



**HAL**  
open science

## Calculs du symbole de kronecker dans le tore

Franck Dupont

► **To cite this version:**

Franck Dupont. Calculs du symbole de kronecker dans le tore. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Poitiers, 2017. Français. ⟨NNT : 2017POIT2279⟩. ⟨tel-01981505⟩

**HAL Id: tel-01981505**

**<https://theses.hal.science/tel-01981505v1>**

Submitted on 15 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# THÈSE

Pour l'obtention du Grade de  
Docteur de l'UNIVERSITÉ DE POITIERS  
(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)  
(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

Ecole Doctorale : S2IM

Secteur de Recherche : Mathématiques

Présentée par :

FRANCK DUPONT

---

## CALCULS DU SYMBOLE DE KRONECKER DANS LE TORE

---

Directrice de Thèse : AVIVA SZPIRGLAS

Soutenue le 04 décembre 2017  
devant la Commission d'Examen

### JURY

Alicia DICKENSTEIN	Professeure, Université de Buenos Aires	Rapporteuse
LIONEL DUCOS	Maître de Conférences, Université de Poitiers	Examinateur
ILIA ITENBERG	Professeur, Université Paris VI	Rapporteur
MARIE-FRANÇOISE ROY	Professeure, Université Rennes I	Examinatrice
NICOLAS POUYANNE	Maître de Conférences, Université de Versailles	Examinateur
AVIVA SZPIRGLAS	Professeure, Université de Poitiers	Directrice de thèse
POL VANHAECKE	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur



# Remerciements

Je remercie, en premier chef, Aviva qui a accepté de suivre ce travail au long cours et m'a fait découvrir la beauté des variétés toriques. C'est grâce à la qualité de son suivi, à sa grande disponibilité et à la pertinence de ses conseils que j'ai pu mener cette thèse à bon port. Je lui suis redevable de tous ces rendez-vous studieux, presque toujours à Poitiers, qui commençaient à potron-minet, en gare de Sèvres, dans l'attente des hurlements métalliques d'un train de banlieue.

J'exprime toute ma reconnaissance à Alicia Dickenstein et Ila Itenberg qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs et de commenter ce travail sans oublier Lionel Ducos, Nicolas Pouyanne et Pol Vanhaecke qui ont accepté de l'évaluer en participant au jury. Je remercie également Marie-Françoise Roy pour sa présence aujourd'hui et son éclairage lors d'un passage furtif à Rennes.

Mes remerciements vont aussi aux membres du groupe d'algèbre qui ont écouté mes premiers exposés, à Claire avec qui j'ai débuté mais qui a fait la course en tête.

J'ai pu mesurer au fil du temps combien Benoît, Jocelyne, Brigitte, Nathalie à la bibliothèque et Nathalie à la bourse, étaient indispensables au fonctionnement du laboratoire. Je tiens à les remercier pour leur gentillesse, le temps qu'ils m'ont consacré et leur aide logistique si précieuse. J'ai su apprécier la sollicitude des collègues du département croisés au détour d'un couloir ou devant la machine à café. J'ai une pensée particulière pour Anne qui siégeait devant moi et me divertissait parfois en m'entretenant des nouvelles du monde.

Je serais bien ingrat de soustraire à la liste des remerciements mon épouse, Régine qui m'a supporté et assisté tout au long du parcours en prenant une part du fardeau sûrement plus grande qu'il ne l'aurait fallu. Je suis reconnaissant à mes enfants, Sarah, Manon, William et Nathan de m'avoir toujours encouragé. Een speciaal bedankje voor Van Gogh qui m'a accompagné de ses ronronnements bienveillants, ces longues heures de solitude.

Ma reconnaissance va enfin à l'Université de Poitiers qui a reconnu ce travail de formation en acceptant d'alléger ma charge de service trois années durant. Le temps de préparation d'une thèse est communément décrit comme un parcours initiatique, pénible et ingrat. Je confesse, sans perversion aucune, avoir pris un certain plaisir à accomplir ce travail.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>v</b>
<b>1 Symbole de Kronecker affine</b>	<b>1</b>
1.1 Algèbres de Gorenstein . . . . .	1
1.2 Passage du local au global . . . . .	5
1.3 Intersection complète . . . . .	7
1.4 Symbole de Kronecker et Bezoutien . . . . .	9
1.4.1 Symbole de Kronecker dans le cas de racines simples . . . . .	10
1.5 Règles de calcul . . . . .	10
1.5.1 Loi de transformation . . . . .	10
1.5.2 Changement de l'ordre des variables . . . . .	11
1.5.3 Ajout ou retrait de variables . . . . .	11
<b>2 Variétés toriques</b>	<b>13</b>
2.1 Premières définitions et propriétés . . . . .	13
2.1.1 Tores et variété toriques . . . . .	13
2.1.2 Variétés affines toriques . . . . .	14
2.1.3 Cônes . . . . .	15
2.1.4 Variétés toriques normales . . . . .	17
2.1.5 Morphismes toriques . . . . .	19
2.2 La construction du quotient . . . . .	19
2.2.1 Diviseurs invariants par le tore. . . . .	19
2.2.2 Quotient géométrique et quotient quasi géométrique. . . . .	20
2.2.3 Réalisation d'une variété torique comme quotient d'une variété affine. . . . .	21
2.3 L'anneau de coordonnées homogènes . . . . .	22
2.3.1 Correspondance entre sous-variétés fermées et idéaux homogènes. . . . .	22
2.3.2 Coordonnées homogènes. . . . .	23

2.3.3	Faisceau associé à un diviseur $T_N$ -invariant. . . . .	25
2.4	Polynômes de degré sans points de base et polynômes de degré amples . . . . .	25
2.4.1	Caractérisation des diviseurs de Cartier $T_N$ -invariants. . . . .	26
2.4.2	Diviseurs sans points de base. . . . .	27
2.4.3	Diviseurs amples. . . . .	28
<b>3</b>	<b>Éclatement d'une variété torique</b> . . . . .	<b>29</b>
3.1	Raffinement d'un éventail . . . . .	29
3.2	Raffinement d'un éventail non simplicial en un éventail simplicial . . . . .	32
3.2.1	Méthode 1 : ajout de rayons à l'éventail . . . . .	32
3.2.2	Méthode 2 : $\Sigma(1) = \Sigma'(1)$ . . . . .	32
3.3	Morphisme d'éclatement entre deux variétés toriques . . . . .	34
3.3.1	Morphisme d'éclatement . . . . .	34
3.3.2	Composée de deux morphismes d'éclatement . . . . .	36
3.3.3	Extension au cas de $r$ vecteurs . . . . .	38
3.3.4	Généralisation . . . . .	38
3.4	Morphisme d'éclatement entre deux variétés toriques, cas non simplicial . . . . .	39
3.4.1	Morphisme d'éclatement . . . . .	40
3.4.2	Effet d'un morphisme d'éclatement sur un diviseur . . . . .	43
3.4.3	Éventail dual d'un polytope d'un diviseur sans points de base . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Symbole de Kronecker dans le tore</b> . . . . .	<b>51</b>
4.1	Variété torique projective associée à une famille de polynômes de Laurent . . . . .	51
4.2	Homogénéisation d'un polynôme de Laurent . . . . .	56
4.3	Symbole de Kronecker dans le tore, résidu torique et résidu global dans le tore, cas simplicial . . . . .	57
4.3.1	Symbole de Kronecker dans le tore, cas où $P$ est premier . . . . .	57
4.3.2	Lien entre résidu global et symbole de Kronecker . . . . .	60
4.3.3	Introduction d'un rayon dans l'intérieur d'un cône de dimension maximale . . . . .	64
4.3.4	Introduction d'un rayon dans un cône de dimension non maximale . . . . .	68
4.3.5	Raffinement de l'éventail dual de $P$ par ajout de $r$ vecteurs primitifs à coordonnées entières . . . . .	68
4.3.6	Raffinement de l'éventail dual de $P$ par ajout d'un vecteur primitif à coordonnées rationnelles . . . . .	74
4.3.7	Caractérisation du symbole de Kronecker à l'aide d'un éclatement . . . . .	77
4.4	Symbole de Kronecker, cas où $P$ n'est pas premier . . . . .	77

## TABLE DES MATIÈRES

4.4.1	Construction du symbole de Kronecker dans le cas non simplicial . . . . .	77
4.4.2	Egalité du symbole de Kronecker et du résidu global dans le tore dans le cas non simplicial . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Calculs</b>	<b>87</b>
5.1	Algorithmes de calcul du symbole de Kronecker . . . . .	87
5.1.1	Algorithme de calcul du symbole de Kronecker affine . . . . .	87
5.1.2	Algorithme de calcul du symbole de Kronecker dans le tore . . . . .	88
5.2	Exemples de calcul dans le cas simplicial . . . . .	89
5.2.1	Etude d'un exemple simplicial en dimension 2 . . . . .	89
5.2.2	Deux exemples supplémentaires en dimension 2 . . . . .	94
5.2.3	Étude d'un exemple en dimension 3 . . . . .	98
5.2.4	Étude d'exemples non simpliciaux . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Symbole de Kronecker torique</b>	<b>115</b>
6.1	Symbole de Kronecker dans une variété torique complète . . . . .	115
6.2	Extension de la définition au cas non simplicial . . . . .	123



# Introduction

## Le contexte d'étude

On considère  $A$  une algèbre sur un corps  $\mathbb{K}$  commutatif de dimension vectorielle finie. L'espace vectoriel dual  $A^*$  des  $\mathbb{K}$ -formes sur  $A$  hérite d'une structure de  $A$ -module où la forme  $a \cdot \ell$  avec  $a \in A$  et  $\ell \in A^*$  est définie par  $(a \cdot \ell)(x) = \ell(ax)$  pour tout  $x \in A$ . Sous certaines conditions, il arrive que  $A$  et  $A^*$  soient  $A$ -isomorphes. L'existence d'une structure de  $A$ -module libre pour  $A^*$  est conditionnée à l'existence de générateurs libres pour le  $A$ -module  $\text{Ann}(\ker \delta)$  où  $\delta$  est le morphisme :  $A \otimes A \rightarrow A$ ,  $x \otimes y \mapsto xy$ . Le lien entre un générateur de  $A^*$  appelée forme dualisante et d'un générateur libre de  $\text{Ann}(\ker \delta)$  appelé bezoutien généralisé peut être précisé comme suit.

Soit  $a_1, \dots, a_n$  une  $\mathbb{K}$  base de  $A$ . Si  $\ell$  est une forme dualisante sur  $A$  alors il existe une base  $(b_1, \dots, b_n)$  telle que  $(a_i \cdot \ell)(b_j) = \delta_{i,j}$  où  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$  et  $B = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$  est un bezoutien généralisé.

Réciproquement si  $B$  est un bezoutien généralisé alors  $B$  s'écrit sous la forme  $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$  où  $(b_i)$  est une base de  $A$ . C'est l'unique forme linéaire telle que  $\sum_{i=1}^n \ell(a_i) b_i = 1$ .

Dans le cas où  $\mathbb{K}$  est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et  $A$  est donné comme quotient de l'algèbre  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] = \mathbb{K}[X]$  par une famille de  $n$  polynômes  $F = (F_1, \dots, F_n)$  en intersection complète on montre alors que  $Bez$ , l'image du bezoutien de  $(F_1, \dots, F_n)$  dans le quotient  $\mathbb{K}[X, Y]/\langle F(X), F(Y) \rangle$ , est un bezoutien généralisé. La démonstration est donnée dans [13] et dans [10]. On appelle symbole de Kronecker, la forme dualisante associée. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , le symbole de Kronecker s'identifie au résidu classique [7]. On montre que les deux notions coïncident pour des zéros simples. La preuve du cas général repose sur le théorème de Bezout local. Le schéma de la preuve est décrit dans [14].

## Description du travail conduit dans la thèse

En suivant l'approche développée dans [14], nous définissons le symbole de Kronecker dans le tore pour une famille  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $n$  polynômes de Laurent en  $n$  variables ayant un nombre fini de zéros communs dans le tore  $(\mathbb{C}^*)^n$ . La démarche reprend celle initiée par Cattani et Dickenstein dans [4] pour le calcul du résidu global dans le tore. Le théorème 4 dans [4] fait le lien entre le résidu global défini par les  $f_k$  et le résidu torique d'une famille de  $n + 1$  polynômes homogènes  $F_0, \dots, F_n$  pour une certaine variété torique liée aux  $f_k$ . Les travaux présentés par Khovanskii dans [9] montrent que, si les  $f_k$  sont réguliers par rapport à leurs polyèdres de Newton, la variété torique  $X_P$ , où  $P$  est la somme de Minkowski des polyèdres de Newton des  $f_k$ , fournit une compactification du tore dans laquelle les fermetures des zéros des  $f_k$  sont sans intersection en dehors du tore. Nous donnons dans le chapitre 4 proposition 4.2 une autre

démonstration de ce résultat basée sur des calculs élémentaires.

On considère donc une famille générique de  $n$  polynômes de Laurent  $f_1, \dots, f_n$  dans l'anneau  $\mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}]$  possédant un nombre fini de zéros dans le tore et de polytopes de Newton  $P_k$ . Le polytope  $P$ , somme de Minkowski, est de dimension  $n$  d'après la condition sur les zéros communs des  $f_k$ . La variété torique  $X_P$  définie par le polytope  $P$  admet un éventail complet. L'homogénéisation des  $f_k$  par rapport aux diviseurs de Cartier invariants par le tore et sans points de base définis par les polytopes  $P_k$  donne  $n$  polynômes homogènes dans l'anneau de coordonnées homogènes de  $X_P$ . Les polynômes  $F_k$  ont un nombre fini de zéros dans  $X_P$ , contenus dans le tore.

Nous savons qu'une variété torique définie par un éventail peut être représenté comme quotient géométrique ou quasi-géométrique d'une variété affine par un sous-groupe  $G$  du tore de la variété. Ainsi  $X_P \simeq (\mathbb{C}^s \setminus Z)/G$  où  $s$  est le nombre de facettes de  $P$  ou encore le nombre de rayons de son éventail dual et  $Z$  le lieu des zéros des monômes impropres associés aux cônes de l'éventail. Dans le cas simplicial, les points de  $X_P$  s'identifient aux orbites des points de  $\mathbb{C}^s \setminus Z$  sous l'action de  $G$ . On montre au chapitre 2 que tout point de  $X_P$  dans un ouvert affine  $U_\sigma \subset X_P$  où  $\sigma$  est un cône de dimension  $n$  est représenté par un nombre fini de systèmes de coordonnées homogènes privilégiés. Ces systèmes de représentation permettent de définir le symbole de Kronecker dans le tore à partir du symbole de Kronecker affine dans  $U_\sigma$ .

Lorsque l'éventail dual de  $P$  n'est pas simplicial, nous définissons le symbole de Kronecker dans le tore en réalisant un éclatement simplicial de la variété  $X_P$ . Nous cherchons donc à obtenir des expressions explicites des morphismes toriques qui traduisent le raffinement de  $\Sigma_P$  en un éventail simplicial.

Au chapitre 3, deux méthodes de raffinement d'un éventail non simplicial en un éventail simplicial sont envisagées. La première nécessite d'introduire de nouveaux rayons et permet de raffiner un éventail qu'il soit simplicial ou non. La seconde méthode consiste à compléter l'éventail en n'ajoutant que des cônes de dimension supérieure ou égale à deux. En représentant la variété  $X_P$  par le quotient d'une variété affine par un groupe réductif  $G$ , on constate que la seconde possibilité laisse le groupe  $G$  invariant puisqu'aucun rayon nouveau n'est apporté à l'éventail initial. Les polynômes homogènes  $F_k$  obtenus en homogénéisant les polynômes de Laurent  $f_k$  sur la variété  $X_P$  sont alors conservés sur la variété éclatée. De plus, le morphisme d'éclatement restreint aux tores des deux variétés est égal à l'identité. En revanche, le premier type d'éclatement modifie les deux éléments du quotient : les ouverts affines qui recouvrent la variété et le groupe  $G$  qui détermine la graduation sur l'anneau de coordonnées homogènes associé à  $X_P$ .

Afin de pouvoir suivre les polynômes  $F_k$  dans l'anneau de coordonnées homogènes de la variété éclatée, nous étudions, dans un premier temps, certains morphismes d'éclatement pour lesquels nous obtenons une forme explicite sur les espaces de coordonnées homogènes. Nous commençons par considérer les morphismes définis entre deux variétés toriques simpliciales traduisant le raffinement d'un éventail par ajout d'un rayon. On suppose que le rayon est engendré par un vecteur primitif qui possède une décomposition entière (et de fait positive) selon les vecteurs primitifs de son cône minimal (le terme « minimal » étant défini au sens de l'inclusion).

Le résultat obtenu dans le cas de l'ajout d'un rayon de ce type se généralise à  $r$  rayons. La situation examinée est la suivante. La variété initiale  $X$  est une variété torique simpliciale définie par un éventail  $\Sigma$ . Soient  $\eta_1, \dots, \eta_s$  les vecteurs primitifs qui engendrent les rayons de  $\Sigma$ . Les vecteurs primitifs  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$ , qui engendrent les rayons ajoutés pour raffiner  $\Sigma$ , sont choisis dans le support de  $\Sigma$  et à coordonnées entières dans leurs cônes minimaux. La variété éclatée

$Y$  est définie par l'éventail  $\Sigma'$  qui est un raffinement simplicial de  $\Sigma$ . Chaque vecteur  $\eta_{s+i}$  admet alors une décomposition unique telle que  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^s \alpha_{i,j} \eta_j$  où  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}^*$  si  $\eta_j$  est un vecteur qui engendre le cône minimal de  $\eta_{s+i}$  et  $\alpha_{i,j} = 0$  sinon. Le morphisme torique induit par le raffinement de  $\Sigma$  en  $\Sigma'$  est caractérisé sur les espaces de coordonnées homogènes par l'application polynomiale

$$\pi : (Y_1, \dots, Y_{s+r}) \longrightarrow \left( \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{i,1}} Y_1, \dots, \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{i,s}} Y_s \right).$$

L'application  $\pi$  passe au quotient et définit un morphisme torique  $\bar{\pi}$  de  $Y$  sur  $X$  qui est un isomorphisme sur les tores des variétés. Lorsque  $r > 1$ , il existe plusieurs éventails simpliciaux  $\Sigma'$  correspondant au raffinement de  $\Sigma$  par adjonction des  $r$  rayons engendrés par  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$ . Cependant tous les morphismes toriques induits sont décrits par la même application  $\pi$  sur les espaces de coordonnées.

L'expression de  $\pi$  nous permet de montrer la conservation du symbole de Kronecker entre les ouverts affines des deux variétés simpliciales se correspondant par le morphisme  $\bar{\pi}$ . La preuve est réalisée au chapitre 4 en utilisant les outils de calcul connus sur les symboles de Kronecker affines.

D'une manière générale, les morphismes toriques définissant un raffinement simplicial d'un éventail conservent certains diviseurs sans points de base : tout diviseur de Cartier invariant par le tore et sans points de base dans la variété initiale a un antécédent dans l'éclatement qui est encore un diviseur de Cartier, invariant par le tore et sans points de base. Ce résultat nous fournit les homogénéisations des  $f_k$  dans la variété éclatée. Plus précisément, si  $\pi^*$  désigne le morphisme dual du morphisme torique  $\bar{\pi}$  défini entre les variétés  $Y$  et  $X_P$  alors  $\pi^*(F_k)$  est le polynôme homogène sur  $Y$  obtenu par homogénéisation de  $f_k$  relativement au diviseur de la variété  $Y$ ,  $T_N$ -invariant et sans points de base de polytope  $P_k$ . On prouve ainsi que, si  $P$  est premier, (c'est-à-dire si son éventail dual est simplicial) le symbole de Kronecker, défini dans les ouverts affines des variétés, est conservé entre la variété  $X_P$  et son éclaté construit en raffinant l'éventail dual de  $P$  quel que soit le raffinement envisagé.

Si  $P$  n'est pas premier, le symbole de Kronecker dans le tore est défini dans un éclatement simplicial de la variété  $X_P$ . La définition est justifiée par le fait que les symboles de Kronecker calculés dans les éclatements simpliciaux de  $X_P$  sont tous égaux.

Le symbole de Kronecker dans le tore que nous construisons, coïncide avec le résidu global dans le tore. La preuve est donnée dans le cas où les polynômes  $F_k$  ont des racines communes simples.

En pratique, il n'est pas nécessaire que l'éventail soit simplicial pour déterminer le symbole de Kronecker. Puisque celui-ci est calculé dans un ouvert affine  $U_\sigma$  défini par un cône  $\sigma$  de dimension maximale, il suffit d'obtenir par éclatement de la variété initiale, un ouvert  $U_\sigma$  qui soit une variété affine simpliciale. En particulier, si l'éventail dual de  $P$  présente un cône maximal  $\sigma$  simplicial, le calcul du symbole de Kronecker peut s'effectuer directement dans l'ouvert  $U_\sigma$ .

Le chapitre 5 fournit plusieurs exemples de calculs du symbole de Kronecker dans le tore pour des polytopes  $P$  premiers et non premiers en dimension 2 et 3.

Le dernier chapitre vise à généraliser la construction du symbole de Kronecker dans le tore en définissant un symbole de Kronecker torique dans une variété projective  $X$  caractérisée par un polytope  $P$  premier relativement à une famille  $\mathcal{F} = (F_0, \dots, F_n)$  de  $n + 1$  polynômes homogènes pour le degré défini par le groupe de Chow. Soit  $\Delta_k$  un diviseur invariant par le tore représentant

du degré de  $F_k$  alors  $F_k$  est l'homogénéisation par rapport à  $\Delta_k$  d'un polynôme de Laurent  $f_k$  de polytope de Newton  $P_k$ .

Les conditions vérifiées par les polynômes  $F_k$  sont les suivantes :

- les  $F_k$  sont sans zéros communs dans  $X$ ,
- toute famille  $\mathcal{F}_{\tilde{k}} = (F_0, \dots, F_{k-1}, F_{k+1}, \dots, F_n)$  admet un nombre fini de zéros dans le tore de  $X$ ,
- les diviseurs  $\Delta_k$  sont des diviseurs de Cartier sans points de base et  $P_{\Delta_k}$  le polytope défini par le diviseur  $\Delta_k$  est égal à  $P_k$  et la somme de Minkowski des  $P_{\Delta_k}$  est un polytope de dimension maximale d'un diviseur de Cartier invariant par le tore et sans points de base.

La définition s'étend au cas où  $P$  n'est pas premier en considérant comme dans le cas précédent, un raffinement simplicial de l'éventail de  $X$ .

# Chapitre 1

## Symbole de Kronecker affine

Ce chapitre introductif rassemble les principaux résultats qui conduisent à la définition du symbole de Kronecker affine et présente in fine les règles de calcul sur le symbole de Kronecker affine qui seront utilisées à partir du chapitre 4. Les résultats énoncés sans démonstration sont prouvés dans [10] ou [13].

### 1.1 Algèbres de Gorenstein

Dans cette section,  $A$  désigne une  $\mathbb{K}$ -algèbre commutative et unitaire, de dimension finie sur un corps  $\mathbb{K}$  commutatif et  $\hat{A}$ , l'ensemble des formes  $\mathbb{K}$ -linéaires sur  $A$ .

Le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\hat{A}$  dispose d'une structure naturelle de  $A$ -module. Pour tout  $(a, \lambda) \in A \times \hat{A}$ , on définit  $a \cdot \lambda \in \hat{A}$  par  $(a \cdot \lambda)(x) = \lambda(ax)$ . L'espace  $A \otimes_{\mathbb{K}} A$  a une structure d'anneau et peut être muni également d'une structure de  $A$ -module. Pour tout  $a \in A$  et pour  $x \in A \otimes_{\mathbb{K}} A$ , l'élément  $a \cdot x$  est défini comme suit :  $a \cdot x = (a \otimes 1)x$ .

$$\begin{aligned} \text{L'application } \delta : \quad A \otimes_{\mathbb{K}} A &\longrightarrow A \\ \sum_i a_i \otimes b_i &\longmapsto \sum_i a_i b_i \end{aligned}$$

est un  $A$ -morphisme et son noyau  $\ker \delta$  est engendré comme  $A$ -module par les éléments de la forme  $a \otimes 1 - 1 \otimes a$  avec  $a \in A$ .

**Lemme 1.1.** *Pour tout  $x \in A \otimes_{\mathbb{K}} A$ ,  $x = \sum_{i=1}^p a_i \otimes b_i$  où  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont deux familles de vecteurs linéairement indépendants de  $A$ .*

**Preuve.** Soit  $x \in A \otimes_{\mathbb{K}} A$  alors  $x = \sum_{i,j} \alpha_i \otimes \beta_j$ ,  $\alpha_i, \beta_j \in A$ . On peut extraire de la famille  $(\beta_j)$ , une sous-famille libre  $(\beta_j)_{j=1, \dots, s}$  tel que  $x = \sum_{j=1}^s \alpha'_j \otimes \beta_j$  avec  $\alpha'_j \neq 0$  pour tout  $j = 1, \dots, s$ .

On construit par induction deux familles libres qui décomposent  $x$  dans  $A \otimes_{\mathbb{K}} A$ .

On suppose que  $(\alpha'_j)_{j=1, \dots, n}$  soit libre,  $n < s$ .

Si  $(\alpha'_j)_{j=1, \dots, n+1}$  est une famille libre, on poursuit la construction avec les familles libres  $(\alpha'_j)_{j=1, \dots, n+1}$  et  $(\beta_j)_{j=1, \dots, s}$ .

Sinon  $\alpha'_{n+1} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha'_j$  alors  $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha'_j \otimes \beta_j = \sum_{j=1}^n \alpha'_j \otimes (\beta_j + \lambda_j \beta_{n+1})$ .

On pose  $\beta'_j = \beta_j + \lambda_j \beta_{n+1}$  pour tout  $j = 1, \dots, n$ . La famille  $(\beta'_j)_j$ ,  $j = 1, n-1, n+1, s$  est encore une famille libre.

Au terme de la récurrence, on obtient deux familles libres respectivement  $(a_j)$  et  $(b_j)$  tel que  $x = \sum_{j=1}^p a_j \otimes b_j$ ,  $p \leq s$ .  $\square$

**Proposition 1.1.** *L'application  $\mathbb{K}$ -linéaire  $\triangleright$  :*

$$\begin{aligned} A \otimes_{\mathbb{K}} A &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\hat{A}, A) \\ x &\longmapsto x^{\triangleright} : \lambda \in \hat{A} \mapsto (\lambda \otimes \text{id})(x) \in A \end{aligned}$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

**Preuve.** Supposons que  $\triangleright$  ne soit pas injectif. Soit  $x$  un élément non nul de  $\ker \triangleright$ . D'après le lemme 1.1,  $x = \sum_{i=1}^p a_i \otimes b_i$  où  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont deux familles de vecteurs linéairement indépendants. Il existe  $\lambda \in \hat{A}$  tel que  $\lambda(a_1) = 1$  et  $\lambda(a_i) = 0$  pour  $1 < i \leq p$  puisque les vecteurs  $(a_i)$  forment une famille libre.

Alors  $x^{\triangleright}(\lambda) = b_1 = 0$  ce qui contredit le fait que  $(b_i)$  est une famille libre. Le morphisme  $\triangleright$  est donc injectif et par suite bijectif puisque les deux espaces ont la même dimension finie.  $\square$

L'ensemble  $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\hat{A}, A)$  des applications  $A$ -linéaires de  $\hat{A}$  dans  $A$  a une structure naturelle de  $A$ -module.

De même, l'ensemble  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  des éléments de  $A \otimes_{\mathbb{K}} A$ , annulateurs de  $\ker \delta$  a une structure de  $A$ -module héritée de celle de  $A \otimes_{\mathbb{K}} A$ .

On montre alors le théorème suivant :

**Théorème 1.1.** *L'application  $\triangleright$  induit un isomorphisme de  $A$ -modules entre  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  et  $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\hat{A}, A)$ .*

**Preuve.** Soit  $x = \sum_{i=1}^p a_i \otimes b_i \in A \otimes_{\mathbb{K}} A$ .

$$\begin{aligned} x \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta) &\iff \forall a \in A, \quad x(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = 0 \\ &\iff \forall a \in A, \quad \sum_i a a_i \otimes b_i = \sum_i a_i \otimes a b_i \\ &\iff \forall a \in A, \quad \left( \sum_i a a_i \otimes b_i \right)^{\triangleright} = \left( \sum_i a_i \otimes a b_i \right)^{\triangleright} \\ &\iff \forall a \in A, \forall \lambda \in \hat{A}, \quad \sum_i \lambda(a a_i) b_i = \sum_i \lambda(a_i) a b_i \\ &\iff \forall a \in A, \forall \lambda \in \hat{A}, \quad \sum_i ((a \cdot \lambda)(a_i)) b_i = a \sum_i \lambda(a_i) b_i \\ &\iff \forall a \in A, \forall \lambda \in \hat{A}, \quad x^{\triangleright}(a \cdot \lambda) = a(x^{\triangleright}(\lambda)) \\ &\iff x^{\triangleright} \in \text{Hom}_{\mathbb{A}}(\hat{A}, A). \end{aligned}$$

La preuve ci-dessus montre également que  $(a \cdot x)^{\triangleright} = a \cdot x^{\triangleright}$ . L'application  $\triangleright$  est donc un  $A$ -isomorphisme entre les  $A$ -modules  $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\hat{A}, A)$  et  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$ .  $\square$

Toute forme linéaire  $\lambda \in \hat{A}$  définit une forme  $\mathbb{K}$ -bilinéaire et symétrique  $\Phi_\lambda$  sur  $A$  telle que

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad \Phi_\lambda(a, b) = \lambda(a \cdot b).$$

**Définition 1.1.** On dit que  $\lambda$  est une forme dualisante de  $A$  si la forme bilinéaire  $\Phi_\lambda$  est non dégénérée.

**Définition 1.2.** L'algèbre  $A$  est une algèbre de Gorenstein ou encore de Frobenius si elle admet une forme dualisante.

Le théorème suivant donne une caractérisation des algèbres de Gorenstein.

**Théorème 1.2.** Soit  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre commutative et unitaire de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) Il existe une forme dualisante sur  $A$ .
- b)  $A$  et  $\hat{A}$  sont  $A$ -isomorphes.
- c) Il existe un élément  $B \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  tel que  $B = \sum_{i=1}^d a_i \otimes b_i$  où  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont des  $\mathbb{K}$ -bases de  $A$ .

**Preuve.**

$a \Leftrightarrow b$  Soient  $\lambda \in \hat{A}$  et  $\Phi_\lambda$  la forme bilinéaire associée à  $\lambda$ . L'élément  $\lambda$  induit un  $A$ -morphisme  $\varphi_\lambda : A \rightarrow \hat{A}$  ;  $a \mapsto a \cdot \lambda$ . La non-dégénérescence de  $\Phi_\lambda$  équivaut à l'injectivité du  $\mathbb{K}$ -morphisme  $\varphi_\lambda$  et donc à sa bijectivité puisque  $A$  et  $\hat{A}$  sont des espaces vectoriels de dimension finie.

$b \Rightarrow c$  Soit  $\varphi$  un  $A$ -isomorphisme entre  $A$  et  $\hat{A}$  et  $\lambda = \varphi(1)$ . Soit  $(a_1, \dots, a_d)$  une base de  $A$  alors  $(\varphi(a_1) = a_1 \cdot \lambda, \dots, \varphi(a_d) = a_d \cdot \lambda)$  est une base de  $\hat{A}$  car  $\varphi$  est en particulier un  $\mathbb{K}$ -isomorphisme.

On considère  $(b_1, \dots, b_d)$  la base duale (au sens classique) de  $(a_1 \cdot \lambda, \dots, a_d \cdot \lambda)$  i.e  $(a_i \cdot \lambda)(b_j) = \delta_{i,j}$ ,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2$  alors  $(b_j)$  est la base duale de  $(a_i)$  par rapport à la forme dualisante  $\lambda$  et

$$\forall a \in A, \quad a = \sum_{i=1}^d ((a_i \cdot \lambda)(a)) b_i = \sum_{i=1}^d \lambda(a_i a) b_i.$$

$$\text{De même} \quad a = \sum_{i=1}^d (b_i \cdot \lambda)(a) a_i = \sum_{i=1}^d \lambda(b_i a) a_i.$$

On pose  $B = \sum_{i=1}^d a_i \otimes b_i$ . Montrons que  $B \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } a \in A, \quad (a \otimes 1)B &= \sum_{i=1}^d aa_i \otimes b_i \\
 &= \sum_{i=1}^d \left( \sum_{j=1}^d \lambda(aa_i b_j) a_j \right) \otimes b_i \\
 &= \sum_{j=1}^d a_j \otimes \left( \sum_{i=1}^d \lambda(aa_i b_j) b_i \right) \\
 &= \sum_{j=1}^d a_j \otimes ab_j \\
 &= B(1 \otimes a).
 \end{aligned}$$

D'où  $B \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$ .

$c \Rightarrow b$  Soit  $B = \sum_{i=1}^d a_i \otimes b_i \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  avec  $(a_i)$  et  $(b_i)$  deux bases de  $A$ . D'après le théorème 1.1,  $B^\triangleright$  est un  $A$ -morphisme entre  $\hat{A}$  et  $A$ . On considère  $(a_j^*)$  la base de  $\hat{A}$  duale de  $(a_i)$  (i.e  $a_j^*(a_i) = \delta_{i,j}$ ) alors  $B^\triangleright(a_i^*) = b_i$ , pour tout  $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$ .  $B^\triangleright$  est donc un isomorphisme entre  $\hat{A}$  et  $A$ . La forme dualisante associée à l'élément  $B \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  est  $\lambda = (B^\triangleright)^{-1}(1)$ .  $\square$

**Corollaire 1.1.** *Soit  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre commutative et unitaire de dimension finie.*

*Soit  $\lambda$  une forme dualisante sur  $A$  et  $(a_1, \dots, a_d)$  une base de  $A$ .*

*L'élément  $B_\lambda = \sum_{i=1}^d a_i \otimes b_i$  où  $(a_j \cdot \lambda)(b_i) = \delta_{i,j}$  engendre le  $A$ -module libre  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$ . De plus, le morphisme  $B_\lambda^\triangleright$  est un isomorphisme qui engendre  $\text{Hom}_A(\hat{A}, A)$  comme  $A$ -module libre.*

**Preuve.** Si  $\lambda$  est une forme dualisante,  $\hat{A}$  est un module libre de rang 1 d'où  $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\hat{A}, A)$  et par suite  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  sont des  $A$ -modules libres de rang 1.

La famille  $(a_1 \cdot \lambda, \dots, a_d \cdot \lambda)$  est une base de  $\hat{A}$  et par définition des  $(b_i)$ ,  $(b_1, \dots, b_d)$  est sa base duale (au sens classique). Par conséquent, les bases  $(a_i)$  et  $(b_i)$  sont duales par rapport à  $\lambda$ . La preuve  $b \Rightarrow c$  du théorème 1.2 montre que  $B_\lambda \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$ . Par suite,  $B_\lambda^\triangleright \in \text{Hom}_A(\hat{A}, A)$ . Or  $B_\lambda^\triangleright(\lambda) = \sum_{i=1}^d \lambda(a_i) b_i = \sum_{i=1}^d (a_i \cdot \lambda)(1) b_i = \sum_{i=1}^d b_i^*(1) b_i = 1$  donc  $B_\lambda^\triangleright$  est un  $A$ -isomorphisme.

Soit  $\psi \in \text{Hom}_A(\hat{A}, A)$  défini par  $\psi(\lambda) = a$ . On a  $\psi(\lambda) = a B_\lambda^\triangleright(\lambda) = (a \cdot B_\lambda^\triangleright)(\lambda)$  d'où  $\chi = a \cdot B_\lambda^\triangleright$  et  $B_\lambda^\triangleright$  engendre  $\text{Hom}_A(\hat{A}, A)$ . Comme  $\text{Hom}_A(\hat{A}, A)$  et  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  sont  $A$ -isomorphes,  $B_\lambda$  engendre  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$ .  $\square$

*Remarque 1.1.* Soit  $\lambda$  une forme dualisante sur  $A$  et  $B_\lambda \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  tel que  $B_\lambda^\triangleright(\lambda)$ . Pour toute  $\mathbb{K}$ -base  $(a_1, \dots, a_d)$  de  $A$ , on a

$$B_\lambda = \sum_{i=1}^d a_i \otimes B_\lambda^\triangleright(a_i^*) \quad \text{où } a_i^*(a_j) = \delta_{i,j}.$$

On dispose d'une réciproque du corollaire 1.1 qui permet de conclure à une correspondance bijective entre formes dualisantes sur  $A$  et générateurs du  $A$ -module  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$ . Cette

correspondance sera utilisée dans la partie 1.3 pour construire une forme dualisante à partir d'un générateur de  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$ .

**Proposition 1.2.** *Si  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  est un  $A$ -module libre de rang 1 engendré par  $B$  alors  $(B^\triangleright)^{-1}(1)$  est une forme dualisante sur  $A$ .*

**Preuve.** Soit  $B$  un générateur de  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  alors le morphisme  $B^\triangleright$  engendre  $\text{Hom}_A(\hat{A}, A)$  car le morphisme  $\triangleright$  est un  $A$ -isomorphisme de  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  sur  $\text{Hom}_A(\hat{A}, A)$ .

Montrons que  $B^\triangleright$  est bijectif.

Si  $B^\triangleright$  n'est pas bijectif,  $B^\triangleright(\hat{A})$  est un idéal propre de  $A$  inclus dans un idéal maximal  $\mathcal{M}_1$ . Comme  $A$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension vectorielle finie,  $A$  est un anneau noethérien de dimension de Krull égale à 0. L'idéal nul admet donc une décomposition primaire minimale de la forme  $\prod_{i=1}^s \mathcal{M}_i^{r_i}$  où les  $\mathcal{M}_i$  sont les idéaux maximaux de  $A$  avec  $\mathcal{M}_1^{r_1-1} \prod_{i \neq 1} \mathcal{M}_i^{r_i} \neq 0$ . On peut donc construire un élément  $a \in A \setminus \{0\}$  tel que  $aB^\triangleright(\hat{A}) = 0$  alors  $a \cdot B^\triangleright = (a \cdot B)^\triangleright = 0$  et par suite  $a \cdot B = 0$  ce qui contredit l'hypothèse.

Donc  $B^\triangleright$  est bijectif. La  $A$ -linéarité de  $B^\triangleright$  assure que  $\lambda = (B^\triangleright)^{-1}(1)$  engendre  $\hat{A}$  comme  $A$ -module et  $\lambda$  est une forme dualisante sur  $A$  par le théorème 1.2.  $\square$

**Définition 1.3.** L'élément  $B_\lambda \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  associé à une forme dualisante  $\lambda \in \hat{A}$  est appelé le bezoutien généralisé de  $\lambda$ .

On termine cette section par la définition du jacobien généralisé.

**Définition 1.4.** Soit  $tr_{A|\mathbb{K}} \in \hat{A}$  la fonction « trace » qui, à un élément  $a \in A$ , associe la trace de l'endomorphisme défini par la multiplication de  $a$  dans  $A$ . Si  $\lambda$  est une forme dualisante, il existe  $J_\lambda \in A$  tel que  $tr_{A|\mathbb{K}} = J_\lambda \cdot \lambda$ . L'élément  $J_\lambda$  est appelé le jacobien généralisé de  $\lambda$ .

**Proposition 1.3.** *Soit  $\lambda$  une forme dualisante sur  $A$ . On considère  $(a_1, \dots, a_d)$  une base de  $A$  et  $(b_1, \dots, b_d)$  sa base duale par rapport à  $\lambda$  alors*

$$J_\lambda = \sum_i a_i b_i = \delta(B).$$

**Preuve.** Soit  $a \in A$ , pour tout  $i$  on a  $aa_i = \sum_{j=1}^d \lambda(aa_i b_j) a_j$  d'où

$$tr_{A|\mathbb{K}}(a) = \sum_{i=1}^d \lambda(aa_i b_i) = \lambda(a \cdot \sum_{i=1}^d a_i b_i) = \left( \sum_{i=1}^d a_i b_i \right) \cdot \lambda(a).$$

La seconde égalité vient directement.  $\square$

## 1.2 Passage du local au global

Toute  $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie  $A$  est isomorphe au quotient  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/I$  d'un anneau de polynômes par un idéal 0-dimensionnel. L'idéal  $I$  admet dans  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  une décomposition primaire minimale  $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_d$  où  $\sqrt{Q_i} = \mathcal{M}_i$ , un idéal maximal de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$

contenant  $I$ . De plus, si  $\overline{\mathbb{K}}$  est une clôture algébrique de  $K$  et  $Z_{\overline{\mathbb{K}}}(I) = \{\xi_1, \dots, \xi_d\}$ ,  $\mathcal{M}_i = \langle X_1 - \xi_{i,1}, \dots, X_n - \xi_{i,n} \rangle \cap \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ .

Pour tout  $i = 1, \dots, d$ , on considère  $A_i$  le transporteur de l'idéal  $Q_i/I$  dans l'idéal nul de  $A$  i.e  $A_i = \{a \in A \mid aq = 0, \forall q \in Q_i/I\}$ .

**Théorème 1.3.** *Pour tout  $i$ , l'idéal  $A_i$  est une sous-algèbre de  $A$ . De plus,*

$$A = \bigoplus_i A_i.$$

D'après le théorème 1.3,  $1 \in A$  se décompose de manière unique dans les sous-algèbres  $A_i$ . Il existe un unique  $(e_1, \dots, e_d) \in A_1 \times \dots \times A_d$  tel que  $1 = e_1 + \dots + e_d$  dans  $A$ . On a alors

$$e_1 + \dots + e_d = 1 = 1^2 = e_1^2 + \dots + e_d^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} e_i e_j.$$

Comme  $A_i \cap A_j = 0$  pour tout  $i \neq j$ , on en déduit que  $e_i e_j = 0$  et  $e_i^2 = e_i$  pour tout  $i \neq j$ . Toute algèbre finie admet donc une base d'idempotents orthogonaux.

**Proposition 1.4.** *La sous-algèbre  $A_i$  est égale à  $Ae_i$  et  $e_i$  est son élément neutre.*

*Remarque 1.2.* La base d'idempotents orthogonaux  $(e_1, \dots, e_d)$  associée aux éléments  $\xi_1, \dots, \xi_d$  de  $Z_{\overline{\mathbb{K}}}(I)$  vérifie

$$e_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

**Proposition 1.5.** *La sous-algèbre  $A_i$  est un anneau local d'idéal maximal  $\mathcal{M}_i/I$ .*

*Remarque 1.3.* Toute forme linéaire  $\lambda \in \hat{A}$  donne une forme linéaire  $e_i \cdot \lambda \in \hat{A}_i$  et  $\lambda = \sum_{i=1}^d e_i \cdot \lambda$ .

**Proposition 1.6.** *Soit  $B \in A \otimes A$  alors  $B \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  si, et seulement si,  $B = B_1 + \dots + B_d$  avec  $B_i = (e_i \otimes e_i)B \in \text{Ann}_{A_i \otimes_{\mathbb{K}} A_i}(\ker \delta_i)$  et  $\ker \delta_i$  est le  $A_i$ -module de  $A_i \otimes A_i$  engendré par les éléments  $(a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)$  de  $A_i \otimes A_i$ .*

**Preuve.** La décomposition  $A = \bigoplus_{i=1}^d A_i$  induit la décomposition suivante  $A \otimes A = \bigoplus_{i,j} A_i \otimes A_j$ ,  $i, j = 1, \dots, d$  et la famille  $(e_i)_{i=1}^d$  d'idempotents orthogonaux de  $A$  donne la famille  $(e_i \otimes e_j)_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, d$  d'idempotents orthogonaux de  $A \otimes A$ . Un élément  $B \in A \otimes A$  se décompose donc sous la forme  $B = \sum_{i,j=1}^d B(e_i \otimes e_j) = \sum_{i,j=1}^d B_{i,j}$ ,  $B_{i,j} \in A_i \otimes A_j$ .

Soit  $B \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$ , alors  $(e_k \otimes 1)B = (1 \otimes e_k)B$ . On obtient  $\sum_{j=1}^d B_{k,j} = \sum_{i=1}^d B_{i,k}$  car  $e_k \cdot e_i = 0$  pour  $i \neq k$ . On en déduit par unicité de la décomposition dans la somme directe  $\sum_{j=1}^d B_{k,j} = \sum_{i=1}^d B_{i,k} = B_{k,k}$ . D'où  $B = \sum_{k=1}^d B_{k,k}$ .

Or  $B_{k,k} = (e_k \otimes e_k)B = (e_k \otimes 1)(1 \otimes e_k)B = (e_k^2 \otimes 1)B = (e_k \otimes 1) \cdot B = (1 \otimes e_k) \cdot B$ . Ainsi pour tout  $a \in A$ ,  $(a \otimes 1)B_{k,k} = (ae_k \otimes 1)B = (1 \otimes ae_k)B = (1 \otimes a)B_{k,k}$ . Donc  $B_{k,k} \in \text{Ann}_{A_k \otimes_{\mathbb{K}} A_k}(\ker \delta_k)$ .

Réciproquement, soit  $B = \sum_{k=1}^d B_k$  avec  $B_k \in \text{Ann}_{A_k \otimes_{\mathbb{K}} A_k}(\ker \delta_k)$  alors  $B_k = (e_k \otimes e_k)B$ . On vérifie aussitôt que  $B \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$ .  $\square$

**Proposition 1.7.** *Un élément  $B$  est une base du  $A$ -module  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  si, et seulement si, pour tout  $k = 1, \dots, d$ ,  $B_k = (e_k \otimes e_k)B = e_k \cdot B$  est une base du  $A_k$ -module  $\text{Ann}_{A_k \otimes_{\mathbb{K}} A_k}(\ker \delta_k)$ .*

**Preuve.** On a montré à la proposition 1.6 que  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta) = \sum_{k=1}^d \text{Ann}_{A_k \otimes_{\mathbb{K}} A_k}(\ker \delta_k)$ . Par conséquent,  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta) = \bigoplus_{k=1}^d \text{Ann}_{A_k \otimes_{\mathbb{K}} A_k}(\ker \delta_k)$  car  $\text{Ann}(\ker \delta_k) \subset A_k \otimes_{\mathbb{K}} A_k$ .

Supposons que  $B$  est une  $A$  base de  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  alors  $e_k \cdot B \in \text{Ann}_{A_k \otimes_{\mathbb{K}} A_k}(\ker \delta_k)$ . Soit  $x \in \text{Ann}_{A_k \otimes_{\mathbb{K}} A_k}(\ker \delta_k)$ , on a  $x \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  par suite  $x = a \cdot B$  avec  $a \in A$ . Comme  $e_k \otimes e_k$  est l'élément unité de l'anneau  $A_k \otimes A_k$ ,  $x = (e_k \otimes e_k)x = (e_k \otimes 1)x = e_k \cdot x = a \cdot (e_k \cdot B)$ . Soit  $a_k \in A_k$  tel que  $a_k \cdot (e_k \cdot B) = 0$  alors  $a_k e_k = 0$  et donc  $a_k = 0$  car  $a_k \in A_k$ .

Réciproquement, on considère  $B = \sum_{k=1}^d B_k$  où  $B_k$  est une  $A_k$ -base de  $\text{Ann}_{A_k \otimes_{\mathbb{K}} A_k}(\ker \delta_k)$ . Soit  $x \in \text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  alors  $x = \sum_{1 \leq k \leq d} a_k \cdot B_k$ ,  $a_k \in A_k$ . On a  $a_k \cdot B_k = a_k \cdot (e_k \cdot B) = (a_k e_k) \cdot B$ .

D'où  $x = (\sum_{1 \leq k \leq d} a_k e_k) \cdot B$ . Soit  $a \in A$  tel que  $a \cdot B = 0$  alors  $a e_k \cdot B = 0$  par unicité de la décomposition et  $a e_k = 0$  car  $e_k \cdot B$  est une base de  $\text{Ann}_{A_k \otimes_{\mathbb{K}} A_k}(\ker \delta_k)$  et finalement  $a = \sum_k a e_k = 0$ . On en déduit que  $B$  est une  $A$ -base de  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$ .  $\square$

**Corollaire 1.2.** *L'algèbre  $A$  est de Gorenstein si, et seulement si, les sous-algèbres locales  $A_1, \dots, A_d$  sont de Gorenstein.*

**Preuve.** Le corollaire 1.2 est une conséquence directe de la proposition 1.7 et du théorème 1.2.  $\square$

Si  $A$  est de Gorenstein et  $\lambda$  une forme dualisante associée au générateur  $B$  de  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  alors  $\lambda = (B^\flat)^{-1}(1)$ . Par suite,

$$\lambda = \left( \sum_{k=1}^d (B_k^\flat)^{-1}(1) \right) = \sum_{k=1}^d ((e_k \cdot B)^\flat)^{-1}(e_k) = \sum_{k=1}^d \lambda_k$$

où  $\lambda_k$  est la forme dualisante associée au générateur  $B_k = e_k \cdot B$  du  $A_k$ -module  $\text{Ann}_{A_k \otimes_{\mathbb{K}} A_k}(\ker \delta_k)$ .

Nous terminons cette section en donnant la relation entre deux générateurs de  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  et les formes dualisantes correspondantes.

**Proposition 1.8.** *Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux générateurs de  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  associés respectivement aux formes dualisantes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  alors il existe  $a \in A$  inversible tel que  $B_2 = a \cdot B_1$  et  $\lambda_2 = a^{-1} \cdot \lambda_1$ .*

**Preuve.** Puisque  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  est un  $A$ -module libre de rang 1, il existe  $a \in A$  inversible tel que  $B_2 = a \cdot B_1$  alors  $\lambda_2 = (B_2^\flat)^{-1}(1) = ((a \cdot B_1)^\flat)^{-1}(1) = (a \cdot B_1^\flat)^{-1}(1) = a^{-1} \cdot (B_1^\flat)^{-1}(1)$ . D'où  $\lambda_2 = a^{-1} \cdot \lambda_1$ .  $\square$

### 1.3 Intersection complète

Nous considérons le cas particulier d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie est donnée par le quotient de l'anneau  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  par une famille de  $n$  polynômes en intersection complète.

**Définition 1.5.** Les polynômes  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  sont en intersection complète si la variété  $Z_{\mathbb{K}}(f_1, \dots, f_i)$  est de dimension 0.

*Remarque 1.4.* Comme  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X]/\langle f_1, \dots, f_n \rangle) < +\infty \iff \dim(Z_{\mathbb{K}}(f_1, \dots, f_n)) = 0$ , les polynômes  $(f_1, \dots, f_n)$  forment une intersection complète si  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_n \rangle$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie..

**Définition 1.6.** Soit  $A$  un anneau commutatif, unitaire.

Une suite  $(a_1, \dots, a_r)$  d'éléments de  $A$  est dite régulière si

- i) L'idéal  $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$  est propre,
- ii) L'élément  $a_1$  n'est pas un diviseur de 0 dans  $A$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ ,  $a_{i+1}$  n'est pas un diviseur de 0 dans  $A/\langle a_1, \dots, a_i \rangle$ .

*Remarque 1.5.* Le caractère de régularité n'est pas conservé lorsqu'on permute les termes de la suite. La suite  $(X, Y(1-X), Z(1-X))$  est régulière dans  $\mathbb{K}[X, Y, Z]$ . En revanche, la suite  $(Y(1-X), Z(1-X), X)$  ne l'est pas. En effet,  $YZ(1-X) \in \langle Y(1-X) \rangle$  et  $Y \notin \langle Y(1-X) \rangle$ .

Dans certaines conditions, la propriété de régularité est conservée par permutation des termes.

**Proposition 1.9.** Soit  $(a_1, \dots, a_r)$  une suite régulière dans  $A$  contenue dans le radical de Jacobson de  $A$  (i.e l'intersection des idéaux maximaux de  $A$ ). Alors toute permutation de  $(a_1, \dots, a_r)$  est une suite régulière.

**Corollaire 1.3.** Dans un anneau local, toute suite obtenue en permutant les termes d'une suite régulière est régulière.

On introduit une notion moins exigeante que celle de suite régulière qui ne dépend pas de l'ordre des éléments de la suite.

**Définition 1.7.** Une suite  $(a_1, \dots, a_r)$  d'éléments de  $A$  est une suite quasi-régulière si

- i) L'idéal  $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$  est propre,
- ii) Pour tout idéal maximal  $\mathcal{M}$  contenant  $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ , la suite  $(a_1, \dots, a_r)$  est régulière dans  $A_{\mathcal{M}}$  le localisé de  $A$  par  $\mathcal{M}$ .

*Remarque 1.6.* Toute suite régulière est quasi-régulière.

On considère  $(a_1, \dots, a_r)$  et  $(b_1, \dots, b_r)$ , deux suites quasi-régulières de  $A$ , vérifiant  $\langle b_1, \dots, b_r \rangle \subseteq \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ . On note  $(\alpha_{i,j})$  des éléments de  $A$  tels que  $b_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{i,j} a_j$ . Le théorème de Wiebe décrit le lien entre deux suites quasi-régulières de même longueur liées par une relation matricielle.

**Théorème 1.4** (Théorème de Wiebe).

- i) La classe de  $\det(\alpha_{i,j})$  dans  $B = A/\langle b_1, \dots, b_r \rangle$  est indépendante du choix des  $\alpha_{i,j}$ .
- ii)  $\text{Ann}_B(\det(\alpha_{i,j})B) = \langle a_1, \dots, a_r \rangle B$ .
- iii)  $\text{Ann}_B(\langle a_1, \dots, a_r \rangle B) = \det(\alpha_{i,j})B$ .

**Preuve.** La preuve du théorème est donnée dans [10] p.219-220. □

**Proposition 1.10.** Soit  $A$  un anneau local noethérien et  $a$  un élément de  $A$  non-diviseur de 0 et non inversible alors  $\dim_{K_{\text{rull}}} A/aA = \dim_{K_{\text{rull}}} A - 1$ .

**Preuve.** On montre que l'idéal  $aA$  n'est contenu dans aucun des idéaux premiers minimaux de  $A$ .

Le résultat est immédiat si  $A$  est intègre. Si  $A$  n'est pas intègre, on considère  $(P_1, \dots, P_r)$  les idéaux premiers minimaux de  $A$ . Supposons que  $a \in P_i$ , on considère  $b \in \prod_{j \neq i} P_j$  alors  $ab \in \sqrt{0}$  et donc il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n b^n = 0$  mais alors  $a$  est un diviseur de 0 ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent,  $a \notin P_i$  quel que soit  $i = 1, \dots, r$ .

En relevant une chaîne d'idéaux premiers maximale au-dessus de  $aA$ , on obtient  $\dim_{\text{Krull}} A/aA \leq \dim_{\text{Krull}} A - 1$ .

On montre ensuite que  $\dim_{\text{Krull}} A/aA \geq \dim_{\text{Krull}} A - 1$ .

Soient  $P, Q$  deux idéaux premiers vérifiant  $Q \subsetneq P \subsetneq aA$ . Quitte à quotienter  $A$  par  $Q$ , on peut supposer que  $Q = 0$  et  $A$  intègre.

Si  $y \in P$  alors il existe  $c \in A$ ,  $y = ca$ . Comme  $a \notin P$ ,  $c \in P$  et  $P$  est premier,  $P = aP$ .

Soit  $(g_1, \dots, g_r)$  un système de générateurs de  $P$ . Quel que soit  $i$ ,  $g_i \in aP$ . On obtient le système linéaire :  $g_i = \sum_{j=1}^r ab_{ij} g_j$  avec  $b_{ij} \in A$  et  $i, j = 1, \dots, r$ .

On note  $G$  la matrice colonne formée des  $g_j$  et  $B$  la matrice  $r \times r$  formée des éléments  $ab_{ij}$ . On obtient l'égalité matricielle  $(I - B)G = 0$  où  $I$  est la matrice identité de dimension  $r$  et 0 la matrice colonne nulle de dimension  $r$ .

Les formules de Cramer donnent  $\det(I - B)g_i = 0$ . Il existe donc  $x \in aA$  tel que  $(1 - x)P = 0$ . Comme  $A$  est intègre, on en déduit que  $x = 1$ . D'où  $1 \in aA$  mais  $a$  est non inversible d'où la contradiction. Par suite,  $\dim_{\text{Krull}} A/aA \geq \dim_{\text{Krull}} A - 1$  ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 1.11.** *Soit  $A$  une algèbre de type finie intègre sur un corps  $\mathbb{K}$ . Les éléments  $(f_1, \dots, f_n)$  forment une suite quasi-régulière dans  $A$  si, et seulement si, l'anneau  $A/\langle f_1, \dots, f_n \rangle$  est de dimension de Krull égale à 0.*

**Preuve.** Comme  $A$  est intègre,  $\dim_{\text{Krull}} A = \dim_{\text{Krull}} A_{\mathcal{M}}$  où  $\mathcal{M}$  est un idéal maximal de  $A$ . On raisonne alors par récurrence en appliquant la proposition 1.10 à un anneau local  $A_{\mathcal{M}}$  tel que  $\mathcal{M} \supset (f_1, \dots, f_n)$ .  $\square$

En particulier, les polynômes  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  sont en intersection complète si, et seulement si, la suite  $(f_1, \dots, f_n)$  est quasi-régulière.

## 1.4 Symbole de Kronecker et Bezoutien

On suppose dans cette section que la famille  $f = (f_1, \dots, f_n)$  forme une intersection complète dans  $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . La  $\mathbb{K}$ -algèbre  $A = \mathbb{K}[X]/\langle f \rangle$  est donc de dimension finie.

Pour tout  $h \in \mathbb{K}[X]$ , on définit la matrice bezoutienne relative aux polynômes  $(h, f_1, \dots, f_n)$  :

$$\begin{pmatrix} h & \partial_1 h & \dots & \partial_n h \\ f_1 & \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n & \partial_1 f_n & \dots & \partial_n f_n \end{pmatrix}$$

où

$$\partial_i h(X, Y) = \frac{h(X_1, \dots, X_i, Y_{i+1}, \dots, Y_n) - h(X_1, \dots, X_{i-1}, Y_i, \dots, Y_n)}{X_i - Y_i}.$$

Le déterminant de cette matrice est appelé bezoutien de  $h$  relativement à la famille  $f$  et à la suite d'indéterminées  $X$  et sera noté  $\text{Bez}(h; f; X)$ . On notera encore  $\text{Bez}(f) = \text{Bez}(1; f; X)$  et  $\text{Bez}(h; f; X)$  la classe de  $\text{Bez}(h; f; X)$  dans  $A \otimes A$ .

**Proposition 1.12.** *L'élément  $\text{Bez}(1; f; X)$  appartient à  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  et le  $A$ -morphisme  $(\text{Bez}(1; f; X))^\flat$  réalise un isomorphisme entre  $\hat{A}$  et  $A$ .*

**Définition 1.8.** La forme dualisante associée au générateur  $\text{Bez}(h; f; X)$  de  $\text{Ann}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(\ker \delta)$  est appelée symbole de Kronecker et sera notée  $l(\cdot; f; X)$ . Sa définition dépend de l'ordre des polynômes dans la suite  $f$  et de l'ordre des variables dans la liste  $X$ . De même, on notera  $l_x(\cdot; f; X)$ , le symbole de Kronecker local sur l'anneau local  $A_x$ , associé à la racine  $x \in \bar{\mathbb{K}}$  commune à  $f$ .

### 1.4.1 Symbole de Kronecker dans le cas de racines simples

On suppose dans ce paragraphe que le corps  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos et que les racines communes à la famille de polynômes  $f$  sont simples.

**Proposition 1.13.** *Soient  $f = (f_1, \dots, f_n)$  une famille de polynômes en intersection complète. On note  $Z(f)$  l'ensemble fini des racines communes de  $f$ .*

*Si les racines  $\zeta \in Z(f)$  sont simples alors*

$$l(\cdot; f; X) = \sum_{\zeta \in Z(f)} \frac{1_\zeta(\cdot)}{\text{Jac}_f(\zeta)}$$

où  $\text{Jac}_f$  est le jacobien associé à la famille  $f$  et  $1_\zeta$  l'évaluation au point  $\zeta$  telle que pour tout  $a \in A = \mathbb{K}[X]/\langle f \rangle$ ,  $1_\zeta(a) = a(\zeta)$ .

Dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et où tous les zéros de  $f$  sont simples, le symbole de Kronecker coïncide avec le résidu analytique. La coïncidence entre le résidu analytique et le symbole de Kronecker reste vraie si les racines sont multiples. Pour se ramener au cas des racines simples, on opère une déformation de la famille polynomiale via l'introduction d'une nouvelle variable, le lecteur intéressé pourra se reporter à [14].

## 1.5 Règles de calcul

Nous présentons dans cette dernière partie, les différentes règles de calcul qui seront utilisées dans les calculs du symbole de Kronecker.

### 1.5.1 Loi de transformation

Soient  $f = (f_1, \dots, f_n)$  et  $g = (g_1, \dots, g_n)$  deux applications polynomiales qui définissent deux suites quasi-régulières de  $\mathbb{K}[X]$  et telles que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j.$$

On note  $\Delta$  la classe de  $\det(a_{ij})_{i,j}$  dans  $A = \mathbb{K}[X]/\langle f \rangle$ . La règle de Cramer implique que pour tout  $i$ ,  $\det(a_{i,j})f_i \in \langle g \rangle$  et donc la multiplication par  $\Delta$  définit un morphisme entre  $A$  et  $\mathbb{K}[X]/\langle g \rangle$ .

**Théorème 1.5.**

$$\forall h \in A, \quad l(h; f; X) = l(\Delta h; g; X)$$

**Corollaire 1.4.** *Le symbole de Kronecker est une fonction alternée des composantes  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $f$ .*

### 1.5.2 Changement de l'ordre des variables

On suppose que le corps de base est algébriquement clos.

