



**HAL**  
open science

# Approximations d'ordre réduit des équations de Saint-Venant pour la modélisation de vallée hydroélectrique

Violaine Dalmas

► **To cite this version:**

Violaine Dalmas. Approximations d'ordre réduit des équations de Saint-Venant pour la modélisation de vallée hydroélectrique. Automatique / Robotique. Université Grenoble Alpes, 2018. Français. NNT : 2018GREAT097 . tel-02120886

**HAL Id: tel-02120886**

**<https://theses.hal.science/tel-02120886>**

Submitted on 6 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Automatique - Productique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Violaine DALMAS**

Thèse dirigée par **Gildas BESANÇON** et  
codirigée par **Didier GEORGES**

préparée au sein du

**laboratoire Grenoble, Images, Parole, Signal, Automatique  
(GIPSA-lab)**

dans l'école doctorale **Électronique, Électrotechnique,  
Automatique et Traitement du Signal (EEATS)**

## Approximations d'ordre réduit des équations de Saint-Venant pour la modélisation de vallée hydroélectrique

Thèse soutenue publiquement le 10 décembre 2018  
devant le jury composé de :

**Olivier THUAL**

Professeur, Toulouse-INP, Président

**Nicole GOUTAL**

Chercheur HDR, LHSV, EDF R&D, Rapporteur

**Valérie DOS SANTOS - MARTINS**

Chercheur HDR, Université de Lyon1, Rapporteur

**Gérard ROBERT**

Ingénieur, EDF CIH, Examineur

**Gildas BESANÇON**

Professeur, Grenoble-INP, Directeur de thèse

**Didier GEORGES**

Professeur, Grenoble-INP, Co-directeur de thèse





# Remerciements

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une convention CIFRE, conjointement avec le GIPSA-lab à Grenoble et le Centre d'Ingénierie Hydraulique d'EDF au Bourget du Lac.

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse M. Gildas Besançon et M. Didier Georges pour leur confiance, leurs encouragements et conseils. Je tiens aussi à remercier très vivement mon encadrant industriel M. Gérard Robert pour son enthousiasme, ses nombreuses idées, son aide inestimable.

Je tiens à remercier les membres du jury. Je remercie Mme Nicole Goutal et Mme Valérie Dos Santos Martins d'avoir accepté d'être les rapporteuses de ce travail. Je remercie au M. Olivier Thual de m'avoir fait l'honneur d'examiner mon travail et de présider la soutenance.

Je remercie Eric Demay pour l'intérêt porté à mon travail et pour sa présence lors de la soutenance.

J'adresse un remerciement à Charles Poussot-Vassal, Igor Pontes Duff Pereira et Cédric Seren pour la collaboration menée au début de ma thèse. Je les remercie pour les échanges constructifs que l'on a pu avoir.

Je remercie Vincent Breuil et Benjamin Henssien pour leur accueil dans leur service qui m'a permis de réaliser ma thèse dans d'excellentes conditions, je les remercie de plus d'être venus assister à ma soutenance. Je remercie sincèrement toutes les personnes gravitant autour du service CC grâce à qui ces trois années furent enrichissantes tant sur le plan scientifique qu'humain. Un grand remerciement à tous ceux que j'ai pu croiser du rez-de-chaussée au deuxième étage du bâtiment Ouragan, avec qui j'ai pu discuter des équations de Saint-Venant mais aussi de tellement de sujets divers. Je vous remercie pour votre convivialité, vos encouragements. J'ai été particulièrement touchée par la présence à ma soutenance de Benoit, Dominique, Laure, Nicolas, Sylvain.

Je remercie aussi le département automatique du Gipsa-Lab, ses doctorants, en particulier mes collègues de bureau pour leur sympathie, leur bonne humeur.

J'adresse un profond remerciement à mes parents qui ont toujours cru en moi, leur confiance m'a permis d'aller toujours de l'avant, je leur suis reconnaissante de tout ce qu'ils m'ont apporté. Un clin d'oeil aussi pour mon frère Jocelyn !

Enfin, je te remercie, Rodrigo, merci pour ta patience, pour ton soutien inconditionnel...



# Table des matières

Table des sigles et acronymes	xiii
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation physique de la vallée hydraulique</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Description du système . . . . .	5
1.2.1 Vision générale . . . . .	5
1.2.2 Cas particulier des centrales enchainées du Rhin . . . . .	6
1.3 Modélisation non-linéaire à partir des équations de Saint-Venant . . . . .	8
1.3.1 Équations de Saint-Venant . . . . .	8
1.3.2 Courbes caractéristiques . . . . .	11
1.3.3 Régime permanent . . . . .	12
1.3.4 Régime fluvial non-uniforme : lignes d'eau stationnaires . . . . .	14
1.4 Implantation des simulations non-linéaires . . . . .	17
1.5 Conclusion . . . . .	18
<b>2 Etat de l'art des modèles hydrauliques pour la commande</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Modèle Muskingum . . . . .	20
2.3 Modèles basés sur les équations de l'onde diffusante . . . . .	21
2.4 Modèles basés sur les équations de Saint-Venant linéarisées . . . . .	24
2.5 Modèles obtenus par identification . . . . .	26
2.6 Conclusion . . . . .	29
<b>3 Modélisation d'écoulement en régime non-uniforme</b>	<b>31</b>

---

3.1	Introduction . . . . .	32
3.2	Formulation des équations de Saint-Venant pour la réduction de modèle . . . . .	32
3.2.1	Linéarisation autour d'un régime stationnaire non-uniforme . . . . .	32
3.2.2	Matrice de transition . . . . .	33
3.2.3	EDO du second ordre . . . . .	34
3.2.4	Cas particulier : régime uniforme . . . . .	36
3.3	Approximation analytique basses fréquences . . . . .	40
3.3.1	Modèle débits/débits : Gain retardé . . . . .	41
3.3.2	Modèle hauteurs/débits : IDZ . . . . .	43
3.3.3	Analyse des propriétés de l'approximation . . . . .	45
3.3.4	Application au cas particulier uniforme . . . . .	49
3.3.5	Analyse de sensibilité . . . . .	50
3.3.6	Limites de l'approximation basses fréquences et perspectives . . . . .	56
3.4	Approximation par réduction de modèle optimale . . . . .	57
3.4.1	Méthode . . . . .	58
3.4.2	Application : modèles hauteur/débit d'ordre 4 et 8 . . . . .	58
3.4.3	Limites de l'approximation par l'algorithme IPTFA et perspectives . . . . .	60
3.5	Conclusion . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Approximation WKB et modèles réduits en découlant</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	64
4.2	Cadre général . . . . .	65
4.2.1	Cas $r$ constant . . . . .	65
4.2.2	Cas $r$ graduellement variable . . . . .	65
4.2.3	Calcul de la phase approximée . . . . .	66
4.2.4	Calcul de l'amplitude approximée . . . . .	67
4.2.5	Solution WKB générale . . . . .	67

---

4.3	Formulation pour les équations de Saint-Venant . . . . .	67
4.3.1	Existence et unicité d'une solution exacte . . . . .	67
4.3.2	Changement de variables . . . . .	68
4.3.3	Critère de validité . . . . .	69
4.3.4	Représentation sous forme de fonctions de transfert . . . . .	71
4.4	Fonctions de transfert irrationnelles WKB . . . . .	77
4.4.1	Exactitude des expressions en régime uniforme . . . . .	77
4.4.2	Analyse du comportement basses fréquences . . . . .	78
4.4.3	Analyse du comportement hautes fréquences . . . . .	80
4.5	Fonctions de transfert réduites avec modes WKB estimés . . . . .	88
4.5.1	Modèle débits/débits : Gain-RAR retardé . . . . .	90
4.5.2	Modèle hauteurs/débits : IDZ-RAR . . . . .	90
4.6	Fonctions de transfert rationalisées basées sur le développement de Padé . . . . .	93
4.7	Combinaison de canaux . . . . .	99
4.7.1	Modèles hauteur/débit . . . . .	99
4.7.2	Combinaison conservative . . . . .	100
4.8	Conclusion . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Discussions autour d'applications</b>	<b>107</b>
5.1	Introduction . . . . .	107
5.2	Analyse des différentes configurations selon les approches fréquentielles proposées	107
5.2.1	Configuration type irrigation . . . . .	108
5.2.2	Configuration hydroélectrique . . . . .	109
5.3	Considération d'un cas réel . . . . .	115
5.4	Régulation de niveau . . . . .	119
5.5	Conclusion . . . . .	121

---

Conclusion	123
A Linéarisation des équations de Saint-Venant	125
B Démonstration des propriétés des modèles basses fréquences	129
C Basculement de bief	135
D Séparation pour l'identification découplée de $A(x, s)$ et $\phi(x, s)$	137
E Calcul de l'amplitude et de la phase de la solution WKB approximée	139
F Diagrammes de Bode des modèles $G_e$ et $G_s$ WKB réduits par développement de Padé d'ordre $N = 1$ et $N = 10$	141
G Profils en travers de Fessenheim	145
Bibliographie	153

# Table des figures

1.1	Représentation de la vallée du Rhin . . . . .	7
1.2	Vue en coupe du canal simplifié. . . . .	9
1.3	Vue de profil du canal simplifié. . . . .	9
1.4	Ligne d'eau de Gerstheim pour $Q_0 = 1000m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	15
1.5	Lignes d'eau pour $Q_0 = 1000m^3/s$ . . . . .	16
2.1	Comparaison des diagrammes de Bode de $H_e$ obtenus avec le modèle de Saint-Venant et le modèle d'Hayami. . . . .	23
2.2	Comparaison des diagrammes de Bode de $G_e$ obtenus avec le modèle de Saint-Venant et le modèle d'Hayami. . . . .	24
3.1	Coefficients de l'EDO du second ordre en débit (3.16). . . . .	35
3.2	Retards en tout $x$ associés aux variations de débit amont et aval pour $Q_0 = 1000m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	42
3.3	Gains basses fréquences en tout $x$ des modèles débits/débits pour $Q_0 = 1000m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	44
3.4	Zéros des modèles IDZ hauteurs/débits en tout $x$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	47
3.5	Surface équivalente des modèles IDZ hauteurs/débits en tout $x$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	47
3.6	Courbes de remous avec hauteur d'eau constante de $7.05m$ en $x = 0.75L$ pour trois débits supports (analyses de sensibilité correspondantes en tables 3.1 et 3.2). . . . .	51
3.7	Courbes de remous pour quatre configurations (analyses de sensibilité correspondantes en tables 3.3, 3.4, 3.5). . . . .	52
3.8	Diagrammes de Bode de $G_e$ en $x = 0.75L$ pour différents débits support avec $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	54
3.9	Diagrammes de Bode de $G_s$ en $x = 0.75L$ pour différents débits support avec $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	55

3.10	Diagrammes de Bode en $\mathbf{x} = \mathbf{0.75L}$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	56
3.11	Diagrammes de Bode en $\mathbf{x} = \mathbf{0.9L}$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	57
3.12	Diagrammes de Bode en $x = 0.4L$ pour $Q_{0min} = 200m^3/s$ , $Q_{0max} = 1400m^3/s$ avec approximation d'ordre $r = 4$ . . . . .	59
3.13	Diagrammes de Bode en $x = 0.4L$ pour $Q_{0min} = 200m^3/s$ , $Q_{0max} = 1400m^3/s$ avec approximation d'ordre $r = 8$ . . . . .	60
4.1	Critère fréquentiel (4.39) en $\mathbf{x} = \mathbf{0.25L}$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . .	70
4.2	Critère fréquentiel (4.39) en $\mathbf{x} = \mathbf{0.75L}$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . .	71
4.3	Diagramme de Bode de $G_e$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . .	74
4.4	Diagramme de Bode de $G_s$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . .	74
4.5	Ligne d'eau pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 3.98m$ . . . . .	75
4.6	Critère fréquentiel (4.39) en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 3.98m$ . . . .	75
4.7	Diagramme de Bode de $G_e$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 3.98m$ . . . .	76
4.8	Diagramme de Bode de $G_s$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 3.98m$ . . . .	76
4.9	Gains basses fréquences des modèles débits/débits . . . . .	80
4.10	Surface équivalente des modèles hauteurs/débits . . . . .	80
4.11	Valeurs des zéros des modèles IDZ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ et $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	84
4.12	Gain de $G_e$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ et $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	88
4.13	Gain de $G_s$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ et $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	88
4.14	Diagramme de Bode de $G_e$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ et $H_{av} = 7.98m$ . . .	91
4.15	Diagramme de Bode de $G_s$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 1000m^3/s$ et $H_{av} = 7.98m$ . . .	91
4.16	Diagramme de Bode de $G_e$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ et $H_{av} = 3.98m$ . . .	92
4.17	Comparaison de $F(0, x, s)$ et $\widehat{F}(0, x, s)$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	96
4.18	Comparaison de $F(L, x, s)$ et $\widehat{F}(L, x, s)$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . . . . .	96
4.19	Diagramme de Bode de $G_e$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ (approximation de Padé d'ordre 4). . . . .	97

4.20	Diagramme de Bode de $G_e$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ (approximation de Padé d'ordre 10). . . . .	97
4.21	Diagramme de Bode de $G_s$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ (approximation de Padé d'ordre 4). . . . .	98
4.22	Diagramme de Bode de $G_e$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ (approximation de Padé d'ordre 10). . . . .	98
4.23	Erreurs en gain et phase entre $G_e(x_1, s)$ and $G_{e12}(x_1, s)$ . . . . .	101
4.24	Erreurs en gain et phase entre $G_s(x_1, s)$ and $G_{s12}(x_1, s)$ . . . . .	102
4.25	Erreurs en gain et phase entre $G_e(x_2, s)$ and $G_{e12}(x_2, s)$ . . . . .	103
4.26	Erreurs en gain et phase entre $G_s(x_2, s)$ and $G_{s12}(x_2, s)$ . . . . .	104
5.1	Évolution de la hauteur d'eau en $x = 0.75L$ en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d'une configuration type irrigation selon un modèle IDZ. . . . .	108
5.2	Évolution de la hauteur d'eau en $x = 0.75L$ en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d'une configuration type irrigation selon un modèle IDZ-RAR. . . . .	109
5.3	Évolution de la hauteur d'eau en $x = 0.75L$ en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d'une configuration hydroélectrique selon un modèle IDZ. . . . .	110
5.4	Évolution de la hauteur d'eau en $x = 0.75L$ en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d'une configuration hydroélectrique selon un modèle IDZ-RAR. . . . .	111
5.5	Évolution du débit en $x = 0.75L$ en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d'une configuration hydroélectrique selon un modèle basses fréquences. . . . .	112
5.6	Évolution du débit en $x = 0.75L$ en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d'une configuration hydroélectrique selon un modèle gain-RAR retardé. . . . .	113
5.7	Évolution du débit en $x = 0.75L$ en réponse à des variations de débits entrant et sortant mesurés. . . . .	114
5.8	Évolution de la hauteur d'eau en $x = 0.75L$ en réponse à des variations de débits entrant et sortant mesurés. . . . .	115

---

5.9	Variation de la hauteur d'eau en $x = 12\,960m$ en réponse à des variations de débits entrant et sortant avec une représentation simplifiée du canal. . . . .	117
5.10	Variation de la hauteur d'eau en $x = 12\,960m$ en réponse à des variations de débits entrant et sortant avec une représentation détaillée de la topographie du canal. . . . .	118
5.11	Suivi de consigne. . . . .	120
5.12	Rejet de perturbation. . . . .	121
F.1	Diagramme de Bode de $G_e$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . .	141
F.2	Diagramme de Bode de $G_s$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . .	142
F.3	Diagramme de Bode de $G_e$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . .	143
F.4	Diagramme de Bode de $G_s$ en $x = 0.75L$ pour $Q_0 = 500m^3/s$ , $H_{av} = 7.98m$ . .	143
G.1	Coupes topographiques de Fessenheim de $0m$ à $1410m$ . . . . .	145
G.2	Coupes topographiques de Fessenheim de $13355m$ à $14590m$ . . . . .	146
G.3	Coupes topographiques de Fessenheim de $16010m$ à $16160m$ . . . . .	147

# Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques du bief de Gerstheim . . . . .	6
1.2	Données d'exploitation du bief de Gerstheim . . . . .	7
3.1	Pourcentage de variation pour $Q_0 = [300, 1400]m^3/s$ et $H_0(x = 0.75L) = 7.05m$	51
3.2	Analyse de sensibilité pour $Q_0 = 1000m^3/s$ . . . . .	52
3.3	Analyse de sensibilité pour $Q_0 = 300m^3/s$ . . . . .	52
3.4	Analyse de sensibilité pour $Q_0 = 1400m^3/s$ . . . . .	53
3.5	Pourcentages de variation pour $Q_0 = [300, 1400]m^3/s$ et $H_{av} = [7.38, 8.08]m$ . . .	53
3.6	Valeurs des paramètres des modèles simplifiés pour divers débits supports. . . .	53
3.7	Valeurs des paramètres des modèles simplifiés pour diverses configurations nominales. . . . .	54
5.1	Caractéristiques du bief de Fessenheim . . . . .	116



# Table des sigles et acronymes

<b>EDF</b>	<i>Électricité De France</i>
<b>EDO</b>	<i>Équation Différentielle Ordinaire</i>
<b>EDP</b>	<i>Équation aux Dérivées Partielles</i>
<b>ID</b>	<i>Integrator Delay</i>
<b>IDZ</b>	<i>Integrator Delay Zero</i>
<b>IDZ-RAR</b>	<i>Integrator Delay Zero plus Resonance and Anti-Resonance modes</i>
<b>IETIA</b>	<i>Iterative Eigenvector Tangential Interpolation Algorithm</i>
<b>IPTFA</b>	<i>Irrational and Proper Transfer Function Algorithm</i>
<b>LFR</b>	<i>Linear Fractional Representation</i>
<b>LPV</b>	<i>Linéaire à Paramètres Variants</i>
<b>MIMO</b>	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
<b>NGF</b>	<i>Nivellement Général de la France</i>
<b>PI</b>	<i>Proportionnel Intégral</i>
<b>WKB</b>	<i>Wentzel Kramers Brillouin</i>



# Introduction

L'hydroélectricité représente 71 % de la production d'énergie renouvelable dans le monde. Une grande part de cette production est issue de l'exploitation de centrales hydrauliques au fil de l'eau. En France, parmi les 2500 installations hydroélectriques, 90% sont des centrales au fil de l'eau. Contrairement aux centrales de lac qui disposent d'une retenue importante, la capacité de modulation des centrales hydrauliques au fil de l'eau est contrainte par le volume restreint des canaux et rivières dont le débit est turbiné. D'autre part, l'intégration des énergies renouvelables intermittentes, telles que l'éolien ou le solaire, est un enjeu majeur de la transition énergétique. Des moyens croissants de stockage et de modulation de la production deviennent nécessaires pour intégrer ces énergies variables tout en assurant l'équilibre offre/demande. En 2016, de nouveaux codes réseau ont été développés par le réseau européen des gestionnaires de réseaux de transport d'électricité (ENTSO-E) et l'agence de coopération des régulateurs de l'énergie (ACER). Ces règlements ont pour objectif de favoriser le raccordement d'une part plus importante d'énergies renouvelables et définissent un nouveau marché de l'électricité. Dans ce contexte, la flexibilité de l'hydroélectricité est un atout majeur. L'utilisation de cette flexibilité présente l'avantage d'avoir un impact environnemental inférieur à celui qu'engendrerait, par exemple, l'utilisation de batteries. Optimiser le fonctionnement des aménagements hydrauliques existants est ainsi un levier pour contribuer à un mix énergétique décarboné et sûr. Les capacités de modulation des centrales au fil de l'eau présentent donc des intérêts économiques et écologiques nouveaux. L'exploitation des centrales hydrauliques au fil de l'eau s'inscrit aussi dans un multi-usage de la ressource en eau avec en particulier la navigation, la pêche et l'irrigation. Ainsi, indépendamment de cette opportunité de valorisation des centrales hydrauliques au fil de l'eau, la gestion des vallées hydrauliques doit répondre à des exigences accrues en sûreté et environnement. En particulier, le contrôle de l'écoulement par la maîtrise des variations de débits et de hauteurs dans les canaux est un enjeu majeur.

## Objectifs de la thèse

Les objectifs de la thèse sont définis par une problématique industrielle rencontrée dans le cadre de l'optimisation de la production hydroélectrique en fil de l'eau. De ceci, nous avons identifié des enjeux scientifiques auxquels cette thèse contribue à répondre.

## Problématique industrielle

L'enjeu industriel concerne la vallée hydroélectrique du Rhin composée de 10 centrales hydroélectriques reliées entre elles par des canaux aménagés de 13 à 22 kilomètres de longueur. Ces centrales sont situées à la frontière entre la France et l'Allemagne, 8 d'entre elles sont exploitées par EDF. Elles représentent une puissance installée de 1400 MW et produisent en moyenne 8 milliards de kWh par an. L'utilisation de ces canaux pour la navigation ainsi que

le marnage limité de leurs berges nécessitent une régulation en temps réel de la profondeur d'eau en des points intermédiaires de ces canaux. D'autre part, la perspective de moduler la production d'électricité en adaptation aux nouvelles réglementations européennes nécessite de nouvelles approches pour caractériser et contrôler les écoulements soumis à des variations des débits turbinés par les centrales. Ainsi, les deux problématiques industrielles sous-jacentes aux travaux réalisés dans cette thèse sont l'amélioration de la régulation de niveau pour augmenter la sûreté et la réalisation d'étude de faisabilité de nouvelles conduites des aménagements hydrauliques au fil de l'eau.

## Problématique scientifique

La dynamique de l'écoulement dans les canaux est régie par des équations aux dérivées partielles dont la simulation et la prise en compte pour la commande des aménagements est complexe. Ces équations, régissant la dynamique des écoulements à surface libre en eau peu profonde, sont les équations de Saint-Venant formulées en 1871. Leur étude reste un problème ouvert. Elles peuvent être résolues par simulation numérique en utilisant des méthodes de discrétisation par éléments finis ou volumes finis mais ces approches numériques ne permettent pas de caractériser le comportement du fluide hors simulation numérique. Dans le contexte de cette thèse, nous nous intéressons à une configuration particulière qui correspond à la dynamique de l'écoulement autour d'un régime stationnaire non-uniforme. Le régime non-uniforme caractéristique de l'exploitation nominale de ces centrales n'a jusqu'alors pas été abordé sous sa forme générale hors simulation numérique. Des approches ont été proposées à partir d'approximations applicables seulement au voisinage des régimes uniformes. De plus, dans les configurations hydroélectriques, les phénomènes de résonance et anti-résonance peuvent apparaître dont la prise en compte pour la commande est importante. L'enjeu est de pouvoir disposer de modèles simplifiés paramétriques adaptés aux besoins industriels sans avoir recours à des simulations exhaustives.

## Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est divisé en cinq chapitres.

Dans le chapitre 1, la description générale d'une vallée hydraulique exploitée pour la production d'électricité est présentée. Les enjeux de modélisation des écoulements dans les canaux reliant les centrales hydroélectriques sont soulignés. On introduit alors la notion de configuration hydroélectrique caractérisée en particulier par un régime d'écoulement non-uniforme.

Dans le chapitre 2, un état de l'art des modélisations d'écoulement dans les canaux est donné. Leur développement et leur domaine de validité sont confrontés aux contraintes et aux spécificités des configurations hydroélectriques.

Dans le chapitre 3, deux méthodes d'approximation des modèles d'écoulement dans les canaux adaptés aux configurations hydroélectriques sont proposées. La première approche est

basée sur une approximation basses fréquences du système, des modèles paramétriques de type intégrateur avec zéro et retard que l'on note IDZ sont obtenus. La seconde approche est basée sur une méthode de réduction de modèle selon un critère d'optimisation exprimé dans le domaine fréquentiel. A partir d'une réponse fréquentielle théorique ou numérique, elle conduit à des modèles d'ordre réduit qui permettent de représenter les premiers modes de résonance.

Dans le chapitre 4, une nouvelle approche est proposée pour obtenir une solution approximée des équations de Saint-Venant linéarisées en régime non-uniforme. L'approximation est inspirée de la méthode dite "WKB" issue de la théorie des perturbations originalement développée pour la mécanique quantique. Dans un premier temps, une solution approximée sous forme de fonctions de transfert irrationnelles est obtenue ; dans un second temps on propose des modèles d'ordre réduit selon deux méthodes différentes. Une première approche consiste à s'inspirer de l'allure de la réponse fréquentielle du système sous sa représentation en dimension infinie et des structures de modèles simplifiés proposés dans la littérature. Cette première approche nous conduit à la proposition de modèles avec intégrateur, retard, zéro et modes résonants/anti-résonants que l'on note IDZ-RAR dans la suite du manuscrit. La seconde approche consiste en une approximation rationnelle directe des fonctions de transfert irrationnelles préalablement obtenues. Les contributions des deux chapitres 3 et 4 ont pour point commun d'aborder le traitement du cas non-uniforme avec en particulier la proposition d'approximations permettant d'obtenir les sorties hauteurs et débits en tout point le long des canaux. On montre que ces approximations sont bien posées par exactitude des solutions dans le cas analytiquement connu du régime uniforme et par analyse des propriétés hydrauliques des modèles obtenus.

Dans le chapitre 5, ces modèles sont validés en comparaison de simulations non-linéaires, le phénomène d'oscillation de plan d'eau est mis en évidence et une régulation de niveau est proposée.

Enfin, une conclusion est donnée synthétisant les contributions de cette thèse et proposant des perspectives liées aux travaux réalisés.

## Publications

Ces travaux ont donné lieu à des publications dans des conférences internationales et à la soumission d'un article à une revue :

- [Dal+16] Proposition d'un algorithme de réduction de modèle à partir de la réponse fréquentielle exacte de l'écoulement. Les modèles réduits résultants sont de type LFR. Cette contribution est présentée dans le chapitre 3.
- [Dal+17] Proposition d'une méthode d'approximation par étude asymptotique basses fréquences à partir d'EDP pour les écoulements dans les canaux. Les modèles obtenus sont de type IDZ paramétriques, ils sont présentés dans le chapitre 3.
- [Dal+18a] Proposition d'une solution approximée des équations de Saint-Venant basée sur la méthode WKB. Cette contribution est présentée dans le chapitre 4.

- [Dal+18c] Proposition d'un modèle réduit d'ordre 5 basé sur la solution approximée WKB des équations de Saint-Venant et d'un régulateur robuste PI basé sur ce modèle. La partie concernant l'obtention d'un modèle d'ordre réduit est présentée dans le chapitre 4 ; la partie concernant la régulation de niveau est présentée dans le chapitre 5.
- [Dal+18b] Proposition d'une méthodologie de modélisation aboutissant à des modèles paramétriques de type IDZ-RAR ( Integrator Delay Zero plus Resonance Anti-Resonance modes) et discussion sur la prise en compte d'une pente au fond non-constante. Cette contribution est développée dans le chapitre 4 et dans le chapitre 5 à partir de données réelles.

# Modélisation physique de la vallée hydraulique

---

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1.2</b>	<b>Description du système</b>	<b>5</b>
1.2.1	Vision générale	5
1.2.2	Cas particulier des centrales enchainées du Rhin	6
<b>1.3</b>	<b>Modélisation non-linéaire à partir des équations de Saint-Venant</b>	<b>8</b>
1.3.1	Équations de Saint-Venant	8
1.3.2	Courbes caractéristiques	11
1.3.3	Régime permanent	12
1.3.4	Régime fluvial non-uniforme : lignes d'eau stationnaires	14
<b>1.4</b>	<b>Implantation des simulations non-linéaires</b>	<b>17</b>
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>18</b>

---

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'objet d'étude de la thèse que constitue une "vallée hydraulique" est présenté, avec ses enjeux de modélisation. Dans un premier temps une description générale en est donnée à la section 1.2, précisant notamment les caractéristiques d'un cas d'étude qui sera repris dans toute la thèse. Les principes de sa modélisation physique en sont ensuite rappelés à la section 1.3, avec les outils de simulation évoqués à la section 1.4.

## 1.2 Description du système

### 1.2.1 Vision générale

On dénomme "vallée hydraulique", un ensemble d'aménagements hydroélectriques interconnectés exploitant la même ressource eau pour la production d'électricité. L'électricité est générée par les groupes turbines-alternateurs des centrales hydroélectriques qui effectuent

la conversion de l'énergie cinétique en énergie électrique. La puissance produite au niveau de chaque groupe est réglable par la commande de leur vanne d'entrée. L'enjeu de l'exploitation d'une vallée hydraulique est de suivre une puissance globale tout en respectant des contraintes hydrauliques, en particulier des contraintes de niveau sur les biefs reliant les différentes centrales. Ainsi, on souhaite disposer de modèles débits/niveaux afin de prendre en compte ces contraintes dans l'optimisation du fonctionnement global de la vallée hydraulique. Les contraintes de niveau peuvent être localisées en des points intermédiaires entre les centrales hydroélectriques, pas seulement aux frontières. Par exemple, l'utilisation des canaux pour la navigation impose des hauteurs d'eau maximales au niveau des ponts. Un intérêt existe aussi pour les modèles débits/débits. En effet, les variations de débits doivent respecter certaines valeurs minimales et maximales pour des raisons environnementales ainsi que pour la sûreté d'utilisation des canaux pour la navigation.

### 1.2.2 Cas particulier des centrales enchainées du Rhin

On trouve sur la vallée du Rhin 10 centrales hydroélectriques au fil de l'eau dont la localisation est schématisée sur la figure 1.1.

Les illustrations présentées dans les chapitres suivants correspondent à une représentation du canal localisé à l'amont de la centrale de Gerstheim. Ses caractéristiques sont résumées dans le tableau 1.1. Dans le dernier chapitre, on traitera aussi un autre exemple correspondant au canal de Fessenheim.

Longueur du canal	$L(m)$	15 950
largeur au radier	$b(m)$	240
fruit des berges	$\alpha(deg)$	50
Pente du fond	$I$	$2.4e^{-4}$
Coefficient de Manning-Strickler	$K_s(m^{1/3}/s)$	51

TABLE 1.1 – Caractéristiques du bief de Gerstheim

Le fonctionnement nominal du canal de Gerstheim en exploitation hydroélectrique est caractérisé par les données du tableau 1.2. Dans les chapitres suivants, les figures sont réalisées en considérant ce paramétrage.



FIGURE 1.1 – Représentation de la vallée du Rhin

Débit nominal	$Q_0(m^3/s)$	1000
Coordonnée longitudinale	$x_c(m)$	12 100
Cote nominale d'exploitation en $x_c$	$Z_c(mNGF)$	160
Tirant d'eau nominal d'exploitation en $x_c$	$H_c(m)$	7.08

TABLE 1.2 – Données d'exploitation du bief de Gerstheim

## 1.3 Modélisation non-linéaire des biefs à partir des équations de Saint-Venant

### 1.3.1 Équations de Saint-Venant

Pour modéliser la propagation des écoulements dans les canaux, on utilise classiquement des modèles issus de la mécanique des fluides, dérivés du modèle de Barré de Saint-Venant introduit dans [SV71]. Ce modèle est un système de deux équations aux dérivées partielles, l'une exprimant la conservation de la masse au sein du bief, l'autre exprimant la conservation de la quantité de mouvement. Les équations de Saint-Venant sont valables sous certaines hypothèses. Nous nous assurons qu'elles sont compatibles avec l'étude de l'écoulement dans les biefs exploités par EDF. On les rappelle ici :

- écoulement unidimensionnel
  - ✓ La longueur des canaux est grande devant leur largeur, les écoulements s'effectuent effectivement selon leur axe horizontal.
- répartition hydrostatique des pressions et accélérations verticales négligeables
  - ✓ La pente des canaux est faible et la profondeur d'eau reste faible.
- incompressibilité et homogénéité du fluide
  - ✓ Ces propriétés sont valables pour l'eau en négligeant l'effet du transport des solides en suspension dans l'eau.
- viscosité du fluide négligeable par rapport aux frottements dus aux parois
  - ✓ Les frottements sur les berges sont effectivement prépondérants, l'écoulement est laminaire.
- pas d'influence du vent ni d'apport latéral
  - ✓ L'effet du vent est négligeable, les apports latéraux sont des perturbations dans notre cas, on étudie leur contribution en termes de variation de débits dans l'axe du canal.

