



**HAL**  
open science

# Des horloges atomiques à la mission MICROSCOPE : recherche de violations d'invariance de Lorentz

Hélène Pihan-Le Bars

► **To cite this version:**

Hélène Pihan-Le Bars. Des horloges atomiques à la mission MICROSCOPE : recherche de violations d'invariance de Lorentz. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2018. Français. NNT : 2018PSLEO010 . tel-02109290

**HAL Id: tel-02109290**

**<https://theses.hal.science/tel-02109290>**

Submitted on 24 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres  
PSL Research University

Préparée au SYRTE, laboratoire de l'Observatoire de Paris

Des horloges atomiques à la mission MICROSCOPE :  
recherche de violations d'invariance de Lorentz.

**École doctorale n°127**

ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE

**Spécialité** ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

Soutenue par **Hélène PIHAN-LE BARS**

le 15 novembre 2018

Dirigée par **Peter Wolf et Christine Guerlin**

## COMPOSITION DU JURY :

Mme Saïda Guellati-Khélifa  
CNAM, Rapporteur

M Robertus Potting  
Université de l'Algarve, Rapporteur

M Eric Gourgoulhon  
Observatoire de Paris, Examineur

M Joël Bergé  
ONERA, Examineur

Mme Isabelle Petitbon  
CNES, Membre Invité

Mme Guerlin Christine  
LKB, Encadrante

M Peter Wolf  
Observatoire de Paris, Encadrant



## Résumé

Cette thèse présente deux tests d'invariance de Lorentz, réalisés dans le cadre de l'Extension du Modèle Standard (SME). Le premier a pour objectif une recherche de violation dans le secteur SME de la matière, grâce aux données d'une horloge à atomes froids de  $^{133}\text{Cs}$ . La recherche de variations de la fréquence de transition hyperfine de cet atome a permis de contraindre plusieurs coefficients SME liés aux protons et aux neutrons, avec une sensibilité améliorant jusqu'à 12 ordres de grandeur les limites actuelles sur ces derniers. Le second test a été réalisé grâce aux données de la mission spatiale MICROSCOPE, en vol depuis le 25 avril 2016, qui a pour but de tester le Principe d'Équivalence faible avec une précision de l'ordre de  $10^{-15}$  sur le paramètre d'Eötvös. Nous avons utilisé les mesures MICROSCOPE pour contraindre des violations d'invariance de Lorentz dues à un couplage entre matière et gravitation, en recherchant des variations de l'accélération relative de deux masses d'épreuve selon l'orientation de l'axe sensible de l'instrument, un double accéléromètre électrostatique. Les premiers résultats, obtenus grâce à l'analyse de cinq sessions de mesures, ont déjà démontré une amélioration jusqu'à 4 ordres de grandeur des contraintes sur deux coefficients du secteur SME de la matière couplée à la gravitation.

**Mots-clefs :** Symétrie de Lorentz, Extension du Modèle Standard, Analyse de données, Tests de gravitation, Horloge atomique, Mission MICROSCOPE, Physique fondamentale

## Abstract

This thesis presents two Lorentz invariance tests, performed within the Standard Model Extension framework (SME). The first one is a search for a violation in the matter sector of the SME, using data from a cold atom clock. The search for variations in the hyperfine transition frequency of  $^{133}\text{Cs}$  allowed us to constrain several SME coefficients related to protons and neutrons, with a sensitivity improving by up to 12 orders of magnitude the current best laboratory limits on these coefficients. The second test was carried out using the data from the MICROSCOPE space mission, in flight since April 2016, which is intended to test the Weak Equivalence Principle (WEP) with an accuracy of  $10^{-15}$  on the Eötvös parameter. In this experiment, a coupling between matter and gravitation could lead to Lorentz violation signals and therefore to variations in relative acceleration of two test masses depending on the satellite orientation. The relative acceleration is measured by a differential electrostatic accelerometer. The first results, obtained through the analysis of five sessions, have already demonstrated an improvement of up to 4 orders of magnitude of the constraints on two coefficients of the SME sector of matter-gravity couplings.

**Keywords :** Lorentz Symmetry, Standard Model Extension, Data Analysis, Tests of Gravitation, Atomic Clock, MICROSCOPE Mission, Fundamental Physics



## Remerciements

Je voudrais commencer par remercier ceux qui au fil des années m'ont donné goût aux sciences en général, et à la physique et l'astronomie en particulier : mes professeurs Nicolas Braneyre, Sabine Giros, Mme Lebarbier, Mme Cordier, Franck Thibault, Yveline Lebreton, mais aussi Jacques Montier et Denys Robilliard, ainsi que tous les autres membres de la SAR avec lesquels j'ai découvert l'astronomie.

Je remercie bien évidemment Peter Wolf et Christine Guerlin pour m'avoir encadrée durant cette thèse et m'avoir donné l'occasion d'explorer un sujet passionnant, ainsi que le Labex FIRST-TF et le CNES pour le financement du projet. Merci à mes rapporteurs Saïda Guellati-Khelifa et Robertus Potting pour leurs questions et leurs commentaires pertinents et à Éric Gourgoulhon pour avoir accepté de présider mon jury. Merci à Isabelle Petitbon et Joël Bergé d'avoir accepté de faire partie de mon jury, mais également pour tous les échanges que nous avons eus durant ces deux dernières années à propos de MICROSCOPE.

Pour les bons moments, les discussions au bureau et autour d'une bière ou d'un chouchou, je tiens à remercier tous les membres de l'équipe théorie du SYRTE : Christophe Le Poncin-Lafitte, Pacôme Delva, Frédéric Meynadier, Marie-Christine Angonin, Adrien Bourgoïn, Guillaume Lion, Étienne Savalle, Aurélien Hees, Ben Roberts et Julien Franck.

Le quotidien au laboratoire n'aurait pas été le même sans Noël Dimarcq, Philippe Tuckey, Eva Bookjans et Christian Bordé avec qui j'ai partagé mon bureau et dont la compagnie, que j'ai toujours énormément appréciée, me manque déjà.

Je tiens également à remercier Jacques Le Bourlot, Noël Dimarcq, Jacky Cresson et Pascal Bonnefond pour leur oreille attentive et bienveillante. Leur soutien a sans conteste contribué à l'achèvement de cette thèse. Merci à Gilles Métris, Joël Bergé, Manuel Rodrigues, Quentin Bailey, Elias Khan, Jean-Paul Ebran et Raphaël Lasserri pour les collaborations passionnantes qu'ils ont rendues possibles.

Je remercie tous mes collègues du SYRTE, en particulier Sébastien Bize, Arnaud Landragin, Clément Courvoisier, Jocelyne Guéna, Luca Lorini, David Holleville, Daniele Rovera, Olivier Chiu, Benoît Carré, Bertrand Venon, ainsi que tous les doctorants et post-doctorants que j'ai eu l'occasion de côtoyer durant ces 3 années – avec une petite pensée spéciale pour Jean-Marc en souvenir d'une soirée aux urgences et d'un appendice en moins.

Le SYRTE a beaucoup de chance d'avoir une administratrice comme Marine Pailler, que je remercie grandement pour sa disponibilité et son efficacité en toutes circonstances. Je remercie également le service informatique, en particulier Pascal Blondé, pour sa réactivité (y compris le week-end) en cas de souci technique.

Même si mon monitorat à la Cité des Sciences n'a représenté que 1/6 de mon temps, l'équipe MUSI (et VE aussi) m'a apporté bien plus en proportion. Je voudrais dire un grand merci à mon chef Olivier, à Fawzila, aux médiateurs Alain, JB, Brigitte, Graziela, Nadège, Lisa, Aurélie, Laetitia, Gilles, Julia, Cyril, Anaïs et à tous les autres pour leur confiance, leur gentillesse, leurs conseils. Il m'ont appris à interagir avec toutes sortes

de publics. Sur ce point, je tiens également à remercier Jean-Christophe qui a toujours réussi à éclairer les pires séances de planétarium et à tenir la barre face à des classes déchaînées. Ces trois années passées à la Cité des Sciences ont donné une dimension humaine toute particulière à ma thèse, et tous les bons moments passés à l'entresol ou au planétarium, les rigolades et les débats resteront des souvenirs impérissables. Je veux aussi remercier les autres doctorants en particulier Mathieu, Louis, Victor et Étienne pour tous ces joyeux moments passés à traumatiser du public sous la supervision enthousiaste de notre maître à tous, le professeur Secret.

Merci à Céline, Pauline, Victor, Mathilde & Mathilde, Maxime, Hannah, Léo, Nina, Julia, Oscar, Florian, Benoît, Clément, Karen, Zélia, Robin, Anne-Sophie, Arnaud, Karine, Martin, Maxence, Sabrina, Nicolas & Nicolas, Camille (et j'en oublie!) pour les soirées, les week-ends et les petits messages qui ont été autant de bouffées d'oxygène.

Je ne peux pas terminer sans remercier ma petite (grande!) famille, qui aurait pu aussi se trouver au tout début. Mes parents, évidemment, qui m'ont toujours soutenue dans mes choix et encouragée dans les moments de doutes. Vous m'avez donné les ailes et l'audace pour réaliser mes envies et mes projets. Je remercie aussi mes frères et sœurs - Yann, Étienne, Morgane, Florence et Catherine - ainsi que Janick et Greg, d'avoir fait le déplacement jusqu'à Meudon afin d'être présents le jour J ... et d'avoir été sages pendant toute la soutenance! Votre présence a beaucoup compté. Petite pensée à mes neveux et nièces - forcément exceptionnels - Yaëlle, Lise, Margot, Erwan, Nolwenn, Arthur, Louise et Adélie. Bravo à Margot d'avoir suivi pendant toute la soutenance!

Mes derniers remerciements vont à Jan. Les mots sont parfois difficiles à trouver, mais je sais que tu comprends mieux que personne sans avoir besoin d'aucune parole.







## Table des Matières

Résumé . . . . .	i
Abstract . . . . .	i
Remerciements . . . . .	iii
<b>Table des Matières</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des Acronymes</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des Symboles</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Relativité Générale et Modèle Standard . . . . .	2
1.2 Recherche d'une nouvelle théorie de la gravitation . . . . .	9
1.3 L'Extension du Modèle Standard (SME) . . . . .	12
1.4 Recherche de violation d'invariance de Lorentz dans le cadre du SME	17
1.5 Travail effectué durant la thèse . . . . .	18
<b>2 Analyse des données F02</b>	<b>21</b>
2.1 Principe du test . . . . .	22
2.2 Fonctionnement et opération de la fontaine atomique . . . . .	23
2.3 Description des données . . . . .	30
2.4 Modèle SME pour la transition hyperfine des alcalins . . . . .	34
2.5 Extension du modèle . . . . .	38
2.6 Méthode d'analyse des données . . . . .	44
2.7 Comparaison avec l'analyse de 2006 . . . . .	52
2.8 Résultats obtenus pour le modèle $O(\beta^2)$ . . . . .	56
2.9 Perspectives . . . . .	61
2.10 Résumé et conclusion . . . . .	64
<b>3 Analyse des données de la mission MICROSCOPE</b>	<b>67</b>
3.1 La mission MICROSCOPE et le Principe d'Équivalence . . . . .	69
3.2 Pourquoi tester l'invariance de Lorentz avec la mission MICROSCOPE ?	77

3.3	Données et sources de bruit . . . . .	78
3.4	Modèle SME pour la mission MICROSCOPE . . . . .	81
3.5	Description des données utilisées . . . . .	90
3.6	Méthode et chaîne de traitement pour l'analyse statistique . . . . .	93
3.7	Résultats de l'analyse des données de l'instrument EP, suivant l'axe sensible $x$ . . . . .	104
3.8	Perspectives . . . . .	116
3.9	Résumé et conclusion . . . . .	119
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Dérivation du modèle SME initial</b>	<b>125</b>
A.1	Dérivation du modèle dans le référentiel du laboratoire . . . . .	125
<b>B</b>	<b>Détails du modèle SME <math>O(\beta^2)</math></b>	<b>129</b>
B.1	Transformation entre référentiel du laboratoire et RHNT . . . . .	129
B.2	Amplitudes SME détaillées pour chaque fréquence du modèle $O(\beta^2)$ .	132
<b>C</b>	<b>Publications en lien avec l'analyse des données de la fontaine F02</b>	<b>139</b>
	H. Pihan-Le Bars <i>et al.</i> , "Lorentz-symmetry test at Planck-scale suppression with nucleons in a spin-polarized 133 Cs cold atom clock", <i>PRD</i> 95, 075026 (2017) . . . . .	139
	H. Pihan-Le Bars <i>et al.</i> , "Lorentz-Symmetry Test at Planck-Scale Suppression With a Spin-Polarized 133 Cs Cold Atom Clock", <i>IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control</i> , 65, 6 (2018) . . . . .	155
<b>D</b>	<b>Résultats complémentaires</b>	<b>161</b>
D.1	Ajustement des dérives long-terme . . . . .	161
D.2	Ajustement du paramètre d'Eötvös et des paramètres instrumentaux .	161
D.3	Ajustement du modèle de bruit d'accélération . . . . .	163
D.4	Convergence en moyenne cumulées de la méthode LSMC . . . . .	163
D.5	Ajustement des décentrages pour l'ajustement du modèle SME . . . . .	164
	<b>Liste des Figures</b>	<b>167</b>
	<b>Liste des Tableaux</b>	<b>171</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>173</b>

## Liste des Acronymes

<b>ACES</b>	<b>A</b> tomic <b>C</b> lock <b>E</b> nsemble in <b>S</b> pace
<b>CNES</b>	<b>C</b> entre <b>N</b> ational d' <b>E</b> tudes <b>S</b> patiales
<b>DLR</b>	<b>D</b> eutsches <b>Z</b> entrum für <b>L</b> uft- und <b>R</b> aumfahrt
<b>DVS</b>	<b>D</b> écomposition en <b>V</b> aleurs <b>S</b> ingulières
<b>EP</b>	<b>E</b> quivalence <b>P</b> rinciple
<b>ESA</b>	<b>E</b> uropean <b>S</b> pace <b>A</b> gency
<b>GLS</b>	<b>G</b> eneral <b>L</b> east- <b>S</b> quares
<b>RG</b>	<b>R</b> elativité <b>G</b> énérale
<b>SM</b>	<b>S</b> tandard <b>M</b> odel
<b>LHC</b>	<b>L</b> arge <b>H</b> adron <b>C</b> ollider
<b>LISA</b>	<b>L</b> aser <b>I</b> nterferometer <b>S</b> pace <b>A</b> ntenna
<b>LNE</b>	<b>L</b> aboratoire <b>N</b> ational de métrologie et d' <b>E</b> ssais
<b>LSMC</b>	<b>L</b> east- <b>S</b> quares <b>M</b> onte- <b>C</b> arlo
<b>MICROSCOPE</b>	<b>M</b> ICRO <b>S</b> atellite à traînée <b>C</b> ompensée pour l' <b>O</b> bservation du <b>P</b> rincipe d' <b>E</b> quivalence
<b>OCA</b>	<b>O</b> bservatoire de la <b>C</b> ôte d' <b>A</b> zur
<b>ONERA</b>	<b>O</b> ffice <b>N</b> ational d' <b>E</b> tudes et de <b>R</b> echerches <b>A</b> érospatiales
<b>PTB</b>	<b>P</b> hysikalisch- <b>T</b> echnische <b>B</b> undesanstalt
<b>SCRMF</b>	<b>S</b> elf <b>C</b> onsistent <b>R</b> elativistic <b>M</b> ean <b>F</b> ield
<b>SME</b>	<b>S</b> tandard <b>M</b> odel <b>E</b> xtension
<b>SYRTE</b>	<b>S</b> Ystèmes de <b>R</b> éférence <b>T</b> emps- <b>E</b> space
<b>SU</b>	<b>S</b> ensor <b>U</b> nit
<b>SU-EP</b>	<b>S</b> ensor <b>u</b> nit for the test of the <b>E</b> quivalence <b>P</b> rinciple
<b>SU-REF</b>	<b>R</b> eference sensor <b>u</b> nit
<b>RHNT</b>	<b>R</b> éférentiel <b>H</b> éliocentrique <b>N</b> on- <b>T</b> ournant
<b>UCA</b>	<b>U</b> niversité <b>C</b> ôte d' <b>A</b> zur
<b>WEP</b>	<b>W</b> eak <b>E</b> quivalence <b>P</b> rinciple
<b>WIMP</b>	<b>W</b> eakly <b>I</b> nteracting <b>M</b> assives <b>P</b> articles
<b>ZARM</b>	<b>Z</b> entrum für <b>A</b> ngewandte <b>R</b> aumfahrttechnologie und <b>M</b> ikrogravitation



## Liste des Symboles

Vitesse de la lumière	$c$	$2.99792458 \times 10^8$	$\text{m.s}^{-1}$
Constante de Planck	$h$	$6.626070040 \times 10^{-34}$	J.s
Masse du proton	$m_p$	$1.6726 \times 10^{-27}$	kg
Masse du neutron	$m_n$	$1.6749 \times 10^{-27}$	kg
Coefficient Zeeman du premier ordre pour le $^{133}\text{Cs}$	$K_Z^{(1)}$	$7.0084 \times 10^9$	$\text{Hz.T}^{-1}$
Coefficient Zeeman du second ordre pour le $^{133}\text{Cs}$	$K_Z^{(2)}$	$427.45 \times 10^8$	$\text{Hz.T}^{-2}$



## Table des matières

<b>1.1 Relativité Générale et Modèle Standard</b>	<b>2</b>
1.1.1 La Relativité Générale : succès et limitations . . . . .	2
1.1.2 Le Modèle Standard : succès et limitations . . . . .	6
<b>1.2 Recherche d'une nouvelle théorie de la gravitation</b>	<b>9</b>
1.2.1 La nécessité d'une nouvelle théorie . . . . .	9
1.2.2 Quelques pistes . . . . .	10
<b>1.3 L'Extension du Modèle Standard (SME)</b>	<b>12</b>
1.3.1 Contexte et construction . . . . .	12
1.3.2 Propriétés . . . . .	13
1.3.3 Structure . . . . .	15
1.3.4 SME minimal et non minimal . . . . .	16
1.3.5 Convention : coefficients SME et Référentiel Héliocentrique Non-Tournant (RHNT) . . . . .	16
<b>1.4 Recherche de violation d'invariance de Lorentz dans le cadre du SME</b>	<b>17</b>
<b>1.5 Travail effectué durant la thèse</b>	<b>18</b>
1.5.1 Réalisation d'un test d'invariance de Lorentz en laboratoire, avec les données d'une fontaine à atomes froids . . . . .	18
1.5.2 Réalisation d'un test d'invariance de Lorentz grâce aux don- nées de la mission spatiale MICROSCOPE . . . . .	19



La physique telle nous l'appréhendons aujourd'hui repose sur quatre interactions fondamentales qui gouvernent la structure et l'évolution de la matière et de l'Univers. Ces interactions sont actuellement décrites par deux théories distinctes : d'une part la Relativité Générale, une théorie de champ classique, décrivant l'interaction gravitationnelle comme l'effet géométrique d'une déformation de l'espace-temps, et d'autre part le Modèle Standard des particules, une théorie quantique des champs qui s'appuie sur des groupes de symétries pour décrire les particules et les trois interactions régissant la physique à l'échelle de celles-ci : l'interaction électromagnétique, l'interaction faible et l'interaction forte.

## 1.1 Relativité Générale et Modèle Standard

### 1.1.1 La Relativité Générale : succès et limitations

#### De la Relativité Restreinte au principe de covariance généralisé

Avant d'introduire la théorie de la Relativité Générale[1], Einstein formule la Relativité Restreinte qui repose sur le postulat d'invariance de la vitesse de la lumière, vérifié par Michelson et Morley en 1881[2], ainsi que sur le *principe de relativité*[3, 4], énoncé ci-après.

*"Les lois de la physique (sauf la gravitation) sont identiques dans tous les référentiels inertiels."*

Avec la Relativité Restreinte, les concepts de temps et de distance spatiale, auparavant absolus, deviennent relatifs. Le temps devient une variable dynamique dans un espace à quatre dimensions : l'espace-temps. Afin de tenir compte de ces nouveaux concepts, les transformations de Galilée décrivant les transformations purement spatiales entre repères inertiels sont remplacées par les transformations de Lorentz, qui mélangent temps et espace. Ces transformations d'espace-temps font apparaître des effets nouveaux comme la contraction des longueurs et la dilatation du temps.

Le Relativité Restreinte attribue également à l'espace-temps plat de Minkowski, une symétrie correspondant à celle du groupe de symétrie de Poincaré<sup>1</sup>. Ce dernier contient à la fois les transformations de Lorentz et les translations d'espace et de temps[3]

Par ailleurs, le théorème de Noether[5] établit que toute transformation globale laissant

---

1. Le groupe de Poincaré inclut quatre sous-groupes de symétrie : les translations d'espace et de temps, les rotations d'espace, les renversements de temps et d'espace (parité), et enfin les transformations de Lorentz

invariant un système implique la conservation d'une quantité. Dans le cas présent, l'invariance locale de la Relativité Restreinte sous les transformations du groupe de symétrie de Poincaré implique la conservation de l'intervalle d'espace-temps<sup>2</sup>.

L'existence d'une invariance de jauge implique également une quantité physique non observable qui, dans le cas de la Relativité Restreinte, correspond aux points de l'espace-temps.

Afin de pallier les insuffisances de la Relativité Restreinte, qui privilégie les référentiels en mouvement uniforme, Einstein étend le principe de relativité à tous les repères, quel que soit leur état de mouvement[1]. Il généralise donc l'invariance des lois de la physique pour n'importe quel référentiel et n'importe quel observateur. Le *principe de relativité générale* (ou de covariance généralisée) s'énonce comme :

*"Tous les corps de référence, quel que soit leur état de mouvement, sont équivalents pour la description de la nature."*[6]

Cette équivalence implique que les équations découlant de ces lois sont indépendantes du système de coordonnées considéré, et donc qu'elles sont covariantes[1, 4].

### Principe de d'équivalence et symétries locales

Le principe d'équivalence d'Einstein généralise entre autre le principe d'*universalité de la chute libre* de Newton (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687), aussi appelé principe d'équivalence faible. Il établit également l'invariance des lois de la physique non-gravitationnelle en espace-temps courbe, en supposant que l'espace-temps est localement équivalent à l'espace-temps plat de Minkowski.

Le principe d'équivalence peut s'exprimer de la façon suivante[7] :

(i) *Principe d'équivalence faible* : La trajectoire d'un corps en chute libre est indépendante de sa composition et de sa structure interne.

Autrement dit, la masse inerte  $m_i$  d'un corps est équivalente à sa masse gravitationnelle  $m_g$ <sup>3</sup>.

(ii) *Invariance locale de Lorentz* : Le résultat d'une expérience locale non-gravitationnelle est indépendante de la vitesse et de l'orientation du repère en chute libre dans lequel est réalisée l'expérience.

2. En relativité restreinte, l'intervalle d'espace-temps est défini comme :  $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu$  où  $\eta_{\mu\nu}$  est la métrique de Minkowski et les  $X^\mu$  sont les coordonnées du référentiel local en chute libre. Il correspond à la distance entre deux événements.

3.  $m_i \mathbf{a} = -m_g \nabla \Phi$  où  $\mathbf{a}$  est l'accélération du corps et  $\Phi$  le potentiel du champ gravitationnel.

- (iii) *Invariance locale de position* : Le résultat d'une expérience locale non-gravitationnelle est indépendante de la position spatiale et temporelle du repère en chute libre dans lequel est réalisée l'expérience.

Les points (ii) et (iii) établissent l'invariance des lois de la physique sous les transformations locales du groupe de symétrie de Poincaré, mentionné précédemment.

Du principe d'équivalence découle un fondement de la Relativité Générale : le lien entre contenu en masse et gravitation. En effet, l'équivalence entre masse inerte et masse gravitationnelle implique que toute énergie contribuant à la masse d'un corps (énergie au repos, énergie de liaison...) contribue aussi à sa masse gravitationnelle et donc à sa capacité à créer un champ gravitationnel[8].

L'équivalence entre gravitation et inertie offre également la possibilité d'effacer localement les effets des champs gravitationnels en se rapportant à un référentiel local en chute libre où s'appliquent les lois de la Relativité Restreinte[8].

### Lien entre métrique et gravitation

Puisque tous les corps, indépendamment de leur composition, suivent les mêmes trajectoires gravitationnelles, on peut décrire la gravitation comme un phénomène géométrique, c'est à dire universel. En effet, si le principe d'équivalence d'Einstein est vérifié, la théorie de la gravitation est nécessairement une théorie métrique [7].

Lorsqu'on passe d'un référentiel localement inertiel à un référentiel non inertiel, la transformation entre les deux référentiels n'est plus une transformation linéaire (comme l'est par exemple une transformation de Lorentz). L'intervalle d'espace-temps prend alors une forme plus complexe :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

où  $g_{\mu\nu}$  sont les composantes du tenseur métrique, décrivant la géométrie de l'espace-temps. Ses composantes sont définies localement. Les composantes du vecteur représentant la séparation infinitésimale sont notées  $dx^\mu$ .

La métrique influence le déplacement des corps : dans un espace-temps plat, le chemin le plus court suivi par un corps (géodésique) sera une ligne droite, tandis que dans un espace-temps courbe les géodésiques seront curvilignes (voir figure 1.1). Il en découle notamment l'effet de déflexion des rayons lumineux lors de leur passage à proximité d'un corps massif.

Les équations gouvernant l'évolution de la métrique en fonction du contenu en matière sont les équations d'Einstein[9].

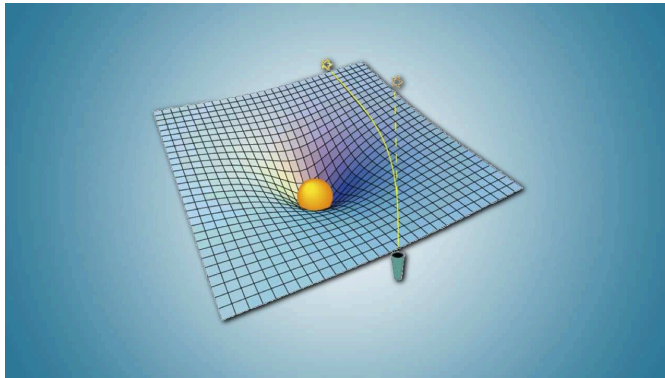


FIGURE 1.1 – Géodésique en espace-temps plat et en espace-temps courbe.

Source : <https://www.youtube.com/watch?v=6JLgWX9iqgo>

### Vérification expérimentales

À ce jour, toutes les expériences visant à tester la Relativité Générale ont été en accord avec ses prédictions.

En 1915, Einstein démontre que le taux de précession du périhélie de Mercure de 42.7 secondes d'arc par siècle, phénomène inexpliqué par la théorie newtonienne, pouvait s'expliquer naturellement dans le cadre de la Relativité Générale[10].

La seconde vérification de la Relativité Générale est l'observation de la *déflexion de la lumière* lors d'une éclipse totale en 1919. Cette expérience a permis de mettre en évidence la courbure des rayons lumineux à proximité du Soleil[11].

Le *décalage gravitationnel des fréquences*, qui prédit un décalage de fréquence d'un photon lorsque l'émetteur et l'observateur sont immergés dans des champs gravitationnels différents, a été mis en évidence pour la première fois en 1959 par l'expérience de Pound et Rebka[12]. Une autre conséquence de cet effet est le décalage relatif des horloges au sol et dans l'espace, observé notamment grâce aux systèmes de positionnement (GPS, GLONASS,...).

L'effet Shapiro, ou retard gravitationnel de la lumière, représente le retard du temps d'arrivée d'un signal lumineux lorsque ce dernier se propage dans un espace-temps courbé par la matière environnante. Prédit en 1915, il a été observé pour la première fois en 1964 par I. Shapiro[13].

L'effet Lense-Thirring, prédit en 1918[14], et qui correspond à un effet d'entraînement de l'espace-temps à proximité d'un corps massif en rotation, a été détecté pour la première fois en 2011 par la sonde Gravity Probe B [15].

La dernière vérification expérimentale de la Relativité Générale est la découverte des

ondes gravitationnelles, d'abord par des observations indirectes [16, 17], puis par des observations directes en 2016 grâce au détecteur LIGO[18].

### Limitations

Bien qu'elle n'ait jamais été mise en défaut, un des problèmes majeurs rencontré par la Relativité Générale est qu'elle n'est pas conciliable avec le Modèle Standard décrivant les particules et leurs interactions (voir partir 1.2.1).

D'autre part, la Relativité Générale permet d'expliquer avec succès l'expansion de l'Univers, mais elle ne permet pas de comprendre pourquoi cette expansion s'effectue de manière accélérée. Par défaut, ce phénomène a été attribué à une *énergie sombre*, exerçant une pression négative sur la matière[19, 20].

La Relativité Générale peine également à expliquer les courbes de rotation des galaxies [21, 22], ces dernières tournant trop vite par rapport à leur masse observée. Cette anomalie peut s'expliquer par l'existence d'une grande quantité de matière, de nature inconnue, n'émettant aucun rayonnement mais interagissant par interaction gravitationnelle avec la matière ordinaire. Cette matière, appelée *matière noire*, est supposée représenter 26.8% du contenu en matière de l'Univers, et sa compréhension est l'un des grands défis de la physique contemporaine.

#### 1.1.2 Le Modèle Standard : succès et limitations

Le Modèle Standard est une théorie décrivant la physique à l'échelle subatomique. Il repose sur trois groupes de symétries dont chacun est associé à l'une des trois interactions dominantes à l'échelle des particules - et prises en compte dans le Modèle Standard : les interactions forte, faible et électromagnétique. Il décrit la matière ordinaire et ses interactions grâce à 25 particules (voir figure 1.2) qui peuvent être classées en deux grandes catégories :

- ◇ Les constituants de la matière ordinaire sont appelés fermions (spin 1/2 entier). Ils se composent de 6 quarks (up, down, charm, strange, top et bottom) et de 6 leptons (électron, muon, tau et leurs neutrinos associés). À chaque fermion est associé une anti-particule possédant les mêmes propriétés excepté sa charge, qui est de signe opposée. Les plus abondants sont les quarks u et d - qui constituent les protons et les neutrons -, l'électron et le neutrino électronique. Les autres sont dits de deuxième et troisième génération, ils sont plus massifs et également plus rares.
- ◇ Les médiateurs d'interaction - 12 bosons de jauge de spin 1 - qui agissent comme

masse →	≈2.3 MeV/c <sup>2</sup>	≈1.275 GeV/c <sup>2</sup>	≈173.07 GeV/c <sup>2</sup>	0	≈126 GeV/c <sup>2</sup>
charge →	2/3	2/3	2/3	0	0
spin →	1/2	1/2	1/2	1	0
	<b>u</b> up	<b>c</b> charm	<b>t</b> top	<b>g</b> gluon	<b>H</b> boson de Higgs
<b>QUARKS</b>					
	≈4.5 MeV/c <sup>2</sup>	≈95 MeV/c <sup>2</sup>	≈4.18 GeV/c <sup>2</sup>	0	
	-1/3	-1/3	-1/3	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	<b>d</b> down	<b>s</b> strange	<b>b</b> bottom	<b>γ</b> photon	
	0.511 MeV/c <sup>2</sup>	105.7 MeV/c <sup>2</sup>	1.777 GeV/c <sup>2</sup>	91.2 GeV/c <sup>2</sup>	
	-1	-1	-1	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	<b>e</b> électron	<b>μ</b> muon	<b>τ</b> tau	<b>Z</b> boson Z <sup>0</sup>	
<b>LEPTONS</b>					
	<2.2 eV/c <sup>2</sup>	<0.17 MeV/c <sup>2</sup>	<16.5 MeV/c <sup>2</sup>	80.4 GeV/c <sup>2</sup>	
	0	0	0	+1	
	1/2	1/2	1/2	1	
	<b>ν<sub>e</sub></b> neutrino électronique	<b>ν<sub>μ</sub></b> neutrino muonique	<b>ν<sub>τ</sub></b> neutrino tauique	<b>W<sup>±</sup></b> boson W <sup>±</sup>	
					<b>BOSONS DE JAUGE</b>

FIGURE 1.2 – Particules du Modèle Standard.

Source : <https://fr.wikipedia.org>.

messagers pour permettre l'interaction à distance entre particules de matière ordinaire. Les interactions et leurs bosons seront détaillés plus loin dans cette partie.

- ◇ Le boson de Higgs, un champ scalaire de spin nul, qui a pour particularité d'attribuer une masse aux particules élémentaires qui interagissent avec lui.

Le Modèle Standard est une théorie effective de jauge : il contient 19 paramètres libres relatifs aux masses des particules et aux constantes de couplages entre ces dernières. Ces paramètres doivent être ajustés par l'expérience. De plus, il s'agit d'une théorie quantique des champs basée sur un ensemble de symétries qui permettent de décrire les interactions entre les particules comme des effets géométriques.

### Symétries internes et interactions

Chacune des interactions découle d'une symétrie et a donc une origine géométrique [23]. Considérons par exemple le cas d'un électron libre décrit par l'équation de Dirac [24]. Cette équation découle d'une densité lagrangienne et est invariante sous les transformations globales de phase de la fonction d'onde de l'électron  $\Psi(\vec{x}, t) \rightarrow e^{i\theta}\Psi(\vec{x}, t)$ , où  $\theta$  est constant à travers tout l'espace-temps. Cette symétrie correspond au groupe SU(1).

En revanche, cette équation n'est pas invariante sous une transformation locale de phase  $\Psi(\vec{x}, t) \rightarrow e^{i\theta(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t)$ , *i.e.* il se produit une brisure de symétrie locale. Afin de maintenir localement la symétrie du problème, il faut y ajouter un terme d'interaction faisant

intervenir un potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{x}, t)$ , aussi appelé un champ de jauge. Ce terme d'interaction décrit le mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique, tandis que le champ de jauge décrit le médiateur de l'interaction électromagnétique, une particule sans masse : le photon.

Le lagrangien résultant de cette invariance de jauge est celui de l'électrodynamique quantique, décrivant l'interaction électromagnétique [23].

On peut appliquer le même raisonnement géométrique à chaque interaction. Par ailleurs, le nombre de bosons de jauge associé à chaque interaction dépendra directement de la géométrie de cette dernière, car il correspondra à la dimension de la matrice ou du scalaire représentant la transformation locale laissant le système invariant.

- ◇ L'interaction électromagnétique - groupe de symétrie  $U(1)$  - est la force agissant sur les objets ayant une charge électrique, elle assure la cohésion des atomes en liant les électrons et le noyau.

Lors de l'interaction entre une particule chargée et un champ électromagnétique, un photon - jouant le rôle de médiateur - modifie la fonction d'onde de la particule.

- ◇ L'interaction faible, associée au groupe de symétrie  $SU(2)$  représenté par une matrice  $2 \times 2$ , est notamment responsable de la radioactivité  $\beta$  et est associée à trois bosons, appelés  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$ .
- ◇ L'interaction forte agit sur les quarks et les hadrons<sup>4</sup>. Cette interaction assure la stabilité des noyaux. Elle est associée au groupe de symétrie  $SU(3)$ , représenté par une matrice  $3 \times 3$  comportant 8 composantes indépendantes qui correspondent aux 8 gluons jouant le rôle de médiateur de l'interaction forte.

## Symétries d'espace-temps

Le modèle standard décrit les particules comme immergées dans un espace-temps plat de Minkowski. Cet espace-temps est passif vis-à-vis des interactions entre particules, mais ajoute ses propres symétries à celles énoncées plus haut.

Ces symétries d'espace-temps peuvent être continues ou discrètes :

- ◇ symétries continues du groupe de Poincaré, détaillées plus haut.
- ◇ symétrie discrète CPT : symétries discrètes du groupe de Poincaré (PT), *i.e.* invariance sous inversion d'espace (P) et de temps (T), auxquelles s'ajoute la symétrie par inversion de charge (C).

---

4. Particule composite, e.g. proton, neutron

## Vérifications expérimentales

Le Modèle Standard a été finalisé en 1970, peu après la découverte des premiers quarks [25]. Toutes les particules prédites par ce modèle ont été observées, bien que certaines particules comme l'électron [26] aient été connues avant son élaboration.

La dernière particule de matière découverte fut le neutrino  $\tau$  en 2000[27]. Quant aux bosons médiateurs d'interactions, le premier à avoir été découvert sur les prédictions du modèle standard était le boson  $Z^0$  [28] en 1974. Le dernier boson à avoir été découvert est le boson de Higgs, en 2012 [29]. À ce jour, le modèle Standard a été testé avec succès jusqu'à une énergie de 13 TeV au LHC.

## Limitations

Le Modèle Standard ne décrit pas l'interaction gravitationnelle, bien qu'une particule ait été postulée pour servir de médiateur d'interaction à la gravitation : le graviton, une particule de spin égal à 2. Cette particule n'a jamais été observée.

Par ailleurs, le Modèle Standard ne contient aucune particule pouvant servir de candidat pour expliquer la matière noire, pas plus qu'il ne permet d'expliquer l'expansion accélérée de l'Univers. Les tentatives pour expliquer l'énergie sombre responsable de cette expansion par des termes d'énergie du vide sont restées infructueuses, car elles ont aboutie à des écarts de quelques 120 ordres de grandeurs par rapport à l'énergie sombre observée [30].

Enfin, il n'explique pas pour le moment la hiérarchie de masse observée entre les différents fermions.

## 1.2 Recherche d'une nouvelle théorie de la gravitation

### 1.2.1 La nécessité d'une nouvelle théorie

La physique actuelle ne nous permet pas de disposer d'une théorie permettant de décrire de manière unifiée les quatre interactions fondamentales à l'œuvre dans la nature. En effet, la Relativité Générale et le Modèle Standard ne sont pas conciliables pour plusieurs raisons :

- Leur manière de considérer l'espace-temps est différente. Dans le cas du Modèle Standard, il s'agit d'un cadre extérieur découplé de celui, abstrait, dans lequel sont décrites les interactions entre particules. Dans le cas de la relativité, l'espace-temps joue, quant à lui, un rôle actif en contrôlant notamment la dynamique au travers de sa géométrie [23].



- Aux échelles d'énergie ou de distance auxquelles les quatre interactions sont supposées influencer conjointement les systèmes physiques, des effets quantiques apparaissent et sont incompatibles avec la nature classique de la Relativité Générale. Contrairement au Modèle Standard, qui fait intervenir des champs quantiques correspondant à des particules élémentaires, la Relativité Générale n'implique que des champs classiques et leur quantification fait apparaître des quantités infinies, impossibles à renormaliser par des procédures utilisées habituellement en physique des particules.

### 1.2.2 Quelques pistes

**Théories de la Grande Unification et théorie du tout** On suppose que le Modèle Standard est une théorie effective basse énergie ne reflétant qu'une partie d'une symétrie plus large, existant à très haute énergie et brisée spontanément à des échelles intermédiaires. Au-delà de l'énergie à laquelle se produit cette brisure, les trois interactions de la physique des particules sont supposées être unifiées, la brisure de symétrie ayant pour effet de les séparer. Cela suppose donc que l'intensité des interactions dépend de l'énergie.

La Grande Unification ne peut pas être obtenue dans le cadre du Modèle Standard, mais avec une de ses extensions - le Modèle Standard Supersymétrique [31]- qui inclut une symétrie supplémentaire reliant les bosons et les fermions. Cette théorie prédit que les 3 interactions - forte, faible et électromagnétique - pourraient s'unifier à une échelle d'énergie de  $10^{16}$  GeV. Pour le moment, les plus grands collisionneurs atteignent des énergies de quelques  $10^4$  GeV.

Les théories du tout prédisent quant à elles que la gravitation et les trois autres interactions pourraient s'unifier à des échelles d'énergies encore plus élevées, probablement de l'ordre de l'énergie de Planck ( $10^{19}$  GeV).

**Dimensions supplémentaires** Proposé pour la première fois par Kaluza et Klein [32, 33], l'ajout de dimensions supplémentaires permet de résoudre le problème de hiérarchie entre les échelles du Modèle Standard et l'échelle de Planck - à laquelle est supposée se produire l'unification des quatre interactions. Dans ce type de théorie, l'Univers à très haute énergie possède  $n$  dimensions supplémentaires qui se replient sur elles-mêmes lorsque l'énergie décroît, permettant ainsi d'aboutir à un univers basse énergie à 4 dimensions.

**Théorie des cordes** Comme mentionné plus haut, la quantification de la gravitation fait intervenir des quantités infinies liées à la nature ponctuelle des particules décrites dans le cadre du Modèle Standard. La théorie des cordes permet de résoudre ce problème de renormalisabilité de la gravitation quantique, en attribuant une dimension supplémentaire à chaque particule. Ces dernières deviennent des objets étendus, de dimension 1, appelés des "cordes", dont les particules ponctuelles sont des modes de vibration [34]. Cette théorie est en cours de développement et n'a pas pour le moment donné lieu à des validations expérimentales.

**5ème force** Dans un Univers doté de dimensions supplémentaires, perceptibles seulement aux petites échelles spatiales ou à très haute énergie, la compactification de ces dimensions pourrait produire des effets d'intensité comparable à ceux de la gravitation, mais à des échelles de distances plus petites.

C'est dans ce contexte que s'insèrent les théories de 5<sup>ème</sup> force, suggérées pour la première fois par Fischbach en 1986 [35]. Cette force, équivalente à une force de gravitation à courte distance, pourrait théoriquement entraîner une déviation de la loi en  $\frac{1}{r^2}$  de Newton. Les distances caractéristiques d'interaction de cette cinquième force varient suivant les nombreux modèles de compactification existants. On suppose donc généralement que cette force est dotée d'un potentiel de type Yukawa, associé à une distance caractéristique d'interaction variable. Pour le moment, les tests ont permis d'exclure l'existence d'une telle force - avec une amplitude comparable ou supérieure à celle de la gravitation - pour des échelles de distance entre  $10^{-5}$  et  $10^{16}$ m.

**Le formalisme PPN (Parametrized Post-Newtonian)** La Relativité Générale étant fortement non linéaire, la plupart des problèmes n'ont pas de solution exacte. Le formalisme Post-Newtonien est une approximation de la Relativité Générale consistant à réaliser, au voisinage de l'approximation newtonienne, un développement en puissance dépendant de termes en  $\frac{v}{c}$  ou  $\frac{U}{c^2}$ , avec  $U$  le potentiel Newtonien. Cela revient à supposer que la métrique du problème est proche de la métrique de Minkowski :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

où  $|h_{\mu\nu}| \sim \frac{v^2}{c^2} \sim \frac{U}{c^2} \ll 1$ . Les termes correctifs ajoutés aux prédictions de la mécanique newtonienne sont ajoutés par ordre croissant de puissance de  $\frac{v}{c}$ , selon la précision souhaitée.

À partir de ce formalisme, un cadre théorique appelé *formalisme post-newtonien*

*paramétré*, a été développé par Nordvedt et Will [36, 37, 38], de manière à permettre la comparaison entre différentes théories alternatives à la gravitation et également tester les prédictions de la Relativité Générale elle-même.

Le PPN paramétrise des termes résultant du développement de  $h_{\mu\nu}$  au moyen de 10 paramètres [7], bien que les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  soient les plus largement utilisés. Dans le cadre de la Relativité Générale, ces paramètres valent 1. On peut étudier les déviations à la Relativité Générale en évaluant par exemple les quantités  $\gamma - 1$  et  $\beta - 1$  dans le cadre de différentes théories métriques alternatives [8].

La recherche d'une théorie quantique de la gravitation s'est heurtée aux deux problèmes énoncés dans la partie 1.2.1. Des théories prometteuses comme la théorie des cordes ont permis des avancées théoriques et conceptuelles importantes, mais n'ont pas débouché sur des tests expérimentaux concrets. Le besoin de disposer d'un cadre théorique, permettant de tester d'une manière exhaustive un large espace de théories au-delà du Modèle Standard, a conduit dans les années 90 au développement de l'Extension du Modèle Standard (SME) [39, 40, 41, 42]. C'est dans ce cadre que s'inscrivent les tests réalisés dans cette thèse, c'est pourquoi il fait l'objet d'une description plus exhaustive que les théories et formalismes alternatifs décrits jusqu'ici.

## 1.3 L'Extension du Modèle Standard (SME)

### 1.3.1 Contexte et construction

Un certain nombre de théories, dépassant le cadre du Modèle Standard et de la Relativité Générale, impliquent des phénomènes nouveaux, mais à des échelles d'énergie inaccessibles par l'expérience, typiquement de l'ordre de l'échelle de Planck ( $10^{19}$  GeV)<sup>5</sup>. Parmi ces phénomènes nouveaux, on trouve notamment des violations d'invariance de Lorentz locale, admises par des théories des cordes [39], mais aussi des théories de type branes, multivers, gravité quantique à boucles etc...

Le SME est une théorie effective permettant de rechercher, à des énergies accessibles par l'expérience, des signatures résultants de ces phénomènes ayant lieu à très haute énergie et pouvant indiquer l'existence d'une nouvelle physique au travers d'une violation d'invariance de Lorentz.

Bien que ces violations sont supposées advenir à très haute énergie, le SME suppose que des signatures à basse énergie, fortement atténuées, pourraient être observables grâce

---

5. Les collisionneurs atteignent pour le moment des énergies de l'ordre de  $10^4$  GeV

à nos expériences actuelles. L'échelle naturelle des phénomènes liés à la gravitation quantique étant l'échelle de Planck  $E_p$ , les signatures recherchées pourraient être atténuées, par exemple par un facteur en puissance de  $\frac{E_{EF}}{E_p} \simeq 10^{-17}$ , où  $E_{EF}$  représente l'échelle d'énergie électrofaible, de l'ordre de  $10^2$  GeV, qui est l'énergie d'unification des interactions électromagnétique et faible. Même si le SME avait à l'origine pour but de tester la théorie des cordes, en proposant des observables basse énergie permettant de rechercher des violations d'invariance de Lorentz et de symétrie CPT, il s'agit d'un cadre général qui s'affranchit d'une théorie particulière. Cette généralité du SME offre la possibilité de rechercher des violations d'invariance de Lorentz grâce à une large gamme d'expériences et pour un large éventail de secteurs (matière, bosons, gravitation...).

### 1.3.2 Propriétés

Le SME est une théorie effective, constituant une approximation basse énergie d'une théorie fondamentale **covariante sous des transformations de Lorentz passives**, *i.e.* indépendante du système de coordonnées. L'invariance sous les transformations passives de Lorentz est fondamentale, car elle garantit que la physique ne dépend pas du choix de l'observateur.

Le SME inclut cependant des **violations d'invariance de Lorentz sous des transformations actives**. Autrement dit, dans un même système de coordonnées, toute transformation du système - *e.g.* des champs liés aux particules ou aux interactions - peut dépendre de l'orientation ou de la vitesse du repère local [43]. Le fait que la théorie possède une symétrie globale, mais que cette dernière soit localement brisée par ses solutions, peut s'expliquer naturellement si cette brisure de symétrie est spontanée.

Prenons l'exemple d'une barre verticale déformable, soumise à une force de compression : la barre possède une symétrie de révolution, mais un paramètre externe, ici une force de compression, vient déformer cette barre. Elle peut alors fléchir dans toutes les directions du plan normal à la force appliquée. Chacune des possibilités de déformation est identique en terme d'énergie et elles sont des images les unes des autres par la symétrie de révolution. La barre déformée est par conséquent un état dégénéré [23].

Chaque état possible de la barre déformée brise la symétrie de révolution, mais prises dans leur ensemble, les solutions la respectent. Cet exemple illustre le fait qu'un système possédant une symétrie peut présenter des solutions particulières qui ne la respectent pas, ce qui constitue une brisure spontanée de symétrie.

Une autre caractéristique du SME est qu'il ne fait pas intervenir de champs ou de particules exotiques. Les termes de violations sont obtenus en contractant des champs

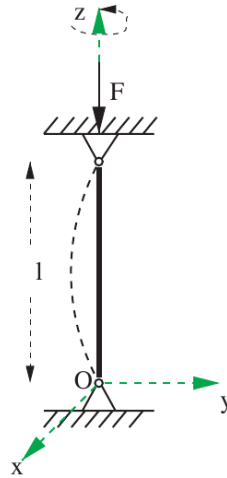


FIGURE 1.3 – Illustration d'une brisure spontanée de symétrie : flexion d'une barre verticale. Schéma provenant de [23].

usuels du Modèle Standard avec des tenseurs, dont les composantes sont appelées "coefficients SME", et dont la dimension est ajustée de manière à maintenir la covariance du Lagrangien. Cette approche permet d'étudier l'impact effectif d'une brisure de symétrie dans les observations, sans avoir besoin de connaître ou de faire des hypothèses sur les mécanismes à l'origine de la brisure spontanée de symétrie.

En l'absence de connaissances sur les processus sous-jacents à la brisure de symétrie, il est impossible d'inférer leur capacité à se propager à basse énergie. Le SME n'est donc **pas prédictif en ce qui concerne les énergies et les amplitudes** des signaux pouvant potentiellement être observées grâce aux expériences basse-énergie. Le fait qu'aucune violation d'invariance de Lorentz n'ait été observée à ce jour indique que si de tels signaux existaient, ils seraient fortement atténués [40]. Le SME est en revanche **prédictif en ce qui concerne la "forme" de ces signaux et leur phénoménologie**. Il permet donc de guider les expériences vers des configurations optimales pour la recherche de ces signaux, et de les comparer entre elles.

Parmi les autres propriétés du SME, on trouve la conservation du tenseur énergie-impulsion des particules, via la persistance de l'invariance sous les transformations du sous-groupe des translations inclus dans le groupe de Poincaré. Par ailleurs, le SME préserve les symétries interne du Modèle Standard, et inclut une **brisure de la symétrie CPT**, qui implique directement une brisure de symétrie de Lorentz.

### 1.3.3 Structure

Le SME est construit à partir de l'action du Modèle Standard et de la Relativité Générale auxquels s'ajoute une partie contenant des termes violant la symétrie de Lorentz[44] :

$$S_{SME} = S_{SM} + S_{RG} + \delta S \quad (1.3)$$

où les actions  $S_{SM}$  et  $S_{RG}$  contiennent les termes respectant l'invariance de Lorentz, en accord avec le Modèle Standard (SM) et la Relativité Générale (RG). L'action  $\delta S$  contient des termes qui dépendent de coefficients SME quantifiant les violations d'invariance de Lorentz. Certains de ces coefficients sont autorisés à prendre des valeurs différentes selon la particule considérée. L'ensemble des contraintes expérimentales sur les coefficients SME sont présentées dans des tables qui sont actualisées chaque année [45].

Le SME a tout d'abord été développé dans le secteur de la matière en considérant un espace-temps plat de Minkowski, puis a été étendu à partir de 2004 au secteur gravitationnel, afin de prendre en compte les couplages entre matière et gravité en espace-temps courbe<sup>6</sup> [46, 47].

Pour chaque expérience considérée, on peut adapter l'action au secteur d'intérêt, et ainsi la réduire aux termes utiles à la description du système. Si on étudie le comportement des fermions, l'action sera obtenue à partir du lagrangien du Modèle Standard tenant compte des champs et des interactions décrivant le comportement des fermions [48]. Il sera le plus souvent inutile de prendre en compte des contributions du secteur gravitationnel.

Comme mentionné plus haut, le SME est construit à partir des champs usuels de physique des particules et de la Relativité Générale. Les termes de violations sont obtenus en contractant des opérateurs apparaissant dans les actions de ces théories avec des tenseurs SME, dont les coefficients paramétrisent l'amplitude des violations. Le SME s'apparente donc à un développement en série de l'action incorporant des termes qui dépendent de contractions d'opérateurs de dimensions de plus en plus élevées. Lorsque tous les coefficients SME sont nuls, on retrouve l'action du Modèle Standard et de la Relativité Générale.

---

6. via la prise en compte d'un tenseur de courbure. Ce dernier apparaît dans l'action de Einstein-Hilbert qui représente l'action du champ gravitationnel

### 1.3.4 SME minimal et non minimal

Le SME minimal est une approximation obtenue en limitant le développement en série de l'action à des opérateurs de dimension  $d \leq 4$ , *i.e.* leur dimension de masse est au maximum de  $[\text{GeV}^4]$ . Le fait de limiter les termes du développement à des opérateurs de dimension inférieure ou égale à la dimension de l'espace-temps (la densité lagrangienne étant également en  $[\text{GeV}^4]$ ) facilite la renormalisation des termes du développement [44].

Les observables SME peuvent également contenir des termes d'ordres plus élevés, faisant intervenir des opérateurs d'ordre  $d \geq 5$ , mais dans ce cas la procédure de renormalisation peut s'avérer plus compliquée. Le secteur minimal du SME a été largement étudié, mais l'exploration du secteur non-minimal offre de nouvelles perspectives de recherche de violation d'invariance de Lorentz [46, 49].

### 1.3.5 Convention : coefficients SME et Référentiel Héliocentrique Non-Tournant (RHNT)

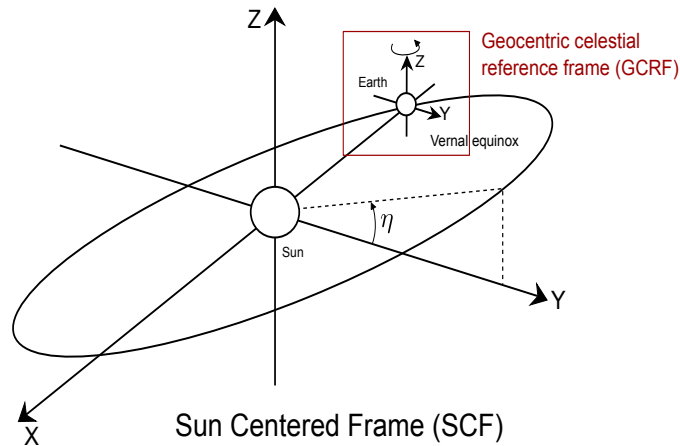


FIGURE 1.4 – Schéma du repère héliocentrique non-tournant (noté SCF sur le schéma) et du repère géocentrique (GCRF).

Les coefficients SME sont des champs de fond, fixes et dotés d'une orientation privilégiée. Ils sont de plus supposés constant aux échelles de temps durant lesquelles les expériences SME sont réalisées. Lorsque l'on réalise une expérience, ces coefficients sont définis par rapport à un repère local. Si ce repère n'est pas inertiel, *e.g.* lié à un satellite en mouvement autour de la Terre, les composantes des coefficients SME du repère du laboratoire vont changer dans le temps.

Afin de pouvoir comparer les résultats de diverses expériences, les contraintes SME

sont définies par rapport à un repère inertiel de référence. Dans le SME, ce repère de référence est, par convention, le référentiel héliocentrique non-tournant (RHNT) [50]. L'origine des temps est assimilée au passage de la Terre au point vernal (équinoxe de printemps) de l'an 2000. À  $T=0$ , l'axe X pointe vers le point vernal et Z est parallèle à l'axe de rotation de la Terre ; l'axe Y complète le repère, comme présenté à la figure 1.4.

## 1.4 Recherche de violation d'invariance de Lorentz dans le cadre du SME : forme des signaux attendus

On recherche une variation du résultat de mesure d'une expérience non-gravitationnelle, en fonction des changements d'orientation et de vitesse du dispositif expérimental. Ces variations sont dues au couplage avec des champs de fond - des tenseurs de violation SME - dotés d'une orientation privilégiée. Des couplages avec ces champs peuvent entraîner une violation locale d'invariance de Lorentz.

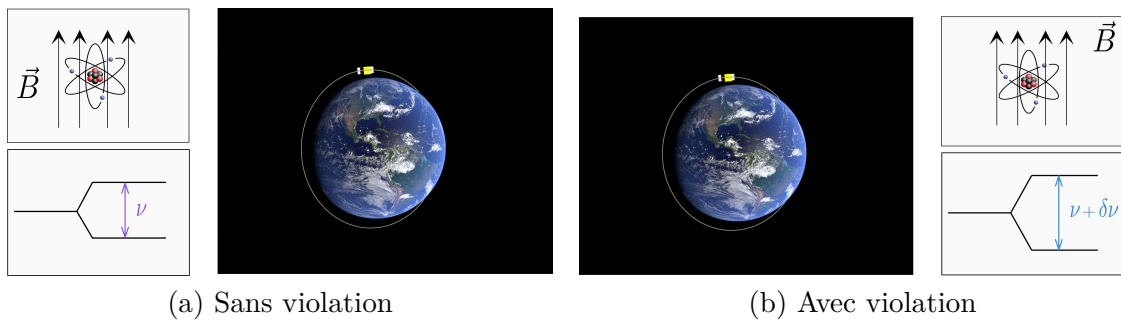


FIGURE 1.5 – Impact du couplage avec un champ de fond SME (en rouge) sur le comportement des atomes, en présence d'un champ magnétique  $\vec{B}$ .

Afin de comprendre les signatures de violation attendues, on peut prendre comme exemple une horloge atomique placée dans un satellite (voir figure 1.5). Dans cette horloge, des atomes sont soumis à un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ , forçant l'orientation de leurs spins suivant une direction commune. Le champ magnétique définit l'un des axes du repère lié à l'expérience et une direction privilégiée suivant laquelle il convient de sonder les déviations des lois de la physique.

On suppose maintenant qu'il existe un champ de fond, doté d'une orientation privilégiée, matérialisée par des flèches rouges sur la figure 1.5. Le couplage des atomes avec ce champ de fond peut notamment entraîner une dépendance de la fréquence de transition atomique selon l'orientation relative des spins - fixée par le champ magnétique - et du champ de fond.



En considérant que ce champ est fixe par rapport au référentiel inertiel lié au Soleil (RHNT), on observera des variations harmoniques de la fréquence de transition atomique. Selon l'échelle de temps durant laquelle on répète l'expérience - ici la mesure de fréquence - on pourra observer des variations dont la périodicité sera liée à différentes composantes du mouvement du satellite par rapport au Soleil. Des mesures de courte durée (quelques jours) permettront de rechercher des variations de la fréquence atomique à mesure que le satellite se déplace le long de son orbite, tandis que des mesures répétées sur plusieurs mois permettront de rechercher également des modulations de fréquence liées au mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil.

Nous recherchons, d'une manière générale, des signaux périodiques indiquant une variation du résultat expérimental au fil des déplacements de l'instrument par rapport à des champs de fond, correspondant aux tenseurs SME, qui définissent une orientation privilégiée de l'espace-temps. Afin d'extraire un maximum d'informations sur ces variations, nous avons besoin d'expériences très précises et stables sur plusieurs mois.

## 1.5 Travail effectué durant la thèse

Le but de ma thèse était de réaliser deux tests d'invariance de Lorentz dans le cadre du SME. Ces deux tests m'ont permis d'explorer différents secteurs : le premier, réalisé grâce à une horloge atomique, m'a permis de rechercher des violations d'invariance de Lorentz dans le secteur SME de la matière, tandis que le second, utilisant les données de la mission spatiale MICROSCOPE, visait à rechercher des violations dans le secteur de la matière couplée à la gravitation.

### 1.5.1 Réalisation d'un test d'invariance de Lorentz en laboratoire, avec les données d'une fontaine à atomes froids

Le premier test, réalisé durant ma première année de thèse, avait pour but de contraindre des violations d'invariance de Lorentz ayant pour origine les nucléons. Pour ce test, j'ai pu analyser des données de fréquence, obtenues en 2006 grâce à une horloge à atomes froids de césium 133. Le couplage des protons avec certains coefficients SME étant susceptible d'occasionner des variations de la fréquence de transition hyperfine des atomes, j'ai recherché des composantes périodiques dans des mesures de fréquence réalisées à environ six mois d'intervalle.

Ces données avaient déjà donné lieu à une première analyse en 2006 [51]. Dans le cadre de ma thèse, j'ai amélioré le modèle pour y inclure la contribution de nouveaux

coefficients SME, ainsi que la prise en compte de variations annuelles de la fréquence de transition atomique. J'ai également initié une collaboration avec des membres de l'Institut de Physique Nucléaire (IPN) d'Orsay, ce qui nous a permis d'utiliser un modèle nucléaire très poussé et d'étendre la portée de notre test aux contributions du couplage entre neutrons et coefficients SME.

Les résultats obtenus - jusqu'à 12 ordres de grandeur d'amélioration sur des contraintes dans le secteur SME de la matière - ont fait l'objet de deux publications, toutes deux présentées en annexe de cette thèse.

### **1.5.2 Réalisation d'un test d'invariance de Lorentz grâce aux données de la mission spatiale MICROSCOPE**

La seconde partie de ma thèse a porté sur la mise en place d'outils d'analyse pour l'étude des données de la mission spatiale MICROSCOPE, dans le cadre d'un test d'invariance de Lorentz.

Le but de la mission MICROSCOPE est de comparer l'accélération relative de masses d'épreuve de composition différente, afin de tester l'universalité de la chute libre. Dans notre cas, nous recherchons une variation périodique de cette accélération relative suivant l'orientation de l'axe sensible de l'instrument.

Dans un premier temps, j'ai développé un modèle semi-analytique, basé sur les mesures effectuées en vol, qui permet de relier les mesures d'accélération relative à des coefficients SME. Ce travail a fait l'objet d'une collaboration avec des spécialistes du SME, Q. Bailey (ERAU, Arizona) et J. Tasson (Carleton College, Minnesota). J'ai ensuite mis en place un logiciel d'analyse permettant de rechercher, dans le domaine temporel, des signaux périodiques pouvant correspondre à des signaux de violation. Pour cette analyse, j'ai employé une méthode de type moindres-carrés Monte-Carlo (LSMC) avec simulation d'échantillons de bruit synthétiques, ce qui m'a permis de tenir compte des propriétés du bruit de mesure pour estimer de manière conservative les incertitudes sur nos paramètres de violation. J'ai également disposé de données de température pour estimer l'amplitude des principaux effets systématiques, d'origine thermique.

Grâce aux équipes de l'ONERA et de l'OCA, impliquées dans le déroulement de la mission MICROSCOPE, j'ai pu analyser cinq sessions de mesure, qui m'ont permis de contraindre des coefficients SME du secteur de la matière couplée à la gravitation à un niveau de sensibilité supérieur de 4 ordres de grandeur à celui de l'état de l'art.



## Analyse des données de la double fontaine à atomes froids de $^{133}\text{Cs}$ et $^{87}\text{Rb}$

### Table des matières

<b>2.1</b>	<b>Principe du test</b>	<b>22</b>
<b>2.2</b>	<b>Fonctionnement et opération de la fontaine atomique</b>	<b>23</b>
2.2.1	Introduction . . . . .	23
2.2.2	Principe de fonctionnement de la FO2 . . . . .	25
2.2.3	Utilisation pour des tests de physique fondamentale . . . . .	29
<b>2.3</b>	<b>Description des données</b>	<b>30</b>
2.3.1	Données de fréquence . . . . .	30
2.3.2	Mesure de temps de vol . . . . .	32
<b>2.4</b>	<b>Modèle SME pour la transition hyperfine des alcalins</b>	<b>34</b>
2.4.1	Modèle SME dans le référentiel du laboratoire . . . . .	34
2.4.2	Interprétation physique de l'observable . . . . .	35
2.4.3	Modèle SME dans le Référentiel Héliocentrique Non Tour- nant . . . . .	36
<b>2.5</b>	<b>Extension du modèle</b>	<b>38</b>
2.5.1	Représentation du noyau : méthode des Champs Moyens Auto-Cohérents Relativistes (SCRMF) . . . . .	38
2.5.2	Transformation de Lorentz à l'ordre 2 vers le RHNT . . . . .	42
2.5.3	Prise en compte des variations annuelles . . . . .	43
2.5.4	Résumé des améliorations et de leur impact sur la portée du test . . . . .	44

<b>2.6</b>	<b>Méthode d'analyse des données</b>	<b>44</b>
2.6.1	Ajustement par la méthode des moindres carrés . . . . .	46
2.6.2	Estimation de la matrice de covariance totale de l'ajustement	48
2.6.3	Intervalles de confiance analytiques . . . . .	49
2.6.4	Décomposition en valeurs singulières (DVS) . . . . .	51
<b>2.7</b>	<b>Comparaison avec l'analyse de 2006</b>	<b>52</b>
2.7.1	Analyse harmonique . . . . .	53
2.7.2	Analyse SME . . . . .	54
<b>2.8</b>	<b>Résultats obtenus pour le modèle <math>O(\beta^2)</math></b>	<b>56</b>
2.8.1	Modèle nucléaire de Schmidt . . . . .	56
2.8.2	Modèle nucléaire SCRMF . . . . .	56
2.8.3	Contraintes optimales obtenues par DVS dans le cadre du modèle SCRMF . . . . .	58
<b>2.9</b>	<b>Perspectives</b>	<b>61</b>
<b>2.10</b>	<b>Résumé et conclusion</b>	<b>64</b>

---

Ce chapitre présente un test d'invariance de Lorentz réalisé dans le cadre de l'Extension du Modèle Standard, décrite dans la partie 1.3. Ce test est réalisé à l'aide de données de fréquence, obtenues grâce à une fontaine atomique permettant de mesurer les fréquences de transition entre différents niveaux hyperfins de l'atome de césium 133. L'analyse de ces données a permis d'améliorer de plusieurs ordres de grandeur les contraintes actuelles sur des violations d'invariance de Lorentz dans le secteur de la matière au travers de la recherche de variations périodiques de la fréquence de transition hyperfine.

## 2.1 Principe du test

Ce test a pour but de rechercher une dépendance de la fréquence de transition hyperfine d'atomes de  $^{133}\text{Cs}$  en fonction de l'orientation de leur spin. Une fontaine atomique est utilisée pour mesurer différentes fréquences de transition entre sous-niveaux Zeeman hyperfins de l'état fondamental du césium.

Pour cette expérience, on impose une orientation fixe aux spins correspondant à l'axe vertical de la fontaine. À mesure que la Terre tourne sur elle-même, l'orientation des spins suit le mouvement de la fontaine par rapport au centre de la terre et décrit un mouvement de précession. En répétant la mesure de fréquence au fil des jours et

des mois, on mesure les fréquences de transition hyperfine pour différentes orientations des atomes dans l'espace. Si une violation d'invariance de Lorentz était détectable, elle se traduirait par une variation harmonique de la fréquence de transition hyperfine avec, notamment, des composantes journalières et annuelles liées au mouvement de la Terre dans le Système Solaire.

## 2.2 Fonctionnement et opération de la fontaine atomique

### 2.2.1 Introduction

La découverte de l'effet piézoélectrique en 1880 [52], puis de son effet inverse en 1881, [53, 54] ont conduit au développement des premiers oscillateurs à quartz [55] permettant de générer des signaux électriques de fréquence extrêmement stable, à la base des horloges modernes. Les quartz sont des cristaux, naturels ou synthétiques, qui ont la particularité de se polariser électriquement lorsqu'une contrainte mécanique leur est appliquée (effet piézoélectrique direct), et inversement de se déformer quand on les soumet à un champ électrique (effet piézoélectrique inverse).

Le principe de fonctionnement de l'oscillateur à quartz repose sur ces deux effets : on applique un courant alternatif à un quartz et ce dernier se déforme par effet piézoélectrique inverse. Lorsque la fréquence du courant alternatif devient proche de la fréquence propre du cristal, l'amplitude de la déformation devient maximale et induit un courant sinusoïdal (effet piézoélectrique direct) dont la fréquence correspond à la fréquence propre du cristal. Par rétroaction, on peut entretenir cette oscillation résonnante et ainsi générer un signal électrique stable.

La fréquence de résonance du cristal et la largeur naturelle de celle-ci sont liées à sa géométrie et conditionnent le facteur de qualité<sup>1</sup> du cristal, qui caractérise ses performances, notamment en terme de stabilité en fréquence. D'autres facteurs peuvent également avoir un impact sur la stabilité de l'oscillateur, comme son environnement (thermique, magnétique, radiatif) ou encore les phénomènes de vieillissement<sup>2</sup> cristallin qui peuvent occasionner des dérives de fréquence. Il est apparu que les horloges à quartz [57], utilisant la fréquence délivrée par le cristal comme étalon de mesure du temps, atteindraient rapidement leur performances maximales : dès les années 1950, les meilleurs oscillateurs à quartz ont atteint une exactitude<sup>3</sup> de  $1 \times 10^{-10}$ , soit une erreur

---

1. Rapport entre la fréquence d'oscillation et la largeur de la résonance.

2. Ce vieillissement est multifactoriel, mais la contamination par des polluants lors de la fabrication, ainsi que la présence d'impuretés dans le cristal ont un rôle important dans ce processus [56]

3. La fréquence délivrée par l'horloge peut s'écrire comme :  $\nu = \nu_0 [1 + \epsilon + y(t)]$  où  $\nu_0$  est la fréquence

de 10  $\mu\text{s}/\text{jour}$ , exactitude qui n'a pas été dépassée à ce jour [58]. Outre le vieillissement progressif du cristal, qui limite l'exactitude de l'horloge, il est impossible d'usiner deux cristaux parfaitement identiques, et donc de créer des références de fréquences identiques : les horloges à quartz ne "tiquent" pas à la même vitesse.

