



**HAL**  
open science

# Criticalité, identification et jeux de suppression de sommets dans les graphes : Des étoiles plein les jeux

Antoine Dailly

► **To cite this version:**

Antoine Dailly. Criticalité, identification et jeux de suppression de sommets dans les graphes : Des étoiles plein les jeux. Combinatoire [math.CO]. Université de Lyon, 2018. Français. NNT : 2018LYSE1163 . tel-01933500v2

**HAL Id: tel-01933500**

**<https://theses.hal.science/tel-01933500v2>**

Submitted on 10 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2018LYSE1163

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**  
opérée au sein de  
**l'Université Claude Bernard Lyon 1**

**École Doctorale ED512**  
**InfoMaths**

**Spécialité de doctorat : Informatique**

Soutenue publiquement le 27/09/2018 par :  
**Antoine Gianni Philippe DAILLY**

---

# Criticalité, identification et jeux de suppression de sommets dans les graphes

## Des étoiles plein les jeux

---

Devant le jury composé de :

Mme Cristina BAZGAN, Professeure, Université Paris Dauphine	Examinatrice
M. Frédéric HAVET, Directeur de recherche CNRS, Sophia Antipolis	Rapporteur
M. Mickaël MONTASSIER, Professeur, Université de Montpellier	Rapporteur
Mme Elzbieta SIDOROWICZ, Maîtresse de Conférences, University of Zielona Góra	Examinatrice
M. Hamza SI KADDOUR, Maître de Conférences, Université Lyon 1	Examinateur
M. Hamamache KHEDDOUCI, Professeur, Université Lyon 1	Directeur de thèse
M. Éric DUCHÊNE, Maître de conférences, Université Lyon 1	Co-directeur de thèse
Mme Aline PARREAU, Chargée de recherche CNRS, Université Lyon 1	Co-directrice de thèse

# UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

## **Président de l'Université**

Président du Conseil Académique

Vice-président du Conseil d'Administration

Vice-président du Conseil Formation et Vie Universitaire

Vice-président de la Commission Recherche

Directrice Générale des Services

**M. le Professeur Frédéric FLEURY**

M. le Professeur Hamda BEN HADID

M. le Professeur Didier REVEL

M. le Professeur Philippe CHEVALIER

M. Fabrice VALLÉE

Mme Dominique MARCHAND

## ***COMPOSANTES SANTÉ***

Faculté de Médecine Lyon Est — Claude Bernard

Directeur : M. le Professeur G. RODE

Faculté de Médecine et de Maïeutique Lyon Sud — Charles Mérieux

Directeur : Mme la Professeure C. BURILLON

Faculté d'Odontologie

Directeur : M. le Professeur D. BOURGEOIS

Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques

Directeur : Mme la Professeure C. VINCIGUERRA

Institut des Sciences et Techniques de la Réadaptation

Directeur : M. X. PERROT

Département de formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine

Directeur : Mme la Professeure A-M. SCHOTT

## ***COMPOSANTES ET DÉPARTEMENTS DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE***

Faculté des Sciences et Technologies

Directeur : M. F. DE MARCHI

Département Biologie

Directeur : M. le Professeur F. THEVENARD

Département Chimie Biochimie

Directeur : Mme C. FELIX

Département GEP

Directeur : M. Hassan HAMMOURI

Département Informatique

Directeur : M. le Professeur B. SHARIAT

Département Mathématiques

Directeur : M. le Professeur G. TOMANOV

Département Mécanique

Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID

Département Physique

Directeur : M. le Professeur J-C PLENET

UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives

Directeur : M. Y. VANPOULLE

Observatoire des Sciences de l'Univers de Lyon

Directeur : M. B. GUIDERDONI

Polytech Lyon

Directeur : M. le Professeur E. PERRIN

Ecole Supérieure de Chimie Physique Electronique

Directeur : M. G. PIGNAULT

Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1

Directeur : M. le Professeur C. VITON

Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education

Directeur : M. le Professeur A. MOUGNIOTTE

Institut de Science Financière et d'Assurances

Directeur : M. N. LEBOISNE

## Résumé

Dans cette thèse, nous étudions des problématiques de graphes et de jeux combinatoires. Il existe de nombreux liens entre ces deux domaines : ainsi, les jeux sont un bon moyen de modéliser une opposition dans un problème d'optimisation, et dans l'autre sens plusieurs jeux classiques sont définis sur les graphes. Nous allons étudier deux problèmes de graphes et adapter des jeux combinatoires classiques pour y jouer sur des graphes.

Dans un premier temps, nous étudions un problème de criticalité. Un graphe qui vérifie une certaine propriété, mais tel qu'une simple modification (ajout ou suppression d'arête ou de sommet) la lui fait perdre est appelé *critique* pour cette propriété. Nous nous intéressons au problème des graphes critiques pour la propriété « avoir un diamètre égal à 2 », appelés graphes D2C. La conjecture de Murty-Simon donne une borne supérieure sur le nombre d'arêtes d'un graphe D2C en fonction de son nombre de sommets. Or, des recherches récentes laissent supposer que cette borne peut être améliorée pour les graphes D2C non-bipartis. Nous démontrons donc une borne amoindrie pour une sous-famille de graphes D2C.

Dans un deuxième temps, nous considérons un problème d'*identification*, laquelle consiste à assigner une étiquette à toutes les arêtes ou à tous les sommets d'un graphe, cette assignation devant engendrer une étiquette différente pour chaque sommet. Nous définissons une coloration d'arêtes par des ensembles d'entiers induisant une identification des sommets, et démontrons que cette coloration nécessite au plus un nombre logarithmique d'entiers par rapport à l'ordre du graphe pour l'identifier. Ce résultat est mis en comparaison avec d'autres types de colorations identifiantes, qui nécessitent dans le pire des cas un nombre linéaire d'entiers pour identifier tous les sommets.

Dans un troisième temps, nous étudions des *jeux de suppression de sommets*, qui sont des jeux dans lesquels deux joueurs suppriment d'un graphe des sommets en respectant certaines règles prédéfinies, le premier joueur incapable de jouer perdant la partie. Nous proposons un cadre global pour l'étude de nombreux jeux de suppression de sommets dans les graphes, qui inclut plusieurs jeux classiques comme ARC-KAYLES et permet une généralisation des jeux de soustraction et des jeux octaux sur les graphes. Dans leur définition classique, ces jeux ont généralement des comportements réguliers : tous les jeux de soustraction finis sont ultimement périodiques et il est conjecturé que c'est également le cas des jeux octaux.

Nous étudions plus spécifiquement les jeux de soustraction connexes  $CSG(S)$ , dans lesquels les joueurs peuvent supprimer  $k$  sommets induisant un sous-graphe connexe sans déconnecter le graphe si  $k \in S$  (avec  $S$  fini). Nous démontrons que tous ces jeux sont ultimement périodiques, dans le sens où pour un graphe et un sommet donnés, un chemin attaché à ce sommet peut être réduit à partir d'un certain rang sans modifier la valeur de Grundy du graphe pour le jeu. Nous trouvons également des résultats de périodicité pure, en particulier sur les étoiles subdivisées : pour certains ensembles  $S$ , les chemins des étoiles peuvent être réduits à leur longueur modulo une certaine période sans changer l'issue du jeu.

Enfin, nous définissons une variante pondérée de ARC-KAYLES, appelée WEIGHTED ARC-KAYLES (ou WAK), dans laquelle les joueurs doivent sélectionner une arête pour réduire le poids de ses extrémités, les sommets ayant un poids nul étant supprimés du graphe. Nous montrons une réduction entre WAK et ARC-KAYLES, puis que les valeurs de Grundy de WAK sont non-bornées, ce qui répond à une question ouverte sur ARC-KAYLES. Nous montrons également que les valeurs de Grundy de WAK sont ultimement périodiques lorsque tous les poids du graphe sauf un sont fixés.

**Mots-clés** : Criticalité, identification, coloration, théorie des graphes, jeux de suppression de sommets, jeux de soustraction, théorie des jeux combinatoires, combinatoire.

## Abstract

In this thesis, we study both graphs and combinatorial games. There are several links between those two domains : games are useful for modeling an opponent in optimization problems on graphs, and in the other direction several classical games are played on graphs. We will study two graph problems and adapt some classical combinatorial games to be played on graphs.

In a first chapter, we study a criticality problem. A graph that verifies some property, and such that any modification (vertex or edge addition or deletion) breaks the property is called *critical* for this property. We focus on the critical graphs for the property "having diameter 2", called D2C graphs. The Murty-Simon conjecture gives an upper bound on the number of edges in a D2C graph with a given number of vertices. However, recent research suggests that this bound can be improved for non-bipartite D2C graphs. We show the validity of this approach by proving a smaller upper bound for a subfamily of non-bipartite D2C graphs.

In a second chapter, we consider an *identification* problem. Identification consists in assigning some data to every edge or vertex of a graph, such that this assignment induces a label to every vertex with the added condition that two distinct vertices must have a different label. We define an edge-coloring using sets of integers inducing an identification of the vertices, and prove that this coloring requires at most a logarithmic number of integers (with respect to the order of the graph) in order to successfully identify the vertices. This result is compared with other identifying colorings, for which the number of colors required to successfully identify the vertices can be linear with respect to the order of the graph.

In order to show the link between graphs and games, we adapt a well-known family of games to be played on graphs. We propose a general framework for the study of many *vertex deletion games* (which are games in which the players delete vertices from a graph under predefined rules) such as ARC-KAYLES. This framework is a generalization of subtraction and octal games on graphs. In their classical definition, those games exhibit a high regularity : all finite subtraction games are ultimately periodic, and Guy conjectured that this is also true for all finite octal games.

We specifically study the connected subtraction games  $CSG(S)$  (with  $S$  being a finite set). In those games, the players can remove  $k$  vertices from a graph if and only if they induce a connected subgraph, the graph remains connected after their deletion, and  $k \in S$ . We prove that those games are all ultimately periodic, in the sense that for a given graph and vertex, a path attached to this vertex can be reduced (after a certain preperiod) without changing the Grundy value of the graph for the game. We also prove pure periodicity results, mostly on subdivided stars : for some sets  $S$ , the paths of a subdivided star can be reduced to their length modulo a certain period without changing the outcome of the game.

Finally, we define a weighted version of ARC-KAYLES, called WEIGHTED ARC-KAYLES (WAK for short). In this game, the players select an edge and reduce the weight of its endpoints. Vertices with weight 0 are removed from the graph. We show a reduction between WAK and ARC-KAYLES, then we prove that the Grundy values of WAK are unbounded, which answers an open question on ARC-KAYLES. We also prove that the Grundy values of WAK are ultimately periodic if we fix all but one of the weights in the graph.

**Keywords** : Criticality, identification, coloring, graph theory, vertex deletion games, subtraction games, combinatorial game theory, combinatorics.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>viii</b>
<b>Introduction</b>	<b>2</b>
Introduction . . . . .	2
Précautions de lecture . . . . .	3
Préliminaires . . . . .	4
Graphes . . . . .	4
Complexité . . . . .	6
<b>I Graphes</b>	<b>8</b>
<b>1 Graphes arêtes-critiques de diamètre 2</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 La conjecture de Murty-Simon . . . . .	11
1.2.1 Définitions et propriétés . . . . .	11
1.2.2 La conjecture de Murty-Simon : énoncé et historique . . . . .	13
1.2.3 Domination totale et conjecture de Murty-Simon . . . . .	13
1.3 Conjecture de Murty-Simon et nombre de triangles . . . . .	16
1.3.1 Graphes sans triangles . . . . .	16
1.3.2 Graphes avec peu de triangles . . . . .	19
1.4 Graphes D2C avec une arête dominante . . . . .	22
1.4.1 Structure des graphes D2C avec une arête dominante . . . . .	22
1.4.2 La $f$ -orientation et ses premières propriétés . . . . .	25
1.4.3 Preuve de la conjecture de Murty-Simon pour les graphes avec une arête dominante . . . . .	29
1.4.4 Renforcement de la conjecture de Murty-Simon . . . . .	31
1.5 Conclusion et perspectives . . . . .	38
<b>2 Coloration d'arêtes union-distinguante</b>	<b>40</b>
2.1 Introduction . . . . .	40
2.2 Coloration union-distinguante . . . . .	44
2.2.1 Définition et paramètre . . . . .	44
2.2.2 Premiers résultats . . . . .	45
2.3 Étude du paramètre sur des classes de graphes . . . . .	48
2.3.1 Chemins . . . . .	48
2.3.2 Cycles . . . . .	49
2.3.3 Arbres binaires complets . . . . .	52
2.3.4 Étoiles . . . . .	53
2.3.5 Graphes complets . . . . .	55
2.4 Une borne supérieure générale pour le paramètre . . . . .	56
2.5 Conclusion et perspectives . . . . .	58

<b>Intermède</b>	<b>62</b>
<b>3 Des graphes vers les jeux</b>	<b>62</b>
3.1 De la résilience aux jeux . . . . .	62
3.2 Des paramètres de graphe aux paramètres d'optimisation . . . . .	64
3.3 Plus loin dans les jeux... . . . .	67
3.4 Problématiques générales des jeux . . . . .	67
3.5 Illustration : le jeu de coloration de Grundy . . . . .	68
3.6 Conclusion . . . . .	74
<b>II Jeux</b>	<b>75</b>
<b>4 Jeux combinatoires</b>	<b>76</b>
4.1 Introduction . . . . .	76
4.1.1 Définitions . . . . .	76
4.1.2 Graphe de jeu . . . . .	79
4.2 Théorie de Sprague-Grundy . . . . .	83
4.2.1 Somme de jeux . . . . .	83
4.2.2 Retour à NIM . . . . .	85
4.2.3 Vers le théorème de Sprague-Grundy . . . . .	87
4.3 Jeux <i>taking-breaking</i> . . . . .	91
4.3.1 Jeux de soustraction . . . . .	92
4.3.2 Jeux octaux et généralisations . . . . .	93
4.3.3 Jeux de suppression de sommets . . . . .	96
4.3.4 Jeux octaux dans les graphes . . . . .	97
<b>Liste des jeux</b>	<b>100</b>
<b>5 Jeux de soustraction dans les graphes</b>	<b>102</b>
5.1 Jeux de soustraction connexes . . . . .	102
5.2 Résultats globaux sur les jeux de soustraction connexes . . . . .	103
5.3 $CSG(I_N)$ sur les graphes . . . . .	106
5.3.1 $CSG(I_2)$ sur les étoiles subdivisées . . . . .	106
5.3.2 Résultats généraux sur $CSG(I_N)$ . . . . .	108
5.3.3 Étude des étoiles simples pour $CSG(I_N)$ . . . . .	111
5.3.4 Étude des étoiles subdivisées avec trois chemins pour $CSG(I_N)$ . . . . .	112
5.3.5 $CSG(I_3)$ sur les étoiles subdivisées . . . . .	119
5.3.6 Perspectives pour $CSG(I_N)$ dans les étoiles subdivisées . . . . .	121
5.4 $CSG(I_N \cup \{M\})$ sur les étoiles subdivisées . . . . .	121
5.5 $CSG(I_2)$ sur les biétoiles subdivisées . . . . .	122
5.5.1 Réduction des chemins dans les biétoiles . . . . .	122
5.5.2 Définition d'une pseudo-somme de jeux et résolution des biétoiles subdivisées . . . . .	124
5.5.3 Aller plus loin ? . . . . .	131
5.6 $CSG(\{2\})$ dans les graphes . . . . .	136
5.6.1 Premiers résultats . . . . .	136
5.6.2 Résolution des arbres . . . . .	137
5.6.3 Résolution des grilles de hauteur 2 ou 3 . . . . .	138
5.7 Conclusion et perspectives . . . . .	140

<b>6</b>	<b>ARC-KAYLES PONDÉRÉ</b>	<b>142</b>
6.1	Introduction . . . . .	142
6.1.1	Définition et notations . . . . .	142
6.1.2	Lien avec des jeux de placement de pièces d'échecs . . . . .	143
6.1.3	Premiers graphes . . . . .	146
6.2	Réduction de graphes . . . . .	148
6.2.1	Lemme de réduction et graphes canoniques . . . . .	148
6.2.2	Réduction entre ARC-KAYLES et ARC-KAYLES PONDÉRÉ . . . . .	150
6.3	Les valeurs de Grundy sont non-bornées . . . . .	151
6.4	Arbres de profondeur 2 . . . . .	153
6.5	Périodicité . . . . .	158
6.6	Conclusion et perspectives . . . . .	161
	<b>Conclusion</b>	<b>163</b>
	<b>Index</b>	<b>165</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>167</b>



# Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Frédéric Havet et Mickaël Montassier pour leur relecture attentive de mon manuscrit. Je remercie également les autres membres du jury, Cristina Bazgan, Elzbieta Sidorowicz et Hamza Si Kaddour, de s'être déplacés pour assister à ma soutenance.

Je tiens à remercier mes directeurs de thèse pour m'avoir soutenu tout au long de ces trois ans (et demi, en comptant le stage !), et m'avoir permis d'effectuer mon travail dans des conditions plus qu'idéales. Hamamache, merci de m'avoir laissé explorer des sujets variés avec une grande liberté et de m'avoir aidé en cas de besoin. Éric et Aline, merci pour votre encadrement rigoureux et sérieux. Vous m'avez beaucoup apporté sur les plans personnel comme professionnel, que ce soit en supportant mes récriminations, partageant mes joies, corrigeant mes errements ou enrichissant ma réflexion. Les soirées à la Triche, parties de truco et concours de mots fléchés me manqueront, mais pas autant que le fait de travailler avec vous !

Je remercie également toutes celles et ceux qui ont fait du LIRIS un cadre sérieux et propice au travail (donc, camarades de thèse, votre tour viendra plus tard !). Merci en particulier à l'équipe GOAL pour son accueil, ainsi qu'à Isabelle, Brigitte, Catherine et Jean-Pierre sans qui le monde ne serait qu'un labyrinthe administratif dans lequel nous errerions sans espoir. Merci à Saïd pour son suivi des doctorants, et à Vincent, Matthieu et les autres pour leur bienveillance. Merci aussi aux équipes de l'ISFA : Alexis, Yahia, Denis, et les autres. Enseigner l'informatique aux actuaire n'était pas forcément mon rêve, mais ce fut une expérience enrichissante et que vous avez su rendre agréable.

Bien que le principe des ANR m'horripile au plus haut point, il me faut bien avouer qu'il a été très plaisant de prendre part aux travaux de l'ANR GAG, au sein de laquelle se sont déroulés mes travaux sur les jeux. Le travail, à un c'est bien, à deux c'est mieux, et à plus que trois c'est extra, aussi remerciè-je tous les membres de GAG avec qui j'ai eu l'occasion de travailler : Pierre (hypnotiseur extraordinaire), Laurent (casseur de genoux extraordinaire), Sylvain (maître *ès* truco), Julien (qui n'oublie jamais de dire bonjour) et Éric S (dont les conseils sont toujours pertinents). Je remercie également tous les autres, avec qui je n'ai pas travaillé mais ai échangé sur les jeux, tant combinatoires que de société ! Merci notamment à Clément pour les conversations militantes. GAG m'a également permis de rencontrer des chercheurs en jeux combinatoires venant des quatre coins du monde, et de me rendre compte de ce qu'une communauté internationale soudée peut apporter à un domaine en terme de collaboration, de résolution de problèmes, et de rencontres animées. Merci en particulier à Richard Nowakowski et Urban Larsson pour leurs idées de recherche. Par ailleurs, toutes les rencontres ne se font pas dans le cadre d'une ANR, c'est pourquoi je tiens à remercier Nicolas pour ses conseils, sa rigueur et sa gentillesse.

Au cours de ma thèse, j'ai eu l'occasion de partir en séjour de recherche au Mexique (grâce au LIRIS pour le voyage, et à l'UNAM pour l'hébergement), ce qui a été une expérience particulièrement riche et plaisante, tant sur le plan du travail que sur les autres. Je remercie toutes celles et ceux qui m'ont accueilli aussi chaleureusement que la température locale, en particulier Adriana et sa famille, Juan Carlos et Denae. Merci aussi à Florent pour m'avoir fait sortir de ma zone de confort et présenté sa vision du monde. Je suis peut-être un *quejón*, mais je ne peux rien trouver de négatif à ce que tu m'as apporté. Merci également à Shahrzad pour sa bonne humeur, et gloire au jus fraise-pomelo !

Une thèse sans autres doctorants avec qui en partager les diverses facettes serait bien triste, heureusement j'ai eu la chance de côtoyer le meilleur panel possible d'amis pendant ces trois années. Je remercie d'abord André, mon *senpai* à l'ISFA, pour ses conseils et sa prévenance. Mes principaux remerciements vont à mes camarades de la *Splitted Solitude*. Valentin, camarade tant de recherche que de lecture et de jeux (Sanderson vaincra !), avec qui aucune minute n'est désagréable. Arthur, empereur des cyclistes (sur au moins deux mètres) et dont la bonne humeur ne faiblit jamais. Alexis, compagnon de Master, qui m'a fait apprécier de nouveau la musique classique (vive Constantin Corfu !). Simon, qui m'a précédé et suivi à Grenoble, grand seigneur des jeux de société et bien plus doux qu'il en a l'air. Maxime, également grenoblois, dont l'enthousiasme est si communicatif. Alice, qui perd si bien ses affaires qu'elle a perdu le respect de son chat, mais qui compense en étant la meilleure. Gabrielle, ma cothèse, pour m'avoir débarrassé de Noether tout autant que pour le travail effectué ensemble. Marc, tellement parfait qu'il arrive à tout faire, sauf échouer. Thomas Caissard, empereur de la beauté et toujours prêt à délirer. Rémi (je sais que tu n'es pas doctorant, mais tu l'es dans mon cœur), dont l'humour me perce constamment. Jocelyn, qui connaît les règles du cul-de-chouette. Samuel, j'optimise l'espace pour toi. Matthieu, Julia et Charles, que je connais trop peu mais dont j'ai pu apprécier l'esprit et la sympathie. Et tous ceux que j'oublie... Un merci particulier à mes cobureaux, Antoine et Thibault. Sans vous derrière moi, qui pour râler sur son écran et qui pour poser des questions sans écouter la réponse, la vie est triste et morose. Plus sérieusement : merci à toutes et tous pour les nombreux bons moments passés avec vous, que ce soit au labo, au bar ou ailleurs. Merci également aux doctorants en graphes non-lyonnais : Mohammed, François D, Théo, Thomas, François P, Benjamin et les autres.

Les amis dans les laboratoires, c'est bien, mais il faut aussi en avoir en-dehors sous peine de perdre sa santé mentale.

Un grand merci aux camarades du Kolokhoze, dont le grain particulier de folie et la radicalité ont nourri de nombreuses discussions, tantôt délirantes, tantôt sérieuses. Antoine, merci pour ta camaraderie et ton humour, et ton goût communicatif pour les maths, les animes ou la politique ! Thomas, merci pour tous les délires, mais aussi pour les moments sérieux. Éloi, merci pour ta culture militante et tes idées géniales. Merci également à Mélanie, bien qu'elle ait tort.

Les études ne servent pas qu'à la coïncidence, il y a aussi des amitiés qui s'y nouent. Merci à Joan, Sophie et Georges pour les glorieux moments passés ensemble depuis la prépa. Merci à Romane pour son amitié constante depuis le Master (et vivent les licornes !). Merci à Alexi qui m'accompagne depuis le CE2, et avec qui il est toujours aussi facile de discuter de tout et de rien.

Certains disent qu'Internet c'est le virtuel du cyberspace de la non-réalité, mais ce fut pour moi un lieu de socialisation qui a débouché sur des liens solides. Merci donc aux divers lieux qui m'ont accueilli, notamment la Gazette du Sorcier et Shy'Comics. Pour ce dernier, merci à tous ceux avec qui j'ai pu avoir des discussions tant créatives que philosophiques, notamment Morgan (docteur en mammifères d'il y a longtemps), Damien (le bassiste le plus cool du monde), Johane (et tes théories artistiques) et Francis (venu du Québec pour nous voir !), mais aussi Serge, Thomas, Erik, Alexandre, Fabien, Adrien...

Mes derniers remerciements, et non des moindres, vont à ma famille. Merci à mes parents d'avoir fait de moi qui je suis, de m'accueillir quand je peux descendre et d'être aux petits soins pour moi. Vous m'avez soutenu dans la voie des études théoriques, malgré mes errements et changements de direction inopinés, et je ne pourrais jamais assez vous remercier pour ça. Merci à ma sœurlette d'être là pour moi et de s'intéresser à mes goûts bizarres, et à mon frerot d'être adorable et gentil. Notre amour fratricide sera toujours plus rapide... plus fort... Merci à Simone et Geneviève pour toutes leurs attentions, et à Marie et Juliette pour leur bonne humeur. Merci à Sylvie, Héloïse et Alexandre pour leurs accueils toujours parfaits, et merci à Fred de partager ta culture et tes jeux avec nous. Il ne pourra pas le lire et s'en fiche probablement, mais je remercie quand même mon chat Hilbert sans qui la vie serait quand même moins câline et moins agréable. Merci à toutes et tous pour tout ce que vous avez fait pour moi, votre soutien et vos encouragements.

# Introduction

## Introduction

Tout au long de mes études supérieures, mes cours favoris ont concerné la théorie des graphes et mon passe-temps favori était de jouer. Aussi, lorsque pour mon stage de recherche en Master 2, Éric Duchêne a proposé un sujet concernant des jeux sur des graphes, j'ai été immédiatement intéressé. J'ai donc commencé mon stage début 2015, au sein de l'ANR GAG<sup>1</sup> et encadré par Éric Duchêne et Aline Parreau. Immédiatement, j'ai compris que j'allais aimer étudier les liens entre graphes et jeux combinatoires : deux disciplines initialement très théoriques, et étant depuis devenues nécessaires à de nombreuses applications pratiques.

Les graphes sont un modèle mathématique très puissant permettant de représenter presque tout. Décrit simplement, il s'agit d'un ensemble de points (les sommets) reliés entre eux par des traits (les arêtes). On peut lier des données aux sommets ou aux arêtes, ou à aucun des deux. Ce modèle très simple permet de représenter une ville, un site Internet, une séquence d'achats, l'évolution de la vie (pensez aux arbres du vivant !), un réseau de relations, les possibilités de diffusion d'une information, etc. Mais les graphes sont également un fabuleux outil mathématique ayant donné lieu à des siècles d'études plus théoriques.

Quant aux jeux combinatoires, il s'agit d'un type très spécifique de jeux à deux joueurs. Pour être plus précis, il s'agit de jeux sans hasard, dans lesquels toute l'information est en permanence disponible pour les joueurs, et pour lesquels le gagnant est déterminé par qui joue le dernier coup. Cela ne semble certes pas concerner beaucoup de jeux : seuls HEX<sup>2</sup> ou FJORDS<sup>3</sup> sont des jeux presque grand public respectant ces propriétés (et encore, après une première phase aléatoire pour ce dernier). Mais en relâchant certaines conditions, les outils qui ont été développés depuis plus d'un siècle permettent également d'étudier des jeux plus connus, comme le GO ou les ÉCHECS. De plus, la théorie des jeux combinatoires a permis d'étendre notre compréhension des nombres, via la définition des nombres surréels, et de modéliser des problèmes de construction face à un adversaire. Même si l'impact sur le grand public n'est pas perceptible, ces jeux ne sont définitivement pas anodins.

Dans les domaines à la frontière entre mathématiques et informatique, qu'on appelle au choix combinatoire ou mathématiques discrètes (nous faisons si peu de bruit !), la théorie des graphes et la théorie des jeux combinatoires sont voisines, mais interagissent bien peu. Les graphes sont un modèle utile pour les jeux, et quelques jeux ont été définis sur des graphes. Mais jusqu'à récemment, les connexions étaient timides. Le but de l'ANR GAG était de lancer de nouvelles passerelles entre les deux théories tout en renforçant les interactions existantes. Cette thèse se situe dans cet esprit. En effet, au cours de ce manuscrit, nous nous intéresserons tour à tour à des problèmes de graphes et à des problèmes de jeux combinatoires sur des graphes, sans oublier de faire le lien entre les deux parties.

Dans la partie I, nous allons étudier deux problèmes de graphes différents. Le premier, étudié dans le chapitre 1, est un problème d'un domaine de la théorie des graphes appelée la *théorie extrémale des graphes*. Celle-ci consiste à étudier les graphes ayant le plus (ou le moins) de sommets ou d'arêtes et vérifiant une certaine propriété. En l'occurrence, les graphes extrémaux que nous étudions sont appelés *arêtes-critiques de diamètre 2* : dans ces graphes, on peut se rendre d'un sommet à un autre en empruntant au plus deux arêtes, mais supprimer n'importe quelle arête fait que deux sommets se retrouvent à une distance plus élevée. Dans les années 1960, différents chercheurs ont étudié ces graphes, et ont émis une conjecture sur le nombre maximal d'arêtes qu'ils pouvaient contenir et sur les graphes ayant exactement ce nombre maximal. Cependant, les études récentes semblent indiquer que ces graphes ont en général beaucoup moins d'arêtes que conjecturé. Nous proposons deux versions renforcées de cette conjecture (un petit renforcement et un renforcement très fort) et démontrons le petit renforcement pour certains graphes arêtes-critiques de diamètre 2, plus précisément ceux pour qui deux sommets reliés « voient » tous les autres sommets du graphe.

Dans le chapitre 2, nous étudions une façon d'*identifier* les sommets d'un graphe, c'est-à-dire de leur donner chacun un nom unique à partir de données ajoutées sur les arêtes. Cela nous permet de

---

1. Graphs and Games : <https://projet.liris.cnrs.fr/gag/>

2. Dans lequel deux joueurs essaient de relier deux côtés opposés d'une grille formée d'hexagones.

3. Dans lequel deux joueurs prennent des tuiles adjacentes à des tuiles qu'ils contrôlent déjà dans le but de bloquer leur adversaire.

définir un paramètre : pour un graphe donné, quelle quantité minimale de données est nécessaire pour que tous les sommets aient un nom différent ? Nous démontrons que cette quantité minimale ne peut prendre que trois valeurs, ce qui est très différent de la quasi-totalité des autres façons connues d'identifier les sommets d'un graphe à partir de données.

Dans le chapitre 3, nous présentons des liens entre graphes et jeux combinatoires. Nous détaillons la façon dont des problèmes de graphes peuvent être transformés en problèmes de jeux, les nouvelles problématiques que cette transformation pose, et les écarts de complexité. En effet, en général, quelle que soit la difficulté d'un problème de graphe (pour un ordinateur), les problèmes de jeux qui en sont dérivés sont encore plus difficiles.

La partie II est consacrée à étudier des jeux combinatoires sur des graphes. Dans le chapitre 4, nous faisons un rappel détaillé de la théorie des jeux combinatoires, et plus spécifiquement des jeux *impartiaux*, pour lesquels la seule différence entre les deux joueurs est lequel des deux commence. Dans les années 1930, il a été démontré que tous les jeux impartiaux étaient en fait équivalents à jouer à NIM, le premier jeu combinatoire à avoir été étudié (en 1901). Ce résultat permet une étude plus efficace des jeux impartiaux, qui restent souvent très complexes. Nous présentons également une grande famille de jeux impartiaux, les jeux *taking-breaking*, dont nous proposons une extension de la définition : ils se jouent sur des piles de jetons, nous y jouerons sur des graphes ! Cette extension incorpore plusieurs jeux sur des graphes de la littérature, comme ARC-KAYLES (dans lequel les joueurs suppriment tour à tour deux sommets reliés par une arête jusqu'à ce que ce soit impossible).

Dans le chapitre 5, nous nous penchons sur des familles de jeux *taking-breaking* : les jeux de soustraction, auxquels nous jouons dans les graphes. Les jeux de soustraction sont une famille assez connue, dans le sens où il a été démontré qu'ils avaient tous un comportement régulier. Nous essayons de voir si ce comportement reste régulier dans les graphes, et trouvons de nombreux cas où ça l'est. Dans ces jeux, les joueurs suppriment tour à tour des sommets sous conditions (le nombre de sommets qu'il est possible de supprimer est défini par le jeu, et les joueurs n'ont pas le droit de séparer des sommets : il doit toujours être possible d'aller d'un sommet à un autre en empruntant des arêtes). Nous étudions plusieurs familles de jeux de soustraction sur différents types de graphes, en particulier les étoiles subdivisées (des graphes avec un sommet central duquel « rayonnent » des chemins), et parvenons à montrer divers résultats de régularité. En particulier, nous montrons que, pour certaines de ces étoiles, les rayons peuvent être réduits sans rien changer au jeu.

Enfin, dans le chapitre 6, nous étudions un jeu plus particulier, dérivé d'ARC-KAYLES. Dans notre jeu, les sommets du graphe ont une donnée qui est un entier positif. Les joueurs choisissent tour à tour deux sommets reliés par une arête, et réduisent de 1 la donnée des deux sommets. Un sommet se retrouvant avec une donnée égale à zéro est retiré du graphe. Ce jeu est utilisé pour modéliser un autre jeu, dans lequel les joueurs placent des tours sur un échiquier avec des trous avec comme condition de ne pas se placer sur une case attaquée par une tour déjà placée (les tours ne pouvant pas attaquer au-delà d'un trou). Nous démontrons divers résultats théoriques sur ce jeu, trouvons également une régularité dans son comportement sous conditions, et déterminons qui a une stratégie gagnante sur un type de graphes, ce qui résout le cas où l'échiquier a un trou sur le bord. Ces résultats nous permettent notamment de répondre à une question ouverte sur ARC-KAYLES, qui est un jeu particulièrement difficile à étudier.

La conclusion contient quant à elle un résumé et des perspectives de recherche.

## Précautions de lecture

Cette thèse est rédigée en écriture inclusive. En effet, je ne parviens plus à écrire « les auteurs » quand il y a trois autrices et un auteur. Plus récemment, afin d'éviter d'alourdir les textes et d'essayer de se passer du point médian, des néologismes ont été créés afin de se référer à un groupe mixte. J'explique ici les quelques néologismes que j'utiliserai au cours du manuscrit :

1. les *auteurices* = les auteur·s et autrice·s. J'utilise le terme « autrice » car il s'agit de la forme féminine historique du mot « auteur »<sup>4</sup>. Le terme *lecteurice*, construit sur le même principe,

---

4. Pour plus d'informations sur les noms de métier féminins oubliés, on peut se référer à l'article suivant : <https://www.slate.fr/story/156221/feminisation-metiers-pouvoir> qui contient un historique, des exemples et des témoignages de linguistes et

sera également employé.

2. *iels* = ils et elles.

## Préliminaires

Nous donnons dans cette section les définitions de base sur les graphes et la complexité, ainsi que les notations que nous utiliserons au long de cette thèse. Des définitions plus spécifiques seront données dans les chapitres concernés.

## Graphes

Un graphe  $G(V, E)$  se définit comme un ensemble de sommets  $V$  et un ensemble d'arêtes  $E \subseteq V^2$ , une arête reliant deux sommets entre eux. Si les éléments de  $E$  sont ordonnés, alors  $G$  est *orienté* ; dans le cas contraire il est *non-orienté*. Une arête reliant deux sommets  $u$  et  $v$  sera notée indifféremment  $uv$  ou  $vu$  si  $G$  est non-orienté ; si  $G$  est orienté elle sera notée  $\vec{uv}$  si la paire ordonnée  $(u, v)$  appartient à  $E$ . Dans la majeure partie de cette thèse, les graphes considérés seront non-orientés. Les seuls graphes orientés que nous étudierons seront explicitement décrits tels quels.

Dans tout le manuscrit, sauf dans le chapitre 6, les graphes considérés seront *simples* : une arête reliera toujours deux sommets distincts, et il pourra y avoir au plus une arête entre deux sommets. Enfin, à l'exception des chapitres 2 et 6, ils seront également *non-étiquetés* : ni sommets ni arêtes n'auront d'étiquettes.

L'*ordre* d'un graphe  $G$  est son nombre de sommets, et sera indifféremment noté  $|V(G)|$ , ou  $n$  si aucune confusion n'est possible. La *taille* d'un graphe  $G$  est son nombre d'arêtes, et sera indifféremment notée  $|E(G)|$ , ou  $m$  si aucune confusion n'est possible. Si  $n = 0$  on dira que  $G$  est *vide*, si  $n = 1$  on dira que  $G$  est *trivial*.

Deux sommets  $u$  et  $v$  sont *adjacents*, ou *voisins*, si  $uv$  est une arête. Dans le cas contraire, on notera  $\overline{uv}$  la non-arête entre  $u$  et  $v$ . Soit  $e = uv$  une arête,  $u$  et  $v$  sont appelés les *extrémités* de  $e$  et on dit qu'ils sont *incidentes* à  $e$ . Étant donné un sommet  $u$ , on définit son *voisinage*, noté  $N(u)$ , comme l'ensemble de ses voisins :  $N(u) = \{v \in V \mid uv \in E\}$ . Le *voisinage fermé* de  $u$ , noté  $N[u]$ , est son voisinage auquel on ajoute  $u$  lui-même :  $N[u] = N(u) \cup \{u\}$ . Le *degré* d'un sommet  $u$  dans le graphe  $G$ , noté  $d_G(u)$  ou  $d(u)$  quand le contexte est clair, est le nombre de voisins de  $u$  :  $d(u) = |N(u)|$ . Le *degré maximal* de  $G$ , noté  $\Delta(G)$ , est le plus grand degré d'un sommet de  $G$  :  $\Delta(G) = \max_{u \in V} (d(u))$ . À l'inverse, le *degré minimal* de  $G$ , noté  $\delta(G)$ , est le plus petit degré d'un sommet de  $G$  :  $\delta(G) = \min_{u \in V} (d(u))$ .

Un *chemin* entre deux sommets  $u$  et  $v$  est une séquence de sommets distincts  $u = u_0, u_1, \dots, u_k = v$  telle que  $u_i u_{i+1}$  est une arête pour tout  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ . Un graphe est dit *connexe* s'il existe un chemin entre toute paire de sommets. Étant donné un graphe  $G(V, E)$ , on peut partitionner  $V$  en un ou plusieurs sous-ensembles de sommets connexes  $V_1, \dots, V_k$  de façon à ce que s'il existe une arête  $uv$  avec  $u \in V_i$  et  $v \in V_j$ , alors  $i = j$ . Les graphes  $G_1(V_1, E_1), \dots, G_k(V_k, E_k)$  (où  $E_i$  est l'ensemble des arêtes de  $E$  incidentes à un sommet de  $V_i$ ) sont alors appelés les *composantes connexes* de  $G$ .

Étant donné un graphe simple non-orienté  $G(V, E)$ , on définit son *complémentaire* comme le graphe  $\overline{G}(V, \overline{E})$  qui a les mêmes sommets que  $G$ , et dont les arêtes sont exactement les non-arêtes de  $G$  :  $\overline{E} = \{uv \in V^2 \mid u \neq v \text{ et } uv \notin E\}$ . Notons que  $\overline{G}$  a  $\binom{n}{2} - m$  arêtes, et que  $\Delta(\overline{G}) = n - 1 - \delta(G)$  et  $\delta(\overline{G}) = n - 1 - \Delta(G)$ .

Soient  $G_1(V_1, E_1)$  et  $G_2(V_2, E_2)$  deux graphes simples non-orientés. Une fonction  $\Phi : V_1 \rightarrow V_2$  est un *morphisme* entre  $G_1$  et  $G_2$  si pour toute arête  $uv \in E_1$ ,  $\Phi(u)\Phi(v) \in E_2$ . Les graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont *isomorphes* s'il existe un morphisme bijectif entre  $G_1$  et  $G_2$  dont la réciproque est également un morphisme. On considérera que deux graphes isomorphes sont égaux, et on écrira  $G_1 = G_2$ .

Si  $V_1 \subseteq V_2$  et  $E_1 \subseteq E_2$ , on dit que  $G_1$  est un *sous-graphe* de  $G_2$ . Si de plus il n'existe aucune arête de  $E_2 \setminus E_1$  ayant ses deux extrémités dans  $V_1$ , alors  $G_1$  est un *sous-graphe induit* de  $G_2$ . On

dit que  $G_2$  est *sans*  $G_1$  (resp. *sans*  $G_1$  induit) si aucun sous-graphe (resp. sous-graphe induit) de  $G_2$  n'est isomorphe à  $G_1$ .

Si  $G_1(V_1, E_1)$  et  $G_2(V_2, E_2)$  sont deux graphes sur des ensembles de sommets disjoints (c'est-à-dire tels que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  et  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ), on définit leur *union disjointe*, noté  $G_1 \cup G_2$ , comme le graphe ayant comme sommets  $V_1 \cup V_2$  et comme arêtes  $E_1 \cup E_2$ .

Certaines classes de graphes seront particulièrement étudiées dans ce manuscrit, aussi allons-nous les définir ici.

Étant donné un entier  $n$ , le *chemin*  $P_n$  est le graphe composé des sommets  $\{u_1, \dots, u_n\}$  et des arêtes  $u_i u_{i+1}$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Le *cycle*  $C_n$  est quant à lui le graphe composé des sommets  $\{u_1, \dots, u_n\}$  et des arêtes  $u_i u_{i+1}$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  ainsi que de l'arête  $u_n u_1$ .

Un graphe sans cycle est appelé une *forêt*. Si une forêt ne contient qu'une seule composante connexe, c'est un *arbre*. Les sommets de degré 1 d'une forêt sont appelées des *feuilles*. Parfois, un sommet particulier joue le rôle de *racine*, ce qui nous permet de définir la *profondeur* d'un sommet de l'arbre comme le nombre d'arêtes sur le chemin le reliant à la racine. La *profondeur de l'arbre* est alors la profondeur la plus élevée parmi tous ses sommets.

Étant donné un entier  $n$ , le graphe *complet*  $K_n$  est le graphe contenant  $n$  sommets et toutes les arêtes possibles entre ces sommets. Le graphe complet le plus connu est le *triangle*  $K_3$ . Un sous-ensemble de sommets d'un graphe induisant un graphe complet est appelé une *clique*. La taille de la plus grande clique d'un graphe  $G$  est notée  $\omega(G)$ . Le complémentaire d'un graphe complet est appelé *indépendant* : un sommet est indépendant dans une partie d'un graphe lorsqu'il n'a pas de voisins dans cette partie. De même, un sous-ensemble de sommets d'un graphe induisant un graphe indépendant est appelé un *stable*. Un graphe *scindé* (*split graph* en anglais) est un graphe dont les sommets peuvent tous être répartis entre une clique et un ensemble indépendant.

Étant donnés deux entiers  $m$  et  $n$ , le graphe *biparti complet*  $K_{m,n}$  est le graphe composé de deux ensembles indépendants de respectivement  $m$  et  $n$  sommets tels que chaque sommet d'une partie est voisin de tous les sommets de l'autre partie. Lorsque  $m = 1$ , le graphe est appelé une *étoile*. Notons qu'une étoile est un arbre.

Ces classes sont illustrées figure 1. D'autres classes de graphes seront également présentés au long du manuscrit.

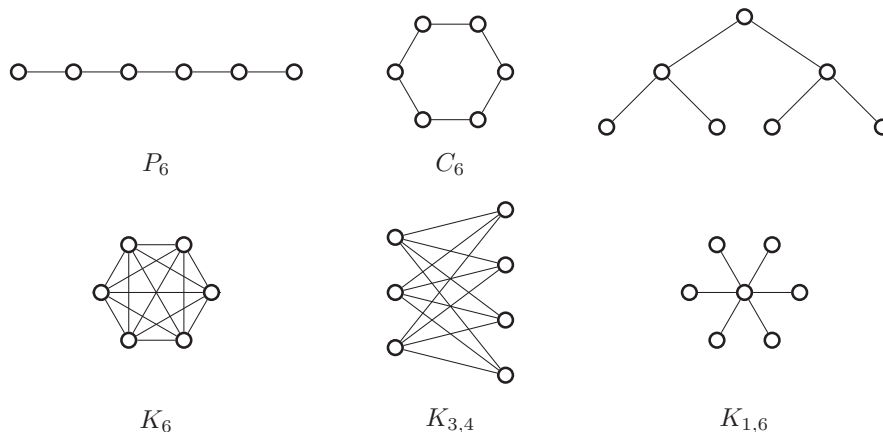


FIGURE 1 – Différents graphes usuels. Sur la ligne du haut : le chemin  $P_6$ , le cycle  $C_6$ , un arbre. Sur la ligne du bas : le graphe complet  $K_6$ , le graphe biparti complet  $K_{3,4}$ , l'étoile  $K_{1,6}$

Étant donnée une arête  $e = uv$  d'un graphe  $G(V, E)$ , on peut *subdiviser* l'arête  $e$  en ajoutant à  $V$  un sommet  $w$ , retirant de  $E$  l'arête  $uv$  et ajoutant à  $E$  les arêtes  $uw$  et  $wv$ . Un graphe obtenu en subdivisant (éventuellement récursivement) des arêtes de  $G$  est appelé une *subdivision* de  $G$ . Par exemple, il est aisé de constater que tous les chemins non-triviaux sont des subdivisions de  $P_2$ . On peut alors dire que les chemins sont des  $P_2$  subdivisés.

## Complexité

La complexité est un des fondements de l'informatique. En effet, la plupart des problématiques de ce domaine sont de trouver des solutions efficaces à des problèmes divers. La théorie de la complexité vise à classer différents problèmes algorithmiques. Nous allons décrire rapidement les principales idées de complexité qui seront utilisées au cours de ce manuscrit. Des références classiques en théorie de la complexité que la lectrice intéressée pourra consulter sont [7, 65, 135].

Un problème est dit *de décision* s'il pose une question sur son entrée dont la réponse est Oui ou Non. Le problème de 3-COLORATION, présenté ci-dessous, en est un exemple. Une première division des problèmes de décision est entre les problèmes décidables, pour lesquels il existe un algorithme répondant Oui ou Non en un nombre fini d'étapes quelle que soit l'entrée, et les problèmes indécidables, pour lesquels de tels algorithmes ne peuvent pas exister. En l'occurrence, la 3-COLORATION est décidable, car énumérer toutes les fonctions  $c$  possibles puis les tester nous permettra de répondre en un temps fini (car il y en a  $3^{|V|}$  différentes, ce qui est très grand, certes, mais fini).

### Problème de décision.

3-COLORATION

ENTRÉE : Un graphe  $G(V, E)$ .

QUESTION : Existe-t-il une fonction  $c : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$  telle que  $uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$  ?

Dans cette thèse, nous n'allons examiner que des problèmes décidables. À partir de là, une nouvelle division se crée en fonction du nombre d'étapes nécessaires pour répondre à la question. Les problèmes sont alors classifiés selon ce nombre d'étapes, lequel est exprimé en fonction de la *taille* de l'entrée, qui est l'espace mémoire nécessaire pour encoder les entrées. Par exemple, pour la 3-COLORATION, l'entrée est un graphe  $G(V, E)$ . Il faut alors encoder le nombre de sommets, ce qui utilise  $\log_2(|V|)$  cases en mémoire (en l'écrivant en binaire), et les arêtes, ce qui utilise  $|E| \log_2(|V|)$  cases en mémoire (en écrivant les deux extrémités de chaque arête en binaire). Cela induit la définition de plusieurs classes : P (qui regroupe les problèmes tels qu'un algorithme répond à la question posée en un nombre d'étapes polynomial en la taille de l'entrée) ou PSPACE (qui regroupe les problèmes tel qu'un algorithme répond à la question posée en utilisant un espace mémoire polynomial en la taille de l'entrée) par exemple.

Cependant, cette classification n'est pas forcément assez fine : pour certains problèmes de décision, s'il est long en temps de décider de répondre Oui ou Non, vérifier la validité d'une réponse peut s'effectuer de façon efficace. Par exemple, pour la 3-COLORATION, il est nécessaire de vérifier toutes les fonctions  $c$  possibles pour répondre Non (comme vu plus haut, un nombre exponentiel). En revanche, si la réponse est Oui, il « suffit » d'exhiber une fonction  $c$  colorant proprement le graphe donné en entrée. Plus généralement, étant donnée une entrée d'un problème de décision, un *certificat d'appartenance* (resp. *certificat de non-appartenance*) est une information qui permet de vérifier de façon efficace (typiquement, en un nombre d'étapes polynomial en la taille de l'entrée) que la réponse au problème avec cette entrée est Oui (resp. Non). Ainsi, une fonction  $c$  colorant proprement le graphe d'entrée du problème de 3-COLORATION est bien un certificat d'appartenance. Ceci induit de nouvelles classes de complexité, dont la plus connue est NP (qui regroupe les problèmes tels qu'il existe un algorithme tel qu'on répond Oui (resp. Non) sur une entrée si et seulement si elle a un certificat d'appartenance (resp. de non-appartenance) que l'algorithme vérifie en un nombre d'étapes polynomial en la taille de l'entrée).

Ces classes de complexité ne sont pas indépendantes les unes des autres. Ainsi, il est évident que  $P \subseteq NP$ , mais la question de savoir s'il existe des problèmes de NP qui ne sont pas dans P est un des problèmes majeurs des mathématiques et de l'informatique (il s'agit de l'un des sept problèmes du Prix du Millénaire de l'Institut Clay). De la même façon, il est connu que  $NP \subseteq PSPACE$ , mais là encore la question de savoir si l'inclusion est stricte ou non est un problème ouvert. Une des façons de caractériser une classe de complexité est d'identifier ses problèmes les plus difficiles.

Étant donnés deux problèmes  $P$  et  $Q$ , une *réduction polynomiale* de  $P$  à  $Q$  est une fonction  $f$  transformant toute entrée  $E$  de  $P$  en une entrée  $f(E)$  de  $Q$ , telle que la taille de  $f(E)$  est polynomiale en la taille de  $E$ , et on répond Oui à  $P$  sur  $E$  si et seulement si on répond Oui à  $Q$  sur  $f(E)$ . Étant



donnée une classe de complexité  $\mathcal{C}$ , un problème de décision est dit  $\mathcal{C}$ -complet s'il est dans  $\mathcal{C}$  et s'il existe une réduction polynomiale de tout autre problème de la classe  $\mathcal{C}$  vers ce problème. En d'autres termes, il s'agit des problèmes les plus difficiles de la classe  $\mathcal{C}$ .

Des exemples classiques de problèmes de décision sont les problèmes de satisfaisabilité booléenne, appelés SAT.

#### Problème de décision.

SAT

ENTRÉE : Une formule logique  $F$  sur des variables booléennes  $x_i$ .

QUESTION : Existe-t-il une assignation des  $x_i$  à **Vrai** ou **Faux** telle que  $F$  est évaluée par **Vrai** ?

Selon le type de formule en entrée, le problème pourra appartenir à différentes classes de complexité. Par exemple, si la formule est en forme normale conjonctive avec des clauses de deux variables, alors le problème (appelé 2-SAT) est dans P. En revanche, si la formule est en forme normale conjonctive avec des clauses de trois variables, alors le problème (appelé 3-SAT) est NP-complet. Pire, QBF-SAT, dans lequel la formule est quantifiée, est PSPACE-complet. Cela est dû au fait que le certificat pour une formule logique écrite en forme normale conjonctive est une simple assignation des variables, tandis qu'il s'agit d'une stratégie pour une formule logique quantifiée.

#### Problème de décision.

QBF-SAT

ENTRÉE : Une formule logique quantifiée<sup>5</sup>  $F$  sur des variables booléennes  $x_i$ .

QUESTION :  $F$  est-elle évaluée par **Vrai** ?

De façon générale, lorsque l'on étudie un problème de décision, on espère montrer qu'il est dans P. Lorsque ce n'est pas le cas, une possibilité est de restreindre le type d'entrées afin d'avoir une variante, qui sera elle dans P. C'est exactement ce qui est effectué avec SAT : le problème global est difficile (la variante QBF-SAT est un problème PSPACE-complet), mais la variante 2-SAT est dans P.

---

5. Une formule logique est quantifiée si elle est de la forme  $Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_n \mid F(x_1, \dots, x_n)$  avec  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ . Par exemple,  $\forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 \mid (x_1 \vee \neg x_2) \wedge x_3$  est une formule logique quantifiée.

Première partie

Graphes

# Chapitre 1

## Graphes arêtes-critiques de diamètre 2

Dans ce chapitre, nous présentons un travail effectué avec **Adriana Hansberg** (chercheuse à l'UNAM Juriquilla) et **Florent Foucaud** (post-doc à Clermont-Ferrand) lors d'un séjour à l'Université Nationale Autonome du Mexique à Juriquilla en novembre et décembre 2017. Ce travail est en cours de rédaction et sera présenté à l'International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics 2018 [40].

### Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous étudions une famille de graphes, les graphes D2C, qui sont de diamètre 2 et tels que la suppression d'une arête quelconque augmente le diamètre. Dans la section 1.2, nous présenterons la principale conjecture concernant cette famille, la conjecture de Murty-Simon, laquelle suppose qu'un graphe D2C d'ordre  $n$  a moins de  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  arêtes et que les seuls graphes atteignant cette borne sont les graphes bipartis complets équilibrés. Nous ferons également le tour des résultats de la littérature. Dans la section 1.3, nous étudierons la conjecture de Murty-Simon sur les graphes ayant peu de triangles. Enfin, dans la section 1.4, nous nous concentrerons sur la famille des graphes D2C avec une arête dominante, et proposerons un renforcement de la conjecture de Murty-Simon que nous démontrerons sur cette sous-famille.

### 1.1 Introduction

Étant donné un graphe  $G(V, E)$ , il est possible de définir des opérations élémentaires sur ce graphe, toutes ayant pour effet de le transformer en un graphe légèrement différent :

1. *L'ajout de sommet*, qui consiste à ajouter un élément à l'ensemble  $V$ . Selon les définitions, ce nouveau sommet peut être isolé, ou relié à certains sommets de  $G$  (par exemple, l'ajout d'un *sommet universel* consiste à ajouter à  $V$  un sommet relié à tous les sommets de  $V$ ).
2. *L'ajout d'arête*, qui consiste à ajouter à  $E$  une arête qui en était absente. Le graphe obtenu en ajoutant l'arête  $e$  à  $G$  est noté  $G + e$ .
3. *La suppression d'arête*, qui consiste à retirer de  $E$  une arête. Le graphe obtenu en supprimant l'arête  $e$  de  $G$  est noté  $G - e$ .
4. *La suppression de sommet*, qui consiste à retirer de  $V$  un sommet, et de  $E$  toutes les arêtes incidentes à ce sommet.

Ces quatre opérations sont illustrées figure 1.1.

De nombreuses autres opérations peuvent être définies à partir de ces quatre opérations élémentaires : la fusion, l'expansion ou l'inflation de sommets, la contraction d'arête (l'inflation de sommets est illustrée figure 1.2)... Chacune de ces opérations peut être utilisée pour transformer un graphe  $G$  en un graphe dérivé  $G'$ . En leur affectant un coût, ces opérations permettent de calculer une

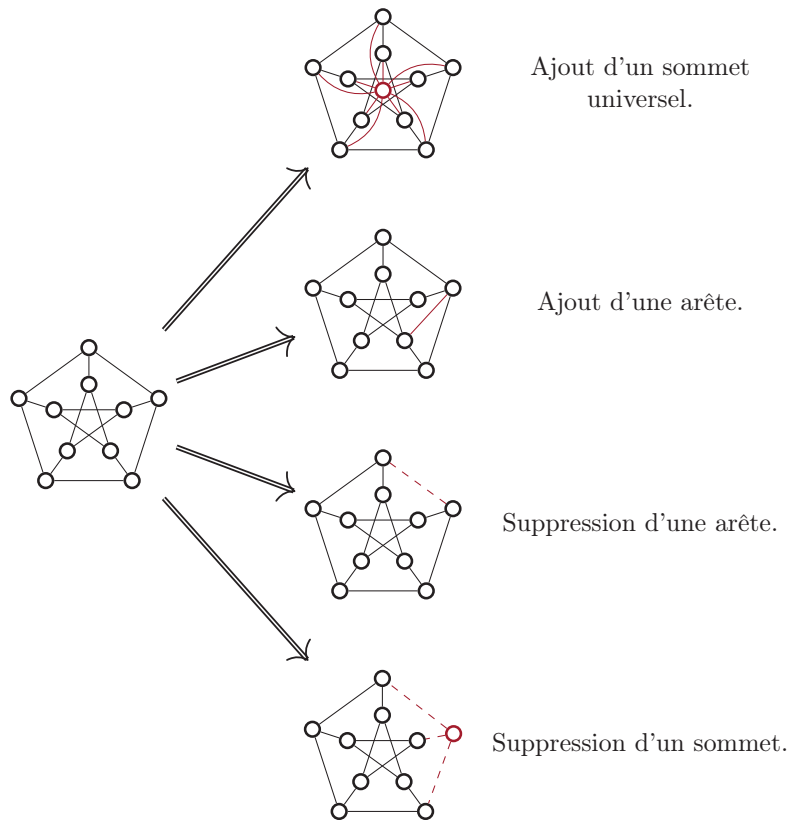


FIGURE 1.1 – Illustration des opérations élémentaires sur un graphe de Petersen : ajout d'un sommet (ici universel), ajout d'arête, suppression d'arête et suppression de sommet.

*distance d'édition* entre  $G$  et  $G'$ , ce qui a de nombreuses applications, notamment dans le domaine de la reconnaissance de motifs.

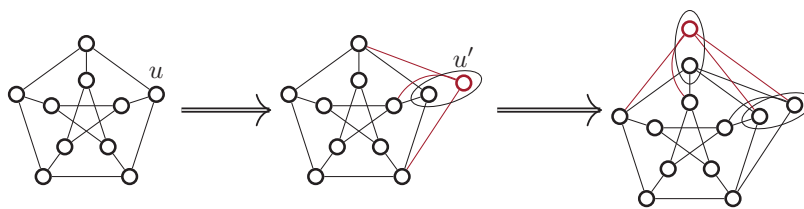


FIGURE 1.2 – Illustration de l'inflation de sommets : un nouveau sommet  $u'$  est créé avec le même voisinage qu'un sommet  $u \in V$ . Notons que  $u$  et  $u'$  sont des faux jumeaux.

Un champ d'application des opérations de graphe est également la *résilience d'un paramètre* (ou d'une propriété) : déterminer si et à quel point un paramètre de graphe peut être modifié par une opération élémentaire donnée, et établir les propriétés des graphes pour lesquels ces opérations modifient un paramètre. Un graphe tel qu'un paramètre voit sa valeur changer après l'application d'une opération élémentaire est appelé *critique* pour ce paramètre. Par exemple, le paramètre de coloration union-distinguante, étudié dans le chapitre 2, est très résilient à l'ajout d'arêtes sur tous les graphes : ajouter autant d'arêtes que possible à un graphe donné n'augmentera la valeur du

paramètre que de 1.

Un paramètre dont la résilience a d'importantes applications pratiques est celui de la *distance entre deux sommets*, et plus spécifiquement du *diamètre* d'un graphe, qui est défini comme la distance maximale entre deux sommets du graphe. En effet, les paramètres liés à la distance sont utilisés dans de multiples domaines : réseaux physiques et sociaux, matériel informatique, apprentissage, recherche d'informations... Par exemple, s'assurer que la distance moyenne entre deux points d'un réseau donné est résiliente à la suppression d'arêtes ou de sommets peut servir à garantir une certaine qualité de service, au contraire du graphe illustré figure 1.3 pour lequel le paramètre de distance a une faible résilience. L'étude des graphes critiques par rapport à des paramètres de distance peut alors servir à dégager des propriétés qu'un réseau pourra suivre pour trouver un compromis entre qualité de service et densité.

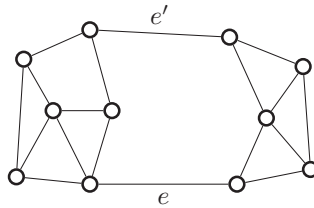


FIGURE 1.3 – Dans ce graphe, les paramètres de distance ont une faible résilience à la suppression d'arêtes : supprimer  $e$  ou  $e'$  augmentera drastiquement les distances entre de nombreuses paires de sommets.

Dans ce chapitre, nous étudions les graphes critiques pour le paramètre du diamètre, plus spécifiquement pour une valeur de diamètre égale à 2.

## 1.2 La conjecture de Murty-Simon

### 1.2.1 Définitions et propriétés

La distance entre deux sommets est définie de la façon suivante :

**Définition 1.1.** Soient  $G(V, E)$  un graphe connexe, et  $u$  et  $v$  deux sommets de  $V$ . La *distance* de  $u$  à  $v$ , notée  $\text{dist}(u, v)$  est définie comme le nombre d'arêtes d'un plus court chemin de  $u$  à  $v$ .

Un paramètre global découlant naturellement de la notion de distance est le diamètre :

**Définition 1.2.** Soit  $G(V, E)$  un graphe connexe. Le *diamètre* de  $G$ , noté  $\text{diam}(G)$ , est défini comme la plus grande distance entre deux sommets de  $G$  :

$$\text{diam}(G) = \max\{\text{dist}(u, v) \mid (u, v) \in V^2\}.$$

La figure 1.4 représente un graphe de diamètre 3 et sa table de distances.

De la même façon, on peut souhaiter s'assurer qu'un réseau ait un certain diamètre en utilisant le moins de câbles possible. Ceci amène à la définition d'un graphe *arête-critique* :

**Définition 1.3.** Soit  $d$  un entier strictement positif. Un graphe  $G(V, E)$  est *arête-critique de diamètre*  $d$ , noté  $DdC$ , s'il respecte les propriétés suivantes :

1.  $\text{diam}(G) = d$  ;
2. Pour toute arête  $e \in E$ ,  $\text{diam}(G - e) > d$ .

En d'autres termes, un graphe est arête-critique de diamètre  $d$  si retirer n'importe laquelle de ses arêtes augmente son diamètre. Par exemple, un graphe biparti complet  $K_{a,b}$  (où  $a$  ou  $b$  est au moins 2) est clairement  $D2C$  : celui-ci a clairement diamètre 2 car deux sommets d'une même partie sont à distance 2 alors que deux sommets de parties différentes sont à distance 1, et retirer l'arête  $xy$

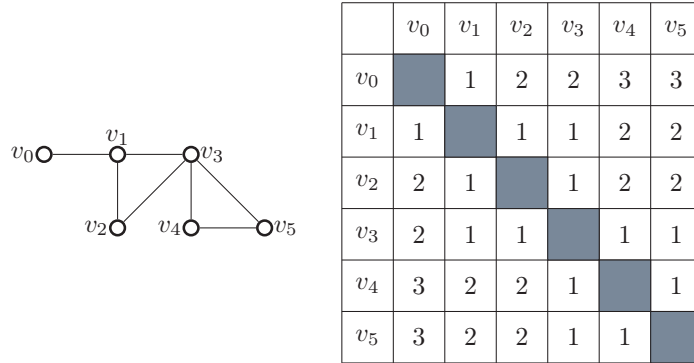


FIGURE 1.4 – Illustration de la distance dans un graphe : à gauche le graphe, et à droite la table des distances. Par exemple,  $dist(v_0, v_5) = 3$  car il y a un chemin de longueur 3 reliant ces deux sommets :  $v_0v_1v_3v_5$ . On remarque que ce graphe a diamètre 3 : aucune paire de sommets n'est à distance supérieure à 3.

place  $x$  et  $y$  à distance 3, donc le diamètre du graphe obtenu en retirant une arête de  $K_{a,b}$  est au moins 3. Le concept des graphes DdC a été très étudié dans la littérature, à la fois pour des raisons appliquées et par leur intérêt mathématique. Gliviak [66] a notamment prouvé qu'il était impossible de les caractériser par extension finie<sup>1</sup> ou par sous-graphes interdits.

Plesník [124] s'est concentré sur les graphes D2C (posant  $d = 2$ ). Outre les graphes bipartis complets, de nombreux graphes connus sont D2C, comme le graphe de Petersen, les graphes de Moore, le graphe de Wagner, le graphe de Grötzsch ou le graphe de Clebsch (certains sont illustrés figure 1.5). Plesník a observé que les graphes D2C connus avaient tous un nombre d'arêtes inférieur à celui des graphes bipartis complets. Cette observation a plus tard donné lieu à l'énoncé de la conjecture de Murty-Simon, qui sera explorée dans la section 1.2.2. Plus tard, Hanson et Wang ont montré que la conjecture de Murty-Simon pouvait être formulée suivant un problème de domination dans le complémentaire du graphe. Cela a engendré de nombreux travaux dans cette direction, qui seront présentés dans la section 1.2.3. Avec Florent Foucaud et Adriana Hansberg, nous avons travaillé sur des types de graphes D2C spécifiques : des graphes avec peu de triangles, étudiés dans la section 1.3 (dans laquelle nous reformulons un résultat de Balbuena, Hansberg, Haynes et Henning [9] et en améliorons un autre), et des graphes avec une arête dominante, étudiés dans la section 1.4 (dans laquelle nous énonçons un renforcement de la conjecture de Murty-Simon et le démontrons pour une classe de graphes D2C).

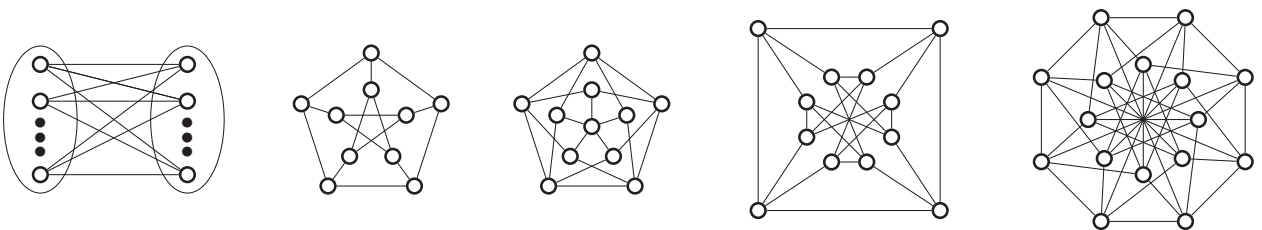


FIGURE 1.5 – Cinq exemples de graphes D2C : un graphe biparti complet, le graphe de Petersen, le graphe de Grötzsch, le graphe de Chvátal et le graphe de Clebsch.

1. Un graphe  $R$  est une  $Q$ -extension d'un graphe  $G$  pour un certain graphe  $Q$  si  $V(G) \cup V(Q) = V(R)$ ,  $G$  et  $Q$  sont disjoints et sont des sous-graphes induits de  $R$ . Un graphe  $G$  peut être construit depuis un ensemble  $\mathfrak{G}$  par extensions  $\Omega$  si  $G \in \mathfrak{G}$  ou s'il existe une séquence  $H_0, \dots, H_n$  avec  $H_0 \in \mathfrak{G}$ ,  $G = H_n$  et  $H_{i+1}$  est une  $Q$ -extension de  $H_i$  pour un certain  $Q \in \Omega$ . L'extension est finie si  $\mathfrak{G}$  et  $\Omega$  sont finis.

## 1.2.2 La conjecture de Murty-Simon : énoncé et historique

Plesník [124] a observé que tous les graphes D2C connus avaient moins de  $n^2/4$  arêtes, et que ceux atteignant cette borne étaient les graphes bipartis complets équilibrés. Murty [24] et Simon ont indépendamment formulé cette observation en conjecture (selon Erdős, cette conjecture aurait également été formulée par Ore dans les années 1960) :

**Conjecture 1.4** (Conjecture de Murty-Simon, cf. [30]). *Soit  $G$  un graphe D2C d'ordre  $n$  avec  $m$  arêtes. On a  $m \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ , avec égalité si et seulement si  $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ .*

Le théorème de Mantel [114] indique qu'un graphe sans triangles a au plus  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  arêtes et que le seul graphe atteignant cette borne est un graphe biparti complet équilibré. La conjecture de Murty-Simon est donc valide pour les graphes D2C sans triangles.

La conjecture de Murty-Simon a été étudiée sous de nombreux angles, et plusieurs résultats partiels ont été démontrés. Ainsi, Plesník [124] a montré que  $m < \frac{3n(n-1)}{8} = 0.375(n^2 - n)$ . Cacceta et Häggkvist [30] ont utilisé des propriétés sur le nombre de triples<sup>2</sup> avec une, deux ou trois arêtes dans un graphe D2C pour montrer  $m < (\frac{1+\sqrt{5}}{12})n^2 < 0.27n^2$ . Ils ont aussi énoncé une conjecture sur le nombre maximal d'arêtes dans un graphe DdC pour  $d \geq 3$  et sur la famille atteignant cette borne : deux graphes bipartis complets reliés par des chemins de longueur  $d - 2$ . Cette conjecture a cependant été infirmée par Krishnamoorthy et Nandakumar [106], qui ont construit une famille de contre-exemples en modifiant légèrement la méthode de construction.

En utilisant une méthode similaire à celle de Cacceta et Häggkvist combinée à des calculs sur les degrés des sommets et à un graphe dérivé, Fan [51] a prouvé la borne de la conjecture pour les graphes D2C d'ordre  $n \leq 24$  et  $n = 26$ , et montré que pour les autres valeurs de  $n$  on a  $m < 0.2532n^2$ .

Plus tard, Füredi [61] a démontré la conjecture pour les graphes D2C d'ordre  $n$  plus grand qu'une tour de puissances de 2 de taille  $10^{14}$ . Il est à noter que, d'après lui, sa preuve est la première utilisation du Lemme de régularité de Szemerédi donnant lieu à un résultat exact plutôt qu'asymptotique. Sa preuve consiste à utiliser des arguments structurels pour montrer qu'un graphe D2C d'ordre suffisamment grand ayant plus que  $(\frac{1}{4} - o(1))n^2$  arêtes est presque biparti complet, puis que s'il a plus que  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  alors il est biparti complet.

Dans sa conclusion, Füredi énonce un théorème plus fort que la conjecture de Murty-Simon, en l'occurrence qu'à partir d'un ordre suffisamment grand, si un graphe D2C a au moins  $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$  arêtes, alors il est soit biparti complet équilibré soit obtenu en subdivisant une arête d'un graphe biparti complet équilibré. Ce résultat a été démontré comme faux (dans la section 1.3.1 nous verrons que d'autres graphes ont ce nombre d'arêtes), mais la plupart des graphes D2C observés semblent suivre cette propriété. Cette affirmation incite donc à tenter d'énoncer des renforcements de la conjecture de Murty-Simon, ce qui sera effectué dans la section 1.4.

## 1.2.3 Domination totale et conjecture de Murty-Simon

En 2003, Hanson et Wang [77] ont publié un article qui ouvrit une nouvelle perspective dans la façon d'aborder la conjecture de Murty-Simon en montrant un lien entre graphes D2C et un problème de domination totale.

Dans un graphe  $G(V, E)$ , un *ensemble dominant*  $S \subseteq V$  est un ensemble de sommets tel que tout sommet du graphe est soit dans  $S$ , soit voisin d'un élément de  $S$ . La taille du plus petit ensemble dominant d'un graphe  $G$  est dénotée  $\gamma(G)$ .

Si deux sommets adjacents d'un graphe forment un ensemble dominant, on les appelle une *arête dominante*.

En 1980, Cockayne, Dawes et Hedetniemi [36] ont introduit le concept de *domination totale*, défini de la façon suivante :

---

2. Un triple est un ensemble de trois sommets.

**Définition 1.5** ([36]). Soit  $G(V, E)$  un graphe. Un ensemble de sommets  $S \subseteq V$  est un ensemble *dominant total* si et seulement si, pour tout sommet  $x \in V$ , il existe un sommet  $y \in S$  tel que  $xy \in E$ .

La taille du plus petit ensemble dominant total de  $G$  est dénotée  $\gamma_t(G)$ .

La différence avec un ensemble dominant est que les membres de l'ensemble dominant total doivent également être dominés par un autre sommet, comme illustré figure 1.6. Cela implique trivialement que  $\gamma_t(G) \geq \gamma(G)$  (puisque un ensemble dominant total est également un ensemble dominant). Les auteurs ont introduit ce concept pour illustrer une façon de modéliser le problème des reines, ou expliquer comment former un comité à partir d'un groupe de personnes (chaque membre du comité doit en connaître un autre afin d'accroître la coopération, et chaque non-membre doit connaître un membre pour permettre la communication).

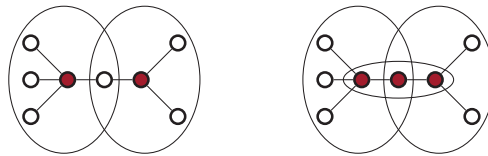


FIGURE 1.6 – Différence entre domination et domination totale. À gauche, les deux sommets colorés forment un ensemble dominant car l'union de leurs voisinages couvre l'ensemble du graphe. En revanche, ils ne forment pas un ensemble dominant total car ils ne sont pas voisins. Les trois sommets colorés à droite forment quant à eux un ensemble dominant total.

Dans [142], Haynes, Mynhardt et van der Merwe ont introduit les graphes *total-dominés arête-critiques* :

**Définition 1.6.** Soit  $k$  un entier strictement positif. Un graphe  $G(V, E)$  est  *$k$ -total-dominé arête-critique*, noté  $k$ TC, s'il respecte les propriétés suivantes :

- $\gamma_t(G) = k$  ;
- Pour toute non-arête  $\bar{e} \in \bar{E}$ ,  $\gamma_t(G + \bar{e}) < k$ .

Par exemple, l'union disjointe de  $k$  cliques est  $2k$ TC : un ensemble dominant total comporte deux sommets pour chaque clique (donc  $2k$  sommets au total), mais toute arête ajoutée étant entre deux cliques, elle permet d'utiliser les deux sommets ainsi reliés pour dominer deux cliques, et le graphe a alors un ensemble dominant total de taille  $2k - 2$ .

Les auteures de [142] ont également montré que l'ajout d'une arête quelconque peut faire diminuer le nombre de domination totale d'au plus 2. Les graphes pour lesquels  $\gamma_t(G) = k$  et  $\gamma_t(G + \bar{e}) = k - 2$  pour toute non-arête  $\bar{e}$  sont appelés  *$k$ -supercritiques*. Iels démontrent aussi que les graphes  $k$ -supercritiques sont exactement les unions d'au moins deux cliques non-triviales. Notons que l'union de deux cliques est le complémentaire du graphe biparti complet.

Dans leur papier [77], Hanson et Wang montrent le théorème suivant, qui établit que le complémentaire d'un graphe D2C est 3TC ou 4-supercritique, comme illustré figure 1.7.

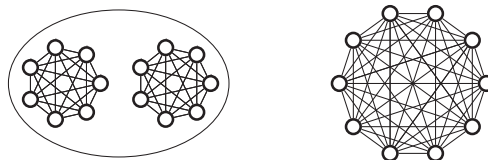


FIGURE 1.7 – Les complémentaires de certains graphes D2C présentés figure 1.5 : l'union de deux cliques (qui est le complémentaire d'un graphe biparti complet) et le complémentaire du graphe de Petersen.



**Théorème 1.7** (Hanson, Wang (2003) [77]). *Un graphe  $G$  est D2C si et seulement si son complémentaire  $\overline{G}$  est 3TC ou 4-supercritique.*

Nous rappelons la preuve de ce théorème :

*Preuve.* Ce théorème est un corollaire de l'énoncé suivant :

**Affirmation 1.7.A.** *Soit  $G(V, E)$  un graphe non-trivial. On a  $\text{diam}(G) > 2$  si et seulement si  $\overline{G}$  a une arête dominante.*

*Preuve de l'affirmation.* Si  $\overline{G}$  a une arête dominante  $uv$ , alors tout sommet  $x$  est voisin de  $u$  ou  $v$  dans  $\overline{G}$ . Cela implique que  $u$  et  $v$  n'ont aucun voisin commun dans  $G$ . Comme  $uv$  est une arête dans  $\overline{G}$ , ce n'est pas une arête dans  $G$ . On a donc  $\text{dist}(u, v) > 2$ , et donc  $\text{diam}(G) > 2$ .

Réciproquement, si  $\overline{G}$  n'a pas d'arête dominante, alors toute arête  $uv$  de  $\overline{G}$  a un sommet  $x$  qui n'est voisin ni de  $u$  ni de  $v$ . Cela implique que toute paire de sommets non-adjacents  $\{u, v\}$  dans  $G$  a un voisin commun, en l'occurrence  $x$ , et donc que  $\text{diam}(G) \leq 2$ .  $\square$

On peut maintenant prouver le théorème. Rappelons que  $G$  est D2C si et seulement si  $\text{diam}(G) = 2$  et  $\text{diam}(G - e) > 2$  pour toute arête  $e$ . Par l'affirmation précédente, on a donc que  $G$  est D2C si et seulement si  $\overline{G}$  n'a pas d'arête dominante et  $\overline{G} + \overline{e}$  a une arête dominante pour toute non-arête  $\overline{e}$  de  $\overline{G}$ , ce qui est exactement la définition d'un graphe 3TC ou 4-supercritique (en effet, une arête dominante est un ensemble dominant total de taille 2).  $\square$

Cette équivalence a conduit à une reformulation de la conjecture de Murty-Simon :

**Conjecture 1.8** (Conjecture de Murty-Simon reformulée). *Soit  $G$  un graphe 3TC d'ordre  $n$  avec  $m$  arêtes. Alors,  $m > \lceil \frac{n(n-2)}{4} \rceil$ .*

On remarque que l'inégalité est cette fois stricte et qu'il n'y a pas besoin de considérer le cas extrême, car les graphes 4-supercritiques sont exactement les unions de deux cliques non-triviales, c'est à dire les complémentaires des graphes bipartis complets, pour lesquels la conjecture est aisément vérifiée.

Cette reformulation a donné lieu à de nombreux travaux sur la conjecture de Murty-Simon l'abordant sous l'angle de la domination totale. Dans [142], les auteurices ont notamment démontré que les graphes 3TC avaient diamètre 2 ou 3. Hanson et Wang ont montré la première partie de la conjecture de Murty-Simon pour les graphes D2C dont le complémentaire a diamètre 3. Cette famille correspond aux graphes D2C ayant une arête dominante. La méthode qu'ils ont utilisée consiste à partitionner le graphe en deux parties, puis à montrer que chaque arête interne à une partie peut être associée à une non-arête entre les deux parties, ce qui prouve que le graphe a au plus autant d'arêtes qu'un graphe biparti complet. Cette méthode sera réutilisée et détaillée dans la section 1.4. Cependant, leur preuve ne montre que  $m \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ , et la deuxième partie de la conjecture de Murty-Simon était restée ouverte. Haynes, Henning, van der Merwe et Yao [86] ont démontré cette deuxième partie, mais la preuve (bien plus technique et utilisant un dénombrement explicite) contenait une erreur : elle ne couvrait que les graphes d'ordre pair. Wang [143] a corrigé la preuve pour inclure tous les graphes, résolvant ainsi la conjecture de Murty-Simon pour les graphes D2C ayant une arête dominante.

Les travaux suivants sur la conjecture reformulée se sont donc concentrés sur les graphes D2C dont le complémentaire a diamètre 2. Par exemple, dans [89], Haynes, Henning et Yao ont montré la validité de la conjecture reformulée pour les graphes 3TC ayant une connectivité de 1, 2 ou 3<sup>3</sup>. Dans [83] et en utilisant une méthode similaire, les mêmes auteurices et van der Merwe ont montré la validité de la conjecture pour les graphes D2C avec un plus grand degré élevé :  $\Delta(G) \geq 0.7n$ , ou  $n \geq 2000$  et  $\Delta(G) \geq 0.6787n$ . Leur méthode de preuve passe par le complémentaire (on a  $\Delta(G) = \delta(\overline{G})$ ). Ce résultat a été amélioré dans [98] où est montrée la validité de la conjecture pour les graphes D2C vérifiant  $\Delta(G) \geq 0.6756n$ .

3. Un graphe est  $k$ -connecté si supprimer n'importe quel ensemble  $k - 1$  sommets ou moins ne déconnecte pas le graphe ; le plus grand  $k$  pour lequel un graphe est  $k$ -connecté est appelé sa *connectivité*.

Plusieurs travaux ont également été effectués pour étudier les graphes 3TC sans certains sous-graphes induits. Dans [88], les auteurices ont montré la validité de la conjecture reformulée pour les graphes 3TC sans *griffe*  $K_{1,3}$  induite, ce qui équivaut à montrer la validité de la conjecture de Murty-Simon sans  $K_3 \cup K_1$  induit. Dans [82], c'est le cas des graphes 3TC sans  $C_4$  induit, c'est-à-dire des graphes D2C sans  $2K_2$  induit, pour lesquels une caractérisation est trouvée : il s'agit (pour les D2C) soit de graphes bipartis complets soit de graphes obtenus par inflations des sommets de  $C_5$  (illustrés figure 1.8). Dans [85], les auteurices ont aussi montré que ce précédent résultat était équivalent à étudier les graphes 3TC sans *maison* induite, c'est à dire les graphes D2C sans  $P_5$  induit. Dans [84], ce sont les graphes 3TC sans *diamant* ( $K_4$  moins une arête) induit, c'est à dire les graphes D2C sans  $K_2 \cup 2K_1$  induit, qui sont caractérisés : il s'agit (pour les D2C), des graphes bipartis complets, du  $C_5$  ou d'un graphe appelé  $H_5$  (ce dernier est illustré figure 1.8).

Tout ceci implique que si un graphe D2C ne vérifie pas la conjecture de Murty-Simon, alors il n'a ni arête dominante, ni  $K_3 \cup K_1$  induit, ni  $2K_2$  induit, ni  $K_2 \cup 2K_1$  induit, et a un degré maximal  $\Delta(G) \leq 0.6756n$ . Cependant, malgré toutes ces restrictions (et les autres restrictions de la section 1.2.2), il n'existe toujours pas de preuve générale de la conjecture.

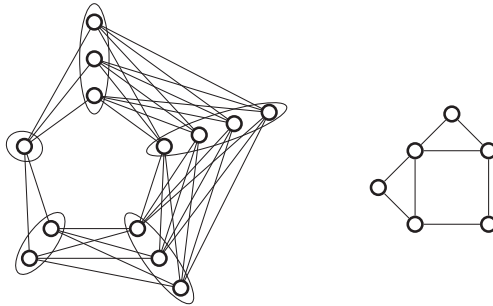


FIGURE 1.8 – Une inflation de  $C_5$  et le graphe  $H_5$  (ou *maison avec terrasse*).

Pour plus de renseignements, le lecteur peut se référer au *survey* rédigé par Haynes, Henning, van der Merwe et Yao [87] sur la conjecture de Murty-Simon et plus spécifiquement aux avancées liées à sa version reformulée. Un tableau récapitulatif des résultats sera présenté dans la section 1.5.

### 1.3 Conjecture de Murty-Simon et nombre de triangles

Dans cette section, nous étudions la conjecture de Murty-Simon sous l'angle du nombre de triangles dans le graphe. Dans la section 1.3.1, nous rappellerons les résultats connus sur les graphes D2C sans triangles. Notons que les graphes D2C sans triangles sont exactement les graphes de diamètre 2 sans triangles (en effet, s'il n'y a pas de triangle alors retirer une arête  $xy$  fera que  $x$  et  $y$  seront à une distance d'au moins 3). Dans la section 1.3.2, nous améliorerons un résultat de Balbuena, Hansberg, Haynes et Henning démontrant la validité de la conjecture de Murty-Simon dans les graphes D2C ayant peu d'arêtes dans des triangles.

#### 1.3.1 Graphes sans triangles

En 2015, Balbuena, Hansberg, Haynes et Henning ([9]) ont amélioré la borne de la conjecture de Murty-Simon dans les graphes D2C sans triangles (rappelons que la conjecture est valide sur cette famille, par application du théorème de Mantel [114]). Les auteurices ont montré que les graphes D2C non-bipartis sans triangles ont au plus  $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$  arêtes, en phase avec l'affirmation de Füredi [61]. Leur approche était basée sur la 3TC, laquelle implique de travailler sur le complémentaire du graphe.

Dans cette section, nous allons réinterpréter le résultat en travaillant directement sur les graphes D2C, ce qui donne une démonstration plus simple et directe.

Les graphes bipartis complets sont des graphes D2C sans triangles, mais leur nombre d'arêtes est connu, aussi allons-nous les exclure de notre étude.

Nous nous intéressons en particulier à une famille spécifique de graphes D2C sans triangles, la famille  $\mathcal{F}_n$ , qui sont des inflations du graphe  $C_5$ . Soient  $n_0, \dots, n_5$  des entiers strictement positifs, on note  $C_5(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4)$  le graphe obtenu en remplaçant chaque sommet  $x_i$  d'un  $C_5$  par un ensemble indépendant  $X_i$  de taille  $n_i$ . Par exemple, la figure 1.8 illustre le graphe  $C_5(4, 3, 1, 2, 3)$ . Chaque sommet de  $X_i$  est relié à tous les sommets de  $X_{i-1}$  et de  $X_{i+1}$  (l'addition étant modulo 5). On définit la famille  $\mathcal{F}_n$  de la façon suivante :

$$\mathcal{F}_n = \left\{ C_5(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n_0 = n_1 = 1, n_3 = \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor \text{ ou } n_3 = \left\lceil \frac{n-3}{2} \right\rceil, n = 2 + n_2 + n_3 + n_4 \right\}$$

Ainsi le graphe  $C_5(4, 3, 1, 2, 3)$  n'appartient pas à cette famille, même en renommant ses sommets. Notons que si  $G \in \mathcal{F}_n$ , alors  $G$  a exactement  $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$  arêtes, ce qui est la borne améliorée. Il s'agit donc d'une famille extrémale pour cette amélioration, venant contredire l'affirmation de Füredi (pour qui le seul graphe atteignant cette borne était soit biparti complet, soit obtenu en subdivisant une arête d'un graphe biparti complet). Dans cette section, nous allons redémontrer le théorème suivant :

**Théorème 1.9** (Balbuena, Hansberg, Haynes, Henning (2015) [9]). *Soit  $G$  un graphe D2C non-biparti d'ordre  $n > 5$  sans triangles. On a  $m \leq \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$ , avec égalité si et seulement si  $G \in \mathcal{F}_n$ .*

Nous allons commencer par montrer un lemme qui nous donne une propriété générale sur le lien entre nombre d'arêtes et somme des degrés des sommets d'un graphe :

**Lemme 1.10.** *Soit  $G(V, E)$  un graphe. Alors,  $\sum_{uv \in E} (d(u) + d(v)) \geq \frac{4m^2}{n}$ .*

*Preuve.* Dans la somme  $\sum_{uv \in E} (d(u) + d(v))$ , pour chaque sommet  $u$ , le degré de  $u$  est compté  $d(u)$  fois. Cela implique que  $\sum_{uv \in E} (d(u) + d(v)) = \sum_{u \in V} (d(u))^2$ .

On utilise l'inégalité de Jensen pour obtenir l'inégalité suivante :

$$\frac{\sum_{u \in V} (d(u))^2}{n} \geq \left( \frac{\sum_{u \in V} d(u)}{n} \right)^2$$

Or, effectuer la somme des degrés de chaque sommet d'un graphe revient à dénombrer deux fois ses arêtes, car chaque arête sera comptée via ses deux extrémités. En d'autres termes :  $\sum_{u \in V} d(u) = 2m$ .

En combinant ces inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{uv \in E} (d(u) + d(v)) &= \sum_{u \in V} (d(u))^2 \\ &\geq n \left( \frac{\sum_{u \in V} d(u)}{n} \right)^2 \\ &\geq n \left( \frac{2m}{n} \right)^2 \\ &\geq \frac{4m^2}{n} \end{aligned}$$

□

Notons que ce lemme nous permet d'obtenir la validité de la conjecture de Murty-Simon pour les graphes D2C ayant faible degré maximal :

**Corollaire 1.11.** *Si  $G$  est un graphe D2C vérifiant  $\Delta(G) < \frac{n}{2}$ , alors il vérifie  $m < \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ .*

*Preuve.* Si  $\Delta(G) < n/2$  alors pour toute arête  $uv \in E$  on a  $d(u) + d(v) \leq 2\Delta(G) < n$ . En combinant cette inégalité avec le lemme 1.10, on obtient :

$$mn > \sum_{uv \in E} (d(u) + d(v)) \geq \frac{4m^2}{n}$$

Ce qui implique :

$$m < \frac{n^2}{4}$$

□

Nous allons également utiliser un second lemme, qui démontre la validité de la borne pour une sous-famille spécifique :

**Lemme 1.12.** *Soit  $G$  un graphe D2C sans triangles, et tel que pour toute arête, les deux sommets de l'arête ont au moins deux non-voisins communs. On a  $m \leq \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$ .*

*Preuve.* Pour toute arête  $uv \in E$ , on a  $|N(u) \cup N(v)| \leq n-2$  car  $u$  et  $v$  ont au moins deux non-voisins communs. De plus, on a  $|N(u) \cup N(v)| = d(u) + d(v)$  car  $G$  n'a pas de triangle donc  $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ . Cela implique :

$$\sum_{uv \in E} (d(u) + d(v)) \leq m(n-2)$$

Par le lemme 1.10, on a :

$$\frac{4m^2}{n} \leq m(n-2) \Leftrightarrow m \leq \frac{n(n-2)}{4}$$

Or, la fonction partie entière supérieure est croissante, et  $n(n-2) \leq (n-1)^2$ . Cela implique que  $\lceil \frac{n(n-2)}{4} \rceil \leq \lceil \frac{(n-1)^2}{4} \rceil$ .

Donc, on a bien le résultat :  $m \leq \lceil \frac{(n-1)^2}{4} \rceil \leq \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$ . □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème :

*Preuve du théorème 1.9.* Soit  $G(V, E)$  un graphe D2C non-biparti sans triangles. Si, pour toute arête  $uv \in E$ ,  $u$  et  $v$  ont au moins deux non-voisins communs, alors on a le résultat par application du lemme 1.12. Donc, il reste à vérifier le cas où il existe une arête  $uv \in E$  telle que  $u$  et  $v$  ont au plus un non-voisin commun.

Soit  $uv$  une telle arête. Si  $u$  et  $v$  n'ont aucun non-voisin commun, alors  $uv$  est une arête dominante. Comme  $G$  est sans triangles,  $N(u)$  et  $N(v)$  sont des ensembles indépendants. Cela implique que  $G$  est un graphe biparti complet formé des deux partitions  $N(u)$  et  $N(v)$ , une contradiction. Donc,  $u$  et  $v$  ont exactement un non-voisin commun. Appelons ce non-voisin  $w$ .

Comme  $G$  est sans triangles,  $N(u)$  et  $N(v)$  sont disjoints. On a  $\text{diam}(G) = 2$ , donc  $w$  est voisin d'au moins un sommet dans chacun des ensembles  $N(u)$  et  $N(v)$ . Soit  $A$  (resp.  $B$ ) l'ensemble des sommets de  $N(u)$  (resp. de  $N(v)$ ) qui ne sont pas adjacents à  $w$ . Notons que  $v \in A$  et  $u \in B$ . Comme  $\text{diam}(G) = 2$ , chaque sommet de  $A$  (resp. de  $B$ ) est adjacent à tous les sommets de  $N(v)$  (resp. de  $N(u)$ ).

On constate alors que  $G$  est une inflation de  $C_5$  constituée des ensembles indépendants non-vides suivants :  $\{w\}$ ,  $N(u) \cap N(w)$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $N(v) \cap N(w)$ , ce qui est illustré figure 1.9. En nommant les tailles de ces ensembles dans l'ordre, nous avons donc  $G = C_5(1, n_1, n_2, n_3, n_4)$ . Il nous reste donc à montrer que cette famille vérifie le résultat.

Soit  $G = C_5(1, n_1, n_2, n_3, n_4)$  l'inflation de  $C_5$  maximisant le nombre d'arêtes pour  $n = 1 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4$  fixé. Notons que  $m(G) = n_1 + n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4$ . Montrons d'abord que  $n_1 = 1$  ou  $n_4 = 1$ . Supposons par contradiction que  $n_1, n_4 > 1$ . Le graphe  $G' = C_5(1, n_1 - 1, n_2, n_3 + 1, n_4)$

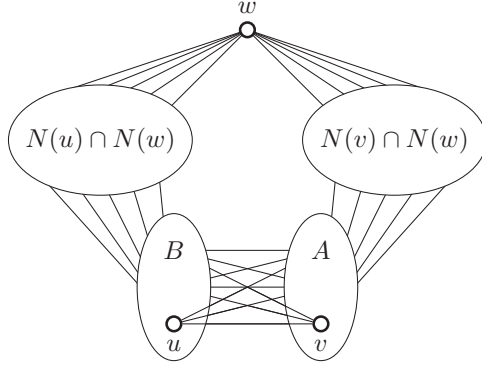


FIGURE 1.9 – La structure de  $G$  : une inflation de  $C_5$  (chacun des quatre ensembles  $A$ ,  $B$ ,  $N(u) \cap N(w)$  et  $N(v) \cap N(w)$  est indépendant).

vérifie  $m(G') = n_1 - 1 + (n_1 - 1)n_2 + n_2(n_3 + 1) + (n_3 + 1)n_4 + n_4$ . On a donc  $m(G') - m(G) = n_4 - 1 > 0$ , une contradiction.

Sans perte de généralité, on a donc  $G = C_5(1, 1, n_2, n_3, n_4)$ . Ce graphe vérifie :

$$m(G) = 1 + n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4 = 1 + (n_2 + n_4)(n_3 + 1)$$

Étant donné que  $n = 2 + n_2 + n_3 + n_4$ , on a donc :

$$m(G) = 1 + (n - n_3 - 2)(n_3 + 1) = -n_3^2 + n_3(n - 3) - 1$$

Cette expression est maximisée quand  $n_3 = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$  ou  $n_3 = \lceil \frac{n-3}{2} \rceil$  auquel cas on a  $m = \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$ , ce qui prouve le résultat.  $\square$

Cette amélioration de la borne est en phase avec ce qu'avait affirmé Füredi [61] en conclusion de sa preuve de la validité de la conjecture pour les graphes D2C d'ordre élevé. Comme on le voit avec le théorème 1.9, son énoncé était faux au moins sur la question de la famille atteignant la borne améliorée. Cependant, il est probable que la borne de la conjecture de Murty-Simon puisse être améliorée en excluant certaines familles de graphes (comme les graphes bipartis complets). Cette hypothèse est d'ailleurs montrée dans la section 1.4.4.

### 1.3.2 Graphes avec peu de triangles

Dans leur papier [9], les auteurices ont étudié la question des graphes D2C ayant peu de triangles. Plus spécifiquement, iels montrent que si  $G$  a moins de  $\lceil \frac{n^2}{4(n-5)} \rceil$  arêtes dans des triangles, alors il a au plus  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  arêtes. En affinant l'analyse, nous avons pu améliorer le résultat du papier. En effet, la validité de la conjecture de Murty-Simon a été démontrée pour les graphes D2C avec degré maximal  $\Delta(G) \geq 0.6756n$  [98], aussi pouvons-nous nous intéresser aux graphes D2C ayant un degré maximal plus faible. Nous démontrons le théorème suivant :

**Théorème 1.13** (D., Hansberg). *Soit  $G$  un graphe D2C d'ordre  $n > 40$  sans arête dominante vérifiant  $\Delta(G) < 0.6756n$ . Si  $G$  a moins de  $\frac{n^2}{\frac{5}{14}n-8} = (\frac{5}{14} + o(1))n$  arêtes dans des triangles, alors  $m \leq \frac{n^2}{4}$ .*

*Preuve.* Soient  $D$  l'ensemble des arêtes de  $G$  qui ne sont pas dans des triangles, et  $t = |E \setminus D|$  le nombre d'arêtes qui sont dans des triangles.

Rappelons que pour tout paramètre  $x$  de  $G$ ,  $\bar{x}$  est le même paramètre considéré dans le complémentaire  $\bar{G}$ .