La géométrie de bief considérée dans la suite est celle d'un bief de section trapézoïdale à pente constante.

Les notations concernant la section mouillée sont données dans la figure 1.2.

On note  $Z = Z_f + H$ , la cote de la surface libre, elle s'exprime en  $mNGF$ <sup>1</sup>. On fait l'approximation entre  $H[mNGF]$  le tirant d'eau selon le repère NGF et  $H[m]$  le tirant d'eau par rapport à la verticale du fond du bief car la pente est faible. En pratique c'est la cote  $Z[mNGF]$  qui est mesurée.

---

1. l'unité  $mNGF$  est introduite en génie civil pour indiquer une cote référencée par rapport au niveau de la mer en France.

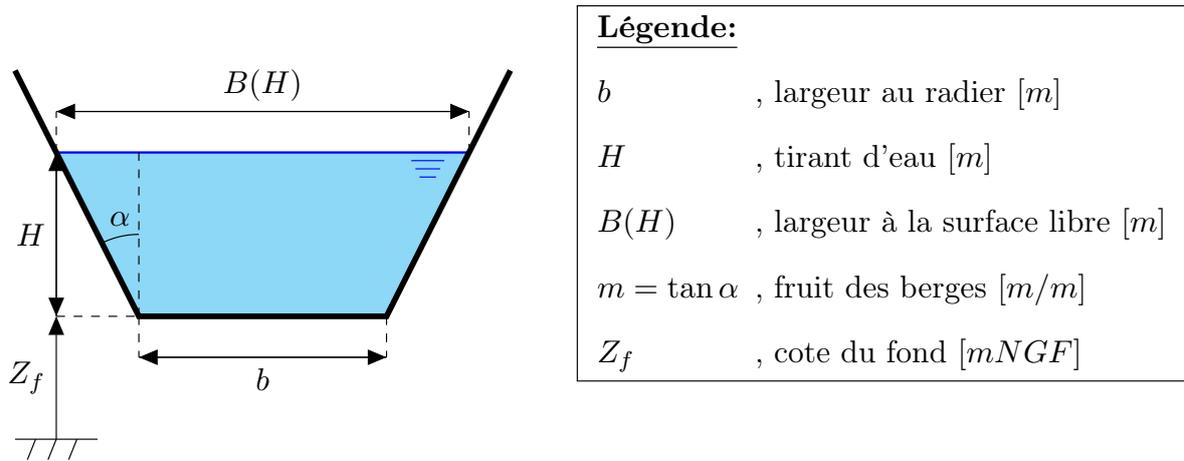


FIGURE 1.2 – Vue en coupe du canal simplifié.

Dans le cas traité d'une section trapézoïdale, la largeur au niveau de la surface libre s'exprime par :

$$B(H) = 2mH + b, \tag{1.1}$$

la surface de la section mouillée par :

$$S = H(mH + b), \tag{1.2}$$

le périmètre mouillé par :

$$P_m = b + \frac{2}{\cos(\alpha)}H. \tag{1.3}$$

Une vue de profil du canal simplifié est donnée en figure 1.3.

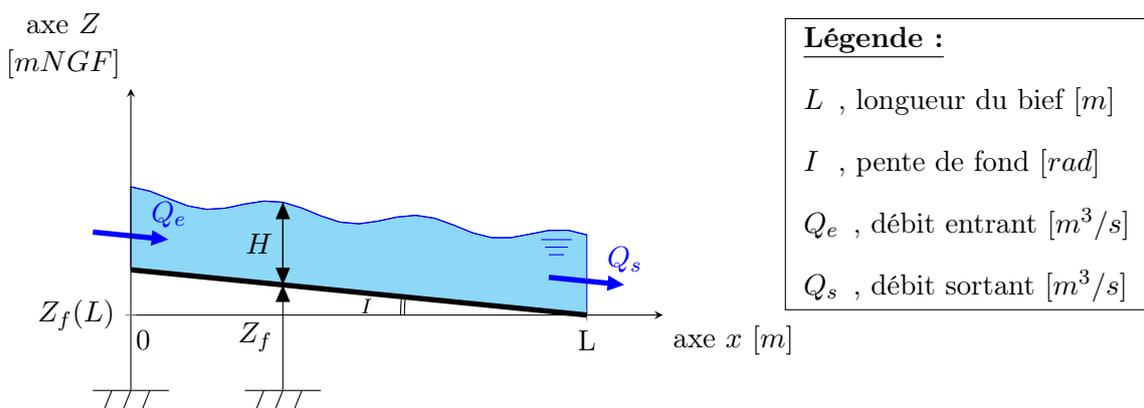


FIGURE 1.3 – Vue de profil du canal simplifié.

Les équations de Saint-Venant, un système composé de deux EDP, sont les suivantes,  $\forall(x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}_+$ ,

— équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

— équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{(1.5.1)} + \underbrace{\frac{\partial(Q^2/S)}{\partial x}}_{(1.5.2)} + \underbrace{gS \frac{\partial H}{\partial x}}_{(1.5.3)} = \underbrace{gSI}_{(1.5.4)} - \underbrace{gSJ}_{(1.5.5)} \quad (1.5)$$

où

$S(x, t)$ , noté  $S$ , est la section mouillée [ $m^2$ ] à l'instant  $t$ , en la coordonnée longitudinale  $x$  dans le sens de l'écoulement,

$Q(x, t)$ , noté  $Q$ , est le débit [ $m^3/s$ ],

$g$  est l'accélération de la pesanteur [ $m/s^2$ ],

$H(x, t)$ , noté  $H$ , est le tirant d'eau [ $m$ ],

$I$  est la pente de fond du canal, positive [ $m/m$ ],

$J(S, Q, H)$ , noté  $J$ , est le terme de pertes de charge, c'est la pente de charge liée aux frottements [ $m/m$ ].

Les termes de l'équation (1.5) correspondent respectivement à :

(1.5.1) premier terme d'inertie (énergie due à l'accélération dans la direction Ox ),

(1.5.2) deuxième terme d'inertie (accélération convective),

(1.5.3) terme de pression lié à la pente de la surface libre,

(1.5.4) terme de gravité lié à la pente I du fond du canal,

(1.5.5) terme de frottement lié aux pertes de charge.

Pour la modélisation des pertes de charges dues aux frottements, on considère le modèle de Manning-Strickler [Cho59] dont l'expression est

$$J = \frac{Q|Q|}{K_s^2 S^2 R_h^{4/3}} \quad (1.6)$$

où

$K_s$  est le coefficient de Manning-Strickler [ $m^{1/3}/s$ ],

$R_h = \frac{S}{P_m}$  est le rayon hydraulique [ $m$ ],

$P_m$  est le périmètre mouillé [ $m$ ].

Notons que  $S$  et  $R_h$  peuvent s'exprimer en fonction de  $H$  d'où  $J = J(Q, H)$ .

### 1.3.2 Courbes caractéristiques

En se plaçant dans le plan  $(x, t)$ , les équations aux dérivées partielles de Saint-Venant peuvent s'exprimer par un système d'équations différentielles ordinaires. Ces dernières sont satisfaites le long de courbes appelées courbes caractéristiques. De façon équivalente, on écrit le système ((1.4)-(1.5)) en vitesse  $V$  à la place de la variable débit  $Q = VS$ , on obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ S \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial t} + 2VS \frac{\partial V}{\partial x} + V^2 \frac{\partial S}{\partial x} + gS \frac{\partial H}{\partial x} = gS(I - J). \end{array} \right. \quad (1.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ S \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial t} + 2VS \frac{\partial V}{\partial x} + V^2 \frac{\partial S}{\partial x} + gS \frac{\partial H}{\partial x} = gS(I - J). \end{array} \right. \quad (1.8)$$

En remplaçant  $\frac{\partial S}{\partial t}$  selon son expression par conservation de la masse (1.7) dans (1.8), on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g(I - J). \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g(I - J). \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Pour une section trapézoïdale  $S$ , on a  $\frac{\partial S}{\partial H} = B(H)$ , ainsi

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} = B(H) \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial x} = B(H) \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (1.12)$$

En remplaçant  $\frac{\partial S}{\partial t}$  par (1.11) et  $\frac{\partial S}{\partial x}$  par (1.12) et en divisant (1.9) par  $B(H)$ , le système ((1.9)-(1.10)) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{S}{B} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g(I - J) \end{array} \right. \quad (1.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{S}{B} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g(I - J) \end{array} \right. \quad (1.14)$$

En introduisant la célérité de l'onde  $c = \sqrt{g \frac{S}{B}}$ , on écrit le système précédent uniquement en fonction de  $c$  et  $V$ . La section étant trapézoïdale, les simplifications des dérivées partielles de  $S(H)/B(H)$  suivantes peuvent être utilisées :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S(H)}{B(H)} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{S(H)}{B(H)} \right) = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.16)$$

En remarquant  $\frac{S}{B} = \frac{c^2}{g}$  et en différenciant  $c^2$  par rapport à  $t$  et  $x$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial V}{\partial x} + 2V \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + 2c \frac{\partial c}{\partial x} = g(I - J). \end{array} \right. \quad (1.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial V}{\partial x} + 2V \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + 2c \frac{\partial c}{\partial x} = g(I - J). \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Par somme (1.17+1.18) et par différence (1.18–1.17), le système précédent devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(2c + V) + (c + V)\frac{\partial V}{\partial x} + 2(V + c)\frac{\partial c}{\partial x} = g(I - J) \\ \frac{\partial}{\partial t}(V - 2c) + (V - c)\frac{\partial V}{\partial x} + 2(c - V)\frac{\partial C}{\partial x} = g(I - J), \end{array} \right. \quad (1.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(V + 2c) + (V + c)\frac{\partial V}{\partial x} + 2(V + c)\frac{\partial c}{\partial x} = g(I - J) \\ \frac{\partial}{\partial t}(V - 2c) + (V - c)\frac{\partial V}{\partial x} + 2(c - V)\frac{\partial C}{\partial x} = g(I - J), \end{array} \right. \quad (1.20)$$

ce qui est équivalent, en regroupant les dérivées de  $(V + 2c)$  et  $(V - 2c)$ , au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(V + 2c) + (V + c)\frac{\partial}{\partial x}(V + 2c) = g(I - J) \\ \frac{\partial}{\partial t}(V - 2c) + (V - c)\frac{\partial}{\partial x}(V - 2c) = g(I - J). \end{array} \right. \quad (1.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(V + 2c) + (V + c)\frac{\partial}{\partial x}(V + 2c) = g(I - J) \\ \frac{\partial}{\partial t}(V - 2c) + (V - c)\frac{\partial}{\partial x}(V - 2c) = g(I - J). \end{array} \right. \quad (1.22)$$

L'équation (1.21) (respectivement (1.22)) correspond à la différentielle totale de  $(V + 2c)$  (respectivement de  $(V - 2c)$ ) avec  $\frac{dx}{dt} = V + c$  (respectivement  $\frac{dx}{dt} = V - c$ ). En effet, les différentielles totales de  $(V + 2c)$  et  $(V - 2c)$  peuvent s'écrire en fonction de leurs dérivées partielles de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt}(V + 2c) = \frac{\partial}{\partial t}(V + 2c) + \frac{\partial}{\partial x}(V + 2c)\frac{dx}{dt} \quad (1.23)$$

$$\frac{d}{dt}(V - 2c) = \frac{\partial}{\partial t}(V - 2c) + \frac{\partial}{\partial x}(V - 2c)\frac{dx}{dt} \quad (1.24)$$

Finalement, les équations aux dérivées partielles de Saint-Venant peuvent s'écrire comme le système de 4 équations différentielles ordinaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(V + 2c) = g(I - J) \text{ avec } \frac{dx}{dt} = V + c \\ \frac{d}{dt}(V - 2c) = g(I - J) \text{ avec } \frac{dx}{dt} = V - c. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(V + 2c) = g(I - J) \text{ avec } \frac{dx}{dt} = V + c \\ \frac{d}{dt}(V - 2c) = g(I - J) \text{ avec } \frac{dx}{dt} = V - c. \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Les invariants de Riemann du système sont donc  $V + c$  et  $V - c$ . On en déduit par intégration les temps de propagation suivants :

$$\tau_e(x) = \int_0^x \frac{1}{c(\sigma) + V(\sigma)} d\sigma, \quad (1.27)$$

$$\tau_s(x) = \int_x^L \frac{1}{c(\sigma) - V(\sigma)} d\sigma, \quad (1.28)$$

où  $\tau_e$  est le temps de propagation d'une onde venant de l'extrémité amont et  $\tau_s$  est le temps de propagation d'une onde venant de l'extrémité aval.

### 1.3.3 Régime permanent

Par définition, les conditions d'équilibre sont obtenues en annulant les dérivées par rapport au temps. On note par un indice 0 les variables en régime permanent. Elles sont utilisées comme

condition initiale dans le modèle linéarisé qui suit (par exemple  $H_0(x) = H(x, t = 0)$ ). On se ramène à un système à dépendance unique en  $x$ . On explicite toujours la dépendance en  $x$  en indiquant " $x$ " entre parenthèses pour les variables indicées 0. L'absence de cette explicitation indique que la variable est constante en  $x$ , ce qui est le cas pour le régime uniforme traité en section 3.2.4 . D'après l'équation (1.4), l'équilibre implique un profil de débit uniforme,

$$\frac{dQ_0(x)}{dx} = 0 \rightarrow Q_0(x) = Q_0 = \text{constante}. \quad (1.29)$$

En particulier, les études du système linéarisé s'effectueront autour d'un point d'équilibre impliquant nécessairement l'égalité entre le débit support entrant initial  $Q_e$  et le débit support sortant  $Q_s$ .

L'équilibre a aussi un impact sur le profil de hauteurs par l'intermédiaire de l'équation (1.5). Les calculs sont réalisés dans le cas d'une section trapézoïdale<sup>2</sup> telle que représentée en figure 1.2. Comme le profil de débit est nécessairement uniforme à l'équilibre, l'équation (1.4) s'exprime alors

$$Q_0^2 \frac{d\left(\frac{1}{S_0(x)}\right)}{dx} + gS_0(x) \frac{dH_0(x)}{dx} = gS_0(x) \left(I - J_0(x)\right) \quad (1.30)$$

où

$$S_0(x) = H_0(x) \left(mH_0(x) + b\right). \quad (1.31)$$

Le profil de hauteurs d'équilibre est donc solution de

$$\frac{dH_0(x)}{dx} = \frac{I - J_0(x)}{1 - \frac{Q_0^2 B_0(x)}{gS_0^3(x)}}. \quad (1.32)$$

L'équation (1.32) est équivalente à

$$\frac{dH_0(x)}{dx} = \frac{I - J_0(x)}{1 - F_0^2(x)} \quad (1.33)$$

où

$$F_0(x) = \frac{V_0(x)}{c_0(x)}. \quad (1.34)$$

$F_0$  est le nombre de Froude. Ce nombre dépend de la célérité de l'onde  $c_0$  dont l'expression est

$$c_0(x) = \sqrt{\frac{gS_0(x)}{B_0(x)}}, \quad (1.35)$$

---

2. Dans la littérature, c'est souvent le cas d'une section rectangulaire qui est traitée, ie  $m = 0$ .

et de la vitesse d'écoulement

$$V_0(x) = \frac{Q_0}{S_0(x)}. \quad (1.36)$$

La valeur du nombre de Froude  $F_0$  détermine le régime d'écoulement :

- Régime fluvial, aussi dit subcritique, si le nombre de Froude est inférieur à 1, ce qui correspond à une vitesse de déplacement des ondes plus grande que la vitesse de l'écoulement support. L'écoulement dépend alors des conditions limites amont et aval.
- Régime torrentiel, aussi dit supercritique, si le nombre de Froude est supérieur à 1, où l'aval n'a pas d'influence sur l'écoulement amont.

