par l'hypothèse (2.10), la fonction V est bornée sur $S \times \mathbb{R}$. Alors

$$\gamma := \sup V(S \times \mathbb{R})$$

est un nombre réel fini bien défini.

Puisque toute fonction u de $AP^1(S)$ est dans $B^{1,2}(S)$ et qu'en particulier, $\nabla u = u'$, on déduit pour toute fonction $u \in AP^1(S)$

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathcal{M}_t\Big\{\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 - V(u(t),t)\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{B^2} - \mathcal{M}_t\Big\{V(u(t),t)\Big\} \\ &\geq \frac{1}{2}\|u'(t)\|^2_{B^2} - \gamma \end{aligned}$$

Ce qui donne que pour tout $u \in AP^1(S)$, $J(u) \geq -\gamma > -\infty$. Par conséquent, la fonctionelle J est bornée inférieurement sur $AP^1(S)$. Par continuité de J sur $B^{1,2}(\mathbb{H})$ et par densité de $AP^1(S)$ dans $B^{1,2}(S)$, on obtient $J(u) \geq -\gamma$ pour tout $u \in B^{1,2}(S)$, ainsi que $\inf J(B^{1,2}(S)) = \inf J(AP^1(S))$.

Soit $(u_k)_k$ une suite minimisante de J sur $AP^1(S)$ telle que

$$J(u_k) \leq \inf J(B^{1,2}(S)) + \frac{1}{k} \ , \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}_*.$$

Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}_*$, on a

$$\frac{1}{2}\|u'(t)\|^2_{B^2} - \mathcal{M}_t\Big\{V(u(t),t)\Big\} \leq \inf J(B^{1,2}(S)) + \frac{1}{k}.$$

Il s'en suit que

$$\frac{1}{2}\|u_k'\|_{B^2}^2 \leq \mathcal{M}_t\{V(u_k(t),t)\} + \inf J(B^{1,2}(S)) + \frac{1}{k} \leq \gamma + \inf J(B^{1,2}(S)) + 1.$$

La suite $(u_k')_k$ est alors bornée dans $B^2(\mathbb{H})$.
En outre, puisque $u_k(\mathbb{R}) \subset S \subset B(0,R)$, on a pour tout réel t, $\|u_k(t)\| \leq R$ et donc $\|u_k\|_{B^2} \leq R$ pour tout $k \in \mathbb{N}_*$. La suite $(u_k)_k$ est par conséquent bornée dans $B^{1,2}(\mathbb{H})$.

L'espace $B^{1,2}(\mathbb{H})$ étant un espace de Hilbert, on peut extraire une sous-suite $(u_{q_k})_k$ de $(u_k)_k$ qui converge faiblement vers un certain $u_* \in B^{1,2}(\mathbb{H})$. Étant prouvé au lemme 2.1 que $B^{1,2}(S)$ est fermé convexe, on a forcément $u_* \in B^{1,2}(S)$.

Comme J est semi-continue inférieurement (cf. Lemme 2.1) et que $(u_{q_k})_k$ est une suite minimisante, on déduit que $J(u_*) = \inf J(B^{1,2}(S))$, ce qui achève la démonstration du lemme.

■

Le paragraphe suivant introduit un lemme technique qui traite le produit de convolution en moyenne de deux fonctions presque-périodiques de Bohr.

Lemme 2.3 Soit $a, b \in AP^0(\mathbb{R})$. On pose $\mu(t) := \mathcal{M}_s\{a(s)b(s+t)\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors, les assertions suivantes sont satisfaites.

(i) $\mu \in AP^0(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}\{\mu\} = \mathcal{M}\{a\}.\mathcal{M}\{b\}$ *et* $\mu(t) = \mathcal{M}_s\{a(s-t)b(s)\}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

(ii) On suppose, en outre, que $a \in AP^1(\mathbb{R})$. *Alors,* $\mu \in AP^1(\mathbb{R})$ *et* $\mu'(t) = \mathcal{M}_s\{a'(s-t)b(s)\}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Si l'on suppose, de plus, que $a \in AP^1(\mathbb{R})$ *et que* b *est localement absolument continue sur* $\mathbb{R}$, *on a* $\mu'(t) = -\mathcal{M}_s\{a(s-t)b'(s)\}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Preuve.

Il est à remarquer que pour tout réel t la fonction $s \mapsto a(s)b(s+t)$ est presque-périodique au sens de Bohr comme étant le produit de deux fonctions presque-périodiques de Bohr. Elle admet alors une valeur moyenne. La fonction μ est par conséquent bien définie. D'autre part, si a ou b est la fonction nulle alors μ devient également identiquement nulle et dans ce cas, toutes les assertions seront triviales.

Pour cela, on suppose, dans le reste de la preuve, que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

(i) Comme $b \in AP^0(\mathbb{R})$, b est uniformément continue (cf. Proposition 1, Chapitre 1)(dont on trouvera une démonstration, par exemple, dans (Bohr, 1933, Theorem II p. 35)). Alors, par définition,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall r, r_1 \in \mathbb{R}, |r - r_1| \leq \delta_\varepsilon \Longrightarrow |b(r) - b(r_1)| \leq \frac{\varepsilon}{\|a\|_\infty}.$$

Lorsque $t, t_1 \in \mathbb{R}$ vérifient $|t - t_1| \leq \delta_\varepsilon$, on a $|(t+s) - (t_1+s)| \leq \delta_\varepsilon$ d'où

$$|\mu(t) - \mu(t_1)| \leq \mathcal{M}_s\{|a(s)|.|b(t+s) - b(t_1+s)|\} \leq \frac{\varepsilon}{\|a\|_\infty}\mathcal{M}_s\{|a(s)|\} \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que μ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, puisque $b \in AP^0(\mathbb{R})$, on a par définition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell_\varepsilon > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon], \forall t \in \mathbb{R}, |b(t+\tau) - b(t)| \leq \frac{\varepsilon}{\|a\|_\infty}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} |\mu(t+\tau) - \mu(t)| &\leq \mathcal{M}_s\{|a(s)|.|b(t+\tau+s) - b(t+s)|\} \\ &\leq \mathcal{M}_s\{|a(s)|\}.\frac{\varepsilon}{\|a\|_\infty} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

et la presque-periodicité de μ en découle.

Étant donnés $S > 0$ et $T > 0$, on définit pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_S(t) := \frac{1}{2S}\int_{-S}^{S} a(s)b(s+t)ds, \quad d_{S,T} := \frac{1}{2T}\frac{1}{2S}\int_{-T}^{T}(\int_{-S}^{S} a(s)b(s+t)ds)dt. \tag{2.20}$$

On note que $d_{S,T} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\phi_S(t)dt$.

En utilisant un résultat de (Bohr, 1933) p. 43 (un résultat qui permet une certaine uniformité par rapport à t) on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists S_\varepsilon^1 > 0, \forall S \geq S_\varepsilon^1, \forall t \in \mathbb{R}, |\phi_S(t) - \mu(t)| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \tag{2.21}$$

Ce qui entraîne que pour tout $T > 0$, en passant à la moyenne

$$|d_{S,T} - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mu(t)dt| \leq \sup_{t\in[-T,T]}|\phi_S(t) - \mu(t)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

De plus, par définition de la valeur moyenne, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T_\varepsilon^1 > 0, \forall T \geq T_\varepsilon^1, |\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mu(t)dt - \mathcal{M}\{\mu\}| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire et des deux inégalités précédentes, on obtient que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists S_\varepsilon^1 > 0, \exists T_\varepsilon^1 > 0, \forall S \geq S_\varepsilon^1, \forall T \geq T_\varepsilon^1, |d_{S,T} - \mathcal{M}\{\mu\}| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.22}$$

À l'aide du même résultat de (Bohr, 1933) p. 43, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T_\varepsilon^2 > 0, \forall T \geq T_\varepsilon^2, |\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} b(t+s)dt - \mathcal{M}\{b\}| \leq \frac{\varepsilon}{4\|a\|_\infty}, \tag{2.23}$$

ce qui implique que dès que $T \geq T_\varepsilon^2$, on a pour tout $S > 0$,

$$|\frac{1}{2S}\int_{-S}^{S}(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a(s)b(t+s)dt)ds - \mathcal{M}\{b\}.\frac{1}{2S}\int_{-S}^{S} a(s)ds| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

et donc, appliquant le théorème de Fubini,

$$|d_{S,T} - \mathcal{M}\{b\}.\frac{1}{2S}\int_{-S}^{S} a(s)ds| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

En outre, la définition de la valeur moyenne donne que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists S_\varepsilon^2 > 0, \forall S \geq S_\varepsilon^2, |\frac{1}{2S}\int_{-S}^{S} a(s)ds - \mathcal{M}\{a\}| \leq \frac{\varepsilon}{4.\|b\|_\infty}.$$

En multipliant les deux membres de la dernière inégalité par $|\mathcal{M}\{b\}|$ et grâce à l'inégalité $|\mathcal{M}\{b\}| \leq \|b\|_\infty$, il en résulte que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists S_\varepsilon^2 > 0, \forall S \geq S_\varepsilon^2, |\frac{1}{2S}\int_{-S}^{S} a(s)ds.\mathcal{M}\{b\} - \mathcal{M}\{a\}.\mathcal{M}\{b\}| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

On en déduit, en utilisant l'inégalité triangulaire, que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists S_\varepsilon^2 > 0, \exists T_\varepsilon^2 > 0, \forall S \geq S_\varepsilon^2, \forall T \geq T_\varepsilon^2, |d_{S,T} - \mathcal{M}\{a\}.\mathcal{M}\{b\}| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.24}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $T_\varepsilon := \max\{T_\varepsilon^1, T_\varepsilon^2\} > 0$, $S_\varepsilon := \max\{S_\varepsilon^1, S_\varepsilon^2\} > 0$, d'après (2.22) et (2.24) on a

$$|\mathcal{M}\{\mu\} - \mathcal{M}\{a\}.\mathcal{M}\{b\}| \leq |\mathcal{M}\{\mu\} - d_{S_\varepsilon,T_\varepsilon}| + |d_{S_\varepsilon,T_\varepsilon} - \mathcal{M}\{a\}.\mathcal{M}\{b\}| \leq \varepsilon.$$

Le réel $\varepsilon > 0$ étant arbirairement choisi, on conclut que

$$\mathcal{M}\{\mu\} = \mathcal{M}\{a\}.\mathcal{M}\{b\}.$$

Par ailleurs la valeur moyenne étant invariante par translations, il est clair que $\mu(t) = \mathcal{M}_s\{a(s-t).b(s+t-t)\} = \mathcal{M}_s\{a(s-t).b(s)\}$, ce qui achève la démonstration de la première assertion du lemme.

(ii) Puisque $AP^1(\mathbb{H}) \subset B^{1,2}(\mathbb{H})$ et que $f' = \nabla f$ si $f \in AP^1(\mathbb{H})$, Proposition 10 dans (Blot, 1994), en posant $a_t(s) := a(s-t)$, il est clair que $a_t \in AP^1(\mathbb{H})$ et que $\nabla a = a_t'(s) = a'(s-t)$.

D'autre part, du fait que $\mathcal{M}\{\nabla f\} = 0$ pour toute fonction $f \in B^{1,2}(\mathbb{H})$, on a, par définition de ∇,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\delta\to 0} \mathcal{M}_s\{|\frac{1}{\delta}(a_t(s+\delta) - a_t(s)) - a_t'(s)|^2\}^{1/2} \\ &= \lim_{\delta\to 0} \mathcal{M}_s\{|\frac{1}{\delta}(a(s+\delta-t) - a(s-t)) - a'(s-t)|^2\}^{1/2}. \end{aligned}$$

On pose $\mu_1(t) := \mathcal{M}_s\{a'(s-t).b(s)\}$. En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski (cf. Chapitre 1), on a

$$\begin{aligned} |\frac{1}{\delta}(\mu(t+\delta) - \mu(t)) - \mu_1(t)| &= |\mathcal{M}_s\{[\frac{1}{\delta}(a(s+\delta-t) - a(s-t)) - a'(s-t)].b(s)\}| \\ &\leq \mathcal{M}_s\{|\frac{1}{\delta}(a(s+\delta-t) - a(s-t)) - a'(s-t)|^2\}^{1/2}.\|b\|_{B^2}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient, compte tenu de ce qui précède, que $\mu'(t) = \mu_1(t)$.

(iii) La formule d'intégration par parties pour les fonctions absolument continues (cf. (Riesz, Nagy, 1975, p. 54-55)) permet d'écrire pour tout $S > 0$, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2S}\int_{-S}^{S} a'(s-t)b(s)ds &= \frac{1}{2S}(a(S-t)b(S) - a(-S-t)b(-S)) \\ &\quad -\frac{1}{2S}\int_{-S}^{S} a(s-t)b(s')ds. \end{aligned}$$

Les fonctions a et b étant de $AP^0(\mathbb{R})$, elles sont bornées (cf. Proposition 1, Chapitre 1). Il en découle que

$$\lim_{S\to\infty} \frac{1}{2S}(a(S-t)b(S) - a(-S-t)b(-S)) = 0$$

et puisque $\mathcal{M}_s\{a'(s-t)b(s)\}$ existe dans $\mathbb{R}$, on en déduit l'existence de $\mathcal{M}_s\{a(s-t)b'(s)\}$ et en particulier l'égalité

$$\mathcal{M}_s\{a'(s-t)b(s)\} = -\mathcal{M}_s\{a(s-t)b'(s)\},$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

■

Le lemme suivant vise à prouver que le minimum de la fonctionnelle J obtenu sur l'adhérence de l'ensemble des fonctions à valeurs dans la partie fermée S de $\mathbb{H}$ est aussi un minimum de J sur l'ensemble de fonctions qui prennent leurs valeurs dans la boule ouverte $B(0,R)$ de $\mathbb{H}$.

Lemme 2.4 Les assertions suivantes sont vraies.

(i) $\inf J(AP^1(S)) = \inf J(AP^1(B(0,R)))$.

(ii) $\inf J(B^{1,2}(S)) = \inf J(B^{1,2}(B(0,R)))$.

Preuve. **(i)** $AP^1(S) \subset B^{1,2}(S)$ entraîne que $\inf J(AP^1(S)) \geq \inf J(AP^1(B(0,R))$.

Afin de démontrer la première assertion, il suffit de prouver l'inégalité inverse.

Soit alors $u \in AP^1(B(0,R))$. On considère le projecteur de meilleure approximation sur l'ensemble convexe S, $P : \mathbb{H} \to S$. On pose $v(t) := P(u(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Comme P est 1-lipschitzien (Aubin, 1979, Proposition 1 p. 16), P est (uniformément) continu et donc en vertu du Lemme 3.2 de (Blot, Cieutat, N'Guérékata, Pennequin, 2009) on a $v \in AP^0(S)$.

D'autre part, $u \in AP^1(\mathbb{H})$ entraîne que $u' \in AP^0(\mathbb{H})$ et par suite u' est bornée sur $\mathbb{R}$ (cf. Proposition 1, Chapitre 1). Il en résulte que la fonction u est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et par conséquent v est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ comme étant la composée d'applications lipschitziennes. On en déduit alors que la fonction v est localement absolument continue sur $\mathbb{R}$. Ce qui entraîne que v est Lebesgue-presque partout dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après (Bénilan, 1973) (Corollaire A.2 p.145).

Soit $t \in \mathbb{R}$ un point où v est dérivable.

Lorsque $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a en tenant compte de la lipschitzianité de P,

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{\delta}(v(t+\delta) - v(t))\| &= \|\frac{1}{\delta}(P(u(t+\delta)) - P(u(t)))\| \\
&= \frac{1}{|\delta|}\|P(u(t+\delta)) - P(u(t))\| \\
&\leq \frac{1}{|\delta|}\|u(t+\delta) - u(t)\| \\
&= \|\frac{1}{\delta}(u(t+\delta) - u(t))\|.
\end{aligned}$$

En faisant tendre δ vers zéro, on obtient, compte tenu de la continuité de la norme que

$$\|v'(t)\| \leq \|u'(t)\| \text{ presque pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

On considère les fonctions de Bochner-Féjer

$$K_m(t) := \sum_{\nu=-m}^{m} (1 - \frac{|\nu|}{m}) e^{-i\nu t}$$

et

$$\varphi_m(t) := \prod_{j=1}^{m} K_{(m!)^2}(\frac{\beta_j t}{m})$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, où $(\beta_j)_j$ est une $\mathbb{Z}$-base de l'ensemble d'exposants de Fourier-Bohr de v.

On sait que $K_m \geq 0$, $\mathcal{M}\{K_m\} = 1$, $\varphi_m \geq 0$, et $\mathcal{M}\{\varphi_m\} = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_*$. Pour cela, notre référence est (Bohr, 1933) p. 86-88, ou, (Corduneanu, 2009) p. 115.

On définit, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_m(t) := \mathcal{M}_s\{\varphi_m(s).v(s+t)\}. \tag{2.26}$$

En suivant (Corduneanu, 2009) (p. 116) où l'on remplace $\mathbb{R}$ par H, on obtient que $\sigma_m \in AP^1(\mathbb{H})$ et

$$\lim_{m\to\infty} \|\sigma_m - v\|_{B^2} = 0. \tag{2.27}$$

Puisque la fonctionnelle Ψ, définie dans la preuve du Lemme 2.1, est continue sur $B^2(\mathbb{H})$ on a $\lim_{m\to\infty} \Psi(\sigma_m) = \Psi(v)$. En vertu de la condition (2.6) on a $V(v(t)) \geq V(u(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne que $\Psi(v) \geq \Psi(u)$ et par conséquent on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}_*, \forall m \geq m_\varepsilon, \Psi(\sigma_m) \geq \Psi(u) - \varepsilon. \tag{2.28}$$

En utlisant un théorème de Mazur ((Lang, 1993) p. 88, (Aliprantis, Border, 1999) (Corollary 5.62 p. 194)), on peut écrire que

$$\overline{co}(v(\mathbb{R})) = \bigcap_{(p,\alpha)\in\Pi} [p \geq \alpha]$$

où

$$\Pi := \{(p,\alpha) \in H^* \times \mathbb{R} : \forall y \in v(\mathbb{R}), \langle p, y\rangle \geq \alpha\}$$

et

$$[p \geq \alpha] := p^{-1}([\alpha, \infty)).$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}_*$, tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $(p,\alpha) \in \Pi$, puisque $\varphi_m \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle p, \sigma_m(t)\rangle &= \mathcal{M}_s\{\langle p, \varphi_m(s).v(s+t)\rangle\} \\
&= \mathcal{M}_s\{\varphi_m(s)\langle p, v(s+t)\rangle\} \\
&\geq \mathcal{M}_s\{\varphi_m(s).\alpha\} \\
&= \mathcal{M}_s\{\varphi_m(s)\}.\alpha = \alpha.
\end{aligned}$$

Il en découle que $\sigma_m(t) \in \overline{co}(v(\mathbb{R})) \subset S$, et par conséquent on a prouvé que la fonction σ_m est presque-périodique de Bohr à valeurs dans S, autrement dit

$$\sigma_m \in AP^1(S) \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}_*. \tag{2.29}$$

D'autre part, d'après le Lemme 2.3, iii, on a, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|\sigma_m'(t)\| &= \|\mathcal{M}_s\{\varphi_m(s).v'(t+s)\}\| \\ &\leq \mathcal{M}_s\{\varphi_m(s).\|v'(t+s)\|\} \\ &= \mathcal{M}_s\{\sqrt{\varphi_m(s)}.\sqrt{\varphi_m(s)}.\|v'(t+s)\|\}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovski, que

$$\begin{aligned} \|\sigma_m'(t)\| &\leq \mathcal{M}_s\{\varphi_m(s)\}^{1/2}.\mathcal{M}_s\{\varphi_m(s).\|v'(t+s)\|^2\}^{1/2} \\ &= \mathcal{M}_s\{\varphi_m(s).\|v'(t+s)\|^2\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Il s'en suit, compte tenu de (2.25), que

$$\|\sigma_m'(t)\|^2 \leq \mathcal{M}_s\{\varphi_m(s).\|u'(t+s)\|^2\}.$$

En faisant la moyenne par rapport à t, cette inégalité implique que

$$\mathcal{M}_t\{\|\sigma_m'(t)\|^2\} \leq \mathcal{M}_t\{\mathcal{M}_s\{\varphi_m(s).\|u'(t+s)\|^2\}\}.$$

Prenant $a = \varphi_m$, $b = \|u'(.)\|^2$ et $\mu(t) = \mathcal{M}_s\{\varphi_m(s).\|v'(t+s)\|^2\}$, l'assertion i. du Lemme 2.3 donne que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_t\{\mathcal{M}_s\{\varphi_m(s).\|u'(t+s)\|^2\}\} &= \mathcal{M}\{\varphi_m\}.\mathcal{M}\{\|u'\|^2\} \\ &= \mathcal{M}\{\|u'\|^2\}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $m \in \mathbb{N}_*$,

$$\mathcal{M}_t\{\|\sigma_m'(t)\|^2\} \leq \mathcal{M}\{\|u'\|^2\}. \tag{2.30}$$

On fixe, à présent, arbitrairement $\varepsilon > 0$ et on considère $m_\varepsilon \in \mathbb{N}_*$ donné par (2.28). D'après (2.28) et (2.30), on peut écrire que

$$\begin{aligned} J(\sigma_m) &= \frac{1}{2}\mathcal{M}\{\|\sigma_m'\|^2\} - \Psi(\sigma_m) \\ &\leq \frac{1}{2}\mathcal{M}\{\|u'\|^2\} - \Psi(u) + \varepsilon \\ &= J(u) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\inf J(AP^1(S)) \leq J(u) + \varepsilon$.

Faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on conclut que $\inf J(AP^1(S)) \leq J(u)$. Ainsi est prouvé que

$$\inf J(AP^1(S)) \leq \inf J(AP^1(B(0,R))),$$

ce qui termine la démonstration de la première assertion du lemme.

(ii) Du fait que $AP^1(S) \subset B^{1,2}(S)$, on a l'inégalité

$$\inf J(B^{1,2}(S)) \leq \inf J(AP^1(S)).$$

On veut prouver maintenant l'inégalité inverse.

Si $u \in B^{1,2}(S)$, par définition de $B^{1,2}(S)$, on peut trouver une suite $(u_m)_m$ à valeurs dans $AP^1(S)$ telle que $\lim_{m\to\infty} \|u - u_m\|_{B^{1,2}} = 0$. Comme J est continue sur $B^{1,2}(H)$ (cf. Lemme 2.1), on obtient que

$$\inf J(AP^1(S)) \leq \lim_{m\to\infty} J(u_m) = J(u).$$

Par conséquent, on a $\inf J(AP^1(S)) \leq \inf J(B^{1,2}(S))$ et d'où

$$\inf J(AP^1(S)) = \inf J(B^{1,2}(S)).$$

Par un raisonnemment analogue, on montre que

$$\inf J(AP^1(B(0,R))) = \inf J(B^{1,2}(B(0,R))).$$

et l'assertion (ii) du lemme devient alors une conséquence de (i).

■

2.5 Démonstration du Théorème

Soit $h \in AP^1(\mathbb{H})$ telle que $h \neq 0$. On pose $\lambda := \frac{R-R_0}{\|h\|_\infty} \in (0,\infty)$ où R et R_0 sont définis comme dans (2.6). Puisque la fonction u_*, celle obtenue par le Lemme 2.2, appartient $B^{1,2}(S)$, par définition de $B^{1,2}(S)$, il existe une suite $(u_j)_j$ à valeurs dans $AP^1(S)$ telle que $\lim_{j\to\infty} \|u_* - u_j\|_{B^{1,2}} = 0$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $\theta \in (-\lambda, \lambda)$, on a

$$\|u_j(t) + \theta h(t)| \leq \|u_j(t)\| + |\theta|.\|h(t)\| \leq R_0 + \lambda.\|h|_\infty \leq R_0 + (R - R_0) = R,$$

ce qui entraîne que $u_j + \theta.h \in AP^1(B(0,R))$.

Comme, en outre, $\lim_{j\to\infty}(u_j + \theta.h) = u_* + \theta.h$ appartient à $B^{1,2}(\mathbb{H})$, on obtient que $u_* + \theta.h \in B^{1,2}(B(0,R))$ pour tout réel $\theta \in (-\lambda, \lambda)$.

En utlisant le Lemme 2.2 et le Lemme 2.4 on déduit que $J(u_*) \leq J(u_* + \theta.h)$ pour tout réel $\theta \in (-\lambda, \lambda)$.

L'assertion i. du Lemme 2.1 prouve que J est de classe C^1, et par conséquent $\theta \mapsto J(u_* + \theta.h)$ est différentiable et donc $DJ(u_*).h = \frac{d}{d\theta}|_{\theta=0} J(u_* + \theta.h) = 0$.

Puisque $Dj(u_*)$ est linéaire continue et $AP^1(\mathbb{H})$ est dense dans $B^{1,2}(\mathbb{H})$, on a $DJ(u_*).h = 0$ pour tout $h \in B^{1,2}(\mathbb{H})$.

En outre, en vertu de la formule de l'assertion i, du Lemme 2.1, on conclut que, pour tout $h \in B^{1,2}(\mathbb{H})$,

$$0 = DJ(u_*).h = (\nabla u_* \mid \nabla h)_{B^2} + \mathcal{M}_t\{D_1V(u_*(t),t).h(t)\}.$$

Il en résulte que $\mathcal{M}_t\langle \nabla u_* \mid \nabla h\rangle\} = -\mathcal{M}_t\{\langle D_1V(u_*(t),t) \mid h(t)\rangle\}$. Mais, grâce à la Proposition 10 de (Blot, 1994), on conclut que que $\nabla^2 u_* = \nabla(\nabla u_*)$ existe dans $B^2(\mathbb{H})$ et $\nabla^2 u_* = D_1V(u_*(.),.)$, i.e. $\nabla^2 u_*(t) + D_1V(u_*(t),t) = 0$ (égalité dans $B^2(\mathbb{H})$. Le théorème 2.1 est ainsi totalement démontré.

■

Bibliographie

[Aliprantis, Border, 1999] C.D. Aliprantis & K.C. Border, **Infinite dimensional analysis**, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1999. (Cité page 53.)

[Aubin, 1979] J.-P. Aubin, **Applied functional analysis**, John Wiley & Sons, New York, 1979. (Cité page 52.)

[Ayachi, Blot, 2009] M. Ayachi & J. Blot, A variational approach for almost periodic solutions in retarded functional differential equations, Differerential Equations and Applications **1**(1) 2009, 67-84. (Cité page 27.)

[Ayachi, Blot, Cieutat, 2011] M. Ayachi, J. Blot & P. Cieutat, Almost periodic solutions of monotone second-order differential equations, Advanced Nonlinear Studies **11** 2011, 541-554.

[Bénilan, 1973] P. Bénilan, **Fonctions vectorielles d'une variable réelle**, Appendice dans le livre de H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones, et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973. (Cité page 52.)

[Besicovitch, 1932] A.S. Besicovitch, **Almost periodic functions**, Cambridge University Press, Cambridge, 1932. (Cité pages 25 et 44.)

[Blot 1, 1991] J. Blot, Une approche hilbertienne pour les trajectoires presque-périodiques, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique , **313** 1991, 487-490. (Cité page 28.)

[Blot 2, 1991] J. Blot, Almost periodic solutions of forced second-order Hamiltonian systems, Annales de la faculté des sciences de Toulouse (6) **XIII**(3) 1991, 351-363.

[Blot, 1993] J. Blot, Almost periodically forced pendulum, Funkcialaj Ekvacioj **36**(2) 1993, 235-250.

[Blot, 1994] J. Blot, Oscillations presque-périodiques forcées d'équations d'Euler-Lagrange, Bulletin de Société Mathématique de France **122**(2) 1994, 285-304. (Cité pages 28, 40, 51 et 55.)

[Blot, Cieutat, N'Guérékata, Pennequin, 2009] J. Blot, P. Cieutat, G.M. N'Guérékata & D. Pennequin, Superposition operators between various almost periodic function spaces and applications, Communications in Mathematical Analysis **6**(1) 2009, 42-70. (Cité pages 40, 42 et 52.)

[Blot, Lassoued, 2011] J. Blot, D. Lassoued, Bumps of potentials and almost periodic oscillations, African Diaspora Journal of Mathematics **12**, 2 (2011) 122-133, Special Volume in Honor of Profs. C. Corduneanu, A. Fink and S. Zaidman. (Cité page 39.)

[Bohr, 1933] H. Bohr, **Almost periodic functions**, Julius Springer, Berlin, 1933. (Cité pages 49, 50 et 53.)

[Bugajewski, N'Guérékata, 2004] D. Bugajewski & G.M. N'Guérékata, On some classes of almost periodic functions in abstract spaces, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **61** 2004, 3237-3247.