**Proposition 1.14.** *Soit  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  et  $X_\sigma = (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ . Alors si  $\text{sgn}(\sigma)$  désigne la signature de la permutation  $\sigma$ ,*

$$\forall h \in A, \quad l(h; f; X) = \text{sgn}(\sigma)l(h; f; X_\sigma).$$

**Preuve.** On montre la proposition dans le cas où les racines sont simples. Il suffit de prouver l'égalité pour une transposition  $(i, j)$  avec  $1 \leq i < j \leq n$ .

$$\text{Pour tout } h \in A, \quad l(h; f; X) = \sum_{\zeta \in Z(f)} \frac{1_\zeta(h)}{\text{Jac}_f(\zeta)}.$$

La transposition des variables  $X_i$  et  $X_j$  change le signe de  $\text{Jac}_f(\zeta)$  pour tout  $\zeta \in Z(f)$  et donc

$$l(h; f; X) = -l(h; f; X_\sigma) \quad \text{pour } \sigma = (i, j).$$

On conclut dans le cas général, en déformant la famille  $f$  de telle façon qu'au voisinage d'un zéro  $\zeta$  tous les zéros soient simples. □

### 1.5.3 Ajout ou retrait de variables

Soient  $f = (f_1, \dots, f_n)$  une suite quasi-régulière de  $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  et  $(g_1, \dots, g_p)$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_p]$  telle que la suite  $(f, g)$  soit quasi-régulière dans  $\mathbb{K}[X, Y]$ . On désigne par  $\text{Jac}_Y(g)$  le jacobien de  $g$  calculé en les variables  $Y$ .

Pour tout  $x \in Z(f)$ , on note  $Z(g_x) = \{y \in \mathbb{K}^p \mid g(x, y) = 0\}$  et  $\mu(g_x)(y)$  la multiplicité de  $y$  comme zéro de la famille de polynômes  $g_x = g(x, Y)$ . On écrit de la même façon un polynôme dans l'anneau de polynômes ou dans l'anneau-quotient considéré.

**Théorème 1.6.** *Pour tout  $h \in \mathbb{K}[X]$ ,*

$$l(h \text{Jac}_Y(g); f, g; X, Y) = \sum_{x \in Z(f)} \left( l_x(h; f; X) \times \sum_{y \in Z(g_x)} \mu(g_x)(y) \right)$$

où  $l_x$  désigne le symbole de Kronecker local en  $x$ .



# Chapitre 2

## Variétés toriques

Ce chapitre présente les résultats sur les variétés toriques utiles aux développements des chapitres suivants. Les variétés toriques considérées sont des variétés complètes, déterminées par un éventail complet. Notre étude se limitera au cas des variétés toriques complexes. Les résultats énoncés sans preuve sont démontrés dans ([11], §1 à §6). Le lecteur trouvera également dans [3], [6] et [15] le support théorique nécessaire.

### 2.1 Premières définitions et propriétés

#### 2.1.1 Tores et variété toriques

Soit  $V$  une variété affine et  $\mathbb{C}[V]$  l'algèbre associée. Pour tout  $f \in \mathbb{C}[V] \setminus \{0\}$ , l'ouvert de Zariski  $V_f = \{p \in V \mid f(p) \neq 0\}$  est une variété affine. Si  $f \neq 0$ ,  $V_f = \text{Spec}(\mathbb{C}[V]_f)$ . En particulier, si  $V$  est irréductible,  $\mathbb{C}[V]_f = \{\frac{g}{f^m} \in \mathbb{C}(V) \mid g \in \mathbb{C}[V], m \in \mathbb{N}\}$ .

L'ensemble  $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n \setminus Z(X_1 \cdots X_n)$  est un ouvert de Zariski de la variété affine  $\mathbb{C}^n$ . Son algèbre de fonctions est  $\mathbb{C}(X_1, \dots, X_n)_{X_1 \cdots X_n} = \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ . Les éléments de cette algèbre sont appelés polynômes de Laurent. La variété affine  $(\mathbb{C}^*)^n$  forme également un groupe pour la multiplication composante par composante. Cette structure de groupe est compatible avec la structure de variété sur  $(\mathbb{C}^*)^n$  ce qui signifie que le produit et l'inverse sont des morphismes de variétés.

**Définition 2.1.** Un tore  $T$  de dimension  $n$  est une variété affine isomorphe à  $(\mathbb{C}^*)^n$ . La structure de groupe considérée sur  $T$  est la structure de groupe de  $(\mathbb{C}^*)^n$  héritée par isomorphisme.

Les caractères d'un tore  $T$  désignent les morphismes de variétés  $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$  qui sont aussi des homomorphismes de groupes.

Les groupes à un paramètre de  $T$  désignent les morphismes de variétés  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow T$  qui sont aussi des homomorphismes de groupes.

Un  $n$ -uplet  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$  donne un caractère  $\chi^m$  de  $(\mathbb{C}^*)^n$  défini par  $\chi^m(t_1, \dots, t_n) = t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$ . Tous les caractères définis sur  $(\mathbb{C}^*)^n$  sont de cette forme.

De même, tous les sous-groupes à un paramètre sur  $(\mathbb{C}^*)^n$  sont déterminés par un  $n$ -uplet  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$  qui fournit le sous-groupe à un paramètre  $\lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$  défini par

$\lambda^u(t) = (t^{u_1}, \dots, t^{u_n})$ . Les caractères comme les sous-groupes à un paramètre de  $(\mathbb{C}^*)^n$  forment un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}^n$ .

Les caractères d'un tore  $T$  isomorphe à  $(\mathbb{C}^*)^n$  forment un groupe abélien libre  $M$  de rang  $n$ . De même, les sous-groupes à un paramètre du tore  $T$  forment un groupe abélien libre  $N$  de rang  $n$ .

Soient  $\lambda$  un sous-groupe à un paramètre et  $\chi$  un caractère de  $T$ . La composition  $\chi \circ \lambda$  donne un caractère de  $\mathbb{C}^*$  et donc un morphisme  $t \mapsto t^k$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . On peut alors définir un appariement  $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  défini par  $\langle \chi, \lambda \rangle = k$ . Ainsi  $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ . Si  $T = (\mathbb{C}^*)^n$ , l'appariement est simplement le crochet de dualité usuel sur  $\mathbb{Z}^n$ .

La donnée d'un isomorphisme de  $T$  sur  $(\mathbb{C}^*)^n$  induit sur  $N$  et  $M$  deux bases duales et ramène la description des caractères et des sous-groupes à un paramètre de  $T$  à la description des caractères et des sous-groupes à un paramètre de  $(\mathbb{C}^*)^n$ .

L'égalité  $T = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  conduit à noter  $T_N$  le tore associé au groupe abélien libre  $N$ .

Les groupes  $M$  et  $N$  seront le plus souvent envisagés dans leurs espaces vectoriels naturels et donc considérés en tant que réseaux.

**Définition 2.2.** Une variété torique est une variété irréductible  $V$  contenant un tore  $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$  qui est un ouvert de Zariski de  $V$  et dont la loi de groupe se prolonge à une action algébrique de  $T_N$  sur  $V$  ce qui signifie que l'application de  $T_N \times V$  sur  $V$  est un morphisme de variétés.

**Exemple 2.1.** 1)  $\mathbb{C}^n$ ,  $(\mathbb{C}^*)^n$ ,  $\mathbb{P}^n$  sont des variétés toriques.

2) La courbe plane  $Z(x^3 - y^2) \subset \mathbb{C}^2$  est une variété torique dont le tore est  $\{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{C}^*\} \simeq \mathbb{C}^*$ . L'isomorphisme est donné par le paramétrage :  $t \mapsto (t^2, t^3)$ .

### 2.1.2 Variétés affines toriques

Il existe différentes caractérisations d'une variété torique affine : variété définie par une paramétrisation rationnelle, lieu des zéros d'un idéal torique, spectre d'une  $\mathbb{C}$ -algèbre engendrée par un semi-groupe affine. Nous nous intéressons à la dernière qui conduit à une caractérisation simple des variétés toriques affines normales.

Nous commençons par préciser la notion de  $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini engendrée par un semi-groupe.

**Définition 2.3.** Un semi-groupe affine  $S$  est un semi-groupe commutatif inclus dans un réseau et engendré par un nombre fini d'éléments ce qui signifie qu'il existe un ensemble fini  $\mathcal{E} \subseteq S$  tel que  $S = \mathbb{N}\mathcal{E} = \{\sum_{m \in \mathcal{E}} a_m m \mid a_m \in \mathbb{N}\}$ .

**Définition 2.4.** Etant donné un semi-groupe affine  $S \subseteq M$ , l'algèbre  $\mathbb{C}[S]$  engendrée par le semi-groupe  $S$  est l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  engendré par  $S$ , la multiplication dans l'algèbre étant induite par l'opération de semi-groupe de  $S$ .

Soit  $S$  le semi-groupe affine engendré par  $\mathcal{E} = \{\chi_1, \dots, \chi_s\} \subset M$  où  $M$  est le réseau des caractères du tore  $T_N$ . Si  $M \simeq \mathbb{Z}^n$ , on peut identifier  $\mathcal{E}$  à un ensemble  $\{m_1, \dots, m_s\} \subset \mathbb{Z}^n$ . Dans ces conditions, l'algèbre  $\mathbb{C}[S]$  est l'algèbre de type fini  $\mathbb{C}[X^{m_1}, \dots, X^{m_s}]$ .

**Théorème 2.1.** Soit  $V$  une variété affine de dimension  $n$ . La variété  $V$  est torique si, et seulement si, il existe un semi-groupe affine  $S$  d'un réseau de rang  $n$  tel que  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ .

**Exemple 2.2.**

- 1) Le semi-groupe affine  $\mathbb{N}^n \subset \mathbb{Z}^n$  engendre l'anneau de polynômes à  $n$  indéterminées et donc  $\mathbb{C}^n = \text{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{N}^n])$ .
- 2) Si  $e_1, \dots, e_n$  est une base du réseau  $M$  de rang  $n$  alors  $M$  est engendré comme semi-groupe par l'ensemble  $\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ . On obtient ainsi  $T_N = \text{Spec}(\mathbb{C}[\chi^{\pm e_1}, \dots, \chi^{\pm e_n}])$ .

Une variété torique irréductible  $V$  qui contient le tore  $T_N$  comme ouvert de Zariski vérifie  $\overline{T_N} = V$  et  $\mathbb{C}[V] \subseteq \mathbb{C}[M]$ . Par conséquent, l'algèbre de type finie  $\mathbb{C}[V]$  est engendrée par un nombre fini de caractères de  $T_N$  qui s'étendent sur  $V$ .

**2.1.3 Cônes**

La géométrie des cônes polyédraux convexes joue un rôle particulier dans le domaine de la géométrie torique. Elle permet sous certaines hypothèses de donner une interprétation duale du semi-groupe  $S$  qui engendre l'algèbre associée à la variété. Dans le cas d'une variété algébrique, l'interprétation duale fournit une description des ouverts affines de la variété et de leur recollement à partir de la combinatoire d'un éventail.

Nous rappelons les définitions et les résultats principaux nécessaires à notre étude.

**Définition 2.5.** Soit  $N$  un réseau et on note  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  l'espace vectoriel associé à  $N$ .

Un cône polyédral convexe et rationnel de  $N_{\mathbb{R}}$  est une partie  $\sigma$  de  $N_{\mathbb{R}}$  de la forme  $\sigma = \{\sum_{u \in E} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0\}$  où  $E$  est un sous-ensemble fini de  $N$ . La dimension du cône est égale à la dimension de l'espace vectoriel qu'il engendre.

*Remarque 2.1.* Tous les cônes considérés seront des cônes polyédraux convexes et rationnels. Pour simplifier l'expression, on appellera cône, un cône polyédral convexe et rationnel.

Soit  $M$  le réseau dual de  $N$ . On note  $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  l'espace vectoriel dual sur  $\mathbb{R}$  associé à  $M$ . On considère un cône  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ .

**Définition 2.6.** Le cône dual de  $\sigma$  noté  $\sigma^{\vee}$  est défini par

$$\sigma^{\vee} = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq 0, \forall u \in \sigma\}$$

.

Soit  $m \in M_{\mathbb{R}}$ ,  $m \neq 0$ ,  $H_m = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle = 0\}$  est un hyperplan d'appui de  $\sigma$  si  $\sigma \subseteq H_m^+$  où  $H_m^+ = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq 0\}$ .

*Remarque 2.2.* L'hyperplan  $H_m$  est un hyperplan d'appui si et seulement si  $m \in \sigma^{\vee} \setminus \{0\}$ .

**Définition 2.7.** Soit  $\sigma$  un cône,  $\tau \subseteq \sigma$  est une face de  $\sigma$  s'il existe  $m \in \sigma^{\vee}$  tel que  $\tau = \sigma \cap H_m$ . De plus, si  $m = 0$ ,  $H_m = N_{\mathbb{R}}$ . Un cône est donc une face de lui-même. Une facette désigne une face de codimension 1, un rayon une face de dimension 1.

L'ensemble des faces d'un cône  $\sigma$  de dimension  $p$  sera noté  $\sigma(p)$ .

Les rayons d'un cône sont des demi-droites. Puisque les cônes sont rationnels, il existe pour chaque rayon  $\rho$  de  $\sigma$  un unique vecteur  $u_{\rho}$  qui engendre  $\rho \cap N$ . Les vecteurs  $(u_{\rho})_{\rho \in \sigma(1)}$  forment les générateurs minimaux de  $\sigma$ . Par définition, ils sont primitifs ce qui signifie que, dans une base de  $N$ , les coordonnées d'un vecteur  $(u_{\rho})$  sont premières entre elles.

Soit  $\sigma$  un cône. On a les propriétés suivantes :

- a) Toute face de  $\sigma$  est un cône.
- b) Une intersection de deux faces de  $\sigma$  est une face de  $\sigma$ .
- c) Une face d'une face de  $\sigma$  est encore une face de  $\sigma$ .
- d) Soit  $\tau$  une face de  $\sigma$ . Si  $u_1, u_2 \in \sigma$  et  $u_1 + u_2 \in \tau$  alors  $u_1, u_2 \in \tau$ .

On distingue une catégorie particulière de cônes pour lesquels 0 est une face. Ces cônes sont appelés cônes fortement convexes. la propriété suivante en donne une caractérisation duale.

**Proposition 2.1.** *Soit  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  un cône.*

*$\sigma$  est fortement convexe si et seulement si  $\dim(\sigma^\vee) = n$ .*

Si  $\sigma$  est un cône dans  $N_{\mathbb{R}}$ , l'ensemble  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  forme un semi-groupe de  $M$ . D'après le lemme de Gordan, ce semi-groupe est engendré par une partie finie, c'est donc un semi-groupe affine. De plus,  $S_\sigma$  est saturé c'est-à-dire  $S_\sigma = \text{cône}(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Z}S_\sigma$  où  $\mathcal{A}$  est une partie génératrice finie de  $S_\sigma$ .

**Proposition 2.2.** *Soient  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  et  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  le semi-groupe associé à  $\sigma$ . Alors  $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$  est une variété affine torique.*

*De plus,  $\dim(U_\sigma) = n \Leftrightarrow \sigma$  est fortement convexe.*

Nous terminons cette section en donnant une caractérisation des variétés toriques affines normales. On rappelle qu'une variété affine est normale si son anneau  $\mathbb{C}[V]$  est intégralement clos.

**Théorème 2.2.** *Soit  $V$  une variété affine torique de tore  $T_N$ . Alors on a les équivalences suivantes :*

- a)  $V$  est normal.
- b)  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$  où  $\sigma$  un cône fortement convexe.

*En particulier,  $T_N$  est la variété torique associée au cône fortement convexe réduit à 0.*

Finalement, la donnée d'une variété torique affine se réduit à celle d'un réseau et d'un cône. Toutefois la correspondance entre variétés toriques affines normales et couple  $(N, \sigma)$  où  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  n'est pas univoque.

**Exemple 2.3.** Soit  $N$  le réseau  $\mathbb{Z}^2$  et soit  $N'$  le réseau contenant  $N$  défini par  $\{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2, a + b \equiv 0 \pmod{2}\}$ . On considère  $\sigma = \text{cône}((2, -1); (0, 1))$  et  $\sigma' = \text{cône}((0, 1); (1, 0))$ . On a  $U_{N, \sigma} = U_{N', \sigma'}$ . En considérant les réseaux duaux et les cônes duaux, la caractérisation à partir du couple  $(N, \sigma)$  correspond à la paramétrisation  $\phi : (s, t) \mapsto (s, st, st^2)$ , celle donnée à partir de  $(N', \sigma')$  correspond à la paramétrisation  $\phi' : (s, t) \mapsto (s^2, st, t^2)$ .

Il peut sembler plus approprié de définir une variété torique affine à partir du réseau  $M$  et du cône  $\sigma^\vee$  : cela permet de déterminer directement le semi-groupe affine qui génère l'algèbre associée, les générateurs du semi-groupe fournissant une paramétrisation de la variété. En fait, la géométrie du cône dans  $N_{\mathbb{R}}$  joue un rôle crucial : elle décrit le recollement des ouverts affines dans le cas d'une variété algébrique abstraite et caractérise, en particulier, les diviseurs irréductibles invariants sous l'action du tore.

On a ainsi le résultat suivant :

**Proposition 2.3.** *Soit  $\tau$  est une face d'un cône  $\sigma$ , il existe  $m \in \sigma^\vee \cap M$  tel que  $\tau = \sigma \cap H_m$ . Si  $\sigma$  est fortement convexe alors l'algèbre  $\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M]$  est la localisation de  $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$  en  $\chi^m \in \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ , c'est-à-dire  $\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M] = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]_{\chi^m}$  et  $U_\tau = \text{Spec}(\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M]_{\chi^m})$  est une variété affine qui est un ouvert de  $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M])$ .*

En particulier si  $\tau$  est une face commune de deux cônes  $\sigma$  et  $\sigma'$  on a les relations

$$U_\sigma \supseteq U_\tau \subseteq U_{\sigma'}.$$

### 2.1.4 Variétés toriques normales

Nous nous intéressons dans la suite aux variétés toriques normales sans facteurs toriques. Ces variétés sont caractérisées par un éventail de dimension maximale dans l'espace vectoriel ambiant. Le recollement dans la variété abstraite des ouverts affines (définis par des cônes fortement convexes) est décrit par la géométrie de l'éventail constitué d'une collection de cônes.

#### Variétés toriques définies par un éventail

**Définition 2.8.** Un éventail  $\Sigma$  est une collection finie de cônes fortement convexes telle que l'intersection de deux cônes de  $\Sigma$  est une face de chacun d'eux.

Ainsi si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux cônes d'un éventail  $\Sigma$ , l'intersection  $\tau = \sigma \cap \sigma'$  est encore un cône de  $\Sigma$  et il existe  $m \in \sigma^\vee \cap (-\sigma'^\vee) \cap M$  tel que  $\tau = \sigma \cap H_m = \sigma' \cap H_m$ .

On obtient alors

$$U_\sigma \supseteq \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]_{\chi^m}) = U_\tau = \text{Spec}(\mathbb{C}[(\sigma')^\vee \cap M]_{\chi^{(-m)}}) \subseteq U_{\sigma'}.$$

Le recollement de deux variétés affines  $U_\sigma$  et  $U_{\sigma'}$ ,  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ , s'effectue le long de la variété torique définie par leur face commune. On obtient une variété abstraite  $X_\Sigma$  définie par l'éventail  $\Sigma$ .

**Proposition 2.4.** *Soit  $\Sigma$  un éventail dans  $N_{\mathbb{R}}$ . La variété  $X_\Sigma$  est une variété torique normale et séparée.*

La réciproque est vraie. C'est une conséquence du théorème de Sumihiro.

**Définition 2.9.** Une variété torique normale est sans facteurs toriques si la dimension maximale des cônes de l'éventail est égale à celle de la variété.

**Exemple 2.4.** On considère l'éventail  $\Sigma$  dans  $N_{\mathbb{R}^2}$  où  $N = \mathbb{Z}^2$  muni de la base canonique  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$ ,

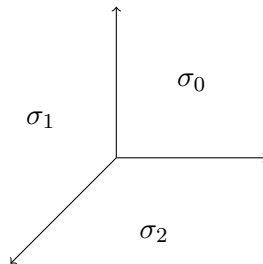


FIGURE 2.1 – L'éventail de  $\mathbb{P}^2$

$\Sigma$  est constitué de trois cônes de dimension 2 :  $\sigma_0 = \text{cône}(e_1, e_2)$ ,  $\sigma_1 = \text{cône}(e_2, -e_1 - e_2)$ ,  $\sigma_2 = \text{cône}(-e_1 - e_2, e_1)$ .

La variété  $X_\Sigma$  est recouverte par les ouverts affines  $U_{\sigma_0} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_0}]) \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ ,  $U_{\sigma_1} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_1}]) \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-1}y])$ ,  $U_{\sigma_2} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_2}]) \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}])$ .

**Exemple 2.5.** La variété torique  $\mathcal{H}_3$  correspondant à l'éventail de la figure 2.2 est constituée de 4 cônes où les cônes de dimension 1 sont engendrés respectivement par les vecteurs primitifs

$$\eta_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \eta_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \eta_3 \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}, \eta_4 \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix}.$$

La variété est obtenue par recollement des quatre variétés affines :

$$\begin{aligned} U_{\sigma_1} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]) \simeq \mathbb{C}^2 \\ U_{\sigma_2} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y^{-1}]) \simeq \mathbb{C}^2 \\ U_{\sigma_3} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-3}y^{-1}]) \simeq \mathbb{C}^2 \\ U_{\sigma_4} &= \text{Spec}(\mathbb{C}[x^{-1}, x^3y]) \simeq \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

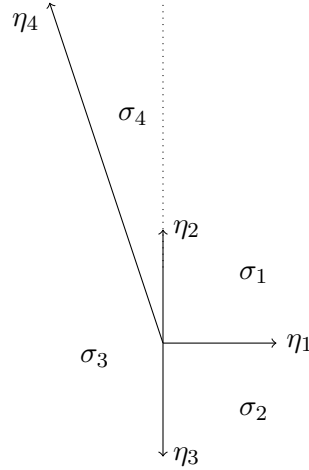


FIGURE 2.2 – L'éventail de la surface d'Hirzebruch  $\mathcal{H}_3$

**Définition 2.10.** Soit  $\sigma \in N_{\mathbb{R}}$  un cône fortement convexe.

Le cône  $\sigma$  est lisse ou régulier si les générateurs minimaux de  $\sigma$  forment une  $\mathbb{Z}$ -base de  $N$ .

Le cône  $\sigma$  est simplicial si ses générateurs minimaux sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ .

Un éventail  $\Sigma$  est lisse (resp. simplicial) si chacun de ses cônes est lisse (resp. simplicial).

Un éventail est complet si son support  $|\Sigma|$  coïncide avec l'espace vectoriel  $N_{\mathbb{R}}$ .

La propriété " $\Sigma$  est complet" caractérise les variétés toriques compactes.

### Variétés toriques compactes définies par un polytope

Un polytope rationnel de l'espace affine réel  $M_{\mathbb{R}}$  est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points à coordonnées entières de  $M_{\mathbb{R}}$ . Sa dimension est celle du plus petit sous-espace affine qui le contient. Si le polytope est de dimension maximale, il peut s'écrire comme intersection

des demi-espaces définies par les hyperplans d'appui qui portent les facettes de  $P$ . On notera  $P(n-1)$  l'ensemble des facettes de  $P$ .

Chaque facette  $F$  de  $P$  est définie par un vecteur primitif rentrant  $u_F$ , normal à  $F$ . Si  $P$  est un polytope de dimension maximale, on a

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle + a_F \geq 0, \forall F \in P(n-1)\}.$$

Un polytope  $P$  de dimension maximale donne un éventail dual  $\Sigma_P$  de support égal à  $N_{\mathbb{R}}$  : la facette  $F$  qui définit le vecteur primitif rentrant  $u_F$  correspond au rayon engendré par  $u_F$ . Un sommet  $s$  de  $P$  définit un cône de dimension  $n-1$  engendré par les normales aux facettes de  $P$  qui contiennent  $s$ .

### 2.1.5 Morphismes toriques

Soient  $X_{\Sigma_1}$  et  $X_{\Sigma_2}$  deux variétés toriques. Un morphisme de variétés entre  $X_{\Sigma_1}$  et  $X_{\Sigma_2}$  est un morphisme torique s'il induit un morphisme de groupes entre les tores des deux variétés.

Dans ce cas, l'action du tore sur la variété est conservée par le morphisme.

**Proposition 2.5.** *Un morphisme torique  $\phi$  entre les variétés  $X_{\Sigma_1}$  et  $X_{\Sigma_2}$  est défini par un homomorphisme  $\bar{\phi}$  entre les réseaux respectifs  $N_1$  et  $N_2$  compatible avec les éventails  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Cela signifie que l'application linéaire  $\bar{\phi}_{\mathbb{R}}$  entre  $(N_1)_{\mathbb{R}}$  et  $(N_2)_{\mathbb{R}}$  induite par  $\bar{\phi}$  vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \sigma_1 \in \Sigma_1, \quad \bar{\phi}_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subseteq \sigma_2 \in \Sigma_2.$$

On dispose pour les morphismes toriques d'une caractérisation des morphismes propres à partir des éventails des variétés.

**Théorème 2.3.** *Soit  $\phi : X_{\Sigma_1} \rightarrow X_{\Sigma_2}$  un morphisme torique. Le morphisme  $\phi$  est propre si et seulement si  $\bar{\phi}_{\mathbb{R}}^{-1}(|\Sigma_2|) = |\Sigma_1|$ .*

## 2.2 La construction du quotient

La construction de la variété  $\mathbb{P}^n$  comme quotient de l'espace affine  $\mathbb{C}^{n+1}$  par l'action du groupe  $\mathbb{C}^*$  où l'action de groupe est la multiplication de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Cette construction se généralise aux variétés toriques définies par un éventail. Nous limitons notre description aux variétés toriques sans facteurs toriques pour lesquelles les vecteurs primitifs de l'éventail engendrent l'espace vectoriel  $N_{\mathbb{R}}$ .

### 2.2.1 Diviseurs invariants par le tore.

La variété  $X_{\Sigma}$  est définie par un éventail de dimension maximale. A chaque rayon  $\rho$  de l'éventail est associé le diviseur irréductible  $D_{\rho}$ . Le groupe des diviseurs  $T_N$ -invariants est le groupe abélien libre  $\bigoplus_{\rho \in n\Sigma(1)} \mathbb{Z}D_{\rho}$ .

Les propriétés remarquables sont fondées sur l'existence d'une suite exacte :

$$0 \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_{\rho \in n\Sigma(1)} \mathbb{Z}D_{\rho} \rightarrow \text{Cl}(X_{\Sigma}) \rightarrow 0,$$

où la première application envoie  $\chi^m$  sur  $(\langle m, e_\rho \rangle)_{\rho \in \Sigma(1)}$  et la seconde appelée "degré" donne la classe du diviseur dans le groupe de Chow  $\text{Cl}(X_\Sigma)$ .

Comme  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{C}^*)$  est un foncteur exact à gauche et que  $\mathbb{C}^*$  est divisible, la suite :

$$1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Cl}(X_\Sigma), \mathbb{C}^*) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{\rho \in n\Sigma(1)} \mathbb{Z}D_\rho, \mathbb{C}^*\right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) \rightarrow 1$$

est encore une suite exacte.

En posant  $G = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Cl}(X_\Sigma), \mathbb{C}^*)$  et en observant que

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{\rho \in n\Sigma(1)} \mathbb{Z}D_\rho, \mathbb{C}^*\right) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}, \mathbb{C}^*) \simeq (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)}$$

et  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) \simeq T_N$ , on obtient la suite exacte :

$$1 \rightarrow G \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} \rightarrow T_N \rightarrow 1.$$

**Proposition 2.6.** *Le groupe  $G \subseteq (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)}$  ainsi défini est isomorphe au produit d'un tore et d'un groupe abélien fini. En particulier, il est réduct.*

*Le groupe  $\text{Cl}(X_\Sigma)$  est le groupe des caractères de  $G$ .*

*Si  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne une base de  $M$ , alors  $G$  est défini par les équations :*

$$G = \{(t_\rho) \in (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} \mid \prod_{\rho \in \Sigma(1)} t_\rho^{\langle e_i, u_\rho \rangle} = 1, \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}.$$

### 2.2.2 Quotient géométrique et quotient quasi géométrique.

Nous rappelons à présent quelques résultats relatifs au quotient d'une variété par un groupe.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés (non nécessairement toriques) et soit  $G$  un groupe dont l'action sur  $X$  est compatible avec sa structure de variété. L'action de  $G$  sur la variété induit une action sur les anneaux du faisceau  $\mathcal{O}_X(U)$  où  $U$  est un ouvert de  $X$ . Soit  $g \in G$  et  $f \in \mathcal{O}_X(U)$ ,  $g \cdot f$  est définie par  $g \cdot f(g \cdot x) = f(x)$  pour tout  $x \in U$ .

On note  $\mathcal{O}_X(U)^G$  l'anneau des éléments de  $\mathcal{O}_X(U)$  laissés invariants par  $G$ .

**Définition 2.11.** Le morphisme  $\pi : X \rightarrow Y$  constant sur les  $G$ -orbites est appelé bon quotient catégorique s'il vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ ,  $\mathcal{O}_Y(U)$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G$ .
- Si  $V$  est un fermé de  $X$ ,  $G$ -invariant, alors  $\pi(V)$  est fermé dans  $Y$ .
- Si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux fermés  $G$ -invariants et disjoints alors  $\pi(V_1)$  et  $\pi(V_2)$  sont disjoints

Puisque le faisceau  $\mathcal{O}_Y$  est entièrement déterminé par  $G$  et  $\mathcal{O}_X$ , on notera  $Y = X // G$

**Théorème 2.4.** *Soit  $\pi$  un bon quotient catégorique alors :*

- $\pi$  est surjective.
- La topologie sur  $Y$  est la topologie induite par  $\pi$ .

c) La propriété de bon quotient catégorique du morphisme  $\pi$  est conservée par restriction à un ouvert non vide de  $X$ .

d)  $\forall (x, y) \in X^2, \quad \pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow \overline{G \cdot x} \cap \overline{G \cdot y} \neq \emptyset$ .

Si  $G$  est un groupe algébrique affine (c'est-à-dire un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ ) agissant algébriquement sur une variété  $X$  et si  $\pi$  est un bon quotient catégorique de  $X \rightarrow X // G$  alors les points de  $X // G$  sont en bijection avec les orbites fermées dans  $X$ . Le cas le plus favorable est obtenu lorsque les  $G$ -orbites sont fermées signifiant que l'ensemble des  $G$ -orbites dans  $X$  est en bijection avec les points de  $X // G$ . Le bon quotient catégorique est alors appelé quotient géométrique et  $X // G$  est noté  $X/G$ .

S'il existe  $U$  un ouvert de Zariski dense dans  $X // G$  tel que  $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$  soit un quotient géométrique alors le bon quotient géométrique est appelé un quasi quotient géométrique.

**Définition 2.12.** On dit qu'un groupe algébrique affine est réduit si son sous-groupe maximal résoluble et connexe est un tore.

Le théorème suivant assure l'existence d'un bon quotient catégorique lorsque  $G$  est réduit et  $X$  est une variété affine

**Théorème 2.5.** Soit  $G$  un groupe réduit qui agit algébriquement sur une variété affine  $X = \text{Spec}(R)$  alors  $R^G$  l'ensemble des éléments de  $R$  invariants sous l'action de  $G$  est une algèbre de type fini et le morphisme  $: X \rightarrow \text{Spec}(R^G)$  induit par l'inclusion  $R^G \subseteq R$  est un bon quotient catégorique.

### 2.2.3 Réalisation d'une variété torique comme quotient d'une variété affine.

Nous revenons au cas des variétés toriques normales sans facteurs toriques.

Le groupe  $G$  défini dans la suite exacte :

$$1 \rightarrow G \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} \rightarrow T_N \rightarrow 1.$$

est un groupe réduit. L'action sur de  $G$  sur  $X$  est induite par l'action algébrique de  $T_N$  sur  $X$ . Nous disposons du groupe  $G$ , de l'espace affine  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$  qui se déduisent tous deux des rayons de l'éventail.

Chaque cône  $\sigma \in \Sigma$  définit un monôme dit « non pertinent »  $x^{\hat{\sigma}} = \prod_{\rho \notin \sigma(1)} x_\rho$ . L'idéal  $B(\Sigma)$  désigne l'idéal engendré par les monômes non pertinents. Par définition de l'éventail, on a  $B(\Sigma) = \langle x^{\hat{\sigma}} \mid \sigma \in \Sigma(n) \rangle$ . Le lieu des zéros de  $B(\Sigma)$  dans  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$  est noté  $Z(\Sigma)$ .

On déduit de l'éventail  $\Sigma$ , un éventail  $\Sigma'$  pour lequel  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma)$  est une variété torique. Soit  $\{e_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)\}$  la base canonique du réseau  $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$ . Pour tout cône  $\sigma \in \Sigma$ , on considère le cône  $\sigma' = \text{cône}(e_\rho, \in \sigma(1))$  alors la collection des cônes  $\sigma'$  forme un éventail  $\Sigma'$  dans  $\mathbb{R}^{\Sigma(1)}$ .

**Proposition 2.7.** La variété affine  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma)$  est une variété torique d'éventail  $\Sigma'$ . De plus, l'application de  $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$  dans  $N$  qui envoie  $e_\rho$  sur  $u_\rho$  définit un morphisme torique  $\pi : \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma) \rightarrow X_\Sigma$  qui est constant sur les  $G$ -orbites.

**Théorème 2.6.** Soit  $X_\Sigma$  une variété torique sans facteurs toriques et  $\pi : \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma) \rightarrow X_\Sigma$  le morphisme torique donnée à la proposition précédente alors :

a)  $\pi$  est un quasi quotient géométrique sous l'action de  $G$  et donc

$$(\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma)) // G$$

b)  $\pi$  est un quotient géométrique si et seulement si  $\Sigma$  est simplicial.

**Preuve.** Nous présentons quelques éléments de la preuve du a). L'application de réseaux donnée à la proposition 2.7 se dualise en l'application de  $M \rightarrow \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$  qui envoie  $m \in M$  sur  $(\langle m, u_\rho \rangle) \in \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$ . Par conséquent, le morphisme torique  $\pi_\sigma : U_{\sigma'} \rightarrow U_\sigma$  qui est la restriction de  $\pi$  à  $\pi^{-1}(U_\sigma)$  donne le morphisme dual de  $\mathbb{C}$ -algèbres  $\pi_\sigma^* : \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \rightarrow \mathbb{C}[x_\rho, \rho \in \Sigma(1)]_{\hat{x}}$  défini par  $\pi_\sigma^*(\chi^m) = \prod_{\rho \in \Sigma(1)} x_\rho^{\langle m, u_\rho \rangle}$ . On montre alors que les caractères de  $\mathbb{C}[M]$  qui sont définis sur  $U_\sigma$  sont en bijection avec les monômes  $G$ -invariants de  $\mathbb{C}[x_\rho, \rho \in \Sigma(1)]_{x_{\hat{\sigma}}}$ .  $\square$

## 2.3 L'anneau de coordonnées homogènes

**Définition 2.13.** On appelle anneau de coordonnées homogènes de la variété torique  $X_\Sigma$  (sans facteurs toriques), l'anneau  $S = \mathbb{C}[x_\rho, \rho \in \Sigma(1)]$ . Cet anneau contient l'idéal des monômes non pertinents.

L'anneau  $S$  est un anneau gradué par le groupe de Chow  $\text{Cl}(X_\Sigma)$ . Un monôme  $\prod_{\rho_i \in \Sigma(1)} x_{\rho_i}^{b_{\rho_i}}$  a pour degré  $[\sum_{\rho} b_\rho D_\rho]$  où  $D_\rho$  est le diviseur irréductible  $T_N$ -invariant associé au rayon  $\rho$ . La graduation définie sur  $S$  est liée au groupe  $G = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Cl}(X_\Sigma), \mathbb{C}^*)$ . Un polynôme  $f$  est un polynôme homogène de degré  $\alpha = \sum_{\rho} a_\rho D_\rho$  si et seulement  $\forall g \in G, \forall x \in \mathbb{C}^{\Sigma(1)}, f(gx) = g^\alpha f(x)$  où  $a = (a_\rho)$ .

### 2.3.1 Correspondance entre sous-variétés fermées et idéaux homogènes.

On sait que dans un espace projectif, un idéal homogène définit une variété projective. Ce fait se généralise aux variétés toriques.

**Cas simplicial** Le quotient géométrique permet dans ce cas d'identifier un point  $p$  de  $X_\Sigma$  et sa classe selon  $G$ . Un point  $x = (x_\rho)_{\rho \in \Sigma(1)}$  tel que  $\pi(x) = p$  est appelé système de coordonnées homogènes de  $p$ . Si  $x$  est un zéro d'un polynôme homogène  $f$  dans  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma)$  alors  $f(g.x) = 0$  pour tout  $g \in G$ . L'équation  $f = 0$  a donc un sens dans la variété  $X_\Sigma$ .

**Proposition 2.8.** Soient  $X_\Sigma$  une variété torique et  $S$  son anneau de coordonnées homogènes alors le lieu des zéros dans  $X_\Sigma$  d'un idéal homogène de  $S$  définit une sous-variété fermée de  $X_\Sigma$  et toute sous-variété fermée de  $X_\Sigma$  s'obtient comme lieu des zéros d'un idéal homogène de  $S$ .

On obtient une version torique du théorème des zéros de Hilbert.

**Proposition 2.9.** Soit  $X_\Sigma$  une variété torique simpliciale d'anneau de coordonnées homogènes  $S$ . L'idéal  $B(\Sigma)$  désigne l'idéal engendré par les monômes non pertinents. Si  $I$  est un idéal homogène de  $S$  et  $V(I)$  son lieu des zéros dans  $X_\Sigma$  alors

$$V(I) = \emptyset \Leftrightarrow \exists ! l \in \mathbb{N} \quad B(\Sigma)^l \subseteq I.$$

**Proposition 2.10.** *Il existe une relation biunivoque entre les sous-variétés fermées de  $X_\Sigma$  et les idéaux radicaux homogènes de  $S$  inclus dans l'idéal  $B(\Sigma)$ .*

**Cas non simplicial** Dans le cas non simplicial, la correspondance entre idéaux homogènes et sous-variétés fermées subsistent mais la bijection entre idéaux radicaux homogènes et sous-variétés fermées est perdue.

**Proposition 2.11.** *Soient  $X_\Sigma$  une variété torique et  $S$  son anneau de coordonnées homogènes. Si  $I$  est un idéal homogène alors*

$$V(I) = \{p \in X_\Sigma \mid \exists x \in \pi^{-1}(p), f(x) = 0 \quad \forall f \in I\}$$

*est une sous-variété fermée de  $X_\Sigma$ . De plus, toutes les sous-variétés fermées de  $X_\Sigma$  s'obtiennent de cette façon.*

Nous présentons un exemple qui illustre la perte de l'injectivité entre l'ensemble des sous-variétés fermées de  $X_\Sigma$  et celui des idéaux radicaux homogènes contenus dans  $B(\Sigma)$ .

**Exemple 2.6.** On considère le cône  $\sigma = \text{cône}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ . On a  $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} = \mathbb{C}^4$  et  $Z(\Sigma) = \emptyset$ . Un calcul direct donne  $G = \{(g, g, g^{-1}, g^{-1}), g \in \mathbb{C}^*\} \simeq \mathbb{C}^*$ . Par conséquent,

$$U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]^G) = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4]).$$

On en déduit l'expression de  $\pi$ ,  $\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4)$ . Les idéaux radicaux  $\langle x_1, x_2 \rangle$ ,  $\langle x_3, x_4 \rangle$  et  $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$  caractérisent la même sous-variété fermée de  $X_\Sigma$ , réduite au point  $\{0\}$ .

### 2.3.2 Coordonnées homogènes.

Dans le cas des variétés simpliciales, on peut distinguer des systèmes privilégiés de coordonnées homogènes.

**Proposition 2.12.** *Soient  $X_\Sigma$  une variété torique définie par un éventail  $\Sigma$  de dimension  $n$  et  $\sigma \in \Sigma(n)$ . Soit  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  une base de  $M$  réseau dual de  $N$  qui définit le tore  $T_N$  de la variété  $X_\Sigma$ .*

- a) *Tout point de  $U_\sigma \subseteq X_\Sigma$  admet un système de coordonnées homogènes  $(x_\rho)_{\rho \in \Sigma(1)}$  tel que  $x_\rho = 1$  pour  $\rho \notin \sigma(1)$ .*
- b) *Si  $\sigma$  est simplicial, le nombre de systèmes de coordonnées homogènes de cette forme est au plus égal à  $|\det(\langle e_i^*, u_\rho \rangle)|$  où  $u_\rho$  est le vecteur primitif du rayon  $\rho \in \sigma(1)$ . En particulier, tout point de  $U_\sigma$  appartenant à  $T_N$  a exactement  $|\det(\langle e_i^*, u_\rho \rangle)|$  systèmes de coordonnées de cette forme.*

**Preuve.**

On note  $s = \text{card}(\Sigma(1))$ ,  $(u_1, \dots, u_s)$  les vecteurs primitifs des rayons de  $\Sigma(1)$  et  $(u_1, \dots, u_p)$   $p \geq n$ , les vecteurs primitifs des rayons de  $\sigma(1)$ .

Les systèmes de coordonnées homogènes d'un point de  $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_s]_{X_\sigma}) // G$  sont de la forme  $(x_1, \dots, x_s)$  tels que  $\prod_{j=p+1}^s x_j \neq 0$ .

On prouve l'existence d'un élément  $(g_1, \dots, g_s) \in G$  tel que  $g_j = x_j^{-1}$  pour  $j > p$ .

$$(g_1, \dots, g_p, x_{p+1}^{-1}, \dots, x_s^{-1}) \in G \iff \prod_{j=1}^p g_j^{\langle e_i^*, u_j \rangle} = \prod_{j=p+1}^s x_j^{\langle e_i^*, u_j \rangle} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Or  $\sigma \in \Sigma(n)$ , pour une indexation convenable les vecteurs primitifs  $(u_1, \dots, u_n)$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$ .

On pose encore  $y_i = \prod_{j=p+1}^s x_j^{\langle e_i^*, u_j \rangle}$  et on fixe  $g_j = 1$  pour  $n < j \leq p$ , on obtient alors :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \prod_{j=1}^n g_j^{\langle e_i^*, u_j \rangle} = \prod_{j=p+1}^s x_j^{\langle e_i^*, u_j \rangle} \iff \begin{cases} \prod_{j=1}^n |g_j|^{\langle e_i^*, u_j \rangle} = |\prod_{j=p+1}^s x_j^{\langle e_i^*, u_j \rangle}| \\ \sum_{j=1}^n \langle e_i^*, u_j \rangle \arg(g_j) \equiv \arg(\prod_{j=p+1}^s x_j^{\langle e_i^*, u_j \rangle}) \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Le système a donc au moins une solution ce qui montre l'assertion a).

On suppose que  $\sigma$  est simplicial alors  $p = n$ .

Soit  $p \in X_\Sigma$ , d'après a), il existe un système de coordonnées homogènes de la forme  $x = (x_1, \dots, x_n, 1, \dots, 1)$ . Comme  $\sigma$  est simplicial, l'ensemble des coordonnées homogènes de  $p$  se réduit à la classe  $G \cdot x$ . Par conséquent, un système de coordonnées homogènes  $x' = (x'_1, \dots, x'_s)$  du point  $p$  vérifie la propriété  $x'_j = 1$  pour  $j > n$  s'il existe  $g = (g_1, \dots, g_n, 1, \dots, 1) \in G$  tel que  $x' = g \cdot x$ .

$$(g_1, \dots, g_n, 1, \dots, 1) \in G \iff \prod_{j=1}^n g_j^{\langle e_i^*, u_j \rangle} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\iff \begin{cases} \forall i = 1, \dots, n \\ \prod_{j=1}^n |g_j|^{\langle e_i^*, u_j \rangle} = 1 \\ \text{et} \\ \sum_{j=1}^n \langle e_i^*, u_j \rangle \arg(g_j) \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Le premier système est de Cramer de déterminant  $\det(\langle e_i^*, u_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$ . Il admet donc une solution unique. Le nombre de systèmes de coordonnées homogènes de la forme souhaitée est donc le nombre de solutions du second système.

Le système vérifié par les arguments des  $g_j$  se traduit par l'égalité matricielle :  $P\Theta = 2\pi K$  où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $N$  à la base  $((u_1, \dots, u_n)$ ,  $\Theta$  la matrice unicolonne des arguments des  $g_j$  et  $K$  une matrice unicolonne à coefficients entiers.

Soit  $A$  la réduite de Smith de  $P$ ,  $P = LAR$ ,  $A$  est une matrice diagonale à coefficients entiers et  $L, R$  sont deux matrices  $\mathbb{Z}$ -inversibles. L'égalité matricielle  $P\Theta = 2\pi K$  est équivalente au système  $A\Theta' = 2\pi K'$  où  $\Theta' = R\Theta$  et  $K' = L^{-1}K$ ,  $K'$  est encore une matrice à coefficients entiers. On considère le système  $A\Theta' \equiv 0 \pmod{2\pi}$  où 0 désigne la matrice nulle unicolonne de dimension  $n$ . Ce système admet exactement  $\det A$  solutions modulo  $2\pi$ . Comme  $\det A = \det P = \det(u_1, \dots, u_n)$ , on en déduit l'assertion b).

Dans le cas d'un cône régulier (ou lisse), on a l'unicité d'un tel système de coordonnées homogènes.

□

### 2.3.3 Faisceau associé à un diviseur $T_N$ -invariant.

Soit  $D$  est un diviseur de Weil sur la variété normale  $X_\Sigma$ . Le faisceau  $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$  est le faisceau qui associe à l'ouvert  $U \subseteq X_\Sigma$ , l'anneau de fonctions

$$\{f \in \mathbb{C}(X_\Sigma)^* \mid (\operatorname{div}(f) + D)|_U \geq 0\} \cup \{0\}.$$

**Proposition 2.13.** *Si  $D$  est  $T_N$ -invariant,  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho D_\rho$ , on a la description suivante des sections globales comme sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[M]$  :*

$$\begin{aligned} \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) &= \bigoplus_{\chi^m \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))} \mathbb{C} \cdot \chi^m \\ &= \bigoplus_{\chi^m \in P_D} \mathbb{C} \cdot \chi^m. \end{aligned}$$

$P_D$  est le polyèdre (non nécessairement borné) intersection des demi-espaces définis par les inéquations  $\langle m, u_\rho \rangle + a_\rho \geq 0$  avec  $u_\rho$  le vecteur primitif qui engendre  $\rho$ .

*Remarque 2.3.* Si  $X_\Sigma$  est une variété torique compacte alors  $P_D$  est un polytope (éventuellement réduit à l'ensemble vide) et les sections globales des faisceaux  $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$  sont des sous-espaces de dimension finie de  $\mathbb{C}[M]$ .

Les sections globales peuvent être encore décrites à un isomorphisme près à l'aide des composantes homogènes  $S_\alpha$  de l'anneau gradué  $S$ .

**Proposition 2.14.** *Si  $D$  est  $T_N$ -invariant et  $\alpha = [D]$ , alors*

$$\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) \simeq S_\alpha.$$

L'isomorphisme entre les espaces  $\Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$  et  $S_\alpha$  est donnée par l'application

$$\chi^m \mapsto \prod_{\rho \in \Sigma(1)} x_\rho^{\langle m, u_\rho \rangle}.$$

**Définition 2.14** (Homogénéisation d'un caractère par un diviseur). Soit  $D$  un diviseur  $T_N$ -invariant et  $\alpha = [D]$  son degré. L'homogénéisation du caractère  $\chi^m$ ,  $m \in P_D$ , par le diviseur  $D$  est le monôme de  $\prod_{\rho \in \Sigma(1)} x_\rho^{\langle m, u_\rho \rangle}$  qu'on écrira encore  $x^{\langle m, D \rangle}$ .

## 2.4 Polynômes de degré sans points de base et polynômes de degré amples

On s'intéresse aux diviseurs de Cartier  $T_N$ -invariants sans points de base et aux diviseurs de Cartier  $T_N$ -invariants amples qui jouent un rôle central dans cette étude. Nous en donnons une caractérisation simple à partir de leur polytope associé dans le cas d'une variété torique complète.

Nous commençons par rappeler quelques résultats sur les diviseurs de Cartier  $T_N$ -invariants dont l'ensemble est noté  $\operatorname{CDiv}_{T_N}$ . Soit  $X_\Sigma$  une variété torique normale et sans facteurs toriques.

De la suite exacte courte

$$0 \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z}D_\rho \rightarrow \text{Cl}(X_\Sigma) \rightarrow 0,$$

on déduit pour les diviseurs de Cartier  $T_N$ -invariants, la suite exacte courte

$$M \rightarrow \text{CDiv}_{T_N} \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 0$$

où  $\text{Pic}(X)$  est le groupe de Picard de la variété  $X_\Sigma$ .

Ainsi les diviseurs de Cartier  $T_N$ -invariants engendrent le groupe de Picard.

### 2.4.1 Caractérisation des diviseurs de Cartier $T_N$ -invariants.

**Théorème 2.7.** *Soit  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho D_\rho$  un diviseur de Cartier  $T_N$ -invariant d'une variété torique normale  $X_\Sigma$  alors  $D$  est le diviseur d'un caractère sur tout ouvert affine  $U_\sigma$ ,  $\sigma \in \Sigma$ .*

*De plus, si  $X_\Sigma$  est sans facteurs toriques*

$$\forall \sigma \in \Sigma(n), \exists! m_\sigma \in M, \quad D|_{U_\sigma} = \text{div}(\chi_{m_\sigma})$$

*le point  $m_\sigma$  est entièrement déterminé par les équations  $\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = a_\rho$ ,  $\rho \in \sigma(1)$ .*

Si la variété torique est simpliciale, la seconde proposition du théorème revient à énoncer que la solution du système de Cramer

$$\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = a_\rho \quad \forall \rho \in \sigma(1)$$

est dans les entiers.

**Définition 2.15.** On dit qu'un diviseur de Weil est  $\mathbb{Q}$ -Cartier s'il existe un multiple entier positif de ce diviseur qui soit de Cartier

**Proposition 2.15.** *Soit  $X_\Sigma$  une variété torique normale simpliciale.*

*Tout diviseur de Weil sur la variété  $X_\Sigma$  est  $\mathbb{Q}$ -Cartier.*

**Preuve.** Soit  $D$  un diviseur de Weil,  $D$  admet un diviseur équivalent  $D'$   $T_N$ -invariant. D'autre part, pour tout  $\sigma \subseteq \Sigma$ ,  $\det(u_\rho)_{\rho \in \sigma(1)} \cdot D'|_{U_\sigma}$  est le diviseur d'un caractère. On note  $\Sigma_{\max}$  la sous-collection de  $\Sigma$  constituée des cônes de dimension maximale. Le diviseur  $(\prod_{\sigma \in \Sigma_{\max}} (\det(u_\rho)_{\rho \in \sigma(1)})) \cdot D'$  est de Cartier. Le diviseur équivalent  $(\prod_{\sigma \in \Sigma_{\max}} (\det(u_\rho)_{\rho \in \sigma(1)})) \cdot D$  est aussi de Cartier ce qui achève la démonstration.  $\square$

Ce résultat admet une réciproque.

**Proposition 2.16.** *Soit  $X_\Sigma$  une variété torique normale. Si tout diviseur de Weil sur  $X_\Sigma$  est  $\mathbb{Q}$ -Cartier alors  $X_\Sigma$  est simpliciale.*

**Preuve.** Soit  $n$  la dimension de la variété  $X_\Sigma$ . Puisque  $X_\Sigma$  est sans facteurs toriques, on montre que  $\forall \sigma \in \Sigma(n)$ , l'ensemble  $(u_\rho, \rho \in \sigma(1))$  forme une base de  $N_{\mathbb{R}}$ . Soit  $U_\sigma$  l'ouvert affine correspondant au cône  $\sigma$  dans  $\Sigma(n)$ . On note  $(\rho_1, \dots, \rho_n)$  les rayons du cône  $\sigma$ . le groupe  $\bigoplus_{\rho \in \sigma(1)} \mathbb{Z}D_\rho$

décrit l'ensemble des diviseurs  $T_N$ -invariants sur  $U_\sigma$ . Soit  $k_\rho \in \mathbb{N}^*$  tel que  $k_\rho \cdot D_\rho$  soit de Cartier sur  $X_\Sigma$  et par conséquent sur  $U_\sigma$ . Par suite, le morphisme

$$M \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^n k_{\rho_j} \cdot D_{\rho_j}$$

$$m \longmapsto (k_{\rho_1} \langle m, u_{\rho_1} \rangle, \dots, k_{\rho_n} \langle m, u_{\rho_n} \rangle)$$

est surjectif. Si le réseau  $N$  est rapporté à la base  $(e_1, \dots, e_n)$  et le réseau  $M$  à la base duale  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  alors le morphisme ci-dessus est caractérisé par la matrice  $M = (\langle e_i^*, k_{\rho_j} u_{\rho_j} \rangle)_{i,j}$ . De plus,  $\det M \neq 0$ .

On a  $M = (\prod_{j=1}^n k_{\rho_j}) {}^t P$  où  $P$  est la matrice des coordonnées de  $(u_{\rho_1}, \dots, u_{\rho_n})$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Donc  $(u_{\rho_1}, \dots, u_{\rho_n})$  est une base de l'espace vectoriel  $N_{\mathbb{R}}$ . □

### 2.4.2 Diviseurs sans points de base.

Un diviseur de Cartier  $D$  sur une variété normale  $X$  est déterminé localement par un couple  $(U_i, f_i)$  où  $U_i$  est un ouvert affine de  $X$ ,  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$  et  $D|_{U_i} = \text{div}(f_i)$ . Si  $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}(D))$  alors  $f \cdot f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  et  $f_j/f_i \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$  est une fonction de transition entre  $U_i \times \mathbb{C}$  et  $U_j \times \mathbb{C}$ , la fonction  $f$  est donc une section globale d'un fibré en droites dont les fonctions de transition sont les  $f_j/f_i$ . On montre le résultat suivant.

**Théorème 2.8.** *Le faisceau  $\mathcal{O}(D)$  d'un diviseur de Cartier  $D$  sur une variété normale est le faisceau des sections d'un fibré en droites.*

**Définition 2.16** (Sections globales sans point de base). L'espace vectoriel  $\Gamma(X, \mathcal{O}(D))$  des sections globales du faisceau  $\mathcal{O}(D)$  est sans points de base si pour tout point  $p \in X$ , il existe  $s$  une section globale telle que  $s(p) \neq 0$ .

**Définition 2.17.** Un diviseur de Cartier  $D$  d'une variété normale  $X$  est sans points de base si  $\Gamma(X, \mathcal{O}(D))$  est sans points de base.

Si  $D$  est sans points de base et  $D' \sim D$  alors  $D'$  est sans points de base. Il est donc possible de définir un degré sans points de base.

Dans le cas d'une variété torique  $X_\Sigma$  définie par un éventail complet  $\Sigma$ , il existe une caractérisation simple des diviseurs de Cartier  $T_N$ -invariants sans points de base à l'aide du polytope associé.

**Théorème 2.9.** *Soient  $X$  une variété torique définie par un éventail complet  $\Sigma$  et  $D$  un diviseur de Cartier,  $T_N$ -invariant sur  $X$ . Pour tout  $\sigma \in \Sigma(n)$ ,  $D|_{U_\sigma} = \text{div}(\chi_{-m_\sigma})$  alors  $D$  est sans points de base si et seulement si  $\{m_\sigma \mid \sigma \in \Sigma(n)\}$  est l'ensemble des sommets du polytope  $P_D$ .*

**Définition 2.18.** Soit  $X_\Sigma$  une variété torique normale, complète et  $S$  son anneau de coordonnées homogènes alors  $P \in S$  est de degré sans points de base s'il est l'homogénéisation d'un caractère par un diviseur sans points de base.

Un diviseur de Cartier  $T_N$ -invariants sur une variété torique complète définit un plongement de la variété sur un espace projectif. On rappelle que si  $X_\Sigma$  est une variété complète et  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho D_\rho$  un diviseur  $T_N$ -invariant alors les sections globales du faisceau  $\mathcal{O}(D)$  forment un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie engendrée par les caractères  $\chi_m$  où  $m \in M \cap P_D$ . Soit  $s$  le nombre de points à coordonnées entières contenus dans le polytope  $P_D$  alors le plongement  $\phi_D$  est défini comme suit

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{P}^{s-1} \\ p &\longmapsto (\chi_{m_1}(p), \dots, \chi_{m_s}(p)) \end{aligned}$$

Localement sur l'ouvert  $U_\sigma$ , le plongement est donné par

$$\begin{aligned} U_\sigma &\longrightarrow \mathbb{P}^{s-1} \\ p &\longmapsto (\chi_{-m_\sigma}(p)\chi_{m_1}(p), \dots, \chi_{-m_\sigma}(p)\chi_{m_s}(p)) \end{aligned}$$

où  $D|_{U_\sigma} = \text{div}(\chi_{-m_\sigma})$ . De plus si  $D$  est sans points de base et  $m_\sigma$  est l'un des sommets du polytope  $P_D$  puisque  $D$  est sans points de base.

### 2.4.3 Diviseurs amples.

**Définition 2.19.** Soit  $D$  un diviseur de Cartier  $T_N$ -invariant sur une variété torique normale et complète.

Le diviseur  $D$  ou le faisceau  $\mathcal{O}(D)$  est très ample si  $D$  est sans points de base et l'application  $\phi_D$  est un plongement fermé.

Le diviseur  $D$  ou le faisceau  $\mathcal{O}(D)$  est ample si  $kD$  est très ample pour une entier  $k > 0$ .

Soit  $P$  un polytope rationnel de dimension maximale dans  $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  et donné par les hyperplans limitants définis par les vecteurs primitifs  $\eta_F$  qui forment des normales rentrantes aux facettes

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, \eta_F \rangle \geq -a_F \text{ pour toute facette } F\}.$$

**Proposition 2.17.** Soient  $X_P$  la variété torique et  $D_P$  le diviseur associés à  $P$ . Alors  $D_P$  est ample et sans points de base et pour tout  $n \geq 2$ ,  $kD_P$  est très ample pour tout  $k \geq n - 1$ .

**Proposition 2.18.** Soit  $X_\Sigma$  une variété torique normale et complète et soit  $D$  un diviseur de Cartier  $T_N$ -invariant sur  $X_\Sigma$ .

Si  $D$  est ample alors  $D$  est sans points de base et  $X_\Sigma = X_{P_D}$ .

## Chapitre 3

# Éclatement d'une variété torique

Il est possible de décrire l'éclatement d'une variété torique à partir des systèmes de coordonnées homogènes de ses points. Nous établissons dans cette partie, l'expression analytique d'un éclatement d'une variété torique et étudions son effet sur un certain type de diviseurs invariants sous l'action de son tore. Nous commençons par donner la définition du raffinement d'un éventail associé à une variété torique.

Le but est de réaliser l'éclatement d'une variété torique non simpliciale en une variété torique simpliciale.

### 3.1 Raffinement d'un éventail

**Définition 3.1.** Soit  $N$  un réseau et soit  $\Sigma$  un éventail dans l'espace vectoriel  $N \otimes \mathbb{R}$ , on dit qu'un éventail  $\Sigma'$  raffine l'éventail  $\Sigma$  si

- a) tout cône de  $\Sigma'$  est contenu dans un cône de  $\Sigma$
- b)  $|\Sigma| = |\Sigma'|$ .

**Proposition 3.1.** Soient  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  deux éventails dans  $N \otimes \mathbb{R}$  alors l'éventail  $\Sigma'$  est un raffinement de  $\Sigma$  si et seulement si

- i) les cônes de  $\Sigma$  de dimension maximale sont réunions de cônes maximaux de  $\Sigma'$ .
- ii)  $|\Sigma| = |\Sigma'|$ .

**Preuve.**

- 1) On montre que les propositions a) et b) impliquent les propositions i) et ii).

On note  $n$  la dimension de l'éventail  $\Sigma$ . Soient  $\sigma \in \Sigma(n)$  un cône de dimension maximale et  $\bigcup_{\substack{\sigma' \subset \sigma \\ \sigma' \in \Sigma'}} \sigma'$  la réunion des cônes de l'éventail  $\Sigma'$  contenu dans  $\sigma$ . Cette réunion est non vide puisqu'elle contient au moins le cône minimal de  $|\Sigma|$ . On prouve que  $\text{Int } \sigma \subset \bigcup_{\substack{\sigma' \subset \sigma \\ \sigma' \in \Sigma'}} \sigma'$  ce qui montre que  $\sigma = \overline{\text{Int } \sigma} = \bigcup_{\substack{\sigma' \subset \sigma \\ \sigma' \in \Sigma'}} \sigma'$ .

S'il existe  $p \in \text{Int } \sigma$  tel que  $p \notin \bigcup_{\substack{\sigma' \subset \sigma \\ \sigma' \in \Sigma'}} \sigma'$ , le point  $p$  est contenu dans un cône  $\sigma'_0 \in \Sigma'(n)$  car  $|\Sigma| = |\Sigma'|$  et de plus  $\sigma'_0 \not\subset \sigma$ . D'après a), il existe  $\sigma_0 \in \Sigma(n)$  tel que  $\sigma'_0 \subset \sigma_0$  alors  $\sigma_0 \neq \sigma$  et  $p \in \sigma_0$ .

Or  $(\text{Int } \sigma) \cap \sigma_0 = \emptyset$  par définition d'un éventail. D'où

$$\text{Int } \sigma \subset \bigcup_{\substack{\sigma' \subset \sigma \\ \sigma' \in \Sigma'}} \sigma'.$$

- 2) Pour établir la réciproque, il suffit de montrer que tout cône de dimension  $n$  de  $\Sigma'$  est inclus dans un cône de même dimension de l'éventail  $\Sigma$ . Soit  $\sigma'_0 \in \Sigma'(n)$ , il existe  $\sigma \in \Sigma(n)$  tel que  $\text{Int } \sigma'_0 \cap \sigma \neq \emptyset$  car  $|\Sigma| = |\Sigma'|$ . Or  $\sigma = \bigcup_{\sigma' \in \Sigma'(n)} \sigma'$ , d'où

$$(\text{Int } \sigma'_0) \cap \sigma = (\text{Int } \sigma'_0) \cap (\bigcup_{\sigma' \subset \sigma} \sigma') = \bigcup_{\sigma' \subset \sigma} (\text{Int } \sigma'_0 \cap \sigma').$$

Comme  $(\text{Int } \sigma'_0) \cap \sigma \neq \emptyset$ , il existe  $\sigma' \subset \sigma$  tel que  $(\text{Int } \sigma'_0) \cap \sigma' \neq \emptyset$  alors  $\sigma'_0 = \sigma'$  car  $\Sigma'$  est un éventail.