On parle de régime critique pour désigner la zone de transition éventuelle entre ces deux régimes. Dans cette zone instable, on peut alors observer un ressaut hydraulique. Ce phénomène introduit alors des pertes de charges singulières.

Le profil de hauteurs d'équilibre, défini par l'équation (1.32), dépend donc de  $Q_0$  et de la condition initiale sur  $H_0(x)$ . On remarque que si les frottements compensent exactement l'effet de la pente, le profil de hauteurs d'équilibre est uniforme, on parle alors de hauteur normale. Mathématiquement, on retrouve cette condition par l'équivalence entre  $\left(\frac{dH_0}{dx} = 0\right)$  et  $\left(I - J(H_0, Q_0) = 0\right)$ . Le régime uniforme traité dans la littérature dans [LG99], [LP03] et [LPG10] par exemple, n'est donc qu'un cas particulier d'écoulement stationnaire. En effet, on observe en pratique un basculement du plan d'eau. La hauteur d'eau n'est pas constante le long du canal, la surface libre n'est donc pas parallèle au fond du canal. Finalement, le point d'équilibre correspond à :

- un débit stationnaire et uniforme ( $\forall t, \forall x, Q_0(x, t) = Q_0$  )
- une hauteur d'eau stationnaire, non-uniforme ( $\forall t, H_0(x, t) = H_0(x)$  )
- et donc une vitesse stationnaire, non-uniforme ( $\forall t, V_0(x, t) = V_0(x)$  )

Ces résultats peuvent s'expliquer de façon "physique". En effet, pour un écoulement à surface libre, deux phénomènes régissent les évolutions de vitesse, débit, hauteur. La première composante (effet de  $I$ ) est le poids de l'eau qui fait accélérer l'écoulement de l'amont vers l'aval. La deuxième composante (effet de  $J(H_0, Q_0)$ ) est liée aux contraintes de cisaillement du fond et des berges du canal qui créent une résistance à l'écoulement. Selon la contribution relative de ces forces d'accélération et de décélération, l'écoulement accélère ou décélère. L'accélération a lieu quand la pente est prépondérante devant les forces de frottements. Dans le cas contraire, on observe un profil de décélération.

### 1.3.4 Régime fluvial non-uniforme : lignes d'eau stationnaires

On appelle courbe de remous, ou ligne d'eau, le profil de la surface libre d'un canal autour d'un régime stationnaire. La courbe de remous est définie par l'EDO (1.33). On se place en régime fluvial où  $F_0 < 1$ , les variations de hauteur d'eau ne dépendent alors que du signe de  $I - J_0(x)$ . La présence d'un ouvrage, comme une centrale hydroélectrique, impacte la ligne

d'eau du canal situé à son amont. On parle d'effet backwater pour désigner le phénomène d'augmentation du niveau d'eau par effet de stockage à l'amont de l'ouvrage.

La hauteur d'eau le long du bief peut être croissante ou décroissante selon les contributions relatives des pertes de charge et de la pente. En pratique, pour le cas des biefs du Rhin, on observe une pente prépondérante devant les frottements, ainsi la hauteur d'eau est croissante le long du bief à l'équilibre. Comme on peut le voir sur la figure 1.4 pour l'exemple du canal de Gerstheim, la hauteur est non seulement fortement variable de  $4.5m$  à  $8m$  mais aussi largement supérieure à la profondeur normale obtenue en régime uniforme. On parle de configuration hydroélectrique pour désigner ces configurations non-uniformes avec profondeur d'eau variable largement supérieure à la profondeur normale que l'on retrouve classiquement pour les canaux exploités pour la production d'électricité. En figure 1.5, on représente les 10 canaux enchainés du Rhin autour de leur configuration hydroélectrique.

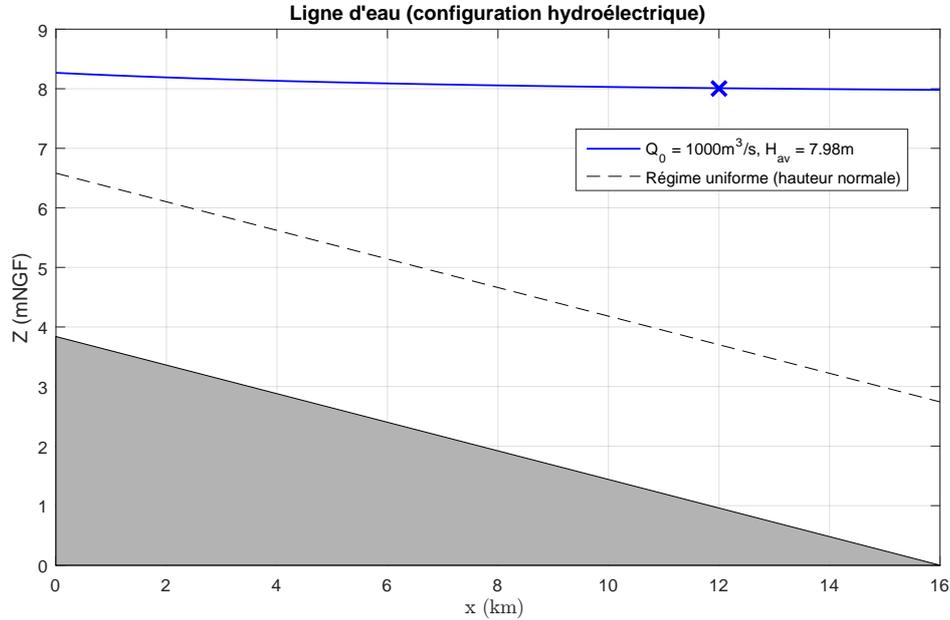


FIGURE 1.4 – Ligne d'eau de Gerstheim pour  $Q_0 = 1000m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$

Pour ce qui est du profil de la surface libre, celui-ci est parallèle au fond dans le cas (non-réaliste) d'absence de frottement. En présence de frottements (donc de pertes de charge), quelles que soient les contributions relatives des pertes de charge et de la pente, on observe une inclinaison du plan d'eau avec une cote de la surface libre décroissante le long du bief :

$$\frac{dZ_0}{dx} = \frac{dH_0}{dx} + \frac{dZ_f}{dx} \quad (1.37)$$

$$= \frac{I - J_0(x)}{1 - F_0^2(x)} - I \quad (1.38)$$

$$= \frac{-J_0(x) + IF_0^2(x)}{1 - F_0^2(x)} < 0. \quad (1.39)$$

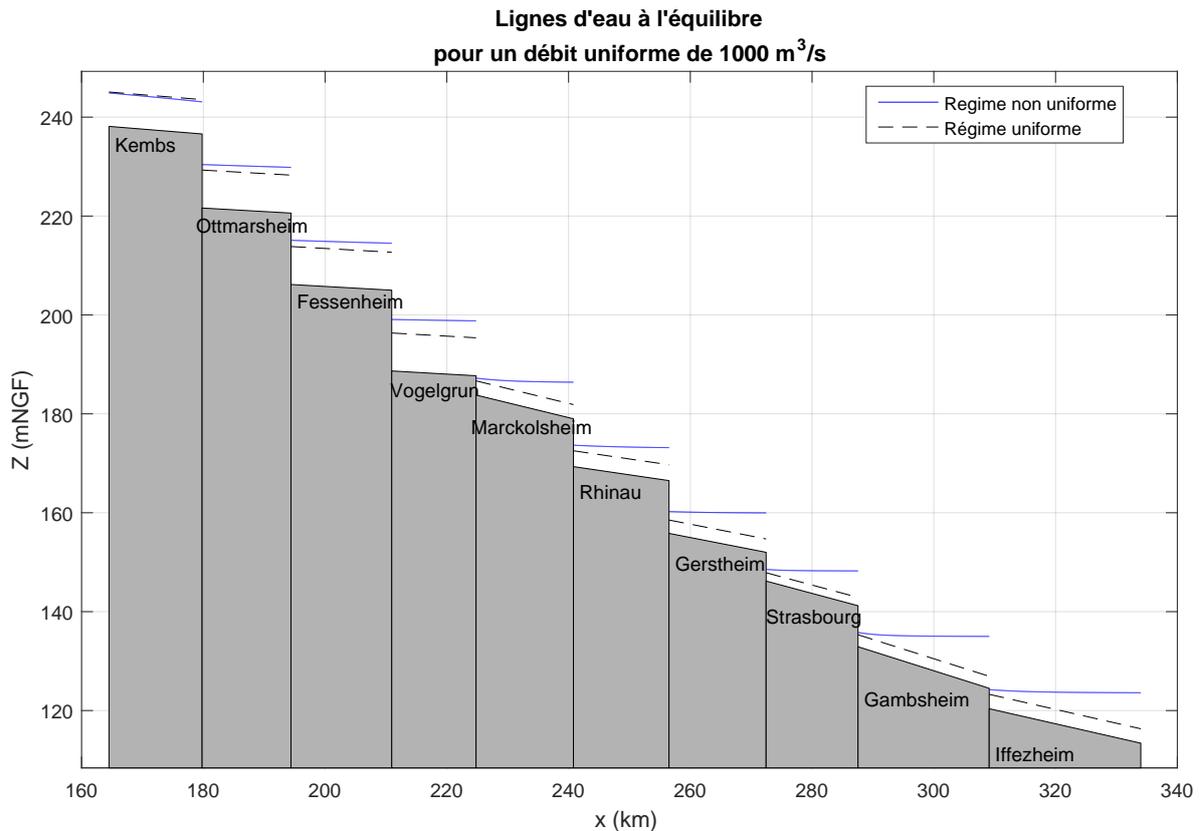


FIGURE 1.5 – Lignes d'eau pour  $Q_0 = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$

Dans le cadre de cette thèse, on ne s'intéresse pas aux périodes de crues caractérisées par des débits très élevés variant fortement qui peuvent provoquer des turbulences. En effet, un asservissement à la puissance n'est pas envisageable en période de crue car les groupes sont alors tous ouverts au maximum et ne sont plus réglants. Les vannes déversoirs ou groupe déchargeurs et évacuateurs de crues laissent aussi passer du débit, les apports intermédiaires (pluie et affluent) ne sont alors plus négligeables. Le lit est élargi. C'est un autre domaine d'étude qui nécessite une autre définition/caractérisation des canaux et des noeuds hydrauliques correspondant aux centrales. En particulier, il devient alors nécessaire d'ajouter en plus des pertes de charges régulières modélisées par le modèle de Manning-Strickler des pertes de charges singulières.

En cas de débit trop faible où le régime se rapprocherait d'un écoulement torrentiel, les groupes ne sont pas opérationnels, la hauteur de chute et le débit doivent être suffisants pour dépasser leur seuil de démarrage. En conclusion, la suite du manuscrit se concentre sur l'étude des équations de Saint-Venant en régime fluvial. En particulier, les contributions concernent la proposition de solution dans des configurations générales de régime non-uniforme.

La configuration que l'on étudie dans cette thèse correspond à des fonctionnements nominaux où l'hypothèse de régime graduellement varié fluvial est vérifiée. Il est donc raisonnable de travailler par la suite avec des modèles linéarisés. Pour caractériser leur point de

fonctionnement, le débit support  $Q_0$  et la hauteur initiale à l'aval  $H_{av} = H_0(x = L)$  seront indiqués . Des simulations non-linéaires seront néanmoins utilisées comme références.

## 1.4 Implantation des simulations non-linéaires

Pour réaliser la simulation des équations de Saint-Venant, nous utilisons le logiciel Fudaa-Mascaret [GJMLEKA12] développé conjointement par le Centre d'Etudes et d'Expertise sur les Risques, l'Environnement, la Mobilité et l'Aménagement (CEREMA) et le Laboratoire Nationale d'Hydraulique et Environnement (LNHE) d'EDF. Celui-ci permet de simuler l'écoulement non permanent 1D dans un canal à partir de lignes d'eau initialement stables. Le canal est alors décrit par un ensemble de tronçons successifs à paramètres constants.

Les équations de Saint-Venant étant des équations aux dérivées partielles, leur simulation ne peut être effectuée que par l'intermédiaire de méthodes numériques de discrétisation. Dans le logiciel utilisé, les équations de Saint-Venant sont résolues par une méthode aux différences finies utilisant un schéma implicite. Le schéma de discrétisation implanté est celui de Preissmann, il a l'avantage d'être inconditionnellement stable pour  $0.5 < \theta < 1$  en régime fluvial [SS90]. Le schéma de Preissmann est aussi utilisé dans d'autres logiciels de simulation hydraulique comme HEC-RAS [Bru10]. Soit  $\theta$  le coefficient d'implicitation, les dérivées spatiales et temporelles s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \theta \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t} + \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \right). \quad (1.41)$$

Les résultats de simulation issus de Fudaa-Mascaret représentent la dynamique non-linéaire d'écoulement dans les canaux à surface libre avec une haute fidélité, ils nous serviront de référence dans la suite du manuscrit.

Dans le cadre d'exploitation hydroélectrique, les conditions frontières utilisées sont les débits turbinés aux extrémités des biefs. Ces débits turbinés sont contrôlables par commande de l'ouverture des vannages des groupes hydrauliques des centrales hydroélectriques. Sur une plage nominale limitée, la dépendance des débits turbinés à la hauteur de chute est négligeable. Pour les canaux d'irrigation, plusieurs technologies d'organes de régulation existent. On trouve des vannes de fond ou vannes noyées dont le contrôle est similaire. On trouve aussi des déversoirs. En présence de ces derniers, les conditions frontières sont alors des lois non-linéaires du niveau d'eau [Wey01] [FOW10].

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la dynamique d'écoulement dans les canaux régie par les équations de Saint-Venant a été présentée. Les formules des temps de propagation ont été établies pour un canal de section trapézoïdale à partir de la méthode des caractéristiques. Nous avons ensuite introduit la notion de configuration hydroélectrique et les enjeux de modélisation associés. En particulier, le besoin d'un modèle simplifié paramétrique adapté au régime stationnaire non-uniforme a été identifié.

# Etat de l'art des modèles hydrauliques pour la commande

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Modèle Muskingum</b>	<b>20</b>
<b>2.3</b>	<b>Modèles basés sur les équations de l'onde diffusante</b>	<b>21</b>
<b>2.4</b>	<b>Modèles basés sur les équations de Saint-Venant linéarisées</b>	<b>24</b>
<b>2.5</b>	<b>Modèles obtenus par identification</b>	<b>26</b>
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>29</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les modélisations proposées dans la littérature pour les écoulements dans les canaux. Une remarque immédiate consiste à souligner que la littérature est très riche pour la régulation de débit dans les canaux d'irrigation, à faible débit, faible hauteur d'eau et faible section rectangulaire par rapport aux canaux hydroélectriques. Nous soulignerons donc les limites d'applicabilité des méthodologies établies sur des cas d'étude type irrigation. En particulier, les configurations type irrigation sont proches des régimes uniformes, ce qui permet de faire des simplifications non adaptées aux configurations hydroélectriques. D'autre part, la plage de fréquence sur laquelle les modèles suivants sont proposés est limitée à la partie basses fréquences. Or dans un contexte d'exploitation hydroélectrique, la dynamique des conditions frontière est plus rapide. Nous verrons dans la section 2.5 que des méthodes basées sur l'identification permettent de caractériser les dynamiques plus hautes fréquences mais ne sont pas adaptées pour l'identification de canaux de grande longueur sous contraintes opérationnelles. Les différents modèles passés en revue vont donc du plus simple cas de 'Muskingum' en section 2.2, à des modèles identifiés de premier ou second ordre avec retard en section 2.5, en passant par l'onde diffusante (section 2.3) et des approximations par intégrateur-retard (Integrator-Delay ID) ou intégrateur-retard-zero (IDZ) en section 2.4.