Les premières horloges atomiques ont vu le jour dans les années 1940. Les toutes premières étaient basées sur la transition à 27.8 GHz de la molécule d'ammoniac [59], mais elle n'ont pas permis de surpasser les performances des horloges à quartz<sup>4</sup>. Pour cela il a fallu attendre les années 50 et le développement des horloges à césium [61] utilisant la transition hyperfine à 9.2 GHz (domaine micro-onde). À l'origine, les atomes étaient interrogés grâce à une méthode de résonance magnétique mise au point par Rabi [62], qui consiste à exciter les atomes par interaction avec un champ micro-onde. Cette méthode a rapidement été perfectionnée par Ramsey [63] et sa méthode des "champs oscillants séparés"<sup>5</sup>.

En 1967, les horloges atomiques prennent une nouvelle importance lors de la redéfinition de la seconde. Cette dernière, auparavant astronomique, devient atomique : *"La durée de 9 192 631 770 périodes de radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133"*

Résolution 1 de la 13<sup>ème</sup> Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM), 1967.

Cette nouvelle définition remplace celle de 1956, basée sur l'année tropique 1900 dont la seconde représentait une fraction de  $1/31,556,925.9747$  [64].

Actuellement, les horloges à césium les plus performantes sont les fontaines à atomes froids (voir partie 2.2.2). La première fontaine de ce type à servir de standard de temps a été construite et mise en fonctionnement au SYRTE en 1995. D'autres développements ont contribué à l'amélioration des performances de ces horloges, notamment la mise au point d'oscillateurs cryogéniques dont la stabilité est dix fois supérieure à celle des quartz. On pense que les horloges micro-onde ont quasiment atteint leur performances maximales avec une exactitude de  $10^{-16}$  et une stabilité à 1s<sup>6</sup> de  $10^{-14}$ . Les nouveaux développements se situent désormais dans le domaine des fréquences optiques pour lesquelles les facteurs de qualité des résonances sont bien meilleurs et promettent une nette amélioration aussi bien en terme de stabilité que d'exactitude.

---

de résonance idéale,  $\epsilon$  un biais de fréquence dû à des effets systématiques et  $y(t)$  l'instabilité due à un bruit de fréquence. On définit l'exactitude comme l'incertitude sur la connaissance de  $\epsilon$  et la stabilité comme la fluctuation relative de fréquence de  $y(t)$ . Elle est généralement caractérisée par la variance d'Allan de ces fluctuations.

4. L'exactitude maximale de ces horloges était de  $2 \times 10^{-8}$  [60]

5. Pour plus de détails voir partie 2.2.2

6. i.e. l'écart-type d'Allan pour un temps d'intégration de 1s.

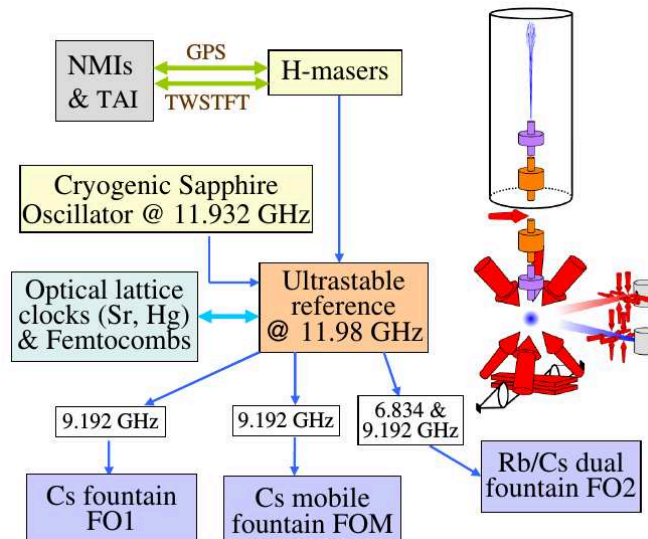


FIGURE 2.1 – Représentation schématique de l'ensemble d'horloges atomiques du LNE-SYRTE, schéma provenant de [65].

Le laboratoire SYRTE dispose d'un ensemble d'horloges atomiques mesurant la fréquence d'une même référence (voir Fig.2.1), un oscillateur cryogénique à résonateur saphir [66, 67]. Cet oscillateur possède une stabilité à une seconde de  $10^{-15}$ . Cet ensemble est constitué de trois fontaines micro-onde utilisant des atomes de césium ou de rubidium, une représentation secondaire de la seconde. Le laboratoire développe également des horloges optiques à atomes de mercure et de strontium. Ces horloges optiques ont démontré une stabilité à 1s de  $10^{-15}$ , dépassant celle des fontaines à atomes froids (la fontaine double à atomes froids de rubidium et de césium (F02) possède une stabilité maximale à 1s de  $1.6 \times 10^{-14}$ ). Elles ont également une exactitude de l'ordre de  $10^{-18}$ , supérieure de deux ordres de grandeur à celle obtenue avec les fontaines à atomes froids.

### 2.2.2 Principe de fonctionnement de la FO2

Le principe de fonctionnement de la fontaine atomique repose sur l'excitation d'un ensemble d'atomes préparés dans un état initial  $|i\rangle$ . Cette excitation se fait grâce à une onde électromagnétique (ici dans le domaine micro-onde) générée par un oscillateur. D'après la loi de Planck, si la fréquence de cette onde est proportionnelle à l'écart en énergie entre l'état initial et l'état excité  $|e\rangle$  (Eq. 2.1), cela induit une transition des atomes vers l'état excité :

$$h \cdot \nu_{\text{OEM}} = E_{|e\rangle} - E_{|i\rangle} \quad (2.1)$$



où  $h$  est la constante de Planck,  $\nu_{\text{OEM}}$  le fréquence de l'onde excitatrice,  $E_{|e\rangle}$  l'énergie de l'état excité et  $E_{|i\rangle}$  celle de l'état initial.

La réponse des atomes à cette excitation, i.e. le nombre d'atomes excités, dépend du désaccord entre la fréquence excitatrice et la fréquence de transition atomique. On peut définir une probabilité de transition  $P$  comme le rapport :

$$P = \frac{N_{|e\rangle}}{N_{|i\rangle} + N_{|e\rangle}} \quad (2.2)$$

où  $N_{|e\rangle}$  et  $N_{|i\rangle}$  sont respectivement le nombre d'atomes excités et le nombre d'atomes restant dans l'état initial.

Plus la fréquence de l'onde excitatrice est proche de celle de la transition, plus la probabilité de transition tend vers 1. En ajustant la fréquence de l'oscillateur de manière à maximiser  $P$ , on peut l'asservir en fréquence.

La fontaine interroge la transition hyperfine entre les sous-niveaux  $|F = 3\rangle$  et  $|F = 4\rangle$ , où  $F = I + S$  représente le moment cinétique total de l'atome avec  $I$  le spin du noyau et  $S$  le spin de l'électron<sup>7</sup>. Un champ magnétique statique uniforme orienté suivant l'axe  $z$ <sup>8</sup> est appliqué aux atomes. L'interaction des moments magnétiques de l'atome et du champ magnétique entraîne une perturbation des niveaux hyperfins et lève la dégénérescence des sous-niveaux, caractérisés par la valeur  $m_F$  de la projection du moment cinétique total sur l'axe de quantification, ici l'axe vertical  $z$ . La structure des niveaux et sous-niveaux hyperfins de l'état fondamental du  $^{133}\text{Cs}$  est représentée sur la figure 2.2.

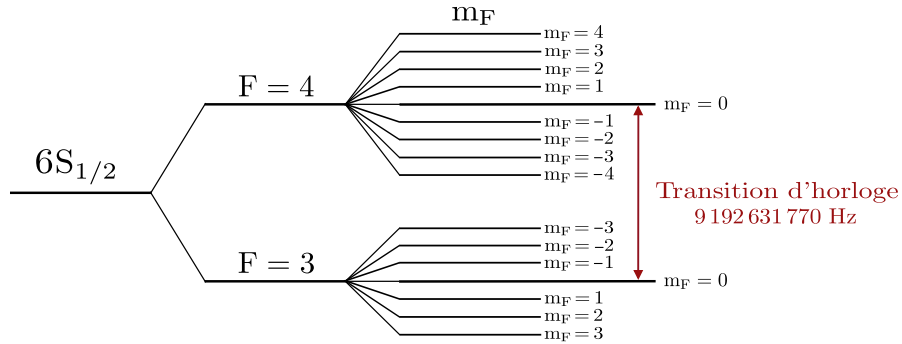


FIGURE 2.2 – Structure hyperfine de l'état fondamental de l'atome  $^{133}\text{Cs}$ .

Intéressons nous désormais au fonctionnement de la fontaine double FO2 qui peut fonctionner de façon simultanée avec des atomes de  $^{87}\text{Rb}$  et  $^{133}\text{Cs}$ , mais qui dans le

7. Dans le cas du césium 133 :  $I = \frac{7}{2}$  et  $S = \frac{1}{2}$  car cet atome ne possède qu'un électron de valence situé dans un état  $L = 0$ . Les deux états hyperfins permis sont  $F = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}$  et  $F = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}$ .

8.  $\perp$  à la surface de la Terre

cas de notre expérience a été utilisée dans un mode de fonctionnement utilisant uniquement des atomes de  $^{133}\text{Cs}$ . Dans ce dispositif (voir Fig. 2.3), les atomes de  $^{133}\text{Cs}$  et  $^{87}\text{Rb}$  s'échappant de la source à des vitesses initiales de l'ordre de  $100 \text{ m.s}^{-1}$ , sont freinés jusqu'à atteindre quelques  $\text{cm.s}^{-1}$  par refroidissement laser : trois paires de lasers contra-propageants disposées suivant les 3 dimensions de l'espace interagissent avec les atomes. Leur fréquence est réglée légèrement en dessous ( $\sim 10 \text{ MHz}$ ) de la fréquence de résonance atomique entre les niveaux  $6S_{1/2}(F = 3)$  et  $6P_{3/2}(F = 5)$  [68], afin que les fréquences soient aussi proches que possible dans le référentiel de l'atome en mouvement. Cet ajustement de la fréquence laser permet de maximiser l'absorption des photons du laser lorsque l'atome se dirige vers lui. Ce dernier se désexcite ensuite par émission spontanée, perdant ainsi une partie de son énergie. Grâce à la pression de radiation exercée dans toutes les directions par les lasers, le nuage d'atomes est progressivement ralenti et immobilisé pour finir par former (en 100 ms dans le cas du  $^{133}\text{Cs}$ ) une mélasse optique contenant quelques  $10^9$  atomes à une température inférieure à  $1 \mu\text{K}$  [69].

Les atomes sont ensuite lancés verticalement grâce à une technique de "mélasses mouvante" [70, 71]. Au niveau de la cavité de sélection, une impulsion micro-onde produit une inversion totale de population entre les niveaux hyperfins  $|F = 4, m_F\rangle \rightarrow |F = 3, m_F\rangle$ , permettant ainsi de peupler au maximum l'état choisi  $|F = 3, m_F\rangle$ . Un laser pousseur permet d'éliminer les atomes restés dans l'état hyperfin  $F = 4$ .

Les atomes sélectionnés rentrent ensuite dans la zone d'interrogation, où ils effectuent un vol balistique durant lequel ils subissent une séquence d'interrogation Ramsey : ils traversent une cavité micro-onde, dans laquelle - une première fois à la montée et une seconde fois à la descente - ils interagissent avec une onde générée par un oscillateur cryogénique qui excite partiellement les atomes.

En sortie de la cavité, on mesure la probabilité de transition des atomes en estimant la population d'atomes dans l'état excité par une technique de fluorescence induite par laser [68]. Cette probabilité de transition constitue le signal d'horloge. Enfin, par rétroaction, on s'assure que cette probabilité de transition reste toujours maximale en ajustant la fréquence de l'oscillateur micro-onde de sorte qu'elle soit aussi proche que possible de la fréquence de transition atomique.

La probabilité de transition se présente sous la forme d'une figure d'interférence. En effet, les atomes excités à l'issue de la première impulsion micro-onde accumulent une phase proportionnelle au désaccord de fréquence entre l'oscillateur et la résonance au cours de la phase d'évolution libre. Suite à la seconde impulsion, ils interfèrent en phase avec les atomes nouvellement excités.

La séquence d'interrogation consiste à mesurer la probabilité de transition de chaque

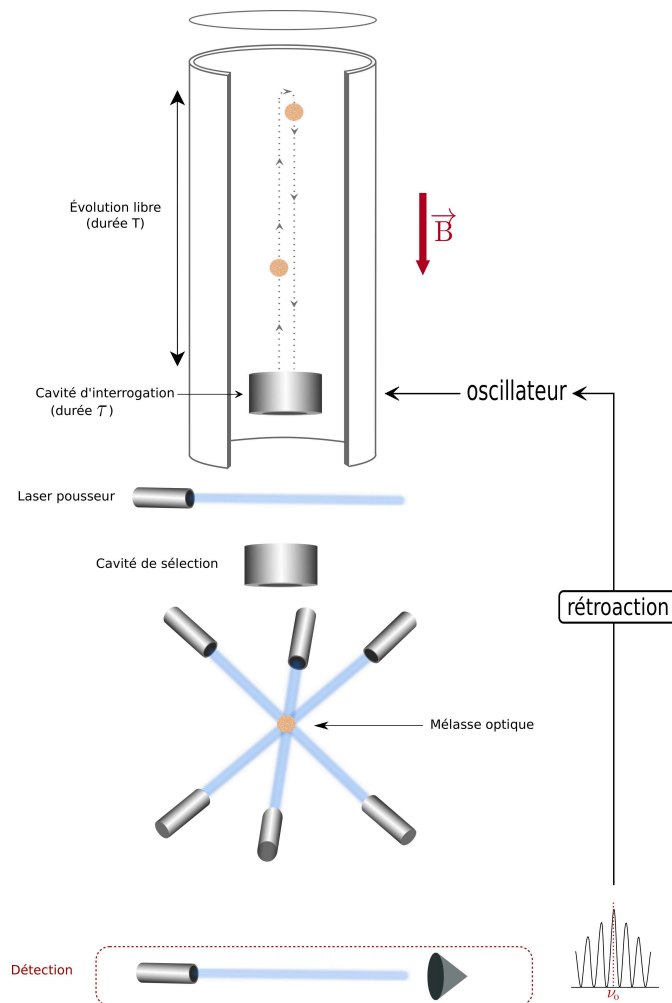


FIGURE 2.3 – Représentation simplifiée du fonctionnement de la fontaine atomique F02.

côté de la frange centrale. On estime ainsi le désaccord entre la fréquence de l'oscillateur local et la résonance atomique. Interroger les atomes à des fréquences correspondant à la demi-hauteur de la frange centrale, i.e. une zone où la pente de la probabilité de transition est maximale, permet d'être très sensible aux variations de la fréquence du signal micro-onde [68].

**Stabilité et exactitude** Les mesures sont affectées d'un bruit blanc de fréquence caractérisé par un écart-type d'Allan en  $\tau^{-1/2}$ , où  $\tau$  est le pas d'échantillonnage. Ce bruit correspond au bruit de projection quantique - limite ultime des horloges atomiques

Effets systématiques	Amplitude ( $\times 10^{16}$ )
Effet Zeeman quadratique	$1927.3 \pm 0.3$
Rayonnement du corps noir	$-168.2 \pm 2.5$
Collisions et entraînement de fréquence par la cavité	$-357.5 \pm 2.0$
Impuretés du spectre micro-onde	$0.0 \pm 4.3$

TABLEAU 2.1 – Liste et amplitude des principaux effets systématique affectant les mesures de l’horloge atomique F02 (Cs) [69]. Les valeurs indiquées dans ce tableaux sont exprimées en terme de décalage relatif de fréquence  $\Delta\nu/\nu$ .

- qui est lié au caractère probabiliste de la mesure de l’état final d’un système formé d’une superposition de deux états (ici  $|i\rangle$  et  $|e\rangle$ ) [72]. Il est caractérisé par une évolution en  $1/\sqrt{N}$ , où  $N$  est le nombre total d’atomes interrogés durant un intervalle de temps  $\tau$  sur lequel les données sont moyennées. À chaque cycle, de durée  $T_{\text{cycle}}$ ,  $N_{\text{cycle}}$  atomes sont lancés dans le dispositif. Le nombre total d’atomes interrogés durant l’intervalle de temps  $\tau$  est  $N = N_{\text{cycle}} * \tau / T_{\text{cycle}}$ . Le bruit de projection quantique évolue donc en  $1/\sqrt{\tau}$ .

Les principaux effets limitant l’exactitude sont résumés dans la table 2.1 (pour plus de détails, voir [69]). L’effet Zeeman quadratique occasionne un déplacement relatif des niveaux hyperfins, proportionnel au carré du champ magnétique. Le rayonnement du corps noir induit quant à lui un déplacement de fréquence dépendant de la température du milieu environnant les atomes. Le déplacement collisionnel a pour origine les interactions entre atomes froids dans la zone d’interrogation, et les effets d’entraînement de fréquence par la cavité proviennent du désaccord du champ résonnant dû à la présence de ces mêmes atomes dans la cavité. Le système est également sensible aux imperfections du champ micro-onde (impuretés du spectre micro-onde), ainsi qu’aux fuites micro-onde qui sont causées par des interactions entre les atomes et des champs micro-onde parasites hors de la cavité.

### 2.2.3 Utilisation pour des tests de physique fondamentale

Grâce à sa stabilité, son exactitude et sa capacité d’opération sur le long terme, l’horloge F02 est un instrument tout à fait adapté à la réalisation de tests de physique fondamentale. Elle a notamment pu être utilisée en 2006 pour un premier test d’invariance de Lorentz dont les données sont ré-analysées dans le cadre de cette thèse [51].

L’analyse des mesures de fréquence de la fontaine a également permis de rechercher - sur quatorze années - des variations de la constante de structure fine  $\alpha$ , de réaliser un test de redshift gravitationnel, ainsi que de contraindre une possible variation de la masse des quarks [65].

Plus récemment, six années de données ont été analysées pour les besoins d'un autre test visant cette fois à rechercher un champ scalaire massif, candidat potentiel pour expliquer la matière noire présente dans l'Univers, au travers de la recherche de variation harmonique de la constante de structure fine, ainsi que de la masse des quarks[73].

## 2.3 Description des données

Afin de rechercher une variation de la fréquence de transition hyperfine en fonction de l'orientation des spins atomiques, on mesure un ensemble de transitions entre sous-niveaux Zeeman hyperfins du  $^{133}\text{Cs}$ . Ces niveaux sont magnétisés ( $m_F \neq 0$ ), contrairement aux niveaux utilisés dans la configuration de mesure habituelle de l'horloge utilisant la transition hyperfine  $|F = 3, m_F = 0\rangle \rightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$ .

### 2.3.1 Données de fréquence

Nous disposons de deux jeux de données de fréquence, respectivement 21 jours en avril 2005 et 14 jours en septembre 2005. Pour les besoins du test, ces données n'ont pas été prises dans le mode de fonctionnement habituel de l'horloge F02, mais en mesurant la fréquence de transition entre sous-niveaux hyperfins magnétisés ( $m_F \neq 0$ ). Du fait de l'utilisation de ces niveaux  $m_F \neq 0$ , l'expérience devient extrêmement sensible aux variations de champ magnétique. Dans l'expression de la fréquence de transition (Eq. 2.3), le premier terme correspond à l'effet Zeeman premier ordre dû à l'interaction entre les différents moments de l'atome et un champ magnétique extérieur statique et uniforme de faible intensité. La perturbation résultant de cette interaction provoque la levée de dégénérescence de sous-niveaux hyperfins dont le décalage en énergie est proportionnel au champ magnétique  $B$ .

$$\Delta\nu = m_F K_Z^{(1)} B + \left(1 - \frac{m_F^2}{16}\right) K_Z^{(2)} B^2 \quad (2.3)$$

Le cas de l'horloge correspondant à un régime de champ magnétique intermédiaire, il faut inclure une correction du second ordre dans le décalage relatif des niveaux [74]. Cet effet Zeeman quadratique entraîne un décalage relatif constant des sous-niveaux de -2 mHz qui est retiré en amont de l'ajustement des données.

Afin de s'affranchir au maximum des dépendances linéaires au champ magnétique, ce dernier variant légèrement au cours du temps<sup>9</sup>, il a été décidé en 2005 [51, 68] de

<sup>9</sup>. Essentiellement à cause de la proximité avec le RER B.

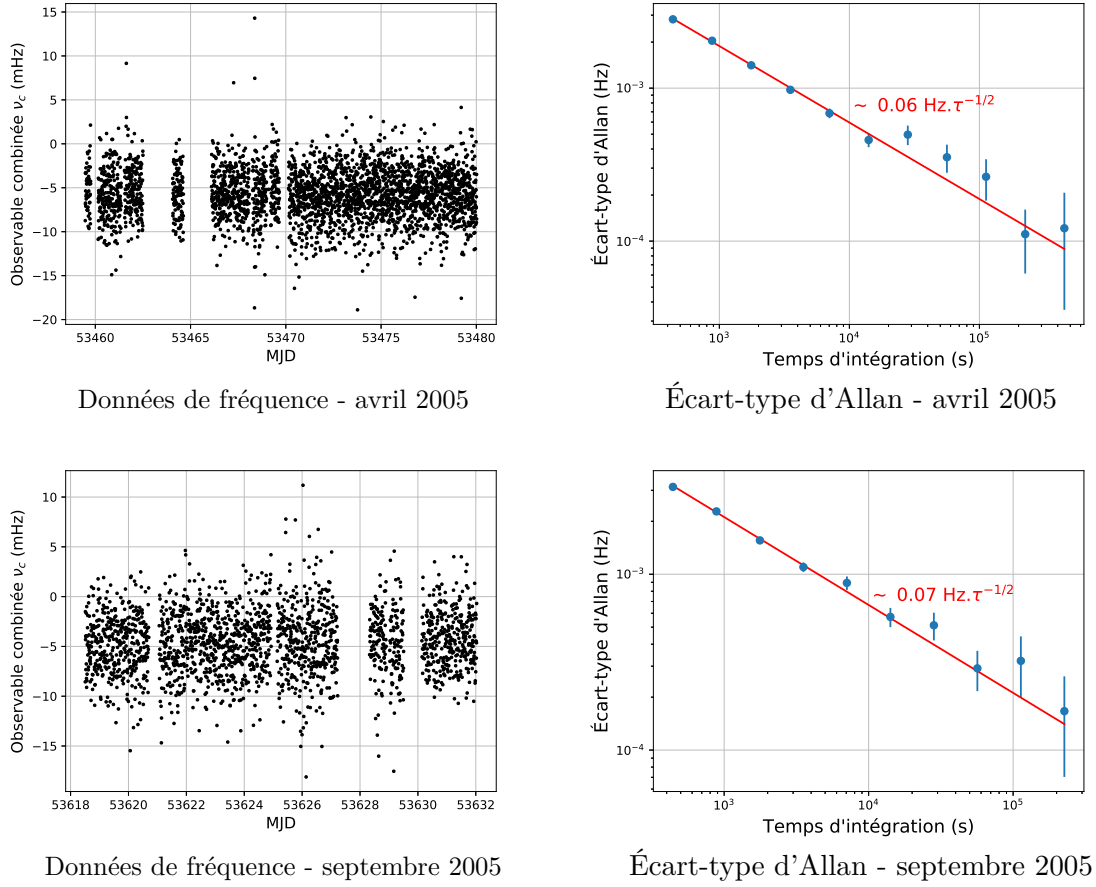


FIGURE 2.4 – Mesures de fréquence (Hz) et écart-type d'Allan associé.

mesurer de manière quasi simultanée un ensemble de transitions formant une observable combinée. Cette dernière, notée  $\nu_c$ , correspond à la combinaison de trois transitions avec  $m_F = 0, \pm 3$  :

$$\nu_c = \nu_{+3} + \nu_{-3} - 2\nu_0 \quad (2.4)$$

La combinaison de deux transitions avec des projections de moment cinétique opposées permet d'annuler l'effet Zeeman premier ordre, la mesure de la transition d'horloge  $\nu_0$  permet quant à elle de recalibrer la fréquence de la référence locale. La séquence d'interrogation dure un peu plus de 400 secondes [51] et se décompose de la façon suivante :

- A- Mesure des probabilités de transition entre sous-niveaux Zeeman magnétisés avec  $m_F \neq 0$  - durée 4.18 s :
  - 1- Transition pour la résonance  $|3, -3\rangle \leftrightarrow |4, -3\rangle$  avant la résonance.

- 2- Transition pour la résonance  $|3, +3\rangle \leftrightarrow |4, +3\rangle$  avant la résonance.
- 3- Transition pour la résonance  $|3, -3\rangle \leftrightarrow |4, -3\rangle$  après la résonance.
- 4- Transition pour la résonance  $|3, +3\rangle \leftrightarrow |4, +3\rangle$  après la résonance.

La combinaison de A-1 et A-3 donne les valeurs de  $\nu_{-3}$  et la combinaison de A-2 et A-4 donne les valeurs de  $\nu_{+3}$ .

B- Étape A répétée 100 fois

C- Toutes les 400 s environ, mesure de la transition d'horloge  $\nu_0$  pendant une durée 10 s.

Chaque point de donnée représente la moyenne de 432 s de mesure de l'observable combinée.

Les deux jeux de données et leurs écart-types d'Allan sont représentés à la figure 2.4. Ils présentent tous deux un bruit blanc caractérisé par une déviation standard d'environ 3 mHz.

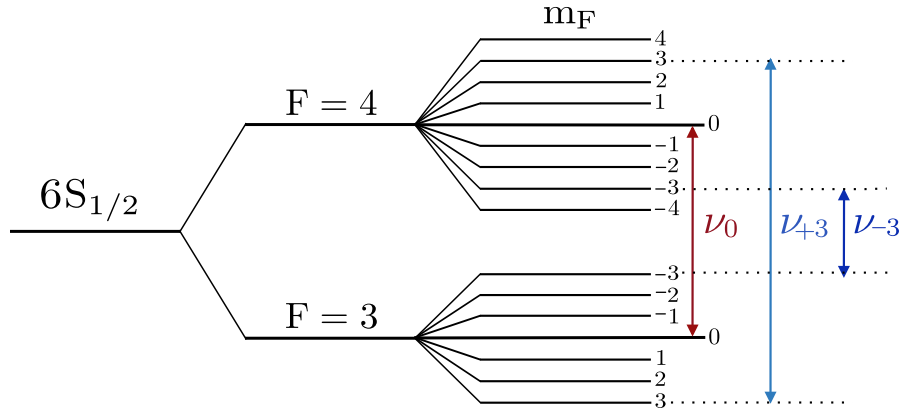
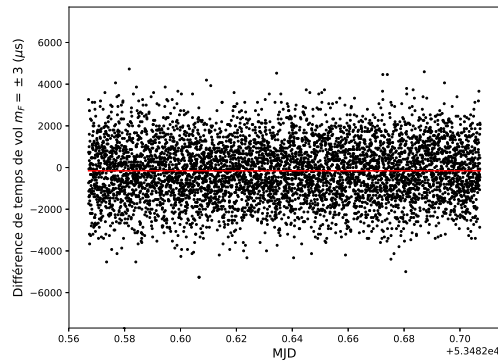


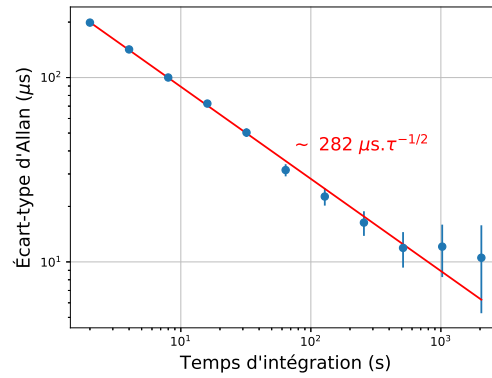
FIGURE 2.5 – Représentation des niveaux hyperfins utilisés pour construire l'observable combinée  $\nu_c$ .

### 2.3.2 Mesure de temps de vol

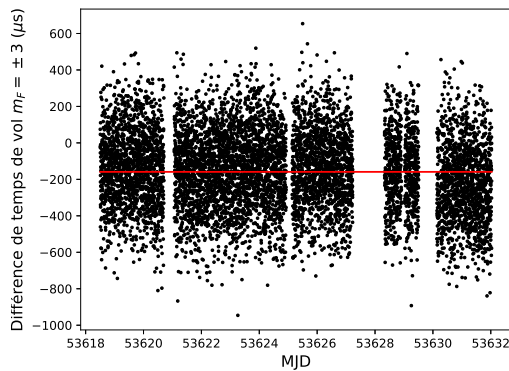
Les trajectoires suivies par les atomes situés dans des état  $\pm m_F$  sont légèrement différentes. En présence d'inhomogénéités de champ magnétique, le champ vu par les atomes dépend de leur état, ce qui conduit à une annulation imparfaite de l'effet Zeeman premier ordre qui constitue la source principale d'effets systématiques pour notre expérience. Si, par ailleurs, les trajectoires de lancement des atomes varient légèrement dans le temps, on peut potentiellement observer des variations de fréquences pouvant se confondre avec une violation d'invariance de Lorentz. Afin d'évaluer l'impact de cet effet sur notre test, nous utilisons des mesures de temps de vol des atomes dans la fontaine



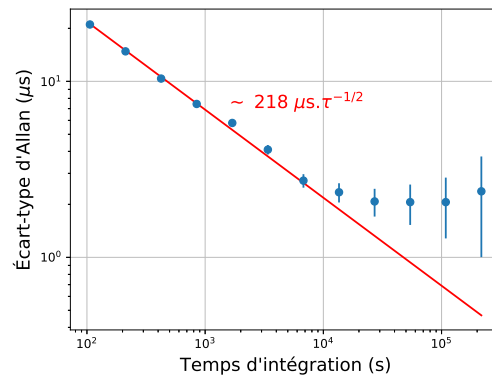
Mesures de temps de vol - avril 2005



Écart-type d'Allan - avril 2005



Mesures de temps de vol - septembre 2005



Écart-type d'Allan - septembre 2005

FIGURE 2.6 – Mesures de temps de vol atomiques ( $\mu\text{s}$ ) et écart-type d'Allan associé.



pour rechercher des variations de trajectoires relatives des atomes situés dans les états  $m_F = \pm 3$ .

Pour obtenir ces données, on mesure l'évolution du signal de fluorescence et on en déduit le flux total et la distribution en vitesse des atomes [68]. En répétant l'opération pour les atomes dans l'état  $m_F = -3$  et  $m_F = +3$ , on constate une différence systématique de  $158 \mu\text{s}$  entre les temps de vol des deux états. Cette différence traduit une vitesse verticale différente selon l'état et donc des hauteurs de trajectoires différentes dans la zone d'interrogation.

Cette différence, en présence d'un gradient de champ magnétique, provoque l'apparition d'un décalage global des mesures de  $\nu_c$ . Grâce à des mesures de gradient vertical et horizontal [68] intégrées dans une simulation Monte-Carlo du comportement des atomes dans l'horloge, le décalage de  $158 \mu\text{s}$  visible dans les temps de vol a été associé à un décalage maximal de la fréquence mesurée  $\nu_c$  de  $0 \pm 25$  mHz. Cette valeur est utilisée pour étalonner les temps de vol dont les variations seront traduites en terme de variations de fréquence pour les harmoniques incluses dans notre modèle.

## 2.4 Modèle SME pour la transition hyperfine des alcalins

### 2.4.1 Modèle SME dans le référentiel du laboratoire

Le premier modèle reliant la fréquence de transition hyperfine des alcalins à des coefficients SME a été publié dans [48]. Dans ce modèle, une violation d'invariance de Lorentz induit un décalage relatif des sous-niveaux hyperfins et donc une modification de la fréquence de transition hyperfine. La perturbation en énergie d'une transition hyperfine  $|F, m_F\rangle \longleftrightarrow |F', m'_F\rangle$  due à une violation d'invariance de Lorentz s'écrit :

$$\Delta E = \delta E(F, m_F) - \delta E(F', m'_F) \quad (2.5)$$

Les décalages individuels de chaque sous-niveau peuvent s'exprimer sous la forme d'une fonction de coefficients SME :

$$\delta E(F, m_F) = \hat{m}_F \sum_{w=p,n,e} \left( \beta_w \tilde{b}_3^w + \delta_w \tilde{d}_3^w + \kappa_w \tilde{g}_d^w \right) + \tilde{m}_F \sum_{w=p,n,e} \left( \gamma_w \tilde{c}_q^w + \lambda_w \tilde{g}_q^w \right) \quad (2.6)$$

où  $\hat{m}_F$  et  $\tilde{m}_F$  sont des ratios de coefficients de Clebsch-Gordan, formant des fonctions linéaire en  $m_F$  pour  $\hat{m}_F$  et quadratique pour  $\tilde{m}_F$ . Ils sont définis à l'annexe A. Les paramètres  $\beta_w, \delta_w, \kappa_w, \gamma_w, \lambda_w$  correspondent quant à eux à des valeurs moyennes de combinaisons d'opérateurs de spin ou de moments mesurés dans l'état extrémal  $|F, m_F = F\rangle$ .

Les coefficients SME du secteur de la matière apparaissant dans l'observable sont notés  $\tilde{b}_3^w$ ,  $\tilde{d}_3^w$ ,  $\tilde{g}_d^w$ ,  $\tilde{c}_q^w$  et  $\tilde{g}_q^w$ . Les tildes qui apparaissent au dessus de ces coefficients indiquent qu'il s'agit de combinaisons d'autres paramètres SME. Les combinaisons apparaissant dans l'observable finale seront explicitées par la suite.

Le décalage total de fréquence dû à une violation d'invariance de Lorentz est obtenu en sommant les décalages individuels induits par chaque type de particule (proton, électron, neutron). Dans l'annexe A.1, on montre que la perturbation de fréquence pour une transition hyperfine  $|F = 3, m_F\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F\rangle$ , est donnée par :

$$\Delta\nu = \frac{m_F}{2h} \left( \beta_e \tilde{b}_3^e + \delta_e \tilde{d}_3^e + \kappa_e \tilde{g}_d^e \right) - \frac{m_F}{14h} \sum_{w=p,n} \left( \beta_w \tilde{b}_3^w + \delta_w \tilde{d}_3^w + \kappa_w \tilde{g}_d^w \right) \quad (2.7)$$

$$- \frac{m_F^2}{14h} \sum_{w=p,n} \left( \gamma_w \tilde{c}_q^w + \lambda_w \tilde{g}_q^w \right)$$

À partir cette expression, on détermine la formulation de l'observable combinée  $\nu_c = \nu_{+3} + \nu_{-3} - 2\nu_0$ , en considérant que le paramètre  $\lambda_w$  est nul<sup>10</sup> [48] (voir Eq. 2.8). Cette dernière ne dépend alors plus que des termes quadratiques en  $m_F$  et d'un seul coefficient SME, le tout exprimé dans le référentiel du laboratoire.

$$\nu_c = -\frac{9}{7h} \sum_{w=p,n} \gamma_w \tilde{c}_q^w \quad (2.8)$$

Le paramètre  $\gamma_w$  est proportionnel au moment quadripolaire de la distribution des particules, ici des nucléons, dans l'espace des impulsions  $M_{02}^w$  [75] :

$$M_{02}^w = \sum_{N=1}^{N_w} \langle F, F | 2p_z^2 - p_x^2 - p_y^2 | F, F \rangle \quad (2.9)$$

On note  $w$  le type de particule considérée, ici proton(p) et neutron (n), dont la masse est  $m_w$ . D'après [48], le paramètre  $\gamma_w$  est défini comme :

$$\gamma_w = \frac{M_{02}^w}{6m_w^2 c^2} \quad (2.10)$$

### 2.4.2 Interprétation physique de l'observable

Le paramètre  $\gamma_w$  est un facteur d'échelle adimensionné, prenant une valeur particulière pour chaque type de particule considéré. Il détermine ainsi la sensibilité de l'observable aux contributions des protons et des neutrons. Ce paramètre est lié aux

10. cette hypothèse est discutée dans la section 2.9

éléments de matrices de l'opérateur de moment quadripolaire nucléaire [48]. Un moment quadripolaire non nul est lié à une anisotropie de la distribution de densité et de vitesse des nucléons composant le noyau, le paramètre  $\gamma_w$  dépend donc entièrement du modèle utilisé pour représenter la structure du noyau.

Le coefficient SME  $\tilde{c}_q^w$  est une combinaison des trois composantes purement spatiales du tenseur  $c_{\mu\nu}$  - un tenseur de rang 2 et de trace nulle - qui intervient comme une modification de terme cinétique du lagrangien usuel utilisé pour décrire une particule de spin 1/2 [48]. D'un point de vue physique, la conséquence de ce changement est une modification de la relation de dispersion de la particule, qui devient dépendante de la direction et du référentiel considéré et entraîne une modification de la vitesse maximale autorisée pour les différentes particules.

Dans le cas du modèle SME pour les transitions hyperfines des alcalins, les composantes du tenseur  $c_{\mu\nu}$  quantifient l'amplitude d'une contribution anormale d'origine quadripolaire à la fréquence de transition. Cette contribution implique une dépendance de la fréquence de transition au moment quadripolaire de la distribution des charges au sein du noyau et donc une variation de la fréquence de transition en fonction de l'orientation de cette distribution dans l'espace.

### 2.4.3 Modèle SME dans le Référentiel Héliocentrique Non Tournant

Les composantes du tenseur  $c_{\mu\nu}$  ne sont pas définies de manière unique et dépendent du système de coordonnées utilisé. Afin que toutes les études réalisées dans le cadre du SME soient cohérentes entre elles, on exprime les coefficients SME dans un référentiel conventionnel, le Référentiel Héliocentrique Non Tournant (RHNT)<sup>11</sup>, inertiel sur une échelle de temps de plusieurs millénaires.

Cette étape implique une reformulation du modèle au travers d'un changement de référentiel faisant intervenir une transformation de Lorentz à l'ordre n, qui permet d'exprimer les coefficients SME non plus dans le référentiel du laboratoire, mais dans le RHNT. Elle fait également apparaître dans le modèle des harmoniques liées à la rotation de la Terre et à sa révolution autour du Soleil. L'expression générale pour une transformation de Lorentz dans une direction quelconque est donnée par :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \gamma \beta t \end{cases} \quad (2.11)$$

On note  $\mathbf{n}$  la direction du mouvement relatif de vitesse  $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$ . La vitesse réduite  $\beta$

---

11. Défini dans la partie 1.3.5

associée au mouvement est définie comme  $\beta = \frac{v}{c}$ . La vitesse de la lumière est notée  $c$  et  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  est le facteur de Lorentz.

À partir de cette définition, on peut définir une matrice de transformation de Lorentz - sans rotation spatiale -  $\Lambda$  :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta\mathbf{n}^T \\ \gamma\beta\mathbf{n} & \mathbb{I}_3 + (\gamma - 1)\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

En faisant un développement de Taylor à l'ordre  $n$  du facteur de Lorentz, on obtient une matrice de transformation d'ordre  $n$ . Appliqué  $k$  fois pour un tenseur d'ordre  $k$ , cette transformation permet d'obtenir l'expression du modèle à l'ordre  $O(\beta^n)$ .

D'après [50], la matrice de transformation entre le référentiel du laboratoire et le RHNT est donnée par le produit de la matrice  $\Lambda$  et d'une matrice  $R$  définissant la rotation entre les axes du référentiel instantané non tournant du laboratoire et ceux du RHNT :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \Lambda \quad (2.13)$$

La matrice de transformation totale est définie en supposant que la Terre décrit un mouvement circulaire autour du Soleil, les contributions de l'excentricité étant négligeables [50]. Le détail des matrices de transformation est donné dans l'Annexe B.

Cette transformation nous permet d'exprimer les paramètres SME du laboratoire, notés  $c_{ij}^w$ , comme des fonctions de coefficients du référentiel héliocentrique, notés  $c_{IJ}^w$  :

$$c_{ij}^w = T \cdot c_{IJ}^w \cdot T^T \quad (2.14)$$

Chaque paramètre du laboratoire est maintenant une fonction de coefficients exprimés dans le RHNT et d'harmoniques du mouvement :

$$c_{ij}^w = \sum_n C_{\omega_n} \cos(\omega_n t) + S_{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (2.15)$$

avec  $\omega_n = 0, \Omega, 2\Omega, \omega, \omega \pm \Omega, \omega \pm 2\Omega, 2\omega, 2\omega \pm \Omega, 2\omega \pm 2\Omega, 3\omega \pm \Omega$  les fréquences du modèle. On note  $\omega$  la fréquence de rotation de la Terre et  $\Omega$  sa fréquence de révolution. Le temps écoulé depuis l'équinoxe de printemps le plus récent est noté  $t$ . Les amplitudes  $C_{\omega_n}$  et  $S_{\omega_n}$  sont des fonctions linéaires de coefficients SME du RHNT.

Les composantes du tenseur  $c_{\mu\nu}$  peuvent s'exprimer, dans le RHNT, sous la forme

de neuf combinaisons qui sont multipliées par l'énergie au repos de la particule. Nous suivons ici la définition donnée dans [45] de ces combinaisons :

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_Q^w &= m_w c^2 (c_{XX}^w + c_{YY}^w - 2c_{ZZ}^w) \\
\tilde{c}_-^w &= m_w c^2 (c_{XX}^w - c_{YY}^w) \\
\tilde{c}_J^w &= m_w c^2 (c_{KL}^w + c_{LK}^w) \\
\tilde{c}_{TJ}^w &= m_w c^2 (c_{TJ}^w + c_{JT}^w) \\
\tilde{c}_{TT}^w &= m_w c^2 c_{TT}^w
\end{aligned} \tag{2.16}$$

où les indices  $J, K, L$  correspondent aux coordonnées spatiales ( $X, Y, Z$ ) dans le RHNT, l'indice  $T$  correspond à la composante temporelle et l'exposant  $w$  à la nature de la particule considérée ( $p$  pour proton et  $n$  pour neutron). L'expression fait intervenir les masses des particules, notées  $m_w$ . Les coefficients SME ont la dimension d'une énergie et sont, par convention, exprimés en GeV.

## 2.5 Extension du modèle

### 2.5.1 Représentation du noyau : méthode des Champs Moyens Auto-Cohérents Relativistes (SCRMF)

*Tous les calculs relatifs au modèle SCRMF ont été réalisés par R.-D. Lasserri, J.-P. Ebran et E. Khan de l'Institut de Physique Nucléaire d'Orsay.*

Le SME s'appuie généralement sur le modèle nucléaire de Schmidt pour les calculs ayant trait aux contributions des nucléons. Ce modèle, développé dans les années 1930 [76, 77], décrit le noyau comme un ensemble de  $N$  particules indépendantes, en mouvement dans un potentiel moyen sphérique. Il postule également que les paires de nucléons semblables annulent leur spin et leur parité mutuelles, formant ainsi un cœur sphérique inerte surplombé par un unique nucléon de valence qui est la source du spin total et du moment magnétique du noyau. Ce modèle, contrairement au modèle collectif de la goutte liquide<sup>12</sup> [78], permet de reproduire les déviations à la symétrie sphérique observées pour certains noyaux [79]. Ce modèle permet d'obtenir de bonnes estimations pour le moment magnétique du noyau, mais a plus de difficulté à reproduire les mesures expérimentales du moment quadripolaire.

---

<sup>12</sup>. Ce modèle considère le noyau comme un ensemble de nucléons confinés dans un volume fini et animés de mouvements collectifs.

Par opposition avec les modèles type "modèle en couches" [77, 80], il existe également des modèles collectifs dans lesquels le noyau est vu comme un système à  $N$  nucléons en interaction. Ce type de description est extrêmement complexe et nécessite des approximations : les modèles sont adaptés selon les propriétés à étudier, qui déterminent les degrés de liberté et les interactions à prendre en compte. Actuellement, les meilleures descriptions microscopiques du noyau tant en terme de structure que de dynamique sont les modèles de champs moyens auto-cohérents relativistes [81, 82, 83], des modèles phénoménologiques dont les paramètres sont ajustés de façon à reproduire l'équation d'état de la matière nucléaire, ainsi qu'un ensemble de propriétés globales des noyaux sphériques à couches fermées. Ce type de modèle repose sur l'hypothèse d'un noyau constitué de particules indépendantes en mouvement dans un potentiel moyen généré par l'ensemble des nucléons ; l'interaction forte entre nucléons est représentée de façon implicite au travers d'un échange de mésons effectifs.

Comme expliqué dans [84], les nucléons sont assimilés à des particules ponctuelles obéissant à l'équation de Dirac. À partir du lagrangien effectif, l'hamiltonien du système est calculé et permet d'obtenir une fonctionnelle de densité d'énergie<sup>13</sup>, à la base des observables nucléaires. La minimisation de cette fonctionnelle aboutit aux équations de Hartree-Bogoliubov relativistes [82, 85]. La solution de ces équations donne accès à la densité du système (voir Fig. 2.7) ainsi qu'aux moments de son expansion multipolaire. La figure 2.7 illustre la répartition non uniforme des nucléons dans le noyau, à l'origine du moment quadripolaire nucléaire non nul.

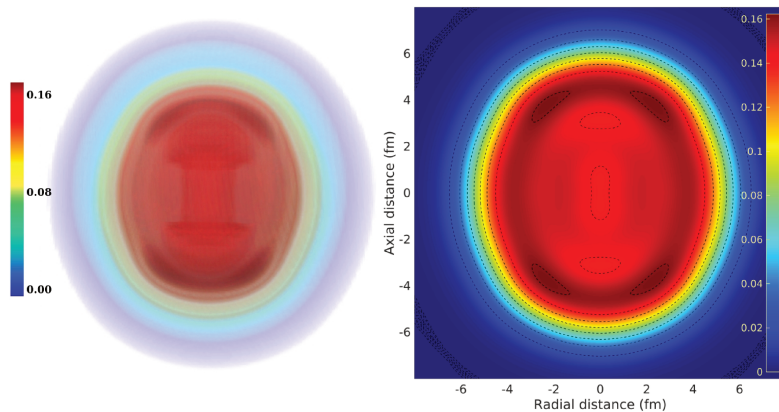


FIGURE 2.7 – Représentation de la densité des nucléons dans le référentiel intrinsèque du noyau : 3D à gauche et projection 2D à droite. Figure réalisée par R.-D. Lasserri, IPN, Orsay.

13. Approximation de l'énergie du système nucléaire, obtenue en estimant la valeur moyenne de l'hamiltonien effectif dans des état particuliers du vide.

Dans le référentiel intrinsèque du noyau, le moment quadripolaire dans l'espace des positions s'exprime comme :

$$\tilde{Q}_{20}^w = \langle I, I | (3z^2 - r^2) | I, I \rangle \quad (2.17)$$

On peut également l'exprimer dans l'espace des impulsions :

$$\tilde{M}_{20}^w = \langle I, I | (3p_z^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}) | I, I \rangle \quad (2.18)$$

où  $I$  est le spin du noyau.

Afin de comparer les valeurs théoriques aux valeurs expérimentales, mesurées par spectroscopie, il est nécessaire de projeter le moment quadripolaire dans le référentiel du laboratoire ( $Q_{20}^w$ ) :

$$Q_{20}^w = \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} \tilde{Q}_{20}^w \quad (2.19)$$

$K$  étant la projection du spin nucléaire total sur l'axe de symétrie du noyau déformé.

Dans le cadre du modèle de Schmidt, le moment quadripolaire du proton - respectivement dans l'espace des positions ( $Q_{20}^w$ ) et des impulsions ( $M_{20}^w$ ) - s'écrit [86, 87] :

$$Q_{20}^w = -e_w \frac{j - \frac{1}{2}}{j + 1} \left\langle \frac{r^2}{2} \right\rangle \quad (2.20)$$

$$M_{20}^w = -e_w \frac{j - \frac{1}{2}}{j + 1} \left\langle \frac{p^2}{2m_p} \right\rangle \quad (2.21)$$

La charge du nucléon est notée  $e_w$  et  $j$  est le moment cinétique total associé à son orbitale. Le rayon orbital moyen du proton est estimé dans le cadre du modèle de la goutte liquide [78]  $\langle r \rangle = \frac{3}{5} r_o^2 \frac{A^2}{3}$  où  $r_o = 1.2$  fm et  $A$  est le nombre de masse. L'énergie cinétique moyenne du proton de valence vaut environ  $\left\langle \frac{p^2}{2m_p^2 c^2} \right\rangle \sim 10^{-2}$  [48].

Dans le cas du noyau de  $^{133}\text{Cs}$  ( $Z=55$ ), les valeurs de  $Q_{20}$  obtenues pour le proton, dans le cadre des modèles de Schmidt et du champ moyen auto-cohérent relativiste (SCRMF), sont résumées dans la table 2.2. On peut noter que les prédictions pour le moment quadripolaire dérivant du modèle de Schmidt diffèrent d'un facteur 40 de la valeur expérimentale, tandis que la valeur obtenue avec le modèle SCRMF est du même ordre de grandeur.

Revenons à présent au paramètre  $\gamma_w$ . Ce dernier est proportionnel au moment qua-

---

13. Le référentiel intrinsèque est un référentiel dont les axes sont fixes par rapport au noyau.

Modèle nucléaire	$Q_{20}^p$ (fm <sup>2</sup> )
Schmidt	-15.112
SCRMF	-0.354
Expérimental [88]	-0.343

TABLEAU 2.2 – Valeurs théoriques et expérimentale du moment quadripolaire pour le <sup>133</sup>Cs dans l’espace des positions. Les valeurs sont exprimées en fm<sup>2</sup>.

dripolaire dans l’espace des impulsions  $M_{02}^w$ .

$$\gamma_w = \frac{M_{20}^w}{6m_w^2 c^2} \quad (2.22)$$

La comparaison des valeurs de  $\gamma_w$ , calculées avec le modèle de Schmidt et avec le modèle SCRMF, est présentée dans la table 2.3. Pour le proton, les valeurs de  $\gamma_p$  sont du même ordre de grandeur pour les deux modèles - bien que de signes opposés. Pour les neutrons en revanche, le modèle SCRMF aboutit à une estimation de  $\gamma_n$  non nulle qui permet d’accéder aux contraintes sur les paramètres SME du neutron. Cette valeur étant environ dix fois plus petite que celle calculée pour le proton, la sensibilité aux paramètres du neutron est plus faible, mais permet tout de même une amélioration potentielle de l’état de l’art actuel sur les contraintes SME.

Modèle nucléaire	$\gamma_p$	$\gamma_n$
Schmidt	$-1.1 \times 10^{-3}$	0
SCRMF	$8.32 \times 10^{-4}$	$1.76 \times 10^{-5}$

TABLEAU 2.3 – Valeurs du paramètre  $\gamma_w$  [-] pour les neutrons (n) et les protons (p) obtenues avec le modèle nucléaire de Schmidt et le modèle SCRMF.

La recherche de modèles nucléaires alternatifs au modèle de Schmidt est un champ de recherche en plein essor dans le domaine des tests SME d’invariance de Lorentz. Plusieurs études relatives au calcul des éléments de matrice du moment quadripolaire nucléaire ont été publiées au cours des deux dernières années. Dans [84], on compare notamment les résultats obtenus avec la méthode SCRMF à ceux publiés dans [87] et [75]. Dans le cas de l’étude réalisée dans [87], les valeurs obtenues pour les  $M_{02}^p$  sont en accord avec celles calculées par la méthode SCRMF, tandis que les valeurs de  $M_{02}^n$  obtenues pour le neutron diffèrent d’un facteur 60. Cela est dû au fait que la méthode utilisée dans [87] est ajustée de manière à reproduire les valeurs expérimentales du moment quadripolaire du



proton,  $Q_{20}^p$ , et donne de fait des résultats approximatifs pour le moment quadripolaire du neutron. R.-D. Lasserri, J.-P. Ebran et E. Khan ont également réalisé des calculs d'éléments de matrice du moment quadripolaire pour les noyaux de  $^{21}\text{Ne}$ ,  $^{131}\text{Xe}$  et  $^{201}\text{Hg}$ , afin de comparer les résultats de la méthode SCRMF à ceux obtenus dans [75]. Dans leur approche, ils imposent la valeur du spin et la parité de l'état fondamental du noyau, puis comparent les prédictions obtenues pour l'énergie du niveau fondamental - selon la fonctionnelle de densité d'énergie utilisée - avec les valeurs expérimentales pour valider cette approche[89]. Par rapport à [75], les résultats sont extrêmement proches pour le noyau de  $^{21}\text{Ne}$  et restent du même ordre de grandeur pour les noyaux de  $^{131}\text{Xe}$  et  $^{201}\text{Hg}$ . Les différences observées résultent des méthodes de calculs propres à chaque étude.

D'autres études, comme celle de V. V. Flambaum et M. V. Romalis parue en 2017 [90], cherchent à réaliser des calculs nucléaires dans le cadre de modèles plus complexes que le modèle en couche dans le but d'améliorer, entre autres, les observables SME. La variété des modèles et des méthodes de calculs en physique nucléaire rend complexe la comparaison de ces différents modèles. Néanmoins, les différentes pistes explorées jusqu'à présent ont donné des résultats très intéressants, faisant de cette thématique une voie prometteuse pour l'amélioration des modèles décrivant la physique au-delà du modèle standard.

### 2.5.2 Transformation de Lorentz à l'ordre 2 vers le RHNT

Les modèles SME sont généralement développés avec une transformation à l'ordre 1. Comme expliqué dans la section 2.4.3, ces modèles sont associés à une matrice de transformation de Lorentz développée à l'ordre 1 en vitesse réduite  $\beta$  (Eq. 2.23).

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \mathbf{n}^T \\ \beta \mathbf{n} & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Pour cette seconde analyse, on utilise une transformation d'ordre 2 :

$$\Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\beta^2 & \beta \mathbf{n}^T \\ \beta \mathbf{n} & \mathbb{I}_3 + \frac{1}{2}\beta^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Le but de cette opération est de faire apparaître la 9<sup>ème</sup> composante du tenseur  $c_{\mu\nu}$  - notée  $c_{TT}$  - dans l'observable SME. Pour plus de détails sur cette transformation et sur la composition détaillée du modèle  $O(\beta^2)$ , voir Annexe B.

L'observable d'ordre 1 contient les 8 premières composantes de ce tenseur, chaque terme étant multiplié par un facteur  $\beta = \frac{v}{c}$  de l'ordre de  $\beta_{\oplus} \sim 10^{-4}$  pour la vitesse réduite

de la Terre et de  $\beta_l \sim 10^{-6}$  pour celle du laboratoire autour du centre de la Terre. Pour ces 8 coefficients SME, l'apport du modèle d'ordre 2 est négligeable, les nouveaux termes étant multipliés par un facteur  $\beta^2 \leq 10^{-8}$ . Les termes additionnels seront d'ailleurs ignorés dans le modèle  $O(\beta^2)$  utilisé pour l'analyse. En revanche, la transformation à l'ordre 2 permet de contraindre le coefficient  $c_{TT}$  à un niveau compétitif par rapport à l'état de l'art, malgré l'amplitude réduite des termes dont il dépend (uniquement en  $\beta^2$ ).

Le développement du modèle  $O(\beta^2)$  a fait l'objet d'une collaboration avec Quentin Bailey du département de physique et d'astronomie de l'université aéro-nautique Embry-Riddle (Arizona, USA).

### 2.5.3 Prise en compte des variations annuelles

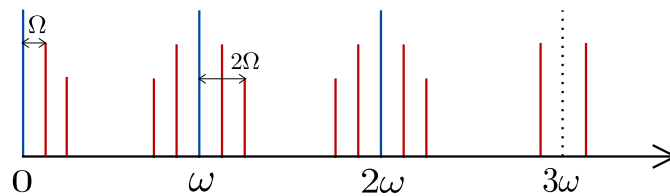


FIGURE 2.8 – Harmoniques apparaissant dans le modèle SME pour la transition hyperfine du césium 133. Les fréquences incluses dans le modèle  $O(\beta^1)$  de 2006 sont en bleu, les fréquences additionnelles ajoutées par le modèle  $O(\beta^2)$  sont en rouge. La fréquence de rotation de la Terre est notée  $\omega$  et sa fréquence de révolution  $\Omega$ .

La durée de nos jeux de données - de l'ordre d'une dizaine de jours - nous permet de rechercher des variations journalières de la fréquence de transition hyperfine. Par ailleurs, le fait que ces jeux de données soient espacés de six mois environ nous autorise également à y rechercher des modulations annuelles liées au déplacement de la Terre autour du Soleil au cours de la demi-révolution écoulée.

Lors de l'analyse réalisée en 2006 [51], les variations annuelles étaient négligées. Le modèle était alors constitué d'un terme constant et de deux termes liés à la variation journalière de l'observable :  $0, \omega, 2\omega$  (en bleu sur le schéma 2.8). À chaque composante de fréquence  $\omega_n$  étaient associées deux composantes de phase, en quadratures ( $\sin(\omega_n t)$  et  $\cos(\omega_n t)$ ).

Grâce à l'inclusion des termes annuels, nous disposons à présent de 12 harmoniques supplémentaires (indiquées en rouge sur le schéma 2.8), soit au total 29 composantes. Augmenter le nombre de fréquences sur lesquelles on décompose le signal permet d'augmenter la diversité des combinaisons de coefficients apparaissant dans le modèle et conduit à une meilleure décorrélation des paramètres SME.

### 2.5.4 Résumé des améliorations et de leur impact sur la portée du test

Dans le cadre de cette thèse, le modèle précédemment utilisé [51] a été amélioré sur deux points :

- l'inclusion des variations annuelles - plus réaliste compte tenu de l'espacement temporel des données - qui permettent de mieux décorrélérer les contributions des différents paramètres SME à l'observable.
- l'utilisation d'une transformation de Lorentz à l'ordre 2 permettant d'accéder à un 9<sup>ème</sup> coefficient, absent du modèle  $O(\beta^1)$

L'autre élément apporté à ce test est l'emploi d'un modèle nucléaire plus poussé que le modèle de Schmidt, permettant d'obtenir une sensibilité non nulle aux contributions des neutrons au signal de violation. Cette amélioration a été obtenue grâce à une collaboration avec trois membres de l'IPN d'Orsay : R.-D. Lasserri, J.-P. Ebran et E. Khan, qui ont réalisé les calculs nécessaires à l'estimation du paramètre  $\gamma_n$  dans le cadre d'un modèle de type champ moyen autocohérent relativiste.

Nous disposons à présent d'un modèle de signal de violation comprenant 29 composantes et permettant de contraindre 18 coefficients SME, au lieu de 5 composantes et 8 paramètres SME pour le modèle utilisé précédemment [51]. Les compositions de ces deux modèles - en terme de fréquence, phase, suppression et paramètres SME - sont détaillées dans les tables 2.4 et 2.5, respectivement pour le modèle  $O(\beta^1)$  utilisé dans [51] et pour notre modèle  $O(\beta^2)$ .

Frequence		$\tilde{c}_Q^p$	$\tilde{c}_-^p$	$\tilde{c}_X^p$	$\tilde{c}_Y^p$	$\tilde{c}_Z^p$	$\tilde{c}_{TX}^p$	$\tilde{c}_{TY}^p$	$\tilde{c}_{TZ}^p$
0	0	1					$\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$
$\omega$	cos			1			$\beta_\oplus$		$\beta_\oplus$
	sin		1				$\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$
$2\omega$	cos		1				$\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$	
	sin					1	$\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$	

TABLEAU 2.4 – Composition du modèle  $O(\beta^1)$  utilisé pour la première analyse [51]. Le signal associé à chaque coefficient RHNT est détaillé en terme de fréquence, phase et facteur de suppression en  $\beta^n$  ( $n \leq 1$ ). La fréquence angulaire associée à la rotation de la Terre sur elle-même est notée  $\omega$  et la vitesse réduite associée à la vitesse de déplacement de la Terre autour du Soleil est notée  $\beta_\oplus$ .

## 2.6 Méthode d'analyse des données

Les données sont analysées par la méthode des moindres carrés, soit en ajustant des amplitudes associées à des signaux de violation (de fréquence  $\omega_n$ ), soit en ajustant

Frequence		$\tilde{c}_Q^{p,n}$	$\tilde{c}_-^{p,n}$	$\tilde{c}_X^{p,n}$	$\tilde{c}_Y^{p,n}$	$\tilde{c}_Z^{p,n}$	$\tilde{c}_{TX}^{p,n}$	$\tilde{c}_{TY}^{p,n}$	$\tilde{c}_{TZ}^{p,n}$	$\tilde{c}_{TT}^{p,n}$
0	0	<b>1</b> $\beta_\oplus^2$ $\beta_l^2$	$\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$						$\beta_\oplus^2$ $\beta_l^2$
	$\Omega$	cos sin		$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$		$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	
	$2\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$				$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$
$\omega$	$-2\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$				$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$
	$-\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$
	0	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	<b>1</b> $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_l$ $\beta_l$			$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$
	$+\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$
	$+2\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$				$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$
	$2\omega$	$-2\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$			
	$-\Omega$	cos sin		$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$		
	0	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	<b>1</b> $\beta_\oplus^2$ $\beta_l^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$				$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$
	$+\Omega$	cos sin		$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$		
	$+2\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$				$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$
$3\omega$	$-\Omega$	cos sin		$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$		$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$				
	$+\Omega$	cos sin		$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$		$\beta_\oplus\beta_l$ $\beta_\oplus\beta_l$				

TABLEAU 2.5 – Composition du modèle  $O(\beta^2)$ . Le signal associé à chaque coefficient RHNT est détaillé en terme de fréquence, phase et facteur de suppression en  $\beta^n$  ( $n \leq 2$ ). On note respectivement  $\omega$  et  $\Omega$  les fréquences angulaires associées à la rotation de la Terre sur elle-même et autour du Soleil. La vitesse de déplacement de la Terre autour du Soleil est notée  $\beta_\oplus$  et celle du laboratoire par rapport au centre de la Terre est notée  $\beta_l$ . La première colonne indique l'harmonique principale du signal, la seconde colonne précise la fréquence des bandes latérales. Les composantes du modèle incluses à l'analyse finale sont indiquées en gras. Elles représentent les termes dominants pour chaque coefficient, les autres - négligeables pour l'analyse - ont été ignorés.

un ensemble de paramètres SME. Dans le cas des données de fréquence, on retire en premier lieu la contribution de l'effet Zeeman quadratique, évaluée à -2mHz [51], aucun autre prétraitement n'est appliqué. Pour l'ajustement des temps de vol, on utilise la calibration réalisée dans [51], afin d'exprimer les variations relatives de temps de vol pour les atomes  $m_F = \pm 3$  en terme de variations de fréquence. Les données de fréquence nous permettent d'estimer des valeurs et des incertitudes statistiques pour chacun de nos paramètres SME. Nous appliquons exactement la même analyse aux données de temps de vol atomiques, obtenant ainsi une estimation de paramètres SME fictifs. Ces derniers représentent une estimation de l'amplitude et de l'incertitude des effets systématiques pour chaque paramètre de notre modèle.

### 2.6.1 Ajustement par la méthode des moindres carrés

Dans cette partie, on rappelle brièvement le principe de la méthode des moindres carrés (pour plus de détails, voir [91, 92]).

Soit un ensemble de  $N$  observations, noté  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ . On suppose que chaque observation peut être modélisée comme la somme d'une fonction déterministe  $\tilde{\mathbf{y}}(\theta)$  dépendante de  $k$  paramètres à ajuster, notés  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$  et d'un bruit, noté  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$  :

$$y_i = \tilde{y}_i(\theta) + \epsilon_i \quad i = 1, \dots, N \quad (2.25)$$

Le bruit  $\epsilon$  est un ensemble de variables aléatoires non corrélées suivant une distribution normale caractérisée par  $E\{\epsilon\} = 0$  et  $E\{\epsilon\epsilon^T\} = \sigma_\epsilon^2 \mathcal{I}_n$ , où  $\sigma_\epsilon$  est l'écart-type du bruit estimé, à posteriori, comme l'écart-type des résidus de l'ajustement.

Le modèle  $\tilde{\mathbf{y}}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des  $k$  paramètres à ajuster, notés  $\theta_j$  :

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^k \frac{x_{ij}}{\sigma_i} \theta_j \quad i = 1, \dots, N \quad (2.26)$$

ou sous forme matricielle :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\theta \quad (2.27)$$

Ici, on considère que l'erreur de mesure  $\sigma$  affectant les données est constante et égale à l'écart-type du bruit  $\sigma_\epsilon$ . On note  $X$  la matrice  $(N \times k)$ , appelée "matrice modèle", contenant les valeurs échantillonnées des fonctions de base  $f_j(t)$  pour chaque pas de temps :

$$x_{ij} = f_j(t_i) \quad (2.28)$$

Les fonctions  $f_j$  - correspondant aux colonnes de la matrice  $X$  - forment une base sur laquelle on décompose le signal  $\tilde{y}$ .

La méthode des moindres carrés a pour but de déterminer l'estimation  $\hat{\theta}$  des paramètres  $\theta$  qui permettent de reproduire au mieux les données. Cette estimation est obtenue lorsque le maximum de la fonction de vraisemblance de  $\mathbf{y}$  est atteint et, de manière équivalente, lorsqu'on se situe au minimum de la fonction  $S(\theta)$  :

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \tilde{y}_i(\theta))^2}{\sigma^2} \quad (2.29)$$

en notation matricielle :

$$S(\theta) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\theta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\theta) \quad (2.30)$$

Cette fonction correspond à la norme des résidus, et la minimiser revient à minimiser la distance entre observations et modèle. Lorsque le bruit est normal, la fonction  $S(\theta)$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $n - k$  degrés de liberté.

En minimisant cette fonction, on obtient un système d'équations, dites "normales" :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \theta = \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.31)$$

À partir de ces équations, on peut définir l'estimation  $\hat{\theta}$  des paramètres  $\theta$  et la matrice de variance-covariance  $\mathbf{V}_{\hat{\theta}}$  associée :

$$\hat{\theta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{V}_{\hat{\theta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad (2.33)$$

La matrice de variance-covariance contient les variances (termes diagonaux) et les covariances (termes non-diagonaux) des paramètres du modèle. Elle permet de définir les incertitudes (Eq. 2.34) sur les paramètres et leurs coefficients de corrélation (Eq. 2.35).

$$\sigma_j^2 = V_{jj} \quad i = 1, \dots, k \quad (2.34)$$

$$c_{i,j} = \frac{V_{ij}}{\sqrt{V_{ii}V_{jj}}} \quad j = 1, \dots, k \quad (2.35)$$

Dans notre cas, les paramètres  $\theta$  correspondent aux amplitudes des couples de com-

posantes de phase associés aux fréquences  $\omega_n$ , sur lesquelles on décompose le signal.

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^{k/2} \theta_j \cos(\omega_n t_i) + \theta_{j+k/2} \sin(\omega_n t_i) \quad (2.36)$$

On souhaite également pouvoir contraindre un jeu de paramètres SME, notés  $\beta_j$  avec  $j = 1, \dots, s$ . Ces derniers sont liés aux paramètres  $\theta$  par un ensemble de fonctions, pouvant s'exprimer sous la forme d'une matrice  $P$ , de dimension  $k \times s$ , telle que :

$$\theta_i = \sum_{j=1}^s p_{ij} \beta_j \quad i = 1, \dots, k \quad (2.37)$$

On peut alors redéfinir la matrice de modèle associée à l'ajustement des paramètres  $\beta$  comme :

$$\mathbf{X}_\beta = \mathbf{X} \cdot \mathbf{P} \quad (2.38)$$

L'estimation  $\hat{\beta}$  des paramètres  $\beta$  et leur matrice de variance-covariance  $V_{\hat{\beta}}$  s'écrivent :

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}_\beta^T \mathbf{X}_\beta)^{-1} \mathbf{X}_\beta^T \mathbf{y} \quad (2.39)$$

$$V_{\hat{\beta}} = (\mathbf{X}_\beta^T \mathbf{X}_\beta)^{-1} \quad (2.40)$$

En appliquant cette analyse d'une part aux données de fréquence, et d'autre part aux données de temps de vol, on obtient une estimation des valeurs et des incertitudes statistiques et systématiques pour chaque coefficient SME.

## 2.6.2 Estimation de la matrice de covariance totale de l'ajustement

### Matrice de covariance liée aux effets systématiques

Nous construisons ici une estimation "pessimiste" de la matrice de covariance des effets systématiques. En effet, dans le cas où une variation significative à une fréquence  $\omega_n$  est détectée dans les temps de vol - ou de manière équivalente lorsqu'une valeur significative est affectée à un paramètre SME "fictif" -, on redéfinit l'incertitude sur l'amplitude de cette variation (ou ce paramètre) comme la somme quadratique de la valeur  $\hat{\theta}$  et de l'incertitude  $\sigma_{\hat{\theta}}$  obtenues par l'ajustement de temps de vol atomiques :

$$\sigma_{\hat{\theta}, \text{systématique}}^2 = \sigma_{\hat{\theta}}^2 + \hat{\beta}^2 \quad (2.41)$$

La matrice de covariance résultante est notée  $V_{\text{systématique}}$ .