Cette preuve est un mélange entre dénombrement et injection dans des inégalités. Nous effectuons une partition des arêtes du graphe. D'un côté, nous avons les arêtes qui n'appartiennent pas à un triangle, et de l'autre deux ensembles d'arêtes du complémentaire définis à partir de la non-existence d'arêtes dominantes. En les injectant dans des inégalités classiques sur les sommes des degrés des arêtes, nous sommes en mesure d'utiliser les conditions du théorème pour démontrer la borne de la conjecture de Murty-Simon.

Comme  $n \geq 41$ , on a  $0.6756n < \frac{7}{10}n - 1$  et donc  $\Delta(G) < \frac{7}{10}n - 1$ <sup>4</sup>. De plus,  $\delta(\overline{G}) = n - 1 - \Delta(G)$ , ce qui implique  $\delta(\overline{G}) > \frac{3}{10}n$ . De même, comme  $G$  est connexe,  $\delta(G) \geq 1$  et donc  $\Delta(\overline{G}) \leq n - 2$ .

$G$  n'a pas d'arête dominante, donc pour toute arête  $uv \in D$  on a  $|N(u) + N(v)| \leq n - 1$ . Donc :

$$\sum_{uv \in D} (d_G(u) + d_G(v)) \leq (n - 1)|D|$$

Soit  $uv \in E \setminus D$ . Puisque  $G$  a diamètre 2 et n'a pas d'arête dominante, il existe  $w \in V$  tel que, soit  $uw \notin E$  et  $N(u) \cap N(w) = \{v\}$ , ou bien  $vw \notin E$  and  $N(v) \cap N(w) = \{u\}$ <sup>5</sup>. On choisit de façon unique un tel  $w$  et on associe à l'arête  $uv$  une non-arête de la façon suivante : si  $uw \notin E$  on définit  $e_{uv} = uw$ , autrement on définit  $e_{uv} = vw$ . Soit  $Q = \{e_{uv} | uv \in E \setminus D\}$ . Notons que  $Q \subseteq \overline{E}$ .

Soit  $vw \in Q$  tel que  $vw = e_{uv}$ . Notons que si  $uw \in E \setminus D$ , alors on peut aussi avoir  $vw = e_{uw}$ . Cependant, les arêtes  $uv$  et  $uw$  sont les seules pouvant être associées à  $vw$  puisque  $N(v) \cap N(w) = \{u\}$ . On partitionne l'ensemble  $Q$  en  $Q_1$  et  $Q_2$ , où  $Q_1$  est l'ensemble des non-arêtes de  $Q$  qui sont associées à exactement une arête de  $G$ , et  $Q_2$  est l'ensemble des non-arêtes de  $Q$  qui sont associées à exactement deux arêtes de  $G$ . Alors,  $Q = Q_1 \cup Q_2$ ,  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$  et  $|Q_1| + 2|Q_2|$  est le nombre d'arêtes de  $E$  qui sont dans des triangles, c'est à dire  $E \setminus D$ . Donc, on a :

$$m = |D| + |Q_1| + 2|Q_2|$$

Soit  $uv \in E \setminus D$ , et sans perte de généralité soit  $e_{uv} = vw$ . Puisque  $u$  est le seul voisin commun de  $v$  et  $w$ ,  $v$  et  $w$  dominant  $V \setminus \{u\}$  dans  $\overline{G}$ , donc  $d_{\overline{G}}(v) + d_{\overline{G}}(w) \geq n - 1$ . Ce qui implique, pour  $i = 1, 2$  :

$$\sum_{uv \in Q_i} (d_G(u) + d_G(v)) \leq (n - 1)|Q_i|$$

Soit  $uv \in E \setminus D$  et sans perte de généralité soit  $e_{uv} = uw$ . On a  $(d_{\overline{G}}(u) + d_{\overline{G}}(v)) - (d_{\overline{G}}(u) + d_{\overline{G}}(w)) = d_{\overline{G}}(v) - d_{\overline{G}}(w) \leq \Delta(\overline{G}) - \delta(\overline{G}) < n - 2 - \frac{3}{10}n = \frac{7}{10}n - 2$ . Cette inégalité est vérifiée pour toute arête  $uv \in Q$  et son arête associée dans  $E \setminus D$ , ce qui implique :

$$\sum_{uv \in Q_1} (d_G(u) + d_G(v)) + 2 \sum_{uv \in Q_2} (d_G(u) + d_G(v)) - \sum_{uv \in E \setminus D} (d_G(u) + d_G(v)) > (\frac{7}{10}n - 2)|Q|$$

En combinant ces inégalités, on obtient :

---

4. La preuve se base sur cette inégalité, qui était donnée par [83] et était la meilleure borne à notre connaissance.  
5. Notons que  $u$  et  $v$  ne peuvent pas être jumeaux, car autrement supprimer l'arête  $uv$  n'augmenterait pas le diamètre de  $G$ , qui ne serait pas D2C.

$$\begin{aligned}
(n-1)m &= (n-1)|D| + (n-1)|Q_1| + 2(n-1)|Q_2| \\
&\geq \sum_{uv \in D} (d_G(u) + d_G(v)) + \sum_{uv \in Q_1} (d_G(u) + d_G(v)) + 2 \sum_{uv \in Q_2} (d_G(u) + d_G(v)) \\
&\geq \sum_{uv \in E} (d_G(u) + d_G(v)) - \sum_{uv \in E \setminus D} (d_G(u) + d_G(v)) + \sum_{uv \in Q_1} (d_G(u) + d_G(v)) \\
&\quad + 2 \sum_{uv \in Q_2} (d_G(u) + d_G(v)) \\
&> \sum_{uv \in E} (d_G(u) + d_G(v)) + \left(\frac{7}{10}n - 2\right) |E \setminus D| \\
&> \frac{4m^2}{n} + \left(\frac{7}{10}n - 2\right) t
\end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue par le lemme 1.10.  
Cette inégalité équivaut à :

$$m^2 - \frac{n(n-1)}{4}m - \frac{n}{4}\left(\frac{7}{10}n - 2\right)t < 0$$

qui est vérifiée si :

$$\begin{aligned}
m &\leq \frac{n(n-1)}{8} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^2(n-1)^2}{16} + n\left(\frac{7}{10}n - 2\right)t} \\
&\leq \frac{n(n-1)}{8} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^2(n-1)^2 + 16n\left(\frac{7}{10}n - 2\right)t}{16}} \\
&\leq \frac{n(n-1) + \sqrt{n^2(n-1)^2 + 16n\left(\frac{7}{10}n - 2\right)t}}{8}
\end{aligned}$$

Puisque  $t \leq \frac{n^2}{\frac{14}{5}n-8} = \frac{n^2}{\frac{2}{5}(7n-20)}$ , on a :

$$\begin{aligned}
n^2(n-1)^2 + 16n\left(\frac{7}{10}n - 2\right)t &\leq n^2(n-1)^2 + 16n\left(\frac{7}{10}n - 2\right)\frac{n^2}{\frac{2}{5}(7n-20)} \\
&\leq \frac{n^2(n-1)^2(7n-20) + 40n^3\left(\frac{7}{10}n - 2\right)}{7n-20} \\
&\leq \frac{n^2(n-1)^2(7n-20) + 4n^3(7n-20)}{7n-20} \\
&\leq n^2(n-1)^2 + 4n^3 \\
&\leq n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$m \leq \frac{n(n-1) + \sqrt{n^2(n+1)^2}}{8} \leq \frac{n(n-1) + n(n+1)}{8} \leq \frac{n^2}{4}$$

□

## 1.4 Graphes D2C avec une arête dominante

Nous avons vu dans la section 1.3.1 que la borne de la conjecture de Murty-Simon pouvait être améliorée pour des familles de graphes D2C. Dans cette section, nous nous intéressons à cette question d'amélioration de la borne sur une famille spécifique : les graphes D2C avec une arête dominante (dont les complémentaires sont les graphes 3TC de diamètre 3). Cette famille avait été étudiée par Hanson et Wang [77], qui avaient montré la validité de la borne de la conjecture de Murty-Simon. Plus tard, la seconde partie de la preuve avait été démontrée par une série de papiers [86, 143].

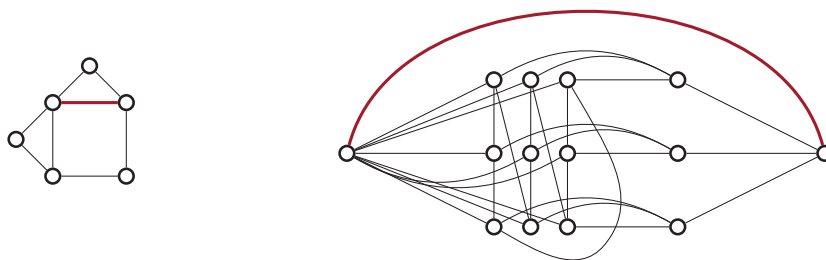


FIGURE 1.10 – Des exemples de graphes D2C avec une arête dominante (l'arête dominante est en rouge et gras). À gauche, on reconnaît  $H_5$ .

Hanson et Wang avaient utilisé la méthode suivante : étant donné un graphe D2C avec une arête dominante, le partitionner en deux ensembles et assigner à chaque arête entre deux sommets d'un même ensemble une non-arête entre les deux ensembles. Ceci prouve que le graphe a au plus autant d'arêtes qu'un graphe biparti complet. Nous allons développer cette méthode en affinant la partition dans la section 1.4.1. Plus tard, pour démontrer que les graphes atteignant la borne étaient les graphes bipartis équilibrés, les auteurs de [86, 143] ont utilisé une méthode de partitionnement sur les complémentaires, arrivant à une contradiction et arrivant à la preuve de la conjecture de Murty-Simon pour cette famille de graphes. À titre indicatif, la preuve finale occupe huit pages. Dans la section 1.4.3, nous redémontrons ce résultat de façon plus rapide et plus simple. Enfin, dans la section 1.4.4, nous énonçons deux versions renforcées de la conjecture de Murty-Simon en phase avec le théorème 1.9, puis nous affinons encore notre étude pour démontrer une meilleure borne pour les graphes D2C non-bipartis avec une arête dominante.

### 1.4.1 Structure des graphes D2C avec une arête dominante

Nous commençons par décrire la structure des graphes D2C avec une arête dominante. Nous utilisons une structure plus forte que celle de Hanson et Wang, afin d'extraire plus de propriétés sur les graphes étudiés.

Nous allons beaucoup utiliser la notion d'*arête critique* :

**Définition 1.14.** Soit  $G(V, E)$  un graphe. Étant donné une arête  $e \in E$  et deux sommets  $x, y \in V$ , on dit que  $e$  est *critique pour la paire*  $\{x, y\}$  si et seulement si  $e$  se trouve sur le seul chemin de longueur 1 ou 2 reliant  $x$  et  $y$ .

Par définition, toutes les arêtes d'un graphe D2C sont critiques. De plus, comme  $\text{diam}(G) = 2$ , si une arête  $xy$  est critique pour une paire de sommets  $\{w, z\}$ , alors on a sans perte de généralité  $w = x$  ou  $z = y$  ou les deux.

Soit  $G(V, E)$  un graphe D2C avec une arête dominante  $uv$ . Les sommets de  $V \setminus \{u, v\}$  peuvent être partitionnés en quatre ensembles :



1.  $P_{uv} = \{x \mid uv \text{ est critique pour la paire } \{x, u\} \text{ ou pour la paire } \{x, v\}\}$  ;
2.  $S_{uv} = N(u) \cap N(v)$  ;
3.  $S_u = \{x \mid x \in N(u) \setminus (P_{uv} \cup S_{uv})\}$  ;
4.  $S_v = \{x \mid x \in N(v) \setminus (P_{uv} \cup S_{uv})\}$ .

Ces ensembles sont illustrés figure 1.11. Ils ont diverses propriétés, lesquelles nous permettront de dénombrer les arêtes de  $G$ . Par exemple, les sommets de  $P_{uv}$  sont soit tous voisins de  $u$ , soit tous voisins de  $v$ .

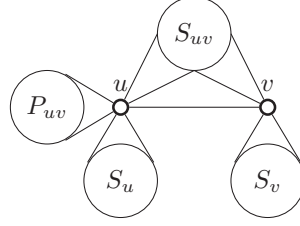


FIGURE 1.11 – La structure des graphes D2C avec une arête dominante (seules les arêtes incidentes à  $u$  et  $v$  sont représentées). Les sommets de  $P_{uv}$  sont considérés comme étant dans le voisinage de  $u$  par application du lemme 1.15.

**Lemme 1.15.** *Soit  $x \in P_{uv}$ . Si  $x \in N(u)$  alors  $P_{uv} \cap N(v) = \emptyset$ .*

*Preuve.* Soit  $x \in P_{uv} \cap N(u)$ . Supposons par contradiction qu'il existe un sommet  $y \in P_{uv} \cap N(v)$ . Comme  $uv$  est critique pour les paires  $\{x, v\}$  et  $\{u, y\}$ ,  $x$  et  $y$  ne sont pas voisins et donc  $\text{dist}(x, y) = 2$ . Il existe donc un sommet  $z$  voisin de  $x$  et de  $y$ .

Or,  $uv$  est une arête dominante. Donc  $z \in N(u) \cup N(v)$ . Sans perte de généralité, supposons que  $z \in N(u)$ . Alors, il y a deux chemins de longueur 2 entre  $u$  et  $y$  : un passant par  $v$  et un passant par  $z$ . Donc, l'arête  $uv$  n'est pas critique pour la paire  $\{u, y\}$ , une contradiction.  $\square$

Par la suite, pour simplifier l'écriture et sans perte de généralité, nous considérerons que tous les sommets de  $P_{uv}$  sont dans le voisinage de  $u$ .

Le lemme suivant montre que  $P_{uv}$  n'est relié à aucun voisin de  $v$  autre que  $u$  :

**Lemme 1.16.** *Soit  $x \in P_{uv}$ . Il n'y a aucune arête entre  $x$  et un sommet de  $N(v) \setminus \{u\}$ .*

*Preuve.* Soit  $x \in P_{uv}$ . Supposons par contradiction qu'il existe un sommet  $y \in N(v) \setminus \{u\}$  tel que  $xy \in E$ . Comme  $uv$  est critique pour la paire  $\{x, v\}$ ,  $y$  est le seul voisin commun entre  $x$  et  $v$ , et donc nécessairement  $y = u$ , une contradiction.  $\square$

Le lemme suivant montre que  $u$  et  $v$  ne peuvent avoir de sommets communs que si  $P_{uv}$  n'est pas vide :

**Lemme 1.17.** *Si  $P_{uv} = \emptyset$ , alors  $S_{uv} = \emptyset$ .*

*Preuve.* Si  $P_{uv} = \emptyset$ , alors l'arête  $uv$  ne peut être critique que pour la paire  $\{u, v\}$ , ce qui implique que  $u$  et  $v$  n'ont aucun voisin commun, et donc  $S_{uv} = \emptyset$ .  $\square$

Le lemme suivant est particulièrement éclairant sur la structure des graphes D2C avec une arête dominante :

**Lemme 1.18.** *Si  $S_{uv} = \emptyset$ , alors chaque sommet de  $S_u$  (resp. de  $S_v$ ) a au moins un voisin dans  $S_v$  (resp. dans  $S_u$ ).*

*Preuve.* Supposons par contradiction qu'un sommet  $x \in S_u$  n'a pas de voisin dans  $S_v$ . Alors, comme  $S_{uv} = \emptyset$ , on a  $N(x) \cap N(v) = \{u\}$ . Comme  $x \notin N(v)$ , l'arête  $uv$  est donc critique pour la paire  $\{x, v\}$ , et donc  $x \in P_{uv}$ , une contradiction.  $\square$

Notons que cela implique que si  $S_{uv}$  et un des deux ensembles  $S_u$  ou  $S_v$  sont vides, alors l'autre l'est également.

En restreignant un peu plus la structure, on obtient le lemme suivant :

**Lemme 1.19.** *Si  $S_{uv} = P_{uv} = \emptyset$ , alors chaque sommet de  $S_u$  (resp. de  $S_v$ ) ayant au moins un voisin dans  $S_u$  (resp.  $S_v$ ) a au moins un non-voisin dans  $S_v$  (resp. dans  $S_u$ ).*

*Preuve.* Supposons par contradiction qu'un sommet  $x \in S_u$  (sans perte de généralité) est voisin de tous les sommets de  $S_v$ . Alors, l'arête  $ux$  n'est pas critique : elle n'est pas critique pour  $\{u, x\}$  puisque  $x$  a un voisin dans  $S_u$ , ni pour  $\{x, y\}$  avec  $y \in N(u)$  puisque les sommets de  $S_u$  ont un voisin dans  $S_v$  par le lemme 1.18 et que  $P_{uv} = \emptyset$ , ni pour  $\{u, y\}$  pour  $y \in N(x)$  puisque tout voisin de  $x$  est soit dans  $S_u$  (et donc voisin de  $u$ ) soit dans  $S_v$  (et donc voisin de  $v$ ). Par la définition d'une arête critique, il n'y a aucun autre cas à considérer, ce qui prouve le lemme.  $\square$

Maintenant que nous avons ces propriétés, nous allons partitionner  $V(G)$  en deux parties  $X$  et  $Y$ , et montrer que toute arête interne à  $X$  ou  $Y$  peut être assignée de façon unique à une non-arête entre les deux partitions. Ceci montrera que  $G$  a au plus autant d'arêtes qu'un graphe biparti complet.

Nous définissons la partition suivante :

1.  $X = \{v\} \cup S_u \cup P_{uv} \cup S_{uv}$  ;
2.  $Y = \{u\} \cup S_v$ .

Nous montrons ensuite que toute arête interne à une des deux parties est critique pour une paire de sommets appartenant chacun à une partie :

**Lemme 1.20.** *Pour toute arête  $yz \in E(Y)$  (resp.  $E(X)$ ), il existe un sommet  $x \in X$  (resp.  $Y$ ) tel que  $yz$  est critique pour la paire  $\{x, y\}$  ou pour la paire  $\{x, z\}$ .*

*Preuve.* Supposons que  $yz \in E(Y)$ , donc que  $y$  et  $z$  sont des voisins de  $v$ . L'arête  $yz$  ne peut donc pas être critique pour la paire  $\{y, z\}$ . Il existe donc un sommet  $x$  telle que  $yz$  est critique pour la paire  $\{x, y\}$  (auquel cas  $x \in N(z)$ ) ou pour la paire  $\{x, z\}$  (auquel cas  $x \in N(y)$ ). Sans perte de généralité, supposons qu'elle est critique pour la paire  $\{x, y\}$  avec  $x \in N(z)$ .

Or, si  $x \in Y$ , alors  $x$  est voisin de  $v$ . Donc, il y a deux chemins de longueur 2 entre  $x$  et  $y$  : un passant par  $z$  et un passant par  $v$ . C'est une contradiction, donc  $x \in X$ .

La preuve est exactement identique lorsque  $yz \in E(X)$ .  $\square$

Nous allons utiliser ce lemme afin de définir une assignation des arêtes de  $E(X)$  et de  $E(Y)$  à des non-arêtes entre  $X$  et  $Y$ . Nous définissons la fonction d'assignation  $f$  de la façon suivante :

**Définition 1.21.** Soit  $yz$  une arête dans  $E(Y)$  (resp.  $E(X)$ ), et soit  $x$  un sommet de  $X$  (resp.  $Y$ ) tel que, sans perte de généralité,  $yz$  est critique pour la paire  $\{x, y\}$  (le lemme 1.20 nous assure que  $x$  existe).

On définit alors  $f(yz) = \overline{xy}$ . Cette construction est illustrée figure 1.12.

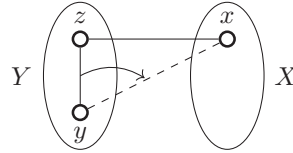


FIGURE 1.12 – Illustration de la construction de la fonction  $f$ . On a  $N(x) \cap N(y) = \{z\}$ , et l'arête  $yz$  est assignée à la non-arête  $\overline{xy}$ .

Notons que  $f$  est bien définie : comme  $yz$  est critique pour la paire  $\{x, y\}$ , cela signifie que  $xy \notin E$ . De plus,  $f$  est injective :

**Lemme 1.22.** *La fonction  $f$  est injective.*

*Preuve.* Supposons par contradiction que  $f$  n'est pas injective. Sans perte de généralité, soit  $\overline{xy}$  la non-arête entre  $X$  et  $Y$  telle que deux arêtes  $e, e' \in E(X) \cup E(Y)$  vérifient  $f(e) = f(e') = \overline{xy}$ . Par définition de  $f$ ,  $e$  et  $e'$  sont toutes deux critiques pour la paire  $\{x, y\}$ . Cela implique que  $e$  et  $e'$  forment le seul chemin de longueur 2 entre  $x$  et  $y$ , et donc qu'une des deux arêtes est entre  $X$  et  $Y$ , une contradiction.  $\square$

Notons que  $f$  n'est pas nécessairement surjective :

**Définition 1.23.** Soit  $\overline{xy}$  une non-arête entre  $X$  et  $Y$ . Si  $\overline{xy}$  n'a pas d'antécédent par la fonction  $f$ , on dit que  $\overline{xy}$  est une *non-arête  $f$ -libre*.

On appelle  $\text{free}(f)$  le nombre de non-arêtes  $f$ -libres entre  $X$  et  $Y$ .

Ceci nous permet de déterminer le nombre d'arêtes dans  $G$  :

**Lemme 1.24.**  $G$  a  $\frac{n^2 - \||X| - |Y|\|^2}{4} - \text{free}(f)$  arêtes.

*Preuve.* Sans perte de généralité, supposons que  $|X| \leq |Y|$ . Soit  $\Delta = |Y| - |X|$ . Comme, par injectivité de  $f$ ,  $G$  a autant d'arêtes qu'un graphe biparti complet avec partitions  $X$  et  $Y$  moins le nombre de non-arêtes  $f$ -libres, on a  $m = |X||Y| - \text{free}(f) = |X|(n - |X|) - \text{free}(f)$ .

Or, on a  $|X| + \Delta = |Y| = n - |X|$ , donc  $|X| = \frac{n - \Delta}{2}$ , ce qui implique :

$$\begin{aligned} m &= |X|(n - |X|) - \text{free}(f) \\ &= \frac{n - \Delta}{2} \left( n - \frac{n - \Delta}{2} \right) - \text{free}(f) \\ &= \frac{(n - \Delta)(n + \Delta)}{4} - \text{free}(f) \\ &= \frac{n^2 - \||X| - |Y|\|^2}{4} - \text{free}(f) \end{aligned}$$

$\square$

Le lemme 1.24 implique que  $G$  a au plus  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  arêtes. De plus, si  $G$  est biparti, alors  $G$  doit être biparti complet, et on a égalité si et seulement si  $\||X| - |Y|\| \leq 1$ , donc si  $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ .

Par la suite, on supposera donc que  $G$  n'est pas biparti. Dans la section 1.4.2, nous démontrerons des résultats préliminaires dans le cas où  $P_{uv}$  est vide. Cela nous permettra de donner, dans la section 1.4.3, une preuve plus rapide de la validité de la conjecture de Murty-Simon. Enfin, dans la section 1.4.4, nous verrons comment améliorer la borne de la conjecture.

## 1.4.2 La $f$ -orientation et ses premières propriétés

Dans cette section, nous supposons que  $P_{uv}$  est vide (donc, par le lemme 1.17,  $S_{uv}$  est également vide). Nous allons définir une orientation des arêtes induites par  $S_u$  et  $S_v$  à partir de la fonction  $f$ , appelée  *$f$ -orientation*. Nous allons utiliser cette orientation pour améliorer la borne de la conjecture de Murty-Simon, et pensons que les différents résultats peuvent être réutilisés.

La  $f$ -orientation est définie de la façon suivante : soit  $xy$  une arête dans  $S_u$  ou  $S_v$  telle que  $f(xy) = \overline{yz}$ , nous orientons l'arc de  $x$  à  $y$  et le notons  $\overrightarrow{xy}$ . La figure 1.13 illustre la  $f$ -orientation. Comme la fonction  $f$  est injective (par le lemme 1.22), chaque arête dans  $S_u$  et  $S_v$  sera orientée d'une unique façon. Dans la suite de cette section, tous les arcs seront considérés comme faisant partie de cette  $f$ -orientation. Pour un sommet  $x \in S_u \cup S_v$ , nous dénotons par  $N^+(x)$ ,  $N^+[x]$ ,  $N^-(x)$  et  $N^-[x]$  le voisinage sortant, voisinage sortant fermé, voisinage entrant, voisinage entrant fermé de  $x$ , selon les définitions classiques ( $y$  est un voisin sortant de  $x$  si l'arc  $\overrightarrow{xy}$  existe, et un voisin entrant de  $x$  si l'arc  $\overrightarrow{yx}$  existe). Les notations  $N(x)$  et  $N[x]$  continuent en revanche de désigner le voisinage et voisinage fermé du sommet dans le graphe  $G$ . De plus, étant donné deux sommets distincts  $x$  et  $y$ ,  $x$  est un *successeur* (resp. *prédécesseur*) de  $y$  si et seulement s'il existe un chemin orienté de  $y$  à  $x$  (resp. de  $x$  à  $y$ ).

Nous démontrons un premier lemme important, illustré figure 1.14 :

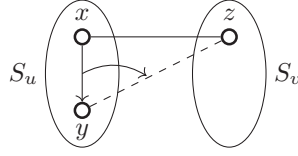


FIGURE 1.13 – La construction de la  $f$ -orientation se base sur la définition de la fonction  $f$  : pour toute arête  $xy$  telle que  $f(xy) = \overline{yz}$ , on oriente l'arc en  $\overrightarrow{xy}$ . En d'autres termes, l'arc est orienté vers l'extrémité de la non-arête à laquelle l'arête sous-jacente est assignée par la fonction  $f$ .

**Lemme 1.25.** Soient  $x, y \in S_u$  (resp.  $S_v$ ) tels que  $\overrightarrow{xy}$  est un arc de la  $f$ -orientation. Si ni  $x$  ni  $y$  ne sont incidents à une non-arête  $f$ -libre, alors il existe  $t \in S_v$  (resp.  $S_u$ ) tel que  $N(x) \cap S_v = (N(y) \cap S_v) \cup \{t\}$  (resp.  $N(x) \cap S_u = (N(y) \cap S_u) \cup \{t\}$ ).

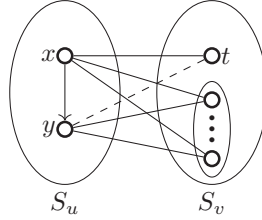


FIGURE 1.14 – Illustration du lemme 1.25 : pour tout arc  $\overrightarrow{xy}$  dans un des deux ensembles  $S_u$  ou  $S_v$  tel que ni  $x$  ni  $y$  n'est incident à une non-arête  $f$ -libre, le voisinage de  $y$  dans l'autre ensemble est strictement inclus dans celui de  $x$ , et contient exactement un sommet de moins.

*Preuve.* Soient  $x, y \in S_u$  (sans perte de généralité) tels que  $\overrightarrow{xy}$  est un arc de la  $f$ -orientation, et tels qu'aucune non-arête  $f$ -libre n'est incidente à  $x$  ou à  $y$ .

Tout d'abord, montrons que  $N(y) \cap S_v \subseteq N(x) \cap S_v$ . Supposons par contradiction qu'il existe un sommet  $z \in N(y) \cap S_v$  tel que  $z$  et  $x$  ne sont pas adjacents. Comme  $\overline{xz}$  n'est pas  $f$ -libre, elle doit avoir un antécédent par la fonction  $f$ . Cet antécédent ne peut être que  $xy$  car  $y \in N(x) \cap N(z)$ . Or, ceci est une contradiction avec l'orientation de l'arc  $\overrightarrow{xy}$ . Donc, un tel  $z$  n'existe pas, et on a bien  $N(y) \cap S_v \subseteq N(x) \cap S_v$ .

Montrons maintenant que  $N(x) \cap S_v = (N(y) \cap S_v) \cup \{t\}$  pour un certain sommet  $t \in S_v$ . Tout d'abord, il existe nécessairement un sommet  $t \in S_v$  voisin de  $x$  mais pas de  $y$ , car l'orientation de l'arc  $\overrightarrow{xy}$  implique que  $f(xy) = \overline{yt}$  pour un certain  $t \in S_v$ . Supposons maintenant qu'il existe un sommet  $t' \in S_v$ ,  $t' \neq t$ , voisin de  $x$  mais pas de  $y$ . L'arête  $\overline{yt'}$  n'est pas  $f$ -libre et doit donc avoir un antécédent par  $f$ . Cet antécédent ne peut être que  $xy$ , ce qui est une contradiction car  $xy$  est déjà assignée par  $f$ .  $\square$

Ce résultat sera particulièrement important dans la dernière partie de la preuve. Pour le moment, nous allons établir plusieurs lemmes qui restreignent la structure de  $S_u$  et  $S_v$ .

Le premier lemme concerne les cycles orientés. Rappelons qu'un cycle orienté est un ensemble ordonné de sommets  $x_0x_1 \dots x_{k-1}x_0$  tels que, pour tout  $i$ , l'arc  $\overrightarrow{x_ix_{i+1}}$  existe (l'addition est considérée modulo  $k$ ).

**Lemme 1.26.** Soit  $\vec{C}$  un cycle orienté dans  $S_u$  ou  $S_v$ . Il y a  $|\vec{C}|$  non-arêtes  $f$ -libres incidentes aux sommets de  $\vec{C}$ .

*Preuve.* Soit  $\vec{C} = x_0x_1 \dots x_{k-1}$  un cycle orienté dans  $S_u$  (sans perte de généralité). Dans cette preuve, l'addition sera considérée modulo  $k$ . Par définition de la  $f$ -orientation, pour tout  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ ,

il existe un sommet  $y_i \in S_v$  tel que  $f(x_i x_{i+1}) = \overline{x_{i+1} y_i}$ . Notons qu'il est possible que  $y_i = y_j$  pour deux entiers  $i, j$  distincts.

Soit  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , et soit  $x_j$  le premier prédécesseur de  $x_i$  dans  $\vec{C}$  qui ne soit pas adjacent à  $y_i$ . Notons en particulier que  $j \neq i+1$ , car autrement  $x_{i+1}$  et  $y_i$  auraient deux voisins communs ( $x_i$  et  $x_{i+2}$ ), une contradiction avec la définition de la  $f$ -orientation.

Nous allons maintenant montrer que  $\overline{x_j y_i}$  est  $f$ -libre. Supposons par contradiction que ce n'est pas le cas. Alors,  $\overline{x_j y_i}$  a un antécédent par la fonction  $f$ , et cet antécédent ne peut être que  $x_j x_{j+1}$  (car par définition de  $x_j$ ,  $x_{j+1} y_i \in E$ ). Or, par définition de la  $f$ -orientation, il existe  $y_j \in S_v$  tel que  $f(x_j x_{j+1}) = \overline{x_{j+1} y_j}$ , en particulier  $y_j \neq y_i$ . Cette contradiction implique que  $\overline{x_j y_i}$  est  $f$ -libre. Ceci est illustré figure 1.15.

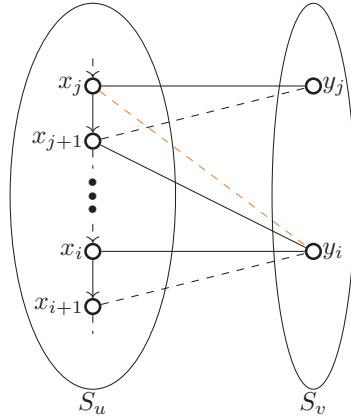


FIGURE 1.15 – La non-arête  $\overline{x_j y_i}$  (colorée en orange) est  $f$ -libre, car sa seule antécédente potentielle (l'arête  $x_j x_{j+1}$ ) est déjà assignée.

Cette méthode peut être appliquée pour chaque  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ . Montrons qu'elle ne donne pas deux fois la même non-arête. Supposons au contraire qu'il existe deux entiers distincts  $i_1, i_2$  (sans perte de généralité,  $i_1 < i_2$ ) tels que la méthode mène à la même non-arête  $f$ -libre  $x_j y$  (avec  $y = y_{i_1} = y_{i_2}$ ). Cela implique que  $x_j$  est le premier prédécesseur de  $x_{i_2}$  qui ne soit pas voisin de  $y$ . En particulier, comme  $i_1 < i_2$  et  $x_{i_1+1} y \notin E$ , cela signifie que  $j \in \{i_1+1, \dots, i_2-1\}$ . Or,  $x_j$  est également le premier prédécesseur de  $x_{i_1}$  qui ne soit pas voisin de  $y$ , ce qui là encore implique que  $j \in \{i_2+1, \dots, i_1-1\}$ . Or,  $\{i_2+1, \dots, i_1-1\} \cap \{i_1+1, \dots, i_2-1\} = \emptyset$ , donc  $j$  n'existe pas, une contradiction.

Cela signifie que chaque non-arête  $f$ -libre trouvée par cette méthode est unique, et qu'il y en a donc  $k$ , ce qui prouve l'affirmation.  $\square$

Qui plus est, les triangles, même transitifs, induisent des non-arêtes  $f$ -libres :

**Lemme 1.27.** Soient  $x, y, z \in S_u$  (resp.  $S_v$ ) tels que  $y, z \in N^+(x)$  et  $z \in N^+(y)$ . Alors, il existe une non-arête  $f$ -libre incidente à  $x$ .

*Preuve.* Sans perte de généralité, posons  $x, y, z \in S_u$ . Supposons par contradiction qu'aucune non-arête  $f$ -libre n'est incidente à  $x$ . Par la définition de la  $f$ -orientation, il existe un sommet  $w_1 \in S_v$  tel que  $f(xy) = \overline{y w_1}$ , et un sommet  $w_2 \in S_v$  tel que  $f(yz) = \overline{z w_2}$ . Cela implique que  $z$  et  $w_1$  ne sont pas adjacents, de même que  $x$  et  $w_2$ . La non-arête  $\overline{x w_2}$  est nécessairement  $f$ -libre : son seul antécédent possible par la fonction  $f$  est  $xy$ , qui est déjà assignée. Ceci est illustré figure 1.16.  $\square$

Les lemmes suivants vont concerner les puits et sources de la  $f$ -orientation. Rappelons qu'un sommet est un puits (resp. une source) si son voisinage n'est pas vide et s'il n'a aucun voisin sortant (resp. entrant).

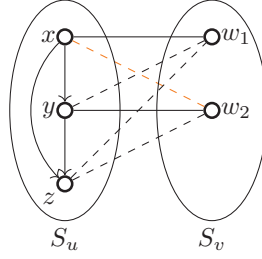


FIGURE 1.16 – Dans un triangle transitif, la source est nécessairement incident à une non-arête  $f$ -libre (colorée en orange).

**Lemme 1.28.** *Soit  $x \in S_u$  (resp.  $S_v$ ) un puits de la  $f$ -orientation. Alors, il existe au moins une non-arête  $f$ -libre incidente à  $N^-[x]$ .*

*Preuve.* Soit  $x \in S_u$  (sans perte de généralité) un puits de la  $f$ -orientation. On note les sommets de  $N^-(x)$  par  $a_1, \dots, a_k$ . Rappelons que tous ces sommets sont dans  $S_u$ . Supposons par contradiction qu'aucune non-arête  $f$ -libre n'est incidente à  $N^-[x]$ .

Par le lemme 1.18,  $x$  a un voisin dans  $S_v$ , que nous appellerons  $y$ . Pour un voisin entrant  $a_i$  de  $x$ , si  $a_i$  n'est pas adjacent à  $y$ , alors la non-arête  $\overline{a_i y}$  est  $f$ -libre, car son seul antécédent par la fonction  $f$  possible serait  $a_i x$ , ce qui irait à l'encontre de la définition de la  $f$ -orientation (l'arc est orienté en  $\overline{a_i x}$ , car  $x$  est un puits). Par la suite, nous considérerons donc que tous les  $a_i$  sont voisins de  $y$  (autrement, la contradiction prouverait le résultat).

L'arête  $xy$  est critique. Elle ne peut pas être critique pour la paire  $\{x, y\}$  car ces deux sommets ont les  $a_i$  comme voisins communs. Elle ne peut pas être critique pour une paire  $\{y, z\}$  avec  $z \in N(x)$  : si  $z \in S_v \cup \{u\}$  alors  $y$  et  $z$  ont  $v$  comme voisin commun ; et si  $z \in S_u$  alors  $z$  est un  $a_i$ . Donc, elle est nécessairement critique pour une paire  $\{x, t\}$  avec  $t \in N(y)$ . Comme  $x$  et  $t$  ont  $y$  comme seul voisin commun, on a  $t \in S_v$  et de plus  $t$  n'est adjacent à aucun des  $a_i$ . Or, parmi toutes les non-arêtes  $\overline{a_i t}$  et la non-arête  $\overline{x t}$ , toutes sauf une sont  $f$ -libres : leur seul antécédent par la fonction  $f$  possible est l'arête  $yt$ . Ceci est illustré figure 1.17. Comme il existe au moins un  $a_i$ , on obtient une contradiction qui prouve le résultat.  $\square$

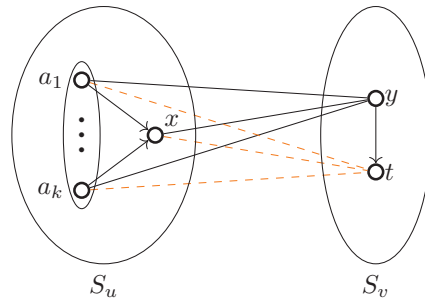


FIGURE 1.17 – Si  $x$  est un puits, alors son voisinage entrant fermé est incident à des non-arêtes  $f$ -libres : parmi toutes les non-arêtes colorées en orange, une seule peut être assignée par la fonction  $f$  (son antécédent étant l'arête  $yt$ ).

**Lemme 1.29.** *Soit  $x \in S_u$  (resp.  $S_v$ ) une source de la  $f$ -orientation. Alors, il existe au moins une non-arête  $f$ -libre incidente à  $N^+[x]$ .*

*Preuve.* Soit  $x \in S_u$  (sans perte de généralité) une source de la  $f$ -orientation. On note les sommets

de  $N^+(x)$  par  $b_1, \dots, b_k$ . Rappelons que tous ces sommets sont dans  $S_u$ . Supposons par contradiction qu'aucune non-arête  $f$ -libre n'est incidente à  $N^+[x]$ .

Par le lemme 1.19,  $x$  a un non-voisin  $y$  dans  $S_v$ . Par le lemme 1.25,  $y$  n'est voisin d'aucun  $b_i$  (car les voisins des  $b_i$  dans  $S_v$  sont aussi voisins de  $x$ ). La non-arête  $\overline{xy}$  doit avoir un antécédent par la fonction  $f$ . Cet antécédent est nécessairement un arc  $\overrightarrow{zy}$  avec  $z \in S_v$ , car les  $b_i$  sont les seuls voisins de  $x$  dans  $S_u$  et ils ne sont pas adjacents à  $y$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Si  $b_i z \in E$ , alors  $y$  et  $b_i$  ont  $z$  comme voisin commun, et comme aucune non-arête incidente à  $N^+[x]$  n'est  $f$ -libre on a  $f(zy) = \overline{b_i y}$ , une contradiction car cet arc est déjà assigné par  $f$ . Donc,  $\overline{b_i z}$  est une non-arête incidente à  $N^+[x]$ , et son antécédent par la fonction  $f$  ne peut être que  $xb_i$ .

Par ailleurs, le sommet  $b_i$  doit avoir un voisin  $w \in S_v$  par le lemme 1.18. Le sommet  $w$  est nécessairement voisin de  $x$  (par le lemme 1.25). L'arête  $xw$  doit être critique. Elle ne peut pas l'être pour la paire  $\{x, w\}$  car ils ont  $b_i$  comme voisin commun. Elle ne peut pas l'être pour une paire  $\{x, t\}$  pour  $t \in S_v$  car on aurait par définition des arêtes critiques  $b_i t \notin E$  et une des deux non-arêtes  $\overline{xt}, \overline{b_i t}$  serait  $f$ -libre, une contradiction. Il existe donc un voisin sortant de  $x$ ,  $b_j$ , tel que  $f(xb_j) = \overline{b_j w}$ . Or, par le lemme 1.25,  $N(b_j) \cap S_v = (N(x) \cap S_v) \setminus \{z\}$ , donc en particulier  $b_j w \in E$ . Cette contradiction prouve le résultat.  $\square$

Cet ensemble de résultats va nous permettre d'étudier plus en détail la structure interne des ensembles  $S_u$  et  $S_v$  dans les deux sections suivantes (rappelons en particulier que  $S_u$  ou  $S_v$  contient au moins une arête car  $G$  n'est pas biparti).

### 1.4.3 Preuve de la conjecture de Murty-Simon pour les graphes avec une arête dominante

Nous allons donner une nouvelle preuve de la validité de la conjecture de Murty-Simon pour les graphes avec une arête dominante. Comme mentionné précédemment, ce résultat a déjà été démontré, mais en trois phases [77, 86, 143]. De plus, la deuxième partie de la conjecture avait été démontrée en utilisant des méthodes de dénombrement pur sur des graphes 3TC. Notre preuve est plus concise et utilise les propriétés des graphes D2C avec une arête dominante démontrées dans la section précédente.

Nous allons commencer par démontrer un lemme technique. Celui-ci sera réutilisé dans la section 1.4.4. Nous utilisons le fait que chaque sommet de  $P_{uv}$  et  $v$  n'ont que  $u$  comme voisin commun, par le lemme 1.16.

**Lemme 1.30.** *Soit  $p$  un sommet de  $P_{uv}$ , et  $S_v(p)$  l'ensemble des sommets  $x \in S_v$  pour lesquels la non-arête  $\overline{px}$  n'est pas  $f$ -libre. Alors, pour chaque sommet  $x \in S_v(p)$ , il existe un sommet  $q(x) \in S_u$  tel que  $f(pq(x)) = \overline{px}$ . Soit  $S_u(p)$  l'ensemble des sommets  $y \in S_u$  tels que  $y = q(x)$  pour un certain  $x \in S_v(p)$ . On a les propriétés suivantes :*

- (a)  $|S_u(p)| = |S_v(p)|$  (i.e. la fonction  $q$  est injective) ;
- (b) Les seules arêtes entre  $S_u(p)$  et  $S_v(p)$  sont les arêtes de type  $xq(x)$  ;
- (c) Si une arête  $xx'$  ou  $q(x)q(x')$  existe à l'intérieur de  $S_u(p)$  ou de  $S_v(p)$ , alors au moins une des deux non-arêtes  $\overline{xq(x')}$  ou  $\overline{x'q(x)}$  est  $f$ -libre. Si les deux arêtes  $xx'$  ou  $q(x)q(x')$  existent, alors les deux non-arêtes  $\overline{xq(x')}$  et  $\overline{x'q(x)}$  sont  $f$ -libres.

*Preuve.* Soit  $x \in S_v(p)$ . Par le lemme 1.16,  $p$  et  $v$  n'ont que  $u$  comme voisin commun. Comme  $x \in S_v$ , on a  $x \notin N(u)$ , et donc  $p$  et  $x$  ont un unique voisin commun  $y$  avec  $y \in S_u$  (si  $y$  n'est pas unique, alors  $\overline{px}$  est  $f$ -libre, une contradiction). On pose  $y = q(x)$ . Notons que si on avait  $q(x) = q(x')$  pour deux sommets  $x, x' \in S_v(p)$ , alors une des deux non-arêtes  $\overline{px}$  ou  $\overline{px'}$  serait  $f$ -libre, une contradiction. Ceci prouve l'injectivité de  $q$  et donc le point (a) du lemme.

De plus, si une arête  $xq(x')$  existait entre  $S_u(p)$  et  $S_v(p)$  pour deux sommets distincts  $x$  et  $x'$ , alors  $p$  et  $x$  auraient deux voisins communs,  $q(x)$  et  $q(x')$ , une contradiction. Ceci prouve le point (b) du lemme.

Enfin, supposons que  $xx' \in E$  pour deux sommets distincts  $x, x' \in S_v(p)$ . Alors, les deux non-arêtes  $\overline{xq(x')}$  et  $\overline{x'q(x)}$  ne peuvent être assignées par  $f$  qu'à l'arête  $xx'$  (ou aucune n'est assignée par  $f$ ), et donc au moins une des deux est  $f$ -libre. La preuve est la même pour  $q(x)q(x') \in E$ . Si les deux arêtes  $xx'$  et  $q(x)q(x')$  existent, alors les paires  $\{x, q(x')\}$  et  $\{x', q(x)\}$  ont chacune deux voisins communs, et donc les deux non-arêtes  $\overline{xq(x')}$  et  $\overline{x'q(x)}$  ne sont pas assignées par  $f$ , et sont donc  $f$ -libres. Cela prouve le point (c) du lemme.  $\square$

Ce lemme à l'énoncé technique signifie une chose simple : si on prend l'ensemble des sommets  $x \in S_v$  tels que les non-arêtes entre ces sommets et un sommet  $p \in P_{uv}$  ne sont pas  $f$ -libres, alors il n'y a qu'un seul chemin de longueur 2 entre  $p$  et  $x$ . Ce chemin passe par un sommet  $y \in S_u$ , car il n'y a pas d'arête entre  $p$  et  $N(v) \setminus \{u\}$  et  $x \notin N(u)$ . Il y a alors un couplage entre les  $x$  et leurs  $y$  associés, symbolisé par la fonction  $q$ . On en déduit ensuite que, si les ensembles  $S_u(p)$  et  $S_v(p)$  ne sont pas indépendants, on a plusieurs non-arêtes  $f$ -libres entre eux. Ceci est illustré figure 1.18.

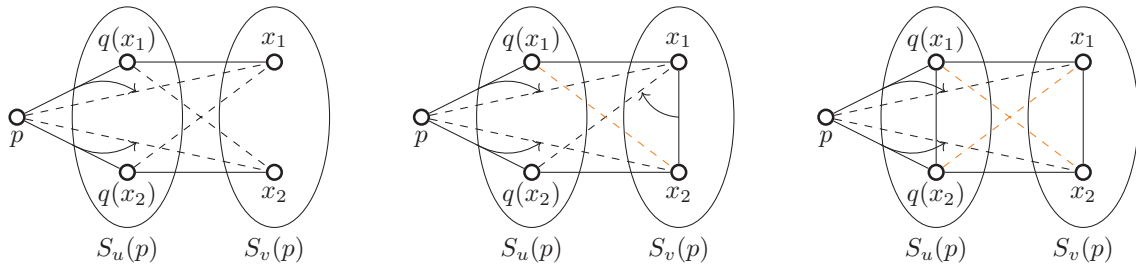


FIGURE 1.18 – Illustration de la construction induite par le lemme 1.30. On a  $f(pq(x_i)) = \overline{px_i}$ . Au milieu et à droite, on constate que chaque arête dans  $S_u(p)$  ou dans  $S_v(p)$  induit une non-arête  $f$ -libre entre les deux ensembles (une non-arête  $f$ -libre est colorée en orange).

Cela nous permet de redémontrer le théorème suivant :

**Théorème 1.31** (Hanson, Wang [77], Haynes, Henning, van der Merwe, Yeo [86], Wang [143]). *Si  $G$  est un graphe D2C non-biparti avec une arête dominante, alors  $m < \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ .*

*Nouvelle preuve du théorème 1.31 (D., Foucaud, Hansberg).* Soit  $G$  un graphe D2C non-biparti avec une arête dominante. Nous réutilisons toutes les notations vues dans la section 1.4.1 (les parties  $X$  et  $Y$ , la fonction  $f$ , ...). Supposons par contradiction que  $G$  a au moins  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  arêtes. Nous allons démontrer plusieurs propriétés sur  $G$  afin d'aboutir à une contradiction.

**Affirmation 1.31.A.** *Aucune non-arête n'est  $f$ -libre, et  $||X| - |Y|| \leq 1$ .*

*Preuve de l'affirmation.* Par le lemme 1.24,  $G$  a  $\frac{n^2 - ||X| - |Y||^2}{4} - \text{free}(f)$  arêtes. Nécessairement, on a  $\text{free}(f) = 0$ . De plus, si  $||X| - |Y|| \geq 2$ , alors  $G$  a au plus  $\frac{n^2 - 4}{4} = \frac{n^2}{4} - 1$  arêtes, une contradiction.  $\square$

**Affirmation 1.31.B.**  $S_{uv} = \emptyset$ .

*Preuve de l'affirmation.* Supposons par contradiction que  $S_{uv}$  n'est pas vide. Alors, par la contraposée du lemme 1.17,  $P_{uv}$  n'est pas vide. Soit  $p$  un sommet de  $P_{uv}$ .

Nous utilisons le lemme 1.30 pour redéfinir les ensembles  $S_v(p)$  et  $S_u(p)$ . De plus, comme  $\text{free}(f) = 0$  par l'affirmation 1.31.A, on a  $S_v(p) = S_v$  car autrement on aurait  $|S_v \setminus S_v(p)|$  non-arêtes  $f$ -libres et  $\text{free}(f) > 0$ . On a donc  $|S_u| \geq |S_u(p)| = |S_v(p)|$  par le point (a) du lemme 1.30. De plus,  $||X| - |Y|| \leq 1$ , donc :

$$||S_u| + |S_{uv}| + |P_{uv}| + 1 - |S_v| - 1| \leq 1$$

Comme  $|S_u| \geq |S_v|$ , on a donc  $|S_{uv}| + |P_{uv}| \leq 1$ . Ceci implique que  $S_{uv}$  ou  $P_{uv}$  est vide. Or, si  $P_{uv}$  est vide alors  $S_{uv}$  l'est aussi. Donc nécessairement  $S_{uv} = \emptyset$ .  $\square$



**Affirmation 1.31.C.**  $P_{uv} = \emptyset$ .

*Preuve de l'affirmation.* Supposons par contradiction que  $P_{uv}$  n'est pas vide. En réutilisant les arguments de la preuve de l'affirmation 1.31.B, on sait que  $|P_{uv}| = 1$ , et  $|S_u| = |S_v|$ . De plus, par le lemme 1.30, il y a un couplage parfait entre  $S_u$  et  $S_v$ , et  $S_u$  et  $S_v$  sont des ensembles indépendants car  $\text{free}(f) = 0$ .

Or,  $\text{diam}(G) = 2$ , donc pour tous sommets  $x, x' \in S_v$ , il existe un chemin de longueur 2 de  $x$  à  $x'$ . Mais comme  $S_u$  et  $S_v$  sont indépendants et que les seules arêtes entre eux sont celles du couplage, cela implique que  $S_u$  et  $S_v$  sont soit vides soit réduits à un sommet chacun.

Si  $S_u$  et  $S_v$  sont réduits à un sommet chacun, alors  $G$  est le graphe *maison*, qui n'est pas D2C, une contradiction. Si  $S_u$  et  $S_v$  sont vides, alors  $G$  est un chemin et donc biparti, une contradiction.

Donc,  $P_{uv}$  est nécessairement vide.  $\square$

Comme  $P_{uv} = S_{uv} = \emptyset$  et que  $G$  n'est pas biparti, il y a au moins une arête dans  $S_u$  ou dans  $S_v$  et aucun de ces deux ensembles n'est vide. Supposons sans perte de généralité qu'il existe une arête dans  $S_u$ . Nous utilisons la définition de la  $f$ -orientation donnée dans la section 1.4.2 et déduisons l'affirmation suivante :

**Affirmation 1.31.D.** Soit  $\overrightarrow{xy}$  un arc dans  $S_u$ . Pour tout sommet  $t \in N(y) \cap S_v$ , l'arête  $yt$  est critique pour une paire  $\{z, t\}$  où  $z \in N^+(y)$ .

*Preuve de l'affirmation.* L'arête  $yt$  ne peut pas être critique pour la paire  $\{y, t\}$  car, par le lemme 1.25 (que nous pouvons utiliser car, par l'affirmation 1.31.A,  $\text{free}(f) = 0$ ), nous avons  $N(y) \cap S_v \subset N(x) \cap S_v$  et donc  $y$  et  $t$  ont  $x$  comme voisin commun.

Supposons par contradiction que  $yt$  est critique pour une paire  $\{y, w\}$  avec  $w \in S_v$  (notons que  $w \in N^+(t)$ ). Nécessairement,  $xw \notin E$  car autrement  $y$  et  $w$  auraient deux voisins communs, une contradiction. La non-arête  $xw$  a un antécédent par la fonction  $f$ . Cet antécédent est nécessairement  $tw$  car  $t \in N(w) \cap N(x)$ . Or, cela implique qu'une des deux non-arêtes  $xw$ ,  $yw$  est  $f$ -libre, une contradiction.

L'arête  $yt$  est donc critique pour une paire  $\{z, t\}$ , et comme  $\text{free}(f) = 0$  nous avons nécessairement  $f(yz) = \overrightarrow{zt}$ , et donc  $z \in N^+(y)$  par définition de la  $f$ -orientation.  $\square$

Nous pouvons désormais conclure la preuve. Soit  $\overrightarrow{x_1, \dots, x_k}$  un chemin orienté maximal dans  $S_u$ . Par le lemme 1.18,  $x_k$  a un voisin  $t \in S_v$ . L'affirmation 1.31.D implique que  $x_k t$  est critique pour une paire  $\{y, t\}$  où  $y \in N^+(x_k)$ . Il est impossible que  $y = x_i$  pour  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  car autrement on aurait un cycle orienté, ce qui, par le lemme 1.26, impliquerait  $\text{free}(f) = k - i + 1$ , une contradiction. Donc,  $\overrightarrow{x_1, \dots, x_k, y}$  est un chemin orienté dans  $S_u$  strictement plus long que  $\overrightarrow{x_1, \dots, x_k}$ , une contradiction.

Cette contradiction achève la preuve de la validité de la conjecture de Murty-Simon dans le cas des graphes D2C avec une arête dominante.  $\square$

#### 1.4.4 Renforcement de la conjecture de Murty-Simon

Dans cette section, nous allons énoncer des versions renforcées de la conjecture de Murty-Simon. La première, motivée par l'affirmation de Füredi dans [61] et par le théorème 1.9 et ses auteures [9], est la suivante :

**Conjecture 1.32.** Soit  $G$  un graphe D2C d'ordre  $n > 5$  non-biparti. On a  $m \leq \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$ . Si de plus  $n \geq 10$ , alors on a égalité si et seulement si  $G \in \mathcal{F}_n$ .

Notons que le graphe  $H_5$  ne respecte pas cette borne renforcée, et que si  $n < 10$  nous trouvons des petits graphes D2C qui atteignent la borne mais ne sont pas des graphes de  $\mathcal{F}_n$ .

Cependant, ce résultat général semble difficile à prouver. Aussi énonçons-nous également une version plus faible, consistant à affirmer que la borne de la conjecture de Murty-Simon peut être améliorée :

**Conjecture 1.33.** *Pour tout entier strictement positif  $c$ , il existe un entier  $n_c$  tel que tout graphe D2C non-biparti d'ordre  $n \geq n_c$  avec  $m$  arêtes vérifie  $m < \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - c$ .*

Le résultat que nous démontrons est le suivant, qui est donc la preuve de la validité de la conjecture 1.33 pour les graphes D2C avec une arête dominante, avec  $c = 1$  et  $n_0 = 7$ .

**Théorème 1.34** (D., Foucaud, Hansberg). *Soit  $G$  est un graphe D2C non-biparti avec une arête dominante. Si  $G$  n'est pas  $H_5$ , alors  $m < \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - 1$ .*

Afin de démontrer ce théorème, nous montrons un résultat plus fort dans le cas où  $P_{uv}$  est vide :

**Théorème 1.35.** *Soit  $G$  est un graphe D2C non-biparti avec une arête dominante et tel que  $P_{uv} = \emptyset$ , et soit  $f$  l'injection associée. Soit  $c_u$  (resp.  $c_v$ ) le nombre de composantes connexes non-triviales de diamètre au moins 3 dans le graphe orienté avec la  $f$ -orientation induit par  $S_u$  (resp.  $S_v$ ). Alors,  $m \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - 2 \max(c_u, c_v)$ .*

*Preuve.* Soit  $G$  un graphe D2C non-biparti avec une arête dominante  $uv$ ,  $G \neq H_5$ . Sans perte de généralité, nous étudions  $C$ , une composante connexe non-triviale de diamètre au moins 3 dans  $S_u$ . Nous allons démontrer que deux non-arêtes  $f$ -libres sont incidentes à un sommet de  $C$ . Nous allons affiner les propriétés de la  $f$ -orientation vues dans la section 1.4.2.

Si  $C$  contient un cycle orienté, alors le lemme 1.26 nous permet de conclure. Nous pouvons donc supposer que  $C$  est acyclique, et donc qu'il contient au moins une source et un puits. Supposons par contradiction qu'il y a au plus une non-arête  $f$ -libre incidente à un sommet de  $C$ .

Soient  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  l'ensemble des sources et puits respectivement de  $C$  (rappelons qu'ils sont non-vides). Les lemmes 1.28 et 1.29 impliquent que tous les sommets de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sont à distance au plus 1 d'un sommet  $r \in C$  incident à l'unique non-arête  $f$ -libre incidente à un sommet de  $C$ . En particulier, si  $r \in \mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{T}$ ) alors  $\mathcal{S} = \{r\}$  (resp.  $\mathcal{T} = \{r\}$ ) ; et par le lemme 1.27 si  $r \notin (\mathcal{S} \cup \mathcal{T})$  il ne peut pas y avoir d'arc d'une source à un puits.

Nous pouvons déduire une structure plus contrainte encore :

**Affirmation 1.35.A.** *Soit  $r \in \mathcal{T}$ , soit  $r$  est l'unique voisin entrant de tout puits de  $C$ .*

*Preuve de l'affirmation.* Supposons par contradiction que  $r \notin \mathcal{T}$  et qu'il existe un puits  $t \in \mathcal{T}$  avec deux voisins entrants  $x$  et  $r$ . Notons que  $x$  n'est pas un voisin entrant de  $r$  (autrement, le lemme 1.27 impliquerait qu'il y aurait au moins deux non-arêtes  $f$ -libres incidentes à un sommet de  $C$ , une contradiction), en particulier  $x \notin \mathcal{S}$ . Notons qu'il existe un sommet  $y \in S_v$  voisin de  $x$  tel que  $f(xt) = \overline{yt}$ , et que  $t$  a un voisin dans  $S_v$  par le lemme 1.18, que nous appellerons  $p$ . Par ailleurs,  $p$  et  $y$  ne sont pas voisins, et  $xp \in E$  par le lemme 1.25.

Supposons d'abord que  $r \in N^-(x)$ . Les sommets  $r$  et  $y$  ne peuvent pas être adjacents (car le seul voisin commun de  $t$  et  $y$  est  $x$ ). Si  $\overline{ry}$  avait un antécédent par  $f$ , alors on aurait l'arc  $\overline{xr}$ , une contradiction. Donc  $\overline{ry}$  est la non-arête  $f$ -libre de  $G$ . La figure 1.19 illustre la construction obtenue. Maintenant, l'arête  $tp$  est critique. Elle n'est pas critique pour la paire  $\{t, p\}$  car  $x \in N(t) \cap N(p)$ . Si elle est critique pour une paire  $\{p, z\}$  avec  $z \in S_u$ , comme  $t$  est un puits, on a l'arc  $\overline{zt}$  et donc  $\overline{zp}$  est  $f$ -libre, une contradiction. Si elle est critique pour une paire  $\{t, z\}$  avec  $z \in S_v$ , alors  $x$  et  $z$  ne peuvent pas être adjacents, et une des deux non-arêtes  $\overline{tz}$  ou  $\overline{xz}$  est  $f$ -libre (leur seul antécédent par la fonction  $f$  possible serait  $pz$ ), une contradiction. Donc  $r \notin N(x)$ .

L'arête  $xp$  doit être critique. Elle n'est pas critique pour la paire  $\{x, p\}$  (car  $t \in N(x) \cap N(p)$ ). Si elle est critique pour une paire  $\{x, z\}$  avec  $z \in S_v$ , alors  $tz \notin E$  et une des deux non-arêtes  $\overline{xz}$ ,  $\overline{tz}$  est  $f$ -libre, une contradiction. Elle est donc nécessairement critique pour une paire  $\{w, p\}$  avec  $w \in N^+(x)$ . En particulier, on a nécessairement  $wy \in E$  (autrement la non-arête  $\overline{wy}$  serait  $f$ -libre, car son seul antécédent par la fonction  $f$  possible est  $xw$  qui est déjà assignée).

Maintenant, réexaminons l'arête  $tp$  qui doit être critique. Par un raisonnement analogue à celui tenu deux paragraphes plus haut, elle est nécessairement critique pour une paire  $\{p, z\}$  avec  $z \in S_u$ , et comme  $t$  est un puits, la non-arête  $\overline{zp}$  est  $f$ -libre (car sinon on aurait l'arc  $\overline{tz}$ , une contradiction), ce qui implique que  $z = r$  et que  $\overline{rp}$  est la non-arête  $f$ -libre incidente à un sommet de  $C$ . En

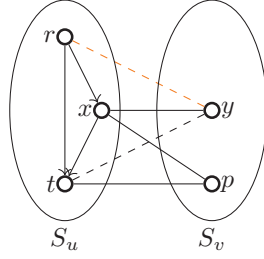


FIGURE 1.19 – La construction obtenue lorsque  $r \in N^-(x)$ . La non-arête  $\overline{ry}$ , colorée en orange, est  $f$ -libre. En étudiant les possibilités pour que l’arête  $tp$  soit critique, on aboutit à une contradiction.

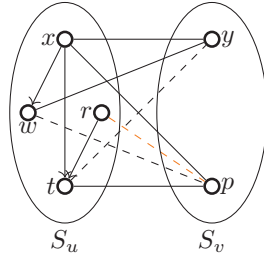


FIGURE 1.20 – La construction obtenue lorsque  $r \notin N^-(x)$ . La non-arête  $\overline{rp}$ , colorée en orange, est  $f$ -libre. En étudiant les possibilités pour que l’arête  $wy$  soit critique, on aboutit à une contradiction.

particulier, si  $|N(t) \cap S_v| \geq 2$ , on peut répéter cet argument et trouver d’autres non-arêtes  $f$ -libres, une contradiction, donc  $N(t) \cap S_v = \{p\}$ . La construction obtenue est illustrée figure 1.20.

Maintenant, l’arête  $wy$  doit être critique. Elle ne peut pas être critique pour la paire  $\{w, y\}$  (car  $x \in N(w) \cap N(y)$ ). Si elle est critique pour une paire  $\{w, z\}$  avec  $z \in S_v$ , alors  $xz \notin E$  et une des deux non-arêtes  $\overline{xz}$ ,  $\overline{wz}$  est  $f$ -libre, une contradiction. Elle est donc critique pour une paire  $\{y, z\}$  avec  $z \in S_u$ . Si  $z$  est un voisin entrant de  $w$ , alors  $\overline{zy}$  est  $f$ -libre et donc  $z = r$ , mais comme  $y \neq p$  on a au moins deux non-arêtes  $f$ -libres incidentes à un sommet de  $C$ , une contradiction. Donc  $z$  est un voisin sortant de  $w$ , et  $zp \notin E$  (autrement on aurait une contradiction avec le fait que  $f(xw) = \overline{wp}$ ). Le sommet  $z$  doit avoir un voisin dans  $S_v$  par le lemme 1.18, que nous appelons  $y'$ . Rappelons que  $t$  n’a que  $p$  comme voisin dans  $S_v$ , donc  $ty' \notin E$ . De plus, par le lemme 1.25,  $x$  a exactement un voisin de plus que  $t$  dans  $S_v$ , en l’occurrence  $y$ . Donc  $xy' \notin E$ , ce qui implique également  $wy' \notin E$  (encore une fois par le lemme 1.25). Or, nous avons l’arc  $\overline{wz}$ , donc la non-arête  $\overline{wy'}$  est  $f$ -libre, une contradiction.

Tout ceci prouve la non-existence de  $x$ , et donc  $r$  est le seul voisin entrant de  $t$ . □

Forts de cette connaissance supplémentaire, nous affirmons également que  $C$  ne contient qu’une seule source :

**Affirmation 1.35.B.**  $|\mathcal{S}| = 1$ .

*Preuve de l’affirmation.* Supposons par contradiction qu’il existe deux sources  $s_1, s_2$  (notons que, nécessairement,  $s_1s_2 \notin E$ ). Le lemme 1.29 nous informe que  $r$  est un voisin sortant de  $s_1$  et de  $s_2$  (car autrement au moins deux non-arêtes  $f$ -libres sont incidentes à un sommet de  $C$ , une contradiction). Par définition, il existe deux sommets  $y_1, y_2$  distincts tels que  $f(s_1r) = \overline{ry_1}$  et  $f(s_2r) = \overline{ry_2}$  et  $s_1y_2, s_2y_1 \notin E$ .

Les deux non-arêtes  $\overline{s_1y_2}$  et  $\overline{s_2y_1}$  doivent avoir un antécédent par la fonction  $f$  (car la seule non-arête  $f$ -libre est incidente à  $r$ ). Si  $y_1y_2 \in E$  alors une des deux est  $f$ -libre, une contradiction. Si, sans perte de généralité, il existe  $z \in S_u$  tel que  $f(zs_1) = \overline{s_1y_2}$  alors l’arête sera orientée en  $\overrightarrow{zs_1}$ , une contradiction car  $s_1$  est une source. S’il existe deux sommets distincts  $z_1, z_2 \in S_v$  tels

que  $f(y_1z_1) = \overline{s_2y_1}$  et  $f(y_2z_2) = \overline{s_1y_2}$ , alors  $z_1$  et  $z_2$  ne peuvent pas être voisins de  $r$ , et les deux non-arêtes  $\overline{rz_1}$  et  $\overline{rz_2}$  sont  $f$ -libres (car  $z_1$  est voisin de  $s_2$  et  $z_2$  est voisin de  $s_1$ ), une contradiction.

Donc, il existe un sommet  $z \in S_v$  tel que  $f(zy_1) = \overline{s_2y_1}$  et  $f(zy_2) = \overline{s_1y_2}$ . Par le même argument,  $z$  n'est pas voisin de  $r$  et la non-arête  $\overline{rz}$  est  $f$ -libre. La construction obtenue est illustrée figure 1.21.

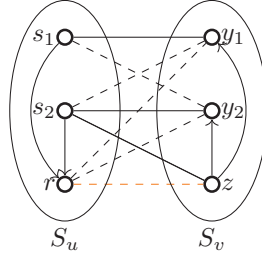


FIGURE 1.21 – Les sommets  $s_1$  et  $s_2$  sont des sources. La non-arête  $\overline{rz}$ , colorée en orange, est  $f$ -libre.

Par le lemme 1.18,  $r$  a un voisin dans  $S_v$ , que nous appelons  $y_3$ . Nécessairement,  $s_1y_3, s_2y_3 \in E$  (autrement ces non-arêtes seraient  $f$ -libres, une contradiction). L'arête  $ry_3$  doit être critique. Elle ne peut pas être critique pour la paire  $\{r, y_3\}$  car ces deux sommets ont  $s_1$  et  $s_2$  comme voisins communs. Si elle l'est pour une paire  $\{r, w\}$  avec  $w \in S_v$ , alors  $w$  n'est adjacent ni à  $s_1$  ni à  $s_2$  et deux des trois non-arêtes  $\overline{rw}$ ,  $\overline{s_1w}$  et  $\overline{s_2w}$  sont  $f$ -libres, une contradiction. Elle est donc critique pour une paire  $\{t, y_3\}$  avec  $t \in S_u$ . De plus, si  $t$  est un voisin entrant de  $r$  alors  $\overline{ty_3}$  est  $f$ -libre, une contradiction. Donc,  $t \in \mathcal{T}$ .

Le puits  $t$  n'est pas adjacent à  $y_1$  (resp.  $y_2$ ) car  $s_1$  (resp.  $s_2$ ) est le seul voisin commun de  $r$  et de  $y_1$  (resp.  $y_2$ ). Il n'est pas non plus adjacent à  $z$ , car autrement les deux non-arêtes  $\overline{ty_1}$  et  $\overline{ty_2}$  seraient  $f$ -libres (leurs seuls antécédents par la fonction  $f$  possibles seraient respectivement  $zy_1$  et  $zy_2$ , qui sont déjà assignés).

La non-arête  $\overline{ty_1}$  doit avoir un antécédent par la fonction  $f$ , qui ne peut pas être une arête de  $S_u$  (par l'affirmation 1.35.A, le seul voisin de  $t$  dans  $S_u$  est  $r$  qui n'est pas adjacent à  $y_1$ ). Donc, il existe  $y_4 \in S_v$  tel que  $f(y_1y_4) = \overline{ty_1}$ . Notons que  $y_4 \notin \{y_2, y_3, z\}$ . Cependant,  $r$  ne peut pas être adjacent à  $y_4$  car  $s_1$  est le seul voisin commun de  $y_1$  et  $r$ . Cela implique que la non-arête  $\overline{ry_4}$  est  $f$ -libre par l'orientation de l'arc  $\overrightarrow{rt}$ . Cette contradiction prouve le résultat car la seule non-arête  $f$ -libre incidente à un sommet de  $C$  est  $\overline{rz}$ . La figure 1.22 illustre cette construction.  $\square$

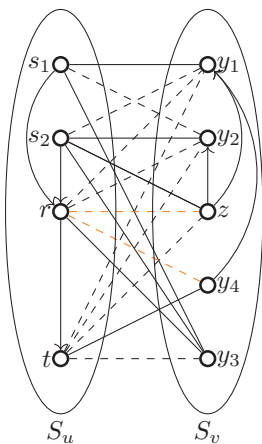


FIGURE 1.22 – S'il existe deux sources  $s_1$  et  $s_2$ , alors au moins deux non-arêtes sont  $f$ -libres. Ici, il s'agit de  $\overline{rz}$  et de  $\overline{ry_4}$ , qui sont colorées en orange.

Notons qu'il est également possible de démontrer que  $C$  n'a qu'un seul puits, mais nous n'utilisons pas ce fait, aussi n'allons-nous pas en écrire la preuve.

Nous pouvons maintenant finir la preuve. Par l'affirmation 1.35.B, il n'y a qu'une seule source  $s$  dans la composante  $C$ . De plus, l'affirmation 1.35.A implique que  $s \neq r$  : autrement,  $C$  serait restreint à  $s$  et aux puits et aurait donc diamètre 2, une contradiction. De plus,  $\text{diam}(C) \geq 3$  implique que  $s$  a au moins un voisin sortant  $x$  distinct de  $r$ .

Par le lemme 1.19,  $s$  a un non-voisin dans  $S_v$ , que nous appelons  $y_1$ . Notons que  $y_1$  n'est pas voisin de  $x$  par le lemme 1.25. La non-arête  $\overrightarrow{sy_1}$  n'étant pas  $f$ -libre, elle doit avoir un antécédent par la fonction  $f$ . Cet antécédent ne peut pas être une arête de  $S_u$  car  $s$  est une source, donc il existe  $y_2 \in S_v$  tel que  $f(y_1y_2) = \overrightarrow{sy_1}$  (en particulier, on a l'arc  $\overrightarrow{y_2y_1}$ ). Par ailleurs, les sommets  $x$  et  $y_2$  ne sont pas adjacents (autrement, la non-arête  $\overrightarrow{xy_1}$  serait  $f$ -libre, car son seul antécédent par la fonction  $f$  possible serait  $y_1y_2$ , qui est déjà assignée). Ceci implique, par le lemme 1.25, que  $N(s) \cap S_v = (N(x) \cap S_v) \cup \{y_2\}$ .

La non-arête  $\overrightarrow{xy_1}$  doit avoir un antécédent par la fonction  $f$ . Ce ne peut pas être une arête  $y_1z$  avec  $z \in S_v$ , car  $z$  serait également voisin de  $s$  et donc  $\overrightarrow{sy_1}$  serait  $f$ -libre, une contradiction. Cet antécédent est donc une arête  $zx$  avec  $z \in S_u$  un voisin entrant de  $x$ . Cette construction est illustrée figure 1.23. Notons que  $z$  est distinct de  $r$ , car autrement  $s, r$  et  $x$  induisent un triangle transitif et le lemme 1.27 implique qu'une non-arête  $f$ -libre est incidente à  $s$ , une contradiction.

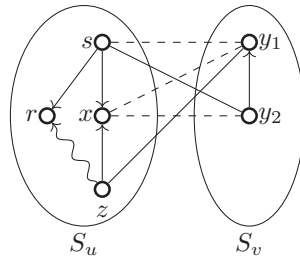


FIGURE 1.23 – La structure de  $C$  obéit à des règles strictes : il n'y a qu'une seule source  $s$ , et elle a un voisin sortant  $x$  distinct de  $r$ . L'arc ondulé de  $z$  à  $r$  représente un chemin orienté d'une longueur quelconque, car  $z$  est un prédécesseur de  $r$ .

Or, le lemme 1.25 impose que tout sommet  $w$  prédécesseur de  $r$  et successeur de  $s$  vérifie  $N(w) \cap S_v \subset N(s) \cap S_v$ . En particulier, aucun prédécesseur de  $r$  et successeur de  $s$  ne peut être voisin de  $y_1$ . Mais  $z$ , n'étant ni  $r$  ni un puits, est un tel sommet. Cette contradiction permet de conclure la preuve.  $\square$

Le fait que toute composante connexe non-triviale de diamètre au moins 3 est incidente à au moins deux non-arêtes  $f$ -libres nous permet de démontrer le théorème 1.34.

**Théorème 1.34** (D. Foucaud, Hansberg). *Soit  $G$  est un graphe D2C non-biparti avec une arête dominante. Si  $G$  n'est pas  $H_5$ , alors  $m < \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - 1$ .*

*Preuve.* Soit  $G$  un graphe D2C non-biparti avec une arête dominante  $uv$ ,  $G \neq H_5$ . Supposons par contradiction que  $G$  a au moins  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - 1$  arêtes. Le principe de cette preuve est le suivant : nous allons d'abord supposer que  $P_{uv}$  est vide (et par extension  $S_{uv}$  aussi) et utiliser le théorème 1.35, puis une étude de cas pour démontrer le cas où  $P_{uv}$  est non-vide.

Supposons d'abord que  $P_{uv} = \emptyset$ . Considérons les graphes orientés par la  $f$ -orientation induits par  $S_u$  et  $S_v$ . Si un de ces graphes a une composante connexe de diamètre au moins 3, alors le théorème 1.35 nous donne directement une contradiction. Donc, toutes les composantes connexes sont de diamètre au plus 2.

Supposons qu'il y ait deux composantes connexes non-triviales induites par  $S_u$  (sans perte de généralité). Alors, chacune de ces composantes contient soit un cycle, soit un puits (les puits de chaque composante ayant des voisinages distincts dans  $S_u$ ). Les lemmes 1.26 et 1.28 nous assurent

qu'au moins deux non-arêtes distinctes sont  $f$ -libres, une contradiction. Donc, dans chacun des deux ensembles  $S_u$  et  $S_v$ , il n'existe qu'une seule composante connexe non-triviale de diamètre au plus 2. Sans perte de généralité, nous allons étudier l'unique composante connexe non-triviale de diamètre au plus 2  $C \subseteq S_u$ .

Il existe un arc  $\overrightarrow{x_1x_2}$ , ce qui signifie qu'il existe  $y_1 \in S_v$  tel que  $f(x_1x_2) = \overline{x_2y_1}$ . Par le lemme 1.18,  $x_2$  a un voisin  $y_2 \in S_v$ . L'arête  $ux_1$  est critique : elle ne peut pas l'être pour la paire  $\{u, x_1\}$  (car  $x_2 \in N(u) \cap N(x_1)$ ) ou pour une paire  $\{u, x\}$  pour  $x \in S_u$  (car  $x \in N(u)$ ) ou pour une paire  $\{u, y\}$  pour  $y \in S_v$  (car  $v \in N(u) \cap N(y)$ ) ou pour la paire  $\{x_1, v\}$  (car  $y_1 \in N(x_1) \cap N(v)$ ). Donc, il existe un sommet  $x_3 \in S_u$  tel que  $N(x_1) \cap N(x_3) = \{u\}$  ; en particulier  $x_3 \notin C$  (car  $\text{diam}(C) \leq 2$ ) et  $x_3y_1 \notin E$ . Le même raisonnement appliqué à l'arête  $ux_2$  nous donne un sommet  $x_4 \in S_u$ ,  $x_4 \notin C$  tel que  $N(x_2) \cap N(x_4) = \{u\}$ . Notons que, potentiellement,  $x_3 = x_4$ .

Comme  $x_3$  est un sommet isolé dans  $S_u$  et que  $\text{diam}(G) = 2$ , il existe un sommet  $y_3 \in S_v$  voisin commun de  $x_3$  et  $y_1$ . Mais maintenant, une des deux non-arêtes  $\overline{x_1y_3}$ ,  $\overline{x_3y_1}$  est  $f$ -libre (car leur seul antécédent par la fonction  $f$  possible est  $y_1y_3$ , donc une seule peut être assignée). Cette structure est illustrée figure 1.24.

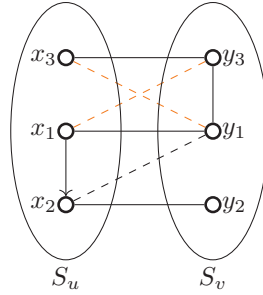


FIGURE 1.24 – La construction lorsque l'unique composante connexe non-triviale  $C$  dans  $S_u$  est de diamètre au plus 2. Une des deux non-arêtes colorées en orange est  $f$ -libre.

Le même raisonnement appliqué sur  $x_4$  nous donne un sommet  $y_4 \in S_v$  seul voisin commun de  $x_4$  et  $y_2$ , et une des deux non-arêtes  $\overline{x_2y_4}$ ,  $\overline{x_4y_2}$  est  $f$ -libre. Notons que, potentiellement,  $y_3 = y_4$ . Cependant, les quatre non-arêtes  $\overline{x_1y_3}$ ,  $\overline{x_3y_1}$ ,  $\overline{x_2y_4}$  et  $\overline{x_4y_2}$  sont distinctes (car  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_1 \neq x_4$ ,  $x_2 \neq x_3$ ,  $y_1 \neq y_2$ ,  $y_1 \neq y_3$  et  $y_2 \neq y_4$ ). Deux parmi ces quatre sont  $f$ -libres, une contradiction.

Donc, si  $P_{uv}$  est vide, nous atteignons une contradiction. Supposons maintenant que  $P_{uv} \neq \emptyset$ . Nous appelons  $\text{free}(P_{uv}, f)$  l'ensemble des non-arêtes  $f$ -libres incidentes à un sommet de  $P_{uv}$ . Nous reprenons les notations du lemme 1.30 (les ensembles  $S_u(p)$  et  $S_v(p)$ , la fonction  $q$ ), qui nous assure l'inégalité suivante (pour un certain  $p \in P_{uv}$ ) :

$$|S_u| \geq |S_u(p)| = |S_v(p)| \geq |S_v| - \text{free}(P_{uv}, f) \geq |S_v| - \text{free}(f)$$

car  $|S_v| - \text{free}(P_{uv}, f)$  est un minorant de la taille de tous les ensembles  $S_v(p)$  pour  $p \in P_{uv}$ .

Supposons d'abord que  $\text{free}(f) = 0$ . Alors,  $S_v = S_v(p)$  pour tout sommet  $p \in P_{uv}$ . Donc,  $|S_u| \geq |S_v|$ . Par le lemme 1.24, nous avons nécessairement  $||X| - |Y|| \leq 2$ , ce qui va donner des contraintes sur les tailles des ensembles  $P_{uv}$ ,  $S_{uv}$ ,  $S_u$  et  $S_v$ . En l'occurrence, comme  $P_{uv}$  contient au moins un sommet, nous avons  $|S_u \cup S_{uv}| - |S_v| \leq 1$ . De plus,  $S_u(p)$  et  $S_v$  sont des ensembles indépendants. Partant de là, la structure de  $G$  peut prendre plusieurs formes.

1. Si  $S_{uv}$  est non-vide (et donc  $|P_{uv}| = 1$ ), alors  $|S_u| = |S_v|$ , et donc  $S_u = S_u(p)$ . De plus, il n'y a aucune arête entre  $S_u$  et  $S_{uv}$ , car dans le cas contraire les arêtes entre  $u$  et  $S_u$  ne seraient pas critiques. Donc, toutes les non-arêtes entre  $S_u$  et  $S_v$  sont  $f$ -libres (elles ne peuvent être assignées qu'à une arête entre  $S_u$  et  $S_{uv}$ ), ce qui implique qu'il n'y en a pas, et donc que  $|S_u| = |S_v| = 1$ . Alors  $G = H_5$ , une contradiction.
2. Si  $S_{uv}$  est vide et  $S_u = S_u(p)$ , alors les arêtes entre  $u$  et  $S_u$  ne sont pas critiques, une contradiction.

3. Si  $S_{uv}$  est vide et il existe un sommet  $z \in S_u \setminus S_u(p)$  (et donc  $|P_{uv}| = 1$ , et  $|S_u(p)| \geq 1$ ), alors il y a deux cas. Tout d'abord, si  $|S_u(p)| = 1$ , alors  $z$  est adjacent au seul sommet de  $S_v$  par le lemme 1.18, ce qui implique que l'arête reliant  $u$  au seul sommet de  $S_u(p)$  n'est pas critique, une contradiction. Enfin, si  $|S_u(p)| \geq 2$ , soient  $x$  et  $y$  deux sommets distincts de  $S_v$ . Si  $zq(x) \notin E$  alors la non-arête  $\overline{q(x)y}$  ne peut pas avoir d'antécédent par la fonction  $f$ , donc  $zq(x) \in E$ . En particulier,  $f(zq(x)) = \overline{q(x)y}$ , et donc  $z$  est adjacent à tous les sommets de  $S_u(p)$  et de  $S_v$ , ce qui implique que les arêtes reliant  $u$  aux sommets de  $S_u(p)$  ne sont pas critiques, une contradiction.

Tous les cas aboutissant à une contradiction, on a donc  $\text{free}(f) = 1$ . Là encore, nous avons une disjonction de cas, en fonction de la position de la non-arête  $f$ -libre dans  $G$  :

1. Supposons que l'unique non-arête  $f$ -libre est de la forme  $\overline{pt}$  avec  $p \in P_{uv}$  et  $t \in S_v$ . Encore une fois, nous avons nécessairement  $\|X\| - \|Y\| \leq 2$ . Par ailleurs,  $S_u(p)$  et  $S_v(p)$  sont des ensembles indépendants (par le lemme 1.30(c)), et nous avons  $|S_u| \geq |S_v| - 1$ . Cela induit une disjonction de cas dans la disjonction de cas<sup>6</sup>, en fonction de la structure de  $G$  :
  - (a) Si  $S_{uv} \neq \emptyset$ , comme dans le cas où  $\text{free}(f) = 0$ , il n'y a aucune arête entre  $S_u$  et  $S_{uv}$ , donc les non-arêtes  $\overline{q(x)y}$  (pour  $x, y \in S_v$ ) entre  $S_u(p)$  et  $S_v(p)$  ne peuvent être assignées qu'à  $ty$  via la fonction  $f$  (en effet,  $S_u = S_u(p)$ , car autrement  $\|X\| - \|Y\| \geq 3$ ), ce qui implique que  $t$  est adjacent à tous les sommets de  $S_u(p)$  et de  $S_v(p)$ . Si  $|S_u(p)| \geq 2$ , alors l'arête  $vt$  n'est pas critique, une contradiction. Si  $|S_u(p)| = 1$ , alors les sommets de  $S_v$  ne peuvent pas être adjacents à  $S_{uv}$  (autrement, les arêtes entre  $v$  et  $S_v$  ne seraient pas critiques), et donc le graphe a au moins deux non-arêtes  $f$ -libres :  $\overline{pt}$  et une non-arête entre  $S_v$  et  $S_{uv}$ , une contradiction. Si  $|S_u(p)| = 0$ , alors  $|S_u \setminus S_u(p)| \geq 2$  pour que la non-arête  $\overline{pt}$  soit  $f$ -libre. Or,  $|S_v(p)| = 0$ , donc  $S_v = \{t\}$ , et donc  $\|X\| - \|Y\| \geq 3$ , une contradiction.
  - (b) Comme dans le cas où  $\text{free}(f) = 0$ , si  $S_{uv}$  est vide et  $S_u = S_u(p)$ , alors les arêtes entre  $u$  et  $S_u$  ne sont pas critiques, une contradiction.
  - (c) Si  $S_{uv}$  est vide et  $|S_u \setminus S_u(p)| \geq 1$ , alors il y a exactement un sommet  $p \in P_{uv}$ , et un sommet  $w \in S_u \setminus S_u(p)$ . Si  $|S_u| = 2$ , alors le sommet de  $S_u(p)$  est voisin de  $t$  (car  $t$  doit être à distance 2 de  $p$ , mais  $\overline{pt}$  doit être  $f$ -libre). Or, par le lemme 1.18,  $w$  a au moins un voisin dans  $S_v$ , donc  $w$  et le sommet de  $S_u(p)$  ont au moins deux voisins communs et donc l'arête de  $u$  à  $S_u(p)$  n'est pas critique, une contradiction, donc  $S_u(p)$  contient au moins deux sommets. Par ailleurs,  $p$  et  $w$  ne sont pas adjacents, car cette arête, si elle existait, ne serait pas critique. Comme  $\overline{pt}$  est  $f$ -libre, il existe un sommet  $q(x) \in S_u(p)$  (pour un certain  $x \in S_v(p)$ ) adjacent à  $t$  (car autrement le graphe aurait diamètre 3 ou  $N(t) \cap N(p) = \{w\}$ , deux contradictions). Supposons qu'il existe un sommet  $q(y) \in S_u(p)$  (pour un certain  $y \in S_v(p)$ ) non-adjacent à  $t$  ; la non-arête  $\overline{q(y)t}$  doit être assignée par  $f$  et il y a deux possibilités pour cela. Tout d'abord, si  $f(yt) = \overline{q(y)t}$  ou  $f(q(x)q(y)) = \overline{q(y)t}$ , alors  $\overline{q(x)y}$  est  $f$ -libre, une contradiction. Maintenant, si  $f(q(y)w) = \overline{q(y)t}$ , alors  $wy$  doit être une arête (autrement, elle serait  $f$ -libre, une contradiction) et  $yt$  n'est pas une arête. Cela implique que la non-arête  $\overline{q(x)y}$ , qui n'est pas  $f$ -libre, ne peut être assignée qu'à  $q(x)w$  (car  $S_u(p)$  et  $S_v(p)$  sont des ensembles indépendants), ce qui implique que  $wx$  est nécessairement une arête (autrement, elle serait  $f$ -libre, une contradiction). Or, maintenant, la non-arête  $\overline{q(y)x}$  est  $f$ -libre, une contradiction. Donc,  $t$  est adjacent à tous les sommets de  $S_u(p)$ . Cependant,  $t$  n'a aucun voisin dans  $S_v(p)$  (autrement, l'arête  $vt$  ne serait pas critique), donc toutes les non-arêtes de type  $\overline{q(x)y}$  entre  $S_u(p)$  et  $S_v(p)$  sont nécessairement assignées à  $wq(x)$ , et donc  $w$  est adjacent à tous les sommets de  $S_u(p)$  et de  $S_v(p)$ . De plus,  $wt$  est une arête (autrement, elle serait  $f$ -libre car  $S_u(p) \subseteq N(w) \cap N(t)$  et  $|S_u(p)| \geq 2$ ), or cette arête n'est pas critique, une contradiction.

Tout cela implique que la non-arête  $f$ -libre n'est pas incidente à  $p$ .

---

6. Une mise en abyme de disjonctions de cas, et pas une *case-disjunctionception*.

2. Si la non-arête  $f$ -libre est incidente à un sommet de  $S_{uv}$ , alors comme  $\text{free}(P_{uv}, f) = 0$  nous avons  $|S_u| \geq |S_v|$ . Donc :  $||X| - |Y|| = |S_u \cup S_{uv} \cup P_{uv}| - |S_v| \geq 2$ , ce qui, combiné au lemme 1.24, amène à une contradiction.
3. Si la non-arête  $f$ -libre se trouve entre  $S_u$  et  $S_v$ , alors comme  $\text{free}(P_{uv}, f) = 0$  nous avons  $S_v = S_v(p)$  et  $|S_u| \geq |S_v|$ . Une fois de plus, si  $||X| - |Y|| \geq 2$  alors le lemme 1.24 mène à une contradiction, donc  $S_u = S_u(p)$ . Comme la non-arête  $f$ -libre est entre  $S_u$  et  $S_v$ , chacun de ces deux ensembles est de taille au moins 2. Or, cela implique que les arêtes entre  $u$  et  $S_u$  ne sont pas critiques, une contradiction.

Une fois de plus, nous avons étudié tous les cas possibles. Chaque cas amenant à une contradiction, nous pouvons conclure à la validité du théorème 1.34.  $\square$

Ce théorème montre la pertinence de s'intéresser de façon plus exhaustive aux conjectures renforcées, et est un pas dans cette direction. Afin d'améliorer l'étude de la famille des graphes D2C avec une arête dominante, il semble se dégager un plan général : supposer par contradiction qu'un graphe de cette famille ne respecte pas la conjecture, éliminer les ensembles  $P_{uv}$  et  $S_{uv}$ , et utiliser ensuite les propriétés de la  $f$ -orientation pour conclure.

Cependant, deux difficultés semblent apparaître. Tout d'abord, éliminer les ensembles  $P_{uv}$  et  $S_{uv}$  implique de restreindre les graphes étudiés si c'est la conjecture 1.33 qui est étudiée (ainsi, travailler sur cette conjecture avec  $c = 1$  nécessite de mettre le graphe  $H_5$  de côté ; sans doute d'autres graphes pourraient apparaître avec d'autres valeurs de  $c$ ). Ensuite, les propriétés de la  $f$ -orientation sont très locales (à part l'affirmation sur les cycles orientés, toutes les affirmations concernent les voisinages directs des sommets étudiés), et dépendent énormément du fait qu'aucune non-arête  $f$ -libre n'est incidente au voisinage. Enfin, l'étude ne permettait qu'une seule non-arête  $f$ -libre, mais comme la fin de la preuve du théorème 1.34 le montre, passer de 0 à 1 non-arête  $f$ -libre induit déjà une augmentation des cas à considérer. Travailler sur cette conjecture avec d'autres valeurs de  $c$  semble donc assez complexe, sauf à dégager des propriétés plus générales.

## 1.5 Conclusion et perspectives

La conjecture de Murty-Simon est un problème plus technique qu'il n'en a l'air. Sa validité a été démontrée sur de nombreuses familles de graphes, mais elle est toujours ouverte pour le cas général. En revanche, il apparaît de plus en plus que la borne peut être réduite, donnant lieu à des conjectures renforcées. Là encore, des petits résultats existent, et nous espérons avoir montré l'intérêt de travailler sur ces conjectures renforcées.

Le tableau 1.1 résume l'état des recherches sur la conjecture de Murty-Simon et les conjectures renforcées. Nous estimons que l'étude sur ces conjectures renforcées est hautement intéressant : les méthodes de preuve semblent plus complexes à mettre en œuvre, mais les bornes paraissent bien plus serrées.

De nombreuses perspectives d'études sont donc ouvertes sur ce sujet. Outre la question ouverte de comment prouver la conjecture de Murty-Simon en elle-même, nous espérons avoir montré la pertinence d'étudier des versions renforcées de celle-ci. Un chemin possible est celui que nous avons emprunté : mesurer la différence entre les graphes D2C et les graphes bipartis complets. Bien que complexe, cette méthode sera sans doute très utile : les graphes D2C ont une structure assez contrainte, aussi pensons-nous que la preuve détaillée dans la section 1.4.4 peut être améliorée, étoffée et affinée afin de travailler sur les deux conjectures renforcées sur d'autres familles de graphes D2C.



Conjecture	Famille de graphes D2C	Référence	Contribution
Conjectures 1.4 et 1.8	Biparti complet	Trivial	État de l'art
	Sans triangles	[114]	
	$n \leq 24, n = 26$	[51]	
	$n$ très grand	[61]	
	Avec une arête dominante	[77, 86, 143] Théorème 1.31	Nouvelle preuve plus rapide
	Connectivité 1,2 ou 3	[89]	État de l'art
	$\Delta(G) \geq 0.6756n$	[98]	
	Sans $K_3 \cup K_1$ induit	[88]	
	Sans $2K_2$ induit	[82]	
	Sans $K_2 \cup K_1$ induit	[84]	
Peu d'arêtes dans des triangles	Théorème 1.13	Nouveau résultat	
Conjecture 1.32	Sans triangles, non-biparti	[9], Théorème 1.9	Nouvelle preuve plus rapide
Conjecture 1.33, $c = 1, n_0 = 7$	Avec une arête dominante, non-biparti	Théorème 1.34	Nouveau résultat

Tableau 1.1 – Résultats sur la conjecture de Murty-Simon.

## Chapitre 2

# Coloration d'arêtes union-distinguante

Dans ce chapitre, nous présentons un travail effectué avec **Nicolas Bousquet** (chargé de recherche CNRS à Grenoble), **Éric Duchêne**, **Hamamache Kheddouci** et **Aline Parreau**, qui a donné lieu à une publication [25] ainsi qu'à plusieurs présentations (Bordeaux Graph Workshop 2016, Journées Graphes et Algorithmes 2016).

### Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons étudier un paramètre défini à partir d'une identification des sommets d'un graphe via une coloration des arêtes de ce graphe. Dans la section 2.1, nous présenterons un état de l'art sur l'identification des sommets via des colorations, puis dans la section 2.2 nous définirons la coloration que nous étudions et le paramètre associé. Dans la section 2.3, nous déterminerons la valeur du paramètre sur plusieurs classes de graphes, ce qui nous mènera à démontrer dans la section 2.4 une borne supérieure générale du paramètre, laquelle présente l'intérêt d'être supérieure à la borne inférieure du paramètre d'un écart constant (plus précisément, égal à 2) alors que pour la plupart des paramètres de littérature cet écart est d'ordre  $\frac{n}{\log_2 n}$ .

### 2.1 Introduction

La *distinction* (ou *identification*) de sommets est un problème classique de graphes, qui a été définie de plusieurs façons. Le problème est le suivant : étant donné un graphe  $G(V, E)$ , on assigne à chaque sommet de  $V$  une étiquette. Un sommet est *distingué* (ou *identifié*) si aucun autre sommet de  $V$  n'a la même étiquette que lui. Une question naturelle est de trouver un moyen de créer les étiquettes de façon automatique à partir d'une construction générale sur les graphes.

Une des façons classiques d'étudier ce problème est de chercher un *ensemble identifiant* (aussi appelé *code identifiant*), qui est un ensemble de sommets  $C \subseteq V$  tel que tout sommet de  $V$  a au moins un voisin dans  $C$ , et deux sommets distincts de  $V$  n'ont pas le même voisinage dans  $C$ . Dans ce cas, l'étiquette d'un sommet est son voisinage. Ce type de distinction, introduit en 1996 par Karpovsky, Chakrabarty et Levitin [101], a été particulièrement étudié et a donné lieu à de nombreuses variantes. Une bibliographie exhaustive sur les codes identifiants est maintenue par Antoine Lobstein [112].

Nous allons nous intéresser à une sous-famille de problèmes de distinction dans les graphes : celle des *colorations distinguantes*. Il s'agit d'utiliser une coloration afin de construire les étiquettes des sommets d'un graphe et de distinguer ceux-ci. Les colorations considérées varient, de même que la façon de construire les étiquettes.