□

Puisque le réseau  $N$  est identique pour les éventails  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ , l'identité de  $N$  dans  $N$  est compatible avec les éventails  $\Sigma'$  et  $\Sigma$  par définition de  $\Sigma'$  et induit un morphisme torique entre les variétés toriques  $X_{\Sigma'}$  et  $X_{\Sigma}$ .

Il existe toutefois plusieurs façons de raffiner un éventail selon que l'on ajoute ou pas des rayons à l'éventail. Nous examinons dans la suite, un cas particulier de raffinement qui consiste à ajouter des cônes de dimension 1. L'étude des subdivisions étoilées s'inspire pour une large part de [11] chapitre 11.

**Définition 3.2.** Soit  $\Sigma$  un éventail dans  $N_{\mathbb{R}}$  et  $\eta \in |\Sigma| \cap N$ , un vecteur primitif. On définit la subdivision étoile  $\Sigma^*(\eta)$  qui comprend les cônes suivants :

- a)  $\sigma \in \Sigma$  si  $\eta \notin \sigma$ .
- b)  $\text{cône}(\eta, \tau)$  si  $\eta \notin \tau \in \Sigma$  et  $\{\eta\} \cup \tau \subseteq \sigma \in \Sigma$ .

**Proposition 3.2.** La subdivision  $\Sigma^*(\eta)$  est un éventail qui raffine  $\Sigma$ . De plus,  $\Sigma^*(\eta)(1) = \Sigma(1) \cup \rho_{\eta}$  où  $\rho_{\eta} = \text{cône}(\eta)$ .

**Preuve.**

- 1) On montre que  $\Sigma^*(\eta)$  est un éventail.

Soit  $\text{cône}(\eta, \tau)$  un cône de  $\Sigma^*(\eta)$  du type b). Comme  $\{\eta\} \cup \tau \subseteq \sigma \in \Sigma$  et  $\eta \notin \text{Vect}(\tau)$ ,  $\sigma \cap \text{Vect}(\tau) = \tau$  et par suite,  $\dim(\text{cône}(\eta, \tau)) = \dim \tau + 1$ .

On commence par prouver que les faces des cônes de la subdivision sont des cônes de la subdivision. La propriété est clairement vérifiée le cas des cônes de type a). Considérons un cône de type b). Il est de la forme  $\text{cône}(\eta, \tau)$ . Soit  $\delta$  une face de  $\text{cône}(\eta, \tau)$ . Il existe un hyperplan  $H_m = \{u \in N_{\mathbb{R}}, \langle u, m \rangle = 0\}$  où  $m \neq 0$  et  $m \in \text{cône}(\eta, \tau)^{\vee}$  tel que  $\delta = H_m \cap \text{cône}(\eta, \tau)$ . Puisque  $\tau \subset \text{cône}(\eta, \tau)$  et  $\text{cône}(\eta) \subset \text{cône}(\eta, \tau)$ , on a les inclusions  $\text{cône}(\eta, \tau)^{\vee} \subset \tau^{\vee}$  et  $\text{cône}(\eta, \tau)^{\vee} \subset \text{cône}(\eta)^{\vee}$  donc  $m \in \tau^{\vee}$  et  $\langle m, \eta \rangle \geq 0$ .

Si  $\langle m, \eta \rangle = 0$  alors  $\eta \in H_m$  et  $\delta = \text{cône}(H_m \cap \tau, \eta)$ . Or  $m \in \tau^{\vee}$  donc  $H_m \cap \tau$  est une face de  $\tau$  et par suite un cône de  $\Sigma$  alors  $\text{cône}(H_m \cap \tau, \eta) \in \Sigma^*(\eta)$ . Si  $\langle m, \eta \rangle > 0$ ,  $\delta = H_m \cap \tau \in \Sigma^*(\eta)$ .

On prouve à présent que l'intersection de deux cônes de  $\Sigma^*(\eta)$  est une face de chacun d'eux.

### CHAPITRE 3. ÉCLATEMENT D'UNE VARIÉTÉ TORIQUE

La propriété est clairement vérifiée lorsqu'il s'agit de l'intersection de deux cônes de type a. Il reste à examiner deux cas.

i) On considère le cas où  $\eta$  n'est contenu que dans l'un des deux cônes. Soient  $\sigma$  un cône de type a et  $\text{cône}(\tau, \eta)$  un cône de type b. On a l'égalité  $\text{cône}(\tau, \eta) \cap \sigma = \tau \cap \sigma$ . En effet, l'inclusion  $\tau \cap \sigma \subset \text{cône}(\tau, \eta) \cap \sigma$  est immédiate. Réciproquement, soit  $u \in \text{cône}(\tau, \eta) \cap \sigma$ ,  $u$  s'écrit  $u = u_0 + \alpha\eta$  avec  $u_0 \in \tau$  et  $\alpha \geq 0$ . Soit  $\sigma'$  un cône de  $\Sigma$  contenant  $\tau$  et  $\eta$ . D'une part  $u_0$  et  $\eta$  appartiennent à  $\sigma'$ , d'autre part  $u \in \sigma \cap \sigma'$  qui est une face de  $\sigma'$ . donc  $u_0$  et  $\alpha\eta$  appartiennent également à la face  $\sigma \cap \sigma'$  de  $\sigma'$ . D'où  $\alpha = 0$  car  $\eta \notin \sigma$  et donc  $u \in \tau$ . La conclusion vient en remarquant que  $\tau \cap \sigma$  est une face de  $\sigma$  et de  $\text{cône}(\tau, \eta)$ .

ii) Soient  $\text{cône}(\tau_1, \eta)$  et  $\text{cône}(\tau_2, \eta)$ , deux cônes de type b. On montre que  $\text{cône}(\tau_1, \eta) \cap \text{cône}(\tau_2, \eta) = \text{cône}(\tau_1 \cap \tau_2, \eta)$ .

L'inclusion  $\text{cône}(\tau_1 \cap \tau_2, \eta) \subset \text{cône}(\tau_1, \eta) \cap \text{cône}(\tau_2, \eta)$  est directe. Réciproquement, soit  $u \in \text{cône}(\tau_1, \eta) \cap \text{cône}(\tau_2, \eta)$ ,  $u = u_i + \alpha_i\eta$  avec  $u_i \in \tau_i$  et  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Supposons  $\alpha_1 \geq \alpha_2$  alors  $u_2 = u_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\eta \in \text{cône}(\tau_1, \eta)$ . D'après i),  $u_2 \in \tau_1 \cap \tau_2$  et donc  $u = u_2 + \alpha_2\eta \in \text{cône}(\tau_1 \cap \tau_2, \eta)$ . On observe enfin que  $\tau_1 \cap \tau_2$  est une face de  $\text{cône}(\tau_1, \eta)$  et  $\text{cône}(\tau_2, \eta)$ .

2) L'éventail  $\Sigma^*(\eta)$  raffine  $\Sigma$ .

Il suffit de montrer que tout cône de  $\Sigma(n)$  contenant  $\eta$  est une réunion de cônes de  $\Sigma^*(\eta)$  puisque les autres cônes de dimension  $n$  sont gardés dans  $\Sigma^*(\eta)$ .

Soit  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\eta \in \sigma$  et soit  $u \in \sigma$ . On considère les générateurs minimaux  $(m_i)_{i=1}^r$  de  $\sigma^\vee$ . Pour tout  $m_i$ ,  $\langle m_i, \eta \rangle \geq 0$ . On pose alors

$$\lambda(u) = \min_{\langle m_i, \eta \rangle > 0} \frac{\langle m_i, u \rangle}{\langle m_i, \eta \rangle}.$$

Il existe  $i$  tel que  $\langle m_i, \eta \rangle > 0$  car  $\eta \neq 0$  et donc  $\lambda(u)$  est bien défini.

De plus,  $u - \lambda(u)\eta$  appartient à  $\sigma$ . En effet, pour tout  $i$ ,  $\langle m_i, u - \lambda(u)\eta \rangle \geq 0$ .

Si  $\langle m_i, u \rangle = 0$ ,  $\langle m_i, u - \lambda\eta \rangle = 0$ ; sinon  $\langle m_i, u - \lambda\eta \rangle = \langle m_i, \eta \rangle \left( \frac{\langle m_i, u \rangle}{\langle m_i, \eta \rangle} - \lambda \right) \geq 0$ , par définition de  $\lambda(u)$ . Pour le générateur  $m_j$  tel que  $\lambda(u) = \frac{\langle m_j, u \rangle}{\langle m_j, \eta \rangle}$  on a  $\langle m_j, u - \lambda\eta \rangle = 0$  d'où  $u - \lambda(u)\eta$  est  $H_{m_j} \cap \sigma$  qui est une face de  $\sigma$ . Cette face ne contient pas  $\eta$  car  $\langle m_j, \eta \rangle > 0$ . On obtient  $u \in \text{cône}(H_{m_j} \cap \sigma, \eta)$  ce qui achève la démonstration de 2).

3)  $\Sigma^*(\eta)(1) = \Sigma(1) \cup \rho_\eta$ .

Il suffit de remarquer que  $\rho_\eta = \text{cône}(0, \eta)$  et qu'il existe  $\sigma \in \Sigma$  contenant  $\eta$ . Par suite,  $\rho_\eta \in \Sigma^*(\eta)$ . Les autres rayons de  $\Sigma$  sont des cônes de type a donc dans  $\Sigma^*(\eta)(1)$ .  $\square$

*Remarque 3.1.*

1) Le vecteur  $\eta$  peut être ou non un vecteur primitif de l'éventail initial.

2) L'éventail  $\Sigma^*(\eta_{s+1})$  est un raffinement de l'éventail  $\Sigma$ . Les rayons de  $\Sigma^*(\eta_{s+1})$  forment l'ensemble  $\Sigma(1) \cup \rho_{\eta_{s+1}}$ . De plus, si  $\tau$  est le cône minimal de  $\Sigma$  contenant  $\eta_{s+1}$  alors tout cône engendré par  $\eta_{s+1}$  et une facette de  $\tau$  est un cône de  $\Sigma^*(\eta_{s+1})$ .

- 3) On observe que la construction du nouvel éventail  $\Sigma^*(\eta_{s+1})$  qui raffine  $\Sigma$  en ajoutant le vecteur primitif  $\eta_{s+1}$  n'affecte que le cône minimal de  $\eta_{s+1}$  dans  $\Sigma$  et les cônes de  $\Sigma$  qui le contiennent. Ainsi parmi les cônes de  $\Sigma$  conservés dans  $\Sigma^*(\eta_{s+1})$  se trouvent les cônes de  $\tau$  et tous les cônes de  $\Sigma$  distincts de  $\tau$  et de même dimension que  $\tau$ .

## 3.2 Raffinement d'un éventail non simplicial en un éventail simplicial

On rappelle qu'un éventail est simplicial si tous ces cônes sont simpliciaux.

Les raffinements étoilés suggèrent deux modes de raffinement d'un éventail non simplicial en un éventail simplicial suivant que des cônes de dimension 1 sont ajoutés ou pas à l'éventail initial.

On note  $\Sigma$  l'éventail initial et  $\Sigma'$  l'éventail simplicial qui raffine  $\Sigma$  et que l'on construit ci-dessous.

### 3.2.1 Méthode 1 : ajout de rayons à l'éventail

La méthode consiste à remplacer les cônes non simpliciaux par des éventails constitués de cônes simpliciaux en considérant d'abord les cônes non simpliciaux de plus petite dimension. On procède donc par induction.

Les cônes de dimension inférieure ou égale à 2 sont simpliciaux.

On considère la suite finie des cônes  $(\sigma_q)$  où  $q$  indexe les cônes non simpliciaux de l'éventail initial  $\Sigma$  en respectant l'ordre donné par les dimensions ce qui signifie que  $q_1 \leq q_2 \Rightarrow \dim(\sigma_{q_1}) \leq \dim(\sigma_{q_2})$ . On construit ainsi une suite finie de raffinements  $(\Sigma_q)$  telle que  $\Sigma_0 = \Sigma$  et  $\Sigma_{q+1} = \Sigma_q^*(\eta_{s+q+1})$  où  $\eta_{s+q+1}$  est un vecteur primitif dans  $\text{Int}(\sigma_q)$ . D'après la remarque 3.1, l'éventail  $\Sigma_{q+1} = \Sigma_q^*(\eta_{s+q+1})$  substitue au cône  $\sigma_{q+1}$ , un éventail de cônes de même dimension que celle de  $\sigma_{q+1}$  sans modifier les cônes de  $\Sigma_q$  qui sont de dimension égale ou inférieure à  $\dim(\sigma_{q+1})$ . Ainsi en remontant dimension par dimension on obtient, au terme d'un nombre fini d'itération strictement inférieur au nombre de cônes dans  $\Sigma$ , un éventail simplicial qui est un raffinement des éventails successifs obtenus dans le processus et, en particulier, de  $\Sigma_0 = \Sigma$ .

### 3.2.2 Méthode 2 : $\Sigma(1) = \Sigma'(1)$

On montre le résultat suivant

**Proposition 3.3.** *Tout éventail  $\Sigma$  admet un raffinement  $\Sigma'$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- a)  $\Sigma'$  est simplicial et  $\Sigma'(1) = \Sigma(1)$ .
- b)  $\Sigma'$  contient tous les cônes simpliciaux de  $\Sigma$ .

**Preuve.** La preuve s'opère par récurrence finie sur le nombre de diviseurs  $D_\rho$ ,  $\rho \in \Sigma(1)$  qui ne sont pas  $\mathbb{Q}$ -Cartier sur la variété  $X_\Sigma$ .

Soit  $E_\Sigma = \{\rho \in \Sigma(1), D_\rho \text{ n'est pas } \mathbb{Q}\text{-Cartier}\}$ . On pose  $r = |E_\Sigma|$ .

Si  $r = 0$  alors tous les diviseurs irréductibles  $D_\rho$  associés aux rayons de  $\Sigma$  sont  $\mathbb{Q}$ -Cartier. Or tout diviseur de Weil sur  $X_\Sigma$  est équivalent à un diviseur de Weil  $T_N$ -invariant et les diviseurs

$D_\rho$ ,  $\rho \in \Sigma(1)$  engendrent les diviseurs de Weil  $T_N$ -invariants donc tout diviseur de Weil est  $\mathbb{Q}$ -Cartier sur  $X_\Sigma$ , par conséquent la variété  $X_\Sigma$  est simpliciale ce qui signifie que  $\Sigma$  est un éventail simplicial.

Si  $r > 0$  on prend  $\rho_1 \in \Sigma(1)$  tel que  $D_{\rho_1}$  n'est pas  $\mathbb{Q}$ -Cartier et on considère la subdivision  $\Sigma^*(\eta_{\rho_1})$  où  $\eta_{\rho_1}$  désigne le vecteur primitif qui engendre  $\rho_1$ . L'éventail  $\Sigma^*(\eta_{\rho_1})$  garde les mêmes rayons que  $\Sigma$ .

On montre que  $D_{\rho_1}$  est  $\mathbb{Q}$ -Cartier sur la variété  $X_{\Sigma^*(\eta_{\rho_1})}$ . Il suffit de déterminer un entier  $k > 0$  tel que, pour tout  $\sigma \in \Sigma^*(\eta_{\rho_1})$  de dimension maximale,  $kD_{\rho_1}|_{U_\sigma} = \text{div}(\chi^{-m_\sigma})$ . On rappelle que les cônes de  $\Sigma^*(\eta_{\rho_1})$  sont de deux types : il s'agit des cônes de  $\Sigma$  ne contenant pas  $\rho_1$  et des cônes de la forme  $\text{cône}(\tau, \rho_1)$  où  $\rho_1$  et  $\tau$  sont deux faces d'un même cône de  $\Sigma$  et  $\rho_1$  n'est pas un rayon de  $\tau$ . Soit  $\sigma$  un cône de dimension maximale de  $\Sigma^*(\eta_{\rho_1})$ . Si  $\rho_1 \notin \sigma(1)$  alors  $D_{\rho_1}|_{U_\sigma} = 0$  et  $m_\sigma = 0 \in M$  sinon  $\sigma = \text{cône}(\tau, \rho_1)$  avec  $\tau$  une facette d'un cône de dimension maximale de  $\Sigma$ . Puisque  $\rho_1 \notin \tau$ , le vecteur primitif  $\eta_{\rho_1}$  n'est pas un vecteur de  $\text{Vect}(\tau)$  sinon tout hyperplan contenant  $\tau$  contiendrait également  $\rho_1$  et  $\rho_1$  serait dans  $\tau$ . On considère une base de  $\text{Vect}(\tau)$  constituée de vecteurs primitifs  $\eta_{\rho'}, \rho' \in \sigma(1)$ . Il existe un unique  $m \in M_{\mathbb{Q}}$  vérifiant  $\langle m, \eta_{\rho'} \rangle = 0$  pour tout  $\rho' \in \sigma(1)$  et  $\langle m, \eta_{\rho} \rangle = 1$ . Par suite il existe un entier  $k_\sigma > 0$  tel que  $k_\sigma \cdot m = m_\sigma \in M$  et  $k_\sigma D_{\rho_1}|_{U_\sigma} = \text{div}(\chi^{-m_\sigma})$ . Soit  $k$  le ppcm des entiers  $k_\sigma$ . Le diviseur  $kD_{\rho_1}$  est un diviseur de Cartier sur  $X_{\Sigma^*(\eta_{\rho_1})}$ .

De plus, tout diviseur irréductible qui est  $\mathbb{Q}$ -Cartier dans la variété  $X_\Sigma$  reste  $\mathbb{Q}$ -Cartier dans  $X_{\Sigma^*(\eta_{\rho_1})}$ . Soit  $D_\rho$  un diviseur irréductible et  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $kD_\rho$  soit de Cartier dans  $X_\Sigma$ . Il existe  $m_\sigma \in M$  tel que  $kD_\rho|_{U_\sigma} = \text{div}(\chi^{-m_\sigma})$  lorsque  $\sigma$  est un cône de  $\Sigma$ . Dans le cas d'un cône de type b,  $\sigma = \text{cône}(\tau, \rho_1)$ . Les cônes  $\tau$  et  $\rho_1$  sont contenus dans un cône  $\sigma'$  de  $\Sigma$ . Il existe  $m_{\sigma'} \in M$  tel que  $kD_\rho|_{U_\sigma} = \text{div}(\chi^{-m_{\sigma'}})$ . Comme  $\tau$  et  $\rho_1$  sont des faces de  $\sigma'$  (ici  $\rho_1 \in \Sigma(1)$ ),  $kD_\rho|_{U_\tau} = \text{div}(\chi^{-m_{\sigma'}})$  et  $kD_\rho|_{U_{\rho_1}} = \text{div}(\chi^{-m_{\sigma'}})$ .

On obtient donc  $E_{\Sigma^*(\eta_{\rho_1})} \subset E_\Sigma$ . Par conséquent, on obtient un éventail simplicial  $\Sigma'$  au terme d'une séquence finie de subdivisions étoilées.

Il reste à prouver que  $\Sigma'$  contient les cônes simpliciaux de  $\Sigma$ . On sait que  $\Sigma'$  est un raffinement de  $\Sigma$  satisfaisant  $\Sigma'(1) = \Sigma(1)$ . Soit  $\sigma \in \Sigma$  un cône simplicial. Si  $\sigma' \in \Sigma'$  avec  $\sigma' \subset \sigma$  alors  $\Sigma'(1) = \Sigma(1)$  donne  $\sigma'(1) \subseteq \sigma(1)$  et donc  $\sigma'$  est une face de  $\sigma$  puisque  $\sigma$  est simplicial. Comme  $\Sigma'$  est un raffinement de  $\Sigma$ ,  $\sigma = \bigcup_{\sigma' \in \Sigma', \sigma' \subseteq \sigma} \sigma'$ . Par conséquent, l'un des cônes  $\sigma'$  de cette union est égal à  $\sigma$ .  $\square$

*Remarque 3.2.* La première méthode permet aussi de raffiner des éventails déjà simpliciaux ce qui n'est pas le cas de la seconde. En particulier, la première méthode peut être utilisée pour raffiner un éventail simplicial en éventail régulier c'est-à-dire un éventail où chaque cône de dimension maximale est engendré une  $\mathbb{Z}$ -base du réseau  $N$ . En effet, l'ajout d'un rayon engendré par le vecteur primitif vecteur  $\eta_{n+1}$  à l'intérieur de  $\text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_n)$  consiste à substituer au  $\text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_n)$  l'éventail formé des cônes  $\text{cône}(\eta_1, \dots, \hat{\eta}_j, \dots, \eta_n, \eta_{n+1})$  où  $j = 1, \dots, n$ . Alors  $\text{Vol}(\eta_1, \dots, \eta_n) = \sum_{j=1}^n \text{Vol}(\eta_1, \dots, \hat{\eta}_j, \dots, \eta_n, \eta_{n+1})$ . Par suite,  $|\det(\eta_1, \dots, \hat{\eta}_j, \dots, \eta_{n+1})| < |\det(\eta_1, \dots, \eta_n)|$  pour tout  $j = 1, \dots, n$ . Comme les déterminants considérés sont entiers et non nuls, il est clair qu'au terme d'un nombre fini d'itérations on obtient que tous les déterminants des vecteurs primitifs associés aux cônes inclus dans  $\text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_n)$  sont égaux à  $\pm 1$ .

### 3.3 Morphisme d'éclatement entre deux variétés toriques

Dans la partie 3.3, on construit de façon explicite, un morphisme d'éclatement qui s'exprime en fonction des coordonnées homogènes. L'explicitation du morphisme d'éclatement est donnée dans un cas particulier qui permet néanmoins d'éclater une variété torique non simpliciale en une variété simpliciale, dans le cas où  $\Sigma'$  est obtenu par ajout de rayons choisis de manière adaptée.

Un vecteur primitif choisi à l'intérieur de l'éventail  $\Sigma$  d'une variété torique s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients rationnels et positifs des vecteurs primitifs qui engendrent les rayons du cône qui le contient.

Pour tout cône  $\sigma$  de l'éventail, nous considérons les vecteurs primitifs qui sont combinaisons linéaires à coefficients entiers des vecteurs primitifs qui définissent  $\sigma(1)$ .

#### 3.3.1 Morphisme d'éclatement

Soit  $X$  une variété torique sans facteurs toriques, d'éventail  $\Sigma$ . Dans cette partie, on supposera que la variété  $X$  est simpliciale. Les vecteurs  $\eta_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ , désignent les vecteurs primitifs qui engendrent les rayons de  $\Sigma$ . La variété  $Y$  est donnée par l'éventail simplicial  $\Sigma'$  qui correspond à l'éventail obtenu en raffinant  $\Sigma$  par l'ajout d'un rayon contenu dans son support selon la construction précédente. Dans la suite, tout vecteur primitif "ajouté" à l'éventail sera choisi de façon à posséder une décomposition entière dans son cône minimal. Le rayon de vecteur primitif  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^s \alpha_j \eta_j$  appartient donc à l'intérieur d'un cône de dimension  $p$ ,  $1 < p \leq n$  de l'éventail  $\Sigma$ . On suppose que les  $p$  premiers vecteurs  $\eta_j$  engendrent ce cône ce qui induit les conditions suivantes sur les coefficients  $\alpha_j$  :  $\alpha_j > 0$  si  $1 \leq j \leq p$  et  $\alpha_j = 0$  pour  $j > p$ , les  $\alpha_j$  sont entiers.

On rappelle qu'une variété torique simpliciale peut s'interpréter comme le quotient géométrique d'une variété affine par un sous-groupe du tore maximal de la variété torique. Ainsi il existe  $Z \in \mathbb{C}^s$  et  $G$  un sous-groupe du tore de  $X$  tel que

$$X = (\mathbb{C}^s \setminus Z)/G.$$

L'ensemble  $Z$  est le lieu d'annulation des monômes impropres  $X_{\hat{\sigma}} = \prod_{\rho \notin \sigma} X_{\rho}$ ,  $\sigma \in \Sigma(n)$  pour la variété  $X$ .

Le groupe  $G$  est le sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*)^s$  défini par les  $s$  uplets  $(\mu_1, \dots, \mu_s)$  de  $(\mathbb{C}^*)^s$  vérifiant les  $n$  équations :  $\prod_{j=1}^s \mu_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} = 1$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , où les vecteurs  $(e_i)$  forment la base canonique du réseau  $M$  dual de  $N$ .

Un point de  $X$  correspond de manière biunivoque à la classe d'un point de  $\mathbb{C}^s \setminus Z$  modulo  $G$ .

De même, la variété torique  $Y$  s'exprime sous la forme du quotient

$$(\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z')/G'$$

où  $Z'$  est le lieu d'annulation des monômes  $Y_{\hat{\sigma}}$  avec  $\sigma \in \Sigma'(n)$  et  $G'$  le groupe défini par

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{s+1}) \in (\mathbb{C}^*)^{s+1}, \quad \prod_{j=1}^{s+1} \lambda_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} = 1, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

La caractérisation du groupe  $G'$  s'obtient uniquement à partir des vecteurs primitifs des rayons de  $\Sigma'$  et ne dépend pas des cônes de dimension supérieure ou égale à 2 dans  $\Sigma'$ .

**Proposition 3.4.** *On considère  $\eta_{s+1}$  un vecteur primitif dans le support de  $\Sigma$  tel que  $\eta_{s+1}$  admet une décomposition entière dans  $\sigma$ , son cône minimal (i.e le plus petit cône de  $\Sigma$  qui le contient). On pose  $\sigma = \text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_d)$  et  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^d \alpha_j \eta_j$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{N}^*$ . Il existe un unique  $s$ -uplet  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{N}^s$  tel que  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^s \alpha_j \eta_j$  en fixant  $\alpha_j = 0$  pour  $j > p$ .*

Le morphisme  $\pi$  :

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z') &\longrightarrow (\mathbb{C}^s \setminus Z) \\ (y_1, \dots, y_{s+1}) &\longmapsto \pi(y_1, \dots, y_{s+1}) = (y_{s+1}^{\alpha_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\alpha_s} y_s) \end{aligned}$$

définit le morphisme torique  $\tilde{\pi}$  de  $Y$  sur  $X$  correspondant au raffinement de  $\Sigma$  en  $\Sigma'$ .

**Preuve.** Pour tout  $(y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{C}^s$ ,  $\pi(y_1, \dots, y_s, 1) = (y_1, \dots, y_s)$  donc  $\pi$  est surjective. L'application polynomiale  $\pi$  définie de  $\mathbb{C}^{s+1}$  sur  $\mathbb{C}^s$  est aussi un morphisme de groupes de  $(\mathbb{C}^*)^{s+1}$  sur  $(\mathbb{C}^*)^s$ . Par conséquent,  $\pi$  est un morphisme torique.

On a  $\pi(G') = G$ . En effet, pour tout  $(g_1, \dots, g_s) \in G$ ,  $\pi(g_1, \dots, g_s, 1) = (g_1, \dots, g_s)$  et  $(g_1, \dots, g_s, 1) \in G'$  donc  $G \subset \pi(G')$ . De plus, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} (g'_1, \dots, g'_{s+1}) \in G' &\iff \prod_{j=1}^{s+1} (g'_j)^{\langle e_i, \eta_j \rangle} = 1 \\ &\iff \prod_{j=1}^s (g'_j)^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \times (g'_{s+1})^{\langle e_i, \sum_{j=1}^s \alpha_j \eta_j \rangle} = 1 \\ &\iff \prod_{j=1}^s (g'_j)^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \prod_{j=1}^s ((g'_{s+1})^{\alpha_j})^{\langle e_i, \eta_j \rangle} = 1 \\ &\iff \prod_{j=1}^s ((g'_{s+1})^{\alpha_j} g'_j)^{\langle e_i, \eta_j \rangle} = 1. \end{aligned}$$

D'où  $\pi(G') \subset G$ .

On vérifie que  $\pi$  est bien défini de  $(\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z')$  sur  $(\mathbb{C}^s \setminus Z)$ .

Soit  $y = (y_1, \dots, y_{s+1}) \in (\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z')$ . Il existe un cône  $\sigma' \in \Sigma'(n)$  tel que  $y_{\sigma'} = \prod_{\rho \notin \sigma'} y_\rho$  soit non nul.

Si  $\eta_{s+1}$  n'engendre pas de rayon de  $\sigma'$ , on peut toujours supposer que  $\sigma'$  est déterminé par les  $n$  premiers vecteurs primitifs  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  quitte à réindexer les rayons de  $\Sigma$ , alors  $Y_{\sigma'} = \prod_{j=n+1}^{s+1} Y_j$  et donc  $y_{\sigma'} = \prod_{j=n+1}^{s+1} y_j$  est non nul. Comme  $\eta_{s+1}$  n'est pas un rayon de  $\sigma'$ , le cône  $\sigma'$  appartient aussi à  $\Sigma(n)$  et  $X_{\sigma'} = \prod_{j=n+1}^s X_j$ . Le  $s$ -uplet  $(y_{s+1}^{\alpha_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\alpha_s} y_s)$  vérifie  $\prod_{j=n+1}^s y_{s+1}^{\alpha_j} y_j \neq 0$  d'où  $\pi(y)_{\sigma'}$  est non nul et  $\pi(y) \in (\mathbb{C}^s \setminus Z)$ .

Si  $\eta_{s+1}$  engendre un rayon dans  $\sigma'$ , il est possible d'indexer les rayons de l'éventail tel que  $\sigma' = \text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \eta_{s+1})$ ,  $Y_{\sigma'} = \prod_{j=n}^s Y_j$  et donc  $y_{\sigma'} = \prod_{j=n}^s y_j$  est non nul. Puisque  $\Sigma'$  est un raffinement de  $\Sigma$ , il existe  $\sigma \in \Sigma(n)$  tel que  $\sigma' \subset \sigma$  avec  $\sigma = \text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_n)$  en indexant les rayons de  $\Sigma$  de façon convenable. Alors  $\pi(y)_{\sigma} = \prod_{j=n+1}^s y_{s+1}^{\alpha_j} y_j = \prod_{j=n+1}^s y_j$ , par définition des  $\alpha_j$ .

Montrons que  $\pi$  est surjective de  $\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z'$  sur  $\mathbb{C}^s \setminus Z$ .

### CHAPITRE 3. ÉCLATEMENT D'UNE VARIÉTÉ TORIQUE

Soit  $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{C}^s \setminus Z$ ; il existe  $\sigma \in \Sigma(n)$  tel que  $x_{\hat{\sigma}} \neq 0$ . On suppose que  $\sigma = \text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_n)$ . Par suite  $x_{\hat{\sigma}} = \prod_{j=n+1}^s x_j \neq 0$ . Comme précédemment, on distingue deux cas selon que le vecteur  $\eta_{s+1}$  appartienne ou pas au cône  $\sigma$ .

Si  $\eta_{s+1} \notin \sigma$  alors  $\sigma$  est un cône de  $\Sigma'(n)$  et l'élément  $y = (x_1, \dots, x_s, 1)$  est un antécédent de  $(x_1, \dots, x_s)$  dans  $\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z'$ . En effet, on vérifie directement que  $\pi(y) = x$  et  $y_{\hat{\sigma}} = \prod_{j=n+1}^{s+1} y_j = \prod_{j=n+1}^s x_j \neq 0$ .

Si  $\eta_{s+1} \in \sigma$ , on considère  $\tau \subseteq \sigma$  le cône minimal contenant  $\eta_{s+1}$ . On peut poser  $\tau = \text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_p)$  avec  $2 \leq p \leq n$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , le cône  $\sigma'_i$  engendré par  $(\eta_1, \dots, \hat{\eta}_i, \dots, \eta_n, \eta_{s+1})$  est dans  $\Sigma'(n)$  par construction de l'éventail  $\Sigma'$ . S'il existe  $i, i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $x_i$  soit non nul alors l'élément  $(y_1, \dots, y_{s+1}) = (x_1, \dots, x_s, 1)$  est bien un antécédent de  $(x_1, \dots, x_s)$  car  $y_{\hat{\sigma}'_i} = \prod_{j=n+1}^s y_j \times y_i = \prod_{j=n+1}^s x_j \times x_i \neq 0$ . Sinon tous les  $x_i$ , pour  $i$  variant de 1 à  $p$ , sont nuls et le  $(s+1)$ -uplet  $(y_1, \dots, y_{s+1})$  défini par  $y_j = 1$  pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $y_j = x_j$  pour  $j \in \llbracket p+1, s \rrbracket$  et  $y_{s+1} = 0$  vérifie  $\pi(y_1, \dots, y_{s+1}) = (x_1, \dots, x_s)$  et  $y_{\hat{\sigma}'_i} \neq 0$  pour tout  $i$  variant de 1 à  $p$ .

Il existe donc une application  $\tilde{\pi}$  qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{s+1} \setminus Z' & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}^s \setminus Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z')/G' & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & (\mathbb{C}^s \setminus Z)/G \end{array}$$

L'application  $\tilde{\pi}$  est continue de  $Y$  sur  $X$  car la topologie sur les quotients géométriques est donnée par la topologie quotient. On vérifie également que toute fonction régulière sur  $U_\sigma$ ,  $\sigma \in \Sigma(n)$  donne une fonction régulière sur  $U_{\sigma'}$ ,  $\sigma' \in \Sigma'(n)$  et  $\sigma' \subset \sigma$ . En effet, les fonctions régulières sur  $U_\sigma$  sont combinaisons linéaires des fonctions  $\prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle}$  avec  $\langle m, \eta_j \rangle \geq 0$  pour tout  $j \in I_\sigma$  où  $I_\sigma$  est l'ensemble des indices qui indexent les vecteurs primitifs de  $\sigma$ . Or  $\pi^* \left( \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle} \right) = \prod_{j=1}^{s+1} Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle}$  avec  $\langle m, \eta_j \rangle \geq 0$  pour tout  $j \in I_{\sigma'}$  avec  $\sigma' \in \Sigma'$  et  $\sigma' \subset \sigma$ . Par conséquent,  $\pi^* \left( \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle} \right)$  est une fonction régulière de l'ouvert  $U_{\sigma'}$ .

Enfin ce morphisme est torique puisqu'il forme un morphisme de groupes entre les tores des deux variétés  $T_Y \simeq (\mathbb{C}^*)^{s+1}/G'$  et  $T_X \simeq (\mathbb{C}^*)^s/G$ .  $\square$

*Remarque 3.3.* En adaptant la démonstration précédente à un cône de dimension inférieure ou égale à  $n$ , on montre que la restriction de  $\tilde{\pi}$  à un ouvert affine  $U_{\sigma'}$ ,  $\sigma' \subset \Sigma'$  réalise un morphisme sur l'ouvert affine  $U_\sigma$  où  $\sigma \supset \sigma'$  et  $\sigma$  et  $\sigma'$  de même dimension.

**Proposition 3.5.** *Le morphisme d'éclatement  $\tilde{\pi}$  réalise un isomorphisme du tore de  $Y$  sur le tore de  $X$ .*

**Preuve.** Soient  $T_Y$  et  $T_X$  les tores respectifs des variétés  $X$  et  $Y$ . On sait que  $T_Y \simeq (\mathbb{C}^*)^{s+1}/G'$  et  $T_X \simeq (\mathbb{C}^*)^s/G$ . Soient  $\lambda', \mu' \in (\mathbb{C}^*)^{s+1}$ ,  $\pi(\lambda')(\pi(\mu'))^{-1} \in G$  implique que  $\lambda'(\mu')^{-1} \in \pi^{-1}(G)$ . D'après la preuve de la proposition 3.2,  $\pi^{-1}(G) = G'$ , d'où  $(\mathbb{C}^*)^{s+1}/G' \simeq (\mathbb{C}^*)^s/G$ .  $\square$

#### 3.3.2 Composée de deux morphismes d'éclatement

La variété torique  $X$  est toujours supposée simpliciale définie par l'éventail  $\Sigma$ . Les vecteurs  $\eta_{s+1}$  et  $\eta_{s+2}$ , choisis dans le support de  $\Sigma$ , sont deux vecteurs primitifs distincts qui engendrent des

### CHAPITRE 3. ÉCLATEMENT D'UNE VARIÉTÉ TORIQUE

rayons ajoutés à  $\Sigma$ . Nous commençons par raffiner  $\Sigma$  en introduisant le rayon engendré par  $\eta_{s+1}$  pour former l'éventail  $\Sigma_1$  puis le rayon engendré par  $\eta_{s+2}$  pour constituer l'éventail  $\Sigma_2$  résultant des deux raffinements donnés dans cet ordre. On suppose que  $\eta_{s+1}$  admet une décomposition à composantes entières selon les vecteurs primitifs de son cône minimal dans  $\Sigma$ . De même,  $\eta_{s+2}$  admet une décomposition à composantes entières selon les vecteurs primitifs de son cône minimal dans  $\Sigma_1$ . Du fait de la nature simpliciale des éventails, les décompositions de  $\eta_{s+1}$  et  $\eta_{s+2}$  dans leur cône minimal sont uniques.

Si  $\eta_{s+1}$  et  $\eta_{s+2}$  ont même cône minimal dans l'éventail  $\Sigma$ , il apparait aussitôt que la variété obtenue à l'issue des deux éclatements successifs dépend de l'ordre dans lequel les éclatements sont réalisés puisque les cônes générés selon la méthode décrite au § 3 sont différents. Toutefois l'expression de la composée des morphismes entre les espaces de coordonnées homogènes ne dépend pas de l'ordre dans lequel les éclatements sont envisagés.

L'unicité des décompositions dans les cônes minimaux fournit, en complétant les combinaisons linéaires par des composantes nulles, un unique  $s$ -uplet  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{N}^s$  tel que  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^s \alpha_j \eta_j$  et un unique  $s+1$ -uplet  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{s+1}) \in \mathbb{N}^{s+1}$  tel que  $\eta_{s+2} = \sum_{j=1}^{s+1} \gamma_j \eta_j$  car les éventails  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont simpliciaux. L'expression de  $\eta_{s+1}$  montre que  $\eta_{s+2}$  admet également une décomposition entière selon les vecteurs primitifs d'un cône de  $\Sigma$  :  $\eta_{s+2} = \sum_{j=1}^s \beta_j \eta_j$  où  $\beta_j = \gamma_j + \gamma_{s+1} \alpha_j$ . Les relations entre les coefficients s'obtiennent par identification en considérant l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans son cône minimal. Si  $\eta_{s+1}$  n'est pas un vecteur générateur du cône minimal de  $\eta_{s+2}$  dans  $\Sigma_1$  alors  $\gamma_{s+1} = 0$  et les décompositions entières et positives de  $\eta_{s+2}$  dans  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  coïncident.

**Proposition 3.6.** *Le morphisme  $\pi$  défini entre les espaces de coordonnées homogènes a pour expression :*

$$\pi(z_1, \dots, z_{s+2}) = (z_{s+2}^{\beta_1} z_{s+1}^{\alpha_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\beta_s} z_{s+1}^{\alpha_s} z_s).$$

**Preuve.** Le premier éclatement consiste à ajouter aux vecteurs primitifs de l'éventail  $\Sigma$ , le vecteur  $\eta_{s+1}$ , le second éclatement ajoute le vecteur  $\eta_{s+2}$  à l'éventail  $\Sigma_1$ . On obtient la composée des deux morphismes d'éclatement :

$$\begin{array}{ccccc} X_{\Sigma_2} & \xrightarrow{\bar{\chi}} & X_{\Sigma_1} & \xrightarrow{\bar{\psi}} & X_{\Sigma} \\ z = \overline{(z_1, \dots, z_{s+2})} & \mapsto & y = \overline{(y_1, \dots, y_{s+1})} & \mapsto & x = \overline{(x_1, \dots, x_s)} \end{array}$$

Les morphismes  $\psi$  et  $\chi$  sont définis par  $\psi(y_1, \dots, y_{s+1}) = (y_{s+1}^{\alpha_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\alpha_s} y_s)$  et  $\chi(z_1, \dots, z_{s+2}) = (z_{s+2}^{\gamma_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\gamma_{s+1}} z_{s+1})$ .

Par suite,

$$\begin{aligned} \psi \circ \chi(z_1, \dots, z_{s+2}) &= \varphi(z_{s+2}^{\gamma_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\gamma_{s+1}} z_{s+1}) \\ &= (z_{s+2}^{\gamma_1 + \alpha_1 \gamma_{s+1}} z_{s+1}^{\alpha_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\gamma_s + \alpha_s \gamma_{s+1}} z_{s+1}^{\alpha_s} z_s) \end{aligned}$$

On en déduit que  $\psi \circ \chi(z_1, \dots, z_{s+2}) = (z_{s+2}^{\beta_1} z_{s+1}^{\alpha_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\beta_s} z_{s+1}^{\alpha_s} z_s)$ . □

*Remarque 3.4.* L'expression de  $\psi \circ \chi$  ne dépend que des décompositions de  $\eta_{s+1}$  et  $\eta_{s+2}$  dans l'éventail initial.

### 3.3.3 Extension au cas de $r$ vecteurs

La variété torique  $X$  est définie par l'éventail simplicial  $\Sigma$  dont les rayons sont engendrés par les vecteurs primitifs  $\eta_1, \dots, \eta_s$ . On construit l'éventail  $\Sigma'$  en raffinant  $\Sigma$  par ajouts successifs de  $r$  rayons engendrés respectivement par les vecteurs primitifs  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$ . On forme ainsi une suite de  $r$  éventails simpliciaux,  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r = \Sigma'$  qui sont des raffinements de  $\Sigma = \Sigma_0$  et où  $\Sigma_{i+1}$  est un raffinement de  $\Sigma_i$ . A l'étape  $i$ , le vecteur  $\eta_{s+i}$  est choisi dans  $|\Sigma|$  et possède une décomposition entière dans son cône minimal relativement à  $\Sigma_{i-1}$ . On sait que les décompositions dans les cônes minimaux sont uniques car la suite d'éventail est constituée d'éventails simpliciaux. Chaque vecteur  $\eta_{s+i}$  possède une décomposition unique :  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^{s+i-1} \beta_{s+i,j} \eta_j$  où  $\beta_{s+i,j} \in \mathbb{N}$  et  $\beta_{s+i,j} = 0$  si  $\eta_j$  n'engendre pas le cône minimal de  $\eta_{s+i}$  relativement à l'éventail  $\Sigma_{i-1}$ .

**Proposition 3.7.** *Pour tout  $i = 1, \dots, r$ , le vecteur  $\eta_{s+i}$  admet une unique décomposition entière et positive dans son cône minimal relativement à  $\Sigma$  :  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i} \eta_j$ .*

L'éclatement de  $X_\Sigma$  en  $X_{\Sigma'}$  est caractérisé par le morphisme  $\pi$  défini sur les espaces de coordonnées homogènes par :

$$\pi(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+r}) = \left( \prod_{j=s+1}^{s+r} x_j^{\alpha_{j,1}} x_1, \dots, \prod_{j=s+1}^{s+r} x_j^{\alpha_{j,s}} x_s \right)$$

**Preuve.** Le théorème se prouve par induction sur le nombre de vecteurs ajoutés à l'éventail. C'est une conséquence directe de la proposition précédente.  $\square$

### 3.3.4 Généralisation

Le résultat précédent se généralise à une famille de  $r$  vecteurs primitifs possédant une décomposition entière et positive dans leurs cônes minimaux de  $\Sigma$ . Soit  $\Sigma'$  un raffinement simplicial de  $\Sigma$  obtenu en ajoutant  $r$  rayons de vecteurs primitifs  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$ . Comme précédemment, on note  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^s \alpha_{s+i,j} \eta_j$ .

**Théorème 3.1.** *L'éclatement de  $X_\Sigma$  en  $X_{\Sigma'}$  est caractérisé par le morphisme  $\pi$  défini entre les espaces de coordonnées homogènes par :*

$$\pi(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+r}) = \left( \prod_{i=1}^r x_j^{\alpha_{s+i,1}} x_1, \dots, \prod_{i=1}^r x_j^{\alpha_{s+i,s}} x_s \right)$$

**Preuve.** On envisage les variétés toriques sous la forme d'un quotient géométrique  $X_\Sigma = (\mathbb{C}^s \setminus Z)/G$  et  $X_{\Sigma'} = (\mathbb{C}^{s+r} \setminus Z')/G'$ . Le lieu  $Z'$  dépend du raffinement choisi.

On a  $\pi(G') = G$ . En effet, soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{s+r}) \in (\mathbb{C}^*)^{s+r}$  et  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  alors

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{s+1} \lambda_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} = 1 &\iff \prod_{j=1}^s \lambda_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \times \prod_{k=1}^r \lambda_{s+k}^{\langle e_i, \sum_{j=1}^s \alpha_{s+k,j} \eta_j \rangle} = 1 \\ &\iff \prod_{j=1}^s \lambda_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \prod_{k=1}^r \prod_{j=1}^s (\lambda_{s+k}^{\alpha_{s+k,j}})^{\langle e_i, \eta_j \rangle} = 1 \\ &\iff \prod_{j=1}^s \left( \prod_{k=1}^r \lambda_{s+k}^{\alpha_{s+k,j}} \lambda_j \right)^{\langle e_i, \eta_j \rangle} = 1. \end{aligned}$$

Soit  $(y_1, \dots, y_{s+r}) \in \mathbb{C}^{s+r} \setminus Z'$  alors il existe  $\sigma' \in \Sigma'$  tel que  $\prod_{j \notin I_{\sigma'}} y_j \neq 0$ . Comme  $\Sigma'$  raffine  $\Sigma$ , il existe  $\sigma \in \Sigma$  tel que  $\sigma' \subset \sigma$ . Soit  $X_{\hat{\sigma}} = \prod_{j \notin I_{\sigma}} X_j$  le polynôme non convenable associé au cône  $\sigma$  de  $\Sigma$ .

On considère  $(x_1, \dots, x_s) = \pi(y_1, \dots, y_{s+r})$ . Par définition de  $\pi$ ,  $x_j = \prod_{i=1}^r y_{s+i}^{\alpha_{s+i,j}} y_j$ . Soit  $j \notin I_{\sigma}$  alors  $j \notin I_{\sigma'}$  car  $\sigma' \subset \sigma$  d'où  $y_j \neq 0$ . Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , si  $\eta_{s+i} \notin \sigma'$  alors  $y_{s+i} \neq 0$ , si  $\eta_{s+i} \in \sigma'$  alors  $\alpha_{s+i,j} = 0$  pour tout  $j \notin I_{\sigma}$ . On obtient donc  $\prod_{j \notin I_{\sigma}} x_j \neq 0$ .

Il existe donc une application  $\tilde{\pi}$  continue par définition des topologies sur les quotients qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{s+r} \setminus Z' & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}^s \setminus Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z')/G' & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & (\mathbb{C}^s \setminus Z)/G \end{array} .$$

Comme dans la proposition 3.2, on vérifie que si  $f$  est une fonction régulière sur  $U_{\sigma}$ ,  $\sigma \in \Sigma(n)$  alors  $f \circ \pi$  est une fonction régulière sur  $U_{\sigma'}$  avec  $\sigma' \in \Sigma'$  et  $\sigma' \subset \sigma$ . Donc  $\tilde{\pi}$  est un morphisme de variétés qui est torique car il réalise un homomorphisme entre les groupes de  $(\mathbb{C}^*)^{s+r}/G'$  et  $(\mathbb{C}^*)^s/G$ .  $\square$

*Remarque 3.5.* soit  $F$  est un polynôme de degré donné par le diviseur  $T_N$ -invariant  $D = \sum_{j=1}^s b_j D_j$  avec  $D_j$  le diviseur irréductible de  $X_{\Sigma}$  associé à  $\eta_j$  alors  $\pi^*(F) = F \circ \pi$  est un polynôme homogène de degré donné par le diviseur  $\Pi^*(D) = \sum_{j=1}^s b_j D'_j + \sum_{i=1}^r (\sum_{j=1}^s \alpha_{s+i,j} b_j) D'_{s+i}$ .

*Remarque 3.6.* Le morphisme  $\tilde{\pi}$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{C}^*)^{s+r}/G'$  sur  $(\mathbb{C}^*)^s/G$  qui envoie  $(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_n, 1, \dots, 1)$  sur  $(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_n, 1, \dots, 1)$ .

*Remarque 3.7.* Le morphisme  $\tilde{\pi}$  est le morphisme torique propre induit par le raffinement de  $\Sigma$  en  $\Sigma'$ .

### 3.4 Morphisme d'éclatement entre deux variétés toriques, cas non simplicial

Dans cette section, l'éventail de la variété torique  $X$  n'est plus supposé simplicial. Le caractère simplicial assure l'unicité de la décomposition (à composantes positives ou nulles) d'un vecteur du support de l'éventail selon les vecteurs primitifs de son cône minimal. On dispose ainsi d'une correspondance biunivoque entre un vecteur primitif dans l'éventail et le morphisme  $\pi$  construit à la partie précédente. Dans le cas non simplicial, un vecteur primitif admet a priori plusieurs décompositions et chaque décomposition conduit à définir un morphisme  $\pi$  différent.

On commence par l'étude d'un exemple.

**Exemple 3.1.** Dans  $\mathbb{R}^3$  rapporté à sa base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$ , on considère le cône  $\sigma$  engendré par  $\eta_1 = e_1$ ,  $\eta_2 = e_2$ ,  $\eta_3 = e_2 + e_3$  et  $\eta_4 = e_1 + e_3$ . La variété torique affine  $U_{\sigma}$  est définie par l'éventail constitué de  $\sigma$  et de ses faces. Dans le cas d'un éventail réduit à un cône, le lieu non convenable est réduit à  $\emptyset$ . Le groupe  $G$  associé à la variété  $U_{\sigma}$  agit sur  $\mathbb{C}^4$ . C'est l'ensemble des éléments  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  de  $(\mathbb{C}^*)^4$  vérifiant les équations :

$$\lambda_1 \lambda_4 = 1 \quad \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad \lambda_3 \lambda_4 = 1.$$

D'où  $G = \{(\lambda, \lambda^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}) \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\} \simeq \mathbb{C}^*$ .

L'éventail de  $U_\sigma$  n'est pas simplicial. On ajoute à  $\sigma$  le rayon engendré par le vecteur primitif  $\eta_5 = e_1 + e_2 + e_3$ . Le vecteur  $\eta_5$  a plusieurs décompositions en composantes positives suivant  $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\} : \eta_5 = \eta_1 + \eta_3 = \eta_2 + \eta_4$ , qui définissent respectivement deux morphismes  $\pi_1$  et  $\pi_2$  de  $\mathbb{C}^5$  sur  $\mathbb{C}^4$ . On a

$$\begin{aligned} \pi_1 &: (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (y_5 y_1, y_2, y_5 y_3, y_4) \\ \pi_2 &: (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (y_5 y_1, y_2, y_5 y_3, y_4) \end{aligned}$$

On note  $p$  la projection de  $\mathbb{C}^4$  sur le quotient catégoriel  $\mathbb{C}^4 // G$ . On montre que  $p \circ \pi_1 = p \circ \pi_2$ .

Si  $y_5 \neq 0$  alors  $(y_5 y_1, y_2, y_5 y_3, y_4) = (y_5, y_5^{-1}, y_5, y_5^{-1}) \cdot (y_1, y_5 y_2, y_3, y_5 y_4)$ .

Les points  $(y_5 y_1, y_2, y_5 y_3, y_4)$  et  $(y_5 y_1, y_2, y_5 y_3, y_4)$  sont dans la même orbite selon  $G$  et donc définissent le même point dans  $U_\sigma$ .

On suppose que  $y_5 = 0$ . Pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$ ,  $(t, t^{-1}, t, t^{-1}) \in G$ . L'action de  $(t, t^{-1}, t, t^{-1})$  sur  $(y_1, 0, y_3, 0)$  donne le quadruplet  $(ty_1, 0, ty_3, 0)$  de même  $(t^{-1}, t, t^{-1}, t) \cdot (0, y_2, 0, y_4) = (0, ty_2, 0, ty_4)$ . On en déduit les égalités des limites :

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot (y_1, 0, y_3, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \cdot (0, y_2, 0, y_4) = (0, 0, 0, 0).$$

D'où  $\overline{G \cdot (y_1, 0, y_3, 0)} \cap \overline{G \cdot (0, y_2, 0, y_4)} \neq \emptyset$  et donc  $p(y_1, 0, y_3, 0) = p(0, y_2, 0, y_4)$ .

### 3.4.1 Morphisme d'éclatement

On reprend les notations de la partie précédente. Le vecteur primitif  $\eta_{s+1}$  engendre le rayon  $\rho_{s+1}$  ajouté à  $\Sigma(1)$ . Soit  $\tau$  le cône minimal de  $\Sigma$  contenant  $\eta_{s+1}$ . On suppose que  $\eta_{s+1}$  admet deux décompositions à composantes positives selon les vecteurs primitifs qui engendrent  $\tau$ . On peut supposer que  $(\eta_1, \dots, \eta_p)$ ,  $p \leq n$  engendrent  $\tau$ . Ainsi  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^p \alpha_j \eta_j = \sum_{j=1}^p \beta_j \eta_j$  où les coefficients  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont des entiers positifs ou nuls.

Soient  $\pi_\alpha$  et  $\pi_\beta$  les applications de  $\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z'$  sur  $\mathbb{C}^s \setminus Z$  définis respectivement par les coefficients  $(\alpha_j)$  et  $(\beta_j)$ .

**Proposition 3.8.** *On note  $p$  la projection de  $(\mathbb{C}^s \setminus Z)$  sur le quotient quasi-géométrique  $(\mathbb{C}^s \setminus Z) // G$ . On a l'égalité  $p \circ \pi_\alpha = p \circ \pi_\beta$ .*

*Par conséquent, le morphisme  $\tilde{\pi}$  ne dépend pas de la décomposition choisie pour le vecteur  $\eta_{s+1}$ .*

**Preuve.** Par définition des morphismes  $\pi_\alpha$  et  $\pi_\beta$ , on a

$$\pi_\alpha(y_1, \dots, y_s) = (y_{s+1}^{\alpha_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\alpha_p} y_p, y_{p+1}, \dots, y_s)$$

$$\text{et } \pi_\beta(y_1, \dots, y_s) = (y_{s+1}^{\beta_1} y_1, \dots, (y_{s+1}^{\beta_p} y_p, y_{p+1}, \dots, y_s).$$

Si  $y_{s+1} \neq 0$ ,

comme  $\sum_{j=1}^p (\beta_j - \alpha_j) \eta_j = 0$ , l'élément  $g = (y_{s+1}^{\beta_1 - \alpha_1}, \dots, y_{s+1}^{\beta_p - \alpha_p}, 1, \dots, 1) \in G$ .

Or  $(y_{s+1}^{\beta_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\beta_p} y_p, y_{p+1}, \dots, y_s) = g \cdot (y_{s+1}^{\alpha_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\alpha_p} y_p, y_{p+1}, \dots, y_s)$  donc les deux  $s$ -uplets sont la même classe sous l'action de  $G$ .

### CHAPITRE 3. ÉCLATEMENT D'UNE VARIÉTÉ TORIQUE

Si  $y_{s+1} = 0$ ,

on vérifie que les adhérences des classes correspondant à  $(y_{s+1}^{\alpha_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\alpha_p} y_p, y_{p+1}, \dots, y_s)$  et  $(y_{s+1}^{\beta_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\beta_p} y_p, y_{p+1}, \dots, y_s)$  ont une intersection non vide. Dans ce cas, les deux  $s$ -uplets définissent le même point dans le quotient. L'élément  $g = (t^{\beta_1 - \alpha_1}, \dots, t^{\beta_p - \alpha_p}, 1, \dots, 1)$  appartient à  $G$ . On montre donc que

$$\lim_{t \rightarrow 0} g \cdot (y_{s+1}^{\alpha_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\alpha_p} y_p, y_{p+1}, \dots, y_s) = \lim_{t \rightarrow 0} g \cdot (y_{s+1}^{\beta_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\beta_p} y_p, y_{p+1}, \dots, y_s).$$

L'égalité se vérifie en distinguant suivant les valeurs des coefficients  $(\alpha_j)$  et  $(\beta_j)$  :

$$\text{si } \alpha_j = \beta_j \text{ alors } t^{\beta_j - \alpha_j} y_{s+1}^{\alpha_j} y_j = t^{\alpha_j - \beta_j} y_{s+1}^{\beta_j} y_j$$

$$\text{si } \alpha_j \neq \beta_j$$

$$\text{soit } \alpha_j \text{ et } \beta_j \text{ non nuls alors } t^{\beta_j - \alpha_j} y_{s+1}^{\alpha_j} y_j = t^{\alpha_j - \beta_j} y_{s+1}^{\beta_j} y_j = 0$$

$$\text{soit } \alpha_j = 0 \text{ ou } \beta_j = 0, \text{ disons } \alpha_j = 0 \text{ et } \beta_j \neq 0 \text{ alors } t^{\alpha_j - \beta_j} y_{s+1}^{\beta_j} y_j = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} t^{\beta_j - \alpha_j} y_{s+1}^{\alpha_j} y_j = 0.$$

Par suite,  $p \circ \pi_\alpha(y_1, \dots, y_{s+1}) = p \circ \pi_\beta(y_1, \dots, y_{s+1})$ . □

Dans le cas non simplicial, les points de la variété ne s'identifient plus aux classes obtenues sous l'action du groupe  $G$ . Deux orbites correspondent à un même point de la variété si leurs adhérences ne sont pas disjointes.

On note  $p'$  le morphisme qui définit le quotient quasi-géométrique  $(\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z') // G'$ . Pour tout point  $M \in (\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z') // G'$  il existe  $y \in (\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z')$ , on définit  $\tilde{\pi}$  le morphisme d'éclatement par  $\tilde{\pi}(M) = \tilde{\pi} \circ p'(y) = p \circ \pi(y)$ . La proposition 3.8 montre que l'application  $\tilde{\pi}$  est bien définie.

**Proposition 3.9.**

$$\forall y \in \mathbb{C}^{s+1} \setminus Z', \forall y' \in \overline{G' \cdot y} \quad p \circ \pi(y) = p \circ \pi(y').$$

**Preuve.** On considère une décomposition du vecteur primitif  $\eta_{s+1}$  dans son cône minimal  $\tau$  :  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^s \alpha_j \eta_j$  où  $\alpha_j = 0$  pour  $j$ ,  $\eta_j \notin \tau$ . Soit  $\pi$ , le morphisme défini par cette décomposition de  $\eta_{s+1}$ .

Soit  $y = (y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{C}^{s+1} \setminus Z'$ . Un élément  $y' = (y'_1, \dots, y'_s)$  est dans  $G' \cdot y$  s'il existe  $s+1$  entiers  $(a_1, \dots, a_{s+1})$  vérifiant  $\sum_{j=1}^{s+1} a_j \eta_j = 0$  tels que pour tout  $j$ ,  $j \in \llbracket 1, s+1 \rrbracket$ ,  $y'_j = \lim_{t \rightarrow 0} t^{a_j} y_j$ . Alors  $\pi(y') = \lim_{t \rightarrow 0} \pi(t^{a_1} y_1, \dots, t^{a_{s+1}} y_{s+1})$  car les coefficients  $(\alpha_j)_{j=1}^s$  sont positifs ou nuls. Or  $\pi(t^{a_1} y_1, \dots, t^{a_{s+1}} y_{s+1}) = \pi(t^{a_1}, \dots, t^{a_{s+1}}) \cdot \pi(y)$ . D'où  $\pi(y') = \lim_{t \rightarrow 0} \pi(t^{a_1}, \dots, t^{a_{s+1}}) \cdot \pi(y)$ . Par conséquent  $\pi(y') \in \overline{G \cdot \pi(y)}$ . □

**Théorème 3.2.** Soit  $\eta_{s+1}$  un vecteur primitif dans le support de  $\Sigma$  et soit  $\sigma = \text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_p)$  son cône minimal. On suppose que  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^p \alpha_j \eta_j$  tel que  $\alpha_j \in \mathbb{N}$ . On pose  $\alpha_j = 0$  pour  $j > p$ , on obtient ainsi la décomposition  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^p \alpha_j \eta_j$  avec  $\alpha_j \in \mathbb{N}$ .

On considère l'éventail  $\Sigma'$  obtenu en raffinant le cône  $\sigma \in \Sigma$  en un éventail par ajout du rayon engendré par  $\eta_{s+1}$ . Soit  $Y$  la variété torique associée à  $\Sigma'$ , soit  $Z$  (resp.  $Z'$ ) le lieu des zéros communs aux monômes impropres définis par  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma'$ ).

Le morphisme  $\pi$  de  $\mathbb{C}^{s+1} \setminus Z'$  sur  $\mathbb{C}^s \setminus Z$  tel que  $\pi(y_1, \dots, y_{s+1}) = (y_{s+1}^{\alpha_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\alpha_s} y_s)$ , définit un morphisme torique  $\tilde{\pi}$  de  $Y$  sur  $X$  indépendant de la décomposition de  $\eta_{s+1}$  dans  $\sigma$ .

**Preuve.** La proposition 3.9 montre l'existence de l'application  $\tilde{\pi}$ . D'après la proposition 3.8,  $\tilde{\pi}$  est indépendante de la décomposition choisie pour  $\eta_{s+1}$ . Enfin l'application  $\tilde{\pi}$  est un morphisme torique d'après la preuve de la proposition 3.2.  $\square$

Un cône  $\sigma$  non simplicial de  $\Sigma$  peut être raffiné sans ajouter de nouveaux rayons à l'éventail initial. Dans ce cas, le morphisme torique  $\tilde{\pi}$  entre les variétés  $Y$  et  $X$  est défini par l'application  $\pi(y_1, \dots, y_s) = (y_1, \dots, y_s)$  définie de  $\mathbb{C}^s \setminus Z'$  sur  $\mathbb{C}^s \setminus Z$ .