## 2.2 Modèle Muskingum

En ingénierie hydraulique, le modèle de Muskingum est largement utilisé pour de la prédiction. A l'origine développé empiriquement par McCarthy en 1934 [Eng34] pour l'étude de la rivière Muskingum en Ohio, des interprétations physiques ont par la suite été proposées. Son utilisation dans le contexte d'étude de régulation est par contre inexistante. Celui-ci est exprimé avec des conditions frontières en débit, ses paramètres ne dépendent pas explicitement des données géométriques du canal considéré. Il permet seulement de modéliser une propagation de débit de l'amont vers l'aval et n'est donc pas directement adapté pour des études de régulations de niveau. De plus, la formulation de la prise en compte du retard induit un comportement à non-minimum de phase non réel. La synthèse de contrôleur basé sur ce modèle présente une dynamique oscillante non désirée quand elle est appliquée au système décrit par les équations de Saint-Venant. Une analyse est présentée dans [BPG14] où son utilisation avec des objectifs de commande est comparée à celle du modèle ID. Nous rappelons son expression :

$$\begin{cases} Q_e(t) - Q_s(t) = \frac{dV(t)}{dt} & (2.1) \\ V(t) = K[\mathcal{X}Q_e(t) + (1 - \mathcal{X})Q_s(t)] & (2.2) \end{cases}$$

où  $Q_e$  et  $Q_s$  sont les débits entrant et sortant,  $V$  est le volume total stocké dans le canal et  $K$  et  $\mathcal{X}$  sont des paramètres hydrauliques constants.  $K$  correspond au temps de propagation moyen de l'amont vers l'aval.  $0 \leq \mathcal{X} \leq 0.5$  représente l'impact de la condition aval sur l'écoulement. Sous cette forme, le modèle de Muskingum ne permet pas de connaître le débits en des points intermédiaires du canal. Des versions à paramètres  $K$  et  $\mathcal{X}$  variants dans le temps et l'espace sont proposés, on aboutit alors de nouveau à un système d'équations dont l'obtention de la solution nécessite l'utilisation d'un schéma de discrétisation numérique (méthode de Cunge-Muskingum [PY78]). Soit  $\Delta t$  le pas temporel et  $\Delta x$  le pas spatial, le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} V(t + \Delta t) = V(t) + \frac{Q_e(t) + Q_e(t + \Delta t)}{2} \Delta t - \frac{Q_s(t) + Q_s(t + \Delta t)}{2} \Delta t & (2.3) \\ Q_s(t + \Delta t) = C_0 Q_e(t + \Delta t) + C_1 Q_e(t) + C_2 Q_s(t) & (2.4) \end{cases}$$

avec

$$C_0 = \frac{\Delta t/K - 2\mathcal{X}}{2(1 - \mathcal{X}) + \Delta t/K} \quad (2.5)$$

$$C_1 = \frac{\Delta t/K + 2\mathcal{X}}{2(1 - \mathcal{X}) + \Delta t/K} \quad (2.6)$$

$$C_2 = \frac{2(1 - \mathcal{X}) - \Delta t/K}{2(1 - \mathcal{X}) + \Delta t/K} \quad (2.7)$$

$K$  et  $\mathcal{X}$  sont définis spatialement à partir des données géométriques du canal considéré comme suit :

$$K = \frac{\Delta x}{c} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{X} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{Q_0}{IcB\Delta x} \right) \quad (2.9)$$

avec  $\Delta x$  le pas spatial,  $c$  la vitesse moyenne de l'écoulement,  $Q_0$  le débit moyen,  $I$  la pente au fond,  $B$  la largeur moyenne de la section mouillée.

La validité de cette dernière approche reste discutable, en particulier, il a été souligné dans [Tod07] que la conservation de la masse n'est pas préservée pour des canaux à faible pente et que ce dernier modèle à paramètres variants conduit à une estimation du volume stocké différente selon que l'on considère la discrétisation de (2.3) ou (2.4). D'autre part, même avec la version corrigée proposée dans [Tod07] seule la hauteur d'eau moyenne peut être reconstruite, ce qui correspond à la hauteur au point de basculement situé aux environs du milieu du canal. Ainsi, ce type d'approche ne répond pas à notre besoin d'un modèle analytique en tout point du bief.

## 2.3 Modèles basés sur les équations de l'onde diffusante

On retrouve dans la littérature un ensemble de modèles construits à partir du modèle d'onde diffusante [Pon90]. Le modèle d'onde diffusante est issu des équations de Saint-Venant après simplification des termes d'inertie considérés comme négligeables. L'onde diffusante est décrite par le système d'EDP suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x} = I - J \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial x} = I - J \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

avec les notations de la section 1.3.1.

Le système d'EDP précédent peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C(Q, H) \frac{\partial Q}{\partial x} - D(Q, H) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (2.12)$$

avec  $C$  la célérité et  $D$  le coefficient de diffusion tels que

$$C(Q, H) = \frac{1}{B^2 \left( \frac{\partial J}{\partial Q} \right)} \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial BJ}{\partial H} \right) \quad (2.13)$$

$$D(Q, H) = \frac{1}{B \left( \frac{\partial J}{\partial Q} \right)} \quad (2.14)$$

La linéarisation autour d'un régime uniforme conduit au modèle d'Hayami amplement utilisé pour le développement de modèle de commande (voir [LG99] et [LPG10]).

Dans le cas du régime uniforme et d'une section rectangulaire de largeur  $b$ , les expressions de  $C$  et  $D$  se simplifient :

$$C(Q, H) = \frac{5Q}{3bH} \quad (2.15)$$

$$D(Q) = \frac{Q}{2bI} \quad (2.16)$$

Le modèle de perte de charges pris en compte pour l'obtention de ces formules est celui de Manning Strickler pour un canal à section rectangulaire donné par

$$J(Q, H) = \frac{Q^2}{K_s^2 b^2 H^{10/3}} \quad (2.17)$$

En régime uniforme, on rappelle que la hauteur d'eau constante en tout  $x$  est définie par :

$$I = J(Q, H) \quad (2.18)$$

soit

$$H = \left( \frac{Q}{K_s b \sqrt{I}} \right)^{3/5} \quad (2.19)$$

Ainsi  $C$  peut s'exprimer en fonction du débit uniquement :

$$C(Q) = \frac{5I^{0.3} Q^{0.4} K_s^{0.6}}{3B^{0.4}}. \quad (2.20)$$

Dans [LPG10], le modèle de l'onde diffusante est introduit. Après linéarisation, l'équation d'Hayami est calculée ainsi que sa fonction de transfert en considérant un canal semi-infini soit :

$$\frac{q(x, s)}{q(0, s)} = \exp \left[ \frac{C(Q_0) - \sqrt{C(Q_0)^2 + 4D(Q_0)s}}{2D(Q_0)} x \right]. \quad (2.21)$$

Après application de la méthode des moments, un modèle du 1er ordre plus retard est identifié. Puis la même méthodologie est appliquée aux équations de Saint-Venant linéarisées autour du régime uniforme aboutissant aussi à un modèle du 1er ordre avec retard. Le domaine de validité de l'approximation est définie à l'aide d'un paramètre adimensionnel  $\mathcal{X} = \frac{3xC}{10D}$ . Pour  $\mathcal{X} < 0.6$ , l'identification est mal posée. Pour les configurations hydroélectriques pour lesquelles le débit support est élevé, cette condition n'est pas vérifiée.

Le modèle d'Hayami n'est pas suffisant pour la modélisation d'écoulement dans une configuration type hydroélectrique telle que définie dans le chapitre précédent. En particulier, l'hypothèse de canal semi-infini n'est pas vérifiée, la dynamique hautes fréquences est mal-représentée, car le phénomène de réflexion sur l'ouvrage aval est négligé. Prendre en compte la condition limite aval n'est pas non plus satisfaisant. De plus l'hypothèse de coefficients constants n'est pas vérifiée pour un canal à section trapézoïdale, or les berges sont très inclinées. Pour illustrer les remarques précédentes, on considère une configuration proche des canaux hydroélectriques avec un canal rectangulaire de section équivalente en surface à celle du canal trapézoïdal introduit dans le premier chapitre. On approxime la profondeur d'eau variable le long du bief en régime non-uniforme par une hauteur d'eau moyenne constante. Notons

$$\sigma_0 = \frac{C(Q_0)}{2D(Q_0)} \quad (2.22)$$

$$E_0 = \frac{2D(Q_0)}{C(Q_0)^2} \quad (2.23)$$

$$r(s) = \sigma_0 \sqrt{1 + 2E_0 s}. \quad (2.24)$$

En prenant en compte les conditions limites amont et aval en débit ( $q_e(s), q_s(s)$ ), on obtient la représentation du modèle Hayami avec les fonctions de transfert irrationnelles suivantes :

$$q(x, s) = H_e(x, s)q_e(s) + H_s(x, s)q_s(s) \quad (2.25)$$

où

$$H_e(x, s) = e^{\sigma_0 x} \frac{\sinh((L-x)r(s))}{\sinh(Lr(s))} \quad (2.26)$$

$$H_s(x, s) = e^{-\sigma_0(L-x)} \frac{\sinh(xr(s))}{\sinh(Lr(s))}. \quad (2.27)$$

Par dérivation, on peut obtenir les fonctions de transfert hauteurs/débits. Les figures 2.1 et 2.2 donnent les diagrammes de Bode des modèles de Saint Venant et d'Hayami vis à vis du débit entrant  $q_e(s)$  pour une même configuration hydraulique. Les simplifications introduites par le modèle Hayami engendrent une absence de modes résonants/anti-résonants et une sous-estimation du retard.

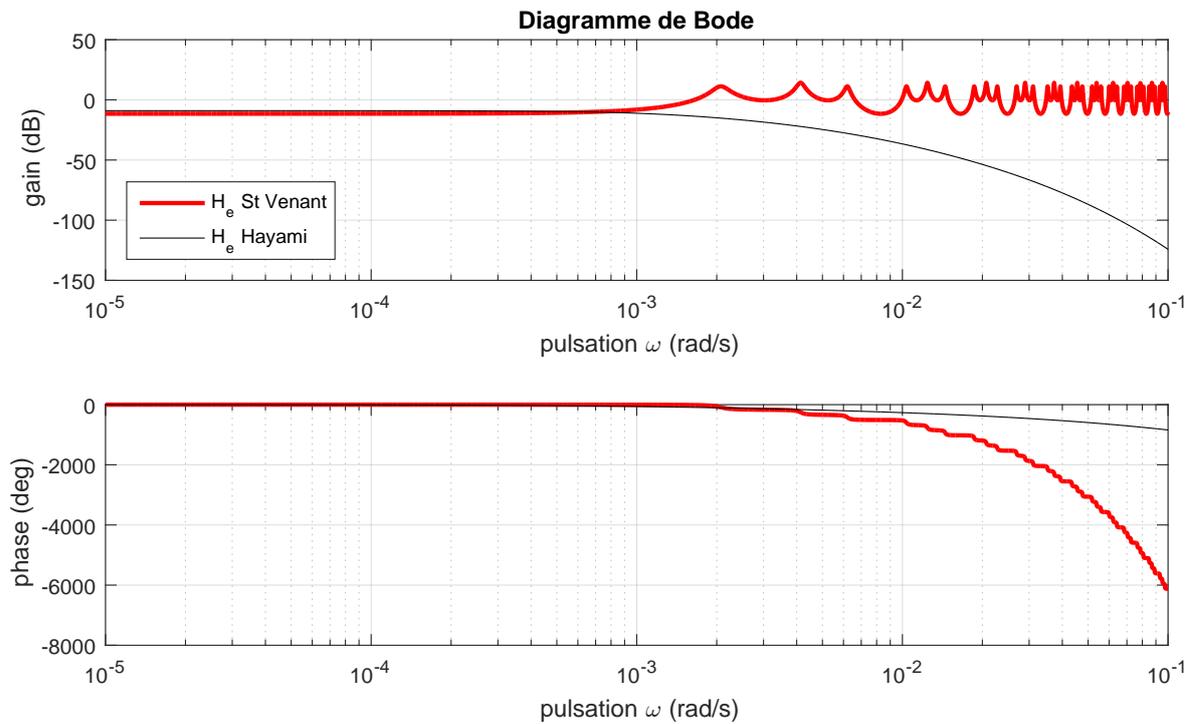


FIGURE 2.1 – Comparaison des diagrammes de Bode de  $H_e$  obtenus avec le modèle de Saint-Venant et le modèle d'Hayami.

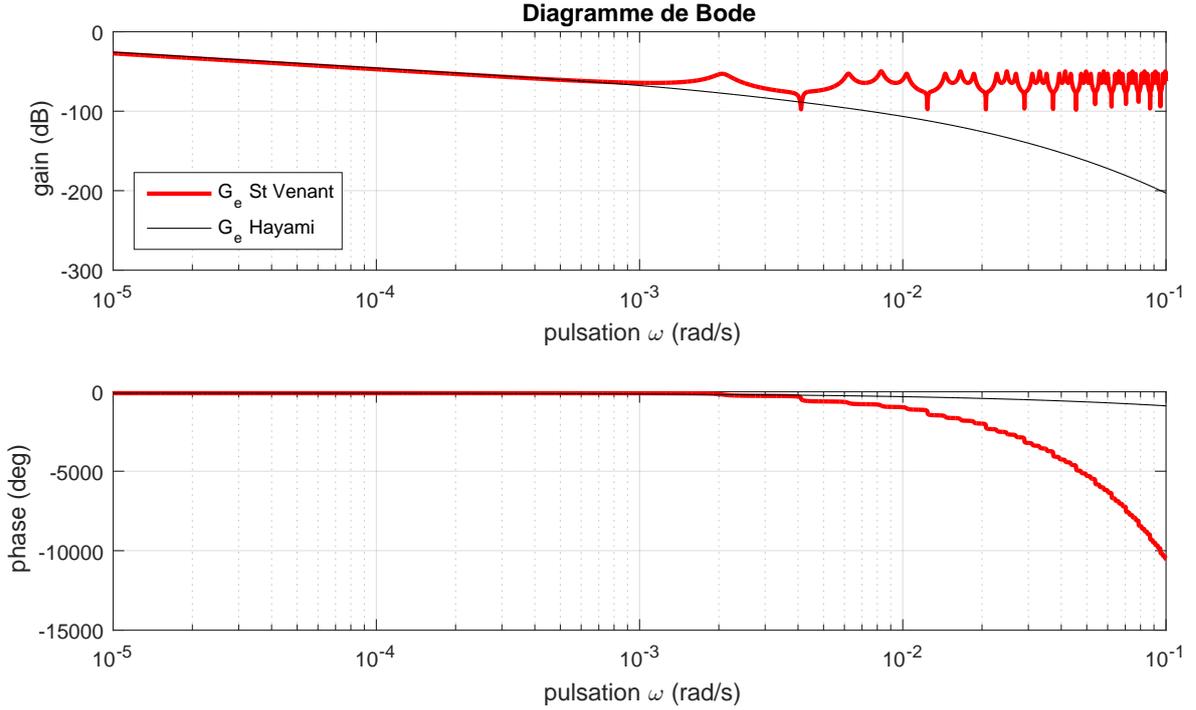


FIGURE 2.2 – Comparaison des diagrammes de Bode de  $G_e$  obtenus avec le modèle de Saint-Venant et le modèle d’Hayami.