Nous allons procéder dans cette section à une revue non-exhaustive (mais, nous l'espérons, suffisamment étoffée pour qu'un-e lecteurice intéressé-e dispose d'une base de recherche assez solide) de différentes colorations distinguantes déjà définies, en nous concentrant dans un premier temps sur les coloration d'arêtes. Chacune de ces colorations induira un paramètre de graphe, qui sera le plus petit entier  $k$  tel qu'il existe une coloration distinguante utilisant  $k$  couleurs. Pour chaque

paramètre  $\mathcal{P}$  ainsi défini, on peut définir des paramètres dérivés :  $\mathcal{P}'$  désigne le paramètre lié à la même coloration où celle-ci doit être propre<sup>1</sup> ;  $\mathcal{P}^e$  désigne le paramètre lié à la même coloration où seuls les sommets adjacents doivent être distingués<sup>2</sup>.

La première de ces colorations distinguantes a été introduite en 1985 par Harary et Plantholt [79], qui ont défini la *coloration d'arêtes sommet-distinguante*. Dans celle-ci, les arêtes d'un graphe sont colorées par des entiers, et chaque sommet reçoit comme étiquette l'union des couleurs des arêtes qui lui sont incidentes. Le plus petit entier  $k$  pour lequel il existe une coloration d'arêtes sommet-distinguante d'un graphe  $G$  est appelé l'*indice chromatique sommet-distinguant* de  $G$ , noté  $\chi_S(G)$ . Une coloration d'arêtes sommet-distinguante est illustrée figure 2.1.

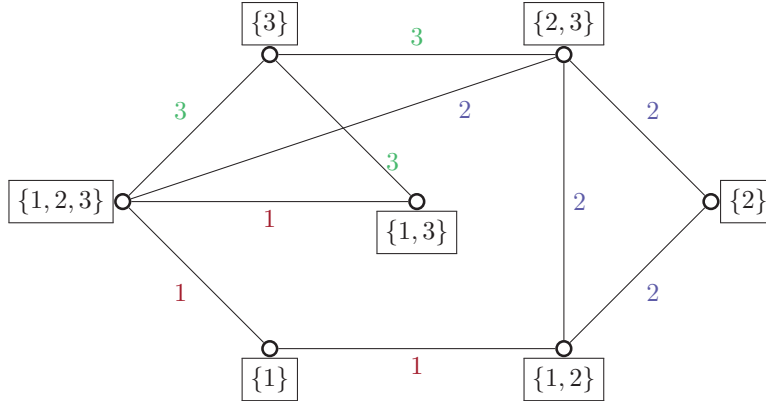


FIGURE 2.1 – Illustration d'une coloration d'arêtes sommet-distinguante. Les étiquettes des sommets sont encadrées, contrairement aux couleurs assignées aux arêtes. Cette coloration utilise trois couleurs.

Ce paramètre a été longuement étudié, notamment sur les graphes bipartis complets pour lesquels la valeur de  $\chi_S$  semble être difficile à déterminer en dépit de leur structure régulière [93, 94, 95, 125, 126]. D'autres graphes ont également été considérés, comme les chemins, cycles, cubes et graphes complets [79] ou les unions de chemins [33].

Une variante propre (la coloration doit être propre) de cette coloration a été définie sous plusieurs noms. Le paramètre associé  $\chi'_S$  a également été appelé *observabilité*. Cette variante a été introduite en parallèle par Cerný, Horňák et Soták [31] et par Burris et Schelp [29]. Ces derniers ont notamment montré une borne supérieure de  $n + \Delta(G) - 1$ . Elle a également été étudiée par de multiples auteures [11, 15].

La variante localement distinguante (seuls les sommets adjacents doivent être distingués) a été introduite par Győri, Horňák, Palmer et Woźniak [74], qui ont également montré [75] que le paramètre associé  $\chi_S^e$  était borné par  $\lceil \log_2 \chi(G) \rceil + 1$ . Enfin, pour boucler la boucle, une variante propre localement distinguante a également été étudiée [10, 149].

Une des colorations d'arêtes distinguantes les plus connues et les plus étudiées est la *coloration d'arêtes somme-distinguante*, introduite avec son paramètre associé  $\chi_\Sigma$  par Chartrand, Jacobson, Lehel, Oellermann, Ruiz, et Saba en 1988 [32]. Cette fois-ci, les arêtes sont colorées par des entiers et chaque sommet reçoit comme étiquette la somme des couleurs des arêtes qui lui sont incidentes. Un *survey* sur cette coloration est disponible [108], mais son étude a encore continué depuis [60].

Si cette coloration est connue, c'est pour sa variante localement distinguante et son paramètre associé  $\chi_\Sigma^e$ , introduite par Karoński, Łuczak et Thomason en 2004 [99], illustrée figure 2.2. Les

1. Rappelons qu'une coloration de sommets (resp. d'arêtes) est *propre* si deux sommets adjacents (resp. deux arêtes partageant une extrémité) n'ont pas la même couleur.

2. Ces notations sont propres à ce manuscrit. De façon générale, dans la littérature, chaque paramètre porte un nom et une notation différente, et les mêmes paramètres sont parfois étudiés sous des noms différents, voire des paramètres différents sous le même nom, comme rappelé dans le chapitre 3 de [44].

auteurs y énoncent une conjecture, connue sous le nom de *conjecture 1-2-3* : ils conjecturent que  $\chi_{\Sigma}^e(G) \leq 3$  pour tout graphe  $G$ . En d'autres termes, il serait possible de pondérer chaque arête d'un graphe quelconque par un poids de 1, 2 ou 3 et d'étiqueter chaque sommet par la somme du poids de ses arêtes incidentes de façon telle que deux sommets adjacents seraient distingués. Les travaux sur cette conjecture sont détaillés dans la première partie d'un *survey* rédigé par Seamone [131], lequel détaille également dans le reste de son *survey* d'autres paramètres de coloration d'arêtes localement distinguantes.

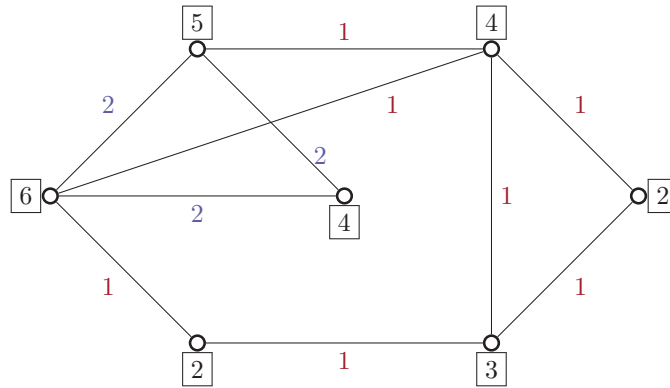


FIGURE 2.2 – Illustration d'une coloration d'arêtes localement somme-distinguante. Les étiquettes des sommets sont encadrées, contrairement aux couleurs assignées aux arêtes. Cette coloration utilise deux couleurs.

Une variante propre a également été introduite par Lo [111] et étudiée [43]. Enfin, encore une fois, la variante propre et localement distinguante a aussi été étudiée [55].

Une autre façon de distinguer les sommets est de les étiqueter par le multi-ensemble des couleurs des arêtes incidentes<sup>3</sup>. Le paramètre associé est  $\chi_{MS}$ . Notons qu'il s'agit d'une relaxation de la distinction par la somme (resp. par l'ensemble) : si deux sommets sont distingués par la somme (resp. par l'union) des couleurs de leurs arêtes incidentes, alors ils seront aussi distingués par le multi-ensemble de celles-ci. On a donc  $\chi_{MS}(G) \leq \min(\chi_S(G), \chi_{\Sigma}(G))$  (et de même pour les variantes propres et localement distinguantes).

La version de base de cette coloration a été introduite par Aigner, Triesch et Tuza [5], tandis que la version localement distinguante a été introduite par Addario-Berry, Aldred, Dalal et Reed [3], lesquels ont démontré que  $\chi_{MS}^e(G) \leq 4$  pour tout graphe  $G$ , et  $\chi_{MS}^e(G) \leq 3$  si  $\Delta(G) \geq 1000$ . Cette version a été étudiée sur les graphes bipartis et les graphes cubiques dans [80]. Enfin, il existe évidemment des versions propre [29] et propre localement distinguante [149].

Une autre façon de distinguer est d'ordonner les arêtes, de les colorer, et d'étiqueter chaque sommet avec la séquence des poids de ses arêtes incidentes prises dans l'ordre défini. Cette version est appelée *coloration d'arêtes séquentielle-distinguante*, et son paramètre associé est  $\chi_{\sigma}$ . Il est aisé de constater que  $\chi_{\sigma}(G) \leq \chi_{MS}(G)$  pour tout graphe  $G$  (et de même pour les variantes propres et localement distinguantes). La version localement distinguante a été introduite par Seamone et Stevens [132] afin d'approfondir l'étude de la conjecture 1-2-3. Aucune autre variante n'a encore été étudiée (sauf en se posant la question, non pas de l'existence d'un ordre des arêtes permettant l'existence d'une telle coloration, mais de savoir si tout ordre des arêtes permet l'existence d'une telle coloration). En revanche, il a été démontré que  $\chi_{\sigma}^e(G) \leq 2$  pour tout graphe  $G$ .

Une autre coloration d'arêtes localement distinguante est la *coloration d'arêtes localement produit-distinguante*, introduite ainsi que son paramètre  $\chi_{\Pi}^e$  par Skowronek-Kaziów [136], qui a plus tard démontré que  $\chi_{\Pi}^e(G) \leq 4$  pour tout graphe  $G$  [137]. Une variante propre localement distinguante a également été étudiée [110].

Enfin, une dernière coloration d'arêtes distinguante que nous présentons est la *coloration d'arêtes*

3. Rappelons qu'un multi-ensemble est un ensemble pouvant contenir plusieurs fois le même élément.

*diamètre-distinguante*, définie par Tahraoui, Duchêne et Kheddouci [141], et son paramètre associé  $\chi_d$ . Dans cette coloration, les sommets sont étiquetés par la différence entre la plus grande et la plus petite couleur de leurs arêtes incidentes (si le sommet est de degré 1, il est étiqueté par la couleur de son arête incidente). Ils démontrent notamment que  $\chi_d(G) \in \{n-1, n, n+1\}$  pour de nombreux graphes  $G$  d'ordre  $n$ , et ont conjecturé que  $\chi_d(G) \leq n+1$ . Plus tard, Scheidweiler et Triesch [129] ont exhibé en contre-exemples des graphes vérifiant  $\chi_d(G) = n+2$  avant de démontrer une borne générale de  $n+9$  pour ce paramètre. Une version localement distinguante a également été étudiée par Scheidweiler et Triesch [128], et par Brandt, Moran, Nepal, Pfender et Sigler [27] qui ont démontré que  $\chi_d^e(G) \in \{\chi(G), \chi(G)+1\}$  pour tout graphe  $G$ .

Le problème de construire une coloration d'arêtes permettant d'obtenir un étiquetage distinguant des sommets a donc été considérablement étudié sous des angles variés, notamment sous l'angle de l'étiquetage localement distinguant. Les différentes colorations d'arêtes distinguantes sont résumées dans le tableau 2.1.

Distinction par les ensembles		
	Coloration impropre	Coloration propre
<b>Distinction globale</b>	1985 [79]	1997 [29]
<b>Distinction locale</b>	2008 [74]	2002 [149]
Distinction par la somme		
	Coloration impropre	Coloration propre
<b>Distinction globale</b>	1988 [32]	1985 [111]
<b>Distinction locale</b>	2004 [99]	2013 [55]
Distinction par les multi-ensembles		
	Coloration impropre	Coloration propre
<b>Distinction globale</b>	1992 [5]	1997 [29]
<b>Distinction locale</b>	2005 [3]	2002 [149]
Distinction par les séquences		
	Coloration impropre	Coloration propre
<b>Distinction globale</b>	Non-définie	Non-définie
<b>Distinction locale</b>	2012 [132]	Non-définie
Distinction par les produits		
	Coloration impropre	Coloration propre
<b>Distinction globale</b>	Non-définie	Non-définie
<b>Distinction locale</b>	2008 [136]	2017 [110]
Distinction par les diamètres des ensembles		
	Coloration impropre	Coloration propre
<b>Distinction globale</b>	2012 [141]	Non-définie
<b>Distinction locale</b>	2012 [128]	Non-définie

Tableau 2.1 – Résumé des différentes colorations d'arêtes distinguantes de la littérature et les auteures les ayant introduites. On peut constater un regain d'intérêt considérable pour le domaine depuis le début des années 2000.

Dans la deuxième partie de cette introduction, nous allons aborder des colorations de sommets distinguantes. Dans sa thèse, Parreau [121] consacre un chapitre à ces colorations. Elle les divise en deux catégories : coloration globalement identifiante (où tous les sommets sont distingués) et coloration localement identifiante (où deux sommets voisins doivent être distingués).

Dans une coloration identifiante, les sommets sont colorés, et les étiquettes sont construites en faisant l'union des couleurs du voisinage fermé. On constate qu'une telle coloration ne peut être définie que sur des graphes sans jumeaux<sup>4</sup>, car deux jumeaux auraient nécessairement la même étiquette. Une coloration globalement identifiante est illustrée figure 2.3.

La coloration globalement identifiante a été, de façon surprenante, assez peu étudiée. Parreau [121] définit le *nombre chromatique identifiant*, noté  $\chi_{id}$ , comme le plus petit nombre de couleurs nécessaire

4. Deux sommets sont des *jumeaux* si leurs voisinages fermés sont égaux.

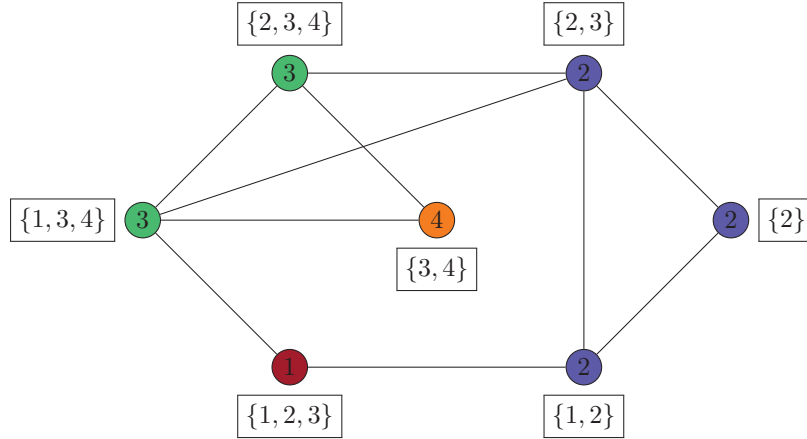


FIGURE 2.3 – Illustration d’une coloration globalement identifiante. Les étiquettes des sommets sont encadrées, contrairement aux couleurs assignées aux sommets. Cette coloration utilise quatre couleurs.

pour construire une coloration globalement identifiante. Elle énonce ensuite des bornes générales : pour tout graphe  $G$  sans jumeaux d’ordre  $n$ , on a  $\lceil \log_2(n + 1) \rceil \leq \chi_{id}(G) \leq n$  et les deux bornes sont atteintes. Coupechoux [38] a également étudié les cycles, en montrant une borne sur la longueur maximale d’un cycle pouvant être identifié avec un nombre donné de couleurs.

La coloration localement identifiante, en revanche, a attiré plus d’attention. Introduite par Esperet, Gravier, Montassier, Ochem et Parreau en 2012 [49] et étudiée depuis par plusieurs auteures [57, 67, 115], il s’agit d’une coloration propre. De nombreuses bornes ont été démontrées, tant générales que sur des familles de graphes, ainsi que des résultats de complexité. Enfin, une version où la coloration n’a pas à être propre a également été étudiée [4].

Notons enfin que ces problèmes ont également été définies sur des colorations *totales*, c’est-à-dire des colorations des arêtes et des sommets d’un graphe. Introduit par Zhang, Chen, Li, Yao, Lu et Wang [148], ces versions ont été largement considérées.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous intéresser à une nouvelle coloration d’arêtes distinguante, laquelle a des liens avec la coloration globalement identifiante et avec d’autres colorations distinguantes présentées précédemment. Dans la section 2.2, nous définirons cette nouvelle coloration et le paramètre qu’elle induit. L’introduction de variantes servant en général à obtenir de meilleures bornes pour des problèmes classiques, nous démontrerons ses liens avec d’autres colorations distinguantes. Dans les sections 2.3 et 2.4 nous étudierons diverses classes de graphes et démontrerons une borne supérieure pour le paramètre défini. Cette borne supérieure se distingue de celles obtenues pour les autres colorations globalement distinguantes, car elle est à une distance de 2 de la borne inférieure, tandis que le ratio des bornes supérieure et inférieure est de l’ordre de  $\frac{n}{\log_2 n}$  pour la plupart des paramètres définis par des colorations globalement distinguantes.

## 2.2 Coloration union-distinguante

### 2.2.1 Définition et paramètre

De façon similaire aux colorations distinguantes étudiées dans la section 2.1, nous allons utiliser une coloration du graphe afin d’identifier ses sommets.

Nous utilisons une *coloration d’arêtes* (les arêtes seront donc étiquetées par des ensembles d’entiers), laquelle pourra être *impropre* (deux arêtes incidentes pourront donc avoir la même couleur).

**Définition 2.1.** Soit  $G(V, E)$  un graphe. Soit  $c : E \rightarrow 2^{\{1, \dots, k\}}$  une fonction de coloration assignant un sous-ensemble non-vide de  $\{1, \dots, k\}$  à chaque arête de  $G$  (on dit alors que  $c$  utilise  $k$  couleurs).

L'identifiant d'un sommet  $u \in V$  par rapport à  $c$ , dénoté  $\text{id}_c(u)$ , est défini comme l'union des couleurs des arêtes incidentes à  $u$  :

$$\text{id}_c(u) = \bigcup_{v \in N(u)} c(uv)$$

La coloration  $c$  est dite *union-distinguante* si et seulement si, pour tous sommets distincts  $u$  et  $v$ ,  $\text{id}_c(u) \neq \text{id}_c(v)$ .

Si la fonction de coloration  $c$  est définie sans ambiguïté, les identifiants seront notés  $\text{id}(u)$ . Une coloration union-distinguante est dépeinte figure 2.4. Par ailleurs, notons qu'une coloration union-distinguante ne peut être définie que sur un graphe ayant des composantes connexes avec au moins trois sommets. En effet, si une composante connexe n'a qu'un ou deux sommets, alors il est impossible de distinguer les sommets avec la définition d'identifiants. Dans le cas contraire, deux sommets distincts seront incidents à des ensembles différents d'arêtes, donc une telle coloration existera nécessairement (par exemple en assignant un singleton différent à chaque arête). **Pour le reste de ce chapitre, nous allons donc considérer uniquement des graphes ayant des composantes connexes de taille au moins trois.**

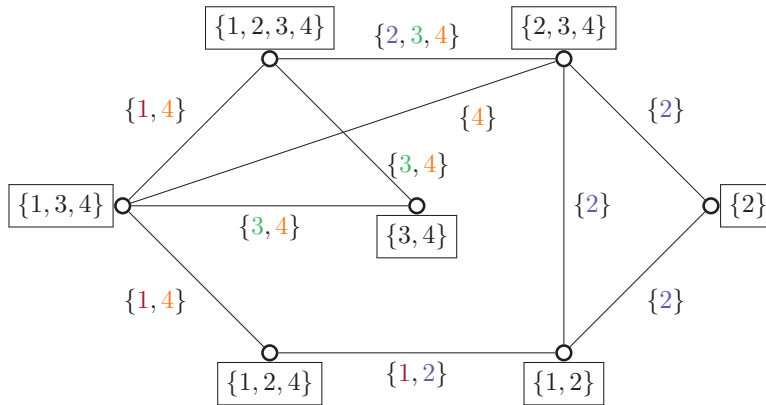


FIGURE 2.4 – Illustration d'une coloration union-distinguante. Les identifiants des sommets sont encadrés, contrairement aux couleurs assignées aux arêtes. Cette coloration utilise quatre couleurs.

La coloration union-distinguante nous permet de définir un paramètre de graphe :

**Définition 2.2.** Soit  $G(V, E)$  un graphe. Le *nombre de coloration union-distinguante* de  $G$ , dénoté  $\chi_U(G)$ , est le plus petit entier  $k$  pour lequel il existe une coloration union-distinguante  $c$  de  $G$  telle que  $c$  utilise  $k$  couleurs.

Ainsi, le graphe de la figure 2.4 admet une coloration union-distinguante utilisant quatre couleurs. Or, comme l'illustre la figure 2.5, il admet également une coloration union-distinguante utilisant trois couleurs. On peut aisément vérifier qu'il n'admet pas de coloration union-distinguante utilisant deux couleurs (par la proposition 2.4 que nous démontrerons plus loin). Cela prouve que ce graphe a un nombre de coloration union-distinguante égal à 3.

Au cours de ce chapitre, nous allons étudier le paramètre  $\chi_U$ . Dans la section 2.2.2, nous allons présenter plusieurs propriétés afin de mieux comprendre le paramètre, puis dans la section 2.3 nous allons étudier la valeur du paramètre sur plusieurs classes de graphes. Enfin, dans la section 2.4, nous allons démontrer que le paramètre  $\chi_U$  a une borne supérieure très proche de sa borne inférieure.

## 2.2.2 Premiers résultats

Tout d'abord, nous notons que la coloration d'arêtes union-distinguante est une relaxation de la coloration d'arêtes sommet-distinguante et de la coloration globalement identifiante : d'une de

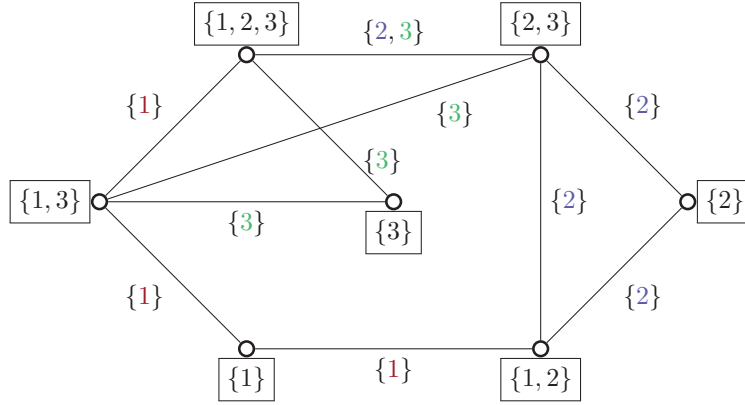


FIGURE 2.5 – Le graphe de la figure 2.4 admet une coloration union-distinguante utilisant trois couleurs. Il n’en admet pas utilisant deux couleurs, démontrant  $\chi_U(G) = 3$ .

ces deux colorations, on peut extraire une coloration d’arêtes union-distinguante utilisant le même nombre de couleurs. Cela implique une borne supérieure pour le paramètre  $\chi_U$  en fonction des paramètres  $\chi_S$  et  $\chi_{id}$  :

**Proposition 2.3.** *Pour tout graphe  $G(V, E)$ ,  $\chi_U(G) \leq \min(\chi_S(G), \chi_{id}(G))$ .*

*Preuve.* Une coloration d’arêtes sommet-distinguante est trivialement une coloration d’arêtes union-distinguante, dans laquelle chaque couleur est un singleton, ce qui donne  $\chi_U(G) \leq \chi_S(G)$ .

Depuis une coloration globalement identifiante  $c_{id}$ , nous définissons la coloration d’arêtes union-distinguante  $c$  de la façon suivante : pour toute arête  $uv$ ,  $c(uv) = c_{id}(u) \cup c_{id}(v)$ . Les identifiants des sommets en fonction de  $c$  sont les mêmes que ceux en fonction de  $c_{id}$ , donc  $c$  est bien distinguante, ce qui donne  $\chi_U(G) \leq \chi_{id}(G)$ . Cette construction est illustrée figure 2.6 (à partir de la coloration globalement identifiante de la figure 2.3).

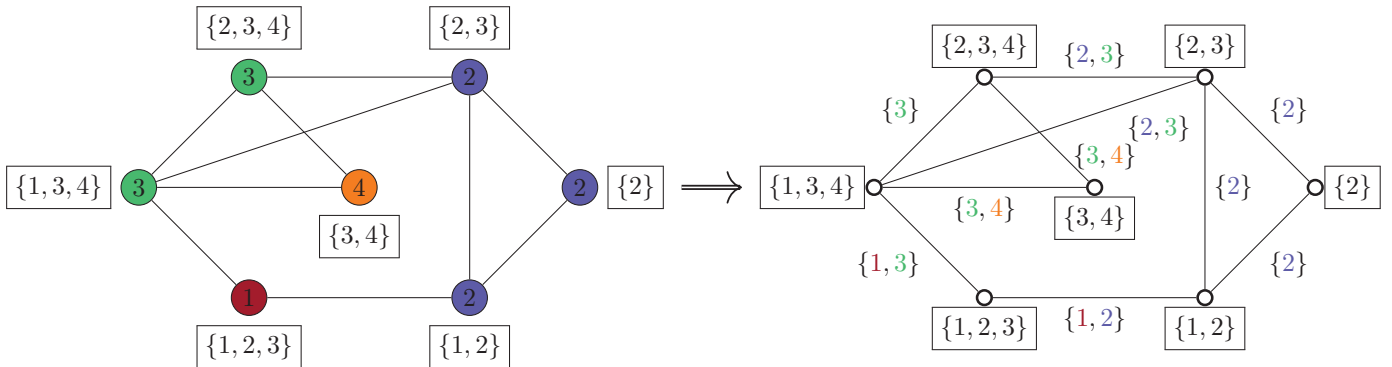


FIGURE 2.6 – Une coloration globalement identifiante permet de construire une coloration union-distinguante utilisant autant de couleurs, démontrant  $\chi_U(G) \leq \chi_{id}(G)$ .

□

Nous obtenons également une borne inférieure naturelle pour le paramètre  $\chi_U$ , laquelle se retrouve très fréquemment pour les paramètres de coloration globalement distinguante :

**Proposition 2.4.** *Pour tout graphe  $G(V, E)$ ,  $\chi_U(G) \geq \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil$ .*



*Preuve.* Supposons par contradiction qu'il existe un graphe  $G(V, E)$  admettant une coloration union-distinguante  $c$  utilisant  $k$  couleurs, où  $k < \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil$ . Le nombre de sous-ensembles distincts non-vides de  $\{1, \dots, k\}$  est de  $2^k - 1$ . En particulier :

$$k < \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil \Rightarrow 2^k < |V| + 1 \Rightarrow 2^k - 1 < |V|$$

Cela implique qu'il n'y a pas assez d'identifiants pour que chaque sommet de  $V$  en ait un unique, une contradiction.  $\square$

Si un graphe  $G(V, E)$  vérifie  $\chi_{\cup}(G) = \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil$ , nous dirons qu'il est *optimalement union-distinguable*. Une question naturelle est de se demander quels graphes sont optimalement union-distinguables, et à quel point l'écart peut être grand entre la valeur optimale et la valeur du paramètre pour les graphes qui ne le sont pas. C'est ce qui sera étudié dans les sections 2.3 et 2.4. Un premier lemme semble indiquer que le paramètre a une résilience élevée à l'ajout d'arêtes. Nous appelons un graphe obtenu par l'ajout d'arêtes à un graphe  $G$  un *supergraphe d'arêtes* de  $G$ .

**Lemme 2.5.** *Soit  $G$  un graphe. Si  $H$  est un supergraphe d'arêtes de  $G$ , alors  $\chi_{\cup}(H) \leq \chi_{\cup}(G) + 1$ .*

Ce lemme est illustré figure 2.7.

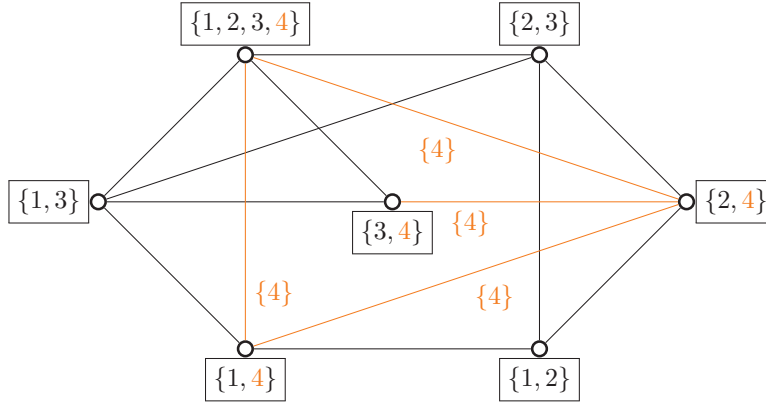


FIGURE 2.7 – Ce graphe est un supergraphe d'arêtes du graphe présenté figure 2.5 (pour rendre la figure plus lisible, les couleurs des arêtes du graphe d'origine n'ont pas été réécrites). On constate que colorer chacune des arêtes ajoutées avec un singleton d'une nouvelle couleur ne change pas le fait que les identifiants sont tous différents.

*Preuve.* Soit  $G(V, E)$  un graphe, et soit  $H(V, E')$  un supergraphe d'arêtes de  $G$ . Soit  $c$  une coloration union-distinguante de  $G$  utilisant  $k$  couleurs. On définit  $c'$ , une coloration des arêtes de  $H$  utilisant  $k + 1$  couleurs, de la façon suivante :  $c'(e) = c(e)$  si  $e \in E$  et  $c'(e) = \{k + 1\}$  si  $e \in E' \setminus E$ .

Donc, pour tout sommet  $u \in V$ ,  $\text{id}_{c'}(u) = \text{id}_c(u)$  ou  $\text{id}_{c'}(u) = \text{id}_c(u) \cup \{k + 1\}$ . Comme  $c$  est union-distinguante, pour tous sommets distincts  $u, v \in V$  :

$$\text{id}_{c'}(u) \cap \{1, \dots, k\} = \text{id}_c(u) \neq \text{id}_c(v) = \text{id}_{c'}(v) \cap \{1, \dots, k\}$$

Ceci implique que  $\text{id}_{c'}(u) \neq \text{id}_{c'}(v)$ , et donc  $c'$ , qui utilise  $k + 1$  couleurs, est union-distinguante.  $\square$

Ce lemme est très utile pour obtenir une borne sur le nombre de coloration union-distinguante de familles de graphes, à partir de familles de graphes dont le nombre de coloration union-distinguante est connu.

## 2.3 Étude du paramètre sur des classes de graphes

Dans cette section, nous allons étudier diverses classes de graphes connues : chemins, cycles, arbres binaires complets... L'intérêt principal de cette étude est que si une valeur exacte de  $\chi_U$  est trouvée pour une famille, alors le lemme 2.5 nous permettra de borner le nombre de coloration union-distinguante de tout graphe ayant un graphe de cette famille comme sous-graphe induit.

### 2.3.1 Chemins

Le théorème suivant indique qu'un chemin  $P_n$  (pour  $n \geq 3$ ) vérifie  $\chi_U(G) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ .

**Théorème 2.6** (Bousquet, D., Duchêne, Kheddouci, Parreau). *Les chemins sont optimalement union-distinguables.*

*Preuve.* Nous allons démontrer que si  $P_n$  est un chemin avec comme sommets  $u_1, \dots, u_n$  et tel que  $m = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ , alors il existe une coloration union-distinguante  $c$  de  $P_n$  utilisant  $m$  couleurs telle que :

- (i)  $\text{id}_c(u_1) = \{1\}$  ;
- (ii)  $\text{id}_c(u_n) = \{m\}$  ;
- (iii) Si il existe  $j$  tel que  $\text{id}_c(u_j) = \{1, m\}$ , alors  $j = n - 1$ .

Nous raisonnons par induction sur  $n$ . Le cas  $n = 3$  est donné par la figure 2.8 (afin d'alléger les figures de cette preuve, les identifiants des sommets ne seront pas représentés).

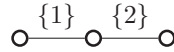


FIGURE 2.8 – Le chemin  $P_3$  admet une coloration union-distinguante  $c$  vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii).

Soit  $n = 2^k + \ell$  un entier (avec  $k \geq 2$  et  $0 \leq \ell < 2^k$ ). Par l'hypothèse d'induction, il existe une coloration union-distinguante  $c_k$  de  $P_{2^k}$  (les sommets de  $P_{2^k}$  sont appelés  $v_1, \dots, v_{2^k}$ ) vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii). Nous allons utiliser  $c_k$  pour construire une coloration union-distinguante  $c$  de  $P_n$  vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii). Il y a quatre cas à étudier selon la valeur de  $\ell$ . Les trois premiers cas étant aisés à vérifier, ils seront résumés en une figure. Le dernier cas sera un peu plus détaillé. Dans chaque cas, les conditions (i) et (ii) seront trivialement vérifiées, aussi nous concentrerons-nous sur la validité de la condition (iii).

**Cas 1, 2 et 3** :  $\ell \in \{0, 1, 2\}$  (et donc  $n \in \{2^k, 2^k + 1, 2^k + 2\}$ )

Ces trois cas sont illustrés figure 2.9. Les sommets du  $P_{2^k-1}$  conservent les couleurs qui leur sont assignés par  $c_k$ . Il est aisé de vérifier que les colorations ainsi construites sont union-distinguantes et vérifient les conditions (i), (ii) et (iii).

**Cas 4** :  $3 \leq \ell \leq 2^k - 1$

En plus de  $c_k$  la coloration union-distinguante de  $P_{2^k-1}$ , nous allons utiliser  $c_\ell$  la coloration union-distinguante de  $P_\ell$  vérifiant les conditions (i) à (iii) (laquelle existe par hypothèse d'induction). Les sommets de  $P_\ell$  sont appelés  $w_1, \dots, w_\ell$ . On définit  $c$  de la façon suivante :

- $c(u_i u_{i+1}) = c_k(v_i v_{i+1})$  pour  $1 \leq i \leq 2^k - 2$  ;
- $c(u_{2^k-1} u_{2^k}) = \{k\}$  ;
- $c(u_{2^k+i} u_{2^k+i+1}) = c_\ell(w_{\ell-i} w_{\ell-i-1}) \cup \{k+1\}$  pour  $0 \leq i \leq \ell - 2$  ;
- $c(u_{2^k+\ell-1} u_{2^k+\ell}) = \{k+1\}$ .

En d'autres termes, on colore les  $2^k - 2$  premières arêtes de  $P_n$  comme celles de  $P_{2^k-1}$ , l'arête suivante avec le singleton  $\{k\}$ , les  $\ell - 1$  arêtes suivantes comme celles de  $P_\ell$  en les prenant à l'envers, et enfin la dernière arête avec  $\{k+1\}$ . Cette coloration est illustrée figure 2.10.

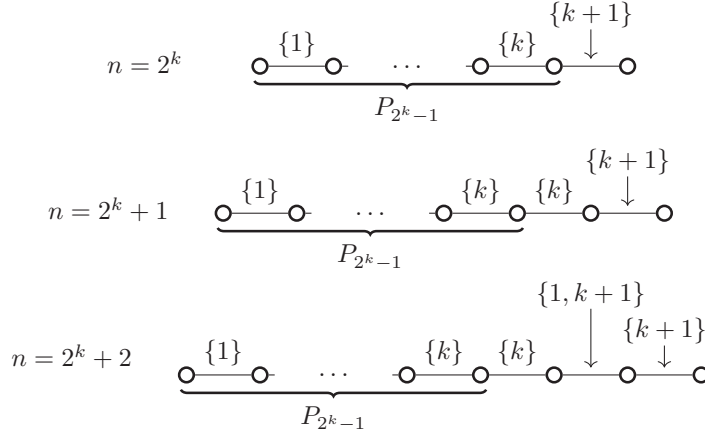


FIGURE 2.9 – Construction de  $c$  dans le cas où  $n \in \{2^k, 2^k + 1, 2^k + 2\}$ .

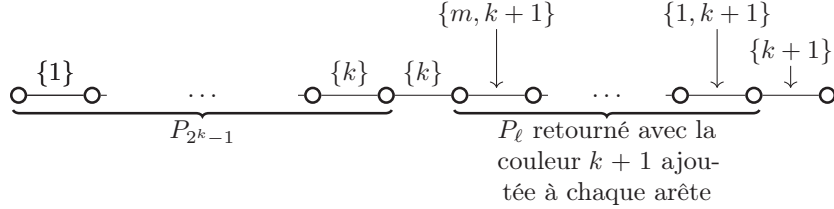


FIGURE 2.10 – Construction de  $c$  dans le cas où  $n = 2^k + \ell$  avec  $3 \leq \ell \leq 2^k - 1$ . Elle utilise les colorations union-distinguantes de  $P_{2^k-1}$  et de  $P_\ell$  (avec  $m = \lceil \log_2(\ell + 1) \rceil$ ).

Les sommets  $u_1, \dots, u_{2^k-1}$  sont distingués, de même que les sommets  $u_{2^k}, \dots, u_{2^k+\ell-1}$ , car  $c_k$  et  $c_\ell$  sont union-distinguantes. Ils sont également distingués entre eux : les premiers n'ont pas la couleur  $k + 1$  alors que tous les autres l'ont. Enfin, aucun autre sommet que  $u_n$  n'est identifié par le singleton  $\{k + 1\}$ , aussi est-il également distingué. Notons par ailleurs que cette coloration utilise  $k + 1$  couleurs, aussi  $P_n$  est optimalement union-distingué. Enfin, seul  $u_{n-1}$  est identifié par  $\{1, k + 1\}$ , prouvant la condition (iii).

Ceci conclut la preuve du théorème 2.6.  $\square$

Le théorème 2.6 couplé au lemme 2.5 nous permet d'obtenir le résultat suivant (rappelons qu'un chemin ou un cycle est *hamiltonien* s'il passe par tous les sommets sans emprunter deux fois la même arête, qu'un graphe est *hamiltonien* s'il a un cycle hamiltonien et qu'un graphe est *semi-hamiltonien* s'il a un chemin hamiltonien et pas de cycle hamiltonien) :

**Corollaire 2.7.** *Si  $G(V, E)$  est un graphe hamiltonien ou semi-hamiltonien, alors :*

$$\chi_U(G) \leq \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil + 1.$$

On constate donc l'intérêt certain d'étudier la valeur exacte de  $\chi_U$  pour des classes usuelles de graphes : cela permet de borner la valeur de  $\chi_U$  pour de nombreux autres graphes.

### 2.3.2 Cycles

Le corollaire 2.7 nous indique qu'un cycle  $C_n$  vérifie  $\chi_U(C_n) \leq \lceil \log_2(n + 1) \rceil + 1$ . Nous améliorons ce résultat en démontrant qu'un cycle  $C_n$  (pour  $n \geq 4, n \neq 7$ ) vérifie  $\chi_U(C_n) = \lceil \log_2(n + 1) \rceil$ . Les cycles  $C_3$  et  $C_7$  nécessitent trois et quatre couleurs respectivement pour être union-distingués.

**Théorème 2.8** (Bousquet, D., Duchêne, Kheddouci, Parreau). *Les cycles sont optimalement union-distinguables, sauf  $C_3$  et  $C_7$  qui nécessitent une couleur de plus.*

*Preuve.* Tout d'abord, concentrons-nous sur  $C_3$  et  $C_7$ . Il est aisé de vérifier que ces graphes ne peuvent pas être union-distingués avec respectivement 2 et 3 couleurs. En revanche, colorer chaque arête de  $C_3$  par un singleton différent et colorer  $C_7$  comme indiqué figure 2.11 distingue bien tous les sommets.

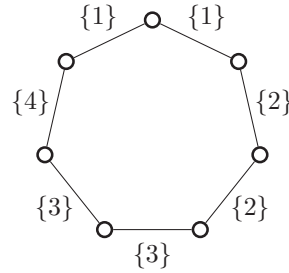


FIGURE 2.11 – Une coloration union-distinguante de  $C_7$  utilisant quatre couleurs.

Nous allons maintenant montrer qu'un cycle  $C_n$  (avec  $n \neq 3, 7$ ) peut être optimalement union-distingué. Les sommets de  $C_n$  seront notés  $u_1, \dots, u_n$ . Nous allons effectuer une disjonction entre deux cas.

**Cas 1** :  $n \neq 2^k - 1$

Nous allons supposer que  $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 2$ . Soit  $P_{n+1}$  le chemin ayant pour sommets  $v_1, \dots, v_{n+1}$ . Comme  $\lceil \log_2(n+2) \rceil = k+1$ , le théorème 2.6 nous assure qu'il existe une coloration union-distinguante  $c'$  de  $P_{n+1}$  utilisant  $k+1$  couleurs. De plus, la preuve nous assure que  $\text{id}_{c'}(v_1) = \{1\}$ ,  $\text{id}_{c'}(v_{n+1}) = \{k+1\}$  et le seul sommet de  $P_{n+1}$  pouvant être identifié par  $\{1, k+1\}$  est  $v_n$ . Nous définissons une coloration  $c$  de  $C_n$  de la façon suivante :

- $c(u_i u_{i+1}) = c'(v_i v_{i+1})$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  ;
- $c(u_n u_1) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } 1 \in \text{id}_{c'}(v_n) \\ \{k+1\} & \text{sinon} \end{cases}$

Cette coloration est illustrée figure 2.12.

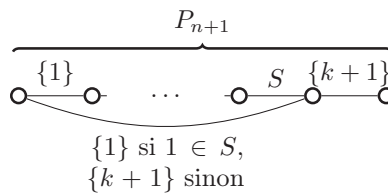


FIGURE 2.12 – Construction de la coloration union-distinguante de  $C_n$  à partir d'une coloration union-distinguante de  $P_{n+1}$ .

Les sommets  $u_2, \dots, u_{n-1}$  sont tous distingués car  $c'$  est union-distinguante. De plus,  $u_n$  est distingué car  $\text{id}_c(u_n) = \text{id}_{c'}(v_n)$ . Enfin, si  $1 \in S$  alors  $\text{id}_c(u_1) = \text{id}_{c'}(v_1)$ , ce qui implique que  $u_1$  est également distingué. Autrement, on a  $\text{id}_c(u_1) = \{1, k+1\}$  mais aucun autre sommet de  $P_{n+1}$  n'est identifié par  $\{1, k+1\}$  par les propriétés de  $c'$ . Donc,  $c$  est union-distinguante et utilise  $k+1$  couleurs, donc  $C_n$  est optimalement union-distingué.

**Cas 2** :  $n = 2^k - 1$  (avec  $k \geq 4$ )

Nous démontrons par induction l'existence d'une coloration union-distinguante  $c_k$  de  $C_n$  utilisant  $k$  couleurs telle que :

- (i)  $\text{id}_{c_k}(u_1) = \{1\}$  ;
- (ii)  $1 \in c_k(u_2u_3)$ .

Le cas de base ( $n = 15$ ) est illustré figure 2.13 (les identifiants ne sont pas précisés par souci de lisibilité).

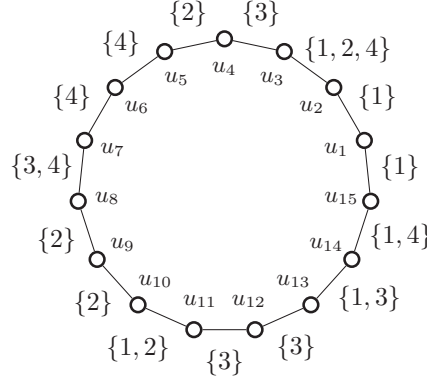


FIGURE 2.13 – Une coloration union-distinguante de  $C_{15}$  utilisant quatre couleurs.

Prenons  $n = 2^k - 1$  pour  $k \geq 4$ . Par hypothèse d'induction, il existe une coloration union-distinguante  $c_k$  de  $C_n$  (dont les sommets sont notés  $u_1, \dots, u_n$ ) vérifiant les conditions (i) et (ii) et utilisant  $k$  couleurs. Nous allons construire une coloration union-distinguante  $c_{k+1}$  de  $C_{2n+1}$  vérifiant les conditions (i) et (ii) et utilisant  $k + 1$  couleurs.

Pour cela, nous créons une copie  $C'_n$  de  $C_n$ , dont les sommets seront notés  $u'_1, \dots, u'_n$ . Par hypothèse d'induction,  $C'_n$  a une coloration union-distinguante  $c'_k$  vérifiant les conditions (i) et (ii) et utilisant  $k$  couleurs. Sans perte de généralité, nous supposons  $c_k(u_iu_j) = c'_k(u'_iu'_j)$ .

Nous définissons alors le graphe  $D$ , isomorphe à  $C_{2n+1}$ , de la façon suivante :

- $V(D) = V(C_n) \cup V(C'_n) \cup \{v\}$  ;
- $E(D) = (E(C_n) \setminus \{u_nu_1\}) \cup (E(C'_n) \setminus \{u'_nu'_1\}) \cup \{u_1v, u'_1v, u_nu'_n\}$

et la coloration  $c$  de la façon suivante :

- $c(u_iu_{i+1}) = c_k(u_iu_{i+1})$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$  ;
- $c(u'_iu'_{i+1}) = c'_k(u'_iu'_{i+1}) \cup \{k + 1\}$  pour  $2 \leq i \leq n - 1$  ;
- $c(u'_1u'_2) = \{k + 1\}$  ;
- $c(u_1v) = \{1\}$  ;
- $c(u'_1v) = \{k + 1\}$  ;
- $c(u_nu'_n) = \{1\} \cup c_k(u_{n-1}u_n)$ .

Cette construction est illustrée figure 2.14.

Les sommets  $u_2, \dots, u_{n-1}$  et  $u'_3, \dots, u'_{n-1}$  sont distingués car pour chacun d'eux on a trivialement  $\text{id}_c(u_i) = \text{id}_{c_k}(u_i)$  et  $\text{id}_c(u'_i) = \text{id}_{c'_k}(u'_i)$ , et  $c_k$  et  $c'_k$  sont union-distinguantes. Qui plus est, comme  $c_k(u_nu_1) = \{1\} = c'_k(u'_nu'_1)$ , on a aussi  $\text{id}_c(u_1) = \text{id}_{c_k}(u_1)$ ,  $\text{id}_c(u_n) = \text{id}_{c_k}(u_n)$  et  $\text{id}_c(u'_n) = \text{id}_{c'_k}(u'_n)$ , ce qui implique que ces trois sommets sont également distingués. Enfin,  $1 \in c'_k(u'_2u'_3)$ , donc  $\text{id}_c(u'_2) = \text{id}_{c_k}(u'_2)$  et ce sommet est distingué.

Les deux derniers sommets qu'il faut étudier sont  $u'_1$  et  $v$ . Notons que  $\text{id}_c(v) = \{1, k + 1\} = \text{id}_{c'_k}(u'_1) \neq \text{id}_c(u'_1)$  donc  $v$  est bien distingué. Quant à  $u'_1$ , son identifiant est le singleton  $\{k + 1\}$ , qui ne peut pas être l'identifiant d'un autre sommet par notre construction. Il est donc bien distingué.

En conclusion,  $c$  est une coloration union-distinguante de  $C_{2n+1}$  utilisant  $k + 1$  couleurs et telle que (i)  $\text{id}_c(u_1) = \{1\}$  et (ii)  $1 \in c(u_2u_3)$ . Cela termine ce cas, lequel permet de démontrer la validité du théorème 2.8.  $\square$

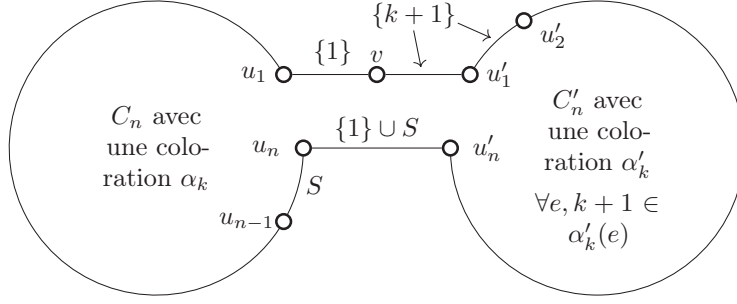


FIGURE 2.14 – Illustration de la coloration union-distinguante de  $C_{2^{k+1}-1}$  à partir de la coloration union-distinguante de  $C_{2^k-1}$ .

### 2.3.3 Arbres binaires complets

Nous utilisons la notation  $T_h$  pour désigner l'arbre binaire complet enraciné en son unique sommet de degré 2 et de hauteur  $h$ . La racine sera notée  $r_h$ . Rappelons que  $T_h$  a  $2^{h+1} - 1$  sommets.

L'arbre binaire complet  $T_{h+1}$  est construit à partir de deux arbres  $T_h$  et  $T'_h$  de la façon suivante :

- $V(T_{h+1}) = V(T_h) \cup V(T'_h) \cup \{r_{h+1}\}$  ;
- $E(T_{h+1}) = E(T_h) \cup E(T'_h) \cup \{r_{h+1}r_h, r_{h+1}r'_h\}$ .

Nous démontrons que  $T_h$  admet une coloration union-distinguante utilisant  $h + 1$  couleurs :

**Théorème 2.9** (Bousquet, D., Duchêne, Kheddouci, Parreau). *Les arbres binaires complets sont optimalement union-distinguables.*

*Preuve.* Le résultat est démontré par induction sur  $h$ . Nous allons construire une coloration union-distinguante  $c_h$  de  $T_h$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (i)  $\text{id}_{c_h}(r_h) = \{h, h + 1\}$  ;
- (ii)  $\forall e \in E(T'_{h-1}), h + 1 \in c_h(e)$ .

Le cas  $h = 1$  correspond au  $P_3$  dont la validité nous est donnée par le théorème 2.6.

Supposons que cette propriété est vérifiée pour un certain entier  $h$ . Nous allons initialement construire  $c_{h+1}$  de la façon suivante :

- $c_{h+1}(e) = c_h(e)$  pour toute arête  $e \in E(T_h)$  ;
- $c_{h+1}(e) = c'_h(e) \cup \{h + 2\}$  pour toute arête  $e \in E(T'_h)$  ;
- $c_{h+1}(r_{h+1}r_h) = \{h + 1\}$  ;
- $c_{h+1}(r_{h+1}r'_h) = \{h + 1, h + 2\}$ .

De plus, il existe un sommet  $u \in T'_h$  tel que  $\text{id}_{c_h}(u) = \{h + 1\}$ . Nous opérons alors la modification suivante : pour toute arête  $e$  incidente à  $u$ ,  $c_{h+1}(e) = c_h(e) \setminus \{h + 1\}$ . Cette coloration est illustrée figure 2.15.

Il est aisé de constater que pour tout sommet  $x \in T_h$ , on a  $\text{id}_{c_{h+1}}(x) = \text{id}_{c_h}(x)$ , et pour tout sommet  $x \in T'_h$ , si  $x \neq u$  alors on a  $\text{id}_{c_{h+1}}(x) = \text{id}_{c_h}(x) \cup \{h + 2\}$ , donc tous ces sommets sont distingués par hypothèse d'induction.

De plus, le sommet  $u$  est nécessairement distingué, car par notre construction aucun sommet de  $T_h$  et  $T'_h$  ne peut avoir le singleton  $\{h + 2\}$  comme identifiant, ce qui ne laisse que  $r_{h+1}$ , lequel a comme identifiant  $\{h + 1, h + 2\}$ . Le sommet  $u$  est donc distingué. De plus, on a  $\text{id}_{c_{h+1}}(r_{h+1}) = \text{id}_{c_h}(u) \cup \{h + 2\}$  donc le sommet  $r_{h+1}$  est distingué.

Donc,  $c_{h+1}$  est union-distinguante et utilise  $h + 2$  couleurs. De plus, elle vérifie trivialement les conditions (i) et (ii). Ceci prouve le théorème 2.9.  $\square$

Le théorème 2.9 couplé au lemme 2.5 implique le résultat suivant :

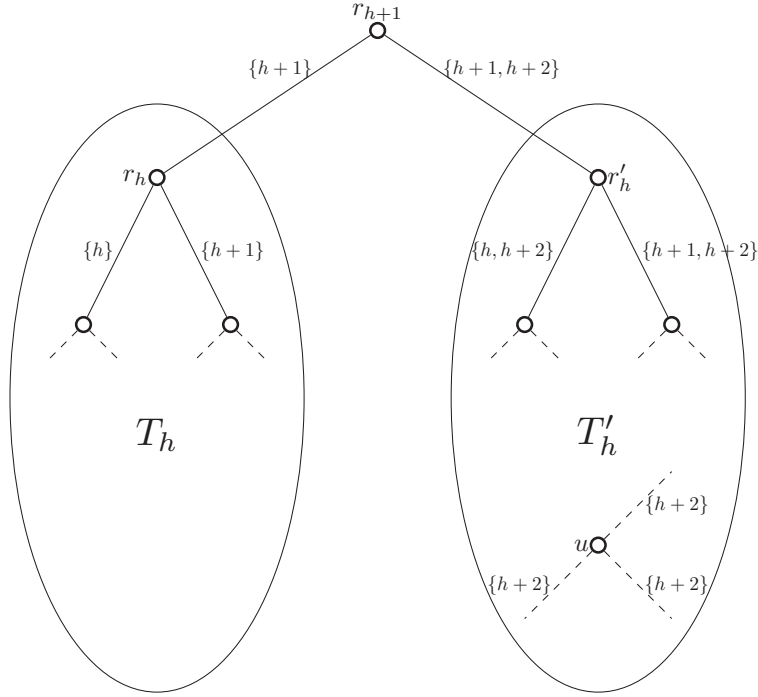


FIGURE 2.15 – Illustration de la coloration union-distinguante de  $T_{h+1}$  à partir des colorations union-distinguantes de  $T_h$  et  $T'_h$ .

**Corollaire 2.10.** *Si  $G(V, E)$  est un graphe ayant un arbre binaire complet couvrant, alors  $\chi_{\cup}(G) \leq \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil + 1$ .*

### 2.3.4 Étoiles

Dans la section 2.3.3, nous avons démontré que les arbres binaires complets sont optimalement union-distinguables. Cela implique, comme le rappelle le corollaire 2.10, qu'un graphe d'ordre  $n$  ayant un arbre binaire complet comme sous-graphe couvrant<sup>5</sup> a un nombre de coloration union-distinguante d'au plus  $\lceil \log_2(n + 1) \rceil + 1$ . Cependant, nous cherchons une classe qui nous permette de couvrir tous les graphes, aussi est-il intéressant d'étudier une classe d'arbres plus large : les étoiles subdivisées au plus une fois.

Rappelons qu'une étoile à  $n$  sommets est le graphe biparti complet  $K_{1, n-1}$ . Une étoile subdivisée est une étoile dans laquelle chaque arête peut être subdivisée. Les graphes que nous étudions sont les étoiles telles que chaque arête peut être subdivisée au plus une fois. Des exemples d'étoiles subdivisées au plus une fois sont dépeintes figure 2.16. Notons que nous ne considérons que les étoiles subdivisées au plus une fois ayant au moins 3 sommets.

**Théorème 2.11** (Bousquet, D., Duchêne, Kheddouci, Parreau). *Les étoiles subdivisées au plus une fois sont optimalement union-distinguables.*

*Preuve.* Soit  $S$  une étoile subdivisée au plus une fois d'ordre  $n \geq 3$  et de sommet central  $u$ . Soit  $k = \lceil \log_2(n + 1) \rceil$  et soient  $n_1$  et  $n_2$  le nombre de sommets à distance respectivement 1 et 2 de  $u$  (on a donc  $n = 1 + n_1 + n_2$  et  $n_1 \geq n_2$ ). Nous dénotons par  $Y$  les sommets à distance 2 de  $u$ , et par  $X$  les sommets de  $N(u)$  voisins d'un sommet de  $Y$ . Par définition,  $|X| = |Y| = n_2$  et  $X$  et  $Y$  induisent un couplage parfait. Enfin, nous dénotons par  $Z$  les voisins de  $u$  qui ne sont pas dans  $X$ .

5. Un graphe obtenu en retirant des arêtes à  $G$  est appelé un *sous-graphe couvrant* de  $G$ .

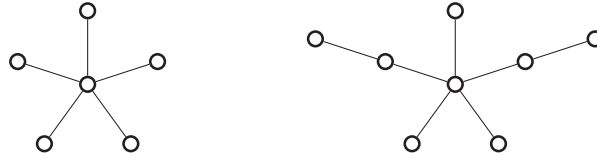


FIGURE 2.16 – Exemples d'étoiles subdivisées au plus une fois.

En particulier, on a  $n_1 = |X| + |Z|$ . Comme  $|X| \leq \frac{n-1}{2} \leq 2^{k-1} - 1$ , nous avons deux cas à traiter, selon si  $|X| < 2^{k-1} - 1$  ou si  $|X| = 2^{k-1} - 1$ .

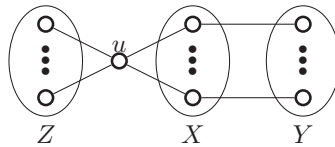


FIGURE 2.17 – Les sommets d'une étoile subdivisée au plus une fois peuvent être divisés en quatre catégories : le sommet central ( $u$ ), les sommets à distance 2 de  $u$  ( $Y$ ), les voisins de  $Y$  ( $X$ ) et les voisins de  $u$  qui ne sont pas dans  $X$  ( $Z$ ).

**Cas 1** :  $|X| \neq 2^{k-1} - 1$

Nous définissons une coloration  $c$  ayant les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout sommet  $x \in X$ ,  $c(ux)$  est un sous-ensemble strict de  $\{1, \dots, k\}$  de taille au moins 2 contenant la couleur  $k$ . De plus, si  $x \neq x'$  alors  $c(ux) \neq c(ux')$ , et si  $X$  est de taille au moins 2 alors  $\cup_{x \in X} c(ux) = \{1, \dots, k\}$  ;
- (ii) Pour tous  $x \in X$  et  $y \in Y$ , on a  $c(xy) = c(ux) \setminus \{k\}$  ;
- (iii) Pour tout  $z \in Z$ ,  $c(uz)$  est un sous-ensemble strict de  $\{1, \dots, k\}$  qui n'est pas encore attribué par  $c$ . De plus, si  $Z$  n'est pas vide alors il existe  $z \in Z$  tel que  $c(uz) = \{1, \dots, k-1\}$ . Enfin, si  $X$  est vide alors il existe  $z \in Z$  tel que  $k \in c(uz)$ .

La propriété (i) est bien définie, car il y a  $2^{k-1} - 2$  sous-ensembles stricts de  $\{1, \dots, k\}$  de taille au moins 2 contenant la couleur  $k$ , or  $|X| \leq 2^{k-1} - 2$ . C'est également le cas pour la propriété (ii) car tous les  $c(ux)$  pour  $x \in X$  contiennent la couleur  $k$  et au moins une autre couleur. Enfin, la propriété (iii) est aussi bien définie :  $G$  a au plus  $2^k - 2$  arêtes, ce qui est le nombre de sous-ensembles stricts non-vides de  $\{1, \dots, k\}$ .

Des colorations respectant ces propriétés sont illustrées figure 2.18.

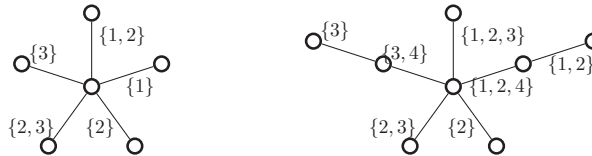


FIGURE 2.18 – Colorations union-distinguantes des étoiles subdivisées au plus une fois de la figure 2.16.

Ces propriétés impliquent que pour tout sommet  $v$  différent de  $u$ , on a  $\text{id}_c(v) = c(vw)$  pour un certain  $w \in N(v)$ . Ceci est évident pour les sommets de  $Y$  et  $Z$ , qui ont degré 1. Si  $v \in X$ , et si  $w$  est le voisin de  $v$  dans  $Y$ , alors par la propriété (ii) on a  $c(vw) \subset c(vu)$  et donc  $\text{id}_c(v) = c(vu)$ . De plus, par les trois propriétés, on a  $\text{id}_c(u) = \{1, \dots, k\}$  : si  $|X| \geq 2$  par la propriété (i), si  $|X| = 1$  alors  $Z$  est non-vide et la propriété (iii) nous permet de conclure, et si  $X$  est vide alors  $Z$  est de taille au moins 2 et la propriété (iii) s'applique également.



Toutes les arêtes recevant des sous-ensembles propres et distincts de  $\{1, \dots, k\}$ , les sommets sont tous distingués, donc  $c$  est union-distinguante.

**Cas 2** :  $|X| = 2^{k-1} - 1$ , donc  $Z$  est vide

Soient  $x_1, x_2$  deux sommets distincts de  $X$  et  $y_1, y_2$  leurs voisins dans  $Y$ . Nous définissons une coloration  $c$  ayant les propriétés suivantes :

- (i)  $c(ux_1) = \{1, \dots, k-2, k\}$  ;
- (ii)  $c(x_1y_1) = \{k\}$  ;
- (iii)  $c(ux_2) = \{1, \dots, k-1\}$  ;
- (iv)  $c(x_2y_2) = \{1, \dots, k-2\}$  ;
- (v) Pour tout autre sommet  $x \in X$ ,  $c(ux)$  est un sous-ensemble strict de  $\{1, \dots, k\}$  de taille au moins 2, contenant  $k$ , et n'ayant pas encore attribué par  $c$  ;
- (vi) Pour toute arête  $xy$  avec  $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$  et  $y \in Y \setminus \{y_1, y_2\}$ ,  $c(xy) = c(ux) \setminus \{k\}$ .

La propriété (v) est bien définie, car il y a  $2^{k-1} - 3$  sous-ensembles stricts de  $\{1, \dots, k\}$  de taille au moins 2, contenant  $k$  et n'ayant pas encore été attribués par  $c$ , et  $|X \setminus \{x_1, x_2\}| = 2^{k-1} - 3$ .

Une coloration respectant ces propriétés est illustrée figure 2.19.

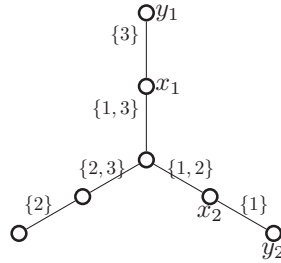


FIGURE 2.19 – Coloration union-distinguantes d'une étoile subdivisée au plus une fois avec  $|X| = 2^{k-1} - 1$ .

Comme dans le cas précédent, pour chaque sommet  $v$ ,  $\text{id}_c(v) = c(vw)$  pour un certain  $w \in N(v)$ , et  $\text{id}_c(u) = \{1, \dots, k\}$ , ce qui montre que  $c$  est union-distinguante.  $\square$

### 2.3.5 Graphes complets

Les quatre classes de graphes que nous avons étudiées dans les sections 2.3.1 à 2.3.4 sont optimalement union-distinguables. Nous démontrons ici que la plupart des cliques ne sont pas optimalement union-distinguables :

**Théorème 2.12** (Bousquet, D., Duchêne, Kheddouci, Parreau). *Soit  $K_n$  un graphe complet. Si  $n$  est une puissance de 2, alors  $K_n$  est optimalement union-distinguable. Sinon,  $\chi_{\cup}(K_n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil + 1$ .*

*Preuve.* Soient  $n$  un entier et  $k = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ . Supposons qu'une clique  $K_n$  est union-distinguée par une coloration  $c$  utilisant  $k$  couleurs. Alors, pour tous sommets distincts  $u$  et  $v$ , on a  $\text{id}_c(u) \cap \text{id}_c(v) \neq \emptyset$ , car ils sont nécessairement voisins. Comme les sommets sont identifiés par des sous-ensembles non-vides de  $\{1, \dots, k\}$ , cela signifie que  $n$  ne peut pas être plus grand que le nombre maximal de sous-ensembles non-vides de  $\{1, \dots, k\}$  ayant deux à deux une intersection non-vide.

Soit  $S$  un sous-ensemble non-vide de  $\{1, \dots, k\}$ . On appelle  $\mathcal{I}_S$  l'ensemble des sous-ensembles de  $\{1, \dots, k\}$  ayant  $S$  pour intersection commune :  $\mathcal{I}_S = \{T \subseteq \{1, \dots, k\} \text{ t.q. } S \subseteq T\}$ . Soit  $\mathcal{S}$  le plus grand ensemble de sous-ensembles de  $\{1, \dots, k\}$  vérifiant la propriété : pour tous  $x, y \in \mathcal{S}$ ,  $x \cap y \neq \emptyset$ . Notons que si  $x \in \mathcal{S}$  alors  $(\{1, \dots, k\} \setminus x) \notin \mathcal{S}$ . Soit  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Si  $\mathcal{S} = \mathcal{I}_{\{i\}}$ , alors  $|\mathcal{S}| = 2^{k-1}$ . Sinon, il existe  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{T}$ ,  $i \notin x$ . On construit l'ensemble  $\mathcal{S}'$  de la façon suivante :  $\mathcal{S}' = (\mathcal{S} \setminus \mathcal{T}) \cup \{\{1, \dots, k\} \setminus x \text{ pour } x \in \mathcal{T}\}$ . On a alors  $\mathcal{S}' = \mathcal{I}_{\{i\}}$ , et par maximalité de  $\mathcal{S}$  :  $|\mathcal{S}| = |\mathcal{S}'| = 2^{k-1}$ .

Donc, le nombre maximal de sous-ensembles non-vides de  $\{1, \dots, k\}$  ayant deux à deux une intersection non-vide est exactement  $2^{k-1}$ . Cela implique que si  $K_n$  est union-distinguée par une coloration  $c$  utilisant  $k$  couleurs, alors  $n \leq 2^{k-1}$ . Cela signifie que seules les cliques ayant une puissance de 2 comme nombre de sommets sont potentiellement optimalement union-distinguables. Il nous reste à montrer que c'est bien le cas, et que les autres cliques peuvent être union-distinguées avec une couleur supplémentaire.

**Cas 1** :  $n = 2^{k-1}$

Nous construisons une coloration union-distinguante  $c$  de  $K_n$  (dont les sommets seront notés  $u_1, \dots, u_n$ ) utilisant  $k$  couleurs. Soit  $\mathcal{I}_1$  l'ensemble des sous-ensembles de  $\{1, \dots, k\}$  contenant 1. Les éléments de  $\mathcal{I}_1$  sont ordonnés par cardinalité croissante et notés  $v_1, \dots, v_n$  (on a donc  $v_1 = \{1\}$ ,  $v_2 = \{1, 2\}$ ,  $\dots$ ,  $v_n = \{1, \dots, k\}$ ).

- $c(u_n u_i) = v_i$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$  ;
- $c(u_i u_j) = \{1\}$  pour  $1 \leq i, j \leq n - 1$  avec  $i \neq j$ .

Cette coloration est illustrée figure 2.20 pour le cas particulier de  $K_8$ . Il est aisé de constater que pour chaque sommet on aura  $\text{id}_c(u_i) = v_i$ , et donc les sommets sont distingués, ce qui implique que  $c$  est union-distinguante.

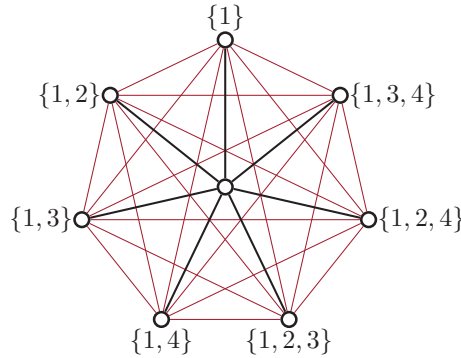


FIGURE 2.20 – Une coloration union-distinguante de  $K_8$  utilisant quatre couleurs. Les arêtes en rouge sont colorées par le singleton  $\{1\}$ . Les autres arêtes (en gras) sont colorées par l'ensemble noté à leur extrémité. Chaque sommet est identifié par un élément de  $\mathcal{I}_1$ , le sommet central étant identifié par  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

**Cas 2** :  $n \neq 2^{k-1}$

Nous utilisons le théorème 2.11 conjugué au lemme 2.5 : le graphe complet  $K_n$  est un super-graphe d'arêtes de l'étoile  $K_{1, n-1}$ . Comme  $K_{1, n-1}$  est optimalement union-distinguable, nous avons  $\chi_{\cup}(K_n) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + 1$ , et comme  $\chi_{\cup}(K_n) > \lceil \log_2(n+1) \rceil$  par notre discussion précédente, on a  $\chi_{\cup}(K_n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil + 1$ . □

## 2.4 Une borne supérieure générale pour le paramètre

Les familles de graphes étudiées dans la section 2.3 sont toutes union-distinguables avec le nombre optimal ou le nombre optimal plus 1 de couleurs. Il est donc naturel de se poser la question de la borne supérieure de  $\chi_{\cup}$ . Nous démontrons dans cette section le théorème suivant :

**Théorème 2.13** (Bousquet, D., Duchêne, Kheddouci, Parreau). *Pour tout graphe  $G(V, E)$ ,  $\chi_{\cup}(G) \leq \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil + 2$ .*

Le principe de la preuve de ce théorème est simple : étant donné un graphe quelconque, en extraire un sous-graphe couvrant, puis en trouver une coloration union-distinguante et enfin rajouter les arêtes pour revenir au graphe initial au prix d'une couleur supplémentaire par le lemme 2.5.

Nous allons montrer que tout graphe admet une forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois de taille au moins 3 comme sous-graphe couvrant. Par le théorème 2.11, chacune de ces forêts peut être optimalement union-distinguée. Par la suite, nous montrons que l'union de graphes optimalement union-distinguables peut être union-distinguée en utilisant le nombre optimal de couleurs plus une. Cela nous permettra d'obtenir le nombre optimal de couleurs plus 2 lorsque nous rajouterons les arêtes dans la dernière phase.

**Lemme 2.14.** *Tout graphe n'ayant pas de composante connexe de taille 1 ou 2 a une forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et de taille au moins 3 comme sous-graphe couvrant.*

Nous rappelons que, comme dans le chapitre 1, le graphe obtenu en supprimant l'arête  $e$  de  $G$  est noté  $G - e$ .

*Preuve.* Supposons par contradiction qu'il existe un graphe  $G$ , dont toutes les composantes connexes sont de taille au moins 3, n'ayant pas de forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et de taille au moins 3 comme sous-graphe couvrant. Choisissons  $G$  tel que celui-ci minimise, parmi les contre-exemples et dans l'ordre lexicographique, le nombre de sommets puis le nombre d'arêtes. Par sa minimalité,  $G$  est réduit à une seule composante connexe et a au moins 3 sommets.

Pour toute arête  $e \in G$ , si le graphe  $G - e$  a une forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois et de taille au moins 3 comme sous-graphe couvrant, alors  $G$  en admet également une (car  $G - e$  est un sous-graphe couvrant de  $G$ ). Donc, par minimalité de  $G$ , pour toute arête  $e \in G$ , le graphe  $G - e$  a au moins une composante connexe de taille 1 ou 2.

Soit  $e = uv$  une arête telle que  $v$  est de degré maximum dans  $G$  (ce qui implique que  $d(v) \geq 2$ ). Tout d'abord, supposons que  $d(v) = 2$ . Alors,  $G$  est un chemin, et a une union de  $P_3, P_4, P_5$  comme sous-graphe couvrant, ce qui est une contradiction. Donc  $d(v) \geq 3$ .

Dans  $G - e$ , soit la composante connexe contenant  $u$  soit celle contenant  $v$  est de taille 1 ou 2. Comme  $v$  a degré au moins 2 dans  $G - e$ , il s'agit de la composante connexe contenant  $u$ . Notons que cette propriété est vérifiée pour tout voisin de  $v$ . Ceci implique que  $G$  est une étoile subdivisée au plus une fois avec  $v$  comme sommet central, ce qui est une contradiction.  $\square$

Nous appelons  $k$ -graphe un graphe ayant un ordre compris entre  $2^k$  et  $2^{k+1} - 1$ . Notons que l'union disjointe de deux  $k$ -graphes est un  $(k + 1)$ -graphe.

**Lemme 2.15.** *Soient  $G_1, G_2$  deux  $k$ -graphes optimalement union-distinguables. Leur union disjointe  $G_1 \cup G_2$  est également optimalement union-distinguable.*

*Preuve.* Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux  $k$ -graphes optimalement union-distinguables. Soient  $c_1$  et  $c_2$  les deux colorations union-distinguantes de  $G_1$  et  $G_2$  respectivement. Notons que  $c_1$  et  $c_2$  utilisent chacune  $k$  couleurs. Nous définissons une coloration  $c$  de  $G_1 \cup G_2$  de la façon suivante :

- $c(e) = c_1(e)$  si  $e \in E(G_1)$  ;
- $c(e) = c_2(e) \cup \{k + 1\}$  si  $e \in E(G_2)$ .

Il est aisé de constater que  $c$  est union-distinguante : les sommets de la composante isomorphe à  $G_1$  vérifieront tous  $\text{id}_c(u) = \text{id}_{c_1}(u)$  et ceux de la composante isomorphe à  $G_2$  vérifieront tous  $\text{id}_c(u) = \text{id}_{c_2}(u) \cup \{k + 1\}$ , donc deux sommets issus chacun d'une de ces deux composantes seront distingués, et tous les sommets de chacune de ces deux composantes seront distingués car  $c_1$  et  $c_2$  sont union-distinguantes.

De plus,  $G_1 \cup G_2$  est un  $(k + 1)$ -graphe, et  $c$  utilise  $k + 1$  couleurs. Donc l'union disjointe  $G_1 \cup G_2$  est optimalement union-distinguable.  $\square$

Le lemme 2.15 nous permet de prouver ce résultat :

**Lemme 2.16.** *Soient  $G_1, \dots, G_\ell$  des graphes optimalement union-distinguables. Le graphe  $G$  formé de l'union disjointe de  $G_1, \dots, G_\ell$  vérifie  $\chi_\cup(G) \leq \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil + 1$ .*

*Preuve.* Soient  $G_1, \dots, G_\ell$  des graphes optimalement union-distinguables. Supposons de plus qu'ils sont ordonnés par nombre de sommets croissant. Nous démontrons par induction sur  $\ell$  que le graphe  $G_1 \cup \dots \cup G_\ell$  admet une coloration union-distinguante utilisant le nombre optimal de couleurs plus un. Le cas  $\ell = 1$  est trivial.

Supposons d'abord qu'il existe deux  $k$ -graphes  $G_i$  et  $G_{i+1}$  pour un certain entier  $k$ . Par le lemme 2.15,  $G_i \cup G_{i+1}$  est optimalement union-distinguable. Alors, le graphe  $G_1 \cup \dots \cup (G_i \cup G_{i+1}) \cup \dots \cup G_\ell = G_1 \cup \dots \cup G_i \cup G_{i+1} \cup \dots \cup G_\ell$  est optimalement union-distinguable par hypothèse d'induction (car la séquence  $G_1, \dots, (G_i \cup G_{i+1}), \dots, G_\ell$  contient  $\ell - 1$  graphes), ce qui prouve le résultat.

Supposons donc que pour tout entier  $k$ , il existe au plus un  $k$ -graphe dans la séquence  $G_1, \dots, G_\ell$ . Nous démontrons par induction sur  $i$  que, si  $G_i$  est un  $k_i$ -graphe, alors l'union disjointe  $G_1 \cup \dots \cup G_i$  (où chaque  $G_j$  est optimalement union-distinguable) admet une coloration union-distinguante utilisant  $k_i + 1$  couleurs. Le cas de base  $i = 1$  est trivial :  $G_1$  admet une coloration union-distinguante utilisant  $k_1$  couleurs, donc il en admet une utilisant  $k_1 + 1$  couleurs. Considérons l'hérédité : soient  $G_1, \dots, G_i$  des graphes union-distinguables. Par hypothèse d'induction, l'union disjointe  $G_1 \cup \dots \cup G_{i-1}$  admet une coloration union-distinguante  $c_{i-1}$  utilisant  $k_{i-1} + 1$  couleurs. De plus,  $G_i$  admet une coloration union-distinguante  $c$  utilisant  $k_i$  couleurs. Notons enfin que  $k_i \geq k_{i-1} + 1$ . Nous définissons  $c_i$ , une coloration de  $H_1 \cup \dots \cup H_i$ , de la façon suivante :

- $c_i(e) = c_{i-1}(e)$  si  $e \in E(G_j)$  pour  $j < i$  ;
- $c_i(e) = c(e) \cup \{k_i + 1\}$  si  $e \in E(G_i)$ .

Comme  $c$  et  $c_{i-1}$  sont union-distinguantes, et que  $c_{i-1}(e)$  ne peut pas contenir la couleur  $k_i + 1$  car  $k_i + 1 > k_{i-1} + 1$  (ce dernier étant la plus grande couleur disponible pour  $c_{i-1}$ ), il est aisé de constater que  $c_i$  est union-distinguante et utilise  $k_i + 1$  couleurs.

Donc, si  $G_1, \dots, G_\ell$  sont optimalement union-distinguables, alors il existe une coloration union-distinguante  $c_k$  de  $G_1 \cup \dots \cup G_\ell$  utilisant  $k_\ell + 1$  couleurs. Or, par définition de  $k_\ell$  et en notant  $G = G_1 \cup \dots \cup G_\ell$ , nous avons :

$$k_\ell \leq \lceil \log_2(|V(G_\ell)| + 1) \rceil \leq \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil$$

Donc,  $G$  admet une coloration union-distinguante utilisant le nombre optimal de couleurs plus un.  $\square$

Ceci nous permet de démontrer le théorème 2.13 :

*Preuve du théorème 2.13.* Soit  $G$  un graphe. Comme nous étudions uniquement les graphes n'ayant pas de composante connexe de taille 1 ou 2, nous pouvons appliquer le lemme 2.14 pour obtenir une forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois  $F$  tel que  $F$  est un sous-graphe couvrant de  $G$ . Par le théorème 2.11, chacune des composantes connexes de  $F$  est optimalement union-distinguable. Cela implique, par le lemme 2.16, que  $F$  admet une coloration union-distinguante utilisant au plus  $\lceil \log_2(|V(F)| + 1) \rceil + 1$  couleurs. Enfin, comme  $G$  est un supergraphe d'arêtes de  $F$ , il admet une coloration union-distinguante utilisant au plus  $\lceil \log_2(|V(F)| + 1) \rceil + 2 = \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil + 2$  couleurs.

On a donc  $\chi_U(G) \leq \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil + 2$ . La méthode est illustrée figure 2.21.  $\square$

## 2.5 Conclusion et perspectives

Le théorème 2.13 et la proposition 2.4 impliquent le résultat suivant, lequel établit que le paramètre  $\chi_U$  peut prendre que trois valeurs :

**Théorème 2.17** (Bousquet, D., Duchêne, Kheddouci, Parreau). *Pour tout graphe  $G(V, E)$  :*

$$\lceil \log_2(|V| + 1) \rceil \leq \chi_U(G) \leq \lceil \log_2(|V| + 1) \rceil + 2.$$

Notons que ce ratio constant entre borne supérieure et borne inférieure diffère des autres paramètres de coloration globalement distinguante pour lesquels le ratio est en général de l'ordre de  $\frac{n}{\log_2 n}$  (comme noté avec la proposition 2.4, la borne inférieure est généralement de l'ordre de  $\log_2 n$ , et pour la plupart de ces paramètres il existe des graphes d'ordre  $n$  tels que la valeur du paramètre est  $n$ ).

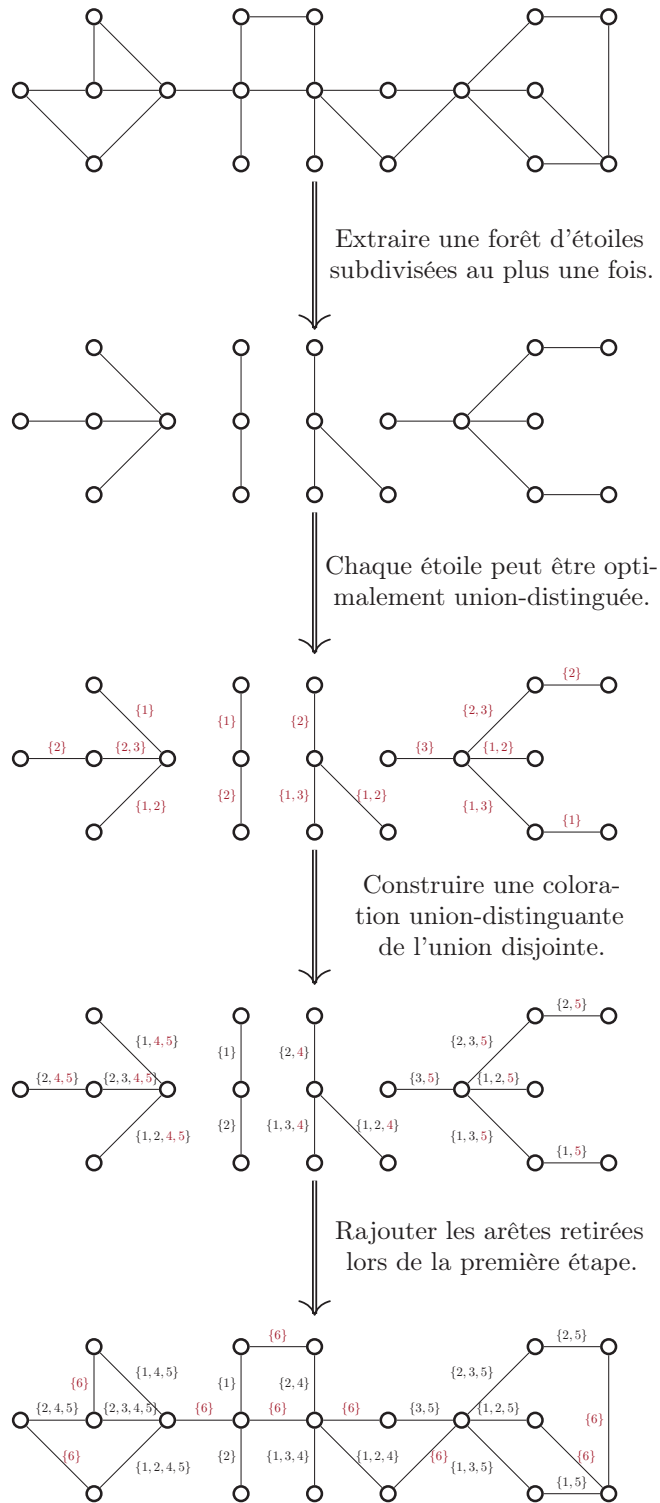


FIGURE 2.21 – Illustration de la méthode permettant de trouver une coloration union-distinguante de  $G$  utilisant  $\lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil + 2$  couleurs (à chaque étape, les couleurs ajoutées sont en rouge).

Les connaissances sur le paramètre  $\chi_{\cup}$  sont résumées dans le tableau 2.2. Pour chacune des trois valeurs possibles du paramètre, nous rappelons des familles de graphes dont le nombre de coloration union-distinguante atteint ou est borné par cette valeur. Nous n'avons aucun exemple de graphe  $G$  vérifiant  $\chi_{\cup}(G) = \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil + 2$ , aussi émettons-nous la conjecture suivante :

**Conjecture 2.18.** *Pour tout graphe  $G$ , on a  $\chi_{\cup}(G) \leq \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil + 1$ .*

Une piste intéressante pour s'attaquer à cette conjecture serait de démontrer que tout arbre (ou toute forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois) est optimalement union-distinguable. Étant donné que tout graphe admet un arbre (ou une forêt d'étoiles subdivisées au plus une fois) comme sous-graphe couvrant, le lemme 2.5 nous permettrait de conclure.

Par ailleurs, comme d'autres problèmes de coloration distinguantes, l'étude des variantes propres ou localement distinguantes pourrait se révéler intéressant. De même, nous n'avons pas étudié la complexité du problème de déterminer la valeur du paramètre pour un graphe donné, qui serait une piste de recherche intéressante. En particulier, les problèmes de décision 2.19 et 2.20 sont deux variantes possibles : la première pose la question de savoir si un graphe est optimalement union-distinguable, et la deuxième pose la question de connaître la valeur exacte de  $\chi_{\cup}$ .

**Problème de décision 2.19.**

OPTIMALEMENT UNION-DISTINGUABLE

ENTRÉE : Un graphe  $G(V, E)$ .

QUESTION : A-t-on  $\chi_{\cup}(G) = \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil$  ?

**Problème de décision 2.20.**

NOMBRE DE COLORATION UNION-DISTINGUABLE

ENTRÉE : Un graphe  $G(V, E)$  et un entier  $k \in \{0, 1, 2\}$ .

QUESTION : A-t-on  $\chi_{\cup}(G) = \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil + k$  ?

Famille de $G$	Valeur de $\chi_{\cup}(G)$	Référence
Chemins $P_n$ (pour $n \geq 3$ )	$\lceil \log_2( V(G)  + 1) \rceil$	Théorème 2.6
Cycles $C_n$ (pour $n \geq 4, n \neq 7$ )		Théorème 2.8
Arbres binaires complets		Théorème 2.9
Étoiles subdivisées au plus une fois		Théorème 2.11
Cliques $K_{2^k}$		Théorème 2.12
Cycles $C_3, C_7$	$\lceil \log_2( V(G)  + 1) \rceil + 1$	Théorème 2.8
Cliques $K_n$ (pour $n \neq 2^k$ )		Théorème 2.12
Graphes hamiltoniens	$\leq \lceil \log_2( V(G)  + 1) \rceil + 1$	Corollaire 2.7
Forêts d'étoiles subdivisées au plus une fois		Lemme 2.16
Tout graphe	$\leq \lceil \log_2( V(G)  + 1) \rceil + 2$	Théorème 2.13

Tableau 2.2 – Le paramètre  $\chi_{\cup}$  ne peut prendre que trois valeurs pour tout graphe  $G$ . Cette table présente, pour chacune des trois valeurs, des familles de graphes pour lesquelles  $\chi_{\cup}$  prend cette valeur où pour lesquelles  $\chi_{\cup}$  est borné par cette valeur. Notons que nous n'avons aucun exemple de graphe  $G$  vérifiant  $\chi_{\cup}(G) = \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil + 2$ .

# Intermède

# Chapitre 3

## Des graphes vers les jeux

### Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous montrons plusieurs articulations possibles entre graphes et jeux. Nous verrons en particulier plusieurs moyens de dériver un jeu d'un problème de graphes. Parmi les différents types de jeux qui peuvent être construits, les jeux combinatoires seront détaillés dans le chapitre 4. La section 3.1 introduira le concept de jeu Maker/Breaker, puis la section 3.2 nous verra définir les jeux de construction et de partition, ainsi que les paramètres d'optimisation que ceux-ci induisent. Dans la section 3.3, nous verrons comment définir des jeux à objectif commun, puis dans la section 3.4 nous expliquerons des problématiques générales pour les différents types de jeux introduits précédemment. Enfin, ces problématiques seront illustrées dans la section 3.5 via le jeu de coloration de Grundy.

### 3.1 De la résilience aux jeux

Dans le chapitre 1, nous avons abordé le problème de la *criticalité* d'un graphe par rapport à un paramètre, et son lien avec la notion de *résilience* d'un paramètre donné, c'est-à-dire sa robustesse par rapport à des opérations élémentaires comme la suppression de sommets ou d'arêtes. Notons que la résilience peut être définie de la même façon pour des propriétés de graphes.

Une autre façon d'étudier la résilience est de simuler une opposition malicieuse, et de modéliser le paramètre ou la propriété étudiés par un jeu à deux joueurs et à information parfaite. La première modélisation, très efficace pour modéliser les propriétés de graphe, est d'utiliser les jeux positionnels Maker/Breaker. La définition formelle de ces jeux utilise les hypergraphes, aussi rappelons-nous la définition de ceux-ci :

**Définition 3.1.** Un *hypergraphe*  $H(V, \mathcal{F})$  est la donnée d'un ensemble de sommets  $V$  et d'un ensemble d'hyperarêtes  $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ .

Nous pouvons maintenant donner la définition des jeux positionnels Maker/Breaker telle qu'établie par Hefetz, Krivelevich, Stojaković et Szabó [90] (leur définition nomme les deux joueurs Maker et Breaker, mais dans le cadre de ce chapitre il est plus intéressant de les identifier comme Alice et Bob) :

**Définition 3.2** (Jeu positionnel Maker/Breaker [90]). Soient  $X$  un ensemble fini et  $\mathcal{F} \subseteq 2^X$  une famille de sous-ensembles de  $X$ . Dans un *jeu positionnel Maker/Breaker sur l'hypergraphe*  $(X, \mathcal{F})$  :

- L'ensemble  $X$  est appelé le *plateau* ; les éléments de  $\mathcal{F}$  sont appelés les *ensembles gagnants* ;
- Les joueurs s'appellent Alice et Bob (ou Maker et Breaker) et jouent alternativement, par définition et sauf mention contraire Alice commence ;
- Un coup consiste à occuper un élément non-occupé de  $X$  ;
- Alice gagne si elle occupe l'intégralité d'un ensemble gagnant à la fin du jeu, Bob gagne s'il occupe un élément de chaque ensemble gagnant.



Dit autrement, Alice et Bob jouent sur un hypergraphe et sélectionnent tour à tour des sommets. Le but d’Alice est d’avoir sélectionné une hyperarête entière, tandis que le but de Bob est d’avoir sélectionné un transversal, c’est à dire un ensemble de sommets  $S$  telle que toute hyperarête contient au moins un élément de  $S$ . Notons qu’on suppose qu’Alice et Bob jouent tous deux optimalement dans le sens où ils ont une capacité de calcul infinie et, le jeu étant déterministe, peuvent donc jouer le meilleur coup possible. De plus, on constate qu’un tel jeu n’admet pas de match nul : soit Alice occupe un ensemble gagnant et elle gagne, soit ce n’est pas le cas et Bob gagne.

Cette définition permet de donner un cadre théorique général pour les jeux positionnels Maker/Breaker. Celle-ci permet d’adapter aisément une propriété d’un ensemble d’objets d’un graphe en un jeu positionnel Maker/Breaker :

**Construction 3.3.** Soit  $\mathcal{P}$  une propriété de graphe. Le jeu positionnel Maker/Breaker dérivé de  $\mathcal{P}$  est le jeu positionnel Maker/Breaker sur  $(X, \mathcal{F})$  où :

- $X$  est l’ensemble des éléments du graphe (sommets, arêtes, ...) que la propriété affecte ;
- $\mathcal{F}$  est la famille des ensemble d’éléments vérifiant  $\mathcal{P}$ .

L’exemple 3.4 applique la construction 3.3 à la propriété  $\mathcal{P} = \ll \text{être un ensemble dominant} \gg$ , tandis que l’exemple 3.5 l’applique à la propriété  $\mathcal{P} = \ll \text{être un cycle hamiltonien} \gg$ .

**Exemple 3.4.** Le jeu positionnel Maker/Breaker de domination [45] se joue sur un graphe  $G(V, E)$ . Alice et Bob vont sélectionner tour à tour des sommets de  $V$ . Le jeu se termine lorsque tous les sommets ont été sélectionnés. Alice gagne si elle a sélectionné un ensemble dominant, dans le cas contraire Bob gagne.

**Exemple 3.5.** Le jeu positionnel Maker/Breaker d’hamiltonicité [35] se joue sur le graphe complet  $K_n$ . Alice et Bob vont sélectionner tour à tour des arêtes de  $E$ . Le jeu se termine lorsque toutes les arêtes ont été sélectionnés. Alice gagne si elle peut faire un cycle hamiltonien (c’est-à-dire qui passe par tous les sommets une et une seule fois) avec certaines de ses arêtes, dans le cas contraire Bob gagne.

Dans le premier exemple,  $X = V$  et  $\mathcal{F} = \{S \subseteq V \mid S \text{ domine } V\}$ . Dans le deuxième exemple,  $X = E$  et  $\mathcal{F} = \{C \subseteq E \mid C \text{ est un cycle hamiltonien}\}$ .

Le principal problème étudié dans les jeux positionnels est décrit par le problème de décision 3.6 : il s’agit de décider si Alice gagne, quelle que soit la stratégie suivie par Bob (notons que ce problème est équivalent à décider si Bob gagne quelle que soit la stratégie suivie par Alice, puisque l’un gagne quand l’autre perd).

### Problème de décision 3.6.

JEU POSITIONNEL MAKER/BREAKER

ENTRÉE : Un graphe  $G$ .

QUESTION : Alice remporte-t-elle la partie sur  $G$ , quels que soient les coups joués par Bob ?

Un autre problème est de déterminer une stratégie gagnante pour Alice ou Bob. Notons que ces deux problèmes sont distincts : bien qu’une stratégie à suivre par Alice est un certificat d’appartenance pour le problème de décision 3.6, des arguments peuvent permettre de répondre positivement ou négativement à ce problème sans donner de stratégie à suivre. Ce point sera détaillé plus en avant dans une section suivante.

Les jeux positionnels ont été introduits par Hales et Jewett en 1963 [76], puis étudiés par Erdős avec Selfridge [48] et Chvátal [35] ainsi que Berge [18]. Des livres ont par ailleurs été rédigés par divers auteurs [17, 90]. Plus récemment, cette idée de jeux positionnels Maker/Breaker a été utilisée pour étudier la probabilité d’Alice de construire un ensemble de sommets ou d’arêtes vérifiant une certaine propriété à partir d’un graphe aléatoire ou complet [140]. Cependant, il a très rapidement été remarqué que de nombreux jeux positionnels Maker/Breaker étaient déséquilibrés et favorisaient l’un ou l’autre joueur. Par exemple, dans le jeu Maker/Breaker de domination, Alice est généralement avantagée (Bob ayant besoin d’un nombre de sommets exponentiel en le degré minimum du graphe pour espérer gagner) [45]. Une des façons de rééquilibrer le jeu est de le biaiser :

**Définition 3.7** ([90]). Soient  $p, q$  deux entiers strictement positifs. Le jeu positionnel *Maker/Breaker avec biais* ( $p : q$ ) sur l'hypergraphe  $(X, \mathcal{F})$  est le jeu positionnel Maker/Breaker sur l'hypergraphe  $(X, \mathcal{F})$  dans lequel Alice sélectionne  $p$  éléments de  $X$  à son tour et Bob en sélectionne  $q$ .

De nombreux travaux ont été effectués sur ces jeux avec biais, souvent orientés vers un aspect probabiliste : on cherche alors quel biais permet de garantir une probabilité de victoire élevée pour Alice. Nous allons cependant nous pencher sur une autre façon de rétablir l'équilibre, laquelle continuera à donner des résultats non-probabilistes. Il s'agit de faire en sorte qu'Alice et Bob construisent tous les deux le même ensemble, et le but de Bob sera soit de bloquer Alice soit de la ralentir. C'est ce qui amène à la définition de jeux à construction commune, que nous allons décrire dans la section suivante.

## 3.2 Des paramètres de graphe aux paramètres d'optimisation

Afin de rééquilibrer les jeux adaptés de propriétés et paramètres de graphes, Alice et Bob ne vont pas cette fois construire chacun un ensemble, mais construire les mêmes ensembles [130]. Comme les coups des deux joueurs s'effectuent sur les mêmes ensembles, la différence entre eux se fera sur la définition du vainqueur. Une vision naturelle est de leur donner des objectifs différents, ce qui induit la définition des jeux à objectif compétitif :

**Définition 3.8.** Soient  $G$  un graphe,  $k$  un entier et  $X_1, \dots, X_\ell$  (pour  $\ell$  entier,  $\ell \geq 1$ ) des ensembles initialement vides d'éléments de  $G$  (sommets, arêtes, ...). Dans un jeu à objectif compétitif sur un graphe  $G$  :

- Les joueurs s'appellent Alice et Bob et jouent alternativement ;
- Un coup consiste à assigner un ou plusieurs éléments de  $G$  à un ou plusieurs ensembles  $X_i$  en respectant certaines règles ;
- Le jeu se termine lorsque  $k$  coups ont été joués ou lorsqu'aucun coup n'est disponible ;
- Alice gagne si les ensembles  $X_i$  respectent certaines conditions, sinon Bob gagne.