[Cartan, 1967] H. Cartan, **Calcul différentiel**, Hermann, Collection Méthodes, Paris, 1967. (Cité page 45.)

[Cieutat, 2003] P. Cieutat, Almost periodic solutions of second-order systems with monotone fields on a compact subset, Nonlinear Analysis **53** 2003, 751-763. (Cité page 42.)

[Corduneanu, 2009] C. Corduneanu, **Almost periodic oscillations and waves**, Springer Science+Businesss Media, LLC, New York, 2009. (Cité page 53.)

[EKeland, Temam, 1972] Ivar Ekeland Roger Temam, **Analyse convexe et problèmes variationnels**, Dunod, Paris, 1972. (Cité page 47.)

[Lang, 1993] S. Lang, **Real and functional analysis**, Third edition, Springer-Verlag, New York, Inc., 1993. (Cité pages 44 et 53.)

[Pankov, 1990] A.A. Pankov, **Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations**, English edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990. (Cité page 13.)

[Riesz, Nagy, 1975] F. Riesz & B. Sz Nagy, **Analyse fonctionnelle**, 6-ème édition française, Gauthier-Villars, Paris, 1975. (Cité page 51.)

[Zaidman, 1985] S. Zaidman, **Almost periodic functions in abstract spaces**, Pitman Publishing Inc., Marshfield, Mass., 1985.

Semi-groupes et familles d'évolution

3

Compte tenu de la remarque simple que la fonction exponentielle réalise l'isomorphisme fondamental algébrique et topologique entre le groupe topologique additif des nombres réels et le groupe topologique multiplicatif des nombres réels strictement positifs, on peut constater que la fonction $t \mapsto e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$, est une solution réelle continue de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(t+s) = f(t)f(s)$ avec la condition $f(0) = 1$. Cette équation a été etudiée par de nombreux mathématiciens dont **Cauchy** [1]. D'autre part, il est bien connu que la fonction exponentielle $t \mapsto e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$, est la solution unique sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x' = ax$ avec la condition initiale $x(0) = 1$. L'importance des fonctions exponentielles a connu une grande croissance après l'année 1888, quand **Giuseppe Peano** [2] a eu l'inspiration d'écrire la solution du Problème de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

où A est une matrice carrée, sous la forme $t \mapsto e^{tA} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$.

Ce résultat a été étendu aux équations différentielles opératorielles $X' = AX$, où A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach X, qui a pour solution fondamentale la fonction exponentielle $t \mapsto e^{tA}$.

Ces extensions de la fonction exponentielle admettent un modèle général dans le cadre des algèbres de Banach abstraites. Plus précisément, si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach avec l'unité I et $a \in \mathcal{B}$, alors la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{ta} \in \mathcal{B}$ donnée par $e^{ta} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n a^n}{n!}$ est dérivable et est l'unique solution du Problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(0) = I \end{cases}$$

En tenant compte de l'unicité de la solution du problème de Cauchy, il en résulte que la fonction $f(t) = e^{at}$ satisfait sur $\mathbb{R}$ à l'équation fonctionnelle

1. Augustin Louis : né le 21 août 1789 à Paris - mort le 23 mai 1857 à Sceaux
2. Né le 27 août 1858 à Coni, Italie - mort le 20 avril 1932 à Cavoretto, près de Turin

de Cauchy. Le problème reciproque de savoir si les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy sont des solutions pour les équations différentielles linéaires de premier ordre $x' = ax$, s'est avéré plus difficile mais il a été résolu par Nathan (Nathan, 1935) et Yosida (Yosida, 1936). Par suite, la double caractérisation de la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle de Cauchy et par l'équation différentielle linéaire de premier ordre a été établie pour le cas général des algèbres de Banach abstraites.

Ces caractérisations importantes ont suggéré l'idée d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre par des extensions adéquates de la fonction exponentielle. De cette manière, est apparue la nécessité de considérer les équations différentielles vectorielles de premier ordre $x' = Ax$ où A n'est pas un opérateur de l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{L}$, mais un opérateur linéaire non-borné dans un espace de Banach X. La définition d'une fonction exponentielle comme une solution de cette équation a été realisée par l'introduction des semi-groupes de classe $\mathcal{C}^0$. Mais, dans ce cas-là, l'équation fonctionnelle de Cauchy se réfère aux fonctions $[0,\infty] \to \mathcal{L}(X), \quad t \mapsto T(t)$, avec $T(0) = I$, satisfaisant la relation $T(t+s) = T(t)T(s)$ et qui sont fortement continues, c'est-à-dire ayant la propriété $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ pour tout $x \in X$. Les résultats fondamentaux pour les semi-groupes de classe $\mathcal{C}^0$ dans les espaces de Banach ont été obtenus par Hille (Hille, 1936), (Hille, 1948), (Hille, 1952), Yosida (Yosida, 1948), (Yosida, 1957), Feller (Feller, 1952), (Feller, 1953), Miyadera (Miyadera, 1952), (Miyadera, 1956) et Phillips (Phillips, 1952), (Hille, Phillips, 1957) qui ont créé la théorie des $\mathcal{C}^0$-semi-groupes et de leurs générateurs.

Le célèbre théorème de Hille-Yosida-Feller-Miyadera-Phillips rétablit le lien entre l'équation fonctionnelle de Cauchy $T(t+s) = T(t)T(s)$ et l'équation différentielle $x' = Ax$, où A est un opérateur non-borné fermé et densément défini dans un espace de Banach X. Dans ce cas, $T(t)$ représente dans un certain sens la fonction exponentielle.

Dans ce chapitre, on se propose, en premier lieu, de rappeler quelques propriétés liées aux semi-groupes. Ensuite, des résultats préliminaires portant sur le comportement asymptotique de semi-groupes sont introduits. Ces derniers résultats seront d'un grande importance pour la compréhension du chapitre suivant.

Par ailleurs, on définira la notion de la famille dévolution, qui possède un lien fort avec la théorie de semi-groupes, ainsi que quelques propriétés fondamentales donnant l'information sur son comportement asymptotique. Comme le cas périodique est le cas considéré dans le chapitre suivant, on rappelle quelques résultats portant sur la stabilité des familles d'évolution périodiques.

3.1 Semi-groupes d'opérateurs

3.1.1 Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe, X désigne un espace de Banach et $\mathcal{L}(X)$ désigne l'algèbre de Banach de toutes les applications linéaires continues de X dans lui-même. On notera les normes sur ces deux espaces par le même symbole $\|.\|$.

Définition 3.1

1. *Une famille à un paramètre* $\mathbf{T} := (T(t))_{t\geq 0} \in \mathcal{L}(X)^{\mathbb{R}^+}$ *est dite* semi-groupe d'opérateurs *si :*
   i. $T(0) = I$.
   ii. $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$, *pour tous* $t,\ s \geq 0$.
   I désigne l'opérateur identité sur X.
2. *Le semi-groupe* $\mathbf{T}$ *est* uniformément continu *s'il est uniformément continu en* 0, *c'est-à-dire si*
$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - T(0)\| = 0.$$
3. *Le semi-groupe* $\mathbf{T}$ *est* fortement continu *s'il est fortement continu en* 0, *c'est-à-dire si, pour tout* $x \in X$,
$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$$
4. *Le semi-groupe* $\mathbf{T}$ *est* faiblement continu *si pour tout* $x \in X$ *et tout* $x^* \in X^*$
$$\lim_{t\to 0^+} |x^*(T(t)x) - x^*(T(0)x)| = 0.$$
X^* désigne le dual topologique *de X.*

Remarques 3.1

1. *Tout semi-groupe fortement continu est faiblement continu.*
2. *Tout semi-groupe uniformément continu est fortement continu. En revanche, la réciproque n'est pas vraie.*
3. *Il est également clair que dans ce contexte, la continuité en* 0 *ou selon une trajectoire implique la continuité du semi-groupe partout dans* $\mathbb{R}_+$.

Proposition 3.1 *Si* $\mathbf{T}$ *est un semi-groupe fortement continu, alors il existe* $\omega \in \mathbb{R}$ *et* $M \geq 1$ *tels que, pour tout* $t \geq 0$, *on ait*
$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}. \tag{3.1}$$

Si l'inégalité (3.1) est vérifiée, on dit que le semi-groupe est de croissance exponentielle et on notera le taux de croissance de $\mathbf{T}$ par

$$\left.\begin{aligned} \omega_0(\mathbf{T}) &= \inf\left\{\omega \in \mathbb{R}|\ \exists M \geq 1 :\ \forall t \geq 0\ \ \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}\right\} \\ &= \inf\left\{\omega \in \mathbb{R}|\ \ t \mapsto e^{-\omega t}\|T(t)\| \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+\right\} \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

En général, l'infimum dans l'égalité 3.2 n'est pas un minimum [3]. En effet, si l'on se place, par exemple, dans l'espace $X = \mathbb{C}^2$ muni dans la

3. D'autres définitions équivalentes de $\omega_0(\mathbf{T})$ sont données dans la littérature. On en retrouve notamment $\omega_0 := \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(\|T(t)\|)}{t}$ ou $\omega_0 := \inf_{t>0} \frac{\ln(\|T(t)\|)}{t}$ (cf. par exemple (Pazy, 1983, Nagel, 1986))

norme $\|.\|_1$ et si l'on prend la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $T(t) = e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne que, pour tout $t \geq 0$, $\|T(t)\|_1 = 1 + t$ alors que $\omega_0(\mathbf{T}) = 0$.

D'ailleurs, $\omega_0(\mathbf{T})$ peut même être égal à $-\infty$. En effet, soit l'espace $X := \mathcal{C}_0([0,1[) := \{f : [0,1[\to \mathbb{R};\quad f \text{ est continue et } \lim_{s\to 1} f(s) = 0\}$ muni de la norme "sup", qu'on notera $\|\cdot\|$. Pour tout $t > 0$, on définit

$$(T(t)f)(s) := \begin{cases} f(s+t) & \text{si } s \in [0,1[\text{ et } s+t < 1, \\ 0 & \text{si } s \in [0,1[\text{ et } s+t \geq 1. \end{cases}$$

Comme $f(s+t) \to 0$ lorsque $s+t \to 1$, on a $T(t)f \in X$. Il est clair que $T(t)$ est un opérateur linéaire et que $\|T(t)\| \leq 1$, pour tout réel $t > 0$. D'autre part, on remarque que, dès que $t \geq 1$, $T(t) = 0$. Il en résulte alors que $\omega_0(\mathbf{T}) = -\infty$. Dans ce cas particulier, on dit que $\{T(t) :\ t \geq 0\}$ est nilpotent.

Définition 3.2 *Soit* $\mathbf{T} = \{T(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ *un semi-groupe d'opérateurs linéaires définis sur l'espace de Banach* X.

Le générateur infinitésimal *du semi-groupe* $\mathbf{T}$ *est L'opérateur* $A : D(A) \subset X \to X$ *défini par*

1. $D(A) := \left\{u \in X : \lim_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)u - u}{t} \text{ existe}\right\}$.
2. $Au := \lim_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)u - u}{t}$, *pour tout* $u \in D(A)$.

La proposition suivante expose quelques propriétés du générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu. Pour la démonstration de cette proposition, on se réfère à (Engel, Nagel, 2000, Lemma p.50)

Proposition 3.2 *Soit* $\mathbf{T}$ *un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires définis sur un espace de Banach* X *et* $(A, D(A))$ *son générateur infinitésimal. Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

1. $D(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* A.
2. A *est un opérateur linéaire.*
3. *Si* $x \in D(A)$, *alors* $T(t)x \in D(A)$ *et on a* $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$, *pour tout* $t \geq 0$.
4. *Pour tout* $t \geq 0$ *et tout* $x \in D(A)$, *on a* $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$.
5. *Pour tout* $t \geq 0$, *on a*

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= A\int_0^t T(s)xds, \text{ pour tout } x \in X. \\ &= \int_0^t T(s)Axds, \text{ pour tout } x \in D(A). \end{aligned}$$

On a la caractérisation importante suivante du générateur d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires définis sur l'espace de Banach X :

Théorème 3.1 (Engel, Nagel, 2000, Theorem p. 51) *Le générateur d'un semi-groupe fortement continu est un opérateur fermé et densément défini qui détermine le semi-groupe d'une manière unique.*

3.1.2 Éléments de Théorie Spectrale

Soit un opérateur linéaire fermé (c'est-à-dire de graphe fermé) $A : D(A) \subset X \to X$ défini sur un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach X.

L'ensemble

$$\rho(A) := \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \ \mid \ (\lambda I - A) : D(A) \to X \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X) \Big\}$$

est appelé **l'ensemble résolvant** de A.

L'ensemble $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé **le spectre** de A.

Pour tout $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur inverse $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$ est dit **la résolvante** de A en λ. Par le théorème de graphe fermé, pour tout $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda I - A) : D(A) \to X$ est un opérateur fermé sur X.

Il résulte immédiatement de la définition que pour tout $\lambda \in \rho(A)$, $AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I$.

L'identité suivante donne naissance aux différentes propriétés de $\rho(A)$ ainsi que celles de l'application résolvante $\lambda \in \rho(A) \mapsto R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$: pour tout $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$.

Le théorème suivant établit le lien entre le semi-groupe et la résolvante de son générateur infinitésimal. On peut trouver une démonstration de ce théorème dans (Engel, Nagel, 2000, Theorem 1.10 p. 55)

Théorème 3.2 Soit $\mathbf{T} := \{T(t);\ t \geq 0\}$ un semi-groupe fortement continu sur l'espace de Banach X et on prend deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ (voir la Proposition 3.1) telles que $T(t) \leq Me^{\omega t}$ pour tout $t \geq 0$.

Pour le générateur infinitésimal de $\mathbf{T}$, les assertions suivantes sont vérifiées :

1. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $R(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds$ existe pour tout $x \in X$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A) = R(\lambda)$.*
2. *Si $Re(\lambda) > \omega$, alors $\lambda \in \rho(A)$, et la résolvante est donnée par l'intégrale dans* **1.**.
3. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) > \omega$, on a $\|(R(\lambda, A))^n\| \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^n}$ pour tout $Re(\lambda) > \omega$.*

La formule de $R(\lambda, A)$ dans **1.** est dite **la représentation intégrale de la résolvante**. L'intégrale est prise dans le sens impropre de Riemann, i.e. $R(\lambda)x := \lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x ds$ pour tout $x \in X$.

La propriété **2.** du théorème 3.2 montre que le spectre du générateur d'un semi-groupe est toujours contenu dans un demi-plan gauche. Le nombre déterminant le plus petit demi-plan donne une caractérisation importante de tout opérateur linéaire. Ce nombre est défini comme suit :

Définition 3.3 *À tout opérateur linéaire A, on fait correspondre sa borne spectrale définie comme*

$$s(A) := \sup \Big\{ Re(\lambda);\ \lambda \in \sigma(A) \Big\}.$$

Il en résulte alors que pour tout semi-groupe fortement continu $\mathbf{T}$ de générateur infinitésimal A, on a

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0(\mathbf{T}) < +\infty.$$

Pour tout opérateur linéaire borné A défini sur l'espace de Banach X dont le spectre $\sigma(A)$ est compact et non vide, on définit son **rayon spectral** comme suit :

$$r(A) := \sup\Big\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(A)\Big\} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Il est clair que c'est un nombre réel fini qui satisfait, en outre, $r(A) \leq \|A\|$ (cf. (Taylor, 1985, Theorem 3.5, Chap V) ou (Yosida, 1965, Theorem 3 XIII.2).

3.1.3 Caractérisation de la Stabilité Exponentielle Uniforme

Définition 3.4 *Un semi-groupe* $\mathbf{T} := \{T(t) : \quad t \geq 0\}$ *d'opérateurs linéaires bornés définis sur l'espace de Banach X est dit uniformément exponentiellement stable s'il existe deux constantes strictement positives N et ν telles que*

$$\|T(t)\| \leq Ne^{-\nu t}, \ \text{ pour tout } t \geq 0.$$

De cette définition, on déduit que le semi-groupe $\mathbf{T}$ est uniformément exponentiellement stable si et seulement si le taux $\omega_0(\mathbf{T})$ de croissance de $\mathbf{T}$ (cf. (3.2)) est strictement négatif, i.e. $\omega_0(\mathbf{T}) < 0$.

Ensuite, nous analysons le concept de stabilité selon deux points de vue : l'extension analytique du générateur et de la résolvante et l'admissibilité de type Perron.

Le théorème suivant donne une condition assurant la stabilité exponentielle uniforme d'un semi-groupe fortement continu $\mathbf{T}$ (cf. (Datko, 1970), (Pazy, 1972) et (Pazy, 1983, Chapitre 4, Théorème 4.1)).

Théorème 3.3 *Soit A le générateur infinitesimal d'un semi-groupe fortement continu* $\mathbf{T} := \{T(t) : \ t \in \mathbb{R}\}$. *Si, pour un certain réel p vérifant* $1 \leq p < \infty$, *on a*

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p dt < \infty, \text{ pour tout } x \in X,$$

alors $\mathbf{T}$ *est uniformément exponentiellement stable.*

Ce théorème, portant le nom de Datko-Pazy, est démontré dans (Pazy, 1983, Theorem 4.1 p 116).

Autrement dit, les trajectoires du semi-groupe fortement continu $\mathbf{T}$ appartiennent à l'espace $L^p(\mathbb{R}_+, X)$ si et seulement si ce semi-groupe est uniformément exponentiellement stable.

Sur la base de ce théorème, on déduit que $\omega_0(\mathbf{T})$ est l'abscisse de la convergence absolue de la transformée de Laplace du semi-groupe $\mathbf{T}$, ou d'une manière plus précise

$$\omega_0(\mathbf{T}) = \inf\Big\{\omega \in \mathbb{R} : \ \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\omega s}\|T(s)x\|ds \ \text{ existe pour tout } x \in X\Big\}.$$

Si A est le générateur infitésimal du semi-groupe $\mathbf{T}$ fortement continu défini sur l'espace de Banach X, on définit **le taux de croissance (exponentielle)** [4] de la trajectoire $T(\cdot)x$ (lorsque $x \in X$) par

$$\omega(x) := \inf\Big\{\omega \in \mathbb{R} : \ \exists \ M \geq 1 : \|T(t)x\| \leq Me^{\omega t} \ \text{ pour tout } t \geq 0\Big\}$$

4. Appelé aussi **type** du semi-groupe dans la littérature

On appelle $\omega_1(\mathbf{T}) := \sup\Big\{\omega(x), \quad x \in D(A)\Big\}$ le **taux de croissance (exponentielle)** des solutions de problème de Cauchy $u'(t) = Au(t)$.

$\omega_1(\mathbf{T})$ joue un rôle important dans l'étude du comportement asymptotique des trajectoires du semi-groupe $\mathbf{T}$; il surveille la croissance des solutions classiques, c'est-à-dire les solutions qui prennent naissance dans $D(A)$. Frank Neubrander a montré que $\omega_1(\mathbf{T})$ est encore l'abscisse de la convergence de la transformée inappropriée de Laplace du semi-groupe $\mathbf{T}$, autrement dit, il a prouvé que

$$\omega_1(\mathbf{T}) = \inf\Big\{\omega \in \mathbb{R} \ : \ \forall x \in X, \ \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x ds \text{ existe dans } X,$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{C} : \ Re(\lambda) > \omega\Big\}.$$

Comme on le sait déjà, si les nombres λ appartiennent à $\rho(A)$, l'intégrale définie ci-dessus est égale à $R(\lambda, A)x$.

En outre, Wrobel a démontré que si la résolvante est uniformément bornée dans un demi-plan ouvert à droite du plan complexe, et l'espace X est B-convexe, alors $\omega_1(\mathbf{T})$ est négatif. Ici, on rappelle qu'un espace de Banach X est B-convexe s'il existe un $\delta > 0$ tel que $\min\{\|x - y\|, \|x + y\|\} < 2(1 - \delta)$, pour tout x, y dans la boule unité.

D'autre part, on a, d'après (Nagel, 1986, A.IV, Corollary 1.5), $s(A) \leq \omega_1(\mathbf{T}) \leq \omega_0(\mathbf{T})$. Si le semi-groupe est uniformément continu, les trois membres sont égaux.

Puisque l'utilisation du théorème 3.3 est conditionnée par la connaissance du semi-groupe $\mathbf{T}$ alors que dans les applications, les informations qu'on possède sont souvent liées au générateur infinitesimal, il est nécessaire d'opter pour des caractérisations de la stabilité portant sur ce générateur ou sur la résolvante de ce générateur.

La localisation du spectre du générateur d'un semi-groupe fortement continu dans le demi-plan $\mathbb{C}_- := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ Re(\lambda) < 0\}$ n'assure pas la convergence vers 0 des trajectoires de semi-groupe contrairement à la situation similaire des semi-groupes engendrés par des opérateurs linéaires bornés. L. Gearhart a montré que si $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$ et si l'opérateur $R(\cdot, A)$ est uniformément borné sur $i\mathbb{R}$, i.e.

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \|R(i\mu, A)\| := M < \infty, \tag{3.3}$$

alors le semi-groupe généré par A opérant sur un espace de Hilbert est uniformément exponentiellement stable ((Gearhart, 1978), (Huang, 1985), (Prüss, 1984), (Greiner 1985)).

Puisque la résolvante $R(\cdot, A)$ est la transformée de Laplace de $T(\cdot)$ sur l'axe imaginaire $i\mathbb{R}$, la relation (3.3) peut également s'écrire comme suit :

$$\forall x \in X, \ \sup_{\mu\in\mathbb{R}} \Big\| \int_0^\infty e^{-i\mu t} T(t)x dt \Big\| := M(x) < \infty, \tag{3.4}$$

Maintenant, on définit l'**indice de croissance uniforme** de la résolvante par

$$s_0(\mathbf{T}) := \inf\Big\{\omega \in \mathbb{R} : \sup_{Re(\lambda)>\omega} \Big\| \int_0^\infty e^{-i\lambda t} T(t)x dt \Big\|, \ \text{pour tout } x \in X\Big\}.$$

On a, évidemment,

$$\omega_1(\mathbf{T}) \leq s_0(\mathbf{T}) \leq \omega_0(\mathbf{T}).$$

Du théorème de Gearhart, il résulte que pour un semi-groupe fortement continu opérant sur un espace de Hilbert, $s_0(\mathbf{T}) = \omega_0(\mathbf{T})$.

Sous les hypothèses du théorème de Gearhart mais dans des espaces de Banach, Wreis et Wrobel ont prouvé que le semi-groupe $\mathbf{T}$ est exponentiellement stable, i.e. $\omega_1(\mathbf{T}) < 0$.

De l'hypothèse de la bornitude (3.4), les hypothèses du théorème de van Neerven - Vu Phong n'est qu'une étape.

Théorème 3.4 *Soit $\mathbf{T} := \{T(t) : \ t \geq 0\}$ un semi-groupe fortement continu opérant sur un espace vectoriel normé X dont on note son générateur infinitesimal par A.*
On suppose que

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\geq 0} \left\| \int_0^t e^{-i\mu s} T(s)x ds \right\| := M(x) < \infty, \ (\forall x \in X) \tag{3.5}$$

- *Si X est un espace de Banach, alors $\mathbf{T}$ est exponentiellement stable, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes strictement positives N et ν telles que*

$$\|T(t)x\| \leq Ne^{-\nu t}(\|x\| + \|Ax\|), \ (\forall x \in D(A)).$$

- *Si X est un espace de Hilbert, alors $\mathbf{T}$ uniformément exponentiellement stable.*

On présente dans ce qui suit les idées principales de la démonstration proposée par van Neerven :

1. En se servant des théorèmes de l'analyse complexe appliqués sur des fonctions à valeurs vectorielles (parmi les quelles on trouve le théorème de Phragmen-Lindelöf et Vitali), Jan van Neerven a prouvé que si pour un $x_0 \in X$, on a

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\geq 0} \left\| \int_0^t e^{-i\mu s} T(s)x ds \right\| := M < \infty,$$

alors la fonction $\lambda \mapsto R(\lambda, A)x_0$ admet une extension analystique bornée sur $\mathbb{C}_+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ Re(\lambda) > 0\}$.

2. De plus, si la fonction $\lambda \mapsto R(\lambda, A)x_0$ admet une extension analytique bornée sur $\mathbb{C}_+$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\lambda) > \omega_0(\mathbf{T})$, on a

$$\|T(t)R(\lambda, A)x_0\| \leq M(1 + t), \ \forall t \geq 0 \tag{3.6}$$

Pour démontrer (3.6), ont été utilisées la première écriture de la transformée de Laplace du semi-groupe (3.4) et puis la formule d'inversion

$$T(t)R(\lambda, A)x_0 = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{zt} R(z, A)R(\lambda, A)x_0 dz, \text{ si } \quad Re(\lambda) > \omega_0(\mathbf{T}).$$

D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale sur le contour $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (orienté comme dans la figure 3.1) est nulle. En évaluant les différentes intégrales, on obtient ce que l'on souhaitait.

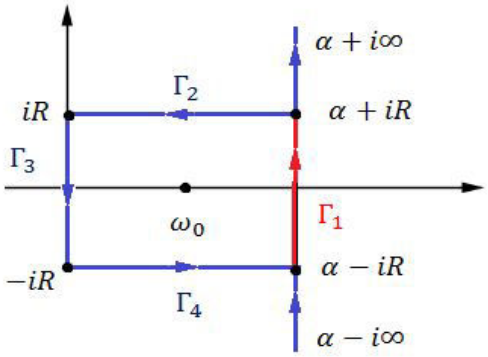


FIGURE 3.1 – **Déformation du contour d'intégration.**

3. Il a montré que si

$$\forall x \in X, \quad \sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\geq 0} \left\| \int_0^t e^{-i\mu s} T(s)x ds \right\| := M(x) < \infty,$$

alors la résolvante $R(\cdot, A)$, en fonction de valeurs avec les opérateurs, admet un prolongement analytique borné sur $\bar{\mathbb{C}}_+$. Un résultat connu assure que si $\|R(\lambda, A)\| \leq L < \infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) \geq 0$, alors la résolvante est bornée par la constante L pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > -\frac{1}{2L}$. En choisissant $\delta = \frac{1}{4L} > 0$ et considérant le semi-groupe $S(t) = e^{\delta t}T(t)$ engendré par $B := \delta I - A$ dont la résolvante $R(\lambda, B) = R(\lambda - \delta, A)$ est bornée, on obtient

$$\forall t \geq 0, \forall x \in X, \quad \|T(t)R(\lambda - \delta, A)x\| \leq M_x e^{-\delta t}(1 + t).$$

Finalement,

$$\omega_1(\mathbf{T}) = \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \|T(t)R(\lambda - \delta, A)\|}{t} \leq -\delta < 0.$$

Remarque 3.1 *La condition (3.5), assurant une uniformité par rapport au paramètre μ, a été initialement introduite par* **M.G. Krein** [5].

Exemple (Buşe, 1998, Example 2) Soit $X_1 := C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ qui tendent vers 0 à l'infini et $X_2 := L_1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}, e^s ds)$ l'espace de toutes les fonctions mesurables $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ vérifiant $\int_0^\infty e^t |x(t)| dt < \infty$. On pose $X := X_1 \cap X_2$. On définit sur X la norme suivante

$$\|x\|_X := |x|_\infty + \int_0^\infty e^t |x(t)| dt, \quad x \in X.$$

Pour tout $t \geq 0$, on définit l'opérateur $S(t) : X \to X$ par $(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau)$, pour tout $\tau \geq 0$. Il est facile à vérifier que $\mathbf{S}:= \{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X de générateur infinitesimal A_S :

5. Mark Grigorievich : né le 3 avril 1907 à Kiev (Ukraine) - mort le 17 octobre 1989 à Odessa.

$D(A_S) \to X$ donné par $A_S = \dot{x}$ et $D(A_S) = \{x \in C^1(\mathbb{R}_+, X) : \dot{x} \in X\}$. De plus, d'après (Nagel, 1986, p. 100) $\omega_1(\mathbf{S}) = s(A_S) = -1$ et $\omega_0(\mathbf{S}) = 0$. Maintenant, soit $T(t) = e^{\frac{t}{2}} S(t)$, $t \geq 0$. Il est évident que, si A_T est le générateur infinitésimal de $\mathbf{T} := \{T(t) : \quad t \geq 0\}$, $\omega_1(\mathbf{T}) = s(A_T) = -\frac{1}{2}$ et $\omega_0(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}$. Montrons que $\mathbf{T}$ vérifie (3.5). Soit $x \in X$, $t > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. La fonction $u : [0,t] \to X$, $u(s) = e^{i\mu s} T(s)x$ est continue et donc Bochner intégrable, et la fonction $v : [0,t] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, $v(s,\tau) = e^{i\mu s} x(s+\tau)$ est mesurable. Alors

$$\left(\int_0^t e^{i\mu s} T(s)x ds \right)(\tau) = \int_0^t e^{i\mu s} x(s+\tau) ds.$$

De plus,

$$\left| \int_0^t e^{i\mu s} T(s)x ds \right|_\infty = \sup_{\tau \geq 0} \left| \int_0^t e^{i\mu s + \frac{1}{2}s} x(s+\tau) ds \right| \leq \int_0^\infty e^s |x(s)| ds = M < \infty$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^\tau \left| \left(\int_0^t e^{i\mu s} T(s)x ds \right)(\tau) \right| d\tau &= \int_0^\infty e^\tau \left| \int_0^t e^{i\mu s + \frac{1}{2}s} x(s+\tau) ds \right| d\tau \\
&\leq \int_0^\infty e^\tau \left(\int_0^t e^{\frac{1}{2}s} |x(s+\tau)| ds \right) d\tau \\
&= \int_0^t e^{\frac{1}{2}s} \left(\int_0^\infty e^\tau |x(s+\tau)| d\tau \right) ds \\
&= \int_0^t e^{\frac{1}{2}s} \left(\int_s^\infty e^{r-s} |x(r)| dr \right) ds \\
&\leq M \int_0^t e^{-\frac{1}{2}s} ds \leq 2M.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}} \sup_{t \geq 0} \left\| \int_0^t e^{i\mu s} T(s)x ds \right\|_X \leq 3M,$$

et donc, la condition (3.5) est remplie et $\omega_0(\mathbf{T}) = \mathbf{\frac{1}{2}}$.