### Matrice de covariance totale

La matrice de covariance totale de l'ajustement est obtenue en sommant les matrices de covariances statistique et systématique. La matrice de covariance statistique est la matrice issue de l'ajustement des données de fréquences, elle est notée  $V_{\text{statistique}}$ . La matrice de covariance  $V$  totale est donc :

$$V = V_{\text{statistique}} + V_{\text{systématique}} \quad (2.42)$$

### 2.6.3 Intervalles de confiance analytiques

On cherche à présent à déterminer des régions de confiance pour chaque couple de paramètres apparaissant dans notre modèle. Pour cela, on utilise la matrice de covariance totale de l'ajustement [93, 91]. Ces régions de confiance représentent une autre forme de visualisation de la matrice de variance covariance.

On rappelle que l'accroissement  $\frac{\Delta S}{\sigma^2}$  de la fonction  $S(\theta)$  est lié à l'accroissement  $\Delta\theta$  de l'écart entre les paramètres et leurs valeurs estimées. Cette fonction suit une loi du  $\chi^2$  à  $k$  degrés de liberté. Il est alors possible de définir, autour de la solution  $\hat{\theta}$ , une zone de l'espace des paramètres associée à une probabilité  $\gamma$  de contenir la vraie valeur des paramètres  $\theta$ . Cette zone est un hyper-ellipsoïde d'équation :

$$k_\gamma^2 = \frac{1}{\sigma^2} (\theta - \hat{\theta})^T X^T X (\theta - \hat{\theta}) \quad (2.43)$$

La taille de la zone de confiance est ajustée par la valeur  $k_\gamma^2$  de  $\Delta S$ , qui dépend du nombre  $k$  de paramètres susceptibles de varier et de la probabilité  $\gamma$  souhaitée.

Cet hyper-ellipsoïde est contenu dans un hyper-rectangle de côté  $\sigma_{ii}$ , appelé hyper-rectangle de "dispersion". Les variances et corrélations des paramètres sont d'autant plus grandes que les colonnes de  $X$  sont proches d'une dépendance linéaire. Plus les paramètres du modèle seront corrélés, plus le volume de cet hyper-rectangle - dans l'espace des paramètres - sera grand.

On souhaite maintenant construire des régions de confiance associées à des paires de paramètres. Pour cela, on se ramène à un sous espace à deux dimensions en fixant  $k - 2$  paramètres à leur valeurs optimale  $\hat{\theta}_j$ . L'accroissement de  $S$  suit maintenant une loi du  $\chi^2$  à deux paramètres et les valeurs de  $k_\gamma^2$  associées aux probabilités 68.3%, 90% et 95.4% sont respectivement  $k_\gamma^2 = 2.3, 4.61$  et  $6.17$ .

D'un point de vue pratique, on souhaite reconstruire l'ellipse de confiance à partir des variances et des covariances des paramètres. Pour cela, il faut établir les relations liant le



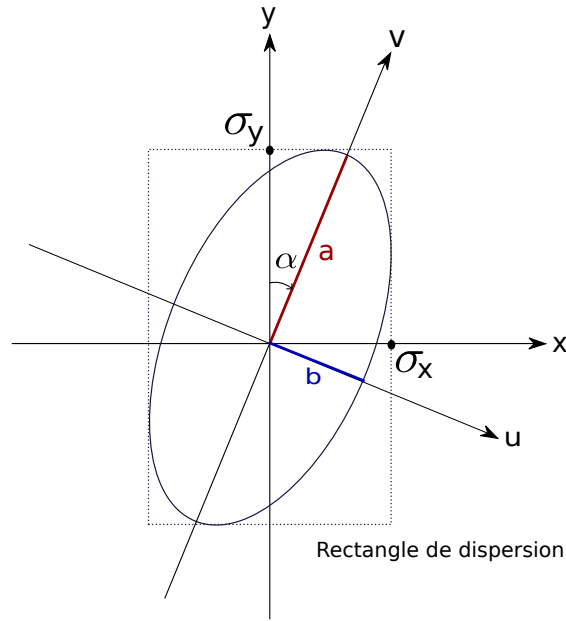


FIGURE 2.9 – Schéma d'une ellipse de confiance 2D. Le repère  $(u,v)$  est le repère propre de l'ellipse, tandis que le repère  $(x,y)$  est celui des paramètres du modèle.

demi-grand et le demi-petit axe de l'ellipse, ainsi que son inclinaison, aux composantes de la matrice de covariance.

Si on considère une matrice de covariance à deux paramètres, notée  $V$ , l'ellipse associée à cette matrice aura pour axe les vecteurs propres de la matrice de covariance et les demi-longueurs des axes correspondront aux valeurs propres de la matrice de covariance diagonalisée  $\Lambda$ , multipliées par un facteur  $k_\gamma^2$  en fonction de la probabilité représentée par l'ellipse.

La figure 2.9 illustre le lien entre le repère  $(x,y)$  lié à la matrice de covariance non diagonalisée et le repère propre de l'ellipse (matrice de covariance diagonalisée). La transformation entre ces deux repères fait intervenir une matrice  $U$  :

$$U = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

telle que :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

La matrice  $\Lambda$  est obtenue par diagonalisation de  $V$  par  $U$  et contient sur sa diagonale

les valeurs propres de  $V$ , notées  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} = UVU^T \quad (2.46)$$

La matrice  $V$  étant définie comme :

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \\ c_{1,2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les écart-types des deux paramètres considérés et  $c_{1,2}$  leur coefficient de corrélation.

L'égalité décrite à l'équation 2.46 permet d'écrire les expressions des longueurs du demi-grand axe,  $\lambda_2$ , et du demi-petit axe,  $\lambda_1$ , de l'ellipse de confiance comme :

$$\lambda_1^2 = \sigma_1^2 \cos^2(\alpha) + \sigma_2^2 \sin^2(\alpha) - 2c_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \quad (2.48)$$

$$\lambda_2^2 = \sigma_1^2 \sin^2(\alpha) + \sigma_2^2 \cos^2(\alpha) + 2c_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \quad (2.49)$$

L'angle d'inclinaison de l'ellipse  $\alpha$ , équivaut quant à lui à :

$$\tan(2\alpha) = \frac{2c_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \quad (2.50)$$

Grâce à ces paramètres, on peut ensuite tracer les contours de l'ellipse de confiance associée à la probabilité  $\gamma$ .

#### 2.6.4 Décomposition en valeurs singulières (DVS)

La dernière étape de notre analyse est la détermination de limites "optimales" sur des combinaisons de paramètres du modèle. Pour cela, nous réalisons une décomposition en valeurs singulières de la matrice de covariance, afin de déterminer un ensemble de combinaisons linéaires indépendantes de coefficients SME. La DVS n'apporte pas d'information supplémentaire par rapport aux limites à  $1\sigma$  et aux matrices de corrélation, mais elle permet de visualiser l'impact des corrélations sur les incertitudes et aussi d'avoir un aperçu des limites que nous pourrions atteindre si ces corrélations étaient négligeables.

Cette décomposition équivaut à une diagonalisation de la matrice de covariance  $V$  obtenue à l'issue de l'analyse moindres carrés et permet de se ramener à un hyper-rectangle de dispersion dont le volume est minimal dans l'espace des paramètres (voir figure 2.10). De cette manière, on obtient, sur des combinaisons non corrélées de paramètres, des

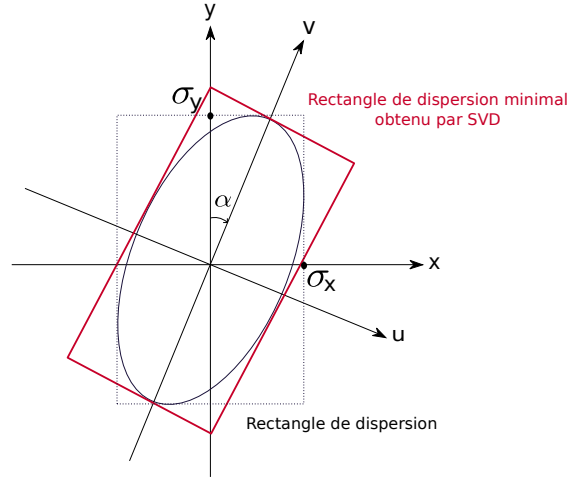


FIGURE 2.10 – Schéma d'une ellipse de confiance 2D de volume optimal obtenue par DVS.

limites "optimales" en terme de variance.

La décomposition en valeurs singulières de  $V$  s'écrit :

$$V = U \cdot S \cdot U^T \quad (2.51)$$

où  $U$  est une matrice carrée  $M \times M$  contenant les vecteurs propres de  $V$  et  $S$  une matrice diagonale contenant ses valeurs propres.

Les vecteurs propres  $V_j^T$  forment une base orthonormale permettant de définir un ensemble de combinaisons non-corrélées de paramètres libres du modèle. Les  $M$  combinaisons linéaires indépendantes de coefficients SME  $\mathbf{c}$  et leurs incertitudes associées  $\sigma_i^c$  sont :

$$\mathbf{c} = V^T \cdot \hat{\theta} \quad (2.52)$$

$$\sigma_i^c = \sqrt{S_{ii}} \quad (2.53)$$

où  $\hat{\theta}$  est le vecteur de paramètres ajusté par l'analyse moindres carrés.

## 2.7 Comparaisons avec [51] des résultats obtenus pour le modèle $O(\beta^1)$ et le modèle de Schmidt

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus avec un modèle  $O(\beta^1)$  et nous effectuons une comparaison avec les résultats obtenus lors de la première analyse des données de la fontaine atomique [51]. Nous illustrons notamment les apports de

l'analyse simultanée de l'ensemble des paramètres du modèle par rapport à l'analyse par sous-ensemble de paramètres fréquemment utilisée dans ce genre de tests [51, 94].

En 2005, l'analyse se faisait en trois étapes :

- 1- Ajustement des amplitudes du signal pour les cinq composantes correspondant aux fréquences  $\omega_n = 0, \omega, 2\omega$
- 2- Estimation des incertitudes systématiques pour chaque fréquence par ajustement des temps de vol atomiques.
- 3- Estimation des 8 coefficients SME à partir des cinq amplitudes obtenues à l'étape (1) et de leurs incertitudes totales. Le problème étant sous-déterminé, l'ajustement est réalisé par sous-ensembles de paramètres :
  - 3a. Ajustement du sous-ensemble  $A1 = \{\tilde{c}_Q, \tilde{c}_-, \tilde{c}_X, \tilde{c}_Y, \tilde{c}_Z\}$
  - 3b. Ajustement du sous-ensemble  $A2 = \{\tilde{c}_{TX}, \tilde{c}_{TY}, \tilde{c}_{TZ}\}$

Les résultats obtenus avec cette méthode sont présentés dans la seconde colonne de la Table 2.7. Cette étude n'avait détecté aucune violation d'invariance de Lorentz et avait abouti, à l'époque, à une amélioration de 11 à 13 ordres de grandeur des limites sur quatre coefficients SME du proton.

Afin de valider notre méthode d'analyse en nous comparant à [51], nous ajustons dans un premier temps les amplitudes de violations pour les 5 composantes du signal intégrées au modèle  $O(\beta^1)$  utilisé en 2006, puis nous réalisons ensuite un ajustement d'un modèle SME  $O(\beta^1)$  avec variations annuelles, comprenant 8 paramètres ( $\tilde{c}_{TT}$  non inclus).

### 2.7.1 Analyse harmonique

Fréquence	Valeurs et incertitudes (mHz)	
	Cette analyse	Analyse de 2006 [51]
A	$-3.3 \pm 25.1(0.04)$	$-3.3 \pm 25.0(0.04)$
$C_\omega$	$0.06 \pm 0.3(0.06)$	$0.1 \pm 0.07(0.06)$
$S_\omega$	$0.1 \pm 0.23(0.06)$	$-0.03 \pm 0.07(0.06)$
$C_{2\omega}$	$-0.03 \pm 0.28(0.06)$	$0.04 \pm 0.07(0.06)$
$S_{2\omega}$	$-0.5 \pm 0.3(0.06)$	$0.03 \pm 0.07(0.06)$

TABLEAU 2.6 – Tableau comparatif des résultats de l'analyse harmonique pour le modèle  $O(\beta^2)$  utilisé en 2006. On résume ici les valeurs et incertitudes totales, pour notre analyse et pour l'analyse de 2006. Les incertitudes statistiques sont précisées entre parenthèses.

Les résultats de l'analyse harmonique pour les amplitudes associées aux fréquences du modèle  $O(\beta^1)$  de 2006 sont résumés dans la table 2.6. Nous ne trouvons aucune

TABLEAU 2.7 – Comparaison entre analyse par sous-ensembles de paramètres (Se) et analyse simultanée de tous les paramètres, dite "complète" (C) pour le modèle  $O(\beta^1)$  utilisé dans [51]. Le facteur de sous-estimation des incertitudes lié à l'utilisation de l'analyse par sous-ensemble est noté C/Se.

Coefficient	Incertitude (GeV) (Se) [51]	Incertitude (GeV) (C)	C/Se
$\tilde{c}_Q^p$	$2.2 \cdot 10^{-22}$	$2.1 \cdot 10^{-22}$	0.95
$\tilde{c}_-^p$	$2.8 \cdot 10^{-25}$	$5.2 \cdot 10^{-24}$	19
$\tilde{c}_X^p$	$1.2 \cdot 10^{-25}$	$1.2 \cdot 10^{-24}$	10
$\tilde{c}_Y^p$	$1.2 \cdot 10^{-25}$	$7.5 \cdot 10^{-25}$	6.3
$\tilde{c}_Z^p$	$2.8 \cdot 10^{-25}$	$2.8 \cdot 10^{-24}$	10
$\tilde{c}_{TX}^p$	$3.0 \cdot 10^{-21}$	$2.3 \cdot 10^{-20}$	7.7
$\tilde{c}_{TY}^p$	$3.0 \cdot 10^{-21}$	$5.9 \cdot 10^{-20}$	20
$\tilde{c}_{TZ}^p$	$2.0 \cdot 10^{-21}$	$3.3 \cdot 10^{-20}$	16.5

amplitude significative pour les harmoniques auxquelles nous recherchons une violation d'invariance de Lorentz. Par rapport à l'analyse de 2006, nous trouvons des incertitudes sur les amplitudes identiques pour la partie statistique, mais plus élevées en ce qui concerne la contribution des effets systématiques. Cela est dû au fait que nous ajustons les amplitudes et incertitudes systématiques en utilisant les deux jeux de temps de vol dont nous disposons - seul le second était utilisé en 2006 - et que l'écart-type des données du premier jeu est environ neuf fois plus grand que celui des données du second jeu.

### 2.7.2 Analyse SME

Nous utilisons à présent le modèle  $O(\beta^1)$  à 8 coefficients SME du proton pour réaliser un ajustement simultané de l'ensemble des coefficients SME. Les effets systématiques sont estimés de la même façon, par ajustement du modèle sur les temps de vol atomiques. Les deux modifications apportées au modèle concernent d'une part les variations annuelles - négligées en 2006 - qui sont désormais incluses dans le modèle, et d'autre part l'ajout des termes dépendant de la vitesse réduite du laboratoire par rapport au centre de la terre, également négligés dans [51].

En comparant les résultats de ces deux analyses (voir Table 2.7), on constate qu'à l'exception du coefficients  $\tilde{c}_Q$ , dont l'incertitude est dominée par les effets systématiques, les incertitudes individuelles que nous obtenons sont dégradées d'un facteur 1 à 20 par rapport aux résultats de [51] (voir quatrième colonne de la Table 2.7). Cette différence vient du fait que la solution estimée dans [51] a été obtenue sur deux sous-espaces de l'espace des paramètres  $P_k$  et, dans le cas présent, cette solution ne correspond pas à

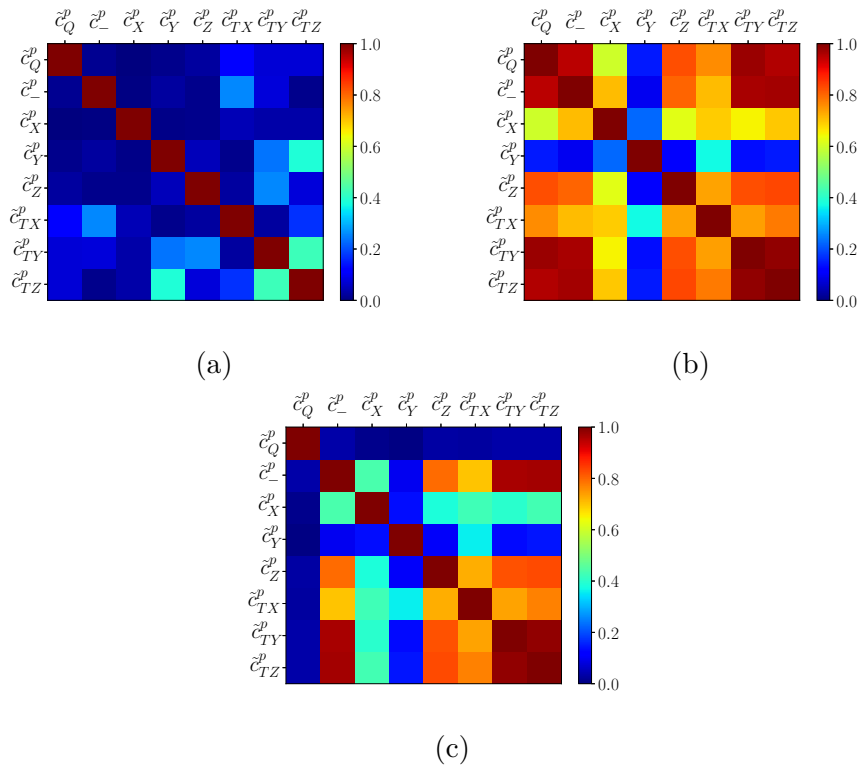


FIGURE 2.11 – Représentation graphique des matrices de corrélation statistique, systématique et totale pour le modèle  $O(\beta^1)$ . (a) Matrice de corrélation statistique, (b) Matrice de corrélation systématique, (c) Matrice de corrélation totale des paramètres SME.

la solution optimale du problème. En d'autres termes, le fait de négliger les corrélations entre paramètres et de se ramener à un sous-espace de  $P_k$ , occasionne une réduction artificielle du volume de l'hyper-rectangle de dispersion et des incertitudes associées. Contrairement à l'analyse par sous-ensembles, nous prenons en compte l'ensemble des corrélations existant entre les paramètres, et de fait, nous obtenons des incertitudes plus grandes, mais également plus robustes.

On présente également, Figure 2.11, les matrices de corrélation - statistique, systématique et totale - résultant de l'analyse simultanée du modèle  $O(\beta^1)$  développé dans cette thèse (voir Section 2.5). Ces figures illustrent l'importance des corrélations existant entre les paramètres SME.

## 2.8 Résultats obtenus pour le modèle $O(\beta^2)$

Cette partie présente les résultats obtenus avec le modèle  $O(\beta^2)$  développé dans le cadre de cette thèse (voir Section 2.5 et Annexe B). L'analyse harmonique n'apportant pas de résultat concret en terme de test d'invariance de Lorentz, nous exprimons ces résultats uniquement sous la forme de limites sur des coefficients SME. Nous présentons séparément les résultats obtenus dans le cadre du modèle de Schmidt, afin d'obtenir des limites directement comparables à l'état de l'art des limites SME [45], puis dans le cadre du modèle SCRMF, ce dernier reposant sur des hypothèses différentes en terme de structure et d'interaction entre nucléons.

### 2.8.1 Modèle nucléaire de Schmidt

Les contraintes SME obtenues avec le modèle  $O(\beta^2)$ , dans le cadre du modèle nucléaire de Schmidt, sont présentées à la Table 2.8. Tout comme dans la précédente analyse [51], aucun des coefficients ne présente de valeur significative. La seule amélioration apportée par le modèle  $O(\beta^2)$  concerne le coefficient  $\tilde{c}_{TT}$ , que nous contraignons avec une précision supérieure de 5 ordres de grandeur à l'état de l'art des contraintes obtenues en laboratoire. Il existe également des limites sur le coefficient  $\tilde{c}_{TT}$ , obtenues par l'analyse de données astrophysiques (e.g. [95, 96]) et leur interprétation dans le cadre du secteur SME non-minimal des protons, atteignant une sensibilité de  $10^{-22}$  GeV [45]. Ce type d'analyse implique d'autres hypothèses liées à la nature des modèles astrophysiques, c'est pourquoi nous comparons nos résultats préférentiellement avec ceux des autres expériences réalisées en laboratoire.

### 2.8.2 Modèle nucléaire SCRMF

Cette partie présente les résultats obtenus avec le modèle SME  $O(\beta^2)$  couplé au modèle nucléaire SCRMF introduit dans la section 2.5.1. Grâce à ce modèle, l'expérience devient sensible à une combinaison de coefficients SME du proton et du neutron. Par rapport aux coefficients contraints dans le cadre du modèle de Schmidt, on remplace les coefficients du proton  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p$  par une combinaison de coefficients du proton et du neutron, notée  $\tilde{c}_{\mu\nu}^{\text{SCRMF}} = \tilde{c}_{\mu\nu}^p + \frac{\gamma_n}{\gamma_p} \tilde{c}_{\mu\nu}^n$ , en tenant compte du changement de valeur de  $\gamma_p$ .

À partir des valeurs de  $\gamma_w$  calculées pour le modèle SCRMF (voir section 2.5.1), on définit la combinaison de paramètres ajustés comme :

$$\tilde{c}_{\mu\nu}^{\text{SCRMF}} = \tilde{c}_{\mu\nu}^p + 0.021 \tilde{c}_{\mu\nu}^n \quad (2.54)$$

TABLEAU 2.8 – Limites à  $1\sigma$  sur les coefficients SME  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p$  pour le proton, obtenues avec le modèle  $O(\beta^2)$  dans le cadre du modèle nucléaire de Schmidt. Les valeurs et les incertitudes sont données dans la deuxième colonne et sont exprimées en GeV. On précise également, entre parenthèses, les incertitudes statistiques, puis systématiques. Les contraintes sont comparées à l'état de l'art 2016 (quatrième colonne). Les exposants apparaissant entre parenthèses correspondent au nombre d'ordres de grandeur d'amélioration par rapport à l'état de l'art.

Coefficient	Valeur et incertitude	Unité (GeV)	Précédentes limites (GeV)	Ref.
$\tilde{c}_Q^p$	$-0.3 \pm 2.1$ (10 <sup>-2</sup> )(2.1)	10 <sup>-22</sup>	2.2 10 <sup>-22</sup>	[51]
$\tilde{c}_-^p$	$1.4 \pm 9.0$ (0.7)(8.9)	10 <sup>-24</sup>	2.8 10 <sup>-25</sup>	[51]
$\tilde{c}_X^p$	$-1.5 \pm 5.3$ (0.7)(5.2)	10 <sup>-24</sup>	1.2 10 <sup>-25</sup>	[51]
$\tilde{c}_Y^p$	$0.8 \pm 1.6$ (0.3)(1.6)	10 <sup>-24</sup>	1.2 10 <sup>-25</sup>	[51]
$\tilde{c}_Z^p$	$1.0 \pm 3.9$ (0.8)(3.9)	10 <sup>-24</sup>	2.8 10 <sup>-25</sup>	[51]
$\tilde{c}_{TX}^p$	$-1.5 \pm 5.7$ (0.6)(5.7)	10 <sup>-20</sup>	3.0 10 <sup>-21</sup>	[51]
$\tilde{c}_{TY}^p$	$1.4 \pm 5.9$ (0.3)(5.9)	10 <sup>-20</sup>	3.0 10 <sup>-21</sup>	[51]
$\tilde{c}_{TZ}^p$	$-1.1 \pm 3.5$ (0.2)(3.5)	10 <sup>-20</sup>	2.0 10 <sup>-21</sup>	[51]
$\tilde{c}_{TT}^p$	$1.6 \pm 6.9$ (0.9)(6.9)	10 <sup>-16(5)</sup>	< 10 <sup>-11</sup>	[47]

Les limites obtenues sur cette combinaison sont résumées dans les trois premières co-

TABLEAU 2.9 – Limites à  $1\sigma$  sur la combinaison de coefficients SME, notés  $\tilde{c}_{\mu\nu}^{\text{SCRMF}}$ , représentant l'amplitude des violations d'invariance de Lorentz pour les protons et les neutrons. Ces coefficients sont exprimés en GeV. Les deux dernières colonnes correspondent aux sensibilités maximales pour chaque type de particule, définies dans [45], et correspondent à un arrondi du logarithme de l'incertitude à  $2\sigma$ . Les valeurs en gras représentent les améliorations par rapport à l'état de l'art en 2016, publié dans [45], avec un exposant entre parenthèses précisant le nombre d'ordres de grandeur d'amélioration.

Coefficient	Valeur et incertitude	Unité (GeV)	$\tilde{c}_{\text{max}}^p$ (GeV)	$\tilde{c}_{\text{max}}^n$ (GeV)
$\tilde{c}_Q^{\text{SCRMF}}$	$0.4 \pm 2.8$	10 <sup>-22</sup>	10 <sup>-21</sup>	<b>10<sup>-20(7)</sup></b>
$\tilde{c}_-^{\text{SCRMF}}$	$-0.2 \pm 1.2$	10 <sup>-23</sup>	10 <sup>-23</sup>	10 <sup>-21</sup>
$\tilde{c}_X^{\text{SCRMF}}$	$2.0 \pm 7.0$	10 <sup>-24</sup>	10 <sup>-23</sup>	10 <sup>-21</sup>
$\tilde{c}_Y^{\text{SCRMF}}$	$-1.1 \pm 2.2$	10 <sup>-24</sup>	10 <sup>-23</sup>	10 <sup>-22</sup>
$\tilde{c}_Z^{\text{SCRMF}}$	$-1.3 \pm 5.2$	10 <sup>-24</sup>	10 <sup>-23</sup>	10 <sup>-21</sup>
$\tilde{c}_{TX}^{\text{SCRMF}}$	$2.0 \pm 7.6$	10 <sup>-20</sup>	10 <sup>-19</sup>	<b>10<sup>-17(12)</sup></b>
$\tilde{c}_{TY}^{\text{SCRMF}}$	$-1.8 \pm 7.8$	10 <sup>-20</sup>	10 <sup>-19</sup>	<b>10<sup>-17(12)</sup></b>
$\tilde{c}_{TZ}^{\text{SCRMF}}$	$1.4 \pm 4.6$	10 <sup>-21</sup>	10 <sup>-19</sup>	<b>10<sup>-17(12)</sup></b>
$\tilde{c}_{TT}^{\text{SCRMF}}$	$-2.2 \pm 9.1$	10 <sup>-16</sup>	<b>10<sup>-15(4)</sup></b>	<b>10<sup>-13(2)</sup></b>

lonnes de la Table 2.9. Bien qu'on ne puisse pas séparer les contributions individuelles des protons et des neutrons, on peut définir des "sensibilités maximales", introduites



dans [45]. Les valeurs apparaissant en gras sont les limites améliorant l'état de l'art, le nombre d'ordres de grandeur d'amélioration est précisé dans l'exposant entre parenthèses. Avec ce modèle nucléaire, nous améliorons les contraintes sur les paramètres du neutron : jusqu'à 12 ordres de grandeur pour les coefficients  $\tilde{c}_{TJ}$  et 2 ordres de grandeur sur le coefficient  $\tilde{c}_{TT}$ , dont les précédentes contraintes (respectivement de l'ordre de  $10^{-5}$  GeV pour les  $\tilde{c}_{TJ}$  et  $10^{-11}$  GeV pour  $\tilde{c}_{TT}$ ) ont été déterminées par l'interprétation des résultats d'expériences basées sur des pendules de torsion [47]. Nous gagnons également 7 ordres de grandeur de sensibilité sur les limites du coefficient  $\tilde{c}_Q$  du neutron, récemment contraint grâce à des ondes acoustiques se propageant dans un quartz à un niveau de sensibilité de  $10^{-13}$  GeV [97]. Les coefficients  $\tilde{c}_-$  et  $\tilde{c}_{JK}$  pour le neutron sont quant à eux contraints avec une sensibilité de l'ordre de  $10^{-29}$  GeV grâce à des co-magnétomètres réalisant des mesures spectroscopiques de résonance magnétique nucléaire sur des atomes de rubidium et de potassium [98]. Le nombre d'atomes interrogés dans ce dispositif est 3 à 5 ordres de grandeur plus grand que celui dont nous disposons avec la fontaine, ce qui explique notamment la très grande sensibilité de cette expérience. La réinterprétation de ces résultats dans le cadre d'un modèle nucléaire alternatif, développé dans [90], a également permis de contraindre à un niveau de  $10^{-29}$  les limites sur les coefficients  $\tilde{c}_-$  et  $\tilde{c}_{JK}$  du proton. Toutes ces contraintes sont compatibles avec une absence de violation d'invariance de Lorentz.

La matrice de corrélation des paramètres SME et les régions de confiance associées sont présentées respectivement Figures 2.12 et 2.13. On constate que la matrice de corrélation contient un nombre non négligeable de coefficients de corrélation de l'ordre de 0.7 à 0.9. Ces corrélations offrent toutefois une perspective d'amélioration de nos résultats qui sera évoquée dans la Section 2.9.

### 2.8.3 Contraintes optimales obtenues par DVS dans le cadre du modèle SCRMF

On établit à présent des contraintes optimales, non plus sur des coefficients individuels, mais sur des combinaisons linéaires de coefficients SME. Pour cela, on effectue une décomposition en valeurs singulières de la matrice de covariance, comme décrit dans la Section 2.6.

La composition détaillée des combinaisons en terme de coefficients SME est décrite à la Table 2.10. Les valeurs et incertitudes ajustées pour chaque combinaison sont, quant à elles, présentées Table 2.11.

Les combinaisons obtenues représentent une décomposition unique des paramètres

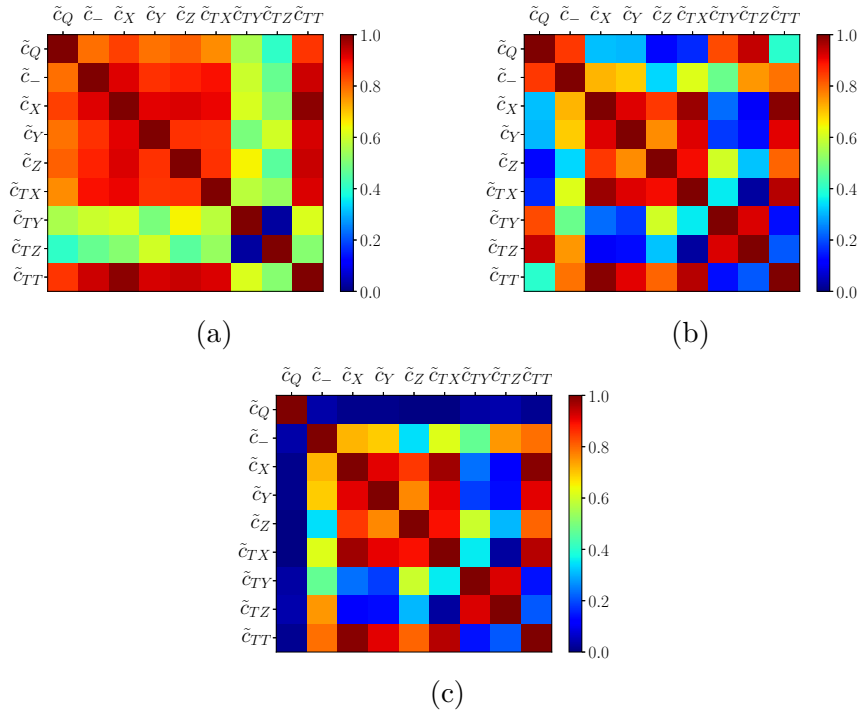


FIGURE 2.12 – Représentation graphique des matrices de corrélation statistique, systématique et totale pour le modèle  $\theta(\beta^2)$ . (a) Matrice de corrélation statistique, (b) Matrice de corrélation systématique, (c) Matrice de corrélation totale des paramètres SME. Ces corrélations sont indépendantes du modèle nucléaire utilisé, elles sont valables aussi bien dans le cadre du modèle de Schmidt que dans le cadre du modèle SCRMF.

TABLEAU 2.10 – Composition des combinaisons linéaires indépendantes de coefficients SME  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  obtenues par DVS de la matrice de covariance. Les chiffres en gras indiquent les contributions dominantes aux différentes combinaisons. Ces valeurs sont indépendantes de la combinaison  $a\tilde{c}_{\mu\nu}^p + b\tilde{c}_{\mu\nu}^n$  considérée.

	$\tilde{c}_Q$	$\tilde{c}_-$	$\tilde{c}_X$	$\tilde{c}_Y$	$\tilde{c}_Z$	$\tilde{c}_{TX}$	$\tilde{c}_{TY}$	$\tilde{c}_{TZ}$	$\tilde{c}_{TT}$
$c_1$	<b>1.0</b>	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-9}$
$c_2$	$10^{-4}$	<b>0.99</b>	-0.01	0.02	0.05	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-9}$
$c_3$	$10^{-5}$	<b>-0.11</b>	<b>-0.8</b>	0.06	<b>0.59</b>	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-8}$
$c_4$	$10^{-6}$	0.02	-0.09	<b>-0.99</b>	-0.02	$10^{-5}$	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-10}$
$c_5$	$10^{-5}$	-0.02	<b>-0.57</b>	0.06	<b>-0.81</b>	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-10}$
$c_6$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	<b>-0.96</b>	<b>0.11</b>	<b>-0.26</b>	$10^{-4}$
$c_7$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	<b>-0.22</b>	<b>-0.86</b>	<b>0.47</b>	$10^{-5}$
$c_8$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	<b>-0.17</b>	<b>0.51</b>	<b>0.84</b>	$10^{-6}$
$c_9$	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-9}$	$10^{-9}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	<b>1.0</b>

sur la base des vecteurs propres de la matrice de covariance. Ces combinaisons sont indépendantes les unes des autres, indépendance illustrée à la Figure 2.14 montrant

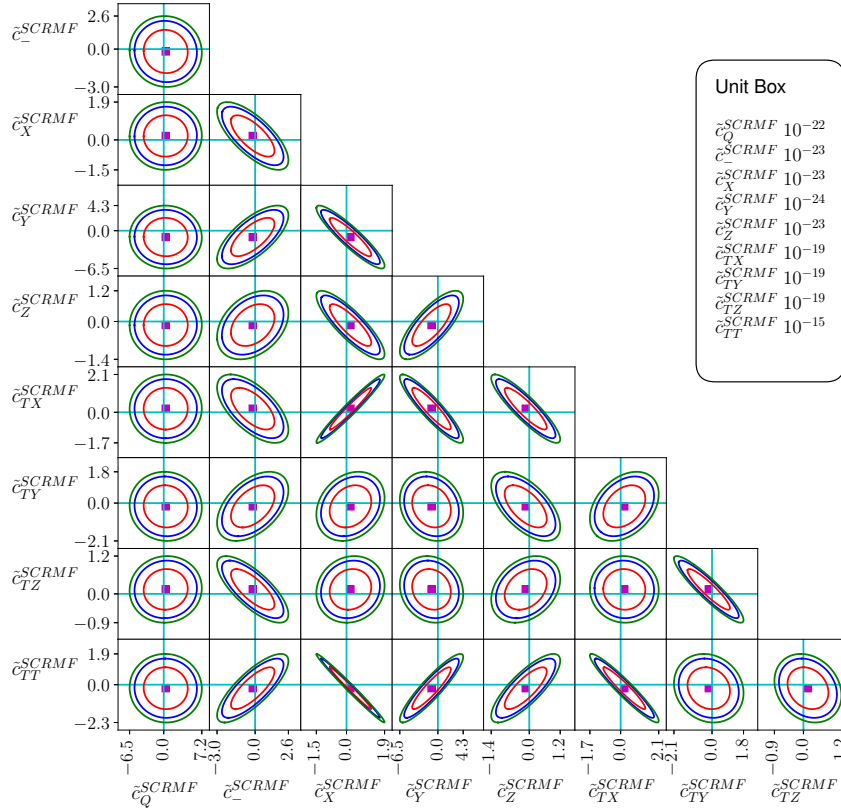


FIGURE 2.13 – Intervalles de confiance reconstruits pour l’association du modèle  $O(\beta^2)$  et du modèle nucléaire SCRMF. Les ellipses rouge, bleue et verte sont associées aux probabilités : 68.3%, 90% and 95.4%. Le carré violet situé au centre de chaque ellipse correspond à la valeur du coefficient, ajustée par la méthode des moindres carrés. Les traits bleus indiquent la position du zéro pour chaque coefficient et permettent ainsi de visualiser le degré de significativité de la valeur ajustée. Les valeurs indiquées sur les axes du graphique représentent les limites à 95.4% pour chaque coefficient, ces valeurs sont données en GeV.

les régions de confiance associées aux paires de combinaisons obtenues par DVS. On constate que ces régions ne présentent aucune déformation le long de leur diagonale, ce qui correspond à une matrice de covariance diagonale.

TABLEAU 2.11 – Limites sur les combinaisons linéaires indépendantes de coefficients SME de violation d’invariance de Lorentz, obtenues par décomposition en valeur singulière de la matrice de covariance du modèle  $O(\beta^2)$ . Ces valeurs sont exprimées en GeV. Chacun des coefficients de ces combinaisons est une combinaison de coefficients du proton et du neutron (modèle nucléaire SCRMF).

Combinaison linéaire	Valeur et incertitude (GeV)	
$c_1$	$(0.3 \pm 2.7)$	$10^{-22}$
$c_2$	$(2.6 \pm 4.7)$	$10^{-24}$
$c_3$	$(-0.8 \pm 2.1)$	$10^{-24}$
$c_4$	$(5.3 \pm 9.2)$	$10^{-25}$
$c_5$	$(0.5 \pm 1.7)$	$10^{-24}$
$c_6$	$(-0.9 \pm 3.1)$	$10^{-20}$
$c_7$	$(2.3 \pm 9.0)$	$10^{-20}$
$c_8$	$(-0.1 \pm 1.8)$	$10^{-20}$
$c_9$	$(-2.2 \pm 9.1)$	$10^{-16}$

## 2.9 Perspectives

**Troisième jeu de données** Les données dont nous disposons actuellement sont espacées d’environ six mois, ce qui n’est pas optimal pour décorréliser les différentes composantes du signal et les coefficients SME associés. En plus de permettre une réduction des incertitudes statistiques (en  $1/\sqrt{N}$  du nombre de points de données), un troisième jeu de données simulé - de 14 jours - avec les mêmes caractéristiques de bruit que les jeux existants, et pris à un moment approprié de l’année, permettrait d’optimiser la réduction des corrélations entre paramètres SME et d’améliorer d’environ un ordre de grandeur certaines contraintes sur ces paramètres. À partir de simulations réalisées avec un jeu de bruit blanc, nous avons déterminé que le meilleur moment de l’année pour réaliser ces mesures serait la première quinzaine de juillet et la première quinzaine de janvier. Si on regarde la distribution des données à l’échelle d’une année (Figure 2.15), les bandes grises correspondent aux périodes couvertes par les données dont nous disposons actuellement. Les bandes bleu représentent, quant à elles, les périodes les plus favorables à la prise de données, car elles maximisent l’espacement des jeux et donc l’exploration des modulations annuelles.

**Estimation du paramètre  $\lambda_w$  dans le cadre du modèle SCRMF** Dans la section 2.4.1, on néglige la dépendance de l’observable vis à vis du coefficient SME noté  $\tilde{g}_q^w$ , dont la sensibilité est déterminée par le paramètre  $\lambda_w$ . D’après [50] et [48], ce paramètre est nul dans le cas du noyau de  $^{133}\text{Cs}$ , cependant dans la Table II présentée dans le papier [50],  $\lambda_p$  est associé à une valeur nulle, indiquée entre crochets. Cela indique que cette valeur

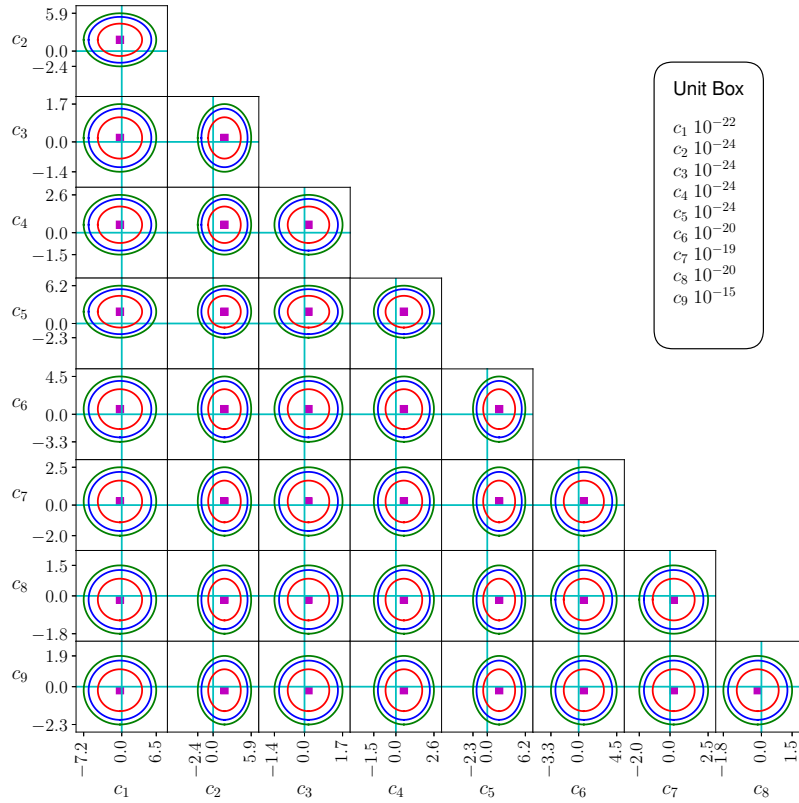


FIGURE 2.14 – Intervalles de confiance reconstruit associés aux combinaisons linéaires indépendantes de coefficients SME obtenues par DVS de la matrice de covariance. Les ellipses rouge, bleue et verte sont associées aux probabilités : 68.3%, 90% and 95.4%. Le carré violet situé au centre de chaque ellipse correspond à la valeur du coefficient ajustée par la méthode des moindres carrés. Les traits bleus indiquent la position du zéro pour chaque coefficient et permettent ainsi de visualiser de degré de significativité de la valeur ajustée. Les valeurs indiquées sur les axes du graphique représentent les limites à 95.4% pour chaque coefficient, ces valeurs sont données en GeV.

dépend du modèle nucléaire utilisé et, par conséquent, qu'elle pourrait potentiellement prendre une valeur non nulle dans le cadre d'un autre modèle nucléaire. Nous pourrions donc envisager une poursuite de collaboration avec les membres de l'IPN, afin de calculer les valeurs du paramètre  $\lambda$  pour le proton et pour le neutron.

Le coefficient  $\tilde{g}_{\lambda\mu\nu}^w$  est associé à 14 combinaisons. Sur les 28 combinaisons associées aux protons et aux neutrons, seules 7 ont été contraintes par des comparaisons de ma-

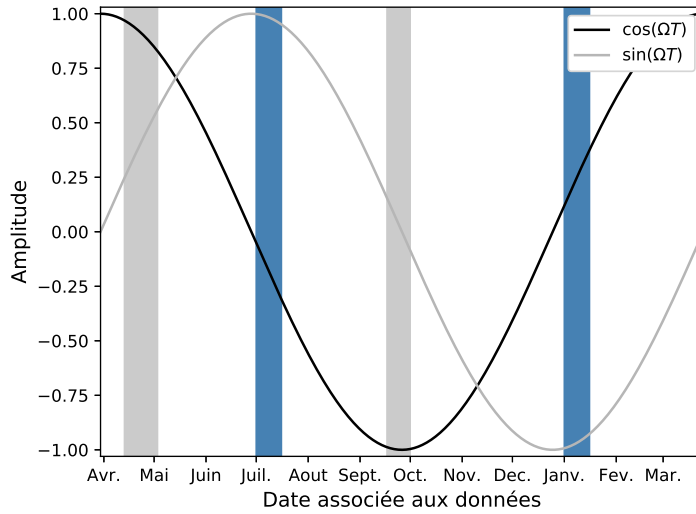


FIGURE 2.15 – Distribution temporelle des jeux de données à l’échelle d’une année. Les zones grisées correspondent aux données dont nous disposons actuellement, les zones bleu à celles envisagées pour un troisième jeu de données. On représente également les sinus et cosinus associés à la variation annuelle afin de représenter graphiquement les parties des sinusoides couvertes par les données.

gnétomètres fonctionnant avec des atomes de Cs et Hg [99, 100]. Si nous étions capables de contraindre le coefficient  $\tilde{g}_{\lambda\mu\nu}^w$ , nous pourrions potentiellement améliorer les limites sur ces combinaisons et contraindre des combinaisons non contraintes à ce jour.

**Réalisation d’un test similaire avec la mission ACES-PHARAO** Le modèle SME développé dans ce chapitre pourra être adapté afin de réaliser un test équivalent avec les données de la mission ACES-PHARAO. Ce module, comprenant une horloge à atomes froids de  $^{133}\text{Cs}$ , pourrait être arrimé à la station spatiale internationale en 2020. L’horloge PHARAO permet également d’interroger des transitions entre niveaux hyperfins magnétisés et présente un bruit de mesure similaire à celui de la fontaine double F02. Sa trajectoire en orbite permettrait de rechercher des modulations des fréquences de transition beaucoup plus rapides que ne le permettent les expériences au sol. On s’attend donc à une meilleure décorrélation des paramètres SME de notre observable et à un gain de sensibilité probable de l’ordre d’un ordre de grandeur sur ces paramètres.

## 2.10 Résumé et conclusion

Ce chapitre présente un test d'invariance de Lorentz réalisé grâce à des données de fréquence provenant d'une fontaine double à atomes froids de  $^{133}\text{Cs}$  et  $^{87}\text{Rb}$ , F02, hébergée au SYRTE (voir Section 2.2.2).

Dans cette expérience, on recherche des variations temporelles de la fréquence de transition hyperfine entre niveaux  $|F = 3, m_F\rangle \rightarrow |F = 4, m_F\rangle$  de l'atome de  $^{133}\text{Cs}$ . Dans le cas où une violation d'invariance de Lorentz serait observée, on mesurerait une variation de la fréquence de transition en fonction des changements d'orientation et de vitesse du dispositif expérimental. Le mouvement de la fontaine étant lié à celui de la terre, les variations recherchées ont une périodicité liée à la période de rotation et de révolution de la Terre.

Les violations d'invariance de Lorentz sont quantifiées en terme de limites sur des coefficients d'une théorie effective, appelée Extension du Modèle Standard (SME), incluant des phénomènes physiques dépassant le cadre de la Relativité Générale et du Modèle Standard. Nous nous intéressons plus particulièrement à un coefficient, appelé  $\tilde{c}_{\mu\nu}$ , qui traduit une anisotropie de la relation de dispersion des particules étudiées, ici les protons et les neutrons.

Les données dont nous disposons ont déjà permis de rechercher des variations temporelles de la fréquence de transition hyperfine de l'atome de  $^{133}\text{Cs}$  lors d'une première analyse réalisée en 2006 [51], analyse qui a permis de fixer les meilleures contraintes de l'époque sur 8 coefficients SME du secteur des protons (voir section 2.4.1). Dans cette seconde analyse, nous introduisons un nouveau modèle SME pour la transition hyperfine du  $^{133}\text{Cs}$  (voir section 2.5), qui permet d'étendre la portée du test à 9 coefficients du secteur des protons, ainsi que du secteur des neutrons. Une autre amélioration porte sur la méthode de traitement des données présentée dans la section 2.6.

Cette analyse a permis d'améliorer jusqu'à 12 ordres de grandeur les limites actuelles sur plusieurs coefficients du secteur de la matière. Bien que le SME ne prédise pas à partir de quelles énergies-seuils on peut s'attendre à détecter des violations d'invariance de Lorentz - ces énergies étant propres à chaque théorie alternative et difficiles à estimer -, on considère généralement que cette échelle correspond au rapport de l'énergie électrofaible et de l'énergie de Planck  $\frac{E_{EF}}{E_P}$ . En terme de limites sur les coefficients SME du proton et du neutron, cela revient à des précisions de  $10^{-19}$  GeV environ. Notre analyse a permis d'atteindre et même de descendre en dessous du seuil fixé par cette énergie limite pour les six composantes les moins contraintes du coefficient  $\tilde{c}_{\mu\nu}$ . Elle a débouché sur une publication dans la revue Physical Review D [84] et une contribution invitée à la revue

IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control [89].

Plusieurs perspectives sont envisagées pour ce travail, notamment l'ajout d'un troisième jeu de données qui, pris à un moment opportun de l'année, devrait permettre de mieux décorrélérer nos coefficients SME et ainsi gagner une ordre de grandeur de précision sur nos limites actuelles. La mission ACES-PHARAO, dont le lancement est prévu dans le prochains mois, offre également une perspective d'amélioration de ces limites. En effet, compte tenu de la trajectoire de la station spatiale internationale sur laquelle doit être arrimé le module de la mission, la modulation de la fréquence de transition que nous recherchons sera beaucoup plus rapide que la modulation liée au mouvement du laboratoire situé au sol. Nous attendons donc une meilleure décorrélation des paramètres SME et, potentiellement, une amélioration de l'ordre d'un ordre de grandeur des contraintes obtenues dans le cadre de cette étude. Enfin, une poursuite de collaboration avec l'équipe théorie de l'IPN pourrait être envisagée afin d'estimer un nouveau paramètre lié aux propriétés du noyau qui, s'il s'avérait non nul, nous donnerait accès à un nouveau coefficient SME, peu contraint à ce jour.





## Analyse des données de la mission MICROSCOPE pour un test d'invariance locale de Lorentz

### Table des matières

<b>3.1 La mission MICROSCOPE et le Principe d'Équivalence</b>	<b>69</b>
3.1.1 But de la mission . . . . .	69
3.1.2 Description du satellite et de la charge utile . . . . .	71
3.1.3 Principe de la mesure . . . . .	72
3.1.4 Équation de mesure pour le test du Principe d'Équivalence	74
<b>3.2 Pourquoi tester l'invariance de Lorentz avec la mission MICROSCOPE ?</b>	<b>77</b>
<b>3.3 Données et sources de bruit</b>	<b>78</b>
<b>3.4 Modèle SME pour la mission MICROSCOPE</b>	<b>81</b>
3.4.1 Description des repères utilisés . . . . .	82
3.4.2 Lagrangien du modèle . . . . .	84
3.4.3 Accélération dans le GCRF . . . . .	86
3.4.4 Accélération dans le repère instrument . . . . .	86
3.4.5 Équation de mesure MICROSCOPE pour le test d'invariance de Lorentz . . . . .	88
<b>3.5 Description des données utilisées</b>	<b>90</b>
<b>3.6 Méthode et chaîne de traitement pour l'analyse statistique</b>	<b>93</b>
3.6.1 Prétraitements . . . . .	93
3.6.2 Estimation du bruit et simulation Monte-Carlo de jeux de bruits synthétiques . . . . .	95

3.6.3	Méthode d'analyse statistique . . . . .	98
3.6.4	Méthode d'estimations des effets systématiques . . . . .	102
3.6.5	Architecture du code d'analyse . . . . .	103
<b>3.7</b>	<b>Résultats de l'analyse des données de l'instrument EP, suivant l'axe sensible x</b>	<b>104</b>
3.7.1	Estimation des performances de la méthode d'analyse : résultats obtenus pour le test du Principe d'Équivalence pour la session 218 et comparaison avec l'analyse présentée dans [106]	105
3.7.2	Résultats du test d'invariance de Lorentz . . . . .	108
<b>3.8</b>	<b>Perspectives</b>	<b>116</b>
<b>3.9</b>	<b>Résumé et conclusion</b>	<b>119</b>

---

Ce chapitre présente un test d'invariance de Lorentz réalisé avec les données de la mission MICROSCOPE. Le travail présenté ici est avant tout prospectif, il vise à mettre en place une première chaîne de traitement qui servira de base à une analyse plus complète et dont l'optimisation dépasse le cadre de cette thèse. Une première analyse, basée sur cinq jeux de données, a cependant permis d'obtenir un résultat très encourageant : l'amélioration jusqu'à 4 ordres de grandeur des contraintes sur des coefficients SME du secteur de la matière, couplée à la gravité.

Ce travail a été réalisé en collaboration avec Gilles Métris de l'OCA, ainsi que Manuel Rodrigues et Joël Bergé de l'ONERA, qui nous ont fourni les informations et les conseils nécessaires à la compréhension et à l'utilisation des données MICROSCOPE. La partie modélisation a, quant à elle, fait l'objet d'une collaboration avec Jay Tasson et Geoffrey Mo du département de physique et d'astronomie du Carleton College (Minnesota, USA), qui ont déterminé analytiquement les fréquences des signaux de violation recherchés dans le cadre du test d'invariance de Lorentz. Cette collaboration implique également Quentin Bailey du département de physique et d'astronomie de l'université aéronautique Embry-Riddle (Arizona, USA), qui a estimé la sensibilité du test aux contributions des diverses particules élémentaires (proton, électron et neutron) intervenant au travers des combinaisons de coefficients SME que nous contraignons.

## 3.1 La mission MICROSCOPE et le Principe d'Équivalence

### 3.1.1 But de la mission

Le but de la mission MICROSCOPE est de réaliser un test du Principe d'Équivalence d'Einstein avec une sensibilité de  $10^{-15}$  au paramètre d'Eötvös, soit 100 fois mieux que les expériences actuellement réalisées sur Terre [101, 102, 103].

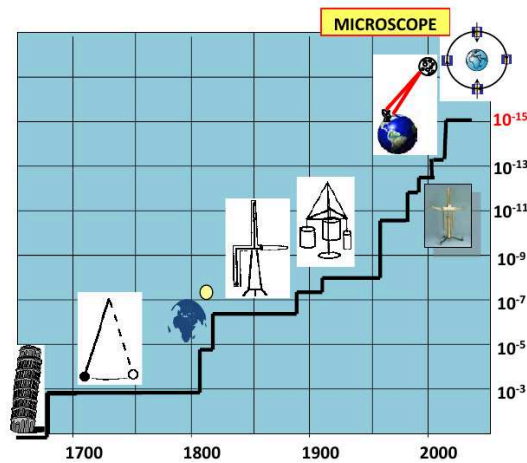


FIGURE 3.1 – Historique des tests du Principe d'Équivalence. Crédit G. Métris.

Le Principe d'Équivalence est un postulat de la relativité générale qui traduit l'universalité de l'action de la gravitation sur les corps, quelle que soit leur structure interne ou leur composition [7]. Il implique l'équivalence entre la masse inertielle  $m_{in}$ , qui représente la résistance d'un corps à toute modification de son mouvement, et la masse gravitationnelle  $m_g$ , qui représente quant à elle la sensibilité d'un corps à une force d'attraction gravitationnelle :

$$m_{in}\mathbf{a} = -m_g\nabla U \quad (3.1)$$

où  $U$  est le potentiel du champ gravitationnel.

Le paramètre d'Eötvös  $\eta$  quantifie la différence entre masse inertielle et masse gravitationnelle de deux corps en chute libre à proximité d'une même source gravitationnelle :

$$\eta = 2\frac{(a_1 - a_2)}{(a_1 + a_2)} \approx \frac{m_{g,1}}{m_{in,1}} - \frac{m_{g,2}}{m_{in,2}} \quad (3.2)$$

Dans le cas où cette différence serait perceptible, on mesurerait une accélération relative non nulle des deux objets. Dans l'équation 3.2, l'accélération de chaque corps est notée

$a_i$ .

MICROSCOPE est l'acronyme de MICROSatellite à traînée Compensée pour l'Observation du Principe d'Équivalence. Cette mission a été menée grâce à un partenariat européen entre les agences et laboratoires suivants : CNES, ESA, DLR (PTB-ZARM), ONERA, Géoazur (OCA-CNRS-UCA). Elle cherche à comparer l'accélération de deux masses d'épreuve, cylindriques et concentriques, de composition différente durant leur chute libre autour de la Terre, tel que montré à la figure 3.2. Les temps de chute libre extrêmement longs, accessibles grâce à la satellisation de l'expérience, devraient permettre d'obtenir une précision sur la mesure de  $\eta$  cent fois meilleure que ce qui est possible sur Terre, grâce aux balances de torsion [102] ou encore par télémétrie laser sur la Lune [104] (voir schéma 3.1).

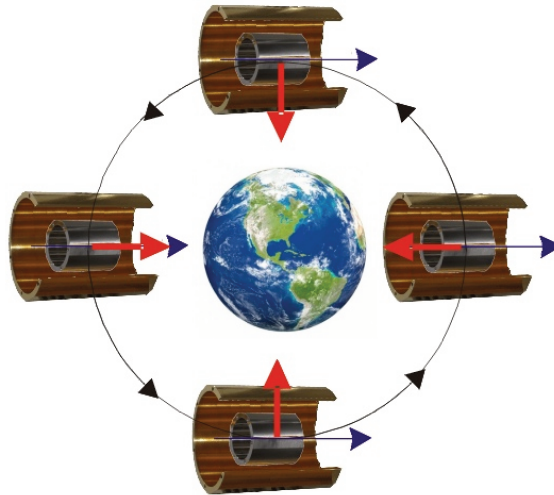


FIGURE 3.2 – Représentation schématique de l'orientation des masses d'épreuve dans le mode inertiel (pas de rotation du satellite sur lui-même). Les flèches rouge représentent l'accélération gravitationnelle et les flèches noires matérialisent l'orientation de l'axe sensible (X) de l'instrument. Shéma tiré de [105].

Dans le cas d'une violation du Principe d'Équivalence, l'accélération relative des masses sera modulée en fonction du champ gravitationnel ressenti par ces dernières tout au long de l'orbite du satellite. Dans le cas où l'orientation des axes de l'instrument est fixe (pas de rotation du satellite), cette variation a lieu à la fréquence orbitale :  $f_{ep} = f_{orb}$ . Afin d'augmenter la fréquence de modulation du signal de violation, le satellite peut également tourner sur lui-même de façon normale au plan orbital (autour de l'axe  $y$ ) et dans le sens opposé au mouvement orbital. La fréquence de violation du signal devient alors :  $f_{ep} = f_{orb} + f_{spin}$ . Le satellite a essentiellement fonctionné en mode

spinné, avec une fréquence de rotation optimisée à  $f_{spin} = \frac{35}{2} f_{orb} = 2.9432 \times 10^{-3}$  Hz, où  $f_{orb} = 1.6818 \times 10^{-4}$  Hz. Le fréquence du signal de violation du Principe d'Équivalence est donc  $f_{ep} = 3.1113 \times 10^{-3}$  Hz.

### 3.1.2 Description du satellite et de la charge utile

Le micro-satellite est une plateforme de la filière Myriade pesant environ 300 kg pour un volume de  $1.5 \text{ m}^3$ . Il est placé depuis le 25 avril 2016 en orbite circulaire héliosynchrone à 710 km d'altitude. La durée prévue pour la mission était de deux ans, le satellite est actuellement engagé dans un processus de désorbitation.

Contrairement aux autres projets ayant bénéficié des satellites de la filière Myriade, la nécessité d'isoler l'instrument des perturbations extérieures susceptibles de perturber son mouvement de chute libre ont nécessité certains ajustements. La charge utile est placée au cœur du satellite, qui forme un cocon protecteur permettant d'isoler les instruments des perturbations magnétiques et thermiques. Il est également doté d'un Système de Contrôle d'Attitude et d'Accélération (SCAA), grâce à des micro-propulseurs à gaz froid disposés sur le blindage du satellite. Le SCAA permet une compensation de la traînée<sup>1</sup> et un contrôle précis du mouvement angulaire du satellite. Ce système s'est avéré 100 fois plus performant que ce que ses spécifications laissaient envisager, avec un contrôle de l'accélération du satellite atteignant des performances de  $10^{-12} \text{ m.s}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$  à la fréquence test  $f_{EP}$  [106].

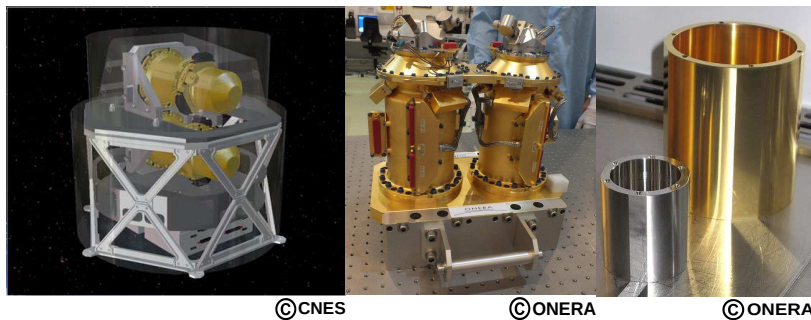


FIGURE 3.3 – Instrument T-SAGE. De gauche à droite, schéma de l'instrument sur sa plateforme, photographie de l'instrument et des masses d'épreuve.

L'instrument au cœur de l'expérience est un double accéléromètre différentiel électrostatique, appelé T-SAGE (voir figure 3.3), conçu et fabriqué par l'ONERA et dont le fonctionnement dérive de celui des accéléromètres embarqués pour les missions GRACE

1. compense en continu une grande partie des accélérations d'origine non gravitationnelle, *e.g.* frottements atmosphériques, pression de radiation solaire etc...

(NASA) et GOCE (ESA) [107]. Il est constitué de deux senseurs inertiels, chacun étant formé d'une paire de masses d'épreuve cylindriques intriquées, fabriquées par le PTB. L'un des senseurs contient deux masses d'épreuve de composition différente, l'une faite d'un alliage de platine et rhodium et l'autre d'un alliage de titane. Cet accéléromètre est dédié au test du Principe d'Équivalence, on l'appelle EP. Le second est, quant à lui, constitué de deux masses d'épreuve en platine et rhodium et sert de référence pour détecter d'éventuels biais de mesure.

### 3.1.3 Principe de la mesure

Chaque masse d'épreuve est placée au centre d'une cage en silice cylindrique pourvue de paires d'électrodes, dans laquelle elle est maintenue "immobile" grâce à des forces électrostatiques. L'asservissement des masses est réalisé par l'intermédiaire de tensions appliquées aux couples d'électrodes : la masse d'épreuve polarisée est maintenue en lévitation électrostatique, ce qui permet d'ajuster sa position et son orientation suivant ses six degrés de liberté (voir figure 3.4).

Les forces électrostatiques appliquées aux masses d'épreuve pour les maintenir sur la même orbite sont proportionnelles, au premier ordre, à la tension appliquée aux électrodes. La mesure relative de ces forces correspond à une mesure indirecte de l'accélération relative des masses : dans le cas où la mesure serait nulle, les deux masses tombant naturellement selon la même trajectoire, on ne constaterait pas de violation du Principe d'Équivalence. Dans le cas où on observerait au contraire une accélération relative non nulle des masses d'épreuve, et donc une différence entre les forces électrostatiques appliquées à chacune des masses de l'instrument EP, on pourrait conclure à une violation du Principe d'Équivalence.

L'expérience repose sur la mesure capacitive et le contrôle de la position des masses d'épreuve, les deux étant réalisées via les même électrodes. Dans ce dispositif, la masse d'épreuve est polarisée grâce à un courant continu délivrant une tension  $V_p$ . Chaque électrode  $i$  est, quant à elle, soumise à une tension  $V_i$ . L'ensemble constitué d'une masse d'épreuve et d'un couple d'électrodes peut être vu comme un double condensateur plan, dont les éléments sont notés  $C_1$  et  $C_2$ . La capacité de ces condensateurs dépend de plusieurs paramètres : leur surface  $S$  et la largeur au repos du trou entre la masse d'épreuve et la cage en silice, noté  $e$  (voir schéma 3.5).

Lorsque la masse d'épreuve est dans sa position d'équilibre, ces deux condensateurs ont la même capacité  $C_0$ . Inversement, tout mouvement de la masse d'épreuve induit une différence de capacité  $\Delta C = C_2 - C_1$ , qui dépend de :

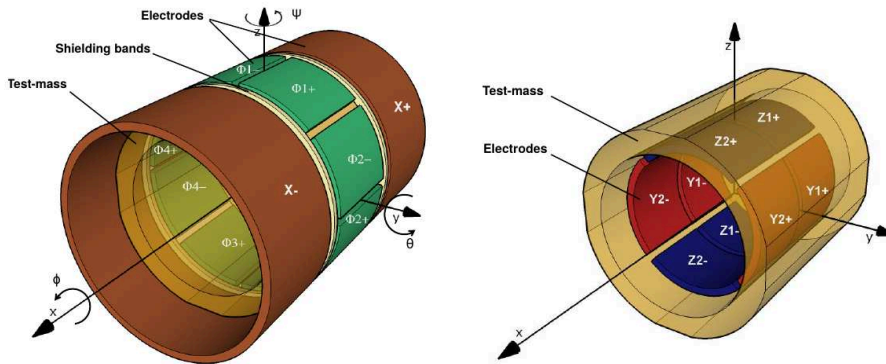


FIGURE 3.4 – Configuration des électrodes autour d'une masse d'épreuve. Schéma tiré de [108].

- (a) la taille du trou entre l'électrode et la masse d'épreuve  $e$
- (b) la surface d'électrode surplombant la masse d'épreuve  $S$

Cette double dépendance est utilisée pour mesurer la différence de capacité dans deux configurations, schématisées à la figure 3.5. En mesurant la variation du trou électrode-masse d'épreuve, on peut mesurer et contrôler le mouvement radial (suivant les axes Y et Z) de la masse. Si on mesure de variation de la surface d'électrode surplombant la masse, on contrôle son mouvement axial (X).

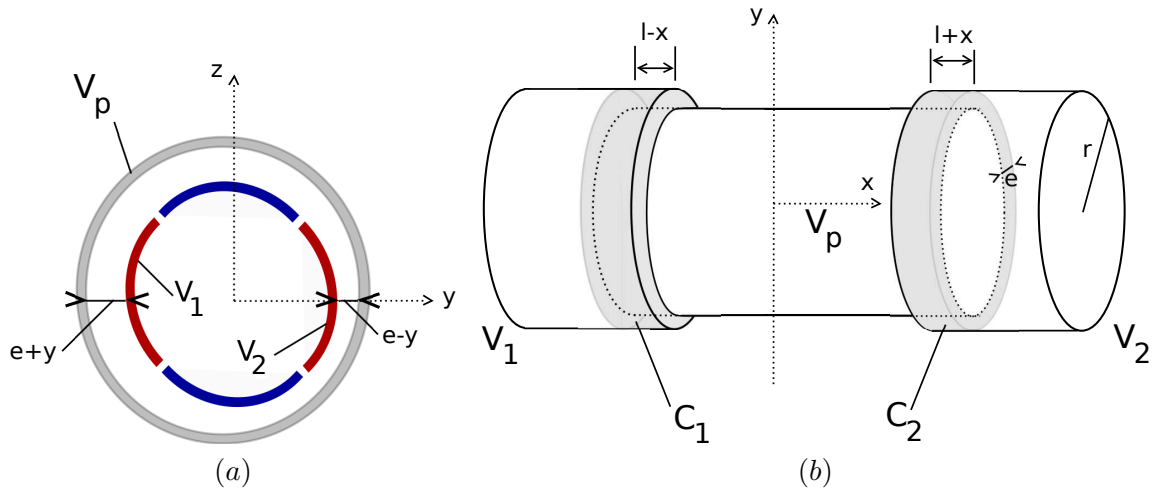


FIGURE 3.5 – Représentation schématique des deux méthodes de détection : (a) variation de la taille du trou entre électrode et masse d'épreuve et (b) variation de la surface de couverture des électrodes surplombant la masse.

Le schéma (a) de la figure 3.5, illustre la méthode reposant sur la détection de la



variation de la taille du trou. Dans ce cas, la différence de capacité est liée au déplacement de la masse suivant l'axe Y par la relation [109] :

$$\Delta C \cong \frac{2\epsilon_0 A y}{e^2} \quad (3.3)$$

où  $A$  est la surface des électrodes,  $\epsilon_0$  la permittivité du vide et  $y$  l'amplitude du déplacement de la masse suivant l'axe  $y$ . Le schéma (b) de la figure 3.5, illustre quant à lui la méthode reposant sur la détection de la surface d'électrode surplombant la masse d'épreuve. Dans notre exemple, la différence de capacité dépend de la surface de couverture  $S = 2\pi r \times (l \pm x)$  des électrodes et au déplacement  $x$  de la masse suivant l'axe X, par la relation [109] :

$$\Delta C = -\frac{4\epsilon_0 \pi r x}{e} \quad (3.4)$$

Le courant de détection est proportionnel à la différence de capacité, elle-même linéairement liée - au premier ordre - au déplacement des masses d'épreuve. Cela permet à la fois de mesurer précisément leur position et, par rétroaction, de contrôler leur position en appliquant aux électrodes d'une même paire des tensions d'intensité égale, mais de signes opposés. L'instrument joue par ailleurs un double rôle de senseur : l'accélération relative (demi-différence) des masses est utilisée pour le test du Principe d'Équivalence, tandis que l'accélération commune (demi-somme) fournit les données de position et d'orientation de l'instrument, nécessaires à un asservissement précis du SCAA.