Ici, comme pour les jeux positionnels Maker/Breaker, soit Alice gagne soit Bob gagne : il n'y a pas de match nul. De la même façon que les propriétés de graphe permettaient de construire un jeu positionnel Maker/Breaker (comme vu dans la construction 3.3), les paramètres de graphe nous permettent de construire des jeux à objectif compétitif. Dans sa thèse, Schmidt [130] a proposé une partition des jeux à objectif compétitif en trois catégories, chacune correspondant à un type de problème de graphe et de paramètre associé. De nombreux problèmes de graphe peuvent en effet être répartis dans une des deux catégories suivantes :

**Définition 3.9** ([130]). Dans un *problème de construction*, on cherche à trouver un sous-ensemble des éléments du graphe vérifiant une certaine propriété ; le *paramètre de construction* associé est le plus petit (ou le plus grand) entier  $k$  tel qu'il existe un sous-ensemble de taille  $k$  vérifiant cette propriété.

Dans un *problème de partition*, on cherche à séparer les éléments du graphe en  $k$  ensembles vérifiant une certaine propriété ; le *paramètre de partition* associé est le plus petit (ou le plus grand) entier  $k$  tel qu'une telle partition est possible.

Cette définition est illustrée par l'exemple 3.10, qui présente deux problèmes de construction (un dans lequel on essaye de minimiser la taille de l'ensemble construit, et un dans lequel on essaye au contraire de la maximiser) et un problème de partition.

**Exemple 3.10.** Dans le problème de domination, on cherche à trouver un ensemble de sommets vérifiant la propriété « tout sommet du graphe est soit dans l'ensemble soit voisin d'un sommet de l'ensemble ». De plus, on essaye de minimiser la taille de cet ensemble, ce qui donne un paramètre de construction minimisant : le nombre de domination.

Un autre problème de construction est celui de l'ensemble indépendant maximum, dans lequel on cherche à construire un ensemble de sommets vérifiant la propriété « aucun sommet de l'ensemble

n'est adjacent à un autre ». Cette fois, on cherche à maximiser la taille de cet ensemble, ce qui donne un paramètre de construction maximisant : le nombre d'indépendance.

Un problème de partition classique est la coloration : on cherche à partitionner les sommets du graphe en plusieurs ensembles indépendants (chaque ensemble représente une couleur). De plus, on essaye de minimiser le nombre d'ensembles utilisés dans la partition, ce qui donne un paramètre de partition minimisant : le nombre chromatique.

Nous en déduisons deux constructions pour des jeux à objectif compétitif, selon qu'on utilise un paramètre de construction ou un paramètre de partition.

**Construction 3.11.** Soit  $\mathcal{P}$  un paramètre de construction. Le jeu de construction associé au paramètre  $\mathcal{P}$  est le jeu à objectif compétitif sur  $G, k, X$  où :

- $X$  contient les éléments du graphe que  $\mathcal{P}$  affecte ;
- Chaque coup doit « améliorer » la construction, dans le sens où aucun coup ne peut être inutile ;
- Le jeu se termine lorsqu'aucun coup n'est disponible. Si, de plus,  $\mathcal{P}$  est un paramètre de construction minimisant, le jeu se termine lorsque  $k$  coups ont été joués ;
- Alice gagne si, à la fin du jeu,  $X$  vérifie la propriété associée à  $\mathcal{P}$ . Si, de plus,  $\mathcal{P}$  est un paramètre de construction maximisant, Alice gagne si  $X$  est de taille au moins  $k$ .

Dans un jeu de construction minimisant,  $k$  représente le délai qu'a Alice pour gagner. En d'autres termes, Alice essaye de construire un ensemble de taille au plus  $k$  vérifiant une certaine propriété. Bob essaye quant à lui de l'en empêcher, pour cela il ralentit Alice en jouant des coups peu utiles (la deuxième condition de la construction 3.11 force Bob à ne pas jouer de coup totalement inutile à la construction). Cette construction est illustrée par l'exemple 3.12, qui présente le jeu de construction minimisant associé au paramètre  $\mathcal{P} =$  « nombre de domination » décrit dans l'exemple 3.10.

**Exemple 3.12.** Le jeu Dominator/Staller de domination [28] se joue sur un graphe avec un nombre de coups  $k$ . Alice et Bob vont tour à tour ajouter à  $X$  un sommet dominant au moins un sommet pas encore dominé par  $X$ . Le jeu se termine lorsqu'aucun coup n'est disponible ou lorsque  $|X| = k$ . Alice gagne si l'ensemble  $X$  domine tout le graphe, dans le cas contraire Bob gagne.

Dans un jeu de construction maximisant, au contraire, Alice va tenter de construire un ensemble vérifiant une certaine propriété le plus grand possible. C'est donc Bob qui va essayer d'accélérer la fin du jeu. En revanche, il n'a pas le droit de « casser » la propriété en cours de partie. Cette construction est illustrée par l'exemple 3.13, qui présente le jeu de construction maximisant associé au paramètre  $\mathcal{P} =$  « nombre d'indépendance » décrit dans l'exemple 3.10.

**Exemple 3.13.** Le jeu d'indépendance [123] se joue sur un graphe et avec un entier  $k$ . Alice et Bob vont tour à tour ajouter à  $X$  un sommet qui n'est adjacent à aucun sommet déjà dans  $X$ . Le jeu se termine lorsqu'aucun coup n'est disponible. Alice gagne si  $X$  contient au moins  $k$  sommets, dans le cas contraire Bob gagne.

La construction des jeux de partition est plus flottante, car les partitions peuvent être définies de façon variée, plusieurs éléments peuvent être affectés en parallèle, et une étape intermédiaire du jeu peut ne pas vérifier la propriété associée au paramètre de construction. Généralement  $k$  est égal au nombre total d'éléments du graphe susceptibles d'être manipulés, et en général Alice va avoir pour objectif de couvrir l'intégralité du graphe avec les  $X_i$ , ou de leur faire respecter une certaine propriété.

**Construction 3.14.** Soit  $\mathcal{P}$  un paramètre de partition. Le jeu de partition associé au paramètre  $\mathcal{P}$  est le jeu à objectif compétitif sur  $G, k, X_1, \dots, X_\ell$  où :

- Les  $X_i$  contiennent les éléments du graphe que  $\mathcal{P}$  affecte ;
- Alice gagne si, à la fin du jeu, les  $X_i$  vérifient la propriété associée à  $\mathcal{P}$ .

Les exemples 3.15 et 3.16, dans lesquels Alice essaye respectivement de colorer proprement un graphe avec un nombre donné de couleurs et de construire une coloration d'arêtes localement somme-distinguante, illustrent cette construction. Le premier illustre donc le jeu de partition associé au

paramètre  $\mathcal{P}$  = « nombre chromatique », et le second celui associé au paramètre  $\mathcal{P}$  = « nombre de coloration localement somme-distinguante ».

**Exemple 3.15.** Le jeu de coloration [64] se joue sur un graphe et avec  $\ell$  couleurs. Chaque  $X_i$  représente l'ensemble des sommets colorés avec la couleur  $i$ . Alice et Bob vont tour à tour affecter un sommet du graphe à un  $X_i$ , avec comme condition que deux sommets adjacents ne peuvent pas être affectés au même ensemble. Le jeu se termine lorsqu'aucun coup n'est disponible. Alice gagne si l'union des  $X_i$  couvre tous les sommets, dans le cas contraire Bob gagne.

**Exemple 3.16.** Le jeu de coloration d'arêtes localement somme-distinguante [14] se joue sur un graphe de degré maximal  $\Delta$  et avec  $m$  couleurs, avec  $\ell = m\Delta$ . Chaque  $X_i$  représente l'ensemble des sommets dont la somme des couleurs des arêtes incidentes est  $i$ . Alice et Bob vont tour à tour choisir une arête du graphe et en déplacer les deux extrémités de leurs  $X_i$  et  $X_j$  courants dans  $X_{i+x}$  et  $X_{j+x}$  avec  $1 \leq x \leq m$  (si un sommet n'est pas encore dans un  $X_i$ , il est affecté à  $X_x$ ), avec comme condition qu'une arête ne peut pas être sélectionnée plusieurs fois. Le jeu se termine lorsque toutes les arêtes ont été sélectionnées. Alice gagne si, pour toute paire de sommets adjacents, ces sommets ne sont pas dans le même  $X_i$ , dans le cas contraire Bob gagne.

Le problème de décision 3.17 est le principal problème associé aux jeux à objectif compétitif : comme pour les jeux positionnels Maker/Breaker, il s'agit de décider si Alice ou Bob gagne. De même, un autre problème est de déterminer une stratégie gagnante.

**Problème de décision 3.17.**

JEU À OBJECTIF COMPÉTITIF

ENTRÉE : Un graphe  $G$ .

QUESTION : Alice remporte-t-elle la partie sur  $G$ , quels que soient les coups joués par Bob ?

Ces problèmes de décision paramétrés par  $k$  ou  $\ell$  induisent des problèmes d'optimisation associés : à quel point la valeur de  $k$  (pour les jeux de construction) ou de  $\ell$  (pour les jeux de partition) peut être basse (ou haute, pour les jeux maximisants) tout en assurant qu'Alice gagne ? Cela permet de donner une définition globale d'un paramètre d'optimisation :

**Construction 3.18.** Soit  $\mathcal{P}$  un paramètre de partition (resp. de construction). Le paramètre d'optimisation  $\mathcal{P}_g$  associé est la plus petite (ou la plus grande) valeur de  $\ell$  (resp. de  $k$ ) telle qu'Alice a une stratégie gagnante pour le jeu de partition (resp. de construction) associé au paramètre  $\mathcal{P}$ .

Par exemple, à partir du paramètre du nombre chromatique  $\chi$ , on peut définir le paramètre du nombre chromatique ludique  $\chi_g$ , c'est-à-dire le nombre minimal de couleurs tel qu'Alice a une stratégie gagnante pour le jeu de coloration décrit dans l'exemple 3.15.

**Observation 3.19.** Il y a deux paramètres d'optimisation induits par un paramètre de graphe  $\mathcal{P}$  :

- $\mathcal{P}_g^A$  correspond au paramètre d'optimisation quand Alice joue en premier ;
- $\mathcal{P}_g^B$  correspond au paramètre d'optimisation quand Bob joue en premier.

Cela induit un autre sujet d'étude : les valeurs de  $\mathcal{P}_g^A$  et  $\mathcal{P}_g^B$  sont-elles différentes, et, si oui, à quel point ?

En général, on s'intéresse à la complexité du calcul du paramètre d'optimisation, illustrée par le problème de décision 3.20.

**Problème de décision 3.20.**

PARAMÈTRE D'OPTIMISATION

ENTRÉE : Un graphe  $G$ , un entier  $k$ .

QUESTION : A-t-on  $\mathcal{P}_g(G) \geq k$  (resp.  $\mathcal{P}_g \leq k$ ) ?

Cependant, dans ces jeux, il y a forcément un vainqueur dans les jeux à objectif compétitif. Dans la section suivante, nous allons voir une autre façon de ludifier des paramètres et propriétés de graphes en créant des jeux qui peuvent se conclure par un match nul.

### 3.3 Plus loin dans les jeux...

Une autre façon d'envisager la modélisation d'un paramètre ou une propriété par un jeu est de faire en sorte qu'Alice et Bob aient le même objectif : le gagnant sera déterminé par qui atteint cet objectif en premier. Cet objectif peut être positif (réaliser une certaine construction) ou négatif (faire en sorte que son adversaire soit le premier à réaliser une certaine construction). Ces jeux ont été appelés respectivement *jeux de réussite* et *jeux d'évitement* par Harary [78], mais ils sont aussi appelés jeux positionnels Maker/Maker ou Breaker/Breaker pour faire le lien avec les jeux définis dans la section 3.1. L'exemple 3.21 présente un jeu d'évitement dérivé de la coloration d'arêtes.

**Exemple 3.21.** Dans le jeu de SIM [134], Alice et Bob colorent tour à tour, chacun avec leur propre couleur, des arêtes non-colorées du graphe complet  $K_6$ . Le premier d'entre eux à former un triangle de sa couleur perd.

Dans la définition originale de SIM, en raison des propriétés de  $K_6$ , il est impossible d'avoir un match nul (le théorème de Turán indique qu'un des deux joueurs aura nécessairement formé un triangle à la fin de la partie). Cependant, il est possible d'étudier ce jeu sur d'autres graphes, sur lesquels on peut avoir un match nul. En effet, au contraire des jeux Maker/Breaker et à objectif compétitif (dans lesquels soit Alice soit Bob gagne), les jeux de réussite et d'évitement peuvent s'achever par une égalité si aucun des deux joueurs n'est en état de réaliser la construction (ou de forcer son adversaire à la réaliser). Or, ceci rend l'étude de ces jeux particulièrement difficile. Une des façons de rendre cette étude plus abordable est d'appliquer une condition supplémentaire. Par exemple, en considérant que le premier joueur n'ayant pas de coup disponible perd, nous obtenons la définition des jeux combinatoires.

Les jeux combinatoires seront définis formellement dans le chapitre 4, mais pour résumer, il s'agit de jeux à deux joueurs où le gagnant est entièrement déterminé par le dernier coup : dans une convention, le joueur qui joue le dernier coup gagne, et dans une autre convention, le joueur qui joue le dernier coup perd. À ce titre, un jeu combinatoire peut être vu comme un jeu à objectif commun, où l'objectif est de jouer le dernier ou l'avant-dernier coup selon la convention de victoire. L'exemple 3.22 illustre un jeu combinatoire défini à partir du nombre chromatique.

**Exemple 3.22.** La version de COL [37] introduite par Bodlaender [20]) se joue sur un graphe avec un ensemble de  $k$  couleurs. Alice et Bob colorent proprement les sommets du graphe. Le premier joueur incapable de jouer perd.

Une fois de plus, les problématiques sont celles de décider si Alice ou Bob gagne, et quelle est la stratégie gagnante, ainsi que la complexité de ces problèmes. Nous allons aborder ces problématiques, et donc celles des jeux positionnels et à objectif compétitif, dans la section suivante.

### 3.4 Problématiques générales des jeux

Nous avons vu que deux principales questions se posaient pour les jeux adaptés de propriétés et paramètres de graphes : décider qui de Alice ou de Bob gagne, et déterminer la stratégie gagnante. De plus, pour les paramètres d'optimisation, les questions de la valeur du paramètre et de l'écart entre le paramètre défini quand Alice commence et celui quand Bob commence est également de haut intérêt. Les questions de savoir si Alice a une stratégie gagnante et de déterminer la valeur du paramètre d'optimisation induisent des problèmes de décision (problèmes de décision 3.6, 3.17 et 3.20).

Dans le cas général, un certificat permettant de valider si Alice gagne dans un jeu sur un graphe donné (qu'il soit positionnel, à objectif compétitif, à objectif commun ou combinatoire) est une stratégie à suivre. En d'autres termes, il s'agit de montrer qu'*il existe* un coup pour Alice tel que *pour tout* coup de Bob, Alice soit encore dans une position où elle a une stratégie pour l'emporter. En itérant cette construction, on obtient un certificat de la forme  $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \forall x_{n-1} \exists x_n$  suivi d'une formule booléenne avec comme variables les  $x_i$  correspondant aux coups. Cela signifie que les certificats pour les problèmes de décision dans les jeux sont souvent des formules booléennes

quantifiées, ce qui implique que ces problèmes sont aussi difficile que QBF-SAT<sup>1</sup> et donc sont au plus dans PSPACE [52]. Ceci est à comparer avec les certificats pour les problèmes de décision dans les graphes, qui sont généralement de simples formules booléennes, et les problèmes sont donc aussi difficiles que les versions de SAT qui sont dans NP.

Il y a donc un « saut » en complexité lorsqu'on passe des problèmes de décision dans les graphes aux problèmes de décision dans les jeux. Ceci explique que les problèmes de jeux sont globalement considérés comme particulièrement difficiles.

Le tableau 3.1 illustre ce saut en complexité : décider, pour un graphe  $G$  et un entier  $k$ , si  $G$  admet une coloration propre de ses sommets utilisant  $k$  couleurs est NP-complet, tandis que décider si Alice gagne au jeu COL est PSPACE-complet. Plus encore, la complexité de décider si Alice peut gagner au jeu à objectif compétitif de coloration avec  $k$  couleurs est encore ouverte.

Problème de décision	NOMBRE CHROMATIQUE (décider si $\chi(G) \leq k$ )	COL (décider si Alice gagne)	NOMBRE CHROMATIQUE LUDIQUE (décider si $\chi_g(G) \leq k$ )
Complexité	NP-complet [65, 100]	PSPACE-complet [20, 127]	Ouvert

Tableau 3.1 – Évolution de la complexité en ludifiant un paramètre de graphe.

La question de la valeur des paramètres d'optimisation est similaire à celle des problèmes de décision : si décider de la valeur d'un paramètre de graphe est souvent NP-difficile (c'est-à-dire au moins aussi difficile que tout problème de NP), décider de la valeur d'un paramètre d'optimisation est souvent PSPACE-difficile (c'est-à-dire au moins aussi difficile que tout problème de PSPACE).

Une autre question étonnamment difficile dans le domaine des paramètres d'optimisation est celui de la monotonie. Par exemple, pour le jeu de coloration, si Alice a une stratégie gagnante avec  $k$  couleurs, en a-t-elle également une avec  $k+1$  couleurs ? Bien qu'ayant l'air simple, cette question est encore ouverte ! Même la relaxation, où Alice dispose de  $f(k)$  couleurs pour une certaine fonction  $f$ , n'a pas été démontrée. Encore une fois, on constate un écart de difficulté avec les mêmes questions sur les paramètres de graphe : s'il existe une  $k$ -coloration propre d'un graphe, alors il existe trivialement une  $(k+1)$ -coloration propre du même graphe. Mais en version ludique, rien n'est aussi simple.

D'autres questions sont également complexes, notamment celle de déterminer quelles sont les familles extrémales ou critiques pour un paramètre d'optimisation donné, ou encore celle d'étudier sa variation sous l'effet d'opérations élémentaires. Ces problèmes commencent à être considérés mais se révèlent difficiles à étudier.

Nous allons illustrer toutes ces questions sur un exemple précis, celui de la coloration de Grundy.

### 3.5 Illustration : le jeu de coloration de Grundy

Le jeu de coloration défini dans l'exemple 3.15 est particulièrement difficile à étudier. En effet, un des rares moyens d'étudier le nombre chromatique ludique est de travailler sur une variante dans laquelle l'aspect coloration est absent. Dans cette variante, appelée le jeu de marquage ludique, Alice et Bob sélectionnent alternativement un sommet qui n'a pas plus de  $k$  voisins déjà sélectionnés (l'entier  $k$  est un paramètre du jeu). Le but d'Alice est que le graphe soit entièrement sélectionné. Le plus petit entier  $k$  tel qu'Alice a une stratégie gagnante sur un graphe donné  $G$  est appelé le nombre de marquage ludique, et est noté  $\text{col}_g(G)$ . Il est aisé de constater que  $\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G)$  pour tout graphe  $G$  : si Alice peut sélectionner un sommet en garantissant qu'au plus  $k$  de ses voisins ont été sélectionnés avant, alors elle aura besoin d'au plus  $k+1$  couleurs pour colorer proprement le sommet qu'elle sélectionne et ses  $k$  voisins (dans le pire des cas). C'est l'étude de cette variante qui est privilégiée pour obtenir des bornes sur le nombre chromatique ludique.

Face à cette complexité, il paraît donc logique de considérer une variante plus « simple ». Étant donné que dans le jeu de coloration, Alice et Bob choisissent un sommet et sa couleur, deux variantes

1. Il s'agit d'une variante de QBF-SAT, dans laquelle les quantifications de la formule logique alternent entre  $\exists$  et  $\forall$ . Cette précision de l'entrée ne change cependant pas la classe de complexité du problème de décision, qui reste donc PSPACE-complet.

viennent à l'esprit : ne les laisser choisir que la couleur (et donc établir un ordre sur les sommets), ou ne les laisser choisir que le sommet (et donc établir automatiquement la couleur après le choix). Nous allons nous concentrer sur cette deuxième variante, appelée le jeu de coloration de Grundy. Ce jeu est un jeu de partition construit à partir du paramètre  $\mathcal{P} = \ll \text{nombre de Grundy} \gg$ .

La coloration gloutonne d'un graphe consiste à définir un ordre sur ses sommets, puis à colorer chaque sommet par la première couleur qui est absente de son voisinage (on considère que les couleurs sont des entiers). Le nombre de Grundy [34]<sup>2</sup> d'un graphe  $G$ , noté  $\Gamma(G)$ , est le nombre maximal de couleurs utilisé par une coloration gloutonne de  $G$ . En d'autres termes, étudier le nombre de Grundy revient à chercher le pire ordre possible sur les sommets du graphe afin d'obtenir le plus grand nombre de couleurs possible. L'écart entre nombre chromatique et nombre de Grundy d'un graphe est donc une sorte de mesure d'à quel point un algorithme de coloration simple peut s'approcher d'une coloration optimale. La figure 3.1 illustre cet écart sur un exemple simple.

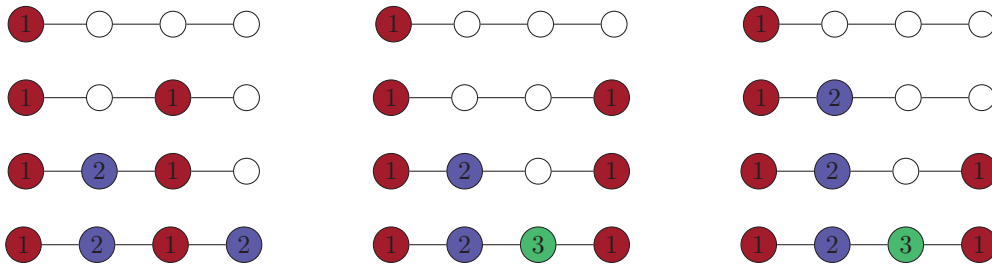


FIGURE 3.1 – Le chemin  $P_4$  est 2-colorable, mais a un nombre de Grundy de 3 : certaines colorations gloutonnes utilisent trois couleurs. Ceci illustre  $\chi < \Gamma$  pour certains graphes.

Partant du paramètre  $\Gamma$ , les constructions 3.14 et 3.18 nous permettent de définir le jeu de coloration de Grundy et son paramètre d'optimisation associé, le nombre de Grundy ludique  $\Gamma_g$  (et ses deux variantes  $\Gamma_g^A$  et  $\Gamma_g^B$  selon si Alice ou Bob commence). En d'autres termes, dans le jeu de coloration de Grundy, Alice et Bob choisissent tour à tour des sommets, qui sont colorés avec la première couleur disponible. Le nombre de Grundy ludique du graphe est le plus petit nombre de couleurs dont Alice a besoin pour colorer tous les sommets du graphe. Un exemple est dépeint figure 3.2.

**Observation 3.23.** *Le terme de nombre de Grundy vient du fait que le mathématicien Grundy avait étudié un problème similaire sur les graphes orientés [69]. De plus, Grundy a défini un des principaux résultats de la théorie des jeux impartiaux (qui sera détaillée dans le chapitre 4), lequel consiste à donner des valeurs entières aux jeux. Les valeurs sont données par une coloration gloutonne spécifique sur l'arbre du jeu, et sont appelées valeurs de Grundy.*

Notons que la question de la monotonie du paramètre  $\Gamma_g$  est trivialement résolue : on peut voir le nombre de Grundy ludique comme le plus grand nombre de couleurs que peut forcer Bob dans une coloration gloutonne. Donc, ajouter une couleur ne donne pas plus d'options aux joueurs, ce qui signifie que le paramètre est bien monotone.

Le jeu de coloration de Grundy a été défini par Havet et Zhu [81], lesquels ont étudié plusieurs des questions classiques des jeux à construction commune tout en trouvant les valeurs de  $\Gamma_g$  pour plusieurs classes de graphes (notons que si  $\mathcal{H}$  est une famille de graphes, alors  $\Gamma_g(\mathcal{H}) = \max_{G \in \mathcal{H}} \Gamma_g(G)$ ).

Un de leurs principaux résultats est d'établir des conditions nécessaires pour que les valeurs de  $\Gamma_g^A$  et  $\Gamma_g^B$  d'une famille de graphes soient les mêmes (si une famille est close par ajout d'un sommet isolé et doublement disjoint, comme illustré figure 3.3 - notons que la même condition implique les mêmes effets pour le nombre chromatique ludique [151]), mais qu'il existe des graphes pour lesquels les valeurs de  $\Gamma_g^A$  et  $\Gamma_g^B$  peuvent être aussi éloignées qu'on le souhaite, comme illustré figure 3.4.

De premières bornes évidentes apparaissent pour le nombre de Grundy ludique : le nombre chromatique (qui mesure la meilleure coloration possible) est une borne inférieure et le nombre de

2. Aussi appelé nombre de coloration *first-fit*, ou nombre de coloration gloutonne, ou encore nombre chromatique.

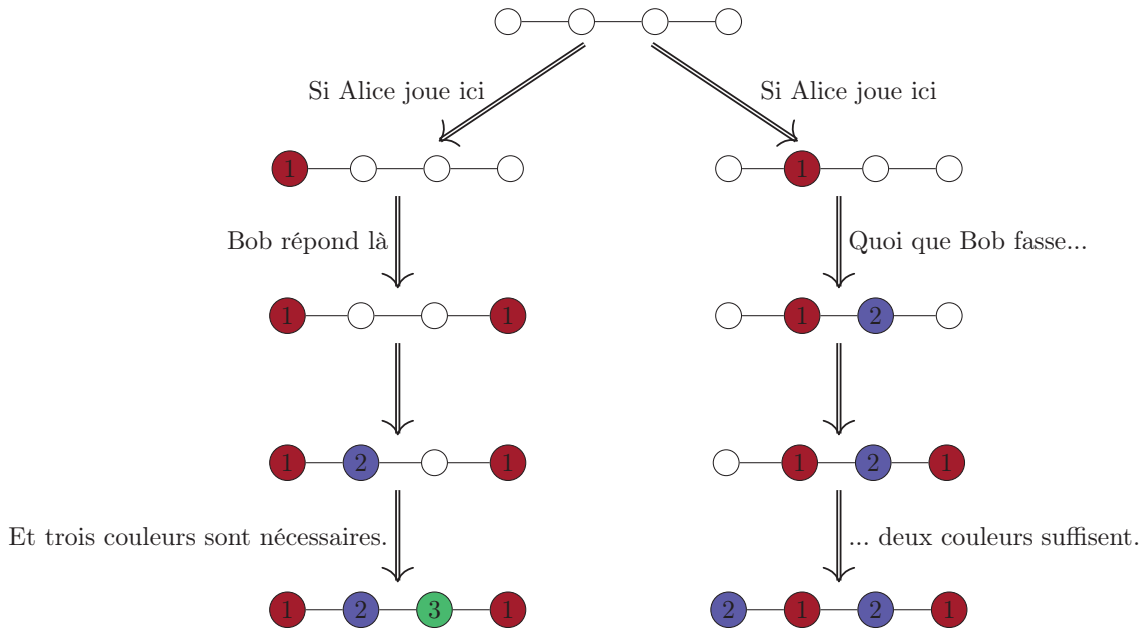


FIGURE 3.2 – Un exemple de partie du jeu de coloration de Grundy sur le  $P_4$  : si Alice joue sur une extrémité alors Bob peut forcer l'utilisation de trois couleurs. En jouant sur un des deux sommets du milieu, elle garantit l'utilisation de deux couleurs. Comme au moins deux couleurs seront nécessaires, cela implique  $\Gamma_g^A(P_4) = 2$ .

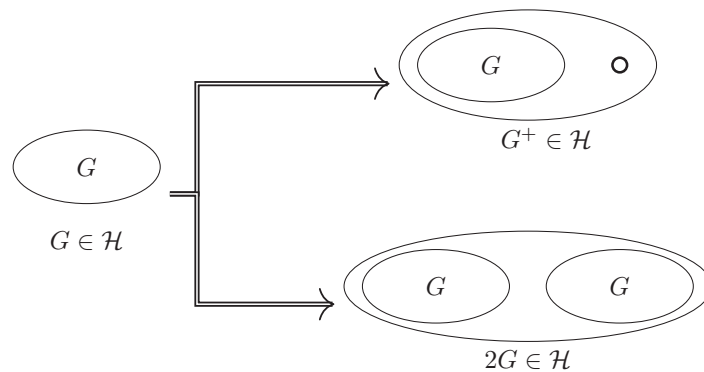


FIGURE 3.3 – Si une famille de graphes  $\mathcal{H}$  est close par ajout d'un sommet isolé et doublement disjoint, alors  $\Gamma_g^A(\mathcal{H}) = \Gamma_g^B(\mathcal{H})$ .

Grundy (qui mesure la pire coloration gloutonne possible) est une borne supérieure. De plus, le nombre de Grundy ludique est borné par le nombre de marquage ludique. Cependant, contrairement au nombre chromatique ludique, une étude circonstanciée des forêts et des 2-arbres partiels a conduit à des bornes de meilleure qualité par rapport au nombre de marquage ludique pour le nombre de Grundy ludique :

**Proposition 3.24** (Havet, Zhu [81]). *Pour toute forêt  $F$ ,  $\Gamma_g(F) \leq 3$ .  
Pour tout 2-arbre partiel  $P$ ,  $\Gamma_g(P) \leq 7$ .*

Notons que si la borne est atteinte pour les forêts, nous ne savons pas si elle l'est pour les 2-arbres partiels.

*Idée des preuves.* Pour les forêts, la preuve utilise un invariant. Les auteurs définissent quatre types



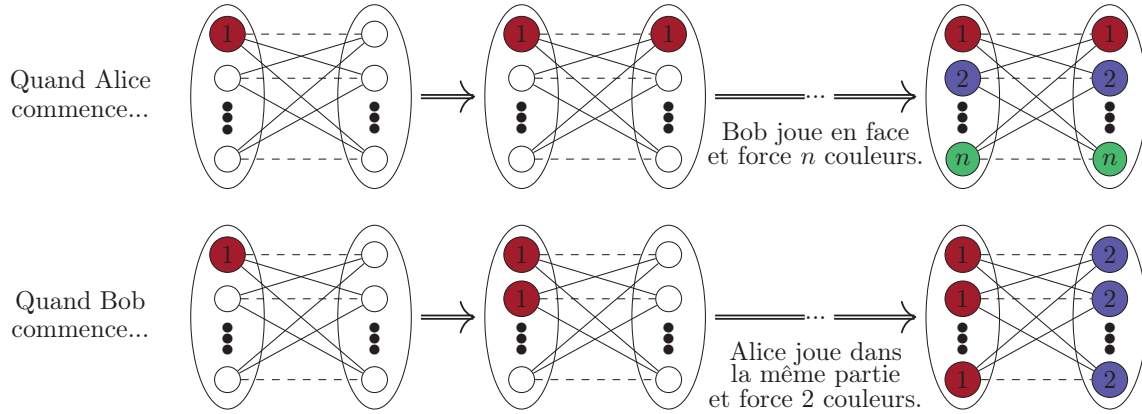


FIGURE 3.4 – Le graphe biparti complet moins un couplage parfait vérifie  $\Gamma_g^A(K_{n,n}^*) = n$  et  $\Gamma_g^B(K_{n,n}^*) = 2$  : quand Alice commence, elle doit jouer sur une des deux partitions et colorer un sommet avec la couleur 1. Bob répond en jouant sur le sommet de l'autre partition qui n'est pas adjacent au sommet choisi par Alice et le colore avec la couleur 1. En répétant cette stratégie, il parviendra à faire utiliser  $n$  couleurs. À l'inverse, quand Bob commence et colore avec la couleur 1 un sommet d'une partition, Alice colore avec la couleur 1 un autre sommet de la même partition. Les sommets de cette partition seront alors tous colorés avec la couleur 1, et ceux de l'autre partition avec la couleur 2.

de composants (un composant étant un sous-arbre maximal au sens de l'inclusion tel qu'un sommet coloré ne peut être qu'une feuille) respectant certaines propriétés, et démontrent qu'Alice peut maintenir l'invariant suivant : « à la fin du tour d'Alice, chaque composant est d'un des quatre types ». Chacun des types de composants n'étant coloré qu'avec trois couleurs au plus, cela démontre le résultat.

La preuve pour les 2-arbres partiels est une adaptation de la preuve de Zhu [150] sur le nombre de marquage ludique des  $k$ -arbres partiels. En utilisant une méthode similaire, les auteurs notent qu'un sommet peut avoir sept voisins déjà marqués (aboutissant à la borne de 8 pour le nombre de marquage ludique des 2-arbres partiels), mais que la coloration gloutonne donnera la même couleur à deux de ces voisins, ce qui démontre le résultat.  $\square$

Améliorant un résultat de Gyárfás et Lehel [73] sur le nombre de marquage ludique, nous trouvons également une borne de  $\omega(G)$  pour les graphes scindés<sup>3</sup>. Cette borne est meilleure que celle du nombre chromatique ludique (on peut construire un graphe scindé  $G$  ayant un nombre chromatique ludique de  $\omega(G) + 1$ ).

**Proposition 3.25** (D.). *Soit  $G$  un graphe scindé ayant une clique maximale de taille  $\omega$ . Alors,  $\Gamma_g^A(G) = \Gamma_g^B(G) = \omega$ .*

*Preuve.* Alice cherche à maintenir l'invariant suivant : « lorsqu'une couleur  $k$  est assignée pour la première fois, soit c'est en colorant un sommet de la clique, soit un sommet de la clique sera coloré par  $k$  au tour suivant ». Comme un sommet ne peut être coloré par la couleur  $k$  que si des sommets ont déjà été colorés par les couleurs 1 à  $k-1$ , ceci assurera que les couleurs 1, 2,  $\dots$ ,  $\omega$  seront assignées à des sommets de la clique, assurant qu'aucune couleur supérieure à  $\omega$  ne sera utilisée. Pour cela, elle va jouer sur la clique tant que celle-ci n'est pas entièrement colorée.

L'invariant est trivialement vrai pour la première couleur : si Alice commence, elle joue sur la clique et l'invariant est vérifié. Si Bob commence et qu'il joue sur la clique, l'invariant est vérifié. Si Bob commence et qu'il joue sur le stable, alors le sommet sera coloré avec la couleur 1, et au moins un sommet de la clique n'est pas adjacent à ce sommet. Alice colorera ce sommet au tour suivant, et donc l'invariant est maintenu.

3. Rappelons qu'un graphe scindé est un graphe dont les sommets peuvent être partitionnés en une clique et un ensemble indépendant.

Supposons que l'invariant a été maintenu pour les  $k - 1$  premières couleurs, et que le coup présent assigne la couleur  $k$  à un sommet. Si ce sommet est dans la clique, alors l'invariant est maintenu. Notons que si Alice a joué le coup assignant pour la première fois une couleur, elle l'a joué sur un sommet de la clique. Donc, si le sommet auquel est assigné pour la première fois la couleur  $k$  est dans le stable, alors c'est Bob qui l'a sélectionné, et ce sommet est nécessairement voisin des  $k - 1$  sommets de la clique déjà colorés par les couleurs  $1, \dots, k - 1$ . De plus, il a au moins un non-voisin  $u_k$  dans la clique. Au tour suivant, Alice choisit de jouer sur  $u_k$ , lequel sera coloré par la couleur  $k$ . L'invariant est donc maintenu.

Cette stratégie est illustrée figure 3.5. □

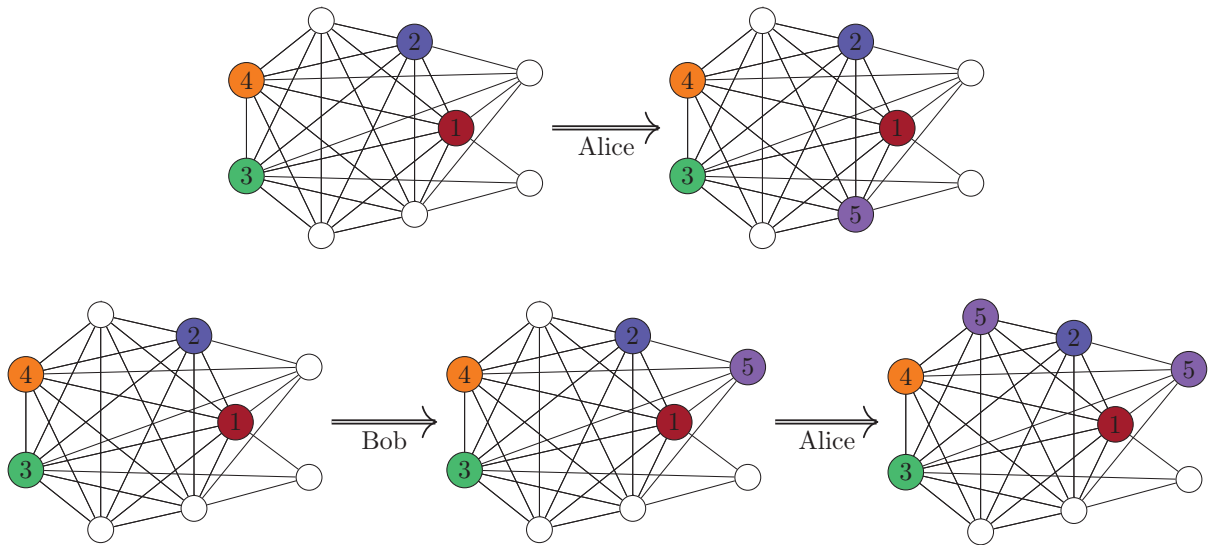


FIGURE 3.5 – Illustration du maintien de l'invariant : en haut, Alice peut trivialement le maintenir si elle est la première à utiliser une nouvelle couleur. En bas, si Bob est le premier à utiliser une nouvelle couleur sur le stable, alors Alice peut trouver un sommet de la clique qui sera coloré par cette nouvelle couleur.

Le tableau 3.2 récapitule les différentes bornes supérieures connues pour le nombre de Grundy ludique, le nombre de Grundy et le nombre de marquage ludique de plusieurs familles de graphes (les bornes inférieures indiquent qu'il existe un graphe de cette famille atteignant cette borne). Comme expliqué précédemment, la plupart des bornes proviennent du nombre de Grundy ou du nombre de marquage ludique.

Une question naturelle reliant les jeux et la théorie extrémale des graphes est d'étudier les familles extrémales pour un paramètre ludique donné, c'est-à-dire de caractériser les graphes pour lesquels le paramètre ludique atteint une certaine valeur. Nous démontrons des caractérisations pour les nombres de Grundy ludique 2,  $n - 1$  et  $n$ . Deux arêtes (ou non-arêtes) sont *disjointes* si elles n'ont aucune extrémité en commun. Nous démontrons le lemme technique suivant :

**Lemme 3.26.** *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  avec  $k$  non-arêtes disjointes.*

*Alors,  $\Gamma_g^A(G), \Gamma_g^B(G) \leq n - k$ .*

*Preuve.* Nous étudions  $G$  une fois qu'il est entièrement coloré. Soit  $S$  l'ensemble des sommets de  $G$  dont la couleur a été assignée plusieurs fois au cours de la partie. Soit  $C$  l'ensemble des couleurs assignées plusieurs fois au cours de la partie. En particulier, exactement  $n - |S| + |C|$  couleurs ont été utilisées au cours de la partie. Pour toute non-arête disjointe  $\overline{uv}$ , il y a deux possibilités :

1. Si  $u$  et  $v$  ont la même couleur  $k$ , alors  $u, v \in S$  et  $k \in C$ .
2. Si  $u$  et  $v$  ont deux couleurs différentes  $k_u$  et  $k_v$ , supposons sans perte de généralité que  $k_u > k_v$ . Alors, il existe un sommet  $w \in N(u)$  tel que  $w$  est coloré par  $k_v$ . Donc,  $v, w \in S$  et  $k_v \in C$ .

Famille de $G$	$\text{col}_g(G)$	$\Gamma(G)$	$\Gamma_g(G)$
Forêts	$\leq 4$ [50]	non-borné [146]	$\leq 3$ [81]
Graphes planaires	$\leq 17$ [151] $\geq 11$ [144]	$\leq \log_{4/3}(n) + 8 - \log_{4/3}(7)$ [13]	$\leq 17$ par $\text{col}_g$
Graphes planaires extérieurs	$\leq 7$ [70]	$\leq \log_{3/2}(n) + 6 - \log_{3/2}(6)$ [13]	$\leq 7$ par $\text{col}_g$
Graphes scindés	$\leq \omega(G) + 1$ [73]	$\leq \omega(G) + 1$ [73]	$\omega(G)$ Proposition 3.25
2-arbres partiels	$\leq 8$ [150]	Ouvert	$\leq 7$ [81]
$k$ -arbres partiels	$\leq 3k + 2$ [150] $\geq 3k + 2$ [144]	Ouvert	$\leq 3k + 2$ par $\text{col}_g(G)$
Graphes d'intervalle	$\leq 3\omega(G) - 2$ [50] $\geq 2\omega(G) - 2$	$\leq 8\omega(G)$ [122, 117] $\geq 5\omega(G)$ [103]	$\leq 3\omega(G) - 2$ par $\text{col}_g$
Graphes d'intervalle unitaires	Ouvert	$\leq 2\omega(G) - 1$ [47] $\geq 3\omega(G)/2$	$\leq 2\omega(G) - 1$ par $\Gamma$

Tableau 3.2 – Comparaison des bornes supérieures nombre de Grundy ludique avec ses deux bornes supérieures connues (nombre de Grundy et nombre de marquage ludique) sur différentes familles de graphes. Les bornes inférieures indiquent qu'il existe un graphe de la famille atteignant cette borne.

On constate que  $|S| - |C| \geq k$  : si un même sommet de  $S$  est comptabilisé pour plusieurs non-arêtes, alors sa couleur n'est comptabilisée dans  $C$  qu'une seule fois. Donc, au plus  $n - k$  couleurs ont été utilisées.  $\square$

Nous pouvons maintenant étudier les familles dont le nombre de Grundy ludique est égal à certaines valeurs :

**Proposition 3.27** (D.). *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$ . Alors :*

1.  $\Gamma_g^A(G) = n$  ou  $\Gamma_g^B(G) = n$  si et seulement si  $G$  est une clique ;
2.  $\Gamma_g^A(G) = n - 1$  ou  $\Gamma_g^B(G) = n - 1$  si et seulement si  $G$  est un graphe scindé avec une clique de taille  $n - 1$  ;
3.  $\Gamma_g^A(G) = 2$  si et seulement si  $G$  est biparti et il existe un sommet d'une des deux parties voisin de tous les sommets de l'autre partie ;
4.  $\Gamma_g^B(G) = 2$  si et seulement si  $G$  est biparti et pour tout sommet dans une partie, il existe un autre sommet de la même partie tel que ces deux sommets couvrent l'autre partie.

*Preuve.* 1. Si  $G$  est une clique, alors  $\Gamma_g^A(G) = \Gamma_g^B(G) = n$ . Si  $G$  n'est pas une clique, alors il a au moins une non-arête et le lemme 3.26 implique que  $\Gamma_g^A(G), \Gamma_g^B(G) \leq n - 1$ .

2.  $G$  n'est pas un graphe complet, car ce cas a été vu juste au-dessus. Il y a donc trois possibilités pour les non-arêtes de  $G$ . Si  $G$  contient deux non-arêtes disjointes, alors par le lemme 3.26 au plus  $n - 2$  couleurs seront utilisées. Si les non-arêtes de  $G$  induisent une étoile, alors  $G$  est un graphe scindé vérifiant  $\omega(G) = n - 1$  par la proposition 3.25 au plus  $n - 1$  couleurs seront utilisées. Si les non-arêtes de  $G$  induisent un triangle alors  $G$  est un graphe scindé vérifiant  $\omega(G) = n - 2$  et par la proposition 3.25 au plus  $n - 2$  couleurs seront utilisées. Ces trois cas démontrent le résultat.

3. Si  $G$  est biparti (nommons  $X$  et  $Y$  ses deux parties), et qu'il existe  $x \in X$  tel que  $N(x) = Y$  (sans perte de généralité), alors Alice peut jouer sur  $x$ , qui sera coloré avec la couleur 1. Aucun sommet de  $Y$  ne pouvant être coloré avec la couleur 1, les sommets de  $X$  ne pourront être colorés qu'avec la couleur 1. En retour, les sommets de  $Y$  ne pourront être colorés qu'avec la couleur 2. Réciproquement, si un tel  $x$  n'existe pas, alors quel que soit le sommet  $u$  qu'Alice colore avec la couleur 1, Bob peut jouer sur un sommet  $v$  à distance 3 du sommet d'Alice, qui

sera dans l'autre partie et coloré avec la couleur 1. Le chemin de  $u$  à  $v$  induit un  $P_4$  dont les deux extrémités sont colorées par la couleur 1, donc trois couleurs seront nécessaires.

4. Si  $G$  est biparti (nommons  $X$  et  $Y$  ses deux parties), et que pour tout sommet  $u \in X$  (resp.  $Y$ ), il existe  $v \in X$  (resp.  $Y$ ) tel que  $N(u) \cup N(v) = Y$  (resp.  $X$ ), alors quel que soit le sommet  $u$  que Bob choisit de colorer avec la couleur 1, Alice peut colorer le sommet  $v$  associé avec la couleur 1. La paire  $\{u, v\}$  agit comme un sommet couvrant toute l'autre partie, et le cas précédent s'applique alors. Réciproquement, s'il existe un  $u \in X$  tel qu'aucun sommet  $v$  ne vérifie  $N(u) \cup N(v) = Y$  (sans perte de généralité), alors Bob colore ce  $u$  avec la couleur 1. Si Alice colore un sommet  $v \in X$  avec la couleur 1, alors Bob colore avec la couleur 1 un sommet  $w \in Y \setminus (N(u) \cup N(v))$  à distance 3 de  $u$  ou de  $v$  ; deux couleurs supplémentaires seront nécessaires pour colorer les deux sommets sur le chemin entre  $w$  et  $u$  ou  $v$ . Si Alice colore un sommet de  $Y$ , alors Bob colore un sommet de  $Y$  à distance 3 de  $u$ , et une fois de plus trois couleurs seront nécessaires.

□

Depuis son introduction, des variantes au jeu de coloration de Grundy ont été proposées : Zhang et Zhu [147] ont étudié une version de coloration d'arêtes, tandis que Krawczyk et Walczak [105] ont étudié une version biaisée du jeu, dans lequel Alice et Bob jouent plusieurs coups successifs (démontrant également qu'il n'y a pas de fonction telle que le nombre chromatique ludique est fonction du nombre de Grundy ludique).

Bien qu'apparemment plus simple que le jeu de coloration, le jeu de coloration de Grundy se révèle assez difficile à étudier. Les seules familles étudiées sont très contraintes, et la seule preuve qui ne se base pas sur le nombre de marquage ludique est celle sur les forêts. Or, dans un arbre, colorer un sommet sépare effectivement l'arbre en plusieurs sous-arbres. Cette structure très forte permet de maintenir un invariant, mais ne semble pas généralisable à des familles plus connectées, comme les grilles. Qui plus est, la complexité du problème de décision 3.28 est encore ouverte.

### Problème de décision 3.28.

NOMBRE DE GRUNDY LUDIQUE

ENTRÉE : Un graphe  $G(V, E)$ , un entier  $k$ .

QUESTION : A-t-on  $\Gamma_g(G) \leq k$  ?

En conclusion, le jeu de coloration de Grundy se révèle tout aussi difficile à étudier que le jeu de coloration classique. Cela semble également être le cas de l'autre variante évoquée au début de cette section : dans le jeu de coloration séquentielle, décrit par Bodlaender [20], un ordre est défini sur les sommets, et les joueurs les colorent tour à tour en choisissant la couleur. Déterminer si Alice a une stratégie gagnante lorsque trois couleurs ou plus sont disponibles est PSPACE-complet pour ce jeu, y compris pour des graphes avec un degré maximum inférieur ou égal à 5 [20] et pour les graphes bipartis [21]. En revanche, des algorithmes polynomiaux existent si seules deux couleurs sont disponibles [20], ainsi que pour les graphes d'intervalle si l'ordre sur les sommets vérifie certaines conditions [21].

## 3.6 Conclusion

Comme vu dans ce chapitre, il existe de nombreuses façons de dériver un jeu d'une propriété ou d'un paramètre de graphe : jeu positionnel Maker/Breaker, jeu à objectif compétitif, jeu à objectif commun, jeu combinatoire... Ces jeux, et les éventuels paramètres d'optimisation dérivés, sont une alternative à la criticalité pour étudier la résilience des propriétés et paramètres de graphes.

Dans la prochaine partie, nous allons effectuer un chemin inverse, et étudier des jeux définis à l'origine sur des structures spécifiques (grilles, tas de jetons) en étendant leur définition pour y jouer sur des graphes. Notre objectif sera de retrouver des comportements particuliers malgré le fait que les structures sont plus complexes à étudier. Nous allons en particulier travailler sur des jeux combinatoires.

## Deuxième partie

### Jeux

# Chapitre 4

## Jeux combinatoires

Ce chapitre est une introduction à la théorie des jeux combinatoires, et plus spécifiquement aux jeux impartiaux. Dans l'intermède précédent, nous avons vu comment transformer des paramètres et propriétés de graphes en jeux, et qu'une des façons de faire était d'utiliser le paramètre ou la propriété comme un simple prétexte : Alice et Bob jouaient divers coups en suivant certaines règles, chacun ayant comme objectif de jouer le dernier coup. Combinée à d'autres, cette condition est constitutive de la définition des jeux combinatoires.

Sauf mention contraire, les définitions et résultats de ce chapitre sont tirés des livres suivants [6, 19, 37, 133]. Une lectrice intéressé-e pourra s'y référer pour plus d'informations.

### Résumé du chapitre

Nous rappelons les concepts de théorie des jeux combinatoires que nous allons utiliser dans les deux chapitres suivants, en l'occurrence la théorie des jeux impartiaux en convention normale, aussi appelée théorie de Sprague-Grundy. Nous commencerons par poser dans la section 4.1 les principales définitions utiles à l'étude des jeux combinatoires. Dans la section 4.2, nous exposerons les principaux résultats de la théorie de Sprague-Grundy, qui consiste à réduire les jeux impartiaux à des positions d'un jeu classique appelé NIM. Enfin, dans la section 4.3, nous ferons un état de l'art sur une famille spécifique de jeux impartiaux, les jeux *taking-breaking*, que nous étudierons en particulier dans les chapitres 5 et 6.

### 4.1 Introduction

#### 4.1.1 Définitions

Les jeux combinatoires sont une famille de jeux très spécifiques. Pour qu'un jeu soit considéré comme combinatoire, il doit répondre à certains critères, qui sont détaillés dans la définition ci-dessous :

**Définition 4.1.** Un jeu est *combinatoire* s'il respecte les conditions suivantes :

1. C'est un jeu à deux joueurs (Alice et Bob) ;
2. Les deux joueurs jouent tour à tour, sans possibilité de passer ;
3. L'information est parfaite : chaque joueur connaît l'état exact du jeu, les coups précédemment joués et toutes ses possibilités de jeu ainsi que toutes celles de l'autre joueur ;
4. Le jeu est fini : le nombre de coups possibles est limité, et il est impossible de revenir à une position déjà vue ;
5. Il n'y a pas de hasard ;
6. Il est impossible d'avoir une égalité ;

7. Le dernier coup joué permet de déterminer lequel des deux joueurs l'emporte.

En particulier, les quatrième et sixième conditions impliquent qu'un des deux joueurs a une stratégie gagnante. Notons que nous utilisons le terme *jeu* pour désigner l'ensemble de règles détaillant les coups autorisés pour les joueurs, et celui de *position* d'un jeu pour désigner un état d'une partie à un moment donné.

Cette définition, très restrictive, comprend néanmoins certains jeux connus : HEX, FJORDS (modulo une phase aléatoire de construction du plateau) ou NIM. Cependant, des théories adjacentes permettent de relâcher certaines conditions tout en conservant une partie des structures théoriques développées pour les jeux combinatoires. Ainsi, la théorie des *loopy games* permet d'étudier des jeux combinatoires dans lesquels les joueurs peuvent boucler en revenant sur des positions déjà vues précédemment, ce qui permet par exemple d'étudier les ÉCHECS. La théorie des *scoring games* se penche sur les jeux combinatoires dans lesquels le gagnant n'est pas déterminé uniquement par le dernier coup joué, mais par un score accumulé au cours de la partie, ce qui permet d'étudier le jeu de GO. Au cours de cette partie, nous n'allons cependant étudier que des jeux purement combinatoires.

Le premier exemple connu de jeu combinatoire est le jeu de NIM, étudié en 1901 par Bouton [26]. Le jeu de NIM se joue sur des piles de jetons. Tour à tour, Alice et Bob sélectionnent une pile et en retirent autant de jetons qu'ils le souhaitent (au moins un jeton doit être retiré). Le jeu se termine lorsqu'un des deux joueurs retire les derniers jetons de la dernière pile, remportant la partie. La figure 4.1 illustre une partie de NIM avec trois piles de respectivement 4, 2 et 3 jetons.



FIGURE 4.1 – Une partie du jeu de NIM. Ici, Alice remporte la partie.

Une distinction importante dans les jeux combinatoires consiste en la condition de victoire. Nous avons en effet considéré qu'Alice gagnait une partie de NIM si et seulement si elle jouait le dernier coup. Cependant, il est possible de considérer qu'elle gagne si et seulement si elle ne joue pas le dernier coup.

**Définition 4.2.** Un jeu combinatoire est joué en convention de victoire dite *normale* si le joueur jouant le dernier coup l'emporte. Dans le cas contraire, le jeu est joué en convention dite *misère*.

Charles Bouton a étudié le jeu de NIM sous les deux conventions de victoire, et a montré de belles caractérisations pour déterminer qui d'Alice ou de Bob l'emporte (ces caractérisations seront montrées dans la section 4.2). Dans ce cas particulier, les caractérisations sont très similaires entre les conventions normale et misère, mais ce n'est pas le cas dans le cas général : étudier les jeux combinatoires en convention misère requiert généralement des outils beaucoup plus complexes. **Dans le reste de cette partie, nous ne considérerons que la convention normale.**

Par ailleurs, notons que dans le jeu de NIM, en partant du principe que les deux joueurs jouent parfaitement, la seule différence entre Alice et Bob est qui joue en premier. En effet, Alice et Bob ont, à un tour donné, exactement les mêmes coups à leur disposition. Cependant, certains jeux peuvent avoir des règles donnant des possibilités de coups différentes à Alice et Bob. Cela induit une séparation des jeux combinatoires selon ce critère :

**Définition 4.3.** Un jeu combinatoire est dit *impartial* si, pour chaque position de jeu possible, Alice et Bob ont les mêmes ensembles de coups possibles. Dans le cas contraire, le jeu est dit *partisan*.

Certains jeux impartiaux peuvent être adaptés en jeux partisans, et vice-et-versa, avec une petite modification des règles, mais les outils utilisés pour les analyser diffèrent. Ainsi, les jeux partisans sont étudiés via la théorie de Conway (qui ne sera qu'évoquée), tandis que les jeux impartiaux sont

étudiés via la théorie de Sprague-Grundy (qui sera détaillée dans la section 4.2). En particulier, la théorie de Sprague-Grundy est incluse dans la théorie de Conway).

Une illustration de la différence entre jeux impartiaux et partisans est donnée par les jeux CRAM et DOMINEERING [63]. Le jeu CRAM se joue sur un plateau, sur lequel Alice et Bob placent à tour de rôle des dominos, et le premier d'entre eux qui est incapable de jouer perd la partie. Le jeu DOMINEERING en est la version partisane, dans laquelle Alice peut placer des dominos verticalement et Bob horizontalement. Cette différence est illustrée figure 4.2. Notons que **dans le reste de cette partie, nous ne considérerons que des jeux impartiaux**. En particulier, nous désignerons les joueurs par le fait qu'ils sont premier ou deuxième joueur sur une position donnée.

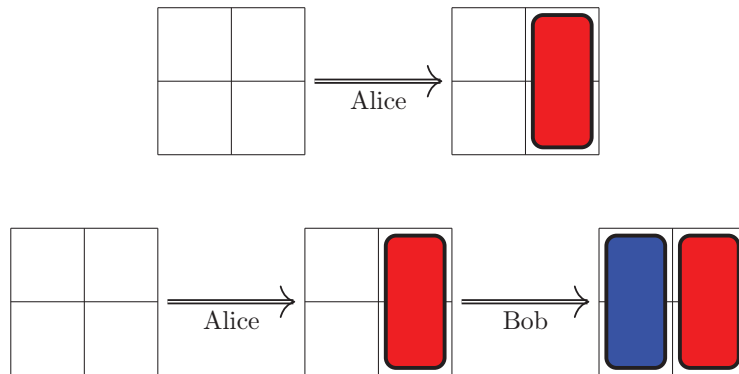


FIGURE 4.2 – Les différences entre CRAM et DOMINEERING, toutes deux jouées sur une grille  $2 \times 2$ . En haut, une partie de DOMINEERING : Alice gagne en jouant un domino au milieu et Bob, ne pouvant jouer que des dominos horizontalement, perd immédiatement. En bas, une partie de CRAM : Alice joue un domino, Bob également, et Alice, ne pouvant plus jouer, perd.

Afin d'étudier une position de jeu, nous définissons ses issues :

**Définition 4.4.** Une position d'un jeu impartial appartient à une des deux classes suivantes :

1. Elle est dans  $\mathcal{N}$  (pour *Next player*) si et seulement si le premier joueur a une stratégie gagnante quels que soient les coups joués par le deuxième joueur ;
2. Elle est dans  $\mathcal{P}$  (pour *Previous player*) si et seulement si le deuxième joueur a une stratégie gagnante quels que soient les coups joués par le premier joueur.

La classe à laquelle appartient la position est appelée son *issue*.

Comme dit précédemment, une position d'un jeu impartial appartient nécessairement à une des deux classes  $\mathcal{N}$  ou  $\mathcal{P}$  : un des deux joueurs a une stratégie gagnante, et la seule différence entre les deux joueurs est qui commence à jouer. La figure 4.3 illustre la notion d'issue pour deux positions de CRAM.

Comme pour les jeux vus dans le chapitre 3, le principal problème dans les jeux combinatoires est de déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante dans une position donnée. Ceci est illustré par le problème de décision 4.5. Étudier un jeu revient à répondre à cette question pour le plus de positions possibles.

**Problème de décision 4.5.**

JEU COMBINATOIRE IMPARTIAL

ENTRÉE : Les règles d'un jeu combinatoire impartial, une position de jeu  $J$ .

QUESTION : A-t-on  $J \in \mathcal{N}$  ?

Une question naturelle est donc l'existence d'un algorithme simple permettant de déterminer l'issue d'une position de jeu donnée. Comme le monde est bien fait, il en existe un ! Comme le monde est mal fait, il a une complexité algorithmique très élevée. Nous allons le détailler dans la section suivante.



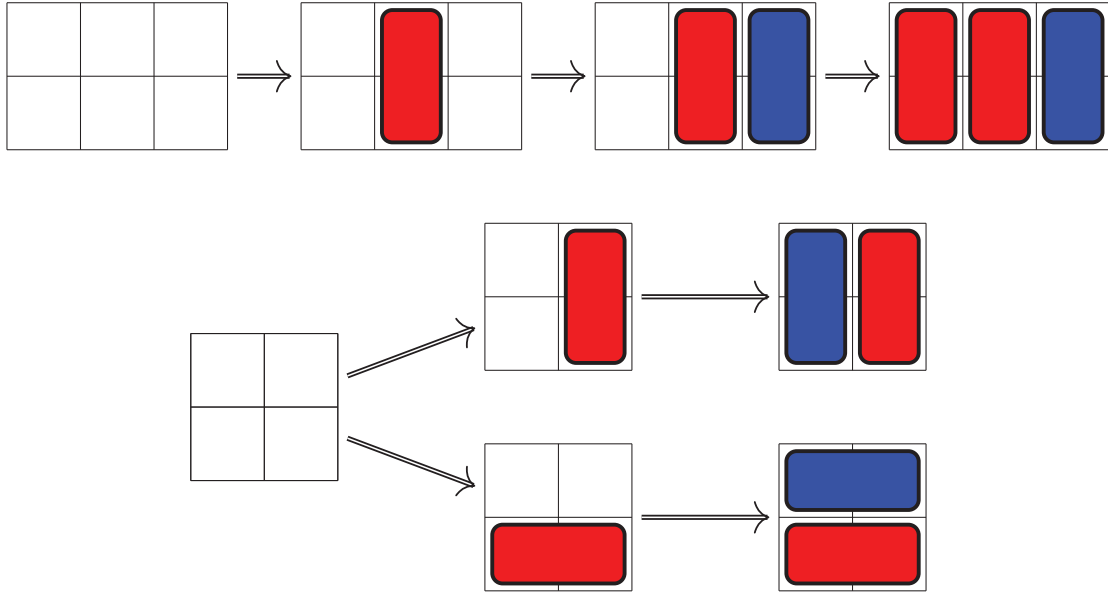


FIGURE 4.3 – Illustration des issues. En haut, la position est dans  $\mathcal{N}$  : le premier joueur peut répondre aux coups possibles du deuxième joueur et gagner. En bas, la position est dans  $\mathcal{P}$  : le deuxième joueur peut répondre aux deux coups possibles du premier joueurs et gagner.

#### 4.1.2 Graphe de jeu

Afin de définir cet algorithme, nous aurons besoin de la notion d'options d'une position :

**Définition 4.6.** Étant donnée une position  $J$  d'un jeu combinatoire, une *option* de  $J$  est une position pouvant être atteinte en jouant un coup légal depuis  $J$ .

L'ensemble des options d'une position  $J$  est noté  $\text{opt}(J)$ .

La figure 4.4 illustre les différentes options d'une position de CRAM. Une constatation immédiate est que, en dépeignant ces options, on dessine en fait un graphe orienté. C'est cette remarque qui donne lieu à la définition du graphe d'un jeu.

**Construction 4.7.** Étant donnée une position  $J$  d'un jeu combinatoire, le graphe de jeu de  $J$  est le graphe orienté construit de la façon suivante :

- Les sommets sont toutes les positions qui sont atteignables depuis  $J$  en jouant une séquence de coups ;
- Un arc  $\overrightarrow{j_1 j_2}$  existe si et seulement si, en notant  $J_i$  la position représentée par le sommet  $j_i$ ,  $J_2 \in \text{opt}(J_1)$ .

Par les propriétés de la définition 4.1 (le jeu est fini et ne boucle pas), le graphe de jeu d'une position  $J$  ne contient aucun cycle orienté et a une seule source<sup>1</sup> : le sommet représentant  $J$ .

La figure 4.5 montre l'exemple d'un graphe de jeu pour une petite grille rectangulaire du jeu CRAM. Le graphe a été simplifié afin d'éliminer les options menant au même résultat (par exemple, dans une position où deux dominos ont été joués, lequel a été joué par le premier ou le deuxième joueur n'a aucune importance).

Notons que si  $J' \in \text{opt}(J)$  alors le graphe de jeu de  $J'$  est un sous-graphe strict du graphe de jeu de  $J$ .

1. Rappelons qu'un sommet  $x$  est une source s'il n'existe aucun arc  $\overrightarrow{yx}$ .

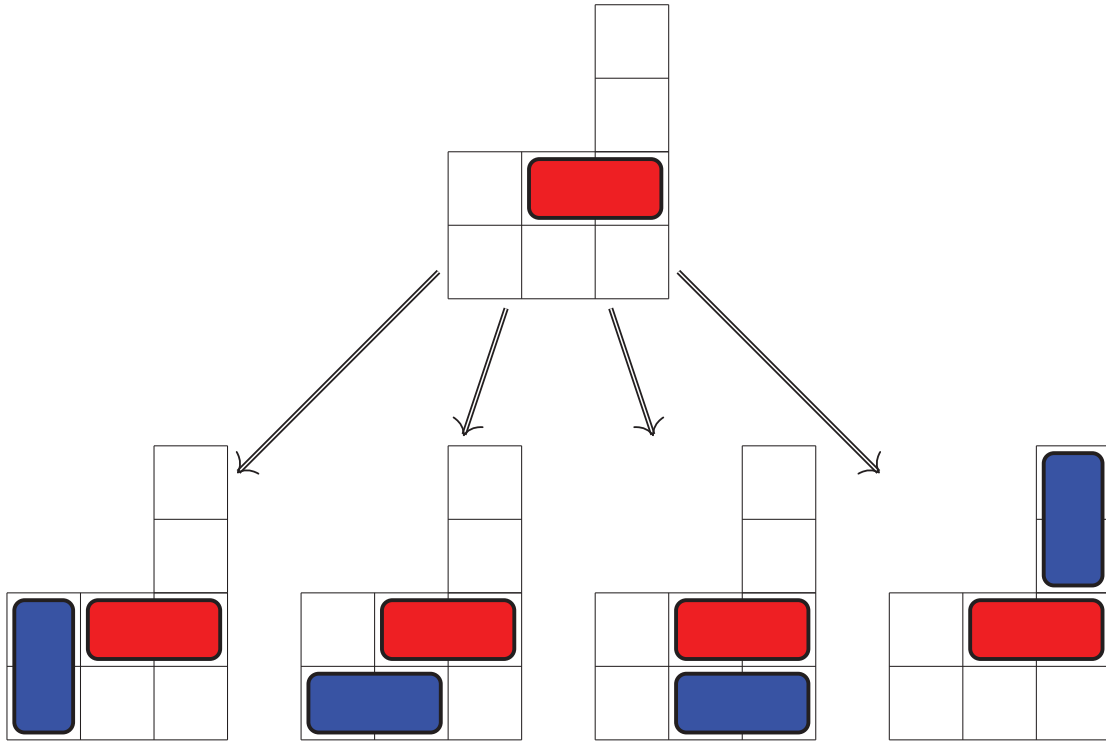


FIGURE 4.4 – Les options d’une position de CRAM.

**Observation 4.8.** *Le graphe de jeu induit une autre façon de considérer un jeu combinatoire : plutôt que de jouer directement au jeu, les joueurs déplacent un jeton sur le graphe de jeu en suivant les arcs, le jeu se terminant lorsque le jeton est sur un puits<sup>2</sup>.*

À partir du graphe de jeu, il existe un algorithme très simple permettant de déduire l’issue d’une position donnée d’un jeu impartial, basé sur l’observation suivante : quand une position est un puits, c’est qu’il est impossible de jouer dessus, et donc qu’elle est dans  $\mathcal{P}$ . À l’inverse, s’il est possible de jouer vers un puits, alors ce coup est clairement gagnant et la position est dans  $\mathcal{N}$ . En appliquant récursivement cette méthode, un algorithme permettant de déterminer l’issue d’une position donnée apparaît immédiatement. Il suffit en effet d’étiqueter les sommets du graphe de jeu associé à la position avec  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{P}$ , en partant des puits et en supprimant du graphe les sommets déjà étiquetés, afin d’arriver à étiqueter la source du graphe de jeu. Cette étiquette sera l’issue du jeu. L’algorithme 2 explicite cette méthode, qui est illustrée figure 4.6 (dans la figure, nous n’appliquons pas l’élagage des sommets déjà étiquetés).

**Observation 4.9.** *Les positions de  $\mathcal{P}$  forment un noyau dans le graphe de jeu, c’est-à-dire un ensemble de sommets indépendants (deux sommets du noyau ne peuvent pas être adjacents) et absorbants (tout sommet hors du noyau a au moins un successeur dans le noyau).*

L’algorithme 1 se termine nécessairement car le graphe de jeu est acyclique, donc à tout moment il existe un puits parmi les sommets non-étiquetés. Cela signifie que le problème de décision 4.5 est un problème décidable. Cependant, il est aisé de constater que l’algorithme 1 est loin d’être efficace. Il nécessite en effet un espace mémoire suffisant pour contenir tout le graphe de jeu (rappelons que le graphe représenté figure 4.5 est simplifié : la position initiale a en fait sept options). Sans règles *ad hoc* pour élaguer le graphe de jeu et reconnaître des symétries et positions identiques, l’algorithme

2. Rappelons qu’un sommet  $x$  est un puits s’il n’existe aucun arc  $\overrightarrow{xy}$ .

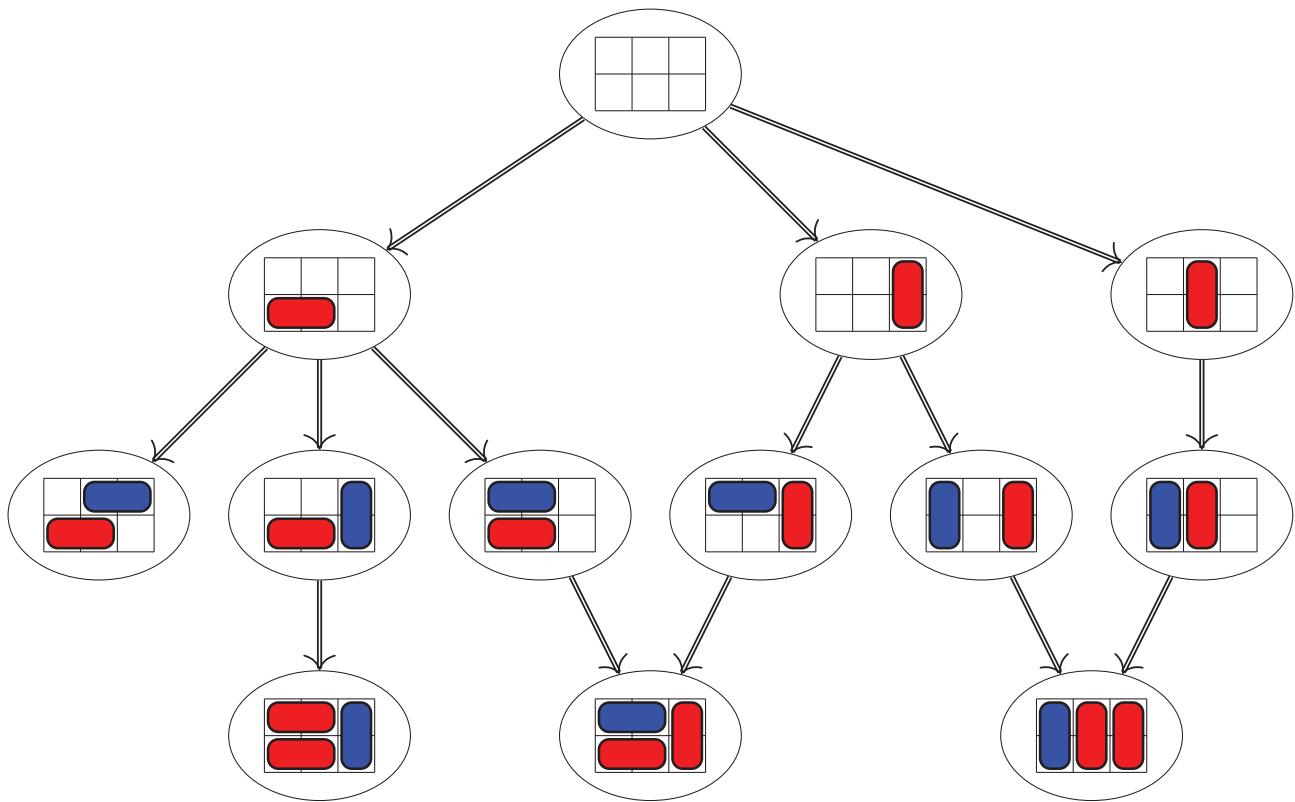


FIGURE 4.5 – Le graphe de jeu d’une grille  $2 \times 3$  pour le jeu CRAM. Par souci de lisibilité, les options symétriques ont été omises.

---

**Algorithme 1** : Calculer l’issue d’une position à partir du graphe de jeu.

---

**Entrée** : Une position  $J$  d’un jeu impartial

**Sortie** : L’issue de  $J$

**début**

    construire le graphe de jeu  $G(V, \vec{E})$  de  $J$

**tant que** la source n’est pas étiquetée **faire**

**pour** tout puits  $u \in V$  **faire**

            étiqueter  $u$  avec  $\mathcal{P}$

**si** la source n’est pas étiquetée **alors**

**pour** tout sommet  $v \in V$  tel que  $\vec{uv} \in \vec{E}$  est un puits **faire**

                étiqueter  $u$  avec  $\mathcal{N}$

**si** la source n’est pas étiquetée **alors**

            supprimer tous les sommets étiquetés

    renvoyer l’étiquette de la source

---

requiert donc un temps de calcul exponentiel et un espace au moins polynomial en la taille de l’entrée. Par exemple, pour CRAM, l’espace mémoire nécessaire pour stocker le graphe de jeu sera exponentiel dans le pire des cas, et le temps d’exécution sera également exponentiel.

Un autre algorithme existe pour déterminer l’issue d’un jeu combinatoire, basé sur la proposition suivante :

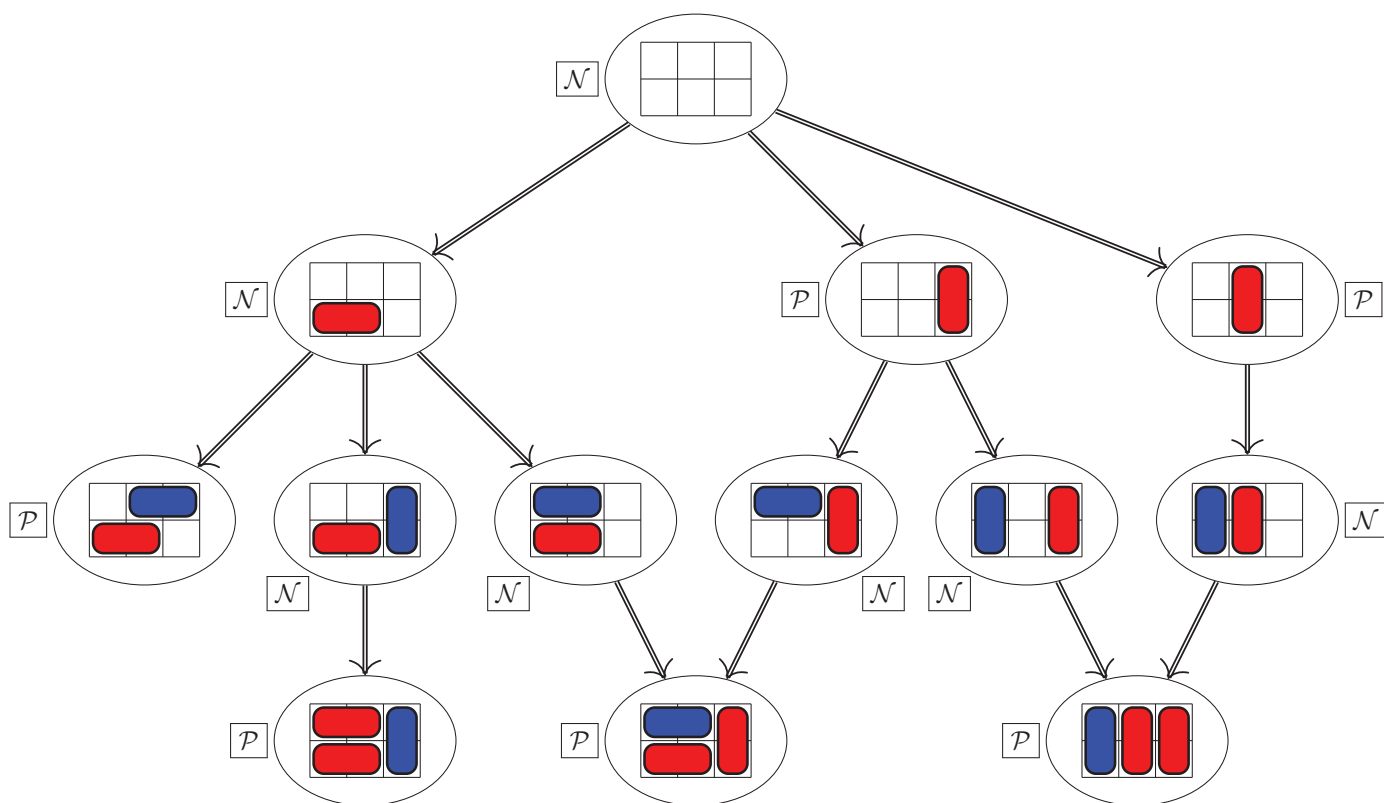


FIGURE 4.6 – Le graphe de jeu de la figure 4.5 étiqueté par la méthode de l’algorithme 1 (les étiquettes sont encadrées).

**Proposition 4.10.** *Soit  $J$  une position d’un jeu impartial.*

1. *Si  $\text{opt}(J) = \emptyset$  alors  $J \in \mathcal{P}$ .*
2. *S’il existe  $J' \in \text{opt}(J)$  tel que  $J' \in \mathcal{P}$ , alors  $J \in \mathcal{N}$ .*
3. *Si pour tout  $J' \in \text{opt}(J)$  on a  $J' \in \mathcal{N}$ , alors  $J \in \mathcal{P}$ .*

*Preuve.* Soit  $J$  une position d’un jeu impartial. Si  $J$  n’a pas d’options, alors le premier joueur ne peut pas jouer et perd, donc  $J \in \mathcal{P}$ . S’il existe une option  $J'$  de  $J$  qui est dans  $\mathcal{P}$ , alors cela signifie que  $J'$  est une position perdante pour le joueur qui devra jouer dessus. Donc, le premier joueur sur  $J$  a une stratégie gagnante : jouer vers  $J'$  et laisser une position perdante à l’autre joueur, ce qui implique que  $J \in \mathcal{N}$ . Si au contraire toutes les options de  $J$  sont dans  $\mathcal{N}$ , alors quoi que fasse le premier joueur sur  $J$ , son adversaire sera dans une position où il aura une stratégie gagnante, ce qui implique que  $J \in \mathcal{P}$ .  $\square$

La proposition 4.10 nous permet d’affiner l’algorithme 1 afin d’obtenir l’algorithme 2 : l’idée est qu’on n’a réellement besoin d’explorer les branches du graphe de jeu qu’une à la fois. Si on obtient qu’une option  $J'$  de  $J$  vérifie  $J' \in \mathcal{P}$ , alors  $J \in \mathcal{N}$ . Sinon, on peut ne plus jamais considérer  $J'$  à l’avenir.

Cet algorithme nécessite toujours un temps de calcul exponentiel en la taille de l’entrée. Concernant l’espace mémoire, il sera souvent plus efficace, car dépendant de la hauteur du graphe de jeu (où la hauteur est la distance maximale entre la source et un puits). Pour CRAM, cet espace est polynomial : l’entrée est une grille et les dominos déjà joués, et la hauteur du graphe de jeu est égale au nombre maximal de dominos pouvant encore être joués, qui est polynomial en la taille de l’entrée. En revanche, il reste techniquement exponentiel pour NIM : l’entrée est une liste de nombres

---

**Algorithme 2** :  $\text{CalculIssue}(J)$ 

---

**Entrée** : Une position  $J$  d'un jeu impartial

**Sortie** : L'issue de  $J$

**début**

```
   $S = \text{opt}(J)$  tant que  $S \neq \emptyset$  faire
    soit  $J' \in S$ 
    si  $\text{CalculIssue}(J') = \mathcal{P}$  alors
      renvoyer  $\mathcal{N}$ 
    sinon
       $S = S \setminus \{J'\}$ 
  renvoyer  $\mathcal{P}$ 
```

---

encodés en binaire, et la hauteur du graphe de jeu est égal à la somme des nombres de la liste, qui est exponentielle en la taille de l'entrée. Cependant, comme l'a souligné Fraenkel [58], cette complexité apparemment exponentielle peut en fait se réduire à une complexité polynomiale : le jeu a une complexité élevée en raison de la très faible taille de son entrée plus qu'en raison de calculs difficiles. Nous considérerons donc que les jeux dont l'entrée est de petite taille (typiquement, logarithmique en fonction de ce qu'elles représentent) et dont la hauteur du graphe de jeu est polynomiale ont une complexité polynomiale.

En raison de l'inefficacité pratique de cet algorithme, les théoricien-ne-s des jeux combinatoires ont développé de nombreux outils pour étudier des jeux ou des familles de jeux plus spécifiques. Un de ces outils est la théorie de Sprague-Grundy, que nous allons détailler dans la section suivante.

## 4.2 Théorie de Sprague-Grundy

### 4.2.1 Somme de jeux

La figure 4.7 illustre une situation qui peut souvent advenir dans certains jeux : une série de coups peut diviser l'espace de jeu en deux sous-espaces totalement disjoints. Ici, la grille initiale a été divisée en deux sous-grilles, et il est impossible de jouer sur les deux sous-grilles en même temps. Cette observation induit la définition d'une somme disjointe de jeux.

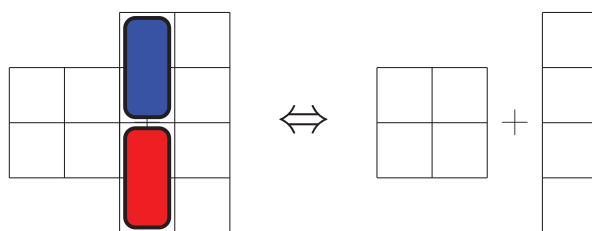


FIGURE 4.7 – Illustration de l'intérêt de la somme de jeux : la position étudiée dans la figure 4.8 est en fait une position plus large divisible en deux sous-positions disjointes.

**Définition 4.11.** Soient  $J_1, J_2$  deux positions d'un jeu combinatoire. La *somme de jeux* de  $J_1$  et  $J_2$ , notée  $J_1 + J_2$ , est le jeu dans lequel Alice et Bob jouent tour à tour, soit sur  $J_1$ , soit sur  $J_2$ . Le jeu s'achève lorsque l'un des deux joueurs ne peut plus jouer sur aucun des deux jeux.

Comme nous sommes en convention normale, le gagnant est celui qui joue le dernier coup de la deuxième partie. Une somme de jeux et ses options sont illustrées figure 4.8. Notons par ailleurs que

$J_1$  et  $J_2$  peuvent être des positions de jeux différents : on peut sommer une position de CRAM avec une position de NIM. De plus, la somme de jeux est associative et commutative.

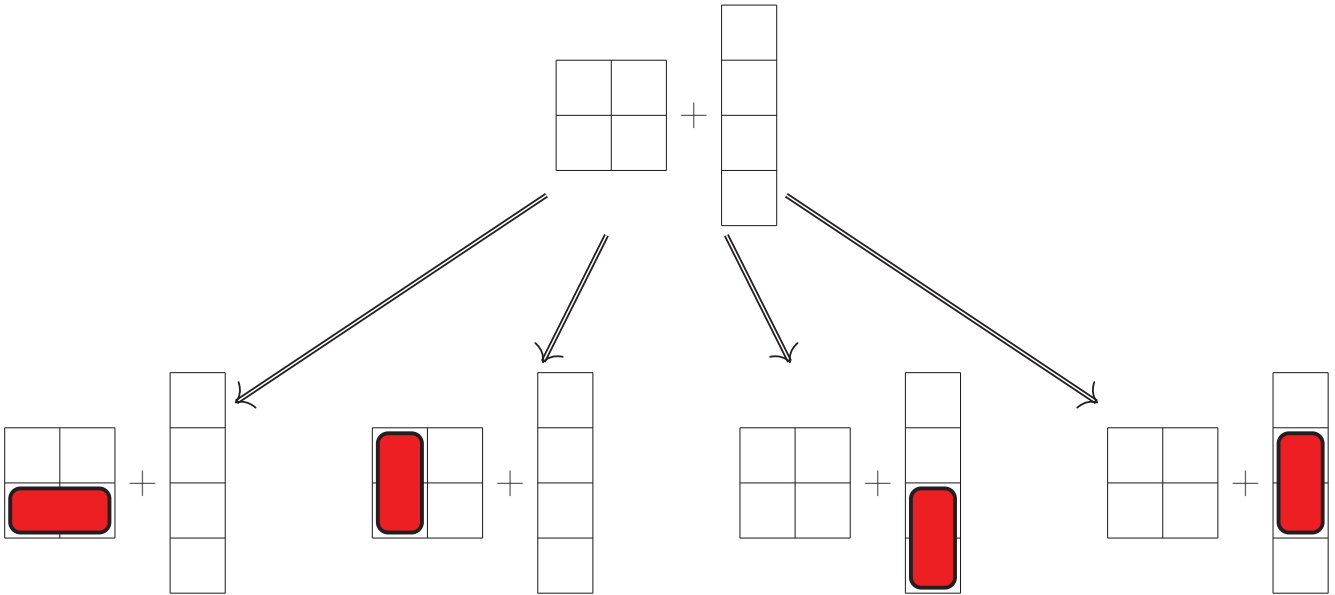


FIGURE 4.8 – Une somme de positions du jeu CRAM et ses options. Dans l’option la plus à droite, les joueurs ne peuvent plus jouer que sur la grille  $2 \times 2$ .

**Observation 4.12.** Si on considère le jeu combinatoire dans sa version où les joueurs déplacent un jeton sur le graphe de jeu, expliquée dans l’observation 4.8, la somme de jeux prend alors un autre sens : les deux joueurs continuent de faire emprunter un arc à un jeton, mais cette fois la partie a lieu sur plusieurs graphes orientés disjoints avec chacun leur jeton. Le jeu se termine lorsque tous les jetons sont sur des puits.

Une question essentielle est de savoir s’il est possible de déduire l’issue d’une somme de jeux en fonction des issues de chacune de ses composantes. La proposition suivante est un pas important dans cette direction :

**Proposition 4.13.** Soit  $J$  une position d’un jeu combinatoire. Alors,  $J + J \in \mathcal{P}$ .

*Preuve.* Le résultat se démontre par induction sur la taille du graphe de jeu. Si  $J$  est dans un état final (aucun coup n’est disponible), alors le résultat est évident. Sinon, quel que soit le coup du premier joueur sur n’importe laquelle des deux positions, le deuxième joueur le réplique sur l’autre position. Il laisse alors une somme de deux positions identiques, qui est  $\mathcal{P}$  par hypothèse d’induction.  $\square$

Par ailleurs, si une des positions sommées est dans  $\mathcal{P}$ , alors déterminer l’issue de la somme est aisé :

**Proposition 4.14.** Soient  $J_1, J_2$  deux positions d’un jeu combinatoire. Si  $J_1 \in \mathcal{P}$ , alors  $J_1 + J_2$  a la même issue que  $J_2$ .

*Preuve.* Nous raisonnons par induction sur la taille des graphes de jeux. Le cas de base est si  $J_1$  ou  $J_2$  est dans un état final (aucun coup n’est disponible). Si  $J_1$  est dans un état final, alors  $J_1 + J_2$  est exactement  $J_2$  et a donc la même issue. Si  $J_2$  est dans un état final, alors il est dans  $\mathcal{P}$ . De plus,  $J_1 + J_2$  est exactement  $J_1$  et est donc dans  $\mathcal{P}$ , prouvant le résultat. Supposons donc qu’aucun des deux jeux n’est dans un état final.

Étudions d'abord le cas où  $J_2 \in \mathcal{P}$ . Quel que soit le coup du premier joueur, il va jouer vers la somme d'un jeu dans  $\mathcal{N}$  (celui sur lequel il a joué) et d'un jeu dans  $\mathcal{P}$ . Par hypothèse d'induction, cette somme est dans  $\mathcal{N}$ . Toutes les options de  $J_1 + J_2$  étant dans  $\mathcal{N}$ , la proposition 4.10 prouve que  $J_1 + J_2 \in \mathcal{P}$ .

Étudions maintenant le cas où  $J_2 \in \mathcal{N}$ . Le premier joueur applique sa stratégie gagnante sur  $J_2$ , laissant une somme de deux jeux dans  $\mathcal{P}$ . Par hypothèse d'induction, cette somme est  $\mathcal{P}$ , donc  $J_1 + J_2$  a une option dans  $\mathcal{P}$ . La proposition 4.10 permet de conclure que  $J_1 + J_2 \in \mathcal{N}$ .  $\square$

Cette proposition permet d'élaguer les arbres de jeux étudiés : dès qu'une position est une somme de deux sous-positions dont l'une est  $\mathcal{P}$ , elle peut être immédiatement étiquetée par la même étiquette que l'autre. Le tableau 4.1 représente cette méthode. Comme on peut le constater, il ne reste plus qu'à étudier la somme de deux positions dans  $\mathcal{N}$  !

+	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	?

Tableau 4.1 – Issue d'une somme de jeux en fonction des issues des jeux.

Il semble que sommer deux positions dans  $\mathcal{N}$  est plus difficile : le premier joueur aura-t-il intérêt à jouer dans l'une ou dans l'autre des positions ? Comment le déterminer ? Or, comme le montre la figure 4.9, la somme de deux positions dans  $\mathcal{N}$  peut être dans  $\mathcal{N}$  ou dans  $\mathcal{P}$ . Les outils que nous avons pour le moment ne nous permettent pas de trouver de méthode automatique pour résoudre ce dilemme.

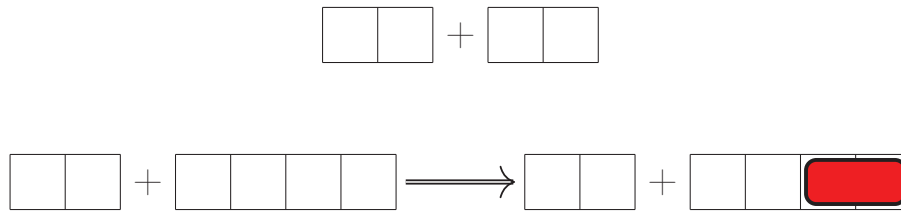


FIGURE 4.9 – Deux sommes de positions dans  $\mathcal{N}$ . La première est une somme de deux positions identiques, donc la somme est dans  $\mathcal{P}$  par la proposition 4.13. Dans la deuxième, le premier joueur peut jouer un domino sur le bord, ce qui mène à une position dans  $\mathcal{P}$ , donc la somme initiale est dans  $\mathcal{N}$  par la proposition 4.10.

Nous allons voir les outils supplémentaires qui permettent de déterminer l'issue de la somme de deux positions dans  $\mathcal{N}$ , mais avant cela, nous allons nous pencher sur le jeu de NIM. En effet, sa résolution nous offrira des intuitions utiles pour travailler sur les autres jeux impartiaux.

## 4.2.2 Retour à NIM

Le jeu de NIM, défini et étudié par Bouton [26], a connu de nombreuses variantes, les plus connues étant les jeux *taking-breaking* que nous étudierons dans la section 4.3. La version initiale est cependant suffisante pour retrouver les concepts de somme et d'issue, mais également pour aller plus loin et commencer à réfléchir à une équivalence de jeux.

Rappelons les règles du jeu de NIM. Celui-ci se joue sur des piles de jetons, et le premier et deuxième joueur retirent alternativement autant de jetons qu'ils le souhaitent d'une seule pile qu'ils choisissent (au moins un, au plus toute la pile). Le gagnant est celui qui retire les derniers jetons. L'objectif est de résoudre le problème de décision 4.15, c'est-à-dire de décider quel joueur a une stratégie gagnante. Nous allons désigner une position du jeu de NIM avec des piles de  $x_1, \dots, x_k$  jetons par la séquence  $(x_1, \dots, x_k)$ .

**Problème de décision 4.15.**

NIM

ENTRÉE : Une position  $J = (x_1, \dots, x_k)$  du jeu de NIM.

QUESTION : A-t-on  $J \in \mathcal{N}$  ?

Concentrons-nous d'abord sur le cas où il n'y a qu'une seule pile. Trivialement, la position  $(n)$  a comme options toutes les positions  $(i)$  pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , et la seule position dans  $\mathcal{P}$  est  $(0)$ .

Lorsqu'il y a deux piles, nous pouvons représenter une position comme une somme de deux positions à une seule pile. Par la proposition 4.13, si les deux piles ont le même nombre de jetons, alors la position est dans  $\mathcal{P}$ . Si, en revanche, les deux piles n'ont pas le même nombre de jetons ( $i$  et  $j$ , avec sans perte de généralité  $i > j$ ), alors le premier joueur pourra jouer vers une option où les deux piles ont le même nombre de jetons en retirant  $i - j$  jetons de la pile avec  $i$  jetons. Ces positions sont donc toutes dans  $\mathcal{N}$ .

Tout se complique lorsqu'il y a plus de deux piles. En effet, chaque pile non-vide étant dans  $\mathcal{N}$ , nous retrouvons les mêmes difficultés qu'à la fin de la section précédente. Cependant, la structure du jeu de NIM permet de caractériser les positions qui sont dans  $\mathcal{P}$ . Pour cela, nous utilisons le concept de nim-somme :

**Définition 4.16.** Soient  $k$  un entier strictement positif et  $x_1, \dots, x_k$  des entiers positifs. Leur *nim-somme*, notée  $x_1 \oplus \dots \oplus x_k$ , est l'entier positif dont l'écriture en base 2 est égal à leur somme bit à bit sans retenue lorsqu'ils sont écrits en base 2 et alignés sur leur bit de poids faible.

Par exemple, soient  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = 2$  et  $x_3 = 11$ . En les écrivant en base 2 et en les alignant sur leurs bits de poids faibles, on obtient :

$$\begin{array}{r} x_1 = \quad 111 \\ x_2 = \quad 10 \\ x_3 = \quad 1011 \end{array}$$

Leur nim-somme est alors la somme bit à bit sans retenue :

$$\begin{array}{r} x_1 = \quad 111 \\ x_2 = \quad 10 \\ x_3 = \quad 1011 \\ \hline x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = \quad 1110 \end{array}$$

Donc,  $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 14$ . Notons que la nim-somme de deux entiers est toujours inférieure ou égale à la somme de ces deux entiers : elle est égale si les deux entiers n'ont aucun bit de même poids à 1, et sinon elle est inférieure car les bits de même poids à 1 s'annulent. De plus, l'opérateur  $\oplus$  est associatif et commutatif.

Bouton a démontré le résultat suivant :

**Théorème 4.17** (Bouton (1901) [26]). Soit  $J = (x_1, \dots, x_k)$  une position du jeu de NIM. Alors,  $J \in \mathcal{P}$  si et seulement si  $x_1 \oplus \dots \oplus x_k = 0$ .

*Preuve.* Pour prouver le résultat, il suffit de démontrer que si  $x_1 \oplus \dots \oplus x_k = 0$  alors aucune option de  $J$  ne vérifie que la nim-somme des piles de jetons est 0, et que si au contraire  $x_1 \oplus \dots \oplus x_k \neq 0$  alors il existe une option dont la nim-somme des piles de jetons est 0.

Supposons d'abord que  $x_1 \oplus \dots \oplus x_k = 0$ . Le premier joueur doit retirer au moins un jeton d'une pile (sans perte de généralité, la première), changeant sa valeur en  $x'_1$  et donc son écriture en binaire. Les autres piles restant inchangées, nous avons  $x'_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_k \neq x_1 \oplus \dots \oplus x_k$ , et donc la nim-somme des piles de l'option est différente de 0, et ce pour toute option de  $J$ .