Nous terminons cette section en établissant l'expression de  $\pi$  pour la composée de deux morphismes d'éclatement. On reprend les notations de la proposition 3.6. Deux vecteurs primitifs  $\eta_{s+1}$  et  $\eta_{s+2}$  sont ajoutés successivement à l'éventail  $\Sigma$  d'une variété torique  $X$  non simpliciale. La variété obtenue au terme des deux éclatements successifs dépend de l'ordre dans lequel les éclatements ont été opérés et des éventails qui ont été substitués aux cônes minimaux de  $\eta_{s+1}$  et  $\eta_{s+2}$ . De plus, l'expression des morphismes sur les espaces de coordonnées dépend des décompositions à composantes entières et positives choisies pour les vecteurs  $\eta_{s+1}$  et  $\eta_{s+2}$ . Néanmoins le résultat obtenu à la proposition 3.6 dans le cas simplicial reste valide. L'éventail  $\Sigma$  est raffiné en introduisant le rayon engendré par  $\eta_{s+1}$  pour former un éventail  $\Sigma_1$  puis le rayon engendré par  $\eta_{s+2}$  pour former un éventail  $\Sigma_2$ . On suppose que  $\eta_{s+1}$  admet une décomposition à composantes entières et positives selon les vecteurs primitifs de son cône minimal dans  $\Sigma$  et que  $\eta_{s+2}$  admet une décomposition à composantes entières et positives selon les vecteurs primitifs de son cône minimal dans  $\Sigma_1$ . Par conséquent  $\eta_{s+2}$  admet également une décomposition entière et positive selon les vecteurs primitifs de son cône minimal dans  $\Sigma$ . On pose  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^s \alpha_j \eta_j$  et  $\eta_{s+2} = \sum_{j=1}^s \beta_j \eta_j$  avec  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 3.10.** *On note successivement  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les morphismes obtenus par l'ajout de  $\eta_{s+1}$  respectivement  $\eta_{s+2}$  pour une décomposition positive de  $\eta_{s+1}$  et  $\eta_{s+2}$ . Comme dans la proposition précédente,  $p$  est la projection de  $\mathbb{C}^s \setminus Z$  sur  $(\mathbb{C}^s \setminus Z) // G$  alors :*

$$p \circ \pi_1 \circ \pi_2(z_1, \dots, z_{s+2}) = p \circ \pi_2 \circ \pi_1(z_1, \dots, z_{s+2}) = p(z_{s+2}^{\beta_1} z_{s+1}^{\alpha_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\beta_s} z_{s+1}^{\alpha_s} z_s).$$

**Preuve.**

On montre que  $p \circ \pi_1 \circ \pi_2(z_1, \dots, z_{s+2}) = p(z_{s+2}^{\beta_1} z_{s+1}^{\alpha_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\beta_s} z_{s+1}^{\alpha_s} z_s)$ . La preuve de l'égalité  $p \circ \pi_2 \circ \pi_1(z_1, \dots, z_{s+2}) = p(z_{s+2}^{\beta_1} z_{s+1}^{\alpha_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\beta_s} z_{s+1}^{\alpha_s} z_s)$  procède d'un raisonnement identique.

Soit  $\tau$  le cône minimal de  $\Sigma$  contenant le vecteur  $\eta_{s+1}$  dans son intérieur,  $\eta_{s+1}$  admet une décomposition positive dans  $\tau$ . En posant  $\tau = \text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_p)$ , il existe des entiers positifs ou nuls  $(\alpha_j)_{j=1}^p$  tels que  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^p \alpha_j \eta_j$ . Une telle décomposition s'étend sous la forme  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^s \alpha_j \eta_j$  où  $\alpha_j = 0$  pour  $j \geq p$ . L'éventail  $\Sigma_1$  désigne l'éventail formé après l'ajout de  $\eta_{s+1}$  à l'éventail  $\Sigma$ .

Si  $\eta_{s+1}$  n'appartient pas au cône minimal de  $\Sigma$  contenant  $\eta_{s+2}$  alors le cône minimal de  $\Sigma_1$  contenant  $\eta_{s+2}$  reste inchangé ce qui signifie que toute décomposition positive de  $\eta_{s+2}$  a une composante nulle suivant  $\eta_{s+1}$ . Ainsi si  $\eta_{s+2} = \sum_{j=1}^s \beta_j \eta_j$  est une décomposition positive de  $\eta_{s+2}$  dans  $\Sigma$  alors  $\eta_{s+2} = \sum_{j=1}^{s+1} \beta_j \eta_j$  avec  $\beta_{s+1} = 0$  est une décomposition positive de  $\eta_{s+2}$  dans  $\Sigma_1$ . la composée des deux morphismes d'éclatement  $\pi_2 \circ \pi_1$  a pour expression :

$$\pi_2 \circ \pi_1(z_1, \dots, z_s, z_{s+1}, z_{s+2}) = (z_{s+2}^{\alpha_1 \beta_{s+1} + \beta_1} z_{s+1}^{\alpha_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\alpha_s \beta_{s+1} + \beta_s} z_{s+1}^{\alpha_s} z_s)$$

Si  $\eta_{s+1}$  est l'un des vecteurs primitifs qui engendrent le cône minimal de  $\eta_{s+2}$  dans  $\Sigma_1$  alors  $\eta_{s+2} = \sum_{j=1}^p \beta'_j \eta_j + \beta'_{s+1} \eta_{s+1}$  avec  $\beta'_j \in \mathbb{N}$ .

Deux cas se présentent.

Si  $z_{s+2} \neq 0$ , la relation vectorielle  $\sum_{j=1}^p (\beta'_j - \beta_j) \eta_j + \beta'_{s+1} \eta_{s+1} = 0$  implique que l'élément  $\pi_2 \circ \pi_1(z_{s+2}^{\beta'_1 - \beta_1}, \dots, z_{s+2}^{\beta'_p - \beta_p}, 1, \dots, 1, z_{s+2}^{\beta'_{s+1}}, 1) \in G$ .

Donc  $(z_{s+2}^{-\alpha_1 \beta'_{s+1} - \beta'_1 + \beta_1}, \dots, z_{s+2}^{-\alpha_p \beta'_{s+1} - \beta'_p + \beta_p}, 1, \dots, 1) \in G$ .

Par suite, les  $s$ -uplets  $(z_{s+2}^{\alpha_1 \beta'_{s+1} + \beta'_1} z_{s+1}^{\alpha_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\alpha_s \beta'_{s+1} + \beta'_s} z_{s+1}^{\alpha_s} z_s)$  et  $(z_{s+2}^{\beta_1} z_{s+1}^{\alpha_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\beta_s} z_{s+1}^{\alpha_s} z_s)$  sont dans la même orbite selon  $G$ .

Si  $z_{s+2} = 0$ , on montre que les systèmes de coordonnées  $(z_{s+2}^{\alpha_1 \beta'_{s+1} + \beta'_1} z_{s+1}^{\alpha_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\alpha_s \beta'_{s+1} + \beta'_s} z_{s+1}^{\alpha_s} z_s)$  et  $(z_{s+2}^{\beta_1} z_{s+1}^{\alpha_1} z_1, \dots, z_{s+2}^{\beta_s} z_{s+1}^{\alpha_s} z_s)$  définissent le même point puisque les adhérences des deux orbites ne sont pas disjointes. En effet, pour  $t \in \mathbb{C}^*$ ,  $(t^{-\alpha_1 \beta'_{s+1} - \beta'_1 + \beta_1}, \dots, t^{-\alpha_p \beta'_{s+1} - \beta'_p + \beta_p}, 1, \dots, 1)$  et  $(t^{\alpha_1 \beta'_{s+1} + \beta'_1 - \beta_1}, \dots, t^{\alpha_p \beta'_{s+1} + \beta'_p - \beta_p}, 1, \dots, 1)$  sont dans  $G$ . On vérifie alors que pour tout  $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ ,  $\lim_0 t^{\beta_j - \alpha_j \beta'_{s+1} - \beta'_j} z_{s+2}^{\alpha_j \beta'_{s+1} + \beta'_j} z_{s+1}^{\alpha_j} z_s = \lim_0 t^{\alpha_j \beta'_{s+1} + \beta'_j - \beta_j} z_{s+2}^{\beta_j} z_{s+1}^{\alpha_j} z_s$ .

- Si  $\alpha_j \beta'_{s+1} + \beta'_j = \beta_j$  ou si  $\alpha_j \beta'_{s+1} + \beta'_j \neq \beta_j$  avec  $\alpha_j \beta'_{s+1} + \beta'_j \neq 0$  et  $\beta_j \neq 0$ , l'égalité est immédiate.
- Si  $\alpha_j \beta'_{s+1} + \beta'_j \neq \beta_j$  avec  $\alpha_j \beta'_{s+1} + \beta'_j = 0$  ou  $\beta_j = 0$ , supposons  $\alpha_j \beta'_{s+1} + \beta'_j = 0$  et  $\beta_j \neq 0$  alors  $t^{\alpha_j \beta'_{s+1} + \beta'_j - \beta_j} z_{s+2}^{\beta_j} z_{s+1}^{\alpha_j} z_s = 0$  et  $\lim_0 t^{\beta_j - \alpha_j \beta'_{s+1} - \beta'_j} z_{s+2}^{\alpha_j \beta'_{s+1} + \beta'_j} z_{s+1}^{\alpha_j} z_s = 0$  ce qui achève la preuve.

□

### 3.4.2 Effet d'un morphisme d'éclatement sur un diviseur

Les notations sont reprises des parties antérieures. la variété torique  $X$  est défini par l'éventail complet  $\Sigma$ . Les vecteurs  $\eta_1, \dots, \eta_s$  désignent les vecteurs primitifs qui engendrent les rayons de  $\Sigma$  et le diviseur  $D_j$  est le diviseur irréductible associé au rayon engendré par  $\eta_j$ . L'éventail  $\Sigma$  est raffiné par l'ajout de  $r$  vecteurs primitifs  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$ . Un raffinement de  $\Sigma$  obtenu par ajout de  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$  définit une variété torique complète  $Y$ . Les vecteurs  $\eta_{s+i}$ ,  $1 \leq i \leq r$ , admettent une décomposition entière et strictement positive selon les vecteurs primitifs d'un cône de  $\Sigma$  de dimension supérieure ou égale à 2. Pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on pose  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^s a_{s+i,j} \eta_j$  où  $a_{s+i,j} \geq 0$ . On note  $\pi^*$  le morphisme dual induit par  $\pi$  entre les anneaux de polynômes gradués  $S$  et  $S'$  relatifs aux variétés toriques  $X$  et  $Y$ .

**Effet de l'éclatement sur le polytope d'un diviseur**

Soit  $D = \sum_{j=1}^s b_j D_j$  un diviseur  $T_N$ -invariant. On considère  $\prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_j}$  un monôme de degré  $[D]$ . En calculant son image par  $\pi^*$ , on obtient

$$\begin{aligned} \pi^* \left( \prod_{j=1}^m X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_j} \right) &= \prod_{j=1}^s \left( \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{s+i,j}} Y_j \right)^{\langle m, \eta_j \rangle + b_j} \\ &= \prod_{j=1}^s \left( \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{s+i,j} (\langle m, \eta_j \rangle + b_j)} \right) Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_j} \\ &= \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\langle m, \sum_{j=1}^s \alpha_{s+i,j} \eta_j \rangle + \sum_{j=1}^s \alpha_{s+i,j} b_j} \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_j} \\ &= \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\langle m, \eta_{s+i} \rangle + \sum_{j=1}^s \alpha_{s+i,j} b_j} \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_j}. \end{aligned}$$

Le diviseur  $\pi^*(D)$  est égal à  $\sum_{j=1}^s b_j D'_j + \sum_{i=1}^r \left( \sum_{j=1}^s \alpha_{s+i,j} b_j \right) D'_{s+i}$  où les diviseurs  $D'_1, \dots, D'_{s+r}$  sont les diviseurs irréductibles, associés aux rayons de l'éventail  $\Sigma'$  de  $Y$ .

*Remarque 3.8.* L'image d'un diviseur  $T_N$ -invariant par le morphisme  $\pi^*$  est un diviseur  $T_N$ -invariant pour la variété  $Y$ .

**Proposition 3.11.** *Les diviseurs  $D$  et  $\pi^*(D)$  ont même polytope dans  $N \otimes \mathbb{R}$ .*

**Preuve.** Les variétés toriques  $X$  et  $Y$  ont même dimension et leurs éventails respectifs sont des éventails complets dans  $N \otimes \mathbb{R}$ . par suite, les polyèdres associés aux diviseurs  $D$  et  $\pi^*(D)$  sont des polytopes. L'inclusion  $P_{\pi^*(D)} \subset P_D$  est immédiate.

Le polytope  $P_D$  est défini par l'intersection des demi-espaces d'inéquations  $\langle m, \eta_j \rangle + b_j \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq s$ .

Soit  $m \in P_D$ ,  $\langle m, \eta_{s+i} \rangle + b_{s+i} = \langle m, \sum_{j=1}^s \alpha_{s+i,j} \eta_j \rangle + \sum_{j=1}^s \alpha_{s+i,j} b_j = \sum_{j=1}^s \alpha_{s+i,j} (\langle m, \eta_j \rangle + b_j) \geq 0$  d'où  $m \in P_{\pi^*(D)}$ .  $\square$

**Effet de l'éclatement sur un diviseur sans points de base**

**Théorème 3.3.** *L'image par  $\pi^*$  d'un diviseur de Cartier  $T_N$ -invariant et sans points de base est un diviseur de Cartier  $T_N$ -invariant et sans points de base.*

**Preuve.**

Soit  $D = \sum_{j=1}^s b_j D_j$  un diviseur sans points de base de la variété  $X$ . Le diviseur  $\pi^*(D) = \sum_{j=1}^s b_j D'_j + \sum_{i=1}^r \left( \sum_{j=1}^s \alpha_{s+i,j} b_j \right) D'_{s+i}$  est un diviseur  $T_N$ -invariant de  $Y$  et  $P_{\pi^*(D)} = P_D$  d'après la proposition précédente.

On montre que  $\pi^*(D)$  est un diviseur de Cartier sans points de base de  $Y$ .

Soit  $\Sigma'$  un raffinement de  $\Sigma$  obtenu par ajout des vecteurs  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$  et soit  $\sigma' \in \Sigma'(n)$ . Puisque  $\Sigma'$  est un raffinement de  $\Sigma$ , il existe  $\sigma \in \Sigma(n)$  contenant le cône  $\sigma'$ . Pour une indexation convenable des vecteurs primitifs de  $\Sigma$ , on peut poser  $\sigma = \text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_p)$ ,  $p \geq n$

et  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+t}$  les vecteurs primitifs qui engendrent  $\sigma'$  distincts de  $\eta_1, \dots, \eta_p$ . Le diviseur  $D$  est un diviseur de Cartier, sans points de base de  $X$ , il existe donc un sommet  $v \in P_D$  tel que  $\langle v, \eta_j \rangle + b_j = 0$  pour tout  $1 \leq j \leq p$ . Soit  $1 \leq i \leq t \leq r$ , le vecteur  $\eta_{s+i}$  est contenu dans le cône  $\sigma$  donc  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^p \alpha_{s+i,j} \eta_j$  avec  $\alpha_{s+i,j} \geq 0$ . D'où  $\langle v, \eta_{s+i} \rangle + b_{s+i} = \sum_{j=1}^p \alpha_{j,s+i} (\langle m, \eta_j \rangle + b_j) = 0$ . Par conséquent,  $v \in P_{\pi^*(D)}$  vérifie les équations  $\langle v, \eta_\rho \rangle + b_\rho = 0$  pour tout  $\rho \in \sigma'(1)$ . Le point  $v$  est un sommet de  $P_{\pi^*(D)}$  car  $P_D = P_{\pi^*(D)}$ . D'où  $\pi^*(D)$  est de Cartier sans points de base.  $\square$

### 3.4.3 Éventail dual d'un polytope d'un diviseur sans points de base

Nous examinons à présent la relation entre l'éventail d'une variété torique complète et l'éventail dual d'un polytope entier de dimension  $n$  associé à un diviseur de Cartier  $T_N$ -invariant et sans points de base de la variété. Un polytope entier de dimension  $n$  désigne un polytope convexe de  $\mathbb{R}^n$  non contenu dans un hyperplan et dont les sommets appartiennent au réseau  $\mathbb{Z}^n$  des points à coordonnées entières.

Nous supposons que le polytope  $P_D$  est de dimension maximale ce qui assure l'existence d'un éventail dual à  $P_D$ . La variété torique  $X$  reste définie par un éventail  $\Sigma$  complet dans  $N \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ .

**Théorème 3.4.** *Soit  $D = \sum_{j=1}^s b_j D_j$  un diviseur  $T_N$ -invariant dont le polytope  $P_D$  est de dimension  $n$ .*

*Si  $D$  est de Cartier sans points de base alors  $\Sigma$  est un raffinement de l'éventail dual de  $P_D$ .*

**Preuve.**

Il suffit de prouver que tout cône maximal de  $\Sigma$  est contenu dans un cône de  $\Sigma_P$ .

Le polytope  $P_D$  possède un éventail dual complet car  $P_D$  est de dimension maximale.

On note  $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$  les vecteurs primitifs définissant les rayons de  $\Sigma$ . Par définition,  $P_D = \{m \in \mathbb{R}^n, \langle m, \eta_j \rangle + b_j \geq 0, j = 1, \dots, s\}$ . Une facette de  $P_D$  s'obtient comme intersection du polytope avec l'un des hyperplans d'équation  $\langle m, \eta_j \rangle + b_j = 0$ . Par conséquent, les vecteurs primitifs qui sont des normales rentrantes aux facettes de  $P_D$  constituent un sous-ensemble de  $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ . Les rayons de l'éventail  $\Sigma_{P_D}$  sont donc des rayons de  $\Sigma$ .

Soit  $\sigma$  un cône de  $\Sigma(n)$ . Comme  $D$  est un diviseur de Cartier  $T_N$ -invariant, le cône  $\sigma \in \Sigma(n)$  définit un unique point  $m_\sigma \in M$  tel que  $\langle m_\sigma, \eta_\rho \rangle = -b_\rho$  pour tout  $\rho \in \sigma(1)$ . De plus,  $\Sigma$  est complet et  $D$  un diviseur sans points de base, le point  $m_\sigma$  coïncide donc avec un sommet de  $P_D$ . Par conséquent, pour tout  $m \in P_D$ , pour tout  $\rho \in \sigma(1)$ ,  $\langle m - m_\sigma, \eta_\rho \rangle \geq 0$ . D'où  $\text{cône}(P_D \cap M - m_\sigma) \subset \sigma^\vee$ . Or  $\text{cône}(P_D \cap M - m_\sigma) = (\sigma'_{m_\sigma})^\vee$  où  $(\sigma')_{m_\sigma}$  est le cône de dimension  $n$  de l'éventail  $\Sigma_P$  associé à  $m_\sigma$ . On conclut que  $\sigma \subset \sigma'_{m_\sigma} \in \Sigma_P(n)$ .  $\square$

*Remarque 3.9.* Lorsque la variété torique  $X$  est définie par un polytope  $P$  de dimension maximale, le théorème 3.4 peut s'interpréter de façon duale sur les polytopes  $P$  et  $P_D$ . Le polytope  $P_D$  forme alors une dégénérescence de  $P$ . Cela signifie que certains hyperplans d'appui de  $P$  ne sont plus hyperplans d'appui pour  $P_D$ . Dans ce cas, l'intersection de l'hyperplan d'appui de  $P$  avec  $P_D$  ne forme plus une facette mais une face de dimension strictement inférieure à  $n$ . Ainsi l'élimination d'un rayon de  $\Sigma$  dans l'éventail dual de  $P_D$  qui traduit la réunion de plusieurs cônes de  $\Sigma$  donne sur le polytope  $P_D$ , l'élimination de la facette associée au rayon.

*Remarque 3.10.* Le théorème 3.4 suppose que le polytope du diviseur  $D$  est de dimension maximale. Toutefois si le polytope de  $D$  n'est pas de dimension maximale, on obtient un résultat similaire : si  $D$  est un diviseur sans point de base d'une variété torique définie par un éventail  $\Sigma$  alors l'éventail généralisé, dual du polytope  $P_D$  est un raffinement de  $\Sigma$ . Cependant les cônes duaux ne sont plus fortement convexes (0 n'est plus le cône minimal) et forment un éventail dit dégénéré (Cf [11] Prop. 6.2.5).

**Proposition 3.12.** *Soient  $D$  et  $D'$  deux diviseurs  $T_N$ -invariants d'une variété torique complète. Si  $D + D'$  est un diviseur de Cartier sans points de base tel que  $P_{D+D'} = P_D + P_{D'}$  alors*

*$D$  et  $D'$  sont deux diviseurs de Cartier sans point de base.*

**Preuve.** Soient  $D = \sum_{j=1}^s a_j D_j$  et  $D' = \sum_{j=1}^s b_j D_j$ ,  $D + D' = \sum_{j=1}^s (a_j + b_j) D_j$ .

Soit  $\sigma \in \Sigma(n)$ . Le diviseur  $D + D'$  est de Cartier et sans points de base, il existe donc un sommet  $v$  de  $P_{D+D'}$  tel que  $\langle v, \eta_\rho \rangle + (a_\rho + b_\rho) = 0$  pour tout  $\rho \in \sigma(1)$ . Or  $P_{D+D'} = P_D + P_{D'}$ , par suite  $v = m_\sigma + m'_\sigma$  où  $m_\sigma \in P_D$  et  $m'_\sigma \in P_{D'}$ . On a  $\langle m_\sigma + m'_\sigma, \eta_\rho \rangle + (a_\rho + b_\rho) = 0$  et  $\langle m_\sigma, \eta_\rho \rangle + a_\rho \geq 0$ ,  $\langle m'_\sigma, \eta_\rho \rangle + b_\rho \geq 0$  pour tout  $\rho \in \sigma(1)$  d'où  $\forall \rho \in \sigma(1)$ ,  $\langle m, \eta_\rho \rangle + a_\rho = 0$  et  $\langle m', \eta_\rho \rangle + b_\rho = 0$  ce qui montre que  $D$  et  $D'$  sont de Cartier.

On considère les applications affines définies respectivement sur  $P_D$  et  $P_{D'}$  inclus dans  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{array}{ccc} P_D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ m & \longmapsto & \sum_{\rho \in \sigma(1)} \langle m, \eta_\rho \rangle + a_\rho \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} P_{D'} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ m' & \longmapsto & \sum_{\rho \in \sigma(1)} \langle m', \eta_\rho \rangle + b_\rho. \end{array}$$

Par définition de  $P_D$  et  $P_{D'}$ , le minimum de ces applications est 0. Il est atteint en  $m_\sigma$  pour la première et  $m'_\sigma$  pour la seconde. Comme les  $(\eta_\rho)$ ,  $\rho \in \sigma(1)$  forment une famille génératrice de  $\mathbb{R}^n$ , le minimum n'est atteint qu'en seul point qui est nécessairement un sommet. Les points  $m_\sigma$  et  $m'_\sigma$  sont donc respectivement des sommets de  $P_D$  et  $P_{D'}$ .  $\square$

**Théorème 3.5.** *Soit  $D = \sum_{j=1}^s a_j D_j$  et  $D' = \sum_{j=1}^s b_j D_j$ , deux diviseurs de Cartier  $T_N$ -invariants sans points de base de  $X$ . On suppose que  $P_{D'}$  décompose  $P_D$ , c'est-à-dire qu'il existe un polytope  $Q$  tel que  $P_{D'} + Q = P_D$  alors le diviseur  $D'' = D - D' = \sum_{j=1}^s (a_j - b_j) D_j$  est un diviseur de Cartier sans points de base et  $P_{D'} + P_{D''} = P_D$ .*

**Preuve.**  $P_{D'} + P_{D''} \subset P_D$ . En effet, soient  $m' \in P_{D'}$  et  $m'' \in P_{D''}$ , pour tout  $1 \leq j \leq s$ ,  $\langle m', \eta_j \rangle + b_j \geq 0$  et  $\langle m'', \eta_j \rangle + (a_j - b_j) \geq 0$  par suite  $\langle m' + m'', \eta_j \rangle + a_j \geq 0$ . D'où  $m' + m'' \in P_D$ .

On prouve l'inclusion  $P_D \subset P_{D'} + P_{D''}$ . Soit  $m'' \in Q$ . Le diviseur  $D'$  est de Cartier sans points de base, pour tout  $j = 1, \dots, s$  il existe  $m'_j \in P_{D'}$  tel que  $\langle m'_j, \eta_j \rangle + b_j = 0$ . Le point  $m'' + m'_j \in Q + P_{D'}$  d'où  $m'' + m'_j \in P_D$ . On a donc  $\langle m'' + m'_j, \eta_j \rangle + a_j \geq 0$  soit  $\langle m, \eta_j \rangle + (a_j - b_j) \geq 0$ . On en déduit  $m'' \in P_{D''}$  d'où  $P_D = P_{D'} + Q \subset P_{D'} + P_{D''}$ .

On vérifie que le diviseur  $D''$  est sans point de base. Soit  $\sigma \in \Sigma(n)$ . Le diviseur  $D$  est de Cartier sans points de base, il existe un sommet  $m_\sigma$  de  $P_D$  qui vérifie  $\langle m_\sigma, \eta_\rho \rangle + a_\rho = 0$  pour tout  $\rho \in \sigma(1)$ . Le point  $m_\sigma = m'_\sigma + m''_\sigma$  où  $m'_\sigma \in P_{D'}$  et  $m''_\sigma \in P_{D''}$ . En reprenant les arguments de la preuve de la proposition 3.12, on montre que  $\langle m''_\sigma, \eta_\rho \rangle + (a_\rho - b_\rho) = 0$  pour tout  $\rho \in \sigma(1)$  et  $m''_\sigma$  est un sommet de  $P_{D''}$ .  $\square$

**Lemme 3.1.** *Soit  $P = \text{Conv}(m_i, i = 1, \dots, s)$  et  $P' = \text{Conv}(m'_j, j = 1, \dots, r)$  alors  $P + P' = \text{Conv}(m_i + m'_j, i = 1, \dots, s \text{ et } j = 1, \dots, r)$ .*

**Preuve.** Soit  $m \in P$  et  $m' \in P'$  alors  $m = \sum_{i=1}^s \alpha_i m_i$  avec  $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$  et  $m' = \sum_{j=1}^r \beta_j m'_j$  avec  $\sum \beta_j = 1$ . Le calcul de  $m + m'$  donne directement :

$$\begin{aligned} m + m' &= \sum_{i=1}^s \alpha_i \left( \sum_{j=1}^r \beta_j \right) m_i + \sum_{j=1}^r \beta_j \left( \sum_{i=1}^s \alpha_i \right) m_j \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (m_i + m'_j) \end{aligned}$$

avec  $\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j = 1$ .

D'où  $P + P' \subset \text{Conv}(m_i + m'_j, i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, r)$ .

L'inclusion dans l'autre sens est immédiate.  $\square$

**Théorème 3.6.** Soit  $D = \sum_{j=1}^s a_j D_j$  un diviseur de Cartier  $T_N$ -invariant sans points de base.

On considère  $P$  et  $Q$  deux polytopes convexes à sommets entiers tels que  $P + Q = P_D$  alors il existe  $D'$  et  $D''$  des diviseurs sans point de base tel que  $P = P_{D'}$ ,  $Q = P_{D''}$  et  $D = D' + D''$ .

**Preuve.** On nomme  $\eta_1, \dots, \eta_s$  les vecteurs primitifs des rayons qui donnent les diviseurs irréductibles  $D_j$ . On définit comme suit les diviseurs  $T_N$ -invariants  $D'$  et  $D''$  associés respectivement aux polytopes  $P$  et  $Q$  :  $D' = \sum_{j=1}^s b_j D_j$  et  $D'' = \sum_{j=1}^s c_j D_j$  où pour tout  $1 \leq j \leq s$ ,  $b_j = -\min_{m \in P \cap M} \langle m, \eta_j \rangle$  et  $c_j = -\min_{m \in Q \cap M} \langle m, \eta_j \rangle$ .

On considère les applications affines définies respectivement sur les polytopes  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ m & \longmapsto & \langle m, \eta_j \rangle + b_j \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ m & \longmapsto & \langle m, \eta_j \rangle + c_j. \end{array}$$

Ces applications atteignent leur minimum en un sommet qui est de coordonnées entières et ce minimum est 0 d'après les définitions de  $b_j$  et  $c_j$ .

Si  $m \in P$ , on a pour tout  $j$ ,  $\langle m, \eta_j \rangle + b_j \geq 0$ . De même si  $m \in Q$  alors  $\langle m, \eta_j \rangle + c_j \geq 0$  d'où  $P \subset P_{D'}$  et  $Q \subset P_{D''}$ .

Montrons que  $D = D' + D''$ . Soit  $m$  un point de la facette de  $P_D$  associée à la normale  $\eta_j$  alors  $\langle m, \eta_j \rangle + a_j = 0$ . Le point  $m$  se décompose en une somme  $m' + m''$  où  $m' \in P$  et  $m'' \in Q$ . La définition des constantes  $b_j$  et  $c_j$  assure que  $\langle m', \eta_j \rangle + b_j \geq 0$  et  $\langle m'', \eta_j \rangle + c_j \geq 0$ . Par conséquent  $\langle m, \eta_j \rangle + b_j + c_j \geq 0$  et donc  $b_j + c_j \geq a_j$ .

Par ailleurs, il existe  $m_0 \in P$  et  $m_1 \in Q$  tels que  $\langle m_0, \eta_j \rangle + b_j = 0$  et  $\langle m_1, \eta_j \rangle + c_j = 0$ . Il suit que  $\langle m_0 + m_1, \eta_j \rangle + b_j + c_j = 0$ . Le point  $m_0 + m_1$  est dans  $P$  donc  $a_j \geq b_j + c_j$  d'où  $a_j = b_j + c_j$ . On en déduit  $D = D' + D''$ . L'égalité  $D = D' + D''$  conduit aussitôt à  $P_{D'} + P_{D''} \subset P_D$ .

Montrons que  $D'$  et  $D''$  sont des diviseurs de Cartier sans points de base. Soit  $\sigma$  un cône maximal de l'éventail engendré par les vecteurs primitifs  $(\eta_1, \dots, \eta_p)$ ,  $p \geq n$ . Comme  $D$  est sans point de base, il existe un unique sommet  $m_\sigma$  de  $P_D$  tel que  $\langle m_\sigma, \eta_j \rangle = -a_j$  pour tout  $j$  variant de 1 à  $p$ . D'après le lemme précédent, le sommet  $m_\sigma$  admet une décomposition  $m_\sigma = m'_\sigma + m''_\sigma$  où  $m'_\sigma$  et  $m''_\sigma$  sont respectivement des sommets de  $P$  et  $Q$ . Les inclusions  $P \subset P_{D'}$  et  $Q \subset P_{D''}$  impliquent que  $m'_\sigma \in P_{D'}$  et  $m''_\sigma \in P_{D''}$ . Donc  $\langle m'_\sigma, \eta_j \rangle = -b_j$  et  $\langle m''_\sigma, \eta_j \rangle = -c_j$  pour tout  $1 \leq j \leq p$ . On vérifie que  $m'_\sigma$  et  $m''_\sigma$  sont uniques puisque les points  $m'_\sigma$  et  $m''_\sigma$  appartiennent à  $n$  hyperplans indépendants.

Comme  $\Sigma$  est un éventail complet et  $D'$  un diviseur de Cartier sans points de base,  $P_{D'}$  est l'enveloppe convexe des points  $m'_\sigma$  où  $\sigma \in \Sigma(n)$ . On en déduit que  $P_{D'} \subset P$  et par suite  $P_{D'} = P$ . De la même façon, on obtient  $P_{D''} = Q$ .  $\square$

**Théorème 3.7** (Généralisation). *Soit  $D$  un diviseur de Cartier  $T_N$ -invariant et sans points de base.*

*On suppose que  $P_D = \sum_{k=1}^q P_k$  alors il existe  $D_1, \dots, D_q$  des diviseurs  $T_N$ -invariants sans points de base tels que  $P_k = P_{D_k}$  et  $D = \sum_{k=1}^q D_k$ .*

**Preuve.** Le résultat s'obtient par induction sur  $q$ .  $\square$

En considérant certains types de raffinements d'éventail, ceux obtenus en ajoutant de nouveaux rayons, nous avons pu caractériser le morphisme torique induit par le raffinement par un morphisme de variétés affines sous réserve que les vecteurs primitifs des rayons adjoints soient choisis avec une décomposition entière et positive dans l'éventail initial.

L'expression du morphisme entre les espaces de coordonnées homogènes ne s'étend pas au cas général. Cependant il reste possible pour certains degrés d'exprimer l'image d'un polynôme homogène par le morphisme dual. Le théorème suivant constitue une réciproque du théorème 3.4.

**Théorème 3.8.** *Soit  $X_P$  la variété torique projective associée à un polytope entier  $P \subset \mathbb{R}^n$  de dimension  $n$ . Soit  $\Sigma$  un éventail qui raffine  $\Sigma_P$  l'éventail dual de  $P$ . On note  $S$  et  $S'$  les anneaux de coordonnées homogènes respectifs des variétés  $X_P$  et  $X_\Sigma$ .*

- a) *Il existe  $D$  un diviseur de Cartier sans points de base sur la variété  $X_\Sigma$  tel que  $S_{[D_P]} \simeq S'_{[D]}$ .*
- b) *Pour tout diviseur de Cartier  $D_1$  invariant par le tore et sans points de base sur  $X_P$ , il existe  $D_2$  un diviseur de Cartier, invariant par le tore et sans points de base sur  $X_\Sigma$  tel que  $S_{[D_1]} \simeq S'_{[D_2]}$ .*

**Preuve.** Les sommets de  $P$  déterminent par dualité les cônes de  $\Sigma_P(n)$ . A un sommet  $v$  de  $P$ , on associe le cône polyédral convexe  $C_v = \text{cône}(\mathbb{Z}^n \cap P - v)$  et son cône dual  $\sigma_v = C_v^\vee$ . Les cônes  $\sigma_v$  décrivent les cônes de dimension  $n$  de  $\Sigma_P$ . On obtient ainsi  $\Sigma_P(n) = \{\sigma_v \text{ où } v \text{ est un sommet de } P\}$ . D'autre part, le diviseur  $D_P$  défini par  $P$  est un diviseur de Cartier invariant par le tore et ample sur la variété  $X_P$ . Par conséquent,  $D_P|_{U_{\sigma_v}} = \text{div}|_{U_{\sigma_v}}(\chi^{-v})$  pour tout sommet  $v$  de  $P$ . On définit le diviseur  $D$  sur  $X_\Sigma$  de la manière suivante :

Quel que soit  $\tau \in \Sigma(n)$ , il existe un unique sommet  $v$  de  $P$  tel que  $\tau \subset \sigma_v$  car  $\Sigma$  raffine  $\Sigma_P$ , on pose  $D|_{U_\tau} = \text{div}|_{U_\tau}(\chi^{-v})$ .

On vérifie que  $D$  est un diviseur de Cartier sans points de base sur  $X_\Sigma$ .

Soit  $\tau, \tau' \in \Sigma(n)$  et  $v, v'$  les sommets de  $P$  tels que  $\tau \subset \sigma_v$  et  $\tau' \subset \sigma_{v'}$ . Par définition de  $D$ , on a  $D|_{U_\tau} = \text{div}|_{U_\tau}(\chi^{-v})$  et  $D|_{U_{\tau'}} = \text{div}|_{U_{\tau'}}(\chi^{-v'})$ . Si  $\tau \cap \tau' \neq \{0\}$ , il existe  $\rho \in \tau(1) \cap \tau'(1) \subset c_v(1) \cap c_{v'}(1)$ . Si  $\rho$  est un rayon de  $\Sigma_P$  engendré par le vecteur primitif  $\eta_\rho$  il vient aussitôt que  $\langle v, \eta_\rho \rangle = \langle v', \eta_\rho \rangle$  car  $D_P$  est un diviseur de Cartier sur  $X_P$  sinon le cône minimal de  $\Sigma_P$  qui contient  $\rho$  est inclus dans le cône  $c_v \cap c_{v'}$ . Le vecteur  $\eta_\rho$  se décompose selon les vecteurs primitifs des rayons de  $c_v \cap c_{v'}$ . Comme  $\langle v, \eta_{\rho'} \rangle = \langle v', \eta_{\rho'} \rangle$  pour tout  $\rho' \in c_v(1) \cap c_{v'}(1)$ . On obtient par linéarité  $\langle v, \eta_\rho \rangle = \langle v', \eta_\rho \rangle$ . Le diviseur  $D$  est donc un diviseur de Cartier, invariant par le tore sur  $X_\Sigma$ .

Le polytope  $P$  est défini comme intersection des demi-espaces définis par ses hyperplans d'appui. Les vecteurs primitifs qui définissent les normales rentrantes aux facettes engendrent les rayons de  $\Sigma_P$ . On a donc

$$P = \{m \in \mathbb{R}^n, \forall \rho \in \Sigma_P(1) \quad \langle m, \eta_\rho \rangle + b_\rho \geq 0\}$$

avec  $b_\rho = -\min_{m \in P} \langle m, \eta_\rho \rangle = -\langle v, \eta_\rho \rangle$  pour tout sommet  $v$  appartenant à la facette définie par  $\eta_\rho$ . Le diviseur  $D_P$  associé à  $P$  s'écrit  $D_P = \sum_{\rho \in \Sigma_P(1)} b_\rho D_\rho$ .

Pour montrer que  $D$  est sans points de base, il suffit de prouver que  $P = P_D$ . On détermine l'expression de  $D$  dans la base de diviseurs irréductibles  $D_\rho$ ,  $\rho \in \Sigma(1)$  afin d'obtenir les inéquations qui définissent le polytope  $P_D$ . On pose  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho D'_\rho$

Pour tout  $\rho \in \Sigma(1)$ , il existe un sommet  $v$  de  $P$  tel que  $\rho \subset c_v$ . On observe deux cas distincts.

Si  $\rho \in c_v(1)$  (i.e  $\rho \in \Sigma_P(1)$ ),  $c_\rho = -\langle v, \eta_\rho \rangle = b_\rho$  par définition de  $D$ .

Si  $\rho \notin c_v(1)$ , le cône minimal de  $\Sigma_P$  qui contient  $\rho$  est inclus dans le cône  $c_v$ . Le vecteur primitif  $\eta_\rho$  admet une décomposition positive en fonction des vecteurs  $\eta_{\rho'}$ ,  $\rho' \in c_v(1)$ . On pose  $\eta_\rho = \sum_{\rho' \in \sigma_v(1)} \alpha_{\rho'} \eta_{\rho'}$  avec  $\alpha_{\rho'} \in \mathbb{Q}^+$ . On a  $c_\rho = -\langle v, \eta_\rho \rangle = -\langle v, \sum_{\rho' \in \sigma_v(1)} \alpha_{\rho'} \eta_{\rho'} \rangle = \sum_{\rho' \in \sigma_v(1)} \alpha_{\rho'} b_{\rho'}$ .

Le polytope  $P_D$  associé au diviseur  $D$  est défini par :

$$P_D = \{m \in \mathbb{R}^n, \forall \rho \in \Sigma(1) \quad \langle m, \eta_\rho \rangle + c_\rho \geq 0\}$$

Or  $\Sigma_P(1) \subset \Sigma(1)$  car  $\Sigma$  raffine  $\Sigma_P$  et  $c_\rho = b_\rho$  si  $\rho \in \Sigma_P(1)$  d'où  $P_D \subseteq P$ .

Si  $\rho \notin \Sigma_P(1)$  l'inéquation  $\langle m, \eta_\rho \rangle + c_\rho \geq 0$  est équivalente à

$\langle m, \sum_{\rho' \in \sigma_v(1)} \alpha_{\rho'} \eta_{\rho'} \rangle + \sum_{\rho' \in \sigma_v(1)} \alpha_{\rho'} b_{\rho'} \geq 0$  qui s'obtient à partir des inéquations qui définissent  $P$  puisque  $\alpha_{\rho'} \geq 0$ . Par conséquent,  $P = P_D$ . Le diviseur  $D$  est donc sans points de base puisque ses données locales sont les sommets du polytope  $P_D$ .

L'égalité des polytopes  $P$  et  $P_D$  prouve aussi que les espaces vectoriels  $S'_{[D]}$  et  $S_{[D_P]}$  sont isomorphes.

Pour prouver la partie b), on commence par définir le diviseur  $D_2$  dans  $X_\Sigma$ . Soit  $\tau \in \Sigma(n)$ , il existe  $\sigma \in \Sigma_P(n)$  tel que  $\tau \subset \sigma$  et  $v$  un sommet de  $P_{D_1}$  tel que  $D_1|_{U_\sigma} = \text{div}|_{U_\sigma}(\chi^{-v})$ . On définit  $D_2|_{U_\tau} = \text{div}|_{U_\tau}(\chi^{-v})$ . On montre de la même façon qu'au a) que  $D_2$  est un diviseur de Cartier pour la variété  $X_\Sigma$ . Si  $D_1 = \sum_{\rho \in \Sigma_P(1)} a_\rho D_\rho$ , le polytope  $P_{D_1}$  est défini par les intersections des demi-espaces d'inéquations :  $\langle m, \eta_\rho \rangle + a_\rho \geq 0$  où  $\rho \in \Sigma_P(1)$ .

On pose  $D_2 = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho D'_\rho$ . D'après la définition de  $D_2$ , quel que soit  $\rho \in \Sigma(1)$ , il existe  $\sigma \in \Sigma_P(n)$  et un sommet  $v$  de  $P_{D_1}$  tel que  $c_\rho = -\langle v, \eta_\rho \rangle$ . Le vecteur primitif  $\eta_\rho$  admet une décomposition positive et rationnelle dans son cône minimal contenu dans  $\sigma$  d'où  $\eta_\rho = \sum_{\rho' \in \sigma(1)} \alpha_{\rho\rho'} \eta_{\rho'}$  où  $\alpha_{\rho\rho'} \in \mathbb{Q}^+$  si bien que  $c_\rho = -\sum_{\rho' \in \sigma(1)} \alpha_{\rho\rho'} \langle v, \eta_{\rho'} \rangle$ . Or pour tout  $\rho' \in \sigma(1)$ , on a  $-\langle v, \eta_{\rho'} \rangle = a_{\rho'}$ . On en déduit comme au a) que  $P_{D_2}$  est défini par les mêmes inéquations que  $P_{D_1}$  car  $\Sigma_P(1) \subseteq \Sigma(1)$  et les inéquations  $\langle m, \eta_\rho \rangle + \sum_{\rho' \in \sigma(1)} \alpha_{\rho\rho'} a_{\rho'} \geq 0$ ,  $\rho \in \Sigma(1) \setminus \Sigma_P(1)$  se déduisent des inéquations  $\langle m, \eta_{\rho'} \rangle + a_{\rho'} \geq 0$ ,  $\rho' \in \sigma(1)$ . Par suite,  $P_{D_1} = P_{D_2}$ . Il vient aussitôt que  $D_2$  est sans points de base et que  $S'_{[D_2]} \simeq S_{[D_1]}$ .  $\square$

Soit  $\pi$  le morphisme torique induit par le raffinement de  $\Sigma_P$  en  $\Sigma$ . On considère  $D_1$  un diviseur de Cartier invariant par le tore et sans points de base sur  $X_P$ . D'après le théorème 3.8, le diviseur  $D_1$  admet un unique antécédent  $D_2$ , diviseur de Cartier invariant par le tore et sans points de base. On note  $D_2 = \pi^*(D_1)$  l'antécédent de  $D_1$  dans  $X_\Sigma$ . L'isomorphisme entre  $S'_{[D_2]}$  et  $S_{[D_1]}$  est défini par  $\pi^*(X^{\langle m, D_1 \rangle}) = X^{\langle m, \pi^*(D_1) \rangle} = X^{\langle m, D_2 \rangle}$  pour  $m \in P_{D_1} = P_{D_2}$ .

### CHAPITRE 3. ÉCLATEMENT D'UNE VARIÉTÉ TORIQUE

**Corollaire 3.1.** *Soit  $F \in S$  un polynôme homogène de degré sans points de base et  $D_1 = \sum_{\rho \in \Sigma_P(1)} b_\rho D_\rho$  un représentant du degré de  $F$ . On a*

$$F = \sum_{m \in P_{D_1}} a_m X^{\langle m, D_1 \rangle} = \sum_{m \in P_{D_1}} a_m \prod_{\rho \in \Sigma_P(1)} X_\rho^{\langle m, \eta_\rho \rangle + b_\rho}.$$

et

$$\pi^*(F) = \sum_{m \in P_{D_1}} a_m X^{\langle m, \pi^*(D_1) \rangle} = \sum_{m \in P_{D_1}} a_m \prod_{\rho \in \Sigma(1)} X_\rho^{\langle m, \eta_\rho \rangle + c_\rho} \quad \text{où } \pi^*(D_1) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho D'_\rho.$$

Alors  $c_\rho = -\min_{m \in P_{D_1}} \langle m, \eta_\rho \rangle$  pour tout  $\rho \in \Sigma(1)$ .

**Preuve.** D'après la définition de  $\pi^*(D_1)$ , quel que soit  $\rho \in \Sigma(1)$ , il existe  $\sigma \in \Sigma_P(1)$  et un sommet  $v$  de  $P_{D_1}$  tel que  $c_\rho = -\langle v, \eta_\rho \rangle$ . Or  $\langle m, \eta_\rho \rangle \geq -c_\rho$  pour tout  $m \in P_{\pi^*(D_1)} = P_{D_1}$  donc  $\langle m, \eta_\rho \rangle \geq -c_\rho$  pour tout  $m \in P_{D_1}$ . Par suite  $\min_{m \in P_{D_1}} (\langle m, \eta_\rho \rangle) \geq -c_\rho$  et finalement  $-\min_{m \in P_{D_1}} (\langle m, \eta_\rho \rangle) = -\langle v, \eta_\rho \rangle = c_\rho$ .  $\square$

**Théorème 3.9.** *Soit  $D$  un diviseur de Cartier  $T_N$ -invariant sans points de base d'une variété torique  $X$  définie par un éventail complet  $\Sigma$  et soit  $X_{P_D}$  la variété torique définie par le polytope  $P_D$  d'éventail dual  $\Sigma_{P_D}$ . Alors le raffinement de l'éventail  $\Sigma_{P_D}$  en  $\Sigma$  induit un morphisme torique propre de  $X$  sur  $X_{P_D}$ .*

**Preuve.** Cf. théorème 6.2.8 p.281 dans [11].  $\square$

## Chapitre 4

# Symbole de Kronecker dans le tore

Nous définissons dans cette partie, le symbole de Kronecker dans le tore de dimension  $n$  relativement à une famille  $f = (f_1, \dots, f_n)$  de polynômes de Laurent ayant un nombre fini de zéros. Il existe une variété torique naturelle dans laquelle il est possible d'interpréter les zéros de la famille  $f$  : il s'agit de la variété torique projective définie par le polytope qui réalise la somme de Minkowski des polytopes de Newton associés aux polynômes  $f_k$ . On montre que les polytopes de Newton des  $f_k$  correspondent aux polytopes de diviseurs de Cartier, invariants par le tore de la variété torique et sans points de base. Le polynôme de Laurent  $f_k$  s'homogénéise ainsi en un polynôme  $F_k$  relativement au diviseur sans points de base déterminé par son polytope de Newton.

Le symbole de Kronecker dans le tore est alors défini relativement aux polynômes homogènes  $F_k$  considérés sur un ouvert affine associé à un cône maximal de l'éventail dual de  $P$ . Cette présentation suit la description du résidu dans le tore donnée dans [4] et s'appuie sur le théorème 3.8 présentée dans [14].

### 4.1 Variété torique projective associée à une famille de polynômes de Laurent

On considère  $f_1, \dots, f_n$ ,  $n$  polynômes de l'anneau  $\mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}]$  possédant un nombre fini de zéros communs. On nomme  $P_1, \dots, P_n$  leurs polytopes de Newton respectifs et  $P$  la somme de Minkowski  $P_1 + \dots + P_n$ . Le polytope  $P$  est donc un polytope rationnel de dimension  $n$ . Par dualité, le polytope  $P$  définit un éventail complet  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

On suppose que chaque sommet de  $P$  est l'intersection de  $n$  facettes exactement. On dit dans ces conditions que  $P$  est premier ce qui signifie que  $\Sigma$  son éventail dual est simplicial.

On note  $\eta_1, \dots, \eta_s$  les normales rentrantes aux facettes de  $P$  qui sont des vecteurs primitifs. La variété torique  $X_P$  associée à  $P$  est la variété simpliciale de dimension  $n$  définie par l'éventail  $\Sigma$ . Les rayons de  $\Sigma$  sont engendrés par les vecteurs primitifs  $\eta_j$ . A chaque  $\eta_j$  correspond un diviseur  $D_j$  irréductible, invariant sous l'action du tore  $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$  de la variété  $X_P$ .

Le diviseur associé au polytope  $P$  est un diviseur de Cartier, invariant par le tore et ample pour la variété  $X_P$ .

**Proposition 4.1.** *Pour tout  $k = 1, \dots, n$ , il existe des diviseurs de Cartier sans points de base  $\delta_1, \dots, \delta_n$  tels que  $P_k = P_{\delta_k}$ . De plus,*

$$\delta_k = \sum_{j=1}^s b_{kj} D_j \quad \text{où} \quad b_{kj} = - \min_{m \in P_k} \langle m, \eta_j \rangle.$$

**Preuve.** Le diviseur associé au polytope  $P$  est sans points de base. La proposition est donc une conséquence du théorème 3.7.  $\square$

On définit sur la variété torique  $X_P$  une famille de  $n$  polynômes dans l'anneau de coordonnées homogènes  $S$  associé à  $X_P$  et homogènes pour le degré défini sur le groupe de Chow  $\text{Cl}(X_P)$ . On rappelle que si  $P$  possède  $s$  facettes alors l'anneau  $S$  est l'anneau de polynômes à  $s$  indéterminées  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_s]$  gradué par le degré défini par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}D_j \xrightarrow{\text{deg}} \text{Cl}(X_P) \longrightarrow 0.$$

Les diviseurs  $D_j$  désignent les diviseurs irréductibles associées aux rayons de l'éventail de  $X_P$  qui sont engendrés par les vecteurs primitifs  $\eta_j$  qui définissent les normales rentrantes aux facettes du polytope  $P$ .

Ainsi on homogénéise le polynôme de Laurent  $f_k$  par le diviseur  $\delta_k$  qui est le diviseur sans point de base défini par le polytope  $P_k$ .

Si  $f_k = \sum_{m \in P_k} a_{km} T^m$ , son homogénéisé par rapport au diviseur  $\delta_k$  s'écrit  $F_k = \sum_{m \in P_k} a_{km} X^{(m, \delta_k)}$  où  $X^{(m, \delta_k)} = \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}}$ .

**Définition 4.1.** On dit que la suite  $(f_1, \dots, f_n)$  de polynômes de Laurent est une suite régulière par rapport à ses polytopes de Newton si

$$Z_{X_P}(F_1, \dots, F_n) \subset T_{X_P}$$

où  $Z_{X_P}(F_1, \dots, F_n)$  désigne l'ensemble des zéros communs des polynômes  $F_k$  dans la variété torique  $X_P$ .

On suppose dans la suite que le système de polynômes de Laurent  $(f_1, \dots, f_n)$  est régulier par rapport à ses polytopes de Newton et que les zéros communs du système dans  $(\mathbb{C}^*)^n$  sont en nombre fini. Par conséquent,  $P$  est un polytope de dimension  $n$ .

**Proposition 4.2.** *Si la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est régulière par rapport à ses polytopes de Newton et si le nombre de zéros communs à  $(f_1, \dots, f_n)$  dans  $(\mathbb{C}^*)^n$  est fini alors la famille  $(F_1, \dots, F_n)$  de polynômes homogènes a un nombre fini de zéros dans  $X_P$ .*

**Preuve.** On rappelle l'existence de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^s \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow 0.$$

$$\text{où } \varphi(t'_1, \dots, t'_s) = (t_1, \dots, t_n) \quad \text{et} \quad t_i = \prod_{j=1}^s (t'_j)^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Les vecteurs  $(e_i)$  désignent la base canonique de  $\mathbb{Z}^n$ .

Soit  $(t'_1, \dots, t'_s) \in (\mathbb{C}^*)^s$ . On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 F_k(t'_1, \dots, t'_s) &= \sum_{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{j=1}^s (t'_j)^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}} \\
 &= \sum_{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{j=1}^s (t'_j)^{\langle m, \eta_j \rangle} \prod_{j=1}^s (t'_j)^{b_{kj}} \\
 &= \prod_{j=1}^s (t'_j)^{b_{kj}} \sum_{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{j=1}^s (t'_j)^{\langle \sum_{i=1}^n m_i e_i, \eta_j \rangle} \\
 &= \prod_{j=1}^s (t'_j)^{b_{kj}} \sum_{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{j=1}^s \prod_{i=1}^n (t'_j)^{m_i \langle e_i, \eta_j \rangle} \\
 &= \prod_{j=1}^s (t'_j)^{b_{kj}} \sum_{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^s \left( (t'_j)^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \right)^{m_i} \\
 &= \left( \prod_{j=1}^s (t'_j)^{b_{kj}} \right) f_k(t_1, \dots, t_n).
 \end{aligned}$$

Ainsi si  $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$  est un zéro commun aux polynômes  $F_1, \dots, F_n$  alors tout système de coordonnées homogènes  $(t'_1, \dots, t'_s)$  de  $(t_1, \dots, t_s)$  annulent les  $F_k$  et par suite  $(t_1, \dots, t_n)$  est aussi un zéro de  $f_1, \dots, f_n$  ce qui montre la proposition.  $\square$

Khovanskii dans [9] donne une caractérisation différente de la régularité d'une famille de polynômes de Laurent pour ses polytopes de Newton qui montre que cette condition est générique.

Comme précédemment  $P_1, \dots, P_n$  désignent les polytopes de Newton respectifs des  $f_1, \dots, f_n$ . On définit pour tout élément  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $P_k^\eta$  la face de  $P_k$  sur laquelle  $\inf\{\langle m, \eta \rangle, m \in P_k\}$  est atteint et  $f_k^\eta = \sum_{m \in P_k^\eta \cap M} a_{km} t^m$ .

**Proposition 4.3.** *la famille  $f = (f_1, \dots, f_n)$  est régulière par rapport à ses polytopes de Newton si, et seulement si, pour tout  $\eta \in (\mathbb{R}^n)^*$ , pour tout  $t \in (\mathbb{C}^*)^n$ ,*

$$f_1^\eta(t) = \dots = f_n^\eta(t) = 0 \Rightarrow \text{Jac}(f_1^\eta, \dots, f_n^\eta)(t) \neq 0.$$

**Preuve.** On remarque que si  $\eta \neq 0$ ,  $\inf_{m \in P_k}(\langle m, \eta \rangle)$  est atteint sur le bord de  $P_k$  en au moins un sommet de  $P_k$ . Par suite  $P_k^\eta$  est bien une face de  $P_k$  comme intersection de  $P_k$  et de l'hyperplan d'équation  $\langle m, \eta \rangle - \min_{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n}(\langle m, \eta \rangle)$  avec  $\min_{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n}(\langle m, \eta \rangle) \in \mathbb{N}^*$ .

On montre l'équivalence des propositions suivantes

- (1) Il existe  $x \in X_P \setminus T_N$  tel que  $F_k(x) = 0$  pour tout  $k$ .
- (2) Il existe  $t \in (\mathbb{C}^*)^n$ , il existe  $\eta \in \mathbb{R}^n$  tels que

$$f_k^\eta(t) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Jac}(f_1^\eta, \dots, f_n^\eta)(t) = 0.$$

Montrons que (1)  $\Rightarrow$  (2). On note  $s$  le nombre de facettes de  $P$ . Soit  $x \in X_P \setminus T_N$  un zéro de  $(F_1, \dots, F_n)$ . Quitte à réindexer les rayons de l'éventail, on peut supposer que  $x$  est représenté

par un système de coordonnées homogènes  $(0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n, 1, \dots, 1)$  où pour tout  $j$ ,  $0 < p < j \leq n$ ,  $x_j \neq 0$ . Le point  $x$  est donc dans l'ouvert affine  $U_\sigma$  défini par  $\sigma = \text{cône}(\eta_1, \dots, \eta_n)$ . On rappelle que le polytope  $P_k^{\eta_j}$  est défini par :

$$\{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n, \langle m, \eta_j \rangle + b_{kj} = 0\}, \text{ avec } b_{kj} = - \min_{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n} (\langle m, \eta_j \rangle).$$

**Lemme 4.1.** *Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a*

$$\bigcap_{1 \leq j \leq p} P_k^{\eta_j} \neq \emptyset \quad \text{et}$$

$$\bigcap_{1 \leq j \leq p} P_k^{\eta_j} = \left\{ m \in P_k, \langle m, \sum_{j=1}^p \eta_j \rangle + \sum_{j=1}^p b_{kj} = 0 \right\}.$$

**Preuve.** On a  $\bigcap_{1 \leq j \leq n} P_k^{\eta_j} \subseteq \bigcap_{1 \leq j \leq p} P_k^{\eta_j}$  et  $\bigcap_{1 \leq j \leq n} P_k^{\eta_j}$  est égal à l'un des sommets de  $P_k$  car  $P_k$  est le polytope du diviseur  $\sum_{j=1}^s b_{kj} D_j$  qui est un diviseur de Cartier sans points de base pour la variété  $X_P$ . Par conséquent,  $\bigcap_{1 \leq j \leq p} P_k^{\eta_j} \neq \emptyset$ .

De plus, pour tout  $m \in P_k$ ,

$$\langle m, \sum_{j=1}^p \eta_j \rangle + \sum_{j=1}^p b_{kj} = 0 \Leftrightarrow \langle m, \eta_j \rangle + b_{kj} = 0, \quad 1 \leq j \leq p$$

car  $\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj} \geq 0$  ce qui achève la preuve du lemme.  $\square$

On pose  $\eta = \sum_{j=1}^p \eta_j$ ,  $P_k^\eta$  désigne la face de  $P_k$  sur laquelle  $\inf(\langle m, \eta \rangle)$  est atteint. Pour tout  $m \in P_k$ ,  $\langle m, \eta \rangle = \langle m, \sum_{j=1}^p \eta_j \rangle \geq - \sum_{j=1}^p b_{kj}$ . D'après le lemme,  $\langle m, \eta \rangle = - \sum_{j=1}^p b_{kj}$ , pour  $m \in \bigcap_{1 \leq j \leq p} P_k^{\eta_j}$ . Donc  $\inf_{m \in P_k} (\langle m, \eta \rangle) = - \sum_{j=1}^p b_{kj}$  et par suite  $P_k^\eta = \bigcap_{1 \leq j \leq p} P_k^{\eta_j}$ .

Calculons  $F_k$  en un point  $y$  de la forme  $(0, \dots, 0, y_{p+1}, \dots, y_n, 1, \dots, 1)$ .

$$\begin{aligned} F_k(y) &= \sum_{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{j=1}^s y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}} \\ &= \sum_{m \in P_k^\eta \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{j=p+1}^s y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}}. \end{aligned}$$

En effet, si  $m \in P_k \setminus P_k^\eta$ ,  $\exists j$ ,  $1 \leq j \leq p$ ,  $\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj} > 0$  alors  $\prod_{j=1}^s y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}} = 0$  sinon  $m \in P_k^\eta$  alors  $\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj} = 0$  pour  $1 \leq j \leq p$  et  $\prod_{j=1}^p X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}} = 1$ .

De plus,  $y_j = 1$  pour  $j > n$ , d'où

$$F_k(y) = \sum_{m \in P_k^\eta \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{j=p+1}^n y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}}.$$

En observant que  $x = (0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n, 1, \dots, 1)$  est un zéro de  $F_k$ , on en déduit que

$$\sum_{m \in P_k^\eta \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{j=p+1}^n x_j^{\langle m, \eta_j \rangle} + b_{kj} = 0.$$

On pose  $F_k^\eta(X) = \sum_{m \in P_k^\eta \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}}$ .

Le  $s$ -uplet  $x' \in (\mathbb{C}^*)^s$  vérifiant :

$$\begin{aligned} x'_j &= 1 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq p \\ x'_j &= x_j \quad \text{pour } p < j \leq n \\ x'_j &= 1 \quad \text{pour } n < j \leq s \end{aligned}$$

est solution de l'équation  $F_k^\eta(X) = 0$ .

En effet,  $F_k^\eta(x') = \sum_{m \in P_k^\eta \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{j=1}^s (x'_j)^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}} = F_k(x) = 0$ .

D'après la preuve de la proposition 4.2,  $f_k^\eta(t_1, \dots, t_n) = 0$  pour tout  $k$ , où  $t_i = \prod_{j=1}^s (x'_j)^{\langle m, \eta_j \rangle}$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Par conséquent,  $t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$  est un zéro commun des  $f_k^\eta$ .

Montrons que  $\text{Jac}(f_1^\eta, \dots, f_n^\eta)(t) = 0$ .

La suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z}D_j \xrightarrow{\text{deg}} \text{Cl}(X_P) \longrightarrow 0.$$

induit un morphisme surjectif  $\pi$  de  $(\mathbb{C}^*)^n \subset (\mathbb{C}^*)^s$  sur  $(\mathbb{C}^*)^n$  défini par les égalités  $T_i = \prod_{j=1}^n (X_j)^{\langle e_i^*, \eta_j \rangle}$ , pour  $i = 1, \dots, n$ .

On a  $\pi(x'_1, \dots, x'_n) = t$ .