### 3.1.4 Équation de mesure pour le test du Principe d'Équivalence

On souhaite décrire le mouvement du centre de masse  $O_i$  d'une masse d'épreuve  $i$ . Pour cela, on se place dans un référentiel inertiel de référence, appelé  $R_{in}$  correspondant au repère géocentrique J2000<sup>2</sup>. On applique ensuite le Principe Fondamental de la Dynamique à la masse d'épreuve  $i$  :

$$m_i \gamma(O_i)|_{R_{in}} = \mathbf{F}_{g,i} + \mathbf{F}_{el,i} + \mathbf{F}_{NG,i} \quad (3.5)$$

Dans cette équation,  $m_i$  représente la masse du corps  $i$  et  $\gamma(O_i)|_{R_{in}}$  l'accélération de son centre de masse dans  $R_{in}$ .

- La force  $\mathbf{F}_{g,i}$  est l'attraction gravitationnelle totale s'exerçant sur la masse d'épreuve

---

2. Ce repère est centré sur le centre de masse de la Terre. L'axe  $z$  et l'axe  $x$  définissent respectivement la direction normale au plan équatorial et la position du point vernal à l'époque J2000, i.e. le 1<sup>er</sup> janvier 2000 à 12h. Plus de détails sur ce repère seront donnés dans la section 3.4.1.

*i*.

$$\mathbf{F}_{g,i} = m_i \mathbf{g} \quad (3.6)$$

L'accélération gravitationnelle  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\oplus} + \mathbf{g}_{sat}$  est la somme de l'accélération exercée par la Terre et par le satellite sur la masse d'épreuve. La force exercée par le satellite sur la masse d'épreuve est maintenue, par construction, à un niveau négligeable [110].

En ne considérant que l'attraction exercée par la Terre, l'accélération gravitationnelle  $\mathbf{g}$  exercée par la Terre sur la masse d'épreuve s'écrit :

$$\mathbf{g} = -\nabla U + [T] \cdot \mathbf{G}_s \mathbf{O}_i \quad (3.7)$$

où  $U$  est le potentiel gravitationnel de la Terre,  $G_s$  le centre de masse du satellite et  $[T] = \nabla^2 U$  le gradient de gravité entre le centre de masse du satellite et le centre de la masse d'épreuve  $i$ . Le gradient de gravité est représenté par une matrice symétrique  $3 \times 3$ .

Dans le cas du test de violation du Principe d'Équivalence, la force gravitationnelle  $\mathbf{F}_{g,i}$  inclut un terme de violation dépendant du paramètre  $\delta_i = \frac{m_{in,i}}{m_{g,i}} - 1$  dont dérive le paramètre d'Eötvös. Ce dernier agit comme une modification isotrope de l'accélération gravitationnelle, dont l'amplitude dépend de la composition du corps  $i$  :

$$\frac{1}{m_i} \mathbf{F}_{g,i} \approx (\delta_i + 1) \cdot \mathbf{g} + [T] \cdot \mathbf{G}_s \mathbf{O}_i \quad (3.8)$$

Les termes résiduels dépendant de  $\delta_i [T]$  ont été négligés, car leur contribution - pour une distance d'environ 1m et  $\delta < 10^{-12}$  - est inférieure à  $10^{-18} \text{m.s}^{-2}$ , soit 1000 fois plus faibles que les variations recherchées [111].

- La force électrostatique appliquée à la masse d'épreuve  $i$  est notée  $\mathbf{F}_{el,i}$ . Elle est liée à l'accélération  $\gamma_{app,i}$  appliquée aux masses, par la relation :

$$\gamma_{app,i} = \frac{\mathbf{F}_{el,i}}{m_i} \quad (3.9)$$

- Les forces non-gravitationnelles  $\mathbf{F}_{NG,i}$  (traînée résiduelle, pression de radiation solaire etc...) sont à l'origine d'accélération parasites. Une partie de ces effets sont absorbés par un terme de biais  $b_i$ . Le restant constitue le bruit de mesure  $\mathbf{n}_i$ , dont les caractéristiques seront détaillées dans la section 3.3.

Jusqu'à maintenant nous avons négligé la rotation du satellite dans  $R_{in}$  et le fait que le centre de masse de la masse d'épreuve ne coïncide pas avec celui du satellite.

L'accélération de la masse d'épreuve dans  $R_{in}$  comporte donc des termes d'inertie dus à la rotation de la masse d'épreuve dans  $R_{sat}$ . Ici, on appelle  $R_{sat}$  le repère fixe associé à la plateforme du satellite, supportant la masse d'épreuve. Ce dernier est donc en rotation par rapport à  $R_{in}$ , avec une vitesse angulaire  $\mathbf{\Omega}$ . D'après les lois de composition d'accélération, l'accélération de la masse d'épreuve  $i$  exprimée dans le référentiel  $R_{in}$  s'écrit :

$$\gamma(O_i)|_{R_{in}} = \gamma(G_s)|_{R_{in}} + \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{G}_s \mathbf{O}_i) + \dot{\mathbf{\Omega}} \wedge \mathbf{G}_s \mathbf{O}_i + \mathbf{G}_s \ddot{\mathbf{O}}_i + 2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{G}_s \dot{\mathbf{O}}_i \quad (3.10)$$

où  $G_s$  est le centre de masse du satellite.

Les trois premiers termes dépendant de  $\mathbf{\Omega}$  sont des termes d'entraînement, le dernier est l'accélération de Coriolis. On peut réécrire l'équation 3.10 sous forme matricielle en introduisant les matrices de vitesse angulaire  $[\Omega]$  et d'accélération angulaire  $[\dot{\Omega}]$  :

$$[\Omega] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11) \quad [\dot{\Omega}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\Omega}_z & \dot{\Omega}_y \\ \dot{\Omega}_z & 0 & -\dot{\Omega}_x \\ -\dot{\Omega}_y & \dot{\Omega}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

L'équation 3.10 devient alors :

$$\gamma(O_i)|_{R_{in}} = \gamma(G_s)|_{R_{in}} + [In] \mathbf{G}_s \mathbf{O}_i + 2[\Omega] \mathbf{G}_s \dot{\mathbf{O}}_i + \mathbf{G}_s \ddot{\mathbf{O}}_i \quad (3.13)$$

Avec  $[In] = [\Omega^2] + [\dot{\Omega}]$  la matrice de gradient d'inertie.

En combinant les équations 3.5 et 3.13, on obtient la relation suivante :

$$\gamma(G_s)|_{R_{in}} + [In] \mathbf{G}_s \mathbf{O}_i + 2[\Omega] \mathbf{G}_s \dot{\mathbf{O}}_i + \mathbf{G}_s \ddot{\mathbf{O}}_i = (\delta_i + 1) \cdot \mathbf{g} + [T] \cdot \mathbf{G}_s \mathbf{O} + \gamma_{app,i} + \mathbf{b}_i + \mathbf{n}_i \quad (3.14)$$

En introduisant quelques notations supplémentaires, on peut exprimer l'accélération relative mesurée  $\gamma_{app}^{(d)} = \frac{\gamma_{app,1} - \gamma_{app,2}}{2}$ , comme :

$$2\gamma_{app}^{(d)} = \delta \mathbf{g} + ([T] - [In]) \mathbf{\Delta} - 2[\Omega] \dot{\mathbf{\Delta}} - \ddot{\mathbf{\Delta}} + \mathbf{b} + \mathbf{n} \quad (3.15)$$

On note :

- $\mathbf{\Delta} = \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2$  la position relative des masses (leur décentrage).
- $\delta = \delta_2 - \delta_1$  le paramètre de violation équivalent au paramètre d'Eötvös  $\eta_{2,1}$ .
- $\mathbf{b}$  un biais global
- $\mathbf{n}$  représente le bruit

Plus de détails sur la formulation de l'équation de mesure MICROSCOPE peuvent être trouvés dans les références [111] et [110].

### 3.2 Pourquoi tester l'invariance de Lorentz avec la mission MICROSCOPE ?

Ce test fait intervenir des coefficients du secteur SME de la matière couplée à la gravité, i.e. qui interviennent comme une modification de l'action des corps [47, 73], tant au niveau de la métrique que de la dynamique. Pour un corps quelconque, noté B, cette action prend alors la forme suivante :

$$S \equiv \int d\lambda \left( -m^B \sqrt{-\left(g_{\mu\nu} + 2(c^B)_{\mu\nu}\right) u^\mu u^\nu} - (a_{\text{eff}}^B)_\mu u^\mu \right) \quad (3.16)$$

où  $m^B$  est la masse du corps B,  $u^\mu$  son quadri-vecteur vitesse et où  $\lambda$  paramétrise la ligne d'Univers suivie par B. Les autres éléments intervenant dans l'action sont la métrique de l'espace-temps, notée  $g_{\mu\nu}$  et les coefficients SME  $c_{\mu\nu}$  et  $(a_{\text{eff}})_\mu$ .

Le coefficient  $(a_{\text{eff}})_\mu$  est une combinaison de deux coefficients du secteur de la gravitation  $a_\mu$  et  $e_\mu$  et s'écrivant [47] :  $(a_{\text{eff}})_\mu^w = a_\mu^w - m_w e_\mu^w$ , où  $w$  désigne le type de particule à l'origine de la violation (proton, électron ou neutron). Par la suite, le coefficient  $(a_{\text{eff}})_\mu$  sera affecté d'un pré facteur  $\alpha$  qui caractérise les couplages dans la théorie (non connue) décrivant le processus de brisure de symétrie spontanée [112].

Le coefficient  $c_{\mu\nu}$ , qui introduit une modification de la métrique, est extrêmement bien contraint par d'autres expériences (voir chapitre 2). Nous négligeons donc sa contribution au signal de violation pour nous concentrer sur les composantes du vecteur  $a_\mu$ . Ce dernier aura des conséquences sur la dynamique des corps en introduisant des modifications de leurs équations du mouvement, dépendantes de leur composition. La conséquence est non seulement une brisure de la symétrie de Lorentz, mais également une violation du Principe d'Équivalence d'Einstein. Cela implique que la détection de ces signaux peut être envisagée avec une expérience dédiée à un test de Principe d'Équivalence, comme c'est le cas pour la mission MICROSCOPE.

Bien que nous cherchions également une accélération relative non nulle des masses, il y a quelques nuances : la phénoménologie sous-jacente est différente pour ces deux tests. Le coefficient SME de violation d'invariance de Lorentz  $a_\mu$  introduit notamment une dépendance directionnelle de l'accélération relative des masses d'épreuve. Les signaux de violation d'invariance de Lorentz sont attendus à des fréquences et pour des confi-

gurations de l'instrument différentes de celle du test du principe d'Équivalence, comme illustré sur les schémas 3.6 et 3.7.

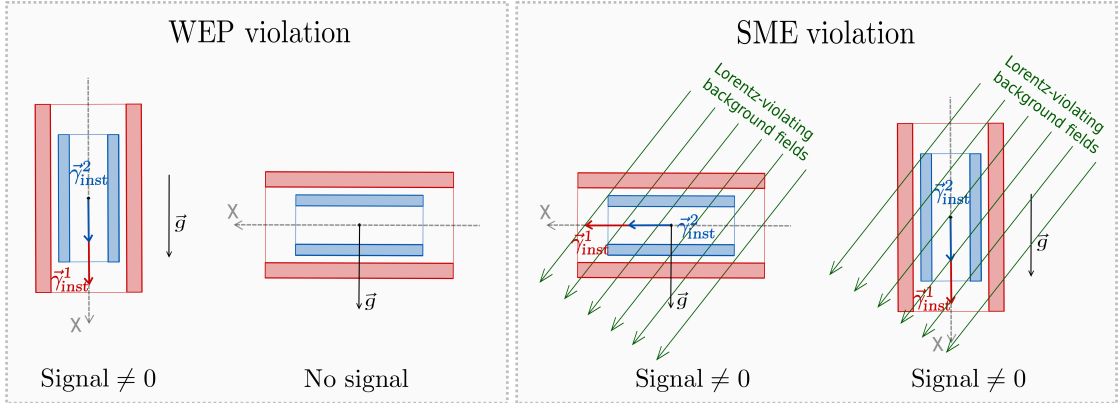


FIGURE 3.6 – Sensibilité à une violation de principe d'équivalence faible (WEP) et à une violation d'invariance de Lorentz due à un couplage avec des champs de fond SME, pour une mesure d'accélération suivant l'axe sensible X et pour différentes orientations de cet axe par rapport à l'accélération gravitationnelle, notée  $\vec{g}$ .

La figure 3.7 présente les fréquences de violation obtenues pour un modèle idéal, où le satellite suit une orbite théorique parfaitement héliosynchrone et circulaire, tout en tournant sur lui-même de manière parfaitement régulière. La réalité étant plus complexe, le spectre des fréquences de violation n'est pas harmonique. Afin de s'affranchir des contraintes imposées par la description analytique du mouvement du satellite, nous exprimons le modèle SME en fonction de paramètres de vols pour lesquels nous disposons de mesures.

### 3.3 Données et sources de bruit

Pour cette analyse, nous utilisons deux types de données : des données d'accélération relative des masses d'épreuve mesurée par l'instrument EP, et des données de température provenant d'une sonde thermique située au niveau de l'instrument. Les mesures de température nous permettent d'estimer l'amplitude des effets systématiques d'origine thermique potentiellement observables dans les données d'accélération.

Chacun de ces types de données possède un spectre de bruit caractéristique dont nous tenterons par la suite de reproduire un certain nombre de propriétés.

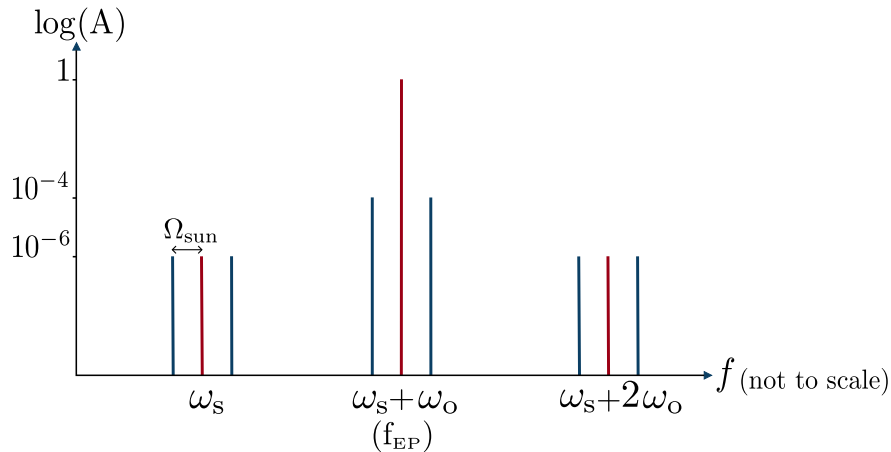


FIGURE 3.7 – Fréquences de violation obtenues pour un modèle idéal. Ce schéma est réalisé sur la base des calculs menés par J. Tasson et G. Mo. On note  $\omega_s$  la fréquence de rotation du satellite et  $\omega_o$  la fréquence associée à son mouvement orbital. Les fréquences  $\omega_s$ ,  $\omega_s + \omega_o$  et  $\omega_s + 2\omega_o$  valent respectivement : 2.94 mHz, 3.11 mHz et 3.28 mHz. Les bandes latérales dues aux modulations annuelles  $\Omega_{sun}$  sont situées à  $\pm 3.17 \times 10^{-8}$  Hz des harmoniques principales.

### Données d'accélération

Dans le cas des données d'accélération, on distingue deux tendances de bruits :

- un bruit basse fréquence dont la densité spectrale de puissance du bruit<sup>3</sup> (DSP) présente une pente en  $f^{-1}$ . Ce bruit est le bruit d'amortissement du fil d'or reliant la masse d'épreuve à la cage en silice. Ce fil exerce sur la masse d'épreuve une force dépendant de sa rigidité, or cette dernière varie avec la température ambiante. Les fluctuations thermiques font donc varier la force exercée par le fil sur la masse, engendrant un bruit de position dont la dérivée seconde est un bruit d'accélération en  $f^{-1}$ .
- On observe également un bruit haute fréquence, présentant une DSP de pente  $f^4$ . Ce bruit correspond à la dérivée seconde d'un bruit blanc de position correspondant au bruit du détecteur capacitif.

Nous modéliserons par la suite le bruit d'accélération relative par une somme des deux bruits mentionnés plus haut. Sa DSP unilatérale  $S_u$  sera donc une fonction de la forme :

$$S_u = \alpha_{-1}f^{-1} + \alpha_{+4}f^4 \quad (3.17)$$

---

3. décrit comment la puissance d'un signal est répartie sur l'ensemble de la gamme des fréquences.

En pratique, le modèle de bruit doit prendre en compte la fonction de transfert  $H(f)$  de la boucle de rétroaction contrôlant la position des masses, ainsi qu'un filtre anti-repliement [106]. La DSP réelle des données est donc plutôt :

$$S_u = \left( \alpha_{-1} f^{-1} + \alpha_{+4} f^4 \right) |H(f)|^2 \quad (3.18)$$

N'ayant pas d'information sur la fonction de transfert de la boucle de rétroaction, nous ne pouvons pas reproduire fidèlement son effet sur la DSP des données. Quant au filtre anti-repliement, il s'agit d'un filtre passe-bas de Butterworth<sup>4</sup> dont la fréquence de coupure vaut 1 Hz [110]. Nous avons représenté l'effet de ce filtre sur la DSP des données à la figure 3.8, en comparant la DSP filtrée à la DSP non filtrée décrite par l'équation 3.17. En comparant cette DSP filtrée à celle présentée dans [106], on constate que l'ajout du filtre de Butterworth est insuffisant pour reproduire l'allure du spectre haute fréquence des données d'accélération relative.

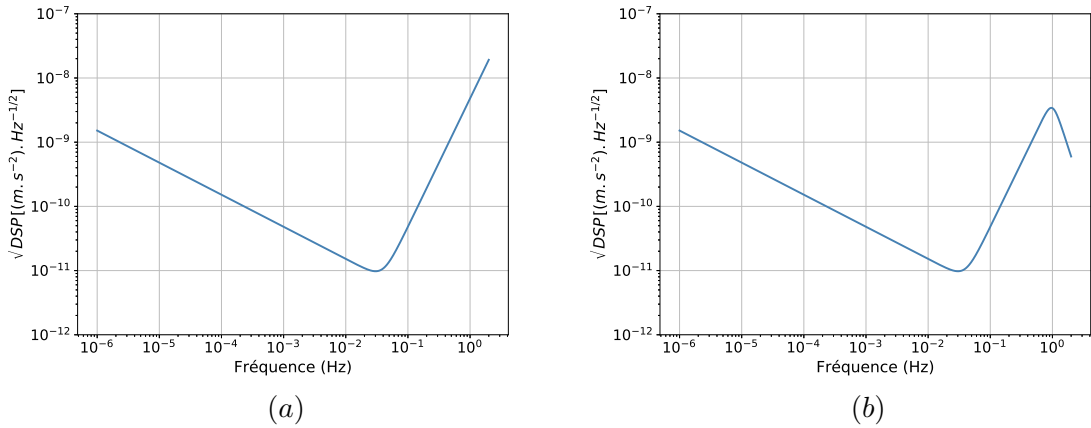


FIGURE 3.8 – Modèle de densité spectrale de bruit : (a) modèle sans filtre (b) modèle avec filtre. Le filtre utilisé est un filtre passe-bas de Butterworth, d'ordre 5, dont la fréquence de coupure est  $f_c = 1$  Hz.

Pour cette première analyse, nous n'avons pas reproduit cette partie du spectre. L'amplitude du bruit haute fréquence que nous simulons est donc plus élevée que dans les données, mais dans la mesure où cette zone est très éloignée (fréquence supérieure à  $10^{-1}$  Hz) des fréquences de violations prédites par notre modèle ( $\sim 3 \pm 0.3$  mHz), cette surestimation du bruit haute fréquence n'a, à priori, pas d'impact sur notre analyse.

4. Ce filtre linéaire possède un gain de la forme :  $G_n^2(\omega) = |H_n(j\omega)|^2 = G_0^2 / \sqrt{1 + \left(\frac{j\omega}{j\omega_c}\right)^{2n}}$  où  $n$  est l'ordre du filtre,  $\omega_c$  est la fréquence de coupure et  $G_0$  est le gain à la fréquence nulle.

L'inclusion d'un filtre passe-bas pourra néanmoins constituer un point d'amélioration possible pour les analyses qui seront réalisées dans le futur.

### Données de température

Le spectre en fréquence des données de température présente également deux tendances :

- un bruit basse fréquence de marche aléatoire dont la DSP est caractérisée par une pente en  $f^{-2}$ . Ce bruit peut être assimilé à un bruit blanc de dérive de température, et correspond à une variation thermique dont l'amplitude augmente dans le temps.
- un bruit blanc haute fréquence correspondant au bruit de mesure de la sonde thermique. Plusieurs de ces sondes sont réparties au niveau de l'instrument et du boîtier électronique, et permettent de mesurer les variations thermique au cours du temps.

Le modèle théorique de la DSP (voir figure 3.9) associée à la somme de ces deux bruits est de la forme :

$$S_u = \alpha_{-2}f^{-2} + \alpha_0f^0 \quad (3.19)$$

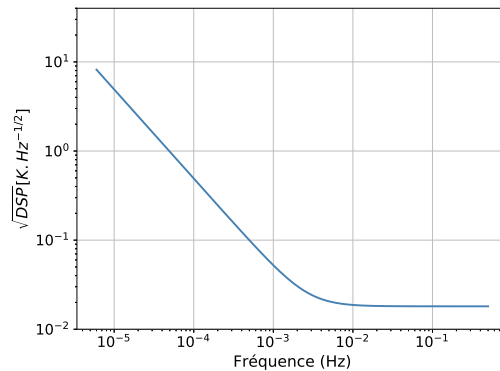


FIGURE 3.9 – DSP théorique du bruit de température.

## 3.4 Modèle SME pour la mission MICROSCOPE

Cette section présente le développement du modèle SME utilisé pour ce test d'invariance de Lorentz. La dernière partie de cette section (la partie 3.4.5) fait le lien entre



l'accélération relative due à une violation d'invariance de Lorentz et l'équation de mesure MICROSCOPE décrite à la section 3.1.4.

Le modèle SME développé dans le cadre de cette thèse dérive d'un modèle présenté dans [47], qui décrit de manière purement analytique la violation d'invariance de Lorentz pouvant être recherchée dans le cas d'une expérience satellisée. Nous présentons ici un modèle semi-analytique qui utilise les paramètres de vol du satellite et permet une représentation plus directe et plus fine du problème.

### 3.4.1 Description des repères utilisés

Les variables intervenant dans le modèle peuvent être liées à quatre repères :

- le repère instrument idéal ISO [113], un repère idéal lié aux axes et au centre de masse de l'instrument EP (voir figure 3.10).
- le repère satellite [113], un repère lié au centre de masse du satellite dont les axes sont définis sur la figure 3.10.
- le GCRF<sup>5</sup> [114] à l'époque J2000. Ce repère est centré sur le centre de masse de la Terre. L'axe z et l'axe x définissent respectivement la direction normale au plan équatorial et la position du point vernal à l'époque J2000, i.e. le 1<sup>er</sup> janvier 2000 à 12h00. Le schéma détaillé du GCRF est présenté sur la figure 3.11.
- l'ICRF<sup>6</sup> à l'époque J2000 [114, 50]. Ce repère est centré sur le barycentre du système solaire<sup>7</sup> et ses axes coïncident avec ceux du GCRF, qui sont aussi ceux du RHNT<sup>8</sup> (voir figure 3.11). Pour la suite, nous considérerons qu'il est équivalent au RHNT, bien que celui-ci soit centré sur le centre de masse du Soleil et non celui du Système Solaire.

Ces repères sont liés par trois transformations, de la forme :  $x^A = P_{A \rightarrow B} x^B$

#### Passage du repère instrument ISO vers repère satellite

$$P_{ISO \rightarrow SAT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

---

5. Geocentric Celestial Reference Frame

6. International Celestial Reference frame

7. Situé à proximité de la surface du Soleil

8. Référentiel Héliocentrique Non-Tournant. Pour plus de détails, voir partie 1.3.5.

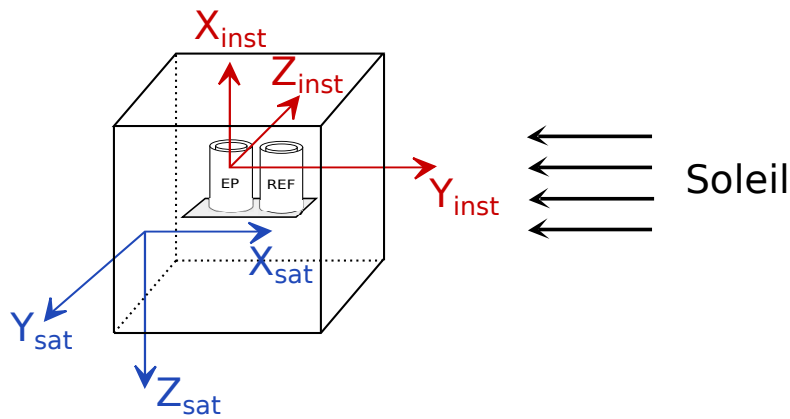


FIGURE 3.10 – Orientation des repères liés à l'instrument EP et au satellite. Schéma inspiré de [115]. Le repère lié à l'instrument EP est représenté en rouge, tandis que celui lié au satellite est en noir.

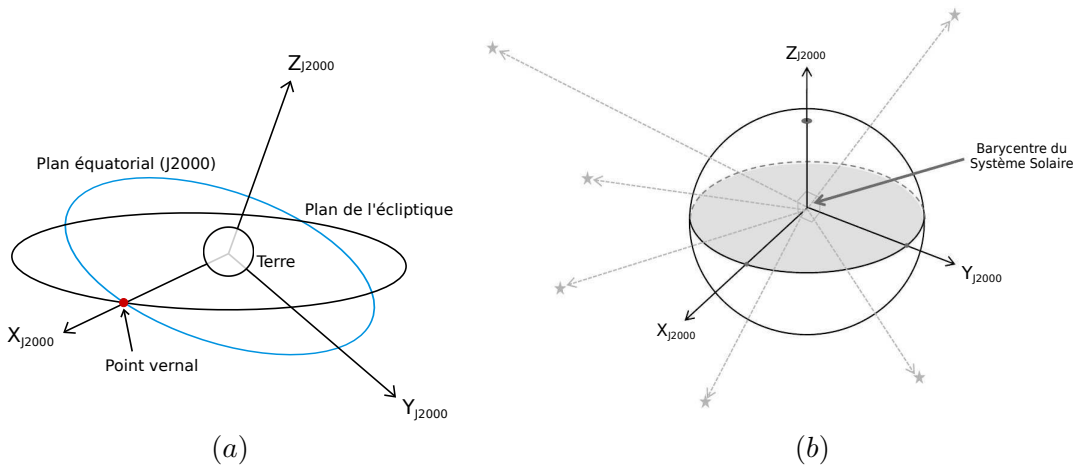


FIGURE 3.11 – Orientation des axes du GCRF (a) et de l'ICRF (b).

### Passage du repère satellite vers le GCRF

Cette matrice fait intervenir un quaternion de rotation qui décrit l'attitude du satellite dans le GCRF à un instant donné. Un quaternion est composé de quatre variables  $(q_0, q_1, q_2, q_3)$ , qui permettent de décrire les rotations autour de chaque axe du GCRF. Ces quaternions sont des nombres complexes de la forme :  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ , où  $i$ ,  $j$  et  $k$  sont des nombres imaginaires. Ils ont également la particularité d'être normalisés :  $\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1$ .

Les quaternions constituent une représentation complexe des rotations, permettant un parcours complet de l'hypersphère des rotations, sans point singulier ni perte de

degré de liberté. Ils sont utilisés dans divers domaines, et notamment pour la navigation spatiale.

$$P_{SAT \rightarrow GCRF} = \begin{pmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Pour notre analyse, nous disposons - pour chaque session - d'un fichier contenant des valeurs de quaternion de rotation en fonction du temps.

### Passage du GCRF vers le RHNT

La transformation entre le repère lié à la Terre et le RHNT fait intervenir une transformation de Lorentz d'ordre 1 en vitesse, sans rotation dans la mesure où les axes des repères sont identiques. On note  $\beta_j$  les composantes du vecteur  $\beta = \frac{\mathbf{v}}{c}$ , où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de la Terre par rapport au Soleil et  $c$  la vitesse de la lumière.

$$P_{GCRF \rightarrow RHNT} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_X & \beta_Y & \beta_Z \\ \beta_X & 1 & 0 & 0 \\ \beta_Y & 0 & 1 & 0 \\ \beta_Z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.4.2 Lagrangien du modèle

Notation	Paramètre
$m^S$	Masse du corps source
$m^B$	Masse de la masse d'épreuve
$x_{\tilde{\mu}} = (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$	Coordonnées dans le référentiel céleste géocentrique (GCRF)
$x_{\hat{\mu}} = (\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$	Coordonnées dans le référentiel instrument
$x_{\Xi} = (T, X, Y, Z)$	Coordonnées dans le référentiel héliocentrique (RHNT)
$x_j^{\text{orb}} = (\tilde{x}^{\text{orb}}, \tilde{y}^{\text{orb}}, \tilde{z}^{\text{orb}})$	Position du satellite dans le GCRF
$r = \sqrt{x_j^{\text{orb}} x_j^{\text{orb}}}$	Distance du satellite au centre de la Terre
$\omega_k = (0, 0, \omega_z)$	Vecteur rotation de la Terre
$G$	Constante gravitationnelle
$R_{\oplus}$	Rayon terrestre
$c$	Vitesse de la lumière

TABLEAU 3.1 – Notations

Le lagrangien de départ (Eq. 3.23) provient de [47]. Il décrit une violation d'invariance

de Lorentz générée par le coefficient  $\alpha \left( a_{\text{eff}}^B \right)_\nu$ <sup>9</sup>, exprimée dans le GCRF, dans le cadre d'une approximation PNO(2). Les notations utilisées par la suite sont précisées dans la table 3.1.

Ici, on considère que la masse source - la Terre - est une sphère homogène dont le moment d'inertie est  $I_S = \frac{2}{5} m^S R_\oplus^2$ , d'après [47], le lagrangien est donc :

$$L = \frac{1}{2} m^B \dot{x}_{\tilde{k}} \dot{x}_{\tilde{k}} + \frac{Gm^S}{r} (m^B + 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^B)_{\tilde{\mathbf{t}}}) + 2R_\oplus^2 \frac{Gm^S}{5cr^3} \cdot \epsilon_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{l}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^B)_{\tilde{\mathbf{j}}} \omega_{\tilde{k}} x_{\tilde{l}} \quad (3.23)$$

Le coefficient SME  $\alpha \left( a_{\text{eff}}^B \right)_\nu$  ne contribue pas à la partie cinétique du lagrangien. Il apparaît comme une modification - isotrope et dépendante de la composition de la masse d'épreuve B - du potentiel gravitationnel de la Terre. Dans cette expression, la composante  $\alpha \left( a_{\text{eff}}^B \right)_T$  est donc équivalente au paramètre d'Eötvös.

Les composantes spatiales du coefficient  $\alpha \left( a_{\text{eff}}^B \right)_\nu$  interviennent quant à elles dans un terme analogue à une contribution gravito-magnétique. L'effet gravito-magnétique (ou effet Lense-Thirring) décrit la perturbation du mouvement d'un corps à proximité d'un objet massif en rotation. Ce mouvement de rotation engendre un effet d'entraînement de l'espace-temps, qui tend à faire précéder les corps suivant le même sens que celui de la rotation de la Terre. Le terme apparaissant dans le lagrangien décrit donc un effet d'entraînement exercé par la Terre en rotation sur le corps B, mais dont l'intensité dépend de l'orientation dans l'espace de ce dernier. L'amplitude de ce terme est évidemment très faible en comparaison du terme dépendant du géopotential, leur rapport est de l'ordre de  $10^{-6}$ .

Ce lagrangien ne prend en compte que la première harmonique du potentiel gravitationnel Newtonien de la masse source. Cependant, dans le cas de MICROSCOPE, les harmoniques supérieures du potentiel de la Terre ne peuvent pas être négligées, nous remplaçons donc  $\frac{Gm^S}{r}$  par l'expression générique du potentiel gravitationnel  $-U(r)$  dans le second terme de l'équation Eq. 3.23. Cette reformulation aboutit au lagrangien ci-dessous :

$$L = \frac{1}{2} m^B \dot{x}_{\tilde{k}} \dot{x}_{\tilde{k}} - U(x_{\tilde{k}}) (m^B + 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^B)_{\tilde{\mathbf{t}}}) + 2R_\oplus^2 \frac{Gm^S}{5cr^3} \cdot \epsilon_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{l}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^B)_{\tilde{\mathbf{j}}} \omega_{\tilde{k}} x_{\tilde{l}} \quad (3.24)$$

---

9. Comme expliqué dans la section 3.2, le coefficient SME  $\left( a_{\text{eff}}^B \right)_\nu$  apparaît toujours avec un facteur multiplicatif  $\alpha$ . Ce dernier est un paramètre dépendant de la théorie considérée pour expliquer la brisure de symétrie à l'origine de la violation d'invariance de Lorentz [47].

### 3.4.3 Accélération dans le GCRF

À partir des équations d'Euler-Lagrange, on obtient les équations du mouvement de la masse d'épreuve dans le GCRF :

$$m^{\text{B}} \ddot{x}_{\tilde{i}} = g_{\tilde{i}} (m^{\text{B}} + 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{\text{B}})_{\tilde{\mathbf{t}}}) - \frac{6Gm^{\text{S}} R_{\oplus}^2 x_{\tilde{i}}^{\text{orb}}}{5cr^5} \cdot \epsilon_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{l}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{\text{B}})_{\tilde{\mathbf{j}}} \omega_k x_{\tilde{l}}^{\text{orb}} + \frac{2Gm^{\text{S}} R_{\oplus}^2}{5cr^3} \cdot \epsilon_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{i}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{\text{B}})_{\tilde{\mathbf{j}}} \omega_{\tilde{k}} \quad (3.25)$$

On introduit ici l'accélération gravitationnelle  $g_{\tilde{i}}$  :

$$-\frac{\partial U(x_{\tilde{i}})}{\partial x_{\tilde{i}}} = g_{\tilde{i}} \quad (3.26)$$

Le second terme de l'équation 3.25 a été obtenu en faisant l'approximation suivante pour la position de la masse d'épreuve  $x_{\tilde{i}}$  dans le GCRF :

$$x_{\tilde{i}} = x_{\tilde{i}}^{\text{orb}} \left( 1 + \frac{R_{\tilde{i}\tilde{k}} x_{\tilde{k}}}{x_{\tilde{i}}^{\text{orb}}} \right) \approx x_{\tilde{i}}^{\text{orb}} \quad (3.27)$$

La matrice  $\mathbf{R}$  est la matrice de rotation entre le repère instrument et le GCRF, elle sera explicitée par la suite.

On s'intéresse à présent à l'accélération relative de deux masses d'épreuve  $\text{B}_1$  et  $\text{B}_2$  que l'on peut définir comme :

$$\ddot{x}^{(\text{d})} = \frac{(\ddot{x}^{\text{B}_1} - \ddot{x}^{\text{B}_2})}{2} \quad (3.28)$$

ainsi qu'à la combinaison de coefficients SME associée à cette différence :

$$\left( a_{\text{eff}}^{(\text{d})} \right)_{\tilde{\mu}} = \frac{(a_{\text{eff}}^{\text{B}_1})_{\tilde{\mu}}}{m^{\text{B}_1}} - \frac{(a_{\text{eff}}^{\text{B}_2})_{\tilde{\mu}}}{m^{\text{B}_2}} \quad (3.29)$$

En se basant sur l'équation 3.25, on peut écrire l'accélération relative des masses dans le GCRF, comme :

$$2\ddot{x}_{\tilde{i}}^{(\text{d})} = 2g_{\tilde{i}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(\text{d})})_{\tilde{\mathbf{t}}} - \frac{6Gm^{\text{S}} R_{\oplus}^2 x_{\tilde{i}}^{\text{orb}}}{5cr^5} \cdot \epsilon_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{l}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(\text{d})})_{\tilde{\mathbf{j}}} \omega_k x_{\tilde{l}}^{\text{orb}} + \frac{2Gm^{\text{S}} R_{\oplus}^2}{5cr^3} \cdot \epsilon_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{i}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(\text{d})})_{\tilde{\mathbf{j}}} \omega_{\tilde{k}} \quad (3.30)$$

### 3.4.4 Accélération dans le repère instrument

Nous devons maintenant exprimer le modèle en terme de quantités mesurables dans le repère de l'instrument. Seuls les coefficients SME restent exprimés dans le GCRF en attendant leur transformation dans le RHNT.

La transformation du référentiel instrument vers le GCRF s'écrit :

$$x_{\hat{k}} = R_{\hat{k}\hat{i}} \left( x_{\hat{i}} - x_{\hat{i}}^{\text{orb}} \right) \quad (3.31)$$

Elle implique une matrice de rotation  $R$ , produit de la matrice de rotation liant les axes du repère satellite à ceux du GCRF et de la matrice de passage entre le repère satellite et le repère instrument. Cette matrice ne dépend que des composantes du quaternion de rotation instantanée, introduit dans la partie 3.4.1 :

$$R = \begin{pmatrix} -2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & -2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & 1 - 2(q_0^2 + q_3^2) \\ 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ -2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 1 - 2(q_0^2 + q_2^2) & -2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

En appliquant cette transformation aux quantités exprimées dans le GCRF - sauf coefficients SME - de l'équation 3.30, on obtient :

$$2R_{\hat{k}\hat{i}} \ddot{x}_{\hat{k}}^{(d)} = 2R_{\hat{k}\hat{i}} g_{\hat{i}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\hat{\mathbf{t}}} - \frac{6Gm^s R_{\oplus}^2 x_{\hat{i}}^{\text{orb}}}{5cr^5} \cdot \epsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\hat{\mathbf{j}}} \omega_{\hat{k}} x_{\hat{l}}^{\text{orb}} + \frac{2Gm^s R_{\oplus}^2}{5cr^3} \cdot \epsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\hat{\mathbf{j}}} \omega_{\hat{k}} \quad (3.33)$$

La multiplication de Eq.3.33 par la matrice transposée  $R_{\hat{i}\hat{j}}$  nous permet d'obtenir l'accélération relative des masses d'épreuve dans le référentiel instrument, avec les coefficients SME exprimés dans le GCRF.

$$2\ddot{x}_{\hat{j}}^{(d)} = 2g_{\hat{j}} \mathbf{2} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\hat{\mathbf{t}}} - \frac{6Gm^s R_{\oplus}^2 R_{\hat{j}\hat{i}} x_{\hat{i}}^{\text{orb}}}{5cr^5} \cdot \epsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\hat{\mathbf{j}}} \omega_{\hat{k}} x_{\hat{l}}^{\text{orb}} + \frac{2Gm^s R_{\oplus}^2}{5cr^3} \cdot R_{\hat{j}\hat{i}} \epsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\hat{\mathbf{j}}} \omega_{\hat{k}} \quad (3.34)$$

L'expression finale de l'accélération relative doit faire intervenir des coefficients SME exprimés dans le SCF. Il est donc nécessaire de leur appliquer la transformation suivante, comme décrit dans [50] :

$$a_{\hat{\mu}} = T_{\hat{\mu}}^{\Xi} a_{\Xi} \quad (3.35)$$

Ici, la matrice de transformation est une transformation de Lorentz sans rotation  $T_{\hat{\mu}}^{\Xi}$ , correspondant à la matrice de transformation définie à l'équation 3.22.

Les termes dépendant de  $\beta$  sont environ  $10^4$  fois plus petits que les autres termes. Nous négligeons donc leur contribution aux termes gravito-magnétiques, eux-mêmes environ  $10^6$  fois plus petits que les termes principaux dépendant de l'accélération gravitationnelle.

L'expression finale de l'accélération relative des masses d'épreuve, suivant chaque axe du repère instrument, est donc :

$$\begin{aligned}
2\ddot{\hat{x}}^{(d)} &= g_{\hat{x}} \left[ 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{T}} + \beta_X 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} + \beta_Y 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} + \beta_Z 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Z}} \right] \\
&\quad - \frac{3Gm^S R_{\oplus}^2}{5cr^5} \left( R_{\hat{x}\hat{x}} \tilde{x}^{\text{orb}} + R_{\hat{x}\hat{y}} \tilde{y}^{\text{orb}} + R_{\hat{x}\hat{z}} \tilde{z}^{\text{orb}} \right) \left( \tilde{x}^{\text{orb}} 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} - \tilde{y}^{\text{orb}} 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} \right) \omega_{\hat{z}} \\
&\quad + \frac{Gm^S R_{\oplus}^2}{5cr^3} \left( 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} R_{\hat{x}\hat{x}} - 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} R_{\hat{x}\hat{y}} \right) \omega_{\hat{z}}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
2\ddot{\hat{y}}^{(d)} &= g_{\hat{y}} \left[ 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{T}} + \beta_X 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} + \beta_Y 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} + \beta_Z 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Z}} \right] \\
&\quad - \frac{3Gm^S R_{\oplus}^2}{5cr^5} \left( R_{\hat{y}\hat{x}} \tilde{x}^{\text{orb}} + R_{\hat{y}\hat{y}} \tilde{y}^{\text{orb}} + R_{\hat{y}\hat{z}} \tilde{z}^{\text{orb}} \right) \left( \tilde{x}^{\text{orb}} 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} - \tilde{y}^{\text{orb}} 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} \right) \omega_{\hat{z}} \\
&\quad + \frac{Gm^S R_{\oplus}^2}{5cr^3} \left( 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} R_{\hat{y}\hat{x}} - 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} R_{\hat{y}\hat{y}} \right) \omega_{\hat{z}}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
2\ddot{\hat{z}}^{(d)} &= g_{\hat{z}} \left[ 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{T}} + \beta_X 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} + \beta_Y 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} + \beta_Z \alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Z}} \right] \\
&\quad - \frac{3Gm^S R_{\oplus}^2}{5cr^5} \left( R_{\hat{z}\hat{x}} \tilde{x}^{\text{orb}} + R_{\hat{z}\hat{y}} \tilde{y}^{\text{orb}} + R_{\hat{z}\hat{z}} \tilde{z}^{\text{orb}} \right) \left( \tilde{x}^{\text{orb}} 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} - \tilde{y}^{\text{orb}} 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} \right) \omega_{\hat{z}} \\
&\quad + \frac{Gm^S R_{\oplus}^2}{5cr^3} \left( 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} R_{\hat{z}\hat{x}} - 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} R_{\hat{z}\hat{y}} \right) \omega_{\hat{z}}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

### 3.4.5 Équation de mesure MICROSCOPE pour le test d'invariance de Lorentz

Dans cette partie, on combine les équations 3.15 et 3.36-3.38, afin de réécrire l'accélération relative - suivant l'axe sensible  $x$ , sur lequel on se concentre lors de cette analyse - en fonction des paramètres SME, des paramètres physiques (e.g. décentrages des masses), ainsi que des paramètres de vol.

En remplaçant, dans l'équation de mesure pour la mission MICROSCOPE (eq. 3.15), le terme de violation du Principe d'Équivalence par l'accélération d'origine SME (détaillée dans les équations 3.36 à 3.38), on obtient :

$$2\gamma_{app}^{(d)} = 2\gamma_{\text{SME}}^{(d)} + ([T] - [In]) \mathbf{\Delta} - 2[\Omega] \dot{\mathbf{\Delta}} - \ddot{\mathbf{\Delta}} \tag{3.39}$$

Le terme  $[T] - [In]$  peut se réécrire sous une forme plus compacte en introduisant les matrices  $S$  et  $U$ , représentant respectivement les parties symétrique et antisymétrique

de  $[T] - [In] = [S] + [U]$  :

$$[S] = [T] - [\Omega]^2 \quad (3.40)$$

$$[U] = -[\dot{\Omega}] \quad (3.41)$$

Les effets des dérivées et des gradients de dérivées étant négligeables, l'équation de mesure MICROSCOPE pour le test d'invariance de Lorentz est :

$$\begin{aligned} 2\gamma_{app,\hat{x}}^{(d)} &= S_{\hat{x}\hat{x}}\Delta_{\hat{x}} + (S_{\hat{x}\hat{y}} + \dot{\Omega}_z)\Delta_{\hat{y}} + (S_{\hat{x}\hat{z}} - \dot{\Omega}_y)\Delta_{\hat{z}} \\ &+ g_{\hat{x}} \left[ 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{T}} + \beta_{\mathbf{X}} 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} + \beta_{\mathbf{Y}} 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} + \beta_{\mathbf{Z}} 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Z}} \right] \\ &- \frac{3Gm^{\text{S}}R_{\oplus}^2}{5cr^5} \left( R_{\hat{x}\hat{x}}\tilde{x}^{\text{orb}} + R_{\hat{x}\hat{y}}\tilde{y}^{\text{orb}} + R_{\hat{x}\hat{z}}\tilde{z}^{\text{orb}} \right) \left( \tilde{x}^{\text{orb}} 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} - \tilde{y}^{\text{orb}} 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} \right) \omega_{\hat{z}} \\ &+ \frac{Gm^{\text{S}}R_{\oplus}^2}{5cr^3} \left( 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{Y}} R_{\hat{x}\hat{x}} - 2\alpha(\mathbf{a}_{\text{eff}}^{(d)})_{\mathbf{X}} R_{\hat{x}\hat{y}} \right) \omega_{\hat{z}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Dans cette expression, les données issues de la mission correspondent aux symboles bleus, les paramètres en rouge sont obtenus grâce aux éphémérides INPOP et les paramètres en gras sont les paramètres ajustés lors de l'analyse. Le décentrage en y apparaît en gris, car il a été estimé lors d'une session de calibration dont les résultats, publiés dans [106], sont utilisés pour l'ensemble de l'analyse.

Les décentrages sont traités comme des paramètres du modèle à part entière, afin d'étudier les corrélations potentielles qui pourraient exister entre ces décentrages et nos paramètres SME. Le cas échéant, nous pourrions être amenés à contraindre une combinaison de décentrages et de coefficients SME.

Chacune des masses d'épreuve contribue à la combinaison  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu}$ , définie à l'équation 3.53, selon sa composition en terme de protons, d'électrons et de neutrons. Le coefficient  $\alpha(a_{\text{B}}^{(d)})_{\mu}$  associé à chaque masse d'épreuve  $B$  peut donc s'écrire sous la forme d'une combinaison de coefficients :

$$\alpha(a_{\text{eff}}^{(\text{B})})_{\mu} = A^{\text{B}} \cdot \alpha(a_{\text{eff}})_{\mu}^{\text{n}} + C^{\text{B}} \cdot \alpha(a_{\text{eff}})_{\mu}^{(\text{e} + \text{p})} \quad (3.43)$$

où  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(\text{e+p})})_{\mu} = \alpha(a_{\text{eff}})_{\mu}^{\text{e}} + \alpha(a_{\text{eff}})_{\mu}^{\text{p}}$  est le coefficient traduisant la violation liée à la fois aux protons et aux électrons, ces derniers étant présents en nombres égal. Dans cette expression,  $A^{\text{B}}$  et  $C^{\text{B}}$  sont en  $\text{GeV}^{-1}$ .

La combinaison de coefficients  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(\text{e+p})})_{\mu}$  et  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(\text{n})})_{\mu}$  associée au coefficient  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(\text{d})})_{\mu}$  a été déterminée par Q. Bailey, à partir des informations sur les alliages composant les



masses d'épreuve [116] :

- la masse externe (B2) est faite dans un alliage de titane (90%), d'aluminium (6%) et de vanadium (4%)
- la masse interne (B1) est quant à elle constitué d'un alliage de platine (90%) et de rhodium (10%)

En tenant compte de ces différents constituants et de leurs abondances respectives, le coefficient  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu}$  peut s'exprimer comme :

$$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu} = A \cdot \alpha(a_{\text{eff}})_{\mu}^n + C \cdot \alpha(a_{\text{eff}})_{\mu}^{(e+p)} \quad (3.44)$$

où  $A$  et  $C$  valent respectivement :

$$A = 0.048 \text{ GeV}^{-1} \quad (3.45)$$

$$C = -0.068 \text{ GeV}^{-1} \quad (3.46)$$

La méthode de calcul de ces coefficients est détaillée dans l'annexe ??.

### 3.5 Description des données utilisées

L'exploitation scientifique de la mission MICROSCOPE a débuté en décembre 2016 et a pris fin en février 2018. Il y a donc un peu plus d'une année de données, disponibles partiellement pour le moment. Ces données sont divisées en sessions de longueurs variables, généralement de l'ordre d'une centaine d'orbites. Certaines de ces sessions sont dédiées au test du principe d'Équivalence, d'autres sont focalisées sur la calibration des décentrages et de divers effets systématiques [106]. Nous n'avons pas exploité les données issues des sessions de calibrations, les paramètres nécessaires à notre analyse - décentrage suivant l'axe Y et facteur de sensibilité thermique - ont été tirés de [106].

Pour cette première analyse, nous avons utilisé cinq sessions scientifiques, réparties entre février et décembre 2017 (voir figure 3.13), correspondant à 480 orbites de 6000 secondes soit un peu plus de 30 jours de données cumulées (voir table 3.2). Ces cinq sessions ont été prises dans le mode spinné avec une fréquence de rotation propre du satellite  $f_{\text{spin}} = 2.9432 \times 10^{-3} \text{ Hz}$  (voir figure 3.12).

Nous avons exploité les données d'accélération relative mesurées par l'instrument EP, suivant l'axe sensible X. Nous avons également utilisé des données secondaires, qui sont listées dans la table 3.3, et notamment des données de température provenant d'une sonde thermique (la sonde T4) située à la jonction entre le cylindre contenant les masses

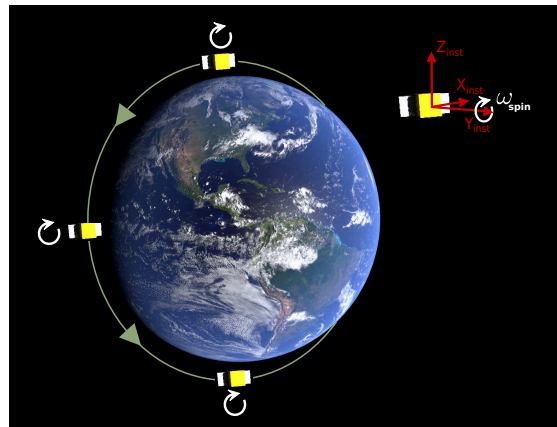


FIGURE 3.12 – Illustration du mouvement du satellite par rapport à la Terre. Le repère lié à l'instrument EP est indiqué en rouge et le mouvement de rotation du satellite sur lui-même est matérialisé par une flèche blanche.

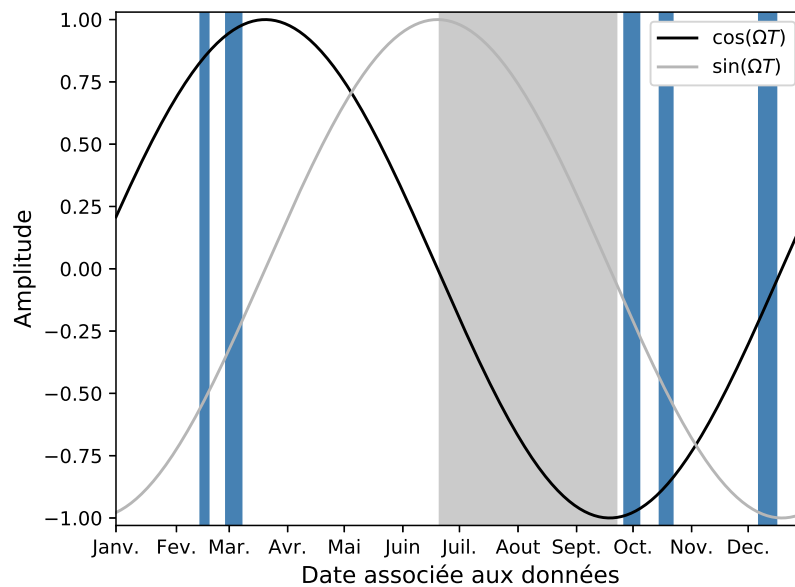


FIGURE 3.13 – Répartition temporelle des sessions analysées. Les sinusôides noire et grise indiquent les variations annuelles, associées à la pulsation  $\Omega$ . La variable temporelle  $T$  a pour origine l'équinoxe du 20 mars 2017.

d'épreuve et le boîtier électronique (voir figure 3.14). Les principaux effets systématiques étant d'origine thermique, ces données nous permettent d'estimer leur amplitude.

n° session	Durée en nombre d'orbites	Date de début et de fin	Pourcentage de données manquantes
210	50	2017/02/14 - 2017/02/18	$7.6 \times 10^{-4}$
218	119	2017/02/28 - 2017/03/08	$2.8 \times 10^{-4}$
326	101	2017/09/27 - 2017/10/04	$3.7 \times 10^{-4}$
358	91	2017/10/14 - 2017/10/21	$5.2 \times 10^{-4}$
404	119	2017/12/07 - 2017/12/15	$4.9 \times 10^{-4}$

TABLEAU 3.2 – Récapitulatif des sessions EP analysées, en terme de nombre d'orbites, de date de mesure et de pourcentage de trous.

Données interpolées	Échantillonnage
Accélération relative des masses d'épreuve	0.25 s
Orbitographie	1 min
Attitude	0.25 s
Accélération de gravité	0.25 s
Gradients de gravité	0.25 s
Vitesse angulaire	0.25 s
Accélération angulaire	0.25 s
Température - sonde n°4	1 s

TABLEAU 3.3 – Récapitulatif des fichiers de données utilisés pour l'analyse et de leur échantillonnage.

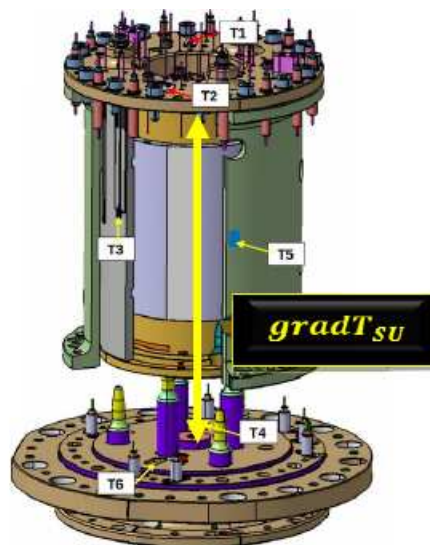


FIGURE 3.14 – Position des sondes thermiques pour l'instrument EP. Crédit : Manuel Rodrigues.

## 3.6 Méthode et chaîne de traitement pour l'analyse statistique

Cette partie présente les différentes étapes du prétraitement et de l'analyse des données. Les graphes présentés correspondent aux étapes d'analyse d'une même session (identifiée comme la session 404 de la mission) d'une durée de 120 orbites. Les détails concernant les différentes sessions analysées, leur durée et leur répartition dans l'année sont détaillés dans la partie 3.5. Le schéma global d'analyse est donné dans la partie 3.6.5, à la figure 3.24.

### 3.6.1 Prétraitements

#### Interpolation

Nous disposons de plusieurs types de données, les principales étant les mesures d'accélération relative des masses d'épreuve. Ces dernières ont un échantillonnage de 0.25 seconde. Les autres données sont : l'orbitographie, l'attitude, la vitesse et l'accélération angulaire du satellite et enfin l'accélération et les gradients de gravité. Hormis l'orbitographie, qui comporte un point par minute, toutes ces données ont un échantillonnage de 0.25 seconde.

Afin de s'assurer de la concordance des points, nous interpolons l'ensemble des données secondaires à partir des dates des données d'accélération relative des masses. Cette interpolation<sup>10</sup> est basée sur un ajustement polynomial dont le degré est adapté en fonction de l'allure de chaque type de données : plus les données sont irrégulières, plus le degré du polynôme utilisé pour l'interpolation doit être grand. La table 3.4 précise le degré du polynôme pour chaque type de données interpolées.

Données interpolées	Ordre du polynôme	Échantillonnage
Orbitographie	3	1 min
Attitude	3	0.25 s
Accélération de gravité	5	0.25 s
Gradients de gravité	5	0.25 s
Vitesse angulaire	5	0.25 s
Accélération angulaire	5	0.25 s

TABLEAU 3.4 – Récapitulatif des données interpolées. On précise l'ordre du polynôme utilisé et l'échantillonnage des données.

10. Interpolation réalisée à partir d'une routine fournie par Frédéric Meynadier, anciennement ingénieur d'étude dans l'équipe théorie du SYRTE.

Les données de température ne sont pas interpolées, faute de fichier contenant les dates correspondant à ces données. Nous avons donc supposé que le premier point des données de température coïncidait avec celui des données d'accélération relative, et nous avons conservé l'échantillonnage de 1s lors de l'analyse de ces données.

### Inclusion des trous

Les données MICROSCOPE présentent des trous pouvant être classés selon deux catégories :

- les phénomènes transitoires (fissuration du revêtement du satellite ou des réservoirs de gaz froid, impact de micro-météorite) occasionnant une saturation des instruments pendant une durée inférieure à 1s.
- les pertes de télémétrie qui entraînent une interruption du flux de données pendant une période de plusieurs secondes.

Les sessions utilisées pour cette analyse ne comportent que des trous d'une durée inférieure à 1 seconde et dont le nombre représente environ 0.0008% du nombre total de points par session. Leur impact en terme de repliement spectral est donc largement négligeable.

Dans les données brutes, ces trous sont masqués. Ce masque  $w_i(t)$  est défini comme :

$$w_i(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \text{ en cas de trou} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les données masquées sont dominées par le bruit blanc lié aux masquage de ces n trous, distribués de manière aléatoire - leur utilisation en l'état n'a pas de sens physique. Dans la mesure où nous réalisons une analyse dans le domaine temporel, nous nous contentons d'ignorer les trous, qui, compte-tenu de leur faible nombre, ont peu ou pas d'impact sur notre analyse. La DSP des données brutes avec masque et sans masque (avec trous) sont présentées à la figure 3.15. On observe bien la différence entre la DSP des données masquées (en gris), dominées par le masquage des trous, et la DSP des données avec trous (en bleu) dont le bruit est nettement plus bas aux fréquences qui nous intéressent.

### Retrait des dérives long terme

On observe dans les données d'accélération relative une forte dérive long terme, qui se traduit par dérive linéaire basse fréquence de la DSP des données, comme illustré à la figure 3.15. Ces dérives long terme ont une origine déterministe, probablement

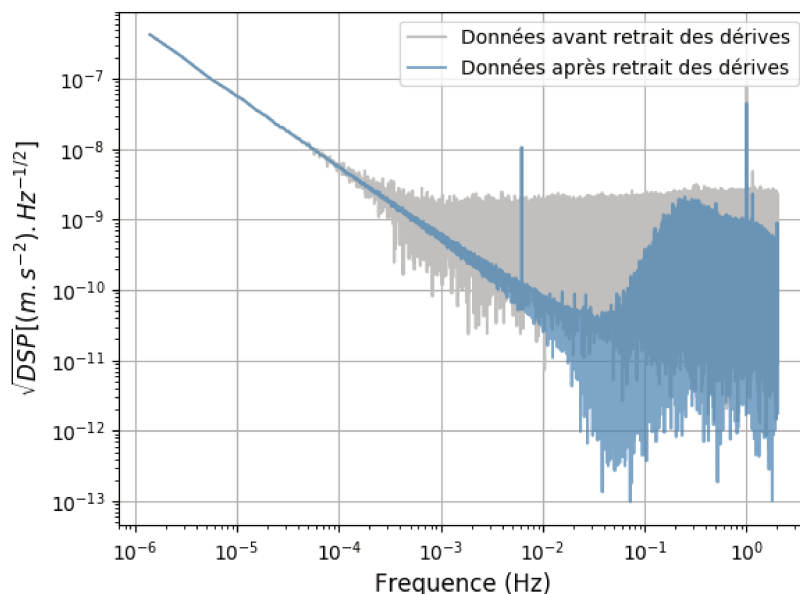


FIGURE 3.15 – Impact des trous masqués sur le comportement spectral des données d'accélération relative pour la session 404. Les DSP des données masquées et des données non masquées sont respectivement en gris et bleu.

thermique. Leur contribution aux données est donc estimée en ajustant - par la méthode des moindres carrés - un polynôme de degré  $n=5$ , puis soustraite des données :

$$\gamma_{\text{dérive}}^{(d)} = \sum_{i=0}^n d_i t^i \quad (3.47)$$

où les  $d_i$  sont les amplitudes de dérives à ajuster et  $t$  le temps des observations. Les détails de l'ajustement des dérives long-terme sont présentés dans l'annexe D.1.

On constate que les données nettoyées comportent une dérive résiduelle à basse fréquence, indiquant la rémanence de dérives d'accélération très lentes. L'ajustement polynomial de ces dérives long terme n'est donc pas optimal. De telles observations s'appliquent également aux données de la session 218, présentées dans [106].

### 3.6.2 Estimation du bruit et simulation Monte-Carlo de jeux de bruits synthétiques

Le modèle de bruit est déterminé à partir de la DSP du bruit. Ce dernier doit être séparé au mieux des effets déterministes comme les décentrages, qui génèrent des pics

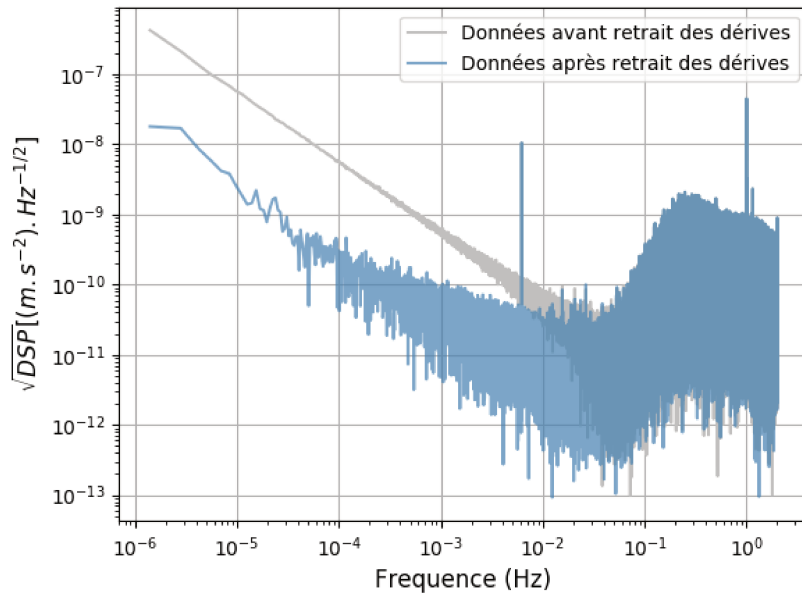


FIGURE 3.16 – DSP des données d’accélération relative pour la session 404, avant retrait des dérives (en gris) et après retrait des dérives (en bleu).

pouvant potentiellement biaiser l’ajustement du modèle.

### Retrait des contributions des décentrages et de l’offset

Dans un premier temps, on réalise un ajustement moindres carrés d’un modèle permettant d’évaluer les valeurs des décentrages en  $x$  et  $z$ , auxquels s’ajoute un biais. Ce biais a plusieurs origines, comme une composante constante, présente dans les gradients de gravité, un biais thermique etc...

On retire ensuite des observations les contributions de ces paramètres déterministes, ainsi que la contribution d’un décentrage en  $y$ , estimé à  $-8.0 \times 10^{-6}$  m dans [106]. La DSP du bruit ainsi obtenue est présentée à la figure 3.17. Les détails de l’ajustement des décentrages et du biais sont présentés dans l’annexe D.2, dans la table D.2 présentant - pour chaque session - l’ajustement des paramètres du modèle pour le test du principe d’équivalence. On y présente également la matrice de corrélation associée à cet ajustement.

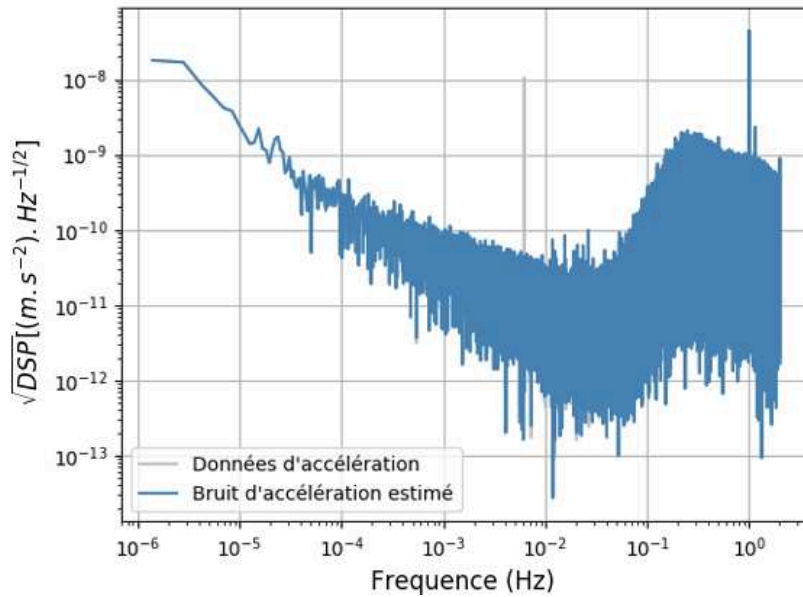


FIGURE 3.17 – Données d'accélération relative pour la session 404, avant retrait des contributions des paramètres déterministes (en gris) et après leur retrait (en bleu). La DSP tracée en bleu correspond à la DSP du bruit.

### Ajustement des amplitudes du bruit

On réalise ensuite un ajustement moindres carrés du modèle de bruit à deux pentes (voir partie 3.3) sur la DSP du bruit. Cette méthode permet d'estimer de manière simple les caractéristiques du bruit statistique des données et ainsi d'obtenir des paramètres d'entrée pour le simulateur de bruit. Cette méthode d'estimation du modèle de bruit pourrait évidemment être optimisée, par exemple en prenant un modèle de bruit à pentes, de manière à obtenir un ajustement plus fin des amplitudes de bruits. L'ajustement du modèle de bruit, pour la session 404, est présenté figure 3.18. Les détails de l'ajustement du modèle de bruit sont présentés dans l'annexe D.3.

### Simulateur de bruit

On utilise des fonctions de l'outil Python3 *Allan tools* pour simuler  $N$  échantillons de bruits, où  $N$  est typiquement de l'ordre de 10 000. Cette simulation Monte-Carlo est parallélisée via des méthodes de multi-processing en Python3.

Le bruit en  $f^4$  est obtenu en différenciant à deux reprises un bruit blanc constitué de



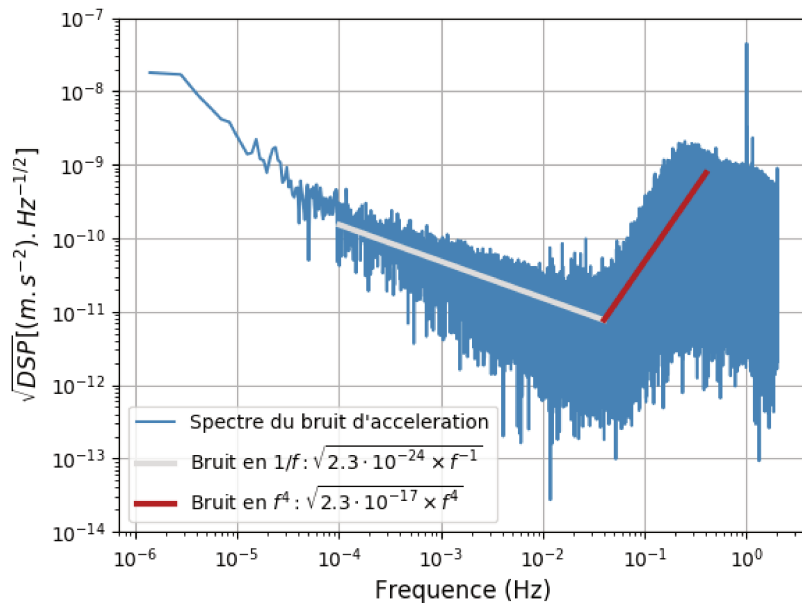


FIGURE 3.18 – Ajustement du modèle de bruit d’accélération à deux pentes sur le bruit d’accélération relative estimé pour la session 404.

nombre pseudo-aléatoires suivant une distribution normale. Le bruit en  $f^{-1}$  est difficile à reproduire, mais plusieurs méthodes sont possibles comme le filtrage d’un bruit blanc ou l’utilisation d’algorithmes du type Voss-McCartney. *Allan tools* se base sur cette seconde approche, qui consiste à combiner des bruits blancs d’amplitude variable pour différentes gammes de fréquences.

La figure 3.19 représente la DSP moyenne du bruit pour 100 échantillons simulés, ainsi que sa moyenne glissante. Nos simulations reproduisent bien la DSP du bruit réel sur la gamme de fréquence  $[10^{-4}, 10^{-1}]$  Hz, mais surestime le bruit haute fréquence (absence de filtre passe-bas) et sous-estime le bruit basse fréquence (résidus de dérives long-terme).