Supposons maintenant que  $x_1 \oplus \dots \oplus x_k = n \neq 0$ . Soit  $n_1 n_2 \dots n_j$  l'écriture en binaire de  $n$  (où  $j$  est le nombre de bits utilisés dans l'écriture en binaire du plus grand des  $x_i$  ; en particulier on n'a pas nécessairement  $n_1 = 1$ ). Comme  $n \neq 0$ , il existe des bits de  $n$  qui sont à 1. Soit  $i$  la position du bit à 1 de poids le plus fort. Cela signifie qu'une des piles de jetons, mettons celle de



taille  $x_1$ , a son bit numéro  $i$  qui est à 1. Nous allons montrer que le premier joueur peut jouer vers  $J' = (x_1 \oplus n, x_2, \dots, x_k)$ . En modifiant  $x_1$  vers  $x_1 \oplus n$ , le bit le plus fort qui est modifié est un 1 qui est changé en 0. Cela signifie que  $x_1 \oplus n < x_1$ , et donc  $J' \in \text{opt}(J)$ . Par ailleurs, la nim-somme des piles de jetons de  $J'$  vaut :

$$x_1 \oplus n \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_k = (x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_k) \oplus n = n \oplus n = 0$$

Ceci prouve que le premier joueur a une option dont la nim-somme des piles de jetons est 0.  $\square$

Pour illustrer cette stratégie, reprenons l'exemple plus haut : la position  $J = (7, 2, 11)$ . On sait que  $7 \oplus 2 \oplus 11 = 14$ , donc le premier joueur a un coup vers une position dont la nim-somme des piles de jetons est 0. Le bit à 1 de poids le plus fort dans 14 se retrouve dans la pile de 11 jetons. Le coup du premier joueur est donc de retirer  $11 - (11 \oplus 14) = 11 - 5 = 6$  jetons de la pile de taille 11. Ce coup est évidemment possible, et laisse  $J' = (7, 2, 5)$  qui a pour nim-somme :

$$\begin{array}{r} x_1 = 111 \\ x_2 = 10 \\ x'_3 = 101 \\ \hline x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 000 \end{array}$$

Le théorème 4.17 permet de caractériser les positions du jeu de NIM qui sont dans  $\mathcal{N}$  et celles qui sont dans  $\mathcal{P}$ , quel que soit le nombre de piles. En particulier, le problème de décision 4.15 peut se résoudre en temps et en espace polynomiaux, et il est également possible de déterminer une stratégie gagnante en temps et en espace polynomiaux.

Cette caractérisation va être réutilisée pour l'étude des jeux impartiaux. Elle se situe en effet à la base de la théorie de Sprague-Grundy, que nous allons développer dans la section suivante.

### 4.2.3 Vers le théorème de Sprague-Grundy

Le théorème 4.17 implique que la somme de deux positions du jeu de NIM, si celles-ci sont dans  $\mathcal{N}$ , est dans  $\mathcal{P}$  si et seulement si les nim-sommes des tailles de leurs piles sont égales. Par exemple, les positions  $J_1 = (1, 2, 4)$  et  $J_2 = (7)$  sont toutes les deux dans  $\mathcal{N}$ , mais la position  $J_1 + J_2$  est dans  $\mathcal{P}$ . Par ailleurs, pour une autre position  $J_3$  du jeu de NIM, les issues de  $J_1 + J_3$  et de  $J_2 + J_3$  seront les mêmes (soit  $x$  la nim-somme des piles de jetons de  $J_3$ , alors  $x \oplus 7 = x \oplus (1 \oplus 2 \oplus 4)$  par associativité de l'opérateur  $\oplus$ ). Les positions  $J_1$  et  $J_2$  se comportent donc exactement de la même façon lorsqu'on les utilise dans une somme avec d'autres positions du jeu de NIM. Cette observation conduit à la définition d'équivalence entre positions de jeux :

**Définition 4.18.** Soient  $J_1, J_2$  deux positions d'un jeu combinatoire.  $J_1$  et  $J_2$  sont *équivalentes*, noté  $J_1 \equiv J_2$ , si et seulement si pour toute position  $J_3$  d'un jeu combinatoire, les issues de  $J_1 + J_3$  et de  $J_2 + J_3$  sont les mêmes.

Les propriétés de la somme de jeu (associativité, commutativité) impliquent que  $\equiv$  est bien une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive) :

**Proposition 4.19.** *La relation  $\equiv$  est une relation d'équivalence.*

La relation  $\equiv$  permet donc de définir des classes d'équivalence entre les positions de jeux. Ces classes d'équivalence sont appelées les valeurs de Grundy :

**Définition 4.20.** La classe d'équivalence d'une position  $J$  d'un jeu impartial est appelée *valeur de Grundy de  $J$*  et est notée  $\mathcal{G}(J)$ .

La proposition 4.14 peut alors se traduire autrement :

**Proposition 4.21.** *Soit  $J_1$  une position d'un jeu impartial telle que  $J_1 \in \mathcal{P}$ . Alors, pour toute position  $J_2$  d'un jeu combinatoire,  $\mathcal{G}(J_1 + J_2) = \mathcal{G}(J_2)$ .*

*Preuve.* Par la proposition 4.14, pour toute position  $J_2$  d'un jeu impartial, les issues de  $J_1 + J_2$  et de  $J_2$  sont les mêmes, ce qui revient à dire que  $J_1 + J_2 \equiv J_2$ .  $\square$

De plus, il est possible de déterminer quand deux positions ont la même valeur de Grundy :

**Proposition 4.22.** *Soient  $J_1, J_2$  deux positions d'un jeu impartial. Alors,  $\mathcal{G}(J_1) = \mathcal{G}(J_2)$  si et seulement si  $J_1 + J_2 \in \mathcal{P}$ .*

*Preuve.* Supposons d'abord que  $\mathcal{G}(J_1) = \mathcal{G}(J_2)$ . En appliquant la définition 4.18 avec  $J_3 = J_1$ , l'issue de  $J_2 + J_1$  est la même que celle de  $J_1 + J_1$ . Or, par la proposition 4.13,  $J_1 + J_1 \in \mathcal{P}$ , donc  $J_1 + J_2 \in \mathcal{P}$ .

Supposons maintenant que  $J_1 + J_2 \in \mathcal{P}$ . Alors,  $\mathcal{G}(J_1 + (J_1 + J_2)) = \mathcal{G}(J_1)$  par la proposition 4.21. Or, la somme de jeux est associative, donc  $\mathcal{G}(J_1 + (J_1 + J_2)) = \mathcal{G}((J_1 + J_1) + J_2)$ , et comme par la proposition 4.13  $J_1 + J_1 \in \mathcal{P}$ , la proposition 4.21 implique que  $\mathcal{G}(J_1) = \mathcal{G}(J_2)$ .  $\square$

En particulier, deux positions du jeu de NIM  $(i)$  et  $(j)$  telles que  $i > j$  vérifient  $\mathcal{G}(i) \neq \mathcal{G}(j)$ , car  $(j) \in \text{opt}((i))$ . Cela justifie la bijection entre les valeurs de Grundy des positions du jeu de NIM et les entiers positifs :

**Définition 4.23.** Soit  $J = (n)$  une position du jeu de NIM. Alors,  $\mathcal{G}(J) = n$ .

Par ailleurs, cette bijection nous donne une manière de calculer la valeur de Grundy d'une position du jeu de NIM en utilisant le mex, défini ci-après :

**Définition 4.24.** Soit  $S$  un ensemble d'entiers positifs. On définit le mex de  $S$  (pour *minimum excluded value*) de la façon suivante :  $\text{mex}(S) = \min\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S\}$ .

En d'autres termes, le mex d'un ensemble d'entiers est le plus petit entier positif absent de l'ensemble. Ainsi, nous avons les exemples suivants :

$$\begin{aligned}\text{mex}(\{0, 1, 2\}) &= 3 \\ \text{mex}(\{0, 1, 3\}) &= 2 \\ \text{mex}(\{1, 2, 3\}) &= 0\end{aligned}$$

Cette opération nous permet de décrire la valeur de Grundy d'une position du jeu de NIM comme le mex des valeurs de Grundy de ses options, ce qui est cohérent avec le fait qu'une position du jeu de NIM a une valeur de Grundy distincte de toutes ses options. L'étape suivante est de démontrer le théorème de Sprague-Grundy, qui établit une équivalence entre tous les jeux impartiaux et le jeu de NIM :

**Théorème 4.25** (Théorème de Sprague-Grundy (1935, 1939) [69, 138]). *Soit  $J$  une position d'un jeu impartial, et soit  $n = \text{mex}(\{\mathcal{G}(J') \mid J' \in \text{opt}(S)\})$ . Alors,  $\mathcal{G}(J) = n$ , c'est à dire que  $J$  est équivalent à la position  $(n)$  du jeu de NIM.*

*Preuve.* Le résultat s'obtient par induction sur la taille du graphe de jeu de  $J$ . Si  $J$  est dans un état final (avec  $\text{opt}(J) = \emptyset$ ), alors trivialement  $n = 0$  et les deux jeux sont dans  $\mathcal{P}$ , donc équivalents par la proposition 4.13. Si  $\text{opt}(J) = \{J_1, \dots, J_k\}$ , alors par hypothèse d'induction chaque position  $J_i$  est équivalente à une position du jeu de NIM  $(n_i)$  avec  $n_i = \text{mex}(\{\mathcal{G}(J'_i) \mid J'_i \in \text{opt}(J_i)\})$ . Nous considérons alors une position  $J'$  d'un jeu impartial dont les options sont exactement les positions  $(n_1), (n_2), \dots, (n_k)$ . De plus, soit  $n = \text{mex}(\{n_1, \dots, n_k\})$ .

**Affirmation 4.25.A.**  $\mathcal{G}(J) = \mathcal{G}(J')$ .

*Preuve de l'affirmation.* Nous explicitons une stratégie gagnante pour le deuxième joueur sur  $J + J'$ . Le premier joueur a deux types de coups possibles. S'il joue dans la composante  $J$  (resp.  $J'$ ), alors il laisse  $J_i + J'$  (resp.  $J + (n_i)$ ). Le deuxième joueur répond en réduisant  $J'$  (resp.  $J$ ) à son option  $(n_i)$  (resp.  $J_i$ ) correspondante, laissant  $J_i + (n_i)$  qui est dans  $\mathcal{P}$  par définition.

Comme  $J + J' \in \mathcal{P}$ , la proposition 4.13 démontre l'affirmation.  $\square$

**Affirmation 4.25.B.**  $\mathcal{G}(J') = \mathcal{G}((n))$ .

*Preuve de l'affirmation.* Nous explicitons une stratégie gagnante pour le deuxième joueur sur la somme  $J' + (n)$ . Le premier joueur a deux types de coups possibles :

1. S'il joue dans la composante  $(n)$ , alors il laisse  $J' + (m)$  avec  $m < n$ . Par définition de  $n$  comme le mex des  $n_i$ , nous savons qu'il existe nécessairement un  $i \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $n_i = m$ . Le deuxième joueur peut donc réduire  $J'$  à  $(m)$  et laisser  $(m) + (m)$  qui est dans  $\mathcal{P}$  par la proposition 4.13.
2. S'il joue dans la composante  $J'$ , alors il laisse  $(n_i) + (n)$ . Nécessairement,  $n_i \neq n$  car  $n$  est différent de tous les  $n_i$ . Il y a deux cas :
  - (a) Si  $n_i < n$  alors le deuxième joueur peut réduire  $(n)$  à  $(n_i)$  et laisser  $(n_i) + (n_i)$ , laissant donc une position dans  $\mathcal{P}$  (ce coup est toujours possible par définition du jeu de NIM) ;
  - (b) Si  $n_i > n$ , alors le deuxième joueur peut réduire  $(n_i)$  à  $(n)$  et laisser  $(n) + (n)$ , laissant donc une position dans  $\mathcal{P}$  (ce coup est toujours possible par définition du jeu de NIM).

Comme  $J' + (n) \in \mathcal{P}$ , la proposition 4.13 démontre l'affirmation.  $\square$

Les affirmations 4.25.A et 4.25.B montrent que  $\mathcal{G}(J) = \mathcal{G}(J') = \mathcal{G}((n)) = n$ , ce qui montre le résultat.  $\square$

Le théorème 4.25 nous permet donc de caractériser les positions de jeux impartiaux qui sont dans  $\mathcal{P}$  comme celles qui ont une valeur de Grundy de 0. Par ailleurs, il est possible de déterminer la valeur de Grundy d'une position d'un jeu impartial à partir de son graphe de jeu, dont on construit une coloration gloutonne à partir de ses puits et en remontant à chaque niveau, comme l'explique l'algorithme 3 qui est illustré figure 4.10. Cet algorithme est une simple adaptation de l'algorithme 1, et est donc d'une complexité exponentielle en temps et en espace. De la même façon que nous avons affiné l'algorithme 1 en remarquant qu'il n'était pas nécessaire de stocker l'intégralité du graphe de jeu en mémoire, nous pouvons affiner l'algorithme 3 et obtenir l'algorithme 4. Par ailleurs, nous avons le résultat suivant :

**Proposition 4.26.** *Pour toute position  $J$  d'un jeu impartial,  $\mathcal{G}(J) \leq |\text{opt}(J)|$ .*

---

**Algorithme 3** : Déterminer la valeur de Grundy d'une position

---

**Entrée** : Une position  $J$  d'un jeu combinatoire

**Sortie** : La valeur de Grundy de  $J$

**début**

┌ construire le graphe de jeu  $G(V, \vec{E})$  de  $J$

┌ étiqueter les puits avec 0

┌ **tant que** la source n'est pas étiquetée **faire**

┌ ┌ **pour** tout sommet  $u \in V$  **faire**

┌ ┌ ┌ **si** tous les sommets  $v \in V$  tels que  $\vec{uv} \in \vec{E}$  sont étiquetés **alors**

┌ ┌ ┌ ┌ étiqueter  $u$  avec le mex des étiquettes de ses voisins sortants

┌ ┌ renvoyer l'étiquette de la source

---



---

**Algorithme 4** : CalculGrundy( $J$ )

---

**Entrée** : Une position  $J$  d'un jeu impartial

**Sortie** : La valeur de Grundy de  $J$

**début**

┌  $S = \emptyset$  **pour**  $J' \in \text{opt}(J)$  **faire**

┌ ┌  $S = S \cup \{\text{Grundy}(J')\}$

┌ ┌ renvoyer mex( $S$ )

---

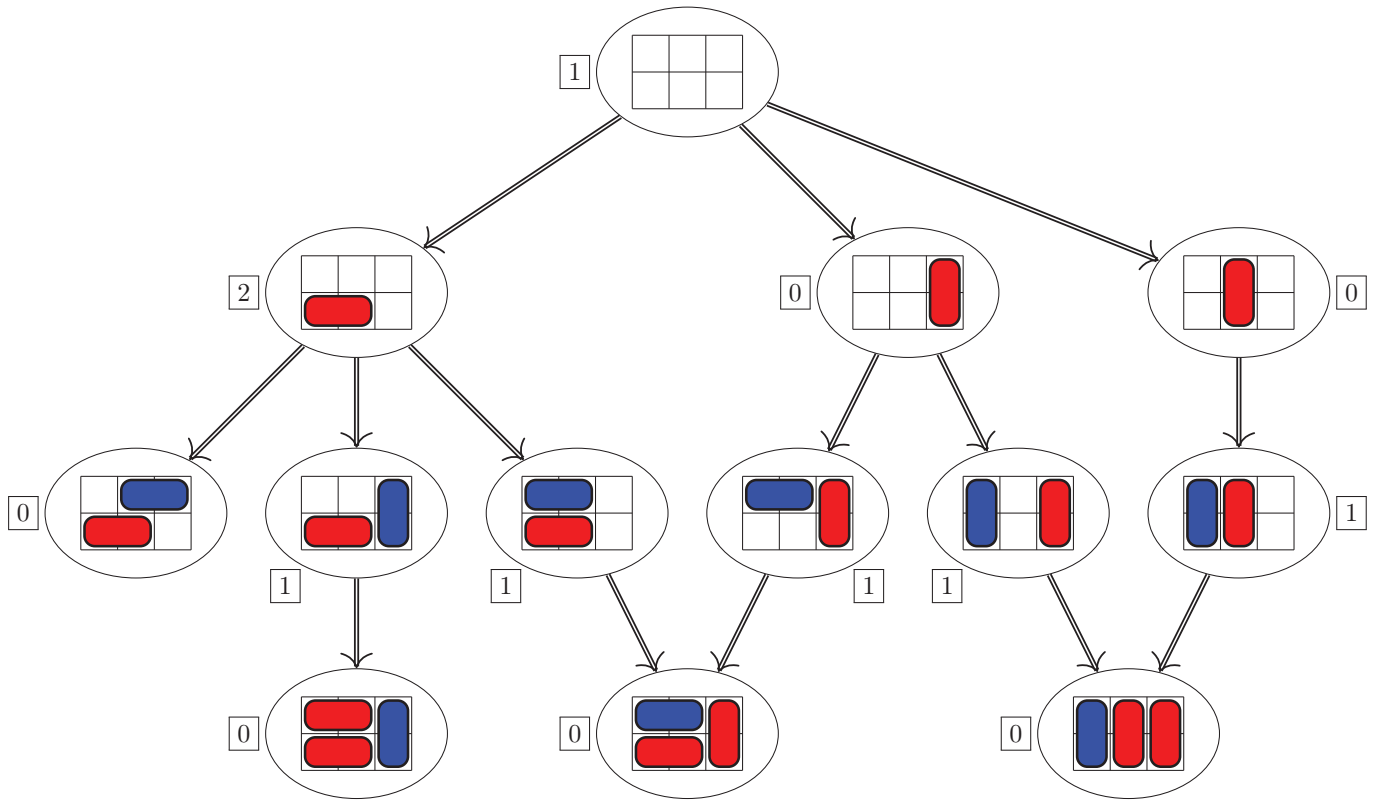


FIGURE 4.10 – Le graphe de jeu de la figure 4.5 étiqueté par la méthode de l’algorithme 3 (les étiquettes sont encadrées).

Enfin, nous pouvons utiliser la caractérisation du jeu de NIM (théorème 4.17) combinée à la définition des valeurs de Grundy pour déterminer la valeur de Grundy de la somme de deux positions de jeux impartiaux. En effet, il est aisé de constater que si  $J = (n_1, \dots, n_k)$  et  $J' = (n_1 \oplus \dots \oplus n_k)$  alors  $\mathcal{G}(J) = \mathcal{G}(J')$ . Comme toute position d’un jeu impartial est équivalente à une position d’une pile de jeu de NIM ayant autant de jetons que sa valeur de Grundy, nous en déduisons la propriété suivante :

**Proposition 4.27.** *Soient  $J_1, J_2$  deux positions d’un jeu impartial. Alors :*

$$\mathcal{G}(J_1 + J_2) = \mathcal{G}(J_1) \oplus \mathcal{G}(J_2)$$

*Preuve.* Soient  $n_1 = \mathcal{G}(J_1)$  et  $n_2 = \mathcal{G}(J_2)$ . Les positions  $(n_1)$  et  $(n_2)$  du jeu de NIM sont équivalentes à respectivement  $J_1$  et  $J_2$ . Soient  $J = (n_1, n_2)$  et  $J' = (n_1 \oplus n_2)$  deux positions du jeu de NIM. Prouver la proposition 4.27 revient à montrer que  $\mathcal{G}(J) = \mathcal{G}(J')$ . Or, par le théorème 4.17, la nim-somme des piles de jetons de  $J + J'$  est de  $n_1 \oplus n_2 \oplus (n_1 \oplus n_2) = 0$  et donc  $J + J' \in \mathcal{P}$ . La proposition 4.22 nous permet de conclure.  $\square$

Cette série de résultats nous donne des outils très puissants pour étudier les jeux impartiaux. En particulier, les jeux qui se prêtent naturellement à l’étude via la somme de positions se révèlent beaucoup plus aisés à étudier grâce à la proposition 4.27. De même, la proposition 4.22 est très utile pour caractériser les valeurs de Grundy des positions de nombreux jeux. Les jeux que nous allons étudier dans la section 4.3 et dans les chapitres suivants sont des exemples de jeux dont l’étude est simplifiée par la théorie de Sprague-Grundy.

**Observation 4.28** (Culture générale). *Toute la théorie développée dans cette section peut être adaptée aux jeux partisans ; c'est l'objet de la théorie de Conway, développée dans [37, 104]. Conway et Knuth se sont servis des jeux partisans pour construire les ensembles des nombres surréels et pseudo-réels, qui contiennent notamment les nombres réels, les ordinaux et des infinitésimaux. Les valeurs de Grundy sont un sous-ensemble des nombres surréels, notés  $*n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Par ailleurs, l'étude des jeux en convention misère se révèle particulièrement complexe, car l'équivalence  $y$  est très difficile à montrer : seul le jeu 0 est équivalent à lui-même, par exemple. La plupart des études sur les jeux en convention misère étudient des équivalences modulo certaines classes de jeux. Plus d'informations sur l'étude des jeux en convention misère sont disponibles dans le survey de Milley et Renault [116].*

### 4.3 Jeux *taking-breaking*

Dans cette section, nous allons étudier une famille spécifique de jeux impartiaux qui sont des variantes de NIM, les jeux dits *taking-breaking*.

**Définition 4.29.** Un jeu est dit *taking-breaking* s'il respecte les conditions suivantes :

1. Une position est un ensemble de piles de jetons ;
2. Les coups disponibles sont soit de type *taking* (retirer des jetons d'une ou plusieurs piles), soit de type *breaking* (diviser une pile en plusieurs piles non-vides), soit des deux types.

Ainsi, NIM est un jeu *taking-breaking* dans lequel tous les coups disponibles sont des coups de type *taking*. De nombreux jeux *taking-breaking* ont été étudiés, avec des règles très disparates. Par exemple, les règles de NIM sont très régulières : les joueurs peuvent retirer de 1 à tous les jetons d'une pile. D'autres jeux de cette famille ont des règles qui changent en fonction de la taille de la pile sur laquelle le joueur joue, ou qui affectent plusieurs piles. Par exemple, dans le jeu WYTHOFF [145], les joueurs disposent de deux piles de jetons, et peuvent soit retirer autant d'objets qu'ils le souhaitent d'une des piles soit en retirer le même nombre des deux piles. Dans cette thèse, nous n'allons cependant étudier que des jeux dans lesquels les joueurs ne peuvent jouer que sur une seule pile à la fois avec des règles qui n'évoluent pas en cours de partie.

Nous allons réutiliser la notation de NIM : une position d'un jeu *taking-breaking* avec  $k$  piles de respectivement  $n_1, \dots, n_k$  jetons sera notée  $(n_1, \dots, n_k)$ . Comme pour NIM, le problème principal dans les jeux *taking-breaking* est de répondre aux problèmes de décision 4.30 et 4.31 et de déterminer leur complexité.

**Problème de décision 4.30.**

JEU TAKING-BREAKING

ENTRÉE : Une position  $J = (n_1, \dots, n_k)$  d'un jeu *taking-breaking*.

QUESTION : A-t-on  $J \in \mathcal{N}$  ?

**Problème de décision 4.31.**

VALEUR DE GRUNDY D'UN JEU TAKING-BREAKING

ENTRÉE : Une position  $J = (n_1, \dots, n_k)$  d'un jeu *taking-breaking*, un entier  $g$ .

QUESTION : A-t-on  $\mathcal{G}(J) = g$  ?

Comme nous l'avons dit précédemment, nous nous concentrons sur les jeux *taking-breaking* dans lesquels les joueurs n'affectent qu'une seule pile avec des règles fixes tout au long de la partie. Dans ces jeux, il n'est nécessaire que d'étudier les positions avec une seule pile de jetons. En effet, si nous pouvons répondre au problème de décision 4.31 en temps polynomial pour une position  $(n)$ , alors la proposition 4.27 nous permet de répondre à ce même problème pour toute position en temps polynomial. L'étude de cette catégorie de jeux *taking-breaking* se concentre donc sur l'étude de leur séquence de Grundy :

**Définition 4.32.** La *séquence de Grundy* d'un jeu *taking-breaking* est la séquence des valeurs de Grundy de ses positions  $(0), (1), (2), (3), \dots$

Il a été remarqué que les séquences de Grundy de nombreux jeux *taking-breaking* étaient régulières [6, 19, 54]. Or, détecter et caractériser une régularité dans une séquence de Grundy permet de répondre au problème de décision 4.31 en temps polynomial, aussi l'étude des séquences de Grundy se focalise sur la détection de régularité dans lesdites séquences. Il existe plusieurs types de régularité dans les séquences de Grundy, dont les principales sont la périodicité ( $\exists T \forall n, \mathcal{G}(n+T) = \mathcal{G}(n)$ ), la périodicité arithmétique ( $\exists S, T \forall n, \mathcal{G}(n+T) = \mathcal{G}(n) + S$ ), et l'ultime périodicité ( $\exists n_0, T \forall n \geq n_0, \mathcal{G}(n+T) = \mathcal{G}(n)$ ). D'autres types de régularités plus spécifiques comme la sapp-régularité ont également été définies pour qualifier des séquences presque périodiques ou arithmétiques périodiques avec quelques irrégularités caractérisables.

### 4.3.1 Jeux de soustraction

Les jeux de soustraction sont une des familles les plus simples des jeux *taking-breaking*, qui n'ont que des coups de type *taking*.

**Définition 4.33.** Soit  $S$  un ensemble d'entiers strictement positifs. Dans le jeu de soustraction  $\text{SUB}(S)$ , les joueurs peuvent retirer  $k$  jetons d'une pile si et seulement si elle est de taille supérieure ou égale à  $k$  et  $k \in S$ .

Si  $S$  est fini,  $\text{SUB}(S)$  est appelé *jeu de soustraction fini*.

Par exemple, NIM est un jeu de soustraction avec  $S = \mathbb{N}^*$ . Plusieurs jeux de soustraction ont été étudiés, et il a été démontré que tous les jeux de soustraction finis ont une séquence de Grundy ultimement périodique :

**Théorème 4.34** ([19]). *La séquence de Grundy d'un jeu de soustraction fini est ultimement périodique.*

*Preuve.* Soit  $S = \{a_1, \dots, a_k\}$  un ensemble d'entiers strictement positifs dans l'ordre croissant. Nous considérons les positions du jeu  $\text{SUB}(S)$ . Par la proposition 4.26, pour tout entier  $n$ ,  $\mathcal{G}(n) \leq k$  car  $\text{opt}(n) \subseteq \{n - a_1, \dots, n - a_k\}$ . Cela implique que le nombre de sous-séquences de  $a_k$  valeurs consécutives pouvant apparaître dans la séquence de Grundy est fini. Il existe donc deux entiers  $p, q$ , avec  $a_k \leq p < q$ , tels que les  $a_k$  valeurs précédant  $\mathcal{G}(p)$  dans la séquence de Grundy sont les mêmes que les  $a_k$  valeurs précédant  $\mathcal{G}(q)$ . Nous pouvons alors prouver que pour tout entier positif  $i$ ,  $\mathcal{G}(p+i) = \mathcal{G}(q+i)$ .

Le cas de base s'obtient par le théorème 4.25 :

$$\mathcal{G}(q) = \text{mex}(\{q - a_1, \dots, q - a_k\}) = \text{mex}(\{p - a_1, \dots, p - a_k\}) = \mathcal{G}(p)$$

L'hérédité se déroule exactement de la même façon. En posant  $n_0 = p$  et  $T = (q - p)$ , nous obtenons alors que  $\mathcal{G}(n+T) = \mathcal{G}(n)$  pour tout entier  $n \geq n_0$ , et donc la séquence de Grundy de  $\text{SUB}(S)$  est ultimement périodique.  $\square$

Le chapitre 4 de [19] contient une table avec de nombreux jeux de soustraction finis, ainsi que les période et prépériode de leurs séquences de Grundy. Par ailleurs, il existe un test permettant de déterminer la période et la prépériode d'un jeu de soustraction fini :

**Théorème 4.35** ([6]). *Soit  $N$  le plus grand élément d'un ensemble d'entiers strictement positifs  $S$ . S'il existe deux entiers  $n_0$  et  $T$  tels que  $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n+T)$  pour tout  $n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1$ , alors le jeu  $\text{SUB}(S)$  est ultimement périodique avec période  $T$  et prépériode  $n_0$ .*

Pour certains jeux de soustraction finis, ajouter un entier à l'ensemble d'entiers les définissant ne change pas la séquence de Grundy du jeu :

**Définition 4.36.** Soient  $S$  un ensemble d'entiers strictement positifs et  $t$  un entier strictement positif. Si les séquences de Grundy de  $\text{SUB}(S)$  et de  $\text{SUB}(S \cup \{t\})$  sont identiques, alors on dit qu'on peut *adjoindre*  $t$  à  $S$ .

Le théorème suivant nous indique comment vérifier si un entier peut être adjoint à un ensemble définissant un jeu de soustraction :

**Théorème 4.37** ([19, 91]). Soient  $S$  un ensemble fini d'entiers strictement positifs,  $T$  et  $n_0$  respectivement la période et la prépériode du jeu  $\text{SUB}(S)$ , et  $t$  un entier strictement positif. Alors :

- Si  $t < n_0 + T$ , alors  $t$  peut être adjoint à  $S$  si et seulement si  $\mathcal{G}(n) \neq \mathcal{G}(n+t)$  pour tout entier  $0 \leq n < n_0 + T$  ;
- Si  $t \geq n_0 + T$ , alors  $t$  peut être adjoint à  $S$  si et seulement si  $t - T$  peut être adjoint à  $S$ .

Ainsi, répondre au problème de décision 4.31 pour un jeu de soustraction fini nous permet d'y répondre pour un ensemble infini de tels jeux. Cependant, plusieurs questions restent ouvertes sur les jeux de soustraction finis. Par exemple, le test de périodicité du théorème 4.35 peut-il être amélioré pour détecter plus rapidement des régularités, ou donne-t-il les période et prépériode minimales dans certains cas ? Est-il possible de décider en temps polynomial si un jeu de soustraction fini est périodique ou ultimement périodique (problème de décision 4.38) ?

**Problème de décision 4.38.**

SÉQUENCE PÉRIODIQUE OU ULTIMEMENT PÉRIODIQUE

ENTRÉE : Un ensemble fini d'entiers strictement positifs  $S$ .

QUESTION : Le jeu  $\text{SUB}(S)$  est-il périodique ?

Quant aux jeux de soustraction en général, ils se révèlent déjà plus complexes à étudier. En effet, le théorème 4.34 ne se généralise pas à tous les jeux de soustraction, car sa preuve se base sur le fait qu'une position a un nombre fini d'options. Cependant, si l'ensemble  $S$  du jeu de soustraction est  $\mathbb{N} \setminus S'$  où  $S'$  est un ensemble fini, le résultat suivant se tient :

**Théorème 4.39** ([6]). Si  $S$  est un ensemble fini, alors le jeu  $\text{SUB}(\mathbb{N} \setminus S)$  a une séquence de Grundy ultimement arithmétique périodique.

La preuve du théorème 4.39 est plus technique que celle du théorème 4.34, mais se base sur un principe similaire. De plus, elle donne une méthode pour détecter la valeur de  $n$  à partir de laquelle la séquence devient arithmétique périodique, de façon similaire au théorème 4.35. Ces résultats très puissants encouragent l'étude de familles de jeux *taking-breaking* plus complexes sous le prisme de la détection d'une séquence de Grundy périodique.

**4.3.2 Jeux octaux et généralisations**

Pour aller plus loin que les jeux de soustraction, la suite logique est d'autoriser les coups de type *breaking*, c'est-à-dire de laisser les joueurs séparer une pile en deux en jouant dessus. Par exemple, il est possible de définir un jeu *taking-breaking* dans lequel les joueurs peuvent retirer 2 jetons d'une pile, et décider de la casser ou non en deux. La figure 4.11 montre un exemple de partie de ce jeu.

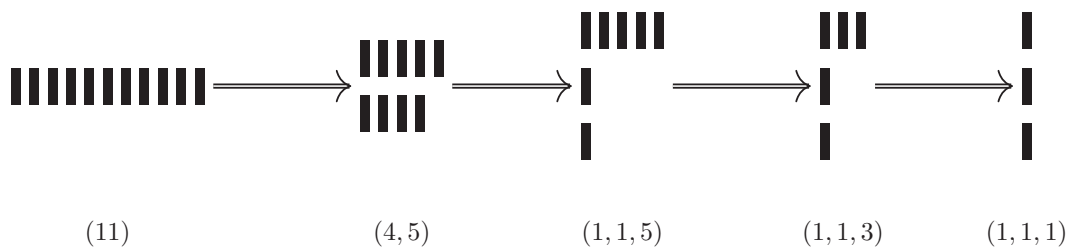


FIGURE 4.11 – Une partie d'un jeu *taking-breaking* dans lequel les joueurs peuvent retirer 2 jetons d'une pile, et éventuellement la séparer en deux sous-piles.

Un codage a été défini pour cette catégorie de jeux *taking-breaking*, sous la forme d'un nombre octal : son  $i$ ème chiffre est strictement positif si le coup de *taking* retirant  $i$  jetons est légal, et sa valeur va définir quel coup de *breaking* sera légal en retirant  $i$  jetons. Comme il existe trois types

de *breaking* possibles (vider une pile, laisser une pile non-vider, séparer une pile en deux piles non-vides), le codage prendra la forme d'un nombre octal, défini de la façon suivante et résumé par le tableau 4.2 :

**Définition 4.40.** Soit  $d_0, d_1, d_2, d_3, \dots$  une séquence de nombres en base 8, de la forme  $d_i = b_i^0 + 2 \times b_i^1 + 4 \times b_i^2$  et tel que  $d_0 \in \{0, 4\}$ . Le jeu octal  $\mathbf{d}_0.\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3 \dots$  est le jeu *taking-breaking* dans lequel les joueurs peuvent retirer  $k$  jetons d'une pile si et seulement si  $d_k \neq 0$ . Ce faisant, ils peuvent changer la pile en  $j$  piles non-vides si et seulement si  $b_k^j \neq 0$ .

Valeur de $d_i$	Condition pour retirer $i$ jetons d'une pile
0	Interdit
1	Après le coup, la pile est vide
2	Après le coup, les jetons restants forment une pile non-vider
3	Après le coup, soit les jetons restants forment une pile non-vider, soit la pile est vide
4	Après le coup, les jetons restants forment deux piles non-vides
5	Après le coup, soit les jetons restants forment deux piles non-vides, soit la pile est vide
6	Après le coup, les jetons restants forment une ou deux piles non-vides
7	Après le coup, soit les jetons restants forment une ou deux piles non-vides, soit la pile est vide

Tableau 4.2 – Les coups légaux dans un jeu octal en fonction de la valeur du  $i$ ème chiffre du code.

S'il existe un  $\ell$  tel que pour tout  $i > \ell$  on a  $d_i = 0$  alors le jeu est appelé *jeu octal fini* et sera noté  $\mathbf{d}_0.\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3 \dots \mathbf{d}_\ell$ .

Par exemple, le jeu présenté par la figure 4.11 est le jeu octal **0.07** : les joueurs peuvent retirer 2 jetons de la façon qu'ils le souhaitent, y compris en éventuellement séparant la pile en deux. De même, dans le jeu **0.31**, les joueurs peuvent retirer 1 jeton d'une pile en n'importe quelle occasion (mais sans la séparer), mais ne peuvent en retirer 2 que si la pile contient exactement 2 jetons. Dans le jeu **4.207**, les joueurs peuvent ne retirer aucun jeton mais séparer une pile en deux piles non-vides, retirer 1 jeton d'une pile si, ce faisant, ils ne la vident pas, et retirer 3 jetons d'une pile en laissant la pile vide, une seule pile ou deux piles non-vides.

Notons que les jeux de soustraction sont une sous-famille des jeux octaux, pour lesquels  $d_i \in \{0, 3\}$  pour tout entier  $i$ . En particulier, NIM est le jeu **0.33333**... De même, CRAM joué sur une ligne est exactement **0.07** : placer un domino sur une ligne revient à retirer deux jetons d'une pile, et jouer au milieu en séparant la ligne en deux revient à diviser la pile en deux.

Comme pour les jeux de soustraction, l'étude des jeux octaux se concentre sur la détection de périodicité dans les séquences de Grundy. En particulier, il existe un test de périodicité pour les jeux octaux finis :

**Théorème 4.41** ([19]). *Pour un jeu octal fini  $\mathbf{d}_0.\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3 \dots \mathbf{d}_\ell$ , s'il existe deux entiers  $n_0, T$  tels que  $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n + T)$  pour  $n_0 \leq n \leq 2n_0 + 2T + \ell$ , alors la séquence de Grundy est ultimement périodique avec période  $T$  et prépériode  $n_0$ .*

L'étude des séquences de Grundy des jeux octaux est cependant complexe. Par exemple, s'il est aisé de constater que le jeu octal **0.7** a une séquence de Grundy périodique, il est déjà plus technique de repérer (à la main ; un ordinateur appliquant le théorème 4.41 y parvient aisément) que **0.07** a une séquence de Grundy ultimement périodique (avec période 34 et prépériode 68). Quant au jeu **0.007**, aucune périodicité n'a encore été détectée, bien que  $2^{28}$  valeurs aient été calculées (et seulement 37 valeurs égales à 0 apparaissent parmi elles). De nombreux exemples de jeux octaux dont les séquences de Grundy ont été étudiées ont été compilés par Flammenkamp [54], en complément de la table des jeux octaux dans le chapitre 4 de [19].

La difficulté de cette étude explique qu'il n'existe pas de théorème global de périodicité sur les jeux octaux, bien qu'on sache que les jeux octaux finis n'ont pas forcément une séquence de Grundy arithmétique périodique [8, 19]<sup>3</sup>. Sur la base d'arguments statistiques sur des valeurs de Grundy apparaissant rarement dans les séquences de Grundy, Guy a énoncé la conjecture suivante :

3. En revanche, des jeux octaux ayant un nombre infini de  $d_i$  différents de 0 peuvent exhiber un comportement arithmétique périodique [19].



**Conjecture 4.42** (Conjecture de Guy [19]). *Tout jeu octal fini a une séquence de Grundy ultimement périodique.*

Il est également possible de généraliser la définition des jeux octaux, en permettant de séparer une pile en plus de deux piles non-vides. Lorsque l'on autorise la séparation en trois piles, on parle des *jeux hexadécimaux* (car leur nom est un code hexadécimal), que l'on peut encore une fois généraliser pour obtenir les *jeux hexadécimaux généralisés*. Les jeux hexadécimaux semblent tout aussi complexes à étudier que les jeux octaux, poussant à l'introduction de nouvelles sortes de régularité comme la sapp-régularité [6] ou la règle-régularité [68]. Par ailleurs, un test de périodicité similaire au théorème 4.41 a été formulé pour les jeux hexadécimaux. Austin [8] a en effet formulé un test de périodicité arithmétique pour détecter à partir de quel indice la séquence de Grundy devient arithmétique périodique lorsque le *saltus* (le *saltus* d'une séquence arithmétique périodique est le  $S$  pour lequel  $\mathcal{G}(n + T) = \mathcal{G}(n) + S$ ) est une puissance de 2. Howse et Nowakowski [96] ont amélioré ce test pour prendre en compte les *saltus* arbitraires. En revanche, leur test demande pas moins de 7 périodes régulières pour vérifier la régularité, bien loin des 2 périodes nécessaires requises par le théorème 4.41 pour les jeux octaux.

Les jeux hexadécimaux généralisés n'ont pas été énormément considérés. Dans [39] nous avons considéré les jeux hexadécimaux généralisés dans lesquels seuls des coups de type *breaking* sont autorisés : étant donné un ensemble d'entiers  $L$ , les joueurs peuvent diviser une pile en  $k$  piles non-vides si et seulement si  $k - 1 \in L$ . Ces jeux sont appelés *jeux de pur breaking*,  $L$  étant appelé leur *ensemble de coupes*. Ce travail ne sera pas détaillé dans cette thèse, mais nous allons résumer quelques-uns de nos résultats, notamment un test de périodicité arithmétique similaire à celui des jeux hexadécimaux ou des théorèmes 4.35 et 4.41 :

**Théorème 4.43** (D., Duchêne, Larsson, Paris [39]). *Soit un jeu de pur breaking avec un ensemble de coupes  $L$ . Soient  $T, n_0$  deux entiers et  $S$  une puissance de 2. Si sa séquence de Grundy vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour  $n \in \{n_0 + 1, \dots, n_0 + 3T\}$ ,  $\mathcal{G}(n + T) = \mathcal{G}(n) + S$  ;*
2. *Pour  $n \in \{n_0 + 1, \dots, n_0 + T\}$ ,  $\mathcal{G}(n) \in \{0, \dots, S - 1\}$  ;*
3. *Pour  $n \in \{n_0 + 3T + 1, \dots, n_0 + 4T\}$  et pour  $g \in \{0, \dots, S - 1\}$ ,  $n$  a une option  $O_n$  avec  $m$  piles vérifiant  $\mathcal{G}(O_n) = g$ ,  $m \geq 2$ ,  $m \in L$ .*

*Alors, la séquence est ultimement arithmétique périodique de période  $T$ , prépériode  $n_0$  et de saltus  $S$ .*

Notons que la troisième condition peut être relâchée sous certaines conditions. Par ailleurs, seules 3 à 4 périodes sont nécessaires pour ce test, soit moins que pour les jeux hexadécimaux mais plus que pour les jeux octaux.

Par ailleurs, l'étude de familles de jeux semble indiquer que tous les jeux de pur *breaking* ont une séquence de Grundy arithmétique périodique ou périodique, à l'exception de celui ayant  $\{1, 2\}$  comme ensemble de coupes. Cela mène à la conjecture suivante :

**Conjecture 4.44** ([39]). *Tout jeu de pur breaking ayant un ensemble de coupes  $L \neq \{1, 2\}$  a une séquence de Grundy ultimement arithmétique périodique.*

Il existe également une immense variété de jeux *taking-breaking* n'appartenant pas aux familles considérées jusqu'ici. Un exemple connu est le jeu de Grundy [69, 19] où les joueurs peuvent diviser une pile en deux piles non-vides de tailles différentes. Bien que  $2^{35}$  valeurs de Grundy aient été calculées [53] et que des arguments statistiques en faveur d'une ultime périodicité de la séquence de Grundy aient été avancés, la question de savoir si la séquence est ultimement périodique ou non est toujours ouverte. Pour d'autres jeux, la définition de régularité est déjà difficile à définir. Par exemple, le jeu de WYTHOFF [145] qui a été décrit au début de cette section et pour lequel la régularité ne peut pas être définie seulement sur une séquence. Les positions de WYTHOFF qui sont dans  $\mathcal{P}$  ont été caractérisées, mais la question de savoir s'il est possible de répondre au problème de décision 4.31 en temps polynomial pour ce jeu est encore un problème ouvert [19, 118]. D'autres exemples de jeux *taking-breaking* sont développés dans [19], démontrant un domaine de recherche riche et dynamique. Une autre possibilité d'étude est de transposer les jeux *taking-breaking* sur d'autres structures que des piles de jetons, ce que nous allons voir dans les sections suivantes.

### 4.3.3 Jeux de suppression de sommets

En 1978, Schaefer [127] a introduit plusieurs jeux sur des graphes et étudié leur complexité. Un de ces jeux est NODE-KAYLES, dans lequel les joueurs suppriment tour à tour un sommet et tous ses voisins d'un graphe, le dernier à jouer remportant la partie. Ceci a inauguré l'étude des jeux de suppression de sommets, que l'on définit ainsi :

**Définition 4.45.** Un *jeu de suppression de sommets* est un jeu combinatoire se jouant sur un graphe, et où les coups possibles sont la suppression d'un ou plusieurs sommets du graphe et de toutes leurs arêtes incidentes en fonction des règles spécifiques du jeu considéré.

Bien entendu, les jeux de suppression de sommets peuvent être impartiaux ou partisans (par exemple, Alice ou Bob ne peuvent jouer que sur certains sommets marqués pour eux), mais comme dit précédemment nous ne considérerons que les jeux impartiaux.

La question principale dans les jeux de suppression de sommets est de répondre au problème de décision 4.46 de façon efficace.

#### Problème de décision 4.46.

JEU DE SUPPRESSION DE SOMMETS

ENTRÉE : Les règles d'un jeu de suppression de sommets, un graphe  $G(V, E)$ .

QUESTION : A-t-on  $G \in \mathcal{N}$  ?

Alternativement, le problème de calculer la valeur de Grundy d'un graphe en temps polynomial se pose également. Notons que, dès lors que les coups possibles sont sur une seule composante connexe d'un graphe, la définition de la somme de jeux et la proposition 4.27 nous donnent le résultat suivant :

**Proposition 4.47.** Soit  $G = \bigcup_{i=0}^k G_i$  un graphe, où les  $G_i$  désignent les composantes connexes de  $G$ . Alors,  $\mathcal{G}(G) = \bigoplus_{i=0}^k \mathcal{G}(G_i)$  pour tout jeu de suppression de sommets dont les coups légaux ne modifient qu'un seul  $G_i$ .

Schaefer a montré que le problème de décision 4.46 pour NODE-KAYLES et un graphe quelconque était PSPACE-complet. Bodlaender, Kratsch et Timmer [23] ont déterminé un algorithme avec un temps d'exécution de  $O(1.4423^n)$  (où  $n$  est l'ordre du graphe sur lequel la partie se déroule) pour déterminer le gagnant. Ce jeu a aussi été étudié par plusieurs auteures sur des familles spécifiques de graphes, pour lesquelles il existe des algorithmes polynomiaux répondant au problème de décision 4.46 : les graphes avec un nombre astéroïdal borné<sup>4</sup> [22], les étoiles subdivisées [56] et les chemins pour diverses définitions de la somme de jeux [71].

Schaefer a également introduit une variante de NODE-KAYLES, nommée ARC-KAYLES. Dans ce jeu, les joueurs vont supprimer une arête et ses deux extrémités (et donc toutes leurs arêtes incidentes), le jeu s'achevant lorsqu'il ne reste plus d'arêtes dans le graphe. On peut reformuler les règles en disant que ARC-KAYLES est un jeu de suppression de sommets dans lesquels les joueurs peuvent supprimer exactement deux sommets adjacents jusqu'à ce que le graphe soit vide ou un stable. Un exemple de partie est illustré figure 4.12.

Il est aisé de remarquer que ARC-KAYLES sur un chemin est exactement CRAM sur une ligne, c'est à dire le jeu octal **0.07**. Ce cas a été résolu par Guy et Smith [72] : comme dit précédemment, sa séquence de Grundy est ultimement périodique avec période 34 et prépériode 68. De la même façon, ARC-KAYLES sur une grille est exactement CRAM sur la grille obtenue en transformant chaque sommet en case (deux cases étant adjacentes si et seulement si leurs sommets correspondants sont reliés par une arête). Une stratégie gagnante est alors aisément calculable sur certaines grilles (paires-paires ou paires-impaires) en jouant un coup symétrique par rapport au coup de l'adversaire. Cependant, si cela permet de répondre au problème de décision 4.46 en temps polynomial, la question

4. Dans un graphe  $G(V, E)$ , un *ensemble astéroïdal* est un sous-ensemble  $W$  de  $V$  tel que, pour tout  $w \in W$ , il existe une composante connexe de  $G \setminus N[w]$  (c'est-à-dire  $G$  dont on a supprimé  $w$  et tous ses voisins) contenant tous les sommets de  $W \setminus \{w\}$ . Le *nombre astéroïdal* d'un graphe est la taille maximale d'un ensemble astéroïdal. La famille des graphes avec un nombre astéroïdal borné inclut de nombreuses classes de graphes connues : graphes de cocomparabilité, cographes, graphes d'intervalle...

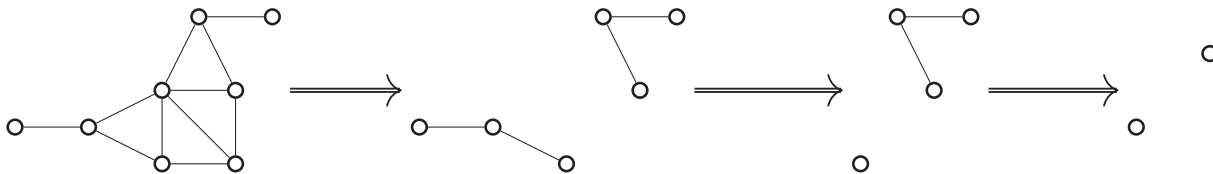


FIGURE 4.12 – Exemple d’une partie de ARC-KAYLES. Le jeu s’achève lorsque le graphe est vide ou un stable.

de déterminer en temps polynomial la valeur de Grundy des grilles qui ne sont pas dans  $\mathcal{P}$  est encore ouverte, y compris pour les grilles de hauteur 3 : les valeurs de Grundy ont été calculées par Lemoine et Viennot pour des grilles  $3 \times n$  pour  $n \in \{1, \dots, 20\}$ , sans qu’une régularité n’apparaisse [109].

Lampis et Mitsou ont prouvé que le problème de décision 4.46 pour ARC-KAYLES est FPT : il existe un algorithme pour décider de l’issue du jeu en temps  $O(f(k) + \text{poly}(n))$  où  $k$  est le nombre de tours de jeu,  $n$  l’ordre du graphe sur lequel le jeu se déroule, et  $f$  est une fonction calculable quelconque [107]. Plus récemment, des résultats de périodicité ont été démontrés par Huggan et Stevens sur les cycles, les roues et les étoiles subdivisées avec trois chemins [139]. En particulier, si la périodicité sur les cycles et les roues se définit en fonction de la longueur du cycle, celle sur les étoiles subdivisées avec trois chemins est plus complexe : les auteurices fixent un chemin de l’étoile, en font varier un deuxième sur la longueur de la période de **0.07** (c’est-à-dire 34) et font varier le troisième ce qui définit donc 34 séquences de Grundy. Les auteurices donnent un test de détection de périodicité de la séquence et conjecturent que ces séquences sont ultimement périodiques.

Ces observations et les questions qui se posent sur la définition de périodicité des séquences de Grundy dans les jeux de suppression de sommets nous poussent à proposer une généralisation des jeux octaux pour y jouer sur des graphes, qui est l’objet de la section suivante.

**Observation 4.48.** *Il est également possible de définir des jeux de suppression dans les graphes où les joueurs peuvent supprimer autre chose que des sommets. Un exemple classique est GRAPH CHOMP (introduit d’abord dans les ensembles partiellement ordonnés et les hypergraphes [62, 59] et récemment étudié sur des familles de graphes [102, 120]), qui se joue sur des graphes non-simples (il peut y avoir des boucles, et deux sommets peuvent être reliés par plusieurs arêtes) et où les joueurs peuvent supprimer soit un sommet (et ses arêtes incidentes) soit une arête.*

*Les mêmes problématiques se posent dans ces jeux que dans les jeux de suppression de sommets : décider de l’issue et calculer la valeur de Grundy. Cependant, nous ne considérons dans ce manuscrit que des jeux de suppression de sommets.*

#### 4.3.4 Jeux octaux dans les graphes

Dans les jeux octaux, il y a deux types de coups : ceux de type *taking* et ceux de type *breaking*. Les premiers peuvent se généraliser en posant qu’un coup de type *taking* consiste à supprimer des sommets du graphe. Afin de conserver le lien avec les jeux octaux, dans lesquels les jetons doivent être retirés d’une seule pile, nous imposons que ces sommets soient dans la même composante connexe. De plus, nous imposons que les sommets retirés induisent un sous-graphe connexe : dans le cas contraire les jeux de soustraction sur les graphes seraient triviaux. En effet, comme il est toujours possible de retirer un sommet d’un graphe sans le déconnecter, alors il est également possible de retirer  $k$  sommets d’un graphe sans le déconnecter, et donc les jeux de soustraction sur des graphes seraient exactement les mêmes jeux de soustraction sur les piles de jetons. Le passage à une structure plus complexe serait donc injustifié pour toute une sous-famille des jeux octaux, réduisant l’intérêt de l’extension de la définition. Quant aux coups de type *breaking*, il y a deux interprétations à en avoir : soit il s’agit de diviser une pile en deux (ce qui justifie la définition des jeux hexadécimaux généralisés), soit il s’agit de « casser » la connexité de la pile. Nous avons choisi de prendre cette deuxième interprétation, et de permettre à un coup de type *breaking* de diviser un graphe en un nombre quelconque de composantes connexes. Ce choix rend les règles beaucoup moins situationnelles

et permet d'inclure des jeux de suppression de sommets existants comme ARC-KAYLES.

Dans [16], nous avons proposé l'extension suivante de la définition 4.40 afin de jouer aux jeux octaux sur des graphes :

**Définition 4.49.** Soit  $d_0, d_1, d_2, d_3, \dots$  une séquence de nombres en base 8, de la forme  $d_i = b_i^0 + 2 \times b_i^1 + 4 \times b_i^2$  et tel que  $d_0 \in \{0, 4\}$ . Le jeu octal sur des graphes  $\mathbf{d}_0.\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3 \dots$  est le jeu de suppression de sommets dans lequel les joueurs peuvent retirer un sous-graphe connexe de  $k$  sommets si et seulement si  $d_k \neq 0$ . Ce faisant, ils peuvent vider le graphe si  $b_k^0 = 1$ , le laisser connexe si  $b_k^1 = 1$  et le séparer en plusieurs composantes connexes si  $b_k^2 = 2$ .

La définition 4.49 permet de considérer de nombreux jeux de suppression de sommets existants comme des jeux octaux. Ainsi, ARC-KAYLES est exactement **0.07**. D'autres jeux plus récents, comme GRIM [2] ou sa version à score [46], dans lesquels les joueurs suppriment un sommet à condition qu'il ne soit pas isolé, sont en fait **0.6**. En revanche, le jeu NODE-KAYLES n'est pas inclus dans notre définition, car la règle de suppression de sommets ne concerne pas un ensemble de taille fixe (1 dans GRIM, 2 dans ARC-KAYLES).

La principale question dans les jeux octaux sur les graphes est de répondre aux problèmes de décision 4.50 et 4.51 de façon efficace.

**Problème de décision 4.50.**

JEU OCTAL SUR LES GRAPHES

ENTRÉE : Un jeu octal  $\mathbf{d}_0.\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3 \dots$ , un graphe  $G(V, E)$ .

QUESTION : A-t-on  $G \in \mathcal{N}$  ?

**Problème de décision 4.51.**

VALEUR DE GRUNDY D'UN JEU OCTAL SUR LES GRAPHES

ENTRÉE : Un jeu octal  $\mathbf{d}_0.\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3 \dots$ , un graphe  $G(V, E)$ , un entier  $k$ .

QUESTION : A-t-on  $\mathcal{G}(G) = k$  ?

Un premier résultat est que jouer à un jeu octal sur un chemin avec  $n$  sommets est exactement équivalent à y jouer sur une pile de  $n$  jetons :

**Proposition 4.52.** *Le jeu octal  $\mathbf{d}_0.\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3 \dots$  joué sur le chemin  $P_n$  est exactement le jeu octal  $\mathbf{d}_0.\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3 \dots$  joué sur la position  $(n)$ .*

Cependant, pour les graphes généraux, deux difficultés apparaissent. La première est le saut en complexité, le nombre d'options étant souvent démultiplié dans un graphe par rapport à un chemin. Ainsi, répondre au problème de décision 4.51 pour ARC-KAYLES et un chemin est de complexité polynomiale (car il s'agit de **0.07**), mais comme dit dans la section précédente la complexité du même problème reste encore ouverte pour les grilles, y compris de hauteur 3. Il est donc probable qu'étendre d'autres jeux octaux sur des graphes va poser les mêmes problèmes de saut de complexité.

La deuxième difficulté est de déterminer une façon d'étudier la régularité des issues ou des valeurs de Grundy. Comment définir une notion de périodicité dans les graphes ? Nous allons nous placer dans la continuité des travaux réalisés sur les étoiles subdivisées avec trois chemins pour ARC-KAYLES [139] et étudier l'évolution de la valeur de Grundy lorsque nous attachons un chemin à un sommet donné d'un graphe fixé et faisons croître la longueur de ce chemin. De façon plus formelle, nous définissons la notation suivante, illustrée figure 4.13 :

**Notation 4.53.** Soit  $G$  un graphe, et  $u$  un de ses sommets. Le graphe  $G \overset{\bullet}{\leftarrow} P_k$  désigne le graphe construit en attachant un chemin de  $k$  sommets au sommet  $u$ . En particulier, si  $G$  est vide, alors  $G \overset{\bullet}{\leftarrow} P_k = P_k$ .

Une autre problématique est alors de répondre au problème de décision 4.54 et d'étudier la régularité des valeurs de Grundy de  $G \overset{\bullet}{\leftarrow} P_k$  lorsque  $k$  croît. Dans le chapitre 5, nous allons nous intéresser à cette question sur les jeux de soustraction dans les graphes.

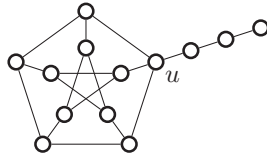


FIGURE 4.13 – Illustration de la notation  $G_u \bullet \rightarrow P_k$ , avec  $G$  le graphe de Petersen et  $k = 3$ .

**Problème de décision 4.54.**

SÉQUENCE PÉRIODIQUE POUR UN JEU OCTAL SUR LES GRAPHS

ENTRÉE : Un jeu octal  $\mathbf{d}_0.\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3\dots$ , un graphe  $G(V, E)$ , un sommet  $u$ .

QUESTION : La séquence  $(\mathcal{G}(G_u \bullet \rightarrow P_k))_{k \geq 0}$  est-elle ultimement périodique ?

# Liste des jeux

Nous présentons ici une liste des jeux combinatoires mentionnés dans les chapitres 4 à 6. Sauf mention contraire, tous ces jeux se jouent en convention normale : le premier joueur incapable de jouer perd. Les jeux sont ordonnés par ordre alphabétique.

ARC-KAYLES [127] (ou **0.07** sur les graphes)

ENTRÉE : Un graphe  $G$ .

RÈGLES : Les joueurs suppriment deux sommets adjacents de  $G$ .

ARC-KAYLES PONDÉRÉ [41] (ou WAK)

ENTRÉE : Un graphe pondéré  $G$ .

RÈGLES : Les joueurs sélectionnent une arête de  $G$  et réduisent le poids de son ou ses extrémités de 1.

CRAM [63]

ENTRÉE : Un plateau.

RÈGLES : Les joueurs peuvent placer un domino sur le plateau.

DOMINEERING [63]

ENTRÉE : Un plateau.

RÈGLES : Les joueurs peuvent placer un domino sur le plateau ; un d'entre eux place uniquement des dominos verticaux, l'autre uniquement des dominos horizontaux.

FJORDS [1]

ENTRÉE : Une grille de forme quelconque composée d'hexagones.

RÈGLES : Les joueurs placent un pion de leur couleur sur une case adjacente à une case qu'ils contrôlent déjà.

GRIM [2] (ou **0.6** sur les graphes)

ENTRÉE : Un graphe  $G$ .

RÈGLES : Les joueurs suppriment un sommet non-isolé de  $G$ .

HEX [113]

ENTRÉE : Une grille en forme de parallélogramme composée d'hexagones.

RÈGLES : Les joueurs placent un pion de leur couleur sur la grille, la partie s'achève lorsque deux côtés opposés sont reliés par une ligne monochrome. Le joueur ayant relié les deux côtés gagne.

NIM [26]

ENTRÉE : Une séquence d'entiers positifs  $(x_1, \dots, x_k)$ .

RÈGLES : Les joueurs peuvent réduire un entier de la séquence d'autant qu'ils le souhaitent.

NODE-KAYLES [127]

ENTRÉE : Un graphe  $G$ .

RÈGLES : Les joueurs suppriment un sommet et tous ses voisins de  $G$ .

Jeu de pur *breaking*  $PB(S)$  [19]

ENTRÉE : Une séquence d'entiers positifs  $(x_1, \dots, x_k)$ , un ensemble d'entiers strictement positifs  $S$ .

RÈGLES : Les joueurs peuvent séparer un entier  $x_i$  en  $n + 1$  entiers strictement positifs  $x_i^0, \dots, x_i^n$  tels que  $\sum_{j=0}^n x_i^j = x_i$  si et seulement si  $n \in S$ .

Jeu de soustraction  $SUB(S)$  [19]

ENTRÉE : Une séquence d'entiers positifs  $(x_1, \dots, x_k)$ , un ensemble d'entiers strictement positifs  $S$ .

RÈGLES : Les joueurs peuvent réduire un entier de la séquence d'un entier  $n$  si et seulement si  $n \in S$ .

Jeu de soustraction connexe  $CSG(S)$  [42]

ENTRÉE : Un graphe connexe  $G$ , un ensemble d'entiers strictement positifs  $S$ .

RÈGLES : Les joueurs peuvent supprimer  $n$  sommets de  $G$  induisant un sous-graphe connexe à condition que  $G$  reste connexe.

Jeu des tours sur un échiquier troué [41]

ENTRÉE : Un échiquier rectangulaire avec des trous.

RÈGLES : Les joueurs placent une tour sur une case non-attaquée (les tours n'attaquent pas par-dessus les trous).

Jeu octal  $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3} \dots$  [19]

ENTRÉE : Une séquence d'entiers positifs  $(x_1, \dots, x_k)$ , un ensemble de nombre octaux  $d_0, d_1, d_2, \dots$

RÈGLES : Les joueurs peuvent réduire un entier de la séquence d'un entier  $n$  si et seulement si  $d_n \neq 0$ . De plus, ils peuvent le réduire à 0 si et seulement si  $d_n \in \{1, 3, 5, 7\}$ , le réduire à au moins 1 si et seulement si  $d_n \in \{2, 3, 6, 7\}$ , séparer l'entier restant  $x_i$  en deux entiers  $x'_i$  et  $x''_i$  avec  $x_i = x'_i + x''_i$  et  $x'_i, x''_i \neq 0$  si et seulement si  $d_n \in \{4, 5, 6, 7\}$ .

Jeu octal  $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3} \dots$  sur les graphes [16]

ENTRÉE : Un graphe  $G$ , un ensemble de nombre octaux  $d_0, d_1, d_2, \dots$

RÈGLES : Les joueurs peuvent supprimer  $n$  sommets de  $G$  induisant un sous-graphe connexe si et seulement si  $d_n \neq 0$ . De plus, ils peuvent vider  $G$  si et seulement si  $d_n \in \{1, 3, 5, 7\}$ , laisser au moins 1 sommet dans  $G$  si et seulement si  $d_n \in \{2, 3, 6, 7\}$ , séparer  $G$  en plusieurs composantes connexes non-vides si et seulement si  $d_n \in \{4, 5, 6, 7\}$ .

## Chapitre 5

# Jeux de soustraction dans les graphes

Dans ce chapitre, nous présentons des travaux effectués au sein du projet ANR GAG<sup>1</sup>. Il s'agit de l'étude de jeux de soustraction dans les graphes, tels que définis par la définition 4.49 avec les  $d_i \in \{0, 3\}$ . Ces jeux seront par la suite appelés *jeux de soustraction connexes*. Plusieurs familles de jeux de soustraction connexes, étudiés sur diverses classes de graphes, seront développées dans ce chapitre. Ces travaux ont été effectués en collaboration avec différentes personnes. Une partie, réalisée avec **Laurent Beaudou** (maître de conférences à Clermont-Ferrand), **Pierre Coupechoux** (doctorant à Toulouse), **Sylvain Gravier** (directeur de recherche à Grenoble), **Julien Moncel** (maître de conférences à Toulouse), **Aline Parreau** et **Éric Sopena** (professeur à Bordeaux), a donné lieu à une publication [16] et plusieurs présentations (Graphes@Lyon 2015, Journées Graphes et Algorithmes 2015, Combinatorial Game Theory Colloquium 2), et une autre partie, réalisée avec **Julien Moncel** et **Aline Parreau** est en cours de rédaction pour soumission [42].

### Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous commencerons par rappeler dans la section 5.1 les règles et problématiques des jeux de soustraction connexes et définir la notation  $\text{CSG}(L)$  : il s'agit du jeu de soustraction  $\text{SUB}(L)$  généralisé sur les graphes. Nous allons par la suite donner dans la section 5.2 des résultats généraux sur les jeux de soustraction connexes dans les graphes. En particulier, nous montrons qu'une ultime périodicité peut être trouvée pour ces jeux, en lien avec les jeux de soustraction classiques étudiés dans la section 4.3.1. Ensuite, dans la section 5.3, nous étudierons la famille  $\text{CSG}(\{1, \dots, N\})$  sur les graphes, et plus spécifiquement sur la famille des étoiles subdivisées. Nous y démontrons encore des résultats de périodicité. Dans la section 5.4, nous montrerons que la famille  $\text{CSG}(\{1, \dots, N\} \cup \{M\})$ , pourtant très proche de la famille précédente dans la définition classique, se révèle beaucoup plus complexe à étudier dans les graphes. Dans la section 5.5, nous étudierons le jeu  $\text{CSG}(\{1, 2\})$  sur les biétoiles subdivisées, en utilisant une variante de la somme de jeux. Nous montrerons également que l'étude initiée dans les sections précédentes ne s'étend pas naturellement aux arbres en général. Enfin, dans la section 5.6, nous étudierons le jeu  $\text{CSG}(\{2\})$ , une variante d'ARC-KAYLES dans laquelle les joueurs ne peuvent pas déconnecter le graphe.

### 5.1 Jeux de soustraction connexes

Les jeux que nous étudions dans ce chapitre sont des jeux de soustraction sur les graphes, définis en utilisant la définition 4.49. Cependant, la notation avec un code octal n'étant pas la plus lisible, nous allons utiliser une notation plus proche de celle introduite dans la définition 4.33 :

**Définition 5.1.** Soit  $L$  un ensemble d'entiers strictement positifs. Le *jeu de soustraction connexe*  $\text{CSG}(L)$  est le jeu de suppression de sommets se jouant sur un graphe  $G$  dans lequel les joueurs

---

1. Graphs and Games : <https://projet.liris.cnrs.fr/gag/>



peuvent supprimer un ensemble de  $k$  sommets de  $G$  induisant une composante connexe si et seulement si  $k \in L$  et  $G$  reste connexe après le coup.

Cette définition est illustrée figure 5.1, qui montre une partie du jeu  $\text{CSG}(\{2, 4\})$ .

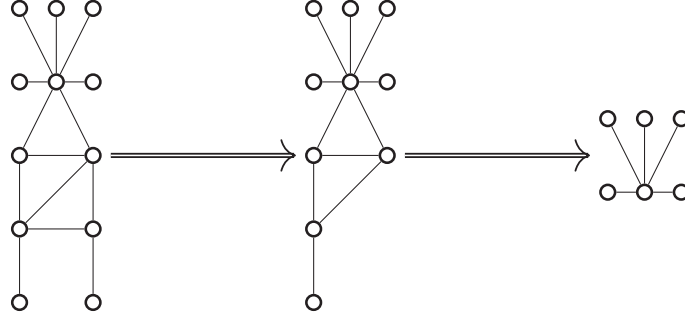


FIGURE 5.1 – Un exemple de partie du jeu de soustraction connexe  $\text{CSG}(\{2, 4\})$ . Dans la position la plus à droite, il est impossible de retirer une composante connexe de 2 ou 4 sommets du graphe sans le déconnecter, il s’agit donc d’une position finale.

Nous allons principalement concentrer notre étude sur la famille des jeux  $\text{CSG}(\{1, \dots, N\})$ , notamment dans les sections 5.3 et 5.5. Pour simplifier l’écriture, nous définissons la notation suivante :

**Notation 5.2.** Soit  $N$  un entier strictement positif. L’ensemble  $\{1, \dots, N\}$  sera noté  $I_N$ .

Rappelons que les principaux problèmes que nous cherchons à résoudre pour les jeux de soustraction connexes sont les problèmes de décision 4.50, 4.51 et 4.54 : le premier consiste à décider l’issue du jeu pour un graphe donné, le deuxième à déterminer la valeur de Grundy d’un graphe donné pour le jeu, et le troisième à vérifier si la séquence des valeurs de Grundy du graphe  $G \xrightarrow{u} P_k$  (pour  $G$  et  $u$  donnés et  $k$  variant à partir de 0 ; cf. notation 4.53) est ultimement périodique. Nous allons commencer en répondant positivement à cette troisième question pour les jeux de soustraction connexes dont l’ensemble de soustraction est fini.

## 5.2 Résultats globaux sur les jeux de soustraction connexes

Notons tout d’abord que la proposition 4.26 implique le résultat suivant, qui sera utilisé pour démontrer plusieurs résultats par la suite :

**Proposition 5.3.** Pour tout graphe  $G$  et tout jeu de soustraction connexe,  $\mathcal{G}(G) \leq |G|$ .

*Preuve.* Le résultat se prouve par induction sur  $G$ . Si  $G$  est le graphe vide, alors  $\mathcal{G}(G) = 0$ . Soit  $G$  de taille quelconque, alors toute option  $G'$  vérifiera  $|G'| \leq |G|$ . Par hypothèse d’induction, on aura donc  $\mathcal{G}(G') \leq |G'|$ . Par le théorème 4.25, nous avons alors :

$$\mathcal{G}(G) = \text{mex}(\{\mathcal{G}(G') \mid G' \in \text{opt}(G)\})$$

Or, aucun  $\mathcal{G}(G')$  ne peut être égal à  $|G|$ . Donc,  $\mathcal{G}(G) \leq |G|$ . □

Afin de travailler sur le problème de décision 4.54, nous allons étudier la fonction qui, étant donné un ensemble fini d’entiers  $L$ , un graphe  $G$  et un sommet  $u$ , associe à un entier  $k$  la valeur de Grundy du graphe  $G \xrightarrow{u} P_k$  pour le jeu  $\text{CSG}(L)$ . Cette fonction est notée  $f_{L,G,u}$ . Nous démontrons le résultat suivant, qui permet de répondre positivement au problème de décision 4.54 pour les jeux  $\text{CSG}(L)$  où  $L$  est fini :

**Théorème 5.4** (D., Moncel, Parreau). *Soient  $L$  un ensemble fini d'entiers,  $G$  un graphe et  $u$  un de ses sommets. La fonction  $f_{L,G,u}$  est ultimement périodique.*

*Preuve.* Cette preuve fonctionne sur un principe similaire à celle du théorème 4.34. Dans celle-ci, nous prenons  $k$  le plus grand élément de l'ensemble  $L$ , et utilisons le fait que toutes les options pour un entier  $n$  étaient entre  $n - k$  et  $n$ . Comme le nombre de séquences de  $k$  entiers est fini, il existait deux séquences identiques dans la séquence de Grundy, ce qui impliquait que la séquence de Grundy était périodique.

Nous raisonnons par induction sur  $|G|$ . Le cas  $|G| \in \{0, 1\}$  correspond aux chemins, donc aux jeux de soustraction sur les piles de jetons, pour lesquels le résultat est juste par le théorème 4.34. Posons  $T_L$  et  $k_L$  les période et prépériode du jeu de soustraction sur les piles de jetons  $\text{SUB}(L)$ .

Soit  $G$  un graphe d'ordre au moins 2, et soit  $u$  un de ses sommets. Si  $G'$  est un sous-graphe connexe de  $G$  contenant  $u$ , supposons que  $f_{L,G',u}$  est ultimement périodique, de période  $T_{G'}$  et de prépériode  $k_{G'}$ . Nous posons :

$$T = \text{ppcm}(\{T_L\} \cup \bigcup_{G'} \{T_{G'}\})$$

$$k_0 = \max(\{k_L\} \cup \bigcup_{G'} \{k_{G'}\})$$

Si  $k > \max(L)$ , alors trois types de coups sont disponibles depuis  $G \overset{\bullet}{\underset{u}{\bullet}} P_k$  :

1. Jouer sur un  $G \overset{\bullet}{\underset{u}{\bullet}} P_{k-i}$  ( $|L|$  coups différents) ;
2. Jouer sur un  $G' \overset{\bullet}{\underset{u}{\bullet}} P_k$  avec  $G'$  un sous-graphe connexe de  $G$  contenant  $u$  (au plus  $2^{|G|-1}$  coups différents) ;
3. Jouer sur un  $P_{k-i}$  en supprimant tout le graphe  $G$  (au plus  $|L|$  coups différents).

Le nombre d'options est donc borné par une constante  $C$  ne dépendant que de  $|G|$  et  $|L|$ , en particulier  $C$  ne dépend pas de  $k$ . Donc, par la proposition 4.26,  $f_{L,G,u}(k) \leq C$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Nous appelons  $A(k)$  le  $|L|$ -uplet formé des valeurs de Grundy de  $G \overset{\bullet}{\underset{u}{\bullet}} P_i$  pour  $i \in \{k+1, k+2, \dots, k+|L|\}$ . Tous les éléments de  $A(k)$  prennent leurs valeurs dans  $\{0, \dots, M\}$ . Comme il y a un nombre fini de tels  $|L|$ -uplets, il existe nécessairement deux entiers distincts  $k_1, k_2$  tels que  $A(k_1) = A(k_2)$ . De plus, l'infinité de tels  $|L|$ -uplets avec  $k \geq k_0$  et  $k \equiv 0 \pmod T$  implique qu'on peut supposer  $k_0 \leq k_1 < k_2$  et  $k_1, k_2 \equiv 0 \pmod T$ .

Soit  $T_f = k_2 - k_1$ . Nous allons montrer par induction que pour tout  $k > k_1$ ,  $f_{L,G,u}(k + T_f) = f_{L,G,u}(k)$ , ce qui montrera l'ultime périodicité de  $f_{L,G,u}$ . Le résultat est valide pour  $k_1 < k \leq k_1 + |L|$  par définition de  $A(k_1)$  et  $A(k_2)$ . Soit  $k > k_1 + |L|$ , supposons que le résultat est valide pour les  $|L|$  valeurs précédant  $k$ . La valeur de  $f_{L,G,u}(k + T_f)$  se calcule par le mex des valeurs suivantes :

1.  $f_{L,G,u}(k + T_f - i)$  avec  $i \leq |L|$  ;
2.  $f_{L,G',u}(k + T_f)$  où  $G'$  est un sous-graphe connexe de  $G$  contenant  $u$  ;
3.  $\mathcal{G}(P_{k+T_f-i})$  avec  $i \leq |L|$ .

Par hypothèse d'induction,  $f_{L,G,u}(k + T_f - i) = f_{L,G,u}(k - i)$ . De plus, comme  $T_f$  est un multiple de  $T$  et que  $k$  est plus grand que toutes les prépériodes et que  $|L|$ ,  $f_{L,G',u}(k + T_f) = f_{L,G',u}(k)$  et  $\mathcal{G}(P_{k+T_f-i}) = \mathcal{G}(P_{k-i})$ . Ceci implique que l'ensemble des valeurs sur lesquelles le mex est calculé est le même pour  $f_{L,G,u}(k + T_f)$  que pour  $f_{L,G,u}(k)$ , et donc ces valeurs sont les mêmes, ce qui démontre le résultat, et donc l'ultime périodicité de  $f_{L,G,u}$ .  $\square$

Ce résultat montre que l'extension de la définition des jeux octaux dans les graphes peut s'accompagner de résultats de périodicité similaires ; en particulier le théorème 5.4 est une extension du théorème 4.34. Certes, les période et prépériode obtenues par le théorème 5.4 peuvent être arbitrairement grandes (notamment par rapport au jeu de soustraction sur les piles), mais les familles de jeux de soustraction connexes que nous avons étudiées ont les mêmes périodes que les jeux de soustraction classiques. Une nouvelle problématique intéressante est donc de savoir si ce résultat tient pour tous les jeux de soustraction :

**Question ouverte 5.5.** La fonction  $f_{L,G,u}$  a la même période que la séquence de Grundy du jeu de soustraction équivalent sur les piles de jetons.

Cette question est importante, car le fait d'avoir répondu positivement au problème de décision 4.54 sur les jeux de soustraction connexes ne nous donne pas forcément d'algorithme efficace pour répondre au problème de décision 4.51 et déterminer la valeur de Grundy d'un graphe quelconque. Ce problème reste donc ouvert dans le cas général, et nous allons nous y attaquer dans le reste du chapitre.

Concernant la préperiode, nous avons principalement considéré des jeux dont la séquence de Grundy est directement périodique, aussi n'avons-nous pas d'intuitions concernant un lien entre préperiode pour le jeu de soustraction classique et pour le jeu de soustraction sur les graphes.

Une autre question d'intérêt est de déterminer s'il est également possible de généraliser le théorème 4.39 aux jeux de soustraction connexes  $\text{CSG}(\mathbb{N} \setminus L)$  avec  $L$  fini :

**Question ouverte 5.6.** Étant donné un ensemble fini d'entiers  $L$ , un graphe  $G$  et un sommet  $u$ , la fonction  $f_{\mathbb{N} \setminus L, G, u}$  est-elle ultimement arithmétique périodique ?

Nous démontrons également un méta-lemme, qui permet d'étudier les valeurs de Grundy de graphes ne dépendant que de l'ordre du graphe modulo une certaine période :

**Lemme 5.7.** Soient  $L$  un ensemble fini d'entiers induisant un jeu de soustraction connexe  $\text{CSG}(L)$ ,  $T$  un entier strictement positif, et  $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{T-1}\} = \{0, \dots, T-1\}$ . Soit également  $\mathcal{F}$  une famille de graphes telle que, pour tout graphe  $G \in \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}(G) = \alpha_{|G| \bmod T}$ .

Considérons une famille  $\mathcal{F}'$  de graphes telle que :

(i) Pour tout  $G \in \mathcal{F}'$ ,  $\text{opt}(G) \subseteq \mathcal{F}$  ;

(ii) Pour tout  $G \in \mathcal{F}'$ ,  $\{k \bmod T \mid \text{il existe un coup retirant } k \text{ sommets de } G\} = \{1, \dots, T-1\}$ .

Alors, pour tout  $G \in \mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{G}(G) = \alpha_{|G| \bmod T}$ .

*Preuve.* Soit  $G \in \mathcal{F}'$ . Notons  $H^k$  l'ensemble des graphes de  $\mathcal{F}$  obtenus en retirant  $k$  sommets de  $G$ . Par définition,  $\mathcal{G}(H) = \alpha_{|H| \bmod T}$  pour tout graphe  $H \in H^k$ . Or, comme  $|H| = |G| - k$ , on a donc  $\mathcal{G}(H) = \alpha_{|G| - k \bmod T}$ . La condition (ii) implique quant à elle :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(G) &= \text{mex}(\{\mathcal{G}(H) \mid H \in \text{opt}(G)\}) \\ &= \text{mex}(\{\alpha_{|G| - k \bmod T} \mid \text{il existe un coup retirant } k \text{ sommets de } G\}) \\ &= \text{mex}(\{\alpha_{|G| - 1 \bmod T}, \alpha_{|G| - 2 \bmod T}, \dots, \alpha_{|G| - T + 1 \bmod T}\}) \end{aligned}$$

Or,  $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{T-1}\} = \{0, \dots, T-1\}$ , ce qui implique que  $\mathcal{G}(G) = \alpha_{|G| \bmod T}$ . □

Ce lemme se révèle utile pour étudier des familles de graphes dont toutes les options sont des chemins, par exemple des petites étoiles subdivisées. Dans ce cas,  $\alpha_i = i$ .

Ce chapitre est structuré de la façon suivante : tout d'abord, dans la section 5.3, nous allons établir des résultats sur la famille de jeux de soustraction  $\text{CSG}(I_N)$  joués sur les étoiles subdivisées, qui sont les graphes les plus simples à étudier après les chemins. Dans la section 5.4, nous nous pencherons rapidement sur les jeux de la forme  $\text{CSG}(I_N \cup \{M\})$  : ceux-ci sont (sous conditions sur les valeurs de  $M$  et  $N$ , comme vu avec le théorème 4.37) équivalents aux jeux  $\text{CSG}(I_N)$  quand on les considère dans leur cadre classique, mais nous verrons que ce n'est plus le cas dans les graphes. Ensuite, la section 5.5 contiendra une étude du cas spécifique de  $\text{CSG}(I_2)$  sur les biétoiles subdivisées, où nous ferons apparaître une pseudo-somme similaire à la somme de jeux pour ces graphes. Enfin, dans la section 5.6, nous étudierons le jeu  $\text{CSG}(\{2\})$ , qui est une variante d'ARC-KAYLES. Ceci offrira un tour d'horizon des différents jeux de soustraction que nous avons considérés au cours de cette thèse.

Comme la famille de graphes que nous étudierons le plus est celles des étoiles subdivisées, nous allons définir ici la notation utilisée au long de ce chapitre, et qui est illustrée figure 5.2 :

**Notation 5.8.** Soient  $\ell_1, \dots, \ell_k$  des entiers strictement positifs. L'étoile subdivisée  $S_{\ell_1, \dots, \ell_k}$  est le graphe  $K_{1,k}$  dont la  $i$ -ème arête a été subdivisée  $\ell_i$  fois.

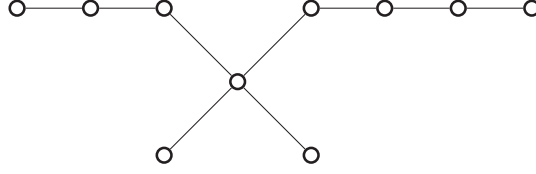


FIGURE 5.2 – L'étoile subdivisée  $S_{1,1,3,4}$ .

### 5.3 CSG( $I_N$ ) sur les graphes

La première famille de jeux de soustraction connexes que nous considérons est la famille  $\text{CSG}(I_N)$ . Dans ces jeux, les joueurs peuvent retirer des sous-graphes de taille 1 à  $N$  sans déconnecter le graphe. Cette famille a déjà été étudiée dans sa définition classique, menant à ce résultat :

**Théorème 5.9** (Folklore). *Soit  $N \geq 1$  un entier. Pour tout entier  $n$ , le jeu de soustraction  $\text{SUB}(I_N)$  vérifie  $\mathcal{G}(n) = n \bmod (N + 1)$ . En d'autres termes, la séquence de Grundy du jeu  $\text{SUB}(I_N)$  est périodique de période  $N + 1$ .*

Par la proposition 4.52, ce résultat s'étend immédiatement aux chemins et aux cycles, donnant ainsi un algorithme polynomial pour répondre au problème de décision 4.51 sur ces graphes. Nous allons maintenant étudier la famille des étoiles subdivisées, qui est d'une certaine manière la plus simple après les chemins (car il s'agit de chemins partant d'un sommet central, et la contrainte de laisser le graphe connexe après un coup impose de ne jouer qu'aux extrémités des chemins), dans l'objectif de trouver des algorithmes polynomiaux pour répondre au problème de décision 4.51.

Dans cette section, nous allons d'abord montrer des résultats de périodicité sur le premier jeu intéressant de cette famille,  $\text{CSG}(I_2)$  (le jeu  $\text{CSG}(I_1)$  n'est pas intéressant à étudier, car pour tout graphe  $G$  on a  $\mathcal{G}(G) = |G| \bmod 2$ ). Par la suite, nous nous pencherons sur la famille  $\text{CSG}(I_N)$  de façon générale, puis sur des sous-familles d'étoiles subdivisées.

#### 5.3.1 $\text{CSG}(I_2)$ sur les étoiles subdivisées

Le jeu  $\text{CSG}(I_2)$  est le premier jeu intéressant de la famille  $\text{CSG}(I_N)$ . Dans ce jeu, les joueurs peuvent retirer un sommet ou deux sommets adjacents sans déconnecter le graphe, comme illustré figure 5.3. Nous démontrons le résultat suivant :

**Théorème 5.10** (Beaudou, Coupechoux, D., Gravier, Moncel, Parreau, Sopena). *Pour tous entiers  $\ell_1, \dots, \ell_k$ ,  $\mathcal{G}(S_{\ell_1, \dots, \ell_k}) = \mathcal{G}(S_{\ell_1 \bmod 3, \dots, \ell_k \bmod 3})$  pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ .*

Ce résultat est en phase avec le théorème 5.9 : les chemins rayonnant du sommet central peuvent être réduits à leur longueur modulo 3 sans changer la valeur de Grundy de l'étoile, tout comme les chemins peuvent être réduits à leur longueur modulo 3 pour donner leur valeur de Grundy. Il s'agit donc d'une version plus forte du théorème 5.4 : ici, la période est exactement la même que pour la version classique du jeu de soustraction, et il n'y a pas de préperiode.

Afin de démontrer le théorème 5.10, il suffit de prouver qu'attacher un  $P_3$  au sommet central ou à une feuille d'une étoile subdivisée ne change pas la valeur de Grundy, une simple induction permettant alors de conclure. La preuve se décompose donc en plusieurs lemmes techniques, utilisant eux-mêmes une première observation :

**Observation 5.11.** *Soit  $P_n$  un chemin vérifiant  $n \geq 4$ , et  $u$  un sommet de  $P_n$ . Alors, un coup dans  $P_n$  supprimant  $u$  admet un coup équivalent ne supprimant pas  $u$  : supprimer le symétrique de  $u$  permet d'aboutir à la même option.*

**Lemme 5.12.** *Soit  $\ell$  un entier positif. Alors,  $\mathcal{G}(S_{1,1,\ell}) = \ell \bmod 3$  pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ .*

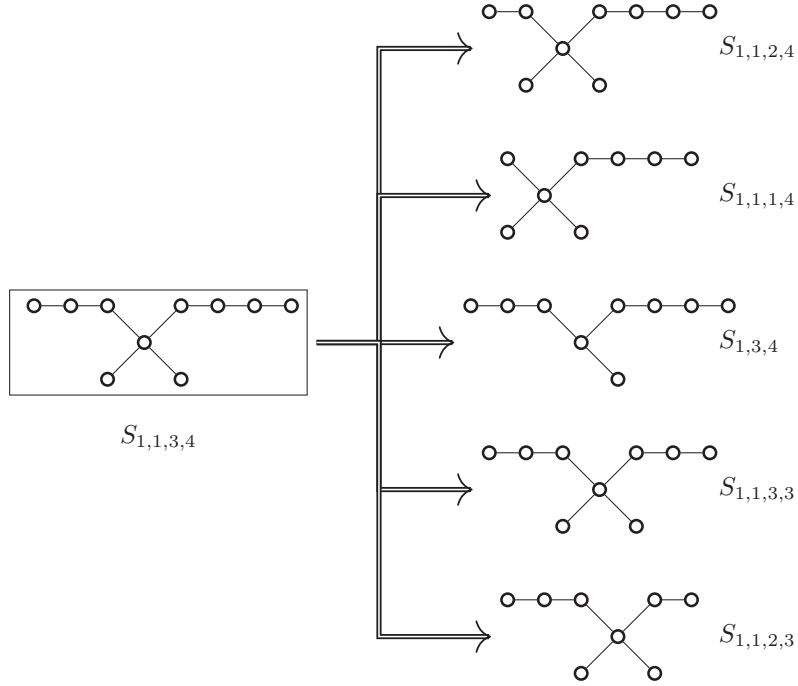


FIGURE 5.3 – Les coups possibles depuis une étoile subdivisée dans le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ .

*Preuve.* La preuve s'effectue par induction sur  $\ell$ . Notons  $S = S_{1,1,\ell}$ . Supposons d'abord qu'il existe un coup supprimant le sommet central de  $S$ . Ceci n'est possible que si  $\ell = 0$ , auquel cas  $S = P_3$  et donc  $\mathcal{G}(S) = 0$ , ce qui démontre le résultat.

S'il est impossible de supprimer le sommet central, alors  $\ell \geq 1$  et il y a jusqu'à trois coups possibles :

1. Supprimer une des feuilles, laissant  $P_{\ell+2}$  qui a pour valeur de Grundy  $\ell + 2 \bmod 3$  par le théorème 5.9 ;
2. Jouer vers  $S_{1,1,\ell-1}$  qui a pour valeur de Grundy  $\ell + 2 \bmod 3$  par hypothèse d'induction ;
3. Si  $\ell \geq 2$ , jouer vers  $S_{1,1,\ell-2}$  qui a pour valeur de Grundy  $\ell + 1 \bmod 3$  par hypothèse d'induction.

Si  $\ell = 1$ , alors les deux coups possibles sont équivalents et laissent  $P_3$  donc  $\mathcal{G}(S) = 1$ , ce qui démontre le résultat. Si  $\ell \geq 2$ , alors  $\mathcal{G}(S) = \text{mex}(\{\ell + 1 \bmod 3, \ell + 2 \bmod 3\}) = \ell \bmod 3$ , ce qui démontre le résultat.  $\square$

Nous pouvons désormais démontrer le principal lemme technique :

**Lemme 5.13.** *Soient  $\ell_1, \dots, \ell_k$  des entiers positifs. Alors,  $\mathcal{G}(S_{\ell_1, \dots, \ell_k}) = \mathcal{G}(S_{\ell_1+3, \ell_2, \dots, \ell_k})$  pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ .*

*Principe de la preuve.* Soient  $S = S_{\ell_1, \dots, \ell_k}$  et  $S' = S_{\ell_1+3, \ell_2, \dots, \ell_k}$ , il suffit de démontrer que  $S \equiv S'$ , et donc que  $S + S' \in \mathcal{P}$ . La preuve s'effectue par induction sur  $|V(S)|$ .

Supposons que le premier joueur peut supprimer le sommet central de  $S$ , il y a plusieurs cas :

1. Si  $S = \emptyset$  (resp.  $S = P_1$ ,  $S = P_2$ ), alors  $S' = P_3$  (resp.  $S = P_4$ ,  $S = P_5$ ) et le théorème 5.9 démontre le résultat ;
2. Si  $S = P_3$ , alors soit  $S' = P_6$  soit  $S' = S_{1,1,3}$  et les théorème 5.9 et lemme 5.12 démontrent le résultat ;

3. Si  $S = S_\ell$  avec  $\ell \geq 4$  ou  $S = S_{1,\ell}$  avec  $\ell \geq 2$ , alors l'observation 5.11 nous indique que le deuxième joueur peut répliquer le coup supprimant le sommet central. L'hypothèse d'induction nous permet ensuite de démontrer le résultat.

Si le premier joueur ne peut pas supprimer le sommet central de  $S$ , il y a encore trois cas :

1. Si le premier joueur joue sur le chemin de longueur  $\ell_1 + 3$  dans  $S'$ , alors le deuxième joueur prend le complément à 3 sur le même chemin, et laisse  $S + S$  qui est dans  $\mathcal{P}$  par la proposition 4.13 ;
2. Si le premier joueur joue ailleurs sur  $S'$ , alors le deuxième joueur peut répliquer son coup sur  $S$ , laissant une position dans  $\mathcal{P}$  par hypothèse d'induction ;
3. Si le premier joueur joue sur  $S$ , alors comme il ne peut pas supprimer le sommet central le deuxième joueur peut répliquer son coup sur  $S'$ , laissant une position dans  $\mathcal{P}$  par hypothèse d'induction.

Comme le deuxième joueur a toujours une réponse gagnante aux coups du premier joueur, cela implique que  $S + S' \in \mathcal{P}$ , ce qui démontre le résultat.  $\square$

Appliquer de façon répétée le lemme 5.13 permet de démontrer le théorème 5.10. Celui-ci implique que l'on peut réduire les chemins d'une étoile subdivisée à leur longueur modulo 3 sans changer la valeur de Grundy : les chemins de longueur  $3p$  peuvent être supprimés, ceux de longueur  $3p + 1$  réduits à une simple feuille, et ceux de longueur  $3p + 2$  réduits à un  $P_2$ . L'étude des valeurs de Grundy des étoiles subdivisées peut donc être effectuée en étudiant les valeurs de Grundy des étoiles avec des chemins de longueur 1 ou 2.

Il est possible de construire une table des positions à étudier, comme l'illustre la figure 5.4 : en abscisse, le nombre de chemins de longueur 2 dans l'étoile subdivisée ; en ordonnée, le nombre de chemins dans l'étoile subdivisée. Une étoile subdivisée peut alors avoir jusqu'à trois options : au-dessus dans la table en supprimant un chemin de longueur 1, à gauche dans la table en supprimant un sommet d'un chemin de longueur 2, et au-dessus à gauche dans la table en supprimant un chemin de longueur 2.

Le graphe vide ayant une valeur de Grundy de 0, il est possible de construire inductivement une table des valeurs de Grundy des étoiles subdivisées pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ . La figure 5.5 présente les premières lignes de cette table, ainsi que les lignes paire et impaire à partir d'un certain niveau. En effet, à partir de cinq chemins, les lignes représentant les étoiles subdivisées ayant un nombre impair de chemins sont de la forme  $1203(12)^*$  ; et à partir de quatre chemins, les lignes représentant les étoiles subdivisées ayant un nombre pair de chemins sont de la forme  $03120(30)^*$ . De plus, à partir de la quatrième colonne, les colonnes paires sont de la forme  $(01)^*$  et les colonnes impaires sont de la forme  $(23)^*$ .

Nous constatons donc qu'en plus de la périodicité définie en ajoutant un  $P_3$  à une feuille ou au sommet central de l'étoile, un comportement périodique apparaît pour les valeurs de Grundy des étoiles subdivisées pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$  lorsqu'on les indexe de cette façon. En particulier, cela nous donne un algorithme polynomial pour déterminer la valeur de Grundy d'une étoile subdivisée pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ , et donc répondre au problème de décision 4.51. Ceci nous a poussé à étudier plus en avant la famille  $\text{CSG}(I_N)$ , ce qui sera le sujet de la prochaine section.

### 5.3.2 Résultats généraux sur $\text{CSG}(I_N)$

Nous commençons par démontrer des résultats généraux sur la famille  $\text{CSG}(I_N)$ .

**Proposition 5.14.** *Pour tout entier strictement positif  $N$  et pour tout graphe  $G$  :*

- $\mathcal{G}(G) = 0$  si  $|G| \in \{0, N + 1\}$  ;
- $\mathcal{G}(G) = 1$  si  $|G| \in \{1, N + 2\}$  ;
- $\mathcal{G}(G) \geq 2$  si  $|G| \in \{2, \dots, N\}$  ;

pour le jeu  $\text{CSG}(I_N)$ .

*Preuve.* Si  $G = \emptyset$  alors il n'y a aucune option et donc  $G \in \mathcal{P}$ . Si  $G$  est un seul sommet, la seule option est de le supprimer et donc  $\mathcal{G}(G) = \text{mex}(\{0\}) = 1$ .

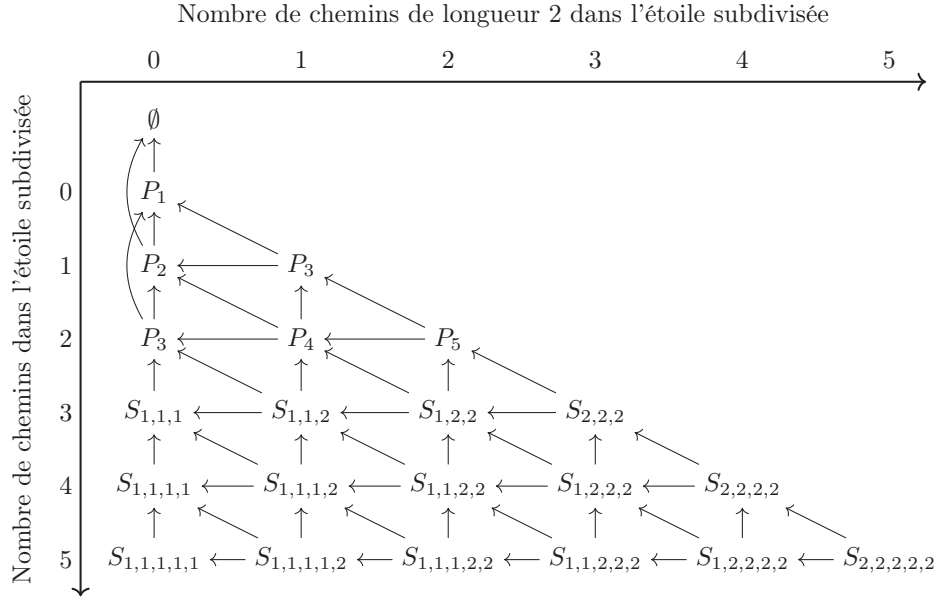


FIGURE 5.4 – Début de la table des étoiles subdivisées et de leurs options pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ . Notons que le théorème 5.10 permet de n'étudier que les étoiles ayant des chemins de longueur 1 ou 2.

Si  $|G| \in \{2, \dots, N\}$ , il existe nécessairement un sommet  $u$  tel que  $G \setminus u$  est connexe. Donc, il existe un coup vers le graphe réduit à un sommet. De plus, il existe un coup vidant le graphe. Donc  $\mathcal{G}(G) \geq \text{mex}(\{0, 1\}) = 2$ .