## 2.4 Modèles basés sur les équations de Saint-Venant linéarisées

Dans un premier temps, le système d’EDP non-linéaires ((1.4)-(1.5)) est linéarisé autour d’un régime stationnaire quelconque. Ensuite, un modèle de pertes de charge est choisi, son utilisation est déterminante.

Afin d’obtenir des modèles pour la commande, les équations de Saint-Venant sont considérées sous leur forme linéarisée. Plusieurs types de modèles sont obtenus, selon les conditions limites, et le type de régime hydraulique. En outre certaines conditions limites aval, comme celle de canal semi-infini ne sont valables que pour certains types d’écoulement.

Dans [Erm92], les équations de Saint-Venant sont linéarisées autour d’un point de fonctionnement en régime uniforme. Après application de la transformée de Laplace et combinaison des équations linéarisées,  $h$  est exprimée comme solution d’une équation du second ordre à paramètres constants qui est résolue analytiquement. La solution est exprimée sous forme de fonctions de transfert irrationnelles dépendantes de la position longitudinale  $x$ . Une fonction de transfert approximée est proposée pour le cas d’un canal semi-infini contrôlé par l’intermédiaire de la hauteur d’eau à l’amont. L’exemple considéré ne présente pas de modes de résonance, une fonction de transfert de la forme

$$\frac{h(x, s)}{h(0, s)} = \frac{1 + k_1 T s}{1 + T s} e^{-\tau s} \quad (2.28)$$

est donc satisfaisante.

Dans [SBB95], les équations de Saint-Venant sont aussi considérées sous leur forme linéarisée en régime uniforme. Pour aborder une configuration plus réaliste que le régime uniforme, une décomposition est proposée décomposant l'écoulement en une partie en régime uniforme plus une partie affectée par l'effet backwater. L'effet backwater correspond à un rehaussement de la courbe de remous provoqué par l'accumulation de l'eau proche de l'ouvrage aval. Dans la partie uniforme, un modèle d'onde cinématique est proposé. Dans la partie affectée par l'effet backwater, la surface est supposée horizontale, un modèle type réservoir est proposé où la surface est estimée par analyse basses fréquences de la transformée de Laplace des équations de Saint-Venant linéarisée en régime uniforme. Les deux types de canaux considérés en exemple ne présentent pas de phénomène de résonance. Comme il l'est discuté dans l'article, l'approximation n'est pas valide en hautes fréquences au delà d'un éventuel premier mode de résonance dont la pulsation est estimée à partir de l'analyse fréquentielle des équations de Saint-Venant en régime uniforme. Finalement le modèle est de type ID (Integrator Delay) dans la partie backwater notée  $P_B$ , d'autre part la partie uniforme notée  $P_U$  est supposée non impactée par la dynamique du débit aval soit

$$h(x \in P_U) = 0 \quad (2.29)$$

$$h(x \in P_B) = \frac{1}{A_{eS}} e^{-\tau_e s} q_e(s) + \frac{1}{A_{eS}} q_s(s). \quad (2.30)$$

Dans [LF04a], un modèle IDZ (Integrator Delay Zero) est proposé. De la même façon que dans [SBB95], les équations de Saint-Venant sont considérées sous leur forme linéarisée avec des paramètres constants. Deux types de configurations hydrauliques sont traitées, la première correspondant à un bief complètement affecté par l'effet backwater, la deuxième à un bief partiellement affecté par l'effet backwater. Dans le premier cas, la ligne d'eau est simplifiée par une droite tangente à la ligne d'eau exacte en  $x = L$ . Dans le second cas, la ligne d'eau est décomposée en une droite parallèle au fond avec hauteur normale  $H_N$ , et une droite tangente à la ligne d'eau exacte en  $x = L$  à partir d'un point  $x_1$  calculé comme suit :

$$x_1 = \max \left( L - \frac{H_0(L) - H_N}{J_0(L)}, 0 \right). \quad (2.31)$$

En considérant comme sorties du système les variations de hauteurs d'eau aux frontières  $h(0, s)$  et  $h(L, s)$  et comme entrées du système les variations des débits aux frontières  $q_e(s)$  et  $q_s(s)$ , le problème est formulé comme la recherche d'une approximation analytique de la matrice de transfert  $2 \times 2$   $P$  telle que

$$\begin{pmatrix} h(0, s) \\ h(L, s) \end{pmatrix} \approx P \begin{pmatrix} q_e(s) \\ q_s(s) \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Des simplifications de la matrice de transition  $\mathcal{T}(x, s)$  définie par

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} q(x, s) \\ h(x, s) \end{pmatrix} = \mathcal{T}(x, s) \begin{pmatrix} q(x, s) \\ h(x, s) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

sont alors proposées. Pour la configuration d'un bief complètement affecté par l'effet backwater, la matrice de transition est considérée constante, ses termes sont évalués en  $x = L/2$ ,

ainsi la résolution de (2.33) est analytique. Après factorisation de la solution en  $(q_e(s), q_s(s))$ , l'obtention de  $P$  est directe. Pour la configuration d'un bief partiellement affecté par l'effet backwater, la matrice de transition est approximée par le produit de la matrice de transition obtenue en régime uniforme et d'une approximation de la matrice de transition pour la partie non-uniforme telle que

$$\mathcal{T}(x \in [x_1, L]) \approx \mathcal{T}(x = \frac{x_1 + L}{2}). \quad (2.34)$$

La résolution de (2.33) est alors analytique et permet d'en déduire  $P$ .

Dans les deux cas, les termes de  $P$  prennent la forme de fonctions de transfert irrationnelles. Le comportement hautes fréquences est modélisé par l'ajout d'un zero. Son expression est obtenue analytiquement à partir de l'analyse des termes de  $P$ .

De façon similaire dans [Mun+08], une approximation est proposée en régime non-uniforme par décomposition de la ligne d'eau en une fonction linéaire par morceaux où la première partie correspond à un écoulement en régime uniforme et la seconde partie est affectée par l'effet backwater. Cette seconde partie est approximée par une droite tangente en  $x = L$  à la ligne d'eau en régime non-uniforme. Une fonction de transfert donnant le débit en tout point du canal par rapport au débit amont est ainsi obtenue sous forme irrationnelle pour un canal de longueur finie. Deux modèles approximés sont proposés par identification de leurs moments avec les moments de la fonction de transfert irrationnelle. Les modèles approximés proposés sont un second ordre avec retard et un premier ordre avec retard dans le cas où le premier est instable :

$$H(x, s) = \frac{e^{-\tau s}}{1 + K_1 s} \quad (2.35)$$

$$\text{ou } H(x, s) = \frac{e^{-\tau s}}{(1 + K_1 s)(1 + K_2 s)}. \quad (2.36)$$

Une autre approche consiste à appliquer la méthode de collocation de Galerkin [VM78] aux équations de Saint-Venant avec un faible nombre de points. Celle-ci est proposée dans [GDB00] et appliquée dans [DBG01] avec trois points de collocation pour la régulation de niveau d'un canal autour d'un régime uniforme. Dans [BDG08], un observateur est proposé afin de reconstruire le débit non-mesuré au deuxième point de collocation pour un schéma à trois points de collocation. En effet, afin d'appliquer une commande par retour d'état, les niveaux et débits aux trois points de collocation doivent être connus. Cette méthode permet de simuler les débits et hauteurs aux points de collocation. Il est difficile d'estimer a priori le nombre de points de collocation nécessaire pour une bonne précision du modèle, ce nombre est d'autant plus important que la longueur du canal est importante.

## 2.5 Modèles obtenus par identification

Une alternative aux modèles basés sur les équations physiques régissant les écoulements et leurs versions simplifiées consiste à utiliser des méthodes d'identification linéaire [Lju99].

On parle alors de modèles boîtes noires ou boîtes grises lorsque la structure du modèle est imposée a priori. Leur obtention nécessite de réaliser en grandeur réelle des scénarii spécifiques pendant lesquels les variables d'intérêt sont mesurées et enregistrées. Le volume de mesures est lié à la durée des scénarii, d'autant plus longue que la plage de fréquences sur laquelle le canal est identifié est grande et que le canal est long. On précise donc dans les références citées ci-après les longueurs des canaux étudiés et le domaine de validité des modèles obtenus.

Dans [Ove+10], afin d'obtenir un modèle incluant les modes résonnants, l'expérience consiste en une excitation du système de façon à faire osciller le plan d'eau significativement. Ce type d'expérience n'est pas applicable sur des biefs très longs où les marnages sont limités. D'une part, les scénarii prendraient beaucoup trop de temps, d'autre part déstabiliser le système présente des risques en termes de sûreté. Pour le cas d'application considéré dans [Ove+10] où le bief est de longueur  $786m$ , la durée du scénario incluant une partie pour l'identification même et une partie pour la validation est de  $5h20$ . Sur le canal du Rhin, les biefs font plus de  $10km$ . D'après [Ove+10], les amplitudes de variations du débit doivent être d'au moins 25% du débit support pour être visibles sur la variable de sortie qui est la hauteur d'eau. Sur le canal du Rhin, le débit support est d'environ  $1000m^3/s$ . Des variations de débits d'amplitude  $250m^3/s$  entretenus en continu sur plus de  $48h$  engendreraient une usure des organes de réglages. En effet, dans les centrales hydroélectriques, les débits frontières ne sont pas contrôlés par des vannes prévues pour ce type de sollicitation. Le modèle obtenu incluant le premier mode de résonance est d'ordre 5. Comme il l'est indiqué dans la partie discussion de l'article, le modèle n'est pas valide en basses fréquences et le retard est sous-estimé. Finalement, les modèles obtenus ne sont pertinents que pour l'analyse des éventuelles propriétés résonnantes d'un bief.

Dans [Bol+02], des modèles du premier et second ordre avec retard sont identifiés pour un canal de  $2km$  à partir d'un scénario composé de train d'échelons sur une durée de  $8h$ . Le train d'échelons est généré par le contrôle d'une vanne déversoir située à l'aval. Le retard est identifié par corrélation des mesures de niveau et du mouvement de la vanne. Le comportement dynamique de l'écoulement autour du régime hydraulique considéré ne présente pas de phénomène de résonance.

L'inconvénient majeur de ces approches est que les modèles résultants n'ont pas de paramètres physiques. Ainsi, la phase d'expérimentations doit être répétée si la configuration hydraulique est différente. Et pour une vallée hydraulique, ces expérimentations doivent être effectuées pour chaque canal la constituant. Or le multi-usage des canaux hydroélectriques rend compliqué la mise en place de phase d'expérimentation. Le re-calage éventuel des modèles ne peut pas être réalisé à partir de considérations physiques (par exemple en considérant un modèle de frottement ou une description topographique). La maintenance de ce type de modèle est donc impossible dans un contexte industriel.

Des approches basées sur l'identification sont aussi proposées dans [FOW10] et [FOW12] pour un canal de  $27.6km$ . Dans ce cas, des relevés de mesures sur trois mois sont utilisés pour l'identification des modèles de contrôle de la hauteur d'eau à l'aval du canal par la commande de vanne-toit à l'amont. Ces organes de régulation de débits sont typiquement installés sur les canaux d'irrigation à faible débit. Ces organes ne peuvent être actionnés que très lentement.

Étant donné leur plage d'utilisation, les phénomènes d'oscillations ne peuvent a priori pas être provoqués. Ainsi un retard pur est suffisant pour modéliser la propagation du débit. Et le modèle en hauteur est identifié par calage des coefficients du modèle non-linéaire des vannes. Pour une application en configuration hydroélectrique, l'approche ne peut donc pas être étendue.

Dans [Wey01], deux canaux de 900m et 3200m équipés de vannes-toit à chacune de leurs extrémités sont considérés. La réponse à un échelon est utilisée pour l'identification de la partie basses fréquences du modèle, pour l'estimation du retard de propagation et pour le calage des coefficients de modèle non-linéaire des vannes. La présence de vagues est observée et un modèle d'ordre plus élevé est proposé pour les prendre en compte. Pour la plage d'utilisation des vannes considérées un seul mode est excité, les coefficients d'un modèle d'ordre 2 sont alors calculés par minimisation d'erreur quadratique.

Dans [BCG12] et [BPB14], la dépendance au point de fonctionnement et l'interconnexion de plusieurs canaux sont traités par la proposition de modèles MIMO LPV. Dans [BCG12], une approche boîte noire est réalisée alors que dans [BPB14], la structure du modèle est imposée. Elle est basée sur le modèle IDZ proposé dans [LF04a].

Dans [CVFBRP15], un modèle d'ordre fractionnaire est proposé de la forme

$$\frac{h(x=L)}{\Delta U_e} = \frac{K}{1 + T s^\alpha} e^{-\tau s} \quad (2.37)$$

où  $\Delta U_e$  est l'ouverture contrôlée de la vanne à l'aval du bief considéré. Le modèle présente une erreur moyenne plus faible vis à vis des mesures réalisées sur un prototype de canal que les modèles du premier et second ordre obtenus aussi par identification avec le même set de mesures mais il n'inclut pas les dynamiques d'ordre plus élevé du système. Or la réponse indicielle du système présente effectivement des oscillations. Une application pour la régulation de niveau nécessiterait de les prendre en compte. Dans [Per+08], un modèle du second ordre est proposé de la forme

$$\frac{h(x=L, s)}{\Delta U_e(s)} = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} e^{-\tau s} \quad (2.38)$$

où  $\Delta U_e$  est la position de l'ouverture de la vanne amont. L'identification est réalisée par excitation du système par un signal binaire pseudo-aléatoire appliquée en commande de la position de la vanne. Après comparaison des normes de l'erreur résiduelle obtenues avec les structures OE, ARX et ARMAX, le modèle ARMAX présentant le meilleur indice de performance est retenu.

Un autre inconvénient de l'utilisation de méthodes d'identification est que par construction les modèles peuvent seulement être obtenus en des points où une mesure est réalisable. Ainsi dans la littérature, on trouve essentiellement des modèles aux frontières où les dispositifs de mesures sont les plus faciles à installer. Ces modèles ne sont donc pas adaptés dans un contexte où l'on souhaiterait faire de la prédiction en des points distribués.

## 2.6 Conclusion

A l'issue de cette revue de différentes approches de modélisation, on peut retenir les éléments suivants.

La simplification des équations de Saint-Venant en un modèle d'onde diffusante n'est pas adaptée pour la modélisation des écoulements en configuration hydroélectrique. En effet, on a montré que les termes d'inertie ne sont pas négligeables.

A partir des équations de Saint-Venant linéarisées, plusieurs contributions ont été faites concernant la prise en compte du régime non-uniforme. Les modèles proposés ne permettent pas de prendre en compte une ligne d'eau non-uniforme éloignée de la hauteur normale. Les approximations consistant à considérer un canal semi-infini ne sont pas applicables aux configurations hydroélectriques pour lesquelles le régime est fluvial et la dynamique de l'écoulement en un point intermédiaire du canal dépend de l'amont et de l'aval.

De plus, la plupart des modèles permettent seulement d'estimer la dynamique aux frontières et non pas en des points intermédiaires.

Un autre aspect est la validité des modèles en termes de plage de fréquences. Excepté par identification, les modèles présentés ne permettent de caractériser la dynamique de l'écoulement que pour des dynamiques basses fréquences. Ceci n'est pas problématique lorsque les configurations considérées ne présentent pas de modes résonants/anti-résonants mais n'est pas adapté pour les canaux dits résonants.

Ces conclusions motivent donc les études de modélisation des chapitres suivants.