### 3.6.3 Méthode d’analyse statistique

Nous effectuons notre analyse dans le domaine temporel. La raison principale à cela est le fait que nous recherchons des variations annuelles de l’accélération relative des masses d’épreuve. Sur de telles échelles de temps, des interruptions du flux de données - de plusieurs semaines voir de plusieurs mois - sont inévitables. Une analyse combinée de ces jeux dans le domaine fréquentiel aurait été dominée par le bruit dû aux plages de

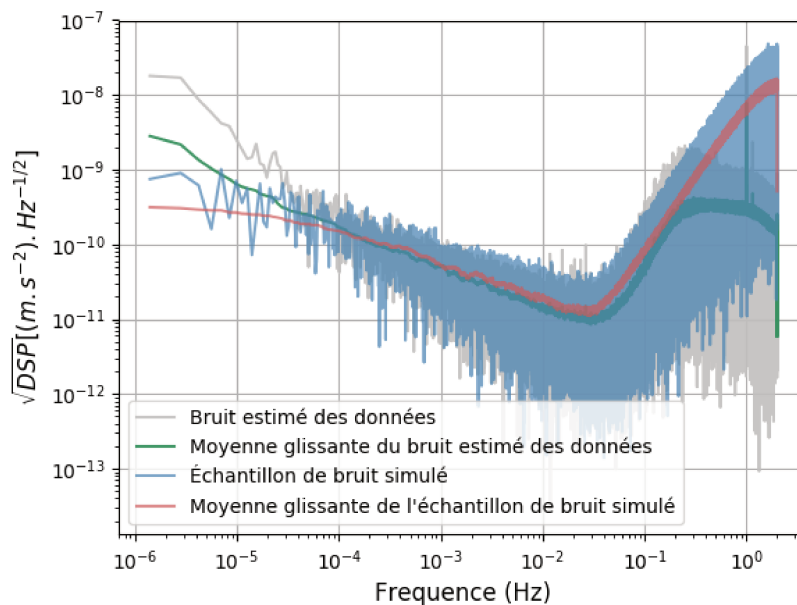


FIGURE 3.19 – Comparaison de la DSP du bruit d'accélération relative des données et d'un échantillon de bruit simulé.

données manquantes. Compte tenu des conditions imposées par notre test, il était donc inenvisageable d'effectuer une analyse de ce type, comme celle réalisée pour une session unique dans [106].

La méthode utilisée dans cette thèse est une analyse moindres carrés Monte-Carlo (LSMC) à l'aide d'échantillons de bruits synthétiques. En effet, l'estimateur moindres carrés (voir chapitre 2, partie 2.6.1) n'est pas optimal dans le cas d'un bruit non blanc, car il repose sur la condition d'un bruit non corrélé. Les résultats de l'ajustement sont donc directement affectés par le bruit. On peut néanmoins supposer que, dans le cas où l'on disposerait d'un grand nombre de séries d'observations équivalentes, les valeurs des paramètres ajustés sur ces séries temporelles - chacune correspondant à une réalisation du bruit - suivraient une distribution de probabilité centrée sur la "vraie" valeur des paramètres [92].

Les sessions de données dont nous disposons n'étant pas reproductibles, nous estimons la distribution de probabilité suivie par les paramètres en générant des échantillons de bruit sur lesquels nous ajustons notre modèle. Une fois cette distribution obtenue, nous comparons son écart-type associée aux valeurs ajustées à partir des observations. Cela nous permet d'estimer à quel point les valeurs estimées à partir de l'accélération

relative sont significatives ou non.

On suppose donc que chaque paramètre  $\theta$  est une variable aléatoire à laquelle est associée une variance inconnue, notée  $\sigma_\theta^2$ . On appelle  $\hat{\theta}_i$  une valeur de  $\theta$  estimée pour une réalisation de bruit, notée  $\epsilon_i$ . Chaque estimation de  $\theta$  est une fonction du bruit  $\epsilon$  pouvant s'écrire :

$$\hat{\theta}_i = f(\epsilon_i) \quad (3.48)$$

La fonction  $f$  est liée à la méthode d'inversion utilisée pour obtenir  $\hat{\theta}$ .

D'après la loi des grands nombres, la valeur moyenne des  $\hat{\theta}_i$  pour  $N$  ajustements sur des échantillons de bruit simulés, converge vers la valeur moyenne de  $\theta$  :

$$\bar{\theta}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\epsilon_i) \longrightarrow E[\theta] \quad (3.49)$$

Nous ajustons des échantillons de bruit purs, sans y rajouter de signaux physiques. Nous avons cependant vérifié que l'ajout signaux liés aux décentrages n'a pas d'effet sur l'analyse LSMC, dans la mesure où les variances et les covariances sont dominées par la corrélation du bruit et non par les corrélations intrinsèques au modèle. La distribution des paramètres estimés  $\hat{\theta}_i$  est utilisée pour estimer la variance  $\sigma_\theta^2$  du paramètre  $\theta$ , tandis que leur valeur  $\hat{\theta}_{\text{obs}}$  est assimilée à celle estimée à partir des observations.

La variance de  $\theta$  ne peut pas être déterminée avec une certitude absolue, mais on peut en obtenir une bonne estimation  $\hat{S}_\theta$  à partir de la distribution des  $\hat{\theta}_i$  :

$$\hat{S}_{\hat{\theta},N}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \bar{\theta}_N)^2 \quad (3.50)$$

Une illustration de la convergence de la méthode LSMC, en terme de moyenne cumulative des paramètres et des incertitudes en fonction du nombre d'échantillon de bruit utilisés, est présentée dans l'annexe D.4 à la figure D.4.

Cet estimateur n'est pas optimal, mais il a l'avantage d'être facile à implémenter. L'idéal serait évidemment un estimateur moindres carrés généralisés (GLS), mais il nécessite l'estimation soit de la matrice de covariance du bruit de taille  $N \times N$ , où  $N$  est le nombre de points de données, soit d'une DSP du bruit pour des sessions combinées. Ces deux approches sont utilisées respectivement dans [117], où des processus auto-régressifs sont utilisés pour estimer la matrice de covariance du bruit dans la perspective de traiter les données de MICROSCOPE, et dans [118] qui utilise une méthode itérative de type Bayésien Monte-Carlo pour estimer la PSD du bruit des données de LISA Pathfinder.

Afin de comparer les performances de notre méthode d'analyse par rapport à celles

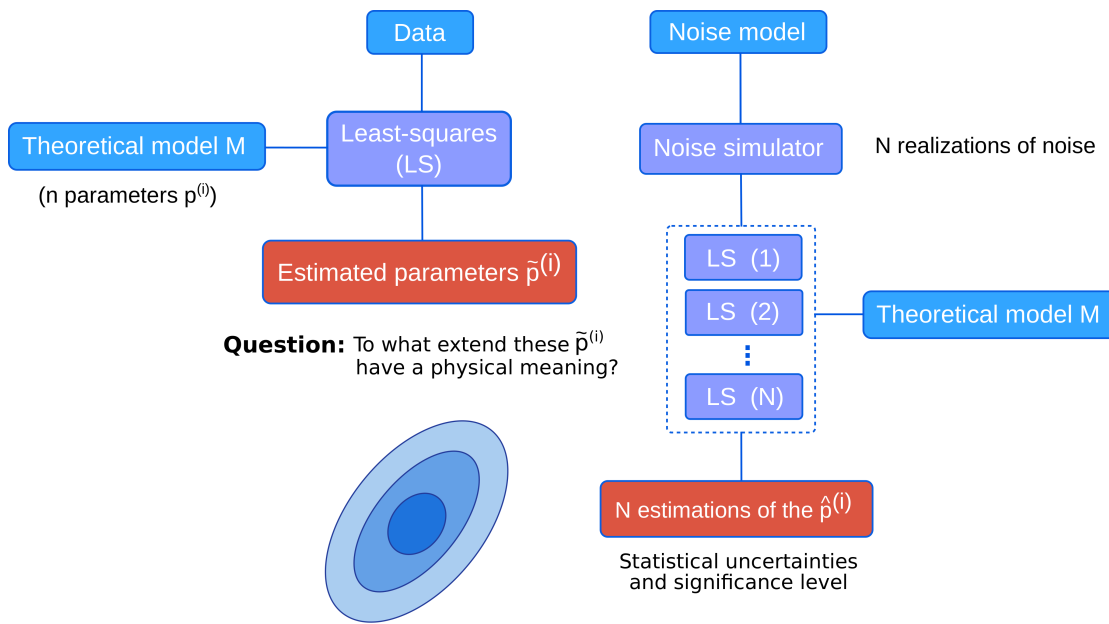


FIGURE 3.20 – Schéma de fonctionnement de l'analyse statistique

d'un estimateur optimal GLS, nous comparons les résultats de l'ajustement LSMC et GLS pour un modèle à trois paramètres pour le test du Principe d'Équivalence  $(\delta, \Delta_x, \Delta_z)$ . L'estimateur GLS est basé sur une matrice de covariance du bruit, estimée numériquement à partir d'un ensemble de  $N$  échantillons de bruits de longueur restreinte à 1000 points. Pour ce faire, nous construisons tout d'abord une matrice modèle  $A$ , de dimension  $N \times M$ , où  $N$  est le nombre d'échantillons simulés - ici 20 000 - et  $M$  leur longueur. La matrice de covariance  $V$  du bruit est obtenue en inversant la matrice  $A^T A$ .

Les résultats en terme d'incertitudes sur les paramètres, présentés dans la table 3.5, traduisent l'équivalence des deux méthodes pour un bruit blanc, ainsi que le biais introduit par un bruit non blanc. Grâce à ce test on peut estimer que, par rapport à un estimateur optimal, notre méthode LSMC est conservatrice, car elle surestime d'un facteur 2 environ les incertitudes sur le paramètre d'Eötvös. Cette estimation des performances de la méthode LSMC sera étayée par la comparaison des résultats obtenus pour l'ajustement du paramètre d'Eötvös avec ceux publiés [106] pour la session 218. Cette comparaison sera présentée partie 3.7.1.

Méthode	Type de bruit	
	Blanc	MICROSCOPE
$\sigma_{\text{GLS}}$	$1.46 \times 10^{-13}$	$3.42 \times 10^{-12}$
$\sigma_{\text{MC}}$	$1.51 \times 10^{-13}$	$4.73 \times 10^{-12}$
$\sigma_{\text{MC}}/\sigma_{\text{GLS}}$	1.03	1.38

TABLEAU 3.5 – Estimation des performances de la méthode LSMC. Comparaison des résultats obtenus avec ceux d’une méthode GLS pour l’ajustement du paramètres d’Eötvös. Cette comparaison a été effectuée pour une session test avec un bruit proche du bruit d’accélération en vol. Les chiffres présentés dans ce tableau ont été obtenus pour 20 000 échantillons de bruit d’une longueur de 1000 points.

### 3.6.4 Méthode d’estimations des effets systématiques

#### Descriptions des effets systématiques

Le principal effet systématique affectant l’analyse des données de la mission MICROSCOPE est lié à des phénomènes d’origine thermique. Afin de quantifier les variations thermiques affectant l’instrument, des sessions de calibrations ont été réalisées en faisant varier la température en plusieurs endroits de la plateforme et en mesurant en parallèle les variations d’accélération et de température. Cependant, les variations créées par le chauffage en plusieurs points de la plateforme sont inhomogènes et entraînent vraisemblablement une surestimation de la sensibilité de l’instrument aux variations thermiques. Le facteur de sensibilité thermique donné dans [106] constitue donc une estimation pessimiste de la réponse de l’instrument aux variations thermiques rencontrées en vol. C’est cette estimation "prudente" de la sensibilité thermique que nous avons utilisé pour estimer les effets systématiques d’origine thermique.

La ré-expression de ces effets systématiques en terme d’accélération suivant l’axe sensible  $x$ , se base sur le coefficient de sensibilité  $c_{\Delta T}^{SU} = 4.3 \times 10^{-9} \text{m.s}^{-2}.\text{K}^{-1}$  [106] :

$$2\gamma_x^{therm.} \approx c_{\Delta T}^{SU} \Delta T_{SU} \quad (3.51)$$

où  $\gamma_x^{therm.} = \frac{\gamma_{x,1}^{therm.} - \gamma_{x,2}^{therm.}}{2}$  Ce coefficient de sensibilité dépend de la fréquence considérée et la valeur donnée dans [106] correspond à la fréquence  $f_{ep}$ . Cependant les fréquences de notre modèle sont suffisamment proches de la fréquence  $f_{ep}$  pour que ce facteur de sensibilité constitue une bonne approximation de la sensibilité thermique réelle de l’instrument à ces fréquences.

### Méthode de traitement des données de température

La même chaîne de prétraitement est appliquée aux données de température, les seuls différences concernent le modèle de bruit utilisé et le degré du polynôme ajusté pour le retrait des dérives long-terme, de degré 3 dans le cas des données de température. Le bruit en  $f^{-2}$ , correspondant au bruit basse fréquence des données de température, est simulé avec l'outil *Allan Tools* comme l'intégrale d'un bruit blanc.

L'analyse statistique des données de température est également identique à celle des données d'accélération relative. Elle permet d'ajuster des paramètres fictifs et leurs incertitudes, qui correspondent à l'amplitude (et à l'incertitude associée) des variations thermiques pour chaque coefficient SME ou paramètre physique du modèle.

L'incertitude totale de chaque paramètre correspond à la somme quadratique de l'incertitude statistique - issue de l'analyse des données d'accélération - et de l'incertitude systématique obtenue en convertissant en accélération l'incertitude sur les variations thermiques. Dans le cas où un paramètre fictif présenterait une valeur significative, cette valeur serait également ajoutée à l'incertitude systématique, suivant la méthode décrite dans le chapitre 2, partie 2.6.2.

Les figures associées au retrait des dérives, l'ajustement du modèle de bruit et la simulation de bruit pour les données de températures sont présentées respectivement aux figures 3.21, 3.22 et 3.23.

#### 3.6.5 Architecture du code d'analyse

La figure 3.24 présente le schéma global d'analyse, par session individuelle et pour une combinaison de sessions. Dans le cas de l'analyse combinée, on concatène les données d'accélération relative de chaque session et on fait de même pour les bruits qui leur sont associés. Lorsque les sessions présentent des trous longs (de plusieurs secondes), elles sont découpées en sous-sessions pour lesquelles on applique les mêmes traitements qu'aux autres sessions.

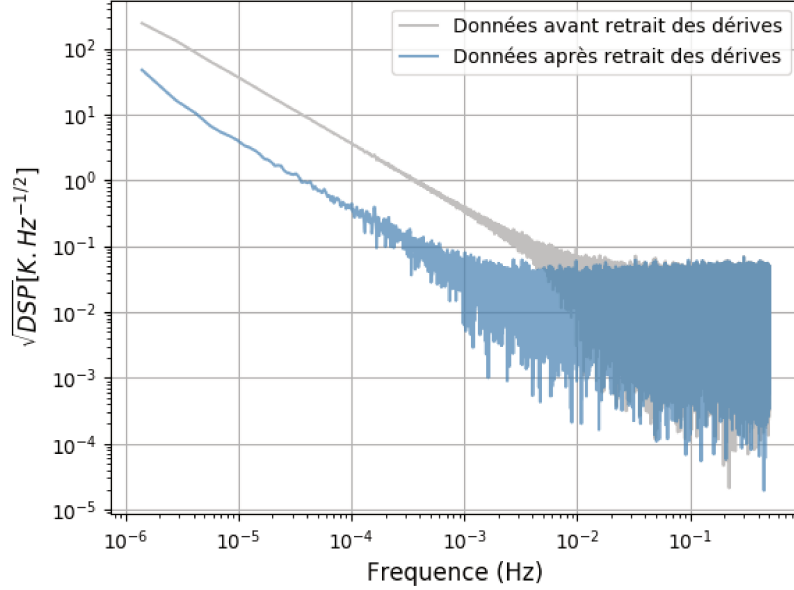


FIGURE 3.21 – Retrait des dérives long terme affectant les données de température, pour la session 404.

### 3.7 Résultats de l'analyse des données de l'instrument EP, suivant l'axe sensible x

Cette partie présente les résultats obtenus à la suite d'une première analyse incluant cinq jeux de données, répartis sur l'année 2017 (voir 3.5). Dans un premier temps, nous comparons les contraintes obtenues sur le paramètre d'Eötvös, avec celles correspondant à l'analyse d'une session (la session 218), présentées dans [106]. Cela nous permet à nouveau de comparer les performances de notre méthode d'analyse à celle de la méthode, plus optimisée, employée dans [106].

Nous présentons ensuite les résultats au coeur de ce chapitre : les contraintes obtenues pour les paramètres SME, introduits dans les parties 3.2 et 3.4.5. Pour cette analyse, nous exprimons nos résultats sous plusieurs formes :

- des contraintes sur la combinaison de paramètres  $\alpha \left( a_{\text{eff}}^{(d)} \right)_\mu$ <sup>11</sup>, pour chaque session analysée individuellement, puis pour l'analyse combinée de toutes les sessions.
- des contraintes, sous forme de "sensibilités maximales", sur les coefficients associés à chaque particule (proton, électron et neutron), notés  $\alpha \left( a_{\text{eff}}^v \right)_\mu$ .

11. définie à l'équation 3.44

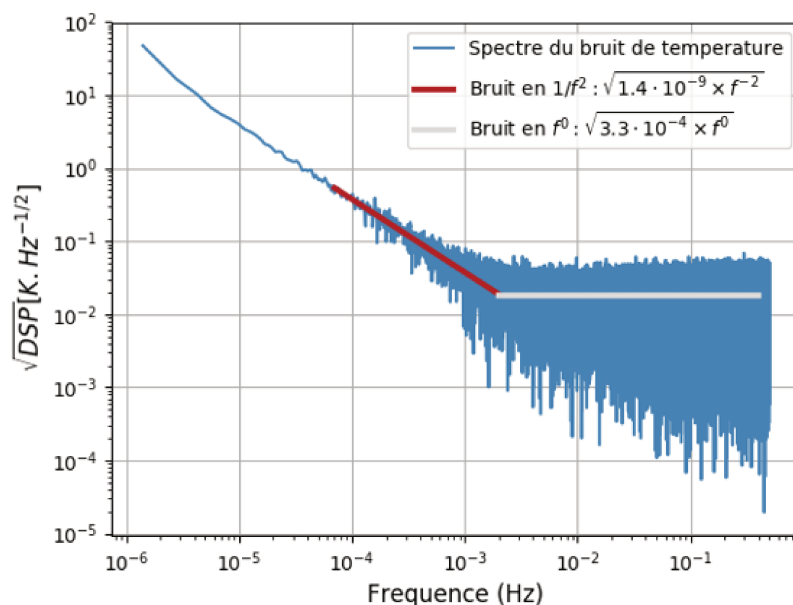


FIGURE 3.22 – Ajustement du modèle de bruit de température, pour la session 404.

### 3.7.1 Estimation des performances de la méthode d'analyse : résultats obtenus pour le test du Principe d'Équivalence pour la session 218 et comparaison avec l'analyse présentée dans [106]

Cette partie présente les résultats de l'ajustement LSMC d'un modèle destiné à reproduire le test du Principe d'Équivalence (voir eq. 3.15). Il inclut un paramètre de violation  $\delta$  et deux décentrages suivant x et z, notés  $\Delta_x$  et  $\Delta_z$ . La contribution du décentrage suivant l'axe y est retirée en amont de l'ajustement de ce modèle. Le modèle inclut également un biais qui, comme détaillé précédemment, a plusieurs origines, parmi lesquelles une composante constante présente dans les gradients de gravité ou encore un biais thermique.

On effectue en premier lieu une comparaison des résultats de l'ajustement de la session 218 avec ceux présentés dans [106]. Cette comparaison, présentée à la table 3.6, démontre que notre méthode d'analyse est environ 2 fois plus pessimiste que celle utilisée dans [106] en ce qui concerne le paramètre d'Eötvös  $\delta$ , pour lequel nous obtenons par ailleurs une valeur compatible avec une absence de violation du Principe d'Équivalence. Nous obtenons en revanche des valeurs et des incertitudes comparables à celles de [106] pour les paramètres physiques (décentrages et biais).



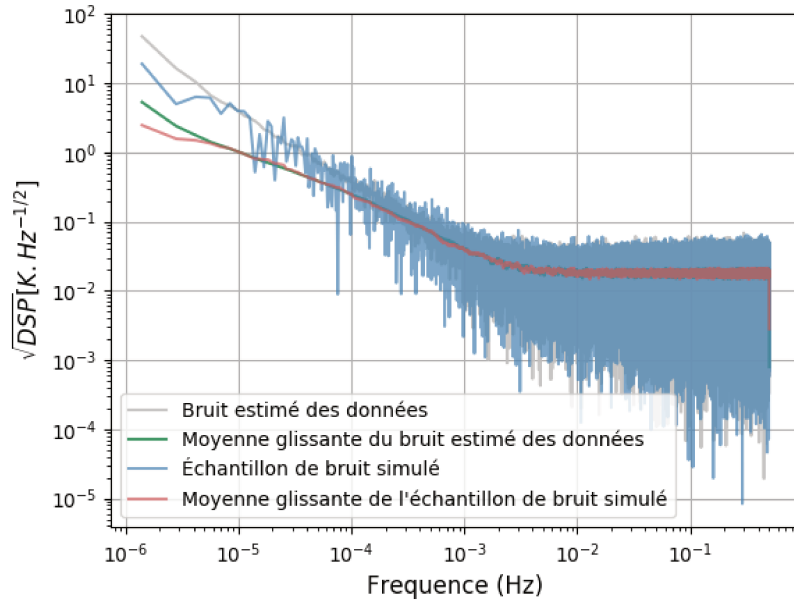


FIGURE 3.23 – DSP moyenne du bruit de température obtenue pour 100 échantillons simulés, pour la session 404.

La table 3.7 présente les valeurs du paramètre d'Eötvös ajustées pour chaque session. Elle donne également les incertitudes statistiques et systématiques associée. Aucune des 5 valeurs ajustées n'est significative, or, statistiquement, au moins une de ces valeurs aurait du l'être. Cet élément confirme la caractère conservatif de notre analyse LSMC. On peut également noter que les incertitudes statistiques varient peu entre les différentes sessions, mais que ça n'est pas le cas des incertitudes systématiques et notamment pour la session 326. Ces inhomogénéités sont responsables d'une différence maximale d'un facteur 7 environ entre les incertitudes totales des cinq sessions.

Par la suite, nous réaliserons des analyses combinées de plusieurs sessions. Pour ces analyses, nous attribuerons à chaque session un poids correspondant à la variance totale du paramètre d'Eötvös obtenue par l'analyse individuelle de cette session. Les résultats de l'ajustement des décentrages pour chaque session sont donnés dans l'annexe D.2.

En réalisant une analyse combinée et pondérée des cinq jeux de données présentés dans la partie 3.5, nous obtenons la contrainte suivante sur le paramètre d'Eötvös  $\delta$  :

$$\delta = (1.0 \pm 1.8) (1.1)(1.4) \times 10^{-14} \quad (3.52)$$

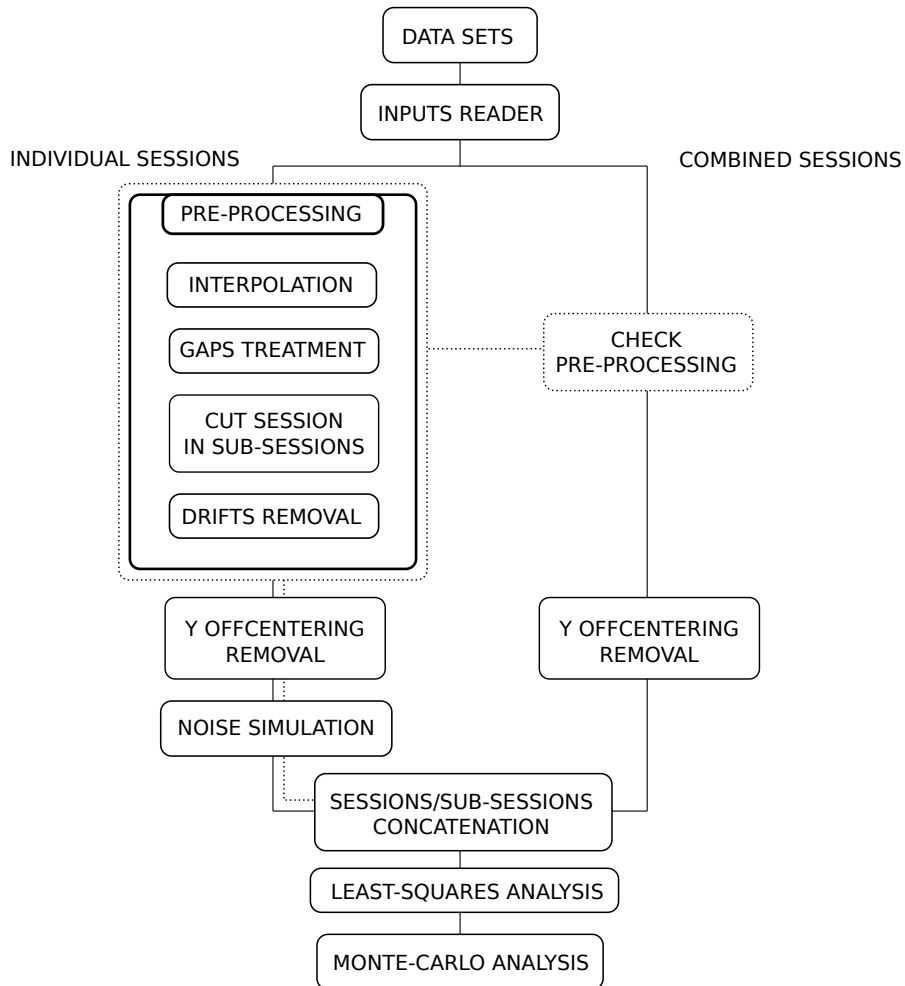


FIGURE 3.24 – Architecture de la chaîne de traitement pour l'analyse des données MI-CROSCOPE.

paramètres	Valeurs et incertitudes statistiques pour la session 218		unité
	Cette analyse	Étude [106]	
$\delta$	$(-1.3 \pm 2.2 \pm 2.2) \times 10^{-14}$	$(-0.1 \pm 0.9 \pm 0.9) \times 10^{-14}$	–
$\Delta_x$	$(20.1 \pm 0.1) \times 10^{-6}$	$(20.1 \pm 0.1) \times 10^{-6}$	$m$
$\Delta_z$	$(-5.8 \pm 0.1) \times 10^{-6}$	$(-5.6 \pm 0.1) \times 10^{-6}$	$m$
$C$	$(-0.3 \pm 1.0) \times 10^{-8}$	–	$m.s^{-2}$

TABLEAU 3.6 – Résultat de l’ajustement du paramètre d’Eötvös et des paramètres instrumentaux pour la session 218. Les incertitudes sont uniquement statistiques, sauf pour le paramètre  $\delta$ , pour lequel on précise également l’incertitude systématique.

Session	Valeurs et incertitudes pour le paramètre d’Eötvös( $\times 10^{14}$ )
210	$-2.4 \pm 3.9$ (2.1)(3.3)
218	$-1.3 \pm 3.1$ (2.2)(2.2)
326	$0.1 \pm 9.7$ (3.1)(9.2)
358	$1.9 \pm 2.3$ (1.6)(1.7)
404	$0.1 \pm 1.5$ (1.0)(1.1)

TABLEAU 3.7 – Résultats de l’ajustement du paramètre d’Eötvös pour les cinq sessions EP. Les incertitudes statistiques et systématiques sont précisées entre parenthèses.

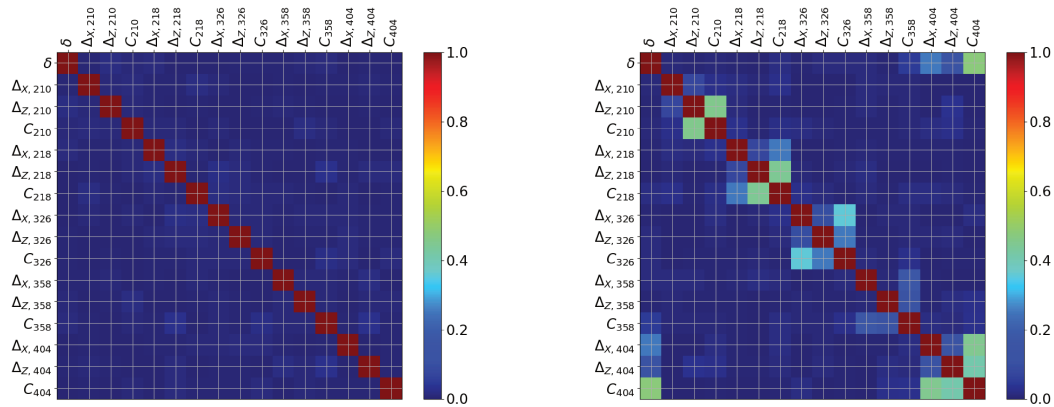
Dans cette analyse, nous ajustons un paramètre de violation  $\delta$  unique, et pour chaque session deux décentrages et une constante. Les matrices de corrélation statistique et systématique des paramètres sont données à la figure 3.25, elles ne contiennent que des coefficients de corrélation faibles. Si on compare cette estimation de  $\delta$  à celle présentée dans [106], i.e.  $(-0.1 \pm 0.9 \pm 0.9) \times 10^{-14}$ , on obtient une incertitude statistique équivalente et une incertitude systématique plus grande d’un facteur 1.5.

### 3.7.2 Résultats du test d’invariance de Lorentz

Dans cette partie, nous utilisons le modèle présenté dans la partie 3.4.5, afin de contraindre les quatre composantes du tenseur SME  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu}$ , associées aux quatre dimensions de l’espace-temps (T,X,Y,Z). Comme expliqué dans la partie 3.4, ces coefficients sont exprimés dans le RHNT.

#### Analyse individuelle des sessions

Nous présentons tout d’abord les contraintes obtenues en analysant individuellement chacune des cinq sessions. Le modèle ajusté inclut les mêmes paramètres physiques que le précédent modèle pour le test du Principe d’Équivalence (deux décentrages en x et z et une constante), dont les estimations sont présentées dans l’annexe D.5.



(a) Corrélations statistiques

(b) Corrélations systématiques

FIGURE 3.25 – Représentation graphique de la matrice de corrélation statistique (a) et de corrélation systématique (b) correspondantes à l'analyse combinée avec un modèle pour le test du Principe d'Équivalence.

Les limites par session sont résumées dans la table 3.8. Elles sont toutes compatibles avec une absence de violation d'invariance de Lorentz, et améliorent de plus d'un ordre de grandeur (facteur 15 à 50) les contraintes actuelles pour les coefficients  $\alpha(a_{\text{eff}}^w)$ ,  $\alpha(a_{\text{eff}}^w)_Y$  et  $\alpha(a_{\text{eff}}^w)_Z$ , toutes particules confondues. Les précédentes limites ont été obtenues grâce à des données gravimétriques [119].

Ces contraintes ne sont pas optimales, comme en témoigne les importantes corrélations entre paramètres visibles à la figure 3.26, qui correspond aux matrices de corrélation statistique et systématique des paramètres SME pour la session 218. On remarque notamment que les paramètres  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T$  et  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_X$  sont parfaitement corrélés (coefficient de corrélation quasiment égal à 1).

Si on revient brièvement au modèle SME (équation 3.42), le terme principal permet de contraindre une combinaison de coefficients SME multipliés par des facteurs  $\beta_j$  liés à la vitesse de la Terre suivant les différents axes du RHNT :  $a_T + \beta_X a_X + \beta_Y a_Y + \beta_Z a_Z$ . Les coefficients de cette combinaison sont décorrélés uniquement grâce aux variations annuelles des  $\beta_j$ . Ces variations sont très faibles à l'échelle d'une session de quelques jours et parfaitement corrélées avec le terme constant dont dépend  $a_T$  (voir figure 3.28), c'est pourquoi les paramètres sont fortement corrélés. Les coefficients  $a_Y$  et  $a_Z$  sont quant à eux décorrélés grâce aux termes de second ordre, dépendant des quaternions de rotation, qui varient tout au long de la session. Les corrélations entre paramètres SME seront discutées plus en détails dans le partie 3.7.2.

Paramètres SME	Sessions	
	210	218
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T$	$(0.3 \pm 2.1) (1.6)(1.4) \times 10^{-11}$	$(-0.2 \pm 1.6) (1.1)(1.2) \times 10^{-11}$
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_X$	$(0.1 \pm 1.1) (0.9)(0.6) \times 10^{-7}$	$(-0.5 \pm 4.5) (\mathbf{3.1})(\mathbf{3.3}) \times 10^{-8}$
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Y$	$(0.4 \pm 1.6) (1.3)(0.9) \times 10^{-7}$	$(0.6 \pm 1.6) (1.0)(1.2) \times 10^{-7}$
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Z$	$(-0.2 \pm 4.0) (1.2)(3.8) \times 10^{-7}$	$(-1.9 \pm 4.4) (1.9)(4.0) \times 10^{-7}$

Paramètres SME	Sessions	
	326	358
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T$	$(3.4 \pm 8.7) (2.2)(8.5) \times 10^{-11}$	$(\mathbf{0.9} \pm \mathbf{1.4}) (\mathbf{1.1})(\mathbf{0.9}) \times 10^{-11}$
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_X$	$(5.0 \pm 7.0) (3.0)(6.4) \times 10^{-8}$	$(3.8 \pm 5.7) (4.4)(3.7) \times 10^{-8}$
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Y$	$(-1.8 \pm 3.1) (1.9)(2.5) \times 10^{-7}$	$(-\mathbf{0.4} \pm \mathbf{1.3}) (\mathbf{0.9})(\mathbf{0.9}) \times 10^{-7}$
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Z$	$(-0.4 \pm 2.4) (0.5)(2.3) \times 10^{-6}$	$(-\mathbf{1.1} \pm \mathbf{1.6}) (\mathbf{1.1})(\mathbf{1.2}) \times 10^{-7}$

Paramètres SME	Sessions
	404
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T$	$(0.5 \pm 3.1) (0.5)(3.1) \times 10^{-11}$
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_X$	$(0.5 \pm 3.0) (0.5)(3.0) \times 10^{-7}$
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Y$	$(-0.7 \pm 4.8) (1.4)(4.6) \times 10^{-8}$
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Z$	$(-0.03 \pm 1.4) (0.3)(1.3) \times 10^{-7}$

TABLEAU 3.8 – Résultats de l’ajustement des paramètres de violation SME pour chacune des cinq sessions analysées. Les valeurs indiquées en gras correspondent aux meilleures estimations de chaque paramètre obtenue par l’analyse individuelle de ces cinq sessions.

### Analyse globale pondérée

La pondération est établie à partir de la table 3.7, en assignant à chaque session un poids correspondant à la variance totale obtenue pour le paramètre d’Eötövös. Comme dans le cas de l’analyse combinée pour le test du Principe d’Équivalence, nous ajustons - en plus des paramètres de violation - deux décentrages et une constante pour chaque session.

La table 3.9 présente les résultats de l’analyse pondérée des cinq sessions. Nos résultats n’indiquent aucune violation d’invariance de Lorentz. Les matrices de corrélation statistique et systématique des coefficients SME associées à cet ajustement sont données à la figure 3.27. Les coefficients  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Y$  et  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Z$  sont toujours complètement corrélés, de même que les coefficients  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T$  et  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_X$ . On remarque néanmoins que les corrélations entre les couples  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T/\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_X$  et  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Y/\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Z$  ont nettement diminué par rapport à l’ajustement individuel de la session 218.

Pour comprendre qualitativement ces corrélations, on trace l’évolution temporelle de

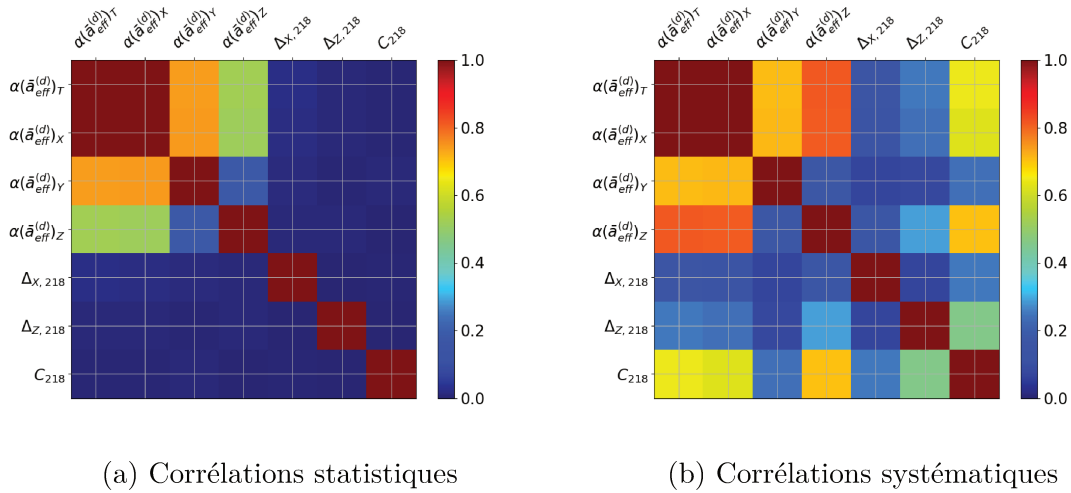


FIGURE 3.26 – Représentation graphique de la matrice de corrélation statistique (a) et de corrélation systématique (b) des paramètres SME  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu}$ , ajustés pour la session 218.

paramètres	Valeurs et incertitudes	unité
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T$	$(0.4 \pm 1.5) (1.1)(1.0) \times 10^{-14}$	—
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_X$	$(0.6 \pm 2.2) (1.3)(1.8) \times 10^{-10}$	—
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Y$	$(0.3 \pm 2.5) (1.1)(2.2) \times 10^{-8}$	—
$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Z$	$(-0.7 \pm 5.8) (2.5)(5.2) \times 10^{-8}$	—

TABLEAU 3.9 – Résultats de l'ajustement des paramètres de violation SME pour l'analyse complète, pondérée, à cinq jeux. On donne les valeurs et les incertitudes totales, en précisant entre parenthèses les incertitudes statistiques et systématiques.

la vitesse de la Terre suivant les axes du repère RHNT (voir figure 3.28). Les composantes de la vitesse de la Terre,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  et  $\beta_z$ , suivent toutes les trois des sinusoides avec une périodicité annuelle. On peut noter que les variations de  $\beta_y$  et  $\beta_z$  sont en phase, les termes principaux du modèle ne permettront donc pas de les discerner, même en disposant de données réparties sur une année - à l'échelle de l'année, les termes dépendant des quaternions sont négligeables en comparaison des termes annuels, dépendant de  $\beta$ . De même, le coefficient  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_X$  restera corrélé à  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T$  du fait de l'échantillonnage des données, qui fait que les valeurs de  $\beta_X$  varient peu et restent donc en partie confondues avec la constante correspondant à  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T$ . En revanche, on distinguera très bien le couple  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T/\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_X$  du couple  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Y/\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Z$ .

On présente également les régions de confiance associées aux paramètres SME, la figure 3.29 correspond à l'ajustement LSMC des échantillons de bruit d'accélération (in-

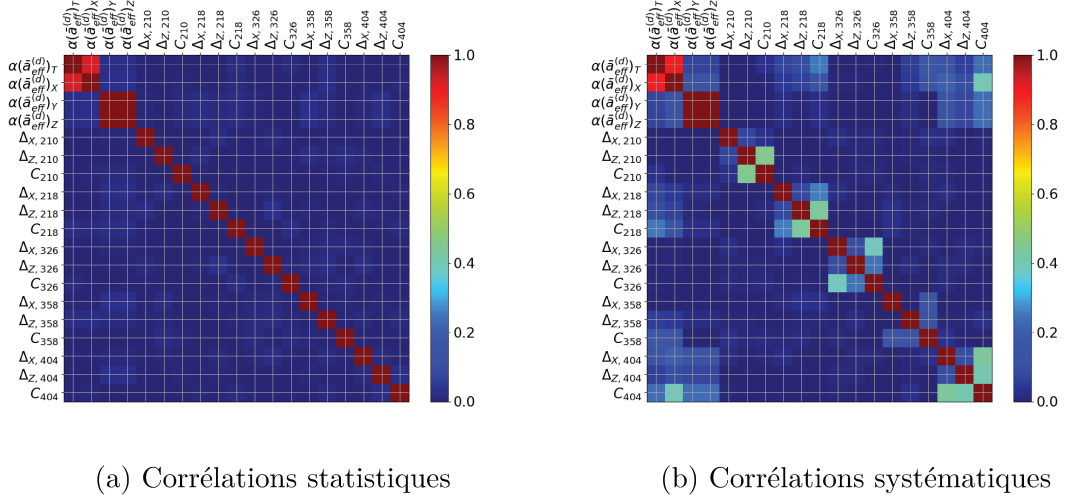


FIGURE 3.27 – Représentation graphique de la matrice de corrélation statistique (a) et de corrélation systématique (b) des paramètres SME obtenue par l’ajustement combiné de cinq sessions EP.

certitudes statistiques) et la figure 3.30 à l’ajustement des échantillons de bruit de température (incertitudes systématiques). Ces régions de confiance sont une autre manière d’illustrer les corrélations statistiques et systématiques existant entre les paramètres SME.

On traduit à présent les limites sur la combinaison  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu}$  sous forme de sensibilités maximales sur des coefficients  $\alpha a_{\mu}$  et  $\alpha e_{\mu}$  liés aux particules élémentaires : protons, neutrons et électrons. Ces sensibilité maximales n’apportent pas plus d’information que celles contenues dans la table 3.9 et dans les matrices de corrélation présentées à la figure 3.27. Il s’agit simplement d’une présentation habituelle des contraintes dans le cadre du SME. Elles sont néanmoins à considérer avec prudence, car elle ne tiennent pas compte des corrélations au sein d’une combinaison de coefficients. Les sensibilités maximales sont obtenues en divisant chaque coefficient par son préfacteur dans la relation suivante :

$$\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu} = A \cdot [\alpha a_{\mu}^n + m_n c^2 \cdot \alpha e_{\mu}^n] + C \cdot [\alpha a_{\mu}^e + \alpha a_{\mu}^p + m_e c^2 \cdot \alpha e_{\mu}^e + m_p c^2 \cdot \alpha e_{\mu}^p] \quad (3.53)$$

où :  $A = 0.048 \text{ GeV}^{-1}$  et  $C = -0.068 \text{ GeV}^{-1}$ .

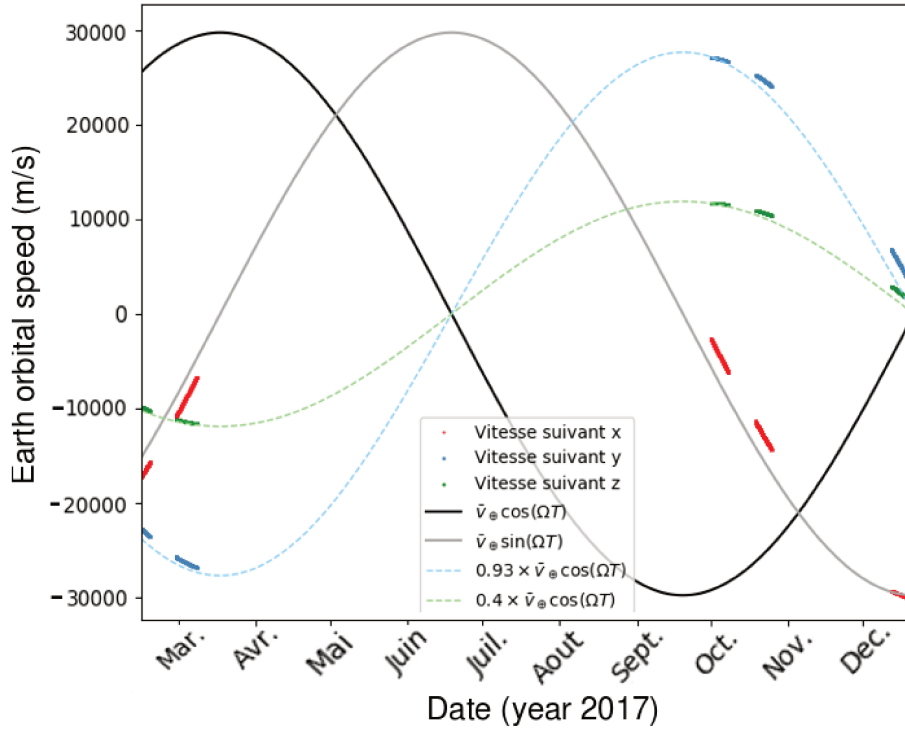


FIGURE 3.28 – Évolution temporelle de la vitesse de la Terre autour du Soleil.

Soit :

$$\alpha a_\mu^e = \frac{\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_\mu}{C} \quad \alpha a_\mu^p = \frac{\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_\mu}{C} \quad \alpha a_\mu^n = \frac{\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_\mu}{A} \quad (3.54)$$

$$\alpha e_\mu^e = \frac{\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_\mu}{C \cdot m_e c^2} \quad \alpha e_\mu^p = \frac{\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_\mu}{C \cdot m_p c^2} \quad \alpha e_\mu^n = \frac{\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_\mu}{A \cdot m_n c^2} \quad (3.55)$$

On prend ensuite l'incertitude correspondant à  $2\sigma$ , puis on l'arrondit à la puissance supérieure (resp. inférieure) si cette limite est supérieure (resp. inférieure) à  $10^{0.5} \sim 3.2$ , selon la convention établie dans [45]. Cela nous permet d'obtenir les contraintes présentées à la table 3.10.

D'après les sensibilités maximales présentées dans la version 2018 de [45], nous améliorons d'un ordre de grandeur les limites sur les coefficients  $\alpha a_T$  et  $\alpha e_T$ . Les précédentes limites sur ces coefficients ont été obtenues à partir de tests d'universalité de la chute libre réalisés avec des pendules de torsion [120, 121]. Dans ce type d'expérience, des



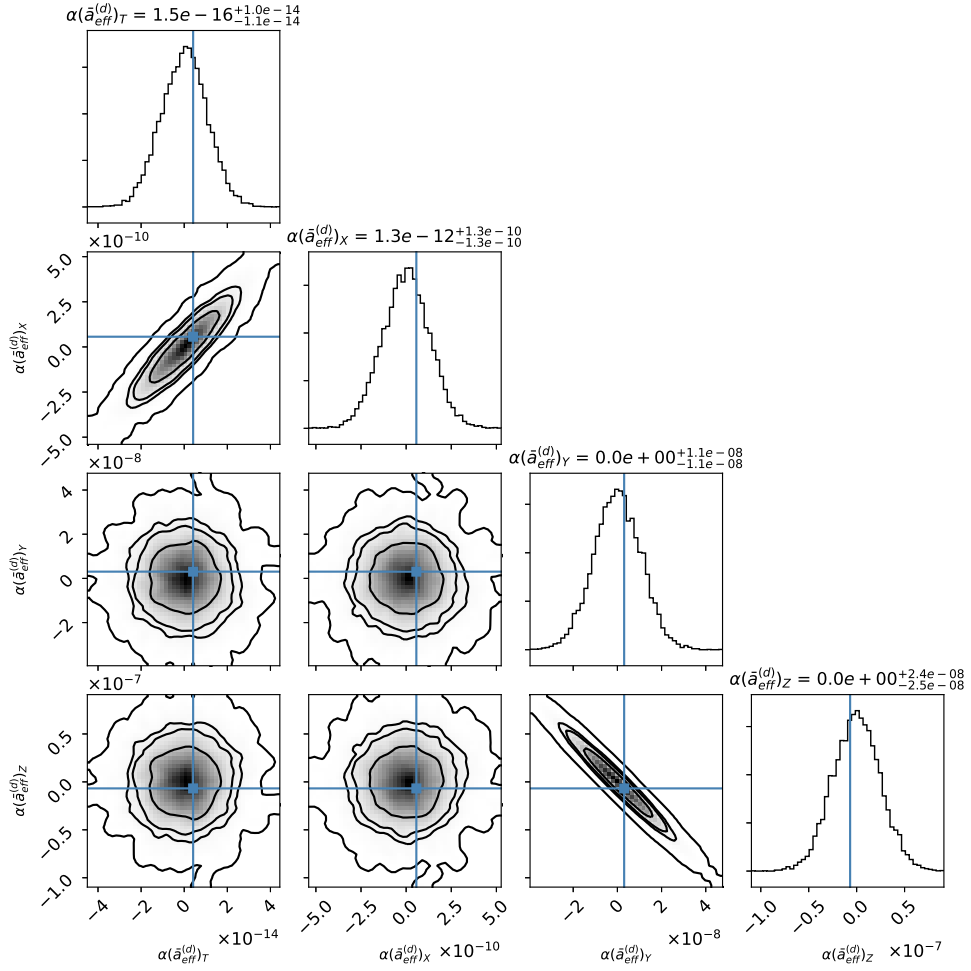


FIGURE 3.29 – Représentation graphique des régions de confiance pour les coefficients  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu}$ , obtenues par l'analyse des échantillons de bruit d'accélération relative. Le point bleu indique la position de la solution ajustée par moindres carrés grâce aux données d'accélération relative.

masses de composition différente sont disposées aux extrémités d'une barre, elle-même suspendue par un fil. Si une source gravitationnelle agit différemment sur les masses, la différence d'accélération provoquera une rotation du dispositif. Les contraintes SME correspondantes ont permis d'atteindre une précision de  $10^{-11}$  GeV sur le coefficient  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T$ .

Nous améliorons par ailleurs de 2 à 3 ordres de grandeur les contraintes actuelles sur les coefficients  $\alpha a_X$  et  $\alpha e_X$ . Nous obtenons également 1 à 2 ordres de grandeur d'amélioration sur les contraintes du coefficient  $\alpha a_Y$  et 1 ordre de grandeur sur celles du

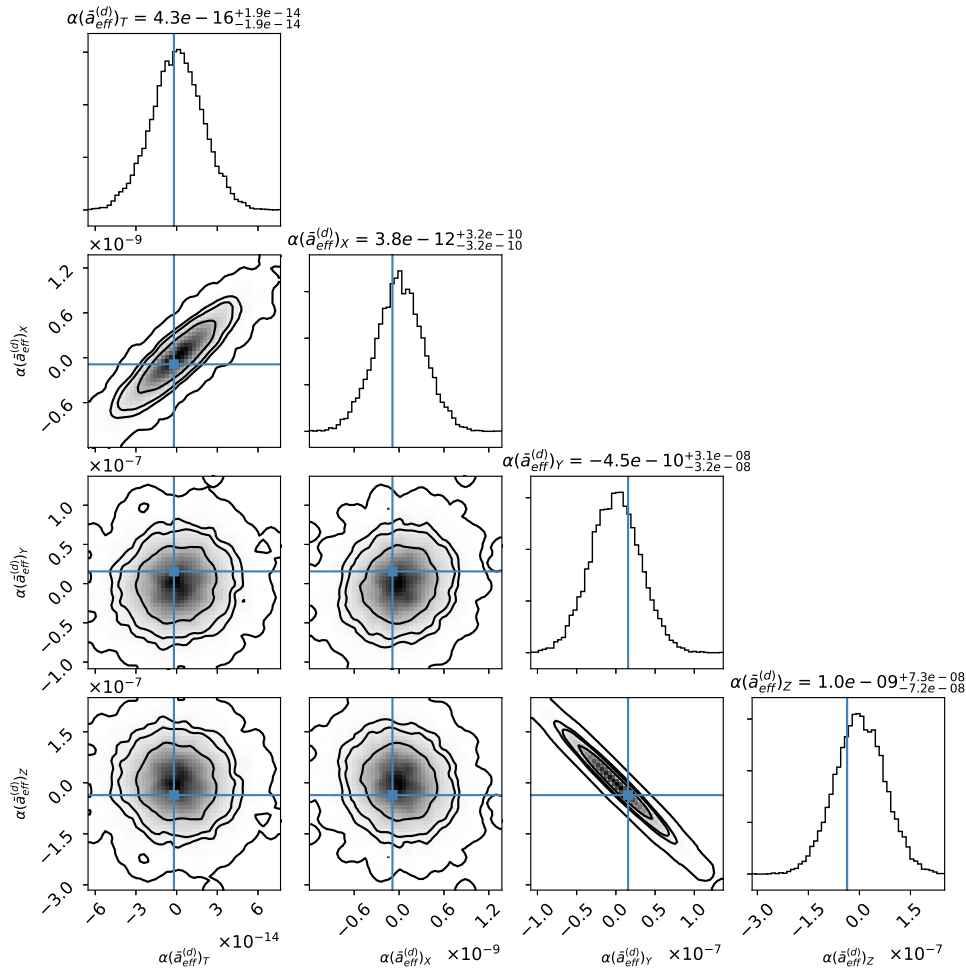


FIGURE 3.30 – Représentation graphique des régions de confiance pour les coefficients  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu}$ , obtenues par l'analyse des échantillons de bruit de température. Ici, les valeurs de températures sont converties en accélération grâce au coefficient de sensibilité donnée à l'équation 3.51. Les point bleu indique la position de la solution ajustée par moindres carrés grâce aux données de température.

coefficient  $aa_Z$ . Pour ce qui est des coefficients  $ae_Y$  et  $ae_Z$ , nous améliorons d'un ordre de grandeur l'ensemble des contraintes, exceptée celle liée à l'électron pour le coefficient  $ae_Z$ . Les précédentes contraintes sur les composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du coefficient  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu}$  ont été obtenues par l'analyse de données gravimétriques [119]. Dans cette expérience, un gravimètre supra-conducteur permet de mesurer les variations de pesanteur rencontrées par une masse d'épreuve maintenue en lévitation magnétique. Cette étude a permis de porter les contraintes sur ces coefficients à une sensibilité de  $10^{-5}$  GeV environ. Ces

coefficients ont également été contraints dans [122], grâce à la combinaison d’observation TLR<sup>12</sup>, de mesures gravimétriques et d’éphémérides planétaires.

Paramètres SME	Sensibilités maximales			Unité
	$e$	$p$	$n$	
$\alpha a_T$	$10^{-12(1)}$	$10^{-12(1)}$	$10^{-12(1)}$	GeV
$\alpha a_X$	$10^{-8(2)}$	$10^{-8(2)}$	$10^{-8(3)}$	GeV
$\alpha a_Y$	$10^{-6(1)}$	$10^{-7(2)}$	$10^{-6(1)}$	GeV
$\alpha a_Z$	$10^{-6(1)}$	$10^{-6(1)}$	$10^{-6(1)}$	GeV
$\alpha e_T$	$10^{-9(1)}$	$10^{-12(1)}$	$10^{-12(1)}$	-
$\alpha e_X$	$10^{-5(2)}$	$10^{-8(2)}$	$10^{-8(3)}$	-
$\alpha e_Y$	$10^{-3(1)}$	$10^{-6(1)}$	$10^{-6(1)}$	-
$\alpha e_Z$	$10^{-2}$	$10^{-6(1)}$	$10^{-6(1)}$	-

TABLEAU 3.10 – Sensibilités maximales aux paramètres SME pour l’analyse complète à cinq jeux, avec pondération. Les exposants entre parenthèses indiquent le nombre d’ordres de grandeur d’amélioration obtenus par rapport aux sensibilités maximales présentées dans la version 2018 de [45].

**Recherche d’effets systématiques non modélisés** Nous cherchons à déterminer si notre analyse est susceptible d’être biaisée du fait d’effets systématiques non modélisés ayant potentiellement variés dans le temps. Une manière de vérifier que nos sessions de données sont bien affectées par les mêmes effets systématiques est de réaliser une analyse par sous-ensemble de sessions. Pour cela, nous réalisons une série d’analyses combinées en retirant à chaque fois une session différente, et nous représentons l’évolution des paramètres SME estimés, en fonction de la session retirée (voir figure 3.31). Les paramètres SME sont supposés être des constantes, leur valeurs doivent donc être compatibles entre elles pour tous les sous-ensembles analysés.

On remarque que les intervalles de confiance des coefficients ajustés pour chaque sous-ensemble se recouvrent, il n’y a donc pas lieu de penser que notre ajustement global est biaisé.

### 3.8 Perspectives

**Analyse de nouvelles sessions** Ce travail étant une première analyse, les perspectives en terme d’analyse sont extrêmement riches. La principale étant bien évidemment

12. Télémétrie Laser sur la Lune

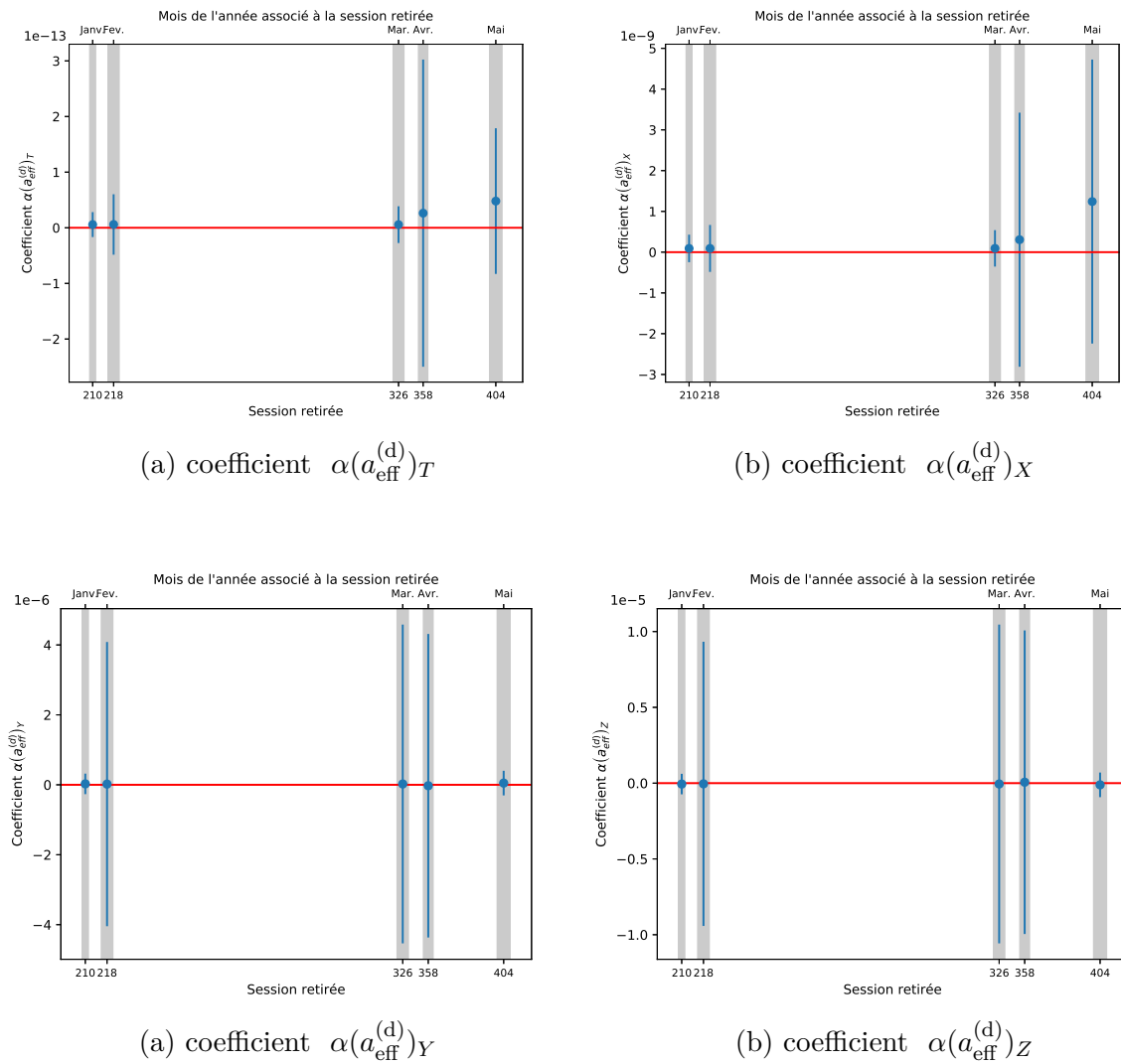


FIGURE 3.31 – Recherche de biais : sensibilité de l'analyse par sous-ensemble en fonction du jeu retiré, pour les coefficients  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T$ ,  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_X$ ,  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Y$  et  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Z$ . Pour chaque coefficient, les valeurs et incertitudes ajustées pour chaque sous-ensemble de sessions sont indiquées en bleu. La ligne rouge matérialise la position du zéro et les zones grises la période de l'année correspondant au jeu retiré.

l'utilisation de nouvelles sessions de données qui devrait permettre de diminuer nos estimations des incertitudes statistiques et systématiques. Par ailleurs, si ces données sont assez distantes dans le temps par rapport à des sessions déjà analysées, par exemple si elles sont prises au mois mai, elles devraient permettre de mieux décorréler les paramètres  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_T$  et  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_X$ , et potentiellement améliorer nos limites sur ces coefficients.

**Amélioration de la méthode d'analyse statistique** Plusieurs points d'amélioration sont envisageables. Les plus immédiats étant l'optimisation de la pondération des données et l'implémentation d'une méthode GLS pour l'analyse des données de température. Pour le premier point, nous utilisons pour le moment les variances obtenues sur les paramètres d'Eötvös par l'analyse individuelle des sessions EP. Une autre pondération, par exemple basée sur les variances des coefficients SME, pourrait être utilisée. Quant au second point, les deux composantes du bruit de température peuvent être modélisées par des matrices de corrélation analytiques, qui pourraient permettre d'implémenter un estimateur GLS.

**Étude des effets systématiques avec instrument REF** Lors de cette analyse, nous avons analysé exclusivement des données de l'instrument EP. Il serait néanmoins souhaitable d'analyser également des données provenant de l'instrument REF. Ce dernier contient deux masses d'épreuve identiques, leur accélération relative doit donc rester nulle tout au long de l'expérience. En appliquant aux données d'accélération relative de l'instrument REF la même analyse que celle réalisée dans ce chapitre pour les données de l'instrument EP, nous pourrions estimer de manière indépendante les effets systématiques affectant le test de violation d'invariance de Lorentz.

**Optimisation des prétraitements et de l'ajustement du modèle de bruit** Une autre amélioration, en terme de méthode d'analyse, serait l'optimisation de la chaîne de traitement, notamment en améliorant l'estimation et la représentation du bruit des données d'accélération relative. Le modèle de bruit utilisé pour cette analyse est un modèle de DSP à deux pentes, mais il ne rend pas bien compte du bruit très basse fréquence observé, pas plus qu'il ne tient compte du filtre passe-bas appliqué aux données.

**Analyse tri-dimensionnelle** Dans ce chapitre, seule l'accélération suivant l'axe sensible  $x$  a été analysée. Bien que l'instrument soit moins sensible suivant les axes  $y$  et  $z$ , l'analyse de l'accélération relative suivant l'ensemble des axes permettrait de contraindre de nouvelles combinaisons de coefficients SME, et peut-être d'améliorer certaines de nos contraintes actuelles, particulièrement pour le coefficient  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Y$  et  $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_Z$  (voir les équations 3.36, 3.37 et 3.38).

**Invariance de Lorentz et matière noire** La matière noire représenterait environ 27% de la masse de notre Univers, mais on ignore pour le moment s'il s'agit de ma-

tière ordinaire, de matière exotique (*e.g.* WIMPs<sup>13</sup>) ou encore la manifestation d'effets gravitationnels non décrits par la Relativité Générale.

Certains modèles de matière noire envisagent que cette dernière pourrait se coupler de manière non universelle à la matière ordinaire, c'est notamment le cas pour des modèles de type matière noire ultra-légère comme celui décrit dans [123].

Dans le cas de MICROSCOPE, la conséquence serait une dépendance de l'accélération relative des masses d'épreuve en fonction de l'orientation de l'instrument par rapport à des zones à forte concentration de matière noire, comme par exemple le centre de la galaxie.

### 3.9 Résumé et conclusion

Ce chapitre présente un test d'invariance de Lorentz réalisé à l'aide des données de la mission MICROSCOPE. Cette mission a pour but principal d'effectuer un test du Principe d'Équivalence en recherchant une variation de l'accélération relative de masses d'épreuve en chute libre autour de la Terre.

Dans le cadre du test d'invariance de Lorentz, nous recherchons des variations de l'accélération relative des masses en fonction de l'orientation de l'instrument dans l'espace, et plus particulièrement par rapport au référentiel héliocentrique non-tournant (RHNT). Cela nécessite des données dispersées dans le temps afin de couvrir l'intégralité d'une révolution de la Terre autour du Soleil.

Les contraintes en terme de violations d'invariance de Lorentz sont exprimées sous la forme de contraintes sur des coefficients d'une théorie alternative, appelée SME (Extension du Modèle Standard), qui cherche à quantifier des phénomènes physiques allant au delà du Modèle Standard et de la Relativité Générale. Pour ce test, nous contraignons des coefficients qui représentent une modification de la dynamique des corps, dont l'intensité dépend de leur composition chimique. Ces coefficients - des vecteurs appelés  $\alpha a_\mu$  et  $\alpha e_\mu$  - quantifient cette violation suivant chaque dimension de l'espace-temps (T,X,Y,Z).

L'analyse combinée de cinq sessions MICROSCOPE réparties entre février et décembre 2017, n'a pas mis en évidence de violation d'invariance de Lorentz, mais a permis d'améliorer jusqu'à 3 ordres de grandeur les contraintes de 8 coefficients du secteur de la matière couplée à la gravitation. Les résultats de cette analyse feront l'objet d'une publication dans les mois qui viennent.

Le but de cette première analyse était avant tout prospective. L'analyse complète des données de la mission MICROSCOPE nécessitera des optimisations du logiciel d'ana-

---

13. Weakly Interacting Massives Particles

lyse, notamment en terme de de méthode d'analyse statistique et de modélisation du bruit. L'analyse des données de l'instrument EP devra également être complétée par l'analyse des données de l'instrument REF. Ces données permettront d'étudier les effets systématiques de manière indépendante et complémentaire de l'analyse réalisée grâce aux données de température. L'analyse de l'accélération relative pourra également être étendue aux axes y et z de l'instrument, ce qui devrait permettre de contraindre de nouvelles combinaisons de coefficients SME et potentiellement d'améliorer les limites établies dans le cadre de cette étude. Par ailleurs, des tests alternatifs pourront être implémentés, notamment la recherche de violation d'invariance de Lorentz due à la matière noire présente dans notre galaxie, en étudiant la dépendance de l'accélération relative des masses d'épreuve en fonction de l'orientation relative de l'instrument et des zones à forte concentration de matière noire, comme le centre galactique.

L'Extension du Modèle Standard (SME) est un cadre théorique permettant la recherche expérimentale de violations d'invariance de Lorentz. Il répond ainsi à un besoin de tests expérimentaux de théories allant au-delà du Modèle Standard et de la Relativité Générale. Ces dernières sont en effet le plus souvent incapables de prédire des observables.

Des violations d'invariance de Lorentz se caractériseraient par des résultats expérimentaux dépendant de l'orientation et de la vitesse du dispositif expérimental. Cet effet peut s'expliquer par des couplages avec des champs de fond définissant une orientation privilégiée de l'espace-temps, comme c'est le cas dans le SME. Pour des expériences au sol ou satellisées, animées d'un mouvement régulier (mouvement orbital du satellite, rotation du laboratoire par rapport au centre de la Terre, révolution de la Terre autour du Soleil, etc...), on recherche donc des signaux périodiques qui indiqueraient une dépendance des lois de la physique non-gravitationnelle en fonction du mouvement du laboratoire dans l'espace.

Dans le cadre de ce travail, nous avons recherché des violations d'invariance de Lorentz dans deux secteurs du SME : celui de la matière et celui de la matière couplée à la gravitation. Ces deux analyses ont été menées séparément grâce à deux expériences extrêmement différentes.

Le test d'invariance de Lorentz dans le secteur SME de la matière a été réalisé grâce à des données de fréquence provenant d'une horloge à atomes froids de  $^{133}\text{Cs}$  et de  $^{87}\text{Rb}$ , en opération au SYRTE et contribuant habituellement à l'élaboration des échelles de temps nationales et internationales.

Cette expérience consiste à rechercher des variations temporelles de la fréquence de



transition hyperfine entre niveaux magnétisés  $|F = 3, m_F\rangle \rightarrow |F = 4, m_F\rangle$  de l'atome de  $^{133}\text{Cs}$ . Cela revient à forcer l'orientation des spins atomiques suivant une direction fixe, ici celle d'un champ magnétique uniforme, et à rechercher une direction privilégiée au travers des variations de fréquence de transition hyperfine selon l'orientation de ces spins dans l'espace.

Pour cette expérience, nous avons disposé de deux jeux de données pris à environ 6 mois d'intervalle, qui permettent de contraindre des violations d'invariance de Lorentz liées au mouvement du laboratoire, aussi bien à l'échelle de la journée que de l'année. Ces violations sont liées à un coefficient SME du secteur de la matière, appelé  $\tilde{c}_{\mu\nu}$ . Les valeurs prises par ce coefficient peuvent dépendre de la particule à l'origine de la violation d'invariance de Lorentz. Dans notre cas, il traduit une anisotropie de la relation de dispersion des particules constituant le noyau atomique (protons et neutrons).