■

Dans ce qui suit, on présente les idées de la démonstration du théorème de Vu Phong, (Phong, 2001) : dans (Reghiş, Buşe, 1998), il a été montré que si

$$\sup_{t \geq 0} \left\| \int_0^t T(s)x ds \right\| = M(x) < \infty, \quad (\forall x \in X),$$

alors $0 \in \rho(A)$, c'est-à-dire que $A^{-1} = R(0,A)$ existe. Le résultat précédent reste vrai si $S(t) = e^{i\mu t} T(t)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, au lieu de $T(t)$, dans ce cas on

conclut que $i\mu \in \rho(A)$. Vu Phong a complété ce résultat en montrant dans ces conditions que, pour tout réel μ,

$$\|R(i\mu, A)\| \leq M_\mu := \sup_{t\geq 0} \left\| \int_0^t e^{-i\mu s} T(s) ds \right\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

De l'hypothèse (3.5), il existe une constante absolue M telle que

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \|R(i\mu, A)\| \leq M := \sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\geq 0} \left\| \int_0^t e^{-i\mu s} T(s) ds \right\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Ainsi est obtenue l'assertion désirée via le Théorème de Gearhart.

En 1930, Oscar Perron a trouvé un lien entre la propriété de stabilité exponentielle uniforme d'un système différentiel et une certaine condition, appelée depuis, **condition de Perron**. Plus de détails sur cette question se trouve dans (Perron, 1930), pour le cas où l'espace est de dimension finie et dans (Massera, Schäffer, 1966), pour le cas général. On présente brièvement l'idée de Perron pour les systèmes différentiels linéaires autonomes. Soit a un nombre complexe. L'équation différentielle scalaire

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

est asmptotiquement stable, i.e. $\lim_{t\to\infty} \left| e^{(t-t_0)a} \right| = 0$ pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, si et seulement si la partie réelle de a est négative ou si et seulement si pour tout nombre réel μ et pour tout scalaire complexe b, la solution du Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = ay(t) + e^{i\mu t} b, & t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

est bornée.

Ce résultat peut être étendu au cas où a est une matrice quadratique à valeurs complexes et b est un vecteur de $\mathbb{C}^n$, ou même si a est un opérateur linéaire et borné agissant sur un espace de Banach, et b est un vecteur dans son domaine, (voir par exemple (Balint, 1983)). En outre, le résulat peut être étendu au cas de semi-groupes fortement continus, comme indiqué dans l'ouvrage et les articles (van Neerven, 1996, 2), et (Barbu, Buşe, 1997), (Reghiş, Buşe, 1998), (Buşe, Prajea, 2008). Ces résultats de stabilité pour la matrice étaient généralisés dans (Zada, 2008) pour le cas de la dichotomie exponentielle.

3.2 Famille d'évolution périodique

Définition 3.5 *Une sous-famille à deux paramètres $\mathcal{U} = (U(t,s))_{t\geq s}$ de $\mathcal{L}(X)$ est une* **famille d'évolution** *sur un espace de Banach X si :*

1. *$U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$ pour touts $t \geq s \geq r$ et*
2. *$U(t,t) = I$ pour tout t, où I est l'opérateur identité sur $\mathcal{L}(X)$.*

La famille d'évolution $\mathcal{U}$ est dite **fortement continue** si pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s\} & \longrightarrow & X \\ (t,s) & \longmapsto & U(t,s)x \end{array}$$

est continue. Si la famille d'évolution fortement continue $\mathcal{U} = \{U(t,s)\}_{t \geq s}$ satisfait la condition de convolution $U(t,s) = U(t-s,0)$, pour toutes les paires (t,s) avec $t \geq s$, alors la famille $(T(t))_{t \geq 0}$, définie par $T(t) := U(t,0)$, est un semi-groupe fortement continu.

S'il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telles que

$$\|U(t,s)\| \leq Me^{\omega(t-s)}, \text{ pour tous } t \geq s,$$

on dit que la famille $\mathcal{U}$ est à **croissance exponentielle**. En outre, si pour un certain $q > 0$ fixé on a

$$U(t+q, s+q) = U(t,s), \text{ pour tous } t \geq s,$$

la famille $\mathcal{U}$ est dite **périodique** de période q. Il est évident que toute famille d'évolution q-périodique vérifie

$$\forall u \in [0,q], \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad U(pq+q, pq+u) = U(q,u),$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}, p \geq r, \quad U(pq,rq) = U((p-r)q,0) = U(q,0)^{p-r}.$$

Toute famille d'évolution $\mathcal{U} = \{U(t,s)\}$, périodique de période q, définie pour les couples (t,s), avec $t \geq s \geq 0$ peut être prolongée à une famille d'évolution q-périodique définie pour tous les couples (t,s), avec $t \geq s \in \mathbb{R}$, telle que $U(t,s) = U(t+kq, s+kq)$, où k est le plus petit entier pour lequel $s + kq \geq 0$.

Il est connu que la famille d'évolution $\mathcal{U}$ fortement continue et périodique de période q admet une croissance exponentielle (cf. par exemple, (Buşe, Pogan, 2001, Lemma 4.1)). On dit que la famille dévolution $\mathcal{U}$ est **uniformément exponentiellement stable** s'il existe deux constantes strictement positives N et ν telles que

$$\|U(t,s)\| \leq Ne^{-\nu(t-s)}, \quad \text{pour tout } t \geq s \geq 0.$$

Remarque 3.2 *Une famille d'évolution $\mathcal{U}$, fortement continue et périodique de période q, est uniformément exponentiellement stable si et seulement s'il existe deux constantes strictement positives N_1 et ν_1 telles que*

$$\|U(t,0)\| \leq N_1 e^{-\nu_1 t}, \quad \textit{pour tout } t \geq 0.$$

Démonstration. L'implication directe est évidente. Réciproquement, soit k la partie entière de $\frac{s}{q}$. Alors, pour tous $t \geq s+q$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|U(t,s)\| & \leq & \|U(t-(k+1)q,0)\|\|U((k+1)q,s\| \\ & \leq & N_1 e^{-\nu_1(t-kq-q)} M e^{\omega q} \\ & = & N_1 M e^{(\omega+\nu_1)q} e^{-\nu_1(t-s)}. \end{array}$$

Si $t \in [s, s+q]$, on peut choisir $N_1 > 0$, suffisamment grand, tel qu'il existe $\nu_1 > 0$ vérifiant la propriété $Me^{\omega q} \leq N_1 e^{-\nu_1(t-s)}$.

■

Dans (Buşe, Lemma 2), il a été montré qu'une famille d'évolution $\mathcal{U}$, fortement continue et périodique de période q, est uniformément exponentiellement stable si et seulement si le rayon specral de $U(q,0)$ est strictement inférieur à un, i.e.

$$r(U(q,0)) := \sup\left\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(U(q,0))\right\} = \lim_{n\to\infty} \|U(q,0)^n\|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Une autre caractérisation de la stabilité exponentielle uniforme de familles évolution périodiques de période q utilisée dans les chapitres suivants, est donnée par la proposition suivante. Cela est une conséquence du théorème ergodique uniforme (Krengel, 1985, Theorem 2.1, Theorem 2.7)

Proposition 3.3 *Soit $\mathcal{U} = (U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ une famille d'évolution fortement continue et périodique de période q agissant sur un espace de Banach X. La famille $\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable si et seulement si pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\sup_{\nu\geq 1}\left\|\sum_{k=1}^{\nu} e^{i\mu k}U(q,0)^k\right\| := L(\mu) < \infty.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition peut être trouvée par exemple dans le Lemme 1 de (Buşe, Cerone, Dragomir, Sofo, 2005)). Pour la cohérence du texte, on présente cette démonstration. En utilisant l'identité suivante

$$\left(e^{i\mu}U(q,0) - I\right)\left(I + e^{i\mu}U(q,0) + e^{i\mu 2}U(q,0)^2 + \cdots + e^{i\mu\nu}U(q,0)^\nu\right)$$
$$= e^{i\mu(\nu+1)}U(q,0)^{\nu+1} - I,$$

on obtient, par passage à la norme,

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad \left\|e^{i\mu(\nu+1)}U(q,0)^{\nu+1}\right\| \leq 1 + L(\mu)\left(1 + \|U(q,0)\|\right),$$

autrement dit, $r(U(q,0)) \leq 1$, et donc $\sigma(U(q,0)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad |\lambda| \leq 1\}$.

On suppose, par l'absurde, que $1 \in \sigma(U(q,0))$. Étant donné que $1 \in \partial\sigma(U(q,0))$ il s'ensuit que $1 \in \sigma_a(U(q,0))$, en effet, d'après (Buşe, 2003, Proposition 2.6.3), **la frontière du spectre** d'un opérateur linéaire fermé A, noté par $\partial\sigma(A)$, est contenu dans le spectre approximatif de A, c'est-à-dire que

$$\partial\sigma(A) \subset \sigma_a(A) \subset \sigma(A).$$

[*Ici, on rappelle que le scalaire complexe λ appartient à $\sigma_a(A)$, **le spectre approximatif** de A s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $x_n \in D(A)$ et $\|x_n\| = 1$ pour tout n, telle que $\lambda x_n - Ax_n \to 0$, quand $n \to \infty$.*]
Il existe, alors, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $x_n \in X$ et $\|x_n\| = 1$ tels que

$$(I - U(q,0))\, x_n \to 0, \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Il en découle que, $U(q,0)^k\,(I - U(q,0))\, x_n \to 0$, la convergence est uniforme par rapport à $k \in \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$, $m > 2L(0)$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left\|U(q,0)^k\,(I - U(q,0))\, x_n\right\| \leq \frac{1}{2m}, \quad \text{pour tout } k = 0, 1, \cdots, m.$$

Alors

$$\begin{aligned} L(0) &\geq \left\| \sum_{k=0}^{m} U(q,0)^k x_n \right\| = \left\| x_n + \sum_{k=1}^{m} U(q,0)^k x_n \right\| \\ &= \left\| x_n + \sum_{k=1}^{m} \left(x_n + \sum_{j=0}^{k-1} U(q,0)^j \left(U(q,0) - I \right) x_n \right) \right\| \\ &= \left\| (m+1)x_n + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{k-1} U(q,0)^j \left(U(q,0) - I \right) x_n \right\| \\ &\geq m+1 - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{k-1} \left\| U(q,0)^j \left(U(q,0) - I \right) x_n \right\| \\ &\geq m+1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{2m} = \frac{3(m+1)}{4} \geq \frac{m}{2} > L(0), \end{aligned}$$

D'où la contradiction. Ceci entraîne que $1 \notin \sigma(U(q,0))$. Appliquant le résultat précédent sur $V(q,0) = e^{i\mu}U(q,0)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$, il en résulte que $e^{-i\mu} \notin \sigma(U(q,0))$. Ainsi, $r(U(q,0)) < 1$, et par conséquent la famille $\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable.

■

Soit $J \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$ et X un espace de Banach ou de Hilbert. Dans le chapitre suivant, on utilisera les espaces suivants.

$BUC(J,X)$ - Espace vactoriel de toutes les fonctions définies sur J et à valeurs dans X qui sont uniformément continues et bornées sur J. Muni de la norme définie par $\|f\|_\infty := \sup_{t\in J} \|f(t)\|$, $BUC(J,X)$ devient un espace de Banach.

$AP(J,X)$ - Sous-espace vectoriel de $BUC(J,X)$ engendré par toutes les fonctions de la forme $f_\mu(t) = e^{i\mu t}x$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $x \in X$.

$AP_1(J,X)$ - Espace de toutes les fonctions $f \in AP(J,X)$ avec la propriété que la série de coefficients de Fourier associée à la fonction fonction f est absolument convergente. Pour plus de détails sur $AP(J,X)$ et $AP_1(J,X)$ on se réfère à (Corduneanu, 2009).

$P_q(J,X)$ - Espace de toutes les fonctions définies sur J et à valeurs dans X, qui sont périodiques de période q, i.e. $f(t+q) = f(t)$ pour tout $t \in J$.

$P_q^0(J,X)$ - Sous-espace de fonctions $f \in P_q(J,X)$ telles que $f(0) = 0$.

Bibliographie

[Amann, 2004] H. Amann, Maximal regularity for nonautonomous evolution equations, Advanced Nonlinear Studies **4**(2004), p. 417-430.

[Arshad, Buşe, Nosheen, Zada, 2011] S. Arshad, C. Buşe, A. Nosheen and A. Zada, Connections between the stability of a Poincare map and boundedness of certain associate sequences, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Nr. **16**(2011), p. 1-16.

[Balint, 1983] S. Balint, On the Perron-Bellman theorem for systems with constant coefficients, Analele Universitatii din Timişoara, Seria Stiinte Matematice volume **XXI**, fasc. **1-2** (1983), p. 3-8. (Cité page 69.)

[Barbaşin, 1967] E. A. Barbashin, **Introduction in the theory of stability**, Izd. Nauka, Moskow, 1967 (Russia).

[Barbu, Buşe, 1997] D. Barbu and C. Buşe, Some remarks about the Perron condition for C_0 semigroups, Analele Universitatii Timisora, fasc **1** (1997), p. 3-8. (Cité page 69.)

[Baroun, Maniar, Schnaubelt, 2009] M. Baroun, L. Maniar and R. Schnaubelt, Almost periodicity of parabolic evolution equations with inhomogeneous boundary values, Integral Equations and Operator Theory, Volume **65** (2009), Nr. 2, p. 169-193. (Cité page 103.)

[Buşe, 1998] C. Buşe, On the Perron-Bellman theorem for evolutionary processes with exponential growth in Banach spaces, New-Zealand Journal of Mathematics, Volume **27** (1998), p. 183-190. (Cité page 67.)

[Buşe] C. Buşe, Asymptotic stability and Perron condition for periodic evolution families on the half line, Evolution Equations and Semigroups (preprint), http ://ma1serv.mathematik.uni-karlsruhe.de/evolve-l/index.html. (Cité page 71.)

[Buşe, 2001] C. Buşe, Exponential Stability for Periodic Evolution Families of Bounded Linear Operators, Rendiconti Del Seminario Matematico, Volume **59**, 1(2001), p. 17-22.

[Buşe, 2002] C. Buşe, A spectral mapping theorem for evolution semigroups on the space of ssymptotically slmost periodic functions defined on the half line, Electronic Journal of Differential Equations, USA, Volume **2002**(2002), Nr. 70, p. 1-11.

[Buşe, 2003] C. Buşe, **Semigrupuri liniare pe spaţii Banach şi semigrupuri de evoluţie pe spaţii de funcţii aproape periodice**, Editura Eubeea, Timişoara, 2003. (Cité page 71.)

[Buşe, Choudary, Dragomir, Prajea, 2008] C. Buşe, A. D. R. Choudary, S. S. Dragomir and M. S. Prajea, On Uniform Exponential Stability of Exponentially Bounded Evolution Families, Integral Equation Operator Theory, **61**(2008), p. 325-340.

[Buşe, Cerone, Dragomir, Sofo, 2005] C. Buşe, P. Cerone, S. S. Dragomir and A. Sofo, Uniform stability of periodic discrete system in Banach spaces, Journal of Difference Equations and Applications **11**, Nr. 12 (2005), p. 1081-1088. (Cité page 71.)

[Buşe, Jitianu, 2003] C. Buşe and O. Jitianu, A new theorem on exponential stability of evolution families on Banach spaces, Electronic Journal of Differential Equations, USA, Volume **2003**(2003), Nr. 14, p. 1-10.

[Buşe, Lassoued, Lan Thanh Nguyen, Saierli, 2012] C. Buşe, D. Lassoued, Lan Thanh Nguyen and O. Saierli, Exponential stability and uniform boundedness of solutions for nonautonomous periodic abstract Cauchy problems. An evolution semigroup approach, Integral Equations and Operator Theory, Volume **74**, November 2012, Issue 3, p. 345-362.

[Buşe, Lupulescu, 2003] C. Buşe and V. Lupulescu, Exponential stability of linear and almost periodic systems on Banach spaces, Electronic Journal of Differential Equations, Volume **2003**(2003), Nr. 125, p. 1-7.

[Buşe, Megan, Praja, Preda, 2007] C. Buşe, M. Megan, M. Prajea and P. Preda, The strong variant of a Barbashin theorem on stability of solutions for non-autonomous differential equations in Banach spaces, Integral Equations and Operator Theory, **59** (2007), p. 491-500.

[Buşe, Pogan, 2001] C. Buşe and A. Pogan, Individual Exponential Stability for Evolution Families of Linear and Bounded Operators, New Zealand Journal of Mathematics, **30**(2001), p. 15-24. (Cité page 70.)

[Buşe, Prajea, 2008] C. Buşe and M. S. Prajea, On Asymptotic behavior of discrete and continious semigroups on Hilbert spaces, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie **51**(99), Nr. 2 (2008), p. 123-135. (Cité page 69.)

[Buşe, Zada, 2009] C. Buşe and A. Zada, Boundedness and exponential stability for periodic time dependent systems, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **37** (2009), p. 1-9.

[Chicone, Latushkin, 1999] C. Chicone and Y. Latushkin, **Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations**, Mathematical Surveys and Monographs, Volume **70**, American Mathematical Society, Providence R. I., (1999). (Cité pages 81 et 84.)

[Clark, Latushkin, Montgomery-Smith, Randolph, 2000] S. Clark, Y. Latushkin, S. Montgomery-Smith and T. Randolph, Stability Radius and Internal Versus External Stability in Banach Spaces : An evolution Semigroup Approach, SIAM Journal of Control and Optimization, **38**(6), (2000), p. 1757-1793. (Cité pages 81 et 84.)

[Corduneanu, 2009] C. Corduneanu, **Almost Periodic Oscilations and Wawes**, Springer Sciences+Business Media LLC(2009). (Cité page 72.)

[Daletckii, Krein, 1974] Ju. L. Daletckii and M. G. Krein, **Stability of solutions of differential equations in Banach spaces**, American Mathematical Society, Translation of Mathematical Monographs, Volume **43** (1974).

[Daners, Medina, 1992] D. Daners and P. Koch Medina, **Abstract evolution equations, periodic problems and applications**, Pitman Research Notes in Mathematics Series 279, Longman Scientific & Technical, 1992. (Cité page 103.)

[Datko, 1970] R. Datko, Extending a theorem of A.M. Liapunov to Hilbert space, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **32** (1970), p. 610-616. (Cité page 64.)

[Engel, Nagel, 2000] K. Engel and R. Nagel, **One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations**, Graduate Texts in Mathematics 194, Springer, (2000). (Cité pages 62 et 63.)

[Feller, 1952] W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations. Annals of Mathematics **55** (1952), p. 468519. (Cité page 60.)

[Feller, 1953] W. Feller, On the generation of unbounded semigroups of bounded linear operators. Annals of Mathematics, **58** (1953), p. 166174. (Cité page 60.)

[Gearhart, 1978] L. Gearhart, Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces, Transactions of the American Mathematical Society **236** (1978), p. 385-394. (Cité page 65.)

[Greiner, Voight, Wolff, 1981] G. Greiner, J. Voight and M. P. Wolff, On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators, Journal of Operator Theory, **5** (1981), p. 245-256.

[Hille, 1936] E. Hille, Notes on linear transformation. Transactions of the American Mathematical Society, **39** (1936),131-153. (Cité page 60.)

[Hille, 1948] E. Hille, **Functional Analysis and Semi-Groups**, A.M.S., New York, 1948. (Cité page 60.)

[Hille, 1952] E. Hille, A note on Cauchy's problem. Annales Societatis Mathematicae Polonae, **25** (1952), 56-68. (Cité page 60.)

[Hille, Phillips, 1957] E. Hille, R.S. Phillips, **Functional Analysis and SemiGroups**, A.M.S., Providence, Rhode Island, 1957. (Cité page 60.)

[Howland, 1984] J. S. Howland, On a theorem of Gearhart, Integral Equations and Operator Theory, **7** (1984), p. 138-142. (Cité page 81.)

[Huang, 1985] F. Huang, Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Annals of Differential Equations, **1** (1985), p. 43-56. (Cité page 65.)

[Huang, 1989] F. Huang, Exponential stability of linear systems in Banach spaces, Chinese Annals of Mathematics, **10B**(1989), p. 332-340.

[Krengel, 1985] U. Krengel, **Ergodic Theorems**, De Gruyter, Berlin, (1985). (Cité page 71.)

[Massera, Schäffer, 1966] J.L. Massera and J. J. Schäffer, **Linear Differential Equations and Function Spaces**, Pure and Applied Math, **21**, Academic Press, New-York and Londra, (1966). (Cité page 69.)

[Mather, 1968] J. Mather, Characterization of Anosov diffeomorphisms, Indagationes Mathematicae **30** (1968), p. 479-483. (Cité page 81.)

[Miyadera, 1952] I. Miyadera, Generation of strongly continuous semigroups of operators. The Tohoku Mathematical Journal, **4** (1952), 109-114. (Cité page 60.)

[Miyadera, 1956] I. Miyadera, On the representation theorem by Laplace transformation of vector- valued functions. The Tohoku Mathematical Journal, **8** (1956), 170-180. (Cité page 60.)

[Minh, Räbiger, Schnaubelt, 1998] N. Van Minh, F. R*ä*biger and R. Schnaubelt, Exponential stability, exponential expansiveness and exponential dichotomy of evolution equations on the half-line, Integral Equations Operator Theory, **32** (1998), p. 332-353. (Cité pages 81, 84 et 85.)

[Nagel, 1986] R. Nagel, **One-parameter Semigroups of Positive Operators**, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Volume **1184**, (1986). (Cité pages 61, 65 et 68.)

[Naito, Minh, 1999] T. Naito and N. Van Minh, Evolution semigroups and spectral criteria for almost periodic solutions of periodic evolution equations, Journal of Differential Equations, **152** (1999), p. 358-376. (Cité page 81.)

[Nathan, 1935] D.S. Nathan, One parameter groups of transformations in abstract vector spaces. Duke Mathematical Journal, **1** (1935), 518-526. (Cité page 60.)

[Neubrander, 1986] F. Neubrander, Laplace transform and asymptotic behavior of strongly continuous semigroups, Houston Journal of Mathematics, **12**, Nr. 4 (1986), p. 549-561.

[Lan Thanh Nguyen 1, 1999] L. Thanh Nguyen, On nonautonomous functional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **239**, Issue 1(1999), p. 158-174. (Cité page 103.)

[Lan Thanh Nguyen 2, 1999] L. Thanh Nguyen, On the wellposedness of nonautonomous second order Cauchy problems, East-West Journal of Mathematics, **1** (1999), Nr. 2, 131-146. (Cité page 103.)

[Pazy, 1972] A. Pazy, On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space, SIAM Journal of Mathematical Analysis, **3** (1972), p. 291-294. (Cité page 64.)

[Pazy, 1983] A. Pazy, **Semigroups of Linear Operators and Applications to Differential Equations**, Springer-Verlag, New York (1983). (Cité pages 61, 64 et 103.)

[Perron, 1930] O. Perron, Ueber eine Matrixtransformation, Mathematische Zeitschrift, **32**(1930), p. 465-473. (Cité page 69.)

[Phillips, 1952] R.S. Phillips, On the generation of semi-groups of linear operators. Pacific Journal of Mathematics, **2** (1952), 393–415. (Cité page 60.)

[Phong, 2001] V. Q. Phong, On stability of C_0-semigroups, Proceedings of the American Mathematical Society, **129**, Nr. 10 (2001), p. 2871-2879. (Cité page 68.)

[Priola, Zabczyk, 2003] E. Priola and J. Zabczyk, Null controllability with vanishing energy, SIAM Journal on Control and Optimization, **42**, Nr.3, (2003), p. 1013-1032.

[Prüss, 1984] J. Prüss, On the spectrum of C_0-semigroups, Transactions of the American Mathematical Society, **284** (1984), p. 847-857. (Cité page 65.)

[Reghiş, Buşe, 1998] M. Reghiş and C. Buşe, On the Perron-Bellman theorem for strongly continuous semigroups and periodic evolutionary processes in Banach spaces, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, **4** (1998), p. 155-166. (Cité pages 68, 69 et 90.)

[Rolewicz, 1986] S. Rolewicz, On uniform N-equistability, Jornal of Mathematical Analysis and Applications, **115** (1986), p. 434-441.

[Schnaubelt, 2002] R. Schnaubelt, Well posedness and asymptotic behavior of non-autonomous linear evolution equations, Evolution Equations, semigroups and functional analysis, Progress in Nonlinear Differential Equations an their Applications, Birkhäuser Basel (2002), p. 318-338. (Cité pages 81 et 84.)

[Stein, 2003] E.M. Stein and R. Shakarchi, **Fourier Analysis : An Introduction**, Princeton University Press, (2003). (Cité page 95.)

[Tanabe, 1960] K. Tanabe, On the Equations of Evolution in a Banach Space, Osaka Mathematical Journal, **12** (1960), p. 363-376. (Cité page 103.)

[Taylor, 1985] A. E. Taylor, **General Theory of Functions and Integration**, Dover Publications, (1985). (Cité page 64.)

[van Neerven, 1996, 1] J.M.A.M. van Neerven, Individual stability of C_0 semigroups with uniformly bounded local resolvent, Semigroup Forum, **53**, Nr. 1, (1996), p. 155-161.

[van Neerven, 1996, 2] J. M. A. M. van Neerven, **The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators**, Birkhäuser, Basel (1996). (Cité page 69.)

[van Neerevn, 2005] J.M.A.M. van Neerven, Null controllability and the algebraic Riccati equation in Banach spaces, SIAM Journal on Control and Optimization, **43**(2005), p. 1313-1327.

[van Neereven, 2007] J.M.A.M. van Neereven, **Stochastic Evolution Equations**, Lecture notes of the Internet Seminar 2007/08 (version May 07, 2010), http ://aw.twi.tudelft.nl/ neerven/publications/papers/ISEM.pdf.

[Weis, 2001] L. Weis, Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L^p regularity, Mathematische Annalen, **319**(4), (2001), p. 735-758.

[Weis, Wrobel, 1996] L. Weis and V. Wrobel, Asymptotic behavior of C_0 semigroups in Banach spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, **124**, Nr. 12 (1996), p. 3663-3671.

[Wrobel, 1989] V. Wrobel, Asymptotic behavior of C_0-semigroups in B-convex spaces, Indiana University Mathematics Journal, **38**(1989), p. 101-114.

[Yosida, 1936] K. Yosida, On the group embeded in the metrical complete ring. Japanese Journal of Mathematics, **13** (1936), 7–26. (Cité page 60.)

[Yosida, 1948] K. Yosida, On the differentiability and the representation of one-parameter semi- groups of linear operators. Journal of the Mathematical Society of Japan, **1** (1948), 15-21. (Cité page 60.)

[Yosida, 1957] K. Yosida, **Lectures on Semigroup Theory and its application to Cauchy problem in Partial Differential Equations**, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957. (Cité page 60.)

[Yosida, 1965] K. Yosida, **Functional Analysis**, Grundlehen Math. Wiss., Volume **123**, Springer-Verlag, (1965). (Cité page 64.)

[Zada, 2008] A. Zada, A characterization of dichotomy in terms of boundedness of solutions for some Cauchy problems, Electronic Journal of Differential Equations, Volume **2008**(2008), Nr. 94, pag. 1-5. (Cité page 69.)

[Zabczyk, 1992] J. Zabczyk, **Mathematical control theory : An introduction**, Birkhäuser, Poland, (1992). (Cité page 104.)