En revanche, si  $G$  a  $N + 1$  sommets, alors toutes les options ont une valeur de Grundy d'au moins 1, donc  $\mathcal{G}(G) = 0$ . De même, si  $G$  a  $N + 2$  sommets, alors toutes les options ont une valeur de Grundy d'au moins 2, sauf les options obtenues en supprimant un seul sommet qui ont une valeur de Grundy de 0, donc  $\mathcal{G}(G) = 1$ .  $\square$

Ce résultat permet donc d'étudier plus aisément les « petits » graphes, c'est-à-dire ceux de taille inférieure ou égale à  $N + 2$ . Le résultat suivant permet l'étude de graphes de cette taille auxquels est ajouté un chemin de longueur  $N + 1$  (c'est à dire la période du jeu de soustraction  $\text{CSG}(I_N)$ ).

**Proposition 5.15.** *Pour tous entier strictement positif  $N$ , graphe  $G$  et sommet  $u \in G$ , en notant  $G' = G \overset{\bullet}{\leftarrow} P_{N+1}$  :*

- $\mathcal{G}(G') = 0$  si  $|G| \in \{0, N + 1\}$  ;
- $\mathcal{G}(G') = 1$  si  $|G| \in \{1, N + 2\}$  ;
- $\mathcal{G}(G') \geq 2$  si  $|G| \in \{2, \dots, N\}$  ;

pour le jeu  $\text{CSG}(I_N)$ .

*Preuve.* Si  $|G| \in \{0, 1\}$  alors  $G'$  est un chemin et le résultat vient du théorème 5.9. Si  $|G| \in \{2, \dots, N\}$ , alors  $P_{N+1}$  et  $G \overset{\bullet}{\leftarrow} P_{N+2-|G|}$  sont des options de  $G'$  ; ces deux graphes ayant respectivement  $N + 1$  et  $N + 2$  sommets, leurs valeurs de Grundy sont 1 et 2 par la proposition 5.14, ce qui valide le résultat.

Si  $|G| = N + 1$ , pour tout  $H' \in \text{opt}(G')$ ,  $H'$  est de la forme soit  $G \overset{\bullet}{\leftarrow} P_i$  (avec  $1 \leq i \leq N$ ), soit  $H \overset{\bullet}{\leftarrow} P_{N+1}$  où  $H$  est un sous-graphe de  $G$  contenant  $u$  (car autrement, le coup déconnecterait le graphe, ce qui est illégal). Dans le premier cas, il existe un coup de  $H'$  à  $G$ , qui vérifie  $\mathcal{G}(G) = 0$  par la proposition 5.14. Dans le second cas,  $|H| \in \{1, \dots, N\}$  et donc  $\mathcal{G}(H') \neq 0$ . Ceci implique que  $\mathcal{G}(G') = 0$ .

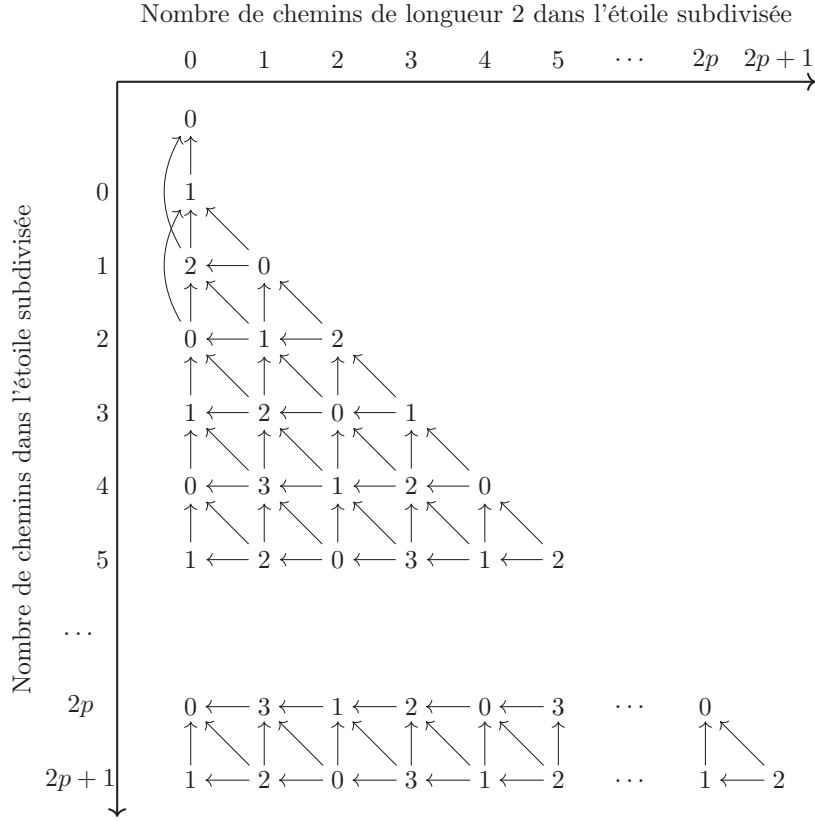


FIGURE 5.5 – Table des valeurs de Grundy des étoiles subdivisées pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ .

Enfin, de façon similaire, si  $|G| = N + 2$ , pour tout  $H' \in \text{opt}(G')$ ,  $H'$  est de la forme soit  $G \bullet_u \bullet P_i$  (avec  $1 \leq i \leq N$ ), soit  $H \bullet_u \bullet P_{N+2}$  où  $H$  est un sous-graphe de  $G$  contenant  $u$ . Dans le premier cas, il existe un coup de  $H'$  à  $G$ , qui vérifie  $\mathcal{G}(G) = 1$  par la proposition 5.14. Dans le second cas,  $|H| \in \{2, \dots, N + 1\}$  et donc  $\mathcal{G}(H') \neq 1$ . Comme de plus les options où  $H$  a exactement un sommet de moins que  $G$  vérifient  $\mathcal{G}(H') = 0$ , cela démontre que  $\mathcal{G}(G') = 1$ .  $\square$

Nous avons vu que le meilleur moyen de montrer que deux graphes ont la même valeur de Grundy est d'étudier leur somme ; si celle-ci est dans  $\mathcal{P}$ , alors les deux graphes sont équivalents. En particulier, dès lors que nous étudions les graphes  $G$  et  $G \bullet_u \bullet P_{N+1}$  afin d'affiner l'étude de la périodicité, nous devons montrer que le deuxième joueur a une réponse gagnante à tous les coups du premier joueur dans  $G + G \bullet_u \bullet P_{N+1}$ . Le méta-lemme suivant indique que, sous conditions, les seuls coups à considérer sont ceux où le premier joueur supprime le sommet  $u$  dans la composante  $G$  :

**Lemme 5.16.** *Soit  $N \geq 1$  un entier, nous considérons le jeu  $\text{CSG}(I_N)$ . Soit  $G$  un graphe, et  $u$  un sommet de  $G$ . Supposons que  $G$  est minimal dans le sens où  $\mathcal{G}(G) \neq \mathcal{G}(G \bullet_u \bullet P_{N+1})$ , mais  $\mathcal{G}(H) = \mathcal{G}(H \bullet_u \bullet P_{N+1})$  pour tout sous-graphe  $H$  de  $G$  contenant  $u$ . Alors, tous les coups gagnants sur  $G + G \bullet_u \bullet P_{N+1}$  sont dans la composante  $G$ , suppriment  $u$  et laissent au moins deux sommets.*

*Preuve.* Tout coup joué sur le chemin de longueur  $N + 1$  attaché à  $u$  est perdant : le deuxième joueur joue le complément à  $N + 1$  et laisse  $G + G$ , qui est dans  $\mathcal{P}$ . Tout coup joué sur  $G$  dans une des deux composantes, et qui ne supprime pas  $u$ , peut être recopié à l'identique dans l'autre



composante, laissant  $H + H \overset{u}{\bullet} P_{N+1}$  où  $H$  est un sous-graphe de  $G$  contenant  $u$ , qui est dans  $\mathcal{P}$  par minimalité de  $G$ .

Considérons maintenant un coup supprimant des sommets de  $G \overset{u}{\bullet} P_{N+1}$  et laissant un chemin  $P_{N+1-i}$ . Nécessairement,  $|G| \leq N - i$  (car aucun joueur ne peut supprimer plus de  $N$  sommets). Soit  $g = \mathcal{G}(G)$ . La proposition 5.3 implique que  $g \leq N - i < N + 1 - i$ , ce qui signifie qu'il existe nécessairement un coup de  $P_{N+1-i}$  à  $P_g$  (car les seules options d'un chemin sont d'autres chemins). Le deuxième joueur joue ce coup, laissant  $G + P_g$  qui est dans  $\mathcal{P}$ . Donc, les coups gagnants sur  $G + G \overset{u}{\bullet} P_{N+1}$  sont nécessairement dans la composante  $G$  et suppriment  $u$ .

De plus, si un tel coup vide  $G$ , alors le deuxième joueur peut le répliquer sur  $G \overset{u}{\bullet} P_{N+1}$ , laissant  $P_{N+1}$ , qui est dans  $\mathcal{P}$ . De même, si un tel coup laisse un graphe  $H$  comportant un seul sommet  $v$ , alors le deuxième joueur peut supprimer  $|G| - 1$  sommets du  $P_{N+1}$  attaché à  $u$ , laissant un graphe  $H'$  comportant  $|G| + N + 1 - (|G| - 1) = N + 2$  sommets. Or,  $\mathcal{G}(H') = 1$  par la proposition 5.14, donc  $\mathcal{G}(H + H') = 0$ , et donc  $(H + H') \in \mathcal{P}$ . Ceci implique que les coups gagnants laissent au moins 2 sommets dans la composante  $G$ .  $\square$

Cette étude préliminaire nous permet de nous pencher sur des familles particulières : d'abord les étoiles simples, puis des étoiles subdivisées. Notons par ailleurs que nous ne considérerons pas les cas de  $\text{CSG}(I_1)$  et de  $\text{CSG}(I_2)$  dans cette étude ; le premier car il est trivial sur tous les graphes, et le second par sa résolution dans la section précédente.

### 5.3.3 Étude des étoiles simples pour $\text{CSG}(I_N)$

Rappelons qu'une étoile simple est le graphe biparti  $K_{1,n}$  avec  $n \geq 0$  (si  $n = 0$  alors l'étoile est un sommet isolé). Pour des raisons de cas de base d'inductions, nous considérerons que le graphe vide est une étoile.

Nous allons d'abord étudier les valeurs de Grundy des étoiles simples pour le jeu  $\text{CSG}(I_N)$ , avant d'étudier les étoiles simples sur le sommet central desquelles est attaché un unique chemin de longueur quelconque afin d'obtenir un résultat de périodicité au sens du problème de décision 4.54.

**Théorème 5.17** (D., Moncel, Parreau). *Soit  $n$  un entier positif, et  $N \geq 3$ . Alors :*

$$\mathcal{G}(K_{1,n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } K_{1,n} = \emptyset \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n \leq N - 1 \text{ et } n \text{ est impair} \\ 3 & \text{si } n \leq N - 1 \text{ et } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n = N + i \text{ avec } i \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n = N + i \text{ avec } i \text{ est impair} \end{cases}$$

pour le jeu  $\text{CSG}(I_N)$ .

*Preuve.* La preuve s'effectue par induction sur  $n$ . Les cas  $n \in \{0, 1, 2\}$  sont des conséquences directes du théorème 5.9. Supposons que  $n \geq 3$ , il y a trois cas :

**Cas 1** :  $n$  est impair,  $3 \leq n \leq N - 1$

Nous démontrons que  $P_2 + K_{1,n} \in \mathcal{P}$ . Pour cela, nous examinons chaque option du premier joueur :

- Si le premier joueur supprime tous les sommets de  $P_2$  ou de  $K_{1,n}$ , alors le deuxième joueur répond en supprimant tous les sommets de l'autre, laissant un graphe vide qui est dans  $\mathcal{P}$  ;
- Si le premier joueur laisse  $P_2 + P_1$  ou  $P_1 + K_{1,n}$ , alors le deuxième joueur répond en laissant  $P_1 + P_1$ , qui est dans  $\mathcal{P}$  ;
- Si le premier joueur supprime une feuille de  $K_{1,n}$ , alors le deuxième joueur en supprime une autre, laissant  $P_2 + K_{1,n-2}$  qui est dans  $\mathcal{P}$  par hypothèse d'induction.

**Cas 2** :  $n$  est pair,  $4 \leq n \leq N - 1$

Nous démontrons que  $P_3 + K_{1,n} \in \mathcal{P}$ . Pour cela, nous examinons chaque option du premier joueur

:

- Si le premier joueur supprime tous les sommets de  $P_3$  ou de  $K_{1,n}$ , alors le deuxième joueur répond en supprimant tous les sommets de l'autre, laissant un graphe vide qui est dans  $\mathcal{P}$  ;
- Si le premier joueur laisse  $P_3 + P_1$  ou  $P_1 + K_{1,n}$ , alors le deuxième joueur répond en laissant  $P_1 + P_1$ , qui est dans  $\mathcal{P}$  ;
- Si le premier joueur laisse  $P_3 + P_2$ , alors le deuxième joueur répond en laissant  $P_2 + P_2$ , qui est dans  $\mathcal{P}$  ;
- Si le premier joueur laisse  $P_2 + K_{1,n}$ , alors le deuxième joueur répond en supprimant une feuille, laissant  $P_2 + K_{1,n-1}$  qui est dans  $\mathcal{P}$  par hypothèse d'induction ;
- Si le premier joueur supprime une feuille de  $K_{1,n}$ , alors le deuxième joueur en supprime une autre, laissant  $P_3 + K_{1,n-2}$  qui est dans  $\mathcal{P}$  par hypothèse d'induction.

**Cas 3** :  $n \geq N$

Nous notons  $n = N + i$  avec  $i \geq 0$ . Nous montrons par induction sur  $i$  que  $\mathcal{G}(K_{1,n}) = i \bmod 2$ . Si  $i = 0$ , alors  $|K_{1,n}| = N + 1$  et donc  $\mathcal{G}(K_{1,n}) = 0$  par la proposition 5.14. Si  $i > 0$ , alors  $\text{opt}(K_{1,n}) = \{K_{1,n-1}\}$ , ce qui implique :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(K_{1,n}) &= \text{mex}(\{\mathcal{G}(K_{1,n-1})\}) \\ &= \text{mex}(\{i - 1 \bmod 2\}) \quad \text{par hypothèse d'induction} \\ &= i \bmod 2 \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du théorème. □

Nous démontrons ensuite une version renforcée du théorème 5.4 pour les étoiles simples :

**Théorème 5.18** (D., Moncel, Parreau). *Soit  $n$  un entier positif, et  $N \geq 3$ . Si  $u$  est le sommet central de l'étoile  $K_{1,n}$ , alors pour tout entier  $k$ ,  $\mathcal{G}(K_{1,n} \overset{\bullet}{\underset{u}{\rightarrow}} P_k) = \mathcal{G}(K_{1,n} \overset{\bullet}{\underset{u}{\rightarrow}} P_{k \bmod (N+1)})$  pour le jeu  $\text{CSG}(I_N)$ .*

*Preuve.* Soit  $G = K_{1,n} \overset{\bullet}{\underset{u}{\rightarrow}} P_k$ , et notons  $v$  la feuille au bout du chemin de longueur  $k$ . Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que  $G + G \overset{\bullet}{\underset{v}{\rightarrow}} P_{N+1} \in \mathcal{P}$  pour tous entiers  $k, n$ .

Afin de montrer ceci, nous raisonnons par contradiction et choisissons la plus petite paire  $(k, n)$  (par ordre lexicographique) telle que  $G + G \overset{\bullet}{\underset{v}{\rightarrow}} P_{N+1} \in \mathcal{N}$ . Par minimalité de  $(k, n)$ , pour tout sous-graphe  $H$  de  $G$  contenant  $v$ ,  $H + H \overset{\bullet}{\underset{v}{\rightarrow}} P_{N+1} \in \mathcal{P}$ , ce qui permet d'appliquer le lemme 5.16 : tous les coups gagnants sont sur la composante  $G$ , suppriment  $v$  et laissent au moins deux sommets. Ces coups laissent donc un graphe  $K_{1,n} \overset{\bullet}{\underset{u}{\rightarrow}} P_{k'}$  avec  $k' < k$ . En copiant le coup sur l'autre composante, le deuxième joueur laisse  $K_{1,n} \overset{\bullet}{\underset{u}{\rightarrow}} P_{k'} + K_{1,n} \overset{\bullet}{\underset{u}{\rightarrow}} P_{k'+N+1}$  qui est dans  $\mathcal{P}$  par minimalité de  $(k, n)$ . □

Ce résultat renforce donc le théorème 5.4 : dans le cas des étoiles simples, pour tout sommet  $u$ , la séquence des  $\mathcal{G}(K_{1,n} \overset{\bullet}{\underset{u}{\rightarrow}} P_k)$  est directement périodique en fonction de  $k$ . En particulier, cela donne un algorithme efficace pour calculer la valeur de Grundy d'un tel graphe en se ramenant à une étoile simple plus un chemin de taille inférieure à  $N + 1$  attaché au sommet central. Le graphe de jeu est alors de hauteur bornée et de nombreuses positions sont réglées par les théorèmes 5.9 et 5.17.

Cette résolution nous pousse à étudier des étoiles subdivisées plus générales. Nous allons, comme dans l'étude de ARC-KAYLES par Huggan et Stevens [139], étudier les étoiles subdivisées avec trois chemins.

### 5.3.4 Étude des étoiles subdivisées avec trois chemins pour $\text{CSG}(I_N)$

Dans ces étoiles, nous fixons un des trois chemins pour qu'il soit de taille 1. Nous démontrons que les valeurs de Grundy de ces étoiles sont en un sens ultimement périodique avec la même période que le jeu  $\text{CSG}(I_N)$  joué sur des chemins :

**Théorème 5.19** (D., Moncel, Parreau). *Si  $N \geq 3$ , alors pour tous entiers positifs  $k, \ell$ , nous avons :*

$$\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = \begin{cases} \mathcal{G}(S_{1,(k \bmod (N+1))+N+1,N}) & \text{si } k > N \text{ et } \ell \equiv N \pmod{N+1} \\ \mathcal{G}(S_{1,N,(\ell \bmod (N+1))+N+1}) & \text{si } \ell > N \text{ et } k \equiv N \pmod{N+1} \\ \mathcal{G}(S_{1,k \bmod (N+1),\ell \bmod (N+1)}) & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

pour le jeu  $\text{CSG}(I_N)$ .

Notons que, au contraire des étoiles simples avec un chemin attaché au sommet central, les valeurs de Grundy ne sont pas directement périodiques mais nécessitent une pré-période de longueur  $N + 1$ . Néanmoins, ce théorème assure que seul un nombre polynomial d'étoiles réduites doit être étudié pour déterminer la valeur de Grundy de n'importe quelle étoile subdivisée de la forme  $S_{1,k,\ell}$ . De plus, nous donnons également les valeurs de Grundy de ces étoiles réduites :

**Proposition 5.20.** *Supposons  $N \geq 3$ , nous considérons le jeu  $\text{CSG}(I_N)$ . La valeur de Grundy d'une étoile  $S_{1,k,\ell}$  réduite par le théorème 5.19 peut se déterminer de la façon suivante :*

- Si  $k + \ell + 2 \equiv 0 \pmod{N+1}$ , alors  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = 0$ .
- Si  $k + \ell + 2 \equiv 1 \pmod{N+1}$ , alors  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = 1$ .
- Si  $k, \ell < N$ , alors :

$$\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = \begin{cases} k + \ell & \text{si } k + \ell \leq N - 2 \text{ et } k, \ell \text{ impairs} \\ k + 1 & \text{si } k + \ell \leq N - 2 \text{ et } k = \ell \neq 0 \text{ pairs} \\ k + \ell + 2 \pmod{N+1} & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

- Si  $\ell = N$  et  $k = a(N+1) + b$ , soient  $r_N = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$  si  $N \equiv 2, 3 \pmod{4}$  et  $\lfloor \frac{N-2}{2} \rfloor$  si  $N \equiv 0, 1 \pmod{4}$  ;  $x_k$  le nombre d'étoiles  $S_{1,i,N}$  où  $i \in \{a(N+1) + 1, \dots, N-1\}$  telles que  $\mathcal{G}(S_{1,i,N}) > N$  ; et  $m = \text{mex}(\{\mathcal{G}(S_{1,k,i}) \mid i < N\})$ . Alors :

$$\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = \begin{cases} N & \text{si } k = N - 1 \text{ ou } k = 2N \\ N - 1 & \text{si } k = N - 2 \text{ ou } k = 2N - 1 \\ N + x_k + 1 & \text{si } k \in \{1, \dots, r_N\} \text{ ou } m \geq N - 1 \\ m & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Notons que la plupart des valeurs de Grundy des étoiles  $S_{1,k,\ell}$  sont très simples (quand  $k, \ell \not\equiv N \pmod{N+1}$ ). Le tableau 5.1 illustre ces cas : la plupart des valeurs de Grundy sont alors égales à la taille de l'étoile modulo  $N + 1$ . En revanche, les valeurs sont beaucoup plus complexes à exprimer lorsqu'un des deux chemins est congru à  $N$  modulo  $N + 1$  (bien qu'en pratique, la plupart de ces valeurs sont également égales à la taille de l'étoile modulo  $N + 1$ ).

$k \backslash \ell$	0	1	2	3	4	5	...	$N - 4$	$N - 3$	$N - 2$	$N - 1$
0	2	3	4	5	6	7	...	$N - 2$	$N - 1$	$N$	0
1	3	<b>2</b>	5	<b>4</b>	7	<b>6</b>	...	$N - 3$ si $N$ pair $N - 1$ si $N$ impair	$N$ si $N$ pair $N - 2$ si $N$ impair	0	1
2	4	5	<b>3</b>	7	8	9	...	$N$	0	1	2
3	5	<b>4</b>	7	<b>6</b>	9	<b>8</b>	...	0	1	2	3
4	6	7	8	9	<b>5</b>	11	...	1	2	3	4
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$N - 2$	$N$	0	1	2	3	4	...	$N - 5$	$N - 4$	$N - 3$	$N - 2$
$N - 1$	0	1	2	3	4	5	...	$N - 4$	$N - 3$	$N - 2$	$N - 1$

Tableau 5.1 – La table des valeurs de Grundy des étoiles réduites  $S_{1,k,\ell}$  pour le jeu  $\text{CSG}(I_N)$  quand  $k, \ell \not\equiv N \pmod{N+1}$ . Les valeurs pour lesquelles  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) \neq |S_{1,k,\ell}| \pmod{N+1}$  sont en gras.

Si nous explicitons ces valeurs, c'est également car nous en avons besoin pour la preuve du théorème 5.19. Nous allons effectuer une preuve croisée du théorème 5.19 et de la proposition 5.20 :

*Preuve des théorème 5.19 et proposition 5.20.* Soit  $N \geq 3$  un entier, nous étudions la valeur de Grundy de l'étoile  $S_{1,k,\ell}$  pour le jeu CSG( $I_N$ ).

Nous commençons par étudier cette valeur quand  $k, \ell < N$  :

**Affirmation 5.20.A.** *Si  $k, \ell < N$ , alors :*

$$\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = \begin{cases} k + \ell & \text{si } k + \ell \leq N - 2 \text{ et } k, \ell \text{ impairs} \\ k + 1 & \text{si } k + \ell \leq N - 2 \text{ et } k = \ell \neq 0 \text{ pairs} \\ k + \ell + 2 \bmod (N + 1) & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

*Preuve de l'affirmation.* Nous prouvons le résultat par induction sur  $(k, \ell)$  avec ordre lexicographique. Si  $k = 0$  ou  $\ell = 0$ , alors  $S_{1,k,\ell} = P_{k+\ell+2}$  et donc sa valeur de Grundy est  $k + \ell + 2 \bmod (N + 1)$ .

Supposons maintenant que  $k, \ell \neq 0$  et que le résultat est valide pour tous  $(i, j) < (k, \ell)$ . Nous démontrons que la valeur de Grundy de  $S_{1,k,\ell}$  est donnée par l'affirmation 5.20.A. Sans perte de généralité, supposons que  $k \leq \ell$ . Il y a deux cas à étudier.

**Cas 1 :**  $k + \ell \leq N - 2$

Depuis  $S_{1,k,\ell}$ , il y a plusieurs types de coups possibles :

1. Supprimer la feuille, ce qui laisse  $P_{k+\ell+1}$  qui a une valeur de Grundy de  $k + \ell + 1$  ;
2. Supprimer la feuille, le sommet central, un des deux chemins et une partie de l'autre chemin, ce qui laisse un chemin  $P_i$ , pour  $i \in \{0, \dots, \ell\}$ , lesquels ont donc toutes les valeurs de Grundy possibles de 0 à  $\ell$  ;
3. Supprimer des sommets de l'un des chemins, ce qui laisse une étoile  $S_{1,i,\ell}$  pour  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  ou  $S_{1,k,j}$  pour  $j \in \{0, \dots, \ell-1\}$  dont les valeurs de Grundy sont données par l'hypothèse d'induction.

Les valeurs de Grundy du troisième type d'options changent en fonction des parités de  $k$  et  $\ell$ , ce qui donne 5 sous-cas.

**Sous-cas 1.1 :**  $k$  et  $\ell$  sont impairs

Par hypothèse d'induction, les options  $S_{1,i,\ell}$  ont comme valeur de Grundy  $\ell + i$  quand  $i$  est impair (ce qui nous donne toutes les valeurs paires entre  $\ell + 1$  et  $\ell + k - 2$ ) et  $\ell + i + 2$  quand  $i$  est pair (ce qui nous donne toutes les valeurs impaires entre  $\ell + 2$  et  $\ell + k + 1$ ) ; au total nous obtenons toutes les valeurs entre  $\ell + 1$  et  $\ell + k - 1$  ainsi que la valeur  $\ell + k + 1$ . De la même façon, avec les options  $S_{1,k,j}$  nous obtenons toutes les valeurs entre  $k + 1$  et  $\ell + k - 1$  ainsi que la valeur  $\ell + k + 1$ .

Donc, les options de  $S_{1,k,\ell}$  prennent toutes les valeurs possibles entre 0 et  $\ell + k - 1$ , mais aucune ne prend la valeur  $k + \ell$ , donc  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = k + \ell$ .

**Sous-cas 1.2 :**  $k = \ell$  et  $k$  est pair

Par hypothèse d'induction, les options  $S_{1,i,\ell}$  ont comme valeur de Grundy  $k + i + 2 \geq k + 2$ , et de même pour les options  $S_{1,k,j}$ . Comme nous avons déjà  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) \geq k + 1$ , nous concluons que  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = k + 1$ .

**Sous-cas 1.3 :**  $k$  est impair et  $\ell$  est pair

Par hypothèse d'induction, les options  $S_{1,i,\ell}$  ont comme valeur de Grundy  $\ell + i + 2$  (ce qui nous donne toutes les valeurs entre  $\ell + 2$  et  $\ell + k + 2$  ; comme  $i < k < \ell$  le cas  $i = \ell$  est impossible). De même, les options  $S_{1,k,j}$  nous donnent toutes les valeurs entre  $k + 1$  et  $k + \ell$ , et en particulier la valeur  $\ell + 1$  car  $k \geq 1$ . Donc, les options de  $S_{1,k,\ell}$  prennent toutes les valeurs possibles entre 0 et  $\ell + k + 1$ , mais aucune ne prend la valeur  $k + \ell + 2$ , donc  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = k + \ell + 2$ .

**Sous-cas 1.4 :**  $k$  est pair et  $\ell$  est impair

Par hypothèse d'induction, les options  $S_{1,i,\ell}$  nous donnent toutes les valeurs entre  $\ell + 1$  et  $\ell + k$ . Donc, toutes les valeurs entre 0 et  $k + \ell$  sont atteintes, et de même pour  $k + \ell + 1$ . Comme les options de  $S_{1,k,\ell}$  sont toutes de taille inférieure ou égale à  $k + \ell + 1$ , la proposition 5.3 implique qu'aucune ne peut avoir une valeur de Grundy égale à  $k + \ell + 2$ , et donc  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = k + \ell + 2$ .

**Sous-cas 1.5 :**  $k$  et  $\ell$  sont pairs,  $k \neq \ell$

Par hypothèse d'induction, les options  $S_{1,i,\ell}$  nous donnent toutes les valeurs entre  $\ell + 2$  et  $\ell + k + 1$ . La valeur  $\ell + 1$  est atteinte par l'option  $S_{1,k,\ell-k-1}$  (qui existe car  $k + 1 < \ell$ ). Donc, toutes les valeurs entre 0 et  $k + \ell + 1$  sont atteintes. Comme les options de  $S_{1,k,\ell}$  sont toutes de taille inférieure ou

égale à  $k + \ell + 1$ , la proposition 5.3 implique qu'aucune ne peut avoir une valeur de Grundy égale à  $k + \ell + 2$ , et donc  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = k + \ell + 2$ .

**Cas 2** :  $k + \ell \geq N - 1$  et  $1 \leq k, \ell \leq N - 1$

Soit  $j = k + \ell + 2 - N - 1$ , alors  $0 \leq j \leq N - 1$ . Nous démontrons que  $S_{1,k,\ell} + P_j \in \mathcal{P}$ . Supposons par contradiction que ce n'est pas le cas, et prenons le plus petit  $j$  pour lequel  $S_{1,k,\ell} + P_j \in \mathcal{N}$ .

Si le premier joueur supprime  $c$  sommets dans  $S_{1,k,\ell}$ , alors le deuxième joueur pourra toujours supprimer  $N + 1 - c$  sommets dans la même composante et laisser  $P_j + P_j$ , qui est dans  $\mathcal{P}$ . En effet, si les  $c$  sommets sont supprimés dans le chemin de longueur  $k$  et que  $c \leq k$ , alors il est possible de vider le chemin de longueur  $k - c$  restant, le sommet central, la feuille, et suffisamment de sommets sur le chemin de longueur  $\ell$  pour laisser  $P_j$ . Le même raisonnement se tient si les sommets sont supprimés dans le chemin de longueur  $\ell$  et que  $c \leq \ell$ . Si le premier joueur a laissé un chemin, celui-ci a  $k + \ell + 2 - c > j$  sommets et il est possible de supprimer  $N + 1 - c$  sommets et de laisser  $P_j$ .

Supposons maintenant que le premier joueur supprime  $c$  sommets dans  $P_j$ , laissant  $P_{j'}$ . Par définition de  $j$ , nous avons nécessairement  $k \geq j$  ou  $\ell \geq j$  ; sans perte de généralité supposons que  $k \geq j$ . Alors, le premier joueur supprime  $c$  sommets du chemin de longueur  $k$ , laissant la somme  $S_{1,k-c,\ell} + P_{j-c}$ . Comme  $k - c + \ell \geq N - 1$ , par minimalité de  $j$ , cette somme est dans  $\mathcal{P}$ .

Les deux types de coups possibles pour le premier joueur nous menant à une contradiction, nous avons  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = k + \ell + 2 - (N + 1) = k + \ell + 2 \pmod{N + 1}$ .  $\square$

Nous démontrons maintenant la périodicité des valeurs 0 et 1 :

**Affirmation 5.20.B.** *Si  $k + \ell + 2 \equiv 0 \pmod{N + 1}$ , alors  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = 0$ .*

*Si  $k + \ell + 2 \equiv 1 \pmod{N + 1}$ , alors  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = 1$ .*

*Autrement,  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) > 1$ .*

*Preuve de l'affirmation.* Nous prouvons le résultat par induction sur  $(k, \ell)$  avec ordre lexicographique. Il est trivialement vrai pour les chemins, et la proposition 5.14 le démontre pour les cas où  $k + \ell + 2 \leq N + 2$ . Supposons donc que  $k + \ell + 2 > N + 2$ .

Si  $k + \ell + 2 \equiv 0 \pmod{N + 1}$ , alors tout coup mène à un graphe dont le nombre de sommets n'est pas congruent à 0 modulo  $N + 1$ . Par hypothèse d'induction, ces options ont donc une valeur de Grundy strictement positive, donc  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = 0$ .

Si  $k + \ell + 2 \equiv 1 \pmod{N + 1}$ , alors tout coup mène à un graphe dont le nombre de sommets n'est pas congruent à 1 modulo  $N + 1$ . Par hypothèse d'induction, ces options ont donc une valeur de Grundy différente de 1. De plus, supprimer un sommet de  $S_{1,k,\ell}$  laisse un graphe avec un nombre de sommets congru à 0 modulo  $N + 1$ , qui a une valeur de Grundy de 0 par hypothèse d'induction, donc  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = 1$ .

Enfin, étudions le cas où  $k + \ell + 2 \equiv i \pmod{N + 1}$  avec  $i > 1$ . S'il est impossible de supprimer  $i$  sommets, alors  $k = \ell = i - 1$ , donc  $k + \ell + 2 = 2i$ . Nous avons donc  $2i \equiv i \pmod{N + 1}$ , ce qui est une contradiction car  $i \neq 0$ . Donc, il est toujours possible de supprimer  $i$  sommets, et l'option ainsi atteinte a une valeur de Grundy de 0 par hypothèse d'induction. De même, s'il est impossible de supprimer  $i - 1$  sommets, alors  $k = \ell = i - 2$ , donc  $k + \ell + 2 = 2i - 2$ . Nous avons donc  $2i - 2 \equiv i \pmod{N + 1}$ , donc  $i = 2$  et donc le graphe est  $K_2$ , ce qui est une contradiction car le graphe a au moins  $N + 2$  sommets. Donc, il est toujours possible de supprimer  $i - 1$  sommets, et l'option ainsi atteinte a une valeur de Grundy de 1 par hypothèse d'induction. Comme  $S_{1,k,\ell}$  a des options ayant des valeurs de Grundy de 0 et 1, nous avons  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) > 1$ .  $\square$

Cela nous permet de démontrer la ligne « dans les autres cas » de l'énoncé du théorème 5.19, c'est-à-dire que les chemins peuvent être réduits à leur longueur modulo  $N + 1$  :

**Affirmation 5.20.C.** *Soit la propriété (P) suivante :*

$$(P) : k \leq N \text{ ou } \ell \leq N \text{ ou ni } k \text{ ni } \ell \text{ ne sont congrus à } N \text{ modulo } N + 1$$

*Si  $k$  et  $\ell$  vérifient (P), alors  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = \mathcal{G}(S_{1,k \pmod{N+1}, \ell \pmod{N+1}})$ .*

*Preuve de l'affirmation.* Supposons que  $k$  et  $\ell$  vérifient  $(P)$ . Soient  $k_0 = k \bmod (N + 1)$  et  $\ell_0 = \ell \bmod (N + 1)$ . Nous démontrons que  $S_{1,k,\ell} + S_{1,k_0,\ell_0} \in \mathcal{P}$ . Supposons par contradiction que ce ne soit pas le cas, et prenons un contre-exemple minimisant  $k + \ell$ . Nous considérons tous les coups possibles pour le premier joueur.

1. Si le premier joueur joue dans la composante  $S_{1,k,\ell}$ , il y a cinq possibilités :
  - (a) Supposons qu'il supprime  $c$  sommets du chemin de longueur  $\ell$ , laissant  $S_{1,k,\ell-c}$ . Si  $\ell > \ell_0$ , alors le deuxième joueur peut prendre le complément à  $N + 1$  sur le même chemin, laissant  $S_{1,k,\ell-(N+1)} + S_{1,k_0,\ell_0}$  qui est dans  $\mathcal{P}$  par minimalité et par le fait que  $k$  et  $\ell - (N + 1)$  vérifient  $(P)$ . Si  $\ell = \ell_0$ , alors le deuxième joueur peut jouer le coup symétrique dans l'autre composante, laissant  $S_{1,k,\ell-c} + S_{1,k_0,\ell_0-c}$  qui est dans  $\mathcal{P}$  par minimalité et par le fait que  $k$  et  $\ell - c$  vérifient  $(P)$  (car  $\ell - c \leq N$ ).
  - (b) Le cas où il supprime  $c$  sommets du chemin de longueur  $k$  se résout de la même façon.
  - (c) Si le premier joueur supprime le chemin de longueur 1, alors le deuxième joueur joue le même coup dans l'autre composante, laissant  $P_{k+\ell+1} + P_{k_0+\ell_0+1}$  qui est dans  $\mathcal{P}$ .
  - (d) Supposons qu'il supprime le chemin de longueur  $k$ , le sommet central, le chemin de longueur 1 et des sommets du chemin de longueur  $\ell$ , laissant  $P_i$  avec  $i \leq \ell$ . Cela implique que  $k = k_0$ , et donc le deuxième joueur peut jouer le même coup dans l'autre composante, laissant  $P_{i-(\ell-\ell_0)}$ . La somme de ces deux chemins est dans  $\mathcal{P}$ .
  - (e) Le cas où il supprime le chemin de longueur  $\ell$ , le sommet central, le chemin de longueur 1 et des sommets du chemin de longueur  $k$  se résout de la même façon.
2. Si le premier joueur joue dans la composante  $S_{1,k_0,\ell_0}$ , il y a cinq possibilités :
  - (a) Supposons qu'il supprime  $c$  sommets du chemin de longueur  $\ell_0$ , laissant  $S_{1,k_0,\ell_0-c}$ . Alors,  $k$  et  $\ell - c$  vérifient  $(P)$  :  $\ell - c \not\equiv N \bmod (N + 1)$  car  $\ell - c \equiv \ell_0 - c \bmod (N + 1)$  et  $0 \leq \ell_0 - c < N$ . Donc, le deuxième joueur peut jouer le même coup dans l'autre composante, laissant  $S_{1,k,\ell-c}$ . Par minimalité, la somme sera alors dans  $\mathcal{P}$ .
  - (b) Le cas où il supprime  $c$  sommets du chemin de longueur  $k_0$  se résout de la même façon.
  - (c) Si le premier joueur supprime le chemin de longueur 1, alors le deuxième joueur joue le même coup dans l'autre composante, laissant  $P_{k+\ell+1} + P_{k_0+\ell_0+1}$  qui est dans  $\mathcal{P}$ .
  - (d) Supposons qu'il supprime le chemin de longueur  $k_0$ , le sommet central, le chemin de longueur 1 et des sommets du chemin de longueur  $\ell_0$ , laissant  $P_i$  avec  $i \leq \ell_0$ . Soit  $c$  le nombre de sommets supprimés par le premier joueur. Si  $k = k_0$ , alors le deuxième joueur peut jouer vers  $P_{i+\ell-\ell_0}$ , et la somme des deux chemins est dans  $\mathcal{P}$ . Sinon, le deuxième joueur supprime  $c$  sommets du chemin de longueur  $k$  dans l'autre composante, laissant  $S_{1,k-c,\ell}$ . Soit  $k'_0 = k - c \bmod (N + 1)$ , nous avons  $k'_0 = k_0 - c + N + 1$  et  $i + c = k_0 + \ell_0 + 2$ . Alors,  $k'_0 + \ell_0 = k_0 - c + N + 1 + \ell_0 = i + N + 1$ . En particulier,  $k'_0 + \ell_0 \geq N - 1$ . Donc, nous sommes dans le dernier cas de l'affirmation 5.20.A, et par minimalité  $\mathcal{G}(S_{1,k-c,\ell}) = \mathcal{G}(S_{1,k'_0,\ell_0}) = k'_0 + \ell_0 + 2 \bmod (N + 1) = i = \mathcal{G}(P_i)$ , ce qui implique que la somme laissée par le deuxième joueur est dans  $\mathcal{P}$ .
  - (e) Le cas où il supprime le chemin de longueur  $\ell_0$ , le sommet central, le chemin de longueur 1 et des sommets du chemin de longueur  $k_0$  se résout de la même façon.

Comme le deuxième joueur a un coup gagnant pour tous les coups du premier joueur, la somme est dans  $\mathcal{P}$ , une contradiction. Cela démontre l'affirmation.  $\square$

Nous allons maintenant étudier les cas où la proposition  $(P)$  définie dans l'énoncé de l'affirmation 5.20.C n'est pas vérifiée. Tout d'abord, nous allons démontrer que les valeurs de Grundy des étoiles de la forme  $S_{1,i,N}$  (avec  $i < N - 2$ ) ne sont pas nécessaires pour établir la valeur de Grundy de l'étoile  $S_{1,k,\ell}$  lorsque  $N < k < 2N$ . Pour cela, nous avons d'abord besoin d'établir les valeurs de Grundy des étoiles  $S_{1,k,N}$  pour  $k \in \{1, \dots, 2N\}$ .

Rappelons que nous définissons  $r_N = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$  si  $N \equiv 2, 3 \bmod 4$ , et  $\lfloor \frac{N-2}{2} \rfloor$  dans le cas contraire. Nous établissons les valeurs de Grundy des options de  $S_{1,k,N}$  obtenues en jouant sur le chemin de longueur  $N$  :

**Affirmation 5.20.D.** Si  $k \in \{1, \dots, 2N - 1\} \setminus \{N - 1, N, N + 1\}$  et  $k_0 = k \bmod (N + 1)$ , alors :

1. Si  $k_0 \in \{1, \dots, r_N\}$  est pair, alors  $S_{1,k,N}$  a des options avec toutes les valeurs possibles dans  $\{0, \dots, N\}$  sauf  $2k_0 + 2$  obtenues en supprimant des sommets du chemin de longueur  $N$ .
2. Si  $k_0 \in \{r_N + 1, \dots, N - 2\}$  est pair, alors  $S_{1,k,N}$  a des options avec toutes les valeurs possibles dans  $\{0, \dots, N\}$  sauf  $k_0 + 1$  obtenues en supprimant des sommets du chemin de longueur  $N$ .
3. Si  $k_0$  est impair, alors  $S_{1,k,N}$  a des options avec toutes les valeurs possibles dans  $\{0, \dots, N\}$  sauf  $N - 1$  (si  $N$  est impair) ou  $N$  (si  $N$  est pair) obtenues en supprimant des sommets du chemin de longueur  $N$ .

*Preuve de l'affirmation.* Nous allons utiliser les valeurs trouvées dans l'affirmation 5.20.A. Nous étudions chacun des trois cas de l'énoncé :

1. Si  $k \in \{1, \dots, r_N\}$  est pair, alors toute option  $S_{1,k,i}$  a une valeur de Grundy égale à  $i + k + 2 \bmod (N + 1)$  sauf l'étoile  $S_{1,k,k}$  qui a une valeur de Grundy de  $k + 1$ . Notons que nous avons  $2k + 2 \leq N - 2$  (par définition de  $r_N$  et parité de  $k$ ). Donc, les options de  $S_{1,k,N}$  obtenues en jouant sur le chemin de longueur  $N$  prennent toutes les valeurs dans l'ensemble  $(\{k + 2 \bmod (N + 1), \dots, k + 1 + N \bmod (N + 1)\} \setminus \{2k + 2\}) \cup \{k + 1\}$ , ce qui prouve ce cas de l'énoncé.
2. Si  $k \in \{r_N + 1, \dots, N - 2\}$  est pair, alors toute option  $S_{1,k,i}$  a une valeur de Grundy égale à  $i + k + 2 \bmod (N + 1)$ . Donc, les options de  $S_{1,k,N}$  obtenues en jouant sur le chemin de longueur  $N$  prennent toutes les valeurs dans l'ensemble  $\{k + 2 \bmod (N + 1), \dots, k + 1 + N \bmod (N + 1)\}$ , ce qui prouve ce cas de l'énoncé.
3. Si  $k \in \{2, \dots, N - 2\}$  est impair, alors les options  $S_{1,k,i}$  ont les valeurs de Grundy suivantes :  $i + k$  si  $i < N - k + 1$  et  $i$  est impair ;  $i + k + 2 \bmod (N + 1)$  dans le cas contraire. Donc, les options de  $S_{1,k,N}$  obtenues en jouant sur le chemin de longueur  $N$  prennent toutes les valeurs dans les ensembles  $\{0, \dots, k\}$  (quand  $i \geq N - k + 1$ ) et  $\{k + 1, \dots, N - 2\}$ . De plus, si  $N$  est pair alors une option a une valeur de Grundy de  $N - 1$  et si  $N$  est impair alors une option a une valeur de Grundy de  $N$ . En effet, les valeurs de Grundy de  $S_{1,k,0}, S_{1,k,1}, S_{1,k,2}, \dots, S_{1,k,N-k-4}, S_{1,k,N-k-3}, S_{1,k,N-k-2}$  sont  $k + 1, k + 1, k + 4, \dots$  et soit  $\dots, N - 4, N - 1, N - 2$  si  $N$  est pair soit  $\dots, N - 2, N - 3, N$  si  $N - 1$  est impair. Ce cas de l'énoncé est donc démontré.
4. Enfin, si  $k \in \{N + 2, \dots, 2N - 1\}$ , alors le résultat est vrai par les trois cas précédents et l'affirmation 5.20.C : les options de  $S_{1,k,N}$  obtenues en supprimant des sommets du chemin de longueur  $N$  ont la même valeur de Grundy que les options de  $S_{1,k-(N+1),N}$  obtenues de la même façon.

Cette étude de cas démontre l'affirmation. □

Nous pouvons maintenant calculer les valeurs de Grundy des étoiles  $S_{1,k,N}$  pour  $k \in \{1, \dots, 2N\}$ . Notons  $k = a(N + 1) + b$  avec  $a \geq 0$  et  $1 \leq b \leq N$ , et rappelons que  $x_k$  est le nombre d'étoiles  $S_{1,i,N}$  avec  $i \in \{a(N + 1) + 1, \dots, k - 1\}$  telles que  $\mathcal{G}(S_{1,i,N}) > N$ , et que  $m = \text{mex}(\{\mathcal{G}(S_{1,k,i}) \mid i < N\})$ .

**Affirmation 5.20.E.** Si  $k \in \{1, \dots, 2N\}$ , alors :

$$\mathcal{G}(S_{1,k,N}) = \begin{cases} N & \text{si } k = N - 1 \text{ ou } k = 2N \\ N - 1 & \text{si } k = N - 2 \text{ ou } k = 2N - 1 \\ N + x_k + 1 & \text{si } k \in \{1, \dots, r_N\} \text{ ou } m \geq N - 1 \\ m & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

*Preuve de l'affirmation.* Le résultat se démontre par contradiction. Supposons que  $k$  est le plus petit entier tel que l'énoncé est faux, et soit  $k_0 = k \bmod (N + 1) = b$ . Depuis  $S_{1,k,N}$ , il y a trois ou quatre coups possibles selon la valeur de  $k$  :

1. Supprimer le chemin de longueur 1, ce qui laisse  $P_{k+N+1}$  qui a une valeur de Grundy de  $k_0$  : ce coup ne permettra donc jamais d'aboutir à une contradiction ;

2. Supprimer des sommets du chemin de longueur  $N$ , ce qui laisse  $S_{1,k,i}$  : les valeurs de Grundy de ces options nous sont données par l'affirmation 5.20.D ;
3. Supprimer des sommets du chemin de longueur  $k$ , ce qui laisse  $S_{1,i,N}$  pour  $i \in \{\max(0, k - N), \dots, k - 1\}$  ;
4. Si  $k \leq N - 2$ , supprimer le chemin de longueur  $k$ , le sommet central, le chemin de longueur 1 et certains sommets du chemin de longueur  $N$ .

Commençons par noter que si  $k \geq N + 1$  alors  $x_k \leq x_{k-(N+1)}$  : par minimalité de  $k$ , il y a au plus autant d'étoiles  $S_{1,i,N}$  avec des valeurs de Grundy strictement supérieures à  $N$  quand  $i \in \{N + 2, \dots, k - 1\}$  que quand  $i \in \{1, \dots, k - (N + 1) - 1\}$ .

Tout d'abord, remarquons que si  $k = N$  (resp.  $N + 1$ ), alors  $|S_{1,k,N}| = 2N + 2$  (resp.  $2N + 3$ ) et l'affirmation 5.20.B implique que  $\mathcal{G}(S_{1,k,N}) = 0$  (resp. 1), ce qui est prédit par l'énoncé. Donc,  $k \notin \{N, N + 1\}$ .

Supposons que  $k_0 = N - 1$ , alors par les affirmations 5.20.A et 5.20.C le deuxième type de coup permet d'atteindre toutes les valeurs dans  $S_{0,\dots,N-1}$  tandis que le troisième type de coup ne permet d'atteindre que des valeurs différentes de  $N$  par minimalité de  $k$ , ce qui implique que  $\mathcal{G}(S_{1,k,N}) = N$ , une contradiction. Donc,  $k \notin \{N - 1, 2N\}$ .

Soit  $k \in \{1, \dots, N - 2, N + 2, \dots, 2N - 1\}$ . Supposons d'abord que  $k$  est impair. L'affirmation 5.20.D nous indique que le deuxième type de coup permet d'atteindre toutes les valeurs dans  $\{0, \dots, N\}$  sauf  $N - 1$  ou  $N$  selon la parité de  $N$ .

Si  $k_0 < N - 2$ , il y a deux possibilités :

1. Si  $k < N - 2$  alors le quatrième type de coup permet d'atteindre les valeurs  $N - 1$  et  $N$  en supprimant respectivement  $k + 3$  et  $k + 2$  sommets (ce qui est toujours possible car  $k + 3 \leq N$ ) ;
2. Si  $k \in \{N + 2, \dots, 2N - 1\}$  alors le troisième type de coup permet d'atteindre les valeurs  $N - 1$  et  $N$  en jouant vers respectivement  $S_{1,N-2,N}$  et  $S_{1,N-1,N}$  (qui ont comme valeurs de Grundy  $N - 1$  et  $N$  par minimalité de  $k$ ).

Donc,  $\mathcal{G}(S_{1,k,N}) > N$ . De plus, le troisième type de coup permet d'atteindre  $x_k$  étoiles avec des valeurs de Grundy de  $N + 1, \dots, N + x_k$  (par définition de  $x_k$  et par minimalité de  $k$ ). Enfin, si  $k \in \{N + 2, \dots, 2N - 1\}$ , comme  $x_k \leq x_{k-(N+1)}$ , l'étoile  $S_{1,i,N}$  telle que  $\mathcal{G}(S_{1,i,N}) = N + x_k + 1$  vérifie  $i \leq k - (N + 1)$  et n'est donc pas une option de  $S_{1,k,N}$ . Tout cela implique que  $\mathcal{G}(S_{1,k,N}) = N + x_k + 1$ , une contradiction. Donc, si  $k$  est impair alors  $k_0 = N - 2$ .

Supposons donc que  $k_0 = N - 2$ . Nécessairement,  $N$  est impair et  $S_{1,k,N}$  n'a aucune option ayant une valeur de Grundy de  $N - 1$  atteinte par le deuxième type de coup. De plus, le troisième type de coup ne permet pas d'atteindre une option ayant une valeur de Grundy de  $N - 1$  : ces options ont soit  $P_{N-1}$  (si  $k = N - 2$ ) soit  $S_{1,N-2,N}$  (si  $k = 2N - 1$ ) comme option, lesquelles ont une valeur de Grundy de  $N - 1$  par minimalité de  $k$ . Ni  $P_{N-1}$  ni  $S_{1,N-2,N}$  ne sont des options de  $S_{1,k,N}$  (car les atteindre requiert de supprimer  $N + 1$  sommets, ce qui est illégal). Enfin, si  $k = N - 2$ , le quatrième type de coup ne permet d'atteindre que  $P_N$ . Tout cela implique que  $\mathcal{G}(S_{1,k,N}) = N - 1$ , une contradiction. Donc,  $k$  est pair.

Supposons d'abord que  $k_0 \in \{1, \dots, r_N\}$ . L'affirmation 5.20.D nous indique que le deuxième type de coup permet d'atteindre toutes les valeurs dans  $\{0, \dots, N\}$  sauf  $2k_0 + 2$ , donc  $\mathcal{G}(S_{1,k,N}) \geq 2k_0 + 2$ . Rappelons de plus que  $2k_0 + 2 \leq N - 2$ . Il y a deux cas :

1. Si  $k \in \{1, \dots, r_N\}$ , alors  $k = k_0$  et  $S_{1,k,N}$  a  $P_{2k+2}$  comme option (par le quatrième type de coup, en supprimant  $N - k$  sommets au total donc  $N - 2k - 2$  du chemin de longueur  $N$ ). Donc, cette étoile a des options prenant toutes les valeurs possibles dans  $\{0, \dots, N\}$ , et le troisième type de coup permet d'atteindre  $x_k$  options ayant des valeurs de Grundy de  $N + 1, \dots, N + x_k$ . Tout cela implique que  $\mathcal{G}(S_{1,k,N}) = N + x_k + 1$ , une contradiction.
2. Si  $k \in \{N + 2, \dots, N + 1 + r_N\}$ , alors par minimalité de  $k$  l'étoile  $S_{1,k,N}$  n'a aucune option ayant une valeur de Grundy de  $2k_0 + 2$  : ses seules options ayant des valeurs de Grundy inférieures à  $N$  ont des valeurs de Grundy de la forme soit  $2i + 2$  avec  $i < k_0$  soit  $i + 1$  avec  $i$  pair (donc elles sont impaires, donc différentes de  $2k_0 + 2$  qui est pair). Tout cela implique que  $\mathcal{G}(S_{1,k,N}) = 2k_0 + 2$ , une contradiction.



Donc,  $k_0 \in \{r_N+1, \dots, N-2\}$ . L'affirmation 5.20.D indique que le deuxième type de coup permet d'atteindre toutes les valeurs dans  $\{0, \dots, N\}$  à l'exception de  $k_0 + 1$ , donc  $\mathcal{G}(S_{1,k,N}) \geq k_0 + 1$ . Le troisième type de coup ne peut jamais laisser d'étoile avec une valeur de Grundy de  $k_0 + 1$ . En effet, si  $k \in \{r_N+1, \dots, N-2\}$ , alors par minimalité de  $k$  si une telle option a une valeur de Grundy inférieure à  $N$  alors elle est aussi strictement inférieure à  $k + 1$ . De plus, si  $k \in \{N+2+r_N, \dots, 2N-1\}$ , alors toute option atteinte par le troisième type de coup a  $S_{1,k_0,N}$  comme option ; or  $\mathcal{G}(S_{1,k_0,N}) = k_0 + 1$  par minimalité de  $k$ , donc toutes ces options ont des valeurs de Grundy distinctes de  $k_0 + 1$ . Enfin, si  $k \in \{r_N+1, \dots, N-2\}$  alors le quatrième type de coup ne permet pas d'atteindre  $P_{k_0+1}$  car il faudrait supprimer  $k+2+N-(k+1) = N+1$  sommets, ce qui est impossible. Tout cela implique que  $\mathcal{G}(S_{1,k,N}) = k_0 + 1$ , une contradiction.

L'étude exhaustive de toutes les possibilités permet de conclure qu'il n'existe aucun  $k$  tel que l'énoncé soit faux, ce qui démontre l'affirmation.  $\square$

Nous allons maintenant montrer la partie d'ultime périodicité du théorème 5.19. Nous allons supposer que  $k > N$  et que  $\ell \equiv N \pmod{N+1}$ , le cas symétrique se démontrant de manière identique.

**Affirmation 5.20.F.** *Si  $k > N$  et  $\ell \equiv N \pmod{N+1}$ , alors  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = \mathcal{G}(S_{1,(k \bmod (N+1))+N+1,N})$ .*

*Preuve de l'affirmation.* Soit  $k_0 = (k \bmod (N+1)) + N + 1$ . Une conséquence de la preuve de l'affirmation 5.20.E est que, pour calculer  $\mathcal{G}(S_{1,k_0,N})$ , nous n'utilisons aucune des valeurs de Grundy des options de la forme  $S_{1,i,N}$  avec  $i < N - 2$ .

Nous démontrons le résultat par induction sur  $k + \ell$ . Si  $\ell = N$  et  $k = N + 1$  alors le résultat est clairement valide.

Comparons les options de  $S_{1,k,\ell}$  et de  $S_{1,k_0,N}$ . L'affirmation 5.20.C implique que les options de la forme  $S_{1,k,\ell-i}$  et  $S_{1,k_0,N-i}$  ont les mêmes valeurs de Grundy. En utilisant l'hypothèse d'induction et l'affirmation 5.20.E, nous obtenons que les options de la forme  $S_{1,k-i,\ell}$  et  $S_{1,k_0-i,N}$  ont les mêmes valeurs de Grundy si  $i \leq k_0 + 2$ . Les options obtenues en supprimant le chemin de longueur 1 ont clairement les mêmes valeurs de Grundy.

Donc, les seules options dont les valeurs de Grundy peuvent différer sont celles de la forme  $S_{1,k-i,\ell}$  et  $S_{1,k_0-i,N}$  pour  $k_0 + 2 < i \leq N$ . Notons que si  $k = k_0$ , alors elles sont les mêmes et le résultat est valide. Si  $k > k_0$ , alors les options de la forme  $S_{1,k_0-i,N}$  ne sont pas utilisées pour calculer  $\mathcal{G}(S_{1,k_0,N})$ . Quant aux options de la forme  $S_{1,k-i,\ell}$ , leurs valeurs de Grundy sont nécessairement distinctes de  $\mathcal{G}(S_{1,k-(N+1),\ell})$  (car cette dernière est une de leurs options). Par hypothèse d'induction,  $\mathcal{G}(S_{1,k-(N+1),\ell}) = \mathcal{G}(S_{1,k_0,N})$ , et donc nous avons  $\mathcal{G}(S_{1,k,\ell}) = \mathcal{G}(S_{1,k_0,N})$ .  $\square$

Les affirmations 5.20.C et 5.20.F démontrent le théorème 5.19, tandis que les affirmations 5.20.A, 5.20.B et 5.20.E démontrent la proposition 5.20.  $\square$

En pratique, le théorème 5.19 et la proposition 5.20 donnent un algorithme polynomial pour déterminer la valeur de Grundy de n'importe quelle étoile de la forme  $S_{1,k,\ell}$  pour les jeux de la famille  $\text{CSG}(I_N)$ . Cela se révèle utile pour l'étude de jeux spécifiques de cette famille, ce que nous allons illustrer dans la section suivante.

### 5.3.5 CSG( $I_3$ ) sur les étoiles subdivisées

Les résultats des sections précédentes peuvent servir de base à l'étude de jeux spécifiques de la famille  $\text{CSG}(I_N)$  sur les étoiles subdivisées de manière globale. Ainsi, pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ , la connaissance des valeurs de Grundy des étoiles de la forme  $S_{1,1,k}$  était nécessaire pour démontrer le théorème 5.10 (réduction des chemins). De même, pour d'autres jeux de cette famille, prouver un résultat de réduction nécessite d'étudier des cas de base.

Dans cette section, nous démontrons un résultat de réduction des chemins dans les étoiles subdivisées pour le jeu  $\text{CSG}(I_3)$  :

**Théorème 5.21** (D., Moncel, Parreau). *Pour tous entiers  $\ell_1, \dots, \ell_k$ ,*

$$\mathcal{G}(S_{\ell_1, \dots, \ell_k}) = \mathcal{G}(S_{\ell_1 \bmod 4, \dots, \ell_k \bmod 4})$$

*pour le jeu CSG( $I_3$ ).*

*Preuve.* Soient  $S = S_{\ell_1, \dots, \ell_k}$  et  $S' = S_{\ell_1+4, \ell_2, \dots, \ell_k}$ . Afin de démontrer le résultat, il suffit de prouver que  $\mathcal{G}(S) = \mathcal{G}(S')$ , donc que  $S + S' \in \mathcal{P}$ . Si  $S \in \{\emptyset, P_1, P_2\}$  alors le résultat est trivialement vrai. Supposons donc que  $S$  contient au moins 3 sommets, et raisonnons par contradiction : en appelant  $u$  la feuille du chemin de longueur  $\ell_1$  (si  $\ell_1 = 0$  alors  $u$  est le sommet central de l'étoile), supposons que  $S$  est minimale dans le sens où  $\mathcal{G}(S) \neq \mathcal{G}(S')$  mais  $\mathcal{G}(\hat{S}) = \mathcal{G}(\hat{S} \xrightarrow{u} P_4)$  pour toute sous-étoile  $\hat{S}$  de  $S$ . Nous appliquons le lemme 5.16 : tout coup gagnant est nécessairement sur la composante  $S$ , supprime  $u$  et laisse au moins 2 sommets.

Si  $u$  est le sommet central de  $S$ , il y a deux cas :

1. Si  $S$  est un chemin de longueur  $n \geq 3$ , alors il y a trois sous-cas :
  - (a) Si  $u$  est une feuille, alors  $S'$  est un chemin et donc le résultat est valide par le théorème 5.9, une contradiction.
  - (b) Si  $u$  est à distance 1 d'une feuille, alors  $S' = S_{1, n-2, 4}$ . Si  $n - 2 \not\equiv 3 \pmod{4}$  alors par le théorème 5.19 nous avons  $\mathcal{G}(S') = \mathcal{G}(P_n) = \mathcal{G}(S)$ . Sinon, nous avons  $n \equiv 1 \pmod{4}$  et la proposition 5.20 implique  $\mathcal{G}(S') = 1 = \mathcal{G}(S)$ . Les deux cas donnent une contradiction.
  - (c) Si  $u$  est à distance 2 d'une feuille, alors  $S' = S_{2, n-3, 4}$  et le coup gagnant consiste à supprimer  $u$  et le chemin de longueur 2 de  $S$ , laissant  $P_{n-3}$ . Nous affirmons que le deuxième joueur gagne en supprimant 3 sommets du chemin de longueur 4 dans  $S'$ . En effet, ce coup laisse  $S_{1, 2, n-3}$ . Si  $n - 3 \not\equiv 3 \pmod{4}$ , alors le théorème 5.19 et la proposition 5.20 nous donnent  $\mathcal{G}(S_{1, 2, n-3}) = \mathcal{G}(S_{1, 2, n-3 \bmod 4}) = n + 1 \pmod{4}$  (car  $2 + (k - 3 \bmod 4) \geq 2$ ). Donc,  $\mathcal{G}(S_{1, 2, n-3}) = \mathcal{G}(P_{n-3})$ . Si au contraire  $n - 3 \equiv 3 \pmod{4}$ , alors le théorème 5.19 nous donne  $\mathcal{G}(S_{1, 2, n-3}) = \mathcal{G}(S_{1, 2, 3})$ . Le calcul nous donne  $\mathcal{G}(S_{1, 2, 3}) = 3 = \mathcal{G}(P_{n-3})$ . Les deux cas donnent une contradiction.
2. Si  $S = S_{1, 1, n}$ , alors le seul coup gagnant consiste à supprimer les deux chemins de longueur 1 et  $u$ , ce qui laisse  $P_n$ . Nous affirmons que le deuxième joueur gagne en supprimant 3 sommets du chemin de longueur 4 dans  $S'$ . En effet, ce coup laisse  $S_{1, 1, 1, n}$ , qui a la même valeur de Grundy que  $S_{1, 1, 1, n \bmod 4}$  par le théorème 5.18. Les quatre valeurs possibles de  $n \bmod 4$  donnent quatre cas à étudier :
  - (a) Si  $n \bmod 4 = 0$  alors  $\mathcal{G}(S_{1, 1, 1}) = 0$  par le théorème 5.17.
  - (b) Si  $n \bmod 4 = 1$  alors  $\mathcal{G}(S_{1, 1, 1, 1}) = 1$  par le théorème 5.17.
  - (c) Si  $n \bmod 4 = 2$  alors  $S_{1, 1, 1, 2}$  a trois options :  $S_{1, 1, 1}$  (qui a une valeur de Grundy de 0 par le théorème 5.17),  $S_{1, 1, 1, 1}$  (qui a une valeur de Grundy de 1 par le théorème 5.17), et  $S_{1, 1, 2}$  (qui a une valeur de Grundy de 1 par la proposition 5.20). Donc,  $\mathcal{G}(S_{1, 1, 1, 2}) = 2$ .
  - (d) Si  $n \bmod 4 = 3$  alors  $S_{1, 1, 1, 2}$  a quatre options :  $S_{1, 1, 1}$  (qui a une valeur de Grundy de 0 par le théorème 5.17),  $S_{1, 1, 1, 1}$  (qui a une valeur de Grundy de 1 par le théorème 5.17),  $S_{1, 1, 1, 2}$  (qui a une valeur de Grundy de 2 par le cas précédent), et  $S_{1, 1, 3}$  (qui a une valeur de Grundy de 4 par la proposition 5.20). Donc,  $\mathcal{G}(S_{1, 1, 1, 3}) = 3$ .

Dans les quatre cas,  $\mathcal{G}(S_{1, 1, 1, n \bmod 4}) = n \bmod 4 = \mathcal{G}(P_n)$ . Donc le deuxième joueur a un coup gagnant, ce qui est une contradiction.

Supposons maintenant que  $u$  n'est pas le sommet central de  $S$ . Alors,  $u$  est une feuille. Si le coup gagnant du premier joueur ne supprime pas le sommet central, alors le deuxième joueur peut le répliquer sur  $S'$  dans le chemin de taille  $\ell_1 + 4$ . Donc, le coup gagnant doit supprimer le sommet central,  $u$  et laisse un chemin. Nécessairement,  $S = S_{1, 1, n}$  et le premier joueur laisse  $P_n$ . Or, le deuxième joueur peut répliquer en supprimant 3 sommets du chemin de longueur 4, laissant l'étoile  $S_{1, 2, n}$  qui par la proposition 5.20 a une valeur de Grundy de  $n \bmod 4$ , ce qui donne une contradiction.

Tous les cas possibles menant à une contradiction, il n'existe aucun  $S$  tel que  $S + S' \in \mathcal{N}$ , ce qui implique que  $\mathcal{G}(S) = \mathcal{G}(S')$ .  $\square$

### 5.3.6 Perspectives pour $\text{CSG}(I_N)$ dans les étoiles subdivisées

Le théorème 5.21 suggère que des théorèmes de réduction similaires peuvent être énoncés pour chaque jeu  $\text{CSG}(I_N)$  sur les étoiles subdivisées. Cependant, comme l'étude des étoiles subdivisées avec trois chemins l'a montré via le théorème 5.19, ces réductions ne sont pas nécessairement valides pour toutes les longueurs des chemins comme les théorèmes 5.10 et 5.21 l'ont montré pour les jeux  $\text{CSG}(I_2)$  et  $\text{CSG}(I_3)$ . Une question de recherche intéressante est donc de caractériser les jeux de la famille  $\text{CSG}(I_N)$  admettant un théorème de réduction dans les étoiles subdivisées, et d'obtenir des résultats d'ultime périodicité pour les autres.

Cependant, l'étude de ces jeux se heurte au souci des cas de base. La preuve s'effectue en effet par l'étude de la somme  $S_{\ell_1, \dots, \ell_k} + S_{\ell_1+N+1, \ell_2, \dots, \ell_k}$ , qui doit être dans  $\mathcal{P}$ . En étudiant un contre-exemple minimal et en utilisant le lemme 5.16, nous déterminons que tous les coups gagnants sont dans la composante  $S_{\ell_1, \dots, \ell_k}$ , suppriment l'extrémité du chemin de longueur  $\ell_1$  (ou le sommet central si  $\ell_1 = 0$ ) et laissent au moins deux sommets. Cependant, ces coups sont nombreux et nécessitent l'étude de multiples petites étoiles afin de compléter la preuve. C'est pourquoi une étude systématique des jeux doit s'appuyer sur des théorèmes plus généraux, dont la détermination est un sujet de recherche intéressant.

## 5.4 $\text{CSG}(I_N \cup \{M\})$ sur les étoiles subdivisées

Comme nous l'avons vu avec le théorème 4.37, il est possible d'ajouter des entiers au jeu de soustraction  $\text{SUB}(I_N)$  sans en changer la valeur de Grundy. En particulier, pour tout entier  $N$ , et pour tout entier strictement positif  $M \not\equiv 0 \pmod{N+1}$ , les séquences de Grundy des jeux  $\text{SUB}(I_N)$  et  $\text{SUB}(I_N \cup \{M\})$  sont les mêmes. En revanche, ce résultat ne s'étend pas aux étoiles subdivisées, et certains de ces jeux n'admettent pas de théorème de réduction des chemins :

**Observation 5.22.** *Pour tout  $N \geq 3$ , il existe un entier strictement positif  $M \not\equiv 0 \pmod{N+1}$  tel qu'il existe un graphe  $G$  et un sommet  $u$  de  $G$  tel que  $\mathcal{G}(G) \neq \mathcal{G}(G \overset{\bullet}{\underset{u}{\rightarrow}} P_{N+1})$  pour le jeu  $\text{CSG}(I_N \cup \{M\})$ .*

*Preuve.* Soient  $S = K_{1, N+2}$  et  $u$  le sommet central de  $S$ . Nous posons  $M = 2N + 4$  et étudions le jeu  $\text{CSG}(I_N \cup \{M\})$ . La position  $S + S \overset{\bullet}{\underset{u}{\rightarrow}} P_{N+1}$  est dans  $\mathcal{N}$ . La stratégie du premier joueur est de vider  $S \overset{\bullet}{\underset{u}{\rightarrow}} P_{N+1}$  (ce qui est possible car  $|S \overset{\bullet}{\underset{u}{\rightarrow}} P_{N+1}| = M$ ). Le deuxième joueur a alors un coup forcé sur  $S$  : supprimer une feuille. Après deux autres tels coups forcés, le premier joueur peut enfin supprimer les  $N$  sommets restants, remportant la partie.  $\square$

Notons que la preuve de l'observation 5.22 est un contre-exemple à l'adjonction d'entiers de façon semblable au théorème 4.37, y compris pour les étoiles subdivisées. L'étude des jeux de soustraction de cette famille semble donc plus complexe sur les graphes, y compris les étoiles, que sur les chemins. Cependant, le cas particulier du jeu  $\text{CSG}(I_2 \cup \{4\})$  (lequel est sur les chemins équivalent à  $\text{CSG}(I_2)$ ), montre que l'adjonction est parfois possible : pour le jeu  $\text{CSG}(I_2 \cup \{4\})$ ,  $\mathcal{G}(S_{\ell_1, \dots, \ell_k}) = \mathcal{G}(S_{\ell_1 \bmod 3, \dots, \ell_k \bmod 3})$  (le résultat est exactement identique au théorème 5.10 pour  $\text{CSG}(I_2)$ ). Cela signifie que les jeux  $\text{CSG}(I_2 \cup \{4\})$  et  $\text{CSG}(I_2)$  sont également identiques sur les étoiles subdivisées. Cependant, prouver ce résultat nécessite une preuve très longue et l'étude de nombreux cas de base, étant donné qu'il est impossible d'appliquer le lemme 5.16.

La complexité exponentielle de l'étude de  $\text{CSG}(I_2 \cup \{4\})$  comparée à celle de  $\text{CSG}(I_2)$  mène à considérer l'étude de la famille  $\text{CSG}(I_N \cup \{M\})$  comme un problème beaucoup plus technique que les jeux de soustraction  $\text{SUB}(I_N \cup \{M\})$ . Une question de recherche de haut intérêt serait cependant de déterminer un résultat similaire au théorème 4.37, et de caractériser quels entiers peuvent être adjoints à un ensemble d'un jeu de soustraction connexe.

## 5.5 CSG( $I_2$ ) sur les biétoiles subdivisées

Dans la section 5.3.1, nous avons étudié le jeu  $\text{CSG}(I_2)$  sur les étoiles subdivisées et établi que les chemins des étoiles pouvaient être réduits à leur taille modulo 3 sans changer leur valeur de Grundy (théorème 5.10), ce qui avait permis la détermination des valeurs de Grundy des étoiles subdivisées (figure 5.5). Dans cette section, nous allons étudier une famille plus large : les biétoiles subdivisées.

**Définition 5.23.** Soient  $S$  et  $S'$  deux étoiles subdivisées, et  $m$  un entier. La biétoile subdivisée  $S \overset{m}{\bullet} S'$  est le graphe formé en reliant les sommets centraux de  $S$  et  $S'$  par un chemin de  $m$  arêtes. Si  $m = 0$ , alors il s'agit d'une étoile subdivisée. De même, si  $m \geq 1$ ,  $S = S_{\ell_1, \dots, \ell_k}$  et  $S' = \emptyset$ , alors la biétoile subdivisée est isomorphe à  $S_{\ell_1, \dots, \ell_k, m-1}$ .

La figure 5.6 illustre cette définition. Pour des raisons de simplicité, la biétoile subdivisée  $S \overset{1}{\bullet} S'$  sera dénotée  $S \bullet S'$ .

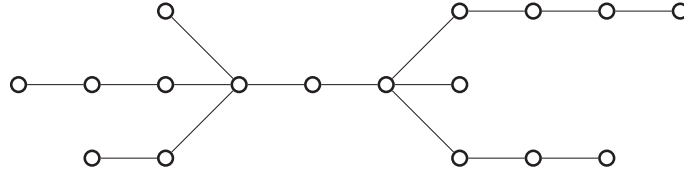


FIGURE 5.6 – La biétoile subdivisée  $S_{1,2,3} \bullet S_{1,3,4}$ .

Nous pouvons constater que jouer à  $\text{CSG}(I_2)$  sur une biétoile subdivisée est similaire à jouer à  $\text{CSG}(I_2)$  sur chacune des deux étoiles subdivisées la constituant, avec un ajustement lorsque les étoiles sont vides. Cela nous conduit à considérer le fait de jouer sur une biétoile subdivisée de façon similaire à jouer sur une somme de deux étoiles subdivisées. Nous allons étudier à quel point cette analogie peut être maintenue. Dans un premier temps, nous allons démontrer un théorème de réduction des chemins similaire au théorème 5.10, avant de résoudre entièrement le problème en décrivant une façon de déterminer la valeur de Grundy d'une biétoile subdivisée en fonction des deux étoiles subdivisées la constituant.

### 5.5.1 Réduction des chemins dans les biétoiles

Nous démontrons le théorème de réduction suivant :

**Théorème 5.24** (Beaudou, Coupechoux, D., Gravier, Moncel, Parreau, Sopena). *Pour tous entiers  $\ell_1, \dots, \ell_k, \ell'_1, \dots, \ell'_k, m$  :*

$$\mathcal{G}(S_{\ell_1, \dots, \ell_k} \overset{m}{\bullet} S_{\ell'_1, \dots, \ell'_k}) = \mathcal{G}(S_{\ell_1 \bmod 3, \dots, \ell_k \bmod 3} \overset{m \bmod 3}{\bullet} S_{\ell'_1 \bmod 3, \dots, \ell'_k \bmod 3})$$

pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ .

Notons qu'outre les chemins des deux étoiles, le chemin reliant les deux sommets centraux peut également être réduit à sa longueur modulo 3. En particulier, s'il est de longueur  $3k$ , alors la biétoile peut être réduite à une étoile subdivisée sans changer sa valeur de Grundy. La preuve du théorème 5.24 est divisée en deux lemmes de réduction : un pour le chemin entre les sommets centraux, et un pour les chemins des étoiles. Ce deuxième lemme nécessite lui-même un résultat technique préliminaire.

**Lemme 5.25.** *Pour tous entiers  $\ell_1, \dots, \ell_k, \ell'_1, \dots, \ell'_k, m$  :*

$$\mathcal{G}(S_{\ell_1, \dots, \ell_k} \overset{m}{\bullet} S_{\ell'_1, \dots, \ell'_k}) = \mathcal{G}(S_{\ell_1, \dots, \ell_k} \overset{m \bmod 3}{\bullet} S_{\ell'_1, \dots, \ell'_k})$$

pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ .

*Preuve.* Pour démontrer ce résultat, il suffit de prouver que, pour toutes étoiles subdivisées  $S$  et  $S'$  et pour tout entier  $m \geq 0$ ,  $S^{\bullet m} \bullet S' \equiv S^{\bullet m \pm 3} S'$ . En notant  $B = S^{\bullet m} \bullet S'$  et  $B' = S^{\bullet m \pm 3} S'$ , nous montrons que  $B + B' \in \mathcal{P}$  par induction sur le nombre de sommets de  $B$ .

Le premier joueur ne peut jouer sur le chemin entre les sommets centraux que si une des deux étoiles est vide, ou réduite à un ou deux sommets. Dans ces cas,  $B$  et  $B'$  sont des étoiles subdivisées, et le théorème 5.10 montre le résultat. Dans le cas contraire, tout coup du premier joueur sur  $B$  (resp.  $B'$ ) peut être répliqué à l'identique sur  $B'$  (resp.  $B$ ), l'hypothèse d'induction permettant de conclure.  $\square$

Le deuxième lemme de réduction nécessite un préliminaire technique, illustré figure 5.7.

**Lemme 5.26.** *Soit  $S$  une étoile subdivisée. Alors, pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$  :*

- $\mathcal{G}(S \bullet \rightarrow S_{1,1}) = \mathcal{G}(S)$  ;
- $\mathcal{G}(S^{\bullet 2} \bullet S_{1,1}) = \mathcal{G}(S \bullet \rightarrow P_1)$ .

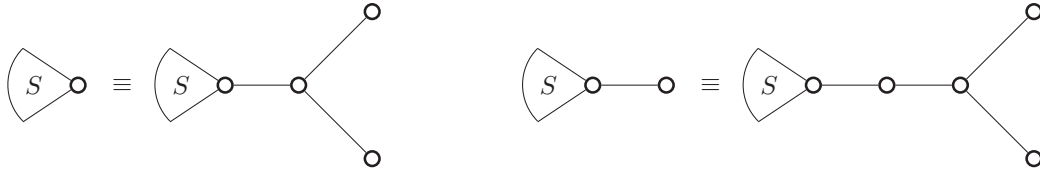


FIGURE 5.7 – Illustration du lemme 5.26.  $S$  désigne une étoile subdivisée.

*Preuve.* Soit  $B = S \bullet \rightarrow S_{1,1}$  (resp.  $S^{\bullet 2} \bullet S_{1,1}$ ). Nous démontrons que  $S + B \in \mathcal{P}$ . Le résultat lorsque  $S = \emptyset$  vient du théorème 5.9 (resp.  $S \bullet \rightarrow P_1$ , et le résultat vient du lemme 5.12). La preuve s'effectue par induction sur le nombre de sommets dans  $S$ . Considérons tout d'abord les cas où le premier joueur peut supprimer le sommet central de  $S$  :

1. Si  $S = P_1$ , alors  $B = S_{1,1,1}$  (resp.  $S \bullet \rightarrow P_1 = P_2$  et  $B = S_{1,1,2}$ ) et le lemme 5.12 (resp. la figure 5.5) nous donne le résultat.
2. Si  $S = P_2$ , alors  $B = S_{1,1,2}$  (resp.  $S \bullet \rightarrow P_1 = P_3$  et  $B = S_{1,1,3}$ ) et la figure 5.5 (resp. le théorème 5.10) nous donne le résultat.
3. Si  $S = S_2$ , alors  $B = S_{1,1,3}$  et le théorème 5.10 nous donne le résultat.
4. Si  $S = S_{1,1}$ , alors  $B = S_{1,1} \bullet \rightarrow S_{1,1}$  (resp.  $S \bullet \rightarrow P_1 = S_{1,1,1}$  et  $B = S_{1,1} \bullet \rightarrow S_{1,1}$ ), alors  $S, B \in \mathcal{P}$  :  $S$  par le théorème 5.9 et  $B$  car après le seul coup disponible le deuxième joueur a un coup gagnant qui est de jouer vers  $P_3$  (resp.  $\mathcal{G}(S \bullet \rightarrow P_1) = 1$  par la figure 5.5 et le seul coup possible depuis  $B$  mène à  $S_{1,1,3}$  qui est dans  $\mathcal{P}$  donc  $\mathcal{G}(B) = 1$ ), ce qui nous donne le résultat.
5. Si  $S = S_\ell$  avec  $\ell \geq 4$  ou  $S = S_{1,\ell}$  avec  $\ell \geq 2$ , alors l'observation 5.11 nous indique que le deuxième joueur sera toujours capable de reproduire le coup du premier joueur, ce qui nous donne le résultat (de même pour  $S \bullet \rightarrow P_1$ ).

Supposons maintenant que le premier joueur ne peut pas supprimer le sommet central de  $S$ , et considérons les positions  $S + B$  (pour les deux définitions de  $B$ ). S'il joue sur  $S$  dans l'une des deux composantes, alors le deuxième joueur peut répliquer son coup, et la nouvelle position sera dans  $\mathcal{P}$  par hypothèse d'induction. Supposons que  $B = S \bullet \rightarrow S_{1,1}$ , le premier joueur peut supprimer un des deux chemins de longueur 1 dans  $S_{1,1}$ . Le deuxième joueur réplique alors en vidant  $S_{1,1}$ , laissant  $S + S$  qui est dans  $\mathcal{P}$ . Supposons maintenant que  $B = S^{\bullet 2} \bullet S_{1,1}$ , le premier joueur peut supprimer le  $P_1$  dans la composante  $S \bullet \rightarrow P_1$  (resp. un des deux chemins de longueur 1 dans  $S_{1,1}$  dans la composante  $B$ ). Le deuxième joueur réplique alors en supprimant un des deux chemins de longueur 1 dans  $S_{1,1}$  dans la composante  $B$  (resp. en supprimant le  $P_1$  dans la composante  $S \bullet \rightarrow P_1$ ), laissant  $S + S^{\bullet 2} \bullet P_2$ . Or, cette somme est dans  $\mathcal{P}$  par le théorème 5.10.  $\square$

Nous pouvons désormais montrer le deuxième lemme de réduction :

**Lemme 5.27.** *Pour tous entiers  $\ell_1, \dots, \ell_k, \ell'_1, \dots, \ell'_k, m$  :*

$$\mathcal{G}(S_{\ell_1, \dots, \ell_k} \bullet^m S_{\ell'_1, \dots, \ell'_k}) = \mathcal{G}(S_{\ell_1 \bmod 3, \dots, \ell_k \bmod 3} \bullet^m S_{\ell'_1 \bmod 3, \dots, \ell'_k \bmod 3})$$

pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ .

*Preuve.* Le lemme 5.25 nous permet de restreindre les cas à étudier à ceux où  $m \in \{1, 2\}$ . Soient  $S$  et  $S'$  deux étoiles subdivisées, soient  $B = S \bullet^m S'$  et  $B'$  la biétoile obtenue en attachant un  $P_3$  à une feuille ou au sommet central de  $S'$  (sans perte de généralité). Nous prouvons par induction sur le nombre de sommets de  $B$  que  $B + B' \in \mathcal{P}$ .

Si  $S$  ou  $S'$  sont vides ou un unique sommet, alors  $B$  et  $B'$  sont des étoiles subdivisées et le théorème 5.10 montre le résultat. Si  $S' = P_2$ , que le  $P_3$  est attaché au sommet central et que le premier joueur les supprime dans  $B$ , alors le deuxième joueur supprime deux sommets du  $P_3$  dans  $B'$ , et le lemme 5.26 montre le résultat. Dans les autres cas, tout coup du premier joueur sur  $B$  (resp.  $B'$ ) peut être répliqué à l'identique sur  $B'$  (resp.  $B$ ), l'hypothèse d'induction permettant de conclure.  $\square$

Les lemmes 5.25 et 5.27 permettent de démontrer le théorème 5.24. Cela permet une étude exhaustive des biétoiles subdivisées, qui est l'objet de la section suivante.

### 5.5.2 Définition d'une pseudo-somme de jeux et résolution des biétoiles subdivisées

Comme dit précédemment, jouer sur une biétoile subdivisée est similaire à jouer indépendamment sur les deux étoiles subdivisées, sauf en s'approchant de la fin du jeu. Nous allons donc définir une pseudo-somme de jeux sur les étoiles subdivisées, laquelle nous permettra de calculer la valeur de Grundy d'une biétoile en fonction de ses deux étoiles. Afin de faire ceci, nous allons affiner la relation d'équivalence sur les jeux et déterminer de nouvelles classes d'équivalence pour les étoiles, plus fines que les valeurs de Grundy. Grâce au théorème 5.24, qui nous permet de réduire les chemins à leur longueur modulo 3, il n'y a que deux cas à considérer : lorsque le chemin entre les deux sommets centraux contient une arête, et lorsqu'il en contient deux. Nous allons étudier ces deux cas consécutivement au cours de cette section.

#### Avec une arête entre les étoiles

Nous allons voir que, dans la plupart des cas, la valeur de Grundy d'une biétoile subdivisée avec une arête entre les étoiles est égale à la nim-somme des valeurs de Grundy des deux étoiles subdivisées la constituant. Afin de démontrer ceci et d'étudier les cas de base, nous allons affiner la relation d'équivalence  $\equiv$ . Pour cela, nous allons nous baser sur la remarque suivante : dans le lemme 5.26, nous avons vu que pour toute étoile  $S$ ,  $S$  et  $S \bullet \rightarrow S_{1,1}$  avaient la même valeur de Grundy, ce qui est plus fort que l'équivalence de jeux. En nous inspirant de ceci, nous définissons la relation  $\sim_1$  de la façon suivante :

**Définition 5.28.** Soient  $S, S'$  deux étoiles subdivisées.  $S$  et  $S'$  sont  $\sim_1$ -équivalentes, noté  $S \sim_1 S'$ , si et seulement si pour toute étoile subdivisée  $\hat{S}$ ,  $S \bullet \rightarrow \hat{S} \equiv S' \bullet \rightarrow \hat{S}$ .

La valeur de Grundy de  $S \bullet \rightarrow S'$  ne dépend alors que des classes d'équivalence sous  $\sim_1$  de  $S$  et  $S'$ . Notons que  $\sim_1$  est bien un affinage de  $\equiv$  : en posant  $\hat{S} = \emptyset$ , nous avons bien  $S \sim_1 S' \Rightarrow S \equiv S'$ .

Nous allons démontrer qu'il y a exactement huit classes d'équivalence pour la relation  $\sim_1$ , représentées figure 5.8 :

- $\mathcal{C}_1^* = \{P_1, S_{1,2}, S_{2,2,2}\}$  (ces étoiles ont une valeur de Grundy de 1) ;
- $\mathcal{C}_2^* = \{P_2, S_{2,2}\}$  (ces étoiles ont une valeur de Grundy de 2) ;
- $\mathcal{C}_2^\square = \{S \mid \mathcal{G}(S) = 2 \text{ et } S \text{ contient un ou trois chemins de longueur 2}\}$  ;
- $\mathcal{C}_3^\square = \{S \mid \mathcal{G}(S) = 3 \text{ et } S \text{ contient un ou trois chemins de longueur 2}\}$  ;

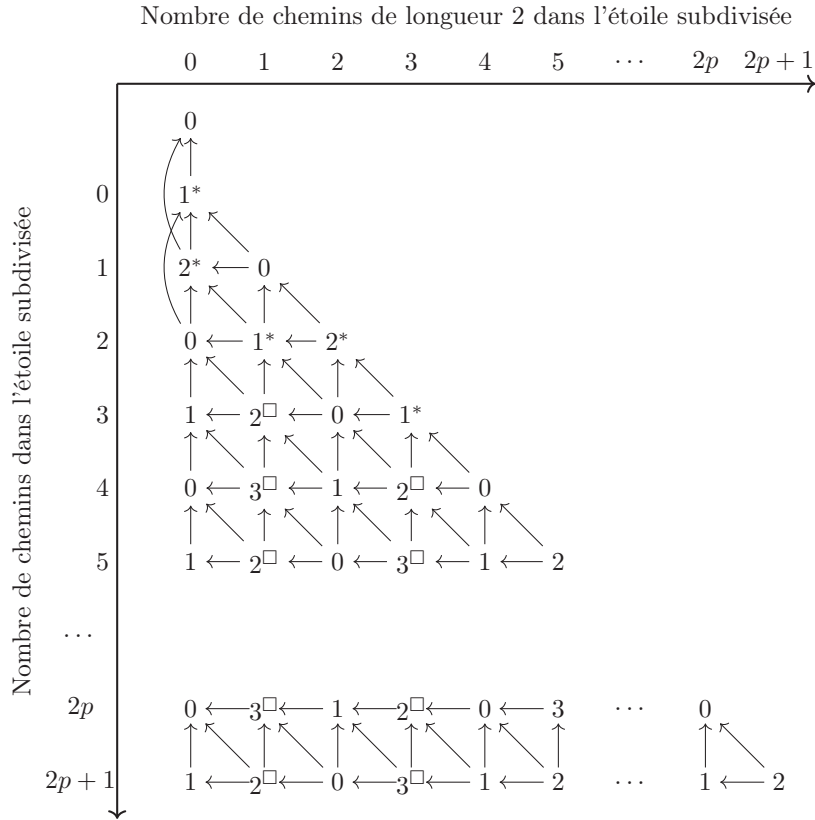


FIGURE 5.8 – Table des classes d'équivalence pour  $\sim_1$  des étoiles subdivisées.

— Pour  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{C}_i = \{S \mid \mathcal{G}(S) = i \text{ et } S \text{ n'est pas dans une classe précédente}\}$ .

Nous pouvons désormais montrer comment déterminer la valeur de Grundy d'une biétoile subdivisée en fonction des classes d'équivalence pour  $\sim_1$  des deux étoiles la composant :

**Théorème 5.29** (Beaudou, Coupechoux, D., Gravier, Moncel, Parreau, Sopena). *Les classes d'équivalence de  $\sim_1$  sont exactement les ensembles  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_2^*, \mathcal{C}_2^\square, \mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_3^\square$ . De plus, le tableau 5.2 décrit comment calculer la valeur de Grundy de  $S \bullet \rightarrow S'$  en fonction des classes d'équivalence de  $S$  et  $S'$ .*

	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_1^*$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_2^*$	$\mathcal{C}_2^\square$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_3^\square$
$\mathcal{C}_0$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_1$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_1^*$	$\oplus$	$\oplus$	2	$\oplus$	0	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_2^*$	$\oplus$	$\oplus$	0	$\oplus$	1	1	$\oplus$	0
$\mathcal{C}_2^\square$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	1	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_3$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\mathcal{C}_3^\square$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	0	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$

Tableau 5.2 – Calculer la valeur de Grundy de  $S \bullet \rightarrow S'$  en fonction des classes d'équivalence de  $S$  et  $S'$ . Rappelons que  $\oplus$  est la nim-somme.

Nous constatons que, dans la plupart des cas, la valeur de Grundy de  $S \bullet \bullet S'$  est égale à celle de la somme  $S + S'$ .

*Preuve.* Le lemme 5.26 nous donne déjà  $\emptyset \sim_1 S_{1,1}$  et  $\emptyset \sim_1 S_2$ . Nous montrons ensuite que  $\mathcal{C}_1^*$  et  $\mathcal{C}_2^*$  sont bien des classes d'équivalence :

**Affirmation 5.29.A.** *Nous avons les  $\sim_1$ -équivalences suivantes :*

1.  $P_1 \sim_1 S_{2,1}$
2.  $P_2 \sim_1 S_{2,2}$
3.  $S_{1,1} \sim_1 S_{2,2,1}$
4.  $S_{2,1} \sim_1 S_{2,2,2}$ .

*Preuve de l'affirmation.* Ces quatre équivalences vont être démontrées de la même façon : pour toutes les paires  $(S, S')$  dont on veut démontrer la  $\sim_1$ -équivalence, nous allons montrer que pour toute étoile subdivisée  $\hat{S}$ ,  $\hat{S} \bullet \bullet S + \hat{S} \bullet \bullet S' \in \mathcal{P}$ . Nous raisonnons par induction sur la taille de  $\hat{S}$ . Quand  $\hat{S} \in \{\emptyset, P_1, P_2\}$ , le résultat se tient par la figure 5.5. Dans le cas contraire, le premier joueur ne peut pas supprimer le sommet central de  $\hat{S}$  en jouant sur une des biétoiles (sauf dans le cas où  $S = P_1$  et  $\hat{S} = P_m$ , qui sera traité plus loin). Nous allons montrer que le deuxième joueur peut alors répondre à tous les coups du premier joueur. Dans chacun des quatre cas, si le premier joueur joue sur  $\hat{S}$  dans une des deux composantes, alors le deuxième joueur peut répliquer avec le coup identique sur l'autre composante, l'hypothèse d'induction nous permettant de conclure. Les seuls cas à étudier sont donc ceux où le premier joueur joue sur  $S$  et  $S'$ . Les figures 5.9 à 5.12 démontrent ces cas pour chacune des paires, nous permettant de conclure (dans ces figures, nous notons  $S$  pour  $\hat{S}$  pour des raisons de lisibilité).  $\square$

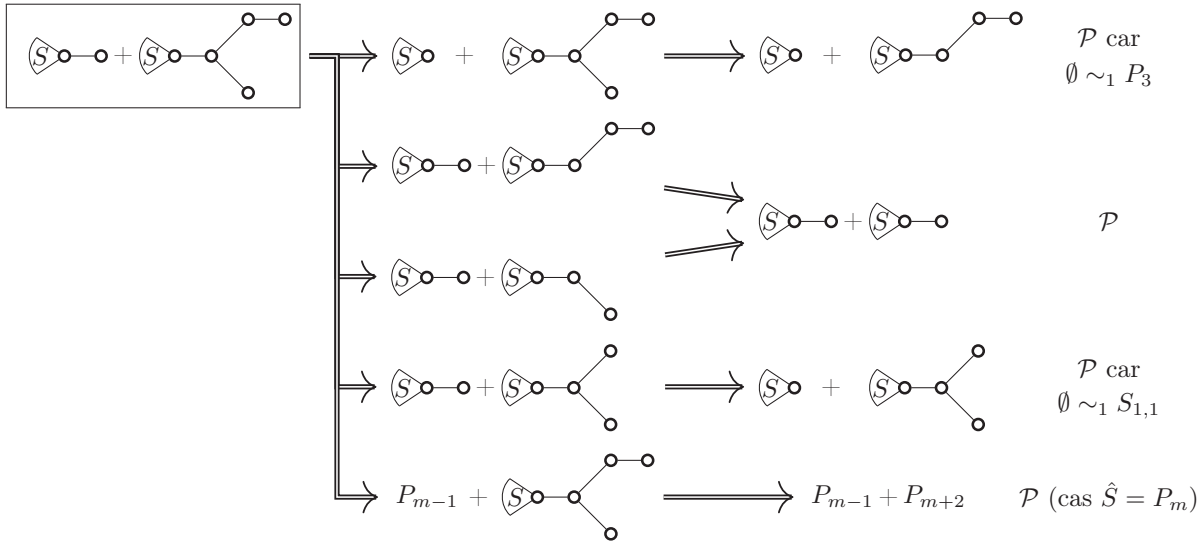


FIGURE 5.9 – La partie inductive de la preuve pour  $P_1 \sim_1 S_{2,1}$ .

Nous démontrons également un autre lemme technique :

**Affirmation 5.29.B.** *Si  $S \notin \mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*$ , alors  $\mathcal{G}(S \bullet \bullet S_{1,1,1}) = \mathcal{G}(S \bullet \bullet P_1)$ .*

*Preuve de l'affirmation.* Nous démontrons le résultat par induction sur le nombre de sommets de  $S$ . Si  $S = \emptyset$  alors le résultat est vérifié par la figure 5.5. Les autres cas de base sont les étoiles ayant des options dans  $\mathcal{C}_1^* \cup \mathcal{C}_2^*$  :



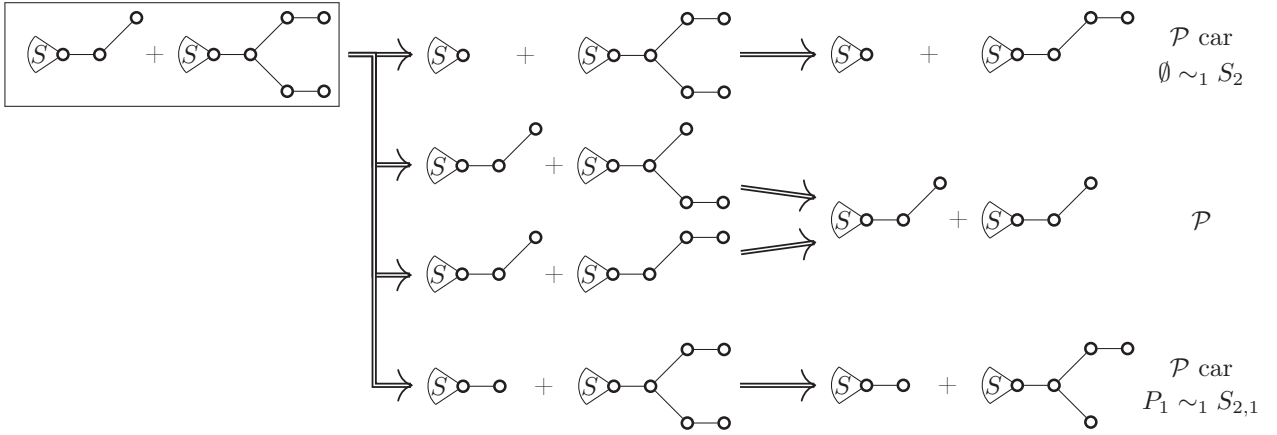


FIGURE 5.10 – La partie inductive de la preuve pour  $P_2 \sim_1 S_{2,2}$ .