La première analyse de ces données, réalisée en 2006, avait permis de contraindre 8 des 9 composantes du tenseur  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  pour le proton. Ces contraintes avaient été estimées uniquement à partir des variations journalières de la fréquence de transition hyperfine et en considérant un modèle qui dépendait au premier ordre de la vitesse du laboratoire par rapport au Soleil. Nous avons pu étendre la portée de ce test grâce à des efforts de modélisation, incluant la prise en compte des termes annuels, de termes de second ordre en vitesse - en collaboration avec Q. Bailey (ERAU, Arizona) -, et l'utilisation d'un modèle nucléaire avancé. Cette dernière amélioration a été permise grâce une collaboration - initiée dans le cadre de cette thèse - avec des membres de l'Institut de Physique Nucléaire (IPN) d'Orsay.

Le résultat de cette seconde analyse est l'amélioration jusqu'à 12 ordres de grandeur des limites sur les 9 composantes du tenseur  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  pour le neutron et de 4 ordres de grandeur sur la neuvième composante du coefficient  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  liée au proton, ces coefficients n'apparaissant pas dans la première analyse.

Plusieurs perspectives sont envisageables, notamment de nouvelles mesures qui permettront de mieux contraindre les variations annuelles de la fréquence de transition hyperfine et les coefficients SME dépendants de ces termes. Par ailleurs, d'autres coefficients SME pourraient être contraints grâce à un modèle nucléaire adapté, il serait donc intéressant d'envisager une poursuite de la collaboration avec l'IPN. Une autre perspective importante de ce travail est la mission ACES-PHARAO, dont le lancement est prévu en 2020, et qui pourrait permettre de réaliser un test équivalent, avec un gain probable d'un ordre de grandeur sur les composantes du coefficient  $\tilde{c}_{\mu\nu}$ .

Le second test réalisé dans le cadre de cette thèse est un test spatial, utilisant les don-

nées de la mission MICROSCOPE pour rechercher des violations d'invariance de Lorentz dans le secteur de la matière couplée à la gravitation. Cette mission a pour but principal la réalisation d'un test d'universalité de la chute libre, en comparant l'accélération relative de deux masses d'épreuve de composition différente.

Le test d'invariance de Lorentz consiste ici à rechercher une variation de l'accélération relative des masses selon l'orientation de l'axe sensible de l'instrument dans l'espace. On recherche donc des modulations de l'accélération relative dont la fréquence est liée à la fréquence orbitale du satellite et à sa fréquence de rotation propre.

Les données sont divisées en sessions d'une centaine d'orbites environ et couvrent un peu plus d'une année. Toutes ces données ne sont pas accessibles pour le moment, mais nous avons pu analyser cinq sessions prises entre février et décembre 2017. Ces données nous permettent de rechercher une large gamme de modulations et notamment des modulations annuelles. Compte tenu du degré de corrélation du bruit et de la forte dispersion dans le temps de ces sessions de données, nous avons opté pour une analyse temporelle de type moindres-carrés Monte-Carlo (LSMC), qui nous a permis de réaliser une analyse combinée de nos cinq sessions. Ce travail s'intègre dans le cadre de deux collaborations, l'une avec les équipes de l'ONERA et de l'OCA impliquées dans le déroulement de la mission MICROSCOPE, et l'autre avec des spécialistes du SME, Q. Bailey (ERAU, Arizona) et J. Tasson (Carleton College, Minnesota).

Bien que notre méthode surestime d'environ un facteur 2 les incertitudes sur les paramètres de nos modèles, nous obtenons des résultats très encourageants en ce qui concerne les contraintes sur les coefficients SME. Nous améliorons en effet de 1 à 4 ordres de grandeur les contraintes sur 8 coefficients SME, appelés  $\alpha a_\mu$  et  $\alpha e_\mu$ . Ces derniers affectent la dynamique des corps en fonction de leur composition.

Ce travail prospectif avait pour objectif initial le développement d'un modèle SME et la mise en place d'outils d'analyse adaptés à la mission MICROSCOPE. Les perspectives sont extrêmement riches, notamment en terme de perfectionnement de la méthode d'analyse des données. De plus, de nouvelles données seront disponibles dans les prochains mois et permettront d'améliorer les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse. Il serait également intéressant de tester d'autres théories alternatives, par exemple en implémentant des modèles permettant de contraindre des paramètres de la matière noire.

Ces deux analyses n'ont pas mis en évidence de signatures pouvant découler d'une violation d'invariance de Lorentz, mais elle ont permis d'améliorer de plusieurs ordres de grandeurs les contraintes sur 36 coefficients SME, aussi bien dans le secteur de la matière que dans celui de la matière couplée à la gravitation. Dans le cas des limites

obtenues dans le secteur de la matière, notre analyse a permis - pour les six composantes les moins contraintes du coefficient  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  - d'atteindre et même de descendre en dessous du seuil de  $10^{-19}$  GeV, correspondant à la sensibilité à partir de laquelle on estime qu'il serait possible d'observer des violations d'invariance de Lorentz. Nous avons également amélioré de 2 à 4 ordres de grandeur la totalité des composantes de deux coefficients SME du secteur gravitationnel :  $\alpha a_\mu$  et  $\alpha e_\mu$ . Ces deux tests illustrent par ailleurs la grande variété du SME et la diversité des expériences permettant d'explorer la physique au-delà du Modèle Standard et de la Relativité Générale.

## Dérivation du modèle SME initial pour la transition entre les sous-niveaux hyperfins $|F = 3, m_F\rangle$ et $|F' = 4, m_F\rangle$ du $^{133}\text{Cs}$

### Table des matières

<b>A.1 Dérivation du modèle dans le référentiel du laboratoire</b>	<b>125</b>
--	------------

### A.1 Dérivation du modèle dans le référentiel du laboratoire

Le décalage en énergie des sous niveaux hyperfins  $|F, m_F\rangle$  dû à une particule de type  $w$  dans le cas d'une violation d'invariance de Lorentz peut s'exprimer comme :

$$\delta E_{1,w} = \langle F, m_F | \delta h_{1,w} | F, m_F \rangle \quad (\text{A.1})$$

où  $\delta h_{1,w}$  est l'hamiltonien représentant la perturbation des niveaux créée par une particule de type  $w$ .

On rappelle que, dans son état fondamental, l'atome de  $^{133}\text{Cs}$  possède un moment cinétique total  $F = I + S^1$  avec  $I$  le spin du noyau et  $S = 1/2$  le spin de l'électron de valence, et que sa projection sur l'axe de quantification (vertical) est  $m_F \hbar$ .

La contribution totale des  $N$  particules (électrons, protons, neutrons) constituant l'atome s'obtient en sommant l'ensemble des contributions individuelles de chaque particule (Eq. A.2).

$$\delta E_N = \langle F, m_F | \delta h_N | F, m_F \rangle \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$\delta h_N = \sum_w \sum_{i=1}^N \delta h_{i,w} \quad (\text{A.3})$$

---

1. Dans l'état fondamental du  $^{133}\text{Cs}$ , l'unique électron de valence est situé sur une orbital associée à un moment cinétique orbital nul.

Le décalage en énergie des niveaux hyperfins peut être exprimé en terme de valeurs moyennes d'opérateurs tensoriels sphériques  $T_q^{(k)}$  de rang  $k$  et de composante  $q$ . Ces derniers sont associés, par définition, aux différents moments de l'expansion multipolaire du décalage en énergie : un moment d'ordre  $k$  sera associé à un tenseur de même rang [48]. Dans notre cas, ce décalage est majoritairement dû à des contributions d'origine dipolaire ( $k=1$ ) et quadripolaire ( $k=2$ ), respectivement associées aux tenseurs  $D_0^{(1)}$  et  $Q_0^{(2)}$  [48] :

$$\langle F, m_F | \delta h_N | F, m_F \rangle = \langle F, m_F | D_0^{(1)} | F, m_F \rangle + \langle F, m_F | Q_0^{(2)} | F, m_F \rangle \quad (\text{A.4})$$

On peut exprimer l'équation A.4 en fonction de l'état extrémal  $|F, F\rangle$  grâce au théorème de Wigner-Eckart [124] qui établit que les éléments de matrice d'un opérateur tensoriel de rang  $k$  noté  $T_q^{(k)}$ ,  $q$  étant la  $q$ -ième composante de l'opérateur, estimés dans l'état  $|F, m_F\rangle$  sont reliés à leur estimation dans l'état  $|F, F\rangle$  par la relation :

$$\langle F, m_F | T_q^{(k)} | F, m_F \rangle = \alpha \langle F, k; m_F, q | F, m_F \rangle \quad (\text{A.5})$$

avec  $\alpha$  est une constante et  $\langle F, k; m_F, q | F, m_F \rangle$  un coefficient de Clebsch-Gordan.

Les contributions dipolaires et quadripolaires peuvent alors s'écrire comme :

$$\langle F, m_F | D_0^{(1)} | F, m_F \rangle = \hat{m}_F \langle F, F | D_0^{(1)} | F, F \rangle \quad (\text{A.6})$$

$$\langle F, m_F | Q_0^{(2)} | F, m_F \rangle = \tilde{m}_F \langle F, F | Q_0^{(2)} | F, F \rangle \quad (\text{A.7})$$

Les préfacteurs  $\hat{m}_F$  et  $\tilde{m}_F$  sont des ratios de coefficients de Clebsch-Gordan :

$$\hat{m}_F = \frac{\langle F, 1; m_F, 0 | F, m_F \rangle}{\langle F, 1; F, 0 | F, F \rangle} = \frac{m_F}{F} \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{m}_F = \frac{\langle F, 2; m_F, 0 | F, m_F \rangle}{\langle F, 2; F, 0 | F, F \rangle} = -\frac{F(F+1) - 3m_F^2}{F(2F-1)} \quad (\text{A.9})$$

On veut maintenant exprimer les décalages dipolaire et quadripolaire en fonction des états électroniques et nucléaires afin de calculer les contributions respectives des électrons et des nucléons au décalage total en énergie des sous-niveaux  $|F, m_F\rangle$ .

On suppose que les opérateurs moment dipolaire et quadripolaire agissent de manière indépendante sur les états électroniques et nucléaires, ce qui permet de calculer indépendamment les contributions de chaque type de particule. Cela revient à écrire pour

un état correspondant à un moment angulaire total  $F = I + S^2$  :

$$\begin{aligned} \langle F, F | D_0^{(1)} | F, F \rangle &= \langle I, S, m_I = I, m_S = S | D_0^{(1)} | I, S, m_I = I, m_S = S \rangle \\ &= \langle I, I | D_0^{(1)} \text{nucl.} | I, I \rangle \langle S, S | S, S \rangle + \langle S, S | D_0^{(1)} \text{elect.} | S, S \rangle \langle I, I | I, I \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Ces différentes contributions peuvent être associées à des combinaisons linéaires de coefficients SME, comme décrit dans [48] et [50], qui sont explicitées pour chaque type de particule (électrons, protons et neutrons) dans les équations A.11, A.12 et A.13.

$$\langle S, S | D_0^{(1)} | S, S \rangle_e = \beta_e \tilde{b}_3^e + \delta_e \tilde{d}_3^e + \kappa_e \tilde{g}_d^e \quad (\text{A.11})$$

$$\langle I, I | D_0^{(1)} | I, I \rangle_{p,n} = \sum_{w=p,n} \left( \beta_w \tilde{b}_3^w + \delta_w \tilde{d}_3^w + \kappa_w \tilde{g}_d^w \right) \quad (\text{A.12})$$

$$\langle I, I | Q_0^{(2)} | I, I \rangle_{p,n} = \sum_{w=p,n} \left( \gamma_w \tilde{c}_q^w + \lambda_w \tilde{g}_q^w \right) \quad (\text{A.13})$$

Les électrons ne contribuent pas au moment quadripolaire, car le seul électron de valence de l'atome se trouve sur une orbitale  $L = 0$  à symétrie sphérique.

Dans notre cas, nous nous intéressons à la transition  $|F = 3, m_F\rangle \longleftrightarrow |F' = 4, m_F\rangle$  de l'état fondamental du  $^{133}\text{Cs}$ , *i.e.* la transition entre un niveau  $F = I - S$  et un niveau  $F' = I + S$ .

Dans le cas où  $F' = I + S$  avec  $m_I = I$  et  $m_S = S$ , le décalage en énergie du niveau correspond à :

$$\langle F', F' | \delta h_N | F', F' \rangle = \hat{m}_{F'} \left( \langle I, I | D_0^{(1)} | I, I \rangle + \langle S, S | D_0^{(1)} | S, S \rangle \right) + \tilde{m}_{F'} \langle I, I | Q_0^{(2)} | I, I \rangle \quad (\text{A.14})$$

Le second cas, où  $F = I - S$ , implique deux couples de valeurs pour  $m_I$  et  $m_S$  :  $\{m_I = I, m_S = -S\}$  et  $\{m_I = I - 1, m_S = S\}$ . L'état  $|F, F\rangle$  est donc une combinaison linéaire de ces deux états  $|I, S, m_I, m_S\rangle$  :

$$|F, F\rangle = c_1 |I, S, I, -S\rangle + c_2 |I, S, I - 1, S\rangle \quad (\text{A.15})$$

Les constantes  $c_1 = \langle I = \frac{7}{2}, S = \frac{1}{2}, m_I = \frac{7}{2}, m_S = -\frac{1}{2} | F = 3, m_F = 3 \rangle$  et  $c_2 = \langle I = \frac{7}{2}, S = \frac{1}{2}, m_I = \frac{5}{2}, m_S = \frac{1}{2} | F = 3, m_F = 3 \rangle$  sont des coefficients de Clebsch-Gordan valant respectivement  $\sqrt{\frac{7}{8}}$  et  $-\sqrt{\frac{1}{8}}$ .

En appliquant de nouveau le théorème de Wigner-Eckart, on peut calculer des ratios de coefficients de Clebsch-Gordan  $\hat{m}_I$  et  $\tilde{m}_I$  analogues à ceux déterminés aux équations

---

2. On rappelle que I désigne le moment cinétique de spin du noyau et S celui de l'unique électron de valence de l'état fondamental du  $^{133}\text{Cs}$ .

Préfacteur	Valeur
$\hat{m}_{F'} - \hat{m}_F (c_1^2 + \hat{m}_I c_2^2)$	$-\frac{m_F}{14}$
$\hat{m}_{F'} - \hat{m}_F (\hat{m}_S c_1^2 + c_2^2)$	$\frac{m_F}{2}$
$\tilde{m}_{F'} - \tilde{m}_F (c_1^2 + \tilde{m}_I c_2^2)$	$-\frac{m_F^2}{14}$

TABLEAU A.1 – Calcul des préfacteurs du modèle pour la transition  $|F = 3, m_F\rangle \longleftrightarrow |F' = 4, m_F\rangle$

A.8 et A.9, et ainsi exprimer le décalage en énergie du niveau  $F = I - S$  comme :

$$\begin{aligned} \langle F, F | \delta h_N | F, F \rangle &= \hat{m}_F \left[ (c_1^2 + \hat{m}_I c_2^2) \langle I, I | D_0^{(1)} | I, I \rangle + (\hat{m}_S c_1^2 + c_2^2) \langle S, S | D_0^{(1)} | S, S \rangle \right] \\ &+ \tilde{m}_F (c_1^2 + \tilde{m}_I c_2^2) \langle I, I | Q_0^{(2)} | I, I \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

avec :

$$\tilde{m}_I = -\frac{I(I+1) - 3(I-1)^2}{I(2I-1)} \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{m}_I = \frac{I-1}{I} \quad (\text{A.18})$$

$$\hat{m}_S = -1 \quad (\text{A.19})$$

En décalage relatif des niveaux hyperfins résultant d'une violation d'invariance de Lorentz pour une transition  $|F = I - S, m_F\rangle \longleftrightarrow |F' = I + S, m_F\rangle$  est donc donné par :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \delta E' - \delta E \\ &= \left[ \hat{m}_{F'} - \hat{m}_F (c_1^2 + \hat{m}_I c_2^2) \right] \langle I, I | D_0^{(1)} | I, I \rangle \\ &+ \left[ \hat{m}_{F'} - \hat{m}_F (\hat{m}_S c_1^2 + c_2^2) \right] \langle S, S | D_0^{(1)} | S, S \rangle \\ &+ \left[ \tilde{m}_{F'} - \tilde{m}_F (c_1^2 + \tilde{m}_I c_2^2) \right] \langle I, I | Q_0^{(2)} | I, I \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

En calculant A.20 pour  $I = \frac{7}{2}$  et  $S = \frac{1}{2}$ , on obtient le décalage total en fréquence des sous-niveaux hyperfins :

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \frac{m_F}{2h} \left( \beta_e \tilde{b}_3^e + \delta_e \tilde{d}_3^e + \kappa_e \tilde{g}_d^e \right) - \frac{m_F}{14h} \sum_{w=p,n} \left( \beta_w \tilde{b}_3^w + \delta_w \tilde{d}_3^w + \kappa_w \tilde{g}_d^w \right) \\ &- \frac{m_F^2}{14h} \sum_{w=p,n} \left( \gamma_w \tilde{c}_q^w + \lambda_w \tilde{g}_q^w \right) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$



## Composition détaillée du modèle étendu pour le test SME de la transition hyperfine du $^{133}\text{Cs}$

### Table des matières

<b>B.1 Transformation entre référentiel du laboratoire et RHNT</b>	<b>129</b>
B.1.1 Matrice de transformation de Lorentz en vitesse (d'ordre 2)	130
B.1.2 Matrice de rotation . . . . .	132
<b>B.2 Amplitudes SME détaillées pour chaque fréquence du modèle <math>O(\beta^2)</math></b>	<b>132</b>

Cette annexe présente la composition détaillée du modèle SME utilisé pour l'analyse, ainsi que la transformation entre référentiel du laboratoire et référentiel héliocentrique non tournant (RHNT). Le modèle est exprimé en fonction des coefficients liés au référentiel héliocentrique et inclut des termes en  $\beta^n$ , avec  $n \leq 2$ . Les autres paramètres intervenant dans le modèle sont résumés Table B.1.

## B.1 Transformation entre référentiel du laboratoire et RHNT

Comme expliqué Section 2.4.3, on effectue une transformation entre le référentiel du laboratoire et le RHNT. La matrice associée à cette transformation, notée  $\mathbb{T}$ , est le produit d'une matrice de transformation de Lorentz en vitesse, notée  $\Lambda$ , et d'une matrice de rotation, notée  $R$ . Nous donnons ici les éléments de matrice de  $\Lambda^{(2)}$  et  $R$ , les matrices permettant d'établir la transformation pour le modèle  $O(\beta^2)$ .



Notation	Paramètre	Valeur
$v_l$	Vitesse moyenne du laboratoire par rapport au centre de la Terre	464 m.s <sup>-1</sup>
$v_{\oplus}$	Vitesse orbitale moyenne de la Terre	29885 m.s <sup>-1</sup>
$\beta_l$	Vitesse réduite du laboratoire	1.5 10 <sup>-6</sup>
$\beta_{\oplus}$	Vitesse réduite de la Terre	9.9 10 <sup>-5</sup>
$\chi$	Colatitude du laboratoire dans le référentiel géocentrique	41.2°
$\eta$	Inclinaison de l'axe de rotation de la Terre	23.2°
$\omega_{\oplus}$	Fréquence de rotation de la Terre	7.3 10 <sup>-5</sup> rad.s <sup>-1</sup>
$\Omega_{\oplus}$	Fréquence de révolution de la Terre	2.0 10 <sup>-8</sup> rad.s <sup>-1</sup>
$T$	Temps écoulé depuis l'équinoxe local de Paris, <i>i.e</i> depuis le 30 Mars 2005 11 :29 UTC	s
$T_0$	Écart de temps entre l'équinoxe du 20 Mars 2005 à 12 :33 UTC et l'équinoxe local de Paris du 30 Mars à 2005 11 :29 UTC	859559 s

TABLEAU B.1 – Notations

### B.1.1 Matrice de transformation de Lorentz en vitesse (d'ordre 2)

Pour chaque élément  $\Lambda^{(2)}[i, j]$ ,  $i$  désigne le numéro de ligne et  $j$  le numéro de colonne de l'élément de matrice.

$$\Lambda^{(2)}[0, 0] = \frac{\beta_{\oplus}^2}{2} - \beta_{\oplus} \cos(\eta) \beta_l \sin(\chi) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \quad (\text{B.1})$$

$$- \beta_{\oplus} \beta_l \sin(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \sin([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) + \frac{1}{2} \beta_l^2 \sin^2(\chi) + 1$$

$$\Lambda^{(2)}[1, 0] = \beta_{\oplus} \sin([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) - \beta_l \sin(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \quad (\text{B.2})$$

$$\Lambda^{(2)}[2, 0] = \beta_l \sin(\chi) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) - \beta_{\oplus} \cos(\eta) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \quad (\text{B.3})$$

$$\Lambda^{(2)}[3, 0] = \beta_{\oplus} \sin(\eta) (-\cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus})) \quad (\text{B.4})$$

$$\Lambda^{(2)}[0, 1] = \beta_{\oplus} \sin([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) - \beta_l \sin(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \quad (\text{B.5})$$

$$\Lambda^{(2)}[1, 1] = -\beta_{\oplus} \beta_l \sin(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \sin([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \quad (\text{B.6})$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_{\oplus}^2 \sin^2([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus})$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_l^2 \sin^2(\chi) \sin^2(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) + 1$$

$$\Lambda^{(2)}[2, 1] = \frac{1}{2} \beta_{\oplus} \cos(\eta) \beta_l \sin(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \quad (\text{B.7})$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_{\oplus} \beta_l \sin(\chi) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \sin([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus})$$

$$- \frac{1}{2} \beta_{\oplus}^2 \cos(\eta) \sin([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus})$$

$$- \frac{1}{2} \beta_l^2 \sin^2(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus})$$

$$\Lambda^{(2)}[3, 1] = \frac{1}{2} \beta_{\oplus} \sin(\eta) \beta_l \sin(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \quad (\text{B.8})$$

$$- \frac{1}{2} \beta_{\oplus}^2 \sin(\eta) \sin([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus})$$

$$\Lambda^{(2)}[0, 2] = \beta_l \sin(\chi) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) - \beta_{\oplus} \cos(\eta) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \quad (\text{B.9})$$

$$\Lambda^{(2)}[1, 2] = \frac{1}{2} \beta_{\oplus} \cos(\eta) \beta_l \sin(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \quad (\text{B.10})$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_{\oplus} \beta_l \sin(\chi) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \sin([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus})$$

$$- \frac{1}{2} \beta_{\oplus}^2 \cos(\eta) \sin([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus})$$

$$- \frac{1}{2} \beta_l^2 \sin^2(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus})$$

$$\Lambda^{(2)}[2, 2] = -\beta_{\oplus} \cos(\eta) \beta_l \sin(\chi) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \quad (\text{B.11})$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_{\oplus}^2 \cos^2(\eta) \cos^2([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus})$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_l^2 \sin^2(\chi) \cos^2(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) + 1$$

$$\Lambda^{(2)}[3, 2] = \frac{1}{2} \beta_{\oplus}^2 \sin(\eta) \cos(\eta) \cos^2([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \quad (\text{B.12})$$

$$- \frac{1}{2} \beta_{\oplus} \sin(\eta) \beta_l \sin(\chi) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus})$$

$$\Lambda^{(2)}[0, 3] = \beta_{\oplus} \sin(\eta) (-\cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus})) \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{(2)}[1, 3] &= \frac{1}{2} \beta_{\oplus} \sin(\eta) \beta_l \sin(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \quad (\text{B.14}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta_{\oplus}^2 \sin(\eta) \sin([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{(2)}[2, 3] &= \frac{1}{2} \beta_{\oplus}^2 \sin(\eta) \cos(\eta) \cos^2([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \quad (\text{B.15}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta_{\oplus} \sin(\eta) \beta_l \sin(\chi) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) \cos([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) \end{aligned}$$

$$\Lambda^{(2)}[3, 3] = \frac{1}{2} \beta_{\oplus}^2 \sin^2(\eta) \cos^2([T_{\oplus} + T_0] \Omega_{\oplus}) + 1 \quad (\text{B.16})$$

### B.1.2 Matrice de rotation

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\chi) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) & \cos(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) & -\sin(\chi) \\ -\sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) & \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) & 0 \\ \sin(\chi) \cos(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) & \sin(\chi) \sin(T_{\oplus} \omega_{\oplus}) & \cos(\chi) \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

## B.2 Amplitudes SME détaillées pour chaque fréquence du modèle $O(\beta^2)$

Les équations qui suivent correspondent à l'expression de l'amplitude des signaux de violations en fonctions des différents paramètres SME du modèle  $O(\beta^2)$ . L'observable  $\nu_c$  s'exprime de la manière suivante :

$$\nu_c = -\frac{1}{7h} \sum_{w=p,n} \gamma_w \left( A + \sum_n C_{\omega_n} \cos(\omega_n T) + S_{\omega_n} \sin(\omega_n T) \right) \quad (\text{B.18})$$

avec  $\omega_n = \Omega, 2\Omega, \omega, \omega \pm \Omega, \omega \pm 2\Omega, 2\omega, 2\omega \pm \Omega, 2\omega \pm 2\Omega, 3\omega \pm \Omega$ . On note également  $A$  l'amplitude associée à la constante apparaissant dans le modèle, ainsi que  $C_{\omega_n}$  et  $S_{\omega_n}$  les amplitudes des quadratures associées à la fréquence  $\omega_n$ .

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{16} (1 + 3 \cos(2\chi)) \sin(\eta)^2 \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_- - \frac{1}{32} (1 + 3 \cos(2\chi)) \sin(2\eta) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} \quad (\text{B.19}) \\ &\quad + \left( \frac{4}{3} \sin(\chi)^2 \beta_l^2 + \frac{1}{12} (1 + 3 \cos(2\eta)) (1 + 3 \cos(2\chi)) \beta_{\oplus}^2 \right) \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}} \\ &\quad + \left( \frac{1}{4} (1 + 3 \cos(2\chi)) + \frac{1}{6} \sin(\eta)^2 \beta_l^2 - \frac{1}{96} (3 \cos(2\eta) - 7) (1 + 3 \cos(2\chi)) \beta_{\oplus}^2 \right) \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_\Omega = & -\frac{3}{4} \cos(\eta) \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_\oplus \beta_i \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} - \frac{3}{4} \cos(\chi) \sin(T_0) \sin(\chi)^2 \beta_\oplus \beta_i \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} \\
& -\frac{1}{4} \cos(\eta) (1 + 3 \cos(2\chi)) \cos(T_0) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Y}} + \frac{1}{2} (1 + 3 \cos(2\chi)) \cos(T_0) \sin(\eta) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Z}} \\
& + \frac{1}{4} (1 + 3 \cos(2\chi)) \sin(T_0) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{X}}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}
S_\Omega = & -\frac{3}{4} \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_\oplus \beta_i \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} + \frac{3}{4} \cos(\eta) \cos(\chi) \sin(T_0) \sin(\chi)^2 \beta_\oplus \beta_i \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} \\
& + \frac{1}{4} (1 + 3 \cos(2\chi)) \cos(T_0) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{X}} + \frac{1}{4} (1 + 3 \cos(2\chi)) \cos(\eta) \sin(T_0) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Y}} \\
& - \frac{1}{2} (1 + 3 \cos(2\chi)) \sin(\eta) \sin(T_0) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Z}}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}
C_{2\Omega} = & \frac{1}{16} (1 + 3 \cos(2\chi)) \sin(2T_0) \sin(\eta) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} - \frac{1}{8} \cos(\eta) (1 + 3 \cos(2\chi)) \sin(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} \\
& + \frac{1}{16} (1 + 3 \cos(2\chi)) \cos(2T_0) \sin(\eta)^2 \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} - \frac{1}{32} (3 + \cos(2\eta)) (1 + 3 \cos(2\chi)) \cos(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{-} \\
& - \frac{1}{16} \cos(\eta) (1 + 3 \cos(2\chi)) \cos(2T_0) \sin(\eta) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} - \frac{1}{2} (1 + 3 \cos(2\chi)) \cos(2T_0) \sin(\eta)^2 \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned}
S_{2\Omega} = & \frac{1}{16} (1 + 3 \cos(2\chi)) \cos(2T_0) \sin(\eta) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} - \frac{1}{16} (1 + 3 \cos(2\chi)) \sin(2T_0) \sin(\eta)^2 \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} \\
& + \frac{1}{32} (3 + \cos(2\eta)) (1 + 3 \cos(2\chi)) \sin(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{-} - \frac{1}{8} \cos(\eta) (1 + 3 \cos(2\chi)) \cos(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} \\
& + \frac{1}{16} \cos(\eta) (1 + 3 \cos(2\chi)) \sin(2T_0) \sin(\eta) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} (1 + 3 \cos(2\chi)) \sin(2T_0) \sin(\eta)^2 \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}}
\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}
C_{\omega-2\Omega} = & +\frac{3}{8} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(2\chi) \sin(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin(2\chi) \sin(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{-} \\
& \frac{3}{8} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \cos(\eta) \sin(2\chi) \cos(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin(2\chi) \cos(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} \\
& - \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\eta) \sin(2\chi) \sin(2T_0) \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} + 2 \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\eta) \sin(2\chi) \sin(2T_0) \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}}
\end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned}
C_{\omega-\Omega} = & -\frac{1}{6}(1 + \cos(\eta)) \sin(\chi) \cos(T_0) \beta_{\oplus} \beta_l \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} + \frac{1}{8}(3 \cos(2\chi) - 1) \sin(\chi) \sin(\eta) \cos(T_0) \beta_{\oplus} \beta_l \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} \\
& + \frac{1}{16}(\cos(\eta) - 1)(5 + 3 \cos(2\chi)) \sin(\chi) \cos(T_0) \beta_{\oplus} \beta_l \tilde{\mathbf{c}}_{-} \\
& + \frac{1}{8}(3 \cos(2\chi) - 1) \sin(\chi) \sin(\eta) \sin(T_0) \beta_{\oplus} \beta_l \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} \\
& + \frac{1}{16}(1 - \cos(\eta))(5 + 3 \cos(2\chi)) \sin(\chi) \sin(T_0) \beta_{\oplus} \beta_l \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}}
\end{aligned} \tag{B.25}$$

$$C_{\omega} = \left[ \frac{3}{16}(\cos(2\eta) - 3) \sin(2\chi) \beta_{\oplus}^2 - 3 \cos(\chi) \sin(\chi) \right] \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} + \sin(\chi) \beta_l \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Y}} - \frac{3}{16} \sin(2\eta) \sin(2\chi) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} \tag{B.26}$$

$$\begin{aligned}
C_{\omega+\Omega} = & \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 (5 + 3 \cos(2\chi)) \cos(T_0) \sin(\chi) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{-} + \frac{3}{4} \sin(\eta) \sin(2\chi) \sin(T_0) \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Y}} \\
& + \frac{1}{6}(1 - \cos(\eta)) \cos(T_0) \sin(\chi) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} + \frac{1}{8}(3 \cos(2\chi) - 1) \cos(T_0) \sin(\eta) \sin(\chi) \beta_{\oplus} \beta_l \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} \\
& + \frac{1}{8}(5 + 3 \cos(2\chi)) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi) \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} - \frac{4}{3}(\cos(\eta) - 1) \cos(T_0) \sin(\chi) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}} \\
& + \frac{3}{4} \sin(\eta) \sin(2\chi) \cos(T_0) \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{X}} + \frac{3}{4}(\cos(\eta) - 1) \sin(2\chi) \sin(T_0) \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Z}} \\
& + \frac{1}{4}(1 - 3 \cos(2\chi)) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin(\chi) \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}}
\end{aligned} \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned}
C_{\omega+2\Omega} = & \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin(2\chi) \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{-} - \frac{3}{8} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(2\chi) \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} \\
& - \frac{1}{8} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\eta) \sin(2\chi) \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} + 2 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\eta) \sin(2\chi) \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}} \\
& + \frac{3}{16} \cos(2T_0) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \left( \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\eta}{2}\right) \right) \sin(2\chi) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} \\
& - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos(2T_0) \sin(2\chi) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}}
\end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}
S_{\omega-2\Omega} = & -\frac{3}{8} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(2\chi) \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin(2\chi) \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{-} \\
& + \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\eta) \sin(2\chi) \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin(2\chi) \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} \\
& + \frac{3}{16} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\eta}{2}\right) \right] \sin(2\chi) \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} \\
& - 2 \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos(2T_0) \sin(\eta) \sin(2\chi) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}}
\end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
S_{\omega-\Omega} = & -\frac{1}{16} \sin(\eta) (3 \sin(3\chi) - 5 \sin(\chi)) \cos(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} + \frac{3}{4} \sin(\eta) \sin(2\chi) \cos(T_0) \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Y}} \\
& -\frac{1}{16} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 [3 \sin(3\chi) + 7 \sin(\chi)] \cos(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} + \frac{3}{4} \sin(\eta) \sin(2\chi) \sin(T_0) \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{X}} \\
& -\frac{1}{6} (1 + \cos(\eta)) \sin(\chi) \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} - \frac{1}{16} \sin(\eta) (5 \sin(\chi) - 3 \sin(3\chi)) \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} \\
& -\frac{1}{16} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 (3 \sin(3\chi) + 7 \sin(\chi)) \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{-} + \frac{3}{4} (1 + \cos(\eta)) \sin(2\chi) \cos(T_0) \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Z}} \\
& -\frac{4}{3} (1 + \cos(\eta)) \sin(\chi) \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}} \tag{B.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\omega} = & -\sin(\chi) \beta_l \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{X}} - \frac{3}{4} \cos(\chi) \sin(\chi) [4 + \beta_{\oplus}^2] \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} + \frac{3}{4} \cos(\eta) \sin(\eta) \cos(\chi) \sin(\chi) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{-} \\
& + \frac{1}{4} \cos(\eta) \sin(\eta) \cos(\chi) \sin(\chi) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} - 4 \cos(\eta) \sin(\eta) \cos(\chi) \sin(\chi) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}} \tag{B.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\omega+\Omega} = & \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 [5 + 3 \cos(2\chi)] \sin(\chi) \cos(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} + \frac{3}{4} [\cos(\eta) - 1] \sin(2\chi) \cos(T_0) \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Z}} \\
& -\frac{1}{8} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 [5 + 3 \cos(2\chi)] \sin(\chi) \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{-} + \frac{1}{6} [\cos(\eta) - 1] \sin(\chi) \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} \\
& + \frac{1}{8} [1 - 3 \cos(2\chi)] \sin(\eta) \sin(\chi) \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} - \frac{3}{4} \sin(\eta) \sin(2\chi) \sin(T_0) \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{X}} \\
& + \frac{4}{3} [\cos(\eta) - 1] \sin(\chi) \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}} + \frac{3}{4} \sin(\eta) \sin(2\chi) \cos(T_0) \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Y}} \\
& + \frac{1}{4} [1 - 3 \cos(2\chi)] \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin(\chi) \cos(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} \tag{B.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\omega+2\Omega} = & \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin(2\chi) \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{-} - \frac{3}{8} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(2\chi) \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} \\
& -\frac{1}{8} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\eta) \sin(2\chi) \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin(2\chi) \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} \\
& + \frac{3}{16} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \left[ \sin\left(\frac{3\eta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \right] \sin(2\chi) \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} \\
& + 2 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\eta) \sin(2\chi) \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}} \tag{B.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2\omega-2\Omega} = & +\frac{3}{8} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\eta) \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin(\chi)^2 \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} \\
& -\frac{3}{8} [\cos(\eta) - 1] \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{-} - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} \\
& + [1 + \cos(\eta)] \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}} \\
& + \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 [1 + \cos(\eta)] \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} \tag{B.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2\omega-\Omega} = & -\frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \sin(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} - \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Y}} \\
& + \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \sin(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_- - \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(T_0) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{X}} \\
& + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} + \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}}
\end{aligned} \tag{B.35}$$

$$\begin{aligned}
C_{2\omega} = & +\frac{3}{8} \cos(\eta) \sin(\eta) \sin(\chi)^2 \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} - \frac{1}{8} \sin(\eta)^2 \sin(\chi)^2 \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} - \sin(\eta)^2 \sin(\chi)^2 \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}} \\
& - \left[ \frac{1}{2} \sin(\chi)^2 (3 + \beta_l^2) + \frac{3}{16} (3 + \cos(2\eta)) \beta_\oplus^2 \right] \sin(\chi)^2 \tilde{\mathbf{c}}_-
\end{aligned} \tag{B.36}$$

$$\begin{aligned}
C_{2\omega+\Omega} = & \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} + \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Y}} \\
& - \frac{3}{4} \sin\left(\frac{\eta^2}{2}\right) \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} - \frac{3}{4} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \sin(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} \\
& - \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \sin(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_- - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(T_0) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{X}}
\end{aligned} \tag{B.37}$$

$$\begin{aligned}
C_{2\omega+2\Omega} = & \frac{3}{8} [1 + \cos(\eta)] \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_- + \frac{1}{8} [1 - \cos(\eta)] \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} \\
& - \frac{3}{8} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} \\
& + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin(\chi)^2 \sin(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} + [1 - \cos(\eta)] \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2\omega-2\Omega} = & +\frac{3}{8} [1 - \cos(\eta)] \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} - \frac{3}{8} \sin(\eta) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} \\
& + \frac{3}{8} [1 - \cos(\eta)] \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_- + \frac{1}{8} [1 + \cos(\eta)] \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} \\
& + \frac{3}{8} \sin(\eta) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} + [1 + \cos(\eta)] \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(2T_0) \beta_\oplus^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{T}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2\omega-\Omega} = & \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \sin(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} \\
& - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_- + \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{X}} \\
& - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \sin(T_0) \beta_l \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} - \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(T_0) \beta_\oplus \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{T}\mathbf{Y}}
\end{aligned} \tag{B.38}$$

$$S_{2\omega} = -\frac{3}{16} \sin(2\eta) \sin(\chi)^2 \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} - \frac{1}{16} [33 + 3 \cos(2\eta) + 8\beta_l^2] \sin(\chi)^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} S_{2\omega+\Omega} &= \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{-} - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{TX}} \\ &\quad - \frac{3}{4} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} \\ &\quad - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos(\chi) \sin(\chi)^2 \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(T_0) \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{TY}} \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} S_{2\omega+2\Omega} &= \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Y}} \\ &\quad - \frac{3}{8} [1 + \cos(\eta)] \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{-} - \frac{1}{8} [1 - \cos(\eta)] \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Q}} \\ &\quad + \frac{3}{8} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\eta) \sin(\chi)^2 \cos(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{X}} - [1 - \cos(\eta)] \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^2 \sin(2T_0) \beta_{\oplus}^2 \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{TT}} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

$$C_{3\omega-\Omega} = \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^3 \cos(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{-} - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^3 \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} \quad (\text{B.42})$$

$$C_{3\omega+\Omega} = -\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^3 \cos(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{-} - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^3 \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} \quad (\text{B.43})$$

$$S_{3\omega-\Omega} = \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^3 \cos(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^3 \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{-} \quad (\text{B.44})$$

$$S_{3\omega+\Omega} = -\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^3 \cos(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{Z}} - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \sin(\chi)^3 \sin(T_0) \beta_l \beta_{\oplus} \tilde{\mathbf{c}}_{-} \quad (\text{B.45})$$







**Publications en lien avec l'analyse des données de la  
fontaine à atomes froids de  $^{133}\text{Cs}$  et  $^{87}\text{Rb}$**

**Table des matières**

---

H. Pihan-Le Bars <i>et al.</i> , "Lorentz-symmetry test at Planck-scale suppression with nucleons in a spin-polarized 133 Cs cold atom clock", <i>PRD</i> 95, 075026 (2017)	139
H. Pihan-Le Bars <i>et al.</i> , "Lorentz-Symmetry Test at Planck-Scale Suppression With a Spin-Polarized 133 Cs Cold Atom Clock", <i>IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control</i> , 65, 6 (2018)	155

---



## Lorentz-symmetry test at Planck-scale suppression with nucleons in a spin-polarized $^{133}\text{Cs}$ cold atom clock

H. Pihan-Le Bars,<sup>1,\*</sup> C. Guerlin,<sup>1,2,†</sup> R.-D. Lasserri,<sup>3</sup> J.-P. Ebran,<sup>4</sup> Q. G. Bailey,<sup>5</sup> S. Bize,<sup>1</sup> E. Khan,<sup>3</sup> and P. Wolf<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*SYRTE, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités,  
UPMC University Paris 06, LNE, 75014 Paris, France*

<sup>2</sup>*Laboratoire Kastler Brossel, ENS-PSL Research University, CNRS, UPMC-Sorbonne Universités,  
Collège de France, 75005 Paris, France*

<sup>3</sup>*Institut de Physique Nucléaire, Université Paris-Sud, IN2P3-CNRS, F-91406 Orsay Cedex, France*

<sup>4</sup>*CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France*

<sup>5</sup>*Embry-Riddle Aeronautical University, 3700 Willow Creek Road, Prescott, Arizona 86301, USA*

(Received 12 December 2016; published 21 April 2017)

We introduce an improved model that links the frequency shift of the  $^{133}\text{Cs}$  hyperfine Zeeman transitions  $|F = 3, m_F\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F\rangle$  to the Lorentz-violating Standard Model extension (SME) coefficients of the proton and neutron. The new model uses Lorentz transformations developed to second order in boost and additionally takes the nuclear structure into account, beyond the simple Schmidt model used previously in Standard Model extension analyses, thereby providing access to both proton and neutron SME coefficients including the isotropic coefficient  $\tilde{c}_{TT}$ . Using this new model in a second analysis of the data delivered by the FO2 dual Cs/Rb fountain at Paris Observatory and previously analyzed in [1], we improve by up to 13 orders of magnitude the present maximum sensitivities for laboratory tests [2] on the  $\tilde{c}_Q$ ,  $\tilde{c}_{TJ}$ , and  $\tilde{c}_{TT}$  coefficients for the neutron and on the  $\tilde{c}_Q$  coefficient for the proton, reaching respectively  $10^{-20}$ ,  $10^{-17}$ ,  $10^{-13}$ , and  $10^{-15}$  GeV.

DOI: 10.1103/PhysRevD.95.075026

### I. INTRODUCTION

Our best current fundamental theories, General Relativity and the Standard Model of particle physics, are not expected to be valid at the Planck scale, where presumably a theory of quantum gravity holds. This, among other motivations, has given rise to the study of unified theories such as string theory or theories of quantum gravity such as loop quantum gravity. The Planck-scale energy  $E_P$  is on the order of  $10^{19}$  GeV, and the highest-energy experiments or observations are well below this scale (ultrahigh-energy cosmic rays have energy lower than  $10^{11}$  GeV). So testing these theories has been displaced to low-energy scales, where suppressed relics from Planck-scale physics may be observable, resulting in deviations from known physics.

There has been widespread interest in the last two decades in searching for such deviations, particularly among the so-called quantum gravity phenomenology [3–7]. Of the possible deviations from known physics, a central one is the breaking of the continuous space-time symmetries: Lorentz symmetry, which is the invariance under three rotations and three boosts (shown to be also

associated with the discrete charge, parity, time-reversal (*CPT*) symmetry in Refs. [8–10]). Observable spontaneous breaking of these two symmetries could for example arise in string field theory, as was suggested nearly three decades ago [11,12].

A widely used effective field theory describing Lorentz invariance violations (LIVs) and *CPT* violations is the Standard Model extension (SME) [2,13–15]. Under the conservative physical assumptions of energy-momentum conservation and observer Lorentz invariance, the SME introduces all possible Lorentz- and *CPT*-violating tensor operators in the Lagrange densities of the Standard Model (and General Relativity), parametrized by coefficients. These coefficients can be seen as background tensor fields that are constant in space-time on the scale of solar system experiments and lead to a fundamentally different LIV approach than, e.g., space- or time-varying scalar field approaches [16–19]. They are allowed to be species dependent and vanish in the case of perfect Lorentz and *CPT* symmetry. As a test framework, the SME does not predict values of the coefficients. However, they are generally expected to be suppressed by a power of  $E/E_P$  increasing with the dimension of the associated LIV operator, where  $E$  is a cutoff energy. In Ref. [20],  $E$  has been taken as the electroweak energy ( $E_{ew} \sim 10^2$  GeV), leading to suppressions by a power of  $10^{-17}$ .

\*Corresponding author.  
helene.pihan-lebars@obspm.fr

†Corresponding author.  
christine.guerlin@lkb.ens.fr

We focus here on the matter sector (electron, proton, and neutron) of the minimal SME (mSME) which includes Lorentz-violating operators of mass dimensions 3 and 4 in the Lagrange density.<sup>1</sup> Many of the coefficients are already constrained at or below their expected suppression [2]. Among still poorly constrained coefficients in this sector are, however, several components of the *CPT*-even, traceless, and symmetric  $\bar{c}_{\mu\nu}$  tensor, namely  $\tilde{c}_{TT}$  for the proton and neutron ( $10^{-11}$  GeV for laboratory experiments),  $\tilde{c}_{TJ}$  for the neutron ( $10^{-5}$  GeV), and  $\tilde{c}_Q$  for the neutron ( $10^{-14}$  GeV), where indices ( $T, X, Y, Z$ ) refer to the coordinates in the Sun centered celestial equatorial frame (SCF). In this study, reanalyzing with a more complete model the data taken in Ref. [1] on spin-polarized transitions in a  $^{133}\text{Cs}$  fountain clock, we bring the bounds for all these coefficients below or near one Planck-scale suppression (i.e.,  $10^{-17}$  GeV), thereby improving them by up to 13 orders of magnitude. We constrain for the first time independently all  $\bar{c}_{\mu\nu}$  components simultaneously. We find no evidence for Lorentz violation, which challenges suppressions generally expected from quantum gravity phenomenology or helps set limits on the cutoff energy  $E$  ([23–26]).

## II. METHODS SUMMARY

Our generic approach is the following. LIV is manifested in our experiment as an anisotropy of the nucleons dispersion relation. Two states with a different nuclear momentum quadrupole moment undergo a different LIV energy shift, giving rise to a boost- and orientation-dependent shift of the transition frequency. We measure directly this frequency shift by interferometry on atomic wave functions, using the usual clock Ramsey interrogation sequence but applied on spin-polarized states.

A Lorentz transformation allows us to express this lab LIV frequency shift in terms of the  $\bar{c}_{\mu\nu}$  coefficients in an inertial frame (usually taken for Solar System experiments as the SCF, i.e., the Solar System rest frame). It combines a rotation, which gives sensitivity to  $\bar{c}_{JK}$  coefficients, and boosts, giving sensitivity to  $\bar{c}_{TJ}$  (suppressed by one order in boost) and to the isotropic  $\bar{c}_{TT}$  coefficient (suppressed by two orders in boost). The latter corresponds to an overall rescaling of energies, which gives rise to time variations at sidereal frequency and annual sidebands in the case of the lab frame. It can also be constrained using fast-moving particles; in that case, the observability of  $\bar{c}_{TT}$  depends on the velocity of the particles themselves. However, in laboratory experiments, the velocity of the particles can be neglected in comparison with the lab boost. LIV observables being usually expressed only to order 1 in boost, this coefficient has mostly been dismissed so far in

this type of test and is consequently among the less constrained coefficients of the  $\bar{c}_{\mu\nu}$  tensor. Its current best limits are set by its gravitational effects; for nucleons, torsion balance experiments bring a constraint on a linear combination involving this coefficient, at the  $10^{-11}$  GeV level [2]. This gravitational LIV shift is negligible for hyperfine transitions, so without loss of generality, the clock observable is derived here in flat space-time.

We use a setup usually operated as a Cs fountain clock contributing to Temps Atomique International (TAI) in nonmagnetic ( $m_F = 0$ ) states. For testing the SME, it has been operated on magnetized ( $m_F \neq 0$ ) states to allow LIV tests during two periods respectively of 21 and 14 days at half a year interval. The two data sets were already analyzed in Ref. [1] and led to five new independent constraints on eight components of the proton  $\bar{c}_{\mu\nu}$  tensor. In this second analysis, our advanced mSME model allows us to disentangle the nine components and provides new limits on the isotropic component  $\bar{c}_{TT}$  which was not included in the previous analysis.

We also introduce an alternative calculation of the nuclear quadrupole moment, also investigated in Refs. [27] and [28], to address the shortcomings of the usual Schmidt shell model considered so far in the derivation of SME clock observables, which only takes into account a single nucleon contribution [29] and therefore does not provide a realistic description of the nucleus for most atoms. The calculations are performed with self-consistent relativistic mean field (SCRMF) theory, which allows us to go beyond the single nucleon model and to calculate both the neutron and proton contributions to the nuclear quadrupole moment involved in the SME LIV shift.

In Sec. III, we recall the main features of the description of alkali hyperfine transitions in the SME and our experimental setup. This section is kept brief as details are known in the literature and can be found in the cited references. We then describe in Sec. IV the transformation to the Sun centred frame including the second order boost and the resulting model for our experiment, with some of the details relegated to an Appendix. After a description of our data analysis in Sec. V, we first present in Sec. VI our results using the Schmidt nuclear model, as is usual in SME analyses, in order to facilitate comparison with previous results from this and other experiments. We then briefly describe the SCRMF nuclear calculations (Sec. VII) and provide in Sec. VIII our constraints based on this nuclear model. Section IX is devoted to a general discussion with conclusions and perspectives in Sec. X.

## III. SME FREQUENCY SHIFT IN THE LAB FRAME FOR ALKALI HYPERFINE TRANSITIONS AND EXPERIMENTAL SETUP

Treating in all generality the SME shift on an atomic transition includes curved space-time, eight mSME tensors, and summing over all electrons and nucleons. As shown

<sup>1</sup>A detailed discussion of the questions of locality, causality, and stability can be found in Ref. [21].

previously (Refs. [29–31]), treated as a perturbation to usual hyperfine energy levels in alkali, LIV gives rise to a dipolar shift (parametrized in the SME by the  $\bar{b}_\mu$ ,  $\bar{d}_{\mu\nu}$ , and  $\bar{g}_{\lambda\mu\nu}$  tensors) and a quadrupolar shift (parametrized by the  $\bar{c}_{\mu\nu}$  tensor). The dipolar SME shift of a  $|F, m_F\rangle$  state is proportional to  $m_F$ . In the specific linear combination of transition frequencies used as the observable, following the approach of Ref. [1], the linear dependence in  $m_F$  of our observable is nullified in order to reduce systematic shifts from magnetic fields. Our test is thus sensitive only to the quadrupolar shift, which we detail hereunder.

As shown previously (Refs. [29–31]), hyperfine states of alkali atoms are affected by a LIV quadrupolar energy shift given in curved space-time by the expectation value of the operator  $\sum_w \delta\hat{H}_w$  with  $w = p, n, e$  for the proton, neutron, and electron, where for each particle

$$\delta\hat{H} = \frac{2U}{3c^2} \bar{c}_{tt} \hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{1}{6m} C_0^{(2)} \hat{\mathcal{P}}_0^{(2)}. \quad (1)$$

Here, we omitted the  $w$  index for the sake of simplicity. The Cartesian coordinate components are labeled with indices  $(t, x, y, z)$  and relate to the space-time lab frame; the direction  $z$  is taken along the quantization axis.  $U$  is the Newtonian gravitational potential, and  $\hat{\mathbf{p}}$  and  $m$  are respectively the momentum operator and the mass of the particle. The spherical tensor component  $\mathcal{T}_q^{(r)}$  associated with a tensor  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$  is used here for a compact formulation, with  $r$  its rank and  $q \in (-r, \dots, r)$  the index of its spherical components. The  $\mathcal{T}_0^{(2)}$  component appearing here is linked to the Cartesian coordinates via  $\mathcal{T}_0^{(2)} = \mathcal{T}_{jj} - 3\mathcal{T}_{zz}$  with the convention of summation over like indices. This notation is used both for tensors  $\mathcal{C}_{ij} = \bar{c}_{ij}$  and  $\hat{\mathcal{P}}_{ij} = \hat{p}_i \hat{p}_j$ :

$$C_0^{(2)} = \bar{c}_{jj} - 3\bar{c}_{zz} \quad (2)$$

$$\hat{\mathcal{P}}_0^{(2)} = \hat{\mathbf{p}}^2 - 3\hat{p}_z^2. \quad (3)$$

The first term of the quadrupolar LIV operator in Eq. (1) leads to an anomalous gravitational redshift [31]. It has been used in the analysis of the spectroscopy of an electronic transition in dysprosium to provide a gravitational constraint on the electron  $\bar{c}_{TT}$  coefficient [32]. This anomalous redshift scales as the differential internal kinetic energy between two states; therefore, it is relevant for electronic transitions, but it is negligible for transitions between hyperfine states, which differ essentially via the relative orientation of the nuclear and electronic spin. So this contribution plays a negligible role and will be ignored in the following.

The second term scales with the quadrupole moment operator of the momentum and can be regarded as an anisotropy of each particle's kinetic energy. It is governed by the quadrupole moment of the  $\bar{c}_{\mu\nu}$  tensor, which is

usually, in the mSME, expressed in terms of energy for each particle by

$$\tilde{c}_q = mc^2 C_0^{(2)}. \quad (4)$$

In an atomic hyperfine state  $|F, m_F\rangle$ , the perturbative energy shift contribution from each particle is therefore proportional to the expectation value of the momentum quadrupole moment operator  $\langle F, m_F | \hat{\mathcal{P}}_0^{(2)} | F, m_F \rangle$ , which using the Wigner-Eckart theorem can be expressed as a function of the expectation value in the extremal  $m_F = F$  state  $\langle F, F | \hat{\mathcal{P}}_0^{(2)} | F, F \rangle$  with a prefactor  $\tilde{m}_F$  (following the notation of Ref. [29]):

$$\tilde{m}_F = \frac{\langle F, m_F | \hat{\mathcal{P}}_0^{(2)} | F, m_F \rangle}{\langle F, F | \hat{\mathcal{P}}_0^{(2)} | F, F \rangle} \quad (5)$$

$$= \frac{F(F+1) - 3m_F^2}{F(F+1) - 3F^2}. \quad (6)$$

This is a Clebsch-Gordan coefficient involving the quadrupole moment operator  $\hat{\mathcal{P}}_0^{(2)} = \hat{\mathbf{p}}^2 - 3\hat{p}_z^2$  of the tensor  $\hat{F}_i \hat{F}_j$  with  $F$  the total magnetic moment of the atomic state; it does not depend on the considered particle within the atom.

Summing from Eq. (1) over all particles, the total LIV perturbative energy shift of a state  $|F, m_F\rangle$  can therefore be expressed as

$$\delta E = \tilde{m}_F \sum_w \gamma^w \tilde{c}_q^w \quad (7)$$

with particle-dependent dimensionless scaling factors

$$\gamma^w = \frac{M_{20}^w}{6m_w^2 c^2} \quad (8)$$

which are proportional to the total momentum quadrupole moment from the  $N_w$  particles of type  $w$ :

$$M_{20}^w = - \sum_{N=1}^{N_w} \langle F, F | \hat{\mathcal{P}}_{0,w,N}^{(2)} | F, F \rangle. \quad (9)$$

The analysis is performed using the data obtained from the  $^{133}\text{Cs}$  and  $^{87}\text{Rb}$  dual fountain FO2 (see Fig. 1), operating at the Paris Observatory, already used in Ref. [1]. An atomic gas is laser cooled and launched upward on a ballistic trajectory. The desired  $|F, m_F\rangle$  initial state is prepared in the selection cavity, and remaining atoms in other states are pushed away by a push beam. A microwave cavity allows us to perform a Ramsey interferometry sequence as the atoms pass through its mode successively during their upward and downward passages. For further experimental details, we refer the reader to an abundant body of literature (e.g., Refs. [33,34]).

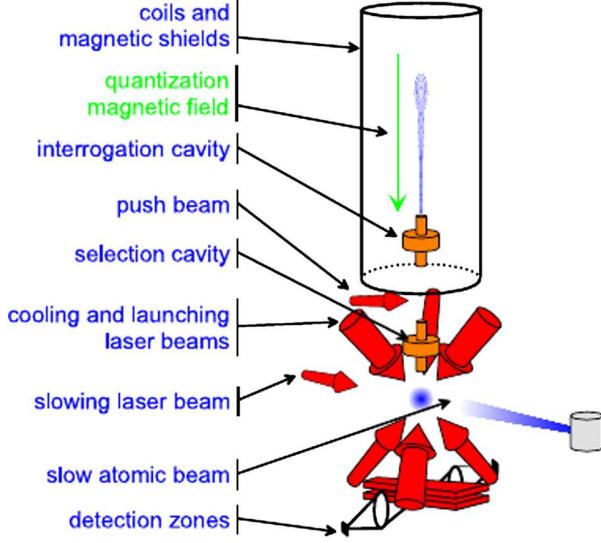


FIG. 1. Schematic view of an atomic fountain, from Ref. [35].

Our data consist of two measurement sets of 21 and 14 days duration, taken respectively in April and September 2005. During the experiment, the fountain was run in Cs mode, which interrogates transitions between the  $F = 3$  and  $F = 4$  hyperfine levels of the ground state  $6^2S_{1/2}$ , with a magnetic field oscillating at 9.2 GHz. It was interrogated alternatively on three  $|3, m_F\rangle \leftrightarrow |4, m_F\rangle$  transitions with  $m_F = +3, -3$ , and 0, of respective frequencies  $\nu_{+3}$ ,  $\nu_{-3}$ , and  $\nu_0$ .

The quantization magnetic field is vertical. The rotational and orbital motion of the Earth then provides a change of the orientation of this axis, as well as of the laboratory boost, with respect to the Sun centered frame (see Sec. IV). In the presence of LIV, this would result in a time variation of the particles kinetic energy anisotropy and therefore in a time-varying quadrupole shift of the atomic level energies described by Eq. (7).

From Eq. (7), the frequency shift of a  $|F = 3, m_F\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F\rangle$  transition can be calculated through the differential energy shift between the two levels [30]. We use a combination of hyperfine transition frequencies,  $\nu_c = \nu_{+3} + \nu_{-3} - 2\nu_0$  already used in Ref. [1], which preserves the sensitivity to the quadrupolar LIV shift while canceling magnetic perturbations from the first order Zeeman effect. From Eq. (7), it can be shown that the LIV frequency shift of this observable is [30]

$$\delta\nu_c = -\frac{9}{7h}[\gamma^p \tilde{c}_q^p + \gamma^n \tilde{c}_q^n], \quad (10)$$

with an overall scaling  $9/7h = 3.1 \times 10^{23}$  Hz/GeV for SME coefficients expressed in GeV. Here  $\gamma^w$  is defined as in Eq. (8) but with the momentum quadrupole moment expectation value  $M_{20}^w$  in Eq. (9) taken in the  $|I, I\rangle$  state.

It is not sensitive to the electron SME coefficients. Indeed, closed shells do not contribute [29], and the symmetry of the orbital of the valence electron is spherical since its orbital angular momentum in the state  $6^2S_{1/2}$  is  $L = 0$ ; this leads a zero value of the momentum quadrupole moment in Eq. (9). Our experiment thus offers a test of LIV sensitive only to nucleons, allowing us to give constraints decorrelated from the electron LIV coefficients. The frequency shift is related to each nucleon SME coefficient through a dimensionless factor  $\gamma^w$  via the nucleon momentum quadrupole moment  $M_{20}^w$  [Eq. (8)] obtained from the nuclear model [Eq. (9)]. The explicit dependence for each nucleon thus requires the choice of a nuclear model, for which there is no simple description for heavy nuclei such as  $^{133}\text{Cs}$ . We address this question further in Secs. VI and VII. In the rest of the paper, all references to notations  $\gamma^w$ ,  $M_{20}^w$ , and to Eqs. (8) and (9) are meant, as in Eq. (10), with the momentum quadrupole moment expectation value  $M_{20}^w$  taken in the  $|I, I\rangle$  state.

#### IV. TIME VARIATION IN THE SUN CENTERED FRAME WITH SECOND ORDER BOOST

As the lab frame rotates and moves around Earth and Sun, periodic modulations of the clock frequency appear when each lab frame SME coefficient  $\tilde{c}_q^w$  in Eq. (10) is expressed in terms of the SCF SME coefficients. The latter are supposed constant at the time scale of our experiment, since the SCF has a rectilinear uniform motion with respect to a cosmological frame like the one given by the cosmic microwave background. The SCF celestial frame, defined in Ref. [36], is conventionally used to report SME results and to compare them. If  $\mathfrak{Z}$  is the Lorentz transformation from the SCF to the lab frame for a covector, the tensor component  $\bar{c}_{ij}$  in the lab frame is the following combination of the tensor components in the SCF,

$$\bar{c}_{ij} = \mathfrak{Z}_i^\Pi \mathfrak{Z}_j^\Gamma \bar{c}_{\Pi\Gamma}, \quad (11)$$

where  $\Pi, \Gamma$  are indices spanning the SCF coordinates  $(T, X, Y, Z)$ . As described in Ref. [30],  $\mathfrak{Z}$  is the composition of a Lorentz boost  $\Lambda$  followed by a rotation  $R$ . The Lorentz boost  $\Lambda$  involves the Earth's orbital boost which varies with annual frequency  $\Omega$  and the lab boost due to the Earth's rotation varying at sidereal frequency  $\omega$ , with respective magnitude  $\beta_\oplus \sim 10^{-4}$  and  $\beta_l \sim 10^{-6}$  (ratio of velocity to speed of light). The rotation is due to Earth's rotation, at sidereal frequency. The generic expressions of  $\Lambda$  and  $\mathfrak{Z}$  are given respectively in Eqs. (A1) and (A4) in Appendix A.

In the previous analysis [1] (as well as in most of the previous literature, e.g., Refs. [29,30]), the boost matrix  $\Lambda$  was approximated at first order of its Taylor expansion in  $\beta$  and included only the dependence in the Earth's orbital boost  $\beta_\oplus$ . This  $O(\beta)$  model led to stringent constraints on eight of the nine independent components of  $\bar{c}_{\mu\nu}$  of the proton, improving state-of-the-art constraints by up to 13 orders of magnitude. The ninth one, the isotropic

coefficient  $\bar{c}_{TT}$ , is suppressed by a factor  $\beta^2$  and thus did not appear in this first order model.

The main motivation of the present analysis is that the high improvement demonstrated by these first results, based on the intrinsic high sensitivity of cold atom clocks, can also benefit the more suppressed  $\bar{c}_{TT}$  terms. Since the suppression arises from the pure timelike nature of the  $\bar{c}_{TT}$  coefficient, the constraint is expected to be less stringent, but this coefficient is the less constrained from other non-gravitational experiments as well. In this analysis, we developed an improved SME model of our observable, which, using a second order boost expression of Eq. (10) in the SCF, includes the  $\bar{c}_{TT}$  coefficient. This approach has also been used previously in spectroscopy in Ref. [32] to constrain electron  $\bar{c}_{\mu\nu}$  coefficients. Initially, our model contained all the terms up to  $O(\beta^2)$  for the nine independent components of  $\bar{c}_{\mu\nu}$ , but as they do not provide any valuable contribution to the analysis, they are neglected, except for the  $\bar{c}_{TT}$  coefficient. More details on this derivation and a summarized version of the model can be found in Appendix A (Table V).

The Lorentz-violating signal with this  $O(\beta^2)$  model includes sinusoidal variations at base frequencies  $\{0, \omega, 2\omega\}$  associated with sidebands at annual frequency  $\Omega$  as for the first order model and new sidebands at  $2\Omega$ . It exhibits in total 13 frequency components (25 quadratures), instead of 3 frequency components (5 quadratures) for the previous analysis which did not include the annual frequency nor the second order terms.

SCF  $\bar{c}_{\mu\nu}$  components appear as nine observable combinations, which as usually in the SME are given rescaled by the rest mass energy of the particle and will be referred to in the following as [2]

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_Q &= mc^2(\bar{c}_{XX} + \bar{c}_{YY} - 2\bar{c}_{ZZ}) \\
 \tilde{c}_- &= mc^2(\bar{c}_{XX} - \bar{c}_{YY}) \\
 \tilde{c}_J &= mc^2(\bar{c}_{KL} + \bar{c}_{LK}) \\
 \tilde{c}_{TJ} &= mc^2(\bar{c}_{TJ} + \bar{c}_{JT}) \\
 \tilde{c}_{TT} &= mc^2\bar{c}_{TT}
 \end{aligned} \tag{12}$$

where  $J, K, L$  are indices spanning spatial SCF coordinates ( $X, Y, Z$ ). The index  $w$  referring to the flavor of the particle (proton or neutron) has been omitted here for the mass  $m$  and the tensor components.

## V. DATA ANALYSIS

The data processing is performed using a weighted least-squares adjustment<sup>2</sup> of the data used in Ref. [1] to the  $O(\beta^2)$  model. In our observable in Eq. (10),  $\bar{c}_q^w$  is expressed

in terms of the SCF SME coefficients as described in Sec. IV, and the flavor-dependent scaling factor  $\gamma^w$  value is set from the considered nucleus model, as will be described in Secs. VI and VII. From our measurements of  $\nu_c$ , we then adjust directly all nine independent SCF combinations given in Eq. (12), without intermediate steps as, e.g., on the Fourier basis. As the data show white noise behavior (see Ref. [1]), the least-squares method provides robust limits on SME coefficients. Our 3 mHz data standard deviation averages over the two data sets down to a resolution of 60  $\mu$ Hz on the amplitude of a sinusoidal deviation, which sets the bottom limit of statistical sensitivity of our test as in Ref. [1].

The main systematic effects which are not already corrected in the clock data, as detailed in Ref. [33], are the Zeeman frequency shifts. For the frequency combination in Eq. (10), the second order Zeeman effect, proportional to  $B^2$  with  $B$  the magnetic field, adds up to an overall shift of  $-2$  mHz for our data. The variations of this term due to magnetic field fluctuations lie well below our frequency resolution; as in Ref. [1], this shift is therefore considered as constant, and the measured value of  $\nu_c$  is corrected for this constant offset prior to the SME model adjustment.

The first order Zeeman shift, proportional to  $B$ , is theoretically rejected in the combined observable  $\nu_c$ . However, atoms with  $m_F = +3$  and  $m_F = -3$  follow slightly different trajectories, which in the presence of magnetic field inhomogeneities results in the incomplete cancellation of the first order Zeeman shift in  $\nu_c$ . The residual shift can be estimated using the time of flight (TOF) of the atoms in the fountain, measured periodically during the clock operation for each data set. As described in Ref. [1], the TOF data exhibit a systematic difference of 158  $\mu$ s between the  $m_F = +3$  and  $m_F = -3$  atomic clouds; a Monte Carlo simulation allows us to constrain the corresponding residual first order Zeeman shift of  $\nu_c$  to a conservative estimate of  $0 \pm 25$  mHz [1].

As this dominant systematic effect is susceptible to varying with temperature at daily and annual frequency, it could mimic nonzero SME coefficients. To assess this systematic bias, we use the upper limit of the above calibration to convert TOF data to worst-case frequency shift data, which we adjust with the  $O(\beta^2)$  model by weighted least squares. We obtain an amplitude for each SME coefficient (noted  $X_{\text{TOF}}^i$ ) with a statistical uncertainty  $\sigma_{\text{TOF}}^i$ . The obtained amplitude is an upper bound in absolute value; we therefore estimate the systematic bias at zero and the systematic variance at  $(X_{\text{TOF}}^i)^2 + (\sigma_{\text{TOF}}^i)^2$ .<sup>3</sup>

To obtain the total variance-covariance matrix of the estimated SME coefficients, we sum the statistical (clock

<sup>2</sup>Because the data are dominated by white noise (see Ref. [1]), ordinary least-squares fitting is well adapted for our analysis.

<sup>3</sup>For simplicity, we neglect the cross term  $2X_{\text{TOF}}^i\sigma_{\text{TOF}}^i$  since the systematics fit results show only either highly significant values or highly nonsignificant values.

data) and systematic (TOF data) matrix elements, in which the systematic variances are defined as above. The values and uncertainties for SME coefficients depend on the nucleus model considered and will be presented for the Schmidt nuclear model in Sec. VI and using a more realistic nuclear model in Sec. VIII. The detailed discussion is in Sec. IX.