4 Solutions exponentiellement stables et uniformément bornées des problèmes de Cauchy non autonomes périodiques. Une approche basée sur un semi-groupe d'évolution

4.1 Description du Problème

Dans ce chapitre, on démontre que la famille d'évolution $\mathcal{U}$, périodique de période q, opérant sur un espace de Banach X, est uniformément exponentiellement stable si elle vérifie la condition de bornitude

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}}\sup_{t\geq\tau\geq 0}\left\|\int_{\tau}^{t} e^{i\mu s}U(t,s)xds\right\| := M(x) < \infty, \quad (\forall x \in X), \tag{4.1}$$

et si, en outre, pour tout x de l'espace de Banach X, la trajectoire partant de x, c'est-à-dire la fonction $t \mapsto U(t,0)x$, satisfait une condition de Lipschitz sur $]0,q[$. Dans le cas particulier du semi-groupe fortement continu d'opérateurs, la condition (4.1) peut s'écrire sous la forme

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}}\sup_{t\geq 0}\left\|\int_{0}^{t} e^{i\mu s}T(t-s)xds\right\| := M(x) < \infty, \quad (\forall x \in X). \tag{4.2}$$

L'idée de base de la démonstration est de montrer que, sous l'hypothèse (4.1), un semi-groupe d'évolution $\mathcal{T}$ associé à la famille $\mathcal{U}$ sur un espace convenable de fonctions à valeurs dans X, satisfait à la condition de bornitude

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}}\sup_{t\geq 0}\left\|\int_{0}^{t} e^{-i\mu s}T(s)fds\right\| < \infty,$$

pour tout élément f d'un sous-espace dense de l'espace Banach de fonctions considérées sur lequel opère le semi-groupe. La stabilité exponentielle uniforme de $\mathcal{T}$ est équivalente à la même propriété pour $\mathcal{U}$.

En outre, en s'appuyant sur un lemme bien connu, on prouve que si le semi-groupe d'évolution $\mathcal{T}$ est uniformément exponentiellement stable alors le générateur infinitésimal est inversbile.

La théorie spectrale pour les semi-groupes d'évolution est un sujet qui a ses origines dans les travaux de J. Mather pour les systèmes dynamiques hyperboliques, (Mather, 1968), et J. Howland pour les problèmes de Cauchy autonomes, (Howland, 1984). L'efficacité de cette méthode dans l'étude du comportement asymptotique des solutions des équations d'évolution est mise en évidence dans beaucoup d'articles et de monographies.

Pour plus de détails on peut se réfèrer à (Schnaubelt, 2002),
(Minh, Räbiger, Schnaubelt, 1998), (Chicone, Latushkin, 1999),
(Clark, Latushkin, Montgomery-Smith, Randolph, 2000)
et (Naito, Minh, 1999), mais aussi les références citées dans ces travaux. Dans tous ces travaux, un théorème spectral pour le semi-groupe d'évolution était fixé. Cela était possible parce que l'ensemble $C_0^\infty(]0,\infty[,X)$ de toutes les fonctions à valeurs dans X, indéfiniment dérivables et à support compact dans $]0,\infty[$, est dense dans l'espace de Banach de fonctions

$$E_p(\mathbb{R}_+,X) = \begin{cases} L^p(\mathbb{R}_+,X), & 1 \leq p < \infty \\ \mathcal{C}_{00}(\mathbb{R}_+,X), & p = \infty, \end{cases}$$

sur lequel le semi-groupe agit. Par $L^p(\mathbb{R}_+,X)$, lorsque $p \in [1,\infty[$, on désigne l'ensemble des fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans

X telles que $\int_0^{+\infty} \|f(t)\|dt$ soit fini et par $C_{00}(\mathbb{R}_+, X)$, on désigne l'ensemble de fonctions continues qui sont nulles en zéro et qui tendent vers zéro à l'infini. Dans le cadre de ce chapitre, cette dernière condition n'est pas remplie, et par conséquent une autre méthode, différente, est développée afin de démontrer les résultats annoncés.

4.2 Semi-groupe d'évolution opérant sur $E(\mathbb{R}, X)$

Dans cette section, on construit un espace de fonctions à valeurs dans X sur lequel on définit un semi-groupe d'évolution dont on présente certaines de ses propriétés. Pour une famille d'évolution périodique, d'opérateurs linéaires et bornés agissant sur un espace de Banach X, on se propose de donner quelques caractérisations de la stabilité exponentielle en termes de semi-groupe associé à l'évolution sur un espace nouvellement construit.

Pour un $t \geq 0$ arbitrairement choisi, on note par $\mathcal{A}_t$ l'ensemble de toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace de Banach X, avec la propriété qu'il existe une fonction F de $P_q(\mathbb{R}, X) \cap AP_1(\mathbb{R}, X)$ telle que $F(t) = 0$, $f = F_{|_{[t,\infty)}}$ et $f(s) = 0$, pour tout $s < t$. On note par $E(\mathbb{R}, X)$ la fermeture pour la norme "sup" de la convergence uniforme de l'espace engendré par $\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}$, c'est-à-dire $E(\mathbb{R}, X) = \overline{\text{span}}\,\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}$. Muni de la norme "sup", $E(\mathbb{R}, X)$ est un sous-espace fermé de $BUC(\mathbb{R}, X)$. Le semi-groupe d'évolution $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ associé à la famille d'évolution $\mathcal{U} = (U(t,s))_{t\geq s}$ fortement continue et périodique de période q, sur $E(\mathbb{R}, X)$ est formellement défini par

$$(\mathcal{T}(t)f)(s) := \begin{cases} U(s, s-t)f(s-t), & s \geq t \\ 0, & s < t. \end{cases} \tag{4.3}$$

4.2.1 Propriétés du semi-groupe d'évolution

Proposition 4.1 *Le semi-groupe d'évolution $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$, défini dans (4.3), opère sur l'espace $E(\mathbb{R}, X)$.*

Démonstration. Soit f de $\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t$ et $r \geq 0$ tel que $f \in \mathcal{A}_r$. Alors, il existe une fonction F de $P_q(\mathbb{R}, X) \cap AP_1(\mathbb{R}, X)$ telle que $F(r) = 0$ et

$$f(s) = \begin{cases} F(s), & s \geq r \\ 0, & s < r. \end{cases}$$

Donc, pour tout $t \geq 0$, fixant $s \in \mathbb{R}$, on a

$$(\mathcal{T}(t)f)(s) \quad = \quad \begin{cases} U(s, s-t)F(s-t), & s \geq t + r \\ 0, & s < r + t. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la fonction $s \mapsto G(s) := U(s, s-t)F(s-t)$ est périodique de période q et appartient à l'espace $AP_1(\mathbb{R}, X)$.

En outre, compte tenu du fait que $\mathcal{U}$ a une croissance exponentielle (c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ vérifiant $\|U(t,s)\| \leq Me^{\omega(t-s)}$), on a

$$\|G(\cdot)\|_1 \leq \|U(s, s-t)\| \left\| \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{i\mu_k(s-t)} c_k(F) \right\| \leq Me^{\omega t}\|F(\cdot)\|_1 < \infty.$$

Il s'en suit que $\mathcal{T}(t)f$ appartient à $\mathcal{A}_{t+r}$.

Qu'il opère sur $E(\mathbb{R}, X)$ ou sur $BUC(\mathbb{R}, X)$, $\mathcal{T}(t)$ est linéaire. Soit $f = \alpha g + \beta h \in \text{span}\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}$, où $g \in A_r$ et $h \in A_\rho$ avec $\rho \leq r$ et α, β deux nombres complexes. Alors,

$$\mathcal{T}(t)f = \alpha\mathcal{T}(t)(g) + \beta\mathcal{T}(t)(h).$$

On remarque que $\mathcal{T}(t)(g) \in \mathcal{A}_{t+r}$ et $\mathcal{T}(t)(h) \in \mathcal{A}_{t+\rho}$, dès que $\mathcal{T}(t)f \in \text{span}\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}$.

Il reste à examiner le cas où $f \in \overline{\text{span}}\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}$. On considère, pour ce faire, une suite (f_n), à valeurs dans $\text{span}\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}$, telle que $\sup_{t\geq 0}\|f_n(t) - f(t)\| \to 0$, lorsque $n \to \infty$. Il en découle que

$$\begin{aligned} & \sup_{s\geq 0}\|(\mathcal{T}(t)f_n)(s) - (\mathcal{T}(t)f)(s)\| \\ = & \sup_{s\geq 0}\|U(s, s-t)f_n(s-t) - U(s, s-t)f(s-t)\| \\ \leq & Me^{\omega t}\sup_{s\geq t}\|f_n(s-t) - f(s-t)\| \to 0, \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

Il en résulte finalement que $\mathcal{T}(t)f \in E(\mathbb{R}, X)$, ce qui achève la démonstration.

■

Proposition 4.2 *Le semi-groupe d'évolution $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continu.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{A}_r$. On a successivement :

$$\|\mathcal{T}(t)f - f\|_{E(\mathbb{R},X)} = \sup_{s\geq t}\|U(s, s-t)f(s-t) - f(s)\|$$

$$= \sup_{s\geq t}\|U(s, s-t)f(s-t) - U(s, s-t)f(s) + U(s, s-t)f(s) - f(s)\|$$

$$\leq \sup_{s\geq t}\|U(s, s-t)\|\|f(s-t) - f(s)\| + \sup_{s\geq t}\|[U(s, s-t) - U(s, s)]f(s)\|$$

$$\leq Me^{\omega t}\sup_{s\geq t}\|f(s-t) - f(s)\| + \sup_{s\geq t}\|[U(s, s-t) - U(s, s)]f(s)\|.$$

Le premier terme du côté droit de la dernière inégalité tend vers zéro quand $t \to 0$, puisque la fonction f est uniformément continue, tandis que le second terme tend vers zéro parce que la famille d'évolution $\mathcal{U}$ est fortement continue.

On considère à présent une fonction f de $E(\mathbb{R}, X)$. Il existe alors une suite $(f_n)_n$ à valeurs dans $\text{span}\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}$ qui converge vers f. Soit un entier N tel que $\|f - f_N\|_\infty$ soit assez petit que l'on veut. Ceci donne alors que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(t)f - f\|_{E(\mathbb{R},X)} \leq & \|\mathcal{T}(t)f - \mathcal{T}(t)f_N\|_{E(\mathbb{R},X)} + \|\mathcal{T}(t)f_N - f_N\|_{E(\mathbb{R},X)} \\ & + \|f_N - f\|_\infty \\ \leq & Me^{\omega t}\|f - f_N\|_\infty + \|\mathcal{T}(t)f_N - f_N\| + \|f_N - f\|_\infty. \end{aligned}$$

Le terme $\|\mathcal{T}(t)f_N - f_N\|$ tendant vers zéro, lorsque $t \to 0^+$, on en déduit finalement le résultat souhaité.

■

4.2.2 Relation entre le comportement asymptotique de la famille d'évolution et celui du semi-groupe associé à cette famille

Dans cette section, on met en évidence les liens entre le comportement des trajectoires d'une famille d'évolution périodique et le comportement du semi-groupe d'évolution associé. Le résultat principal de cette section est le théorème 4.1. Du point de vue structurel, ce théorème est connu. Il suffit de consulter, par exemple (Minh, Räbiger, Schnaubelt, 1998), (Chicone, Latushkin, 1999), (Clark, Latushkin, Montgomery-Smith, Randolph, 2000), (Schnaubelt, 2002), ainsi que leurs références.

Partout, dans ces références, le semi-groupe d'évolution défini sur l'espace des fonctions correspondant a la propriété fondamentale de contenir $C_0^\infty(]0,\infty[,X)$. En outre, dans ces domaines, l'espace $C_0^\infty(]0,\infty[,X)$ est dense pour la norme de l'espace correspondant. Cette particularité principale permet de déduire la propriété fondamentale de la stabilité du semi-groupe d'évolution, c'est-à-dire $s(G)=\omega_0(\mathcal{T})$.

En revanche, l'espace $E(\mathbb{R},X)$, précédemment introduit, ne contient pas $C_0^\infty(]0,\infty[,X)$. Dans ce contexte, on ne peut pas prouver l'implication (3)⇒(2). Dans le pragraphe 5.3 on démontre que (3) implique (2) en utilisant un espace plus large que $E(\mathbb{R},X)$. Toutefois, en supposant de plus que la famille d'évolution est uniformément bornée et que la fonction $s\mapsto U(s,0)x$ satisfait une condition de Lipschitz sur $\mathbb{R}_+$ pour chaque x d'un sous-ensemble dense D de X, on montre que l'ensemble $\left\{e^{\frac{2j\pi}{q}} : j\in\mathbb{Z}\right\}$ est inclus dans l'ensemble résolvant de $U(q,0)$.

Les lemmes suivants sont utiles aux preuves des théorèmes 4.1 et 4.2.

Lemme 4.1 *Soit $\mathcal{U}=\{U(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$ une famille d'évolution fortement continue et périodique de période q agissant sur l'espace de Banach X. On suppose que la famille $\mathcal{U}$ est uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constant $K>0$ telle que $\sup_{t\geq s\geq 0}||U(t,s)||:=K<\infty$. Si pour le nombre réel μ et la fonction $f\in E(\mathbb{R},X)$, on a*

$$\sup_{t\geq 0}\left\|\int_0^t e^{i\mu s}U(t,s)f(s)ds\right\|:=M(\mu,f)<\infty,$$

alors

$$\sup_{t\geq 0}\left\|\int_0^t e^{-i\mu s}\mathcal{T}(s)fds\right\|\leq K(\mu,f)<\infty.$$

Preuve. Soit $\tau\in\mathbb{R}$ et $J_{f,t,\mu}(\tau)=\left(\int_0^t e^{-i\mu s}\mathcal{T}(s)fds\right)(\tau)$.

Évaluons la norme "sup" de $J_{f,t,\mu}(\cdot)$.

1. Pour $\tau > t$, on a

$$\begin{aligned}
\|J_{f,t,\mu}(\tau)\| &= \left\| \int_0^t e^{-i\mu s} U(\tau, \tau - s) f(\tau - s) ds \right\| \\
&= \left\| \int_{\tau-t}^{\tau} e^{-i\mu(\tau-\rho)} U(\tau, \rho) f(\rho) d\rho \right\| \\
&= \left\| e^{-i\mu\tau} \left(\int_0^{\tau} e^{i\mu\rho} U(\tau, \rho) f(\rho) d\rho - \int_0^{\tau-t} e^{i\mu\rho} U(\tau, \rho) f(\rho) d\rho \right) \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^{\tau} e^{i\mu\rho} U(\tau, \rho) f(\rho) d\rho \right\| + \left\| \int_0^{\tau-t} e^{i\mu\rho} U(\tau, \rho) f(\rho) d\rho \right\| \\
&\leq M(\mu, f) + \|U(\tau, \tau - t)\| M(\mu, f) \\
&\leq (1 + K) M(\mu, f) < \infty.
\end{aligned}$$

2. Pour $0 \leq \tau \leq t$, on obtient que

$$\begin{aligned}
\|J_{f,t,\mu}(\tau)\| &= \left\| \int_0^{\tau} e^{-i\mu s} U(\tau, \tau - s) f(\tau - s) ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^{\tau} e^{i\mu\rho} U(\tau, \rho) f(\rho) d\rho \right\| \\
&\leq M(\mu, f) < \infty.
\end{aligned}$$

3. Lorsque $\tau < 0$, $J_{f,t,\mu}(\tau) = 0$.

La résultat se déduit finalement en prenant $K(\mu, f) := (1 + K) M(\mu, f)$.

■

Lemme 4.2 *Soit $f, u \in E(\mathbb{R}, X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$u \in D(G)$ et $Gu = -f$.*
2. *$u(t) = \int_0^t U(t, s) f(s) ds$, pour tout $t \geq 0$.*

Preuve. La démonstration de ce lemme est similaire à celle du Lemme 1.1 de (Minh, Räbiger, Schnaubelt, 1998). Cependant, pour la cohérence et la clarté de ce paragraphe, on présentera la démonstration de ce lemme.

[1. $\Rightarrow$ 2.] Pour chaque $t \geq 0$ et $u \in D(G)$ on a

$$\mathcal{T}(t)u - u = \int_0^t \mathcal{T}(\tau) G u d\tau.$$

Par conséquent, étant donné que $u(0) = 0$, on obtient que :

$$\begin{aligned} u(t) &= (\mathcal{T}(t)u)(t) + \left(\int_0^t \mathcal{T}(\tau) f d\tau\right)(t) \\ &= U(t,0)u(0) + \int_0^t U(t,t-\tau) f(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t U(t,\rho) f(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

[2. $\Rightarrow$ 1.] Soit $s > 0$ et $0 < t < s$. Montrons que $u \in D(G)$. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{(-\mathcal{T}(t)u + u)(s)}{t} &= \frac{-U(s,s-t)u(s-t) + u(s)}{t} \\ &= \frac{-U(s,s-t)\int_0^{s-t} U(s-t,\tau) f(\tau) d\tau + \int_0^s U(s,\tau) f(\tau) d\tau}{t} \\ &= \frac{-\int_0^{s-t} U(s,\tau) f(\tau) d\tau + \int_0^s U(s,\tau) f(\tau) d\tau}{t} \\ &= \frac{-\int_0^{s-t} U(s,\tau) f(\tau) d\tau + \int_0^{s-t} U(s,\tau) f(\tau) d\tau + \int_{s-t}^s U(s,\tau) f(\tau) d\tau}{t} \\ &= \frac{\int_0^t U(s,s-\rho) f(s-\rho) d\rho}{t} = \frac{\left(\int_0^t \mathcal{T}(\rho) f d\rho\right)(s)}{t}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{-\mathcal{T}(t)u + u}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\int_0^t \mathcal{T}(\rho) f d\rho}{t} = f.$$

■

On considère le système différentiel dépendant du temps d'une manière périodique de période q :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \mathbb{C}^n, \qquad (\mathcal{A}(t))$$

et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + e^{i\mu t} f(t), & t \geq 0 \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad (\mathcal{A}(t), \mu, f, 0)$$

où f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$.

L'espace $\mathcal{F}_{\mathbf{\Phi}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^n$, continues et périodiques de période q données sur l'intervalle $[0, q]$ par légalité $f(s) = h(s)\Phi(s)b$, avec b un vecteur de $\mathbb{C}^n$. Par $\Phi(\cdot)$, on désigne une matrice fondamentale associée à $(\mathcal{A}(t))$. La fonction $h(\cdot)$ appartient à l'ensemble $\{h_1(\cdot), h_2(\cdot)\}$, où $h_1(\cdot)$ et $h_2(\cdot)$ sont deux fonctions à valeurs scalaires, définies sur l'intervalle $[0, q]$ par :

$$h_1(s) = \begin{cases} s, & s \in [0, \frac{q}{2}[; \\ q - s, & s \in [\frac{q}{2}, q] \end{cases} \quad \text{et } h_2(s) = s(q-s).$$

Soit X un espace de Banach et $\mathcal{L}(X)$ désigne l'algébre de tous les opérateurs linéaires bornés définis sur X. La norme sur X ainsi que sur $\mathcal{L}(X)$ sont notées par le même symbole $\|\cdot\|$. On considère le système différentiel vectoriel $(\mathcal{A}(t))$ dépendant du temps périodiquement de période q et le problème de Cauchy suivant

$$(\mathcal{A}(t), \mu, b, 0) \begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + e^{i\mu t}b, & t \geq 0, \quad b \in \mathbb{C}^n, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

On note par $\Phi(\cdot)$ la matrice fondamentale associée à $(\mathcal{A}(t))$. Autrement dit, la matrice $\Phi(\cdot)$ est l'unique solution de problème de Cauchy opératoriel suivant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t), & t \in \mathbb{R} \\ X(0) = I. \end{cases} \qquad (\mathcal{A}(t), I)$$

De même, on considère le problème non homogène opératoriel suivant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + e^{i\mu t}I, & t \geq 0 \\ X(0) = 0. \end{cases} \qquad (\mathcal{A}(t), \mu, I, 0)$$

Sa solution est donnée par

$$\Phi_\mu(t) = \int_0^t U(t,s)e^{i\mu s}ds.$$

On suppose, ensuite, que

$$t \mapsto A(t) : \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$$

est continue et périodique de période q. La matrice $\Phi(t)$ est inversible et son inverse est l'unique solution du problème de Cauchy opératoriel

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -X(t)A(t), & t \in \mathbb{R} \\ X(0) = I. \end{cases}$$

Lemme 4.3 *Soit les fonctions h_1, $h_2 : [0, q] \to \mathbb{C}$, définies par :*

$$h_1(s) = \begin{cases} s, & s \in [0, \frac{q}{2}[\\ q - s, & s \in [\frac{q}{2}, q] \end{cases} \quad et \quad h_2(s) = s(q-s), \quad s \in [0, q].$$

On désigne par $H_1(\mu) := \int_0^q e^{i\mu s}h_1(s)ds$ et par $H_2(\mu) := \int_0^q e^{i\mu s}h_2(s)ds$. Alors, $H_1(\mu) = 0$ si et seulement si $\mu \in \mathcal{A} := \{\frac{4k\pi}{q} : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$. De plus, $H_2(\mu) = -\frac{q^3}{8k^2\pi^2} \neq 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{A}$.

Preuve. Pour $\mu \neq 0$, on a

$$\int_0^q e^{i\mu s}h_1(s)ds = \int_0^{\frac{q}{2}} se^{i\mu s}ds + \int_{\frac{q}{2}}^q (q-s)e^{i\mu s}ds$$

$$= \frac{se^{i\mu s}}{i\mu}\Big|_0^{\frac{q}{2}} - \int_0^{\frac{q}{2}} \frac{e^{i\mu s}}{i\mu}ds + q\frac{e^{i\mu s}}{i\mu}\Big|_{\frac{q}{2}}^q - \frac{se^{i\mu s}}{i\mu}\Big|_{\frac{q}{2}}^q + \int_{\frac{q}{2}}^q \frac{e^{i\mu s}}{i\mu}ds$$

$$= -\frac{e^{i\mu s}}{(i\mu)^2}\Big|_0^{\frac{q}{2}} + \frac{e^{i\mu s}}{(i\mu)^2}\Big|_{\frac{q}{2}}^{q} = \frac{1}{(i\mu)^2}\left(1 - 2e^{\frac{i\mu q}{2}} + e^{i\mu q}\right).$$

La première assertion est alors claire.
Soit $\mu_k := \frac{4k\pi}{q}$. Alors

$$\int_0^q e^{i\mu_k s} h_2(s)ds = q\int_0^q se^{i\mu_k s}ds - \int_0^q s^2 e^{i\mu_k s}ds$$

$$= q\left(\frac{se^{i\mu_k s}}{i\mu_k}\Big|_0^q - \int_0^q \frac{e^{i\mu_k s}}{i\mu_k}ds\right) - \left(\frac{s^2 e^{i\mu_k s}}{i\mu_k}\Big|_0^q - 2\int_0^q \frac{se^{i\mu_k s}}{i\mu_k}ds\right)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{qe^{i\mu_k s}}{(i\mu_k)^2}\Big|_0^q + 2\left[\frac{se^{i\mu_k s}}{(i\mu_k)^2}\Big|_0^q - \int_0^q \frac{e^{i\mu_k s}}{(i\mu_k)^2}ds\right] \\ &= -\frac{qe^{i\mu_k q}}{(i\mu_k)^2} + \frac{q}{(i\mu_k)^2} + 2\left[\frac{qe^{i\mu_k q}}{(i\mu_k)^2} - \frac{e^{i\mu_k s}}{(i\mu_k)^3}\Big|_0^q\right] \\ &= \frac{2q}{(i\mu_k)^2} = -\frac{q^3}{8k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

■

Par la suite, les extensions par périodicité des fonctions h_j, pour $j \in \{1,2\}$, seront désignées par le même symbole. Partout dans cette section, $j = 1$ ou $j = 2$.

Lemme 4.4 *Chaque fonction f de $\mathcal{F}_\Phi(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$ satisfait une condition de Lipschitz sur $\mathbb{R}_+$.*

Preuve. Soit $b \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1,2\}$ et $f \in \mathcal{F}_\Phi(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$. Les fonctions h_j sont bornées et

$$\max_{s\in[0,q]} h_j(s) = h, \text{ où } h := \max\left\{\frac{q}{2}, \frac{q^2}{4}\right\}.$$

En intégrant la quantité $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t) = A(t)\Phi(t)$ entre deux réels positifs t_1 et t_2, avec $t_2 \geq t_1$ et $t_1, t_2 \in [0,q]$, et en posant $\sup_{s\in[0,q]} \|\Phi(s)\| := M < \infty$, on obtient que :

$$\|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2} A(s)\Phi(s)ds\right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|A(s)\Phi(s)\|dt \leq M\|A(\cdot)\|_\infty |t_2 - t_1|.$$

En outre,

$$\begin{aligned} \|f(t_2) - f(t_1)\| &= \|\Phi(t_2)h_j(t_2)b - \Phi(t_1)h_j(t_1)b\| \\ &\leq \|\Phi(t_2)h_j(t_2)b - \Phi(t_2)h_j(t_1)b\| \\ &\quad + \|\Phi(t_2)h_j(t_1)b - \Phi(t_1)h_j(t_1)b\| \\ &\leq \|\Phi(t_2)\||h_j(t_2) - h_j(t_1)|\|b\| \\ &\quad + |h_j(t_1)|\|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\|\|b\| \\ &\leq M\left(\widetilde{h} + h\|A(\cdot)\|_\infty\right)\|b\||t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

Dans la dernière estimation, a été utilisée

$$|h_j(t_2) - h_j(t_1)| \leq \widetilde{h}|t_2 - t_1|, \quad \widetilde{h} := \max\{1, q\},$$

qui est une conséquence du théorème de Lagrange (théorème de la moyenne).

Si $t_2 \in [(k-1)q, kq]$ et $t_1 \in [kq, (k+1)q]$, avec $t_2 < t_1$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\|f(t_2) - f(kq)\| \leq c \cdot |t_2 - kq|$$

et

$$\|f(kq) - f(t_1)\| \leq c \cdot |kq - t_1|$$

entraînent que

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| \leq c \cdot [|t_2 - kq| + |kq - t_1|] = c \cdot |t_2 - t_1|.$$

Enfin, si $t_1, t_2 \in [kq, (k+1)q]$ ou $|t_2 - t_1| \geq q$, on considère $t_1 = t_1^* + k_1 q$ et $t_2 = t_2^* + k_2 q$, avec $t_1^*, t_2^* \in [0, q]$ et $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, on obtient que :

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| = \|f(t_2^*) - f(t_1^*)\| \leq c \cdot |t_2 - t_1|.$$

Par conséquent, la fonction f satisfait une condition de Lipschitz sur $\mathbb{R}_+$.

■

Remarque 4.1 *Une famille d'évolution $\mathcal{U}$, fortement continue et périodique de période q, est uniformément exponentiellement stable si et seulement si il existe deux constantes strictement positives N_1 et ν_1, telles que*

$$\|U(t,0)\| \leq N_1 e^{-\nu_1 t}, \quad \textit{pour tout } t \geq 0.$$

Démonstration. L'implication directe est immédiate. Réciproquement, soit $k(s)$ la partie entière de $\frac{s}{q}$. Alors, pour tout $t \geq s + q$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|U(t,s)\| & \leq & \|U(t-(k(s)+1)q, 0)\| \|U((k(s)+1)q, s\| \\ & \leq & N_1 e^{-\nu_1(t-k(s)q-q)} M e^{\omega q} \\ & = & N_1 M e^{(\omega+\nu_1)q} e^{-\nu_1(t-s)}. \end{array}$$

Si $t \in [s, s+q]$ alors on choisit $N_1 > 0$, suffisamment grand, tel qu'il existe un $\nu_1 > 0$ vérifiant $Me^{\omega q} \leq N_1 e^{-\nu_1(t-s)}$.

■

Le résultat principal de cette section peut être présenté comme suit :

Théorème 4.1 *Soit $\mathcal{U}$ une famille d'évolution fortement continue et périodique de période q opérant sur l'espace de Banach X et $\mathcal{T}$ le semi-groupe d'évolution asocié à $\mathcal{U}$ sur $E(\mathbb{R}, X)$. G désigne son générateur infinitésimal. On considère les assertions suivantes :*

- (**1**) *$\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable.*
- (**2**) *$\mathcal{T}$ est uniformément exponentiellement stable.*
- (**3**) *G est inversible.*
- (**4**) *Pour chaque $f \in E(\mathbb{R}, X)$, la fonction*

$$t \mapsto g_f(t) := \int_0^t U(t,s) f(s) ds$$

appartient à l'espace $E(\mathbb{R}, X)$.

(**5**) *Pour chaque* $f \in E(\mathbb{R}, X)$, *la fonction* g_f *appartient à l'espace* $BUC(\mathbb{R}_+, X)$.