$\text{Jac}(f_1^\eta, \dots, f_n^\eta) \times \text{Jac } \pi = \text{Jac}(\pi^*(f_1^\eta), \dots, \pi^*(f_n^\eta))$  avec  $\pi^*(f_k^\eta) = f_k^\eta \circ \pi$ .

$$\begin{aligned} \text{Jac } \pi &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} (\prod_{j=1}^n (X_j)^{\langle e_1^*, \eta_j \rangle}) & \dots & \frac{\partial}{\partial X_n} (\prod_{j=1}^n (X_j)^{\langle e_1^*, \eta_j \rangle}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial X_1} (\prod_{j=1}^n (X_j)^{\langle e_n^*, \eta_j \rangle}) & \dots & \frac{\partial}{\partial X_n} (\prod_{j=1}^n (X_j)^{\langle e_n^*, \eta_j \rangle}) \end{vmatrix} \\ &= \frac{T_1 \cdots T_n}{X_1 \cdots X_n} \det(\eta_1, \dots, \eta_n). \end{aligned}$$

On observe que

$$\begin{aligned} \pi^*(f_k^\eta)(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{m \in P_k^\eta \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \left( \prod_{j=1}^n (X_j)^{\langle m, \eta_j \rangle} \right) \\ &= \left( \prod_{j=1}^n (X_j)^{-b_{kj}} \right) F_k^\eta(X_1, \dots, X_n, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{\partial \pi^*(f_k^\eta)}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \prod_{j=1}^n (X_j)^{-b_{kj}} \right) F_k^\eta(X_1, \dots, X_n, 1, \dots, 1) + \prod_{j=1}^n (X_j)^{-b_{kj}} \frac{\partial}{\partial X_1} F_k^\eta(X_1, \dots, X_n, 1, \dots, 1)$$

$$\text{et } \frac{\partial \pi^*(f_k^\eta)}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \prod_{j=1}^n (X_j)^{-b_{kj}} \right) \times F_k^\eta(X_1, \dots, X_n, 1, \dots, 1).$$

On a  $\frac{\partial}{\partial X_1} F_k^\eta(X_1, \dots, X_n, 1, \dots, 1) = 0$  car la variable  $X_1$  ne figure pas dans  $F_k^\eta(X_1, \dots, X_n) : \langle m, \eta \rangle + b_{k1} = 0$ , pour  $m \in P_k^\eta$ . La première ligne de  $\text{Jac}(\pi^*(f_1^\eta), \dots, \pi^*(f_n^\eta))$  est donc nulle.

D'où  $\text{Jac}(\pi^*(f_1^\eta), \dots, \pi^*(f_n^\eta))(x'_1, \dots, x'_n) = 0$  et par conséquent,  $\text{Jac}(f_1^\eta, \dots, f_n^\eta)(t) = 0$ .

Réciproquement, soit  $t \in (\mathbb{C}^n)^*$  et  $\eta \in (\mathbb{R}^*)^n$  tel que  $f_k^\eta(t) = 0$ , pour tout  $k$ . Comme  $\Sigma$  est complet, on peut toujours supposer pour une indexation convenable que  $\eta = \sum_{j=1}^p \alpha_j \eta_j$ ,  $\alpha_j > 0$ , pour  $(\eta_1, \dots, \eta_p)$  des vecteurs générateurs de rayons du cône  $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ .

$\langle m, \eta \rangle = \sum_{j=1}^p \alpha_j \langle m, \eta_j \rangle \geq \sum_{j=1}^p -\alpha_j b_{kj}$ . On a  $\inf_{m \in P_k} \langle m, \eta \rangle$  atteint sur  $P_k^\eta$  et  $\langle m, \eta \rangle = -\sum_{j=1}^p \alpha_j b_{kj}$  lorsque  $m \in \bigcap_{j=1}^p P_k^{\eta_j}$ . D'où

$$P_k^\eta = \bigcap_{j=1}^p P_k^{\eta_j} = \{m \in P_k, \langle m, \eta \rangle = -\sum_{j=1}^p \alpha_j b_{kj}\}.$$

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$  tel que  $\pi((x_1, \dots, x_n)) = t$ .

Soit  $F_k^\eta(X_1, \dots, X_s) = \sum_{m \in P_k^\eta \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \left( \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}} \right)$ .

Comme  $f_k^\eta(t) = 0$ ,  $\pi^*(f_k^\eta)(x_1, \dots, x_n) = 0$  et donc  $(x_1, \dots, x_n, 1, \dots, 1)$  est un zéro de  $F_k^\eta$ .

On en déduit que  $(0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n, 1, \dots, 1)$  est un système de coordonnées homogènes d'un point  $x$  de  $X_P \setminus T_N$  tel que  $F_k(x) = 0$ , pour tout  $k$ .  $\square$

*Remarque 4.1.* Si  $\eta = 0$ ,  $P_k^\eta = P_k$  et  $f_k^\eta = f_k$ . Dans ce cas, on peut avoir  $f_k(t) = 0$  pour tout  $k$  et  $\text{Jac}((f_k)_k(t)) = 0$  bien que les zéros communs des  $F_k$  soient contenus dans le tore.

Il suffit de considérer le polynôme  $f(T) = (T - 2)^2$ . Le polytope de Newton associé à  $f$  est le segment  $[0, 2]$ . Soit  $F$  l'homogénéisation de  $f$  dans  $\mathbb{P}_1$  qui est la variété torique associée au segment  $[0, 2]$ ,  $F(X, Y) = X^2 - 4XY + 4Y^2$ . On observe que  $F$  est sans zéros à l'infini alors que  $f$  possède une racine double.

## 4.2 Homogénéisation d'un polynôme de Laurent

Soient  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$ . On suppose que les polynômes de Laurent  $f_k$  ont un nombre fini de zéros communs et qu'ils sont réguliers par rapport à leurs polytopes de Newton. On suppose également que  $P$ , somme de Minkowski des polytopes de Newton des  $f_k$ , est un polytope premier.

Le polytope  $P$  définit alors une variété projective simpliciale de dimension  $n$ , d'éventail  $\Sigma$ . Les rayons de  $\Sigma$  sont engendrés par les vecteurs primitifs  $\eta_1, \dots, \eta_s$  qui sont des normales rentrantes aux facettes de  $P$ . Chaque  $f_k$  fournit un polynôme homogène  $F_k$  dans  $S$  l'anneau de coordonnées homogènes de  $X_P$ . D'après l'hypothèse vérifiée par les  $f_k$ , les zéros communs des polynômes  $F_1, \dots, F_n$  dans la variété torique  $X_P$  sont en nombre fini et contenus dans le tore.

Un diviseur  $T_N$ -invariant  $D = \sum_{j=1}^s a_j D_j$  où  $D_j$  est le diviseur irréductible associé à  $\eta_j$  et un monôme de Laurent  $t^m$ ,  $m \in P_\Delta$ , définissent le monôme  $\prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + a_j}$ , homogénéisé de  $t^m$  par rapport à  $D$ .

Pour définir le symbole de Kronecker dans le tore en  $h \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$ , on adjoint aux polynômes  $F_1, \dots, F_n$ , un  $(n+1)^e$  polynôme homogène  $F_0$  dont la définition dépend de  $h$  et tel que les polynômes  $F_0, F_1, \dots, F_n$  sont sans zéros commun dans la variété  $X_P$ . Le polynôme de Laurent  $h$  fournit alors un polynôme homogène  $H$  de degré critique pour les polynômes  $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ .

Soit  $h(T) = \sum_{m \in P_h \cap M} a_m T^m$  où  $P_h$  est le polytope de Newton de  $h$ . Soit  $m_0 \in \text{Int}(P) \cap \mathbb{Q}^n$ . Il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1 \in \mathbb{N}$  pour tout  $j = 1, \dots, s$  et pour tout  $m \in P_h \cap M$  car pour tout  $j$ ,  $\langle m_0, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj}$  est un rationnel strictement positif. Alors

$$H(X) = \sum_{m \in P_h \cap M} a_m \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1} \in S.$$

On pose alors  $F_0 = \prod_{j=1}^s X_j^{q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj}}$ . Le polynôme  $H$  est l'homogénéisé de  $h$  par rapport au diviseur  $\sum_{j=1}^s (\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1) D_j$  de degré critique pour la famille  $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ . De plus, les polynômes  $(F_0, F_1, \dots, F_n)$  sont sans zéros commun dans  $X_P$  car les zéros communs des polynômes  $F_1, \dots, F_n$  sont dans le tore de  $X_P$ .

### 4.3 Symbole de Kronecker dans le tore, résidu torique et résidu global dans le tore, cas simplicial

#### 4.3.1 Symbole de Kronecker dans le tore, cas où $P$ est premier

Dans cette section, le polytope  $P$ , somme de Minkowski des polytopes de Newton définis par les polynômes de Laurent  $f_1, \dots, f_n$ , est toujours supposé premier ce qui signifie que l'éventail dual lui correspondant dans  $\mathbb{R}^n$  est simplicial.

**Définition 4.2.** Soit  $h(T) = \sum_{m \in P_h \cap M} a_m T^m$  un polynôme de Laurent. On dit que  $H$  est l'homogénéisation de  $h$  relativement au couple  $(m_0, q) \in (\text{Int}(P) \cap \mathbb{Q}^n) \times \mathbb{N}$  si

$$H(X) = \sum_{m \in P_h \cap M} a_m \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1} \in S.$$

**Définition 4.3.** On appelle ensemble simplicial d'une variété torique d'éventail  $\Sigma$ , tout ensemble  $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, s\}$  tel que  $(\eta_{i_1}, \dots, \eta_{i_p})$  engendre un cône simplicial de  $\Sigma$ .

Si  $p = n$ , on dit que  $I$  est un ensemble simplicial maximal.

Soit  $I = \{i_1, \dots, i_n\}$  un ensemble simplicial maximal de  $X_P$ . On note  $X_I$  la suite d'indéterminées  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$ .

Pour tout  $F \in S$ , on définit le polynôme  $F_I \in \mathbb{C}[X_{i_1}, \dots, X_{i_n}]$  de la manière suivante  $F_I(X_I) = F(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}, 1, \dots, 1)$  où  $X_j = 1$  pour  $j \in \bar{I}$ .

Chaque fois qu'il sera possible, on omettra dans la suite de préciser la suite d'indéterminées  $X_I$  dans le souci d'alléger les notations.

**Proposition 4.4.** *On considère  $m_0$  un point à coordonnées rationnelles dans l'intérieur de  $P$  et  $q \in \mathbb{N}$  tels que  $F_0 = \prod_{j=1}^s X_j^{q((m_0, \eta_j) + \sum_{k=1}^n b_{kj})} \in S$  alors pour tout ensemble simplicial maximal,  $I$ ,  $F_{0I}$  est inversible modulo l'idéal  $\langle F_{1I}, \dots, F_{nI} \rangle$ .*

**Preuve.** Soit  $I$  un ensemble simplicial maximal de  $X_P$ . Comme les polynômes  $F_0, F_1, \dots, F_n$  sont sans zéros communs dans  $X_P$ , les polynômes  $F_{0I}, F_{1I}, \dots, F_{nI}$  sont sans zéros dans  $\mathbb{C}^n$ . D'après le théorème des zéros de Hilbert,  $1 \in \langle F_{0I}, F_{1I}, \dots, F_{nI} \rangle$  de  $\mathbb{C}[X_I]$  ce qui montre la proposition.  $\square$

Soit  $I$  un ensemble simplicial de  $X_P$ . Nous définissons le symbole de Kronecker dans le tore à l'aide de la forme dualisante  $\ell_I$  définie sur le quotient  $A_I = \mathbb{C}[X_I]/\langle F_{1I}, \dots, F_{nI} \rangle$ .

On note  $\eta_I$  La famille de vecteurs  $(\eta_{i_1}, \dots, \eta_{i_n})$ . Pour tout  $k = 0, \dots, n$ , on définit le polynôme  $\partial_{i_j} F_{kI} \in \mathbb{C}[X_I, Y_I]$  par

$$\partial_{i_j} F_{kI}(X_I, Y_I) = \frac{F_{kI}(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_{j-1}}, X_{i_j}, \dots, X_{i_n}) - F_{kI}(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_j}, X_{i_{j+1}}, \dots, X_{i_n})}{X_{i_j} - Y_{i_j}}$$

**Définition 4.4.** On appelle bezoutien de  $F_0, \dots, F_n$  relativement à  $I$  noté  $\text{Bez}_I(F_0, \dots, F_n)$  l'expression :

$$\frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} \det \begin{pmatrix} F_{0I} & F_{1I} & \dots & F_{nI} \\ \partial_{i_1} F_{0I} & \partial_{i_1} F_{1I} & \dots & \partial_{i_1} F_{nI} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{i_n} F_{0I} & \partial_{i_n} F_{1I} & \dots & \partial_{i_n} F_{nI} \end{pmatrix}.$$

*Remarque 4.2.* La définition de  $\text{Bez}_I(F_0, \dots, F_n)$  est indépendante de l'ordre d'indexation choisi pour les vecteurs  $\eta_I$  et les variables  $X_I$ .

**Proposition 4.5.** *Soient  $m_0 \in \text{Int } P \cap \mathbb{Q}$  et  $q \in \mathbb{N}$  tels que  $F_0 = \prod_{j=1}^s X_j^{q((m_0, \eta_j) + \sum_{k=1}^n b_{kj})} \in S$ . Alors  $\text{Bez}_I(F_0)$ , la classe de  $\text{Bez}_I(F_0, \dots, F_n)$  dans  $A_I \otimes A_I$ , est un bezoutien généralisé associé à la forme dualisante  $G_{0I} \cdot \ell_I$  où  $G_{0I}$  est l'inverse de  $F_{0I}$  modulo l'idéal  $\langle F_{1I}, \dots, F_{nI} \rangle$ .*

**Preuve.** On note de la même façon un polynôme de  $\mathbb{C}[X_I]$  et son image dans l'anneau-quotient  $A_I$ .

D'après la proposition 4.4,  $F_{0I}$  est inversible dans  $A_I$ . On note  $G_{0I}$  l'inverse de  $F_{0I}$  dans  $A_I$ , la forme linéaire  $G_{0I} \cdot \ell_I \in A_I^*$  est une forme dualisante sur  $A_I$ . De plus,

$$\text{Bez}_I(F_0) = \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} F_{0I} \cdot \det \begin{pmatrix} \partial_{i_1} F_{1I} & \dots & \partial_{i_1} F_{nI} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{i_n} F_{1I} & \dots & \partial_{i_n} F_{nI} \end{pmatrix} = \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} F_{0I} \cdot \text{Bez}_I(1).$$

On en déduit que  $\frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} G_{0I} \cdot \ell_I$  est la forme dualisante associée au bezoutien généralisé

$$\text{Bez}_I(F_0) = \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} F_{0I} \cdot \text{Bez}(1). \quad \square$$

**Proposition 4.6.** Soit  $h \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$ . On considère deux homogénéisations  $H$  et  $H'$  de  $h$  relatives à  $(m_0, q)$  et  $(m'_0, q')$ . Les couples d'homogénéisation  $(m_0, q)$  et  $(m'_0, q')$  définissent respectivement  $F_0 = \sum_{j=1}^s X_j^{q(\langle m_0, \eta_j \rangle + \sum_{k=1}^n b_{kj})}$  et  $F'_0 = \sum_{j=1}^s X_j^{q'(\langle m'_0, \eta_j \rangle + \sum_{k=1}^n b_{kj})}$  dans  $S$ .

Alors, pour tout ensemble simplicial maximal  $I$ ,  $H_I G_{0I} = H'_I G'_{0I}$  modulo  $\langle F_{1I}, \dots, F_{nI} \rangle$  où  $G_{0I}$  (resp.  $G'_{0I}$ ) est l'inverse de  $F_{0I}$  (resp.  $F'_{0I}$ ) modulo  $\langle F_{1I}, \dots, F_{nI} \rangle$ .

**Preuve.** On a  $H_I G_{0I} F'_{0I} = H'_I$  modulo  $\langle F_{1I}, \dots, F_{nI} \rangle$  et par suite  $H_I G_{0I} = H'_I G'_{0I}$  modulo  $\langle F_{1I}, \dots, F_{nI} \rangle$ .  $\square$

La proposition 4.6 montre que le calcul ne dépend pas du choix du couple  $(m_0, q)$  qui donne l'homogénéisation du polynôme de Laurent dans  $S$  et fournit le polynôme  $F_0$ . La proposition suivante montre que le calcul est aussi indépendant du choix de l'ensemble simplicial maximal.

**Proposition 4.7.** Soit  $h \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$ . On considère  $(m_0, q) \in (\text{Int}(P) \cap \mathbb{Q}^n) \times \mathbb{N}$  un couple d'homogénéisation de  $h$  qui définit les polynômes homogènes  $H$  et  $F_0$ .

Pour tout  $I$  et  $J$  ensembles simpliciaux maximaux de  $X_P$ ,

$$\frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} \ell_I(H_I G_{0I}) = \frac{\det \eta_J}{|\det \eta_J|} \ell_J(H_J G_{0J}).$$

**Preuve.** Les formes dualisantes  $\frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} G_{0I} \cdot \ell_I$  et  $\frac{\det \eta_J}{|\det \eta_J|} G'_{0J} \cdot \ell_J$  correspondent au symbole de Kronecker torique défini dans la variété  $X_P$  relativement aux  $n + 1$  polynômes homogènes  $F_0, \dots, F_n$  et exprimé respectivement dans les ensembles simpliciaux  $I$  et  $J$ . La proposition est une conséquence directe du théorème 6.1.  $\square$

**Définition 4.5.** On appelle symbole de Kronecker dans le tore  $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$  l'application notée  $\ell^{\mathcal{F}}$  qui à  $h \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$  associe  $\ell^{\mathcal{F}}(h) = \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} \ell_I(H_I G_{0I})$ .

**Proposition 4.8.** Le symbole de Kronecker dans le tore  $\ell^{\mathcal{F}}$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ .

**Preuve.** Soient  $h, g \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$  et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On considère  $(m_0, q)$  un couple d'homogénéisation de  $\lambda h + g$  alors  $(m_0, q)$  est aussi un couple d'homogénéisation de  $h$  et de  $g$ . D'où

$$\begin{aligned} \ell^{\mathcal{F}}(\lambda h + g) &= \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} \ell_I((\lambda H + G)_I G_{0I}) \\ &= \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} (\lambda \ell_I((H)_I G_{0I}) + \ell_I((G)_I G_{0I})) \\ &= \lambda \ell^{\mathcal{F}}(h) + \ell^{\mathcal{F}}(g) \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 4.9.** Le symbole de Kronecker dans le tore encore noté  $\ell^{\mathcal{F}}$  est une forme linéaire définie sur  $\mathbb{C}[T, T^{-1}]/\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ .

**Preuve.** Il suffit de vérifier que  $\ell^{\mathcal{F}}(f_k) = 0$  pour tout  $k$ .

Soit  $l \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $(m_0, q) \in (\text{Int}(P) \cap \mathbb{Q}^n) \times \mathbb{N}$  tels que  $\sum_{k \neq l} b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1 \in \mathbb{N}$  pour tout  $j$  alors  $(m_0, q)$  est un couple d'homogénéisation de  $f_l$  en le degré critique des polynômes  $F_0, F_1, \dots, F_n$  avec  $F_0 = \prod_{j=1}^s X_j^{q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj}}$ . En effet, pour tout  $m \in P_k$ ,  $\langle m, \eta_j \rangle + b_{lj} \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Le polynôme  $\sum_{m \in P_k \cap M} a_{km} \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1}$  est égal à  $A(X)F_k(X)$  avec  $A(X) = \prod_{j=1}^s X_j^{\sum_{k \neq l} b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1}$ . Or  $\ell(A_I F_{k_I} G_{0_I}) = 0$  d'où la proposition.  $\square$

### 4.3.2 Lien entre résidu global et symbole de Kronecker

Nous présentons les définitions et quelques propriétés énoncées sans démonstration du résidu torique et du résidu dans le tore. Le lecteur se référera aux sources suivantes [4],[2], [5], [14] pour les preuves et un approfondissement. Nous précisons dans le dernier paragraphe, la relation entre ces objets et le symbole de Kronecker dans le tore.

#### Résidu torique

On considère  $X$  une variété torique donnée par un éventail complet  $\Sigma$  dans  $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ . Le réseau  $M$  désigne le réseau dual de  $N$ .

**Définition 4.6.** Soit  $I = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$  un sous-ensemble de  $\Sigma(1)$ . On pose  $dx_I = dx_{\rho_1} \wedge \dots \wedge dx_{\rho_n}$ ,  $\eta_I = (\eta_{\rho_1}, \dots, \eta_{\rho_n})$  et  $\widehat{x}_I = \prod_{\rho \notin I} x_{\rho}$ .

On appelle forme d'Euler la  $n$ -forme  $\Omega$  définie par :

$$\Omega = \sum_{|I|=n} \det(\eta_I) \widehat{x}_I dx_I.$$

On considère  $\omega_X$  le faisceau des  $n$ -formes de Zariski sur  $X$  qui est l'image directe du faisceau des  $n$ -formes sur  $U$  le lieu des points lisses de  $X$ .

**Proposition 4.10.** *Le faisceau  $\omega_X$  est le faisceau cohérent défini par le module gradué  $S\Omega$ .*

**Preuve.** Cf. [1] proposition 14.14.  $\square$

On observe que  $\det(\eta_I) dx_I$  ne dépend pas de la façon dont les éléments de  $I$  sont ordonnés. La forme d'Euler est définie à  $\pm 1$  selon le choix de la base de  $N$ .

**Proposition 4.11.** *Le faisceau canonique  $\omega_X$  est le faisceau défini par le  $S$ -module gradué  $S\Omega \simeq S(-\beta_0)$  avec  $\beta_0 = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \deg(x_{\rho})$ .*

Soient  $F_0, \dots, F_n \in S$ ,  $n+1$  polynômes homogènes qui ne s'annulent pas simultanément sur  $X$ . Les ouverts  $U_i = \{x \in X, F_i(x) \neq 0\}$  fournissent un revêtement affine  $\mathcal{U}$  de  $X$  grâce auquel on peut déterminer le groupe  $H^n(X, w_X)$  par la cohomologie de Čech ( $H^n(X, w_X) \simeq H^n(\mathcal{U}, w_X)$ ) car le faisceau  $w_X$  est cohérent. On pose  $\varrho = \sum_{k=0}^n \deg F_k - \beta_0$  le degré critique de la famille  $F = (F_0, \dots, F_n)$ . Chaque polynôme  $H \in S_{\varrho}$  donne une  $n$  forme méromorphe  $\omega_F(H) = \frac{H\Omega}{F_0 \cdots F_n} \in w_X(U_0 \cap \dots \cap U_n)$  qui forme une classe  $[\omega_F(H)]$  dans  $H^n(\mathcal{U}, w_X)$ . La classe  $[\omega_F(H)]$  dépend de l'ordre des polynômes dans la famille  $F$  et si  $H \in \langle F_0, \dots, F_n \rangle$ ,  $\omega_F(H)$  est un cobord. Par suite,  $[\omega_F(H)]$  ne dépend que de la classe de  $H$  modulo l'idéal  $\langle F_0, \dots, F_n \rangle$ .

**Définition 4.7.** Soit  $F = (F_0, \dots, F_n)$  une famille de  $n + 1$  polynômes homogènes sans zéros dans  $X$  et  $\varrho$  le degré critique relatif à  $\mathcal{F}$ .

Le résidu torique est la forme linéaire  $\text{Res}_F : S_\varrho / \langle F_0, \dots, F_n \rangle_\varrho \longrightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\text{Res}_F(H) = \text{Tr}_X([\omega_F(H)])$  où  $\text{Tr}_X : H^n(X, \omega_X) \rightarrow \mathbb{C}$  est le morphisme « trace ».

Dans le cas simplicial, le résidu torique s'exprime comme somme de résidus locaux de Grothendieck.

**Théorème 4.1.** Soit  $X$  une variété torique complète et simpliciale de dimension  $n$  et soit  $F = (F_0, \dots, F_n)$ , une famille de  $n + 1$  polynômes homogènes sans zéros dans  $X$ . Si  $H \in S_\varrho$  où  $\varrho$  le degré critique des  $F_k$  et  $D_k = \{x \in X, F_i(x) = 0, i \neq k\}$  est fini, alors

$$\text{Res}_F(H) = (-1)^k \sum_{x \in D_k} \text{Res}_x \left( \frac{(H/F_k)\Omega}{F_0 \cdots F_{k-1}, F_{k+1} \cdots F_n} \right).$$

**Preuve.** La preuve est donnée dans [5] Th. 4.12. □

### Jacobien torique

On considère  $F_0, \dots, F_n$ ,  $n + 1$  polynômes homogènes de  $S$ , l'anneau de coordonnées homogènes d'une variété torique complète de dimension  $n$  (non nécessairement simpliciale). On note  $\varrho$  le degré critique associé aux polynômes  $F_k$ . D'après la proposition 4.11, il existe  $J \in S_\varrho$  tel que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k F_k dF_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_k} \wedge \dots \wedge dF_n = J\Omega.$$

**Proposition 4.12.** Si  $I = \{\rho_1, \dots, \rho_n\} \subset \Sigma(1)$  et  $\eta_I = (\eta_{\rho_1}, \dots, \eta_{\rho_n})$  une famille de  $n$  vecteurs primitifs indépendants alors

$$J = \frac{1}{\det(\eta_I)\hat{x}_I} \det \begin{pmatrix} F_0 & \cdots & F_n \\ \partial F_0 / \partial x_{\rho_1} & \cdots & \partial F_n / \partial x_{\rho_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial F_0 / \partial x_{\rho_n} & \cdots & \partial F_n / \partial x_{\rho_n} \end{pmatrix}.$$

**Preuve.** Le lecteur pourra consulter la preuve dans [2] p.79 ou dans [11] p.370. □

Si les degrés des polynômes sont de même degré ample, le résidu torique est entièrement défini par sa valeur en  $J$  et  $\text{Res}_F(J) = n! \text{Vol}(P)$ .

**Définition 4.8.** L'élément  $J \in S_\varrho$  est appelé jacobien torique des  $n + 1$  de polynômes homogènes de la famille  $F$ . On le note  $\text{Jac}^{\mathcal{F}}(F)$ .

### Résidu global dans le tore

Soit  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]$  une famille de  $n$  polynômes de Laurent dont l'ensemble de ses zéros dans  $(\mathbb{C}^*)^n$ , est fini.

Soit  $m \in \mathbb{Z}^n$ , on note  $\phi_m$  la forme méromorphe sur le tore  $\frac{t^m}{f_1 \cdots f_n} \frac{dt_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_n}{t_n}$ .

**Définition 4.9.** On appelle résidu global dans le tore, la somme des résidus locaux de Grothendieck.

$$\text{Res}_f^{\mathcal{J}}(t^m) = \sum_{t \in Z} \text{Res}_t(\phi_m).$$

Le polytope  $P$  désigne la somme de Minkowski des polytopes de Newton des  $f_k$ , et  $X_P$  la variété torique projective associé à  $P$ .

Les polynômes  $F_1, \dots, F_n$  sont les homogénéisés de  $f_1, \dots, f_n$  par rapport aux diviseurs sans points de base définis par leurs polytopes de Newton respectifs.

On suppose que les polynômes  $f_k$  sont réguliers par rapport à leur polytopes de Newton alors les polynômes  $F_1, \dots, F_n$  vérifient la condition :

$$Z = \{x \in X_P, F_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, n\} \subset T \quad \text{où } T \simeq (\mathbb{C}^*)^n \text{ est le tore de } X_P.$$

De plus,  $|Z| < +\infty$  car les zéros de  $f_1, \dots, f_n$  dans  $(\mathbb{C}^*)^n$  et les zéros de  $F_1, \dots, F_n$  dans  $X_P$  coïncident.

Soit  $(m_0, q) \in \mathbb{Q}^n \cap (\text{Int } P) \times \mathbb{N}$  un couple d'homogénéisation de  $t^m$  alors  $(m_0, q)$  permet de définir un polynôme homogène  $F_0$  tel que  $F_0, F_1, \dots, F_n$  soient sans zéros communs dans  $X_P$  et un polynôme homogène  $H$  de degré critique relativement aux degrés de la famille  $F = (F_0, F_1, \dots, F_n)$  (cf. § 4.3.1) .

**Théorème 4.2.**

$$\text{Res}_f^{\mathcal{J}}(t^m) = \text{Res}_F(H).$$

**Preuve.** Cf. théorème 4 dans [4] pages 125-127. La preuve montre que la restriction au tore de la  $n$ -forme  $\frac{H\Omega}{F_0 F_1 \dots F_n}$  est  $\frac{t^m}{f_1 \dots f_n} \frac{dt_1}{t_1} \wedge \dots \wedge \frac{dt_n}{t_n}$ . Comme les zéros communs à la familles  $f$  coïncident avec les zéros communs de  $F$ , les sommes des résidus locaux sont égales.  $\square$

**Théorème 4.3** (Formule d'Euler-Jacobi dans le tore).

Soit  $f = (f_1, \dots, f_n)$  une famille de polynômes de Laurent avec un nombre fini de zéros dans le tore. Soit  $P$  la somme de Minkowski des polytopes de Newton définis par les  $f_k$  alors

$$\forall m \in \text{Int}(P) \quad \text{Res}_f^{\mathcal{J}}(t^m) = 0.$$

**Preuve.** cf. corollaire 5 dans [4].  $\square$

### Égalité du symbole de Kronecker dans le tore et du résidu global dans le tore

On montre l'égalité du symbole de Kronecker dans le tore et du résidu global dans le cas simplicial. Via une déformation continue de la famille de polynômes, on peut se ramener au cas où les zéros sont simples. Le lecteur pourra trouver l'explicitation de la déformation dans [14].

Soit  $f = (f_1, \dots, f_n)$  une famille de polynômes dans  $\mathbb{C}[T, T^{-1}] = \mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}]$  possédant un nombre fini de zéros. On suppose que les  $f_k$  sont réguliers par rapport à leur polytopes de Newton. Le polytope  $P$  somme de Minkowski des polynômes de Newton des  $f_k$  définit une variété torique projective  $X_P$  de dimension  $n$ .

On note  $Z$  l'ensemble des zéros communs des  $f_k$  alors  $Z$  s'identifie à  $\{x \in X_P, F_1(x) = \dots = F_n(x) = 0\}$  où  $F_1, \dots, F_n$  sont les polynômes homogènes induits par les polynômes  $f_k$ .

On suppose que  $P$  est premier. La variété  $X_P$  d'éventail  $\Sigma$  est donc simpliciale.

**Proposition 4.13.** *Si les multiplicités des zéros de  $f$  sont égales à 1, alors*

$$\ell^{\mathcal{J}}(T^m) = \sum_{t \in Z} \frac{t^m}{\text{Jac}^{\mathcal{J}}(f)(t)}.$$

où  $\text{Jac}^{\mathcal{J}}(f) = \det \left( T_i \frac{\partial f_k}{\partial T_i} \right)_{1 \leq k, i \leq n}$  est le jacobien affine torique.

Par conséquent,  $\text{Res}_{(F_1, \dots, F_n)}^{X_P}(H) = \ell^{\mathcal{J}}(T^m)$ .

**Preuve.**

Soit  $I$  un ensemble simplicial indexant les  $n$  vecteurs primitifs  $\eta_I$  d'un cône  $\sigma \in \Sigma(n)$ .

Par définition de  $\ell^{\mathcal{J}}$ ,

$$\ell^{\mathcal{J}}(T^m) = \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} \ell(G_{0I} H_I; F_I; X_I).$$

où  $G_{0I}$  est l'inverse de  $F_0 I$  dans  $\mathbb{C}[X_I]/\langle F_I \rangle$  avec  $F_I = (F_{1I}, \dots, F_{nI})$ .

Tout  $x \in U_\sigma$  admet  $|\det \eta_I|$  systèmes de coordonnées homogènes tels que  $x_i = 1$  pour  $i \in \bar{I}$ . La notation  $x_I$  désigne indifféremment un système de coordonnées d'un point de  $U_\sigma$  de la forme  $x_i = 1$  pour  $i \in \bar{I}$  et le système  $(x_i, i \in I) \in \mathbb{C}^I$ . On note  $x_I(t)$  l'ensemble des systèmes de coordonnées  $x_I$  associé au point  $t \in Z$ . On a

$$\ell^{\mathcal{J}}(T^m) = \sum_{t \in Z} \sum_{x_I \in x_I(t)} \frac{H(x_I)}{F_0(x_I) \text{Jac}(F_1, \dots, F_n)(x_I)}.$$

Or  $H$  et  $F_0(x_I) \text{Jac}(F_1, \dots, F_n)$  sont des polynômes homogènes de degré critique  $\rho$ . D'où

$$\forall t \in Z, \forall x_I, x'_I \in x_I(t) \quad \frac{H(x_I)}{F_0(x_I) \text{Jac}(F_1, \dots, F_n)(x_I)} = \frac{H(x'_I)}{F_0(x'_I) \text{Jac}(F_1, \dots, F_n)(x'_I)}.$$

$$\text{Donc } \ell^{\mathcal{J}}(T^m) = \sum_{t \in Z} \frac{|\det \eta_I| H(t)}{F_0(t) \text{Jac}(F_1, \dots, F_n)(t)}.$$

où  $\frac{H(t)}{F_0(t) \text{Jac}(F_1, \dots, F_n)(t)}$  désigne l'évaluation de  $\frac{H}{F_0 \text{Jac}(F_1, \dots, F_n)}$  en l'un des systèmes de coordonnées homogènes de  $t$ .

Soit  $\pi$  le morphisme surjectif de  $(\mathbb{C}^*)^I$  dans  $(\mathbb{C}^*)^n \simeq T_{X_P}$  défini par  $t_i = \prod_{j \in I} (x_j)^{\langle e_i^*, \eta_j \rangle}$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $\eta_j \in \eta_I$ . La base  $(e_i^*)_{i=1, \dots, n}$  est la base canonique de l'espace vectoriel sous-jacent à  $P$ . Le calcul de  $\text{Jac}(\pi)$  donne

$$\text{Jac}(\pi) = \det(\eta_I) \prod_{j \in I} X_j^{\langle e_i^*, \eta_j \rangle - 1}.$$

On définit  $G_k = \pi^*(f_k) = f_k \circ \pi \in \mathbb{C}[X_I]_{\widehat{X}_I}$ . Soit  $G = (G_1, \dots, G_n)$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Jac}(G)(X_I) &= \text{Jac}(f)(T) \times \text{Jac}(\pi)(X_I) \\ \prod_{j \in I} X_j \times \text{Jac}(G)(X_I) &= \text{Jac}(f)(T) \times \det \eta_I \times \prod_{i=1}^n T_i \\ \prod_{j \in I} X_j \times \text{Jac}(G)(X_I) &= \det \eta_I \text{Jac}^{\mathcal{F}}(f)(T) \end{aligned}$$

Soit  $\sum_{\rho \in \Sigma(1)} b_{k,\rho} D_\rho$  un représentant du degré de  $F_k$ . On a  $F_k(X_I) = \prod_{j \in I} X_j^{b_{kj}} G_k(X_I)$ .

Si  $t \in Z$  et  $x_I \in x_I(t)$  alors  $\frac{\partial F_k}{\partial X_j}(x_I) = \prod_{j \in I} x_j^{b_{kj}} \frac{\partial G_k}{\partial X_j}(x_I)$  car  $G_k(x_I) = \prod_{j \in I} x_j^{-k_{kj}} F_k(x_I) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Par suite,} \quad \frac{H(x_I)}{F_0(x_I) \text{Jac}(F_1, \dots, F_n)(x_I)} &= \frac{\prod_{j \in I} x_j^{\langle m, \eta_j \rangle}}{\prod_{j \in I} x_j \text{Jac}(G_1, \dots, G_n)(x_I)} \\ &= \frac{t^m}{\det \eta_I \text{Jac}^{\mathcal{F}}(f_1, \dots, f_n)(t)} \end{aligned}$$

D'où  $\ell_f^{\mathcal{F}}(t^m) = \sum_{t \in Z} \frac{t^m}{\text{Jac}^{\mathcal{F}}(f_1, \dots, f_n)(t)}$ .

Or  $\sum_{t \in Z} \frac{t^m}{\text{Jac}^{\mathcal{F}}(f_1, \dots, f_n)(t)} = \text{Res}_f^{\mathcal{F}}(t^m) = \text{Res}_{F^P}^{X_P}(H)$  (cf. [12] p. 16 et [4]). On en déduit que  $\ell_f^{\mathcal{F}}(t^m) = \text{Res}_f^{\mathcal{F}}(t^m) = \text{Res}_{F^P}^{X_P}(H)$ .  $\square$

### 4.3.3 Introduction d'un rayon dans l'intérieur d'un cône de dimension maximale

Les hypothèses de travail et les notations sont reprises des parties antérieures. Dans cette section, le polytope  $P$  somme de Minkowski des polytopes de Newton des  $f_k$  est supposé premier.

On considère  $\eta_{s+1}$  un vecteur primitif intérieur à un cône  $\sigma \in \Sigma(n)$ . On suppose que  $\eta_{s+1}$  admet une décomposition entière selon les vecteurs primitifs qui engendrent  $\sigma$ . Soit  $I$  l'ensemble simplicial associé à  $\sigma$  alors  $\eta_{s+1}$  a une unique décomposition  $\eta_{s+1} = \sum_{j \in I} \alpha_j \eta_j$  avec  $\alpha_j \in \mathbb{N}^*$  ou encore  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^s \alpha_j \eta_j$  en convenant que  $\alpha_j = 0$  lorsque  $j \notin I$ .

L'ajout du rayon engendré par  $\eta_{s+1}$  à  $\Sigma$  selon la méthode décrite au chapitre 3 donne un nouvel éventail  $\Sigma'$  qui définit une variété torique complète  $Y$  (non nécessairement projective). Comme  $\Sigma'$  est un raffinement de  $\Sigma$ , il existe  $\sigma' \in \Sigma'(n)$  tel que  $\mathbb{R}^+ \cdot \eta_{s+1}$  est un rayon de  $\sigma'$ . On note  $I'$  l'ensemble simplicial décrivant les indices de  $\sigma'$ .

On note  $(y_1, \dots, y_{s+1}) \in \mathbb{C}^{s+1}$  désigne un système de coordonnées homogènes d'un point  $y$  de  $Y$  et de la même façon  $(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{C}^s$  un système de coordonnées homogènes d'un point  $x$  de  $X_P$ , le morphisme d'éclatement de  $Y$  sur  $X_P$  est déterminé par le morphisme surjectif  $\pi$  défini par

$$\pi(y_1, \dots, y_{s+1}) = (y_{s+1}^{\alpha_1} y_1, \dots, y_{s+1}^{\alpha_s} y_s).$$

Ainsi les variables  $x_j$  s'expriment en fonction des variables  $y_j$  à l'aide des équations polynomiales  $x_j = y_{s+1}^{\alpha_j} y_j$ .

Pour tout  $k = 1, \dots, n$ , on définit  $F'_k(Y_1, \dots, Y_{s+1}) = F_k \circ \pi(Y_1, \dots, Y_{s+1})$ .

En reprenant les notations précédentes,  $F_k = \sum_{m \in M \cap P_k} a_{km} \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}}$ ,

$$\text{on obtient } F'_k(Y) = \sum_{m \in M \cap P_k} a_{km} \left( \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}} \right) Y_{s+1}^{\langle m, \eta_{s+1} \rangle + \sum_{j=1}^s \alpha_j b_{kj}}.$$

On vérifie que les zéros communs des  $(F'_k)_k$  appartiennent au tore de  $Y$ . Soit  $(y_1, \dots, y_{s+1})$  un système de coordonnées homogènes d'un zéro des  $(F'_k)_k$  dans  $Y$ . Par définition des  $F'_k$ ,  $\pi(y_1, \dots, y_{s+1})$  représente un système de coordonnées homogènes d'un zéro des  $(F_k)_k$  dans  $X_P$  donc  $\pi(y_1, \dots, y_{s+1}) \in (\mathbb{C}^*)^s$ . Or  $\pi^{-1}((\mathbb{C}^*)^s) = (\mathbb{C}^*)^{s+1}$  d'où  $(y_1, \dots, y_{s+1}) \in (\mathbb{C}^*)^{s+1}$ . De plus, le morphisme d'éclatement induit par  $\pi$  est un isomorphisme entre les tores des variétés  $Y$  et  $X_P$ . Par suite, les zéros communs aux  $(F'_k)$  sont dans le tore et en nombre fini.

On notera respectivement  $\ell_I$  et  $\ell_{I'}$  les symboles de Kronecker affines dans  $\mathbb{C}[X_I]/\langle F_{1I}, \dots, F_{nI} \rangle$  et  $\mathbb{C}[Y_{I'}]/\langle F'_{1I'}, \dots, F'_{nI'} \rangle$ . Dans les autres cas, on conviendra de noter  $\ell$  les symboles de Kronecker affines en précisant la famille de polynômes et les variables considérées.

Soit  $h = \sum_{m \in P_h \cap M} a_m T^m$  un polynôme de Laurent et  $H$  son homogénéisé dans  $S$  relativement au couple  $(m_0, q)$ .

$$H(X) = \sum_{m \in P_h \cap M} a_m \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1}.$$

On pose  $F_0 = \prod_{j=1}^s X_j^{q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj}}$ . Le polynôme  $F_{0I}$  est inversible dans  $\mathbb{C}[X_I]/\langle F_{1I}, \dots, F_{nI} \rangle$  car les polynômes  $F_{0I}, F_{1I}, \dots, F_{nI}$  n'ont pas de zéro commun. Un calcul direct montre que  $F'_0 = F_0 \circ \pi$  est inversible dans  $\mathbb{C}[Y_{I'}]/\langle F'_{1I'}, \dots, F'_{nI'} \rangle$ . En effet,

$$F'_0 = \left( \prod_{j=1}^s Y_j^{q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj}} \right) Y_{s+1}^{q \langle m_0, \eta_{s+1} \rangle + q \sum_{j=1}^s \alpha_j (\sum_k b_{kj})}$$

avec  $q \langle m_0, \eta_{s+1} \rangle + q \sum_{j=1}^s \alpha_j (\sum_k b_{kj}) > 0$ . On notera  $G'_{0I'}$  l'inverse de  $F'_{0I'}$  dans  $\mathbb{C}[Y_{I'}]/\langle F'_{1I'}, \dots, F'_{nI'} \rangle$ .

**Proposition 4.14.** *Soit  $h \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$  alors pour tout couple  $(m_0, q)$  tel que  $H$  et  $H'$  soient les homogénéisés respectifs de  $h$  dans  $X_P$  et  $Y$ , relativement à  $(m_0, q)$ , on a l'égalité :*

$$\frac{\det(\eta_{I'})}{|\det(\eta_{I'})|} \ell_{I'}(H'_{I'}, G'_{0I'}) = \frac{\det(\eta_I)}{|\det(\eta_I)|} \ell_I(H_I G_{0I}).$$

**Preuve.** Pour une indexation convenable des vecteurs primitifs  $\eta_j$  et donc des variables  $X_j$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $I = \{1, \dots, n\}$  et  $\sigma' = \text{cône}(\eta_{I'})$  où  $I' = \{\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \eta_{s+1}\}$ . On vérifie aussitôt que

$$\frac{\det(\eta_{I'})}{|\det(\eta_{I'})|} = \frac{\det(\eta_I)}{|\det(\eta_I)|}$$

CHAPITRE 4. SYMBOLE DE KRONECKER DANS LE TORE

car  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \eta_j$  avec  $\alpha_j > 0$ .

Soit  $m \in P_h$ , le monôme de  $H(X)$  associé à  $m$  s'écrit :

$$M(X) = \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1}$$

Le terme de  $H'(Y)$  induit par  $m$  est :

$$M'(Y) = \prod_{j=1}^{s+1} Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1}$$

avec  $\sum_{k=1}^n b_{k,s+1} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^s \alpha_j b_{kj}$ . L'élément  $M'(Y_1, \dots, Y_{s+1})$  est un monôme de  $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_{s+1}]$ . En effet,  $\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha_j \in \mathbb{N}^*$  pour tout  $1 \leq j \leq n$  par suite  $\langle m, \eta_{s+1} \rangle + \sum_k b_{k,s+1} + q \langle m_0, \eta_{s+1} \rangle + q \sum_k b_{k,s+1} - 1 \in \mathbb{N}$ .

Comme les formes  $\ell_I$  et  $\ell_{I'}$  sont linéaires, il suffit de vérifier que  $\ell_{I'}(M'_{I'} G'_{0I'}) = \ell_I(M_I G_{0I})$ .

On a

$$\ell_{I'}(M'_{I'} G'_{0I'}) = \ell(M'(Y) G'_0(Y)) ; (F'_k)_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'} ; Y).$$

et

$$\ell_I(M_I G_{0I}) = \ell(M(X) G_0(X)) ; (F_k)_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}} ; X).$$

où  $G'_0$  et  $G_0$  sont respectivement les inverses de  $F'_0$  et  $F_0$  modulo les idéaux  $\langle (F'_k)_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'} \rangle$  et  $\langle (F_k)_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}} \rangle$ .

Pour simplifier les écritures, on note

$$\mathbf{K} = \ell(M'(Y) G'_0 ; (F'_k)_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'} ; Y)$$

et on prouve que

$$\mathbf{K} = \ell(M(X) G_0 ; (F_k)_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}} ; X).$$

On introduit dans le symbole de Kronecker  $\mathbf{K}$ , les variables  $X_1, \dots, X_s$  à l'aide des  $s$  polynômes  $X_j - Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ , ce qui donne :

$$\mathbf{K} = \ell(M'(Y) G'_0 ; (F'_k)_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'}, (X_j - Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j)_{j=1}^s ; Y, X).$$

Pour tout  $k$  variant de 0 à  $n$ , on a les identités suivantes modulo l'idéal  $\langle X_j - Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j, j \in \llbracket 1, s \rrbracket \rangle$  :

$$\begin{aligned} F'_k(Y) &= F'_k(Y_1, \dots, Y_{s+1}) \\ &= F_k \circ \pi(Y_1, \dots, Y_{s+1}) \\ &= F_k(Y_{s+1}^{\alpha_1} Y_1, \dots, Y_{s+1}^{\alpha_s} Y_s) \\ &= F_k(X_1, \dots, X_s) \\ &= F_k(X) \end{aligned}$$

$$\text{et } G'_0(Y) = G_0(X).$$

Le calcul du monôme  $M'(Y)$  donne :

$$\begin{aligned}
 M'(Y) &= \left( \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{kj}) - 1} \right) Y_{s+1}^{\langle m, \eta_{s+1} \rangle + (\sum_k b_{k, s+1}) - 1} \times F'_0(Y) \\
 &= \left( \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{kj}) - 1} \right) Y_{s+1}^{\langle m, \eta_{s+1} \rangle + (\sum_k \sum_{j=1}^s \alpha_j b_{k, j}) - 1} \times F'_0(Y) \\
 &= \left( \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{kj}) - 1} \right) Y_{s+1}^{\langle m, \eta_{s+1} \rangle + (\sum_{j=1}^s \sum_k \alpha_j b_{k, j}) - 1} \times F'_0(Y) \\
 &= \left( \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{kj}) - 1} \right) Y_{s+1}^{\sum_{j=1}^s \alpha_j (\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{k, j}) - 1)} Y_{s+1}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_j) - 1} \times F'_0(Y) \\
 &= \prod_{j=1}^s (Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j)^{\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{kj}) - 1} \times Y_{s+1}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_j) - 1} \times F'_0(Y).
 \end{aligned}$$

D'où  $M'(Y) = Y_{s+1}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_j) - 1} M(X)$  modulo l'idéal  $\langle X_j - Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j, j \in \llbracket 1, s \rrbracket \rangle$ . Par conséquent,

$$\mathbf{K} = \ell(Y_{s+1}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_j) - 1} M(X) G_0; (F_k)_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'}, (X_j - Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j)_{j=1}^s; Y, X).$$

Pour  $j \in \bar{I}$ ,  $X_j - Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j = X_j - Y_j$  car  $\alpha_j = 0$  quand  $j \in \bar{I}$ . Par suite,  $Y_j - 1 = X_j - 1$  pour  $j \in \bar{I}$  modulo l'idéal  $\langle X_j - Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j, j \in \llbracket 1, s \rrbracket \rangle$ . De plus,  $X_n - Y_{s+1}^{\alpha_n} = (X_n - Y_{s+1}^{\alpha_n} Y_n) + Y_{s+1}^{\alpha_n} (Y_n - 1)$ .

En appliquant la loi de transformation, on obtient donc

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \ell(Y_{s+1}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_j) - 1} M(X) G_0; (F_k)_{k=1}^n, Y_n - 1, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}}, \\
 &\quad (X_j - Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j)_{j=1}^{n-1}, X_n - Y_{s+1}^{\alpha_n}, (X_j - Y_j)_{j=n+1}^s; Y, X)
 \end{aligned}$$

Les variables  $Y$  sont rangées selon l'ordre  $(Y_{I'}, Y_{\bar{I}'})$ . Il convient donc de modifier la place de  $Y_n - 1$  dans la liste des polynômes données dans  $\mathbf{K}$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= (-1)^s \ell(Y_{s+1}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_j) - 1} M(X) G_0; (F_k)_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}}, \\
 &\quad (X_j - Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j)_{j=1}^{n-1}, X_n - Y_{s+1}^{\alpha_n}, Y_n - 1, (X_j - Y_j)_{j=n+1}^s; Y, X)
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= (-1)^{2s} \ell(Y_{s+1}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_j) - 1} M(X) G_0; (F_k)_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}}, \\
 &\quad (Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j - X_j)_{j=1}^{n-1}, Y_{s+1}^{\alpha_n} - X_n, Y_n - 1, (Y_j - X_j)_{j=n+1}^s; Y, X)
 \end{aligned}$$

puis en permutant les variables  $(X_I, X_{\bar{I}})$  et les variables  $(Y_{I'}, Y_{\bar{I}'})$  il vient finalement

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= (-1)^{s(s+1)} \ell(Y_{s+1}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_j) - 1} M(X) G_0; (F_k)_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}}, \\
 &\quad (Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j - X_j)_{j=1}^{n-1}, Y_{s+1}^{\alpha_n} - X_n, Y_n - 1, (Y_j - X_j)_{j=n+1}^s; X, Y)
 \end{aligned}$$

On conclut en éliminant les variables  $Y$  et les polynômes définissant  $Y$ . Le jacobien du système  $(Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j - X_j)_{j=1}^{n-1}, Y_{s+1}^{\alpha_n} - X_n, Y_n - 1, (Y_j - X_j)_{j=n+1}^s$  est égal à  $\alpha_n Y_{s+1}^{(\sum_{j=1}^n \alpha_j)^{-1}}$  ou encore  $\alpha_n Y_{s+1}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_j)^{-1}}$ . Etant donné un zéro  $(x_1, \dots, x_s)$  de la famille  $(F_k)_{k=1}^n$ , le nombre de zéros  $(y_1, \dots, y_{s+1})$  du système  $((Y_{s+1}^{\alpha_j} Y_j - x_j)_{j=1}^{n-1}, Y_{s+1}^{\alpha_n} - x_n, Y_n - 1, (Y_j - x_j)_{j=n+1}^s)$  est exactement  $\alpha_n$ .

On en déduit que

$$\mathbf{K} = \ell(Y_{s+1}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_j)^{-1}} M(X) G_0 ; (F_k)_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}} ; X).$$

□

#### 4.3.4 Introduction d'un rayon dans un cône de dimension non maximale

On suppose ici que le vecteur primitif  $\eta_{s+1}$  est situé dans l'intérieur d'un cône de dimension  $p < n$ . D'après la construction décrite au chapitre 3, on fixe cône $(\eta_{J'}) = \text{cône}(\eta_{s+1}, F)$  un cône de dimension  $p$  de l'éventail  $\Sigma'$  obtenu par ajout de  $\eta_{s+1}$  à  $\Sigma$ .

Pour tout cône $(\eta_I)$  un cône de dimension  $n$  de  $\Sigma$  contenant cône $(\eta_J)$  et donc cône $(\eta_{J'})$ , il existe un cône maximal cône $(\eta'_I)$  de  $\Sigma'$  tel que

$$\text{cône}(\eta_{J'}) \subset \text{cône}(\eta_{I'}) \subset \text{cône}(\eta_I) \quad \text{et} \quad I' = J' \cup (I \setminus J).$$

**Proposition 4.15.** *Soit  $h \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$  alors pour tout couple  $(m_0, q)$  tel que  $H$  et  $H'$  soient les homogénéisés respectifs de  $h$  dans  $X_P$  et  $Y$ , relativement à  $(m_0, q)$ , on a*

$$\frac{\det(\eta_{I'})}{|\det(\eta_{I'})|} \ell_{I'}(H'_{I'} G'_{0I'}) = \frac{\det(\eta_I)}{|\det(\eta_I)|} \ell_I(H_I G_{0I}).$$

**Preuve.** Soit cône $(\eta_J)$  le cône minimal de  $\Sigma$  qui contient  $\eta_{s+1}$  alors  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^p \alpha_j \eta_j$  où  $\alpha_j \in \mathbb{N}^*$  pour une indexation convenable des rayons. Puisque  $I' \setminus J' = I \setminus J$ , les rapports  $\frac{\det(\eta_{I'})}{|\det(\eta_{I'})|}$  et  $\frac{\det(\eta_I)}{|\det(\eta_I)|}$  sont égaux. Les calculs conduits dans le cas où cône $(\eta_I)$  est le cône minimal de  $\Sigma$  contenant  $\eta_{s+1}$  se reproduisent à l'identique. Il suffit de changer l'indice  $n$  par l'indice  $p$  dans la preuve de la proposition 4.14. □

#### 4.3.5 Raffinement de l'éventail dual de $P$ par ajout de $r$ vecteurs primitifs à coordonnées entières

Le polytope  $P$  est supposé premier. On considère un éclatement simplicial de  $X_P$  réalisé en ajoutant aux  $s$  rayons de l'éventail initial,  $r$  rayons engendrés respectivement par  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$ . On envisage le cas où les vecteurs primitifs  $\eta_{s+i}$  admettent une décomposition entière dans leur cône minimal.

**Première méthode**

On construit une suite d'éventails  $\Sigma_0 = \Sigma_P, \dots, \Sigma_r$  telle que  $\Sigma_i$  est un raffinement simplicial de  $\Sigma_{i-1}$  obtenu par ajout d'un rayon. On note  $\eta_{s+i}$  le vecteur primitif qui engendre le rayon ajouté à  $\Sigma_{i-1}$ . On suppose que, pour tout  $1 \leq i \leq r$ ,  $\eta_{s+i}$  est à décomposition entière selon les vecteurs primitifs de son cône minimal dans  $\Sigma_{i-1}$ . Pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on pose  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^{s+i-1} \beta_{j,s+i} \eta_j$ ,  $\beta_{j,s+i} \in \mathbb{N}$  et  $\beta_{j,s+i} = 0$  si  $\eta_j$  n'engendre pas le cône minimal de  $\eta_{s+i}$ . Par suite,  $\eta_{s+i}$  admet une décomposition entière et positive selon les vecteurs primitifs de son cône minimal dans  $\Sigma_P$  soit  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i} \eta_j$ ,  $\alpha_{j,s+i} \in \mathbb{N}$  et  $\alpha_{j,s+i} = 0$  si  $\eta_j$  n'engendre pas le cône minimal de  $\eta_{s+i}$ . On note  $Y$  la variété obtenue à la suite des  $r$  éclatements. D'après la proposition 3.7, le morphisme d'éclatement entre les variétés  $Y$  et  $X_P$  est caractérisé par l'application polynomiale  $\pi$  définie par :

$$\pi(y_1, \dots, y_s, y_{s+1}, \dots, y_{s+r}) = \left( \prod_{j=s+1}^{s+r} y_j^{\alpha_{1,j}} y_1, \dots, \prod_{j=s+1}^{s+r} y_j^{\alpha_{s,j}} y_s \right).$$

De plus,  $\pi$  est la composée des  $r$  applications polynomiales  $\pi_1, \dots, \pi_r$  où  $\pi_i$  caractérise l'ajout du vecteur  $\eta_{s+i}$  à l'éventail  $\Sigma_i$ . L'application  $\pi_i$  est définie par :

$$\pi_i(y_1, \dots, y_s, y_{s+1}, \dots, y_{s+i}) = (y_{s+i}^{\beta_{1,s+i}} y_1, \dots, y_{s+i}^{\beta_{s+i-1,s+i}} y_{s+i-1}).$$

On considère  $h = \sum_{m \in P_h \cap M} a_m T^m$  un polynôme de Laurent et  $(m_0, q)$  un couple d'homogénéisation de  $h$  dans  $S$  l'anneau de coordonnées homogènes de  $X_P$  alors  $(m_0, q)$  est encore un couple d'homogénéisation de  $h$  dans  $S'$  l'anneau de coordonnées homogènes de  $Y$ . Soient  $H$  et  $H'$  les homogénéisés de  $h$  dans les anneaux respectifs  $S$  et  $S'$ . Le couple  $(m_0, q)$  détermine le polynôme  $F_0 \in S$  et  $F_0 \circ \pi \in S'$ . On note  $G_{0I}$  et  $G'_{0I'}$  les inverses de  $F_{0I}$  et  $(F_0 \circ \pi)_{I'}$  dans les anneaux quotients  $\mathbb{C}[X_I]/\langle (F_k)_I \rangle$  et  $\mathbb{C}[X_{I'}]/\langle (F_k \circ \pi)_{I'} \rangle$

**Proposition 4.16.** *Pour tout  $I$  ensemble simplicial maximal de l'éventail  $\Sigma_{X_P}$  et pour tout  $I'$  ensemble simplicial maximal de  $\Sigma_Y$ , on a l'égalité :*

$$\frac{\det(\eta_I)}{|\det(\eta_I)|} \ell_I(H_I G_{0I}; (F_k)_I; X_I) = \frac{\det(\eta_{I'})}{|\det(\eta_{I'})|} \ell_{I'}(H_{I'} G'_{0I'}; ((F_k \circ \pi)_{I'})_k; Y_{I'})$$

où  $\pi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_r$ .

**Preuve.** Il suffit de prouver l'égalité dans le cas où  $\text{cône}(\eta_{I'}) \subset \text{cône}(\eta_I)$ . La preuve se construit par induction en reproduisant à l'étape  $i$ , si  $\eta_{s+i}$  engendre un rayon du cône  $\sigma_{I'}$ , la preuve de la proposition 4.15 à l'aide du changement de variables induit par  $\pi_i$ .  $\square$

**Ajout de  $r$  vecteurs primitifs à coordonnées entières dans  $\Sigma_P$** 

On suppose que chaque vecteur introduit possède une décomposition entière (et positive) selon les vecteurs primitifs de son cône minimal dans  $\Sigma_P$ . Il n'est plus possible sous cette hypothèse de suivre la suite de raffinements à l'aide des application polynomiales  $\pi_i$  de la proposition 4.15.

On considère  $Y$  une variété torique réalisant un éclatement simplicial de  $X_P$  par ajout des rayons engendrés par les vecteurs primitifs  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$  aux  $s$  rayons de l'éventail  $\Sigma_P$ . On

suppose que tout vecteur  $\eta_{s+i}$ ,  $1 \leq i \leq r$ , a une décomposition entière (et strictement positive) dans son cône minimal de  $\Sigma_P$ ,  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i} \eta_j$ ,  $\alpha_{j,s+i} \in \mathbb{N}$  et  $\alpha_{j,s+i} = 0$  si  $\eta_j$  n'engendre pas le cône minimal de  $\eta_{s+i}$ . Différents éventails simpliciaux peuvent être obtenus en raffinant  $\Sigma_P$  par ajout de  $r$  rayons dès que  $r > 1$ . Cependant, d'après le théorème 3.1, un morphisme d'éclatement simplicial de  $X_P$  correspondant à l'ajout de  $r$  rayons engendrés par les vecteurs  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$  est caractérisé par l'application polynomiale  $\pi$  telle que  $\pi(y_1, \dots, y_{s+r}) = (\prod_{j=s+1}^{s+r} y_j^{\alpha_{1j}} y_1, \dots, \prod_{j=s+1}^{s+r} y_j^{\alpha_{sj}} y_s)$ . Les polynômes  $F_k \circ \pi$  restent donc inchangés quel que soit l'éclatement considéré.

**Proposition 4.17.** *Pour tout  $I$  ensemble simplicial maximal de l'éventail  $\Sigma_{X_P}$  et pour tout  $I'$  ensemble simplicial maximal de  $\Sigma_Y$ , on a l'égalité :*

$$\frac{\det(\eta_I)}{|\det(\eta_I)|} \ell_I(H_I G_{0I}; (F_k)_k; X_I) = \frac{\det(\eta_{I'})}{|\det(\eta_{I'})|} \ell_{I'}(H'_{I'} G'_{0I'}; ((F_k \circ \pi)_{I'})_k; Y_{I'}).$$

**Preuve.** Ici encore il suffit de faire la preuve dans la situation où  $I$  et  $I'$  sont deux ensembles simpliciaux maximaux respectivement de  $\Sigma_P$  et  $\Sigma_Y$  tels que  $\text{cône}(\eta_{I'}) \subset \text{cône}(\eta_I)$ . Le schéma de la preuve est celui de la proposition 4.15.

On pose  $I' = I_1 \sqcup I_2$  avec  $I_1 \subset I$  et  $I_2 \cap I = \emptyset$ . Les ensembles  $I_1$  ou  $I_2$  sont éventuellement vides. Pour une indexation convenable des vecteurs primitifs, on peut poser  $I = \{1, \dots, n\}$ ,  $I_1 = \{1, \dots, n-p\}$  et  $I_2 = \{s+1, \dots, s+p\}$  alors  $I' = \{1, \dots, n-p, s+1, \dots, s+p\}$ . Les vecteurs primitifs  $\eta_{s+i}$  pour  $i = 1, \dots, p$  ont une décomposition entière selon  $\eta_I$  :

$$\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^n \alpha_{j,s+i} \eta_j \quad \text{ou encore} \quad \eta_{s+i} = \sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i} \eta_j$$

en posant  $\alpha_{s+i,j} = 0$  pour  $n < j \leq s$ .

On vérifie l'égalité  $\ell_{I'}(H'_{I'} G'_{0I'}) =_e \ell_I(H_I G_{0I})$  pour le monôme  $M(X)$  de  $H$  et le monôme  $M'(Y)$  de  $H'$  associé au point  $m$  de  $P_h \cap \mathbb{Z}^n$ . Si  $(m_0, q)$  est un couple d'homogénéisation de  $h$ , les monômes  $M(X)$  et  $M'(Y)$  s'écrivent

$$M(X) = \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1}$$

et

$$M'(Y) = \prod_{j=1}^{s+r} Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1}$$

avec  $\sum_{k=1}^n b_{k,s+i} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i} b_{kj}$  pour  $i = 1, \dots, r$ .

On a

$$\ell_{I'}(M'_{I'} G'_{0I'}) = \ell(M(Y)(G')_0; (F'_k)_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'}; Y)$$

et

$$\ell_I(M_I G_{0I}) = \ell(M(X)G_0; (F_k)_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}}; X).$$

où  $G'_0$  et  $G_0$  sont respectivement les inverses de  $F'_0$  et  $F_0$  modulo les idéaux  $\langle (F'_k)_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'} \rangle$  et  $\langle (F_k)_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}} \rangle$ .