## VI. RESULTS BASED ON THE SCHMIDT NUCLEAR MODEL

From the sensitivity in frequency variation of our data set (Sec. V), the corresponding sensitivity on SME coefficients depends on the value of the scaling factors  $\gamma^{p,n}$  [Eq. (10)] which are proportional to the momentum quadrupole moment of the nucleons in the extremal state  $|I, I\rangle$  from Eq. (8) and Eq. (9). As an exact calculation is typically not feasible, different simplification levels can be used. A simplified description of the nucleus is given by the Schmidt model, which has so far been used in many cases when reporting SME constraints from atomic spectroscopy. It relies on a shell description of the nucleus. With an odd number of protons (55) and an even number of neutrons (78) in the nucleus of  $^{133}\text{Cs}$  atoms, a shell model leads to closed neutron shells and to a single valence proton. In the Schmidt description, this nucleon carries the entire magnetic moment of the nucleus which is involved in the hyperfine splitting. The expectation values in Eq. (9), which in principle have to be summed over all nucleons, reduce in this description to the expectation value for this single proton and to an overall zero value from the neutrons [29]:  $\gamma^n = 0$ . With this nucleus model, the only constraints we can extract from our data are thus on proton coefficients. In the SME article on clocks [30] and in the first data analysis [1], the approximated value of  $\gamma^p$  has been taken as  $\gamma^p = -1.1 \times 10^{-3}$ , leading to an expected maximum resolution on  $\tilde{c}_Q^p$  of approximately  $2 \times 10^{-25}$  GeV using the

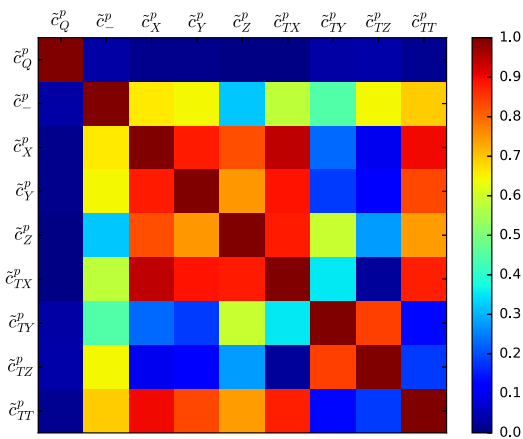


FIG. 2. Correlation matrix of the  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p$  components. The matrix includes the statistic correlations (least-squares fitting of the data) and the systematic correlations (TOF), as described in Sec. V.

TABLE I. Limits on SME Lorentz-violating parameters  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p$  for the proton, in GeV, when using the Schmidt model. The measured values and total uncertainties are shown together with the statistical (first bracket) and systematic (second bracket) uncertainties. These limits are obtained using a complete least-squares adjustment of the  $O(\beta^2)$  model to the Cs fountain data. Constraints improved compared to state-of-the-art laboratory limits are displayed in bold, with the improvement factor in orders of magnitude in brackets. Note that previous constraints from Ref. [1] did not determine all coefficients independently (cf. Sec. IX B).

Coefficient	Value and uncertainty	Unit (GeV)	Previous bound (GeV) Ref.
$\tilde{c}_Q^p$	$-0.3 \pm 2.1 (10^{-2}) (2.1)$	$10^{-22}$	$22 \cdot 10^{-22}$ [1]
$\tilde{c}_-^p$	$1.4 \pm 9.0 (0.7) (8.9)$	$10^{-24}$	$2.8 \cdot 10^{-25}$ [1]
$\tilde{c}_X^p$	$-1.5 \pm 5.3 (0.7) (5.2)$	$10^{-24}$	$1.2 \cdot 10^{-25}$ [1]
$\tilde{c}_Y^p$	$0.8 \pm 1.6 (0.3) (1.6)$	$10^{-24}$	$1.2 \cdot 10^{-25}$ [1]
$\tilde{c}_Z^p$	$1.0 \pm 3.9 (0.8) (3.9)$	$10^{-24}$	$2.8 \cdot 10^{-25}$ [1]
$\tilde{c}_{TX}^p$	$-1.5 \pm 5.7 (0.6) (5.7)$	$10^{-20}$	$3.0 \cdot 10^{-21}$ [1]
$\tilde{c}_{TY}^p$	$1.4 \pm 5.9 (0.3) (5.9)$	$10^{-20}$	$3.0 \cdot 10^{-21}$ [1]
$\tilde{c}_{TZ}^p$	$-1.1 \pm 3.5 (0.2) (3.5)$	$10^{-20}$	$2.0 \cdot 10^{-21}$ [1]
$\tilde{c}_{TT}^p$	$1.6 \pm \mathbf{6.9} (0.9) (6.9)$	$\mathbf{10^{-16(5)}}$	$< 10^{-11}$ [31]

frequency resolution given in Sec. V and the conversion factor expressed in Sec. III.

Using these  $\gamma^{p,n}$  values, our analysis provides the bounds on the  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p$  components presented in Table I. They are all consistent with Lorentz symmetry. The uncertainties show an improvement by 5 orders of magnitude on the  $\tilde{c}_{TT}^p$  coefficient compared to the state-of-the-art laboratory constraints (Refs. [1,31]), reaching the  $10^{-16}$  GeV scale. The correlation matrix is displayed on Fig. 2. It contains high values, except for the  $\tilde{c}_Q^p$  coefficient which is almost decorrelated at this sensitivity level. This indicates that the uncertainties contained in Table I are marginalized uncertainties dominated by those correlations and could thus be significantly improved with additional data spread over one year.

In addition to the correlation matrix, we provide confidence intervals on Fig. 3, which allow a synthetic view over significance levels, orders of magnitude, and correlations. We employ an analytical method developed in Ref. [37], which uses the covariance matrix to build confidence ellipses of which the semimajor axes are scaled by a given value of  $\sqrt{\Delta\chi^2}$  depending on the required probability.<sup>4</sup> Some of the ellipses show a strongly diagonal orientation, indicating the presence of correlations between the SME coefficients that are in agreement with the correlations visible in Fig. 2.

In Appendix C, we provide an alternative, but entirely equivalent, description of the results under the form of

<sup>4</sup>Here,  $\Delta\chi^2$  is the difference between the  $\chi^2$  value at a given point in the parameter plane and the one of the best fit solution.



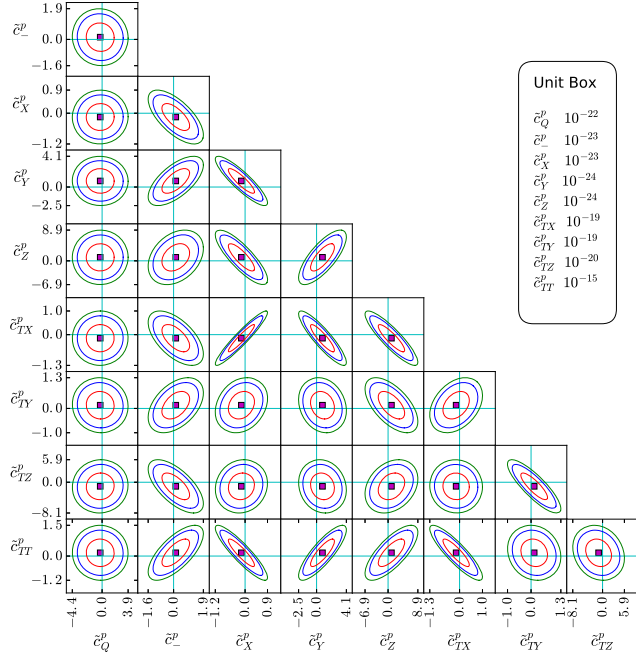


FIG. 3. Confidence ellipses of the  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p$  components, when using the Schmidt model. The red, blue, and green confidence ellipses correspond respectively to the 68.3%, 90%, and 95.4% confidence regions. The purple square is the position of the least-squares solution. Axis labels give the 95.4% confidence intervals in GeV, the respective orders of magnitude of which are given in the upper right box. Horizontal and vertical blue lines at zero value allow us to visualize the absence of significance in the results.

independently constrained linear combinations of coefficients. These combinations are obtained from the singular value decomposition (SVD) of the covariance matrix, meaning that they are the set of orthonormal vectors (in the Euclidean sense) that diagonalize the covariance matrix. Having no correlation between these combinations implies that the uncertainty is not degraded and thus reaches a lower value as can be seen in Table VI, typically decreased by a factor of 2. The linear combinations given in Table VII have dominant coefficients; the corresponding constraints can thus be regarded as the “maximal sensitivity” on this coefficient from our data, in the sense commonly used when reporting SME constraints [2].

## VII. SCRMF NUCLEAR MODEL

### A. Relativistic mean field formalism

Recent developments in nuclear physics have attracted a renewed interest in the effects of Lorentz violation in atomic and nuclear physics [27,28]. Following this trend, we compute the nuclear matrix elements in the  $|I, I\rangle$  state, in particular the ones required for the determination of  $\gamma^w$  [Eqs. (7), (8) and (10)], in a fully microscopic way using a state-of-the-art nuclear structure approach. This allows us

to go beyond the single nucleon model and to calculate both the neutron and proton contributions to the nuclear matrix elements. The theoretical framework used here is the relativistic energy density functional which is particularly suited to describe nuclear structure properties in great depth [38]. In this approach, the nucleus is described in terms of nucleons considered as pointlike Dirac particles, while the interaction among them is described by an exchange of mesons. Thus, one may construct in a fully covariant way a phenomenological Lagrangian density which conserves the symmetries of the nuclear interaction:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} \left[ i\gamma^\mu \partial_\mu - m - g_\sigma \sigma - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu - g_\rho \gamma_\mu \vec{\rho} \cdot \vec{\tau}^\mu \right. \\ & - g_\pi \gamma_5 \gamma_\mu \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} - e\gamma_\mu A^\mu \left. \left( \frac{1 - \tau_3}{2} \right) \right] \psi \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{2} (\Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu) \\ & - \frac{1}{4} \vec{\mathcal{R}}_{\mu\nu} \vec{\mathcal{R}}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu + \frac{1}{4} \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} + \frac{1}{2} m_\pi^2 \vec{\pi}^2 \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (13)$$

In this section, we use natural units (i.e.,  $c = 1$  and  $\hbar = 1$ ) for compactness of the notation. The arrows symbolize vectors of the isospin SU(2) space.  $\psi$  is a Dirac 4-spinor describing a nucleon of mass  $m$ , while  $\gamma_\mu$  denotes the usual Dirac matrices, and  $\tau_i$  denotes the isospin Pauli matrices. In Eq. (13), the nucleons interact by the exchange of  $\{\sigma, \rho, \omega$  and  $\pi\}$  mesons, while the Coulombian interaction is taken into account by the 4-potential  $A^\mu$ . The self-interaction of each mesonic field is expressed using the field strength tensors  $\Omega^{\mu\nu}$  and  $\vec{\mathcal{R}}^{\mu\nu}$ , while  $F^{\mu\nu}$  is the usual electromagnetic field tensor associated with the photon. The coupling constants of (13) are then fitted in order to accurately reproduce the binding energies of a set of benchmarking nuclei [39].

Performing a Legendre transform of (13) yields the Hamiltonian of the problem

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \int d^3x \bar{\psi} [i\nabla + m] \psi + \frac{1}{2} \int d^3x \bar{\psi} \left[ g_\sigma \sigma + g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu \right. \\ & \left. + g_\rho \gamma_\mu \vec{\rho} \cdot \vec{\tau}^\mu + g_\pi \gamma_5 \gamma_\mu \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} + e\gamma_\mu A^\mu \left( \frac{1 - \tau_3}{2} \right) \right] \psi. \end{aligned} \quad (14)$$

The relativistic energy density functional is computed by taking the expectation value of (14) on the vacuum state  $|\Phi_0\rangle$ ,

$$\mathcal{E}[\rho] = \langle \Phi_0 | \mathcal{H} | \Phi_0 \rangle, \quad (15)$$

while the density operator of the system is defined as

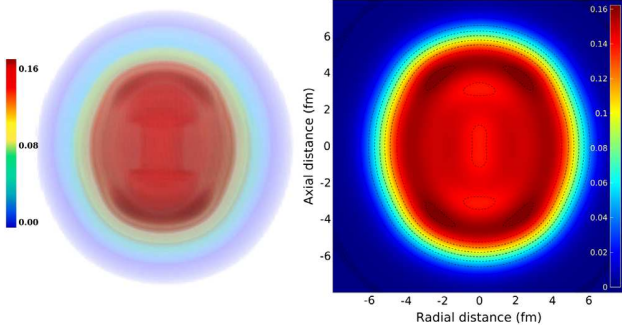


FIG. 4. Nucleonic density of  $^{133}\text{Cs}$  in  $\text{fm}^{-3}$ , in the intrinsic frame. Left: 3D representation. Right: 2D projection.

$$\rho_{ij} = \frac{\langle \Phi_0 | c_j^\dagger c_i | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle} \quad (16)$$

with  $c_i^\dagger/c_i$  being the nucleonic creation/annihilation operators. To compute the ground state energy, the variational principle is applied to (15). Neglecting the Fock exchange term leads to the relativistic Hartree-Bogoliubov (RHB) equations, solved in a self-consistent way in an axially deformed harmonic oscillator basis [39]. For a given nucleus, this model allows us to obtain its nuclear density in the nucleus intrinsic frame, as pictured on Fig. 4 for  $^{133}\text{Cs}$ .

### B. Nuclear quadrupole moments

The solutions of the RHB equations give access to the density of the system. The moments of the multipolar expansion of the density describe the shape of the nucleus. For instance a non-null quadrupole moment in configuration space excludes spherical symmetry but may conserve an axial symmetry. The quadrupole moment in momentum space  $M_{20}^w$  can be directly related to the  $\gamma^w$  parameters by Eq. (8).

In the intrinsic frame of the nucleus, the usual quadrupolar distribution is expressed in configuration space as

$$\tilde{Q}_{20}^w = \langle \Phi_0 | (3z^2 - r^2) | \Phi_0 \rangle = \text{Tr}[\rho(3z^2 - r^2)], \quad (17)$$

while in momentum space

$$\tilde{M}_{20}^w = \langle \Phi_0 | (3p_z^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}) | \Phi_0 \rangle. \quad (18)$$

In a final step, we project the quadrupole moments into the laboratory frame using

$$Q_{20}^w = \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} \tilde{Q}_{20}^w, \quad (19)$$

where  $I$  is the nuclear spin of the considered nucleus and  $K$  is its projection onto the quantization axis. Note that (19) gives only an approximate value in the laboratory frame.

TABLE II. Quadrupolar moments in configuration ( $\text{fm}^2$ ) and momentum representation  $(\hbar/\text{fm})^2$  for  $^{133}\text{Cs}$ .

Functional	$Q_{20}^n$	$Q_{20}^p$	$M_{20}^n$	$M_{20}^p$	E (MeV)
DD-PC1	-2.6576	-0.3578	0.0047	0.1135	-1118.6
DD-ME2	-2.8083	-0.3538	0.0024	0.1129	-1117.7

For better accuracy, the complete projection of the RHB solutions on the correct total angular momentum needs to be performed, in the laboratory frame. This is out of the scope of the present paper but will be investigated in upcoming work using the generator coordinate method [40].

When comparing our results to the recently published ones in Ref. [28], which use a self-consistent mean field technique (SCMF), we note a good agreement (within a factor  $\sim 1.3$ ) for  $M_{20}^p$  but very large discrepancies (up to a factor  $\sim 60$ ) for  $Q_{20}^n$  and  $M_{20}^n$ . We ascribe this to the method used in Ref. [28] which is tailored for the proton contribution as it is based on the experimental value of  $Q_{20}^p$  and is thus likely to be only very approximate for the neutron quadrupole moments.

When carrying out our calculations for the atoms also studied in Ref. [27], we find a very good agreement for  $^{21}\text{Ne}$  (for the protons  $Q_{\text{SCRMF}}^p = 9.5 \text{ fm}^2$  when  $Q_{\text{SCMF}}^p = 9.7 \text{ fm}^2$ , while the results are the same for neutron contribution) and results of the same order of magnitude for  $^{131}\text{Xe}$  and  $^{201}\text{Hg}$ . The remaining differences are mainly due to the different methods used to constrain the computations.

In the case of  $^{133}\text{Cs}$ , the number of protons ( $Z = 55$ ) is odd; thus, the spin parity of the ground state is given by the valence proton. In the framework of the energy density functional, we use the usual half-filling approximation [41], enforcing the correct spin parity of the state, here  $I = K^\pi = \frac{7}{2}^+$ . The comparison of the experimental energy of the ground state ( $E_{\text{exp}} = -1118.5 \text{ MeV}$ ) to the RHB predictions is given in Table II, showing the good accuracy of the present approach. The quadrupolar moments in the laboratory frame for  $^{133}\text{Cs}$  are given in Table II for two different parametrizations of the relativistic functional (15): DD-PC1 is a point-coupling interaction, while DD-ME2 takes into account the full finite range meson exchange and is more realistic.

A more detailed presentation and discussion of these calculations for different nuclei as well as comparisons between different methods will be the subject of a future publication.

## VIII. RESULTS BASED ON THE SCRMF NUCLEAR MODEL

From the two nucleon interaction models considered in Sec. VII, we use the results of the DD-ME2 functional which are expected to be more realistic. From Eq. (8) and Table II, we obtain  $\gamma^p = 8.32 \times 10^{-4}$  and

$\gamma^n = 1.76 \times 10^{-5}$ . In this nuclear model, the neutron contribution is not neglected, unlike in the Schmidt model, so our experiment allows us to constrain also neutron LIV, but with a sensitivity scaled by  $\gamma^n$  about 2 orders of magnitude lower than for the proton. We cannot distinguish the relative nucleon contributions and are sensitive to the linear combinations  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p + 0.021\tilde{c}_{\mu\nu}^n$ . The limits on these SME coefficients combinations, given in Table III, are obtained by a straightforward rescaling of Table I from the Schmidt model, and consequently the correlation matrix stays the same as in Fig. 2 with the proton coefficients replaced by the above combinations. Since the individual constraints from proton and neutron cannot be disentangled, results for each nucleon can be expressed in terms of maximal sensitivity as defined in Ref. [2]. As shown in Table III, improvements on proton coefficients are equivalent to the ones presented for the Schmidt model. For the neutron coefficients, our results improve by 12 to 13 orders of magnitude over state of the art for the  $\tilde{c}_{TJ}$  coefficients, 7 orders of magnitude for the  $\tilde{c}_Q$  coefficient, and 2 orders of magnitude for the  $\tilde{c}_{TT}$  coefficient, respectively down to  $10^{-17}$ ,  $10^{-20}$ , and  $10^{-13}$  GeV.

## IX. DISCUSSION

### A. Comparison to previous works

Our results show large improvements on the isotropic coefficient  $\tilde{c}_{TT}$  for the proton with both nuclear models, as well as for several neutron coefficients for the relativistic nuclear model. With this model, by improving on the previous weakest limits, our analysis brings all  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  constraints for the proton and neutron below or much nearer to

TABLE III. Limits (1 sigma) on SME Lorentz-violating parameters  $\tilde{c}_{\mu\nu}^w$  for the proton and neutron, in GeV, when using the SCRMF nuclear model. The last two columns show the corresponding maximal sensitivities on each nucleon as defined in Ref. [2] (2 sigma limits logarithmically rounded). In bold are the values which improve over the state-of-the-art laboratory limits published in the 2017 version of Ref. [2] and obtained with other experiments, with the improvement in orders of magnitude in brackets.

Coefficient	Value and uncertainty	Unit (GeV)	$\tilde{c}_{\max}^p$ (GeV)	$\tilde{c}_{\max}^n$ (GeV)
$\tilde{c}_Q^p + 0.021\tilde{c}_Q^n$	$0.4 \pm 2.8$	$10^{-22}$	$10^{-21}$	<b><math>10^{-20(7)}</math></b>
$\tilde{c}_P^p + 0.021\tilde{c}_P^n$	$-0.2 \pm 1.2$	$10^{-23}$	$10^{-23}$	$10^{-21}$
$\tilde{c}_X^p + 0.021\tilde{c}_X^n$	$2.0 \pm 7.0$	$10^{-24}$	$10^{-23}$	$10^{-21}$
$\tilde{c}_Y^p + 0.021\tilde{c}_Y^n$	$-1.1 \pm 2.2$	$10^{-24}$	$10^{-23}$	$10^{-22}$
$\tilde{c}_Z^p + 0.021\tilde{c}_Z^n$	$-1.3 \pm 5.2$	$10^{-24}$	$10^{-23}$	$10^{-21}$
$\tilde{c}_{TX}^p + 0.021\tilde{c}_{TX}^n$	$2.0 \pm 7.6$	$10^{-20}$	$10^{-19}$	<b><math>10^{-17(12)}</math></b>
$\tilde{c}_{TY}^p + 0.021\tilde{c}_{TY}^n$	$-1.8 \pm 7.8$	$10^{-20}$	$10^{-19}$	<b><math>10^{-17(12)}</math></b>
$\tilde{c}_{TZ}^p + 0.021\tilde{c}_{TZ}^n$	$1.4 \pm 4.6$	$10^{-21}$	$10^{-19}$	<b><math>10^{-18(13)}</math></b>
$\tilde{c}_{TT}^p + 0.021\tilde{c}_{TT}^n$	$-2.2 \pm 9.1$	$10^{-16}$	<b><math>10^{-15(4)}</math></b>	<b><math>10^{-13(2)}</math></b>

(for  $\tilde{c}_{TT}$ ) Planck-scale suppression. All results presented in this paper are still consistent with Lorentz symmetry.

For the proton, results are equivalent with both considered nuclear models. Our improved LIV model including annual modulations and terms at order  $O(\beta^2)$  in boost leads to a high sensitivity to  $\tilde{c}_{TT}$  that was not constrained by the previous analysis of our data.

The improvement on neutron coefficients comes from our new nuclear model that, unlike the Schmidt model, accounts for the sensitivity of our measurement to the neutron SME coefficients. The resulting limits on neutron coefficients are much less stringent than the ones from comagnetometers [42]. However, comagnetometer limits so far do not address the boost-dependent parts  $\tilde{c}_{TJ}$  and  $\tilde{c}_{TT}$  nor the spatial part  $\tilde{c}_Q$ , and this is where we provide large improvements. The previous  $\tilde{c}_Q$  limit was set recently from acoustic waves in quartz [22].

In Secs. VI and VIII, we compared our results on  $\tilde{c}_{TT}$  with those obtained through the SME Weak Equivalence Principle (WEP) test interpretation of torsion balance experiments [31]. This analysis, however, did not disentangle the isotropic component  $\tilde{c}_{TT}$  from the spatial component  $\tilde{c}_Q$ ; disentanglement has been done in Ref. [31] and weakens this upper bound by 3 orders of magnitude. So in this respect, the improvement factors of  $10^4$  and  $10^2$  displayed in Table III are conservative, since when comparing to this disentangled limit we rather improve by 7 orders of magnitude the constraint on  $\tilde{c}_{TT}$  for the proton and by 5 orders of magnitude that for the neutron.

The bounds for the proton and neutron shown in Secs. VI and VIII are compared with the best existing laboratory limits, despite the existence of stronger astrophysical constraints (Refs. [43–45]). The latter bring in particular a better double sided limit on  $\tilde{c}_{TT}^p$  than the one obtained with our analysis. However, these bounds involve model-dependent assumptions about distant astrophysical processes.

### B. Role of the complete vs piecemeal analysis

In our approach (which we refer to hereafter as the “complete” analysis), the nine  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  coefficients are fitted simultaneously. Fitting over a data set with sufficient resolution for a sidereal period combined with a spread over half a year can enable us to discriminate all coefficients in a single fit, thanks to their contrasted spectral signatures. The uncertainty related to annual variation could, however, be strongly degraded by uncontrolled systematics. In our case, the robustness of the long term behavior of clocks, which are built to provide absolute frequency references, gives us access to annual variation with controlled systematic uncertainty.

This simultaneous fit is in contrast to the most common approach, referred to hereafter as a “piecemeal” analysis. In this approach, used, e.g., in Refs. [1] and [32], the SME model adjustment is made successively on separate subsets

of parameters, assuming that they are independent and assigning in turn a zero expectation value for those not fitted. The drawbacks of this method are that it requires assumptions on the expectation values and that, by neglecting the correlation between parameters belonging to different subsets, it leads to an artificial decrease in the marginalized uncertainties and thereby to an underestimation of the individual parameter uncertainties. To illustrate this limit of the piecemeal analysis, we compared the results shown in Ref. [1], obtained using such an analysis with two subsets of parameters, and the results obtained with a complete and direct fitting of the same first order  $O(\beta)$  model to the data. For both, the Schmidt model was used.

The results presented in Table IV show that, except for the  $\tilde{c}_Q^p$  coefficient of which the sensitivity is dominated by the systematics, the piecemeal analysis led to an underestimation of the uncertainties by a factor 6 to 20 in the previous analysis. That is why the constraints on the  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p$  coefficients presented in Table I show degraded uncertainties in comparison with Ref. [1], except for  $\tilde{c}_Q^p$ , the uncertainty of which remains the same, and for  $\tilde{c}_{TT}^p$ , which was not constrained in Ref. [1].

In Table IV, we have used the Schmidt nuclear model to allow easier comparison with previous work. But our conclusions are general; in particular, the factors C/P are independent of the nuclear model used.

### C. Discussion of the improved nuclear model

Recently, new nuclear models beyond the Schmidt model were published for several atoms used in LIV experiments [27,28]. We present here a different model of the nucleus, as described in Sec. VII. The model presently used is a state-of-the-art application of the density functional theory, known for a successful description of various nuclear states over the nuclear chart. As such, the

TABLE IV. Comparison between piecemeal (P) and complete (C) analysis for the  $O(\beta)$  model used in Ref. [1]. In the complete analysis, we fit directly for the SME coefficient values. For the piecemeal results, we report the results obtained in Ref. [1] using as subsets the  $\tilde{c}_{TT}^p$  on the one hand and all the purely spatial combinations on the other hand. The underestimation factor of the uncertainty in the piecemeal analysis is denoted C/P.

Coefficient	Uncertainty (GeV) (P) [1]	Uncertainty (GeV) (C)	C/P
$\tilde{c}_Q^p$	$2.2 \cdot 10^{-22}$	$2.1 \cdot 10^{-22}$	0.95
$\tilde{c}_-^p$	$2.8 \cdot 10^{-25}$	$5.2 \cdot 10^{-24}$	19
$\tilde{c}_X^p$	$1.2 \cdot 10^{-25}$	$1.2 \cdot 10^{-24}$	10
$\tilde{c}_Y^p$	$1.2 \cdot 10^{-25}$	$7.5 \cdot 10^{-25}$	6.3
$\tilde{c}_Z^p$	$2.8 \cdot 10^{-25}$	$2.8 \cdot 10^{-24}$	10
$\tilde{c}_{TX}^p$	$3.0 \cdot 10^{-21}$	$2.3 \cdot 10^{-20}$	7.7
$\tilde{c}_{TY}^p$	$3.0 \cdot 10^{-21}$	$5.9 \cdot 10^{-20}$	20
$\tilde{c}_{TZ}^p$	$2.0 \cdot 10^{-21}$	$3.3 \cdot 10^{-20}$	16.5

degrees of freedom of this model are the physical nucleons, treated in the most general way. The present model is therefore more universal than the Schmidt model and more relevant than Ref. [28] to take into account nuclear structure effects. As discussed in Sec. VII, the results of our calculation significantly differ from the results for  $^{133}\text{Cs}$  presented in Ref. [28]. It should be noted that results of the present method on several nuclei are in agreement with the nonrelativistic energy density functional calculations of Ref. [27]. In the case of the  $^{133}\text{Cs}$  atom, the present results are in qualitative agreement with those of the Schmidt model, given that  $\gamma^n$  remains a factor 45 smaller than  $\gamma^p$ , meaning that sensitivity to proton coefficients is much larger than to neutron ones, as expected.

Our results with the SCRMF nuclear model (Table III) set limits on the linear combinations  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p + 0.021\tilde{c}_{\mu\nu}^n$  of SME coefficients. For other atoms, e.g., those used in comagnetometers [42], the corresponding linear combinations are different. This opens the possibility of combining different results in order to derive independent constraints on proton and neutron parameters in global analyses. This will be addressed in more detail in future work.

## X. CONCLUSION AND PERSPECTIVES

We have presented new constraints on coefficients parametrizing Lorentz violations for nucleons in the minimal Standard Model extension, by monitoring the frequency shifts of hyperfine transitions in a cold atom fountain on Earth. Within the fermion sector, our observable is by construction only sensitive to the  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  coefficients (Sec. III). This test relies on the anisotropy of the kinetic energy in the wave functions of the nucleons, characterized by their nonzero momentum quadrupole moment of which the value is highly nuclear model dependent. We first use the Schmidt model, which has so far been mostly used (Sec. VI), and extend the analysis to a more advanced SCRMF nuclear model (Secs. VII and VIII).

We have reanalysed data taken by the dual cold atom fountain FO2 at Paris Observatory in the  $^{133}\text{Cs}$  spin-polarized mode on the  $|3, m_F\rangle \leftrightarrow |4, m_F\rangle$  hyperfine transitions, as first reported in Ref. [1]. Our analysis features the use of a new SME model that includes terms of order  $O(\beta^2)$  (Sec. IV). This allows us access to the isotropic coefficient  $\tilde{c}_{TT}$ , not constrained by the previous analysis. Using a direct and simultaneous fitting of all parameters, we provide a complete analysis including individual limits on all  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  coefficients, the associated correlation matrix, and confidence intervals (Sec. V). We also present a description of the results in terms of independently constrained linear combinations, obtained through a singular value decomposition of the covariance matrix (Appendix C).

To allow for direct comparisons with previous works, we have presented both results, based respectively on the Schmidt nuclear model (Table I) and on our advanced

nuclear model (Table III). The present best limit on the  $\tilde{c}_{TT}^p$  coefficient is improved by 5 orders of magnitude with respect to previous laboratory limits, down to the  $10^{-16}$  GeV scale (Sec. VI). The advanced nuclear model allows us to place limits on a linear combination of proton and neutron coefficients, in contrast to the Schmidt model used in Ref. [1], which accounts only for the proton sector sensitivity. This leads to improvements on the limits of the  $\tilde{c}_Q^n$ ,  $\tilde{c}_{TJ}^n$ , and  $\tilde{c}_{TT}^n$  neutron coefficients, by up to 13 orders of magnitude.

All our results are compatible with the absence of Lorentz violation. As mentioned in the Introduction, if the relevant scale unit for suppressions is the electroweak-to-Planck energy ratio ( $E_{ew}/E_P \sim 10^{-17}$ ), it is particularly interesting to constrain the dimensionless LIV tensors  $\tilde{c}_{\mu\nu}/(mc^2)$  below this Planck suppressed scale. With this study, we bring the limits at or below that level for the first time for all proton and neutron coefficients (with  $mc^2 \sim 1$  GeV for protons and neutrons), except for  $\tilde{c}_{TT}^n$  and  $\tilde{c}_{TT}^p$  of which the limits are respectively weaker by 3 and 1 orders of magnitude. Nonetheless, our results give an experimental benchmark indicating that the minimal suppression compatible with our data for the operators associated with  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  is at least one Planck scale. These dimension-4 Lorentz-violating terms could be expected to be of order 1 from quantum field theory, and the experimental observations thus require that an additional suppression mechanism comes into play, such as that proposed in Refs. [5,25,46].

Our  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  coefficients estimations are still significantly correlated (see Fig. 2), mostly because our two data sets do not span a sufficient portion of the year to allow their full decorrelation from the annual sidebands (Appendix A). Thus, we expect that an additional data set would reduce the marginalized uncertainties and lead to an improvement by one extra order of magnitude of all limits, in particular bringing the limit on  $\tilde{c}_{TT}^p$  down to  $10^{-17}$  GeV. Based on synthetic data simulations, the best period for a third data set would be July or January.

The  $^{133}\text{Cs}$  fountain data could also be analyzed in an extended framework: the nonminimal SME framework, which takes into account higher order Lorentz-violating operators. A nonminimal model, up to order 5 or 6, would contain additional sidereal harmonics, allowing for additional parameters to be determined and possibly for better decorrelation of the minimal ones (Ref. [47]).

Previous experiments realized with other setups and atoms could be reanalyzed with our new nuclear model. Analyzing SME spectroscopy experiments with more accurate models of the nucleus is a current effort of several groups (Refs. [27,28]) and will be the subject of future work centered on the nuclear calculation method used here and its application to other atoms and SME tests.

In conclusion, our work brings significant improvement in constraining possible low-energy signatures of new

high-energy physics, using a set of improved models and analysis that could also benefit to other experimental tests.

## ACKNOWLEDGMENTS

H. P. L. B. is grateful for the financial support of the Labex First-TF and the Centre National d'Études Spatiales. C. G., Q. G. B., and P. W. acknowledge support from the Idex Sorbonne Universités in the frame of the Investissements d'Avenir program, under Grant No. SU-15-R-EMR-07. Q. G. B. was supported during the preparation of this work by the National Science Foundation under Grant No. PHY-1402890. C. G. would like to acknowledge useful discussions with A. Roura.

## APPENDIX A: SECOND ORDER MODEL

The direction and amplitude of the lab velocity with respect to the SCF are respectively denoted  $\mathbf{n}$  and  $\beta = \frac{v}{c}$ . The Lorentz boost matrix  $\Lambda$  of the lab with respect to SCF is

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta\mathbf{n}^T \\ \gamma\beta\mathbf{n} & \mathbb{1}_3 + (\gamma - 1)\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T \end{pmatrix}. \quad (\text{A1})$$

Expanding  $\gamma = 1/(\sqrt{1 - \beta^2})$  to the second order in  $\beta$  gives

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\beta^2 & \beta\mathbf{n}^T \\ \beta\mathbf{n} & \mathbb{1}_3 + \frac{1}{2}\beta^2\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T \end{pmatrix} \quad (\text{A2})$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \beta\mathbf{n}^T \\ \beta\mathbf{n} & \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}}_{\Lambda^{(1)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\beta^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\beta^2\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T \end{pmatrix}}_{\Lambda^{(2)}}, \quad (\text{A3})$$

where  $\Lambda^{(1)}$  is the first order boost and  $\Lambda^{(2)}$  is the second order boost.

Following Ref. [30], the transformation matrix  $\mathfrak{Z}$  from the SCF to the lab frame is given by the product

$$\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \Lambda, \quad (\text{A4})$$

where  $R$  is the rotation matrix describing the orientation of the lab frame's axes directions in the SCF.

The total boost is the sum of the orbital boost of Earth and the boost of the lab relative to the Earth, with amplitudes  $\beta_{\oplus}$  and  $\beta_l$  respectively. As eccentricity of Earth's orbit gives rise to a maximal deviation of 2% of its mean value, it leads to subleading order corrections in our model and can be neglected as shown in Ref. [30]. Earth's orbit is thus taken as circular.

As already mentioned, the second order boost is only necessary for terms involving  $\tilde{c}_{TT}$ , as all other components

TABLE V. Composition of the complete  $O(\beta^2)$  model applied to  $\tilde{c}_q$  in Eq. (10). The expression of the signal associated to each SCF coefficient is detailed in terms of frequency, phase, and boost suppression. The only information not reported here is prefactors of order 1 from two angles, the lab colatitude, and the inclination of the Earth's orbit.  $\omega$  (respectively  $\Omega$ ) denotes the angular frequency of the Earth's rotation (respectively of the Earth's orbit). The column on the left is the main harmonic, and the column next to it is the sideband frequency. The spectral components included in the shortened model fitted to the data are in bold type.

Frequency		$\tilde{c}_Q$	$\tilde{c}_-$	$\tilde{c}_X$	$\tilde{c}_Y$	$\tilde{c}_Z$	$\tilde{c}_{TX}$	$\tilde{c}_{TY}$	$\tilde{c}_{TZ}$	$\tilde{c}_{TT}$
0	0	1 $\beta_\oplus^2$ $\beta_I^2$	$\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$						$\beta_\oplus^2$ $\beta_I^2$
	$\Omega$	cos sin			$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$		$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$
	$2\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$				$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$
$\omega$	$-2\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$				$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$
	$-\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$
	0	cos sin	$\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$	1 $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$	$\beta_I$	$\beta_I$		$\beta_\oplus^2$
$2\omega$	$+2\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$				$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$
	$+\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$
	$-2\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$				$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$
$3\omega$	$-\Omega$	cos sin		$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$		
	0	cos sin	$\beta_\oplus^2$	1 $\beta_\oplus^2$ $\beta_I^2$	$\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$	1 $\beta_\oplus^2$ $\beta_I^2$			$\beta_\oplus^2$
	$+2\Omega$	cos sin	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$	$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$				$\beta_\oplus^2$ $\beta_\oplus^2$
$3\omega$	$+\Omega$	cos sin		$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$	$\beta_\oplus$ $\beta_\oplus$		
	$-\Omega$	cos sin		$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$		$\beta_\oplus\beta_I$ $\beta_\oplus\beta_I$				

of  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  are dominated by zero or first order terms in  $\beta$ . However, it turns out (see Appendix B) that for the  $\tilde{c}_{TT}$  component all  $O(\beta^2)$  terms are obtained from solely the first part of (A3), the second part giving rise to only  $O(\beta^4)$  terms. Note also that consequently any other second order effects (e.g., geodetic precession [48]) can be neglected.

The transformation matrix  $\mathfrak{Z}$  we obtain is then used in (11) to relate the lab frame parameters to the SCF ones. Applying it to  $\tilde{c}_q$  of Eq. (10) leads to a time-varying signal in case any of the SCF  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  coefficients is different from zero. The full explicit model is not given here because of its length, but it is available on request. We summarize its spectral structure in Table V with associated boost suppression factors for each SME coefficient. Restricting to the relevant terms used in the final adjustment, the shortened model is composed of an offset plus 12 frequency components, which amounts to a total of 25 quadratures.

### APPENDIX B: LAB FRAME $\tilde{c}_q$ IN TERMS OF $\tilde{c}_{TT}$ TO SECOND ORDER IN BOOST

The (instantaneous) Lorentz transformation of covector components from the SCF to the laboratory frame is written

$$u_\mu = \mathfrak{Z}^\Xi_\mu u_\Xi, \quad (\text{B1})$$

where capital greek letters denote components with respect to the SCF. For the  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  coefficients in the lab frame, the transformation is

$$\tilde{c}_{\mu\nu} = \mathfrak{Z}^\Xi_\mu \mathfrak{Z}^\Pi_\nu \tilde{c}_{\Xi\Pi}. \quad (\text{B2})$$

We now adopt the special case of isotropic SCF coefficients  $\tilde{c}_{\Xi\Pi}$ , in matrix form (recall that  $\tilde{c}_{\Xi\Pi}$  is traceless),

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_{TT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\tilde{c}_{TT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\tilde{c}_{TT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\tilde{c}_{TT} \end{pmatrix}, \quad (\text{B3})$$

and we focus on the quadrupole set of coefficients in the lab frame  $\tilde{c}_q = \tilde{c}_{xx} + \tilde{c}_{yy} - 2\tilde{c}_{zz}$ . Using the Lorentz transformation and Eq. (B3), the lab frame coefficients can be written as

$$\begin{aligned} \tilde{c}_q &= [\mathfrak{Z}^T_x \mathfrak{Z}^T_x + \mathfrak{Z}^T_y \mathfrak{Z}^T_y \\ &\quad - 2\mathfrak{Z}^T_z \mathfrak{Z}^T_z] \tilde{c}_{TT} + [\mathfrak{Z}^J_x \mathfrak{Z}^J_x \\ &\quad + \mathfrak{Z}^J_y \mathfrak{Z}^J_y - 2\mathfrak{Z}^J_z \mathfrak{Z}^J_z] \frac{1}{3} \tilde{c}_{TT}. \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

Thus, we would need to know the spatial part of the Lorentz transformation to second order in the boost velocity to get the desired expression. However, there is a quicker method.

We use the defining property of Lorentz transformations and the flat space-time metric:

$$\eta_{\mu\nu} = \mathfrak{Z}^\Xi_\mu \mathfrak{Z}^\Pi_\nu \eta_{\Xi\Pi}. \quad (\text{B5})$$

From this equation, we can reexpress the terms involving  $\mathfrak{Z}^J_j$  using only the  $\mathfrak{Z}^T_j$  terms. For instance, if we pick  $\mu = \nu = x$ , then we have from (B5),

$$\begin{aligned} 1 &= \mathfrak{Z}^\Xi_x \mathfrak{Z}^\Pi_x \eta_{\Xi\Pi} \\ &= -\mathfrak{Z}^T_x \mathfrak{Z}^T_x + \mathfrak{Z}^J_x \mathfrak{Z}^J_x, \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

thus implying

$$\mathfrak{Z}^J_x \mathfrak{Z}^J_x = 1 + [\mathfrak{Z}^T_x]^2 \quad (\text{B7})$$

with similar identities holding for the other terms in the last line of (B4). Using identities like (B7), in Eq. (B4), we arrive at the expression

$$\tilde{c}_q = \frac{4}{3} \tilde{c}_{TT} [\mathfrak{Z}^T_x \mathfrak{Z}^T_x + \mathfrak{Z}^T_y \mathfrak{Z}^T_y - 2\mathfrak{Z}^T_z \mathfrak{Z}^T_z], \quad (\text{B8})$$

from which it should be clear that only the first order boost in  $\Lambda$  is needed to find the time dependence of  $\tilde{c}_q$  in terms of  $\tilde{c}_{TT}$ . A similar method was used in Ref. [49].

### APPENDIX C: INDEPENDENT BOUNDS ON LINEAR COMBINATIONS OF SME COEFFICIENTS USING SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

One can use a singular value decomposition of the covariance matrix [50] to set constraints on linear combinations of SME coefficients. This decomposition is equivalent to a diagonalization of the covariance matrix  $C$ , which allows the determination of independently constrained linear combinations of parameters. These combinations are orthonormal to each other in the Euclidean sense. We write the covariance matrix  $C$  as

$$C = V \cdot S \cdot V^T, \quad (\text{C1})$$

TABLE VI. Limits on linear combinations of SME Lorentz-violating parameters  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p$  for the proton using the Schmidt model, in GeV. These combinations have been obtained using a singular value decomposition of the total covariance matrix.

Linear combination	Value and uncertainty	Unit (GeV)
$c_1$	$(-0.2 \pm 2.1)$	$10^{-22}$
$c_2$	$(-2.0 \pm 3.6)$	$10^{-24}$
$c_3$	$(0.6 \pm 1.6)$	$10^{-24}$
$c_4$	$(-4.0 \pm 7.0)$	$10^{-25}$
$c_5$	$(-0.3 \pm 1.3)$	$10^{-24}$
$c_6$	$(0.7 \pm 2.4)$	$10^{-20}$
$c_7$	$(-1.7 \pm 6.8)$	$10^{-20}$
$c_8$	$(0.1 \pm 1.4)$	$10^{-20}$
$c_9$	$(1.6 \pm 6.9)$	$10^{-16}$

TABLE VII. Composition of the linear combinations of  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p$  coefficients obtained using a SVD of the covariance matrix. Boldface numbers indicate the leading terms, for better visibility.

	$\tilde{c}_Q^p$	$\tilde{c}_L^p$	$\tilde{c}_X^p$	$\tilde{c}_Y^p$	$\tilde{c}_Z^p$	$\tilde{c}_{TX}^p$	$\tilde{c}_{TY}^p$	$\tilde{c}_{TZ}^p$	$\tilde{c}_{TT}^p$
$c_1$	<b>1.0</b>	$-5.3 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$-4.9 \cdot 10^{-6}$	$-7.7 \cdot 10^{-6}$	$-4.6 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$-1.7 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-9}$
$c_2$	$5.7 \cdot 10^{-5}$	<b>0.99</b>	-0.01	0.02	0.05	$9.9 \cdot 10^{-5}$	$-8.1 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$	$-3.2 \cdot 10^{-9}$
$c_3$	$2.7 \cdot 10^{-5}$	<b>-0.11</b>	<b>-0.8</b>	0.06	<b>0.59</b>	$7.1 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$6.1 \cdot 10^{-6}$	$-1.7 \cdot 10^{-9}$
$c_4$	$-1.2 \cdot 10^{-6}$	0.02	-0.09	<b>-0.99</b>	-0.02	$-1.7 \cdot 10^{-5}$	$6.4 \cdot 10^{-8}$	$-1.4 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$
$c_5$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	-0.02	<b>-0.57</b>	0.06	<b>-0.81</b>	$4.0 \cdot 10^{-6}$	$-1.8 \cdot 10^{-5}$	$3.7 \cdot 10^{-6}$	$-4.2 \cdot 10^{-10}$
$c_6$	$-6.3 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$-6.7 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$	<b>-0.96</b>	<b>0.11</b>	<b>-0.26</b>	$-7.1 \cdot 10^{-5}$
$c_7$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$-7.0 \cdot 10^{-5}$	$-9.8 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	<b>-0.22</b>	<b>-0.86</b>	<b>0.47</b>	$-2.1 \cdot 10^{-5}$
$c_8$	$-6.1 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$-2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$-7.0 \cdot 10^{-6}$	<b>-0.17</b>	<b>0.51</b>	<b>0.84</b>	$8.6 \cdot 10^{-7}$
$c_9$	$-4.8 \cdot 10^{-9}$	$9.0 \cdot 10^{-9}$	$-6.8 \cdot 10^{-9}$	$2.0 \cdot 10^{-9}$	$4.2 \cdot 10^{-9}$	$-7.2 \cdot 10^{-5}$	$-1.1 \cdot 10^{-5}$	$-9.3 \cdot 10^{-6}$	<b>1.0</b>

where the matrix  $V$  contains the eigenvectors of  $C$  and the diagonal  $S$  matrix contains its eigenvalues. These two matrices and the parameter vector  $\mathbf{a}$  are then used to define the linear-independent combinations vector, denoted  $\mathbf{c}$ , and their associated uncertainties  $\sigma_i^c$ :

$$\mathbf{c} = V^T \cdot \mathbf{a} \quad (\text{C2})$$

$$\sigma_i^c = \sqrt{S_{ii}}. \quad (\text{C3})$$

The detailed composition of those combinations is presented in Table VII, and their values and uncertainties are

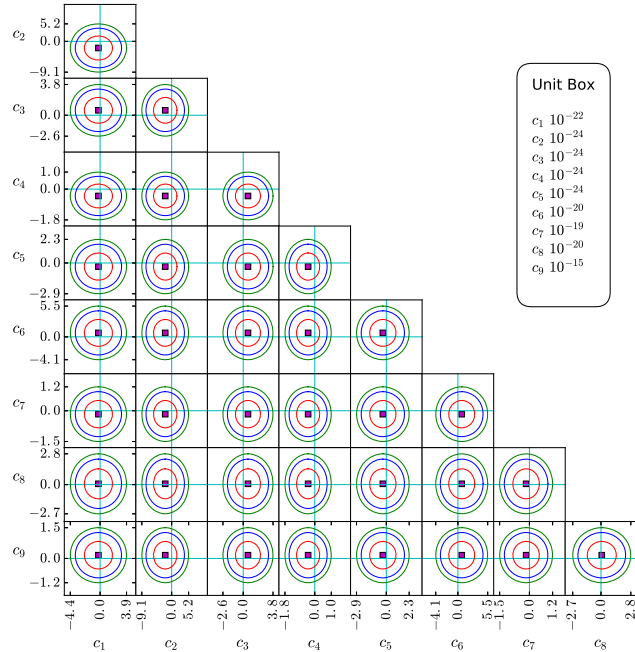


FIG. 5. Confidence ellipses of the linear combinations (SVD). The red, blue, and green confidence ellipses correspond respectively to the 68.3%, 90%, and 95.4% confidence regions. The purple square is the position of the least-squares solution. Axis labels give the 95.4% confidence intervals in GeV, the respective orders of magnitude of which are given in the upper right box. Horizontal and vertical blue lines at zero value allow us to visualize the absence of significance in the results.

shown in Table VI. We also provide the analytical confidence ellipses of these linear combinations in Fig. 5. As expected, the ellipses are not tilted, meaning that the linear combinations have a diagonal covariance matrix. The results have been given for the Schmidt model. For the alternative nuclear model used here, results in Table VI and Fig. 5 would be rescaled as was done in Sec. VIII for Table III, and in their composition given in Table VII, proton coefficients would be replaced by  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p + 0.021\tilde{c}_{\mu\nu}^n$ .

#### APPENDIX D: EXPECTATION VALUE OF THE NONLOCAL $p^2$ OPERATOR

Considering a generic one-body operator

$$\hat{O} = \sum_{i,j} \langle i|\mathcal{O}|j\rangle c_i^\dagger c_j, \quad (\text{D1})$$

one can show using the Wick theorem that the expectation value on an Hartree-Fock-Bogoliubov vacuum of this squared operator can be written

$$\frac{\langle \Phi_0 | \hat{O}^2 | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle} = [\text{Tr}(\mathcal{O}\rho)]^2 + \text{Tr}(\mathcal{O}^2\rho) - \text{Tr}(\mathcal{O}\rho\mathcal{O}\rho) - \text{Tr}[\mathcal{O}\kappa(\mathcal{O}\kappa)^*], \quad (\text{D2})$$

with the normal density defined as

$$\rho_{ij} = \frac{\langle \Phi_0 | c_j^\dagger c_i | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle} \quad (\text{D3})$$

and the pairing tensor

$$\kappa_{ij} = \frac{\langle \Phi_0 | c_j c_i | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle}. \quad (\text{D4})$$

In the case of (18), the matrix elements of the momentum operator can be expressed in the deformed harmonic-oscillator basis as

$$\langle i|\vec{p}|j\rangle = -i\hbar \int d^3r_i d^3r_j \phi_i^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_j(\vec{r}). \quad (\text{D5})$$

Thus, one may directly use (D2) to compute (18).



- [1] P. Wolf, F. Chapelet, S. Bize, and A. Clairon, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 060801 (2006).
- [2] V. A. Kostelecký and N. Russell, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 11 (2011); [arXiv:0801.0287v10](#).
- [3] D. Mattingly, *Living Rev. Relativ.* **8**, 5 (2005).
- [4] G. Amelino-Camelia, *Living Rev. Relativ.* **16**, 5 (2013).
- [5] S. Liberati, *Classical Quantum Gravity* **30**, 133001 (2013).
- [6] C. M. Will, *Living Rev. Relativ.* **17**, 4 (2014).
- [7] J. D. Tasson, *Rep. Prog. Phys.* **77**, 062901 (2014).
- [8] G. Luders, *Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.* **28**, 1 (1954).
- [9] W. Pauli, L. Rosenfeld, and V. Weisskopf, *Brit. J. Philos. Sci.* **7**, 357 (1957).
- [10] O. W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 231602 (2002).
- [11] V. A. Kostelecký and S. Samuel, *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
- [12] V. A. Kostelecký and R. Potting, *Nucl. Phys.* **B359**, 545 (1991).
- [13] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997).
- [14] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).
- [15] V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D* **69**, 105009 (2004).
- [16] T. Damour and A. Polyakov, *Nucl. Phys.* **B423**, 532 (1994).
- [17] V. A. Kostelecký, R. Lehnert, and M. J. Perry, *Phys. Rev. D* **68**, 123511 (2003).
- [18] T. Damour and J. F. Donoghue, *Phys. Rev. D* **82**, 084033 (2010).
- [19] A. Hees, J. Guéna, M. Abgrall, S. Bize, and P. Wolf, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 061301 (2016).
- [20] V. A. Kostelecký and R. Potting, *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995).
- [21] V. A. Kostelecký and R. Lehnert, *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001).
- [22] A. Lo, P. Haslinger, E. Mizrahi, L. Anderegg, H. Müller, M. Hohensee, M. Goryachev, and M. E. Tobar, *Phys. Rev. X* **6**, 011018 (2016).
- [23] J. Collins, A. Perez, D. Sudarsky, L. Urrutia, and H. Vucetich, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 191301 (2004).
- [24] D. Mattingly, [arXiv:0802.1561](#).
- [25] M. Pospelov and Y. Shang, *Phys. Rev. D* **85**, 105001 (2012).
- [26] J. Alexandre and J. Leite, *Classical Quantum Gravity* **33**, 195005 (2016).
- [27] B. Brown, G. Bertsch, L. Robledo, M. Romalis, and V. Zelevinsky, [arXiv:1604.08187](#).
- [28] V. V. Flambaum, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 072501 (2016).
- [29] V. A. Kostelecký and C. D. Lane, *Phys. Rev. D* **60**, 116010 (1999).
- [30] R. Bluhm, V. A. Kostelecký, C. D. Lane, and N. Russell, *Phys. Rev. D* **68**, 125008 (2003).
- [31] V. A. Kostelecký and J. D. Tasson, *Phys. Rev. D* **83**, 016013 (2011).
- [32] M. A. Hohensee, N. Leefler, D. Budker, C. Harabati, V. A. Dzuba, and V. V. Flambaum, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 050401 (2013).
- [33] J. Guéna, M. Abgrall, D. Rovera, P. Laurent, B. Chupin, M. Lours, G. Santarelli, P. Rosenbusch, M. Tobar, R. Li, K. Gibble, A. Clairon, and S. Bize, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **59**, 391 (2012).
- [34] J. Guéna, M. Abgrall, A. Clairon, and S. Bize, *Metrologia* **51**, 108 (2014).
- [35] S. Bize, P. Laurent, M. Abgrall, H. Marion, I. Maksimovic, L. Cacciapuoti, J. Grünert, C. Vian, F. Pereira dos Santos, P. Rosenbusch, P. Lemonde, G. Santarelli, P. Wolf, A. Clairon, A. Luiten, M. Tobar, and C. Salomon, *J. Phys. B* **38**, S449 (2005).
- [36] V. A. Kostelecký and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002).
- [37] R. C. Brinker and R. Minnick, *The Surveying Handbook*, 2nd ed. (Springer, New York, 1995), Chap. 16, p. 411.
- [38] D. Vretenar, A. V. Afanasjev, G. A. Lalazissis, and P. Ring, *Phys. Rep.* **409**, 101 (2005).
- [39] T. Nikšić, N. Paar, D. Vretenar, and P. Ring, *Comput. Phys. Commun.* **185**, 1808 (2014).
- [40] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer Science and Business Media, 2004).
- [41] S. Perez-Martin and L. M. Robledo, *Phys. Rev. C* **78**, 014304 (2008).
- [42] M. Smiciklas, J. M. Brown, L. W. Cheuk, S. J. Smullin, and M. V. Romalis, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 171604 (2011).
- [43] V. A. Kostelecký and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **88**, 096006 (2013).
- [44] F. R. Klinkhamer and M. Schreck, *Phys. Rev. D* **78**, 085026 (2008).
- [45] B. Altschul, *Phys. Rev. D* **78**, 085018 (2008).
- [46] A. Belenchia, A. Gambassi, and S. Liberati, *J. High Energy Phys.* **06** (2016) 49.
- [47] V. A. Kostelecký and A. J. Vargas, *Phys. Rev. D* **92**, 056002 (2015).
- [48] M. Soffel, S. A. Klioner, G. Petit, P. Wolf, S. M. Kopeikin, P. Bretagnon, V. A. Brumberg, N. Capitaine, T. Damour, T. Fukushima, B. Guinot, T.-Y. Huang, L. Lindgren, C. Ma, K. Nordtvedt, J. C. Ries, P. K. Seidelmann, D. Vokrouhlický, C. M. Will, and C. Xu, *Astron. J.* **126**, 2687 (2003).
- [49] V. A. Kostelecký, A. Melissinos, and M. Mewes, *Phys. Lett. B* **761**, 1 (2016).
- [50] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes C*, 2nd ed. (Cambridge University Press, New York, 1992), Chap. 2.6, p. 59.

# Lorentz-Symmetry Test at Planck-Scale Suppression With a Spin-Polarized $^{133}\text{Cs}$ Cold Atom Clock

H. Pihan-Le Bars<sup>1</sup>, C. Guerlin, R.-D. Lasserri, J.-P. Ebran, Q. G. Bailey, S. Bize, E. Khan, and P. Wolf

**Abstract**—We present the results of a local Lorentz invariance (LLI) test performed with the  $^{133}\text{Cs}$  cold atom clock FO2, hosted at SYRTE. Such a test, relating the frequency shift between  $^{133}\text{Cs}$  hyperfine Zeeman substates with the Lorentz violating coefficients of the standard model extension (SME), has already been realized by Wolf *et al.* and led to state-of-the-art constraints on several SME proton coefficients. In this second analysis, we used an improved model, based on a second-order Lorentz transformation and a self-consistent relativistic mean field nuclear model, which enables us to extend the scope of the analysis from purely proton to both proton and neutron coefficients. We have also become sensitive to the isotropic coefficient  $\tilde{c}_{\text{TT}}$ , another SME coefficient that was not constrained by Wolf *et al.* The resulting limits on SME coefficients improve by up to 13 orders of magnitude the present maximal sensitivities for laboratory tests and reach the generally expected suppression scales at which signatures of Lorentz violation could appear.

**Index Terms**—Atomic clock, Lorentz invariance, standard model extension (SME).

## I. INTRODUCTION

THE Lorentz invariance principle is a cornerstone of two major theories describing the modern physics: general relativity (GR) and standard model (SM). Despite their respective success, they fail to give a unified description of all the known physical interactions. In order to address this issue, several alternative theories of unification have been developed over the last decades. Some of them, such as loop quantum gravity, include the possibility of Lorentz invariance violation (LIV) at high-energy scale [4]–[8]. Although such energies far exceed our technological capacities, residual signatures of this Lorentz violation may appear at low-energy scale.

In the purpose of testing the limits of actual theories on one hand and alternative theories on the other hand, a large range of experimental setups have been used to search for these

Manuscript received October 12, 2017; accepted January 30, 2018. Date of publication February 12, 2018; date of current version June 1, 2018. (Corresponding author: H. Pihan-Le Bars.)

H. Pihan-Le Bars, S. Bize, and P. Wolf are with SYRTE, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités, UPMC University Paris 06, LNE, 75014 Paris, France (e-mail: helene.pihan-lebars@obspm.fr).

C. Guerlin is with the Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, UPMC-Sorbonne Universités, Collège de France, 75005 Paris, France, and also with SYRTE, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, LNE, 75014 Paris, France.

R.-D. Lasserri and E. Khan are with the Institut de Physique Nucléaire, Université Paris-Sud, IN2P3-CNRS, F-91406 Orsay, France.

J.-P. Ebran is with CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France.

Q. G. Bailey is with the Department of Physics and Astronomy, Embry-Riddle Aeronautical University, Prescott, AZ 86301 USA.

Digital Object Identifier 10.1109/TUFFC.2018.2805354

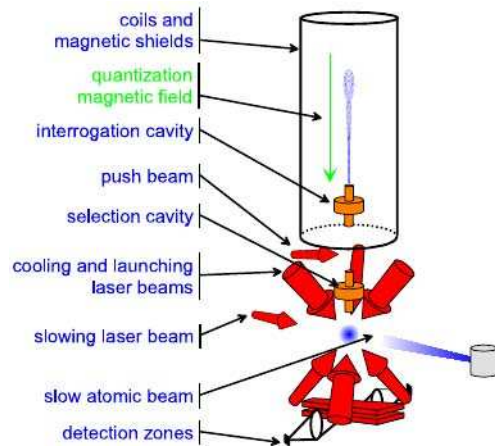


Fig. 1. Schematic of an atomic fountain from [9].

weak signatures on Earth. As the Lorentz violation has not yet been observed, one needs to search at lower energy scale, which requires experiments with high precision and long-term stability, such as atomic clocks.

In this paper, we use the data obtained from the  $^{133}\text{Cs}$  and  $^{87}\text{Rb}$  dual fountain FO2 (see Fig. 1), operated at the Paris Observatory, and previously analyzed in [2] to perform the local Lorentz invariance (LLI) test in the standard model extension (SME) framework. The latter is a general framework built to address the issue of low-energy effects of new physics that could appear at Planck scale in both GR and SM, and particularly spontaneous Lorentz symmetry breaking [10]. The SME is an effective theory, built from the combination of the usual SM fields [see example given in (1)]. The resulting additional Lorentz violating terms appearing in the Lagrangian are parameterized by the SME background coefficients (scalars, vectors, or tensors), which quantify the amplitude of the deviation to the symmetry in a large variety of sectors (e.g., photon, matter, and gravity). Most of these coefficients are species dependent, meaning that they lead to different deviations to known physics depending on the considered body or particle.

Here, we constrain the traceless rank-2 tensor  $\tilde{c}_{\mu\nu}$ , which is responsible for an anisotropy of the particle energy-momentum or dispersion relation. Indeed, the  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  tensor appears as a modification of the kinetic terms of the relativistic Lagrangian of a given particle, as illustrated in (1) in the case of a spin-1/2 Dirac fermion of mass  $m$

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2} i \bar{\psi} (\gamma_\mu + \tilde{c}_{\mu\nu} \gamma^\nu) \partial^\mu \psi - \bar{\psi} m \psi \quad (1)$$

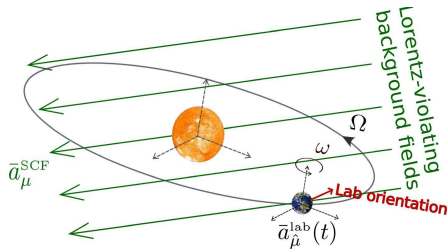


Fig. 2. Schematic of the trajectory of an Earth-based lab frame with respect to the SCF. The vector field  $\bar{a}_\mu$  is an arbitrary SME background coefficient. The Earth's orbital and sidereal frequencies are denoted as  $\Omega$  and  $\omega$ , respectively.

where  $\psi$  is the fermion field and  $\gamma^\nu$  are usual Dirac matrices. This equation focuses on the deviation to LLI due to  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  tensor, the full expression involving a larger range of SME coefficients can be found in [11]. The components of the  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  coefficients have been constrained by several other experiments, among others [12]–[16].

By improving the SME model used in [2] to set constraints on eight proton coefficients from the matter sector, we extend the scope of the analysis to nine coefficients for both proton and neutron, and we improve by up to 13 orders of magnitude the present constraints on several coefficients compared with the state-of-the-art laboratory limits [16], [17].

## II. SME OBSERVABLES

As the SME intends to be independent of any given theory involving LLI violations, it just considers the consequences of a spontaneous symmetry breaking (SSB), which is supposed to have occurred in the early Universe. As a consequence, the SME is a general framework enabling the derivation of many observables that can be applied to a wide range of experiments. However, the lack of assumptions on this underlying SSB mechanism makes the SME unable to predict the amplitude of the Lorentz violation signals that can be expected with any of these experiments.

The SME obeys conventional observer symmetry and the Lorentz violating coefficients are tensors. This in turn implies their frame dependence and so the time dependence of the signal. In other words, the frame dependence of the SME coefficients imply that SME coefficients expressed in a lab frame, e.g., a ground based laboratory, are time dependent due to the relative motion of the lab with respect to the sun centered frame (SCF) in which the coefficients are conventionally reported [18]. Indeed, the SCF can be considered as an inertial frame over the decades during which SME experiments are performed. In order to express the observable in terms of constant SCF coefficients and not time-varying lab frame coefficients, one needs to apply a transformation, involving rotations and boost [19], to the lab frame coefficients. This transformation—a Lorentz transformation—leads to a harmonic dependence of the final SCF observable whose frequency components are related to the orbital motion of the lab frame with respect to the SCF (see Fig. 2).

## III. EXPERIMENTAL SETUP: FREQUENCY SHIFT MEASUREMENT

The data sets used for the purpose of this LIV test have been obtained in 2005, using the  $^{133}\text{Cs}$  and  $^{87}\text{Rb}$  double fountain,

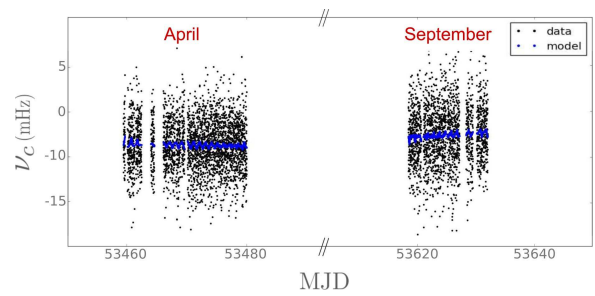


Fig. 3. Frequency measurements taken with F02. The x-axis corresponds to the time expressed in modified Julian date.

run in Cs mode (more details on the experimental setup can be found in [20] and [21]).

This experiment is particularly interesting for such test as it combines long-term stability and high-resolution spectroscopy measurement on the hyperfine transition  $|F = 3, m_F\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F\rangle$  of the  $^{133}\text{Cs}$  ground state  $6^2S_{1/2}$ . These characteristics have been valuable for several other tests. Among others, a test of local position invariance [22] by looking for an oscillation of fundamental constants and the search of an oscillating massive field as a dark matter candidate [23], both using the comparison of ground state hyperfine frequencies of  $^{133}\text{Cs}$  and  $^{87}\text{Rb}$ . In our case, the effect of the Lorentz violation on this type of measurement would be a relative shift of the hyperfine levels and thus a periodic variation of the transition frequency depending on the orientation of the quantization axis (vertically oriented) with respect to some Lorentz violating background field defining a preferred orientation of space-time.

Our data consist of two sets, 21 days measurements in April 2005 and 14 days measurements in September 2005, respectively, taken on a combination of  $|F = 3, m_F\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F\rangle$  hyperfine transitions (see fig. 3). The use of magnetized transitions instead of the usual clock transition  $|F = 3, m_F = 0\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$  is needed as the Lorentz violating part of the observable vanishes for  $m_F = 0$ , but it has the counterpart of being sensitive to first-order Zeeman shift.

In order to overcome this linear dependence on the magnetic field, a combined observable  $\nu_c$  is built by measuring quasi-simultaneously the transition frequency for  $m_F = +3, -3$ , and 0 [2]. This combined observable is related to the Lorentz violating  $c_{\mu\nu}$  tensor through

$$\nu_c = -\frac{9}{7h} \sum_{w=p,n} \gamma_w \tilde{c}_q^w - \frac{9}{8} K_z^{(2)} B^2 \quad (2)$$

which corresponds to the minimal SME lab frame model for alkali hyperfine transitions ([2], [11], [19]). In (2), the magnetic field is denoted as  $B$  and  $K_z^{(2)} = 427.45 \times 10^8 \text{ Hz T}^{-2}$  is the second-order Zeeman coefficient [24].

The observable depends on a species-dependent lab frame parameter  $\tilde{c}_q^w$  (with  $w$ , respectively,  $p$  for proton and  $n$  for neutron), which contains the  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  tensor components. The second term in (2) corresponds to the second-order Zeeman correction.

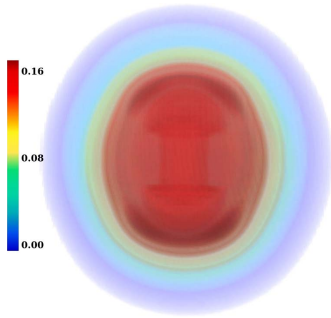


Fig. 4. Three-dimensional representation of nucleonic density of  $^{133}\text{Cs}$  in  $\text{fm}^{-3}$  calculated using SCRMF model in the intrinsic frame.

The sensitivity to proton and neutron coefficients is controlled by the particle-dependent prefactor  $\gamma_w$ , whose values depend on the nuclear model considered.

#### IV. NUCLEAR MODEL DEPENDENCE OF THE SME OBSERVABLE

The  $\gamma_w$  factor can be related to the matrix elements of the nuclear quadrupole moment operator, as described in [11]. As these matrix elements are entirely dependent of the nuclear model used for their computation, we used the state-of-the-art nuclear calculations to estimate their expectation values.

The  $^{133}\text{Cs}$  nucleus quadrupole moment arises from an anisotropic distribution of the nucleonic density, which can be easily seen by representing the nucleonic density in the intrinsic frame (see Fig. 4).

In the SME, the  $\gamma_w$  factor and more generally the parameters related to the nucleus are determined with the Schmidt nuclear model. In this shell model, the magnetic moment of the nucleus is set by the last unpaired nucleon, which means that in the case of an odd-proton nucleus, such as the  $^{133}\text{Cs}$ , the entire nuclear quadrupole moment is carried by a single valence proton. In addition, the predictions of this model concerning the value of the nuclear quadrupole moment ( $Q_{\text{schmidt}} = -151.12$  mb) are very inaccurate compared with the experimental value ( $Q_{\text{exp}} = -3.43$  mb [25]) with  $Q_{\text{schmidt}} \sim 40 Q_{\text{exp}}$ . This experimental value has been obtained through hyperfine spectroscopic measurements on CsF molecule. The experimental value thus corresponds to the so-called spectroscopic quadrupole moment [26].

Recently, alternative nuclear models beyond the Schmidt model have been used to describe several atoms used in LIV experiments ([27], [28]). Here, we used the self-consistent relativistic mean field (SCRMF) theory, which allows us to take into account the multiple contribution of the nucleons to the nuclear quadrupole moment in a fully microscopic way and thus to estimate both the neutron and proton contributions to the SME LIV shift [3]. The contribution of protons to the nuclear quadrupole moment obtained with the SCRMF model is  $Q_p, \text{SCRMF} = -3.54$  mb, which is in good agreement with the experimental value. The values obtained for  $\gamma^w$  with the Schmidt model and the SCRMF theory are summarized in Table I. We can see that the results are not much different particularly for the proton parameter  $\gamma^p$ . However, one can

TABLE I  
VALUES OF THE  $\gamma^w$  [-] PARAMETER FOR PROTON (p) AND NEUTRON (n) OBTAINED FROM THE SCHMIDT AND THE SCRMF MODEL

Nuclear model	$\gamma^p$	$\gamma^n$
Schmidt	$-1.1 \times 10^{-3}$	0
SCRMF	$8.32 \times 10^{-4}$	$1.76 \times 10^{-5}$

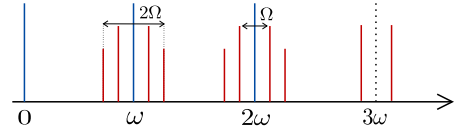


Fig. 5. Frequency components of the second-order model. Blue line: frequencies included in the previous analysis [2]. Red lines: frequencies appearing exclusively in the second-order model. The daily frequency is denoted  $\omega$  and the annual one  $\Omega$ .

note the nonzero value obtained for the neutron parameter in case of the SCRMF model. Although this value is 45 times smaller than the one obtained for  $\gamma^p$ , it makes our experiment sensitive to the neutron SME coefficients, which was not possible with the Schmidt model.