Alors

$$(\mathbf{1}) \Leftrightarrow (\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{3}) \Rightarrow (\mathbf{4}) \Rightarrow (\mathbf{5}).$$

Si, en outre, la famille $\mathcal{U}$ *est uniformément bornée, alors* $(\mathbf{5}) \Rightarrow (\mathbf{3})$.

Démonstration. : $(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$. Comme la famille $\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable, il existe deux constantes strictement positives N et ν telles que $\|U(t,s)\| \leq Ne^{-\nu(t-s)}$, pour tous $t \geq s$. Alors, pour tout $t \geq 0$ et toute fonctions f de $E(\mathbb{R}, X)$, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(t)f\|_{E(\mathbb{R},X)} &= \sup_{s\geq t} \|U(s, s-t)f(s-t)\| \\ &\leq Ne^{-\nu t} \sup_{s\geq t} \|f(s-t)\| = Ne^{-\nu t}\|f\|_{E(\mathbb{R},X)}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que le semi-groupe $\mathcal{T}$ est uniformément exponentiellement stable.

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$. Soit g la fonction périodique de période q, définie sur $[0, q]$, par

$$g(s) := \frac{4}{q^2}\left(s - \frac{q}{2}\right)^2.$$

Il est évident que g appartient à l'espace $AP_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors, pour tout x de X, non nul, la fonction

$$s \mapsto f_x(s) := \begin{cases} g(s)x, & s \geq \frac{q}{2} \\ 0, & s < \frac{q}{2}, \end{cases}$$

appartient à l'espace $E(\mathbb{R}, X)$. De l'hypothèse, il existe deux constantes strictement positives N et ν telles que pour tous $s \geq t \geq 0$, on ait :

$$Ne^{-\nu t}\|f_x\|_{E(\mathbb{R},X)} \geq \|(\mathcal{T}(t)f_x)(s)\| \geq g(s-t)\|U(s, s-t)x\|.$$

Pour $s = t + q$, on a

$$Ne^{-\nu t}\|x\| \geq Ne^{-\nu t}\|f_x\|_{E(\mathbb{R},X)} \geq g(q)\|U(t+q, q)x\| = \|U(t, 0)x\|.$$

On conclut en vertu de la remarque 4.1.

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{3})$. On sait que le semi-groupe $\mathcal{T}$ est uniformément exponentiellement stable, ce qui entraîne que l'indice de croissance exponentielle, $\omega_0(\mathcal{T})$, est strictement négatif. Puisque $s(G) \leq \omega_0(\mathcal{T})$, on déduit que $0 \in \rho(G)$ et par conséquent G est inversible.

$(\mathbf{3}) \Rightarrow (\mathbf{4})$. Soit $f \in E(\mathbb{R}, X)$. Comme G est surjectif, on peut trouver u dans $D(G) \subset E(\mathbb{R}, X)$, telle que $Gu = -f$. En vertu du lemme 4.2, le résulat en découle.

$(\mathbf{4}) \Rightarrow (\mathbf{5})$. La fonction g_f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle appartient à $E(\mathbb{R}, X)$ qui est un sous-espace de $BUC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

$(\mathbf{5}) \Rightarrow (\mathbf{3})$. Cette implication résulte de (5) en appliquant le lemme 4.1 pour $\mu = 0$ et de la Proposition 3. de (Reghiş, Buşe, 1998).

■

Proposition 4.3 *On suppose que la famille d'évolution $\mathcal{U}$ est uniformément bornée et qu'il existe un sous-ensemble dense D de X tel que pour tout x de D, la fonction $s \mapsto U(s,0)x : \mathbb{R}_+ \to X$ satisfasse une condition de Lipschitz sur $(0,q)$. Si la condition* **(5)** *du théorème précédent est satisfaite, alors l'ensemble $\{e^{\frac{2j\pi}{q}} : j \in \mathbb{Z}\}$ est inclus dans $\rho(U(q,0))$.*

Démonstration. On considère la fonction $H : E(\mathbb{R}, X) \to BUC(\mathbb{R}, X)$, définie par

$$H(f) := \int_0^{\cdot} U(\cdot, s) f(s) ds.$$

Soit $f, h, f_n \in E(\mathbb{R}, X)$ tels que $f_n \to f$, quand n tend vers l'infini, dans $E(\mathbb{R}, X)$ et $H(f_n) \to h$ dans $BUC(\mathbb{R}, X)$. Pour chaque $t \geq 0$, fixé, on a :

$$\left(H(f_n) - H(f)\right)(t) \quad = \quad \int_0^t \left(U(t,s) f_n(s) - U(t,s) f(s)\right) ds \quad \to \quad 0,$$

lorsque $n \to \infty$. Il en découle que $h = H(f)$, et par conséquent l'opérateur H est fermé. D'après le théorème du graphe fermé, il est borné, puisqu'il est défini sur tout l'espace. Il exsite alors une constante positive L telle que :

$$\forall f \in E(\mathbb{R}, X), \quad \|H(f)\|_\infty \leq L \|f\|_\infty.$$

On considère la fonction g de l'espace $P_q(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, définie pour tout $s \in [0, q]$, par

$$g(s) := \frac{16}{q^4} s^2 (s - q)^2.$$

Pour un $x \in D$ arbitrairement choisi, on considère la fonction g_x de $P_q(\mathbb{R}_+, X)$, définie sur $[0, q]$, par $g_x(s) := g(s) U(s,0)x$. En vertu du lemme 4.4, la fonction définie par

$$s \mapsto f_x(s) := \begin{cases} g_x(s), & s \geq 0 \\ 0, & s < 0, \end{cases}$$

satisfait une condition de Lipschitz sur $\mathbb{R}$, et donc appartient à $\text{span}\{\cup_{t \geq 0} \mathcal{A}_t\}$. On a

$$\begin{aligned} H(f_x)(t) &= \int_0^t U(t, t-s) f_x(t-s) ds \\ &= \int_0^t U(t, \rho) f_x(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Pour $t = nq$, avec $n = 0, 1, 2, \cdots$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{nq} U(nq, \rho) f_x(\rho) d\rho &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kq}^{(k+1)q} U(nq, \rho) f_x(\rho) d\rho \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^q U((n-k)q, \tau) f_x(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^q g(\tau) d\tau \right) U(q,0)^{n-k} x \\ &= \frac{8q}{15} \sum_{k=0}^{n-1} U(q,0)^{n-k} x. \end{aligned}$$

Par passage à la norme et compte tenu du fait que la famille $\mathcal{U}$ est uniformément bornée par une constante K, pour chaque $x \in D$, on obtient

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} U(q,0)^{n-k} x \right\| \leq \frac{15L}{8q} \|f_x\|_\infty \leq \frac{15L}{8q} K\|x\|. \tag{4.4}$$

Comme D est dense dans X, il s'en suit que la relation (4.4) est valide pour tout x de X.

En appliquant la Proposition 4.4, pour $\mu = 0$, on déduit que $1 \in \rho(U(q,0))$. On obtient, par suite, la résultat général pour un nombre entier j arbitraire, en remplaçant les fonctions f_x par $e^{\frac{2i\pi\cdot}{q}} f_x$.

■

4.3 L'espace de Hilbert $L^2([0,q],H)$

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable et $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre de Banach de toutes les applications linéaires bornées de H dans H. Dans ce paragraphe, $\mathbb{Z}_+$ désigne l'ensemble des entiers positifs (i.e. $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$).

Rappelons que l'ensemble $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, où $u_k \in H$, est une base de H si le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ est dense dans H. Une telle base est dite orthogonale si $\langle u_k, u_j\rangle$=0, pour chaque pair (k,j) d'entiers positifs distincts. Le système $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ est une base orthonormale de H si et seulement si pour tout $f \in H$ on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\langle f, u_k\rangle|^2 = \|f\|^2$. Dans ce cas, chaque élément $f \in H$ peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \langle f, u_k\rangle u_k.$$

Comme souvent, par $L^2([0,q],\mathbb{C})$ on note l'espace de Hilbert constitué de toutes les fonctions de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{C}$, définies sur l'intervalle $[0,q]$. L'espace $L^2([0,q],\mathbb{C})$ est muni de la norme et du produit scalaire usuels. L'ensemble de fonctions $\left\{\frac{e^{2i\pi(n/q)\cdot}}{\sqrt{q}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormale de $L^2([0,q],\mathbb{C})$. Par conséquent, chaque fonction $z \in L^2([0,q],\mathbb{C})$, peut être réprésentée comme

$$z(t) = \frac{1}{q} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^q z(s) e^{-2in\pi s/q} ds \right) e^{2in\pi t/q}, \quad \text{pour presque tout} \quad t \in [0,q]. \tag{4.5}$$

On désigne par $\mathcal{H} := L^2([0,q],H)$ l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables à valeurs dans H, définies sur $[0,q]$ vérifiant :

$$\left(\int_0^q \|f(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} := \|f\|_{L^2([0,q],H)} < \infty.$$

Dans $\mathcal{H}$ deux fonctions égales presque partout sont identifées. Muni du produit scalaire donné par $\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^q \langle f(t), g(t)\rangle dt$, $\mathcal{H}$ devient un espace de Hilbert.

Dans ce qui suit, $\varphi \otimes u_k$ note le produit tensoriel de la fonction à valeurs scalaires φ définie sur $[0,q]$ et le vecteur $u_k \in H$, c'est-à-dire la fonction définie par

$$(\varphi \otimes u_k)(t) = \varphi(t)u_k, \quad t \in [0,q].$$

L'ensemble des vecteurs

$$\mathcal{B} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{q}} e^{2i\pi(n/q)\cdot} \otimes u_k : \quad n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

forme une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Cela est probablement connu, mais on le justifie dans ce qui suit car on n'a pas trouvé de référence appropriée. Pour k, $p \in \mathbb{Z}_+$ et m, $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \tfrac{1}{\sqrt{q}} e^{2in\pi\cdot/q} \otimes u_k, \tfrac{1}{\sqrt{q}} e^{2im\pi\cdot/q} \otimes u_p \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \tfrac{1}{q} \int_0^q \langle e^{2in\pi t/q} u_k, e^{2im\pi t/q} u_p \rangle dt \\
&= \tfrac{\delta_{kp}}{q} \int_0^q e^{2i(n-m)\pi t/q} dt \\
&= \begin{cases} 1, & k = p \text{ et } n = m \\ 0, & k \neq p \text{ ou } n \neq m. \end{cases}
\end{aligned}.$$

En outre,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^q \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \langle f(t), u_k\rangle u_k, \sum_{p\in\mathbb{Z}_+} \langle f(t), u_p\rangle u_p \right\rangle dt \\
&= \sum_{k,p\in\mathbb{Z}_+} \int_0^q \langle f(t), u_k\rangle \overline{\langle f(t), u_p\rangle} \langle u_k, u_p\rangle dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \int_0^q \langle f(t), u_k\rangle \overline{\langle f(t), u_k\rangle} dt.
\end{aligned}$$

Selon (4.5), pour $z(t) = \langle f(t), u_k\rangle$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{H}}^2 &= \tfrac{1}{q^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \left[\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^q \langle f(s), u_k\rangle e^{-2in\pi s/q} ds \right) \cdot \right. \\
&\qquad \left. \left(\int_0^q \overline{\langle f(s), u_k\rangle e^{-2im\pi s/q}} ds \right) \int_0^q e^{2i(n-m)\pi t/q} dt \right] \\
&= \tfrac{1}{q} \sum_{(k,n)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}} \int_0^q \langle f(s), e^{2in\pi s/q} u_k\rangle ds \cdot \overline{\int_0^q \langle f(s), e^{2in\pi s/q} u_k\rangle ds} \\
&= \tfrac{1}{q} \sum_{(k,n)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}} \left| \int_0^q \langle f(t), e^{2in\pi t/q} u_k\rangle dt \right|^2 \\
&= \sum_{(k,n)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}} \left| \langle f, \tfrac{1}{\sqrt{q}} e^{2i\pi(n/q)\cdot} \otimes u_k\rangle_{\mathcal{H}} \right|^2.
\end{aligned}$$

Alors, pour chaque fonction f de $\mathcal{H}$ peut s'écrire de la forme :

$$f(\cdot) = \frac{1}{q} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2in\pi\cdot/q} c_n(f),$$

où $c_n(f) \in H$ est le coefficient de Fourier d'ordre n associé à la fonction f et est défini par

$$c_n(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \left(\int_0^q \langle f(s), e^{2in\pi s/q} u_k\rangle ds \right) u_k. \tag{4.6}$$

4.4 Stabilité exponentielle et bornitude uniforme par rapport aux paramètres

On rappelle d'abord la proposition suivante

Proposition 4.4 *Soit $\mathcal{U} = (U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ une famille d'évolution fortement continue et périodique de période q agissant sur un espace de Banach X. La famille $\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable si et seulement si, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\sup_{\nu\geq 1}\left\|\sum_{k=1}^{\nu} e^{i\mu k}U(q,0)^k\right\| := L(\mu) < \infty.$$

Démonstration. En utilisant l'identité

$$\left(e^{i\mu}U(q,0)-I\right)\left(I+e^{i\mu}U(q,0)+e^{i\mu 2}U(q,0)^2+\cdots+e^{i\mu\nu}U(q,0)^{\nu}\right)$$
$$= e^{i\mu(\nu+1)}U(q,0)^{\nu+1}-I$$

on obtient en passant aux normes :

$$\left\|e^{i\mu(\nu+1)}U(q,0)^{\nu+1}\right\| \leq 1+L(\mu)\left(1+\|U(q,0)\|\right), \quad (\forall \nu\in\mathbb{N}),$$

c'est-à-dire que $r(U(q,0)) \leq 1$, et donc $\sigma(U(q,0)) \subset \{\lambda\in\mathbb{C}: \quad |\lambda|\leq 1\}$.

On suppose, par l'absurde, que $1 \in \sigma(U(q,0))$. Étant donné que $1 \in \partial\sigma(U(q,0))$, il s'en suit que $1 \in \sigma_a(U(q,0))$ (d'après la Proposition 3.3 du chapitre 3). Il existe, alors, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, avec $x_n \in X$ et $\|x_n\| = 1$ telle que

$$(I-U(q,0))\,x_n \to 0, \quad \text{lorsque } n\to\infty.$$

Par conséquent, $U(q,0)^k\,(I-U(q,0))\,x_n \to 0$, converge uniformément par rapport à $k\in\mathbb{Z}_+$. Soit $m\in\mathbb{Z}_+$, $m > 2L(0)$ et $n\in\mathbb{Z}_+$ tels que

$$\left\|U(q,0)^k\,(I-U(q,0))\,x_n\right\| \leq \frac{1}{2m}, \quad \text{pour tout } k=0,1,\cdots,m.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
L(0) &\geq \left\|\sum_{k=0}^{m}U(q,0)^k x_n\right\| = \left\|x_n+\sum_{k=1}^{m}U(q,0)^k x_n\right\| \\
&= \left\|x_n+\sum_{k=1}^{m}\left(x_n+\sum_{j=0}^{k-1}U(q,0)^j\,(U(q,0)-I)\,x_n\right)\right\| \\
&= \left\|(m+1)x_n+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{k-1}U(q,0)^j\,(U(q,0)-I)\,x_n\right\| \\
&\geq m+1-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{k-1}\|U(q,0)^j\,(U(q,0)-I)\,x_n\| \\
&\geq m+1-\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{2m} = \frac{3(m+1)}{4} \geq \frac{m}{2} > L(0),
\end{aligned}$$

d'où la contradiction. On en déduit que $1 \notin \sigma(U(q,0))$. En appliquant ce résultat pour $V(q,0) = e^{i\mu}U(q,0)$, où $\mu \in \mathbb{R}$, on conclut que $e^{-i\mu} \notin \sigma(U(q,0))$. Par conséquent, $r(U(q,0)) < 1$, autrement dit, la famille $\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable.

■

Nous aurons besoin du lemme suivant dans la démonstration du théorème qui suit.

Lemme 4.5 *Soit $x \in H$ tel que la fonction $s \mapsto U(s,0)x$ satisfasse une condition de Lipschitz sur $(0,q)$. Pour tout $j \in \{1,2\}$, on considère la fonction $f_j : \mathbb{R} \to H$, périodique de période q, définie sur l'intervalle $[0,q]$, par*

$$f_j(t) := h_j(t)U(t,0)x.$$

Les assertions suivantes sont valides :

(1) Chaque fonction f_j satisfait une condition de Lipschitz sur $\mathbb{R}$.

(2) La série de Fourier associée à f_j est absolument et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit $x \in H$, $M_x := \sup_{s\in[0,q]} \|U(s,0)x\|$ et $L_x > 0$ tels que

$$\forall t,s \in]0,q[\quad \|U(t,0)x - U(s,0)x\| \leq L_x|t-s|.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|f_j(t) - f_j(s)\| &= \|h_j(t)U(t,0)x - h_j(s)U(s,0)x\| \\
&\leq \|h_j(t)U(t,0)x - h_j(t)U(s,0)x\| \\
&\qquad + \|h_j(t)U(s,0)x - h_j(s)U(s,0)x\| \\
&\leq |h_j(t)|\|U(t,0)x - U(s,0)x\| + |h_j(t) - h_j(s)|\|U(s,0)x\| \\
&\leq \left(L_x \cdot \max\{\frac{q}{2}, \frac{q^2}{4}\} + M_x \cdot \max\{1,q\}\right)|t-s|.
\end{aligned}$$

Grâce à la continuité de la fonction $U(\cdot,0)x$, l'inégalité ci-dessus peut être prolongée, d'abord à $t,s \in [0,q]$, puis en utilisant la périodicité de la fonction f_j, sur tout l'axe réel.

La démonstration de l'affirmation (2), pour des fonctions à valeurs scalaires, est contenue dans (Stein, 2003, Exercice 16, pp .92-93).

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et chaque nombre réel positif ρ, qui sera choisi ultérieurement, on note que

$$g_j(t) := f_j(t+\rho) - f_j(t-\rho).$$

En utilisant (4.6), on obtient que

$$\begin{aligned}
c_n(g_j) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\int_0^q \langle g_j(s), e^{2in\pi s/q}u_k\rangle ds\right)u_k \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\int_0^q \langle f_j(s+\rho), e^{2i\pi ns/q}u_k\rangle ds - \int_0^q \langle f_j(s-\rho), e^{2i\pi ns/q}u_k\rangle ds\right)u_k \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\int_\rho^{q+\rho} \langle f_j(\tau), e^{2i\pi n(\tau-\rho)/q}u_k\rangle d\tau - \int_{-\rho}^{q-\rho} \langle f_j(\tau), e^{2i\pi n(\tau+\rho)/q}u_k\rangle d\tau\right)u_k \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left[\int_0^q \left(e^{2i\pi n\rho/q} - e^{-2i\pi n\rho/q}\right)\langle f_j(\tau), e^{2i\pi n\tau/q}u_k\rangle d\tau\right]u_k \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\int_0^q 2i\sin(2n\pi\rho/q)\langle f_j(\tau), e^{2i\pi n\tau/q}u_k\rangle d\tau\right)u_k \\
&= 2i\sin(2n\pi\rho/q)c_n(f_j).
\end{aligned}$$

Compte tenu de l'inégalité de Bessel et du fait que la fonction f_j satisfait une condition de Lipschitz sur $\mathbb{R}$ avec une constante $L(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
4q\rho^2L^2(x) &\geq \int_0^q \|g_j(t)\|^2dt \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\|c_n(g_j)\|^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4\|c_n(f_j)\|^2|\sin(2n\pi\rho/q)|^2.
\end{aligned}$$

Soit p un entier strictement positif et $\rho := \frac{q}{2^{p+2}}$.

On considère $\mathcal{A}_p := \{n \in \mathbb{Z} : \quad 2^{p-1} < |n| \leq 2^p\}$. Clairement, le cardinal de $\mathcal{A}_p$ est $|\mathcal{A}_p| = 2^p$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} < |\sin(2n\pi\rho/q)|$ pour tout $n \in \mathcal{A}_p$. De plus, $\cup_{p\geq 1}\mathcal{A}_p = \mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$. Par l'inégalité de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, on déduit que :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n\in\mathcal{A}_p}\|c_n(f_j)\|\right)^2 &\leq 2^p\sum_{n\in\mathcal{A}_p}\|c_n(f_j)\|^2 < 2^{p+1}\sum_{n\in\mathcal{A}_p}\|c_n(f_j)\|^2|\sin(2n\pi\rho/q)|^2 \\
&\leq \frac{q^3L^2(x)}{2^{p+3}},
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}}\|c_n(f_j)\| \leq (\sqrt{2}+1)\frac{q\sqrt{q}L(x)}{2^{3/2}} := L_1(x).$$

La restriction de la fonction f_j à l'intervalle $[0,q]$ appartient à l'espace $L^2([0,q],H)$ et $f_j = \frac{1}{q}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2in\pi\cdot/q}c_n(f_j)$. On note

$$s_{N,j}(t) := \frac{1}{q}\sum_{n=-N}^{N} e^{2in\pi t/q}c_n(f_j).$$

Il est clair que $\left(\int_0^q \|f_j(t) - s_{N,j}(t)\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$ tend vers 0, lorsque $N \to \infty$. Comme déjà indiqué, la série $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2in\pi t/q}c_n(f_j)\right)$ est uniformément

convergente sur $\mathbb{R}$ et, donc, il existe une fonction continue $s_j : \mathbb{R} \to H$, telle que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|s_j(t) - s_{N,j}(t)\| \to 0, \quad \text{quand } N \to \infty.$$

En revanche,

$$\|s_{N,j} - s_j\|_{L^2([0,q],H)} \leq \sqrt{q}\|s_{N,j} - s_j\|_\infty \to 0,$$

si $s_j = f_j$ dans $L^2([0,q],H)$. Les fonctions s_j et f_j sont continues et égales presque partout sur $[0,q]$, si $f_j(t) = s_j(t)$ pour tout $t \in [0,q]$. Ces deux fonctions étant régulières et périodiques de période q, elles sont égales sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, La série de Fourier associée à f_j est absolument et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

■

Théorème 4.2 *Soit $\mathcal{U} = \{U(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$ une famille d'évolution fortement continue et périodique de période q, opérant sur un espace de Banach X. Si*

$$\forall x \in X, \quad \sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\geq\tau\geq 0} \left\| \int_\tau^t e^{i\mu s} U(t,s)x ds \right\| := M(x) < \infty, \tag{4.7}$$

alors,

$$\forall f \in \text{span}\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}, \quad \sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\geq 0} \left\| \int_0^t e^{-i\mu s}\mathcal{T}(s)f ds \right\| \leq L(f) < \infty.$$

En outre, la famille $\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable si pour chaque élément x de X, la fonction $s \mapsto U(s,0)x$ satisfait une condition de Lipschitz sur $(0,q)$.

En utilisant le principe de bornitude uniforme [1] on peut trouver une constante absolue M, telle que pour tout x de X, on ait $M(x) \leq M\|x\|$, où $M(x)$ est la fonction dépendant de x donnée par le théorème (4.2).

Démonstration. On démontre ce théorème en deux étapes.

Étape I. Lorsque la famille d'évolution $\mathcal{U}$ est uniformément bornée, c'est-à-dire

$$\sup_{t\geq s\geq 0} \|U(t,s)\| := K < \infty.$$

Soit f de $\text{span}\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}$. Alors, il existe un nombre positif T_f et une fonction F de $P_q(\mathbb{R},X) \cap AP_1(\mathbb{R},X)$ de sorte que pour tout $s \geq T_f$, on ait $f(s) = F(s)$ (Voir figure 4.1). Dans ce qui suit, on utilise la représentation

$$F(s) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{i\mu_k s} c_k(F), \quad \text{où } c_k(F) \in X.$$

Soit $\tau \in \mathbb{R}$ et $J_{f,t,\mu}(\tau)$ comme dans la preuve du lemme 4.1. On évalue la norme "sup" de $J_{f,t,\mu}(\cdot)$. On envisage trois cas.

1. Lorsque $\tau \leq 0$, $J_{f,t,\mu}(\tau) = \int_0^t e^{-i\mu s}(\mathcal{T}(s)f)(\tau)ds = 0$.

1. Aussi connu sous le nom : **théorème de Banach Steinhaus**

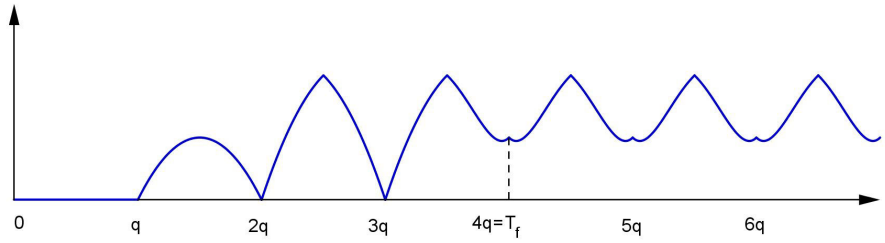


FIGURE 4.1 – **Représentation graphique des fonctions particulières de span$\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}$.**

2. Lorsque $\tau \geq t$, on a

$$\begin{aligned} J_{f,t,\mu}(\tau) &= \int_0^t e^{-i\mu s} U(\tau,\tau-s) f(\tau-s) ds \\ &= \int_{\tau-t}^{\tau} e^{-i\mu(\tau-\rho)} U(\tau,\rho) f(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

On analyse trois sous-cas.

2.1. Quand $T_f \leq \tau - t$, prenant la norme, on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\in[0,\tau]} \|J_{f,t,\mu}(\tau)\| &\leq \sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\in[0,\tau]} \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\mu\tau} \int_{\tau-t}^{\tau} e^{i(\mu+\mu_k)\rho} U(\tau,\rho) c_k(F) d\rho \right\| \\ &\leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|c_k(F)\| = M\|F\|_1. \end{aligned}$$

2.2. Quand $\tau - t \leq T_f \leq \tau$,

$$\begin{aligned} J_{f,t,\mu}(\tau) &= \int_{\tau-t}^{T_f} e^{-i\mu(\tau-\rho)} U(\tau,\rho) f(\rho) d\rho \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\mu\tau} \int_{T_f}^{\tau} e^{i(\mu+\mu_k)\rho} U(\tau,\rho) c_k(F) d\rho. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\in[0,\tau]} \|J_{f,t,\mu}(\tau)\| &\leq K \sup_{\rho\in[\tau-t,T_f]} \|f(\rho)\|(T_f - \tau + t) + M\|F\|_1 \\ &\leq KT_f\|f\|_\infty + M\|F\|_1. \end{aligned}$$

2.3. Quand $T_f > \tau$,

$$\|J_{f,t,\mu}(\tau)\| \leq \left\| \int_0^{T_f} e^{-i\mu(\tau-\rho)} U(\tau,\rho) f(\rho) d\rho \right\|$$

et

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\in[0,\tau]} \|J_{f,t,\mu}(\tau)\| \leq KT_f\|f\|_\infty.$$

3. Lorsque $\tau \in [0,t]$,

$$\begin{aligned} J_{f,t,\mu}(\tau) &= \int_0^{\tau} e^{-i\mu s} U(\tau,\tau-s) f(\tau-s) ds \\ &= \int_0^{\tau} e^{-i\mu(\tau-\rho)} U(\tau,\rho) f(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

On analyse également deux sous-cas.

3.1. Quand $T_f \in [0, \tau]$, on a

$$J_{f,t,\mu}(\tau) = \int_0^{T_f} e^{-i\mu(\tau-\rho)} U(\tau,\rho) f(\rho) d\rho + \int_{T_f}^{\tau} e^{-i\mu(\tau-\rho)} U(\tau,\rho) f(\rho) d\rho.$$

Comme dans le cas précédent, passant aux normes, on obtient

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\geq 0} \|J_{f,t,\mu}(\tau)\| \leq KT_f \|f\|_\infty + M\|F\|_1.$$

3.2. Quand $T_f \geq \tau$, on a

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\geq 0} \|J_{f,t,\mu}(\tau)\| \leq KT_f \|f\|_\infty.$$

On déduit ce que l'on souhaitait en choisissant $L(f) := KT_f\|f\|_\infty + M\|F\|_1$.