On note pour simplifier les écritures,

$$\mathbf{K} = \ell(M'(Y)G'_0 ; (F'_k)_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'} ; Y).$$

On prouve l'égalité

$$\mathbf{K} = \ell(M(X)G_0 ; (F_k)_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}} ; X).$$

On introduit dans le symbole de Kronecker affine  $\mathbf{K}$  les variables  $X_1, \dots, X_s$  à l'aide des  $s$  polynômes  $X_j - \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j$  pour  $j = 1, \dots, s$  ce qui donne

$$\mathbf{K} = \ell(M'(Y)G'_0 ; (F'_k(Y))_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'}, (X_j - \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j)_{j=1}^s ; Y, X).$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Les égalités suivantes sont vérifiées modulo  $\langle X_j - \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j, j \in \llbracket 1, s \rrbracket \rangle$  :

$$\begin{aligned} F'_k(Y) &= F'_k(Y_1, \dots, Y_{n+r}) \\ &= F_k \circ \pi(Y_1, \dots, Y_{n+r}) \\ &= F_k\left(\prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{1,s+i}} Y_1, \dots, \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{s,s+i}} Y_s\right) \\ &= F_k(X_1, \dots, X_s) \\ &= F_k(X) \end{aligned}$$

et par suite  $G'_0(Y) = G_0(X)$  modulo l'idéal  $\langle X_j - \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j, j \in \llbracket 1, s \rrbracket \rangle$ .

Le calcul  $M'(Y)$  donne

$$\begin{aligned} M'(Y) &= \left( \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{kj}) - 1} \right) \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\langle m, \eta_{s+i} \rangle + (\sum_k b_{k,s+i}) - 1} \times F'_0(Y) \\ &= \left( \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{kj}) - 1} \right) \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\langle m, \eta_{s+i} \rangle + (\sum_k \sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i} b_{k,j}) - 1} \times F'_0(Y) \\ &= \left( \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{kj}) - 1} \right) \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\langle m, \eta_{s+i} \rangle + (\sum_{j=1}^s \sum_k \alpha_{j,s+i} b_{k,j}) - 1} \times F'_0(Y). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} M'(Y) &= \left( \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{kj}) - 1} \right) \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i} (\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{k,j}) - 1)} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i}) - 1} \times F'_0(Y) \end{aligned}$$

et finalement

$$M'(Y) = \prod_{j=1}^s \left( \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j \right)^{\langle m, \eta_j \rangle + (\sum_k b_{kj}) - 1} \times \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i}) - 1} \times F'_0(Y).$$

Donc  $M'(Y) = \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i}) - 1} M(X)$  modulo  $\langle X_j - \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j \rangle_{j \in [1, s]}$ .

Par suite,

$$\mathbf{K} = \ell \left( \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i}) - 1} M(X) G_0 ; (F_k(X))_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'}, \right. \\ \left. (X_j - \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j)_{j=1}^s ; Y, X \right).$$

L'indexation choisie donne  $I' = \{1, \dots, n-p, n+1, \dots, n+p\}$  et donc pour tout  $i \in [1, p]$ ,  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^n \alpha_{j,s+i} \eta_j$  où  $\alpha_{j,s+i} \in \mathbb{N}$ . Ainsi le monôme  $\prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^s \alpha_{j,s+i}) - 1}$  est égal à  $\prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^n \alpha_{j,s+i}) - 1}$  modulo  $\langle (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'} \rangle$ .

D'où

$$\mathbf{K} = \ell \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^n \alpha_{j,s+i}) - 1} M(X) G_0 ; (F_k(X))_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'}, \right. \\ \left. (X_j - \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j)_{j=1}^s ; Y, X \right).$$

En observant que  $\bar{I}' = \{n-p+1, \dots, n\} \sqcup \bar{I} \sqcup \{s+p+1, \dots, s+r\}$ , on a  $X_j - \prod_{i=1}^r Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j = X_j - \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j$  modulo  $\langle Y_j - 1, j \in \bar{I}' \rangle$ .

On déduit par la loi de transformation que

$$\mathbf{K} = \ell \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^n \alpha_{j,s+i}) - 1} M(X) G_0 ; (F_k(X))_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}'}, \right. \\ \left. (X_j - \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j)_{j=1}^s ; Y, X \right).$$

Soit  $i \in [1, p]$ . La décomposition du vecteur primitif  $\eta_{s+i}$  dans son cône minimal implique que  $\alpha_{j,s+i} = 0$  pour tout indice  $j$  strictement supérieur à  $n$  et par suite les polynômes  $X_j - \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j$  sont exactement les polynômes  $X_j - Y_j$  lorsque  $j \in \bar{I}$ .

Donc pour tout  $j \in \bar{I}'$  et  $j > n$ ,

$$Y_j - 1 = X_j - 1 \quad \text{modulo l'idéal} \quad \langle X_j - \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j, j = 1, \dots, s \rangle.$$

En utilisant à nouveau la loi de transformation, on obtient

$$\mathbf{K} = \ell \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^n \alpha_{j,s+i})-1} M(X) G_0 ; (F_k(X))_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j=n-p+1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}}, \right. \\ \left. (Y_j - 1)_{j=s+p+1}^{s+r}, (X_j - \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j)_{j=1}^s ; Y, X \right).$$

On remarque encore que pour  $j \in \bar{I} \cap I = \{n-p+1, \dots, n\}$ ,

$$X_j - \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} = (X_j - \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j) + \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} (Y_j - 1).$$

En modifiant à nouveau la famille de polynômes, il vient par la loi de transformation

$$\mathbf{K} = \ell \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^n \alpha_{j,s+i})-1} M(X) G_0 ; (F_k(X))_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j=p+1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}}, \right. \\ \left. (Y_j - 1)_{j=s+p+1}^{s+r}, (X_j - \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j)_{j=1}^{n-p}, (X_j - \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}})_{j=n-p+1}^n, \right. \\ \left. (X_j - \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j)_{j=n+1}^s ; Y, X \right).$$

et

$$\mathbf{K} = (-1)^s \ell \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^n \alpha_{j,s+i})-1} M(X) G_0 ; (F_k)_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j=p+1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}}, \right. \\ \left. (Y_j - 1)_{j=s+p+1}^{s+r}, \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j - X_j \right)_{j=1}^p, \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} - X_j \right)_{j=p+1}^n, \right. \\ \left. \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j - X_j \right)_{j=n+1}^s ; Y, X \right).$$

Les variables  $Y$  sont ordonnées suivant  $(Y_{\bar{I}}, Y_{\bar{I}'})$ . On place donc les polynômes exprimant les  $Y_j$  dans le même ordre qui conduit à l'égalité :

$$\mathbf{K} = (-1)^{s+sr+s(s+r)} \ell \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^n \alpha_{j,s+i})-1} M(X) G_0 ; (F_k(X))_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}}, \right. \\ \left. \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j - X_j \right)_{j=1}^{n-p}, \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} - X_j \right)_{j=p+1}^n, (Y_j - 1)_{j=p+1}^n, \right. \\ \left. \left( \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{\alpha_{j,s+i}} Y_j - X_j \right)_{j=n+1}^s, (Y_j - 1)_{j=s+p+1}^{s+r} ; X, Y \right).$$

On élimine les variables  $Y_j$  dans l'expression du symbole de Kronecker. On note  $\mathcal{S}$  le système de polynômes dépendant des variables  $Y$  dans le symbole de Kronecker précédent. Le jacobien de  $\mathcal{S}$  par rapport aux variables  $Y = (Y'_I, Y_{\bar{I}})$  est égal à

$$\prod_{i=1}^p \alpha_{n-i, s+i} \prod_{i=1}^p Y_{s+i}^{(\sum_{j=1}^n \alpha_{j, s+i})-1}.$$

A tout zéro  $(x_1, \dots, x_s)$  de  $(F_k)_{k=1}^n$  correspond exactement  $\prod_{i=1}^p \alpha_{n-i, s+i}$  zéros au système  $\mathcal{S}$ . Par conséquent

$$\mathbf{K} = \ell(M(X)G_0; (F_k)_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j \in \bar{I}}; X).$$

□

### 4.3.6 Raffinement de l'éventail dual de $P$ par ajout d'un vecteur primitif à coordonnées rationnelles

Dans le paragraphe précédent, les rayons ajoutés à l'éventail sont engendrés par des vecteurs primitifs à décomposition entière dans leurs cônes minimaux. On envisage ici le cas général où les vecteurs primitifs des rayons ajoutés à l'éventail ont une décomposition rationnelle selon les vecteurs primitifs des rayons de leurs cônes minimaux. Le théorème 4.4 étend le résultat de la proposition 4.17 au cas de  $r$  rayons quelconques.

#### Ajout d'un vecteur primitif à coordonnées rationnelles

La proposition 4.18 généralise la proposition 4.16. Le polytope  $P$  est supposé premier. Son éventail dual  $\Sigma$  est raffiné en l'éventail  $\Sigma'$  par ajout d'un rayon de vecteur primitif  $\eta_{s+1}$ . Il n'est plus supposé que le vecteur  $\eta_{s+1}$  admet une décomposition à coordonnées entières selon les vecteurs primitifs de son cône minimal dans  $\Sigma$ . Sous cette hypothèse, il n'est plus possible de traduire le morphisme d'éclatement par une application monomiale sur les espaces de coordonnées homogènes. Cependant d'après le théorème 3.8, les polynômes homogènes  $F_k$  dont le degré est représenté par un diviseur de Cartier sans points de base, définissent des polynômes homogènes notés  $\pi^*(F_k)$  dans l'anneau de coordonnées homogènes de la variété  $Y$ .

Le vecteur  $\eta_{s+1}$  appartient à l'intérieur d'un cône  $\sigma \in \Sigma(p)$ ,  $p \leq n$ . Puisque  $\Sigma$  est simplicial,  $\eta_{s+1}$  admet une unique décomposition rationnelle selon les vecteurs primitifs de  $\sigma$  indexés par l'ensemble simplicial  $J$  inclus dans l'ensemble simplicial maximal  $I$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $J = \{1, \dots, p\}$  et  $I = \{1, \dots, n\}$  ( $p \leq n$ ). Il existe une unique décomposition de la forme  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j}{\beta_j} \eta_j$  avec  $(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  et  $\alpha_j \wedge \beta_j = 1$ . Soit  $d = \text{ppcm}(\beta_j, j = 1, \dots, p)$ , le vecteur  $\eta_{s+1}$  s'écrit  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^p \frac{\gamma_j}{d} \eta_j$  avec  $\gamma_j \in \mathbb{N}^*$  ou encore  $\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^s \frac{\gamma_j}{d} \eta_j$  en posant  $\gamma_j = 0$  pour  $j > p$ . On note  $J'$  un ensemble simplicial de la variété  $Y$  qui indexe l'un des cônes de  $\Sigma'$  obtenu en scindant  $\sigma$  à l'aide du rayon engendré par  $\eta_{s+1}$ . L'ensemble simplicial  $J' \subset I'$  ensemble simplicial maximal de  $\Sigma'$  tel que  $I \setminus J = I' \setminus J'$ .

**Proposition 4.18.** *Soit  $h \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$  alors pour tout couple  $(m_0, q)$  tel que  $H$  et  $H'$  soient les homogénéisés respectifs de  $h$  dans  $X_P$  et  $Y$ , relativement à  $(m_0, q)$ , on a l'égalité :*

$$\frac{\det(\eta_{I'})}{|\det(\eta_{I'})|} \ell_{I'}(H'_{I'} G'_{0I'}) = \frac{\det(\eta_I)}{|\det(\eta_I)|} \ell_I(H_I G_{0I}).$$

**Preuve.** On réalise la preuve dans le cas  $p = n$  pour des raisons de commodité dans les notations. La preuve pour  $p < n$  est similaire.

Comme  $\ell_{I'}$  et  $\ell_I$  sont linéaires, il suffit de montrer l'égalité des symboles de Kronecker pour deux monômes  $M'$  et  $M$  correspondant à un élément  $m \in P_h \cap \mathbb{Z}^n$ , où  $P_h$  désigne le polytope de Newton de  $h$ .

**Étape 1** On pose  $\mathbf{K} = \ell_{I'}(M'_{I'} G'_{0I'})$ . On a  $\mathbf{K} = \ell(M' G'_0(Y); (\pi^*(F_k)(Y))_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j=n+1}^{s+1})$ .

On rappelle que  $F_k = \sum_{m \in P_k} a_{km} \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}}$  pour  $k = 1, \dots, n$ . D'après le théorème 3.8,  $\pi^*(F_k) = \sum_{m \in P_k} a_{km} \prod_{j=1}^{s+1} Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}}$  avec  $b_{k,s+1} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^s \gamma_j b_{k,j} \in \mathbb{Z}$ .

Les polynômes  $F_0$  et  $\pi^*(F_0)$  formés à partir de  $(m_0, q)$ , un couple d'homogénéisation de  $h$ , sont respectivement  $F_0 = \prod_{j=1}^s Y_j^{q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj}}$  et  $\pi^*(F_0) = \prod_{j=1}^{s+1} Y_j^{q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj}}$ . L'élément  $G'_0$  est l'inverse de  $\pi^*(F_0)$  modulo l'idéal  $\langle (\pi^*(F_k)(Y))_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j=n}^s \rangle$ .

On considère la variable  $Y'_{s+1}$  introduite dans le symbole de Kronecker à l'aide du polynôme  $(Y'_{s+1})^d - Y_{s+1}$ .

D'après le théorème 1.6,  $\mathbf{K} = \ell((Y'_{s+1})^{d-1} M'(Y) G'_0(Y); (\pi^*(F_k)(Y))_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j=n+1}^{s+1}, (Y'_{s+1})^d - Y_{s+1}; Y, Y'_{s+1})$ . On pose  $Y' = (Y_1, \dots, Y_s, Y'_{s+1})$ . On définit les  $s + 1$  polynômes  $F'_k(Y')$  par

$$F'_k(Y') = \sum_{m \in P_k} a_{km} \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}} \times (Y'_{s+1})^{\langle m, d\eta_{s+1} \rangle + db_{k,s+1}} \quad \text{pour } k = 1, \dots, n$$

$$F'_0(Y') = \prod_{j=1}^s Y_j^{q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_{k=1}^n b_{kj}} \times (Y'_{s+1})^{q \langle m_0, d\eta_{s+1} \rangle + q \sum_{k=1}^n db_{k,s+1}}$$

On a  $F'_k(Y') = \pi^*(F_k)(Y)$  modulo  $(Y'_{s+1})^d - Y_{s+1}$  pour tout  $k = 0, \dots, n$ .

On note  $G'_0(Y')$  l'inverse de  $F'_0(Y')$  modulo  $\langle (F'_k(Y'))_{k=0}^n, (Y_j - 1)_{j=n}^s \rangle$ . On obtient donc

$$\mathbf{K} = \ell\left(\prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj-1}} \times (Y'_{s+1})^{\langle m, d\eta_{s+1} \rangle + \sum_k db_{k,s+1} + q \langle m_0, d\eta_{s+1} \rangle + q \sum_k db_{k,s+1-1}} G'_0(Y'); F'_k(Y'), (Y_j - 1)_{j=n}^s, (Y'_{s+1})^d - 1; Y, Y'_{s+1}\right)$$

Puis

$$\mathbf{K} = \ell\left(\prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj-1}} \times (Y'_{s+1})^{\langle m, d\eta_{s+1} \rangle + \sum_k db_{k,s+1} + q \langle m_0, d\eta_{s+1} \rangle + q \sum_k db_{k,s+1-1}} G'_0(Y'); F'_k(Y'), (Y_j - 1)_{j=n}^s; Y'\right)$$

après élimination de la variable  $Y_{s+1}$ .

**Étape 2** On considère l'application polynomiale  $\pi'$  définie de  $\mathbb{C}^{s+1}$  sur  $\mathbb{C}^s$  telle que

$$\pi'(y_1, \dots, y_s, y'_{s+1}) = ((y'_{s+1})^{\gamma_1} y_1, \dots, (y'_{s+1})^{\gamma_s} y_s).$$

On remarque que  $F'_k(Y') = F_k \circ \pi'(Y')$  et que  $\prod_{j=1}^s ((Y'_{s+1})^{\gamma_j} Y_j)^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_k b_{kj} + q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_k b_{kj} - 1}$  est l'homogénéisé de  $t^m$  en le degré critique des polynômes  $F_k \circ \pi'(Y')$ .

La proposition 4.14 s'applique en considérant le vecteur  $d\eta_{s+1} = \sum_{j=1}^n \gamma_j \eta_j$  et les variables  $X_j$  définies par les polynômes  $X_j - (Y'_{s+1})^{\gamma_j} Y_j$ . D'où  $\mathbf{K} = \ell(M(X)G_0(X); (F_k(X))_{k=1}^n, (X_j - 1)_{j=n+1}^s; X)$  et finalement  $\mathbf{K} = \ell_I(M_I G_{0I})$ .  $\square$

### Ajout de $r$ vecteurs primitifs à coordonnées rationnelles

Le polytope entier  $P$  somme de Minkowski des polytopes de Newton des  $f_k$  est supposé premier. On considère une variété torique  $Y$  d'éventail  $\Sigma'$  réalisant un éclatement simplicial de  $X_P$  par ajout des rayons engendrés par les vecteurs primitifs  $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+r}$  aux  $s$  rayons de l'éventail  $\Sigma$ . Pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on considère la décomposition de  $\eta_{s+i}$  dans son cône minimal de dimension  $p_j$ ,  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^{p_j} \frac{\alpha_{j,s+i}}{\beta_{j,s+i}} \eta_j$ ,  $(\alpha_{j,s+i}, \beta_{j,s+i}) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  et  $\alpha_{j,s+i} \wedge \beta_{j,s+i} = 1$  pour une indexation convenable du cône minimal de  $\eta_{s+i}$ . Soit  $d_{s+i} = \text{ppcm}(\beta_{1,s+i}, \dots, \beta_{p_j,s+i})$ , le vecteur  $\eta_{s+i}$  s'écrit  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^{p_j} \frac{\gamma_{j,s+i}}{d_{s+i}}$  ou encore  $\eta_{s+i} = \sum_{j=1}^s \frac{\gamma_{j,s+i}}{d_{s+i}}$  avec  $\gamma_{j,s+i} = 0$  si  $\eta_j$  n'engendre pas le cône minimal de  $\eta_{s+i}$ .

**Théorème 4.4.** *Soit  $h \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$  alors pour tout couple  $(m_0, q)$  tel que  $H$  et  $H'$  soient les homogénéisés respectifs de  $h$  dans  $X_P$  et  $Y$ , relativement à  $(m_0, q)$ , on a pour tout ensemble simplicial maximal  $I$  (resp.  $I'$ ) de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma'$ ) :*

$$\frac{\det(\eta_{I'})}{|\det(\eta_{I'})|} \ell_{I'}(H'_{I'} G'_{0I'}) = \frac{\det(\eta_I)}{|\det(\eta_I)|} \ell_I(H_I G_{0I}).$$

**Preuve.** Nous nous limitons à présenter le schéma d'une démonstration en reconduisant les étapes données dans la preuve de la proposition 4.18.

**Étape 1** On considère le symbole de Kronecker  $\frac{\det(\eta_{I'})}{|\det(\eta_{I'})|} \ell_{I'}(H'_{I'} G'_{0I'})$ . On opère le changement de variables  $(Y'_{s+i})^{d_{s+i}} = Y_{s+i}$  en introduisant les  $r$  polynômes  $(Y'_{s+i})^{d_{s+i}} - Y_{s+i} = 0$  dans le symbole de Kronecker. On substitue aux polynômes  $\pi^*(F_k)$ , les polynômes

$$F'_k(Y') = \sum_{m \in P_k} a_{km} \prod_{j=1}^s Y_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}} \prod_{i=1}^r (Y'_{s+i})^{\langle m, d_{s+i} \eta_{s+i} \rangle + d_{s+i} b_{k,s+i}} \quad \text{pour } k = 1, \dots, n$$

$$F'_0(Y') = \prod_{j=1}^s Y_j^{q \langle m_0, \eta_j \rangle + q \sum_{k=1}^n b_{kj}} \prod_{i=1}^r (Y'_{s+i})^{q \langle m_0, d_{s+i} \eta_{s+i} \rangle + q \sum_{k=1}^n d b_{k,s+i}}.$$

On constate que le monôme obtenu en les variables  $(Y_1, \dots, Y_s, Y'_{s+1}, \dots, Y'_{s+r})$  est bien de degré critique relativement aux polynômes  $F'_0, \dots, F'_n$ .

**Étape 2** On considère le morphisme  $\pi'$  défini par

$$\pi'(y_1, \dots, y_s, y'_{s+1}, \dots, y'_{s+r}) = \left( \prod_{i=1}^r (y'_{s+i})^{\gamma_i} y_1, \dots, \prod_{i=1}^r (y'_{s+i})^{\gamma_i} y_s \right).$$

On a  $F'_k = F_k \circ \pi'$ . La preuve s'achève en appliquant la proposition 4.17.  $\square$

### 4.3.7 Caractérisation du symbole de Kronecker à l'aide d'un éclatement

Les notations sont reprises des parties antérieures. Le polytope  $P$  est toujours supposé premier. On considère  $\Sigma$  un raffinement simplicial de  $\Sigma_P$  éventail dual de  $P$  et on note  $Y$  la variété torique associée à  $\Sigma$ . L'éventail  $\Sigma$  est obtenu par ajout d'un ensemble de rayons à  $\Sigma_P$ .

**Théorème 4.5.** *Soit  $h$  un polynôme de Laurent et  $(m_0, q)$  un couple d'homogénéisation de  $h$ . On note  $H$  l'homogénéisé de  $h$  relativement à  $(m_0, q)$  dans l'anneau de coordonnées homogènes de  $Y$ . Le morphisme  $\pi^*$  désigne le morphisme dual du morphisme d'éclatement de  $Y$  sur  $X_P$  défini par le raffinement de  $\Sigma_P$  en  $\Sigma$ .*

Pour tout  $I$  ensemble simplicial maximal de  $Y$ ,

$$\ell^{\mathcal{S}}(h) = \frac{\det(\eta_I)}{|\det(\eta_I)|} \ell_I(H_I \cdot \pi^*(F_0)_I^{-1}; (\pi^*(F_k)_I)_k)$$

où  $\pi^*(F_0)_I^{-1}$  est l'inverse de  $(\pi^*(F_0))_I$  modulo l'idéal  $\langle \pi^*(F_1)_I, \dots, \pi^*(F_n)_I \rangle$ .

**Preuve.** C'est une conséquence du théorème 4.4.  $\square$

## 4.4 Symbole de Kronecker, cas où $P$ n'est pas premier

Nous avons défini un symbole de Kronecker dans le tore  $(\mathbb{C}^*)^n$  pour une famille de  $n$  polynômes de Laurent telle que le polytope  $P$ , somme de Minkowski des polytopes de Newton des  $f_k$ , est premier.

Dans cette section, nous étendons la définition du symbole de Kronecker dans le tore au cas où  $P$  n'est pas premier en considérant des raffinements simpliciaux de l'éventail dual de  $P$ . En suivant les polynômes homogènes par le morphisme d'éclatement, on obtient un symbole de Kronecker défini dans un ouvert affine d'une variété simpliciale pour lequel il est possible de réaliser le calcul.

Nous montrons que les symboles de Kronecker obtenus dans les éclatements simpliciaux de  $X_P$  sont tous égaux. On établit en premier lieu que deux raffinements simpliciaux de  $\Sigma_P$  obtenus avec le même ensemble de rayons ajoutés à  $\Sigma_P$  donnent des symboles de Kronecker égaux puis que cette égalité vaut pour tout raffinement simplicial de  $\Sigma_P$ .

### 4.4.1 Construction du symbole de Kronecker dans le cas non simplicial

Nous commençons par rappeler brièvement la situation initiale.

CHAPITRE 4. SYMBOLE DE KRONECKER DANS LE TORE

On considère  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de  $n$  polynômes de Laurent dans  $\mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}]$  réguliers pour leurs polytopes de Newton et possédant un nombre fini de zéros.

Pour tout  $k$ ,  $f_k = \sum_{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n} a_{mk} T^m$  où  $P_k$  est le polytope de Newton de  $f_k$ . La somme de Minkowski  $P = \sum_{k=1}^n P_k$  définit la variété torique projective  $X_P$  de dimension  $n$ . Chaque polytope  $P_k$  fournit sur la variété  $X_P$ , un diviseur sans points de base  $\Delta_k = \sum_{j=1}^s b_{kj} D_j$  avec  $b_{kj} = -\min_{m \in P_k} \langle m, \eta_j \rangle$ . L'homogénéisation des  $f_k$  dans l'anneau gradué  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_s]$  par rapport aux diviseurs  $\Delta_k$  donne une famille de  $n$  polynômes homogènes

$$F_k = \sum_{m \in P_k \cap \mathbb{Z}^n} a_{km} \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}}.$$

D'après les conditions vérifiées par les polynômes  $f_k$ , les polynômes  $F_k$  ont un nombre fini de zéros communs dans  $X_P$  tous contenus dans le tore de la variété.

Soit  $h = \sum_{m \in P_h} a_m T^m \in \mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}]$ . Il existe  $(m_0, q) \in \text{Int } P \times \mathbb{N}$  tel que

$$\forall m \in P_h, \forall j \in \llbracket 1, s \rrbracket, \langle m, \eta_j \rangle + b_j + q(\langle m_0, \eta_j \rangle + \sum_{k=1}^n b_{kj}) - 1 \geq 0.$$

On adjoint aux polynômes  $F_1, \dots, F_n$ , le polynôme  $F_0 = \prod_{j=1}^s X_j^{q(\langle m_0, \eta_j \rangle + b_j)}$ . La famille  $F_0, \dots, F_n$  est sans zéros dans  $X_P$  et le polynôme homogène

$$H(X) = \sum_{m \in P_h \cap \mathbb{Z}^n} a_m \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + \sum_{k=1}^n b_{kj} + q(\langle m_0, \eta_j \rangle + \sum_{k=1}^s b_{kj}) - 1}$$

est de degré critique pour la famille  $(F_0, \dots, F_n)$ .

On suppose que le polytope  $P$  n'est pas premier ce qui signifie que l'éventail dual  $\Sigma_P$  n'est pas simplicial.

On considère  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux raffinements simpliciaux de  $\Sigma_P$  qui définissent respectivement les variétés toriques simpliciales  $X_1$  et  $X_2$ . Les éventails  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont formés en ajoutant  $r$  rayons,  $r \geq 0$  aux rayons de  $\Sigma_P$ . Les vecteurs primitifs ajoutés ne possèdent pas nécessairement de décompositions entières dans leur cône minimal.

On note  $\eta_1, \dots, \eta_s$  les vecteurs primitifs qui engendrent les rayons de  $\Sigma_P$  et  $\eta_1, \dots, \eta_{s+r}$  les vecteurs primitifs qui engendrent les rayons communs de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Soient  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les morphismes toriques définis respectivement par les raffinements  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  et  $\pi_1^*$  et  $\pi_2^*$  les morphismes duaux.

On obtient la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} X_1, \Sigma_1 & \xrightarrow{\pi_1} & X_P \\ \Sigma_1(1) = \Sigma_2(1) & & \uparrow \pi_2 \\ (X_2, \Sigma_2) & \xrightarrow{\pi_2} & X_P \end{array}$$

Puisque les rayons de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont les mêmes, les groupes de Chow de  $X_1$  et  $X_2$  sont égaux. Par conséquent,  $\pi_1^*(F_k) = \pi_2^*(F_k) = F'_k$  pour  $0 \leq k \leq n$ .

Le théorème 4.6 montre que les symboles de Kronecker calculés dans les variétés toriques  $X_1$  et  $X_2$  telles que  $\Sigma_1(1) = \Sigma_2(1)$  sont égaux.

**Théorème 4.6.** Soient  $I_1$  et  $I_2$  deux ensembles simpliciaux maximaux des variétés  $X_{\Sigma_1}$  et  $X_{\Sigma_2}$ . Pour tout monôme  $M(m)$  de  $H(m)$ , on a

$$\frac{\det(\eta_{I_1})}{|\det(\eta_{I_1})|} \ell(MG'_{0,I_1}; (F'_{k,I_1})_k; (Y_j)_{j \in I_1}) = \frac{\det(\eta_{I_2})}{|\det(\eta_{I_2})|} \ell(MG'_{0,I_2}; (F'_{k,I_2})_k; (Z_j)_{j \in I_2}).$$

où  $G'_{0,I_i}$  est l'inverse de  $F_{0,I_i}$  modulo l'idéal  $\langle F_{k,I_i}, 1 \leq k \leq n \rangle$  pour  $i = 1, 2$ .

**Preuve.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une  $\mathbb{Z}$ -base du réseau dual de  $N$ .

$$\text{On a } \ell(MG'_{0,I_1}; (F'_{k,I_1})_k; (Y_j)_{j \in I_1}) = \ell(MG'_{0,1}; (F'_k)_k, Y_j - 1, j \in \bar{I}_1; Y)$$

$$\text{et } \ell(MG'_{0,I_2}; (F'_{k,I_2})_k; (Z_j)_{j \in I_2}) = \ell(MG'_{0,2}; (F'_k)_k, Z_j - 1, j \in \bar{I}_2; Z)$$

où  $G'_{0,1}(Y)$  désigne l'inverse de  $F'_0(Y)$  modulo l'idéal  $\langle (F'_k(Y))_k, Y_j - 1, j \in \bar{I}_1 \rangle$  et  $G'_{0,2}(Z)$  l'inverse de  $F'_0(Z)$  modulo l'idéal  $\langle (F'_k(Z))_k, Z_j - 1, j \in \bar{I}_2 \rangle$ .

Pour simplifier les écritures, on pose dans la suite

$$\mathcal{A} = \ell(M(Y)G'_{0,1}(Y); (F'_k)_k, Y_j - 1, j \in \bar{I}_1; Y)$$

et

$$\mathcal{B} = \ell(M(Z)G'_{0,2}(Z); (F'_k)_k, Z_j - 1, j \in \bar{I}_2; Z).$$

On montre que  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ .

On note  $t$  le nombre de rayons de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Comme les rayons des éventails  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont identiques, les tores des variétés  $X_{\Sigma_1}$  et  $X_{\Sigma_2}$  sont tous deux isomorphes à  $(\mathbb{C}^*)^t / G$  où  $G$  est le groupe défini par les équations  $\prod_{j=1}^t t_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} = 1$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

Par ailleurs, l'hypothèse faite sur les zéros des  $(F'_k)_k$  implique que les zéros communs aux polynômes  $(F'_k)_k$  dans  $X_{\Sigma_1}$  (respectivement  $X_{\Sigma_2}$ ) sont dans le tore  $T_N$  des variétés  $X_{\Sigma_1}$  et  $X_{\Sigma_2}$ .

On considère  $(y_1, \dots, y_t)$  un zéro de la famille  $((F'_k)_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}_1})$  et  $(z_1, \dots, z_t)$  un zéro de  $((F'_k)_{k=1}^n, (Z_j - 1)_{j \in \bar{I}_2})$ . Le  $t$ -uplet  $(y_1, \dots, y_t)$  (respectivement  $(z_1, \dots, z_t)$ ) représente un système de coordonnées homogènes d'un zéro commun aux  $F'_k$  dans  $X_{\Sigma_1}$  (respectivement dans  $X_{\Sigma_2}$ ). Par suite  $(y_1, \dots, y_t)$  et  $(z_1, \dots, z_t)$  appartiennent à  $(\mathbb{C}^*)^t$ . Si  $(y_1, \dots, y_t)$  et  $(z_1, \dots, z_t)$  représentent un même zéro des  $F'_k$  dans le tore alors il existe  $(g_1, \dots, g_t) \in G$  tel que  $(z_1, \dots, z_t) = (g_1, \dots, g_t) \cdot (y_1, \dots, y_t)$ . La multiplication «  $\cdot$  » est la multiplication terme à terme des  $t$ -uplets.

On introduit dans les symboles de Kronecker  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ ,  $3t$  nouvelles variables définies par  $3t$  polynômes qui traduisent les relations entre les zéros des systèmes  $(F'_k)_k, Y_j - 1, j \in \bar{I}_1$  et  $(F'_k)_k, Z_j - 1, j \in \bar{I}_2$ . Les équations introduites permettent d'identifier les zéros des polynômes  $F'_k$  dans les ouverts affines de  $X_{\Sigma_1}$  et  $X_{\Sigma_2}$  correspondants respectivement à  $I_1$  et  $I_2$ .

On commence par définir les  $3t$  polynômes introduits dans  $\mathcal{A}$ .

Soit  $\mathcal{S}_1$  le système :

$$\begin{aligned} Y_j \gamma_j - 1 & && \text{pour } j \in \bar{I}_2 \\ \Gamma_i(\gamma) = \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle \geq 0} \gamma_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} - \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle < 0} \gamma_j^{-\langle e_i, \eta_j \rangle} & && \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ Z_j - \gamma_j Y_j & && \text{pour } 1 \leq j \leq t \\ \gamma_j \gamma'_j - 1 & && \text{pour } 1 \leq j \leq t \end{aligned}$$

Les variables introduites par le système  $\mathcal{S}_1$  sont rangées dans l'ordre suivant :

$$\gamma = (\gamma_{j,j \in \bar{I}_2}, \gamma_{j,j \in I_2}), Z = (Z_1, \dots, Z_t), \gamma' = (\gamma'_{j,j \in \bar{I}_1}, \gamma'_{j,j \in I_1}).$$

En observant que le jacobien du système  $\mathcal{S}_1$  est un produit de déterminants de sous-matrices, on obtient

$$\text{Jac}(\mathcal{S}_1) = \prod_{j \in \bar{I}_2} Y_j \times \text{Jac}_{I_2}(\Gamma) \times \prod_{j=1}^t \gamma_j$$

où  $\text{Jac}_{I_2}(\Gamma)$  est le déterminant de la matrice  $\left( \frac{\partial \Gamma_i}{\partial \gamma_j} \right)_{i,j}$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $j \in I_2$ .

Par suite  $\text{Jac}(\mathcal{S}_1) = \text{Jac}_{I_2}(\Gamma) \times \prod_{j \in I_2} \gamma_j$  modulo  $\langle \mathcal{S}_1 \rangle$ .

Le calcul de  $\text{Jac}_{I_2}(\Gamma)$  donne  $\text{Jac}_{I_2}(\Gamma) = \det(\eta_{I_2}) \times \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle \geq 0} \gamma_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \right) \times \prod_{j \in I_2} \gamma_j'$  modulo  $\langle \mathcal{S}_1 \rangle$ .

D'où  $\text{Jac}(\mathcal{S}_1) = \det(\eta_{I_2}) \times \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle \geq 0} \gamma_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \right)$  modulo  $\langle \mathcal{S}_1 \rangle$ .

Etant donné  $(y_1, \dots, y_t)$  un zéro de  $((F'_k)_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}_1})$ , le système  $\mathcal{S}_1$  admet  $|\det(\eta_{I_2})|$  zéros de la forme  $((y_1, \dots, y_t), \gamma, \gamma', z)$  puisque le point du tore  $T_N$  de coordonnées homogènes  $(y_1, \dots, y_t)$  admet  $|\det(\eta_{I_2})|$  systèmes de coordonnées homogènes dans l'ouvert affine de  $X_{\Sigma_2}$  correspondant à l'ensemble simplicial  $I_2$ . En appliquant le théorème 1.6, on obtient

$$\mathcal{A} = \frac{\det(\eta_{I_2})}{|\det(\eta_{I_2})|} \ell \left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle \geq 0} \gamma_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \right) M(Y) G_{0,1}(Y); \right. \\ \left. (F'_k(Y))_{k=1}^n, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}_1}, \mathcal{S}_1; Y, \gamma, Z, \gamma' \right).$$

De la même façon, on introduit  $3t$  nouveaux polynômes et  $3t$  nouvelles variables dans  $\mathcal{B}$ .

On considère  $\mathcal{S}_2$  le système de polynômes :

$$\begin{aligned} Z_j \gamma'_j - 1 & \text{ pour } j \in \bar{I}_1 \\ \Gamma'_i(\gamma') &= \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle \geq 0} (\gamma'_j)^{\langle e_i, \eta_j \rangle} - \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle < 0} (\gamma'_j)^{\langle e_i, \eta_j \rangle} & \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ Y_j - \gamma'_j Z_j & & \text{ pour } 1 \leq j \leq t \\ \gamma_j \gamma'_j - 1 & & \text{ pour } 1 \leq j \leq t. \end{aligned}$$

Par un calcul similaire à celui conduit pour  $\mathcal{A}$ , on obtient

$$\mathcal{B} = \frac{\det(\eta_{I_1})}{|\det(\eta_{I_1})|} \ell \left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle \geq 0} (\gamma'_j)^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \right) M(Z) G_{0,2}(Z); \right. \\ \left. (F'_k(Z))_{k=1}^n, (Z_j - 1)_{j \in \bar{I}_2}, \mathcal{S}_2; Z, \gamma', Y, \gamma \right).$$

On remplace les polynômes  $Z_j - 1$  pour  $j \in \bar{I}_2$  et les polynômes de  $\mathcal{S}_2$  qui ne figurent pas dans  $\mathcal{S}_1$  par les polynômes  $Y_j - 1$  pour  $j \in \bar{I}_1$  et les polynômes de  $\mathcal{S}_1$  qui ne figurent pas dans  $\mathcal{S}_2$  via la loi de transformation.

On exprime les seconds en fonction des polynômes du système  $((Z_j - 1)_{j \in \bar{I}_2}, \mathcal{S}_2)$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \gamma_j Y_j - 1 &= \gamma_j (Y_j - \gamma'_j Z_j) + Z_j (\gamma_j \gamma'_j - 1) + Z_j - 1 && \text{pour } j \in \bar{I}_2 \\ Y_j - 1 &= (Y_j - \gamma'_j Z_j) + (\gamma'_j Z_j - 1) && \text{pour } j \in \bar{I}_1 \\ \Gamma_i(\gamma) &= - \left( \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle \geq 0} \gamma_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle < 0} \gamma_j^{-\langle e_i, \eta_j \rangle} \right) \Gamma'_i(\gamma') && \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ Z_j - \gamma_j Y_j &= -\gamma_j (Y_j - \gamma'_j Z_j) - Z_j (\gamma'_j \gamma_j - 1) && \text{pour } 1 \leq j \leq t \end{aligned}$$

On en déduit le déterminant de la transformation où les polynômes sont ordonnés comme ci-dessus :

$$(-1)^{t+n} \prod_{j=1}^t \gamma_j \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle \geq 0} \gamma_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle < 0} \gamma_j^{-\langle e_i, \eta_j \rangle} \right)$$

D'où

$$\mathcal{B} = (-1)^{t+n+t-n} \frac{\det(\eta_{I_1})}{|\det(\eta_{I_1})|} \ell(M(Z)G_{0,2}(Z) \prod_{j=1}^t \gamma_j \prod_{i=1}^n \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle \geq 0} (\gamma_j)^{\langle e_i, \eta_j \rangle}; (F'_k(Z))_k, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}_1}, \mathcal{S}_1; Z, \gamma', Y, \gamma).$$

**Lemme 4.2.** Soit  $F(Z)$  un polynôme homogène et  $\Delta = \sum_{j=1}^t b_j D_j$  un représentant  $T_N$ -invariant du degré de  $F$ .

Pour tout  $m \in \mathbb{Z}^n$ ,  $F(Z) = \prod_{j=1}^t (\gamma_j^{b_j}) F(Y)$  modulo l'idéal  $\langle \mathcal{S}_1 \rangle$ .

**Preuve.** Soit  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ . On a

$$\prod_{j=1}^t \gamma_j^{\langle m, \eta_j \rangle} = \prod_{j=1}^t \prod_{i=1}^n (\gamma_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle})^{m_i} = \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^t \gamma_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \right)^{m_i}.$$

Donc  $\prod_{j=1}^t \gamma_j^{\langle m, \eta_j \rangle} = 1$  et  $\prod_{j=1}^t \gamma_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_j} = \prod_{j=1}^t \gamma_j^{b_j}$  modulo  $\langle \mathcal{S}_1 \rangle$ .

On pose  $F(Z) = \sum_{m \in P_\Delta} a_m \prod_{j=1}^t Z_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_j}$ . Alors modulo  $\langle \mathcal{S}_1 \rangle$

$$F(Z) = F(\gamma_1 Y_1, \dots, \gamma_t Y_t) = \sum_{m \in P_\Delta} a_m \prod_{j=1}^t (\gamma_j Y_j)^{\langle m, \eta_j \rangle + b_j} = \prod_{j=1}^t \gamma_j^{b_j} F(Y).$$

□

On pose dans la suite  $\gamma^{\deg F} = \prod_{j=1}^t \gamma_j^{b_j}$ .

Pour tout  $0 \leq k \leq n$ ,  $F'_k(Z) = \gamma^{\deg F'_k} F'_k(Y)$  modulo  $\langle \mathcal{S}_1 \rangle$ .

**Lemme 4.3.**

$$M(Z)G_{0,2}(Z) = \gamma^{\sum_{k=1}^n (\deg F'_k - 1)} M(Y)G_{0,1}(Y) \quad \text{modulo } \langle \mathcal{S}_1 \rangle.$$

**Preuve.** On observe que  $Z_j - 1 = (Z_j - \gamma_j Y_j) + \gamma_j (Y_j - 1)$  pour  $j \in \bar{I}_2$ . D'où  $Z_j - 1 \in \langle \mathcal{S}_1 \rangle$  pour tout  $j \in \bar{I}_2$ .

On convient que  $F(\gamma Y)$  désigne le polynôme  $F(\gamma_1 Y_1, \dots, \gamma_t Y_t)$ .

Il suit que modulo l'idéal  $\langle (F'_k(Z))_k, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}_1}, \mathcal{S}_1 \rangle$

$$\begin{aligned} M(Z)G_{0,2}(Z) &= M(Z)G_{0,2}(Z)F_0(\gamma Y)G_{0,1}(\gamma Y) \\ &= M(\gamma Y)G_{0,2}(Z)F_0(Z)G_{0,1}(\gamma Y) \\ &= \gamma^{\deg M} M(Y)G_{0,1}(\gamma Y) \end{aligned}$$

De plus,  $F_0(\gamma Y)G_{0,1}(\gamma Y) = 1$  modulo  $\langle (F'_k(Z))_k, (Y_j - 1)_{j \in \bar{I}_1}, \mathcal{S}_1 \rangle$

donc  $G_{0,1}(\gamma Y) = \gamma^{-\deg F_0} G_{0,1}(Y)$ . On en déduit

$$M(Z)G_{0,2}(Z) = \gamma^{\sum_{k=1}^n (\deg F'_k - 1)} M(Y)G_{0,1}(Y) \quad \text{modulo } \langle \mathcal{S}_1 \rangle.$$

□

La substitution des polynômes  $F_k(Z)$  par les polynômes  $F'_k(Y) = (\gamma')^{\deg F'_k} F'_k(Z)$  donne par la loi de transformation

$$\mathcal{B} = \frac{\det(\eta_{I_1})}{|\det(\eta_{I_1})|} \ell \left( \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j, \langle e_i, \eta_j \rangle \geq 0} (\gamma'_j)^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \right) M(Y)G_{0,1}(Y); \right. \\ \left. (F'_k(Y))_{k=1}^n, (Z_j - 1)_{j \in \bar{I}_2}, \mathcal{S}_2; Z, \gamma', Y, \gamma \right).$$

Finalement  $\frac{|\det(\eta_{I_1})|}{\det(\eta_{I_1})} \mathcal{B} = \frac{|\det(\eta_{I_2})|}{\det(\eta_{I_2})} \mathcal{A}$ , ce qui achève la preuve du théorème. □

Le théorème suivant montre que le calcul du symbole de Kronecker ne dépend pas du raffinement simplicial considéré. On considère  $X_1$  et  $X_2$  deux variétés toriques simpliciales construites en raffinant  $\Sigma$ . Les vecteurs  $\eta_1, \dots, \eta_s$  désignent les vecteurs primitifs des rayons de  $\Sigma_P$ . On note  $\mathcal{E}_1$  l'ensemble des vecteurs primitifs des rayons ajoutés à  $\Sigma(1)$  pour former l'éventail simplicial  $\Sigma_1$  et  $\mathcal{E}_2$  l'ensemble des vecteurs primitifs des rayons ajoutés à  $\Sigma(1)$  pour former l'éventail simplicial  $\Sigma_2$ .

Le raffinement de  $\Sigma_P$  en  $\Sigma_1$  (resp. de  $\Sigma_P$  en  $\Sigma_2$ ) définit le morphisme  $\pi_1$  (resp.  $\pi_2$ ).

Les polynômes  $(F_1, \dots, F_n)$  sont les homogénéisés des  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$  dans la variété  $X_P$ . On rappelle que les zéros de  $(F_1, \dots, F_n)$  dans  $X_P$  sont en nombre fini et contenus dans le tore de  $X_P$ .

**Théorème 4.7.** *Soit  $h \in \mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}]$ . On note  $H_1$  (resp.  $H_2$ ) l'homogénéisé de  $h$  dans  $X_1$  (resp.  $X_2$ ).*

*Pour tout  $I_1$  (resp.  $I_2$ ) ensemble simplicial maximal de l'éventail  $\Sigma_1$  (resp.  $\Sigma_2$ ), on a l'égalité :*

$$\frac{\det(\eta_{I_1})}{|\det(\eta_{I_1})|} \ell((M_1 \pi_1^*(F_0)^{-1})_{I_1}; \pi_1^*(F_k)_{I_1}, k = 1, \dots, n) = \\ \frac{\det(\eta_{I_2})}{|\det(\eta_{I_2})|} \ell((M_2 \pi_2^*(F_0)^{-1})_{I_2}; \pi_2^*(F_k)_{I_2}, k = 1, \dots, n)$$

où  $\pi_i^*(F_0)^{-1}$  est l'inverse  $\pi_i^*(F_0)$  modulo l'idéal  $\langle \pi_i^*(F_k)_{I_i} \rangle_k$ .

**Preuve.**

L'éventail simplicial  $\Sigma_{12}$  raffine l'éventail simplicial  $\Sigma_1$  par ajout de la séquence de rayons engendrés par les vecteurs de  $(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) \setminus \mathcal{E}_1$  et définit la variété torique  $X_{12}$ . De même, l'éventail simplicial  $\Sigma_{21}$  raffine l'éventail simplicial  $\Sigma_2$  par ajout de la séquence de rayons engendrés par les vecteurs de  $(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) \setminus \mathcal{E}_2$  et définit la variété torique  $X_{21}$ . Les variétés toriques  $X_{12}$  et  $X_{21}$  réalisent donc deux éclatements simpliciaux de  $X_P$  qui utilisent le même ensemble de vecteurs primitifs.

$$\begin{array}{ccccc} & & (X_{12}, \Sigma_{12}) & \xrightarrow{\quad} & X_1 & \xrightarrow{\quad \pi_1} & X_P \\ & & & \dashrightarrow & & & \\ \Sigma_{12}(1) = \Sigma_{21}(1) & & & & & & \\ & & (X_{21}, \Sigma_{21}) & \xrightarrow{\quad} & X_2 & \xrightarrow{\quad \pi_2} & X_P \\ & & & \dashrightarrow & & & \end{array}$$

D'après la proposition 4.6, les symboles de Kronecker dans les ouverts affines des variétés  $X_{12}$  et  $X_{21}$  sont égaux. Par le théorème 4.18, les symboles de Kronecker calculés pour les homogénéisations adéquates dans les ouverts affines des variétés simpliciales  $X_1$  et  $X_{12}$  sont égaux. De même pour les variétés  $X_2$  et  $X_{21}$ . On en déduit l'égalité des symboles de Kronecker entre les ouverts affines des variétés  $X_1$  et  $X_2$ .  $\square$

**Définition 4.10** (Définition du Symbole de Kronecker dans le tore, cas non simplicial). On considère  $f = (f_1, \dots, f_n)$  une famille de  $n$  polynômes de Laurent de  $\mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}]$  possédant un nombre fini de zéros et régulière pour ses polytopes de Newton. On suppose que la variété torique  $X_P$  définie par  $P$ , somme de Minkowski des polytopes de Newton des  $f_k$ , n'est pas simpliciale. Soit  $\Sigma$  un raffinement simplicial de  $\Sigma_P$  qui définit la variété torique  $X$  et soit  $\pi$  le morphisme d'éclatement de  $X$  sur  $X_P$ . On note  $\pi^*$  le morphisme dual défini entre les espaces de coordonnées homogènes de  $X_P$  et de  $X$ .

Soit  $h \in \mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}]$  et soit  $(m_0, q)$  un couple d'homogénéisation de  $h$ . On note  $H$  l'homogénéisé de  $h$  relativement à  $(m_0, q)$  dans l'anneau de coordonnées homogènes de  $Y$ .

Pour tout  $I$  ensemble simplicial de  $\Sigma$ ,

$$\ell_f^{\mathcal{F}}(h) = \frac{\det(\eta_I)}{|\det(\eta_I)|} \ell_I(H_I \cdot (\pi^*(F_0))_I^{-1}; (\pi^*(F_k))_I).$$

où  $(\pi^*(F_0))_I^{-1}$  est l'inverse de  $(\pi^*(F_0))_I$  modulo l'idéal  $\langle \pi^*(F_1)_I, \dots, \pi^*(F_n)_I \rangle$ .

*Remarque 4.3.* Le symbole de Kronecker dans le tore se calcule à partir des symboles de Kronecker définis dans les ouverts affines déterminés par un ensemble simplicial maximal. Le raffinement de l'éventail initial se limite donc à obtenir un cône maximal simplicial. En particulier, si la variété  $X_P$  n'est pas simpliciale mais présente au moins un cône simplicial, le calcul du symbole de Kronecker peut se calculer directement dans les ouverts affines associés aux cônes maximaux simpliciaux.

#### 4.4.2 Egalité du symbole de Kronecker et du résidu global dans le tore dans le cas non simplicial

**Proposition 4.19.** *On a*

$$\ell_f^{\mathcal{F}}(h) = \text{Res}_f^{\mathcal{F}}(h).$$

**Preuve.** On se limite à envisager le cas où les zéros des polynômes  $\pi^*(F_1), \dots, \pi^*(F_n)$  sont simples. Le cas général s'y ramène en déformant les polynômes continûment (Cf. annexe du chapitre 4).

D'après la définition,  $\ell_f^{\mathcal{F}}(h) = \frac{\det(\eta_I)}{|\det(\eta_I)|} \ell(H_I \cdot (\pi^*(F_0))_I^{-1}; (\pi^*(F_k))_I)$ . Les zéros communs des polynômes  $\pi^*(F_k)$  s'identifient aux zéros communs des  $f_k$  dans  $(\mathbb{C}^*)^n$ . La preuve de la proposition 4.13 peut donc être reconduite en substituant les polynômes  $\pi^*(F_0), \pi^*(F_1), \dots, \pi^*(F_n)$  aux polynômes  $F_0, F_1, \dots, F_n$ .  $\square$

*Remarque 4.4.* L'égalité du symbole de Kronecker dans le tore et du résidu global n'est pas fortuit. D'après le théorème 4 dans [4], le résidu global peut se calculer par un résidu torique dans une variété projective de polytope  $P$  tel que les  $P$ -homogénéisés des polynômes de Laurent ont leurs zéros communs dans le tore. Cette condition est vérifiée, en particulier, lorsque  $P$  est somme de Minkowski des polytopes de Newton des polynômes de Laurent. Si la somme de Minkowski des polytopes de Newton n'est pas un polytope premier, on considère  $\Sigma'$  un raffinement simplicial de son éventail dual, le résidu global peut alors se calculer par le résidu torique dans la variété  $X'$  d'éventail  $\Sigma'$  relativement à une famille convenable de polynômes homogènes. Comme  $X'$  est simpliciale, le résidu torique dans  $X'$  s'obtient aussi comme somme des résidus locaux. Dans le cas où un zéro commun est simple, il est aisé de voir que le symbole de Kronecker local est égal au résidu torique local dans  $X'$  (cf. début de la preuve de proposition 4.13). L'égalité dans le cas général se déduit par déformation des familles de polynômes.

## Annexe du chapitre 4

### Continuité du symbole de Kronecker local affine

Soit  $F$  une famille de  $n$  polynômes en intersection complète sur l'anneau de polynômes à  $n$  indéterminées  $\mathbb{C}[X]$  et  $A$  la  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathbb{C}[X]/\langle F \rangle$ . On considère  $\mathbb{C}\langle \varepsilon \rangle$  le corps des séries de Puiseux en la variable  $\varepsilon$ . On dit que deux éléments de  $\mathbb{C}\langle \varepsilon \rangle$  sont proches si leur différence est un infinitésimal de  $\mathbb{C}\langle \varepsilon \rangle$ . Plus généralement deux polynômes de  $\mathbb{C}\langle \varepsilon \rangle[X]$  sont proches si les coefficients de leur différence sont des infinitésimaux de  $\mathbb{C}\langle \varepsilon \rangle$ .

On considère la famille  $F_\varepsilon$  dans  $\mathbb{C}\langle \varepsilon \rangle[X]$  une  $\varepsilon$ -déformation de la famille  $F$  ce qui signifie que chaque polynôme  $F_{\varepsilon,k}$  de  $F_\varepsilon$  est proche du polynôme  $F_k$  de  $F$ .

Etant donné un zéro de  $F$  de multiplicité  $r$ , le théorème de Bézout local assure l'existence d'une déformation  $F_\varepsilon$  de  $F$  admettant exactement  $r$  zéros isolés dans un voisinage de  $x$ . Une preuve de ce théorème est donnée dans [?], section I-4.3, une autre se déduit du théorème des résidus voir [7], Residue theorem, p.656.

Soit  $x$  un zéro de  $F$ . On note  $A_x$  l'anneau local associé à  $x$ ,  $A_\varepsilon$  le quotient de  $\mathbb{C}\langle \varepsilon \rangle[X]$  par l'idéal  $\langle F_\varepsilon \rangle$  et  $(A_\varepsilon)_x$  l'anneau multilocal qui est le produit des anneaux locaux  $(A_\varepsilon)_y$  pour  $y \in Z(F_\varepsilon)$  proche de  $x$ .

On a les résultats suivants :

**Proposition 4.20.** *La dimension du  $\mathbb{C}\langle \varepsilon \rangle$ -espace vectoriel  $(A_\varepsilon)_x$  est égale la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $A_x$*

*Soit  $\mathcal{B}$  une liste d'éléments de  $\mathbb{C}[X]$  qui remonte une base de  $A_x$  encore notée  $\mathcal{B}$ . Alors  $\mathcal{B}_\varepsilon$  l'image de  $\mathcal{B}$  dans  $(A_\varepsilon)_x$  est une base  $\mathbb{C}\langle \varepsilon \rangle$ -base de  $(A_\varepsilon)_x$*

## CHAPITRE 4. SYMBOLE DE KRONECKER DANS LE TORE

Dans la base  $\mathcal{B}_\varepsilon$ , la matrice de la table de multiplication de  $(A_\varepsilon)_x$  est proche de la matrice de la table de multiplication de  $A_x$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On note  $e_x$  l'idempotent associé à  $x$  et  $e_{\varepsilon,x}$  l'idempotent associé dans l'anneau multilocal  $A_{\varepsilon,x}$ . On déduit de la proposition 4.20 que les coefficients du polynôme  $Bez(e_{\varepsilon,x}, F_\varepsilon)$  exprimé dans la base  $\mathcal{B}_\varepsilon \otimes \mathcal{B}_\varepsilon$  sont proches des coefficients de  $Bez(e_x, F)$  exprimés dans la base  $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ .

**Théorème 4.8.** *Soit  $x$  un zéro de  $F$  et  $y$  les zéros de  $F_\varepsilon$  obtenus au voisinage de  $x$  par déformation de  $F$ . Alors*

$$\sum_{y \in Z(F_\varepsilon)} \ell_y(H; F_\varepsilon) \text{ est proche de } \ell_x(H, F)$$

où  $H$  désigne invariablement la classe d'un polynôme  $H \in \mathbb{C}[X]$  dans les espaces quotients correspondants.

**Corollaire 4.1.** *Si  $x$  est de multiplicité  $r$  et la déformation  $F_\varepsilon$  possède  $r$  zéros au voisinage de  $x$  dont l'ensemble est noté  $Z_x(F_\varepsilon)$ , alors  $\ell_x(H, F)$  est proche de*

$$\sum_{y \in Z_x(F_\varepsilon)} \frac{H(y)}{\text{Jac}(F_\varepsilon)(y)}.$$

**Corollaire 4.2.** *On considère à présent  $\varepsilon$  comme un paramètre complexe. La limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 de  $\sum_{y \in Z(F_\varepsilon)} \frac{H(y)}{\text{Jac}(F_\varepsilon)(y)}$  est  $\ell_x(H, F)$ .*

**Conséquence :** Le symbole de Kronecker local coïncide avec le résidu local puisque ces deux objets sont continus et coïncident dans le cas où les zéros sont simples.



# Chapitre 5

## Calculs

### 5.1 Algorithmes de calcul du symbole de Kronecker

Nous présentons un algorithme du calcul du symbole de Kronecker dans le tore largement inspiré de celui donné dans [14]. Les notations utilisées sont reprises des chapitres précédents.

#### 5.1.1 Algorithme de calcul du symbole de Kronecker affine

On rappelle l'algorithme qui permet de calculer le symbole de Kronecker pour tout polynôme  $h \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  modulo l'idéal engendré par  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , un système de  $n$  polynômes de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  en intersection complète. Un algorithme du symbole de Kronecker légèrement différent est décrit dans [10] où le symbole de Kronecker est désigné sous les termes de résidu algébrique.

- 1) Calculer une base de Gröbner  $\mathcal{G}_0$  de l'idéal  $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$  pour un ordre monomial et en déduire une base de monômes  $\mathcal{B}_1$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/\langle f \rangle$  de dimension finie. On prend 1 comme premier élément de la base.
- 2) En déduire pour l'idéal  $\langle f(X), f(Y) \rangle$  de  $\mathbb{C}[X, Y]$ , une base de Gröbner  $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0(X), \mathcal{G}_0(Y))$ .
- 3) Calculer le bezoutien du système  $f$  et déterminer  $Bez$  sa forme réduite par rapport à la base  $\mathcal{G}$  en réduisant  $Bez$  par rapport à  $\mathcal{G}_0(X)$  puis  $\mathcal{G}_0(Y)$ .
- 4) L'expression  $Bez(X, Y) = \sum_{X^\alpha \in \mathcal{B}_1} b_\alpha(Y) X^\alpha$  donne la base  $\mathcal{B}_2 = (b_\alpha(Y))$  duale de  $\mathcal{B}_1$  par rapport à la forme bilinéaire induite par  $\ell(\cdot; f; X)$ .
- 5) Construire la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_1$  à la base  $\mathcal{B}_2$ , calculer les coordonnées du monôme 1 dans la base  $\mathcal{B}_2$  et en déduire la matrice  $L$  du symbole de Kronecker dans la base  $\mathcal{B}_1$ .
- 6) Pour un polynôme  $h \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , obtenir sa forme réduite selon la base de Gröbner  $\mathcal{G}_0$ , recueillir ses coordonnées  $H$  dans la base monomiale  $\mathcal{B}_1$  puis calculer  $LH$ .

### 5.1.2 Algorithme de calcul du symbole de Kronecker dans le tore

#### Cas simplicial

On décrit à présent un algorithme calculant le symbole de Kronecker dans le tore en un monôme de Laurent  $T^m$ , pour un système de  $n$  polynômes de Laurent  $(f_1, \dots, f_n)$  dans  $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$  réguliers par rapport à leurs polytopes de Newton et tels que  $Z_{(\mathbb{C}^*)^n}(f_1, \dots, f_n) < +\infty$ .

Soit  $P$  la somme de Minkowski des polytopes de Newton des  $f_i$ . L'hypothèse sur les zéros communs des  $f_i$  impose que  $P$  soit de dimension  $n$ . On suppose que l'éventail dual de  $P$  est simplicial cela signifie que chaque sommet de  $P$  est intersection de  $n$  facettes exactement. Dans certaines sources, un tel polytope est appelé polytope premier (cf. [4]).

L'algorithme est repris de [14]. Un algorithme semblable figure dans [10].

- 1) Déterminer le polytope  $P$  somme de Minkowski des polytopes de Newton  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  relatifs aux polynômes  $f_1, \dots, f_n$  ( $P$  est de dimension  $n$ ) et homogénéiser les polynômes de Laurent  $f_1, \dots, f_n$  par rapport aux diviseurs sans points de base  $D_1, \dots, D_n$  de polytopes respectifs  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , on obtient les polynômes  $F_1, \dots, F_n$ , homogènes pour le degré défini dans la variété torique  $X_P$  donnée par le polytope  $P$ .
- 2) Homogénéiser le monôme de Laurent  $T^m$  par rapport au diviseur associé à  $P$  (on obtient un élément  $M$  de  $\mathbb{C}(X)$  si  $m \notin P$ )
- 3) Pour  $m_0 \in \text{Int}(P) \cap \mathbb{Q}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $qm_0 \in \mathbb{Z}^n$ , homogénéiser  $T^{qm_0}$  par rapport aux diviseurs définis par les polytopes  $(q-1)P$  et  $qP$ , on obtient respectivement les monômes homogènes  $M_0$  et  $F_0$ .
- 4) Choisir  $m_0$  puis  $q$  tel que  $qm_0 \in \mathbb{Z}^n$  et  $M_0M \in \mathbb{C}[X]$ .
- 5) Choisir un ensemble simplicial maximal  $I$  définissant un cône de dimension  $n$  de l'éventail dual de  $P$  et déshomogénéiser les polynômes homogènes obtenus aux étapes précédentes en substituant 1 aux variables  $X_i$  pour  $i \notin I$ .  
On obtient ainsi les polynômes  $(M_0M)_I, F_{0I}, F_{1,I}, \dots, F_{n,I}$ .
- 6) Calculer le symbole de Kronecker associé au bezoutien des polynômes  $F_{0I}, F_{1,I}, \dots, F_{n,I}$  en reprenant l'algorithme 5.1.1.

#### Cas non simplicial

On suppose ici que l'éventail dual de la somme de Minkowski n'est pas simplicial. Comme la dimension du polytope de Minkowski est égale à la dimension du tore, par hypothèse sur la famille  $f$ , cela signifie qu'au moins un sommet de la somme de Minkowski est intersection de plus de  $n$  facettes par définition de l'éventail dual.