# Modélisation dynamique d'écoulement dans les canaux en régime non-uniforme

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>3.2</b>	<b>Formulation des équations de Saint-Venant pour la réduction de modèle . . . . .</b>	<b>32</b>
3.2.1	Linéarisation autour d'un régime stationnaire non-uniforme . . . . .	32
3.2.2	Matrice de transition . . . . .	33
3.2.3	EDO du second ordre . . . . .	34
3.2.4	Cas particulier : régime uniforme . . . . .	36
<b>3.3</b>	<b>Approximation analytique basses fréquences . . . . .</b>	<b>40</b>
3.3.1	Modèle débits/débits : Gain retardé . . . . .	41
3.3.2	Modèle hauteurs/débits : IDZ . . . . .	43
3.3.3	Analyse des propriétés de l'approximation . . . . .	45
	Propriétés mathématiques . . . . .	45
	Modèle synchronisé : Calcul du point de basculement . . . . .	48
3.3.4	Application au cas particulier uniforme . . . . .	49
3.3.5	Analyse de sensibilité . . . . .	50
3.3.6	Limites de l'approximation basses fréquences et perspectives . . . . .	56
<b>3.4</b>	<b>Approximation par réduction de modèle optimale . . . . .</b>	<b>57</b>
3.4.1	Méthode . . . . .	58
	Algorithme IPTFA . . . . .	58
	Génération des modèles paramétriques . . . . .	58
3.4.2	Application : modèles hauteur/débit d'ordre 4 et 8 . . . . .	58
3.4.3	Limites de l'approximation par l'algorithme IPTFA et perspectives . . . . .	60
<b>3.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>60</b>

### 3.1 Introduction

Au regard de l'état de l'art présenté dans le chapitre précédent, on remarque deux caractéristiques importantes :

- Les approximations de modèle proposées se placent autour d'une configuration proche du régime uniforme, et le régime non-uniforme est uniquement abordé à partir de simplification de la ligne d'eau réelle. Les décompositions linéaires en deux parties, l'une affectée par l'effet backwater, l'autre en régime uniforme ne sont pas adaptées pour les configurations hydroélectriques où la profondeur d'eau peut être non seulement largement supérieure à la hauteur normale mais aussi fortement variable.
- Les modèles incluant une représentation de la dynamique en haute fréquence des écoulements sont obtenus par des méthodes d'identification qui ne sont pas réalisables dans un contexte industriel de canaux sous exploitation hydroélectrique. Or les configurations hydrauliques dites "hydroélectriques" présentent des modes résonants/anti-résonants sur la plage de fréquences où des variations de débits turbinés peuvent potentiellement exciter l'écoulement.

De plus, dans le contexte d'exploitation hydroélectrique, on ne s'intéresse pas seulement à la dynamique aux frontières mais aussi à la dynamique de l'écoulement en des points intermédiaires où des contraintes de marnages s'appliquent. Ces contraintes peuvent notamment venir de l'utilisation de ces mêmes canaux pour la navigation.

On propose ainsi deux contributions dans ce chapitre. La première en section 3.3 répond au premier point par la proposition d'une approximation basses fréquences analytique des écoulements autour d'un régime non-uniforme quelconque. La seconde en section 3.4 répond au second point par la proposition d'une méthode de réduction de modèle à partir de la réponse fréquentielle théorique du système en dimension infinie. Les deux approches conduisent à des modèles sous formes de fonctions de transfert. Au préalable, la linéarisation des équations de Saint-Venant autour d'un régime non-uniforme et leur formulation pour la recherche de solutions approximées est introduite en section 3.2.

## 3.2 Formulation des équations de Saint-Venant pour la réduction de modèle

### 3.2.1 Linéarisation autour d'un régime stationnaire non-uniforme

Après linéarisation des équations de Saint-Venant introduites dans le premier chapitre de cette thèse pour un canal de section trapézoïdale, on obtient un système aux dérivées partielles ((3.3), (3.4)) où  $q(x, t)$  (respectivement  $h(x, t)$ ) est la variation de débit (respectivement de hauteur) autour de sa valeur d'équilibre  $Q_0$  (respectivement  $H_0(x)$ ), c'est à dire :

$$q(x, t) = Q(x, t) - Q_0, \quad (3.1)$$

$$h(x, t) = H(x, t) - H_0(x). \quad (3.2)$$

### 3.2. Formulation des équations de Saint-Venant pour la réduction de modèle 33

$$\begin{cases} B_0(x) \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0 & (3.3) \\ \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + 2V_0(x) \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} + B_0(x) \delta_0(x) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} + \beta_0(x) q(x,t) - B_0(x) \gamma_0(x) h(x,t) = 0 & (3.4) \end{cases}$$

où

$$\delta_0(x) = c_0^2(x) - V_0^2(x), \quad (3.5)$$

$$\beta_0(x) = gS_0(x)J_{0q}(x) + 2 \frac{dV_0(x)}{dx}, \quad (3.6)$$

$$\gamma_0(x) = g \left( I - J_0(x) - \frac{dH_0(x)}{dx} - \frac{S_0(x)J_{0h}(x)}{B_0(x)} \right) + \frac{V_0(x)}{B_0(x)} \left( V_0(x) \frac{dB_0(x)}{dx} + 2B_0(x) \frac{dV_0(x)}{dx} \right) \quad (3.7)$$

avec

$$J_{0q}(x) = \frac{2Q_0}{K_s^2 S_0^2(x) R_{h0}(x)^{4/3}}, \quad (3.8)$$

$$J_{0h}(x) = \frac{2}{3} \left( \frac{P_0^2(x)}{S_0^5(x)} \right)^{2/3} \left( \frac{Q_0}{K_s} \right)^2 \left( \frac{4}{\cos(\alpha) P_{m0}(x)} - \frac{5B_0(x)}{S_0(x)} \right). \quad (3.9)$$

Plus de détails sur la linéarisation aboutissant au système ((3.3), (3.4)) sont donnés en Annexe A.

#### 3.2.2 Matrice de transition

On suppose que la transformation de Laplace peut être inter-changée avec la dérivation en  $x$  de  $q(x,t)$  et  $h(x,t)$  et que  $q$  et  $h$  sont des fonctions bornées continues. Ceci garantit l'existence de la transformée de Laplace de  $q$  et  $h$  ainsi que la validité de la définition en intégrale de leur transformée inversée. Soit  $f(t)$ , une fonction continue et bornée sur  $[0, +\infty[$ , on note  $f(s)$  sa transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f(t)) = f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.10)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sf(s) - f(t=0). \quad (3.11)$$

On suppose  $q(x, t=0) = 0$  et  $h(x, t=0) = 0$ , ce qui est vérifié autour d'une configuration initiale stationnaire,  $q$  et  $h$  étant les variations de  $Q$  et  $H$  autour d'un régime initialement stable. Après application de la transformée de Laplace au système ((3.3), (3.4)) on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial q(x,s)}{\partial x} + B_0(x)sh(x,s) = 0 & (3.12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2V_0(x) \frac{\partial q(x,s)}{\partial x} + B_0(x) \delta_0(x) \frac{\partial h(x,s)}{\partial x} + (\beta_0(x) + s)q(x,s) - B_0(x) \gamma_0(x) h(x,s) = 0 & (3.13) \end{cases}$$

Après mise en forme matricielle, cela s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} q(x,s) \\ h(x,s) \end{pmatrix} = \mathcal{T}(x,s) \begin{pmatrix} q(x,s) \\ h(x,s) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

avec la matrice de transition  $\mathcal{T}(x, s)$  telle que :

$$\mathcal{T}(x, s) = \begin{pmatrix} 0 & -B_0(x)s \\ -\frac{\beta_0(x) + s}{B_0(x)\delta_0(x)} & \frac{2V_0(x)s + \gamma_0(x)}{\delta_0(x)} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Cette représentation est notamment exploitée dans [LF04a] pour l'obtention d'un modèle hauteur/débit aux frontières où ce système est résolu analytiquement lorsque la matrice de transition est à coefficients constants. Dans [LF04b], un modèle fréquentiel numérique des équations de Saint-Venant linéarisées autour d'un régime non-uniforme est proposé. Ce dernier modèle hauteur/débit aux frontières repose sur une discrétisation de l'axe de l'écoulement en  $n$  tronçons où la matrice de transition est localement considérée constante. Cette réponse fréquentielle ne pouvant être utilisée directement pour des simulations temporelles, une étape de réduction de modèle pour l'obtention d'un modèle de dimension finie est nécessaire. Dans [LF04b], les modèles rationnels obtenus par optimisation ne sont pas paramétriques, ils ne sont donc pas adaptés pour les études de sensibilité de la dynamique du système à ses paramètres. L'étude du système autour d'un point de fonctionnement différent ou avec changement de valeurs de quelques paramètres nécessite de renouveler les deux étapes de calcul de la réponse fréquentielle numérique et d'approximation rationnelle.

### 3.2.3 EDO du second ordre

De façon équivalente à la représentation par matrice de transition, on peut se ramener à une EDO du second ordre en débit à partir du système dans le domaine de Laplace ((3.12), (3.13)) :

$$\frac{\partial^2 q(x, s)}{\partial x^2} + M(x, s) \frac{\partial q(x, s)}{\partial x} + N(x, s)q(x, s) = 0 \quad (3.16)$$

avec

$$M(x, s) = -(M_1(x)s + M_0(x)), \quad (3.17)$$

$$N(x, s) = -(N_2(x)s^2 + N_1(x)s) \quad (3.18)$$

où

$$M_1(x) = \frac{2V_0(x)}{\delta_0(x)} > 0, \quad M_0(x) = \frac{\rho_0(x)}{\delta_0(x)} > 0 \quad (3.19)$$

$$N_2(x) = \frac{1}{\delta_0(x)} > 0, \quad N_1(x) = \frac{\beta_0(x)}{\delta_0(x)} > 0 \quad (3.20)$$

et

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= \gamma_0(x) + \frac{\delta_0(x)}{B_0(x)} \frac{dB_0(x)}{dx}, \\ &= \gamma_0(x) + 2m \frac{\delta_0(x)}{B_0(x)} \frac{dH_0(x)}{dx}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

### 3.2. Formulation des équations de Saint-Venant pour la réduction de modèle 35

Pour des configurations hydroélectriques, les coefficients de l'équation (3.16) sont variables dans l'espace. Il n'existe alors pas de solution analytique connue de (3.16). La variabilité des coefficients est illustrée numériquement pour l'exemple défini en section 1.2.2 sur la figure 3.1.

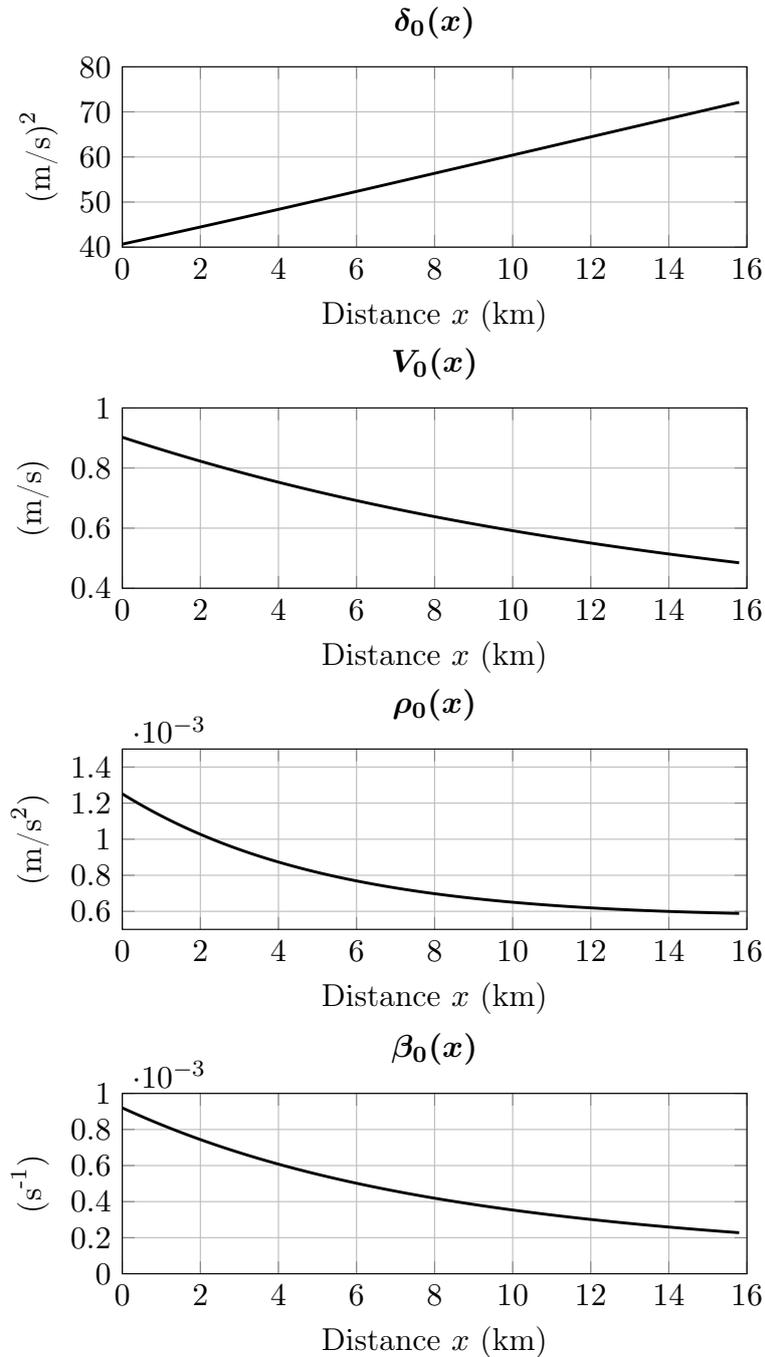


FIGURE 3.1 – Coefficients de l'EDO du second ordre en débit (3.16).

On ne peut pas obtenir d'EDO en hauteurs uniquement dans le cas général à coefficients variables. La solution en hauteur peut toutefois être obtenue à partir d'une solution en débit par utilisation de l'équation de conservation de la masse linéarisée (3.12) reliant linéairement le débit à la hauteur.

On propose une méthode numérique de résolution de (3.16) permettant d'obtenir la réponse fréquentielle des équations de Saint-Venant linéarisées autour d'un régime non-uniforme sur une grille fréquentielle donnée. L'algorithme 1 donné ci-après correspond au calcul des réponses fréquentielles des modèles débits/débits et hauteurs/débits en tout point sur une grille fréquentielle donnée. On exprime les conditions limites en débits :

$$q_e(s) = q(x = 0, s) \quad (3.22)$$

$$q_s(s) = q(x = L, s). \quad (3.23)$$

On note les fonctions de transferts débits/débits  $H_e$  et  $H_s$  telles que  $\forall x \in [0, L]$

$$H_e(x, s) = \frac{q(x, s)}{q_e(s)} \quad (3.24)$$

$$H_s(x, s) = \frac{q(x, s)}{q_s(s)} \quad (3.25)$$

et les fonctions de transferts hauteurs/débits  $G_e$  et  $G_s$  telles que  $\forall x \in [0, L]$

$$G_e(x, s) = \frac{h(x, s)}{q_e(s)} \quad (3.26)$$

$$G_s(x, s) = \frac{h(x, s)}{q_s(s)}. \quad (3.27)$$

Les réponses fréquentielles obtenues numériquement à partir de l'algorithme 1 serviront de références pour les comparaisons avec les modèles proposés dans la thèse.