#### V. SECOND-ORDER BOOST MODEL FOR TIME VARIATION WITH RESPECT TO SCF COEFFICIENTS

In order to search for a periodic modulation of the clock frequency, the results must be expressed in terms of constant SCF coefficients as explained in Section II. The transformation from lab frame to SCF coefficients usually involves first-order terms in boost  $O(\beta)$  ([2], [11], [19]) and can be written [see (3)] as a composition of a rotation ( $R$ ) and a boost ( $\Lambda[O(\beta^n)]$ ) matrix,  $\beta$  being the Earth's boost and  $n$  the maximal order of boost terms included in the matrix

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \Lambda[O(\beta^n)]. \quad (3)$$

The  $O(\beta)$  matrix is usually enough to constrain the SME coefficients, as the information added by the higher order terms is almost negligible for the analysis. But it appears that the isotropic coefficient  $\tilde{c}_{TT}$  only appears in terms that are at least in second order in boost. That is the reason why this analysis uses an improved model based on a second-order boost matrix.

Given our data span (two sets distant of six months), we are able to take into account the orbital motion of Earth and thus to include annual modulations of SME signatures in our model. This is an another improvement compared with the previous analysis where annual modulations were neglected. The model now exhibits a total of 13 frequency components (25 quadratures), instead of three frequency components (five quadratures) in [2] (see Fig. 5).

The inclusion of additional frequencies is particularly suitable for the decorrelation of the SME coefficients. Indeed, the amplitude of each frequency is associated with a given linear combination of physical parameters and of at least one SME coefficient. This combination is different for each frequency. Using many frequency components, we gain ability to distinguish the contribution of each SME coefficient to

TABLE II

LIMITS ON THE SME LORENTZ VIOLATING PARAMETERS  $\tilde{c}_{\mu\nu}^w$  FOR THE PROTON AND NEUTRON, IN GeV, WHEN USING THE SCRMF NUCLEAR MODEL. THE LAST TWO COLUMNS SHOW THE MAXIMAL SENSITIVITIES ON EACH NUCLEON AS DEFINED IN [17]. BOLDFACE INDICATES THE VALUES WHICH IMPROVE OVER THE STATE-OF-THE-ART LABORATORY LIMITS PUBLISHED IN [17] AND MORE RECENTLY IN [16], VALUES IN PARENTHESES INDICATE THE IMPROVEMENT IN ORDERS OF MAGNITUDE

Coefficient	Value and uncertainty ( $1\sigma$ ) (GeV)	$\tilde{c}_{\max}^p$ (GeV)	$\tilde{c}_{\max}^n$ (GeV)
$\tilde{c}_0^p + 0.021\tilde{c}_0^n$	$(0.4 \pm 2.8) \times 10^{-22}$	$10^{-21}$	<b><math>10^{-20}</math>(7)</b>
$\tilde{c}_1^p + 0.021\tilde{c}_1^n$	$(-0.2 \pm 1.2) \times 10^{-23}$	$10^{-29}$	$10^{-29}$
$\tilde{c}_x^p + 0.021\tilde{c}_x^n$	$(2.0 \pm 7.0) \times 10^{-24}$	$10^{-28}$	$10^{-28}$
$\tilde{c}_y^p + 0.021\tilde{c}_y^n$	$(-1.1 \pm 2.2) \times 10^{-24}$	$10^{-28}$	$10^{-28}$
$\tilde{c}_z^p + 0.021\tilde{c}_z^n$	$(-1.3 \pm 5.2) \times 10^{-24}$	$10^{-29}$	$10^{-29}$
$\tilde{c}_{TX}^p + 0.021\tilde{c}_{TX}^n$	$(2.0 \pm 7.6) \times 10^{-20}$	$10^{-19}$	<b><math>10^{-17}</math>(12)</b>
$\tilde{c}_{TY}^p + 0.021\tilde{c}_{TY}^n$	$(-1.8 \pm 7.8) \times 10^{-20}$	$10^{-19}$	<b><math>10^{-17}</math>(12)</b>
$\tilde{c}_{TZ}^p + 0.021\tilde{c}_{TZ}^n$	$(1.4 \pm 4.6) \times 10^{-21}$	$10^{-19}$	<b><math>10^{-18}</math>(13)</b>
$\tilde{c}_{TT}^p + 0.021\tilde{c}_{TT}^n$	$(-2.2 \pm 9.1) \times 10^{-16}$	<b><math>10^{-15}</math>(4)</b>	<b><math>10^{-13}</math>(2)</b>

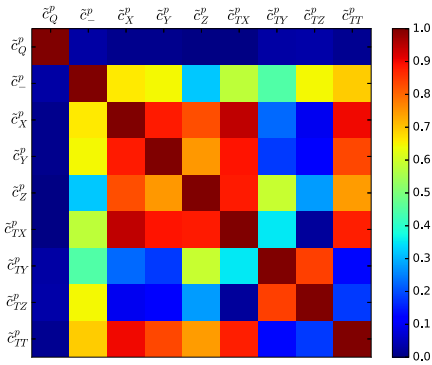


Fig. 6. Correlation matrix of the  $\tilde{c}_{\mu\nu}^p$  components. The matrix includes the statistic correlations (least-squares fitting of the data) and the systematic correlations (least-squares fitting of the TOF of the atoms in the cavity).

the overall signal and we improve their individual estimation. In other terms, with more frequencies, we improve the decorrelation of the coefficients and reduce their individual marginalized uncertainties.

## VI. DATA ANALYSIS AND RESULTS

We perform a least-squares fitting of the complete  $O(\beta^2)$  model to the fountain data. This approach is sufficient considering the white noise affecting the data (see [2]). The nine SME coefficients are adjusted simultaneously in order to take into account the correlations existing between them, and thus avoid the underestimation of the uncertainties.

The dominant systematic effects included in the analysis are related to the second-order Zeeman shift, corresponding to an overall shift of the data, and a residual first-order Zeeman effect, in which amplitude can vary with temperature at daily and annual frequency and thus mimic nonzero SME coefficients. This residual effect is due to the slightly different trajectories followed by the population of each Zeeman substate, which leads to an incomplete cancellation of the

first-order Zeeman shift in  $\nu_c$  in the presence of magnetic field inhomogeneities. We estimate its amplitude for each SME coefficient using the time of flight (TOF) of the atoms in the fountain. Full details of the analysis and results can be found in [3].

The bounds on  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  components obtained using our improved model based on the SCRMF nuclear model and the  $O(\beta^2)$  transformation matrix, respectively, introduced in Sections IV and V are presented in Table II. These bounds are compatible with no LIV.

The correlation matrix, shown in Fig. 6, still contains high values for several coefficients. It means that the uncertainties contained in Table II are marginalized uncertainties dominated by these correlations and could be significantly improved by having additional data sets spread over one year.

## VII. CONCLUSION

We found no evidences for the Lorentz violation, but we improved the present bounds on  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  coefficients by four orders of magnitude for the proton coefficient  $\tilde{c}_{TT}^p$  and by up to 13 orders of magnitude for several neutron coefficients compared to the state-of-the-art [17]. These improvements were made possible through the use of an improved model based on a second-order boost Lorentz transformation from lab to SCF coefficients and the SCRMF modeling of the  $^{133}\text{Cs}$  nucleus. This brings the bounds for all proton and neutron  $\tilde{c}_{\mu\nu}$  coefficients below or near one Planck-scale suppression, i.e.,  $10^{-17}$  GeV, challenging the generally expected suppression.

## REFERENCES

- [1] H. Pihan-Le Bars *et al.*, “Lorentz-symmetry test at Planck-scale suppression with a spin-polarized  $^{133}\text{Cs}$  cold atom clock,” presented at the EFTF-IFCS, Jul. 2017, pp. 106–107.
- [2] P. Wolf, F. Chapelet, S. Bize, and A. Clairon, “Cold atom clock test of Lorentz invariance in the matter sector,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 060801, Feb. 2006.
- [3] H. Pihan-Le Bars *et al.*, “Lorentz-symmetry test at Planck-scale suppression with nucleons in a spin-polarized  $^{133}\text{Cs}$  cold atom clock,” *Phys. Rev. D, Part. Fields*, vol. 95, p. 075026, Apr. 2017.
- [4] R. C. Myers and M. Pospelov, “Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 211601, May 2003.
- [5] D. Mattingly, “Modern tests of Lorentz invariance,” *Living Rev. Relativity*, vol. 8, p. 5, Dec. 2005.
- [6] G. Amelino-Camelia, “Quantum-spacetime phenomenology,” *Living Rev. Relativity*, vol. 16, p. 5, Dec. 2013.
- [7] S. Liberati, “Tests of Lorentz invariance: A 2013 update,” *Classical Quantum Gravity*, vol. 30, no. 13, p. 133001, 2013.
- [8] C. M. Will, “The confrontation between general relativity and experiment,” *Living Rev. Relativity*, vol. 17, p. 4, Dec. 2014.
- [9] S. Bize *et al.*, “Cold atom clocks and applications,” *J. Phys. B, At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 38, no. 9, p. S449, 2005.
- [10] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “Lorentz-violating extension of the standard model,” *Phys. Rev. D, Part. Fields*, vol. 58, p. 116002, Oct. 1998.
- [11] V. A. Kostelecký and C. D. Lane, “Constraints on Lorentz violation from clock-comparison experiments,” *Phys. Rev. D, Part. Fields*, vol. 60, p. 116010, Nov. 1999.
- [12] V. A. Kostelecký and J. D. Tasson, “Matter-gravity couplings and Lorentz violation,” *Phys. Rev. D, Part. Fields*, vol. 83, p. 016013, Jan. 2011.
- [13] M. Smiciklas, J. M. Brown, L. W. Cheuk, S. J. Smullin, and M. V. Romalis, “New test of local Lorentz invariance using a  $^{21}\text{Ne}$ -Rb-K comagnetometer,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 171604, Oct. 2011.

- [14] V. A. Dzuba and V. V. Flambaum, “Limits on gravitational Einstein equivalence principle violation from monitoring atomic clock frequencies during a year,” *Phys. Rev. D, Part. Fields*, vol. 95, p. 015019, Jan. 2017.
- [15] A. Lo *et al.*, “Acoustic tests of Lorentz symmetry using quartz oscillators,” *Phys. Rev. X*, vol. 6, p. 011018, Feb. 2016.
- [16] V. V. Flambaum and M. V. Romalis, “Limits on Lorentz invariance violation from coulomb interactions in nuclei and atoms,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 118, p. 142501, Apr. 2017.
- [17] V. A. Kostelecký and N. Russell, “Data tables for Lorentz and CPT violation,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 83, no. 1, p. 11, 2011. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/0801.0287v10>
- [18] V. A. Kostelecký and M. Mewes, “Signals for Lorentz violation in electrodynamics,” *Phys. Rev. D, Part. Fields*, vol. 66, p. 056005, Sep. 2002.
- [19] R. Bluhm, V. A. Kostelecký, C. D. Lane, and N. Russell, “Probing Lorentz and CPT violation with space-based experiments,” *Phys. Rev. D, Part. Fields*, vol. 68, p. 125008, Dec. 2003.
- [20] J. Guéna *et al.*, “Progress in atomic fountains at LNE-SYRTE,” *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Control*, vol. 59, no. 3, pp. 391–409, Mar. 2012.
- [21] J. Guéna, M. Abgrall, A. Clairon, and S. Bize, “Contributing to TAI with a secondary representation of the SI second,” *Metrologia*, vol. 51, no. 1, p. 108, 2014.
- [22] J. Guéna *et al.*, “Improved tests of local position invariance using  $^{87}\text{Rb}$  and  $^{133}\text{Cs}$  fountains,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 080801, Aug. 2012.
- [23] A. Hees, J. Guéna, M. Abgrall, S. Bize, and P. Wolf, “Searching for an oscillating massive scalar field as a dark matter candidate using atomic hyperfine frequency comparisons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 117, p. 061301, Aug. 2016.
- [24] J. Vanier and C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*. London, U.K.: Hilger, 1989.
- [25] P. Pyykkö, “Year-2008 nuclear quadrupole moments,” *Mol. Phys.*, vol. 106, pp. 1965–1974, Aug. 2008.
- [26] G. Neyens, “Nuclear magnetic and quadrupole moments for nuclear structure research on exotic nuclei,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 66, no. 7, p. 633, 2003.
- [27] V. V. Flambaum, “Enhancing the effect of Lorentz invariance and Einstein’s equivalence principle violation in nuclei and atoms,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 117, p. 072501, Aug. 2016.
- [28] B. A. Brown, G. F. Bertsch, L. M. Robledo, M. V. Romalis, and V. Zelevinsky. (2016). “Nuclear matrix elements for tests of local Lorentz invariance violation.” [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1604.08187>
- [29] B. G. C. Lackenby and V. V. Flambaum. (2017). “Weak quadrupole moment, quadrupole distribution of neutrons and Lorentz invariance violation in deformed nuclei.” [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1705.02642v1>

**Authors’** photographs and biographies not available at the time of publication.





## Résultats complémentaires

### Table des matières

<b>D.1 Ajustement des dérivés long-terme</b>	<b>161</b>
<b>D.2 Ajustement du paramètre d'Eötvös et des paramètres instrumentaux</b>	<b>161</b>
<b>D.3 Ajustement du modèle de bruit d'accélération</b>	<b>163</b>
<b>D.4 Convergence en moyenne cumulées de la méthode LSMC</b>	<b>163</b>
<b>D.5 Ajustement des décentrages pour l'ajustement du modèle SME</b>	<b>164</b>

### D.1 Ajustement des dérivés long-terme

Le modèle ajusté pour les dérivés s'écrit :

$$\gamma_{\text{dérive}}^{(d)} = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4 + d_5 t^5 \quad (\text{D.1})$$

La table D.1 présente les valeurs de dérivés ajustées par moindres carrés et la figure D.1 leurs corrélations.

### D.2 Ajustement du paramètre d'Eötvös et des paramètres instrumentaux

Les paramètres physiques (décentrages et biais) sont ajustés en même temps que le paramètre du Principe d'Équivalence. Leurs valeurs et incertitudes pour chaque session sont résumées dans la table D.2. On présente également, à la figure D.2, les matrices de corrélations statistique et systématique pour la session 404.



Paramètre	Valeur et incertitude	Unité
$d_0$	$(2.86 \pm 0.01) \times 10^{-4}$	$m.s^{-2}$
$d_1$	$(-9.65 \pm 0.12) \times 10^{-14}$	$m.s^{-3}$
$d_2$	$(-6.03 \pm 0.02) \times 10^{-22}$	$m.s^{-4}$
$d_3$	$(-1.95 \pm 0.01) \times 10^{-30}$	$m.s^{-5}$
$d_4$	$(7.83 \pm 0.16) \times 10^{-40}$	$m.s^{-6}$
$d_5$	$(4.05 \pm 0.02) \times 10^{-50}$	$m.s^{-7}$

TABLEAU D.1 – Résultats de l’ajustement des dérives long-terme pour la session 404.

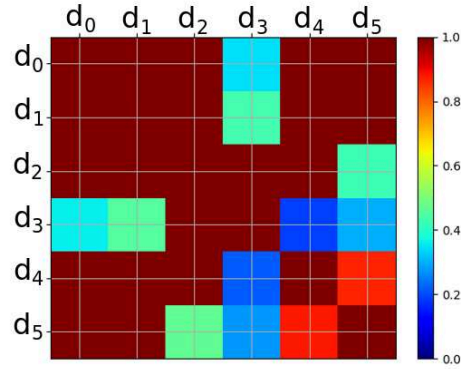


FIGURE D.1 – Matrice de corrélation de l’ajustement des dérives long-terme pour la session 404.

Les valeurs issues de l’ajustement des données d’accélération relatives sont soustraites aux données avant l’ajustement du modèle de bruit.

paramètres	session			unité
	210	218	326	
$\Delta_x$	$20.2(0.1)(0.05) \times 10^{-6}$	$20.1(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$20.0(0.1)(0.2) \times 10^{-6}$	$m$
$\Delta_z$	$-5.7(0.1)(0.05) \times 10^{-6}$	$-5.8(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$-5.9(0.1)(0.6) \times 10^{-6}$	$m$
$C$	$-4.9(0.7)(1.6) \times 10^{-8}$	$-0.3(1.0)(0.1) \times 10^{-8}$	$1.3(1.4)(0.4) \times 10^{-8}$	$m.s^{-2}$
paramètres	session		unité	
	358	404		
$\Delta_x$	$19.9(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$20.2(3 \cdot 10^{-2})(0.04) \times 10^{-6}$	$m$	
$\Delta_z$	$-5.8(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$-5.7(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$m$	
$C$	$-8.3(6.9)(2.9) \times 10^{-9}$	$1.5(0.5)(0.1) \times 10^{-8}$	$m.s^{-2}$	

TABLEAU D.2 – Modèle WEP : résultats par session de l’ajustement des décentrages suivant les axes x et z  $\Delta_x$  et  $\Delta_z$ , ainsi que d’une constante, notée  $C$ , correspondant à un biais.

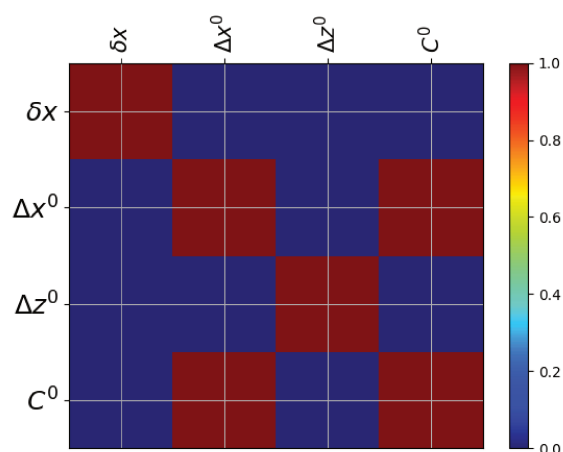


FIGURE D.2 – Matrice de corrélation de l'ajustement des paramètres physiques pour le test du principe d'équivalence, dans le cas de la session 404.

### D.3 Ajustement du modèle de bruit d'accélération

On ajuste le modèle de bruit sur la PSD des données d'accélération relative, après retrait des dérives long-terme et des décentrages. Le modèle de bruit d'accélération est le suivant :

$$S(f) = \frac{a_{-1}}{f} + a_4 f^4 \quad (\text{D.2})$$

Les amplitudes de bruits ajustés par moindres carrés sont résumés dans la table D.3, dont la matrice de corrélation est présentée à la figure D.3.

Paramètre	Valeur et incertitude	Unité
$a_{-1}$	$2.3 \times 10^{-24}$	$\text{m.s}^{-2}$
$a_4$	$2.3 \times 10^{-17}$	$\text{m.s}^{-2}/\text{Hz}^3$

TABLEAU D.3 – Amplitudes du modèle de bruit d'accélération ajustés pour la session 404.

### D.4 Convergence en moyenne cumulées de la méthode LSMC

La figure D.4 illustre la convergence de la méthode LSMC pour l'exemple de l'ajustement du modèle de test du Principe d'Équivalence. Elle présente l'évolution des valeurs et des incertitudes des paramètres en terme de moyenne cumulée en fonction du nombre d'échantillons de bruit ajustés.

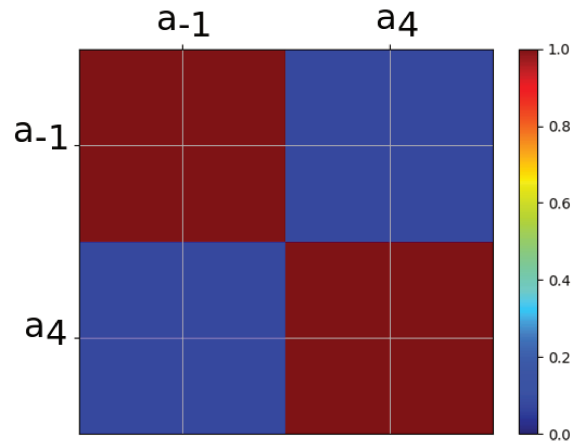


FIGURE D.3 – Matrice de corrélation de l’ajustement des paramètres du modèle de bruit d’accélération, pour la session 404.

## D.5 Ajustement des décentrages pour l’ajustement du modèle SME

La table D.4 présente le résultat de l’ajustement des paramètres physiques (décentrages et biais) réalisé simultanément à celui des paramètres SME.

paramètres	session			unité
	210	218	326	
$\Delta_x$	$20.2(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$20.1(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$20.0(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$m$
$\Delta_z$	$-5.7(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$-5.8(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$-5.9(0.1)(0.3) \times 10^{-6}$	$m$
$C$	$-4.9(0.7)(1.6) \times 10^{-8}$	$-0.3(1.0)(0.1) \times 10^{-8}$	$1.3(1.3)(0.4) \times 10^{-8}$	$m.s^{-2}$

paramètres	session		unité
	358	404	
$\Delta_x$	$19.9(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$20.2(3 \cdot 10^{-2})(0.1) \times 10^{-6}$	$m$
$\Delta_z$	$-5.8(0.1)(0.1) \times 10^{-6}$	$-5.7(0.1)(0.2) \times 10^{-6}$	$m$
$C$	$-8.3(7.0)(2.9) \times 10^{-9}$	$1.5(0.5)(0.2) \times 10^{-8}$	$m.s^{-2}$

TABLEAU D.4 – Modèle SME : résultats par session de l’ajustement des décentrages suivant les axes x et z  $\Delta_x$  et  $\Delta_z$ , ainsi que d’une constante, notée  $C$ , correspondant à un biais.

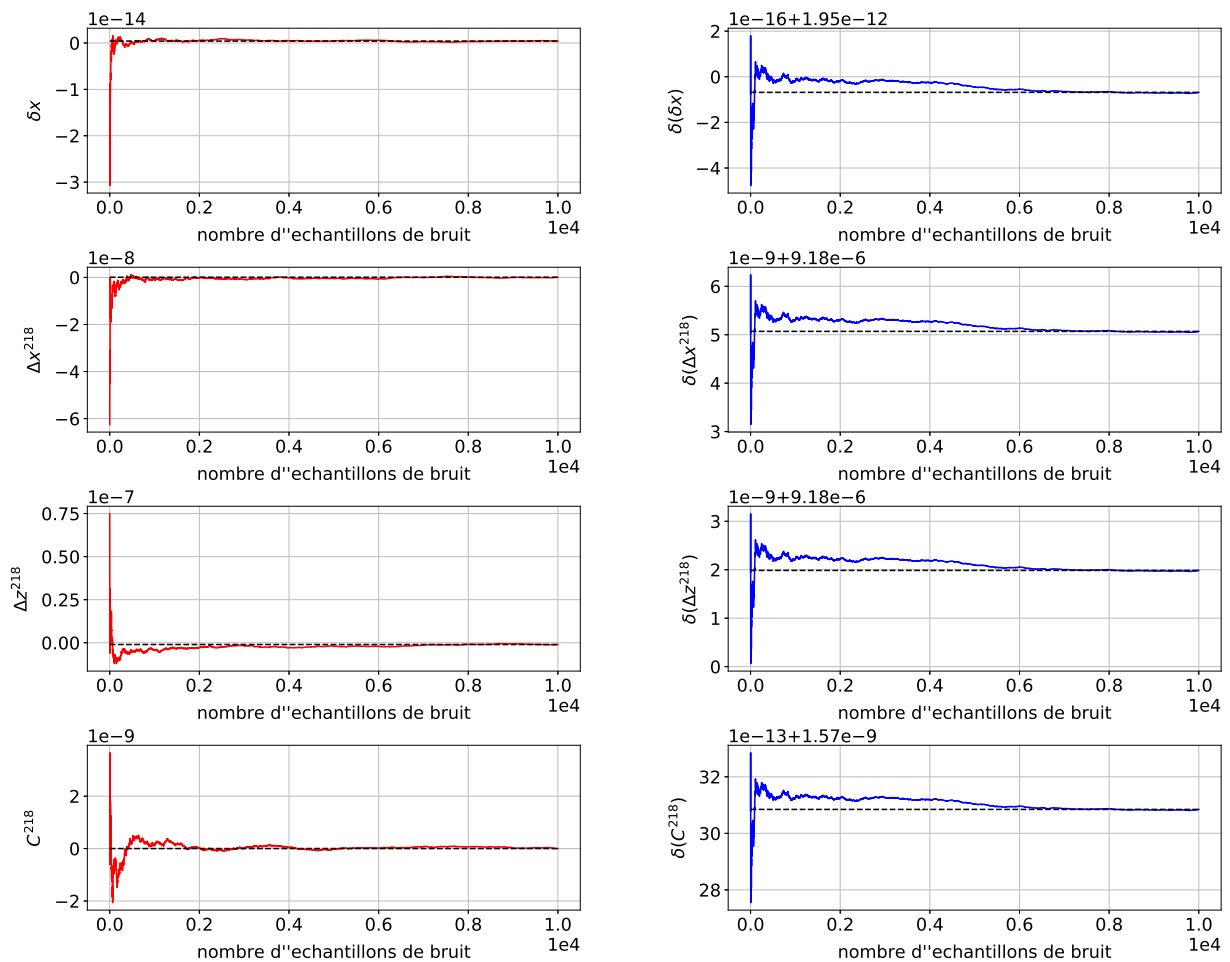


FIGURE D.4 – Illustration de la convergence de la méthode LSMC au travers de l'évolution des valeurs et des incertitudes des paramètres en terme de moyenne cumulée en fonction du nombre d'échantillons de bruit ajustés.



## Liste des Figures

1.1	Géodésique en espace-temps plat et en espace-temps courbe . . . . .	5
1.2	Particules du Modèle Standard . . . . .	7
1.3	Illustration d'une brisure spontanée de symétrie . . . . .	14
1.4	Schéma du repère héliocentrique non-tournant . . . . .	16
1.5	Couplage entre des atomes et un champ de fond SME . . . . .	17
2.1	Représentation schématique de l'ensemble d'horloges atomiques du LNE-SYRTE . . . . .	25
2.2	Structure hyperfine de l'état fondamental de l'atome $^{133}\text{Cs}$ . . . . .	26
2.3	Représentation simplifiée du fonctionnement de la fontaine atomique F02. . . . .	28
2.4	Mesures de fréquence (Hz) et écart-type d'Allan associé. . . . .	31
2.5	Représentation des niveaux hyperfins utilisés pour construire l'observable combinée $\nu_c$ . . . . .	32
2.6	Mesures de temps de vol atomiques ( $\mu\text{s}$ ) et écart-type d'Allan associé. . . . .	33
2.7	Représentation de la densité des nucléons dans le référentiel intrinsèque du noyau . . . . .	39
2.8	Harmoniques apparaissant dans le modèle SME $O(\beta^1)$ pour la transition hyperfine du césium 133 . . . . .	43
2.9	Schéma d'une ellipse de confiance 2D . . . . .	50
2.10	Schéma d'une ellipse de confiance 2D de volume optimal obtenue par DVS. . . . .	52
2.11	Représentation graphique des matrices de corrélation statistique, systématique et totale pour le modèle $O(\beta^1)$ . . . . .	55
2.12	Représentation graphique des matrices de corrélation statistique, systématique et totale pour le modèle $\theta(\beta^2)$ . . . . .	59
2.13	Intervalles de confiance reconstruits pour l'association du modèle $O(\beta^2)$ et du modèle nucléaire SCRMF . . . . .	60
2.14	Intervalles de confiance reconstruit associés aux combinaisons linéaires indépendantes de coefficients SME obtenues par DVS de la matrice de covariance . . . . .	62
2.15	Distribution temporelle des jeux de données à l'échelle d'une année . . . . .	63
3.1	Historique des tests du Principe d'Équivalence . . . . .	69
3.2	Représentation schématique de l'orientation des masses d'épreuve dans le mode inertiel . . . . .	70

3.3	Instrument T-SAGE . . . . .	71
3.4	Configuration des électrodes autour d'une masse d'épreuve . . . . .	73
3.5	Représentation schématique des deux méthodes de détection . . . . .	73
3.6	Sensibilité à une violation de principe d'équivalence faible (WEP) et à une violation d'invariance de Lorentz due à un couplage avec des champs de fond SME dans le cas de la mission MICROSCOPE . . . . .	78
3.7	Fréquences de violation obtenues pour un modèle idéal . . . . .	79
3.8	Modèle de densité spectrale de bruit . . . . .	80
3.9	DSP théorique du bruit de température. . . . .	81
3.10	Orientation des repères liés à l'instrument EP et au satellite . . . . .	83
3.11	Orientation des axes du GCRF et de l'ICRF . . . . .	83
3.12	Illustration du mouvement du satellite par rapport à la Terre . . . . .	91
3.13	Répartition temporelle des sessions analysées . . . . .	91
3.14	Position des sondes thermiques pour l'instrument EP . . . . .	92
3.15	Impact des trous masqués sur le comportement spectral des données d'accélération relative pour la session 404 . . . . .	95
3.16	DSP des données d'accélération relative pour la session 404, avant et après retrait des dérives . . . . .	96
3.17	Données d'accélération relative pour la session 404, avant et après retrait des contributions des paramètres déterministes . . . . .	97
3.18	Ajustement du modèle de bruit d'accélération à deux pentes sur le bruit d'accélération relative estimé pour la session 404. . . . .	98
3.19	Comparaison de la DSP du bruit d'accélération relative des données et d'un échantillon de bruit simulé. . . . .	99
3.20	Schéma de fonctionnement de l'analyse statistique . . . . .	101
3.21	Retrait des dérives long terme affectant les données de température, pour la session 404. . . . .	104
3.22	Ajustement du modèle de bruit de température, pour la session 404. . . . .	105
3.23	DSP moyenne du bruit de température obtenue pour 100 échantillons simulés, pour la session 404. . . . .	106
3.24	Architecture de la chaîne de traitement pour l'analyse des données MICROSCOPE. . . . .	107
3.25	Représentation graphique des matrices de corrélation statistique et systématique correspondantes à l'analyse combinée avec un modèle pour le test du Principe d'Équivalence. . . . .	109
3.26	Représentation graphique des matrices de corrélation statistique et systématique des paramètres SME ajustés pour la session 218 . . . . .	111
3.27	Représentation graphique des matrices de corrélation statistique et systématique des paramètres SME obtenues par l'ajustement combiné de cinq sessions EP . . . . .	112
3.28	Évolution temporelle de la vitesse de la Terre autour du Soleil. . . . .	113

---

3.29	Représentation graphique des régions de confiance pour les coefficients $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu}$ , obtenues par l'analyse des échantillons de bruit d'accélération relative . . . . .	114
3.30	Représentation graphique des régions de confiance pour les coefficients $\alpha(a_{\text{eff}}^{(d)})_{\mu}$ , obtenues par l'analyse des échantillons de bruit de température .	115
3.31	Recherche de biais : sensibilité de l'analyse par sous-ensemble en fonction du jeu retiré . . . . .	117
D.1	Matrice de corrélation de l'ajustement des dérives long-termes pour la session 404. . . . .	162
D.2	Matrice de corrélation de l'ajustement des paramètres physiques pour le test du principe d'équivalence, dans le cas de la session 404. . . . .	163
D.3	Matrice de corrélation de l'ajustement des paramètres du modèle de bruit d'accélération, pour la session 404. . . . .	164
D.4	Illustration de la convergence de la méthode LSMC . . . . .	165





## Liste des Tableaux

2.1	Liste et amplitude des principaux effets systématique affectant les mesures de l'horloge atomique F02 (Cs) [69] . . . . .	29
2.2	Valeurs théoriques et expérimentale du moment quadripolaire pour le $^{133}\text{Cs}$ dans l'espace des positions . . . . .	41
2.3	Valeurs du paramètre $\gamma_w$ [-] pour les neutrons (n) et les protons (p) obtenues avec le modèle nucléaire de Schmidt et le modèle SCRMF. . . . .	41
2.4	Composition du modèle $O(\beta^1)$ utilisé pour la première analyse [51] . . . . .	44
2.5	Composition du modèle $O(\beta^2)$ . . . . .	45
2.6	Tableau comparatif des résultats de l'analyse harmonique pour le modèle $O(\beta^2)$ utilisé en 2006 . . . . .	53
2.7	Comparaison entre analyse par sous-ensembles de paramètres (Se) et analyse simultanée de tous les paramètres, dite "complète" (C) pour le modèle $O(\beta^1)$ utilisé dans [51] . . . . .	54
2.8	Limites à $1\sigma$ sur les coefficients SME $\tilde{c}_{\mu\nu}^p$ pour le proton, obtenues avec le modèle $O(\beta^2)$ dans le cadre du modèle nucléaire de Schmidt . . . . .	57
2.9	Limites à $1\sigma$ sur la combinaison de coefficients SME, notés $\tilde{c}_{\mu\nu}^{\text{SCRMF}}$ , représentant l'amplitude des violations d'invariance de Lorentz pour les protons et les neutrons . . . . .	57
2.10	Composition des combinaisons linéaires indépendantes de coefficients SME $\tilde{c}_{\mu\nu}$ obtenues par DVS de la matrice de covariance . . . . .	59
2.11	Limites sur les combinaisons linéaires indépendantes de coefficients SME de violation d'invariance de Lorentz, obtenues par décomposition en valeur singulière de la matrice de covariance du modèle $O(\beta^2)$ . . . . .	61
3.1	Notations . . . . .	84
3.2	Récapitulatif des sessions EP analysées . . . . .	92
3.3	Récapitulatif des fichiers de données utilisés pour l'analyse et de leur échantillonnage. . . . .	92
3.4	Récapitulatif des données interpolées . . . . .	93
3.5	Estimation des performances de la méthode LSMC par comparaison avec une méthode GLS . . . . .	102
3.6	Résultat de l'ajustement du paramètre d'Eötvös et des paramètres instrumentaux pour la session 218 . . . . .	108
3.7	Résultats de l'ajustement du paramètre d'Eötvös pour les cinq sessions EP108	

3.8	Résultats de l'ajustement des paramètres de violation SME pour chacune des cinq sessions analysées . . . . .	110
3.9	Résultats de l'ajustement des paramètres de violation SME pour l'analyse complète, pondérée, à cinq jeux . . . . .	111
3.10	Sensibilités maximales aux paramètres SME pour l'analyse complète à cinq jeux, avec pondération . . . . .	116
A.1	Calcul des préfacteurs du modèle pour la transition $ F = 3, m_F\rangle \longleftrightarrow  F' = 4, m_F\rangle$ . . . . .	128
B.1	Notations . . . . .	130
D.1	Résultats de l'ajustement des dérivées long-terme pour la session 404. . . . .	162
D.2	Résultats de l'ajustement des paramètres physiques par chaque session, dans la cas du modèle WEP . . . . .	162
D.3	Amplitudes du modèle de bruit d'accélération ajustés pour la session 404. . . . .	163
D.4	Résultats de l'ajustement des paramètres physiques par chaque session, dans la cas du modèle SME . . . . .	164

## Bibliographie

- [1] A.Einstein. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7) :769–822. Available at <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19163540702>. Cited on pages 2 et 3.
- [2] A. A.Michelson. The relative motion of the earth and of the luminiferous ether. *American Journal of Science*, Series 3 Vol. 22(128) :120–129, 1881. Available at <http://www.ajsonline.org/content/s3-22/128/120.short>. Cited on page 2.
- [3] A.Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, 322(10) :891–921, 1905. Available at <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19053221004>. Cited on page 2.
- [4] H.Lorentz, A.Einstein, H.Minkowski, H.Weyl, and A.Sommerfeld. *The Principle of Relativity : A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*. Dover Books on Physics and Mathematical Physics. Dover, 1952. Available at <https://books.google.fr/books?id=S1dmLWLhdqAC>. Cited on pages 2 et 3.
- [5] E.Noether. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1(3) :186–207, 1971. Available at <https://doi.org/10.1080/00411457108231446>. Cited on page 2.
- [6] A. E.(trad. Maurice Solovine). *La relativité (1956)*. Petite bibliothèque Payot. Payot Rivages, 2001. Cited on page 3.
- [7] C. M.Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. 1993. Cited on pages 3, 4, 12 et 69.
- [8] T.Damour. La relativité générale aujourd'hui. *Institut des Hautes Etudes Scientifiques Bures-sur-Yvette, France-Séminaire Poincaré*, pages 1–40, 2006. Cited on pages 4 et 12.
- [9] A.Einstein. Die feldgleichungun der gravitation sitzungsberichte der preussischen akademie der wissenschaften. *Berlin p844*, 1915. Cited on page 4.
- [10] A.Einstein. Erklärung der perihelbewegung des merkur aus der allgemeinen relativitätstheorie. *Albert Einstein : Akademie-Vorträge : Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932*, pages 78–87, 2005. Cited on page 5.
- [11] F. W.Dyson, A.Eddington, and C.Davidson. A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse

- of may 29, 1919. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, 62 :A1, 1923. Cited on page 5.
- [12] R. V.Pound and G. A.Rebka Jr. Gravitational red-shift in nuclear resonance. *Physical Review Letters*, 3(9) :439, 1959. Cited on page 5.
- [13] I. I.Shapiro. Fourth test of general relativity. *Physical Review Letters*, 13(26) :789, 1964. Cited on page 5.
- [14] J.Lense and H.Thirring. Über den einfluß der eigenrotation der zentralkörper auf die bewegung der planeten und monde nach der einsteinschen gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 19, 1918. Cited on page 5.
- [15] C. F.Everitt, D.DeBra, B.Parkinson, J.Turneure, J.Conklin, M.Heifetz, G.Keiser, A.Silbergleit, T.Holmes, J.Kolodziejczak, et al. Gravity probe b : final results of a space experiment to test general relativity. *Physical Review Letters*, 106(22) :221101, 2011. Cited on page 5.
- [16] R. A.Hulse and J. H.Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. , 195 :L51–L53, January 1975. Cited on page 6.
- [17] J. H.Taylor, L. A.Fowler, and P. M.McCulloch. Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR 1913+16. , 277 :437–440, February 1979. Cited on page 6.
- [18] B. P.Abbott, R.Abbott, T.Abbott, M.Abernathy, F.Acernese, K.Ackley, C.Adams, T.Adams, P.Addresso, R.Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116(6) :061102, 2016. Cited on page 6.
- [19] G.Hinshaw, C.Barnes, C.Bennett, M.Greason, M.Halpern, R.Hill, N.Jarosik, A.Kogut, M.Limon, S.Meyer, et al. First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap)\* observations : Data processing methods and systematic error limits. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 148(1) :63, 2003. Cited on page 6.
- [20] E.Komatsu, K. M.Smith, J.Dunkley, C. L.Bennett, B.Gold, G.Hinshaw, N.Jarosik, D.Larson, M. R.Nolta, L.Page, D. N.Spergel, M.Halpern, R. S.Hill, A.Kogut, M.Limon, S. S.Meyer, N.Odegard, G. S.Tucker, J. L.Weiland, E.Wollack, and E. L.Wright. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Cosmological Interpretation. , 192 :18, February 2011. Cited on page 6.
- [21] F.Zwicky. Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6 :110–127, 1933. Cited on page 6.
- [22] F.Zwicky. On the masses of nebulae and of clusters of nebulae. *The Astrophysical Journal*, 86 :217, 1937. Cited on page 6.
- [23] J.Iliopoulos. Le modèle standard : une théorie géométrique des interactions fondamentales. *Images de la physique*, pages 64–72, 2005. Cited on pages 7, 8, 9, 13 et 14.
- [24] J.-P.Derendinger. *Théorie quantique des champs*. PPUR presses polytechniques, 2001. Cited on page 7.

- [25] J. D. Bjorken and E. A. Paschos. Inelastic electron-proton and  $\gamma$ -proton scattering and the structure of the nucleon. *Phys. Rev.*, 185 :1975–1982, Sep 1969. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.185.1975>. Cited on page 9.
- [26] J. J. Thomson. Xl. cathode rays. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 44(269) :293–316, 1897. Cited on page 9.
- [27] K. Kodama, N. Ushida, C. Andreopoulos, N. Saoulidou, G. Tzanakos, P. Yager, B. Baller, D. Boehnlein, W. Freeman, B. Lundberg, J. Morfin, R. Rameika, J. Yun, J. Song, C. Yoon, S. Chung, P. Berghaus, M. Kubantsev, N. Reay, R. Sidwell, N. Stanton, S. Yoshida, S. Aoki, T. Hara, J. Rhee, D. Ciampa, C. Erickson, M. Graham, K. Heller, R. Rusack, R. Schwienhorst, J. Sielaff, J. Trammell, J. Wilcox, K. Hoshino, H. Jiko, M. Miyanishi, M. Komatsu, M. Nakamura, T. Nakano, K. Niwa, N. Nonaka, K. Okada, O. Sato, T. Akdogan, V. Paolone, C. Rosenfeld, A. Kulik, T. Kafka, W. Oliver, et al. Observation of tau neutrino interactions. *Physics Letters B*, 504(3) :218 – 224, 2001. Available at <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269301003070>. Cited on page 9.
- [28] F. Hasert, S. Kabe, W. Krenz, J. V. Krogh, D. Lanske, J. Morfin, K. Schultze, H. Weerts, G. Bertrand-Coremans, J. Sacton, W. V. Doninck, P. Vilain, R. Baldi, U. Camerini, D. Cundy, I. Danilchenko, W. Fry, D. Haidt, S. Natali, P. Musset, B. Osculati, R. Palmer, J. Pattison, D. Perkins, A. Pullia, A. Rousset, W. Venus, H. Wachsmuth, V. Brisson, B. Degrange, M. Haguenaer, L. Kluberg, U. Nguyen-Khac, P. Petiau, E. Bellotti, S. Bonetti, D. Cavalli, C. Conta, E. Fiorini, M. Rollier, B. Aubert, D. Blum, L. Chounet, P. Heusse, A. Lagarrigue, A. Lutz, A. Orkin-Lecourtois, J. Vialle, F. Bullock, M. Esten, et al. Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in the gargamelle neutrino experiment. *Nuclear Physics B*, 73(1) :1 – 22, 1974. Available at <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374900388>. Cited on page 9.
- [29] G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah, S. A. Khalek, A. Abdelalim, O. Abdinov, R. Aben, B. Abi, M. Abolins, O. AbouZeid, H. Abramowicz, H. Abreu, B. Acharya, L. Adamczyk, D. Adams, T. Addy, J. Adelman, S. Adomeit, P. Adragna, T. Adye, S. Aefsky, J. Aguilar-Saavedra, M. Agustoni, M. Aharrouche, S. Ahlen, F. Ahles, A. Ahmad, M. Ahsan, G. Aielli, T. Akdogan, T. Åkesson, G. Akimoto, A. Akimov, M. Alam, M. Alam, J. Albert, S. Albrand, M. Aleksa, I. Aleksandrov, F. Alessandria, C. Alexa, G. Alexander, G. Alexandre, T. Alexopoulos, M. Alhroob, M. Aliev, G. Alimonti, J. Alison, B. Allbrooke, et al. Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc. *Physics Letters B*, 716(1) :1 – 29, 2012. Available at <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931200857X>. Cited on page 9.
- [30] S. Weinberg. S. weinberg, rev. mod. phys. 61, 1 (1989). *Rev. Mod. Phys.*, 61 :1, 1989. Cited on page 9.
- [31] H. Georgi and S. L. Glashow. Unity of All Elementary Particle Forces. *Phys. Rev. Lett.*, 32 :438–441, 1974. Cited on page 10.

- [32] T.Kaluza. On the unity problem of physics,(1921), sitzungseber. *Press. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse*, pages 966–972. Cited on page 10.
- [33] O.Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37(12) :895–906, 1926. Cited on page 10.
- [34] J. H.Schwarz. Introduction to Superstring Theory. *ArXiv High Energy Physics - Experiment e-prints*, August 2000. Cited on page 11.
- [35] E.Fischbach, D.Sudarsky, A.Szafer, C.Talmadge, and S. H.Aronson. Reanalysis of the Eotvos experiment. *Physical Review Letters*, 56 :3–6, January 1986. Cited on page 11.
- [36] K.Nordtvedt Jr. Equivalence principle for massive bodies. ii. theory. *Physical Review*, 169(5) :1017, 1968. Cited on page 12.
- [37] C. M.Will. Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. ii. parametrized post-newtonian hydrodynamics, and the nordtvedt effect. *The Astrophysical Journal*, 163 :611, 1971. Cited on page 12.
- [38] C. M.Will and K.Nordtvedt Jr. Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. 1972. Cited on page 12.
- [39] V. A.Kostelecký and S.Samuel. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. *Physical Review D*, 39(2) :683, 1989. Cited on page 12.
- [40] V. A.Kostelecký and R.Potting. CPT, strings, and meson factories. *Physical Review D*, 51(7) :3923, 1995. Cited on pages 12 et 14.
- [41] D.Colladay and V. A.Kostelecký. CPT violation and the standard model. *Physical Review D*, 55(11) :6760, 1997. Cited on page 12.
- [42] D.Colladay and V. A.Kostelecký. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review D*, 58(11) :116002, 1998. Cited on page 12.
- [43] R. T.Bluhm. Observational constraints on local Lorentz invariance. In *Springer Handbook of Spacetime*, pages 485–507. Springer, 2014. Cited on page 13.
- [44] J. D.Tasson. Antimatter, Lorentz symmetry, and gravity. In *Proceedings of the 12th International Conference on Low Energy Antiproton Physics (LEAP2016)*, page 011002, 2017. Cited on pages 15 et 16.
- [45] V. A.Kostelecký and N.Russell. Data Tables for Lorentz and CPT Violation. *Rev. Mod. Phys.*, 83 :11–31, 2011. Cited on pages 15, 38, 56, 57, 58, 113 et 116.
- [46] V. A.Kostelecký. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. *Physical Review D*, 69(10) :105009, 2004. Cited on pages 15 et 16.
- [47] V. A.Kostelecký and J. D.Tasson. Matter-gravity couplings and Lorentz violation. *Physical Review D*, 83(1) :016013, 2011. Cited on pages 15, 57, 58, 77, 82, 84 et 85.
- [48] V. A.Kostelecký and C. D.Lane. Constraints on Lorentz violation from clock-comparison experiments. *Phys. Rev. D*, 60 :116010, Nov 1999. Available at <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.116010>. Cited on pages 15, 34, 35, 36, 40, 61, 126 et 127.

- [49] V. A.Kostelecký and M.Mewes. Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Physical Review D*, 80(1) :015020, 2009. Cited on page 16.
- [50] R.Blumh, V. A.Kostelecký, C. D.Lane, and N.Russell. Probing lorentz and CPT violation with space-based experiments. *Phys. Rev. D*, 68 :125008, Dec 2003. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.125008>. Cited on pages 17, 37, 61, 82, 87 et 127.
- [51] P.Wolf, F.Chapelet, S.Bize, and A.Clairon. Cold atom clock test of Lorentz invariance in the matter sector. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :060801, Feb 2006. Available at <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.060801>. Cited on pages 18, 29, 30, 31, 43, 44, 46, 52, 53, 54, 56, 57, 64 et 171.
- [52] J.Curie and P.Curie. Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémiedres à faces inclinées. 91 :294–295, 1880. Cited on page 23.
- [53] G.Lippmann. Principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques. *J. Phys. Theor. Appl.*, 10(1) :381–394, 1881. Available at <https://doi.org/10.1051/jphystap:0188100100038100>. Cited on page 23.
- [54] J.Curie and P.Curie. Contractions et dilatations produites par des tensions électrique dans les hémiedres à faces inclinées. 93 :1137–40, 1881. Cited on page 23.
- [55] W. G.Cady. The piezo-electric resonator. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 10(2) :83–114, April 1922. Cited on page 23.
- [56] D. B.Bruno. *Frequency drift improvement of quartz resonators used to space applications*. Theses, Université de Franche-Comté, November 2009. Available at <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00449571>. Cited on page 23.
- [57] J. W.Horton and W. A.Marrison. Precision determination of frequency. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 16(2) :137–154, Feb 1928. Cited on page 23.
- [58] M. A.Lombardi. The evolution of time measurement, part 2 : quartz clocks [recalibration]. *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, 14(5), 2011. Cited on page 24.
- [59] H.Lyons. The atomic clock : a universal standard of frequency and time. *The American Scholar*, pages 159–168, 1950. Cited on page 24.
- [60] M. A.Lombardi. The evolution of time measurement, part 4 : the atomic second [recalibration]. *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, 15(1), 2012. Cited on page 24.
- [61] J.Sherwood, H.Lyons, R.McCracken, and P.Kusch. High frequency lines in the hfs spectrum of cesium. In *Physical Review*, volume 86, pages 618–618. AMERICAN PHYSICAL SOC ONE PHYSICS ELLIPSE, COLLEGE PK, MD 20740-3844 USA, 1952. Cited on page 24.
- [62] I. I.Rabi, S.Millman, P.Kusch, and J. R.Zacharias. The molecular beam resonance method for measuring nuclear magnetic moments. the magnetic moments of li 6 3, li 7 3 and f 19 9. *Physical review*, 55(6) :526, 1939. Cited on page 24.



- [63] N. F. Ramsey. A new molecular beam resonance method. *Physical Review*, 76(7) :996, 1949. Cited on page 24.
- [64] M. A. Lombardi. The evolution of time measurement, part 3 : atomic clocks [re-calibration]. *IEEE Instrumentation Measurement Magazine*, 14(6) :46–49, 2011. Cited on page 24.
- [65] J. Guéna, M. Abgrall, D. Rovera, P. Rosenbusch, M. E. Tobar, P. Laurent, A. Clairon, and S. Bize. Improved tests of local position invariance using  $^{87}\text{Rb}$  and  $^{133}\text{Cs}$  fountains. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :080801, Aug 2012. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.080801>. Cited on pages 25 et 29.
- [66] A. N. Luiten, A. G. Mann, M. E. Costa, and D. G. Blair. Power stabilized cryogenic sapphire oscillator. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 44(2) :132–135, Apr 1995. Cited on page 25.
- [67] M. E. Tobar, E. N. Ivanov, C. R. Locke, P. L. Stanwix, J. G. Hartnett, A. N. Luiten, R. B. Warrington, P. T. H. Fisk, M. A. Lawn, M. J. Wouters, S. Bize, G. Santarelli, P. Wolf, A. Clairon, and P. Guillemot. Long-term operation and performance of cryogenic sapphire oscillators. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 53(12) :2386–2393, December 2006. Cited on page 25.
- [68] F. Chapelet. *Fontaine atomique double de césium et de rubidium avec une exactitude de quelques  $1E-16$  et applications*. PhD thesis, 2008. Available at <http://www.theses.fr/2008PA112094>. Thèse de doctorat dirigée par Tuckey, Philip Physique Paris 11 2008. Cited on pages 27, 28, 30 et 34.
- [69] S. Bize, P. Laurent, M. Abgrall, H. Marion, I. Maksimovic, L. Cacciapuoti, J. Grünert, C. Vian, F. Pereira dos Santos, P. Rosenbusch, P. Lemonde, G. Santarelli, P. Wolf, A. Clairon, A. Luiten, M. Tobar, and C. Salomon. Cold atom clocks and applications. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 38(9) :S449, 2005. Available at <http://stacks.iop.org/0953-4075/38/i=9/a=002>. Cited on pages 27, 29 et 171.
- [70] J. L. Hall, M. Zhu, and P. Buch. Prospects for using laser-prepared atomic fountains for optical frequency standards applications. *J. Opt. Soc. Am. B*, 6(11) :2194–2205, Nov 1989. Available at <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-6-11-2194>. Cited on page 27.
- [71] P. D. Lett, W. D. Phillips, S. L. Rolston, C. E. Tanner, R. N. Watts, and C. I. Westbrook. Optical molasses. *J. Opt. Soc. Am. B*, 6(11) :2084–2107, Nov 1989. Available at <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-6-11-2084>. Cited on page 27.
- [72] G. Santarelli, P. Laurent, P. Lemonde, A. Clairon, A. G. Mann, S. Chang, A. N. Luiten, and C. Salomon. Quantum projection noise in an atomic fountain : A high stability cesium frequency standard. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :4619–4622, Jun 1999. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.4619>. Cited on page 29.
- [73] A. Hees, Q. G. Bailey, A. Bourgoïn, H. Pihan-Le Bars, C. Guerlin, and C. Le Poncin-Lafitte. Tests of Lorentz symmetry in the gravitational sector. *Universe*, 2(4), 2016. Cited on pages 30 et 77.

- [74] J.Guéna, M.Abgrall, A.Clairon, and S.Bize. Contributing to tai with a secondary representation of the si second. *Metrologia*, 51(1) :108, 2014. Available at <http://stacks.iop.org/0026-1394/51/i=1/a=108>. Cited on page 30.
- [75] B.Brown, G.Bertsch, L.Robledo, M.Romalis, and V.Zelevinsky. Nuclear matrix elements for tests of fundamental symmetries. *arXiv :nucl-th/1604.08187*. Cited on pages 35, 41 et 42.
- [76] H.Schüler and T.Schmidt. Bemerkungen zu den elektrischen quadrupolmomenten einiger atomkerne und dem magnetischen moment des protons. *Zeitschrift für Physik*, 98(7) :430–436, Jul 1936. Available at <https://doi.org/10.1007/BF01337417>. Cited on page 38.
- [77] T.Schmidt. Über die magnetischen momente der atomkerne. *Zeitschrift für Physik*, 106(5) :358–361, May 1937. Available at <https://doi.org/10.1007/BF01338744>. Cited on pages 38 et 39.
- [78] Mass defect curve and nuclear constitution. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 126(803) :632–644, 1930. Available at <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/126/803/632>. Cited on pages 38 et 40.
- [79] H.Schüler and T.Schmidt. über abweichungen des atomkerns von der kugelsymmetrie. *Zeitschrift für Physik*, 94(7) :457–468, Jul 1935. Available at <https://doi.org/10.1007/BF01330611>. Cited on page 38.
- [80] W.Groth. Elementary theory of nuclear shell structure, von m. goeppert mayer und jhd jensen. john wiley u. sons, inc., new york ; chapman u. hall, ltd., london 1955. 1. aufl. xiv, 269 s., gebd. 7.75. *AngewandteChemie*, 68(10) : 360 – 360, 1956. Cited on page 39.
- [81] M.Bender, P.-H.Heenen, and P.-G.Reinhard. Self-consistent mean-field models for nuclear structure. *Rev. Mod. Phys.*, 75 :121–180, Jan 2003. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.121>. Cited on page 39.
- [82] D.Vretenar, A.Afanasjev, G.Lalazissis, and P.Ring. Relativistic hartree–bogoliubov theory : static and dynamic aspects of exotic nuclear structure. *Physics Reports*, 409(3) :101 – 259, 2005. Available at <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157304004545>. Cited on page 39.
- [83] T.Nikšić, N.Paar, D.Vretenar, and P.Ring. Dirhb—a relativistic self-consistent mean-field framework for atomic nuclei. *Computer Physics Communications*, 185(6) :1808 – 1821, 2014. Available at <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465514000836>. Cited on page 39.
- [84] H.Pihan-Le Bars, C.Guerlin, R.-D.Lasserri, J.-P.Ebran, Q. G.Bailey, S.Bize, E.Khan, and P.Wolf. Lorentz-symmetry test at planck-scale suppression with nucleons in a spin-polarized  $^{133}\text{Cs}$  cold atom clock. *Phys. Rev. D*, 95 :075026, Apr 2017. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.075026>. Cited on pages 39, 41 et 64.
- [85] J.Ebran. *Description relativiste de l'état fondamental des noyaux atomiques par l'approche du champ moyen auto-cohérent, incluant la déformation et la superfluidité.*

- Theses, Université Paris Sud - Paris XI, September 2010. Available at <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00565208>. Cited on page 39.
- [86] G.Neyens. Nuclear magnetic and quadrupole moments for nuclear structure research on exotic nuclei. *Reports on Progress in Physics*, 66(4) :633, 2003. Available at <http://stacks.iop.org/0034-4885/66/i=4/a=205>. Cited on page 40.
- [87] V. V.Flambaum. Enhancing the effect of Lorentz invariance and einstein's equivalence principle violation in nuclei and atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 117 :072501, Aug 2016. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.072501>. Cited on pages 40 et 41.
- [88] P.Pyykkö. Year-2008 nuclear quadrupole moments. *Molecular Physics*, 106(16-18) :1965–1974, 2008. Available at <https://doi.org/10.1080/00268970802018367>. Cited on page 41.
- [89] H. P.-L.Bars, C.Guerlin, R. D.Lasserri, J. P.Ebran, Q. G.Bailey, S.Bize, E.Khan, and P.Wolf. Lorentz-symmetry test at planck-scale suppression with a spin-polarized 133cs cold atom clock. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 65(6) :945–949, June 2018. Cited on pages 42 et 65.
- [90] V. V.Flambaum and M. V.Romalis. Limits on Lorentz invariance violation from coulomb interactions in nuclei and atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 118 :142501, Apr 2017. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.142501>. Cited on pages 42 et 58.
- [91] D.Pelat. Bruits et Signaux. Lecture, September 2006. Cited on pages 46 et 49.
- [92] W. H.Press, S. A.Teukolsky, W. T.Vetterling, and B. P.Flannery. *Numerical Recipes in C (2Nd Ed.) : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1992. Cited on pages 46 et 99.
- [93] R. C.Brinker and R.Minnick. *Survey Measurement Adjustements by Least Squares*, chapter 16, pages 411–413. Springer US, 2 edition, 1995. Cited on page 49.
- [94] M. A.Hohensee, N.Leefer, D.Budker, C.Harabati, V. A.Dzuba, and V. V.Flambaum. Limits on violations of Lorentz symmetry and the einstein equivalence principle using radio-frequency spectroscopy of atomic dysprosium. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :050401, Jul 2013. Available at <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.050401>. Cited on page 53.
- [95] S.Coleman and S. L.Glashow. High-energy tests of Lorentz invariance. *Phys. Rev. D*, 59 :116008, Apr 1999. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.116008>. Cited on page 56.
- [96] F. W.Stecker and S. T.Scully. Searching for new physics with ultrahigh energy cosmic rays. *New Journal of Physics*, 11(8) :085003, 2009. Available at <http://stacks.iop.org/1367-2630/11/i=8/a=085003>. Cited on page 56.
- [97] A.Lo, P.Haslinger, E.Mizrachi, L.Anderegg, H.Müller, M.Hohensee, M.Goryachev, and M. E.Tobar. Acoustic tests of Lorentz symmetry using quartz oscillators. *Phys. Rev. X*, 6 :011018, Feb 2016. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.6.011018>. Cited on page 58.

- [98] M.Smiciklas, J. M.Brown, L. W.Cheuk, S. J.Smullin, and M. V.Romalis. New test of local Lorentz invariance using a  $^{21}\text{Ne-Rb-K}$  comagnetometer. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :171604, Oct 2011. Available at <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.171604>. Cited on page 58.
- [99] C. J.Berglund, L. R.Hunter, D.Krause, Jr., E. O.Prigge, M. S.Ronfeldt, and S. K.Lamoreaux. New limits on local Lorentz invariance from hg and cs magnetometers. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :1879–1882, Sep 1995. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.1879>. Cited on page 63.
- [100] S. K.Peck, D. K.Kim, D.Stein, D.Orbaker, A.Foss, M. T.Hummon, and L. R.Hunter. Limits on local Lorentz invariance in mercury and cesium. *Phys. Rev. A*, 86 :012109, Jul 2012. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.012109>. Cited on page 63.
- [101] S.Schlamming, K.-Y.Choi, T. A.Wagner, J. H.Gundlach, and E. G.Adelberger. Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :041101, Jan 2008. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.041101>. Cited on page 69.
- [102] T. A.Wagner, S.Schlamming, J. H.Gundlach, and E. G.Adelberger. Torsion-balance tests of the weak equivalence principle. *Classical and Quantum Gravity*, 29(18) :184002, 2012. Available at <http://stacks.iop.org/0264-9381/29/i=18/a=184002>. Cited on pages 69 et 70.
- [103] J. G.Williams, S. G.Turyshev, and D. H.Boggs. Lunar laser ranging tests of the equivalence principle. *Classical and Quantum Gravity*, 29(18) :184004, 2012. Available at <http://stacks.iop.org/0264-9381/29/i=18/a=184004>. Cited on page 69.
- [104] V.Viswanathan, A.Fienga, O.Minazzoli, L.Bernus, J.Laskar, and M.Gastineau. The new lunar ephemeris inpop17a and its application to fundamental physics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476(2) :1877–1888, 2018. Available at <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/sty096>. Cited on page 70.
- [105] J.Bergé, P.Touboul, and M.Rodrigues. Status of MICROSCOPE, a mission to test the Equivalence Principle in space. *J. Phys. Conf. Ser.*, 610(1) :012009, 2015. Cited on page 70.
- [106] P.Touboul, G.Métris, M.Rodrigues, Y.André, Q.Baghi, J.Bergé, D.Boulianger, S.Bremer, P.Carle, R.Chhun, B.Christophe, V.Cipolla, T.Damour, P.Danto, H.Dittus, P.Fayet, B.Foulon, C.Gageant, P.-Y.Guidotti, D.Hagedorn, E.Hardy, P.-A.Huynh, H.Inchauspe, P.Kayser, S.Lala, C.Lämmerzahl, V.Lebat, P.Leseur, F. m. c.Liorzou, M.List, F.Löffler, I.Panet, B.Pouilloux, P.Prieur, A.Rebray, S.Reynaud, B.Rievers, A.Robert, H.Selig, L.Serron, T.Sumner, N.Tanguy, and P.Visser. Microscope mission : First results of a space test of the equivalence principle. *Phys. Rev. Lett.*, 119 :231101, Dec 2017. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.231101>. Cited on pages 68, 71, 80, 89, 90, 95, 96, 99, 101, 102, 104, 105 et 108.
- [107] P.Touboul, B.Foulon, B.Christophe, and J. P.Marque. Champ, grace, goce instruments and beyond. In S.Kenyon, M. C.Pacino, and U.Marti, editors, *Geodesy for Planet Earth*, pages 215–221, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg. Cited on page 72.

- [108] D.Hudson. *Investigation expérimentale et théorique du prototype du capteur inertielle pour la vérification du principe d'équivalence dans la mission spatiale MICROSCOPE*. PhD thesis, 2007. Available at <http://www.theses.fr/2007PA066448>. Thèse de doctorat dirigée par Exertier, Pierre Géodésie spatiale Paris 6 2007. Cited on page 73.
- [109] V.Josselin, P.Touboul, and R.Kielbasa. Capacitive detection scheme for space accelerometers applications. *Sensors and Actuators A : Physical*, 78(2) :92 – 98, 1999. Available at <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924424799002277>. Cited on page 74.
- [110] Q.Baghi. *Optimisation de l'analyse de données de la mission spatiale MICROSCOPE pour le test du principe d'équivalence et d'autres applications*. PhD thesis, 2016. Available at <http://www.theses.fr/2016PSLE0003>. Thèse de doctorat dirigée par Métris, Gilles Astronomie et Astrophysique Paris Sciences et Lettres 2016. Cited on pages 75, 77 et 80.
- [111] G.Métris. Formulation de l'équation de mesure microscope pour une utilisation dans les logiciels d'analyse, 2016. Cited on pages 75 et 77.
- [112] J.Tasson. The standard-model extension and gravitational tests. *Symmetry*, 8(11) :111, 2016. Cited on page 77.
- [113] G.Métris. Enchainement des rotations dans l'analyse des données de microscope, 2016. Cited on page 82.
- [114] N. T.Navigation and A. I.Facility. An integrated summary of reference frames and coordinate systems as used in spice. <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/tutorials.html>, January 2018. Cited on page 82.
- [115] P.Prieur. Gestion des reperes par le scaa, 2016. Cited on page 83.
- [116] R.Olaf and P.Carola. Platinum isotopic pattern in ptrh10 (microscope), 2017. Cited on page 90.
- [117] Q.Baghi, G.Métris, J.Bergé, B.Christophe, P.Touboul, and M.Rodrigues. Regression analysis with missing data and unknown colored noise : Application to the microscope space mission. *Phys. Rev. D*, 91 :062003, Mar 2015. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.062003>. Cited on page 100.
- [118] S.Vitale, G.Congedo, R.Dolesi, V.Ferroni, M.Hueller, D.Vetruigno, W. J.Weber, H.Audley, K.Danzmann, I.Diepholz, M.Hewitson, N.Korsakova, L.Ferraioli, F.Gibert, N.Karnesis, M.Nofrarias, H.Inchauspe, E.Plagnol, O.Jennrich, P. W.McNamara, M.Armano, J. I.Thorpe, and P.Wass. Data series subtraction with unknown and unmodeled background noise. *Phys. Rev. D*, 90 :042003, Aug 2014. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.042003>. Cited on page 100.
- [119] N. A.Flowers, C.Goodge, and J. D.Tasson. Superconducting-gravimeter tests of local Lorentz invariance. *Physical review letters*, 119(20) :201101, 2017. Cited on pages 109 et 115.
- [120] Y.Su, B. R.Heckel, E. G.Adelberger, J. H.Gundlach, M.Harris, G. L.Smith, and H. E.Swanson. New tests of the universality of free fall. *Phys. Rev. D*, 50 :3614–3636, Sep 1994. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.3614>. Cited on page 113.

- 
- [121] V. A.Kostelecký and J. D.Tasson. Prospects for large relativity violations in matter-gravity couplings. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :010402, Jan 2009. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.010402>. Cited on page 113.
- [122] A.Hees, Q. G.Bailey, C.Le Poncin-Lafitte, A.Bourgoin, A.Rivoldini, B.Lamine, F.Meynadier, C.Guerlin, and P.Wolf. Testing Lorentz symmetry with planetary orbital dynamics. *Phys. Rev. D*, 92 :064049, Sep 2015. Available at <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.064049>. Cited on page 116.
- [123] A.Hees, O.Minazzoli, E.Savalle, Y. V.Stadnik, and P.Wolf. Violation of the equivalence principle from light scalar dark matter. *Phys. Rev.*, D98(6) :064051, 2018. Cited on page 119.
- [124] C.Cohen-Tannoudji, B.Diu, and F.Laloë. *Mécanique Quantique II*, chapter X. 2000. Cited on page 126.







## Résumé

Cette thèse présente deux tests d'invariance de Lorentz, réalisés dans le cadre de l'Extension du Modèle Standard (SME). Le premier a pour objectif une recherche de violation dans le secteur SME de la matière, grâce aux données d'une horloge à atomes froids de  $^{133}\text{Cs}$ . La recherche de variations de la fréquence de transition hyperfine de cet atome a permis de contraindre plusieurs coefficients SME liés aux protons et aux neutrons, avec une sensibilité améliorant jusqu'à 12 ordres de grandeur les limites actuelles sur ces derniers. Le second test a été réalisé grâce aux données de la mission spatiale MICROSCOPE, en vol depuis le 25 avril 2016, qui a pour but de tester le Principe d'Équivalence faible avec une précision de l'ordre de  $10^{-15}$  sur le paramètre d'Eötvös. Nous avons utilisé les mesures MICROSCOPE pour contraindre des violations d'invariance de Lorentz dues à un couplage entre matière et gravitation, en recherchant des variations de l'accélération relative de deux masses d'épreuve selon l'orientation de l'axe sensible de l'instrument, un double accéléromètre électrostatique. Les premiers résultats, obtenus grâce à l'analyse de cinq sessions de mesures, ont déjà démontré une amélioration jusqu'à 4 ordres de grandeur des contraintes sur deux coefficients du secteur SME de la matière couplée à la gravitation.

## Mots Clés

Symétrie de Lorentz, Extension du Modèle Standard, Analyse de données, Tests de gravitation, Horloge atomique, Mission MICROSCOPE, Physique fondamentale

## Abstract

This thesis presents two Lorentz invariance tests, performed within the Standard Model Extension framework (SME). The first one is a search for a violation in the matter sector of the SME, using data from a cold atom clock. The search for variations in the hyperfine transition frequency of  $^{133}\text{Cs}$  allowed us to constrain several SME coefficients related to protons and neutrons, with a sensitivity improving by up to 12 orders of magnitude the current best laboratory limits on these coefficients. The second test was carried out using the data from the MICROSCOPE space mission, in flight since April 2016, which is intended to test the Weak Equivalence Principle (WEP) with an accuracy of  $10^{-15}$  on the Eötvös parameter. In this experiment, a coupling between matter and gravitation could lead to Lorentz violation signals and therefore to variations in relative acceleration of two test masses depending on the satellite orientation. The relative acceleration is measured by a differential electrostatic accelerometer. The first results, obtained through the analysis of five sessions, have already demonstrated an improvement of up to 4 orders of magnitude of the constraints on two coefficients of the SME sector of matter-gravity couplings. From atomic clocks to the MICROSCOPE space mission: search for spacetime anisotropy

## Keywords

Lorentz Symmetry, Standard Model Extension, Data Analysis, Tests of Gravitation, Atomic Clock, MICROSCOPE Mission, Fundamental Physics