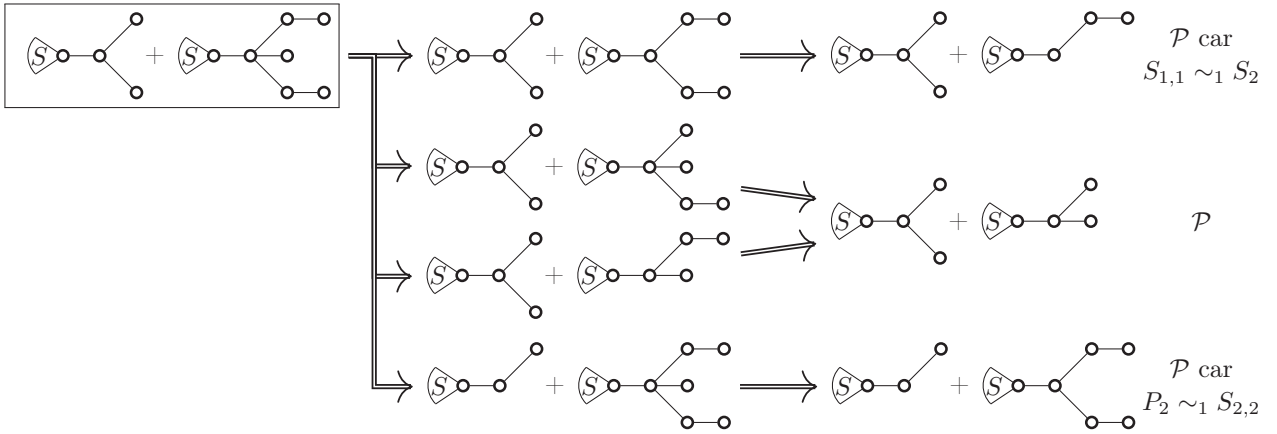


FIGURE 5.11 – La partie inductive de la preuve pour  $S_{1,1} \sim_1 S_{2,2,1}$ .

1. Si  $S = S_{1,1}$ , alors l'affirmation 5.29.A implique que  $\mathcal{G}(S_{1,1,1} \bullet \bullet S) = \mathcal{G}(S_{1,1,1}) = \mathcal{G}(P_1 \bullet \bullet S_{1,1})$ .
2. Si  $S = S_{2,2,1}$ , alors l'affirmation 5.29.A implique que  $\mathcal{G}(S_{1,1,1} \bullet \bullet S) = \mathcal{G}(S_{1,1,1}) = 1 = \mathcal{G}(S_{2,2,1,1}) = \mathcal{G}(P_1 \bullet \bullet S_{2,2,1})$ .
3. Si  $S \in \{S_{2,1,1}, S_{2,2,2,1}, S_{2,2,2,2}\}$ , alors en appliquant l'algorithme 4 nous pouvons calculer explicitement les valeurs de Grundy de  $S \bullet \bullet S_{1,1,1}$  et de  $S \bullet \bullet P_1$ . Ces valeurs sont respectivement 3 et 3, 3 et 3, 1 et 1. Dans tous les cas, nous avons  $\mathcal{G}(S \bullet \bullet S_{1,1,1}) = \mathcal{G}(S \bullet \bullet P_1)$ .

Supposons que  $S$  n'est pas dans  $\mathcal{C}_1^* \cup \mathcal{C}_2^*$  et n'a aucune option dans  $\mathcal{C}_1^* \cup \mathcal{C}_2^*$ , nous démontrons que  $S \bullet \bullet S_{1,1,1} + S \bullet \bullet P_1 \in \mathcal{P}$ . Notons que le premier joueur ne peut pas supprimer le sommet central de  $S$ . Si le premier joueur joue sur  $S$  dans l'une des deux composantes, alors le deuxième joueur peut reproduire le coup à l'identique dans l'autre composante. Comme l'option de  $S$  qui a été atteinte n'est pas dans  $\mathcal{C}_1^* \cup \mathcal{C}_2^*$ , nous pouvons appliquer l'hypothèse d'induction, laquelle indique que la somme est dans  $\mathcal{P}$ . Si le premier joueur joue sur  $P_1$ , il ne peut supprimer qu'un seul sommet, auquel cas le deuxième joueur supprime une des feuilles de  $S_{1,1,1}$  et laisse  $S + S \bullet \bullet S_{1,1}$  qui est dans  $\mathcal{P}$  par l'affirmation 5.29.A. Si le premier joueur joue sur  $S_{1,1,1}$ , le deuxième joueur applique la stratégie symétrique du cas précédent. Donc,  $S \bullet \bullet S_{1,1,1} + S \bullet \bullet P_1 \in \mathcal{P}$ .  $\square$

Nous démontrons maintenant par induction que si  $S$  et  $S'$  sont dans le même ensemble  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_2^*, \mathcal{C}_2^\square, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_3^\square$ ,

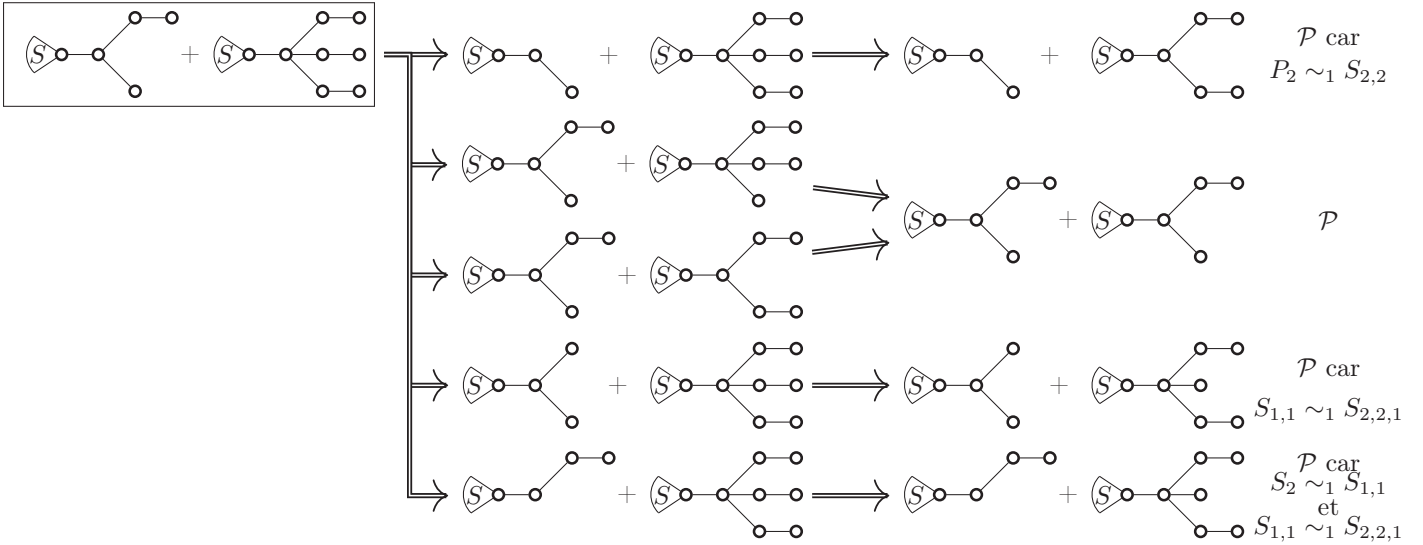


FIGURE 5.12 – La partie inductive de la preuve pour  $S_{2,1} \sim_1 S_{2,2}$ .

alors elles sont  $\sim_1$ -équivalentes.

L'affirmation 5.29.A nous indique que c'est le cas si  $S \in \mathcal{C}_1^*$  ou  $S \in \mathcal{C}_2^*$ . Le lemme 5.26 nous indique que c'est également le cas si  $\{S, S'\} = \{\emptyset, S_2\}$  ou  $\{S, S'\} = \{\emptyset, S_{1,1}\}$ .

De plus, nous pouvons vérifier que les lignes et colonnes de  $\mathcal{C}_1^*$  et  $\mathcal{C}_2^*$  du tableau 5.2 sont correctes. Pour cela, il suffit de démontrer leur correction pour un représentant :  $P_1$  pour  $\mathcal{C}_1^*$  et  $P_2$  pour  $\mathcal{C}_2^*$ . Or, pour une étoile subdivisée  $\hat{S}$ ,  $\hat{S} \bullet \rightarrow P_1$  est l'étoile subdivisée juste en-dessous de  $\hat{S}$  dans la figure 5.4, tandis que  $\hat{S} \bullet \rightarrow P_2$  est l'étoile subdivisée en diagonale en-dessous et à droite de  $\hat{S}$ . Il suffit alors d'identifier les éléments de chaque ensemble dans la figure 5.8 et de comparer la valeur de Grundy des étoiles individuelles et de la biétoile résultant de l'ajout de  $P_1$  ou de  $P_2$  (qui est donc également une étoile) pour vérifier la correction des lignes et colonnes de  $\mathcal{C}_1^*$  et  $\mathcal{C}_2^*$ . Ainsi, en-dessous de chaque élément de  $\mathcal{C}_1^*$  il y a une étoile avec une valeur de Grundy de 2, et en-dessous de chaque élément de  $\mathcal{C}_2^*$  il y a une étoile avec une valeur de Grundy de 0, ce qui correspond à ce que nous affirmons dans le tableau 5.2. Toutes les autres étoiles sont, en descendant dans les colonnes, dans un motif 0-1 ou 2-3, ce qui correspond au calcul des valeurs de Grundy avec la nim-somme. Ceci vérifie les ligne et colonne de  $\mathcal{C}_1^*$ . En faisant de même avec  $\mathcal{C}_2^*$ , nous démontrons également la correction de ses ligne et colonne (en bas à droite d'un élément de  $\mathcal{C}_2^*$  ou de  $\mathcal{C}_2^\square$  se situe une étoile avec une valeur de Grundy de 1, pour toutes les autres étoiles nous avons un motif 0-2 ou 1-3, ce qui correspond au calcul des valeurs de Grundy avec la nim-somme).

Supposons que  $S, S' \in \mathcal{C}$  avec  $\mathcal{C} \notin \{\mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*\}$ . Alors,  $S$  et  $S'$  sont soit vides soit pas un chemin. Nous démontrons par induction sur la taille de  $\hat{S}$  que  $S \bullet \rightarrow \hat{S} + S' \bullet \rightarrow \hat{S} \in \mathcal{P}$  pour toute étoile subdivisée  $\hat{S}$ . C'est trivialement vrai si  $\hat{S} = \emptyset$  (car alors  $\mathcal{G}(S) = \mathcal{G}(S')$ ) ou si  $\hat{S} \in \{\mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*\}$  (par notre discussion précédente). Nous pouvons donc supposer que  $\hat{S} \notin \{\mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*\}$  et que  $\hat{S}$  n'est pas un chemin.

Si le premier joueur joue sur  $\hat{S}$  dans une des deux composantes, alors il ne peut pas supprimer le sommet central, donc le deuxième joueur peut jouer le même coup dans l'autre composante, et la somme restante sera dans  $\mathcal{P}$  par hypothèse d'induction. Supposons sans perte de généralité que le premier joueur joue sur  $S$ , laissant une position  $T \bullet \rightarrow \hat{S} + S' \bullet \rightarrow \hat{S}$ . Nous devons trouver une réponse pour le deuxième joueur.

- (i) S'il existe  $T' \in \text{opt}(T)$  avec  $T' \in \mathcal{C}$ , alors le deuxième joueur peut jouer vers  $T' \bullet \rightarrow \hat{S} + S' \bullet \rightarrow \hat{S}$  (c'est toujours possible car si le coup impliquait de supprimer le sommet central de  $T$  et que  $T' \neq \emptyset$ , alors  $T$  est un chemin qui n'est ni  $P_3$  ni  $P_4$ , une contradiction). Par hypothèse d'induction,

cette somme est dans  $\mathcal{P}$ .

- (ii) S'il existe  $T' \in \text{opt}(S')$  avec  $T' \in \mathcal{C}$ , alors le deuxième joueur peut jouer vers  $T \bullet \rightarrow \hat{S} + T' \bullet \rightarrow \hat{S}$  (une nouvelle fois, c'est toujours possible car  $S'$  n'est pas un chemin), et par hypothèse d'induction cette somme est dans  $\mathcal{P}$ .

Supposons que nous ne soyons dans aucun de ces deux cas. Si  $\mathcal{G}(S) = 3$  alors nous sommes nécessairement dans le cas (ii) (car toutes les étoiles avec cette valeur de Grundy qui sont dans la même classe  $\mathcal{C}_3$  ou  $\mathcal{C}_3^\square$  ont trois options qui sont toujours dans le même ensemble). Si  $\mathcal{G}(S) = 0$  alors nous sommes nécessairement dans le cas (i) (car toute option d'une étoile dans  $\mathcal{C}_0$  a une option dans  $\mathcal{C}_0$ ). Si  $\mathcal{G}(S) = 1$ , alors  $S' \in \mathcal{C}_1$ . Si  $\mathcal{G}(T) = 0$  alors nous sommes dans le cas (ii) (car toute étoile dans  $\mathcal{C}_0$  a une option dans  $\mathcal{C}_0$ ). Sinon,  $\mathcal{G}(T) > 1$  et il y a toujours un coup vers une étoile  $T' \in \mathcal{C}_1$  donc nous sommes dans le cas (i). Donc,  $\mathcal{G}(S) = 2$ . Si  $\mathcal{G}(T) = 0$  ou si  $T \in \mathcal{C}_1$  alors nous sommes dans le cas (ii), et si  $\mathcal{G}(T) = 3$  alors nous sommes dans le cas (i). Le seul cas restant est donc  $T \in \mathcal{C}_1^*$ . Or, il existe un  $T' \in \text{opt}(S')$  avec  $T' \in \mathcal{C}_1$ . Par hypothèse d'induction,  $\mathcal{G}(T' \bullet \rightarrow \hat{S}) = \mathcal{G}(S_{1,1,1} \bullet \rightarrow \hat{S})$  (en effet, comme  $S$  a au moins cinq sommets, le nombre de sommets dans  $S$  et  $S'$  est strictement supérieur au nombre de sommets dans  $T'$  et  $S_{1,1,1}$ ). Or, l'affirmation 5.29.B implique que  $\mathcal{G}(S_{1,1,1} \bullet \rightarrow \hat{S}) = \mathcal{G}(P_1 \bullet \rightarrow \hat{S}) = \mathcal{G}(T \bullet \rightarrow \hat{S})$  (car  $\hat{S} \notin \{\mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*\}$ ). Donc,  $\mathcal{G}(T \bullet \rightarrow \hat{S}) = \mathcal{G}(T' \bullet \rightarrow \hat{S})$  et la somme est dans  $\mathcal{P}$ .

Cette étude exhaustive nous démontre que les ensembles  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_2^*, \mathcal{C}_2^\square, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_3^\square$  sont des classes d'équivalence. Pour déterminer la justesse du tableau 5.2, nous effectuons un calcul exhaustif avec un représentant par classe :  $\emptyset, P_1, P_2, S_{1,1,1}, S_{2,1,1}, S_{2,1,1,1}, S_{2,2,2,2,2}, S_{2,2,2,2,2,1}$  par exemple. Ce calcul démontre que le tableau 5.2 est bien correct.  $\square$

### Avec deux arêtes entre les étoiles

De façon similaire à  $\sim_1$ , nous affinons la relation  $\equiv$  pour les biétoiles subdivisées avec un chemin central de deux arêtes :

**Définition 5.30.** Soient  $S, S'$  deux étoiles subdivisées.  $S$  et  $S'$  sont  $\sim_2$ -équivalentes, noté  $S \sim_2 S'$ , si et seulement si pour toute étoile subdivisée  $\hat{S}$ ,  $S \bullet \rightarrow \hat{S} \equiv S' \bullet \rightarrow \hat{S}$ .

Nous allons démontrer qu'il y a exactement dix classes d'équivalence pour la relation  $\sim_2$ , représentées figure 5.13 :

- $\mathcal{D}_0^* = \{S \mid \mathcal{G}(S) = 0 \text{ et } S \text{ contient zéro ou deux chemins de longueur } 2\}$  ;
- $\mathcal{D}_1^* = \{P_1, S_{1,2}, S_{2,2,2}\}$  (ces étoiles ont une valeur de Grundy de 1) ;
- $\mathcal{D}_1^\square = \{S \mid \mathcal{G}(S) = 1 \text{ et } S \text{ contient zéro ou deux chemins de longueur } 2\}$  ;
- $\mathcal{D}_2^* = \{P_2, S_{2,2}\}$  (ces étoiles ont une valeur de Grundy de 2) ;
- $\mathcal{D}_2^\square = \{S \mid \mathcal{G}(S) = 2 \text{ et } S \text{ contient un ou trois chemins de longueur } 2\}$  ;
- $\mathcal{D}_3^\square = \{S \mid \mathcal{G}(S) = 3 \text{ et } S \text{ contient un ou trois chemins de longueur } 2\}$  ;
- Pour  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{D}_i = \{S \mid \mathcal{G}(S) = i \text{ et } S \text{ n'est pas dans une classe précédente}\}$ .

Comme pour le théorème 5.29, nous allons montrer comment calculer la valeur de Grundy d'une biétoile subdivisée en fonction des classes d'équivalence pour  $\sim_2$  des deux étoiles la composant :

**Théorème 5.31** (Beaudou, Coupechoux, D., Gravier, Moncel, Parreau, Sopena). *Les classes d'équivalence de  $\sim_2$  sont exactement les ensembles  $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0^*, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_1^\square, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_2^*, \mathcal{D}_2^\square, \mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_3^\square$ . De plus, le tableau 5.3 décrit comment calculer la valeur de Grundy de  $S \bullet \rightarrow S'$  en fonction des classes d'équivalence de  $S$  et  $S'$ .*

*Preuve.* Nous commençons par montrer que  $\mathcal{D}_1^*$  et  $\mathcal{D}_2^*$  sont bien des classes d'équivalence :

**Affirmation 5.31.A.** *Nous avons les  $\sim_2$ -équivalences suivantes :*

1.  $P_1 \sim_2 S_{2,1}$
2.  $P_2 \sim_2 S_{2,2}$
3.  $S_{1,1} \sim_2 S_{2,2,1}$

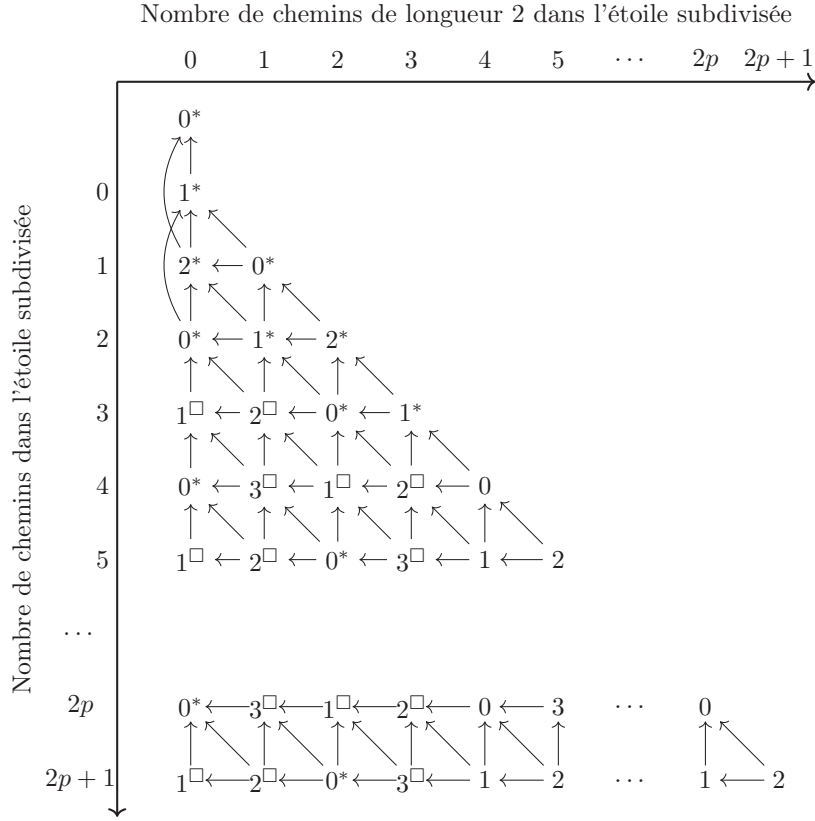


FIGURE 5.13 – Table des classes d'équivalence pour  $\sim_2$  des étoiles subdivisées.

	$\mathcal{D}_0$	$\mathcal{D}_0^*$	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_1^*$	$\mathcal{D}_1^\square$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2^*$	$\mathcal{D}_2^\square$	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{D}_3^\square$
$\mathcal{D}_0$	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	2	$\oplus_1$	$\oplus$	0	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_0^*$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	2	$\oplus_1$	$\oplus_1$	0	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_1$	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	3	$\oplus_1$	$\oplus$	1	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_1^*$	2	2	3	0	3	0	1	1	1	0
$\mathcal{D}_1^\square$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	3	$\oplus_1$	$\oplus_1$	1	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_2$	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	0	$\oplus_1$	$\oplus$	2	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_2^*$	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3
$\mathcal{D}_2^\square$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	1	$\oplus_1$	$\oplus_1$	2	0	$\oplus_1$	1
$\mathcal{D}_3$	$\oplus$	$\oplus_1$	$\oplus$	1	$\oplus_1$	$\oplus$	3	$\oplus_1$	$\oplus$	$\oplus_1$
$\mathcal{D}_3^\square$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	$\oplus_1$	0	$\oplus_1$	$\oplus_1$	3	1	$\oplus_1$	0

Tableau 5.3 – Calculer la valeur de Grundy de  $S^{\bullet 2} \bullet S'$  en fonction des classes d'équivalence de  $S$  et  $S'$ . Rappelons que  $\oplus$  est la nim-somme. De plus,  $x \oplus_1 y$  signifie  $x \oplus y \oplus 1$ .

4.  $S_{2,1} \sim_2 S_{2,2,2}$ .

La preuve de cette affirmation est identique à celle de l'affirmation 5.29.A pour  $\mathcal{C}_1^*$  et  $\mathcal{C}_2^*$ .

Par la suite, nous étudions la valeur de Grundy de  $B = S^{\bullet 2} \bullet S'$  en fonction des classes de  $S$  et  $S'$ . Pour cela, nous raisonnons par induction sur l'ordre de  $B$ , et utilisons la méthode de calcul des valeurs de Grundy :  $\mathcal{G}(B) = \text{mex}(\{\mathcal{G}(T^{\bullet 2} \bullet S') \mid T \in \text{opt}(S)\} \cup \{\mathcal{G}(S^{\bullet 2} \bullet T') \mid T' \in \text{opt}(S')\})$ . Cette méthode fonctionne car les coups supprimant les sommets centraux de  $S$  et  $S'$  sont réglés par  $\mathcal{D}_1^*$ ,

$\mathcal{D}_2^*$  et par le lemme 5.26 (qui nous indique que  $\emptyset \sim_2 S_2$  et  $\emptyset \sim_2 S_{1,1}$ ). En utilisant l'hypothèse d'induction sur les biétoiles options de  $B$  et en effectuant une étude exhaustive des 36 cas (un par combinaison de classe entre  $S$  et  $S'$ , moins  $\mathcal{D}_1^*$  et  $\mathcal{D}_2^*$ ), nous démontrons la validité du théorème 5.31.

Nous allons détailler un cas : supposons que  $S \in \mathcal{D}_1$  et  $S' \in \mathcal{D}_3$ . Alors,  $S$  a toujours trois options différentes, mais elles ne sont pas nécessairement dans le même ensemble selon la valeur exacte de  $S$ . Une de ces options est toujours dans  $\mathcal{D}_0$ , et les deux autres sont soit dans  $\mathcal{D}_2^\square$  et  $\mathcal{D}_3^\square$  soit dans  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_3$ .  $S'$  a trois options, qui sont dans  $\mathcal{D}_0$ ,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

Ces possibilités sont illustrées par la figure 5.14. À gauche, nous représentons les possibles options de  $S$ . À droite, nous représentons les possibles options de  $S'$ . La notation  $\mathcal{D}_i \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_j$  représente le fait que les étoiles subdivisées constituant la biétoile sont respectivement dans  $\mathcal{D}_i$  et  $\mathcal{D}_j$ . La biétoile obtenue ayant moins de sommets que  $B$ , nous pouvons utiliser l'hypothèse d'induction pour calculer sa valeur de Grundy, laquelle est affichée en-dessous d'elle.

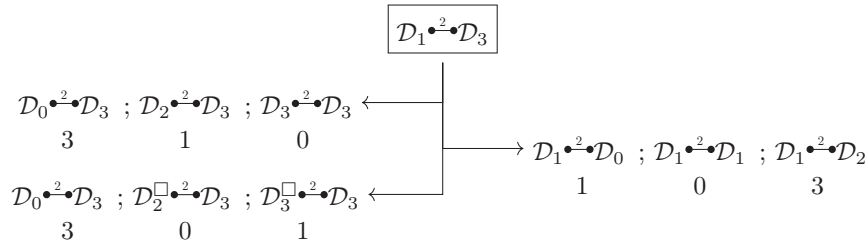


FIGURE 5.14 – Les options possibles de  $S \bullet^2 \bullet S'$  si  $S \in \mathcal{D}_1$  et  $S' \in \mathcal{D}_3$ .

Dans ce cas, nous pouvons calculer  $\mathcal{G}(B)$ . Tout d'abord, si les options de  $S$  sont dans  $\mathcal{D}_2^\square$  et  $\mathcal{D}_3^\square$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(S \bullet^2 \bullet S') &= \text{mex}(\{\mathcal{G}(\mathcal{D}_0 \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_3), \mathcal{G}(\mathcal{D}_2^\square \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_3), \mathcal{G}(\mathcal{D}_3^\square \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_3), \mathcal{G}(\mathcal{D}_1 \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_0), \mathcal{G}(\mathcal{D}_1 \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_1), \mathcal{G}(\mathcal{D}_1 \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_2)\}) \\ &= \text{mex}(\{3, 0, 1, 1, 0, 3\}) \text{ par hypothèse d'induction} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ensuite, si les options de  $S$  sont dans  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(S \bullet^2 \bullet S') &= \text{mex}(\{\mathcal{G}(\mathcal{D}_0 \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_3), \mathcal{G}(\mathcal{D}_2 \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_3), \mathcal{G}(\mathcal{D}_3 \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_3), \mathcal{G}(\mathcal{D}_1 \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_0), \mathcal{G}(\mathcal{D}_1 \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_1), \mathcal{G}(\mathcal{D}_1 \bullet^2 \bullet \mathcal{D}_2)\}) \\ &= \text{mex}(\{3, 1, 0, 1, 0, 3\}) \text{ par hypothèse d'induction} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dans les deux cas, le résultat est 2, ce qui est la valeur prédite par le tableau 5.3.

Nous appliquons le même raisonnement aux 35 autres cas, que nous ne détaillons pas. En revanche, les figures 5.15 à 5.18 illustrent les ensembles d'options possibles pour  $S$  et  $S'$  (s'il n'y a que des options pour  $S'$ , c'est que les options pour  $S$  sont identiques) pour chacun de ces 35 cas. Dans chaque cas, le calcul du mex de chaque paire d'ensemble d'options de  $S$  et d'ensemble d'options de  $S'$  renvoie le même résultat, qui est celui prédit par le tableau 5.3. Ceci prouve le résultat.  $\square$

### 5.5.3 Aller plus loin ?

Ensemble, les théorèmes 5.24, 5.29 et 5.31 nous permettent de résoudre entièrement le jeu  $\text{CSG}(I_2)$  dans le cas des biétoiles subdivisées, en donnant un algorithme polynomial pour déterminer la valeur de Grundy d'une biétoile subdivisée.

Cette résolution se base sur un théorème de réduction des chemins à leur longueur modulo 3. Cependant, cette réduction n'est pas possible pour les arbres en général, et même pour les triétoiles subdivisées. En effet, l'arbre à gauche sur la figure 5.19 est dans  $\mathcal{N}$  pour  $\text{CSG}(I_2)$  (en particulier, le coup gagnant est de supprimer  $u$  et la feuille voisine de  $u$ ), mais attacher un  $P_3$  à  $u$  donne l'arbre à

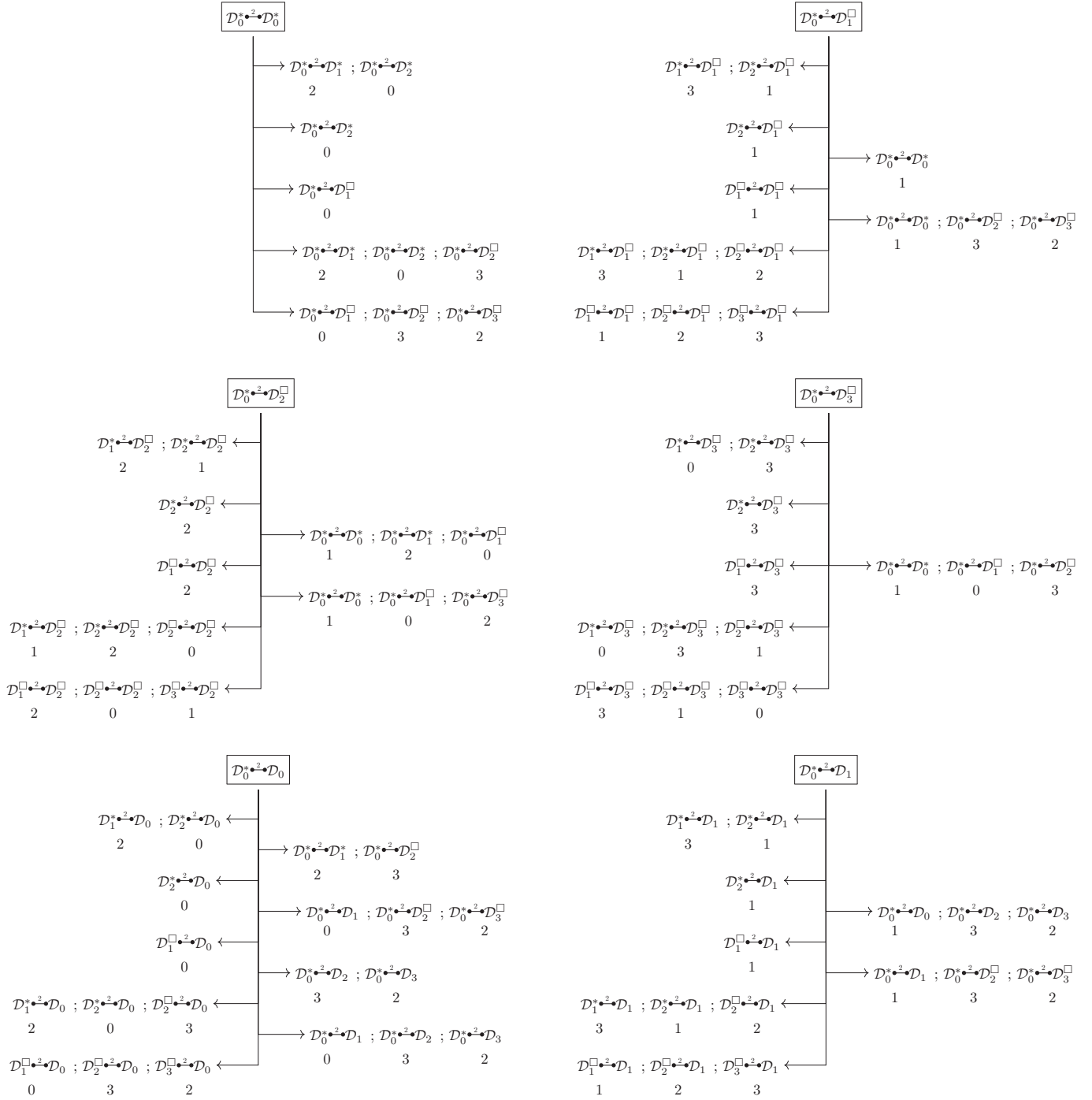


FIGURE 5.15 – Première partie des options possibles de  $S^{\bullet 2} \bullet S'$  selon les ensembles de  $S$  et  $S'$ . À chaque fois, calculer le mex de chaque paire (ensemble à gauche, ensemble à droite) renvoie le même résultat.

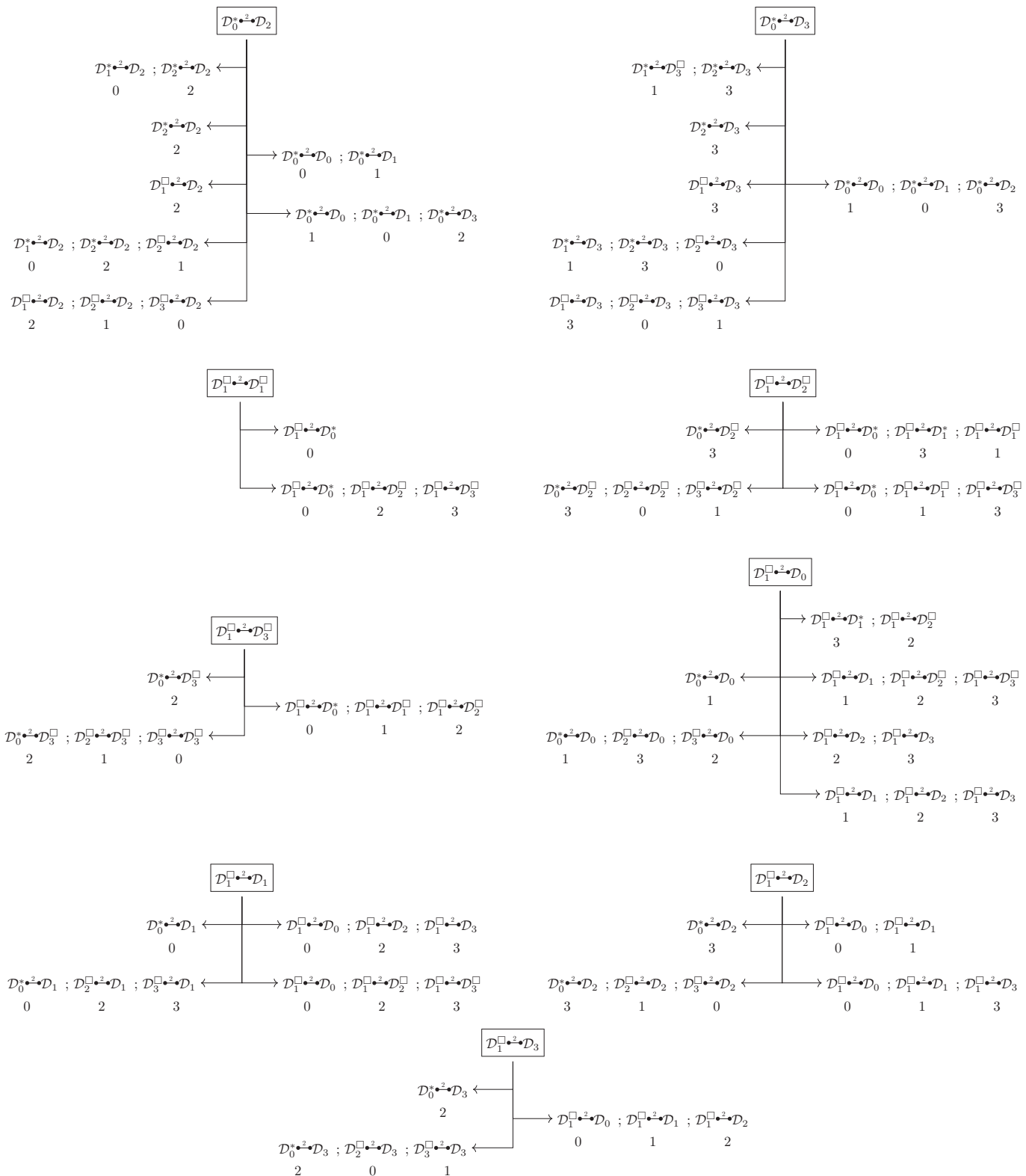


FIGURE 5.16 – Deuxième partie des options possibles de  $S^{e^2} \bullet S'$  selon les ensembles de  $S$  et  $S'$ . À chaque fois, calculer le mex de chaque paire (ensemble à gauche, ensemble à droite) renvoie le même résultat.

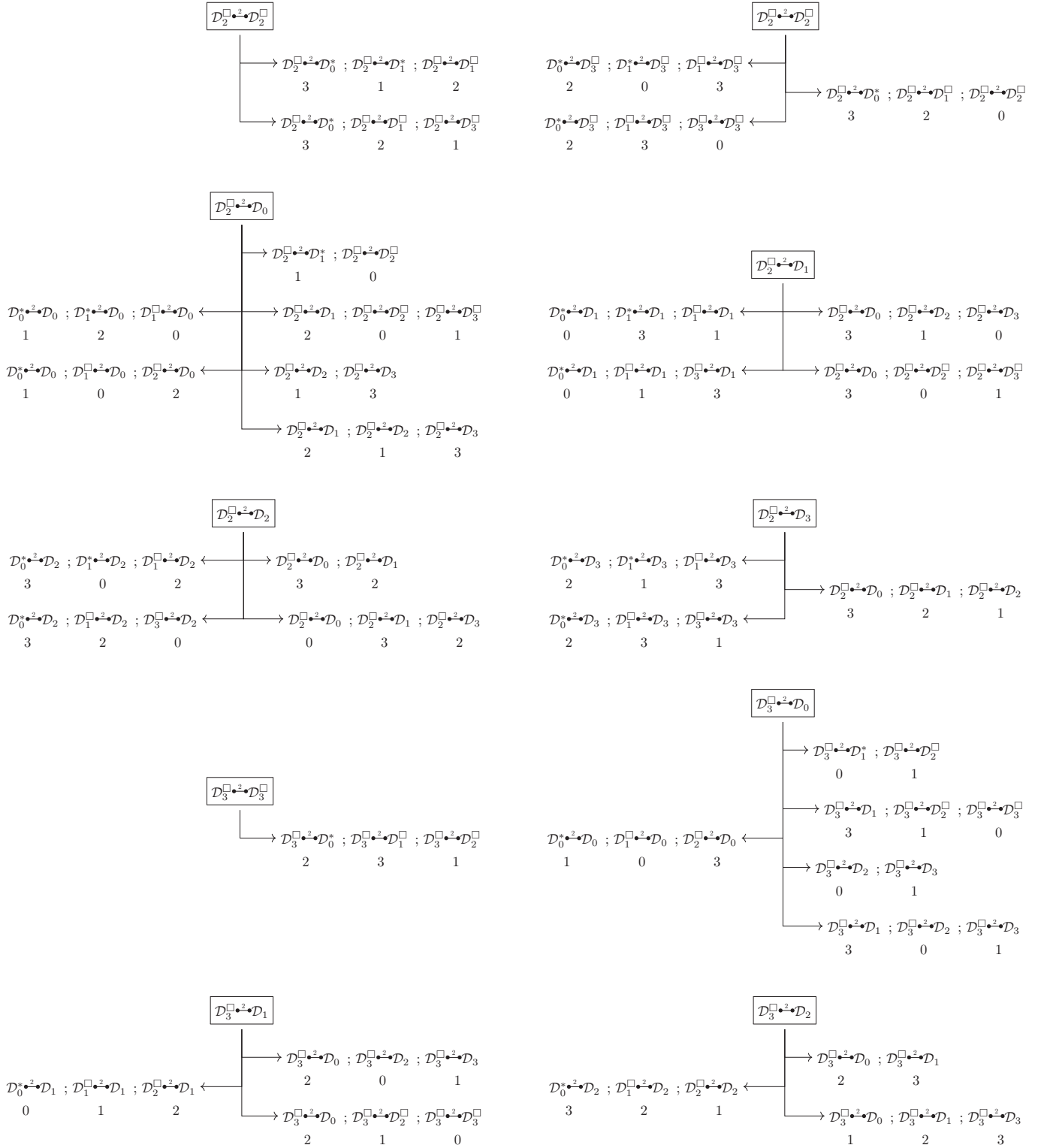


FIGURE 5.17 – Troisième partie des options possibles de  $S^{\bullet^2} \bullet S'$  selon les ensembles de  $S$  et  $S'$ . À chaque fois, calculer le mex de chaque paire (ensemble à gauche, ensemble à droite) renvoie le même résultat.



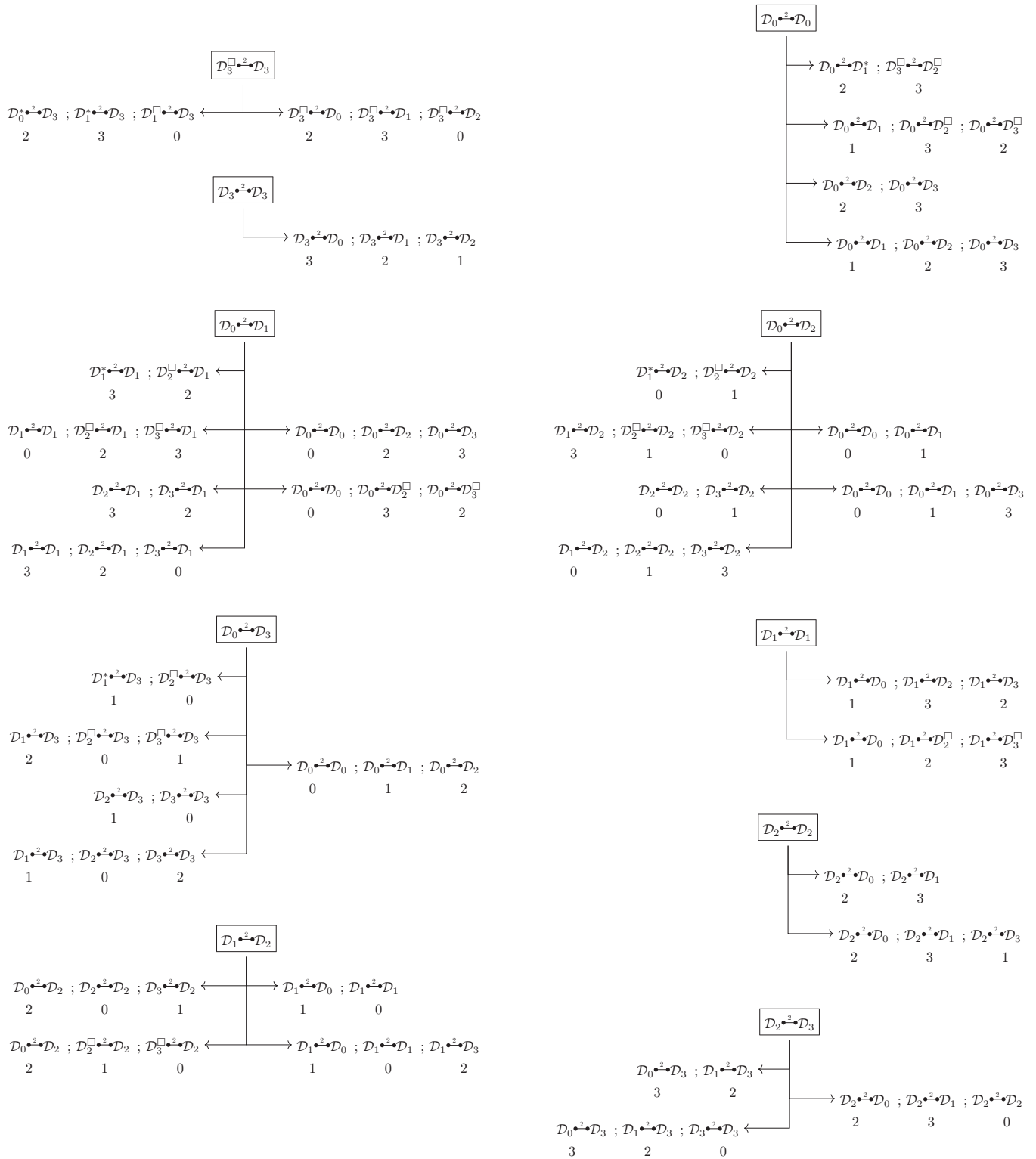


FIGURE 5.18 – Quatrième et dernière partie des options possibles de  $S^{\square \rightarrow \square} S'$  selon les ensembles de  $S$  et  $S'$ . À chaque fois, calculer le mex de chaque paire (ensemble à gauche, ensemble à droite) renvoie le même résultat.

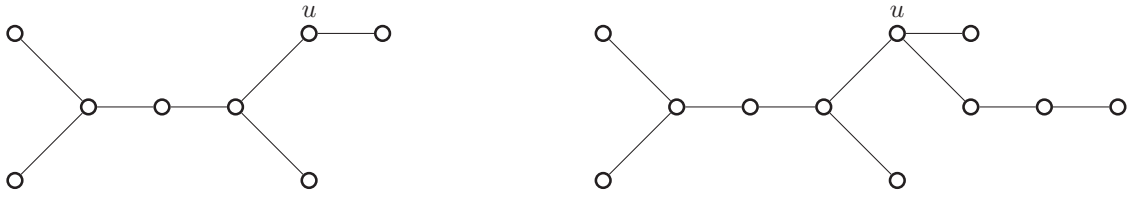


FIGURE 5.19 – Sur l’arbre de gauche, attacher un  $P_3$  à  $u$  donne l’arbre de droite et modifie la valeur de Grundy. Cela signifie que les théorèmes de réduction ne se généralisent pas sur les arbres.

droite sur la même figure, qui est dans  $\mathcal{P}$  pour  $\text{CSG}(I_2)$  (ce qui se vérifie par une simple étude de cas).

Une étude par ordinateur des valeurs de Grundy des chenilles (une chenille est un arbre dans lequel tout sommet est à une distance au plus 1 d’un chemin central) nous a permis de trouver des chenilles avec des valeurs de Grundy allant jusqu’à 11 (la figure 5.20 dépeint une chenille ayant une valeur de Grundy de 10), ce qui nous fait même conjecturer que les valeurs de Grundy des arbres ne sont pas bornées pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$  :

**Conjecture 5.32.** *Pour tout entier  $n \geq 4$ , il existe un arbre  $T$  vérifiant  $\mathcal{G}(T) \geq n$  pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ .*



FIGURE 5.20 – Une chenille ayant une valeur de Grundy de 10.

Un sujet de recherche intéressant serait de déterminer d’autres classes de graphes sur lesquelles des théorèmes de réduction sont possibles pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ , et sous quelles conditions.

## 5.6 $\text{CSG}(\{2\})$ dans les graphes

Dans le chapitre 4, nous avons évoqué ARC-KAYLES, un jeu de suppression de sommets dans lequel les joueurs peuvent supprimer deux sommets adjacents, rendant le jeu équivalent au jeu octal **0.07** sur les graphes ou à une généralisation de CRAM. Ce jeu s’avère particulièrement difficile et très peu de résultats ont été démontrés. Nous redirigeons les lectrices vers la section 4.3.3 pour un état de l’art complet sur ARC-KAYLES.

Dans cette section, nous présentons des résultats sur  $\text{CSG}(\{2\})$ , une variante d’ARC-KAYLES avec une condition supplémentaire : les joueurs ne peuvent plus déconnecter le graphe en jouant. L’objectif est donc d’étudier diverses classes de graphes et d’essayer d’améliorer notre compréhension de ce jeu dans l’espoir de mieux comprendre ARC-KAYLES. En effet, pour un graphe donné, toutes les options dans le jeu  $\text{CSG}(\{2\})$  sont également des options dans ARC-KAYLES.

Dans cette section, nous commencerons par rappeler des résultats basiques, avant de résoudre  $\text{CSG}(\{2\})$  sur les arbres puis certaines grilles.

### 5.6.1 Premiers résultats

Rappelons tout d’abord la séquence de Grundy de  $\text{CSG}(\{2\})$  sur les chemins. Dans ce jeu, les joueurs suppriment deux sommets adjacents sans déconnecter le graphe, il n’y a donc aucune stratégie à suivre sur le chemin. À la fin de la partie, le chemin sera soit vide soit réduit à un seul sommet. La partie sur le chemin  $P_n$  va donc durer  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  tours, et la valeur de Grundy du chemin dépend donc de la parité du nombre de tours de jeu.

**Théorème 5.33** (Folklore). *Dans le jeu CSG( $\{2\}$ ), pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{G}(P_n) = 0$  si et seulement si  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Dans le cas contraire,  $\mathcal{G}(P_n) = 1$ .*

Ce résultat est également vrai pour les cycles. Un résultat similaire existe pour les graphes bipartis complets :

**Proposition 5.34.** *Soient  $m$  et  $n$  deux entiers positifs et supposons que  $m \geq n$ . Nous avons :*

$$\mathcal{G}(K_{m,n}) = \begin{cases} n \pmod{2} & \text{si } m = n \text{ ou } m = n + 1 \\ n - 1 \pmod{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

pour le jeu CSG( $\{2\}$ ).

*Preuve.* Chaque coup supprime un sommet de chaque partie, et aucun sommet ne peut être déconnecté. Donc, la partie durera jusqu'à ce que le graphe soit réduit à une étoile. Si de plus  $m \in \{n, n+1\}$ , alors le graphe sera vidé ou réduit à un seul sommet. Le nombre de tours sera alors égal à  $n$  dans ces deux cas, et à  $n - 1$  dans les autres. La valeur de Grundy est donc de 0 si le deuxième joueur joue le dernier coup, c'est-à-dire si le nombre de tours de jeu est pair. Dans le cas contraire, elle est de 1.  $\square$

Une autre classe naturelle à étudier est celle des roues. Une roue  $W_n$  est un cycle de  $n$  sommets plus un sommet central adjacent à tous sommets du cycle. Nous démontrons le résultat suivant :

**Théorème 5.35.** *Dans le jeu CSG( $\{2\}$ ), pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{G}(W_n) = 1$  si et seulement si  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ . Dans le cas contraire,  $\mathcal{G}(W_n) = 0$ .*

*Preuve.* Le résultat est trivialement vrai pour  $n \in \{0, 1, 2\}$ . Pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $\text{opt}(W_n) = \{P_{n-1}, PZ_{n-2}\}$ , où  $PZ_k$  désigne le graphe formé par un chemin sur  $k$  sommets plus un sommet adjacent à tous les sommets du chemin. Or,  $\text{opt}(P_{n-1}) = \{P_{n-3}\} \subseteq \text{opt}(PZ_{n-2})$ , ce qui implique  $\mathcal{G}(PZ_{n-2}) \geq \mathcal{G}(P_{n-1})$ . Selon les valeurs de Grundy possibles des deux options de  $W_n$ , il y a donc plusieurs cas à considérer :

1. Si  $\mathcal{G}(P_{n-1}) = 0$  et  $\mathcal{G}(PZ_{n-2}) = 0$ , alors  $\mathcal{G}(W_n) = 1$  ;
2. Le cas  $\mathcal{G}(P_{n-1}) = 0$  et  $\mathcal{G}(PZ_{n-2}) = 1$  est impossible car  $\mathcal{G}(P_{n-1}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{G}(P_{n-3}) = 1$  or  $P_{n-3} \in \text{opt}(PZ_{n-2})$  ;
3. Si  $\mathcal{G}(P_{n-1}) = 0$  et  $\mathcal{G}(PZ_{n-2}) > 1$ , alors  $\mathcal{G}(W_n) = 1$  ;
4. Le cas  $\mathcal{G}(P_{n-1}) = 1$  et  $\mathcal{G}(PZ_{n-2}) = 0$  est impossible par notre discussion précédente ;
5. Si  $\mathcal{G}(P_{n-1}) = 1$  et  $\mathcal{G}(PZ_{n-2}) \geq 1$ , alors  $\mathcal{G}(W_n) = 0$ .

Il ressort donc que  $\mathcal{G}(W_n) = 1$  si et seulement si  $\mathcal{G}(P_{n-1}) = 0$ , c'est à dire si et seulement si  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$  ; et dans le cas contraire  $\mathcal{G}(W_n) = 0$ .  $\square$

## 5.6.2 Résolution des arbres

Alors que ARC-KAYLES est très difficile sur les arbres (la seule étude a été effectuée sur les étoiles subdivisées avec trois chemins, et a abouti à un test de périodicité sans garantie que les valeurs des étoiles soient périodiques [139]), et que même le jeu CSG( $I_2$ ) n'admet pas de théorème de réduction pour les arbres plus complexes que les biétoiles subdivisées, nous démontrons que le jeu CSG( $\{2\}$ ) joué sur les arbres est un jeu bien peu amusant, étant donné qu'aucune stratégie n'est possible :

**Théorème 5.36.** *Soit un arbre  $T$ . Pour le jeu CSG( $\{2\}$ ), il y a trois possibilités :*

1.  $\text{opt}(T) = \emptyset$  et donc  $\mathcal{G}(T) = 0$  ;
2.  $\forall T' \in \text{opt}(T), T' \in \mathcal{N}$  et donc  $\mathcal{G}(T) = 0$  ;
3.  $\forall T' \in \text{opt}(T), T' \in \mathcal{P}$  et donc  $\mathcal{G}(T) = 1$ .

*Preuve.* La preuve s'effectue par induction sur l'ordre de  $T$ . Les cas de base sont les arbres pour lesquels aucun coup n'est possible (notons que ceux-ci ne sont pas nécessairement vides ou réduits à un seul sommet, par exemple  $K_{1,n}$  pour  $n \geq 3$  est un cas de base). Pour ceux-ci, trivialement,  $\mathcal{G}(T) = 0$ .

Soit un arbre  $T$  tel que  $\text{opt}(T) \neq \emptyset$ . Nous démontrons que l'issue de  $T$  change chaque fois que deux sommets adjacents quelconques sont supprimés. L'idée de la preuve est qu'un coup qui est disponible à un tour donné sera toujours disponible plus tard dans la partie, jusqu'à ce qu'il soit joué. La seule exception est pour  $P_3$ , où deux coups différents sont possibles et en jouer un supprime l'autre, mais ce cas est géré dans les cas de base. Comme pour les chemins et graphes bipartis complets, la parité du nombre de tours va alors entièrement caractériser le vainqueur.

Si  $e \in E(T)$ , alors  $T \setminus e$  désigne le graphe obtenu en supprimant les deux extrémités de  $e$ . Il y a deux cas :

- S'il existe une arête  $e$  telle que  $T' = T \setminus e \in \mathcal{N}$ , alors toute arête  $e'$  telle que  $T \setminus e' \in \text{opt}(T)$  vérifie  $T' \setminus e' \in \text{opt}(T')$ , sauf si  $e$  et  $e'$  ont une extrémité en commun, ce qui n'arrive que si  $T = P_3$ , or dans ce cas  $T' \in \mathcal{P}$  donc c'est impossible. Or,  $T \setminus e' = (T' \setminus e') + e$ . Par hypothèse d'induction,  $T' \setminus e' \in \mathcal{P}$ , et donc par hypothèse d'induction  $T \setminus e' \in \mathcal{N}$ . Comme ce raisonnement se vérifie pour toute arête  $e' \neq e$ , nécessairement,  $T \in \mathcal{P}$  et donc  $\mathcal{G}(T) = 0$ .
- Si, pour toute arête  $e$ ,  $T \setminus e \in \mathcal{P}$ , alors  $\mathcal{G}(T) = 1$  par définition. □

De plus, la proposition 4.47 nous indique que la valeur de Grundy d'une forêt pour le jeu  $\text{CSG}(\{2\})$  sera 0 ou 1 en fonction du nombre d'arbres de la forêt ayant une valeur de Grundy de 1. Une perspective intéressante serait de vérifier si cette propriété des forêts tient pour les autres jeux de la famille  $\text{CSG}(\{N\})$  :

**Question ouverte 5.37.** Le théorème 5.36 se généralise-t-il à  $\text{CSG}(\{N\})$  pour tout  $N \geq 3$  ? Sinon, pour quels valeurs de  $N$  le théorème 5.36 peut-il se généraliser ?

### 5.6.3 Résolution des grilles de hauteur 2 ou 3

Les grilles sont la famille d'origine d'étude de CRAM, et donc de ARC-KAYLES. Il est donc légitime de les étudier pour  $\text{CSG}(\{2\})$ . Nous avons commencé par étudier des grilles de hauteur 2 ou 3. En l'occurrence, nous montrons que les grilles de hauteur 2, comme les arbres, les chemins ou les graphes bipartis complets, ne requièrent aucune stratégie ; tandis que dans les grilles de hauteur 3 une stratégie permet au joueur ayant une stratégie gagnante de vider la grille.

**Théorème 5.38.** Dans le jeu  $\text{CSG}(\{2\})$ , soit  $G_{2,n}$  une grille de hauteur 2. Alors,  $\mathcal{G}(G_{2,n}) = 0$  si et seulement si  $n$  est pair. Dans le cas contraire,  $\mathcal{G}(G_{2,n}) = 1$ .

*Preuve.* La preuve se base sur une structure invariante que nous appelons (1,2)-grille. Une (1,2)-grille est un sous-graphe connexe induit d'une grille de hauteur 2, avec la condition que les colonnes de hauteur 1 consécutives sont toujours en nombre pair. Une (1,2)-grille est illustrée figure 5.21. Notons que, si  $G$  est une (1,2)-grille non-vide, alors il existe un coup sur  $G$  : si un des bords est une colonne de taille 2, alors supprimer la colonne est un coup légal, et dans le cas contraire il y a deux colonnes de taille 1 consécutives, et les supprimer est un coup légal.

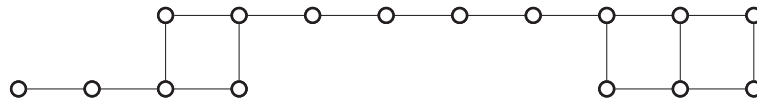


FIGURE 5.21 – Une (1,2)-grille.

Les deux seuls coups possibles dans une (1,2)-grille sont les suivants :

- Supprimer une colonne, qui est alors nécessairement sur le côté, et laisse une (1,2)-grille.

— Supprimer deux sommets adjacents horizontalement. Comme il est interdit de déconnecter  $G$ , le graphe résultant du coup sera également une  $(1, 2)$ -grille.

Donc, tous les coups possibles (c'est-à-dire  $n$ ) seront joués, et le graphe sera entièrement vide à la fin du jeu, ce qui prouve le résultat.  $\square$

Les grilles de hauteur 3 fonctionnent sur un principe similaire, mais cette fois un joueur va vouloir suivre une certaine stratégie.

**Théorème 5.39.** *Dans le jeu  $\text{CSG}(\{2\})$ , soit  $G_{3,n}$  une grille de hauteur 3. Alors,  $G_{3,n} \in \mathcal{P}$  si et seulement si  $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$  est pair.*

*Preuve.* La preuve se base sur une structure invariante que le joueur qui le souhaite (le premier joueur si  $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$  est impair ; le deuxième joueur sinon) va maintenir au cours de la partie. Nous appelons cette structure une  $(1, 3)$ -grille. Une  $(1, 3)$ -grille est un sous-graphe connexe induit d'une grille de hauteur 3, n'ayant que des colonnes de hauteur 1 ou 3, et dont les sommets des colonnes de hauteur 1 sont soit sur la ligne du haut soit sur celle du bas de la grille. Notons qu'un sous-graphe d'une grille de hauteur 3 isomorphe à un chemin est une  $(1, 3)$ -grille : nous pouvons l'aplatir pour faire en sorte que toutes ses colonnes soient de hauteur 1. Étant donnée une  $(1, 3)$ -grille  $G$  de  $k$  colonnes, nous définissons le mot  $s(G) = s_1 \dots s_k$  où  $s_i \in \{1^-, 1^+, 3\}$  est la hauteur de la  $i$ ème colonne (si le sommet est sur la ligne du bas de la grille, alors  $s_i = 1^-$  ; et s'il est sur la ligne du haut de la grille, alors  $s_i = 1^+$ ). Une  $(1, 3)$ -grille est illustrée figure 5.22.

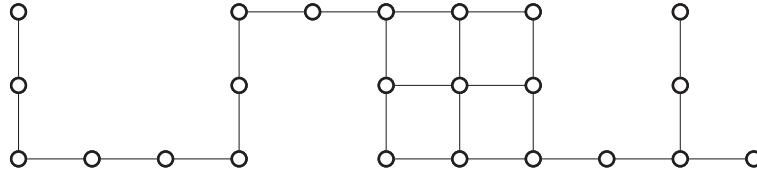


FIGURE 5.22 – Une  $(1, 3)$ -grille  $G$  avec  $s(G) = 31^-1^-31^+3331^-31^-$ .

**Affirmation 5.39.A.** *Si  $G$  est une  $(1, 3)$ -grille vérifiant  $|V(G)| \geq 2$ , alors il existe un coup vers une  $(1, 3)$ -grille.*

*Preuve de l'affirmation.* S'il existe un coup vertical légal dans une colonne, alors la résultante sera une  $(1, 3)$ -grille. Dans le cas contraire, pour tout  $i$  tel que  $s_i = 3$ , nous avons  $s_{i-1} = 1^-$  (resp.  $1^+$ ) et  $s_{i+1} = 1^+$  (resp.  $1^-$ ), ce qui implique que  $G$  est un chemin et donc la résultante de tout coup sera un chemin, qui est une  $(1, 3)$ -grille.  $\square$

**Affirmation 5.39.B.** *Si  $G$  est une  $(1, 3)$ -grille vérifiant  $|V(G)| \geq 2$ , alors, pour tout coup, il existe une réponse laissant une  $(1, 3)$ -grille.*

*Preuve de l'affirmation.* Si le coup laisse une  $(1, 3)$ -grille, alors l'affirmation 5.39.A nous permet de conclure. Sinon, cela signifie que le coup était horizontal. Il y a trois types de coups horizontaux possibles :

1. Supprimer deux sommets de la ligne du milieu dans les colonnes  $i$  et  $i + 1$ . En raison des règles du jeu, il n'y a que trois types de configurations possibles dans lesquelles ce coup existe (en considérant les symétries). La première est quand la colonne  $i + 1$  est la dernière et que  $s_{i-1} = 3$  ; la deuxième est quand  $s_{i-1} = 3$  et  $s_{i+2} = 3$  ; la troisième est quand  $s_{i-1} = 3$  et  $s_{i+2} = 1^-$  ou  $s_{i+2} = 1^+$ . Dans tous les cas, répondre en jouant sur la ligne du haut (dans le troisième cas, si  $s_{i+2} = 1^-$ ) ou celle du bas (dans le troisième cas, si  $s_{i+2} = 1^+$ ) dans les colonnes  $i$  et  $i + 1$  laisse une  $(1, 3)$ -grille. Les configurations sont représentées figure 5.23
2. Supprimer deux sommets de la ligne du haut dans les colonnes  $i$  et  $i + 1$ . Cette fois, il y a six configurations possibles (en considérant les symétries), représentées figure 5.24. Nous ne les détaillons pas, mais répondre en jouant sur la ligne du milieu dans les colonnes  $i$  et  $i + 1$  laisse une  $(1, 3)$ -grille.

3. Supprimer deux sommets de la ligne du haut dans les colonnes  $i$  et  $i+1$ . Ce cas est le symétrique du précédent.

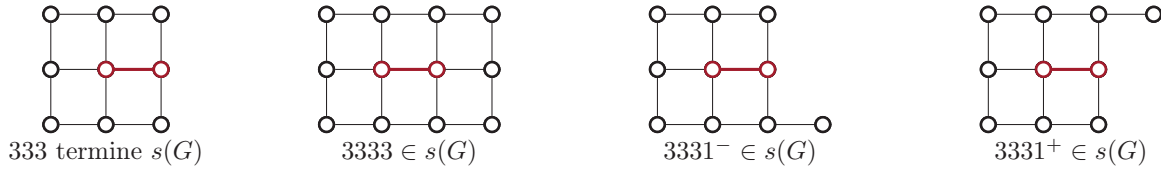


FIGURE 5.23 – Les configurations dans lesquelles le premier coup peut casser la structure de la  $(1, 3)$ -grille en jouant sur la ligne du milieu (les coups sont en gras et rouge). Jouer sur la ligne du haut ou du bas dans les mêmes colonnes restaure l'invariant.

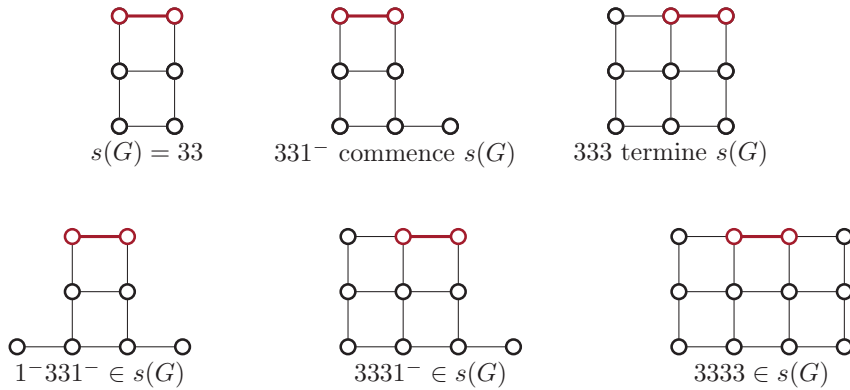


FIGURE 5.24 – Les configurations dans lesquelles le premier coup peut casser la structure de la  $(1, 3)$ -grille en jouant sur la ligne du haut (les coups sont en gras et rouge). Jouer sur la ligne du milieu dans les mêmes colonnes restaure l'invariant.

□

Supposons maintenant que  $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ , qui est le nombre maximal de coups dans une partie sur une grille de hauteur 3, est pair. Le deuxième joueur maintient la structure de  $(1, 3)$ -grille, ce qui est toujours possible par l'affirmation 5.39.B. À la fin du jeu, le graphe sera soit vide, soit réduit à un seul sommet, et le deuxième joueur aura joué le dernier coup. Il remporte donc la partie.

À l'inverse, si  $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$  est impair, alors le premier joueur joue vers une  $(1, 3)$ -grille, ce qui est possible par l'affirmation 5.39.A. Il passe alors une configuration perdante au deuxième joueur, et remporte donc la partie. □

Ainsi, un joueur a une stratégie garantissant qu'une grille de hauteur 3 est vide à la fin de la partie, et s'assurant la victoire de cette façon. Cependant, il semble difficile de définir une stratégie similaire dans des grilles de hauteur plus élevée. Déterminer l'existence ou la non-existence d'une telle stratégie dans des grilles de hauteur  $k$  pour  $k \geq 4$  est une question de recherche intéressante.

## 5.7 Conclusion et perspectives

Ces études montrent l'intérêt d'étendre les jeux octaux dans les graphes afin de chercher des résultats de périodicité spécifiques. Cependant, ces études se révèlent particulièrement complexes : même des jeux de soustraction connexes comme ceux de la famille  $\text{CSG}(I_N)$ , dont les versions

classiques  $\text{SUB}(I_N)$  sont parfaitement comprises, sont beaucoup plus difficiles à étudier, y compris dans les étoiles qui sont des graphes très simples. Cependant, des structures semblent également apparaître, ce qui laisse espérer l'obtention de résultats plus forts, et une meilleure compréhension de ces familles. Par ailleurs, nous avons déterminé des algorithmes polynomiaux pour déterminer l'issue ou la valeur de Grundy de certains graphes pour plusieurs de ces familles, mais une étude plus générale de la complexité de ces jeux serait une étude intéressante.

Rappelons les autres questions intéressantes que nous avons soulevées dans ce chapitre :

1. Si  $L$  est fini, la fonction  $f_{L,G,u}$  (qui associe à  $k$  la valeur de Grundy de  $G \xrightarrow{u} P_k$  pour  $\text{CSG}(L)$ ) a-t-elle la même période minimale que la séquence de Grundy de  $\text{SUB}(L)$  ? (question ouverte 5.5)
2. Si  $L$  est fini, la fonction  $f_{N \setminus L, G, u}$  est-elle ultimement périodique ? (question ouverte 5.6)
3. Existe-t-il des théorèmes de réduction des chemins dans les étoiles subdivisées pour des jeux  $\text{CSG}(I_N)$  avec  $N \geq 4$  ? Pour les autres, a-t-on un résultat d'ultime périodicité de la fonction  $f_{I_N, S, u}$  où  $S$  est une étoile subdivisée et  $u$  une feuille ?
4. Quels entiers  $t$  peuvent être adjoints à un ensemble  $L$  de façon à ce que  $f_{L,G,u}(k) = f_{L \cup \{t\}, G, u}(k)$  pour tous  $G$ ,  $u$  et  $k$  ?
5. Les valeurs de Grundy de  $\text{CSG}(I_2)$  sur les arbres sont-elles non-bornées ? (conjecture 5.32) Si oui, est-ce également le cas pour les chenilles ?
6. Inversement, pour quelles classes de graphes des théorèmes de réduction sont-ils possibles pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ , et sous quelles conditions ?
7. Les jeux de la famille  $\text{CSG}(\{N\})$  (pour  $N \geq 3$ ) joués sur les arbres admettent-ils tous une caractérisation similaire au théorème 5.36 ? Sinon, pour quelles valeurs de  $N$  une telle caractérisation est-elle possible ? (question ouverte 5.37)

D'autres questions peuvent encore se poser pour essayer de comprendre la famille des jeux de soustraction connexes aussi bien que nous connaissons les jeux de soustraction classiques. De plus, les résultats sur les jeux de soustraction connexes peuvent amener à une meilleure compréhension de l'origine de la difficulté dans des jeux de suppression de sommets tels que ARC-KAYLES. Tout cela concourt à montrer l'intérêt de ce domaine de recherche.

# Chapitre 6

## ARC-KAYLES PONDÉRÉ

Dans la section 5.6 du chapitre précédent, nous avons étudié une variante du jeu ARC-KAYLES, dans laquelle il est interdit de déconnecter le graphe. Dans ce chapitre, nous présentons une autre variante d'ARC-KAYLES dans l'espoir de mieux comprendre ce dernier, qui est un parfait représentant du saut de complexité des jeux octaux lorsque l'on passe des piles de jetons aux graphes. Rappelons que l'état de l'art sur ARC-KAYLES est présenté dans la section 4.3.3.

Nous avons étudié cette variante avec **Nicolas Bousquet** (chargé de recherche CNRS à Grenoble), **Valentin Gledel** (doctorant à Lyon) et **Marc Heinrich** (doctorant à Lyon), et nos travaux ont donné lieu à une soumission [41] et à plusieurs présentations (Combinatorial Game Theory Colloquium 2017, Seminario Preguntón à l'UNAM Juriquilla).

### Résumé du chapitre

La variante d'ARC-KAYLES que nous étudions, intitulée WAK (pour WEIGHTED ARC-KAYLES), se joue sur des graphes pondérés, dans lesquels les joueurs sélectionnent une arête et réduisent les poids de ses extrémités, tout sommet ayant un poids de 0 étant supprimés du graphe. Dans la section 6.2, nous verrons comment réduire les graphes sans changer leur valeur de Grundy, ce qui nous donne une réduction exponentielle entre WAK et ARC-KAYLES. Nous montrerons ensuite dans la section 6.3 que les valeurs de Grundy de WAK sont non-bornées, ce qui démontre le même résultat pour ARC-KAYLES et NODE-KAYLES. Dans les sections 6.4 et 6.5, nous étudierons WAK sur les arbres de profondeur 2 et démontrons un théorème global de périodicité quand tous les poids sauf un sont fixés. Nous démontrerons également dans la section 6.1 un lien entre WAK et un jeu de placement de pièces d'échecs.

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, les graphes que nous considérerons seront pondérés par des entiers sur les sommets. Un graphe pondéré  $G(V, E, \omega)$  est un graphe  $G(V, E)$  doté d'une fonction de pondération  $\omega : V \rightarrow \mathbb{N}$  (associant donc un poids à chaque sommet du graphe). De plus, les graphes pourront avoir des boucles, c'est-à-dire des arêtes  $uu$  où  $u \in V$ . Si  $uu \in E$ , alors nous disons qu'une boucle est attachée à  $u$ .

Dans cette section, nous allons donner la définition du jeu que nous étudions, montrer quelques premiers exemples, et prouver un lien avec des jeux de placement de pièces d'échecs.

#### 6.1.1 Définition et notations

Le jeu ARC-KAYLES PONDÉRÉ, ou WAK (pour WEIGHTED ARC-KAYLES), se joue sur un graphe pondéré  $G(V, E, \omega)$ . À leur tour, les joueurs sélectionnent une arête  $e$  dont les deux extrémités ont un poids strictement positif. Si  $e = uv$ , alors le graphe résultant est  $G'(V, E, \omega')$  avec  $\omega'(u) = \omega(u) - 1$ ,



$\omega'(v) = \omega(v) - 1$  et pour tout sommet  $w \notin \{u, v\}$ ,  $\omega'(w) = \omega(w)$ . Si  $e = uu$ , alors le graphe résultant est  $G'(V, E, \omega')$  avec  $\omega'(u) = \omega(u) - 1$  et pour tout sommet  $w \neq u$ ,  $\omega'(w) = \omega(w)$ . La figure 6.1 illustre les coups possibles pour WAK sur un certain graphe (pour des raisons de simplicité, et si aucune confusion n'est possible, **les sommets seront identifiés à leurs poids sur les figures**). Le jeu s'achève lorsqu'aucune arête ne peut être sélectionnée (c'est-à-dire que toute arête a une extrémité  $u$  vérifiant  $\omega(u) = 0$ ).

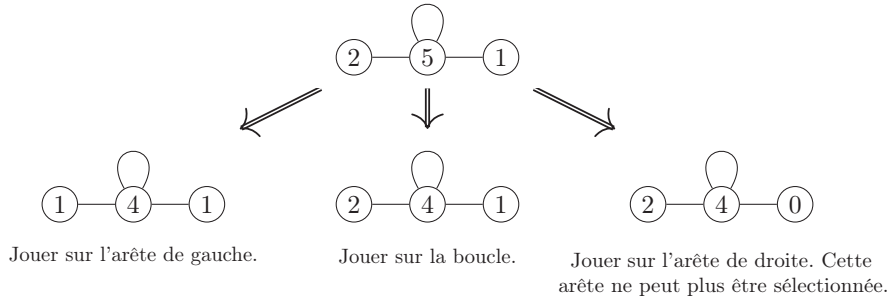


FIGURE 6.1 – Exemples de coup pour WAK.

Nous avons choisi, par convention, de ne réduire que de 1 le poids d'un sommet lorsqu'une boucle attachée à lui est sélectionnée. En effet, la boucle  $uu$  modélise en fait une arête  $uv$ , où  $v$  est un sommet de poids arbitrairement grand qui n'est voisin que de  $u$ . Nous verrons dans la section 6.2 que dans ce cas, le sommet  $v$  n'est pas important pour étudier le jeu, et donc la boucle est un bon modèle pour cette situation. La convention consistant à considérer une boucle comme une arête à part entière, et donc à réduire le poids du sommet auquel elle est attachée de 2 pourrait également être étudiée. Ce jeu a été proposé par Huggan [97] parmi d'autres extensions possibles d'ARC-KAYLES.

Notons par ailleurs que, s'il n'y a pas de boucle et si tous les poids sont égaux à 1, alors le jeu est exactement identique à ARC-KAYLES joué sur le même graphe. Comme les coups ne peuvent être joués que sur des composantes connexes, la proposition 4.47 peut être redéfinie :

**Proposition 6.1.** *Soit  $G = \bigcup_{i=0}^k G_i$  un graphe, où les  $G_i$  désignent les composantes connexes de  $G$ . Alors,  $\mathcal{G}(G) = \bigoplus_{i=0}^k \mathcal{G}(G_i)$  pour WAK.*

De plus, les sommets ayant un poids nul peuvent être supprimés du graphe sans changer sa valeur de Grundy :

**Observation 6.2.** *Soit  $G(V, E, \omega)$  un graphe pondéré, et soit  $S \subseteq V$  l'ensemble des sommets ayant un poids nul. Soit  $G'(V', E', \omega')$  le graphe défini ainsi :  $V' = V \setminus S$ ,  $E' = E \setminus \{uv \mid u \in S\}$  et  $\omega'(u) = \omega(u)$  pour tout  $u \in S$ . Alors,  $\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(G')$ .*

### 6.1.2 Lien avec des jeux de placement de pièces d'échecs

Nous avons initialement étudié WAK car il s'agit d'une modélisation d'un jeu de placement de pièces d'échecs inspiré du jeu des reines [119], dans lequel les joueurs placent tour à tour des reines sur des cases non-attaquées par des reines déjà placées, le joueur ne pouvant plus jouer perdant la partie. Le jeu étant assez difficile avec les reines (le problème de placement des reines sur des échiquiers étant un exemple de problème combinatoire bien connu [12, 92]), nous étudions est une variante utilisant des tours.

Le jeu que nous introduisons est appelé *jeu des tours sur un échiquier troué*. Il se joue sur un échiquier rectangulaire  $\mathcal{C}$  de taille  $n \times m$ . Par ailleurs, il existe un sous-ensemble  $\mathcal{H}$  des cases de l'échiquier dont les éléments sont appelés des *trous*. À leur tour, les joueurs placent une tour sur une case inoccupée et qui n'est pas attaquée par une autre tour, sachant que les tours ne peuvent pas attaquer par-dessus les trous (en d'autres termes, deux tours peuvent se trouver sur la même ligne

à condition qu'il y ait un trou entre elles). La figure 6.2 illustre une partie sur un échiquier de taille  $7 \times 3$  avec un trou.

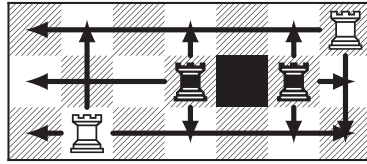


FIGURE 6.2 – Exemple d'une partie terminée du jeu des tours sur un échiquier troué, remportée par le deuxième joueur.

Quand  $\mathcal{H} = \emptyset$ , alors la valeur de Grundy est la parité de la plus petite dimension de l'échiquier : à chaque tour, une ligne et une colonne sont retirés jusqu'à ce qu'une des deux quantités atteigne 0. Nous allons démontrer que toute position du jeu des tours sur un échiquier troué admet une position de WAK équivalente.

**Théorème 6.3** (D., Gledel, Heinrich). *Pour toute position  $J$  du jeu des tours sur un échiquier troué, il existe une position de WAK  $G(V, E, \omega)$  telle que  $\mathcal{G}(J) = \mathcal{G}(G)$ .*

*Preuve.* Nous définissons la *couverture verticale par rectangles* de l'échiquier  $\mathcal{R}_V$  comme l'ensemble de rectangles sur l'échiquier, tels qu'aucun rectangle n'en intersecte un autre, que toutes les cases de l'échiquier sont couvertes par  $\mathcal{R}_V$ , qu'aucun rectangle ne contient de trou, et que les seules cases directement au-dessus ou en-dessous d'un rectangle sont soit des trous soit en-dehors de l'échiquier. Nous pouvons définir de façon similaire la *couverture horizontale par rectangles* de l'échiquier  $\mathcal{R}_H$ . La figure 6.3 illustre ces couvertures sur un échiquier troué. Notons que ces couvertures sont bien uniques, car tous les rectangles de  $\mathcal{R}_V$  et de  $\mathcal{R}_H$  sont maximaux au sens de l'inclusion.

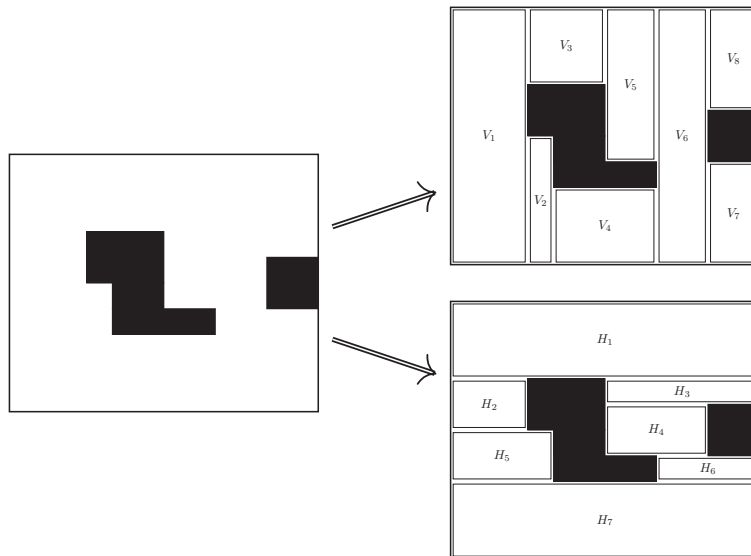


FIGURE 6.3 – Des couvertures verticale et horizontale par rectangles d'un échiquier.

Considérons une position  $J$  du jeu des tours sur un échiquier troué, et soient  $\mathcal{R}_H$  et  $\mathcal{R}_V$  les

couvertures horizontale et verticale par rectangles de l'échiquier de  $J$ . Nous construisons un graphe pondéré  $G(V, E, \omega)$ , c'est-à-dire une position de WAK, de la façon suivante :

- Pour chaque rectangle  $V_i \in \mathcal{R}_V$ , nous ajoutons à  $V$  un sommet  $v_i$ , avec  $\omega(v_i)$  égal au nombre de colonnes dans  $V_i$  moins le nombre de tours dans  $V_i$  ;
- Pour chaque rectangle  $H_j \in \mathcal{R}_H$ , nous ajoutons à  $V$  un sommet  $h_j$ , avec  $\omega(h_j)$  égal au nombre de colonnes dans  $H_j$  moins le nombre de tours dans  $H_j$  ;
- Si deux rectangles  $V_i$  et  $H_j$  s'intersectent sur une case, alors nous ajoutons à  $E$  l'arête  $v_i h_j$ .

Cette construction est illustrée figure 6.4.

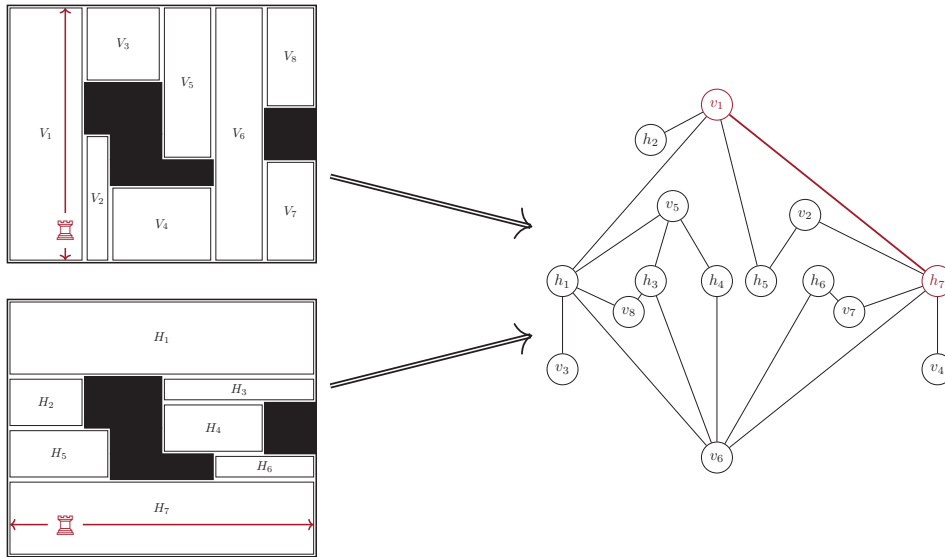


FIGURE 6.4 – Construction d'une position de WAK à partir des couvertures verticale et horizontale par rectangle d'un échiquier. Placer une tour comme indiqué en rouge revient à supprimer une ligne de  $H_7$  et une colonne de  $V_1$ , et donc à jouer sur l'arête  $h_7 v_1$  sur le graphe.

Chaque fois qu'un joueur place une tour sur l'échiquier, celle-ci se retrouve dans exactement un rectangle vertical  $V_i$  et un rectangle horizontal  $H_j$ . Jouer cette tour revient alors à supprimer une ligne de  $H_j$  et une colonne de  $V_i$ . Le graphe obtenu pour cette nouvelle position est donc celui où les poids de  $v_i$  et de  $h_j$  sont réduits de 1, c'est-à-dire celui obtenu en jouant sur l'arête  $v_i h_j$ .

Réciproquement, si un joueur a pu sélectionner une arête  $v_i h_j$  sur le graphe, alors  $\omega(v_i), \omega(h_j) > 0$ , ce qui signifie que  $V_i$  et  $H_j$  ont un nombre strictement positif de colonnes et de lignes, respectivement. De plus, cela signifie également que  $V_i$  et  $H_j$  s'intersectent. Par construction,  $V_i \cap H_j$  est un rectangle ayant autant de lignes que  $H_j$  et autant de colonnes que  $V_i$ , et ayant  $\omega(v_i)$  colonnes et  $\omega(h_j)$  lignes sur lesquelles jouer une tour. Il est donc possible de placer une tour sur  $V_i \cap H_j$ .

Si nous appelons  $f$  la construction décrite plus haut, nous avons montré que pour toute position  $J$  du jeu des tours sur un échiquier troué, il existe un graphe  $G$ , c'est-à-dire une position de WAK, telle que  $f(J) = G$ . De plus, pour tout coup allant de  $J$  à  $J'$ , il existe un coup allant de  $f(J)$  à  $f(J')$ , et réciproquement, pour tout coup allant de  $G$  à  $G'$ , il existe un coup allant de  $f^{-1}(G)$  à  $f^{-1}(G')$ . Cela démontre que  $J$  et  $G$  ont le même graphe de jeu, et sont donc équivalents.  $\square$

La preuve du théorème 6.3 nous indique que l'emplacement exact de la case sur laquelle les joueurs placent une tour ne compte pas ; seule compte la « zone », c'est-à-dire l'intersection entre rectangle horizontal et rectangle vertical, dans laquelle la tour est jouée. Cela permettra de simplifier l'étude de différents échiquiers, comme l'illustre la figure 6.5 pour les échiquiers avec un trou sur leur bord.

Si l'on constate que les graphes obtenus avec la construction décrite ci-dessus sont nécessairement bipartis, on peut se demander si tout graphe biparti peut être transformé en un échiquier troué avec

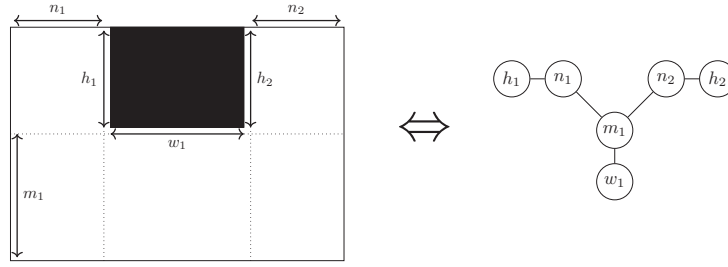


FIGURE 6.5 – La réduction du théorème 6.3 quand il y a un trou sur le bord de l'échiquier : seuls cinq types de coups différents existent, chacun correspondant à une arête sur le jeu de WAK équivalent.

la construction inverse.

### 6.1.3 Premiers graphes

Dans cette section, nous allons étudier des graphes avec un ou deux sommets afin de mieux appréhender WAK. Tout d'abord, notons que si  $G(V, E, \omega)$  vérifie  $E = \emptyset$ , alors  $\mathcal{G}(G) = 0$ . Le premier graphe que nous pouvons étudier est donc le graphe composé d'un seul sommet avec une boucle :

**Proposition 6.4.** *Soit  $G(V, E, \omega)$  où  $V = \{u\}$ ,  $E = \{uu\}$  et  $\omega(u) \geq 0$ . Alors,  $\mathcal{G}(G) = \omega(u) \bmod 2$ .*

*Preuve.* Le jeu dure exactement  $\omega(u)$  tours et tous les coups sont forcés, ce qui implique le résultat (c'est un jeu de parité).  $\square$

Le graphe suivant est composé de deux sommets et d'une seule arête :

**Proposition 6.5.** *Soit  $G(V, E, \omega)$  où  $V = \{u, v\}$ ,  $E = \{uv\}$  et  $\omega(u), \omega(v) \geq 0$ . Alors,  $\mathcal{G}(G) = \min(\omega(u), \omega(v)) \bmod 2$ .*

*Preuve.* Le jeu dure exactement jusqu'à ce qu'un des deux poids soit réduit à 0 et tous les coups sont forcés, ce qui implique le résultat.  $\square$

Le troisième exemple que nous étudions est le graphe avec une arête et une boucle :

**Proposition 6.6.** *Soit  $G(V, E, \omega)$  où  $V = \{u, v\}$ ,  $E = \{uv, uu\}$  et  $\omega(u), \omega(v) \geq 0$ . Alors,  $\mathcal{G}(G) = \omega(u) \bmod 2$ .*

*Preuve.* Il y a deux coups possibles : la boucle ou l'arête. Mais les deux coups ont pour effet de réduire le poids de  $u$  de 1, et même si le poids de  $v$  se retrouve réduit à 0, le coup de la boucle sera toujours disponible. Donc, le jeu dure exactement  $\omega(u)$  tours, ce qui implique le résultat.  $\square$

Enfin, nous étudions le graphe composé de deux sommets reliés par une arête et ayant chacun une boucle :

**Proposition 6.7.** *Soit  $G(V, E, \omega)$  où  $V = \{u, v\}$ ,  $E = \{uv, uu, vv\}$  et  $\omega(u), \omega(v) \geq 0$ . Alors,  $\mathcal{G}(G) = ((\omega(u) + \omega(v)) \bmod 2) + 2 \times (\min(\omega(u), \omega(v)) \bmod 2)$ .*

Ceci est résumé dans le tableau 6.1.

*Preuve.* Le résultat se démontre par induction sur  $\omega(u) + \omega(v)$ . Si  $\omega(u) = 0$  ou  $\omega(v) = 0$ , alors le sommet de poids nul peut être supprimé, et le résultat vient de la proposition 6.4.

		M	
	m	pair	impair
m	pair	0	1
	impair	3	2

Tableau 6.1 – Les valeurs de Grundy des graphes à deux sommets  $u$  et  $v$ , reliés par une arête et tels que  $uu, vv \in E$ . Notons que  $m = \min(\omega(u), \omega(v))$  et  $M = \max(\omega(u), \omega(v))$

Si  $\omega(u), \omega(v) > 0$ , alors trois coups sont disponibles : jouer sur chaque boucle va réduire de 1 le poids du sommet sur lequel elle est attachée, et jouer sur l'arête va réduire de 1 le poids des deux sommets. Par hypothèse d'induction et par le théorème 4.25 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(G) &= \text{mex}(\{G' \mid G' \in \text{opt}(G)\}) \\
&= \text{mex}(\{((\omega(u) - 1 + \omega(v))) \bmod 2 + 2 \times (\min(\omega(u) - 1, \omega(v)) \bmod 2), \\
&\quad ((\omega(u) + \omega(v) - 1)) \bmod 2 + 2 \times (\min(\omega(u), \omega(v) - 1) \bmod 2), \\
&\quad ((\omega(u) + \omega(v) - 2)) \bmod 2 + 2 \times (\min(\omega(u) - 1, \omega(v) - 1) \bmod 2)\}) \\
&= ((\omega(u) + \omega(v))) \bmod 2 + 2 \times (\min(\omega(u), \omega(v)) \bmod 2)
\end{aligned}$$

Ceci est illustré par la figure 6.6.

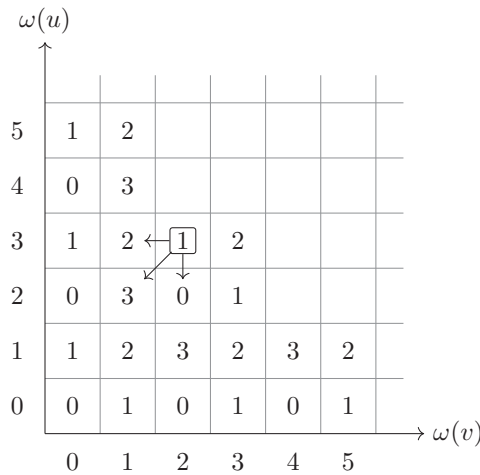


FIGURE 6.6 – Partie inductive de la preuve de la proposition 6.7 : dans une table indexée par  $\omega(u)$  et  $\omega(v)$ , les options d'une position sont à gauche, en bas et en bas à gauche de la position. Calculer le mex des valeurs de Grundy de ces options donne le résultat.

□

Par ailleurs, les propositions 6.4 et 6.7 impliquent le résultat suivant :

**Proposition 6.8.** Soit  $G(V, E, \omega)$  où  $V = \{u, v, w\}$ ,  $E = \{uu, uv, vv, ww\}$  et  $\omega(u), \omega(v), \omega(w) \geq 0$ . Alors,  $G \in \mathcal{P}$  si et seulement si :

1. Soit  $\omega(u)$ ,  $\omega(v)$  et  $\omega(w)$  sont pairs ;
2. Soit  $\omega(w)$  et  $\max(\omega(u), \omega(v))$  sont impairs, et  $\min(\omega(u), \omega(v))$  est pair.

*Preuve.* Si  $\omega(w)$  est pair, alors par la proposition 6.4 la composante réduite à  $w$  et à sa boucle a une valeur de Grundy de 0. Or, le tableau 6.1 indique que le seul cas où l'autre composante a une valeur de Grundy de 0 est quand les deux poids sont pairs.

Si  $\omega(w)$  est impair, alors par la proposition 6.4 la composante réduite à  $w$  et à sa boucle a une valeur de Grundy de 1. Or, le tableau 6.1 indique que le seul cas où l'autre composante a une valeur

de Grundy de 1 est quand le plus élevé des poids de ses deux sommets est impair et le plus bas des poids de ces deux sommets est pair.  $\square$

Cette première étude nous permet de constater des résultats intéressants : certains sommets semblent inutiles à l'étude du déroulement du jeu, comme le sommet sans boucle pour la proposition 6.6, ou celui de poids maximal pour la proposition 6.5. Dans la section suivante, nous allons décrire sous quelles conditions des sommets peuvent être retirés de l'étude d'un graphe pondéré, et les implications de ces réductions.

## 6.2 Réduction de graphes

Nous pouvons constater que certains sommets n'ont aucune influence sur l'étude du déroulement du jeu. Plus formellement, nous identifions trois types de tels sommets :

**Définition 6.9.** Soit  $G(V, E, \omega)$  un graphe pondéré. Nous définissons les concepts suivants :

- Un sommet  $u \in V$  est appelé *inutile* si  $uu \notin E$  et si pour tout  $v \in N(u)$ ,  $vv \in E$ .
- Un sommet  $u \in V$  est appelé *pesant* si  $uu \notin E$  et si  $\omega(u) \geq \sum_{v \in N(u)} \omega(v)$ .
- Deux sommets  $u, v \in V$  sont des *faux jumeaux* si  $N(u) = N(v)$ ,  $uu \in E \Leftrightarrow vv \in E$ , et  $uv \notin E$ .

L'idée est que les graphes ayant des sommets inutiles, pesants ou des faux jumeaux peuvent être simplifiés. Cela nous permettra de simplifier l'étude de nombreux graphes.