Si l'un des cônes maximaux de l'éventail dual est simplicial, le calcul peut s'effectuer dans ce cône suivant l'algorithme 5.1.2 car le calcul du symbole de Kronecker dans la variété torique coïncide sur les ouverts affines  $U_\sigma$ ,  $\sigma \in \Sigma(n)$ . Dans le cas où aucun cône de dimension  $n$  n'est simplicial, on raffine l'éventail jusqu'à obtenir un cône de dimension  $n$  simplicial. Le raffinement d'un cône de dimension  $n$  est conduit selon la méthode décrite au §.3 en raffinant les faces non simpliciales de plus petite dimension par ajouts successifs de vecteurs primitifs à l'éventail. Dès l'obtention d'un cône simplicial, le calcul est ramené à celui décrit dans l'algorithme 5.1.2.

## 5.2 Exemples de calcul dans le cas simplicial

Nous proposons dans la suite de cette section, le calcul du symbole de Kronecker sur certains monômes du polytope formé par la somme de Minkowski des polytopes de Newton d'une famille de polynômes de Laurent régulière par rapport à ses polytopes de Newton. Dans les premiers exemples étudiés, la somme de Minkowski fournit un polytope associé à une variété simpliciale. Le calcul est alors effectué de deux manières : on calcule d'abord le symbole de Kronecker suivant l'algorithme 5.1.2 puis les calculs sont repris en suivant l'algorithme 5.1.2.

### 5.2.1 Etude d'un exemple simplicial en dimension 2

Le premier exemple est dû à E. Cattani et A. Dickenstein.

On considère deux polynômes de Laurent génériques :

$$f_1(T_1, T_2) = \frac{a_0}{T_1 T_2} + \frac{a_1}{T_1} + \frac{a_2}{T_2} + a_3 T_1 + a_4 T_2 + a_5$$

$$f_2(T_1, T_2) = \frac{b_0}{T_1 T_2} + \frac{b_1}{T_1} + \frac{b_2}{T_2} + b_3 T_1 + b_4 T_2 + b_5$$

Le polytope de Newton  $P$  commun à  $f_1$  et  $f_2$  est donné par la figure 1, l'éventail dual est celui de la figure 2 :

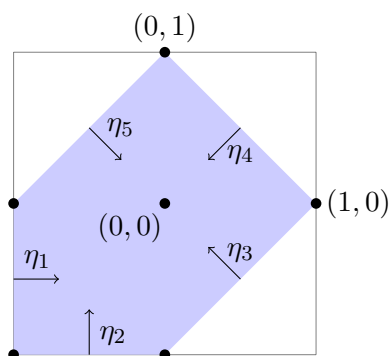


FIGURE 5.1 – Polytope

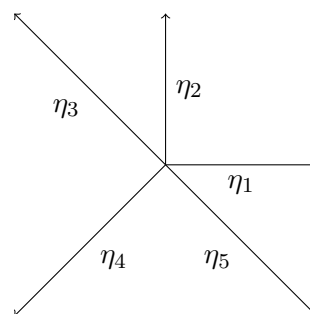


FIGURE 5.2 – Eventail dual

(Dans la figure 1, la norme des vecteurs  $\eta_1, \dots, \eta_5$  n'est pas respectée.)

La variété torique projective définie par le pentagone  $P$  est simpliciale. Son anneau de coordonnées homogènes est  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_5]$ . La somme de Minkowski des deux polytopes de Newton est le polytope  $2P$ .

Calcul des homogénéisés de  $f_1$  et de  $f_2$  par rapport au diviseur  $D_P$ .

$$F_1 = a_0 X_1^0 X_2^0 X_3^1 X_4^3 X_5^1 + a_1 X_1^0 X_2^1 X_3^2 X_4^2 X_5^0 + a_2 X_1^1 X_2^0 X_3^0 X_4^2 X_5^2$$

$$+ a_3 X_1^2 X_2^1 X_3^0 X_4^0 X_5^2 + a_4 X_1^1 X_2^2 X_3^2 X_4^0 X_5^0 + a_5 X_1^1 X_2^1 X_3^1 X_4^1 X_5^1$$

$$\begin{aligned}
 F_2 = & b_0 X_1^0 X_2^0 X_3^1 X_4^3 X_5^1 + b_1 X_1^0 X_2^1 X_3^2 X_4^2 X_5^0 + b_2 X_1^1 X_2^0 X_3^0 X_4^2 X_5^2 \\
 & + b_3 X_1^2 X_2^1 X_3^0 X_4^0 X_5^2 + b_4 X_1^1 X_2^2 X_3^2 X_4^0 X_5^0 + b_5 X_1^1 X_2^1 X_3^1 X_4^1 X_5^1.
 \end{aligned}$$

La régularité des polynômes de Laurent  $f_1, f_2$  par rapport à  $P$  se traduit par la non-annulation de certains déterminants d'ordre 2 en les coefficients des polynômes  $f_1$  et  $f_2$ . Soit

$$\begin{cases} a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0 & ; & a_0 b_2 - a_2 b_0 \neq 0 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 \neq 0 & ; & a_3 b_4 - a_4 b_3 \neq 0 \\ a_1 b_4 - a_4 b_1 \neq 0 \end{cases}$$

De plus, la géométrie du polytope de Newton de  $f_1$  et  $f_2$  impose que les coefficients en les monômes des sommets soient non nuls. On a donc également la condition  $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 \neq 0$ .

Nous proposons de calculer la valeur du symbole de Kronecker dans le tore relativement au système  $(f_1, f_2)$  en chaque monôme  $T^m$  pour  $m \in 2P$ .

On prend  $m_0 = (0, 0) \in \text{Int } 2P$ . et  $q = 1$  qui définit le monôme homogène

$$F_0 = X_1^2 X_2^2 X_3^2 X_4^2 X_5^2.$$

On choisit de déshomogénéiser les polynômes dans l'ouvert affine défini par le cône engendré par  $\eta_1$  et  $\eta_2$  qui donne l'ensemble d'indices  $I = \{1, 2\}$ . D'où

$$\begin{aligned}
 F_{0I} &= X_1^2 X_2^2 \\
 F_{1I} &= a_0 + a_1 X_2 + a_2 X_1 + a_3 X_1^2 X_2 + a_4 X_1 X_2^2 + a_5 X_1 X_2 \\
 F_{2I} &= b_0 + b_1 X_2 + b_2 X_1 + b_3 X_1^2 X_2 + b_4 X_1 X_2^2 + b_5 X_1 X_2.
 \end{aligned}$$

On calcule ensuite  $\mathcal{G}_0$  la base de Gröbner réduite pour l'ordre monomial gradué lexicographique inverse et on en déduit une base monomiale  $\mathcal{B}_1$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}/\langle F_{1I}, F_{2I} \rangle$  :

$$\mathcal{B}_1 = \{1, X_1, X_2, X_1 X_2, X_2^2\}.$$

On calcule ensuite le bezoutien du système  $(F_{0I}, F_{1I}, F_{2I})$  que l'on réduit via la base de Gröbner  $(\mathcal{G}_0(X), \mathcal{G}_0(Y))$  de  $\langle F_{1I}(X), F_{2I}(X), F_{1I}(Y), F_{2I}(Y) \rangle$ . On obtient ainsi  $\bar{F}_{0I} \text{Bez}(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$  où  $\bar{F}_{0I}$  est la réduction de  $F_{0I}$  par la base de Gröbner  $\mathcal{G}_0$ . Il suffit ensuite d'ordonner  $\bar{F}_{0I} \text{Bez}$  selon la base monomiale  $(1, Y_1, Y_2, Y_1 Y_2, Y_2^2)$  pour reconnaître  $\mathcal{B}_2$ , la base duale  $\mathcal{B}_1$ . On forme ensuite la matrice de passage  $P_{12}$  et on détermine alors les coordonnées de 1 dans la base  $\mathcal{B}_2$ . La décomposition de 1 dans la base  $\mathcal{B}_2$  fournit la matrice du symbole de Kronecker torique dans la base  $\mathcal{B}_1$ .

Il y a 16 monômes de Laurent qui correspondent aux points entiers du polytope  $2P$ , somme de Minkowski des polytopes de Newton associés à  $f_1$  et  $f_2$ . Les tableaux ci-après donnent les images de ces 16 monômes  $T^m$  par le symbole de Kronecker torique calculé à partir de l'ouvert affine  $U_I$ .

Le premier tableau réunit les 6 monômes correspondant aux points intérieurs au polytope  $2P$ . On vérifie que le symbole de Kronecker dans le tore s'annule sur ces monômes de Laurent conformément à la formule d'Euler-Jacobi torique. Le second tableau regroupe les valeurs du symbole de Kronecker pour les 10 monômes correspondant aux points sur le bord de  $2P$ .

$T^m$	$M_I$	$\ell^{\mathcal{T}}(T^m)$
1	$X_1^3 X_2^3$	0
$T_1$	$X_1^4 X_2^3$	0
$T_2$	$X_1^3 X_2^4$	0
$T_1^{-1}$	$X_1^2 X_2^3$	0
$T_2^{-1}$	$X_1^3 X_2^2$	0
$T_1^{-1} T_2^{-1}$	$X_1^2 X_2^2$	0

$T^m$	$M_I$	$\ell^{\mathcal{T}}(T^m)$
$T_1^2$	$X_1^5 X_2^3$	$\frac{a_4 b_2 - a_2 b_4}{(a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_3 b_4 - a_4 b_3)}$
$T_1 T_2$	$X_1^4 X_2^4$	$\frac{1}{a_3 b_4 - a_4 b_3}$
$T_2^2$	$X_1^3 X_2^5$	$\frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{(a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_3 b_4 - a_4 b_3)}$
$T_1^{-1} T_2$	$X_1^2 X_2^4$	$\frac{1}{a_4 b_1 - a_1 b_4}$
$T_1^{-2}$	$X_1 X_2^3$	$\frac{a_0 b_4 - a_4 b_0}{(a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_0 b_1 - a_1 b_0)}$
$T_1^{-2} T_2^{-1}$	$X_1 X_2^2$	$\frac{1}{a_1 b_0 - a_0 b_1}$
$T_1^{-2} T_2^{-2}$	$X_1 X_2$	$\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_0 b_2 - a_2 b_0)(a_0 b_1 - a_1 b_0)}$
$T_1^{-1} T_2^{-2}$	$X_1^2 X_2$	$\frac{1}{a_0 b_2 - a_2 b_0}$
$T_2^{-2}$	$X_1^3 X_2$	$\frac{a_3 b_0 - a_0 b_3}{(a_0 b_2 - a_2 b_0)(a_2 b_3 - a_3 b_2)}$
$T_1 T_2^{-1}$	$X_1^4 X_2^2$	$\frac{1}{a_2 b_3 - a_3 b_2}$

Le polynôme  $\text{Jac}_I^{\mathcal{T}}(F)(X, X)$  est égal à :

$$\begin{aligned}
 & X_4^5 X_3^3 X_5 X_2 (a_0 b_1 - a_1 b_0) + X_4^5 X_3 X_5^3 X_1 (a_0 b_2 - a_2 b_0) + X_4^4 X_3^2 X_5^2 X_1 X_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
 & + (X_4^3 X_3^3 X_5 X_2^2 X_1 (a_4 b_0 - a_0 b_4) + X_4^3 X_3 X_5^3 X_2 X_1^2 (a_0 b_3 - a_3 b_0) + X_4^2 X_3^4 X_1 X_2^3 (a_4 b_1 - a_1 b_4) \\
 & + X_4^2 X_5^4 X_1^3 X_2 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + X_3^2 X_5^2 X_1^3 X_2^3 (a_3 b_4 - a_4 b_3)).
 \end{aligned}$$

Après calcul de sa forme normale, on trouve

$$\ell_I^T(\text{Jac}_I^T(F); F) = 5.$$

qui est aussi la valeur du volume normalisé ( $2!V(P)$ ) du polytope  $P$  cf [2].

De plus, comme  $I = \{1, 2\}$  est lisse, i.e la variété affine  $U_I$  définie par le cône engendré par  $(\eta_1, \eta_2)$  est une variété lisse, l'image par  $\ell_I^T$  de  $\text{Jac}_I^T(F)$  donne aussi la dimension de  $\mathcal{B}_1$ .

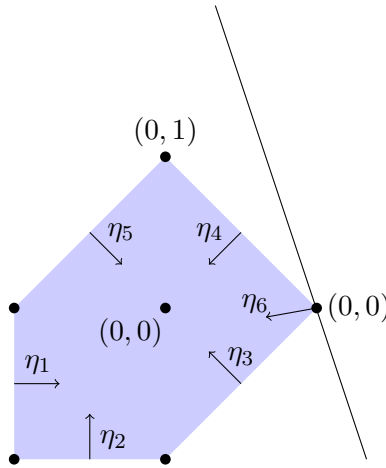


FIGURE 5.3 – Polytope du diviseur sans points de base

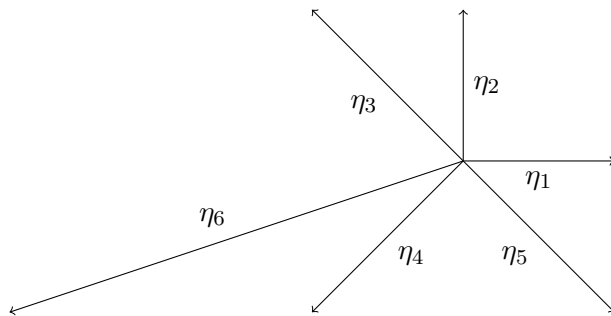


FIGURE 5.4 – Raffinement de l'éventail dual de  $P$

Nous observons dans cette section, l'effet d'un morphisme d'éclatement sur le symbole de Kronecker torique calculé précédemment.

Nous commençons par adjoindre un nouveau vecteur primitif  $\eta_6 = -\eta_1 - 3\eta_2$  à l'éventail dual de  $P$  où  $(\eta_1, \eta_2)$  forme la base canonique de  $N \simeq \mathbb{Z}^2$ . Le vecteur  $\eta_6$  raffine le cône  $(\eta_3, \eta_4)$  en

deux cônes  $\text{cône}(\eta_3, \eta_6)$  et  $\text{cône}(\eta_6, \eta_4)$ . On note  $\Sigma$  l'éventail complet engendré par les vecteurs primitifs  $\eta_1, \dots, \eta_6$ . On vérifie aussitôt que le vecteur  $\eta_6$  a une décomposition entière et positive selon les vecteurs  $\eta_3$  et  $\eta_4$  car  $\eta_6 = \eta_3 + 2\eta_4$ .

L'anneau de coordonnées homogènes de la variété torique  $X_\Sigma$  est  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_6]$  avec  $X_6$  la nouvelle variable associée au vecteur primitif  $\eta_6$  qui donne encore le diviseur irréductible  $D_6$ . On reconduit dans la variété  $X_\Sigma$  les mêmes calculs que précédemment en suivant l'algorithme 5.1.2. On commence par homogénéiser les polynômes de Laurent  $f_1$  et  $f_2$  par rapport au diviseur sans points de base  $D = D_P + 3D_6$

On obtient

$$F_1 = a_0 X_1^0 X_2^0 X_3^1 X_4^3 X_5^1 X_6^7 + a_1 X_1^0 X_2^1 X_3^2 X_4^2 X_5^0 X_6^6 + a_2 X_1^1 X_2^0 X_3^0 X_4^2 X_5^2 X_6^2 \\ + a_3 X_1^2 X_2^1 X_3^0 X_4^0 X_5^2 X_6^0 + a_4 X_1^1 X_2^2 X_3^2 X_4^0 X_5^0 X_6^2 + a_5 X_1^1 X_2^1 X_3^1 X_4^1 X_5^1 X_6^3$$

$$F_2 = b_0 X_1^0 X_2^0 X_3^1 X_4^3 X_5^1 X_6^7 + b_1 X_1^0 X_2^1 X_3^2 X_4^2 X_5^0 X_6^6 + b_2 X_1^1 X_2^0 X_3^0 X_4^2 X_5^2 X_6^2 \\ + b_3 X_1^2 X_2^1 X_3^0 X_4^0 X_5^2 X_6^0 + b_4 X_1^1 X_2^2 X_3^2 X_4^0 X_5^0 X_6^2 + b_5 X_1^1 X_2^1 X_3^1 X_4^1 X_5^1 X_6^3.$$

On choisit  $m_0 = (0, 1)$  dans l'intérieur du polytope  $2P$  et  $q = 1$  ce qui donne le polynôme homogène  $F_0 = X_1^3 X_2^2 X_3 X_4 X_5^3 X_6^3$ .

On prend  $I = \{3, 6\}$ . On obtient les polynômes  $F_{0I}$ ,  $F_{1I}$  et  $F_{2I}$  tels que

$$F_{0I} = X_3 X_6^3 \\ F_{1I} = a_0 X_3 X_6^7 + a_1 X_3^2 X_6^6 + a_2 X_6^4 + a_3 + a_4 X_3^2 X_6^2 + a_5 X_3 X_6^3 \\ F_{2I} = b_0 X_3 X_6^7 + b_1 X_3^2 X_6^6 + b_2 X_6^4 + b_3 + b_4 X_3^2 X_6^2 + b_5 X_3 X_6^3.$$

Puisque  $|\det(\eta_3, \eta_6)| = 4$  et  $\ell_I^T(\text{Jac}_I^T(F); F) = 5$ , le cardinal d'une base de  $\mathbb{C}[X_3, X_6]/\langle F_{1I}, F_{2I} \rangle$  est égal à 20. On calcule une base de Groebner de l'idéal  $\langle F_{1I}, F_{2I} \rangle$  pour l'ordre lexicographique et on trouve une base monomiale  $\mathcal{B}_1$  du quotient  $\mathbb{C}[X_3, X_6]/\langle F_{1I}, F_{2I} \rangle$  :

$$\mathcal{B}_1 = \{1, X_3, X_3^2, X_3^3, X_6, X_6 X_3, X_6 X_3^2, X_6^2, X_6^2 X_3, X_6^2 X_3^2, X_6^3, X_6^3 X_3, X_6^3 X_3^2, \\ X_6^4, X_6^4 X_3, X_6^5, X_6^5 X_3, X_6^6, X_6^7\}$$

Dans les tableaux suivants, la première colonne liste les 16 monômes de Laurent définis par les points à coordonnées entières du polytope  $2P$  alors que la deuxième colonne présentent les monômes correspondants dans l'anneau  $\mathbb{C}[X_3, X_6]$ . La dernière colonne fournit l'image des 16 monômes par la forme dualisante  $F_{0I}^{-1} \cdot \ell$ . La forme linéaire  $\ell$  désigne le symbole de Kronecker affine dans le quotient  $\mathbb{C}[X_3, X_6]/\langle F_{1I}, F_{2I} \rangle$ .

Les calculs du symbole de Kronecker dans le tore obtenus à partir de la variété torique  $X_P$  coïncident avec les calculs obtenus dans la variété  $X_\Sigma$  où  $\Sigma$  est le raffinement de l'éventail dual de  $P$  par ajout du rayon engendré par le vecteur primitif  $\eta_6$ .

$T^m$	$M_I$	$\ell^{\mathcal{T}}(T^m) = \ell(F_{0I}^{-1}M_I)$
1	$X_3^2 X_6^8$	0
$T_1$	$X_3^1 X_6^5$	0
$T_2$	$X_3^3 X_6^7$	0
$T_1^{-1}$	$X_3^3 X_6^{11}$	0
$T_2^{-1}$	$X_3^1 X_6^9$	0
$T_1^{-1} T_2^{-1}$	$X_3^2 X_6^{12}$	0

$T^m$	$M_I$	$\ell^{\mathcal{T}}(T^m) = \ell(F_{0I}^{-1}M_I)$
$T_1^2$	$X_3^0 X_6^2$	$\frac{a_4 b_2 - a_2 b_4}{(a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_3 b_4 - a_4 b_3)}$
$T_1 T_2$	$X_3^2 X_6^4$	$\frac{1}{a_3 b_4 - a_4 b_3}$
$T_2^2$	$X_3^4 X_6^6$	$\frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{(a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_3 b_4 - a_4 b_3)}$
$T_1^{-1} T_2$	$X_3^4 X_6^{10}$	$\frac{1}{a_4 b_1 - a_1 b_4}$
$T_1^{-2}$	$X_3^4 X_6^{14}$	$\frac{a_0 b_4 - a_4 b_0}{(a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_0 b_1 - a_1 b_0)}$
$T_1^{-2} T_2^{-1}$	$X_3^3 X_6^{15}$	$\frac{1}{a_1 b_0 - a_0 b_1}$
$T_1^{-2} T_2^{-2}$	$X_3^2 X_6^{16}$	$\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_0 b_2 - a_2 b_0)(a_0 b_1 - a_1 b_0)}$
$T_1^{-1} T_2^{-2}$	$X_3^1 X_6^{13}$	$\frac{1}{a_0 b_2 - a_2 b_0}$
$T_2^{-2}$	$X_3^0 X_6^{10}$	$\frac{a_3 b_0 - a_0 b_3}{(a_0 b_2 - a_2 b_0)(a_2 b_3 - a_3 b_2)}$
$T_1 T_2^{-1}$	$X_3^0 X_6^6$	$\frac{1}{a_2 b_3 - a_3 b_2}$

### 5.2.2 Deux exemples supplémentaires en dimension 2

Nous examinons dans ces deux exemples, la situation de deux polynômes de Laurent présentant des polytopes de Newton distincts. Dans le premier exemple, les deux polytopes sont de dimension deux. Dans le second cas, l'un des polytopes de Newton est de dimension 2, l'autre est de dimension 1.

**Exemple 1**

On considère les polynômes de Laurent  $f_1$  et  $f_2$  dans  $\mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, T_2, T_2^{-1}]$  :

$$f_1 = \frac{a_0}{T_1 T_2} + \frac{a_1}{T_1} + \frac{a_2}{T_2}$$

$$f_2 = \frac{b_0}{T_1 T_2} + \frac{b_2}{T_2} + b_3 + b_4 T_1$$

Les figures suivantes montrent les polytopes  $P_1$  (en traits pleins) et  $P_2$  (en pointillés) qui sont les polytopes de Newton respectifs de  $f_1$  et  $f_2$  et le polytope  $P$  somme de Minkowski de  $P_1$  et  $P_2$ . Les vecteurs primitifs  $\eta_1, \dots, \eta_6$  ne sont pas représentés en vraie grandeur.

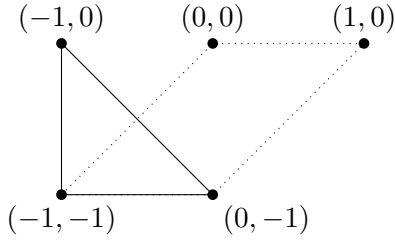


FIGURE 5.5 – Polytopes  $P_1$  et  $P_2$

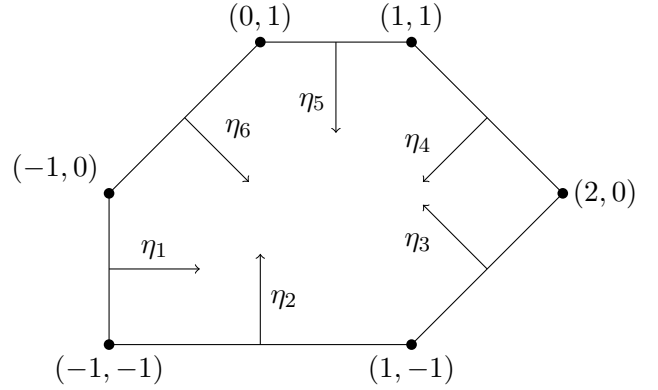


FIGURE 5.6 – Polytope  $P$

L'anneau  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_6]$  gradué par le groupe de Chow de  $X_P$  est l'anneau de coordonnées homogènes de la variété torique  $X_P$ .

Les polynômes homogènes :

$$F_1 = a_0 X_3 X_4 X_5 X_6 + a_1 X_2 X_3 + a_2 X_1 X_5 X_6$$

$$F_2 = b_0 X_4^3 X_3 X_5 + b_2 X_1 X_4^2 X_5 X_6 + b_3 X_1 X_2 X_3 X_4 + b_4 X_1^2 X_2 X_6$$

sont les homogénéisés respectifs de  $f_1$  et  $f_2$  par rapport aux diviseurs sans points de base  $\Delta_1 = D_1 + D_2 + D_3 - D_4 + D_6$  et  $\Delta_2 = D_1 + D_2 + D_3$ .

**Conditions de régularité de  $f_1, f_2$  par rapport à leurs polytopes de Newton** Par définition des polytopes de Newton, les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  vérifient les conditions  $a_0 a_1 a_2 \neq 0$  et  $b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 \neq 0$ . L'éventail complet de la variété  $X_P$  possède six cônes réguliers de dimension 2 :  $\sigma_1 = \text{cône}(\eta_1, \eta_2)$ ,  $\sigma_2 = \text{cône}(\eta_2, \eta_3)$ ,  $\sigma_3 = \text{cône}(\eta_3, \eta_4)$ ,  $\sigma_4 = \text{cône}(\eta_4, \eta_5)$ ,  $\sigma_5 = \text{cône}(\eta_5, \eta_6)$ ,  $\sigma_6 = \text{cône}(\eta_6, \eta_1)$ .

Les polynômes  $F_1$  et  $F_2$  ont un zéro commun dans l'ouvert affine  $U_{\sigma_1}$  en dehors du tore s'il existe des systèmes de coordonnées homogènes de la forme  $(0, x_2, 1, 1, 1, 1)$  ou  $(x_1, 0, 1, 1, 1, 1)$  tels que  $F_1((0, x_2, 1, 1, 1, 1)) = F_2(x_1, 0, 1, 1, 1, 1) = 0$  ou  $F_1(x_1, 0, 1, 1, 1, 1) = F_2(x_1, 0, 1, 1, 1, 1) = 0$ . On

obtient le système

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_2 & = 0 \\ b_0 & = 0 \end{cases}$$

qui est sans solution puisque  $b_0 \neq 0$  ou le système

$$\begin{cases} a_0 + a_2x_1 & = 0 \\ b_0 + b_2x_1 & = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution si et seulement si  $\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ . La discussion dans l'ouvert  $U_2$  donne la même condition sur les coefficients de  $F_1$  et  $F_2$ . L'étude dans les ouverts  $U_{\sigma_3}, U_{\sigma_4}, U_{\sigma_5}, U_{\sigma_6}$  montre qu'il n'existe pas dans ces ouverts affines, de zéros communs à  $F_1$  et  $F_2$  en dehors du tore.

le calcul du symbole de Kronecker est réalisé avec l'ensemble simplicial  $I = \{1, 2\}$ . On choisit  $q = 1$  et  $m_0 = (0; 0)$  alors  $F_0 = X_1X_2X_3^2X_4^2X_5X_6$ . Le quotient  $\mathbb{C}[X_1, X_2]/\langle F_{1I}, F_{2I} \rangle$  est de dimension 3. Le calcul du symbole de Kronecker sur les monômes de Laurent définis par les points à coordonnées entières de  $P$  est répertorié dans le tableau ci-dessous.

$T^m$	$M_I$	$\ell^{\mathcal{S}}(T^m) = \ell(F_{0I}^{-1}M_I)$
1	$X_1X_2$	0
$T_1$	$X_1^2X_2$	0
$T_1^2$	$X_1^3X_2$	$\frac{1}{a_2b_4}$
$T_1T_2$	$X_1^2X_2^2$	$\frac{-1}{a_1b_4}$
$T_1T_2^{-1}$	$X_1^2$	$\frac{-a_0}{a_2(a_0b_2 - a_2b_0)}$
$T_2$	$X_1X_2^2$	0
$T_2^{-1}$	$X_1$	$\frac{1}{a_0b_2 - a_2b_0}$
$T_1^{-1}$	$X_2$	$\frac{1}{a_1b_0}$
$T_1^{-1}T_2^{-1}$	1	$\frac{-b_2}{b_0(a_0b_2 - a_2b_0)}$

### Exemple 2

On considère les polynômes de Laurent  $f_1$  et  $f_2$  dans  $\mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, T_2, T_2^{-1}]$  :

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{a_0}{T_1T_2} + \frac{a_1}{T_1} + \frac{a_2}{T_2} \\ f_2 &= b_3 + b_4T_1T_2 \end{aligned}$$

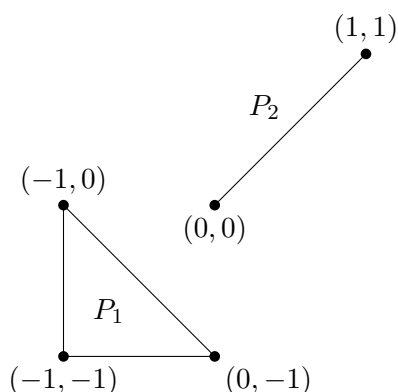


FIGURE 5.7 – Polytopes  $P_1$  et  $P_2$

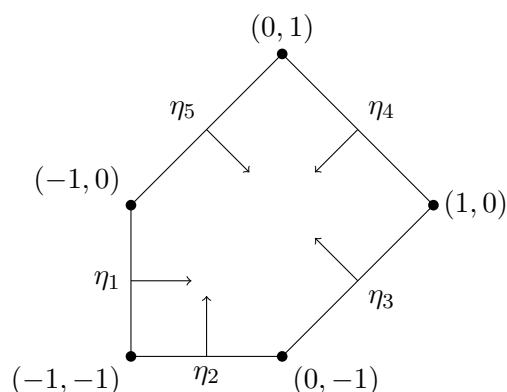


FIGURE 5.8 – Polytope  $P$

Les polynômes homogènes :

$$F_1 = a_0 X_3 X_4 X_5 + a_1 X_2 X_3^2 + a_2 X_1 X_5^2$$

$$F_2 = b_0 X_4^2 + b_1 X_1 X_2$$

sont les homogénéisés respectifs de  $f_1$  et  $f_2$  par rapport aux diviseurs sans points de base  $\Delta_1 = D_1 + D_2 + D_3 - D_4 + D_5$  et  $\Delta_2 = 2D_4$ .

L'étude des conditions de régularité de  $f_1$  et  $f_2$  par rapport à leurs polytopes de Newton dans chaque ouvert affine défini par un cône de dimension 2 montre qu'il n'existe pas de conditions particulières sur les coefficients de  $f_1$  et  $f_2$  hormis celles imposées par la définition des polytopes de Newton c'est-à-dire  $a_0 a_1 a_2 \neq 0$  et  $b_3 b_4 \neq 0$ .

Le calcul du symbole de Kronecker dans le tore est réalisé dans l'ouvert affine défini par l'ensemble simplicial  $I = \{1, 2\}$ . On prend  $m_0 = (0, 0)$  et  $q = 1$  d'où  $F_0 = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$ . Les résultats relatifs aux monômes de Laurent correspondants aux points à coordonnées entières du polytope  $P$  sont présentés dans le tableau suivant.

$T^m$	$M_I$	$\ell^{\mathcal{J}}(T^m) = \ell(F_{0I}^{-1} M_I)$
1	$X_1 X_2$	0
$T_1$	$X_1^2 X_2$	$\frac{1}{a_2 b_4}$
$T_2$	$X_1 X_2^2$	$\frac{-1}{a_1 b_4}$
$T_1^{-1}$	$X_2$	$\frac{1}{a_1 b_3}$
$T_1^{-1} T_2^{-1}$	1	0
$T_2^{-1}$	$X_1$	$\frac{-1}{a_2 b_3}$

### 5.2.3 Étude d'un exemple en dimension 3

Toutes les variétés toriques de dimension 2 sont simpliciales puisque les cônes de dimension inférieure ou égale à 2 sont simpliciaux. Nous étudions l'exemple d'une variété torique projective de dimension 3 présentant un cône non simplicial.

On considère trois polynômes de Laurent génériques  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  dans l'anneau  $\mathbb{C}[T_1, T_2, T_3, T_1^{-1}, T_2^{-1}, T_3^{-1}]$ ,

$$\begin{aligned} f_1(T) &= a_0T_3 + a_1T_1 + a_2T_2 + a_3T_3 + a_4T_4 + a_5 \\ f_2(T) &= b_0T_3 + b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3 + b_4T_4 + b_5 \\ f_3(T) &= c_0T_3 + c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3 + c_4T_4 + c_5 \end{aligned}$$

Les polytopes de Newton des 3 polynômes de Laurent sont égaux à la pyramide  $P$  de la figure 5.9. Ces polynômes vérifient la condition de régularité par rapport à leur polytope de Newton. On suppose que  $\{t \in (\mathbb{C}^*)^3, f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = 0\}$  est fini.

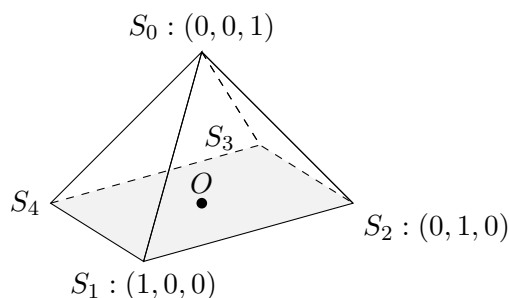
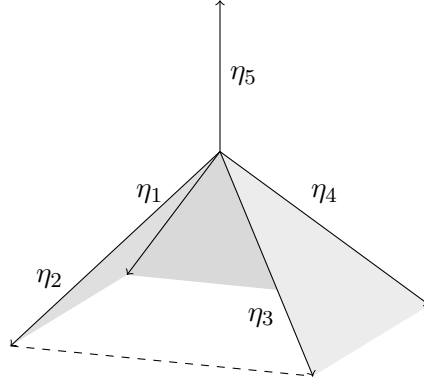


FIGURE 5.9 – Pyramide  $P$

Comme les polytopes de Newton sont égaux, la variété torique  $X_P$  définie par le pyramide  $P$  est la variété torique définie par la somme de Minkowski des polytopes de Newton de  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . Les vecteurs de son éventail sont les vecteurs primitifs, normaux aux faces de  $P$ . On note successivement  $\eta_1$  le vecteur normal à la face définie par les sommets  $(S_0, S_1, S_2)$ ,  $\eta_2$  le vecteur normal à la face  $(S_0, S_2, S_3)$ ,  $\eta_3$  le vecteur normal à la face  $(S_0, S_3, S_4)$ ,  $\eta_4$  le vecteur normal à la face  $(S_0, S_4, S_1)$  et enfin  $\eta_5$  le vecteur normal à la base  $(S_1, S_2, S_3, S_4)$  de la pyramide.

Dans la base canonique de  $M \simeq \mathbb{Z}^3$ , les vecteurs primitifs  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$  ont les coordonnées suivantes :

$$\eta_1 \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \eta_2 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \eta_3 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \eta_4 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \eta_5 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$


 FIGURE 5.10 – Eventail dual de la pyramide  $3P$ .

L'éventail dual de  $P$  est complet dans  $\mathbb{R}^3$ . Il est constitué de 4 cônes simpliciaux de dimension 3 et d'un cinquième cône non simplicial, engendré par les vecteurs primitifs  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$  comme le montre la figure 5.10.

Nous calculons le symbole de Kronecker dans le tore sur les caractères correspondants aux points à coordonnées entières de la pyramide  $3P$ , somme de Minkowski des polytopes de Newton de  $f_1, f_2, f_3$ . La pyramide  $3P$  contient 44 points du réseau dont 6 points sont à l'intérieur.

Les calculs sont réalisés de deux façons en utilisant un des cônes simpliciaux de la pyramide puis en raffinant le cône non simplicial de la pyramide par ajout d'un vecteur primitif.

### Calcul dans un cône simplicial de la variété $X_P$

On note  $X_i$  la variable associée au diviseur  $D_i$  défini par le rayon de l'éventail engendré par  $\eta_i$ . L'homogénéisation des polynômes de Laurent par rapport au diviseur  $D_P = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$  donne respectivement trois polynômes homogènes dans l'anneau de coordonnées homogènes  $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$  de la variété torique  $X_P$ .

$$\begin{aligned} F_1(X) &= a_0 X_5 + a_1 X_2^2 X_3^2 + a_2 X_3^2 X_4^2 + a_3 X_1^2 X_4^2 + a_4 X_1^2 X_2^2 \\ F_2(X) &= b_0 X_5 + b_1 X_2^2 X_3^2 + b_2 X_3^2 X_4^2 + b_3 X_1^2 X_4^2 + b_4 X_1^2 X_2^2 \\ F_3(X) &= c_0 X_5 + c_1 X_2^2 X_3^2 + c_2 X_3^2 X_4^2 + c_3 X_1^2 X_4^2 + c_4 X_1^2 X_2^2. \end{aligned}$$

Les conditions sur les polynômes de Laurent  $f_1, f_2, f_3$  sont équivalentes à ce que la famille  $F_1, F_2, F_3$  ait un nombre fini de racines communes dans le tore de la variété  $X_P$ .

On définit ensuite  $F_0$  en choisissant  $m_0 = (0, 0, 2) \in 3P$  et  $q = 1$ . D'où  $F_0 = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5^2$ .

On considère l'ouvert affine défini par le cône engendré par  $\eta_1, \eta_4, \eta_5$  et on note  $I = \{1, 4, 5\}$ , l'ensemble simplicial correspondant. On obtient les polynômes  $F_{0I}, F_{1I}, F_{2I}, F_{3I} \in \mathbb{C}[X_1, X_4, X_5]$

$$\begin{aligned} F_{0I} &= X_1 X_4 X_5^2 \\ F_{1I} &= a_0 X_5 + a_1 + a_2 X_4^2 + a_3 X_1^2 X_4^2 + a_4 X_1^2 \\ F_{2I} &= b_0 X_5 + b_1 + b_2 X_4^2 + b_3 X_1^2 X_4^2 + b_4 X_1^2 \\ F_{3I} &= c_0 X_5 + c_1 + c_2 X_4^2 + c_3 X_1^2 X_4^2 + c_4 X_1^2. \end{aligned}$$

Le calcul de la base de Gröbner réduite pour l'ordre gradué lexicographique inverse montre que l'algèbre quotient est l'espace vectoriel de dimension 8 engendré par les classes des monômes :  $1, X_1, X_4, X_5, X_1 X_4, X_1 X_5, X_4 X_5, X_1 X_4 X_5$ .

On rappelle que le calcul du symbole de Kronecker dans le tore sur la classe d'un monôme de Laurent modulo l'idéal  $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$  s'obtient à partir de la forme dualisante  $F_{0I}^{-1} \cdot \ell$  calculé en un certain monôme de l'anneau quotient  $\mathbb{C}[X_1, X_4, X_5]/\langle F_{1I}, F_{2I}, F_{3I} \rangle$ . l'élément  $F_{0I}^{-1}$  désigne l'inverse modulo  $\langle F_{1I}, F_{2I}, F_{3I} \rangle$  de la classe de  $F_{0I}$ .

L'algorithme de calcul est celui décrit au début de cette section.

Il existe 44 monômes de Laurent  $T^m$  lorsque  $m \in 3P \cap \mathbb{Z}^3$ . Le tableau suivant répertorie les calculs pour les 6 points intérieurs à la pyramide qui correspondent aux monômes de Laurent  $T_3^2, T_3, T_1T_3, T_2T_3, \frac{T_3}{T_1}, \frac{T_3}{T_2}$  et 7 autres points sur le bord dans les plans d'équation  $z = 1$  ou  $z = 2$ . On vérifie que le symbole de Kronecker s'annule sur les monômes correspondants aux points à coordonnées entières, intérieurs à la pyramide  $3P$ .

**Inventaire des points à coordonnées entières de la pyramide  $3P$**  On relève 25 points sur le bord dans le plan  $z = 0$ ,

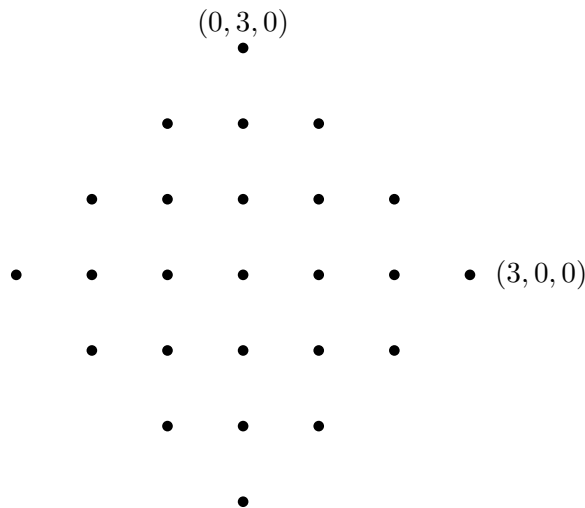


FIGURE 5.11 – Points dans le plan d'équation  $z = 0$

5 points intérieurs et 8 points sur le bord dans le plan d'équation  $z = 1$ ,

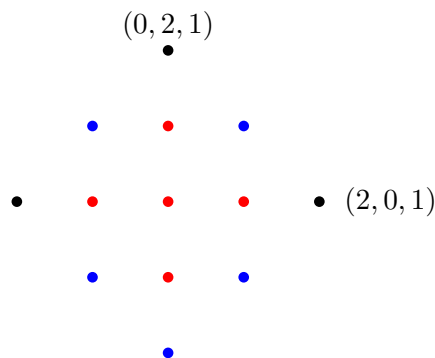


FIGURE 5.12 – Points dans le plan d'équation  $z = 1$

un point intérieur et 4 points sur le bord dans le plan d'équation  $z = 2$ ,

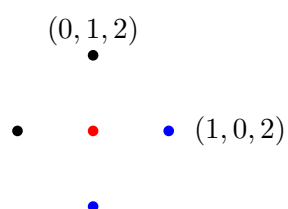


FIGURE 5.13 – Points dans le plan d'équation  $z = 2$

enfin le point de coordonnées  $(0, 0, 3)$  au sommet de la pyramide  $3P$ .

**Calcul du symbole de Kronecker dans le tore avec la variété projective de polytope  $3P$**

$m$	$T^m$	$M_I$	$-\ell(F_{0I}^{-1}M_I)$
$(0, 0, 2)$	$T_1^0 T_2^0 T_3^2$	$X_1^1 X_4^1 X_5^3$	0
$(0, 0, 1)$	$T_1^0 T_2^0 T_3^1$	$X_1^2 X_4^2 X_5^2$	0
$(1, 0, 1)$	$T_1^1 T_2^0 T_3^1$	$X_1^1 X_4^1 X_5^2$	0
$(0, 1, 1)$	$T_1^0 T_2^1 T_3^1$	$X_1^1 X_4^3 X_5^2$	0
$(-1, 0, 1)$	$T_1^{-1} T_2^0 T_3^1$	$X_1^3 X_4^3 X_5^2$	0
$(0, -1, 1)$	$T_1^0 T_2^{-1} T_3^1$	$X_1^3 X_4^1 X_5^2$	0

$m$	$T^m$	$M_I$	$-\ell(F_{0I}^{-1}M_I)$
$(1, -1, 1)$	$T_1^1 T_2^{-1} T_3^1$	$X_1^2 X_4^0 X_5^2$	$-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_4 \end{vmatrix}^{-1}$
$(0, -2, 1)$	$T_1^0 T_2^{-2} T_3^1$	$X_1^4 X_4^0 X_5^2$	$-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}^{-1}$
$(-1, -1, 1)$	$T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^1$	$X_1^4 X_4^2 X_5^2$	$\begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}^{-1}$
$(-1, 1, 1)$	$T_1^{-1} T_2^1 T_3^1$	$X_1^2 X_4^4 X_5^2$	$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^{-1}$
$(1, 1, 1)$	$T_1^1 T_2^1 T_3^1$	$X_1^0 X_4^2 X_5^2$	$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}^{-1}$
$(0, -1, 2)$	$T_1^0 T_2^{-1} T_3^2$	$X_1^2 X_4^0 X_5^3$	$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}^{-1}$
$(1, 0, 2)$	$T_1^1 T_2^0 T_3^2$	$X_1^0 X_4^0 X_5^3$	$-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}^{-1}$

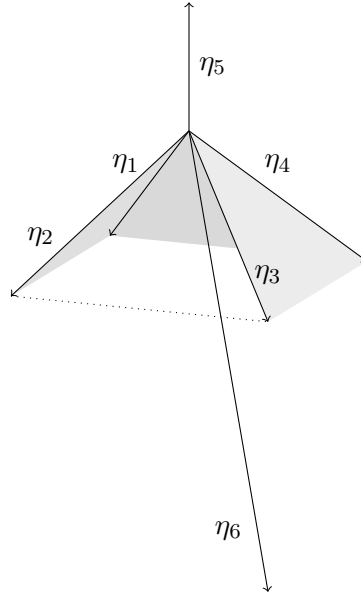
**Calcul dans le cône non simplicial de la variété  $X_P$** 

Nous commençons par raffiner le cône non simplicial engendré par  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  et  $\eta_4$  en adjoignant le vecteur  $\eta_6 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$  à l'éventail de  $X_P$ . On scinde le cône  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$  en 4 cônes

simpliciaux  $\text{cône}(\eta_6, \eta_1, \eta_2)$ ,  $\text{cône}(\eta_6, \eta_3, \eta_2)$ ,  $\text{cône}(\eta_6, \eta_3, \eta_4)$ ,  $\text{cône}(\eta_6, \eta_1, \eta_4)$ . Le vecteur  $\eta_6 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix}$

est bien primitif dans la base du réseau.

Le morphisme torique d'éclatement transforme le diviseur ample  $D_{3P}$  de la variété  $X_P$  en le diviseur sans points de base  $D = D_{3P} + 9D_6$ . L'éventail  $\Sigma$  dual du polytope  $3P$  est raffiné en l'éventail  $\Sigma'$ .


 FIGURE 5.14 – Eventail  $\Sigma'$ .

L'homogénéisation dans la variété  $X_{\Sigma'}$  conduit à considérer la famille :

$$\begin{aligned} F_1(X) &= a_0 X_5 + a_1 X_2^2 X_3^2 X_6^4 + a_2 X_3^2 X_4^2 X_6^2 + a_3 X_1^2 X_4^2 X_6^2 + a_4 X_1^2 X_2^2 X_6^4 \\ F_2(X) &= b_0 X_5 + b_1 X_2^2 X_3^2 X_6^4 + b_2 X_3^2 X_4^2 X_6^2 + b_3 X_1^2 X_4^2 X_6^2 + b_4 X_1^2 X_2^2 X_6^4 \\ F_3(X) &= c_0 X_5 + c_1 X_2^2 X_3^2 X_6^4 + c_2 X_3^2 X_4^2 X_6^2 + c_3 X_1^2 X_4^2 X_6^2 + c_4 X_1^2 X_2^2 X_6^4. \end{aligned}$$

et le polynôme  $F_0 = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5^2 X_6^3$  en gardant le point  $m_0 = (0, 0, 2)$  comme point intérieur. On considère l'ouvert affine défini par le cône engendré par  $\eta_1, \eta_4, \eta_6$  et on note  $I = \{1, 4, 6\}$ , l'ensemble simplicial correspondant. On obtient les polynômes  $F_{0I}, F_{1I}, F_{2I}, F_{3I} \in \mathbb{C}[X_1, X_4, X_6]$  :

$$\begin{aligned} F_{0I} &= X_1 X_4 X_6^3 \\ F_{1I} &= a_0 + a_1 X_6^4 + a_2 X_4^2 X_6^2 + a_3 X_1^2 X_4^2 X_6^2 + a_4 X_1^2 X_6^4 \\ F_{2I} &= b_0 + b_1 X_6^4 + b_2 X_4^2 X_6^2 + b_3 X_1^2 X_4^2 X_6^2 + b_4 X_1^2 X_6^4 \\ F_{3I} &= c_0 + c_1 X_6^4 + c_2 X_4^2 X_6^2 + c_3 X_1^2 X_4^2 X_6^2 + c_4 X_1^2 X_6^4. \end{aligned}$$

Le calcul de la base de Gröbner via l'ordre gradué lexicographique inverse montre que l'anneau quotient  $\mathbb{C}[X_1, X_4, X_6]/\langle F_{1I}, F_{2I}, F_{3I} \rangle$  est un espace vectoriel de dimension 32 dont une base monomiale est représentée ci-après figure 5.15.

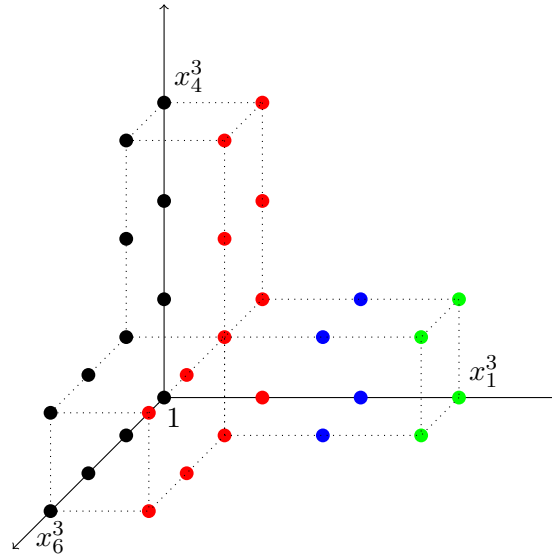


FIGURE 5.15 – Base monomiale de  $\mathbb{C}[X_1, X_4, X_6]/\langle F_{1I}, F_{2I}, F_{3I} \rangle$ .

Calcul du symbole de Kronecker dans le tore avec la variété  $X_{\Sigma'}$

$m$	$T^m$	$M_I$	$\ell(F_{0I}^{-1}M_I)$
$(0, 0, 2)$	$T_1^0 T_2^0 T_3^2$	$X_1^1 X_4^1 X_6^5$	0
$(0, 0, 1)$	$T_1^0 T_2^0 T_3^1$	$X_1^2 X_4^2 X_6^8$	0
$(1, 0, 1)$	$T_1^1 T_2^0 T_3^1$	$X_1^1 X_4^1 X_6^9$	0
$(0, 1, 1)$	$T_1^0 T_2^1 T_3^1$	$X_1^1 X_4^3 X_6^7$	0
$(-1, 0, 1)$	$T_1^{-1} T_2^0 T_3^1$	$X_1^3 X_4^3 X_6^7$	0
$(0, -1, 1)$	$T_1^0 T_2^{-1} T_3^1$	$X_1^3 X_4^1 X_6^9$	0

$m$	$T^m$	$M_I$	$\ell(F_{0I}^{-1}M_I)$
$(1, -1, 1)$	$T_1^1 T_2^{-1} T_3^1$	$X_1^2 X_4^0 X_6^{10}$	$-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_4 \end{vmatrix}^{-1}$
$(0, -2, 1)$	$T_1^0 T_2^{-2} T_3^1$	$X_1^4 X_4^0 X_6^{10}$	$-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}^{-1}$
$(-1, -1, 1)$	$T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^1$	$X_1^4 X_4^2 X_6^8$	$\begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}^{-1}$
$(-1, 1, 1)$	$T_1^{-1} T_2^1 T_3^1$	$X_1^2 X_4^4 X_6^6$	$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^{-1}$
$(1, 1, 1)$	$T_1^1 T_2^1 T_3^1$	$X_1^0 X_4^2 X_6^8$	$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}^{-1}$
$(0, -1, 2)$	$T_1^0 T_2^{-1} T_3^2$	$X_1^2 X_4^0 X_6^6$	$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}^{-1}$
$(1, 0, 2)$	$T_1^1 T_2^0 T_3^2$	$X_1^0 X_4^0 X_6^6$	$-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_4 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}^{-1}$

### 5.2.4 Étude d'exemples non simpliciaux

#### Exemple 1

Nous envisageons à présent le cas où la somme de Minkowski des polytopes de Newton présente un éventail dual dont aucun cône de dimension maximale n'est simplicial. Il est nécessaire dans ce cas de procéder à un raffinement de l'éventail dual selon la méthode indiquée.

On considère la famille de polynômes de Laurent :

$$\begin{aligned} f_1(T) &= a_0T_3 + a_1T_1 + a_2T_2 + a_3T_1^{-1} + a_4T_2^{-1} + a_5T_3^{-1} \\ f_2(T) &= b_0T_3 + b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_1^{-1} + b_4T_2^{-1} + b_5T_3^{-1} \\ f_3(T) &= c_0T_3 + c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_1^{-1} + c_4T_2^{-1} + c_5T_3^{-1} \end{aligned}$$

Chaque polynôme de Laurent admet l'octaèdre  $P$  représenté dans la figure 5.16 comme polytope de Laurent.

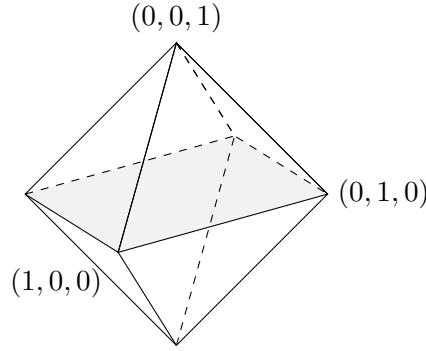


FIGURE 5.16 – Octaèdre

On considère

$$\eta_1 \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \eta_2 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \eta_3 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \eta_4 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad \eta_5 \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \eta_6 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \eta_7 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \eta_8 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} .$$

les vecteurs primitifs normaux aux facettes de  $P$ . Comme dans les cas précédents, un vecteur primitif  $\eta_i$  est associé à une variable  $X_i$  et un diviseur irréductible  $D_i$ .

Chaque sommet de l'octaèdre est intersection de quatre facettes. Aussi tous les cônes de dimension 3 de  $\Sigma$ , l'éventail dual de  $P$ , sont non simpliciaux.

L'homogénéisation des polynômes de Laurent  $f_1, f_2, f_3$  par rapport au diviseur défini par l'octaèdre donne les polynômes  $F_1, F_2, F_3$  :

$$\begin{aligned} F_1 &= a_0X_5^2X_6^2X_7^2X_8^2 + a_1X_2^2X_3^2X_6^2X_7^2 + a_2X_3^2X_4^2X_7^2X_8^2 + a_3X_1^2X_4^2X_5^2X_8^2 \\ &\quad + a_4X_1^2X_2^2X_5^2X_6^2 + a_5X_1^2X_2^2X_3^2X_4^2 \\ F_2 &= b_0X_5^2X_6^2X_7^2X_8^2 + b_1X_2^2X_3^2X_6^2X_7^2 + b_2X_3^2X_4^2X_7^2X_8^2 + b_3X_1^2X_4^2X_5^2X_8^2 \\ &\quad + b_4X_1^2X_2^2X_5^2X_6^2 + b_5X_1^2X_2^2X_3^2X_4^2 \\ F_3 &= c_0X_5^2X_6^2X_7^2X_8^2 + c_1X_2^2X_3^2X_6^2X_7^2 + c_2X_3^2X_4^2X_7^2X_8^2 + c_3X_1^2X_4^2X_5^2X_8^2 \\ &\quad + c_4X_1^2X_2^2X_5^2X_6^2 + c_5X_1^2X_2^2X_3^2X_4^2. \end{aligned}$$

**Étude des conditions de régularité** On rappelle que la condition de régularité des polynômes de Laurent par rapport à leur polytope de Newton  $f_1, f_2, f_3$  est équivalente à la condition suivante :

$$\{(x_\rho, \rho \in \Sigma(1)) \mid \forall k, F_k(x_\rho, \rho \in \Sigma(1)) = 0, \forall \sigma \in \Sigma(n), \prod_{\rho \in \sigma(1)} x_\rho \neq 0\} \subset (\mathbb{C}^*)^8$$

où  $\Sigma$  est l'éventail dual de  $P$ , somme de Minkowski des polynômes de Newton de  $f_1, f_2, f_3$  et  $F_1, F_2, F_3$  sont les homogénéisés respectifs de  $f_1, f_2, f_3$  par rapport au diviseur associé à  $P$ .

Nous exprimons cette condition dans le cône  $\sigma$  engendré par les vecteurs primitifs  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ . Un point  $x \in U_\sigma$  admet un système de coordonnées homogènes  $(x_1, \dots, x_4, 1, 1, 1)$ . Si  $x$  n'est dans le tore de  $X_P$  alors il existe au moins une coordonnée nulle, disons  $x_1 = 0$ .

Un système de coordonnées  $(0, x_2, x_3, x_4, 1, \dots, 1)$  est solution des équations  $F_1 = F_2 = F_3 = 0$  si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_3^2 x_4^2 = 0 \\ b_0 + b_1 x_2^2 x_3^2 + b_2 x_3^2 x_4^2 = 0 \\ c_0 + c_1 x_2^2 x_3^2 + c_2 x_3^2 x_4^2 = 0 \end{cases}$$

Par suite, la famille  $F_1, F_2, F_3$  est sans zéro commun dans  $U_\sigma$  si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Compte-tenu des symétries de l'octaèdre, on en déduit que les zéros communs dans  $X_P$  des polynômes  $F_1, F_2, F_3$  sont dans le tore si, et seulement si, pour tout triplet de facettes choisies

dans un cône de dimension 3 de  $\Sigma$  repérées par les vecteurs  $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \eta_{i_3}$ , on a  $\begin{vmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & a_{i_3} \\ b_{i_1} & b_{i_2} & b_{i_3} \\ c_{i_1} & c_{i_2} & c_{i_3} \end{vmatrix} \neq 0$ .

Ces conditions traduisent l'hypothèse de régularité des polynômes de Laurent  $f_1, f_2, f_3$  par rapport à leur polytope de Newton.

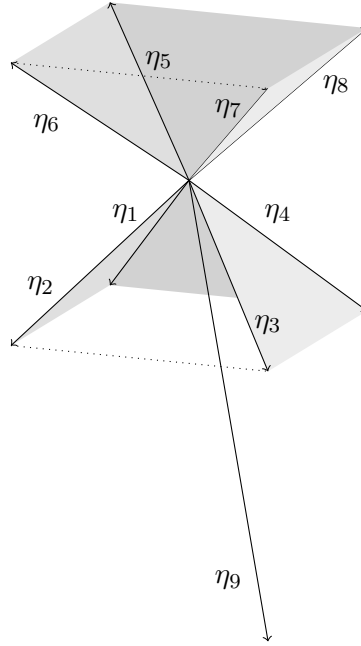
**Calcul pour 3 polynômes de Laurent particuliers** Pour conduire les calculs avec Maple, on traite un cas particulier en choisissant les coefficients de  $f_1, f_2, f_3$ . On pose ainsi

$$\begin{aligned} a_0 &= a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1, \\ b_0 &= b_1 = b_5 = 1, \quad b_2 = b_4 = 4, \quad b_3 = 2, \\ c_0 &= c_2 = c_4 = c_5 = 1, \quad c_1 = c_3 = -1. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que les conditions de régularité par rapport aux polytopes de Newton sont vérifiées.

On raffine l'éventail  $\Sigma$  en adjoignant un neuvième vecteur primitif  $\eta_9 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix}$ ,  $\eta_9 = \eta_1 +$

$\eta_2 + \eta_3$ . le vecteur  $\eta_9$  fournit une neuvième variable  $X_9$  et le diviseur irréductible  $D_9$ . Le cône non simplicial engendré par  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  est scindé en 4 cônes simpliciaux cône( $\eta_1, \eta_2, \eta_9$ ), cône( $\eta_1, \eta_4, \eta_9$ ), cône( $\eta_2, \eta_3, \eta_9$ ) cône( $\eta_3, \eta_4, \eta_9$ ). On obtient un nouvel éventail  $\Sigma'$ .


 FIGURE 5.17 – Eventail  $\Sigma'$ .

L'homogénéisation de  $f_1, f_2, f_3$  par rapport au diviseur  $D = \sum_{i=1}^8 + 3D_9$  donne les trois polynômes homogènes pour la variété torique  $X'$  d'éventail  $\Sigma'$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= X_5^2 X_6^2 X_7^2 X_8^2 + X_2^2 X_3^2 X_6^2 X_7^2 X_9^4 + X_3^2 X_4^2 X_7^2 X_8^2 X_9^2 + X_1^2 X_4^2 X_5^2 X_8^2 X_9^2 \\
 &\quad + X_1^2 X_2^2 X_5^2 X_6^2 X_9^4 + X_1^2 X_2^2 X_3^2 X_4^2 X_9^6 \\
 F_2 &= X_5^2 X_6^2 X_7^2 X_8^2 + 2X_2^2 X_3^2 X_6^2 X_7^2 X_9^4 + 4X_3^2 X_4^2 X_7^2 X_8^2 X_9^2 + 2X_1^2 X_4^2 X_5^2 X_8^2 X_9^2 \\
 &\quad + 4X_1^2 X_2^2 X_5^2 X_6^2 X_9^4 + X_1^2 X_2^2 X_3^2 X_4^2 X_9^6 \\
 F_3 &= X_5^2 X_6^2 X_7^2 X_8^2 - X_2^2 X_3^2 X_6^2 X_7^2 X_9^4 + X_3^2 X_4^2 X_7^2 X_8^2 X_9^2 - X_1^2 X_4^2 X_5^2 X_8^2 X_9^2 \\
 &\quad + X_1^2 X_2^2 X_5^2 X_6^2 X_9^4 + X_1^2 X_2^2 X_3^2 X_4^2 X_9^6.
 \end{aligned}$$

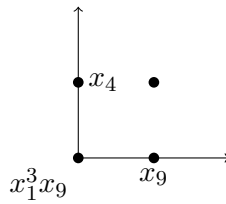
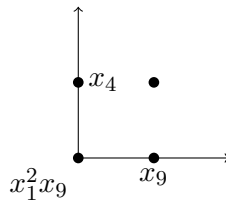
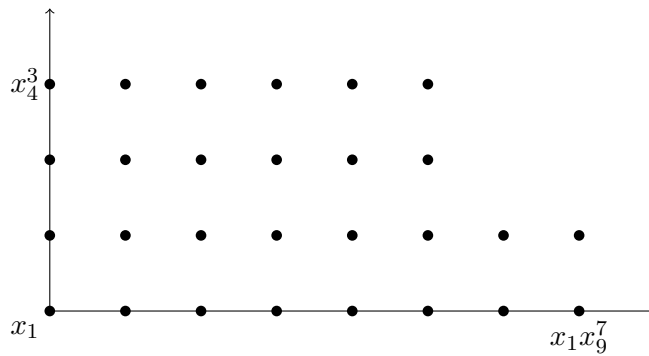
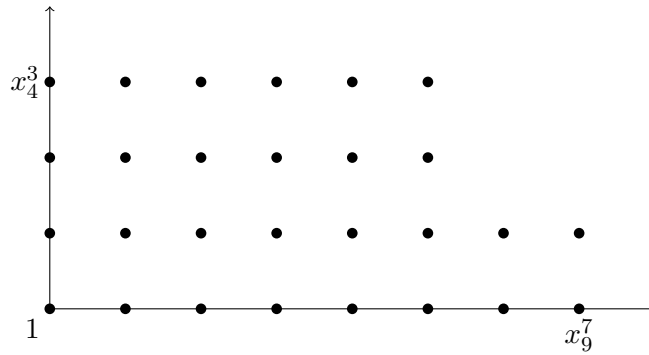
On choisit le point de coordonnées  $(0, 0, 2)$  pour définir le quatrième polynôme  $F_0 = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5^5 X_6^5 X_7^5 X_8^5 X_9^3$ .