Pour prouver la seconde assertion, on considère une fonction h de $P_q(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes : h satisfait une condition de Lipschitz sur $\mathbb{R}$, $h(0) = h(q) = 0$ et pour tout réel μ, la fonction $\mu \mapsto \gamma(\mu) := \int_0^q e^{i\mu s} h(s) ds$ ne s'annule pas. Pour chaque élément x de X, on prend la fonction $t \mapsto h_x(t)$ de $P_q(\mathbb{R}, X)$, définie sur $[0, q]$, par $h_x(s) := h(s)U(s,0)x$. Maintenant, on définit la fonction f_x, par

$$s \mapsto f_x(s) := \begin{cases} h_x(s), & s \geq 0 \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

D'après le lemme 4.5, f_x appartient à l'espace $AP_1(\mathbb{R}, X)$. Par conséquent, f_x appartient également à $\text{span}\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{A}_t\}$. Ensuite, on écrit :

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\geq 0} \left\| \int_0^t e^{-i\mu s} \mathcal{T}(s) f_x ds \right\| \leq L(f_x).$$

Il en découle alors que

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t e^{-i\mu s} \mathcal{T}(s) f_x ds \right)(t) &= \int_0^t e^{-i\mu s} U(t, t-s) f_x(t-s) ds \\ &= \int_0^t e^{-i\mu(t-\rho)} U(t,\rho) f_x(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Soit $t = nq$, pour $n = 0, 1, 2, \cdots$. Comme dans la preuve de la Proposition 4.3, on aura

$$\int_0^{nq} e^{i\mu\rho} U(nq,\rho) f_x(\rho) d\rho = \gamma(\mu) \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\mu kq} U(q,0)^{n-k} x.$$

Par passage à la norme, on trouve les inégalités :

$$\forall x \in X, \quad \left\| \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\mu kq} U(q,0)^{n-k} x \right\| \leq \frac{L(f_x)}{|\gamma(\mu)|}.$$

La conclusion est obtenue en appliquant le principe de bornitude uniforme d'abord, puis la Proposition 4.4.

Étape a II-a. Lorsque la famille $\mathcal{U}$ est à croissance exponentielle. Soit $\omega_0(\mathcal{U})$ l'infimum de l'ensemble des $\omega \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe $M_\omega \geq 1$ tel que

$$\forall t \geq s \geq 0, \quad e^{-\omega(t-s)}\|U(t,s)\| \leq M_\omega < \infty.$$

Pour $\omega > \omega_0(\mathcal{U})$, on choisit $\nu = \omega + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ et on considère la famille d'évolution $\mathcal{V} := \{V(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$, définie par $V(t,s) := e^{-\nu(t-s)}U(t,s)$. Évidemment, on a

$$\|V(t,s)\| \leq e^{-\varepsilon(t-s)}M_\omega \leq M_\omega.$$

On prouvera dans ce qui suit que $V(t,s)$ vérifie l'hypothèse.

En effet,

$$\begin{aligned}
\int_\tau^t e^{i\mu s}V(t,s)xds &= \int_\tau^t e^{i\mu s}e^{-\nu(t-s)}U(t,s)xds \\
&= e^{-\nu t}\int_\tau^t e^{\nu s}\frac{d}{ds}\left(\int_\tau^s e^{i\mu\rho}U(t,\rho)xd\rho\right)ds \\
&= e^{-\nu t}\left[e^{\nu t}\int_\tau^t e^{i\mu\rho}U(t,\rho)xd\rho - \int_\rho^t \nu e^{\nu s}\left(\int_\tau^s e^{i\mu\rho}U(t,\rho)xd\rho\right)ds\right] \\
&= \int_\tau^t e^{i\mu\rho}U(t,\rho)xd\rho - \nu\int_\tau^t e^{-\nu(t-s)}U(t,s)\left(\int_\tau^s e^{i\mu\rho}U(s,\rho)xd\rho\right)ds.
\end{aligned}$$

Prenant la norme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|\int_\tau^t e^{i\mu s}V(t,s)xds\right\| &\leq \left\|\int_\tau^t e^{i\mu\rho}U(t,\rho)xd\rho\right\| \\
&+ |\nu|\int_\tau^t e^{-\nu(t-s)}\|U(t,s)\|\left\|\int_\tau^s e^{i\mu\rho}U(s,\rho)xd\rho\right\|ds \\
&\leq M\|x\|\left(1 + |\nu|M_\omega\int_\tau^t e^{-\nu(t-s)}e^{\omega(t-s)}ds\right) \\
&= M\|x\|\left(1 + |\nu|M_\omega\int_\tau^t e^{-\varepsilon(t-s)}ds\right) \\
&\leq M\|x\|\left(1 + \frac{|\nu|M_\omega}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

En vertu de l'étape précédente, il existe deux constantes positives N et η telles que $\|V(t,s)\| \leq Ne^{-\eta(t-s)}$. Il en résulte que

$$\forall t \geq s \geq 0, \quad \|U(t,s)\| \leq Ne^{(\nu-\eta)(t-s)}.$$

Lorsque $\nu \to \omega$, on aura :

$$\|U(t,s)\| \leq Ne^{(\omega-\eta)(t-s)}.$$

On répète ce raisonnement jusque ce que l'on obtienne un exposant strictement négatif.

■

Une première conséquence du théorème 4.2 est la version suivante du théorème de E. A. Barbaşin.

Théorème 4.3 *Soit $\mathcal{U} = \{U(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$ une famille d'évolution fortement continue, périodique de période q, définie sur un espace de Banach X ayant la propriété que pour tout $x \in X$, la fonction $U(\cdot,0)x$ satisfait une condition de Lipschitz sur $(0,q)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

i. *La famille $\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable.*

ii. $\forall x \in X, \forall x^* \in X^* \quad \sup\limits_{t\geq 0} \int\limits_0^t |\langle U(t,s)x, x^*\rangle|\, ds := M(x) < \infty.$

iii. $\forall x \in X \quad \sup\limits_{t\geq 0} \int\limits_0^t \|U(t,s)x\|\, ds := M(x) < \infty.$

Démonstration. Elle est similaire à celle du corollaire 4.3.1.

■

4.5 Formulation du problème précédent en termes de Problème de Cauchy abstrait bien posé

En liaison avec les Problèmes de Cauchy bien posés abstraits périodiques, le résultat précédent peut être reformulé comme suit :

Corollaire 4.1 *Soit $(A(t), D(A(t)))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires opérant sur un espace de Banach X. On suppose que la famille dévolution $\mathcal{U} = \{U(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$, engendrée par $\{A(t)\}_{t\geq 0}$, vérifie les conditions du théorème 4.2. Alors, la famille $\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable si et seulement si pour tout réel μ, chaque x de X et tout $s \geq 0$, la solution du Problème de Cauchy abstrait*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A(t)u(t) + e^{i\mu t}x, & t > s \\ u(s) = 0, \end{cases}$$

est bornée sur $[s, \infty)$, par une constante qui ne dépend que de x.

De toute évidence, le corollaire ci-dessus couvre le cas où les opérateurs $A(t)$ sont bornés sur X. Une autre situation est représentée sur la remarque suivante.

Remarque 4.2 *En particulier, le théorème 4.2 peut être appliqué sur une classe de semi-groupes fortement continus bornés $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, engendrés par A, qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $t > 0$ et tout x de X, $T(t)x$ appartient à $D(A)$.*

2. *Pour tout $x \in X$, on a $\sup_{t>0} \|AT(t)x\| := c_x < \infty$.*

Sur la base des hypothèses 1. et 2. et de la remarque précédente, on montre que, pour chaque x de X, la fonction $t \mapsto T(t)x$ satisfait une condition de Lipschitz sur $(0, \infty)$. À cet effet, soit $t \geq s > 0$, fixe et $0 < \varepsilon < s$. Comme on le sait, $T(t)x = T(\varepsilon)x + A\int_{\varepsilon}^{t} T(\rho)x d\rho$ et $T(s)x = T(\varepsilon)x + A\int_{\varepsilon}^{s} T(\rho)x d\rho$. Donc,

$$\|T(t)x - T(s)x\| = \left\| A\int_{s}^{t} T(\rho)x d\rho \right\| = \left\| \int_{s}^{t} AT(\rho)x d\rho \right\| \leq c_x(t-s).$$

La seconde égalité est une conséquence du théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Soit $T > 0$ fixé. On considère une famille $\{A(t)\}_{0\leq t\leq T}$ d'opérateurs linéaires et fermés définis sur X ce qui suppose que :

$(A1)$ Pour tout $t \in [0,T]$, le domaine $D(A(t)) = D$, de $A(t)$, est dense dans X et ne dépend pas de t.

$(A2)$ Pour tout $t \in [0,T]$, on a $\rho(A(t)) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad Re(\lambda) \geq 0\}$. En outre, il existe une constante $M \geq 1$, ne dépendant pas de t, telle que

$$\left\| (\lambda I - A(t))^{-1} \right\| \leq \frac{M}{|\lambda| + 1},$$

pour tout t de $[0,T]$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) \geq 0$.

$(A3)$ Il existe $\alpha \in (0,1]$ et une constante L tels que :

$$\left\| (A(t) - A(s))\, A^{-1}(\tau) \right\| \leq L|t-s|^{\alpha}, \quad \text{pour tous } t,s,\tau \in [0,T].$$

Alors, le Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t), \quad t > s \\ x(s) &= x_0 \end{cases}$$

est bien posé, il existe donc une famille d'évolution $\{U(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$, telle que

$$x(t) = U(t,s)x(s), \quad \text{pour tout } t \geq s. \tag{4.8}$$

Ainsi, l'évolution en temps de la solution s'obtient lorsqu'on connaît la solution à un moment antérieur et la matrice de transition $U(t,s)$.

Les concepts de problème bien posés et des détails supplémentaires sur ce sujet peuvent être trouvés, par exemple, dans (Pazy, 1983, Chapitre 5, Théorème 6.1), (Daners, Medina, 1992, Theorem 2.6), (Baroun, Maniar, Schnaubelt, 2009), (Lan Thanh Nguyen 1, 1999), (Lan Thanh Nguyen 2, 1999), et leurs références.

La condition $(A3)$ a été introduit dans (Tanabe, 1960).

Soit $\{T_B(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu et borné, opérant sur X de générateur B ayant les propriétés suivantes :

(T_B1) L'ensemble $\rho(B)$ contient le demi-plan fermé à droite du plan complexe. Il existe $M \geq 1$, telle que

$$\|R(\lambda, B)\| \leq \frac{M}{|\lambda|+1}, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}, \text{ avec } Re(\lambda) \geq 0.$$

(T_B2) $T(t)x \in D(A)$, pour tout $t > 0$ et tout $x \in X$.

(T_B3) $\sup\limits_{t>0} \|AT(t)x\| := c_x < \infty$, pour tout $x \in X$.

On considère aussi la fonction $a : \mathbb{R}_+ \to (0,\infty)$, qui vérifie les conditions suivantes :

$(a1)$ $a(\cdot)$ est périodique de période q, pour un certain $q > 0$.

$(a2)$ $a(t) \geq 1$, pour tout $t \geq 0$.

$(a3)$ Il existe $\alpha \in (0,1]$ et $c > 0$ tels que

$$|a(t) - a(s)| \leq c|t-s|^{\alpha}, \quad \text{pour tous } t,s \geq 0.$$

On choisit $B(t) = a(t)B$, $t \geq 0$.

Le problème de Cauchy associé à la famille $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ est bien posé et la famille d'évolution associée est donnée (Daners, Medina, 1992, Example 2.9b) par

$$\forall x \in X, t \geq s \geq 0, \quad U(t,s)x = T_B\left(\int_s^t a(r)dr\right)x.$$

En effet, $U(t,t) = I$ pour tout $t \geq 0$. Pour tous $t \geq s \geq 0$, de la périodicité de a, on obtient $U(t+q, s+q) = U(t,s)$,. Soit $t \geq s \geq r \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} U(t,s)U(s,r) &= T_B\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right) T_B\left(\int_r^s a(\tau)d\tau\right) \\ &= T_B\left(\int_s^t a(\tau)d\tau + \int_r^s a(\tau)d\tau\right) \\ &= T_B\left(\int_r^t a(\tau)d\tau\right) = U(t,r). \end{aligned}$$

Avec ces notations et précisions, on formule :

Corollaire 4.2 *Si*

$$\forall x \in X, \quad \sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\geq s\geq 0} \left\| \int_s^t e^{i\mu\tau} T_B\left(\int_\tau^t a(r)dr\right) x d\tau \right\| < \infty, \tag{4.9}$$

alors $\omega_0(\mathcal{U}) < 0$.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 4.2 et de la remarque 4.2.

■

On termine ce paragraphe par un exemple qui apparaît dans la théorie générale du transfert de chaleur et montre que l'hypothèse de bornitude (4.9) est facile à vérifier. L'espace X considéré dans ce cas est $L^2([0,\pi],\mathbb{C})$. La semi-groupe T_B opérant sur X est défini par :

$$(T_B(t))\, x(\xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2} \sin(n\xi) \left(\int_0^\pi x(s) \sin nsds\right), \quad \xi \in [0,\pi], t \geq 0.$$

La générateur infinitésimal de T_B est l'opérateur linéaire B, donné par $Bx = \ddot{x}$. Le domaine maximal de l'opérateur B est l'espace $D(B)$ de toutes les fonctions x de X, pour lesquelles x et $\dot{x}$ sont des fonctions absolument continues, $\ddot{x} \in X$ et $x(0) = x(\pi) = 0$, cf. (Zabczyk, 1992, Exemple 1.3, pp. 178, 198).

Chaque fonction f de X vérifie l'inégalité $\|f\|_{L^2([0,\pi],\mathbb{C})} \leq \sqrt{\pi}\|f\|_\infty$. Par conséquent, il suffit de montrer que (4.9) est valide en utilisant la norme "sup" au lieu de la norme L^2. On considère, en outre, que $\hat{x}_n := \int_0^\pi x(s) \sin nsds$ vérifie l'estimation $\|\hat{x}_n\| \leq \pi\|x\|_\infty$. Notant par $F(\cdot)$ la

fonction primitive de $a(\cdot)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \int_s^t e^{i\mu\tau} T_B \left(\int_\tau^t a(r)dr \right) x(\xi) d\tau \right\| &= \frac{2}{\pi} \left\| \int_s^t e^{i\mu s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \int_\tau^t a(r)dr} \sin(n\xi) \right) \hat{x}_n d\tau \right\| \\
&\leq 2\|x\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t e^{-n^2 \int_\tau^t a(r)dr} d\tau \\
&\leq 2\|x\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 F(t)} \int_s^t a(\tau) e^{n^2 F(\tau)} d\tau \\
&\leq 2\|x\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - e^{n^2 (F(s) - F(t))} \right) \\
&\leq 2\|x\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.
\end{aligned}$$

■

Bibliographie

[Amann, 2004] H. Amann, Maximal regularity for nonautonomous evolution equations, Advanced Nonlinear Studies **4**(2004), p. 417-430.

[Arshad, Buşe, Nosheen, Zada, 2011] S. Arshad, C. Buşe, A. Nosheen and A. Zada, Connections between the stability of a Poincare map and boundedness of certain associate sequences, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **16**(2011), p. 1-16.

[Balint, 1983] S. Balint, On the Perron-Bellman theorem for systems with constant coefficients, Analele Universitatii din Timişoara, Seria Stiinte Matematice **XXI**, fasc. 1-2 (1983), p. 3-8. (Cité page 69.)

[Barbaşin, 1967] E. A. Barbashin, **Introduction in the theory of stability**, Izd. Nauka, Moskow, 1967 (Russia).

[Barbu, Buşe, 1997] D. Barbu and C. Buşe, Some remarks about the Perron condition for C_0 semigroups, Analele Universitatii Timisora, fasc 1 (1997), p. 3-8. (Cité page 69.)

[Baroun, Maniar, Schnaubelt, 2009] M. Baroun, L. Maniar and R. Schnaubelt, Almost periodicity of parabolic evolution equations with inhomogeneous boundary values, Integral Equations and Operator Theory, **65** (2009), Nr. 2, p. 169-193. (Cité page 103.)

[Buşe, 1998] C. Buşe, On the Perron-Bellman theorem for evolutionary processes with exponential growth in Banach spaces, New-Zealand Journal of Mathematics, **27**(1998), p. 183-190. (Cité page 67.)

[Buşe] C. Buşe, Asymptotic stability and Perron condition for periodic evolution families on the half line, Evolution Equations and Semigroups (preprint), http ://ma1serv.mathematik.uni-karlsruhe.de/evolve-l/index.html. (Cité page 71.)

[Buşe, 2001] C. Buşe, Exponential Stability for Periodic Evolution Families of Bounded Linear Operators, Rendiconti Del Seminario Matematico, **59**, 1(2001), p. 17-22.

[Buşe, 2002] C. Buşe, A spectral mapping theorem for evolution semigroups on the space of ssymptotically slmost periodic functions defined on the half line, Electronic Journal of Differential Equations, USA, Vol. 2002(2002), Nr. 70, p. 1-11.

[Buşe, 2003] C. Buşe, **Semigrupuri liniare pe spaţii Banach şi semigrupuri de evoluţie pe spaţii de funcţii aproape periodice**, Editura Eubeea, Timişoara, 2003. (Cité page 71.)

[Buşe, Choudary, Dragomir, Prajea, 2008] C. Buşe, A. D. R. Choudary, S. S. Dragomir and M. S. Prajea, On Uniform Exponential Stability of Exponentially Bounded Evolution Families, Integral Equation Operator Theory, **61**(2008), p. 325-340.

[Buşe, Cerone, Dragomir, Sofo, 2005] C. Buşe, P. Cerone, S. S. Dragomir and A. Sofo, Uniform stability of periodic discrete system in Banach spaces, Journal of Difference Equations and Applications **11**, Nr .12 (2005), p. 1081-1088. (Cité page 71.)

[Buşe, Jitianu, 2003] C. Buşe and O. Jitianu, A new theorem on exponential stability of evolution families on Banach spaces, Electronic Journal of Differential Equations, USA, Vol. 2003(2003), Nr. 14, p. 1-10.

[Buşe, Lassoued, Lan Thanh Nguyen, Saierli, 2012] C. Buşe, D. Lassoued, Lan Thanh Nguyen and O. Saierli, Exponential stability and uniform boundedness of solutions for nonautonomous periodic abstract Cauchy problems. An evolution semigroup approach, Integral Equations and Operator Theory, November 2012, **74**, Issue 3, p. 345-362.

[Buşe, Lupulescu, 2003] C. Buşe and V. Lupulescu, Exponential stability of linear and almost periodic systems on Banach spaces, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2003(2003), Nr. 125, p. 1-7.

[Buşe, Megan, Praja, Preda, 2007] C. Buşe, M. Megan, M. Prajea and P. Preda, The strong variant of a Barbashin theorem on stability of solutions for non-autonomous differential equations in Banach spaces, Integral Equations and Operator Theory, **59**(2007), p. 491-500.

[Buşe, Pogan, 2001] C. Buşe and A. Pogan, Individual Exponential Stability for Evolution Families of Linear and Bounded Operators, New Zealand Journal of Mathematics, **30**(2001), p. 15-24. (Cité page 70.)

[Buşe, Prajea, 2008] C. Buşe and M. S. Prajea, On Asymptotic behavior of discrete and continious semigroups on Hilbert spaces, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie Tome 51(99), Nr. 2 (2008), p. 123-135. (Cité page 69.)

[Buşe, Zada, 2009] C. Buşe and A. Zada, Boundedness and exponential stability for periodic time dependent systems, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **37**(2009), p. 1-9.

[Chicone, Latushkin, 1999] C. Chicone and Y. Latushkin, **Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations**, Mathematical Surveys and Monographs, **70**, American Mathematical Society, Providence R. I., (1999). (Cité pages 81 et 84.)

[Clark, Latushkin, Montgomery-Smith, Randolph, 2000] S. Clark, Y. Latushkin, S. Montgomery-Smith and T. Randolph, Stability Radius and Internal Versus External Stability in Banach Spaces : An evolution Semigroup Approach, SIAM Journal of Control and Optimization, **38**(6), (2000), p. 1757-1793. (Cité pages 81 et 84.)

[Corduneanu, 2009] C. Corduneanu, **Almost Periodic Oscillations and Waves**, Springer Sciences+Business Media LLC(2009). (Cité page 72.)

[Daletckii, Krein, 1974] Ju. L. Daletckii and M. G. Krein, **Stability of solutions of differential equations in Banach spaces**, American Mathematical Society, Translation of Mathematical Monographs, Volume **43** (1974).

[Daners, Medina, 1992] D. Daners and P. Koch Medina, **Abstract evolution equations, periodic problems and applications**, Pitman Research Notes in Mathematics Series 279, Longman Scientific & Technical, 1992. (Cité page 103.)

[Datko, 1970] R. Datko, Extending a theorem of A.M. Liapunov to Hilbert space, Journal of Mathematical Analysis and Applications **32**(1970), p. 610-616. (Cité page 64.)

[Engel, Nagel, 2000] K. Engel and R. Nagel, **One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations**, Graduate Texts in Mathematics 194, Springer, (2000). (Cité pages 62 et 63.)

[Feller, 1952] , W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations. Annals of Mathematics **55**(1952), p. 468519. (Cité page 60.)

[Feller, 1953] W. Feller, On the generation of unbounded semigroups of bounded linear operators. Annals of Mathematics, **58**(1953), p. 166174. (Cité page 60.)

[Gearhart, 1978] L. Gearhart, Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces, Transactions of the American Mathematical Society **236**(1978), p. 385-394. (Cité page 65.)

[Greiner, Voight, Wolff, 1981] G. Greiner, J. Voight and M. P. Wolff, On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators, Journal of Operator Theory, **5**(1981), p. 245-256.

[Hille, 1936] E. Hille, Notes on linear transformation. Transactions of the American Mathematical Society, **39**(1936),131-153. (Cité page 60.)

[Hille, 1948] E. Hille, **Functional Analysis and Semi-Groups**, A.M.S., New York, 1948. (Cité page 60.)

[Hille, 1952] E. Hille, A note on Cauchy's problem. Annales Societatis Mathematicae Polonae, **25**(1952), 56-68. (Cité page 60.)

[Hille, Phillips, 1957] E. Hille, R.S. Phillips, **Functional Analysis and SemiGroups**, A.M.S., Providence, Rhode Island, 1957. (Cité page 60.)

[Howland, 1984] J. S. Howland, On a theorem of Gearhart, Integral Equations and Operator Theory, **7** (1984), p. 138-142. (Cité page 81.)

[Huang, 1985] F. Huang, Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Annals of Differential Equations, **1**(1985), p. 43-56. (Cité page 65.)

[Huang, 1989] F. Huang, Exponential stability of linear systems in Banach spaces, Chinese Annals of Mathematics, **10B**(1989), p. 332-340.

[Krengel, 1985] U. Krengel, **Ergodic Theorems**, De Gruyter, Berlin, (1985). (Cité page 71.)

[Mather, 1968] J. Mather, Characterization of Anosov diffeomorphisms, ndagationes Mathematicae, **30** (1968), p. 479-483. (Cité page 81.)

[Miyadera, 1952] I. Miyadera, Generation of strongly continuous semigroups of operators. The Tohoku Mathematical Journal, **4** (1952), 109-114. (Cité page 60.)

[Miyadera, 1956] I. Miyadera, On the representation theorem by Laplace transformation of vector- valued functions. The Tohoku Mathematical Journal, **8** (1956), 170-180. (Cité page 60.)

[Minh, Räbiger, Schnaubelt, 1998] N. Van Minh, F. R*ä*biger and R. Schnaubelt, Exponential stability, exponential expansiveness and exponential dichotomy of evolution equations on the half-line, Integral Equations Operator Theory, **32** (1998), p. 332-353. (Cité pages 81, 84 et 85.)

[Nagel, 1986] R. Nagel, **One-parameter Semigroups of Positive Operators**, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Volume **1184**, (1986). (Cité pages 61, 65 et 68.)

[Naito, Minh, 1999] T. Naito and N. Van Minh, Evolution semigroups and spectral criteria for almost periodic solutions of periodic evolution equations, Journal of Differential Equations, **152** (1999), p. 358-376. (Cité page 81.)

[Nathan, 1935] D.S. Nathan, One parameter groups of transformations in abstract vector spaces. Duke Mathematical Journal, **1** (1935), 518-526. (Cité page 60.)

[Neubrander, 1986] F. Neubrander, Laplace transform and asymptotic behavior of strongly continuous semigroups, Houston Journal of Mathematics, **12**, Nr. 4 (1986), p. 549-561.

[Lan Thanh Nguyen 1, 1999] L. Thanh Nguyen, On nonautonomous functional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **239**, Issue 1(1999), p. 158-174. (Cité page 103.)

[Lan Thanh Nguyen 2, 1999] L. Thanh Nguyen, On the wellposedness of nonautonomous second order Cauchy problems, East-West Journal of Mathematics ,**1**(1999), Nr. 2, 131-146. (Cité page 103.)

[Pazy, 1972] A. Pazy, On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space, SIAM Journal of Mathematical Analysis, **3** (1972), p. 291-294. (Cité page 64.)

[Pazy, 1983] A. Pazy, **Semigroups of Linear Operators and Applications to Differential Equations**, Springer-Verlag, New York (1983) (Cité pages 61, 64 et 103.)

[Perron, 1930] O. Perron, Ueber eine Matrixtransformation, Mathematische Zeitschrift, **32**(1930), p. 465-473. (Cité page 69.)

[Phillips, 1952] R.S. Phillips, On the generation of semi-groups of linear operators. Pacific Journal of Mathematics, **2** (1952), 393415. (Cité page 60.)

[Phong, 2001] V. Q. Phong, On stability of C_0-semigroups, Proceedings of the American Mathematical Society, **129**, Nr. 10 (2001), p. 2871-2879. (Cité page 68.)

[Priola, Zabczyk, 2003] E. Priola and J. Zabczyk, Null controllability with vanishing energy, SIAM Journal on Control and Optimization, **42**, Nr.3, (2003), p. 1013-1032.

[Prüss, 1984] J. Prüss, On the spectrum of C_0-semigroups, Transactions of the American Mathematical Society, **284** (1984), p. 847-857. (Cité page 65.)

[Reghiş, Buşe, 1998] M. Reghiş and C. Buşe, On the Perron-Bellman theorem for strongly continuous semigroups and periodic evolutionary processes in Banach spaces, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, **4**(1998), p. 155-166. (Cité pages 68, 69 et 90.)

[Rolewicz, 1986] S. Rolewicz, On uniform N-equistability, Jornal of Mathematical Analysis and Applications, **115**(1986), p. 434-441.

[Schnaubelt, 2002] R. Schnaubelt, **Well posedness and asymptotic behavior of non-autonomous linear evolution equations, Evolution Equations, semigroups and functional analysis**, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser Basel Volume 50(2002), p. 311-338. (Cité pages 81 et 84.)

[Stein, 2003] E.M. Stein and R. Shakarchi, **Fourier Analysis : An Introduction**, Princeton University Press, (2003). (Cité page 95.)

[Tanabe, 1960] K. Tanabe, On the Equations of Evolution in a Banach Space, Osaka Mathematical Journal, **12** (1960), p. 363-376. (Cité page 103.)

[Taylor, 1985] A. E. Taylor, **General Theory of Functions and Integration**, Dover Publications, (1985). (Cité page 64.)

[van Neerven, 1996, 1] J.M.A.M. van Neerven, Individual stability of C_0 semigroups with uniformly bounded local resolvent, Semigroup Forum, **53**, Nr. 1, (1996), p. 155-161.

[van Neerven, 1996, 2] J. M. A. M. van Neerven, **The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators**, Birkhäuser, Basel (1996). (Cité page 69.)

[van Neerevn, 2005] J.M.A.M. van Neerven, Null controllability and the algebraic Riccati equation in Banach spaces, SIAM Journal on Control and Optimization, **43**,(2005), p. 1313-1327.

[van Neereven, 2007] J.M.A.M. van Neereven, **Stochastic Evolution Equations**, Lecture notes of the Internet Seminar 2007/08 (version May 07, 2010), http ://aw.twi.tudelft.nl/ neerven/publications/papers/ISEM.pdf.

[Weis, 2001] L. Weis, Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal Lpregularity, Mathematische Annalen **319**(4), (2001), p. 735-758.

[Weis, Wrobel, 1996] L. Weis and V. Wrobel, Asymptotic behavior of C_0 semigroups in Banach spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, **124**, Nr. 12 (1996), p. 3663-3671.

[Wrobel, 1989] V. Wrobel, Asymptotic behavior of C_0-semigroups in B-convex spaces, Indiana University Mathematics Journal, **38**(1989), p. 101-114.

[Yosida, 1936] K. Yosida, On the group embeded in the metrical complete ring. Japanese Journal of Mathematics, **13** (1936), 7–26. (Cité page 60.)

[Yosida, 1948] K. Yosida, On the differentiability and the representation of one-parameter semi- groups of linear operators. Journal of the Mathematical Society of Japan, **1** (1948), 15-21. (Cité page 60.)

[Yosida, 1957] K. Yosida, **Lectures on Semigroup Theory and its application to Cauchy problem in Partial Differential Equations**, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957. (Cité page 60.)

[Yosida, 1965] K. Yosida, **Functional Analysis**, Grundlehen Math. Wiss., Volume 123, Springer-Verlag, (1965). (Cité page 64.)

[Zabczyk, 1992] J. Zabczyk, **Mathematical control theory : An introduction**, Birkhäuser, Systems and Control, (1992). (Cité page 104.)