### 6.2.1 Lemme de réduction et graphes canoniques

Nous définissons les différentes façons de simplifier les graphes, également illustrées figure 6.7 :

**Définition 6.10.** Soit  $G(V, E, \omega)$  un graphe pondéré. Une *réduction* de  $G$  est un graphe pondéré  $G'$  obtenu par l'application d'une séquence arbitraire des étapes suivantes :

- Supprimer un sommet inutile  $u$  ;
- Supprimer un sommet pesant  $u$ , et attacher une boucle à chacun de ses voisins ;
- Fusionner deux faux jumeaux  $u_1$  et  $u_2$  en un unique sommet  $u$  vérifiant  $N(u) = N(u_1)$ ,  $uu \in E \Leftrightarrow u_1u_1 \in E$  et  $\omega(u) = \omega(u_1) + \omega(u_2)$ .

Une séquence des opérations décrites dans la définition 6.10 sera également appelée une réduction. Nous allons montrer que la réduction est une opération ne modifiant pas la valeur de Grundy :

**Lemme 6.11** (Lemme de réduction). *Si  $G$  est un graphe pondéré et  $G'$  est une réduction de  $G$ , alors  $\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(G')$ .*

*Preuve.* Nous allons démontrer qu'aucune des trois opérations de réduction ne change la valeur de Grundy du graphe. Soient  $G$  un graphe pondéré et  $G'$  une réduction de  $G$  après avoir appliqué une seule opération de réduction. La preuve s'effectue par induction sur la somme des poids des sommets de  $G$ . Si cette somme est nulle, alors il n'y a de coup ni sur  $G$  ni sur  $G'$ , ce qui implique  $\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(G') = 0$ .

Supposons par induction que le résultat est valide pour tout graphe dont la somme des poids des sommets est inférieure ou égale à  $k$ . Soit  $G(V, E, \omega)$  un graphe pondéré dont la somme des poids des sommets vaut  $k + 1$ , et soit  $G'(V', E', \omega)$  le graphe obtenu par une opération de réduction sur  $G$ . Soit  $e \in E$  une arête, nous appelons  $G_e$  le graphe obtenu en sélectionnant  $e$ . Nous allons montrer les deux points suivants :

- (a) Pour toute option  $G_e$  de  $G$ , il existe une option  $G'_{e'}$  de  $G'$  telle que  $\mathcal{G}(G_e) = \mathcal{G}(G'_{e'})$ .
- (b) Pour toute option  $G'_{e'}$  de  $G'$ , il existe une option  $G_e$  de  $G$  telle que  $\mathcal{G}(G_e) = \mathcal{G}(G'_{e'})$ .

Si les points (a) et (b) sont vérifiés, alors le résultat sera valide.

**Affirmation 6.11.A.** *Les points (a) et (b) sont vérifiés si  $e \in E$  et  $e \in E'$ .*

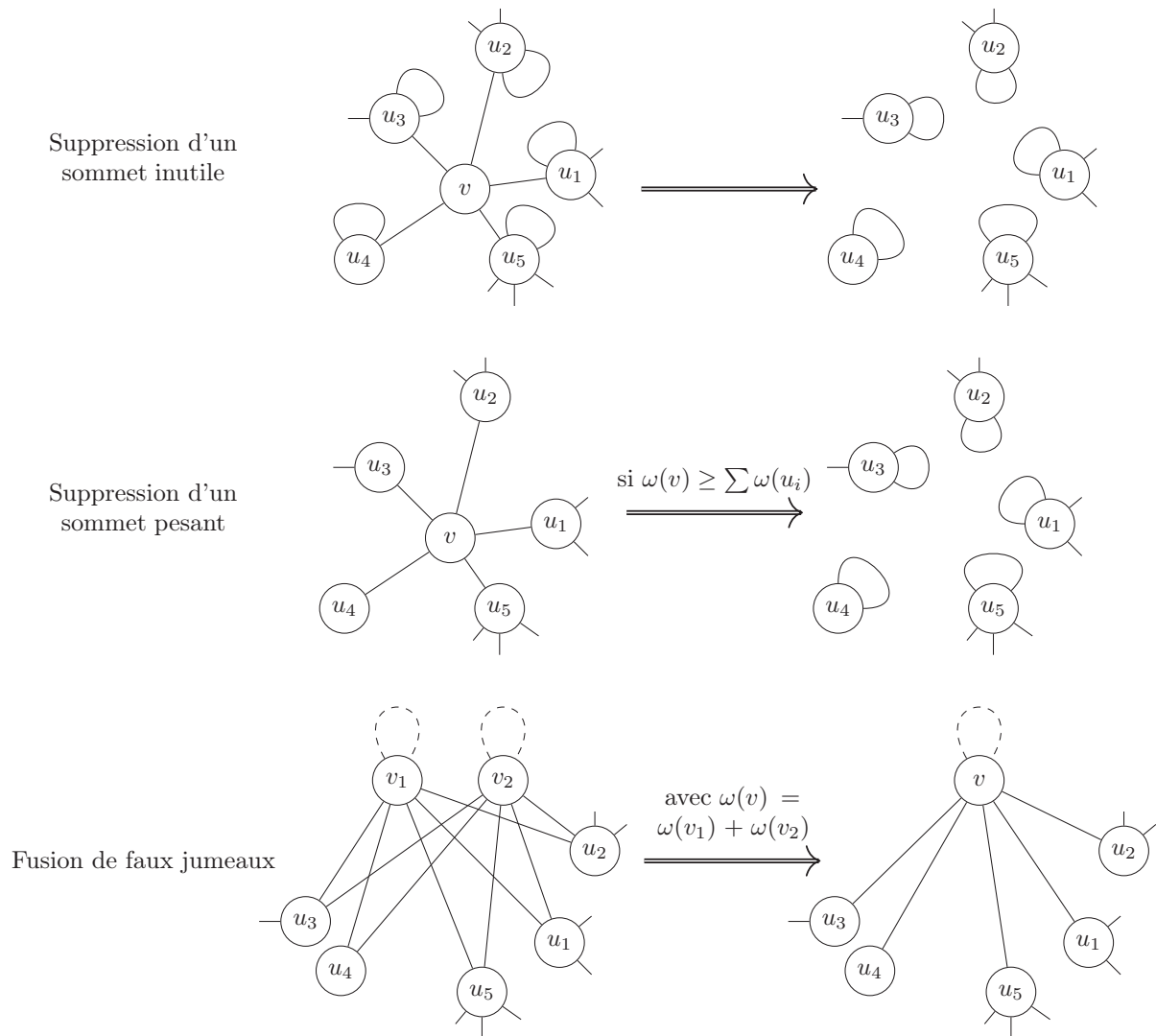


FIGURE 6.7 – Les trois opérations de réduction : suppression des sommets inutile et pesant, et fusion des faux jumeaux (deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  ayant une boucle en pointillé décrit le fait que  $v_1v_1 \in E \Leftrightarrow v_2v_2 \in E$ ).

*Preuve.* Un sommet inutile dans  $G$  sera toujours inutile dans  $G_e$ , un sommet pesant dans  $G$  sera toujours pesant dans  $G_e$  (car diminuer son poids diminuera également le poids d'un de ses voisins), et deux faux jumeaux dans  $G$  seront toujours de faux jumeaux dans  $G_e$ . De plus, la somme des poids des sommets de  $G_e$  est inférieure ou égale à  $k$ . Donc,  $\mathcal{G}(G_e) = \mathcal{G}(G'_e)$  par hypothèse d'induction, ce qui montre les points (a) et (b) dans ces cas (avec  $e = e'$ ).  $\square$

Nous allons donc considérer que l'arête  $e$  n'est pas dans  $E'$ . Il y a trois cas à étudier selon l'opération de réduction effectuée.

**Affirmation 6.11.B.** *Les points (a) et (b) sont vérifiés si  $G'$  est obtenu en supprimant un sommet inutile  $u$ .*

*Preuve.* Nécessairement,  $e = uv$  pour un certain sommet  $v \in V$  (autrement, l'affirmation 6.11.A valide le résultat). Comme  $u$  est inutile,  $u \neq v$  et  $\text{hasLoop}(v) = \text{Vrai}$ . Soit  $e' = vv$ , alors  $e' \in E'$

et  $G'_{e'}$  est le graphe obtenu en supprimant le sommet inutile  $u$  de  $G_e$ . Par hypothèse d'induction,  $\mathcal{G}(G_e) = \mathcal{G}(G'_{e'})$ .

Si  $G'_{e'}$  est une option de  $G'$ , alors  $e' \in E$ , et l'affirmation 6.11.A nous permet de conclure.  $\square$

**Affirmation 6.11.C.** *Les points (a) et (b) sont vérifiés si  $G'$  est obtenu en supprimant un sommet pesant  $u$  et en ajoutant des boucles à chacun de ses voisins.*

*Preuve.* Nécessairement,  $e = uv$  pour un certain sommet  $v \in V$  (autrement, l'affirmation 6.11.A valide le résultat). Comme  $u$  est pesant,  $u \neq v$ . Soit  $e' = vv$ , alors  $e' \in E'$  et  $G'_{e'}$  est le graphe obtenu en supprimant le sommet pesant  $u$  de  $G_e$ . Par hypothèse d'induction,  $\mathcal{G}(G_e) = \mathcal{G}(G'_{e'})$ .

Réciproquement,  $e' = vv$  pour un sommet  $v \in N(u)$  (autrement,  $e' \in E$  et l'affirmation 6.11.A valide le résultat). Soit  $e = uv$ , alors  $e \in E$ . Comme jouer sur  $e'$  est un coup légal dans  $G'$ ,  $\omega(v) > 0$ , ce qui implique  $\omega(u) > 0$ , donc jouer sur  $e$  est un coup légal dans  $G$ . De plus,  $u$  est toujours pesant dans  $G_e$ , et  $G'_{e'}$  est le graphe obtenu en le supprimant et en ajoutant des boucles sur chacun de ses voisins. Donc, par hypothèse d'induction,  $\mathcal{G}(G_e) = \mathcal{G}(G'_{e'})$ .  $\square$

**Affirmation 6.11.D.** *Les points (a) et (b) sont vérifiés si  $G'$  est obtenu en fusionnant deux faux jumeaux  $u_1$  et  $u_2$  en un sommet  $u$ .*

*Preuve.* Il y a deux cas :  $e = u_1v$  (sans perte de généralité ; le même raisonnement se tient si  $e = u_2v$ ) pour un certain sommet  $v \in V$ , ou  $e = u_1u_1$  (autrement, l'affirmation 6.11.A valide le résultat). Dans le premier cas, soit  $e' = uv$ , alors  $e' \in E'$  et comme jouer sur  $e$  est un coup légal dans  $G$  alors  $\omega(u_1) > 0$  ce qui implique  $\omega(u) > 0$  donc jouer sur  $e'$  est un coup légal dans  $G'$ . De plus,  $u_1$  et  $u_2$  sont toujours des faux jumeaux dans  $G_e$ , et  $G'_{e'}$  est le graphe obtenu en les fusionnant en un sommet  $u$ . Donc, par hypothèse d'induction,  $\mathcal{G}(G_e) = \mathcal{G}(G'_{e'})$ . Dans le deuxième cas, le même raisonnement s'applique en posant  $e' = uu$ .

Réciproquement,  $e' = uv$  pour  $v \in V'$ . Il y a encore deux cas :  $v = u$  et  $v \in N(u)$ . Par le même raisonnement que précédemment, les deux cas se règlent en posant  $e = u_1u_1$  (ou  $u_2u_2$ ) et  $e = u_1v$  (ou  $u_2v$ ). Ces coups seront nécessairement légaux dans  $G$ , car jouer sur  $e'$  est légal dans  $G'$  ce qui implique  $\omega(v), \omega(u) > 0$ , et donc  $\omega(u_1) > 0$  ou  $\omega(u_2) > 0$ . Donc, par hypothèse d'induction,  $\mathcal{G}(G_e) = \mathcal{G}(G'_{e'})$ .  $\square$

Les affirmations 6.11.A à 6.11.D couvrent tous les cas possibles, le résultat est donc valide.  $\square$

Le lemme de réduction nous permet de simplifier les graphes autant que possible, jusqu'à atteindre des graphes ne pouvant être simplifiés.

**Définition 6.12.** Un graphe  $G$  est *canonique* s'il n'a ni sommet inutile, ni sommet pesant, ni faux jumeaux.

Une question que nous ne résolvons pas, mais qui semble naturelle, est de se demander si chaque graphe possède une unique forme canonique (ce qui n'est pas équivalent à dire que les opérations de réduction sont commutatives : la fusion de deux faux jumeaux peut donner un sommet pesant qui pourra être supprimé, mais les deux opérations ne peuvent pas être permutées dans une séquence).

L'étude des formes canoniques nous permet de simplifier certains graphes. Par exemple, dans une étoile  $K_{1,n}$ , les feuilles sont toutes des faux jumeaux, donc elles peuvent toutes être fusionnées pour se ramener à un des graphes étudiés dans la section 6.1.3.

## 6.2.2 Réduction entre ARC-KAYLES et ARC-KAYLES PONDÉRÉ

Dans cette section, nous montrons le lien entre WAK et ARC-KAYLES, qui utilise les notions de réduction.

**Théorème 6.13** (D., Gledel, Heinrich). *Soit  $G$  un graphe pondéré. Alors, il existe un graphe  $G'$  tel que la valeur de Grundy de  $G$  pour WAK est la même que celle de  $G'$  pour ARC-KAYLES.*

*Preuve.* Soit  $G(V, E, \omega)$  un graphe pondéré. Nous construisons  $G'(V', E', \omega')$  de la façon suivante :



1. Pour tout sommet  $u \in V$ , ajouter  $\omega(u)$  sommets de poids 1 dans  $V'$  ;
2. Pour toute arête  $uv \in E$  telle que  $u \neq v$ , ajouter à  $E'$  toutes les arêtes entre les sommets créés à partir de  $u$  et ceux créés à partir de  $v$  ;
3. Pour toute boucle  $uu \in E$ , dupliquer chaque sommet créé à partir de  $u$  et ajouter une arête entre le sommet dupliqué et son duplicata.

Cette construction est illustrée figure 6.8.

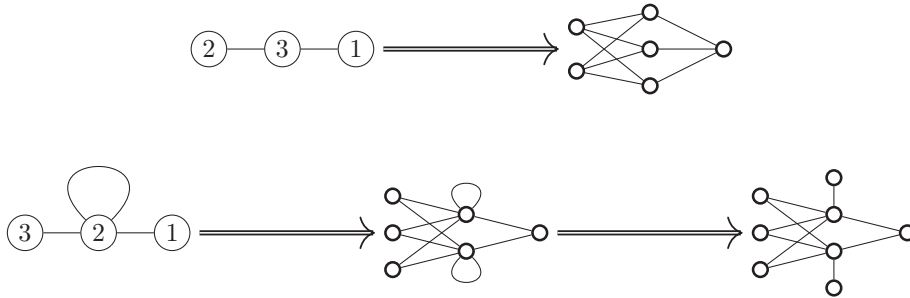


FIGURE 6.8 – Illustration de la réduction de WAK à ARC-KAYLES.

Notons que la construction de  $G'$  est une procédure inverse d'une réduction : chaque sommet  $u$  est divisé en  $\omega(u)$  faux jumeaux, et chaque sommet créé à partir d'une boucle est pesant. Appliquer les opérations de réduction depuis  $G'$  en supprimant les sommets pesants puis en fusionnant les faux jumeaux donne  $G$ . En particulier, par le lemme de réduction,  $\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(G')$  pour WAK. Or, tous les sommets de  $G'$  ont un poids de 1, et le graphe n'a pas de boucle. Donc, jouer à WAK sur  $G'(V', E', \omega')$  est exactement identique à jouer à ARC-KAYLES sur  $G'(V', E')$ .  $\square$

Cette réduction n'est pas polynomiale : un sommet  $u$  est transformé en  $\omega(u)$  sommets, qui est exponentiel en la taille de l'écriture binaire de  $\omega(u)$ . Le problème de trouver une réduction linéaire entre WAK et ARC-KAYLES est donc encore ouvert, et donnerait un moyen supplémentaire d'étudier la complexité d'ARC-KAYLES (le seul résultat connu étant qu'il est FPT avec comme paramètre le nombre de tours de jeu [107]).

### 6.3 Les valeurs de Grundy sont non-bornées

Un problème ouvert pour de nombreux jeux de suppression de sommets est celle de savoir si les valeurs de Grundy pour ce jeu sont bornées. Si des résultats ont récemment été établis sur le jeu de suppression de sommets et d'arêtes GRAPH CHOMP [120], la plupart des familles sur lesquels ces jeux sont étudiés tendent à avoir des valeurs de Grundy ultimement périodiques (pour une certaine définition de la séquence de valeurs), comme les jeux de soustraction étudiés dans le chapitre 5. Par exemple, dans leur étude de NODE-KAYLES, Fleischer et Trippen [56] ont détecté une quantité croissante de valeurs irrégulières dans les parties non-périodiques des séquences de valeurs de Grundy des étoiles subdivisées avec trois chemins, mais sans indiquer si celles-ci étaient bornées ou non. Quant à ARC-KAYLES, Stevens et Huggan [139] ont posé la question de trouver des graphes avec des valeurs de Grundy arbitrairement élevées.

Dans cette section, nous nous intéressons à ce problème pour WAK. En particulier, nous démontrons que les valeurs de Grundy de WAK sont non-bornées :

**Théorème 6.14** (D., Gledel, Heinrich). *Les valeurs de Grundy de WAK sont non-bornées.*

*Preuve.* Nous construisons inductivement une séquence de graphes pondérés  $G_1, G_2, G_3, \dots$  telle que pour tous entiers distincts  $i$  et  $j$ ,  $\mathcal{G}(G_i) \neq \mathcal{G}(G_j)$  et que tout entier  $i$ , il existe un sommet  $u_i$  avec une boucle qui lui est attachée tel que jouer sur  $u_i u_i$  est un coup gagnant.

Nous posons  $G_1(V_1, E_1, \omega_1)$  de la façon suivante :  $V_1 = \{u_1\}$ ,  $E_1 = \{u_1u_1\}$  et  $\omega_1(u_1) = 1$ . Trivialement,  $\mathcal{G}(G_1) = 1$ .

Étant donné un entier  $n$ , nous supposons que nous avons déjà construit la séquence  $G_1, G_2, \dots, G_n$  respectant les propriétés (valeurs de Grundy différentes, existence d'un sommet  $u_i$  avec une boucle, jouer sur  $u_iu_i$  est gagnant sur  $G_i$ ). Nous construisons  $G_{n+1}$  de la façon suivante, illustrée figure 6.9 :

1. Pour tout entier  $i \in \{1, \dots, n\}$ , construire deux copies  $G'_i$  et  $G''_i$  de  $G_i$  ;
2. Construire le sommet  $u_{n+1}$  avec un poids de 1 et une boucle attachée, et le relier à tous les sommets  $u'_i$  des  $G'_i$ .

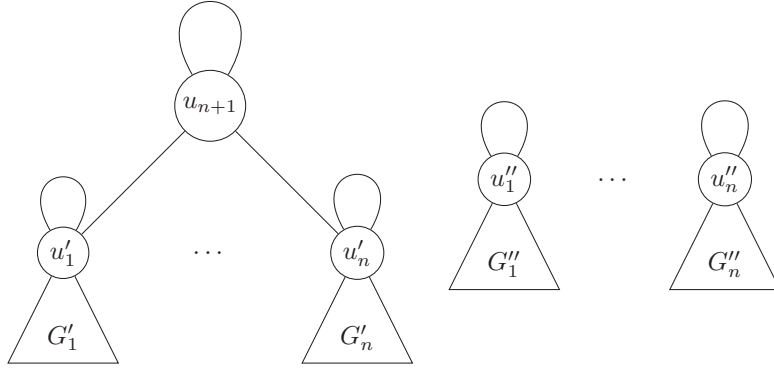


FIGURE 6.9 – Construction inductive de  $G_{n+1}$ . Chaque sommet a un poids de 1.

**Affirmation 6.14.A.** *Pour tout entier  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{G}(G_{n+1}) \neq \mathcal{G}(G_i)$ .*

*Preuve.* Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ , nous démontrons qu'il existe  $G' \in \text{opt}(G_{n+1})$  tel que  $\mathcal{G}(G') = \mathcal{G}(G_i)$ , ce qui démontrera l'affirmation grâce à la définition des valeurs de Grundy via le mex par le théorème 4.25. Soit  $G'$  l'option obtenue en jouant sur l'arête  $u_{n+1}u'_i$ . Comme expliqué dans l'observation 6.2, les sommets  $u'_i$  et  $u_{n+1}$ , ayant un poids de 0, peuvent être supprimés de  $G'$  sans en changer la valeur de Grundy. Le graphe  $G'$  est maintenant composé de plusieurs composantes connexes, et peut être décrit par la somme disjointe suivante :

$$G' = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (G'_j + G''_j) + G''_i + \hat{G}'_i$$

où  $\hat{G}'_i$  est le graphe obtenu en jouant sur l'arête  $u'_iu'_i$  dans  $G'_i$ . Par hypothèse d'induction,  $\mathcal{G}(\hat{G}'_i) = 0$ , et la proposition 4.13 nous permet de déterminer la valeur de Grundy de  $G'$  :

$$\mathcal{G}(G') = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\mathcal{G}(G'_j) \oplus \mathcal{G}(G''_j)) \oplus \mathcal{G}(G''_i) \oplus 0 = \mathcal{G}(G''_i) = \mathcal{G}(G_i)$$

□

**Affirmation 6.14.B.** *Jouer sur l'arête  $u_{n+1}u_{n+1}$  est un coup gagnant.*

*Preuve.* Soit  $G'$  le graphe obtenu en jouant sur l'arête  $u_{n+1}u_{n+1}$ . Le sommet  $u_{n+1}$ , ayant un poids de 0, peut être supprimé de  $G'$  sans en changer la valeur de Grundy. Le graphe  $G'$  est maintenant

composé de plusieurs composantes connexes, et peut être décrit par la somme disjointe suivante :

$$G' = \sum_{j=1}^n (G'_j + G''_j)$$

qui a une valeur de Grundy de 0 par définition de  $G'_j$  et  $G''_j$  et par la proposition 4.13. Donc  $G' \in \mathcal{P}$ , ce qui implique que le coup de  $G$  à  $G'$  est un coup gagnant.  $\square$

Les affirmations 6.14.A et 6.14.B montrent que  $G_{n+1}$  respecte les deux conditions, et prolonge donc la séquence. Cette séquence de graphes ayant tous des valeurs de Grundy différentes étant infinie, les valeurs de Grundy de WAK sont non-bornées.  $\square$

Ce résultat a un corollaire important :

**Corollaire 6.15.** *Les valeurs de Grundy de NODE-KAYLES et d'ARC-KAYLES sont non-bornées.*

*Preuve.* Le théorème 6.14 nous indique que les valeurs de Grundy de WAK sont non-bornées. Or, d'après le théorème 6.13, pour toute position de WAK, il existe une position équivalente d'ARC-KAYLES. Donc, les valeurs de Grundy d'ARC-KAYLES sont non-bornées. De plus, jouer à ARC-KAYLES sur un graphe revient à jouer à NODE-KAYLES sur le graphe adjoint<sup>1</sup> de ce graphe, donc les valeurs de Grundy de NODE-KAYLES sont également non-bornées.  $\square$

Le corollaire 6.15 répond à . Cependant, la construction de la preuve du théorème 6.14 nous donne des graphes d'ordre exponentiel (par induction,  $G_n$  a  $3^{n-1}$  sommets). Comme tous les sommets des graphes de cette famille sont de poids 1, les positions d'ARC-KAYLES équivalentes obtenues en appliquant la construction de la preuve du théorème 6.13 auront un ordre similaire. Une question intéressante serait la suivante :

**Question ouverte 6.16.** Trouver des familles de graphes d'ordre polynomial dont les valeurs sont non-bornées, pour WAK comme pour ARC-KAYLES.

## 6.4 Arbres de profondeur 2

Dans cette section, nous présentons la résolution de WAK sur les arbres de profondeur 2 sans boucles, qui nous permet de résoudre certains cas du jeu des tours sur un échiquier troué présenté dans la section 6.1.2. Nous démontrons le théorème suivant :

**Théorème 6.17** (D., Gledel, Heinrich). *Il existe un algorithme polynomial calculant l'issue d'une partie de WAK sur un arbre de profondeur 2 sans boucles.*

La preuve de ce théorème s'appuie sur des lemmes techniques, mais aussi sur un méta-lemme qui simplifie l'étude de certains graphes. Son idée est la suivante : pour un certain graphe pondéré  $G$ , il y a certains intervalles de valeurs pour les poids des sommets pour lesquels le graphe n'est pas canonique, et en appliquant une réduction l'issue peut être calculée par induction sur la taille du graphe. Quand le graphe est canonique, nous prouvons qu'un ensemble d'intervalles de valeurs pour les poids des sommets décrit l'ensemble des positions dans  $\mathcal{P}$ .

**Définition 6.18.** Soit  $G(V, E)$  un graphe, l'ensemble des positions de  $G$ , noté  $\text{pos}(G)$ , est l'ensemble des fonctions de pondération  $\omega : V \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Lemme 6.19.** *Soit  $G$  un graphe, et soit  $S \subseteq \text{pos}(G)$  tel qu'il n'existe aucun coup d'une position hors de  $S$  à une position de  $S$ . Soit  $P$  un sous-ensemble de  $S$ , et supposons que :*

1. *Il n'y a pas de coup d'une position de  $P$  à une autre position de  $P$  ;*
2. *Depuis une position de  $P$ , tout coup vers une position hors de  $S$  est un coup perdant ;*

---

1. Depuis un graphe  $G$ , le graphe adjoint  $L(G)$  est construit en créant un sommet pour chaque arête de  $G$ , deux sommets étant adjacents dans  $L(G)$  si leurs arêtes associées dans  $G$  ont une extrémité commune.

3. Depuis toute position de  $S \setminus P$ , il y a un coup vers soit une position de  $P$ , soit une position  $J$  hors de  $S$  telle que  $J \in \mathcal{P}$ .

Sous ses conditions, si  $J \in S$ , alors  $J \in \mathcal{P}$  si et seulement si  $J \in P$ .

*Preuve.* Soit  $G(V, E)$  un graphe. La preuve s'effectue par induction sur la somme des poids des sommets de  $G$ . Soit  $\omega$  une fonction de pondération des sommets de  $G$  telle que  $\omega \in S$ . S'il n'y a pas de coup possible depuis  $G$  avec la fonction de pondération  $\omega$ , alors  $G(V, E, \omega) \in \mathcal{P}$ . Or, par la troisième condition,  $\omega \in P$ , ce qui prouve le résultat.

Si  $\omega \notin P$ , alors par la troisième condition il existe un coup vers soit une position dans  $\mathcal{P}$  soit une position dans  $P$  qui sera donc dans  $\mathcal{P}$  par hypothèse d'induction. Par conséquent,  $G(V, E, \omega) \in \mathcal{N}$ .

Enfin, si  $\omega \in P$ , alors par la première condition toute option  $G'(V', E', \omega')$  de  $G$  vérifie  $\omega' \notin P$ . Si  $\omega' \in S$ , alors par hypothèse d'induction  $G' \in \mathcal{N}$ . Si au contraire  $\omega' \notin S$ , alors par la deuxième condition  $G' \in \mathcal{N}$ . Comme toute option de  $G$  est dans  $\mathcal{N}$ , cela signifie que  $G \in \mathcal{P}$ .  $\square$

Ce méta-lemme nous permet de simplifier les preuves en isolant, pour un graphe  $G$  donné, un ensemble de fonctions de pondération sur les sommets de  $G$  tel que  $G \in \mathcal{P}$ . Les preuves des deux lemmes techniques suivants utilisent ce méta-lemme :

**Lemme 6.20.** Soient  $a_1, a_2, a_3, a_4$  des entiers, et  $G(V, E, \omega)$  le graphe tel que :

- $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  ;
- $E = \{u_1u_1, u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4\}$  ;
- $\omega(u_i) = a_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Si  $G$  est canonique, alors  $G$  a la même issue que le graphe composé d'un unique sommet de poids  $a_1 + a_3$  avec une boucle qui lui est attachée.

Ce lemme est illustré figure 6.10.

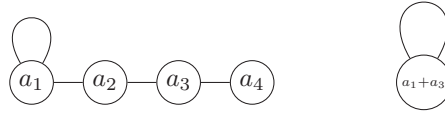
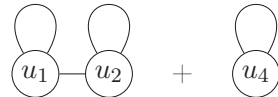


FIGURE 6.10 – Illustration du lemme 6.20 : ces deux graphes ont la même issue.

*Preuve.* Soit  $S \subset \text{pos}(G)$  l'ensemble des positions vérifiant  $a_3 < a_2 + a_4$  et soit  $P \subset S$  le sous-ensemble de ces positions pour lesquelles  $a_1 + a_3$  est pair. Notons que si une fonction de pondération  $\omega$  est telle que  $G(V, E, \omega)$  est canonique, alors  $\omega \in S$ . Nous démontrons que  $S$  et  $P$  vérifient les trois conditions du lemme 6.19. Comme chaque coup sur  $G$  fait décroître soit  $a_1$  soit  $a_3$  de 1, il n'y a aucun coup d'une position de  $P$  à une autre position de  $P$ , donc la première condition est vérifiée.

Si  $\omega$  est une position de  $P$  telle qu'il existe un coup vers une position  $\omega' \notin S$ , alors nécessairement  $\omega'$  est obtenue en faisant décroître  $a_2 + a_4$  mais pas  $a_3$ , et donc en jouant sur  $u_1u_2$ . Après un tel coup,  $u_3$  devient un sommet pesant, et appliquer le lemme de réduction nous permet de simplifier  $G$  avec la fonction de pondération  $\omega'$  en :



où  $\omega(u_1) = a_1 - 1$  et  $\omega(u_2) = a_2 - 1$ . Comme  $\omega \in P$  et  $\omega' \notin S$ , nous avons  $a_3 = a_2 + a_4 - 1$  et  $a_1 + a_3$  est pair. Cela implique que  $a_1 - 1 + a_2 - 1 + a_4 = a_1 + a_3 - 1$  est impair. Par la proposition 6.8, le graphe est dans  $\mathcal{N}$ , donc la deuxième condition est vérifiée.

Enfin, supposons que  $\omega \in S \setminus P$ . Alors, soit  $a_1$  soit  $a_3$  est impair et donc non-nul. Donc, parmi les arêtes  $u_1u_1$ ,  $u_2u_3$  et  $u_3u_4$ , au moins une peut être sélectionnée. Comme aucun de ces trois coups

ne modifie la quantité  $a_3 - a_2 - a_4$ , la position que nous obtiendrons sera dans  $P$ , donc la troisième condition est vérifiée.

Comme les trois conditions du lemme 6.19 sont vérifiées, nous pouvons appliquer celui-ci, ce qui démontre le résultat souhaité.  $\square$

**Lemme 6.21.** Soient  $a, b, c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_k$  des entiers avec  $c_i > d_i$  pour tout  $i$ , et  $G(V, E, \omega)$  le graphe tel que :

- $V = \{u, v, w_1, \dots, w_k, x_1, \dots, x_k\}$  ;
- $E = \{uu, uv, vw_1, \dots, vw_k, w_1x_1, w_2x_2, \dots, w_kx_k\}$  ;
- $\omega(u) = a, \omega(v) = b, \omega(w_i) = c_i$  et  $\omega(x_i) = d_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Soit également  $G'(V', E', \omega')$  le graphe tel que :

- $V' = \{u, v, w, x\}$  ;
- $E' = \{uu, uv, vw, wx\}$  ;
- $\omega(u) = a, \omega(v) = b, \omega(w) = \sum_{i=1}^k c_i$  et  $\omega(x) = \sum_{i=1}^k d_i$ .

Alors,  $G$  et  $G'$  ont la même issue.

Notons que  $G$  peut ne pas être canonique. Ce lemme est illustré figure 6.11.

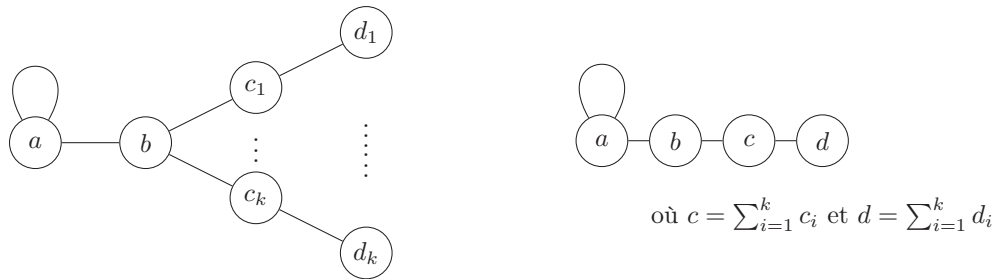


FIGURE 6.11 – Illustration du lemme 6.21 : ces deux graphes ont la même issue.

*Preuve.* Soient  $G_1, G_2, G_3, G_4$  les graphes représentés figure 6.12. Si  $c \geq b + d$ , alors le sommet de poids  $c$  dans  $G_2$  est pesant. Le lemme de réduction nous permet alors de simplifier  $G_2$ , ce qui nous fait obtenir  $G_4$ . Si  $c < b + d$ , alors soit  $b < a + c$  auquel cas  $G_2$  est canonique et  $G_2$  et  $G_3$  ont la même issue par le lemme 6.20, soit  $b \geq a + c$  auquel cas le sommet de poids  $b$  est pesant. Le lemme de réduction nous permet de simplifier  $G_2$  en supprimant le sommet de poids  $b$  et en ajoutant une boucle sur le sommet de poids  $c$ , ce qui rend le sommet de poids  $d$  inutile. En appliquant de nouveau le lemme de réduction, nous obtenons  $G_3$ . Donc, l'issue de  $G_2$  est la même que celle de  $G_3$  ou de  $G_4$  en fonction des cas indiqués sur la figure 6.12.

Sur la figure 6.12, les arêtes des quatre graphes ont des étiquettes. Pour toute arête  $e$  de  $G_1$ , nous appelons  $f(e)$  l'arête de  $G_2$  ayant la même étiquette. De plus, pour toute position  $\omega = (a, b, c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_k)$  de  $G_1$ , nous appelons  $f(\omega)$  la position  $(a, b, c, d)$  de  $G_2$  correspondante (c'est-à-dire avec  $c = \sum_{i=1}^k c_i$  et  $d = \sum_{i=1}^k d_i$ ). Il est aisé de vérifier que pour toutes positions de  $G_1$   $\omega$  et  $\omega'$  telles que  $\omega'$  est obtenue en jouant  $e$  depuis  $\omega$ ,  $f(\omega')$  est obtenue en jouant  $f(e)$  depuis  $f(\omega)$ .

Si  $c$  ou  $d$  est nul, alors tous les  $c_i$  ou  $d_i$  le sont également, et il est aisé de constater que  $G_1$  et  $G_2$  ont la même issue. Nous allons donc supposer que  $c, d > 0$ . Nous démontrons que les issues de  $G_1$  et de  $G_2$  sont les mêmes par induction sur  $k$ . Si  $k = 1$ , clairement, le résultat se tient. Supposons donc que  $k > 1$  et que le résultat est valide quand il y a strictement moins que  $k$  chemins  $(v, w_i, x_i)$ .

Soit  $S$  l'ensemble des positions de  $G_1$  telles que pour tout  $i$  nous avons  $c_i > d_i$ . Soit  $P$  le sous-ensemble des positions  $s \in S$  telles que  $G_2$  muni de la fonction de pondération  $f(s)$  est dans  $\mathcal{P}$ . Nous démontrons que  $S$  et  $P$  vérifient les trois conditions du lemme 6.19.

1. Si  $s$  et  $s'$  sont deux positions dans  $P$ , alors il n'y a aucun coup de  $s$  à  $s'$  ou inversement. En effet, supposons par contradiction et sans perte de généralité qu'il existe un coup menant de

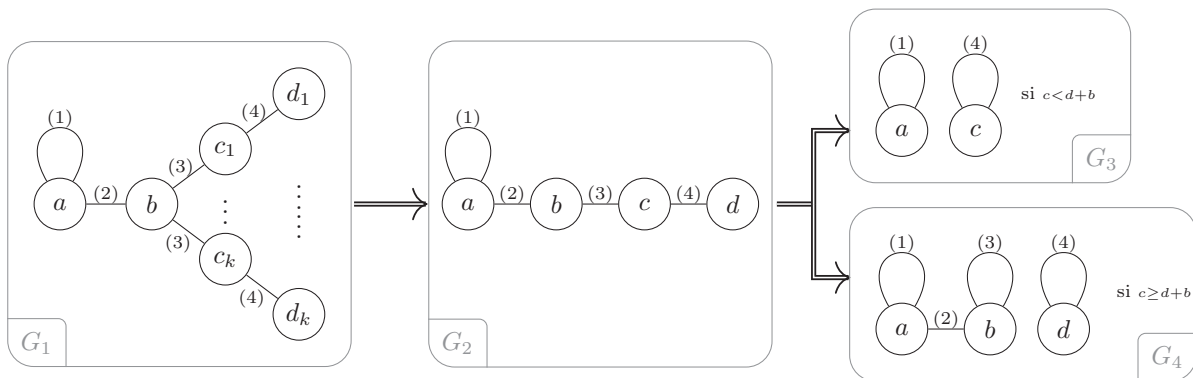
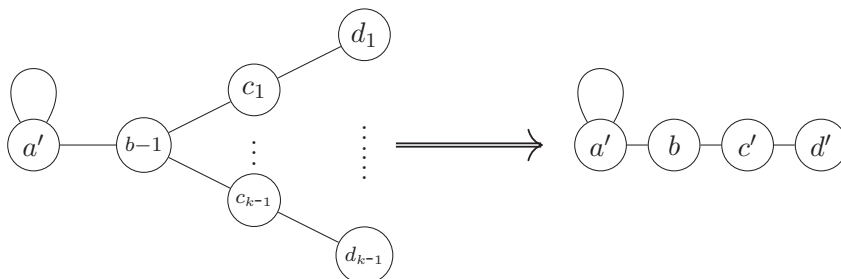


FIGURE 6.12 – Avec  $c = \sum_{i=1}^k c_i$  et  $d = \sum_{i=1}^k d_i$ . Les arêtes correspondantes entre les quatre graphes sont désignées par la même étiquette.

$s$  à  $s'$  en jouant sur  $e$ . Alors, il existe un coup menant de  $f(s)$  à  $f(s')$  en jouant sur  $f(e)$ . Or, comme  $G_2$  muni des fonctions de pondération  $f(s)$  et  $f(s')$  est dans  $\mathcal{P}$ , nous obtenons une contradiction.

- Soit  $s$  une position dans  $\mathcal{P}$ , montrons qu'il n'y a aucun coup vers une position  $s' \notin S$  telle que  $s' \in \mathcal{P}$ . Supposons par contradiction qu'il existe une telle position  $s'$ . Comme  $s' \notin S$ , elle est nécessairement obtenue en jouant sur une arête étiquetée par (3) sur la figure 6.12. Sans perte de généralité, supposons que cette arête est  $vw_k$ . Comme  $s \in S$  et  $s' \notin S$ , nous avons nécessairement  $c_k = d_k + 1$ . La position  $s'$  n'est pas canonique :  $x_k$  est maintenant un sommet pesant. En appliquant le lemme de réduction, nous pouvons supprimer  $x_k$  et ajouter une boucle à  $w_k$ . Les sommets  $w_k$  et  $u$  sont maintenant des faux jumeaux, et peuvent donc être fusionnés. Ces deux opérations de réduction ne changeant pas la valeur de Grundy du graphe, elles ne changent pas son issue. Cela implique que  $G_1$  avec la fonction de pondération  $s'$  a la même issue que le graphe suivant :



où  $a' = a + c_k - 1$ ,  $c' = c - c_k$  et  $d' = d - y_k$ . En appliquant l'hypothèse d'induction (puisque'il n'y a plus que  $k - 1$  chemins  $(v, w_i, x_i)$ ), ce graphe a la même issue que le graphe à droite dans la figure ci-dessus. Appelons ce dernier  $G'_2$ .

Si  $c < b + d$ , alors  $G_2$  a la même issue que  $G_3$ . Comme  $s \in \mathcal{P}$ ,  $G_2 \in \mathcal{P}$  et donc  $a + c$  est pair. Cependant, comme  $c_k = d_k + 1$ , nous avons également  $c - c_k \geq c - 1 + d - d_k$ , et par le même argument  $G'_2 \in \mathcal{P}$  si et seulement si  $a' + c'$  est pair. Or, comme  $a' + c' = a + c_k - 1 + c - c_k = a + c - 1$ ,  $c'$  est impossible.

Nous pouvons donc supposer que  $c \geq b + d$ , et donc que  $G_2$  a la même issue que  $G_4$ . Une fois de plus,  $G_2 \in \mathcal{P}$  donc par la proposition 6.8  $a + b + d$  est pair. Comme  $c_k = d_k + 1$ , nous avons également  $c - c_k \geq b - 1 + d - d_k$ . Donc,  $G'_2$  n'est pas canonique : le sommet de poids  $c'$  est

pesant, donc nous pouvons appliquer le lemme de réduction et obtenir le graphe suivant :



Comme  $a + b + d$  est pair, nous avons nécessairement  $a' + b - 1 + d' = a + c_k - 1 + b - 1 + d - y_k = a + b - 1 + d$  qui est impair. Donc, par la proposition 6.8, le graphe ci-dessus est dans  $\mathcal{N}$ , ce qui implique que  $G'_2 \in \mathcal{N}$ , une contradiction.

3. Finalement, soit  $s \in S \setminus P$  une position de  $G_1$ . Nous voulons montrer que  $s$  a soit une option dans  $P$  soit une option hors de  $S$  dont l'issue est  $\mathcal{P}$ . Notons que, par définition,  $G_2$  muni de la fonction de pondération  $f(s)$  est dans  $\mathcal{N}$ . Il y a deux cas à considérer :

- (a) Il existe une arête  $e_2$  de  $G_2$  telle que jouer sur  $e_2$  depuis la position  $f(s)$  est un coup gagnant, et  $e_2$  a une étiquette différente de (3). Soit  $e \in f^{-1}(e_2)$  une arête de  $G_1$  avec la même étiquette que  $e_2$  tel que jouer sur  $e$  depuis la position  $s$  est un coup légal, et soit  $s'$  la position obtenue en jouant ce coup. Comme  $e$  a une étiquette différente de (3), nous avons nécessairement  $s' \in S$  et donc  $s' \in P$  car  $G_2$  muni de la fonction de pondération  $f(s')$  est dans  $\mathcal{P}$ . Donc, il existe un coup vers une position de  $P$ .
- (b) Le seul gagnant depuis la position  $f(s)$  est de jouer sur une arête avec une étiquette égale à (3). Soit  $e$  une arête de  $G_1$  étiquetée par (3) telle que jouer sur  $e$  depuis la position  $s$  est un coup légal, et soit  $s'$  la position obtenue en jouant ce coup. Si  $s' \in S$  alors  $s' \in P$  car  $G_2$  muni de la fonction de pondération  $f(s')$  est dans  $\mathcal{P}$ . Supposons donc que  $s' \notin S$ . Supposons également que jouer sur une arête étiquetée autrement que par (3) est un coup perdant. Nous voulons prouver que  $G_1$  muni de la fonction de pondération  $s'$  est également dans  $\mathcal{P}$ .

Si  $c < b + d$  alors la figure 6.12 indique un coup gagnant dans  $G_2$  depuis la position  $f(s)$  en jouant une arête étiquetée par (2) ou par (4). Donc, nous pouvons supposer que  $c \geq b + d$ , et donc que l'issue de  $G_2$  est la même que l'issue de  $G_4$ . De même que pour  $G_2$ , le seul coup gagnant sur  $G_4$  est de jouer sur l'arête étiquetée par (3) (s'il existe un coup gagnant sur  $G_4$  avec une arête étiquetée autrement que par (3), alors le coup sur une arête avec la même étiquette sur  $G_2$  serait également gagnant).

En utilisant la caractérisation des valeurs de Grundy obtenue avec la proposition 6.7, nous savons que la valeur de Grundy de  $G_4$  est de  $(a + b + d \bmod 2) + 2(\min(a, b) \bmod 2)$ . Comme  $G_4 \in \mathcal{N}$ , cette valeur est différente de 0. Nous pouvons supposer que  $\min(a, b)$  est impair : dans le cas contraire, jouer sur l'arête étiquetée par (4) sur  $G_4$  ferait décroître  $d$  de 1, laissant une position dans  $\mathcal{P}$ , ce qui est une contradiction avec le fait que le seul coup gagnant est de jouer sur l'arête étiquetée par (3). De plus,  $b < a$  car dans le cas contraire jouer sur une des deux arêtes étiquetées par (1) ou (2) serait un coup gagnant. En particulier, cela implique que  $b$  est impair. Enfin, comme jouer sur l'arête étiquetée par (3) est un coup gagnant, la position atteinte en faisant décroître  $b$  de 1 est dans  $\mathcal{P}$ , ce qui implique que  $a + b + d - 1$  est pair, et donc que  $a + d$  est pair.

Supposons sans perte de généralité que  $e = vw_k$  et que  $c_k = d_k + 1$ . En utilisant le même argument que pour la deuxième condition et en remarquant que  $c \geq b + d$  et donc  $c - c_k \geq b - 1 + d - d_k$ , nous savons que  $G_1$  muni de la fonction de pondération  $s'$  a la même issue que le graphe illustré en 6.1. Nous savons que  $b < a$ , donc  $a' = a + c_k - 1 > b - 1$ . De plus,  $b - 1$  est pair et  $d' + a' = d - d_k + a + x_k - 1 = d + a$  est également pair. Donc,  $a$  et  $d$  ont la même parité, et la proposition 6.8 implique que le graphe est dans  $\mathcal{P}$ , et donc que  $G_1$  muni de la fonction de pondération  $s'$  est dans  $\mathcal{P}$ , ce que nous cherchions à démontrer.

Comme les trois conditions du lemme 6.19 sont vérifiées, nous pouvons appliquer celui-ci, ce qui démontre le résultat souhaité.  $\square$

Nous pouvons désormais expliciter l'algorithme polynomial permettant de calculer l'issue d'un arbre de profondeur 2 sans boucles :

*Preuve du théorème 6.17.* Soit  $T$  un arbre de profondeur 2 sans boucles. Deux feuilles attachées au même sommet (la racine ou un sommet de profondeur 1) étant des faux jumeaux, le lemme de réduction nous permet de les fusionner sans changer la valeur de Grundy de  $T$ . Dans l'arbre résultant, chaque sommet est adjacent à au plus une feuille. Si un sommet de profondeur 2 est pesant, alors il peut être supprimé et une boucle attachée à son voisin. Tous les sommets avec des boucles sont des faux jumeaux car leur seul voisin est la racine ; ils peuvent donc être fusionnés. S'il y a une feuille de profondeur 1, on peut lui attacher une feuille de poids 0 sans changer la valeur de Grundy. Cette réduction est illustrée figure 6.13. Soit  $T'$  l'arbre obtenu.

Le lemme de réduction nous assure que  $\mathcal{G}(T) = \mathcal{G}(T')$ . De plus,  $T'$  est exactement l'arbre  $G$  du lemme 6.21, qui a donc la même issue que le chemin avec une boucle  $G'$  du même lemme. Si  $G'$  est canonique, alors il a la même issue qu'un sommet isolé avec une boucle, dont la valeur de Grundy (et donc l'issue) peut être déterminée en temps constant par la proposition 6.4. Sinon, appliquer le lemme de réduction sur  $G'$  donne des graphes ou sommes de graphes sur un ou deux sommets, dont les issues peuvent être déterminées en temps polynomial par les propositions 6.4 à 6.7.

Au final, l'algorithme décidant de l'issue de  $T$  est donc polynomial.  $\square$

Le théorème 6.17 nous permet de résoudre le jeu des tours sur un échiquier troué dont le seul trou se situe sur le bord de l'échiquier en temps polynomial, comme illustré précédemment (figure 6.5).

Notons que l'issue d'un arbre de profondeur 2 sans boucles ne dépend que des parités de poids de sommets et d'inégalités entre poids de sommets. Ce n'est pas le cas du  $C_3$ , pour lequel les issues semblent dépendre des poids de sommets modulo 4. Plusieurs questions naturelles se posent alors : des comportements plus complexes émergent-ils pour des graphes d'ordre plus élevé, ou plus denses ? Tous les graphes bipartis ont-ils des comportements relativement simples (c'est-à-dire basés sur des parités de poids de sommets et inégalités entre poids de sommets) quant à leurs issues ?

## 6.5 Périodicité

Nous montrons également un théorème d'ultime périodicité de la séquence des issues lorsque tous les poids des sommets sont fixés sauf un, par exemple  $u$ . Si  $uu \notin E$ , alors au bout d'un moment  $u$  sera un sommet pesant et le lemme de réduction nous indique que la séquence sera alors constante à partir de ce rang. Le théorème suivant règle le cas  $uu \in E$  :

**Théorème 6.22** (D., Gledel, Heinrich). *Soit  $G$  un graphe avec des sommets  $u_1, u_2, \dots, u_n$  tel que  $u_1 u_1 \in E$ . Nous fixons les entiers  $\omega_i \geq 0$  pour  $i \in \{2, \dots, n\}$ , soit  $\{S_x\}_{x \geq 0}$  la séquence définie ainsi : pour tout  $x$ ,  $S_x$  est l'issue de la partie de WAK jouée sur  $G$  avec la fonction de pondération  $\omega$  telle que  $\omega(u_1) = x$  et  $\omega(u_i) = \omega_i$  pour  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Alors, la séquence  $\{S_x\}_{x \geq 0}$  est ultimement périodique de période 2 et de pré-période au plus  $2 \sum_{i \geq 2} \omega_i$ .*

*Preuve.* Nous notons une position de  $G$  avec sa fonction de pondération  $\omega$  par  $(x, \omega_2, \dots, \omega_n)$ . La preuve s'effectue par induction sur  $\Omega = \sum_{i \geq 2} \omega_i$ . Si  $\Omega = 0$  alors la position  $(x, 0, \dots, 0)$  est équivalente à un graphe composé d'un seul sommet de poids  $x$  avec une boucle, et la séquence des  $S_x$  est périodique par la proposition 6.4.

Supposons que  $\Omega > 0$ . Il y a trois types de coups possibles sur  $G$  :

1. Vers une position  $(x - 1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  en jouant sur la boucle attachée à  $u_1$  ;
2. Vers une position  $(x - 1, \omega'_2, \dots, \omega'_n)$  avec  $\sum_{i \geq 2} \omega'_i = \Omega - 1$  en jouant sur une arête dont  $u_1$  est une extrémité ;
3. Vers une position  $(x, \omega'_2, \dots, \omega'_n)$  avec  $\sum_{i \geq 2} \omega'_i = \Omega - 2$  en jouant sur une arête non-adjacente à  $u_1$  ou  $\Omega - 1$  en jouant sur une boucle non-attachée à  $u_1$ .

Soit  $g$  la fonction telle que  $g(x) = 1$  s'il existe un coup de type 2 ou 3 vers une position dans  $\mathcal{P}$  depuis la position  $(x, \omega_2, \dots, \omega_n)$ , et  $g(x) = 0$  sinon. Par hypothèse d'induction,  $g$  est ultimement périodique de période 2 et de pré-période  $2\Omega - 1$ .

Comme la fonction  $g$  prend ses valeurs dans  $\{0, 1\}$  et est 2-périodique, il n'y a que quatre possibilités pour la séquence à partir de  $x = 2\Omega - 1$ . La tableau 6.2 résume ces quatre possibilités et les



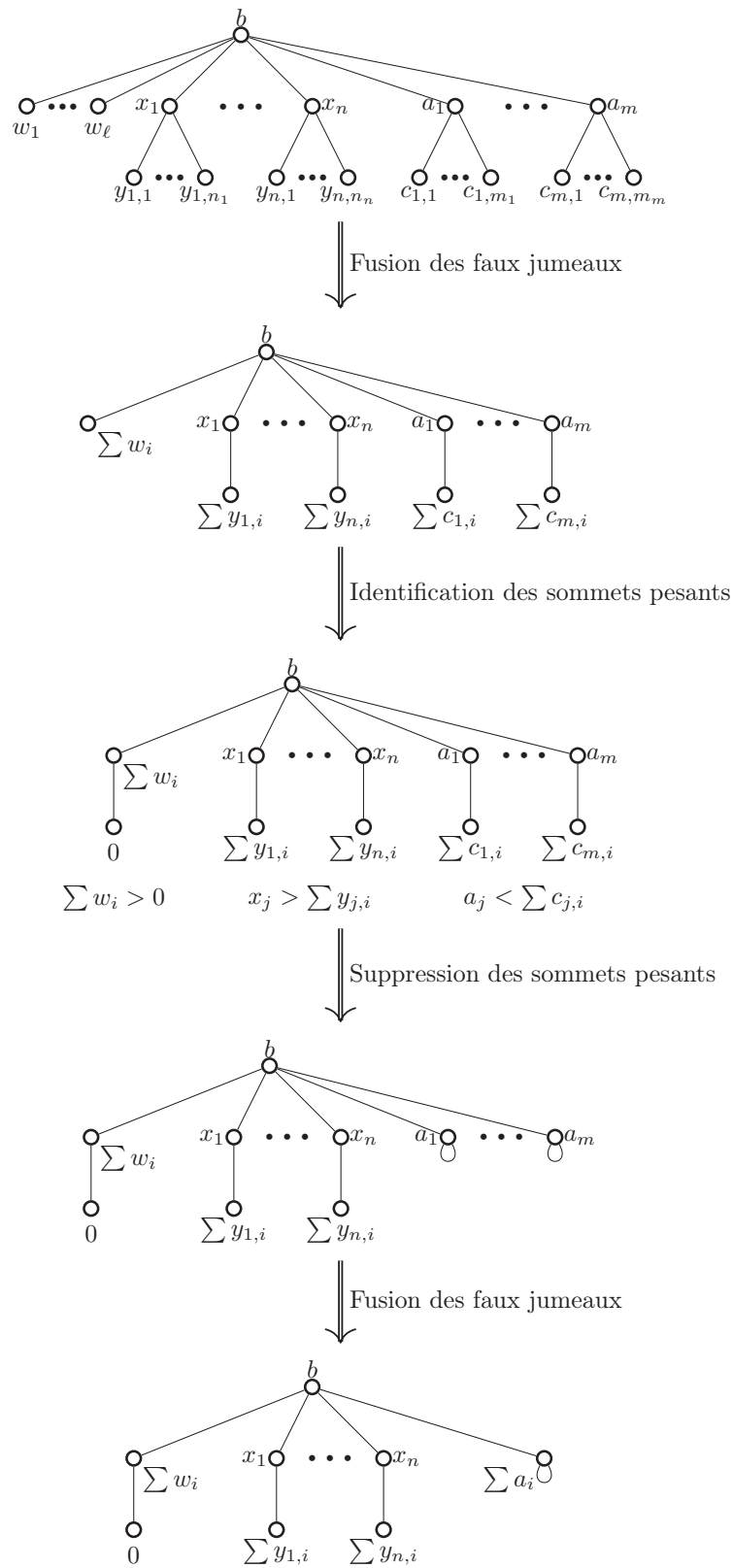


FIGURE 6.13 – La réduction d’un arbre de profondeur 2 sans boucles au graphe  $G$  du lemme 6.21.

séquences d'issues des positions  $(2\Omega - 1 + i, \omega_2, \dots, \omega_n)$ . Dans tous les cas, la séquence est périodique à partir du rang  $2\Omega$ .

$g(2\Omega - 1 + i), i \geq 0$	Séquence des issues des positions $(2\Omega - 1 + i, \omega_2, \dots, \omega_n), i \geq 0$
1, 1, 1, 1...	$\mathcal{N}, \mathcal{N}, \mathcal{N} \dots$ car il y a toujours un coup de type 2 ou 3 menant à une position dans $\mathcal{P}$ .
0, 0, 0, 0...	$\mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{N}, \dots$ ou $\mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{P} \dots$ , en fonction de l'issue de la position $(2\Omega - 2, \omega_2, \dots, \omega_n)$ . En effet, jouer ailleurs que sur la boucle attachée à $u_1$ est un coup perdant, et donc les issues alternent entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ .
1, 0, 1, 0...	$\mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{P} \dots$ . En effet, si $i$ est pair, alors $g(2\Omega - 1 + i) = 1$ , donc il existe un coup gagnant de type 2 ou 3. Si $i$ est impair, alors les coups de types 2 et 3 sont perdants, de même que jouer sur la boucle attachée à $u_1$ .
0, 1, 0, 1...	$X, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \dots$ où $X$ est soit $\mathcal{N}$ soit $\mathcal{P}$ . En effet, si $i$ est impair, alors $g(2\Omega - 1 + i) = 1$ , donc il existe un coup gagnant de type 2 ou 3. Si $i$ est pair et différent de 0, alors les coups de types 2 et 3 sont perdants, de même que jouer sur la boucle attachée à $u_1$ . Quand $i = 0$ , l'issue peut être indifféremment $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{N}$ en fonction de l'issue de la position $(2\Omega - 2, \omega_2, \dots)$ .

Tableau 6.2 – Table prouvant la périodicité de la séquence des issues des positions  $(2\Omega - 1 + i, \omega_2, \dots, \omega_n), i \geq 0$  en fonction des valeurs périodiques de  $g$ .

□

En adaptant la preuve du théorème 6.22, nous obtenons également l'ultime périodicité des valeurs de Grundy :

**Théorème 6.23** (D., Gledel, Heinrich). *Soit  $G$  un graphe. La séquence  $\{\mathcal{G}((x, \omega_2, \dots, \omega_n))\}_{x \geq 0}$  des valeurs de Grundy de  $G$  avec les fonctions de pondération  $(x, \omega_2, \dots, \omega_n)$  est ultimement périodique de période 2. Si de plus les valeurs de Grundy de la partie périodique de la séquence sont bornées par un entier  $k$ , alors il existe une constante  $c_k$  ne dépendant que de  $k$  telle que la prépériode est au plus  $2 \sum_{i \geq 2} \omega_i + c_k$ .*

*Preuve.* Nous pouvons remplacer  $G$  par  $G + H$  pour tout graphe  $H$  dans l'énoncé du théorème 6.22. Soit  $(\omega'_1, \dots, \omega'_p)$  une fonction de pondération des sommets de  $H$ , si  $\mathcal{G}((\omega'_1, \dots, \omega'_p)) = k$ , alors la position  $(x, \omega_2, \dots, \omega_n, \omega'_1, \dots, \omega'_p)$  de  $G + H$  est dans  $\mathcal{P}$  si et seulement si la position  $(x, \omega_2, \dots, \omega_n)$  de  $G$  a une valeur de Grundy de  $k$ . Comme les issues de  $G + H$  sont ultimement périodiques de période 2, cela signifie que les valeurs de Grundy des positions de  $G$  sont ultimement périodiques de période 2. De plus, la prépériode est au plus  $2 \sum_{i \geq 2} \omega_i + 2 \sum_{i \geq 1} \omega'_i$ . En choisissant  $H$  et les  $\omega'_i$  tels que  $\mathcal{G}((\omega'_1, \dots, \omega'_p)) = k$  et  $\sum_{i \geq 1} \omega'_i$  est la plus petite, utiliser  $c_k = 2 \sum_{i \geq 1} \omega'_i$  nous donne le résultat. □

Ces résultats de périodicité nous permettent d'espérer une étude des séquences d'issues ou de valeurs de Grundy de graphes pour les jeux WAK et ARC-KAYLES, pour une certaine définition de ces séquences. Ceci vient renforcer les études sur les périodicités des séquences de Grundy des jeux de suppression de sommets dans le chapitre 5.

## 6.6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié une variante d'ARC-KAYLES sur des graphes pondérés, et extrait des résultats intéressants comme la non-bornitude des valeurs de Grundy. De plus, cette variante sert à modéliser un jeu de placement de pièces d'échecs. Nous avons vu que, pour certains graphes, la détermination de l'issue était assez simple, et que la séquences des valeurs de Grundy était ultimement 2-périodique lorsque tous les poids sauf un sont fixés.

De nombreux problèmes restent ouverts sur WAK, et y répondre donnerait des résultats sur ARC-KAYLES ainsi, sans doute, que sur d'autres jeux de suppression de sommets. Par exemple, les questions de la complexité de WAK, de trouver une réduction polynomiale de WAK à ARC-KAYLES, ou encore l'étude d'autres classes de graphes.

Par ailleurs, certains graphes ou classes de graphes peuvent se révéler intéressants à étudier pour travailler sur le jeu des tours sur un échiquier troué. Par exemple, la figure 6.14 présente le cas de l'échiquier avec un trou au milieu, qui se révèle complexe à étudier. En effet, les conditions sur les poids des sommets pour réduire le graphe sont beaucoup plus nombreuses et complexes que dans le cas des arbres de profondeur 2. Le jeu WAK offre donc de nombreuses possibilités d'études ayant des liens avec d'autres jeux.

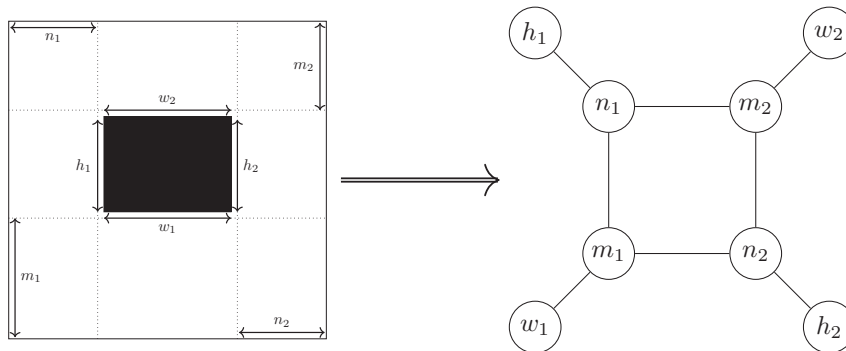


FIGURE 6.14 – Un échiquier avec un trou au milieu, et son graphe de WAK équivalent.

# Conclusion

# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié plusieurs problèmes de graphes (partie I) et de jeux combinatoires (partie II), et présenté plusieurs articulations entre les deux domaines (chapitre 3). Dans le chapitre 1, nous avons abordé un problème de théorie extrémale des graphes, la conjecture de Murty-Simon, dont nous avons proposé un renforcement que nous avons démontré pour une famille particulière. Dans le chapitre 2, nous avons étudié un nouveau paramètre de coloration distinguante, démontrant que le ratio entre ses bornes supérieure et inférieure était constant, au contraire de nombreux autres paramètres de coloration distinguante pour lesquels ce ratio est d'ordre  $\frac{n}{\log_2 n}$ . Dans le chapitre 3, nous avons montré comment passer de problèmes de graphes à des problèmes de jeux, et quel type de problématiques naissent par ces constructions, notamment en termes de complexité. Dans le chapitre 4, nous avons rappelé les concepts principaux de la théorie de Sprague-Grundy et fait un état de l'art des jeux *taking-breaking*, dans leur définition classique comme dans leur extension aux graphes que nous avons proposée. Le chapitre 5 nous a vus étudier les jeux de soustraction dans les graphes, et extraire plusieurs comportements périodiques sur certaines familles de graphes. Enfin, dans le chapitre 6, nous avons étudié une variante pondérée de ARC-KAYLES, un jeu de suppression de sommets classique, laquelle nous a permis de montrer que les valeurs de Grundy de ARC-KAYLES sont non-bornées.

Certains des problèmes étudiés tout au long de ce manuscrit ne sont pas résolus, ou bien amènent d'autres questions ouvertes, lesquelles sont des pistes de recherches d'intérêt. Nous allons ici recenser celles qui sont, selon nous, les plus pertinentes :

- Démontrer les conjectures renforcées sur les graphes D2C (conjectures 1.32 et 1.33). Une piste de recherche est de mesurer l'écart entre le nombre d'arêtes dans un graphe D2C et dans un graphe biparti complet.
- Montrer qu'il n'existe aucun graphe  $G$  vérifiant  $\chi_U(G) = \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil + 2$  (conjecture 2.18), par exemple en étudiant la valeur du paramètre  $\chi_U$  sur les arbres ou sur les forêts d'étoiles subdivisées au plus une fois.
- Déterminer la complexité du problème permettant de décider la valeur de  $\chi_U$  pour un graphe donné (problème de décision 2.20).
- Démontrer que tous les jeux de pur *breaking* hors de celui ayant  $\{1, 2\}$  comme ensemble de coupes ont une séquence de Grundy ultimement arithmétique périodique (conjecture 4.44).
- Vérifier si les jeux de soustraction connexes ont la même période que les jeux équivalents sur les piles de jetons (question ouverte 5.5), pour une définition donnée de la séquence de Grundy (en l'occurrence, ajouter un chemin à un sommet spécifique du graphe).
- Vérifier si les jeux de soustraction connexes de la famille  $\text{CSG}(\mathbb{N} \setminus S)$  où  $S$  est fini sont ultimement périodiques (question ouverte 5.6).
- Étudier la complexité des jeux de soustraction connexes : complexité générale, de certaines familles (comme la famille  $\text{CSG}(I_N)$ ), des jeux sur certaines familles de graphes.
- Déterminer pour quelles valeurs de  $N$  il existe un théorème global de réduction des chemins dans les étoiles subdivisées pour les jeux de la famille  $\text{CSG}(I_N)$ . Pour les autres valeurs de  $N$ , étudier la préperiode minimale que nous pouvons établir.
- À l'inverse, déterminer si les valeurs de Grundy des jeux de la famille  $\text{CSG}(I_N)$  sont non-bornées semble également pertinent. Par exemple, le jeu  $\text{CSG}(I_2)$  semble déjà avoir des valeurs

- de Grundy assez élevées sur des arbres (conjecture 5.32).
- Déterminer pour quelles familles de graphes des théorèmes de réduction sont possibles pour le jeu  $\text{CSG}(I_2)$ .
  - Caractériser quels entiers peuvent être adjoints à un ensemble d'entiers définissant un jeu de soustraction connexe.
  - Étudier la famille  $\text{CSG}(\{N\})$  sur les arbres (question ouverte 5.37).
  - Déterminer une réduction polynomiale de WAK à ARC-KAYLES, et étudier la complexité de WAK, afin de mieux comprendre la complexité des jeux de suppression de sommets.
  - Trouver des familles de graphe d'ordre polynomial dont les valeurs de Grundy sont non-bornées pour WAK ou pour ARC-KAYLES (question ouverte 6.16).
  - Étudier des graphes de WAK permettant de résoudre des types d'échiquiers pour le jeu des tours sur un échiquier troué.

Pour conclure, cette thèse, située à l'intersection des graphes et des jeux, a couvert des sujets issus de ces deux domaines. Un de mes objectifs était de démontrer que les adaptations de jeux classiques pour y jouer sur des graphes pouvaient se montrer enrichissantes, et les résultats d'ultime périodicité et de réduction des chemins pour les jeux de soustraction connexes me semblent aller dans ce sens. J'aimerais maintenir cet équilibre dans ma recherche future, et continuer à travailler sur les problématiques abordées au cours de ce manuscrit, plus spécifiquement sur les renforcements de la conjecture de Murty-Simon et sur les jeux de soustraction connexes.

# Index

<b>A</b>	
Adjoindre.....	92
Arbre.....	5
binaire complet.....	52
ARC-KAYLES.....	96, 99
ARC-KAYLES PONDÉRÉ.....	99, 141
Arête.....	4
critique.....	22
<b>B</b>	
Biétoile subdivisée.....	121
Boucle.....	141
<b>C</b>	
$\mathcal{C}$ -complet.....	6
Certificat.....	6
Chemin.....	5
Chenille.....	135
Clique.....	5
Coloration distinguante.....	40
identifiante.....	43
localement distinguante.....	41
point-distinguante.....	41
somme-distinguante.....	41
union-distinguante.....	44
Complémentaire.....	4
Composante connexe.....	4
Conjecture de Guy.....	94
Conjecture de Murty-Simon.....	13
Convention	
misère.....	77
normale.....	77
CRAM.....	78, 99
Cycle.....	5
<b>D</b>	
Degré.....	4
maximal.....	4
minimal.....	4
Diamètre.....	11
Distance.....	11
Distinction.....	40
distingués.....	40
DOMINEERING.....	78, 99
<b>E</b>	
Ensemble dominant.....	13
<b>F</b>	
Ensemble total dominant.....	13
Équivalence de jeux.....	87
Étoile.....	5
subdivisée.....	53, 104
Extrémités.....	4
<b>G</b>	
$f$ -libre.....	24
$f$ -orientation.....	30
Feuille.....	5
Forêt.....	5
FPT.....	97
<b>H</b>	
Graphe.....	4
biparti complet.....	5
canonique.....	149
complet.....	5
connexe.....	4
critique.....	10
DdC.....	11
de jeu.....	79
hamiltonien.....	49
$k$ -supercritique.....	14
$k$ TC.....	14
non-orienté.....	4
optimalement union-distinguable.....	47
orienté.....	4
pondéré.....	141
scindé.....	5
simple.....	4
trivial.....	4
vide.....	4
<b>I</b>	
Hypergraphe.....	62
<b>J</b>	
Identification.....	<i>voir</i> Distinction
Indépendant.....	5
Isomorphisme.....	4
Issue.....	78
<b>K</b>	
Jeu	
combinatoire.....	76

de coloration de Grundy .....	69	Prédécesseur .....	30
de construction .....	65	Problème de décision .....	6
de partition .....	65	Profondeur .....	5
de pur breaking .....	95, 100	PSPACE .....	6
de réussite .....	67	Puits .....	32
de soustraction .....	92, 100		
connexe .....	100, 101	<b>Q</b>	
fini .....	92	QBF-SAT .....	7
de suppression de sommets .....	96		
des tours sur un échiquier troué .....	100, 142	<b>R</b>	
d'évitement .....	67	Racine .....	5
hexadécimal .....	95	Réduction .....	6
impartial .....	77	Roue .....	136
à objectif compétitif .....	64		
octal .....	94, 100	<b>S</b>	
fini .....	94	SAT .....	7
sur des graphes .....	97, 100	Séquence de Grundy .....	91
partisan .....	77	Somme de jeux .....	83
positionnel Breaker/Breaker .....	<i>voir</i> Jeu	Sommets .....	4
d'évitement		adjacents .....	4
positionnel Maker/Breaker .....	62	incidentes .....	4
positionnel Maker/Maker .....	<i>voir</i> Jeu de	Source .....	32
réussite		Sous-graphe .....	4
taking-breaking .....	91	induit .....	4
		Subdiviser .....	5
<b>L</b>		Successeur .....	30
Lemme de réduction .....	147	Supergraphe d'arêtes .....	47
Faux jumeaux .....	147		
Réduction .....	147	<b>T</b>	
Sommets inutiles .....	147	Taille .....	6
Sommets pesants .....	147	Théorème de Sprague-Grundy .....	88
		Triangle .....	5
<b>M</b>			
mex .....	88	<b>U</b>	
Morphisme .....	4	Union disjointe .....	5
<b>N</b>		<b>V</b>	
NIM .....	77, 85, 100	Valeur de Grundy .....	87
Nim-somme .....	86	Voisinage .....	4
NODE-KAYLES .....	96, 100	entrant .....	30
Nombre de coloration union-distinguante .....	45	entrant fermé .....	30
Nombre de Grundy ludique .....	69	fermé .....	4
NP .....	6	sortant .....	30
		sortant fermé .....	30
<b>O</b>		<b>W</b>	
Option .....	79	WAK .....	<i>voir</i> ARC-KAYLES PONDÉRÉ
Ordre .....	4		
<b>P</b>			
P .....	6		
Paramètre d'optimisation .....	66		
Périodicité .....	91		
arithmétique .....	92		
ultime .....	92		
Position .....	77		



# Bibliographie

- [1] Fiche de FJORDS sur boardgamegeek, accédé le 18 juin 2018.
- [2] Richard Adams, Janae Dixon, Jennifer Elder, Jamie Peabody, Oscar Vega, and Karen Willis. Combinatorial analysis of a subtraction game on graphs. *International Journal of Combinatorics*, 2016, 2016.
- [3] Louigi Addario-Berry, Robert EL Aldred, Ketan Dalal, and Bruce A Reed. Vertex colouring edge partitions. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 94(2) :237–244, 2005.
- [4] Méziane Aïder, Sylvain Gravier, and Souad Slimani. Relaxed locally identifying coloring of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 32(5) :1651–1665, 2016.
- [5] Martin Aigner, Eberhard Triesch, and Zsolt Tuza. Irregular assignments and vertex-distinguishing edge-colorings of graphs. In *Annals of Discrete Mathematics*, volume 52, pages 1–9. Elsevier, 1992.
- [6] Michael Albert, Richard Nowakowski, and David Wolfe. *Lessons in play : an introduction to combinatorial game theory*. CRC Press, 2007.
- [7] Sanjeev Arora and Boaz Barak. *Computational complexity : a modern approach*. Cambridge University Press, 2009.
- [8] Richard Bruce Austin. Impartial and partisan games. 1976.
- [9] Camino Balbuena, Adriana Hansberg, Teresa W Haynes, and Michael A Henning. Total domination edge critical graphs with total domination number three and many dominating pairs. *Graphs and Combinatorics*, 31(5) :1163–1176, 2015.
- [10] Paul N Balister, Ervin Gyori, Jenő Lehel, and Richard H Schelp. Adjacent vertex distinguishing edge-colorings. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 21(1) :237–250, 2007.
- [11] Paul N Balister, OM Riordan, and Richard H Schelp. Vertex-distinguishing edge colorings of graphs. *Journal of graph theory*, 42(2) :95–109, 2003.
- [12] Walter William Rouse Ball. The eight queens problem. In *Mathematical recreations and essays*, pages 97–102. Macmillan, 1914.
- [13] József Balogh, Stephen G Hartke, Qi Liu, and Gexin Yu. On the first-fit chromatic number of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22(3) :887–900, 2008.
- [14] Olivier Baudon, Jakub Przybyło, Mohammed Senhaji, Elżbieta Sidorowicz, Éric Sopena, and Mariusz Woźniak. The neighbour-sum-distinguishing edge-colouring game. *Discrete Mathematics*, 340(7) :1564–1572, 2017.
- [15] Cristina Bazgan, Amel Harkat-Benhamdine, Hao Li, and Mariusz Woźniak. On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 75(2) :288–301, 1999.
- [16] Laurent Beaudou, Pierre Coupechoux, Antoine Dailly, Sylvain Gravier, Julien Moncel, Aline Parreau, and Eric Sopena. Octal games on graphs : The game 0.33 on subdivided stars and bistars. *Theoretical Computer Science*, 2018.
- [17] József Beck. *Combinatorial games : tic-tac-toe theory*, volume 114. Cambridge University Press, 2008.

- [18] Claude Berge. Sur les jeux positionnels. *Cahiers du Centre Etudes Rech. Opér.*, 18 :91–107, 1976.
- [19] Elwyn R Berlekamp, John H Conway, and Richard K Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. AK Peters/CRC Press, 2001-2004.
- [20] Hans L Bodlaender. On the complexity of some coloring games. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 2(02) :133–147, 1991.
- [21] Hans L Bodlaender and Dieter Kratsch. The complexity of coloring games on perfect graphs. *Theoretical Computer Science*, 106(2) :309–326, 1992.
- [22] Hans L Bodlaender and Dieter Kratsch. Kayles and nimbers. *Journal of Algorithms*, 43(1) :106–119, 2002.
- [23] Hans L Bodlaender, Dieter Kratsch, and Sjoerd T Timmer. Exact algorithms for kayles. *Theoretical Computer Science*, 562 :165–176, 2015.
- [24] John Adrian Bondy, Uppaluri Siva Ramachandra Murty, et al. *Graph theory with applications*, volume 290. Citeseer, 1976.
- [25] Nicolas Bousquet, Antoine Dailly, Eric Duchene, Hamamache Kheddouci, and Aline Parreau. A vizing-like theorem for union vertex-distinguishing edge coloring. *Discrete Applied Mathematics*, 232 :88–98, 2017.
- [26] Charles L Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *The Annals of Mathematics*, 3(1/4) :35–39, 1901.
- [27] Axel Brandt, Brent Moran, Kapil Nepal, Florian Pfender, and Devon Sigler. Local gap colorings from edge labelings. *Australasian Journal of Combinatorics*, 65(3) :200–211, 2016.
- [28] Boštjan Brešar, Sandi Klavžar, and Douglas F Rall. Domination game and an imagination strategy. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 24(3) :979–991, 2010.
- [29] Anita C Burris and Richard H Schelp. Vertex-distinguishing proper edge-colorings. *Journal of graph theory*, 26(2) :73–82, 1997.
- [30] Louis Caccetta and Roland Häggkvist. On diameter critical graphs. *Discrete Mathematics*, 28(3) :223–229, 1979.
- [31] Ján Černý, Mirko Horňák, and Roman Soták. Observability of a graph. *Mathematica Slovaca*, 46(1) :21–31, 1996.
- [32] Gary Chartrand, Michael S Jacobson, Jenő Lehel, Ortrud R Oellermann, Sergio Ruiz, and Farrokh Saba. Irregular networks. *Congr. Numer.*, 64(197-210) :250th, 1988.
- [33] Xiang'en Chen. Point-distinguishing chromatic index of the union of paths. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 64(3) :629–640, 2014.
- [34] Claude A Christen and Stanley M Selkow. Some perfect coloring properties of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(1) :49–59, 1979.
- [35] Vašek Chvátal and P Erdős. Biased positional games. In *Annals of Discrete Mathematics*, volume 2, pages 221–229. Elsevier, 1978.
- [36] Ernest J Cockayne, RM Dawes, and Stephen T Hedetniemi. Total domination in graphs. *Networks*, 10(3) :211–219, 1980.
- [37] John H Conway. *On numbers and games*. AK Peters/CRC Press, 2000.
- [38] Pierre Coupechoux. Extension of universal cycles for globally identifying colorings of cycles. *Discrete Mathematics*, 340(7) :1456–1466, 2017.
- [39] Antoine Dailly, Eric Duchene, Urban Larsson, and Gabrielle Paris. Partition games are pure breaking games. *arXiv preprint arXiv :1803.02621*, 2018.
- [40] Antoine Dailly, Florent Foucaud, and Adriana Hansberg. A strengthening of the murty-simon conjecture for diameter 2 critical graphs. *En cours de rédaction*, 2018.
- [41] Antoine Dailly, Valentin Gledel, and Marc Heinrich. A generalization of arc-kayles. *International Journal of Game Theory*, 2018.

- [42] Antoine Dailly, Julien Moncel, and Aline Parreau. Connected subtraction games on subdivided stars. *En cours de rédaction*, 2018.
- [43] Aijun Dong and Guanghui Wang. Neighbor sum distinguishing coloring of some graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 4(04) :1250047, 2012.
- [44] Eric Duchene. *HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES Graphes et jeux combinatoires*. PhD thesis, Universite Claude Bernard Lyon 1, 2015.
- [45] Éric Duchêne, Valentin Gledel, Aline Parreau, Gabriel Renault, and Simon Schmidt. Maker-breaker domination game, 2018.
- [46] Gravier S. Duchêne, É. and M. Mhalla. Scoring octal games on trees. *Non-publié*.
- [47] Leah Epstein and Meital Levy. Online interval coloring and variants. *Automata, Languages and Programming*, pages 101–101, 2005.
- [48] Paul Erdős and John L Selfridge. On a combinatorial game. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 14(3) :298–301, 1973.
- [49] Louis Esperet, Sylvain Gravier, Mickaël Montassier, Pascal Ochem, Aline Parreau, et al. Locally identifying coloring of graphs. *the electronic journal of combinatorics*, 19(2) :P40, 2012.
- [50] Ulrich Faigle, Walter Kern, H Kierstead, and WT Trotter. On the game chromatic number of some classes of graphs. *Ars Combinatoria*, 35 :143–150, 1993.
- [51] Genghua Fan. On diameter 2-critical graphs. *Discrete mathematics*, 67(3) :235–240, 1987.
- [52] Stephen A Fenner and John Rogers. Combinatorial game complexity : an introduction with poset games. *arXiv preprint arXiv :1505.07416*, 2015.
- [53] Achim Flammenkamp. Sprague-grundy values of Grundy’s game. <http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/grundy.html>, accédé le 30 avril 2018.
- [54] Achim Flammenkamp. Sprague-grundy values of octal games. <http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/octal.html>, accédé le 30 avril 2018.
- [55] Evelyne Flandrin, Antoni Marczyk, Jakub Przybyło, Jean-François Saclé, and Mariusz Woźniak. Neighbor sum distinguishing index. *Graphs and Combinatorics*, 29(5) :1329–1336, 2013.
- [56] Rudolf Fleischer and Gerhard Trippen. Kayles on the way to the stars. In *International Conference on Computers and Games*, pages 232–245. Springer, 2004.
- [57] Florent Foucaud, Iiro Honkala, Tero Laihonen, Aline Parreau, and Guillem Perarnau. Locally identifying colourings for graphs with given maximum degree. *Discrete Mathematics*, 312(10) :1832–1837, 2012.
- [58] Aviezri S Fraenkel. Complexity, appeal and challenges of combinatorial games. *Theoretical Computer Science*, 313(3) :393–415, 2004.
- [59] Aviezri S Fraenkel and Edward R Scheinerman. A deletion game on hypergraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 30(2-3) :155–162, 1991.
- [60] Alan Frieze, Ronald J Gould, Michał Karoński, and Florian Pfender. On graph irregularity strength. *Journal of Graph Theory*, 41(2) :120–137, 2002.
- [61] Zoltán Füredi. The maximum number of edges in a minimal graph of diameter 2. *Journal of Graph Theory*, 16(1) :81–98, 1992.
- [62] David Gale and A Neyman. Nim-type games. *International Journal of Game Theory*, 11(1) :17–20, 1982.
- [63] Martin Gardner. Mathematical games. *Scientific American*, 230(6) :116–121, 1974.
- [64] Martin Gardner. Mathematical games. *Scientific American*, 244(4), 1981.
- [65] Michael R Garey and David S Johnson. *Computers and intractability*, volume 29. wh freeman New York, 2002.
- [66] Ferdinand Glivjak. On the impossibility to construct diametrically critical graphs by extensions. *Archivum Mathematicum*, 11(3) :131–137, 1975.

- [67] Daniel Gonçalves, Aline Parreau, and Alexandre Pinlou. Locally identifying coloring in bounded expansion classes of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161(18) :2946–2951, 2013.
- [68] JP Grossman and RICHARD J NOWAKOWSKI. A ruler regularity in hexadecimal games. *Games of No Chance 4*, 63 :115, 2015.
- [69] Patrick M Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2 :6–9, 1939.
- [70] DJ Guan and Xuding Zhu. Game chromatic number of outerplanar graphs. *Journal of Graph Theory*, 30(1) :67–70, 1999.
- [71] Adrien Guignard and Éric Sopena. Compound node–kayles on paths. *Theoretical Computer Science*, 410(21-23) :2033–2044, 2009.
- [72] Richard K Guy and Cedric AB Smith. The g-values of various games. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 52, pages 514–526. Cambridge University Press, 1956.
- [73] András Gyárfás and Jenő Lehel. On-line and first fit colorings of graphs. *Journal of Graph theory*, 12(2) :217–227, 1988.
- [74] Ervin Győri, Mirko Horňák, Cory Palmer, and Mariusz Woźniak. General neighbour-distinguishing index of a graph. *Discrete Mathematics*, 308(5-6) :827–831, 2008.
- [75] Ervin Győri and Cory Palmer. A new type of edge-derived vertex coloring. *Discrete Mathematics*, 309(22) :6344–6352, 2009.
- [76] Alfred W Hales and Robert I Jewett. Regularity and positional games. In *Classic Papers in Combinatorics*, pages 320–327. Springer, 2009.
- [77] Denis Hanson and Ping Wang. A note on extremal total domination edge critical graphs. *Utilitas Mathematica*, 63 :89–96, 2003.
- [78] Frank Harary. Achievement and avoidance games for graphs. In *North-Holland Mathematics Studies*, volume 62, pages 111–119. Elsevier, 1982.
- [79] Frank Harary and Michael Plantholt. The point-distinguishing chromatic index. *Graphs and Applications (F. Harary and JS Maybee, Eds.)*, Wiley-Interscience, New York, pages 147–162, 1985.
- [80] Frédéric Havet, Nagarajan Paramaguru, and Rathinaswamy Sampathkumar. *Detection number of bipartite graphs and cubic graphs*. PhD thesis, INRIA, 2012.
- [81] Frédéric Havet and Xuding Zhu. The game Grundy number of graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 25(4) :752–765, 2013.
- [82] Teresa Haynes and Michael Henning. A characterization of diameter-2-critical graphs with no antihole of length four. *Open Mathematics*, 10(3) :1125–1132, 2012.
- [83] Teresa Haynes, Michael Henning, Lucas Merwe, and Anders Yeo. A maximum degree theorem for diameter-2-critical graphs. *Open Mathematics*, 12(12) :1882–1889, 2014.
- [84] Teresa W Haynes and Michael A Henning. A characterization of diameter-2-critical graphs whose complements are diamond-free. *Discrete Applied Mathematics*, 160(13-14) :1979–1985, 2012.
- [85] Teresa W Haynes and Michael A Henning. A characterization of  $p_5$ -free, diameter-2-critical graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 169 :135–139, 2014.
- [86] Teresa W Haynes, Michael A Henning, Lucas C Van Der Merwe, and Anders Yeo. On a conjecture of Murty and Simon on diameter 2-critical graphs. *Discrete Mathematics*, 311(17) :1918–1924, 2011.
- [87] Teresa W Haynes, Michael A Henning, Lucas C van der Merwe, and Anders Yeo. Progress on the Murty–Simon conjecture on diameter-2 critical graphs : a survey. *Journal of Combinatorial Optimization*, 30(3) :579–595, 2015.
- [88] Teresa W Haynes, Michael A Henning, and Anders Yeo. A proof of a conjecture on diameter 2-critical graphs whose complements are claw-free. *Discrete Optimization*, 8(3) :495–501, 2011.

- [89] Teresa W Haynes, Michael A Henning, and Anders Yeo. On a conjecture of murty and simon on diameter two critical graphs ii. *Discrete Mathematics*, 312(2) :315–323, 2012.
- [90] Dan Hefetz, Michael Krivelevich, Miloš Stojaković, and Tibor Szabó. *Positional games*. Springer, 2014.
- [91] Nhan Bao Ho. On the expansion of three-element subtraction sets. *Theoretical Computer Science*, 582 :35–47, 2015.
- [92] EJ Hoffman, JC Loessi, and RC Moore. Constructions for the solution of the m queens problem. *Mathematics Magazine*, 42(2) :66–72, 1969.
- [93] Mirko Hornak and Roman Sotak. The fifth jump of the point-distinguishing chromatic index of  $kn, kn$ . *Ars Combinatoria*, 42 :233–242, 1996.
- [94] Mirko Horňák and Roman Soták. Localization of jumps of the point-distinguishing chromatic index of  $k_{\lfloor n, n \rfloor}$ . *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 17(2) :243–251, 1997.
- [95] Mirko Hornak and N Zagaglia. On the point-distinguishing chromatic index of complete bipartite graphs. *Ars Combinatoria*, 80 :75–85, 2006.
- [96] S Howse and Richard J Nowakowski. Periodicity and arithmetic-periodicity in hexadecimal games. *Theoretical computer science*, 313(3) :463–472, 2004.
- [97] Melissa Huggan. *Impartial Intersection Restriction Games*. PhD thesis, Carleton University Ottawa, 2015.
- [98] Afrouz Jabalameli, Morteza Saghafian, MohammadMahdi Shokri, Mohsen Ferdosi, Soroush Bahariyan, et al. Improving the bounds on murty\_simon conjecture. *arXiv preprint arXiv :1610.00360*, 2016.
- [99] Michał Karoński, Tomasz Łuczak, and Andrew Thomason. Edge weights and vertex colours. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 1(91) :151–157, 2004.
- [100] Richard M Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations*, pages 85–103. Springer, 1972.
- [101] Mark G Karpovsky, Krishnendu Chakrabarty, and Lev B Levitin. On a new class of codes for identifying vertices in graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(2) :599–611, 1998.
- [102] Tirasan Khandhawit and Lynnelle Ye. Chomp on graphs and subsets. *arXiv preprint arXiv :1101.2718*, 2011.
- [103] Hal A Kierstead, David A Smith, and William T Trotter. First-fit coloring on interval graphs has performance ratio at least 5. *European Journal of Combinatorics*, 51 :236–254, 2016.
- [104] Donald Ervin Knuth. Surreal numbers : how two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness : a mathematical novelette. 1974.
- [105] Tomasz Krawczyk and Bartosz Walczak. Asymmetric coloring games on incomparability graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 49 :803–811, 2015.
- [106] V Krishnamoorthy and R Nandakumar. A class of counterexamples to a conjecture on diameter critical graphs. In *Combinatorics and Graph Theory*, pages 297–300. Springer, 1981.
- [107] Michael Lampis and Valia Mitsou. The computational complexity of the game of set and its theoretical applications. In *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, pages 24–34. Springer, 2014.
- [108] J Lehel. Facts and quests on degree irregular assignments. *Graph Theory, Combinatorics and Applications, Willey, New York*, pages 765–782, 1991.
- [109] Julien Lemoine and Simon Viennot. Computation records of normal and misère cram. <http://sprouts.tuxfamily.org/wiki/doku.php?id=records#cram>, accédé le 18 juin 2018.
- [110] Tong Li, Cunquan Qu, Guanghui Wang, and Xiaowei Yu. Neighbor product distinguishing total colorings. *Journal of Combinatorial Optimization*, 33(1) :237–253, 2017.
- [111] S Lo. On edge-graceful labelings of graphs. *Congr. Numer*, 50 :231–241, 1985.

- [112] Antoine Lobstein. Codes identifiants et codes localisateurs-dominants : une bibliographie. <https://www.lri.fr/~lobstein/bibL0CDD0MetID.html>, accédé le 30 mars 2018.
- [113] Thomas Maarup. *Hex*. PhD thesis, University of Southern Denmark, 2005.
- [114] Willem Mantel. Problem 28. *Wiskundige Opgaven*, 10(60-61) :320, 1907.
- [115] Nicolas Martins and Rudini Sampaio. Locally identifying coloring of graphs with few p4s. *Theoretical Computer Science*, 707 :69–76, 2018.
- [116] Rebecca Milley and Gabriel Renault. A survey of partizan misere game theory. *arXiv preprint arXiv :1606.07362*, 2016.
- [117] NS Narayanaswamy and R Subhash Babu. A note on first-fit coloring of interval graphs. *Order*, 25(1) :49–53, 2008.
- [118] Gabriel Nivasch. More on the sprague-grundy function for wythoff’s game. In *Games of No Chance III, Proc. BIRS Workshop on Combinatorial Games*, pages 377–410. Citeseer, 2005.
- [119] Hassan Noon and Glen Van Brummelen. The non-attacking queens game. *The College Mathematics Journal*, 37(3) :223–227, 2006.
- [120] Cormac O’Sullivan. A vertex and edge deletion game on graphs. *arXiv preprint arXiv :1709.01354*, 2017.
- [121] Aline Parreau. *Problèmes d’identification dans les graphes*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2012.
- [122] Sriram V Pemmaraju, Rajiv Raman, and Kasturi Varadarajan. Buffer minimization using max-coloring. In *Proceedings of the fifteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 562–571. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [123] James B Phillips and Peter J Slater. An introduction to graph competition independence and enclaveless parameters. *Graph Theory Notes of New York*, 41 :37–41, 2001.
- [124] Jan Plesnik. Critical graphs of given diameter. *Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian. Math*, 30 :71–93, 1975.
- [125] N Zagaglia Salvi. On the point-distinguishing chromatic index of  $kn, n$ . *Ars Combin. B*, 25 :93–104, 1988.
- [126] N Zagaglia Salvi. On the value of the point-distinguishing chromatic index of  $kn, n$ . *ARS COMBINATORIA*, 29 :235–244, 1990.
- [127] Thomas J Schaefer. On the complexity of some two-person perfect-information games. *Journal of Computer and System Sciences*, 16(2) :185–225, 1978.
- [128] Robert Scheidweiler. Neighbour distinguishing gap colorings. *Cycles and Colourings 2012*, page 33.
- [129] Robert Scheidweiler and Eberhard Triesch. New estimates for the gap chromatic number. *Discrete Mathematics*, 328 :42–53, 2014.
- [130] Simon Schmidt. *Jeux à objectif compétitif sur les graphes*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2016.
- [131] Ben Seamone. The 1-2-3 conjecture and related problems : a survey. *arXiv preprint arXiv :1211.5122*, 2012.
- [132] Ben Seamone and Brett Stevens. Sequence variations of the 1-2-3 conjecture and irregularity strength. *arXiv preprint arXiv :1211.0463*, 2012.
- [133] Aaron N Siegel. *Combinatorial game theory*, volume 146. American Mathematical Soc., 2013.
- [134] Gustavus J Simmons. The game of sim. *Mathematical Solitaires & Games*, page 50, 1980.
- [135] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. Cengage Learning, 2012.
- [136] Joanna Skowronek-Kaziów. 1, 2 conjecture—the multiplicative version. *Information Processing Letters*, 107(3-4) :93–95, 2008.

- [137] Joanna Skowronek-Kaziów. Multiplicative vertex-colouring weightings of graphs. *Information Processing Letters*, 112(5) :191–194, 2012.
- [138] Richard Sprague. Über mathematische kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, 41 :438–444, 1935.
- [139] B Stevens and M Huggan. Polynomial time graph families for arc-kayles. *INTEGERS*, 16, 2016.
- [140] Benny Sudakov and Van H Vu. Local resilience of graphs. *Random Structures & Algorithms*, 33(4) :409–433, 2008.
- [141] Mohammed Amin Tahraoui, Eric Duchêne, and Hamamache Kheddouci. Gap vertex-distinguishing edge colorings of graphs. *Discrete Mathematics*, 312(20) :3011–3025, 2012.
- [142] L.C. van der Merwe, C.M. Mynhardt, and Teresa Haynes. Total domination edge critical graphs. 54, 11 1998.
- [143] Tao Wang. On murty-simon conjecture. *arXiv preprint arXiv :1205.4397*, 2012.
- [144] Jiaojiao Wu and Xuding Zhu. Lower bounds for the game colouring number of partial k-trees and planar graphs. *Discrete Mathematics*, 308(12) :2637–2642, 2008.
- [145] Willem A Wythoff. A modification of the game of nim. *Nieuw Arch. Wisk*, 7 :199–202, 1907.
- [146] Manouchehr Zaker. Results on the grundy chromatic number of graphs. *Discrete mathematics*, 306(23) :3166–3173, 2006.
- [147] Wenchao Zhang and Xuding Zhu. The game grundy indices of graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 30(3) :596–611, 2015.
- [148] Zhongfu Zhang, Xiang'en Chen, Jingwen Li, Bing Yao, Xinzhong Lu, and Jianfang Wang. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs. *Science in China Series A : Mathematics*, 48(3) :289–299, 2005.
- [149] Zhongfu Zhang, Linzhong Liu, and Jianfang Wang. Adjacent strong edge coloring of graphs. *Applied Mathematics Letters*, 15(5) :623–626, 2002.
- [150] Xuding Zhu. The game coloring number of pseudo partial k-trees. *Discrete Mathematics*, 215(1-3) :245–262, 2000.
- [151] Xuding Zhu. Game coloring the cartesian product of graphs. *Journal of Graph Theory*, 59(4) :261–278, 2008.