Le calcul du symbole de Kronecker est effectué dans l'ouvert affine correspondant au cône simplicial  $\text{cône}(\eta_1, \eta_4, \eta_9)$ . La suite des calculs suit l'algorithme 5.1.1.

La déshomogénéisation des polynômes  $F_0, F_1, F_2, F_3$  relativement à l'ensemble simplicial  $I = \{1, 4, 9\}$  fournit les quatre polynômes :

$$\begin{aligned}
 F_{0I} &= X_1 X_4 X_9^3 \\
 F_{1I} &= X_1^2 X_4^2 X_9^6 + X_1^2 X_4^2 X_9^2 + X_4^2 X_9^2 + X_1^2 X_9^2 + X_9^4 + 1 \\
 F_{2I} &= X_1^2 X_4^2 X_9^6 - X_1^2 X_4^2 X_9^2 + X_4^2 X_9^2 + X_1^2 X_9^2 - X_9^4 + 1.
 \end{aligned}$$

Le quotient  $\mathbb{C}[X_1, X_4, X_9]/\langle F_{1I}, F_{2I}, F_{3I} \rangle$  est de dimension 64. On donne ci-après une représentation de la base monomiale obtenue après calcul de la base de Gröbner de l'idéal  $\langle F_{1I}, F_{2I}, F_{3I} \rangle$  pour l'ordre gradué lexicographique inverse.



Le tableau ci-après récapitule l'évaluation du symbole de Kronecker sur les monômes intérieurs au polytope  $3P$ . On vérifie une fois encore l'annulation du symbole de Kronecker sur les monômes intérieurs au polytope, somme de Minkowski des polytopes de Newton des  $f_k$ .

$m$	$T^m$	$M_I$	$\ell(F_{0I}^{-1}M_I)$
(0, 0, 2)	$T_1^0 T_2^0 T_3^2$	$X_1^1 X_4^1 X_9^5$	0
(0, 0, -2)	$T_1^0 T_2^0 T_3^{-2}$	$X_1^1 X_4^1 X_9^{17}$	0
(0, 0, 1)	$T_1^0 T_2^0 T_3^1$	$X_1^2 X_4^2 X_9^8$	0
(0, 0, -1)	$T_1^0 T_2^0 T_3^{-1}$	$X_1^2 X_4^2 X_9^{14}$	0
(1, 0, 1)	$T_1^1 T_2^0 T_3^1$	$X_1^1 X_4^1 X_9^9$	0
(1, 0, -1)	$T_1^1 T_2^0 T_3^{-1}$	$X_1^1 X_4^1 X_9^{13}$	0
(0, 1, 1)	$T_1^0 T_2^1 T_3^1$	$X_1^1 X_4^3 X_9^7$	0
(0, 1, -1)	$T_1^0 T_2^1 T_3^{-1}$	$X_1^1 X_4^3 X_9^{13}$	0
(-1, 0, 1)	$T_1^{-1} T_2^0 T_3^1$	$X_1^3 X_4^3 X_9^7$	0
(-1, 0, -1)	$T_1^{-1} T_2^0 T_3^{-1}$	$X_1^3 X_4^3 X_9^{13}$	0
(0, -1, 1)	$T_1^0 T_2^{-1} T_3^1$	$X_1^3 X_4^1 X_9^9$	0
(0, -1, -1)	$T_1^0 T_2^{-1} T_3^{-1}$	$X_1^3 X_4^1 X_9^{15}$	0
(0, 0, 0)	$T_1^0 T_2^0 T_3^0$	$X_1^3 X_4^3 X_9^{11}$	0
(1, 0, 0)	$T_1^1 T_2^0 T_3^0$	$X_1^2 X_4^2 X_9^{12}$	0
(1, 1, 0)	$T_1^1 T_2^1 T_3^0$	$X_1^1 X_4^3 X_9^{11}$	0
(1, -1, 0)	$T_1^1 T_2^{-1} T_3^0$	$X_1^3 X_4^1 X_9^{13}$	0
(0, 1, 0)	$T_1^0 T_2^1 T_3^0$	$X_1^2 X_4^4 X_9^{10}$	0
(0, -1, 0)	$T_1^0 T_2^{-1} T_3^0$	$X_1^4 X_4^2 X_9^{11}$	0
(-1, 1, 0)	$T_1^{-1} T_2^1 T_3^0$	$X_1^3 X_4^5 X_9^9$	0
(-1, -1, 0)	$T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^0$	$X_1^5 X_4^3 X_9^{11}$	0
(-1, 0, 0)	$T_1^{-1} T_2^0 T_3^0$	$X_1^4 X_4^4 X_9^{10}$	0
(2, 0, 0)	$T_1^2 T_2^0 T_3^0$	$X_1^1 X_4^1 X_9^{13}$	0
(0, 2, 0)	$T_1^0 T_2^2 T_3^0$	$X_1^1 X_4^5 X_9^9$	0
(0, -2, 0)	$T_1^0 T_2^{-2} T_3^0$	$X_1^5 X_4^1 X_9^{13}$	0
(-2, 0, 0)	$T_1^{-2} T_2^0 T_3^0$	$X_1^5 X_4^5 X_9^9$	0

### Exemple 2

On considère la famille générique de polynômes de Laurent :

$$f_1(T) = a_0 + a_5 T_3$$

$$f_2(T) = b_1 T_1 + b_2 T_2 + b_3 T_1^{-1} + b_4 T_2^{-1} + b_5 T_3 + b_6 T_3^{-1}$$

$$f_3(T) = c_1 T_1 + c_2 T_2 + c_3 T_1^{-1} + c_4 T_2^{-1} + c_5 T_3 + c_6 T_3^{-1}$$

Le polytope de Newton de  $f_1$  est le segment dont les extrémités ont pour coordonnées  $(0, 0, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ . Les polynômes  $f_2$  et  $f_3$  ont comme polytope de Newton, le polytope décrit à la

figure 5.16. La somme de Minkowski des polytopes de Newton est le dodécaèdre  $P$  représenté à la figure 5.18. On suppose que  $f_1, f_2, f_3$  possèdent un nombre fini de zéros communs dans le tore. Par hypothèse, les polynômes  $f_1, f_2, f_3$  sont réguliers par rapport à leurs polytopes de Newton.

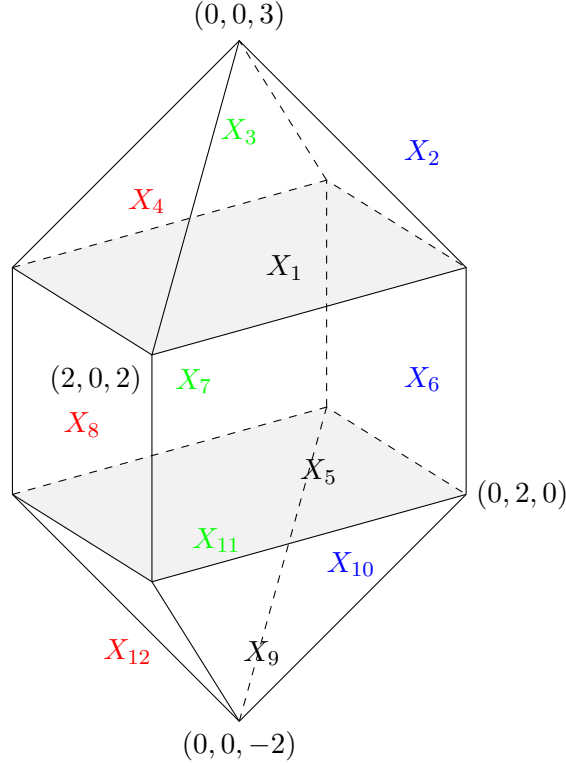


FIGURE 5.18 – Somme de Minkowski des polytopes de Newton de  $f_1, f_2$  et  $f_3$

Les rayons de l'éventail dual de  $P$  sont engendrés par les vecteurs primitifs

$$\eta_1 \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad \eta_2 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad \eta_3 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad \eta_4 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad \eta_5 \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \eta_6 \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\eta_7 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \eta_8 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \eta_9 \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \eta_{10} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \eta_{11} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \eta_{12} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

qui engendrent les normales rentrantes aux facettes de  $P$  et induisent les variables  $X_1, \dots, X_{12}$  de l'espace de coordonnées homogènes. Aucun des cônes de dimension 3 de la variété torique projective  $X_P$  définie par le dodécaèdre  $P$  n'est simplicial. Le polynôme de Laurent  $f_k, k = 1, \dots, 3$  de polytope de Newton  $P_k$  fournit un diviseur de Cartier sans points de base  $\Delta_k$ . On obtient  $\Delta_1 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$  et  $\Delta_2 = \Delta_3 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6 + D_7 + D_8 + D_9 + D_{10} + D_{11} + D_{12}$ . En homogénéisant  $f_k$  par rapport au diviseur  $\Delta_k, k = 1, \dots, 3$  on obtient les polynômes homogènes :

$$F_1 = a_0 X_1 X_2 X_3 X_4 + a_5 X_9 X_{10} X_{11} X_{12}$$

$$F_2 = b_1 X_2^2 X_3^2 X_6^2 X_7^2 X_{10}^2 X_{11}^2 + b_2 X_3^2 X_4^2 X_7^2 X_8^2 + b_3 X_1^2 X_4^2 X_9^2 X_{12}^2 X_5^2 X_8^2 + \\ b_4 X_1^2 X_2^2 X_5^2 X_6^2 X_9^2 X_{10}^2 + b_5 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9^2 X_{10}^2 X_{11}^2 X_{12}^2 + b_6 X_1^2 X_2^2 X_3^2 X_4^2 X_5 X_6 X_7 X_8$$

$$F_3 = c_1 X_2^2 X_3^2 X_6^2 X_7^2 X_{10}^2 X_{11}^2 + c_2 X_3^2 X_4^2 X_7^2 X_8^2 + c_3 X_1^2 X_4^2 X_9^2 X_{12}^2 X_5^2 X_8^2 + \\ c_4 X_1^2 X_2^2 X_5^2 X_6^2 X_9^2 X_{10}^2 + c_5 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9^2 X_{10}^2 X_{11}^2 X_{12}^2 + c_6 X_1^2 X_2^2 X_3^2 X_4^2 X_5 X_6 X_7 X_8$$

On sélectionne le point  $m_0 = (0, 0, 2)$  intérieur au dodécaèdre et  $q = 1$  ce qui donne

$$F_0 = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5^2 X_6^2 X_7^2 X_8^2 X_9^4 X_{10}^2 X_{11}^2 X_{12}^2.$$

Le premier raffinement considéré consiste à rendre simplicial le cône engendré par les vecteurs primitifs  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  en ajoutant à l'éventail le cône  $(\eta_1, \eta_3)$ . Ce type de raffinement ne modifie pas l'homogénéisation de  $f_1, f_2, f_3$  puisqu'aucun rayon n'est ajouté à l'éventail. le calcul est effectué dans l'ouvert affine indicé par l'ensemble simplicial  $I_1 = \{1, 2, 3\}$ .

Le second raffinement consiste à ajouter aux rayons de l'éventail initial le rayon engendré par le vecteur primitif  $\eta_{13} = \frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_3$  de coordonnées  $(0, 0, -1)$  dans la base canonique. Le cône de l'éventail initial engendré par les vecteurs  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  est scindé en 4 cônes simpliciaux de dimension 3. Le calcul est effectué dans le cône repéré par l'ensemble simplicial  $I_2 = \{1, 2, 13\}$ . Le polynôme  $f_1$  est homogénéisé relativement au diviseur sans points de base  $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_{13}$ ,  $f_2$  et  $f_3$  sont homogénéisés par rapport au diviseur sans points de base  $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6 + D_7 + D_8 + D_9 + D_{10} + D_{11} + D_{12} + D_{13}$ . On obtient les polynômes homogènes  $G_1, G_2, G_3$  suivants sur l'éclatement de la variété  $X_P$ .

$$G_1 = a_0 X_1 X_2 X_3 X_4 X_{13} + a_5 X_9 X_{10} X_{11} X_{12}$$

$$G_2 = b_1 X_2^2 X_3^2 X_6^2 X_7^2 X_{10}^2 X_{11}^2 X_{13} + b_2 X_3^2 X_4^2 X_7^2 X_8^2 X_{13} + b_3 X_1^2 X_4^2 X_9^2 X_{12}^2 X_5^2 X_8^2 X_{13} + \\ b_4 X_1^2 X_2^2 X_5^2 X_6^2 X_9^2 X_{10}^2 X_{13} + b_5 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9^2 X_{10}^2 X_{11}^2 X_{12}^2 + b_6 X_1^2 X_2^2 X_3^2 X_4^2 X_5 X_6 X_7 X_8 X_{13}^2$$

$$G_3 = c_1 X_2^2 X_3^2 X_6^2 X_7^2 X_{10}^2 X_{11}^2 X_{13} + c_2 X_3^2 X_4^2 X_7^2 X_8^2 X_{13} + c_3 X_1^2 X_4^2 X_9^2 X_{12}^2 X_5^2 X_8^2 X_{13} + \\ c_4 X_1^2 X_2^2 X_5^2 X_6^2 X_9^2 X_{10}^2 X_{13} + c_5 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9^2 X_{10}^2 X_{11}^2 X_{12}^2 + c_6 X_1^2 X_2^2 X_3^2 X_4^2 X_5 X_6 X_7 X_8 X_{13}^2$$

Le calcul du symbole de Kronecker sur les monômes de Laurent déterminés par les 15 points à coordonnées entières du polytope  $P$  situés dans le demi-espace ouvert  $z > 0$  a été effectué en utilisant les deux types de raffinement définis précédemment. Les résultats sont rassemblés dans le tableau qui suit.

$m$	$T^m$	$M_{I_1}$	$M_{I_2}$	$\ell^{\mathcal{F}}(T^m)$
(0, 0, 3)	$T_3^3$	1	1	0
(1, 0, 2)	$T_1^1 T_3^2$	$X_2^1 X_3^2$	$X_2^2 X_{13}^1$	0
(0, 1, 2)	$T_2^1 T_3^2$	$X_3^2$	$X_{13}^1$	0
(-1, 0, 2)	$T_1^{-1} T_3^2$	$X_1^2$	$X_1^2 X_{13}^1$	0
(0, -1, 2)	$T_2^{-1} T_3^2$	$X_1^2 X_2^2$	$X_1^2 X_2^2 X_{13}$	0
(0, 0, 2)	$T_3^2$	$X_1^1 X_2^1 X_3^1$	$X_1^1 X_2^1 X_{13}^1$	0
(2, 0, 1)	$T_1^2 T_3^1$	$X_2^4 X_3^4$	$X_2^4 X_{13}^2$	$\frac{b_2 c_4 - b_4 c_2}{a_5 (b_1 c_4 - b_4 c_1) (b_1 c_2 - b_2 c_1)}$
(1, 1, 1)	$T_1^1 T_2^1 T_3^1$	$X_2^2 X_3^4$	$X_2^2 X_{13}^2$	$\frac{-1}{a_5 (b_1 c_2 - b_2 c_1)}$
(0, 2, 1)	$T_2^2 T_3^1$	$X_3^4$	$X_{13}^2$	$\frac{b_1 c_3 - b_3 c_1}{a_5 (b_1 c_2 - b_2 c_1) (b_2 c_3 - b_3 c_2)}$
(-1, 1, 1)	$T_1^{-1} T_2^1 T_3^1$	$X_1^4 X_2^2$	$X_1^2 X_{13}^2$	$\frac{-1}{a_5 (b_2 c_3 - b_3 c_2)}$
(-2, 0, 1)	$T_1^{-2} T_3^1$	$X_1^4$	$X_1^4 X_{13}^2$	$\frac{b_2 c_4 - b_4 c_2}{a_5 (b_3 c_4 - b_4 c_3) (b_2 c_3 - b_3 c_2)}$
(-1, -1, 1)	$T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^1$	$X_1^4 X_2^2$	$X_1^4 X_2^2 X_{13}^2$	$\frac{-1}{a_5 (b_3 c_4 - b_4 c_3)}$
(0, -2, 1)	$T_2^{-2} T_3^1$	$X_1^4 X_2^4$	$X_1^4 X_2^4 X_{13}^2$	$\frac{b_1 c_3 - b_3 c_1}{a_5 (b_1 c_4 - b_4 c_1) (b_3 c_4 - b_4 c_3)}$
(1, -1, 1)	$T_1^1 T_2^{-1} T_3^1$	$X_1^2 X_2^4 X_3^2$	$X_1^2 X_2^4 X_{13}^2$	$\frac{1}{a_5 (b_1 c_4 - b_4 c_1)}$
(0, 0, 1)	$T_3$	$X_1^2 X_2^2 X_3^2$	$X_1^2 X_2^2 X_{13}^2$	0



## Chapitre 6

# Symbole de Kronecker torique

Dans cette section, le symbole de Kronecker est étendu à une variété torique projective de dimension  $n$  et défini pour une famille de  $n + 1$  polynômes homogènes  $F_0, \dots, F_n$  présentant des conditions particulières sur les degrés et les zéros.

La définition est d'abord établie pour une variété simpliciale. Le cas non simplicial est envisagé en raffinant l'éventail initial de façon à obtenir un éventail simplicial. La méthode suivie reprend la méthode développée dans le chapitre 4.

### 6.1 Symbole de Kronecker dans une variété torique complète

Les notations adoptées sont celles des chapitres antérieurs. On considère  $X$  une variété torique projective définie par un polytope  $P$  convexe et rationnel de dimension  $n$ . Dans ce paragraphe, l'éventail  $\Sigma$  associé à  $P$  est supposé simplicial. On note  $\eta_1, \dots, \eta_s$  les vecteurs primitifs des rayons de  $\Sigma$ . Chaque rayon donne une variable  $X_j$  et un diviseur  $T_N$ -invariant  $D_j$ . Le réseau  $N \simeq \mathbb{Z}^n$  est rapporté à la base  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $N \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$  est l'espace vectoriel support de l'éventail  $\Sigma$ . L'anneau de coordonnées homogènes  $S = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_s]$  est gradué par le groupe de Chow,  $S = \bigoplus_{\alpha \in \text{Cl}(X)} S_\alpha$ .

On considère une famille de  $n+1$  polynômes homogènes dans l'anneau  $S$ ,  $\mathcal{F} = \{F_0, \dots, F_n\}$ . Pour tout  $0 \leq k \leq n$ , on choisit  $\Delta_k$  un représentant  $T_N$ -invariant du degré de  $F_k$ ,  $\Delta_k = \sum_{j=1}^s b_j D_j$ .

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad F_k = \sum_{m \in P_{\Delta_k} \cap M} a_m \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}}$$

où  $M$  est le réseau dual de  $N$ . En certaines occasions, on utilisera la notation donnée dans [11] :

$$X^{\langle m, \Delta_k \rangle} = \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}}.$$

On suppose que  $\mathcal{F}$  vérifie la condition  $(\mathcal{C}_0)$  :

**Condition  $(\mathcal{C}_0)$**

- $\mathcal{F}$  n'a pas de zéro dans  $X$ ,
- pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la famille  $\mathcal{F}_{\hat{k}} = \{F_0, \dots, F_{k-1}, F_{k+1}, \dots, F_n\}$  admet un nombre fini de zéros dans le tore de  $X$ .

A tout ensemble simplicial maximal  $I$ , c'est-à-dire un ensemble qui indice les vecteurs primitifs d'un cône de  $\Sigma(n)$ , correspond la famille  $\mathcal{F}_{\hat{r},I}$  des  $n$  polynômes  $F_{kI}$ ,  $k \neq r$ , définis par  $F_{kI}(X_I) = F_k(X_1, \dots, X_s)$  avec  $X_j = 1$  si  $j \notin I$ .

En complétant la famille  $\mathcal{F}_{\hat{r},I}$  par les polynômes  $X_i - 1$ ,  $i \notin I$ , on forme la famille  $\mathcal{F}_{\hat{r},I}$  composée de  $s$  polynômes. La famille  $\mathcal{F}_{\hat{r},I}$  a un nombre fini de zéros dans  $\mathbb{C}^s$  car  $X$  est simpliciale. L'anneau  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_s]/\langle \mathcal{F}_{\hat{r},I} \rangle$  admet donc un symbole de Kronecker affine  $\ell$ .

On note encore  $A_{r,I}$ , l'anneau quotient  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_s]/\langle \mathcal{F}_{\hat{r},I} \rangle$ .

**Proposition 6.1.** *L'image dans  $A_{r,I} \otimes A_{r,I}$  du polynôme*

$$\text{Bez} = \frac{|\det(\eta_I)|}{\det(\eta_I) \prod_{i \notin I} X_i} \begin{vmatrix} F_0 & \partial_1 F_0 & \dots & \partial_s F_0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ F_n & \partial_1 F_n & \dots & \partial_s F_n \\ X_{i,i \notin I} - 1 & \partial_1 X_{i,i \notin I} - 1 & \dots & \partial_s X_{i,i \notin I} - 1 \end{vmatrix}$$

est un bezoutien généralisé.

**Preuve.**

D'après le théorème des zéros de Hilbert,  $F_r$  est inversible modulo  $\mathcal{F}_{\hat{r}}$ . La classe de Bez dans  $A_{r,I} \otimes A_{r,I}$  est donc le produit de la classe du bezoutien des  $n$  polynômes de la famille  $\mathcal{F}_{\hat{r},I}$  par un élément inversible de  $A_{r,I}$ . □

*Remarque 6.1.* La définition de Bez est indépendante de la façon dont on ordonne les indices de  $I$  et  $\bar{I}$ . La forme dualisante  $\ell_{\hat{r},I}$  associée à la classe de Bez dans  $A_{r,I} \otimes A_{r,I}$  ne dépend donc que du choix de la base de référence dans  $N$ .

*Remarque 6.2.* Les anneaux  $A_{r,I}$  et  $\mathbb{C}[X_I]/\langle \mathcal{F}_{\hat{r},I} \rangle$  où  $\mathbb{C}[X_I] = \mathbb{C}[X_j, j \in I]$  sont isomorphes. On peut donc identifier l'image de Bez dans  $A_{r,I} \otimes A_{r,I}$  et l'image du polynôme :

$$\frac{|\det(\eta_I)|}{\det(\eta_I)} \begin{vmatrix} F_{0,I} & \partial_{i,i \in I} F_{0,I} \\ \vdots & \vdots \\ F_{r,I} & \partial_{i,i \in I} F_{r,I} \\ \vdots & \vdots \\ F_{n,I} & \partial_{i,i \in I} F_{n,I} \end{vmatrix}$$

dans  $\mathbb{C}[X_I]/\langle \mathcal{F}_{\hat{r},I} \rangle \otimes \mathbb{C}[X_I]/\langle \mathcal{F}_{\hat{r},I} \rangle$ .

Dans la suite, *Bez* désignera indifféremment l'image de Bez dans  $A_{r,I} \otimes A_{r,I}$  et l'image de

$$\frac{|\det(\eta_I)|}{\det(\eta_I)} \begin{vmatrix} F_{0,I} & \partial_{i,i \in I} F_{0,I} \\ \vdots & \vdots \\ F_{r,I} & \partial_{i,i \in I} F_{r,I} \\ \vdots & \vdots \\ F_{n,I} & \partial_{i,i \in I} F_{n,I} \end{vmatrix} \text{ dans } \mathbb{C}[X_I]/\langle \mathcal{F}_{\hat{r},I} \rangle \otimes \mathbb{C}[X_I]/\langle \mathcal{F}_{\hat{r},I} \rangle.$$

**Lemme 6.1.** *Soit  $A$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre de dimension vectorielle finie. On suppose que  $A$  est de Gorenstein. Si  $B_1$  et  $B_2$  sont deux bezoutiens généralisés de  $A$  tels que  $B_2 = aB_1$   $a \in A$  alors leurs formes dualisantes associées  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont liées par la relation  $\ell_2 = a^{-1}\ell_1$ .*

**Preuve.**

Par définition  $B_1^s(\ell_1) = 1$ , d'où  $(aB_1)^s(a^{-1} \cdot \ell_1) = 1$ . Or  $B_2^s(\ell_2) = 1$  par conséquent  $\ell_2$  et  $a^{-1} \cdot \ell_1$ .  $\square$

**Proposition 6.2.** *La forme dualisante associée à Bez et définie sur  $A_{r,I}$  (resp.  $\mathbf{C}[X_I] \setminus \langle \mathcal{F}_{\hat{r},I} \rangle$ ) est égale à  $\frac{|\det(\eta_I)|}{\det(\eta_I)} G_{r,I} \cdot \ell$  où  $\ell$  est le symbole de Kronecker affine sur  $A_{r,I}$  (resp.  $\mathbf{C}[X_I] \setminus \langle \mathcal{F}_{\hat{r},I} \rangle$ ) et  $G_{r,I}$  l'inverse de  $F_{r,I}$  modulo  $\mathcal{F}_{\hat{r},I}$  (resp.  $\mathcal{F}_{\hat{r},I}$ ).*

**Preuve.**

C'est une conséquence du lemme précédent.  $\square$

**Théorème 6.1.** *Soient  $I_1$  et  $I_2$  deux ensembles simpliciaux associés à des cônes dans  $\Sigma(n)$ . Soit  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .*

*Pour tout polynôme homogène  $H \in S_\rho$  où  $\rho = \sum_{k=0}^n \deg F_k - \sum_{j=1}^s \deg X_j$  est le degré critique de la famille  $\mathcal{F}$ ,*

$$\frac{|\det(\eta_{I_1})|}{\det(\eta_{I_1})} \ell(H_{I_1} G_{rI_1}) = \frac{|\det(\eta_{I_2})|}{\det(\eta_{I_2})} \ell(H_{I_2} G_{rI_2}).$$

**Preuve.** La preuve s'inspire largement de celle donnée dans [14]. La base  $(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n)$  désigne une  $\mathbb{Z}$ -base de  $M$ , réseau dual de  $N$ . Pour tout  $i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose :

$$J_i^+ = \{j \in \{1, \dots, s\}, \langle e_i, \eta_j \rangle \geq 0\}$$

et

$$J_i^- = \{j \in \{1, \dots, s\}, \langle e_i, \eta_j \rangle < 0\}.$$

On introduit  $\lambda$  et  $\mu$  deux  $s$ -uplets d'indéterminées dans l'ordre suivant :

$$\lambda = (\lambda_{\bar{I}_2}, \lambda_{I_2}) \quad \mu = (\mu_{\bar{I}_1}, \mu_{I_1})$$

. On considère alors

$$\Lambda_i^+(\lambda) = \prod_{j \in J_i^+} \lambda_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \quad \text{et} \quad \Lambda_i^-(\lambda) = \prod_{j \in J_i^-} \lambda_j^{-\langle e_i, \eta_j \rangle}$$

et

$$M_i^+(\mu) = \prod_{j \in J_i^+} \mu_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} \quad \text{et} \quad M_i^-(\mu) = \prod_{j \in J_i^-} \mu_j^{-\langle e_i, \eta_j \rangle}$$

On obtient ainsi  $n$  polynômes respectivement en les indéterminées  $\lambda$  et  $\mu$  en posant  $\Lambda_i = \Lambda_i^+ - \Lambda_i^-$  et  $M_i = M_i^+ - M_i^-$ . On définit  $\mathcal{G}_{I_1 I_2}$  la famille constituée des  $3s$  polynômes suivants :

$$\begin{array}{ll} X_j \lambda_j - 1 & \text{pour } j \in \bar{I}_2 \\ \Lambda_i(\lambda) & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ Y_j - \lambda_j X_j & \text{pour } 1 \leq j \leq s \\ \lambda_j \mu_j - 1 & \text{pour } 1 \leq j \leq s. \end{array}$$

Les conditions données sur les variables  $\lambda$  et  $\mu$  montrent que les solutions du système en  $\lambda$  et  $\mu$  appartiennent au groupe  $G$  agissant sur l'espace de coordonnées homogènes de  $X$ .

**Lemme 6.2.**

$$|\det \eta_{I_2}| \ell(HG_r; \mathcal{F}_{\hat{r}, I_1}; X) = \ell(HG_r \prod_{j=1}^s \lambda_j \text{Jac}_{\lambda_{I_2}}(\Lambda) \prod_{j \in \bar{I}_2} X_j; \mathcal{F}_{\hat{r}, I_1}, \mathcal{G}_{I_1, I_2}; X, \lambda_{\bar{I}_2}, \lambda_{I_2}, Y, \mu_{\bar{I}_1}, \mu_{I_1})$$

où  $\text{Jac}_{\lambda_{I_2}}(\Lambda)$  est le jacobien du système  $\Lambda_i$  relativement aux  $\lambda_j$  pour  $j \in I_2$ .

**Preuve.**

Le lemme résulte de l'introduction des  $3s$  nouvelles indéterminées :  $\lambda, Y, \mu$  à partir de  $3s$  polynômes. De plus, pour tout zéro  $(x, \lambda, y, \mu)$  du système  $[\mathcal{F}_{\hat{r}, I_1}, \mathcal{G}_{I_1, I_2}]$ , l'ordre de multiplicité de  $(\lambda, y, \mu)$  au-dessus de  $x$  est égal à  $|\det \eta_{I_2}|$ . En effet, une solution  $x$  de  $\mathcal{F}_{\hat{r}, I_1}$  définit un point  $t$  de  $X$  nécessairement dans  $T_N$  d'après les hypothèses faites sur les racines communes de la famille  $\mathcal{F}_{\hat{r}}$ . Alors tout  $y$  donné par  $y = \lambda x$  est encore un système de coordonnées homogènes de  $t$ . Le nombre de  $s$ -uplets  $y$  vérifiant  $y_j = 1$  pour  $j \in \bar{I}_2$  et représentant  $t$  est égal à  $|\det \eta_{I_2}|$  car la variété torique est simpliciale.  $\square$

**Lemme 6.3.**

$$\prod_{j=1}^s \lambda_j \text{Jac}_{\lambda_{I_2}}(\Lambda) \prod_{j \in \bar{I}_2} X_j = \det \eta_{I_2} \prod_{i=1}^n \Lambda_i^+ \quad \text{modulo l'idéal } \langle \mathcal{F}_{\hat{r}, I_1}, \mathcal{G}_{I_1, I_2} \rangle$$

**Preuve.**

$$\text{On rappelle que } \Lambda_i(\lambda) = \Lambda_i^+(\lambda) - \Lambda_i^-(\lambda) = \prod_{j \in J_i^+} \lambda_j^{\langle e_i, \eta_j \rangle} - \prod_{j \in J_i^-} \lambda_j^{-\langle e_i, \eta_j \rangle}.$$

Ainsi modulo  $\langle \mathcal{F}_{\hat{r}, I_1}, \mathcal{G}_{I_1, I_2} \rangle$  on a  $\Lambda_i^+(\lambda) = \Lambda_i^-(\lambda)$  et par suite

$$\begin{aligned} \text{pour } j \in I_2 \cap J_i^+ & \quad \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \lambda_j} = \frac{\langle e_i, \eta_j \rangle}{\lambda_j} \Lambda_i^+ \\ \text{pour } j \in I_2 \cap J_i^- & \quad \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \lambda_j} = \frac{\langle e_i, \eta_j \rangle}{\lambda_j} \Lambda_i^- = \frac{\langle e_i, \eta_j \rangle}{\lambda_j} \Lambda_i^+. \end{aligned}$$

D'où  $\text{Jac}_{\lambda_{I_2}}(\Lambda) = \det \eta_{I_2} \prod_{i=1}^n \Lambda_i^+ \prod_{j \in I_2} \mu_j$ .

Enfin on vérifie aisément que

$$\prod_{j=1}^s \lambda_j \prod_{j \in \bar{I}_2} X_j \prod_{j \in I_2} \mu_j = \prod_{j=1}^s \lambda_j \prod_{j=1}^s \mu_j = 1$$

ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

L'égalité obtenue au lemme 1 peut donc être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{|\det \eta_{I_2}|}{\det \eta_{I_2}} \ell(HG_r; \mathcal{F}_{\hat{r}, I_1}; X) = \ell(HG_r \prod_{j=1}^n \Lambda_j^+; \mathcal{F}_{\hat{r}, I_1}, \mathcal{G}_{I_1, I_2}; X, \lambda_{\bar{I}_2}, \lambda_{I_2}, Y, \mu_{\bar{I}_1}, \mu_{I_1})$$

CHAPITRE 6. SYMBOLE DE KRONECKER TORIQUE

De façon analogue, on considère le système polynomial  $\mathcal{F}_{\hat{r}, I_2}$  défini par les polynômes  $(F_0, \dots, \widehat{F_j}, \dots, F_n, Y_j - 1$  pour  $j \in \bar{I}_2)$  et  $\mathcal{G}_{I_2 I_1}$  qui regroupe les  $3s$  polynômes suivants :

$$\begin{array}{ll} Y_j \mu_j - 1 & \text{pour } j \in \bar{I}_1 \\ M_i(\mu) & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ X_j - \mu_j Y_j & \text{pour } 1 \leq j \leq s \\ \mu_j \lambda_j - 1 & \text{pour } 1 \leq j \leq s \end{array}$$

En appliquant au système  $[\mathcal{F}_{\hat{r}, I_2}, \mathcal{G}_{I_2 I_1}]$  les lemmes 2 et 3, on obtient l'égalité :

$$\frac{|\det \eta_{I_1}|}{\det \eta_{I_1}} \ell(HG_r; \mathcal{F}_{\hat{r}, I_2}; Y) = \ell(HG_r(Y) \prod_{j=1}^n M_i^+; \mathcal{F}_{\hat{r}, I_2}, \mathcal{G}_{I_2, I_1}; Y, \mu_{\bar{I}_1}, \mu_{I_1}, X, \lambda_{\bar{I}_2}, \lambda_{I_2}).$$

On a  $Y = \lambda X$  modulo  $[\mathcal{F}_{\hat{r}, I_2}, \mathcal{G}_{I_2 I_1}]$ .

D'où  $HG_r(Y) = \lambda^{\deg H - \deg F_j} HG_r(X) = \lambda^{\sum_{k \neq j} \deg F_k} \mu HG_r(X)$ .

Par conséquent,

$$\frac{|\det \eta_{I_1}|}{\det \eta_{I_1}} \ell(HG_r; \mathcal{F}_{\hat{r}, I_2}; Y) = \ell(HG_r(X) \lambda^{\sum_{k \neq j} \deg F_k} \mu \prod_{j=1}^n M_i^+; \mathcal{F}_{\hat{r}, I_2}, \mathcal{G}_{I_2, I_1}; Y, \mu_{\bar{I}_1}, \mu_{I_1}, X, \lambda_{\bar{I}_2}, \lambda_{I_2}).$$

**Lemme 6.4.**

$$\ell(HG_r \prod_{j=1}^n \Lambda_i^+; \mathcal{F}_{\hat{r}, I_1}, \mathcal{G}_{I_1, I_2}) = \ell(HG_r(X) \lambda^{\sum_{k \neq j} \deg F_k} \mu \prod_{j=1}^n M_i^+; \mathcal{F}_{\hat{r}, I_2}, \mathcal{G}_{I_2, I_1}).$$

**Preuve.**

On applique la loi de transformation qui permet de substituer la famille  $\mathcal{F}_{\hat{r}, I_2}(Y), \mathcal{G}_{I_2, I_1}$  à la famille  $\mathcal{F}_{\hat{r}, I_1}(X), \mathcal{G}_{I_1, I_2}$  en considérant les égalités :

$$\begin{array}{ll} F_k(Y) = \lambda^{\deg F_k} F_k(X) & \text{pour } 0 \leq k \leq n, \quad k \neq r \\ \mu_j Y_j - 1 = \mu_j(Y_j - \lambda_j X_j) + X_j(\mu_j \lambda_j - 1) + X_j - 1 & \text{pour } j \in \bar{I}_1 \\ Y_j - 1 = Y_j - \lambda_j X_j + X_j \lambda_j - 1 & \text{pour } j \in \bar{I}_1 \\ M_i(\mu) = -M_i^+ M_i^- \Lambda_i(\lambda) & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ X_j - \mu_j Y_j = -\mu_j(Y_j - \lambda_j X_j) - X_j(\mu_j \lambda_j - 1) & \text{pour } 1 \leq j \leq s \end{array}$$

Pour l'ordre choisi des polynômes, la matrice de transformation est triangulaire et son déterminant est :

$$\lambda^{\sum_{k \neq r} \deg F_k} \times \prod_{i=1}^n -M_i^+ M_i^- \times \prod_{j=1}^s -\mu_j$$

qui s'écrit encore modulo  $\mathcal{G}_{I_2 I_1}$  :

$$(-1)^{n+s} \lambda^{\sum_{k \neq r} \deg F_k} \times \mu^1 \times \prod_{i=1}^n (M_i^+)^2 .$$

Il reste ensuite à rétablir l'ordre des indéterminées (la signature de la permutation opérée sur les indéterminées est égale à 1) et à obtenir la liste de polynômes  $[\mathcal{F}_{I_2}(Y), \mathcal{G}_{I_2 I_1}]$  ce qui nécessite une permutation de signature  $(-1)^{s-n}$ .  $\square$

En conclusion, pour tout  $H$  dans  $S$  de degré critique  $\rho$  :

$$\frac{|\det \eta_{I_2}|}{\det \eta_{I_2}} \ell((HG_r)_{I_1}; \mathcal{F}_{I_1}, X_{I_1}) = \frac{|\det \eta_{I_1}|}{\det \eta_{I_1}} \ell((HG_r)_{I_2}; \mathcal{F}_{I_2}, X_{I_2})$$

ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

Nous avons construit une forme linéaire sur la composante  $S_\rho$  de  $S$  où  $\rho = \sum_{k=0}^n \deg F_k - \sum_{j=1}^s X_j$ .

La proposition suivante montre que la forme linéaire obtenue reste définie sur la composante  $S_\rho / \langle \mathcal{F} \rangle_\rho$  de l'anneau gradué  $S / \langle \mathcal{F} \rangle$  moyennant certaines hypothèses sur les degrés des polynômes  $F_k$ .

Soit  $\Delta_k$  un représentant  $T_N$ -invariant du degré de  $F_k$ . Tout polynôme  $F_k$  est l'homogénéisation d'un polynôme de Laurent  $f_k$  par le diviseur  $\Delta_k$  de polytope de Newton  $P_k$ .

On supposera désormais que les polynômes vérifient la condition  $\mathcal{C}_0$  et la condition  $\mathcal{C}_1$  décrite ci-dessous.

### Condition $\mathcal{C}_1$

- Pour tout  $k = 0, \dots, n$ ,  $\Delta_k$  est un diviseur sans points de base et  $P_k = P_{\Delta_k}$ ,
- la somme de Minkowski des  $P_{\Delta_k}$  est un polytope ample.

Ainsi si  $\Delta_k = \sum_{j=1}^s b_{kj} D_j$  pour  $0 \leq k \leq n$ .

$$F_k = \sum_{m \in P_{\Delta_k} \cap M} a_m \prod_{j=1}^s X_j^{\langle m, \eta_j \rangle + b_{kj}} = \sum_{m \in P_{\Delta_k} \cap M} a_m X^{\langle m, \Delta_k \rangle}$$

avec  $a_{km} \neq 0$  pour tout sommet  $m$  de  $P_{\Delta_k}$ .

**Proposition 6.3.** *Soit  $I$  un ensemble simplicial maximal et soit  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .*

*La forme linéaire définie sur  $S_\rho$  par  $\frac{|\det(\eta_I)|}{\det(\eta_I)} \ell(H_I G_{rI}; \mathcal{F}_{\hat{r}, I})$  pour tout  $H \in S_\rho$  est nulle sur la composante de l'idéal homogène  $\langle F_0, \dots, F_n \rangle$  de degré  $\rho$ .*

**Preuve.** Soit  $H \in \langle F_0, \dots, F_n \rangle_\rho$ , il existe une décomposition de  $H$  sous la forme  $\sum_{k=0}^n A_k F_k$  où  $A_k$  est un polynôme homogène de degré  $\rho - \deg F_k$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} \ell(H_I G_{rI}; \mathcal{F}_{\hat{r}, I}) &= \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} \ell(A_{rI} F_{rI} G_{rI}; \mathcal{F}_{\hat{r}, I}) \\ &= \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} \ell(A_{rI}; \mathcal{F}_{\hat{r}, I}) \end{aligned}$$

Le diviseur  $\Delta = \sum_{k \neq r} \Delta_k - \sum_{j=1}^s D_j$  est un représentant  $T_N$ -invariant du degré de  $A_k$ . On a  $A_r = \sum_{m \in P_\Delta \cap M} a_m X^{\langle m, \Delta \rangle}$ . Le polynôme  $A_r$  est l'homogénéisation du polynôme de Laurent  $h =$

$\sum_{m \in P_{\Delta} \cap M} a_m t^m$  par le diviseur  $\Delta$ . D'après le théorème 3.5, le diviseur  $\sum_{k \neq r} \Delta_k$  est un diviseur sans points de base de polytope  $P_{\sum_{k \neq r} \Delta_k} = \sum_{k \neq r} P_{\Delta_k}$ . Par conséquent,  $P_{\Delta} \subset \text{Int}(\sum_{k \neq r} P_{\Delta_k})$ . Le polytope  $\sum_{k \neq r} P_{\Delta_k}$  est de dimension maximale car la famille  $(F_0, \dots, F_{r-1}, F_{r+1}, \dots, F_n)$  admet un nombre fini de zéros dans le tore. En effet, si  $\sum_{k \neq r} P_{\Delta_k}$  est de dimension strictement inférieure à  $n$ ,  $\sum_{k \neq r} P_{\Delta_k}$  admet un éventail généralisé dual de cône minimal  $\sigma_0 \neq 0$ . Les variables correspondant aux rayons contenus dans  $\sigma_0$  sont absentes de l'expression des polynômes  $(F_0, \dots, F_{r-1}, F_{r+1}, \dots, F_n)$  qui possèdent ainsi des zéros dans  $X$  en dehors du tore. On pose  $P' = P_{\sum_{k \neq r} \Delta_k}$ . D'après le théorème 3.9, il existe  $\pi$  un morphisme torique propre entre les variétés  $X$  et  $X_{P'}$  induit par le raffinement de l'éventail dual de  $P'$  en  $\Sigma$ . Le morphisme  $\pi$  est donc un isomorphisme sur le tore. En appliquant le théorème 3.7 à  $P' = \sum_{k \neq r} P_k$ , il existe des diviseurs de Cartier  $T_N$ -invariants et sans points de base dans la variété  $X_{P'}$  tels que  $\sum_{k \neq r} \Delta'_k = D_{P'}$  et  $P_k = P_{\Delta'_k}$ . On définit les polynômes homogènes  $F'_k = \sum_{m \in P_k \cap M} a_{km} X^{(m, \Delta'_k)}$  alors  $F_k = \pi^*(F'_k)$ . Les diviseurs  $F'_k$  s'intersectent dans le tore car les diviseurs  $F_k$  s'intersectent dans le tore. On a donc

$$\ell(A_{rI}; \mathcal{F}_{\hat{r}, I}) = \ell(A'_{rI}; \mathcal{F}'_{\hat{r}, I'})$$

où  $A'_r$  est l'homogénéisation de  $h$  par rapport à  $\Delta' = \sum_{k \neq r} \Delta'_k - \sum_{\rho \in \Sigma'_{P'}(1)} D_{\rho'}$  et  $I'$  un ensemble simplicial maximal de l'éventail  $\Sigma_{P'}$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} \ell(A_{rI}; \mathcal{F}_{\hat{r}, I}) &= \frac{\det \eta_{I'}}{|\det \eta_{I'}|} \ell(A'_{rI}; \mathcal{F}'_{\hat{r}, I'}) \\ &= \ell^{\mathcal{J}}(h; f_0, \dots, f_{r-1}, f_{r+1}, \dots, f_n) \end{aligned}$$

D'après la formule d'Euler-Jacobi,

$$\ell^{\mathcal{J}}(h; f_0, \dots, \hat{f}_r, \dots, f_n) = 0.$$

On en déduit que  $\frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} \ell(H_I G_{rI}; \mathcal{F}_{\hat{r}, I}) = 0$ . □

**Proposition 6.4.** *Soit  $X$  une variété torique projective simpliciale associée au polytope  $P$ . On considère  $\mathcal{F} = \{F_0, \dots, F_n\}$  une famille de  $n+1$  polynômes homogènes dans  $S$  vérifiant les conditions  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_1$ . Soit  $I$  un ensemble simplicial maximal.*

*Pour tout  $H \in S_{\rho}$ , pour tout  $r$  et  $l$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$  :*

$$\ell(H_I G_{rI}; \mathcal{F}_{\hat{r}, I}) = (-1)^{p-r} \ell(H_I G_{pI}; \mathcal{F}_{\hat{p}, I})$$

où  $G_{rI}$  (resp.  $G_{pI}$ ) est l'inverse de  $F_{rI}$  (resp.  $F_{pI}$ ) modulo  $\mathcal{F}_{\hat{p}, I}$  (resp.  $\mathcal{F}_{\hat{r}, I}$ ).

*Remarque 6.3.* La proposition 6.4 montre que la forme linéaire  $\ell^X$  est indépendante du choix du polynôme  $F_r$  dans la famille  $\mathcal{F}$ .

**Preuve.** Il suffit de prouver l'égalité pour deux indices consécutifs  $r$  et  $r+1$ .

On applique la loi de transformation à chacun des symboles de Kronecker affines  $\ell(\cdot G_{rI}, \mathcal{F}_{\hat{r}, I})$  et  $\ell(\cdot G_{r+1I}, \widehat{\mathcal{F}}_{r+1, I})$  afin de les exprimer tous deux relativement à  $(F_{0I}, \dots, F_{r-1I}, F_{rI} \cdot F_{r+1I}, F_{r+2I}, \dots, F_{nI})$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \ell(H_I G_{rI}; \mathcal{F}_{\hat{r}, I}) &= \ell(H_I G_{rI} F_{rI}; F_{0I}, \dots, F_{r+1I} \cdot F_{rI}, \dots, F_{nI}) \\ \ell(H_I G_{r+1I}; \widehat{\mathcal{F}}_{r+1, I}) &= \ell(H_I G_{r+1I} F_{r+1I}; F_{0I}, \dots, F_{rI} \cdot F_{r+1I}, \dots, F_{nI}). \end{aligned}$$

On a donc

$$\ell(H_I G_{r,I}; \mathcal{F}_{\hat{r},I}) + \ell(H_I G_{r+1,I}; \widehat{\mathcal{F}}_{r+1,I}) = \ell(H_I G_{r+1,I} F_{r+1,I}; F_{0,I}, \dots, F_{r,I} \cdot F_{r+1,I}, \dots, F_{n,I}).$$

D'après le théorème des zéros,

$$G_{r,I} F_{r,I} + G_{r+1,I} F_{r+1,I} = 1 \pmod{(F_{0,I}, \dots, \widehat{F}_{r,I}, \widehat{F}_{r+1,I}, \dots, F_{n,I})}$$

et donc  $G_{r,I} F_{r,I} + G_{r+1,I} F_{r+1,I} = 1 \pmod{(F_{0,I}, \dots, F_{r,I} \cdot F_{r+1,I}, \dots, F_{n,I})}$ .

$$\text{D'où } \ell(H_I G_{r,I}, \mathcal{F}_{\hat{r},I}) + \ell(H_I G_{r+1,I}, \widehat{\mathcal{F}}_{r+1,I}) = \ell(H_I; F_{0,I}, \dots, F_{r,I} \cdot F_{r+1,I}, \dots, F_{n,I}).$$

Soit  $\Delta$  un représentant du degré critique. Le polynôme  $H$  est l'homogénéisation par rapport à  $\Delta$  d'un polynôme de Laurent  $h = \sum_{m \in P_{\Delta} \cap M} a_m t^m$ . De même, pour tout  $k$ ,  $F_k$  est l'homogénéisation par le diviseur  $\Delta_k$  du polynôme de Laurent  $f_k$ . On a  $\ell(H_I; F_{0,I}, \dots, F_{r,I} \cdot F_{r+1,I}, \dots, F_{n,I}) = \ell^{\mathcal{J}}(h; f_0, \dots, f_r \cdot f_{r+1}, \dots, f_n)$ . On montre que le polytope de Newton de  $f_r \cdot f_{r+1}$  est  $P_r + P_{r+1}$ . Par définition de  $f_r$  et  $f_{r+1}$ ,  $f_r = \sum_{m \in P_r} a_{r,m} t^m$  et  $f_{r+1} = \sum_{m \in P_{r+1}} a_{r+1,m} t^m$ . D'où  $f_r \cdot f_{r+1} = \sum_{m+m' \in P_r + P_{r+1}} a_{r,m} a_{r+1,m'} t^{m+m'}$ . On en déduit que le polytope de Newton de  $f_r \cdot f_{r+1}$  est inclus dans  $P_r + P_{r+1}$ . De plus, si  $s$  est un sommet de  $P_r$  et  $s'$  un sommet de  $P_{r+1}$ ,  $a_{r,s} \cdot a_{r+1,s'} \neq 0$  d'où  $s + s'$  appartient au polytope de Newton de  $f_r \cdot f_{r+1}$ . Or  $P_k + P_{k+1}$  est l'enveloppe convexe des sommes de sommets de  $P_r$  et  $P_{r+1}$  d'après le lemme 3.1 ce qui prouve l'inclusion inverse. D'après la condition  $\mathcal{C}_1$ ,  $P_{\Delta_k} = P_k$  pour tout  $k$  et la somme de Minkowski des polytopes de Newton des  $f_k$  est un polytope ample. Alors  $P_{\Delta} \subset \text{Int}(\sum_{k=0}^n P_{\Delta_k})$ . En appliquant la formule d'Euler-Jacobi torique, on en déduit :

$$\ell^{\mathcal{J}}(h; f_0, \dots, f_r \cdot f_{r+1}, \dots, f_n) = 0$$

et finalement  $\ell(H_I G_{r,I}; \mathcal{F}_{\hat{r},I}) = -\ell(H_I G_{r+1,I}; \widehat{\mathcal{F}}_{r+1,I})$ .  $\square$

On peut substituer à la condition  $\mathcal{C}_1$  la condition  $\mathcal{C}'_1$  moins forte.

### Condition $\mathcal{C}'_1$

- Pour tout  $k = 0, \dots, n$ ,  $\Delta_k$  est un diviseur sans points de base et  $P_k = P_{\Delta_k}$ ,
- la somme de Minkowski des  $P_{\Delta_k}$  est un polytope de dimension maximale d'un diviseur sans points de base.

Il est clair que la condition  $\mathcal{C}_1$  implique la condition  $\mathcal{C}'_1$  puisque tout diviseur ample est sans points de base.

**Théorème 6.2.** *Soit  $X$  une variété torique projective simpliciale associée au polytope  $P$ . On considère  $\mathcal{F} = \{F_0, \dots, F_n\}$  une famille de  $n+1$  polynômes homogènes dans  $S$  vérifiant les conditions  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}'_1$ . Soit  $I$  un ensemble simplicial maximal.*

*Pour tout  $H \in S_{\rho}$ , pour tout  $r$  et  $l$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$  :*

$$\ell(H_I G_{r,I}; \mathcal{F}_{\hat{r},I}) = (-1)^{p-r} \ell(H_I G_{p,I}; \mathcal{F}_{\hat{p},I})$$

*où  $G_{r,I}$  (resp.  $G_{p,I}$ ) est l'inverse de  $F_{r,I}$  (resp.  $F_{p,I}$ ) modulo  $\mathcal{F}_{\hat{p},I}$  (resp.  $\mathcal{F}_{\hat{r},I}$ ).*

---

1. Dans [8], le symbole de Kronecker torique est défini dans le cas simplicial avec des conditions différentes sur les degrés des polynômes.

**Preuve.** La proposition 6.1 s'étend directement à une famille de polynômes homogènes vérifiant les conditions  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}'_1$ . Le théorème 6.3 reste également valide. Pour adapter la preuve de la proposition 6.4 à la condition  $\mathcal{C}'_1$ , on utilise un argument de même nature que celui utilisé dans la preuve de la proposition 6.3. La somme de Minkowski  $\sum_{k=0}^n P_k$  est de dimension maximale, c'est le polytope d'un diviseur sans points de base. Par conséquent, il existe par le théorème 3.9, un morphisme torique propre de  $X$  sur  $X_{\sum_{k=0}^n P_k}$ . Le symbole de Kronecker dans  $X$  pour la famille de polynômes  $F_0, F_1, F_2$ , est égal au symbole de Kronecker dans  $X_{\sum_{k=0}^n P_k}$  pour la famille de polynômes  $F'_k$  remontés des  $F_k$  par le morphisme dual. On peut ensuite conclure de la même manière en appliquant la formule d'Euler-Jacobi torique.  $\square$

**Définition 6.1** (Symbole de Kronecker torique).

Soit  $X$  une variété projective simpliciale et  $\mathcal{F}$  une famille de  $n+1$  polynômes homogènes vérifiant les conditions  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}'_1$ .

On appelle symbole de Kronecker torique relativement à la famille  $\mathcal{F}$ , la forme linéaire  $\ell^X$  définie sur  $S_\rho / \langle \mathcal{F} \rangle_\rho$  de la façon suivante :

$$\forall H \in S_\rho, \quad \ell^X(H; \mathcal{F}) = \frac{\det \eta_I}{|\det \eta_I|} \ell(H_I G_{rI}; \mathcal{F}_{\hat{r}, I})$$

où  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $G_{rI}$  est l'inverse de  $F_{rI}$  modulo  $\mathcal{F}_{\hat{r}, I}$  et  $I$  désigne un ensemble simplicial maximal.

## 6.2 Extension de la définition au cas non simplicial

On suppose que le polytope  $P$  qui définit la variété projective  $X$  n'est pas premier ce qui signifie que  $\Sigma$  l'éventail dual de  $P$  n'est pas simplicial. Il est possible de prolonger la définition du symbole de Kronecker torique en procédant à un raffinement de  $\Sigma$  par ajout de vecteurs primitifs.

Soit  $\Sigma'$  un raffinement de  $\Sigma$  obtenu par ajout de vecteurs primitifs et soit  $X'$  la variété torique associée à  $\Sigma'$ . On nomme  $\bar{\pi}$  le morphisme d'éclatement induit par le raffinement et  $F'_k = F_k \circ \pi$  pour tout  $k$ .

**Proposition 6.5.** *Les polynômes  $F'_k$  vérifient les conditions  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}'_1$ .*

**Preuve.** les polynômes  $F'_k$  vérifient la condition  $\mathcal{C}'_1$  par la proposition 3.11 et le théorème 3.3. On montre que les polynômes  $F'_k$  vérifient la condition  $\mathcal{C}_0$ . L'image par le morphisme torique d'un zéro commun aux  $F'_k$  dans  $X'$  est un zéro commun aux  $F_k$  dans  $X$ . Par conséquent, les polynômes  $F'_0, \dots, F'_n$  sont sans zéros dans  $X'$ . De plus, les tores de  $X$  et  $X'$  sont isomorphes par le morphisme torique, donc pour tout  $k$  la famille  $F'_0, \dots, F'_{k-1}, F'_{k+1}, \dots, F'_n$  a un nombre fini de zéros dans le tore.  $\square$

On définit le symbole de Kronecker torique pour une variété projective non simpliciale en utilisant un raffinement de l'éventail.

**Définition 6.2.** Soit  $\Delta$  un représentant du degré critique de la famille  $(F_k)$ . Soit  $\bar{\pi}$  le morphisme d'éclatement induit par le raffinement de  $\Sigma$  en l'éventail simplicial  $\Sigma'$ . On pose  $\Delta' = \bar{\pi}^*(\Delta)$ . On rappelle que les diviseurs  $\Delta'$  et  $\Delta$  définissent le même polytope (Cf 3.11). Alors pour tout  $m \in P_\Delta = P_{\Delta'}$ ,

$$\ell^X(X^{\langle m, \Delta \rangle}; (F_k)) = \ell^{X'}((X')^{\langle m, \Delta' \rangle}; (F'_k)).$$

On vérifie que la définition est indépendante du morphisme d'éclatement construit à partir d'une séquence de vecteurs primitifs ajoutés à l'éventail initial. La démonstration emprunte le schéma

## CHAPITRE 6. SYMBOLE DE KRONECKER TORIQUE

suivi pour la définition du symbole de Kronecker dans le tore. La proposition 4.6 qui montre que le symbole de Kronecker est invariant quel que soit l'ordre observé pour introduire les vecteurs primitifs dans  $\Sigma$  et la proposition 4.17 qui prouve l'invariance du symbole de Kronecker dans une variété simpliciale lorsqu'on raffine l'éventail à l'aide de vecteurs primitifs du type voulu s'appliquent encore.

# Bibliographie

- [1] E. Kunz avec contributions de D. Cox et A. Dickenstein. Residues and duality for projective algebraic varieties. *University Lecture Series 47*, Amer. Math. Soc., 2008.
- [2] D. Cox. Toric residues. *Archiv för matematik*, (34) :73–96, 1996.
- [3] V. Danilov. *The geometry of toric varieties*. Russian Math. Surveys, 1978.
- [4] E. Cattani A. Dickenstein. A global view of residues in the torus. *Journal of Pure and Applied Algebra*, (117 & 118) :119–144, 1997.
- [5] E. Cattani D. Cox A. Dickenstein. Residues in toric varieties. *Comp. Math.*, (alg-geom 9506024), 1995.
- [6] W. Fulton. *Introduction to Toric Varieties*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.
- [7] P.Griffith J. Harris. *Principles of algebraic geometry*.
- [8] R. Herimampita. *Symbole de Kronecker torique*. PhD thesis, Université Paris 13, Institut Galilée, 2011.
- [9] A. Khovansky. Newton polyhedra and the euler jacobi formula. *Russian Math. Surveys*, (33) :237–238, 1978.
- [10] M. Elkadi B. Mourrain. *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux*. Springer, 2007.
- [11] D. Cox J. Little H. Schenck. *Toric Varieties*, volume Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2011.
- [12] E. Cattani A. Dickenstein B. Sturmfels. Residues and resultants. *Comp. Math.*, (alg-geom 9702001), 1997.
- [13] E. Becker J.-P. Cardinal M.-F. Roy Z. Szafraniec. Multivariate bezoutiens, kronecker symbol and eisenbud formula. (143), 1996.
- [14] M.-F. Roy A. Szpirglas. Bezoutien et symbole de kronecker, affines, projectifs et dans le tore. *IRMAR, prépublication 98-15*, 1998.
- [15] T.Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. Springer, Berlin, 1988.

*Résumé.* – Soit  $\mathbb{k}$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et  $F$  une suite de  $n$  polynômes en intersection complète sur  $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]$ . Le Bezoutien de  $F$  fournit une forme dualisante sur  $\mathbb{k}[X]/\langle F \rangle$  appelée symbole de Kronecker, qui est un analogue algébrique du résidu.

L'objet de ce travail est de construire et calculer le symbole de Kronecker dans le tore  $(\mathbb{C}^*)^n$  relativement à une famille  $f$  de  $n$  polynômes de Laurent en  $n$  variables. La famille  $f$  possède un nombre fini de zéros et est régulière pour ses polytopes de Newton. La représentation du résidu global dans le tore à l'aide d'un résidu torique, donnée par Cattani et Dickenstein, suggère d'interpréter le symbole de Kronecker dans le tore dans la variété torique projective définie par le polytope  $P$  somme de Minkowski des polytopes de Newton de  $f$ .

Lorsque  $P$  est premier, Roy et Szpirglas ont défini le symbole de Kronecker dans le tore à partir des symboles de Kronecker définis sur les ouverts affines de la variété torique  $X_P$  relativement à une famille de  $n + 1$  polynômes homogènes sans zéros communs dans la variété  $X_P$ . Nous montrons ici que le cas «  $P$  non premier » est réductible au cas précédent en explicitant les morphismes d'éclatement qui traduisent le raffinement de l'éventail de  $X_P$  en un éventail simplicial.

*Mots-clés.* – Symbole de Kronecker, résidu global dans le tore, variété torique projective, raffinements d'un éventail.

*Abstract.*—Let  $\mathbb{k}$  be an algebraically closed field with  $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$  and let  $F$  be polynomials  $F_1, \dots, F_n$  such that  $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]/\langle F_1, \dots, F_n \rangle$  is a complete intersection  $\mathbb{k}$ -algebra. The Bezoutian of  $F_1, \dots, F_n$  gives a dualizing form acting on  $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]/\langle F_1, \dots, F_n \rangle$  called Kronecker symbol. It is an algebraic analogue of residue.

The aim of this work is to build and calculate the Kronecker symbol in the torus  $(\mathbb{C}^*)^n$  for a system  $f$  of Laurent polynomials with a finite set of zeroes and regular for its Newton polytopes. In the same way as Cattani and Dickenstein had done for the global residue in the torus, we consider the projective variety given by the Minkowski sum  $P$  of the Newton polytopes of  $f$  in order to build the Kronecker symbol in the torus.

When  $P$  is prime, Roy et Szpirglas have defined the Kronecker symbol in the torus from Kronecker symbols on affine subsets of  $X_P$  for a system of  $n + 1$  homogeneous polynomials with no common zeroes in  $X_P$ . We prove that the case " $P$  no prime" can be reduced to the previous case by using simplicial refinements of the fan of  $X_P$  and making explicit the associated toric morphisms on the total coordinate spaces.

*Keywords.*—Kronecker symbol, global torus residue, toric projective toric variety, refinements of fan.