Introduction à la dichotomie exponentielle

5

En se plaçant dans un espace de Banach X, on considère un semi-groupe $T := \{T(t) : \ t \geq 0\}$ fortement continu d'opérateurs linéaires bornés et on note par A son générateur infinitésimal.

La dichotomie exponentielle, qui trouve ses origines dans les travaux d'**Oscar Perron**[1], notamment dans (Perron, 1930), généralise la notion d'hyperbolicité du cas autonome au cas nonautonome pour les systèmes linéaires.

Pour un semi-groupe fortement continu T, une approche pour étudier sont comportement asymptotique est de chercher à décomposer l'espace sous-jacent en deux sous-espaces de la manière suivante :

$$X = X_R \oplus X_S$$

et le semi-groupe en

$$(T(t))_{t\geq 0} = (T_R(t))_{t\geq 0} \oplus (T_S(t))_{t\geq 0},$$

tels que $(T(t))_{t\geq 0}$ sur la partie "stable" X_S converge (dans un sens précis) vers zéro lorsque t tend vers l'infini, tandis que $(T(t))_{t\geq 0}$ sur la partie "réversible" ou "structurée"[2] X_R puisse "être étudiée".

L'exemple le plus simple (et le classique) d'une telle décomposition remonte à Lyapunov en 1899 qui est valide si

$$\|T_S(t)\| \leq Me^{-\varepsilon t} \quad \text{et} \quad \|T_R^{-1}(t)\| \leq Me^{-\varepsilon t}, \quad \text{pour } \ t \geq 0,$$

pour certains $\varepsilon > 0, M \geq 1$. Des semi-groupes qui vérifient cette propriété sont dits **hyperboliques** du fait que le spectre de générateur infinitésimal n'intersecte pas la droite purement imaginaire $i\mathbb{R}$. Pour plus de détails, on se réfère à (Engel, Nagel, 2000, Chapitres V.1 et VI.9).

Des décompositions plus subtiles sont obtenues (conformément aux suppositions appropriées) via les théorèmes de décomposition de Foias-

1. Né le 7 mai 1880 à Frankenthal (Palatinat) (Empire allemand) - mort le 22 février 1975 à Munich (Allemagne de l'Ouest)

2. Ici, j'ai utilisé la terminologie de Terry Tao dans *The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes. Proceedings ICM 2006, pages 581-608, 2006*

Sz. Nagy-Foguel (FSzNF) ou le Jacobs-deLeeuw-Glicksberg (JdLG). Dans ces décompositions, $(T_S(t))_{t\geq 0}$ converge vers zéro dans un certain sens faible, alors que $(T_R(t))_{t\geq 0}$ devient un groupe unitaire (FSzNF) ou à spectre discret (JdLG). Mais, toujours, $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ est décisive pour ces décompositions.

La situation pour les familles d'évolution (et donc pour les systèmes non autonomes) est plus difficile, puisque le spectre de l'opérateur en question $\sigma(A(t))$ ne détermine pas le comportement asymptotique de cette famille (cf. Section 5.3).

Une façon d'étudier le comportement asymtpotique d'une famille d'évolution est la dichotomie exponentielle qui signifie, entre autre, la décomposition de l'espace adjacent en deux parties comme précédément, et par conséquent la décomposition de la famille d'évolution comme somme d'une famille stable et d'une autre "reversible" ou non-stable.

Dans ce court chapitre, on se propose de donner quelques résulats fandamentaux relatifs à la dichotomie exponentielle, qui sera en particulier l'objet du chapitre suivant.

Notre référence principale dans ce chapitre est (Coppel, 1978).

5.1 Définitions

Soit

$$\begin{aligned} A(\cdot) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \\ t &\longmapsto A(t) \end{aligned}$$

une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}$, $x(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$; $t \mapsto x(t)$ une fonction à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^n$ et

$$\begin{aligned} f(\cdot) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère alors l'équation différentielle linéaire homogène suivante :

$$x'(t) = A(t)x(t),\ t \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

et l'équation non-homogène associée

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

Il est connu que l'ensemble des solutions de (5.1) forme un espace vectoriel de dimesion n. Si $x_1(\cdot), \cdots, x_n(\cdot)$ désignent n solutions linéairement indépendantes de (5.1), alors la matrice dont les colonnes sont les x_j est appelée matrice fondamentale de (5.1). Dans ce cas particulier, les x_j sont dites solutions fondamentales de l'équation (5.1). Un autre résulat connu affirme que les solutions $x_1(\cdot), \cdots, x_n(t)$ sont fondamentales si et seulement si le déterminant de la matrice fondamentale ne s'annule jamais.

On pose $X(t) := (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ la matrice fondamentale de (5.1).

Proposition 5.1 *La matrice fondamentale $X(t)$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t)$, *c'est-à-dire que la matrice $X(t)$ est une solution de l'équation différentielle opératorielle $X'(t) = A(t)X(t)$.*
2. *$X(t)$ est une matrice régulière et toute matrice $Z(t)$ solution de l'équation différentielle opératorielle dans 1 peut être exprimée comme $Z(t) = X(t)C$, où C est une matrice constante.*

Soit $X(t)$ une matrice fondamentale du système (5.1). Elle est alors évidemment inversible. Si les deux matrices $X(t)$ et X^{-1} peuvent être décomposées comme suit :

$$\begin{aligned} X(t) &= X_1(t) + X_2(t) \\ X^{-1}(s) &= Z_1(s) + Z_2(s) \\ X(t)Z^{-1}(s) &= X_1(t)Z_1(s) + X_2(t)Z_2(s) \end{aligned}$$

et si elles satisfont les conditions suivantes :

Il existe des constantes strictement positives K, L, α, β telles que

$$\begin{aligned} \|X_1(t)Z_1(s)\| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \text{ si } t \geq s \\ \|X_2(t)Z_2(s)\| &\leq Le^{-\beta(s-t)}, \text{ si } s \geq t, \end{aligned}$$

où

$$X_1(t) = (X_{11}(t),\ 0) \quad , \quad X_2(t) = (0,\ X_{12}(t)),$$
$$Z_1(s) = \begin{pmatrix} Z_{11}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Z_2(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ Z_{21}(s) \end{pmatrix},$$

on dit que le système (5.1) admet une dichotomie exponentielle. Ceci peut aussi s'écrire comme dans la défintion 5.2 ci-dessous.

Définition 5.1 *Une matrice $P \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est dite* un projecteur *si $P^2 = P$.*

Définition 5.2 *l'équation différentielle (5.1) admet* une dichotomie exponentielle *s'il existe un projecteur P et des constantes positives K, L, α, β tels que*

$$\|X(t)PX^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \text{ pour tous } t \geq s \geq 0 \tag{5.3}$$
$$\|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| \leq Le^{-\beta(s-t)} \text{ pour tous } s \geq t \geq 0 \tag{5.4}$$

5.2 Dichotomie exponentielle de systèmes différentiels autonomes

On suppose, dans ce paragraphe que l'équation (5.1) est autonome, autrement dit, que pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = A$ est une matrice constante indépendante du temps t.

Dans ce cas, la matrice fondamentale de (5.1) est $X(t) = e^{tA}$.

On notera comme dans les chapitres précédents, par $\sigma(A)$, le spectre de la matrice A, à savoir l'ensemble de tous les nombres complexes λ tels que la matrice $(\lambda I - A)$ ne soit pas inversible. On désignera également par $\mathrm{Re}(\sigma(A))$ l'ensemble défini par

$$\mathrm{Re}(\sigma(A)) := \{\mathrm{Re}(\lambda);\ \ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Définition 5.3 *La matrice A est dite*

1. stable *si $Re(\sigma(A))$ est inclus dans $]-\infty, 0[$, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative ;*
2. expansive *si $Re(\sigma(A))$ est inclus dans $]0, +\infty[$ c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres sont à partie réelle positive ;*
3. dichotomique *si $Re(\sigma(A)) \cap (i\mathbb{R}) = \emptyset$, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres sont purement imaginaires.*

Dans le cas autonome, on peut prendre le projecteur P comme le projecteur spectral défini par

$$P := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (zI - A)^{-1} dz,$$

où γ est n'importe quelle courbe simple fermée rectifiable prise dans le demi-plan ouvert contenant dans son intérieur toutes les valeurs propres de A dont la partie réelle est négative.

Remarque 5.1 *Une courbe $\gamma : I := [a,b] \to E$ (avec E désigne un espace métrique muni d'une distance d) est dite rectifiable si elle est continue et si sa longueur est finie. Pour D une subdivision de $[a,b]$ donnée par $t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$, on note par*

$$L(D) := \sum_{j=0}^{j=n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

On appelle longueur de γ la borne supérieure de l'ensemble $\{L(D) :$ D soit une subdivision de $I = [a,b]\}$ (qui est majoré lorsque γ est rectifiable).

La proposition suivante donne une caractérisation de la dichotomie exponentielle d'un système différentiel autonome.

Proposition 5.2 Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. *A est dichotomique ;*
2. *l'équation différentielle (5.1) n'admet aucune solution (non triviale) bornée pour $t \in \mathbb{R}$;*
3. *pour toute fonction bornée f, l'équation différentielle (5.2) admet une solution unique $x(\cdot)$ qui est bornée, où*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)f(s)ds = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}Pf(s)ds - \int_{t}^{+\infty} e^{A(t-s)}Qf(s)ds \tag{5.5}$$

Dans (5.5), on a posé $K(t-s) = \begin{cases} e^{A(t-s)}P & si\ t \geq s \\ -e^{A(t-s)}Q & si\ t < s \end{cases}$, et $Q = I - P$ et P sont deux projecteurs tels que $\mathrm{Re}(\sigma(AP)) \subset]-\infty; 0[$ et $\mathrm{Re}(\sigma(AQ)) \subset]0; +\infty[$.

Démonstration. • Il est clair que les deux assertions 1 et 2 sont équivalentes.

• Montrons maintenant que les deux affirmations 2 et 3 sont équivalentes.

En effet, si 2 est satisfaite, il s'en suit immédiatement que 1 est également vérifiée. En outre, il est facile de vérifier, via une dérivation directe, que (5.5) est une solution de (5.2).

Prouvons que $x(\cdot)$ est une solution bornée de (5.2). En effet, en dérivant (5.5), on obtient que

$$x'(t) = Pf(t) + \int_{-\infty}^{t} Ae^{A(t-s)}Pf(s)ds + Qf(t) - \int_{t}^{+\infty} e^{A(t-s)}Qf(s)ds,$$

c'est-à-dire que

$$x'(t) = f(t) + Ax(t).$$

Il en résulte en passant à la norme que

$$\|x(t)\| \leq \Big(\Big|\int_{-\infty}^{t} Ke^{-\alpha(t-s)}ds\Big| + \Big|\int_{t}^{+\infty} Ke^{-\alpha(s-t)}ds\Big|\Big)\|f\| \leq \frac{2K}{\alpha}\|f\|,$$

où $\|f\| := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$, et comme $\mathrm{Re}(\sigma(AP)) \subset]-\infty;0[$ et $\mathrm{Re}(\sigma(AQ)) \subset]0;+\infty[$, on a respectivement

$$\|e^{A(t-s)}P\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \text{ pour tous } t \geq s,$$
$$\|e^{A(t-s)}Q\| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}, \text{ pour tous } s \geq t,$$

avec $\alpha > 0$ et $K\alpha > 0$.

L'unicité dans 3 découle de l'unicité dans 2.

Réciproquement, si 3 est satisfaite, grâce au principe de superposition on obtient 2.

■

5.3 Dichotomie exponentielle de systèmes différentiels dans le cas général

Dans le cas général (non autonome), la condition **1.** de la Proposition 5.2 ne donne pas d'information sur la dichotomie exponentielle du sytème en question.

D'ailleurs, $\sigma(A(t)$ ne fournit même pas d'information sur la stabilité du système 5.1. En effet, par exemple, si l'on prend

$$A(t) := \begin{pmatrix} -2\cos^2(t) & -1-2\cos(t)\sin(t) \\ 1-2\cos(t)\sin(t) & -2\sin^2(t) \end{pmatrix},$$

on remarque que pour tout réel t la matrice $A(t)$ admet la valeur propre double (-1) tandis qu'il existe de solutions qui tendent vers l'infini.

Il est aussi à observer que l'équation (5.1) admet une dichotomie exponentielle pour le projecteur $P = I$ si et seulement si elle est uniformément saymptotiquement stable.

Afin de pouvoir analyser ce que la dichotomie exponentielle signifie dans le cas général, il sera plus commode d'écrire les deux conditions de la définition 5.2 sous la forme équivalente suivante :

$$\|X(t)P\xi\| \leq K'e^{-\alpha(t-s)}\|X(s)P\xi\|, \text{ pour tous } t \geq s, \tag{5.6}$$
$$\|X(t)(I-P)\xi\| \leq L'e^{-\alpha(s-t)}\|X(s)(I-P)\xi\|, \text{ pour tous } s \geq t, \tag{5.7}$$
$$\|X(t)PX^{-1}(t)\| \leq M', \text{ pour tout réel } t. \tag{5.8}$$

où K', L', M' sont trois constantes positives et ξ est un vecteur constant quelconque de $\mathbb{C}^n$.

On suppose que le projecteur P est de rang égal à k, autrement dit, que la trace de P est exactement k. Alors la première condition de trois dernières inégalités entraîne l'existence d'un sous-espace vectoriel de solutions qui tendent vers zéro uniformément et exponentiellement lorsque t tend vers l'infini. Ce sous-espace est de dimension k. D'autre part, la deuxième condition de ces inégalités prouve l'existence d'un sous-espace complémentaire de dimension $(n-k)$, de solutions tendant vers l'infini uniformément et exponentiellement lorsque t tend vers l'infini. Par ailleurs, la dernière inégalité assure que " l'angle " entre ces deux sous-espaces restent borné loin de zéro puisque lorsque l'angle tend vers zéro les normes de deux projecteurs tendent vers l'infini.

Montrons à présent l'équivalence entre les conditions de la définition 5.2 et les trois conditions (5.6-5.8).

En premier lieu, on suppose que les conditions de la définition 5.2 sont satisfaites. Comme P est une projection, on a $P^2 = P$ et $(I-P)(I-P) = I-P$. Il en découle que

$$\begin{aligned} \|X(t)P\xi\| &= \|X(t)PX^{-1}(s)X(s)P\xi\| \\ &\leq \|X(t)PX^{-1}(s)\|\|X(s)P\xi\| \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}\|X(s)P\xi\|, \quad t \geq s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|X(t)(I-P)\xi\| &= \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)X(s)(I-P)\xi\| \\ &\leq \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\|\|X(s)(I-P)\xi\| \\ &\leq Le^{-\beta(s-t)}\|X(s)(I-P)\xi\|, \quad s \geq t, \end{aligned}$$

et

$$\|X(t)PX(t)\| \leq Ke^0 = K.$$

Inversement, pour tout η, en posant $\xi = X^{-1}\eta$, on obtient, en supposant les trois conditions (5.6-5.8) vraies,

$$\begin{aligned} \|X(t)PX^{-1}(s)\eta\| &\leq K_0e^{-\alpha(t-s)}\|X(s)PX^{-1}(s)\eta\| \\ &\leq K_0e^{-\alpha(t-s)}\|X(s)PX^{-1}(s)\|\|\eta\| \\ &\leq K_0M_0e^{-\alpha(t-s)}\|\eta\|, \quad t \geq s, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\eta\| &\leq L_0e^{-\beta(s-t)}\|X(s)(I-P)X^{-1}(s)\eta\| \\ &\leq K_0e^{-\beta(s-t)}\|X(s)(I-P)X^{-1}(s)\|\|\eta\| \\ &\leq L_0(M_0+1)e^{-\beta(s-t)}\|\eta\|, \quad s \geq t, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de l'équivalence.

■

Bibliographie

[Coppel, 1978] W.A. Coppel ; *Dichotomies in Stability Theory*, **Lecture Notes in Mathematics**, Vol 629, Springer, Berlin, 1978 (Cité page 114.)

[Engel, Nagel, 2000] K.-J. Engel and R. Nagel. **One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations**, Springer-Verlag, 2000. (Cité page 113.)

[Perron, 1930] O. Perron, Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, Mathematische Zeitschrift **32** (1930), 703 - 728. (Cité page 113.)

6

Dichotomie exponentielle des systèmes non autonomes périodiques en termes de la bornitude de certains problèmes de Cauchy périodiques

La dichotomie exponentielle est l'une des propriétés asymptotiques fondamentales des solutions des systèmes linéaires différentiels. Dans le cas autonome, c'est-à-dire lorsque $A(t) = A$ est une matrice constante indépendante du temps, comme il est déjà prouvé dans le chapitre précédent la dichotomie exponentielle est équivalente au fait que la matrice A n'admet aucune valeur propre purement imaginaire. Néanmoins, lorsque A dépend du temps, l'étude de la dichotomie exponentielle révèle beaucoup plus de difficultés. Des caractérisations importantes ont été obtenues, récemment, dans (Buşe, Zada, 2010) et (Zada, 2008).

Soit le système q-périodique suivant

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad x(t) \in \mathbb{C}^n,\ t \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

où, $q > 0$ nombre réel donné et $t \mapsto A(\cdot)$ est une fonction q-périodique continue à valeurs matricielles i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $A(t+q) = A(t)$.

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier la dichotomie exponentielle de la famille d'évolution engendrée par le système (6.1). Plus particulièrement, on prouve que cette famille d'évolution admet une dichotomie exponentielle relativement à un projecteur P si et seulement si la solution du problème de Cauchy opératoriel suivant

$$\left.\begin{array}{c} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + e^{i\mu t}P, \quad X(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n),\ t \in \mathbb{R}, \\ X(0) = 0, \end{array}\right\} \tag{6.2}$$

est bornée, uniformément par rapport au paramètre réel μ, et la solution

$V_\mu(\cdot)$ du problème de Cauchy opératoriel suivant

$$\left.\begin{array}{c} \dot{Y}(t) = -Y(t)A(t) + e^{i\mu t}Q, \quad Y(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n),\ t \geq s, \\ Y(s) = 0, \end{array}\right\} \tag{6.3}$$

admet une limite dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ lorsque $s \to -\infty$; autrement dit, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{t} e^{i\mu\tau}QU(\tau,t)d\tau$ existe dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, et que

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big\| \int_{-\infty}^{t} e^{i\mu s}QU(s,t)ds \Big\| := M_2 < \infty.$$

où l'on note par Q le projecteur défini par $Q := I - P$, et M_2 est une constante réelle absolue.

6.1 Introduction

On désigne par $\mathbb{C}^n$ l'espace vectoriel de tous vecteurs à n composantes complexes et par $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'algèbre de Banach de toutes les applications linéaires à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. Sauf mention explicite du contraire, les normes sur $\mathbb{C}^n$ ainsi que sur $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ seront notées par le même symbole, à savoir $\|\cdot\|$.

On s'intéresse au système q-périodique suivant

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad x(t) \in \mathbb{C}^n,\ t \in \mathbb{R}. \tag{6.4}$$

où, $q > 0$ nombre réel donné et $t \mapsto A(\cdot)$ est une fonction q-périodique continue à valeurs matricielles i.e., pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $A(t+q) = A(t)$.

6.2 Résultats préliminaires

Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, on note par $\sigma(A)$ spectre de A ; c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la matrice $zI - A$ n'est pas inversible. I désigne, bien évidemment, la matrice identité sur $\mathbb{C}^n$.

On considère, à présent, le problème de Cauchy opératoriel suivant :

$$\left.\begin{array}{r} \dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ X(0) = I. \end{array}\right\} \tag{6.5}$$

Définition 6.1 *La solution, qu'on notera $P(\cdot)$, du système (6.5) est dite la matrice fondamentale associée à la famille d'opérateurs $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.*

Proposition 6.1 *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t)$ est inversible et son inverse est l'unique solution du Problème de Cauchy opératoriel suivant*

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = -Y(t)A(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ Y(0) = I. \end{cases}$$

Démonstration.

Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P^{-1}(t)P(t) = I$, on obtient en dérivant les deux membres, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{dP^{-1}(t)}{dt}P(t) + P^{-1}(t)\frac{dP(t)}{dt} = 0.$$

Ce qui donne que, compte tenu du fait que $P(t)$ est solution de (6.5)

$$\frac{dP^{-1}(t)}{dt}P(t) + P^{-1}(t)A(t)P(t) = 0,$$

ou encore que,

$$\Big[\frac{dP^{-1}(t)}{dt} + P^{-1}(t)A(t)\Big]P(t) = 0.$$

En multipliant à droite par $P^{-1}(t)$, on obtient ce que l'on souhaitait.

■

Proposition 6.2 *La famille $\mathcal{U} := \{U(t,s) := P(t)P^{-1}(s),\ t,s \in \mathbb{R}\}$ est une famille d'évolution qui satisfait :*

1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t,t) = I$.*
2. *Pour tous $t,s,r \in \mathbb{R}$, $U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$.*
3. *L'application*

$$(t,s) \mapsto U(t,s) : \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 :\ t \geq s\} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$$

   est continue.
4. *Pour tous $t,s \in \mathbb{R}$, $U(t+q,s+q) = U(t,s)$.*
5. *Pour tous $t,s \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) = A(t)U(t,s)$.*
6. *Pour tous $t,s \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial}{\partial s}U(t,s) = -U(t,s)A(s)$.*
7. *Il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que*

$$\|U(t,s)\| \leq Me^{\omega|t-s|} \quad \text{pour tous } t,s \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est immédiate.

■

Définition 6.2 La famille d'évolution $\mathcal{U}$ admet une dichotomie exponentielle uniforme relativement au projecteur P (i.e. $P \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et $P^2 = P$) s'il existe des constantes stictement positives $N_1,\ N_2,\ \nu_1$ et ν_2 telles que

1. $U(t,s)P = PU(t,s)$, pour tous $t,s \in \mathbb{R}$
2. $\|U(t,s)P\| \leq N_1e^{-\nu_1(t-s)}$, pour tous $t \geq s \in \mathbb{R}$
3. $\|QU(s,t)\| \leq N_2e^{-\nu_2(t-s)}$, pour tous $t \geq s \in \mathbb{R}$.

Ici, par définition, $Q := I - P$ et $U(s,t)$ désigne l'inverse de $U(t,s)$.

Remarque 6.1 *Il est clair que $Q^2 = (I-P)(I-P) = (I-P) = Q$ et que $PQ = QP = P(I-P) = (I-P)P = P - P = 0$.*

Remarque 6.2 *Dans le cas particulier où $P = I$ (ce qui sous-entend que $Q = 0$), on reconnaît la stabilité exponentielle uniforme de la famille d'évolution $\mathcal{U}$.*

Exemple :

On considère deux fonctions 1-périodiques continues $a(\cdot)$ and $b(\cdot)$; i.e., $a(t+1) = a(t)$ et $b(t+1) = b(t)$, pour tout réel t, et donc, la fonction 1-périodique continue à valeurs matricielle $t \mapsto A(t)$ définie par

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & b(t) \end{pmatrix}.$$

Le système associé $X(t) = A(t)X(t)$ donne naissance à la famille d'évolution suivante : $\mathcal{U} := \{P(t)P^{-1}(s),\ s,t \in \mathbb{R}\}$, où pour tout réel t, on a

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^t a(s)ds} & 0 \\ 0 & e^{\int_0^t b(s)ds} \end{pmatrix}.$$

On prend les projecteur P et Q, définis comme $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. et $Q = I - P$.
Par un calcul assez simple, on peut vérifier aisément que pour tous $t,s \in \mathbb{R}$, $PU(t,s) = U(t,s)P$.

Désormais, on suppose que

Il existe un projecteur P tel que $\quad \mathbf{U(t,s)P = PU(t,s)}$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

A présent, on introduit la proposition suivante qui fournit des caractérisations de la stabilité exponentielle uniforme d'une famille d'évolution. Ces caractérisations permettent par la suite d'établir le résutat fondamental de ce chapitre.

Proposition 6.3 [(Arshad, Buşe, Saierli, 2011, Buşe, Cerone, Dragomir, Sofo, 2005)] *On considère $\mathcal{U} := \{U(t,s) : s,t \in \mathbb{R}\}$ une famille d'évolution q-périodique fortement continue d'opérateurs linéaires bornés opérant sur un espace de Banach X.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *La famille $\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable.*
2. *Il existe deux constantes réelles $N \geq 1$ et $\nu > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$, on ait $\|U(t,0)\| \leq Ne^{-\nu t}$.*
3. *Le rayon spectral $U(q,0)$, à savoir*

$$r(U(q,0)) := \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(U(q,0))\} = \lim_{n\to\infty} \|U(q,0)^n\|^{1/n},$$

est strictement inférieur à un.

4. *Pour chaque $\mu \in \mathbb{R}$, la quantité*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \| \sum_{k=1}^{n} e^{i\mu k} U(q,0)^k \|$$

est finie.

Démonstration. Il est immédiat que 1. implique 2.

Il en est de même pour les implications 2. $\Rightarrow$ 3., et 3. $\Rightarrow$ 4.

La démonstration du fait que 4. implique 1. est donnée dans le chapitre 4. Mais pour raison de clarté on la refait dans ce qui suit, (Buşe, Cerone, Dragomir, Sofo, 2005, Lemma 1). En utilisant l'identité

$$\left(e^{i\mu}U(q,0) - I\right)\left(I + e^{i\mu}U(q,0) + e^{i\mu 2}U(q,0)^2 + \cdots + e^{i\mu\nu}U(q,0)^\nu\right)$$

$$= e^{i\mu(\nu+1)}U(q,0)^{\nu+1} - I$$

on obtient en passant aux normes :

$$\left\|e^{i\mu(\nu+1)}U(q,0)^{\nu+1}\right\| \leq 1 + L(\mu)\left(1 + \|U(q,0)\|\right), \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire que $r(U(q,0)) \leq 1$, et donc $\sigma(U(q,0)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad |\lambda| \leq 1\}$.

On suppose, par l'absurde, que $1 \in \sigma(U(q,0))$. Étant donné que $1 \in \partial\sigma(U(q,0))$, il s'en suit que $1 \in \sigma_a(U(q,0))$ (d'après la Proposition 3.3 du chapitre 3). Il existe, alors, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $x_n \in X$ et $\|x_n\| = 1$ telle que

$$(I - U(q,0))\, x_n \to 0, \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Par conséquent, $U(q,0)^k\left(I-U(q,0)\right)x_n \to 0$, converge uniformément par rapport à $k \in \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$, $m > 2L(0)$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left\|U(q,0)^k\left(I-U(q,0)\right)x_n\right\| \leq \frac{1}{2m}, \quad \text{pour tout } k = 0,1,\cdots,m.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
L(0) &\geq \left\|\sum_{k=0}^{m} U(q,0)^k x_n\right\| = \left\|x_n + \sum_{k=1}^{m} U(q,0)^k x_n\right\| \\
&= \left\|x_n + \sum_{k=1}^{m}\left(x_n + \sum_{j=0}^{k-1} U(q,0)^j\left(U(q,0)-I\right)x_n\right)\right\| \\
&= \left\|(m+1)x_n + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{k-1} U(q,0)^j\left(U(q,0)-I\right)x_n\right\| \\
&\geq m+1-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{k-1} U(q,0)^j\left(U(q,0)-I\right)x_n \\
&\geq m+1-\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{2m} = \frac{3(m+1)}{4} \geq \frac{m}{2} > L(0),
\end{aligned}$$

d'où la contradiction. On en déduit que $1 \notin \sigma(U(q,0))$. En appliquant ce résultat pour $V(q,0) = e^{i\mu}U(q,0)$, où $\mu \in \mathbb{R}$, on conclut que $e^{-i\mu} \notin \sigma(U(q,0))$. Par conséquent, $r(U(q,0)) < 1$, autrement dit, la famille $\mathcal{U}$ est uniformément exponentiellement stable.

■

Le lemme suivant joue un rôle primoridial dans la démonstration du résutat fondamental.

Lemme 6.1 (Arshad, Buşe, Saierli, 2011) *Soit les deux fonction h_1 et h_2 définies de $[0,q]$ sur $\mathbb{C}$, respectivement, par*

$$h_1(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \in [0,q/2] \\ q-t, & \text{si } t \in [q/2,q], \end{cases}$$
$$h_2(t) = t(q-t) \quad \text{pour tout } t \in [0,q].$$

S'il on pose les intégrales $H_j(\mu) := \int_0^q h_j(s)e^{-i\mu s}ds$, pour $j = 1,2$ et l'ensemble $\mathcal{A} := \{\frac{4k\pi}{q} : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$, alors

1. *L'intégrale $H_1(\mu) = 0$ si et seulement si $\mu \in \mathcal{A}$,*
2. *Pour tout $\mu \in \mathcal{A}$, $H_2(\mu) \neq 0$.*

Preuve. Pour tout $\mu \neq 0$, on a

$$\int_0^q e^{i\mu s}h_1(s)ds = \int_0^{\frac{q}{2}} se^{i\mu s}ds + \int_{\frac{q}{2}}^{q}(q-s)e^{i\mu s}ds$$

$$= \frac{se^{i\mu s}}{i\mu}\Big|_0^{\frac{q}{2}} - \int_0^{\frac{q}{2}}\frac{e^{i\mu s}}{i\mu}ds + q\frac{e^{i\mu s}}{i\mu}\Big|_{\frac{q}{2}}^{q} - \frac{se^{i\mu s}}{i\mu}\Big|_{\frac{q}{2}}^{q} + \int_{\frac{q}{2}}^{q}\frac{e^{i\mu s}}{i\mu}ds$$

$$= -\frac{e^{i\mu s}}{(i\mu)^2}\Big|_0^{\frac{q}{2}} + \frac{e^{i\mu s}}{(i\mu)^2}\Big|_{\frac{q}{2}}^{q} = \frac{1}{(i\mu)^2}\left(1 - 2e^{\frac{i\mu q}{2}} + e^{i\mu q}\right).$$

La première assertion est maintenant claire. Soit $\mu_k := \frac{4k\pi}{q}$. Alors,

$$\int_0^q e^{i\mu_k s} h_2(s)ds = q\int_0^q se^{i\mu_k s}ds - \int_0^q s^2 e^{i\mu_k s}ds$$

$$= q\left(\frac{se^{i\mu_k s}}{i\mu_k}\Big|_0^q - \int_0^q \frac{e^{i\mu_k s}}{i\mu_k}ds\right) - \left(\frac{s^2 e^{i\mu_k s}}{i\mu_k}\Big|_0^q - 2\int_0^q \frac{se^{i\mu_k s}}{i\mu_k}ds\right)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{qe^{i\mu_k s}}{(i\mu_k)^2}\Big|_0^q + 2\left[\frac{se^{i\mu_k s}}{(i\mu_k)^2}\Big|_0^q - \int_0^q \frac{e^{i\mu_k s}}{(i\mu_k)^2}ds\right] \\ &= -\frac{qe^{i\mu_k q}}{(i\mu_k)^2} + \frac{q}{(i\mu_k)^2} + 2\left[\frac{qe^{i\mu_k q}}{(i\mu_k)^2} - \frac{e^{i\mu_k s}}{(i\mu_k)^3}\Big|_0^q\right] \\ &= \frac{2q}{(i\mu_k)^2} = -\frac{q^3}{8k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

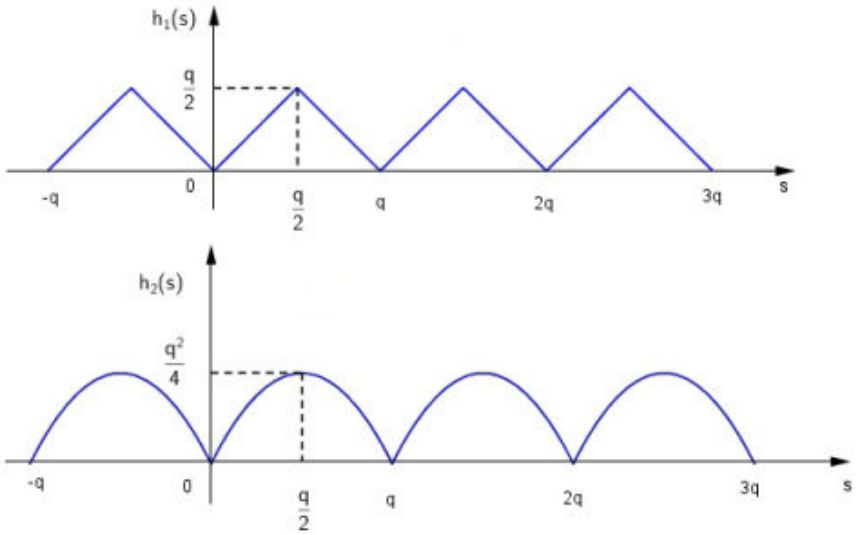


FIGURE 6.1 – **Représentation graphique des fonctions h_1 et h_2.**

■

6.3 Dichotomie exponentielle de la famille d'évolution $\mathcal{U}$

Théorème 6.1 (Lassoued, 2013) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. La famille d'évolution $\mathcal{U}$ admet une dichotomie exponentielle relativement au projecteur P.

ii. Les deux assertions suivantes sont vérifiées :

1. $\sup_{\mu\in\mathbb{R}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \int_0^t e^{i\mu s} U(t,s)Pds \right\| := M_1 < \infty.$

2. *La solution de l'équation* (6.3) *admet une limite dans* $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ *lorsque* s *tend vers* $-\infty$ *(i.e. l'intégrale impropre* $\int_{-\infty}^{t} e^{i\mu s}QU(s,t)ds$ *existe) et*

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}}\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big\|\int_{-\infty}^{t} e^{i\mu s}QU(s,t)ds\Big\| := M_2 < \infty,$$

avec M_1 *et* M_2 *deux constantes absolues positives.*

Démonstration. Il n'est pas difficile de vérifier que la fonction $t \mapsto U_\mu(t) := \int_0^t e^{i\mu s}U(t,s)Pds$ est la solution de l'équation (6.2) et que la fonction $t \mapsto V_\mu(t) := \int_s^t e^{i\mu s}QU(s,t)ds$ est celle de l'équation (6.3). En effet, en dérivant la première fonction, on retrouve, en vertu de la proposition 6.2 que

$$U'_\mu(t) = e^{i\mu t}U(t,t)P + \int_0^t e^{i\mu s}\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)Pds = e^{i\mu t}P + \int_0^t e^{i\mu s}AU(t,s)Pds,$$

et donc

$$U'_\mu(t) = e^{i\mu t}P + AU_\mu(t).$$

De la même manière, on démontre que V_μ vérifie la deuxième équation.

• On se propose, en premier lieu, de prouver que (i) implique (ii).

On suppose, pour ce faire, que la famille d'évolution admet une dichotomie exponentielle relativement au projecteur P. Il s'en suit, par la Definition 6.2, qu'on a, pour tous $t \geq s \in \mathbb{R}$, $\|U(t,s)P\| \leq N_1e^{-\nu_1(t-s)}$, pour des certaines constantes N_1 et $\nu_1 > 0$. Via une simple intégration, on déduit que, pour tout $\mu, t \in \mathbb{R}$,

$$\Big\|\int_0^t e^{i\mu s}U(t,s)Pds\Big\| \leq \frac{N_1}{\nu_1}.$$

De la même manière, puisque, pour tous $t \geq s \in \mathbb{R}$, $\|QU(s,t)\| \leq N_2e^{-\nu_2(t-s)}$, on s'aperçoit que : $\int_{-\infty}^t e^{i\mu s}QU(t,s)ds$ est bien définie, ce qui entraîne que la solution de l'équation (6.3),$V_\mu(\cdot)$, admet une limite dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ lorsque s tend vers $-\infty$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, en outre,

$$\Big\|\int_{-\infty}^t e^{i\mu s}QU(t,s)ds\Big\| \leq \frac{N_2}{\nu_2},$$

ce qui prouve que (i) implique (ii).

• Maintenant, on veut prouver le sens inverse, c'est-à-dire que (ii) implique (i) ; cette démonstration paraît plus délicate.

Pour $j = 1, 2$, on pose les deux fonctions $f_j(t) := h_j(t)U(t,0)P$ définies sur $[0,q]$ où h_j sont les deux fonctions introduites au Lemme 6.1. On prolonge les fonctions f_j par périodicité sur toute la droite réelle.

En prenant $t = (N+1)q$, avec N un nombre entier positif, pour $j = 1, 2$, alors puisque

$$L_k(f_j) := \int_{qk}^{q(k+1)} U((N+1)q,\tau)e^{-i\mu\tau}f_j(\tau)d\tau,$$

on obtient

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\Big\|\sum_{k=0}^{N} L_k(f_j)\Big\| := M_1(\mu, f_j) < \infty.$$

Par ailleurs, comme $U(t+q,s+q) = U(t,s)$ pour tous $t,s \in \mathbb{R}$, il en résulte que $U(pq,kq) = U((p-k)q,0) = U(q,0)^{p-k}$ pour tout $p,k \in \mathbb{N}$ avec $p \geq k$. Ainsi, du fait que P commute avec $U(t,s)$, et donc, avec toute puissance de $U(t,s)$, on obtient que

$$\begin{aligned}
L_k(f_j) &= \int_{qk}^{q(k+1)} U((N+1)q,(k+1)q)U((k+1)q,\tau)e^{-i\mu\tau}f_j(\tau)d\tau \\
&= \int_{qk}^{q(k+1)} U((N-k)q,0)U((k+1)q,\tau)e^{-i\mu\tau}f_j(\tau)d\tau \\
&= U(q,0)^{N-k}\int_{qk}^{q(k+1)} U((k+1)q,\tau)e^{-i\mu\tau}f_j(\tau)d\tau \\
&= U(q,0)^{N-k}\int_{qk}^{q(k+1)} U((k+1)q,qk+u)e^{-i\mu(kq+u)}f_1(kq+u)du \\
&= U(q,0)^{N-k}e^{-i\mu kq}\int_0^q e^{-i\mu u}U(q,u)f_j(u)du \\
&= U(q,0)^{n-k}e^{-i\mu kq}\int_0^q Pe^{-i\mu u}h_1(u)U(q,u)U(u,0)du \\
&= U(q,0)^{N-k+1}Pe^{-i\mu kq}\int_0^q e^{-i\mu u}h_1(u))du \\
&= (U(q,0)P)^{N-k+1}e^{i\mu(N-k+1)q}e^{-i\mu(N+1)}H_j(\mu).
\end{aligned}$$

En vertu du lemma 6.1, on aura

$$\begin{aligned}
(U(q,0)P))^{N-k+1}e^{i\mu(N-k+1)q} &= \frac{e^{i\mu(N+1)}}{H_1(\mu)}L_k(f_1), \quad \text{pour tout } \mu \notin \mathcal{A}, \\
(U(q,0)P))^{N-k+1}e^{i\mu(N-k+1)q} &= \frac{e^{i\mu(N+1)}}{H_1(\mu)}L_k(f_2), \quad \text{pour tout } \mu \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit que

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{k=0}^{N}(U(q,0)P))^{N-k+1}e^{i\mu(N-k+1)q}\Big\| &\leq \frac{1}{|H_1(\mu)|}M_1(\mu,f_1), \quad \text{si } \mu \notin \mathcal{A} \\
\Big\| \sum_{k=0}^{N}(U(q,0)P))^{N-k+1}e^{i\mu(N-k+1)q}\Big\| &\leq \frac{1}{|H_2(\mu)|}M_1(\mu,f_2), \text{si } \mu \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{k=0}^{N+1}(U(q,0)P))^k e^{i\mu kq}\Big\| < \infty.$$

Utilisant la Proposition 6.3, on conclut que le rayon spectral de UP, $r(UP) < 1$, où l'on a posé $U := U(q,0)$, ce qui entraîne qu'il existe deux constantes réelles $N_1 \geq 0$ and $\nu_1 > 0$ telles que

$$\forall t \geq s \in \mathbb{R}, \ \ \big\|U(t,s)P\big\| \leq N_1 e^{-\nu_1(t-s)}.$$

La deuxième hypothèse implique que, pour tout $s \in \mathbb{R}$ aussi grand que l'on veut, on a

$$\Big\| \int_s^t e^{i\mu\tau}QU(\tau,t)d\tau\Big\| \leq M_2 + 1.$$

On définit, pour $j = 1,2$, les fonctions g_j sur $[0,q]$ par $g_j(\tau) = h_j(\tau)U(0,\tau)Q$, où les fonctions h_j sont celles introduites dans le Lemme 6.1 et on les prolonge par périodicité sur toute la droite réelle. D'autre part, il est aisé de prouver que pour $j = 1,2$, la fonction $\int_s^t e^{i\mu\tau}g_j(\tau)U(\tau,t)d\tau$ est la solution de l'équation différentielle $Z'(t) = -Z(t)A(t) + e^{i\mu t}g_j(t)$, $Z(s) = 0$, $t \geq s$. On remarque, aussi, que cette fonction est bornée.

En prenant $t = (N+1)q$ et $s = mq$, avec $N > m$ deux nombres entiers, on peut écrire que

$$\| \int_{mq}^{(N+1)q} e^{-i\mu\tau}g_j(\tau)U(\tau,(N+1)q)d\tau\| := M_2(\mu,g_j) < \infty.$$

Il en résulte que

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{k=m}^{N} \|S_k(g_j)\| = M_2(\mu,g_j) < \infty;$$

où $S_k(g_j) = \int_{kq}^{(k+1)q} e^{-i\mu\tau}g_j(\tau)U(\tau,(N+1)q)d\tau$, pour chaque $k = m,\dots,N$. Pour tout $k = m, m+1,\dots,$ d'une manière analogue à ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
S_k(g_j) &= \int_{kq}^{(k+1)q} e^{-i\mu\tau}g_j(\tau)U(\tau,(k+1)q)U((k+1)q,(N+1)q)d\tau \\
&= \int_{kq}^{(k+1)q} e^{-i\mu\tau}g_j(\tau)U(\tau,(k+1)q)U(0,(N-k)q)d\tau \\
&= \int_{kq}^{(k+1)q} e^{-i\mu\tau}g_j(\tau)U(\tau,(k+1)q)d\tau U(0,q)^{N-k} \\
&= \int_0^q e^{-i\mu(kq+u)}g_j(kq+u)U(kq+u,(k+1)q)duU(0,q)^{N-k} \\
&= \int_0^q e^{-i\mu u}g_j(u)U(u,q)due^{-i\mu kq}U(0,q)^{N-k} \\
&= \int_0^q e^{-i\mu u}h_j(u)QU(0,u)U(u,q)due^{-i\mu kq}U(0,q)^{N-k} \\
&= \int_0^q e^{-i\mu u}h_j(u)QU(0,q)due^{-i\mu kq}U(0,q)^{N-k} \\
&= \int_0^q e^{-i\mu u}h_j(u)due^{-i\mu kq}(QU(0,q))^{N-k+1} \\
&= H_j(\mu)e^{-i\mu(N+1)q}e^{i\mu(N-k+1)}(QU(0,q))^{N-k+1}.
\end{aligned}$$

De nouveau, grâce au Lemme 6.1, on peut écrire

$$\begin{aligned}
e^{i\mu(N-k+1)}(QU(0,q))^{N-k+1} &= \frac{1}{H_1(\mu)}e^{i\mu(N+1)q}S_k(g_1), \quad \text{si } \mu \notin \mathcal{A} \\
e^{i\mu(N-k+1)}(QU(0,q))^{N-k+1} &= \frac{1}{H_2(\mu)}e^{i\mu(N+1)q}S_k(g_2), \quad \text{si } \mu \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\| \sum_{k=0}^{N}(QU(0,q)))^{N-k+1}e^{i\mu(N-k+1)q}\| &\leq \frac{1}{|H_1(\mu)|}M_2(\mu,g_1), \quad \text{si } \mu \notin \mathcal{A} \\
\| \sum_{k=0}^{N}(QU(0,q)))^{N-k+1}e^{i\mu(N-k+1)q}\| &\leq \frac{1}{|H_2(\mu)|}M_2(\mu,g_2), \quad \text{si } \mu \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Par la Proposition 6.3, posant $V := U(0,q)$, on conclut que $r(QV) < 1$, et par suite que il existe deux constantes $N_2 \geq 0$, $\nu_2 > 0$ telles que

$$\forall t \geq s \in \mathbb{R}, \ \ \|QU(s,t)\| \leq N_2 e^{-\nu_2(t-s)},$$

ce qui achève la démonstration.

■

Bibliographie

[Lassoued, 2013] D. Lassoued, Exponential dichotomy of nonautonomous periodic systems in terms of the boundedness of certain periodic Cauchy problems, Electronic Journal of Differential Equations Vol. **2013**(2013), No. 89, pp. 1-7. (Cité page 129.)

[Arshad, Buşe, Saierli, 2011] S. Arshad, C. Buşe, O. Saierli ; Connections between exponential stability and boundedness of solutions of a couple of differential time depending and periodic systems, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **90** (2011), 1-16. (Cité pages 127 et 128.)

[Buşe, Cerone, Dragomir, Sofo, 2005] C. Buşe, P. Cerone, S. S. Dragomir and A. Sofo ; Uniform stability of periodic discrete system in Banach spaces, Journal of Difference Equations and Applications, **11**, No .12 (2005) 1081-1088 (Cité page 127.)

[Buşe, Zada, 2010] C. Buşe and A. Zada ; Dichotomy and bounded-ness of solutions for some discrete Cauchy problems, Proceedings of IWOTA-2008, Operator Theory, Advances and Applications, (OT) Series Birkhäuser Verlag, Eds : J. A. Ball, V. Bolotnikov, W. Helton, L. Rodman and T. Spitkovsky, **203**(2010), 165-174. (Cité page 123.)

[Zada, 2008] A. Zada ; A characterization of dichotomy in terms of boundedness of solutions for some Cauchy problems, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. **2008**(2008), No. 94, 1-5 (Cité page 123.)

Notations

Certaines notations sont valables uniquement à l'intérieur d'une section ou d'une sous-section : on ne les définit pas ici. On trouvera ici les notations utilisées dans plusieurs parties qui soit sont des notations mathématiques pas toujours bien fixées par les conventions, soit des notations définies dans cette thèse.

Notations générales.

1. $\mathbb{N}$ est l'ensemble de tous les nombres entiers positifs.
2. $\mathbb{N}_* := \{1, 2, \cdots\}$.
3. $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres réels.
4. $\mathbb{C}$ est l'ensemble de tous les nombres complexes.
5. Le corps des scalaires sera toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
6. $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) \geq 0\}$ est demi-plan complexe droit.
7. $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) \leq 0\}$ est demi-plan complexe gauche.
8. L'espace d'arrivée sera en général un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{E}$, dont la norme est notée $|.|_{\mathbb{E}}$, son dual $\mathbb{E}'$ et le produit de dualité $\cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}}$. Lorsqu'une structure hilbertienne sera exigée [1], on supposera que $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert identifié (sauf mention contraire) à son dual. On le notera alors $\mathbb{H}$, sa norme $|.|_{\mathbb{H}}$ et son produit scalaire (ou hermitien) $\cdot_{\mathbb{H}}$. Si aucune ambiguité n'est possible, les indices pourront être omis.
9. $\|u\|_\infty := \sup \|u(x)\|$.
10. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour x, y dans $\mathbb{K}^k$, on note $x \cdot y$ et $|x|$ respectivement le produit scalaire (ou hermitien) usuel de x et y et la norme associée de x, *i.e.* :
$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{k} \overline{x_i} y_i \ \text{ et } \ |x| = \sqrt{x \cdot x}$$
En cas d'ambiguité sur k, on pourra noter $\cdot_k$ et $|.|_k$
11. $\tau_p(u)$ ($u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{E}$ et $p \in \mathbb{R}^k$) désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^k$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^k, \quad \tau_p u(x) := u(x + p).$$
Pour les classes de fonctions mesurables, cette définition a encore un sens.

1. Généralement, un espace de Banach comme espace d'arrivée suffit pour les fonctions Bohr-presque-périodiques, alors qu'une structure hilbertienne est exigée pour les espaces de Besicovitch et de Sobolev-Besicovitch. Toutefois, dans le second cas, quand la structure de Banach paraît suffisante, on citera les définitions et les résultats avec un espace de Banach comme espace d'arrivée.

12. $\mathcal{K}(E)$ (E espace topologique) désigne l'ensemble des compacts de E.
13. Int A ($A \subset E$ topologique) est l'intérieur topologique de A.
14. $\mathbb{E}'$ est l'espace dual de $\mathbb{E}$ i.e l'espace consistant aux applications linéaires continues $L : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ et $\cdot_{\mathbb{E}'\times\mathbb{E}}$ désigne la dualité entre $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$
15. $F^{\perp}$ ($F \subset \mathbb{H}$ espace de Hilbert) est l'orthogonal de F dans $\mathbb{H}$.
16. $e_\nu : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ ($\nu \in \mathbb{R}^k$ en général $k = 1$ ou n), est la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^k, \;\; e_\nu(x) := e^{i\nu\cdot x}.$$
17. χ_A désigne la fonction caractéristique de $A \neq \emptyset$.
18. Si X et Y sont deux ensembles non vides, on note Y^X ou $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y.
19. Pour une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$, on note $\sup f$ le $supessf$, *i.e.* le plus petit α t.q. $f \leq \alpha$ presque partout.
20. Si A, B, C sont des ensembles non vides et si $f : A \times B \to C$, on définit **l'opérateur de Nemytskii** construit sur f comme étant l'opérateur $\mathcal{N}_f : B^A \to C^A$ défini par :
$$\forall \varphi \in B^A, \quad \mathcal{N}_f(\varphi) := [t \longmapsto f(t, \varphi(t))].$$

Notations définies en cours de thèse.

Normes et produits scalaires

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} = \|\cdot\|_{L^2([0,q],\mathbb{H})}$, où $q > 0$.
2. $\|\cdot\|_{B^p}$, norme sur l'espace de fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch.
3. $<\cdot;\cdot>_{\mathcal{H}} = <\cdot;\cdot>_{L^2([0,q],\mathbb{H})}$, produit scalaire de $L^2([0,q], H)$.
4. $<\cdot;\cdot>_{B^2}$ produit scalaire de B^2.

Divers

1. p.p. : presque partout ou presque-périodique (selon le contexte).
2. $\mathcal{M}\{f\}$: la moyenne temporelle.
3. $\overline{\mathcal{M}}\{f\}$: la moyenne temporelle supérieure.
4. $a(f, \lambda)$: le λ-ème coefficient de Fourier-Bohr de f.
5. D : la différentielle.
6. $b\mathbb{R}$: compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$.
7. $\mathcal{D}$: la dérivée distributionnelle.
8. ∇ : la dérivée faible sur $B^2(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.
9. τ_a : l'opérateur de translation par a, ($a \in \mathbb{R}$).
10. Notations spectrales
    (a) $\|U\|$: norme opératorielle de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{E})$.

(b) $T(t)$, $U(t,s)$: opérateurs linéaires continus agissant sur un espace de Banach ou de Hilbert.

(c) $\rho(A)$: ensemble résolvant d'un opérateur donné A.

(d) $\sigma(A)$: spectre d'un opérateur linéaire (éventuellement non borné) A.

(e) $\sigma_a(A)$: spectre approximatif d'un opérateur A.

(f) $\partial\sigma(A)$: frontière spectorielle de l'opérateur linéaire fermé A.

(g) $\omega_0(\mathbf{T})$: indice de croissance exponentielle du semi-groupe $\mathbf{T}$.

(h) $\omega_1(\mathbf{T})$: indice global de croissance de solution de problème de Cauchy abstrait partant de $D(A)$.

(i) I opérateur identité de $\mathcal{L}(\mathbb{E})$.

(j) $s(A)$: borne spectrale de l'opérateur A.

(k) $s_0(A)$: indice de croissance uniforme de la résolvante.

(l) $D(A)$: domaine de l'opérateur linéaire A.

(m) $r(A)$: rayon spectral de l'opérateur linéaire A.

(n) $R(\lambda, A)$: résolvante opératorielle de l'opérateur A au point λ.

(o) $\{T(t)\}_{t\geq 0}$: semi-groupe fortement continu agissant sur l'espace $\mathbb{E}$.

(p) $\{U(t,s)\}_{t\geq s}$: famille d'évolution définie sur un espace X.

Espaces fonctionnels

$\mathcal{L}(\mathbb{E})$	algèbre des opérateurs linéaires continus $A : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$
$\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$	ensemble des matrices d'ordre n à coefficients complexes.
$J \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$	la droite réelle ou la demi-droite réelle positive.
$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.
$BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace des fonctions k fois continuement dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.
$Trig(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace des polynômes trigonométriques.
$AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.
$AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace des fonctions $\mathcal{C}^k$ qui sont presque- périodiques ainsi que leurs k dérivées.
$APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, F)$	espace des fonctions presque-périodiques uniformément, par rapport à un paramètre.
$B^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	ensemble des fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.
$B^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace de Sobolev-Besicovitch.
$BUC(J, X)$	ensemble des fonctions définies sur J et à valeurs dans X, uniformément continues et bornées sur J.
$AP(J, X)$	espace des fonctions de $f \in BUC(J, X)$ telles que $f_\mu(t) = e^{i\mu t}x$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $x \in X$.
$AP_1(J, X)$	ensemble de fonctions $f \in AP(J, X)$ telles que la série de Fourier associée à f soit absolument convergente.
$P_q(J, X)$	espace de fonctions f définies sur J à valeurs dans X, q-périodiques, *i.e.* telles que $f(\cdot + p) = f(\cdot)$.
$P_q^0(J, X)$	espace de fonctions $f \in P_q(J, X)$ telles que $f(0) = 0$.

$L^p(\mathbb{R}_+, X)$	espace de toutes les fonctions p-intégrables f, définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans X, *i.e.* telles que $\|f\|_p := \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$
$L^2([0,q], X)$	espace de toutes les fonctions de carrées intégrables f, sur $[0,q]$ et à valeurs dans X.
$C_0^\infty((0,\infty), X)$	espace de toutes les fonctions à valeurs dans X, indéfiniment dérivables à support compact dans $(0,\infty)$.
$C_{00}(\mathbb{R}_+, X)$	espace de toutes les fonctions f continues, définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans X telles que $f(0) = \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.
$\mathcal{D}'$	espace des distributions au sens de L. Schwartz.
$\mathcal{B}'$	espace des distributions bornées.
$\mathcal{B}'_{pp}$	espace des distributions presque-périodiques.

Ce document a été préparé à l'aide de l'éditeur de texte GNU Emacs et du logiciel de composition typographique LaTeX 2_ε.

Titre Fonctions Presque-Périodiques et Équations Différentielles

Résumé Cette thèse porte sur les équations d'évolution et s'articule autour de trois parties. Dans la première partie, on se propose de se concentrer sur le critère oscillatoire de certaines équations différentielles. Des résultats classiques sur les fonctions presque-périodiques sont rassemblés dans le premier chapitre. Le deuxième chapitre de cette thèse a pour objectif de prouver l'existence d'une solution presque-périodique de Besicovitch d'une équation différentielle de second ordre sur un espace de Hilbert. L'approche utilisée se base sur un formalisme variationnel. La deuxième partie de cette thèse traite le comportement asymptotique des problèmes de Cauchy dans le cas non autonome. Les semi-groupes et les familles d'évolution étant les outils principaux utilisés dans cette partie, le troisième chapitre introduit des résultats importants de cette théorie, notamment ceux permettant de caractériser la stabilité des semigroupes et des familles d'évolution périodiques. Dans le quatrième chapitre de cette contribution, on prouve, en utilisant une approche basée sur les semigroupes, un résultat liant la bornitude de solutions de problèmes de Cauchy périodiques et la stabilité exponentielle uniforme des familles d'évolution issues de ces problèmes. Dans une troisième partie, on focalise l'attention sur quelques résultats sur la dichotomie exponentielle comme une propriété liée au comportement asymptotique des systèmes différentiels. Quelques résultats connus sont, par suite, réunis au cinquième chapitre qui introduit brièvement la notion de dichotomie exponentielle. Dans un dernier chapitre, une caractérisation de la dichotomie exponentielle d'une famille d'évolution en termes de bornitude des solutions de problèmes de Cauchy opératoriels correspondants sera démontrée.

Mots-clés Fonctions presque-périodiques, méthodes variationnelle, semi-groupes, familles d'évolution périodiques, problèmes de Cauchy, équations différentielles, dichotomie exponentielle, stabilité exponentielle

Title Almost periodic Functions and Differential Equations

Abstract This PhD thesis deals with the evolution equations and is organised in three parts. The first part is devoted to the almost periodic solutions of certain differential equations. Classic results on the almost-periodic functions are collected in the first chapter. The second chapter of this thesis aims to prove the existence of an almost-periodic solution of Besicovitch of a second-order differential equation on Hilbert space. The used approach is based on a variational formalism. In the second part of this thesis, we study the asymptotic behavior of Cauchy problems in the non-autonomous case. We give in the third chapter important results on semigroups and evolution families, namely, those allowing to characterize the stability of semigroups and periodic evolution families. We prove in the fourth chapter sufficient conditions for the uniform exponential stability of a strongly continuous, q-periodic evolution family acting on a complex Banach space. The last part in this work focuses the attention on

some results on the exponential dichotomy as a property for the asymptotic behavior of the differential systems. Some well-known results are given in the fifth chapter which introduces briefly the concept of the exponential dichotomy. A characterization of the exponential dichotomy for evolution family in terms of boundedness of the solutions to periodic operatorial Cauchy problems will be established.

Keywords Almost periodic functions, variational methods, semigroups, periodic evolution families, Cauchy problems, differential equations, exponential dichotomy, exponential stability