### 3.2.4 Cas particulier : régime uniforme

On se place dans la configuration de régime uniforme tel que défini dans le premier chapitre en section 1.3.3. Dans cette configuration, les variables indicées 0 sont constantes puisque la profondeur d'eau est constante définie à partir du modèle de perte de charges  $J_0$  et du débit support  $Q_0$  telle que

$$I = J_0(H_0, Q_0). \quad (3.32)$$

La représentation avec matrice de transition (3.14) s'exprime alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} q(x, s) \\ h(x, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B_0 s \\ -\frac{\beta_0 + s}{B_0 \delta_0} & \frac{2V_0 s + \gamma_0}{\delta_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(x, s) \\ h(x, s) \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

### 3.2. Formulation des équations de Saint-Venant pour la réduction de modèle 37

---

#### Algorithm 1 Génération numérique des diagrammes de Bode

---

Soit une grille fréquentielle  $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_N]$ , une grille spatiale  $x_{vect} = [0, \dots, L]$ , et les évaluations des variables  $B_0, \delta_0, V_0, \rho_0, \beta_0$  sur  $x_{vect}$ .

1: **for**  $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_N]$  **do**

2: Evaluer les solutions de l'EDO (3.16) où  $s = j\omega$  avec les conditions frontières  $[q_e \ q_s] = [1 \ 0]$ , et respectivement  $[q_e \ q_s] = [0 \ 1]$ , pour obtenir les matrices de transfert en débit  $H_e$  et respectivement  $H_s$  de taille  $N \times length(x_{vect})$  telles que

$$H_e(\omega_i, :) = solH_e(1, :), \quad (3.28)$$

$$\text{et respectivement } H_s(\omega_i, :) = solH_s(1, :), \quad (3.29)$$

où  $solH_e$  et  $solH_s$  sont obtenus en utilisant la méthode de Simpson [KS01].

3: Construire les matrices de transfert en hauteur de taille  $N \times length(x_{vect})$  selon (3.12) pour obtenir  $G_e, G_s$  telles que

$$G_e(\omega_i, :) = \frac{solH_e(2, :)}{jB_0\omega_i}, \quad (3.30)$$

$$\text{et respectivement } G_s(\omega_i, :) = \frac{solH_s(2, :)}{jB_0\omega_i} \quad (3.31)$$

4: **end for**

---

L'EDO du second ordre (3.16) devient :

$$\delta_0 \frac{\partial^2 q(x, s)}{\partial x^2} - (2V_0s + \gamma_0) \frac{\partial q(x, s)}{\partial x} - s(s + \beta_0)q(x, s) = 0. \quad (3.34)$$

Les équations (3.34) et (3.33) sont à paramètres constants :

$$\delta_0 = c_0^2 - V_0^2, \quad (3.35)$$

$$\gamma_0 = -g \frac{S_0 J_{0h}}{B_0}, \quad (3.36)$$

$$\beta_0 = g S_0 J_{0q}. \quad (3.37)$$

De plus, dans le cas du régime uniforme, on obtient la même EDO en hauteur :

$$\delta_0 \frac{\partial^2 h(x, s)}{\partial x^2} - (2V_0s + \gamma_0) \frac{\partial h(x, s)}{\partial x} - s(s + \beta_0)h(x, s) = 0 \quad (3.38)$$

Dans le cas du régime uniforme, on sait résoudre l'EDO (3.34) (et l'EDO (3.38)) analytiquement. En imposant les conditions limites en termes de débits entrant et sortant, on obtient un modèle de l'impact des variations de ces débits sur la hauteur ou le débit en un point  $x$

quelconque du bief. L'obtention des fonctions de transferts en débit  $H_e(x, s) = q(x, s)/q_e(s)$  et  $H_s(x, s) = q(x, s)/q_s(s)$  est directe. En effet, il suffit de calculer la solution générale de l'EDO (3.34), de déterminer les constantes d'intégration selon les conditions aux limites en débits entrant et sortant, et de factoriser l'expression de  $q(x, s)$  en  $q_e(s)$  et  $q_s(s)$ . Le déterminant de l'équation caractéristique associée à (3.34) est

$$\Delta = (2V_0s + \gamma_0)^2 + 4\delta_0s(\beta_0 + s). \quad (3.39)$$

La solution  $q(x, s)$  de l'EDO (3.34) est donc de la forme

$$q(x, s) = A_q(s)e^{\lambda_1(s)x} + B_q(s)e^{\lambda_2(s)x} \quad (3.40)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les racines caractéristiques

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(s) = \frac{2V_0s + \gamma_0 + \sqrt{(2V_0s + \gamma_0)^2 + 4\delta_0s(\beta_0 + s)}}{2\delta_0} \\ \lambda_2(s) = \frac{2V_0s + \gamma_0 - \sqrt{(2V_0s + \gamma_0)^2 + 4\delta_0s(\beta_0 + s)}}{2\delta_0} \end{array} \right. \quad (3.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(s) = \frac{2V_0s + \gamma_0 + \sqrt{(2V_0s + \gamma_0)^2 + 4\delta_0s(\beta_0 + s)}}{2\delta_0} \\ \lambda_2(s) = \frac{2V_0s + \gamma_0 - \sqrt{(2V_0s + \gamma_0)^2 + 4\delta_0s(\beta_0 + s)}}{2\delta_0} \end{array} \right. \quad (3.42)$$

et  $A_q(s)$ ,  $B_q(s)$  sont des constantes à déterminer en fonction des conditions aux limites. Les conditions aux limites sont les variations de débits entrant,  $q_e(s)$ , et sortant,  $q_s(s)$ , autour du débit support d'équilibre  $Q_0$ . Ainsi  $A_q(s)$  et  $B_q(s)$  sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_q(s) + B_q(s) = q_e(s) \\ A_q(s)e^{\lambda_1(s)L} + B_q(s)e^{\lambda_2(s)L} = q_s(s) \end{array} \right. \quad (3.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_q(s) + B_q(s) = q_e(s) \\ A_q(s)e^{\lambda_1(s)L} + B_q(s)e^{\lambda_2(s)L} = q_s(s) \end{array} \right. \quad (3.44)$$

On obtient les solutions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_q(s) = \frac{-q_s(s) + q_e(s)e^{\lambda_2(s)L}}{e^{\lambda_2(s)L} - e^{\lambda_1(s)L}} \\ B_q(s) = \frac{q_s(s) - q_e(s)e^{\lambda_1(s)L}}{e^{\lambda_2(s)L} - e^{\lambda_1(s)L}} \end{array} \right. \quad (3.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_q(s) = \frac{-q_s(s) + q_e(s)e^{\lambda_2(s)L}}{e^{\lambda_2(s)L} - e^{\lambda_1(s)L}} \\ B_q(s) = \frac{q_s(s) - q_e(s)e^{\lambda_1(s)L}}{e^{\lambda_2(s)L} - e^{\lambda_1(s)L}} \end{array} \right. \quad (3.46)$$

On factorise  $q(x, s)$  de façon à faire apparaître les fonctions de transfert  $H_e(x, s)$  et  $H_s(x, s)$ . Ainsi

$$q(x, s) = H_e(x, s)q_e(s) + H_s(x, s)q_s(s), \quad (3.47)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} H_e(x, s) = \frac{e^{\lambda_1(s)L + \lambda_2(s)x} - e^{\lambda_2(s)L + \lambda_1(s)x}}{e^{\lambda_1(s)L} - e^{\lambda_2(s)L}} \\ H_s(x, s) = \frac{e^{\lambda_1(s)x} - e^{\lambda_2(s)x}}{e^{\lambda_1(s)L} - e^{\lambda_2(s)L}} \end{array} \right. \quad (3.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_e(x, s) = \frac{e^{\lambda_1(s)L + \lambda_2(s)x} - e^{\lambda_2(s)L + \lambda_1(s)x}}{e^{\lambda_1(s)L} - e^{\lambda_2(s)L}} \\ H_s(x, s) = \frac{e^{\lambda_1(s)x} - e^{\lambda_2(s)x}}{e^{\lambda_1(s)L} - e^{\lambda_2(s)L}} \end{array} \right. \quad (3.49)$$

Par bilan de masse selon l'équation (3.12), on obtient les fonctions de transfert  $G_e(x, s)$  et  $G_s(x, s)$  selon :

$$h(x, s) = G_e(x, s)q_e(s) + G_s(x, s)q_s(s) \quad (3.50)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} G_e(x, s) = \frac{\lambda_2(s)e^{\lambda_1(s)L + \lambda_2(s)x} - \lambda_1(s)e^{\lambda_2(s)L + \lambda_1(s)x}}{B_0s(e^{\lambda_1(s)L} - e^{\lambda_2(s)L})} \end{array} \right. \quad (3.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_s(x, s) = \frac{\lambda_1(s)e^{\lambda_1(s)x} - \lambda_2(s)e^{\lambda_2(s)x}}{B_0s(e^{\lambda_1(s)L} - e^{\lambda_2(s)L})}. \end{array} \right. \quad (3.52)$$

Comme proposé dans [LF04a], on peut obtenir un modèle réduit de type IDZ par approximation basses et hautes fréquences. Soient les modèles IDZ suivants :

$$\widehat{G}_e(x, s) = \frac{1 + T_{e0}(x)s}{A_{e0}(x)s} e^{-\tau_e(x)s} \quad (3.53)$$

$$\widehat{G}_s(x, s) = -\frac{1 + T_{s0}(x)s}{A_{s0}(x)s} e^{-\tau_s(x)s} \quad (3.54)$$

$$(3.55)$$

tels que

$$h(x, s) = \widehat{G}_e(x, s)q_e(s) + \widehat{G}_s(x, s)q_s(s) \quad (3.56)$$

Après étude asymptotique en basses fréquences des modules des fonctions de transfert irrationnelles (3.51) et (3.52), on identifie les expressions des surfaces équivalentes (aussi dites "apparentes") :

$$A_{e0}(x) = A_{s0}(x) = \frac{B_0\delta_0 \left( e^{\frac{\gamma_0}{\delta_0}L} - 1 \right)}{\gamma_0 e^{\frac{\gamma_0}{\delta_0}x}} \quad (3.57)$$

En effet,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|s \widehat{G}_e(x, s)\| = \frac{1}{A_{e0}(x)} \quad (3.58)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|s \widehat{G}_s(x, s)\| = \frac{1}{A_{s0}(x)} \quad (3.59)$$

et

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|s G_e(x, s)\| = \frac{\lambda_1(0)e^{\lambda_1(0)x}}{B_0(e^{\lambda_1(0)L} - 1)} \quad (3.60)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|s G_s(x, s)\| = \frac{\lambda_1(0)e^{\lambda_1(0)x}}{B_0(e^{\lambda_1(0)L} - 1)} \quad (3.61)$$

Après étude asymptotique en hautes fréquences des modules des fonctions de transfert irrationnelles (3.51) et (3.52), on identifie les expressions des zéros  $T_{e0}(x)$  et  $T_{s0}(x)$  :

$$T_{e0}(x) = A_{e0}(x) \frac{\sqrt{(\tau_1 a_0 a_1(x))^2 + (\tau_2 a_2(x))^2}}{B_0 \sqrt{1 + a_0^2}} \quad (3.62)$$

$$T_{s0}(x) = A_{e0}(x) \frac{\sqrt{(\tau_1 a_1(x))^2 + (\tau_2 a_2(x))^2}}{B_0 \sqrt{1 + a_0^2}} e^{-\sigma_1 L} \quad (3.63)$$

avec

$$\sigma_1 = \frac{1}{\delta_0} \left( \varphi_0 + \frac{\Phi_0}{2c_0} \right) \quad (3.64)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\delta_0} \left( \varphi_0 - \frac{\Phi_0}{2c_0} \right) \quad (3.65)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{c_0 - V_0} \quad (3.66)$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{c_0 + V_0} \quad (3.67)$$

$$a_0 = e^{-\frac{\Phi_0}{c_0}L} \quad (3.68)$$

$$a_1(x) = e^{\sigma_1 x} \quad (3.69)$$

$$a_2(x) = e^{\sigma_2 x} \quad (3.70)$$

où

$$\varphi_0 = \frac{\gamma_0}{2} \quad (3.71)$$

$$\Phi_0 = 2\varphi_0 V_0 + \beta_0 \delta_0. \quad (3.72)$$

Ces résultats spécifiques au régime uniforme ne peuvent pas être étendus au régime non-uniforme directement. Dans la suite, on s'intéresse au régime non-uniforme. On verra dans la section suivante 3.3 qu'avec une approximation basses fréquences on trouve la même structure IDZ qu'en régime uniforme.

### 3.3 Approximation analytique basses fréquences

On propose un modèle simplifié en régime non-uniforme basé sur une approximation basses fréquences. Celui-ci est développé à partir des équations de Saint-Venant linéarisées telles qu'introduites dans la section précédente 3.2 . La démarche est la suivante :

- on étudie l'EDO (3.16) en basses fréquences,
- on exploite la formule du retard établie par la méthode des caractéristiques en section 1.3.2,
- on utilise la première équation (3.12) du système de Saint-Venant pour obtenir un modèle hauteurs/débits,
- on vérifie la conservation des propriétés physiques du système modélisé.

Les deux premiers points nous permettent d'obtenir un modèle simplifié débits/débits de type Gain-Retard pur. Le troisième point nous permet d'obtenir un modèle hauteurs/débits simplifié de type Intégrateur-Zéro-Retard pur.

### 3.3.1 Modèle débits/débits : Gain retardé

On fait l'hypothèse qu'un modèle débits/débits satisfaisant sur la plage de fréquences étudiée peut être posé de la forme :

$$q(x, s) = \widehat{H}_e(x, s)q_e(s) + \widehat{H}_s(x, s)q_s(s) \quad (3.73)$$

avec

$$\boxed{\widehat{H}_e(x, s) = K_e(x)e^{-\tau_e(x)s}}, \quad (3.74)$$

$$\boxed{\widehat{H}_s(x, s) = K_s(x)e^{-\tau_s(x)s}}. \quad (3.75)$$

Les retards  $\tau_e(x)$  et  $\tau_s(x)$  sont établis dans la section 1.3.2 et donnés dans [Cho59] :

$$\tau_e(x) = \int_0^x \frac{1}{c_0(\sigma) + V_0(\sigma)} d\sigma, \quad (3.76)$$

$$\tau_s(x) = \int_x^L \frac{1}{c_0(\sigma) - V_0(\sigma)} d\sigma, \quad (3.77)$$

où  $\tau_e(x)$  est le retard par rapport aux variations de débit entrant  $q_e(s)$  et  $\tau_s(x)$  est le retard par rapport aux variations de débit sortant  $q_s(s)$ . Ceux-ci sont tracés en figure 3.2 pour l'exemple défini en sous section 1.2.2.

Cette modélisation suppose en particulier que  $K_e$  et  $K_s$  sont indépendants de  $s$ . Ceci est une approximation forte comme on peut le voir en regardant les diagrammes de Bode associés à la solution numérique de l'EDO (3.16) en figures 3.10(a) et 3.10(c). Les gains  $K_e$  et  $K_s$  ne sont constants en  $s$  que pour les basses fréquences. On discutera cette limite en section 3.3.6.

On identifie les gains  $K_e(x)$  et  $K_s(x)$  par approche asymptotique en basses fréquences. On indexe "BFr" les variables étudiées dans le domaine basses fréquences. En basses fréquences ( $s \approx 0$ ), l'EDO (3.16) s'exprime :

$$\delta_0(x) \frac{\partial^2 q_{BFr}(x, s)}{\partial x^2} - \rho_0(x) \frac{\partial q_{BFr}(x, s)}{\partial x} = 0, \quad \text{avec} \quad q_{BFr}(x, s) = \lim_{s \rightarrow 0} q(x, s). \quad (3.78)$$

Les coefficients de l'EDP (3.78) sont indépendants de  $s$ , ainsi  $q_{BFr}$  aussi, l'équation (3.78) devient donc :

$$\delta_0(x) \frac{d^2 q_{BFr}(x)}{dx^2} - \rho_0(x) \frac{dq_{BFr}(x)}{dx} = 0. \quad (3.79)$$

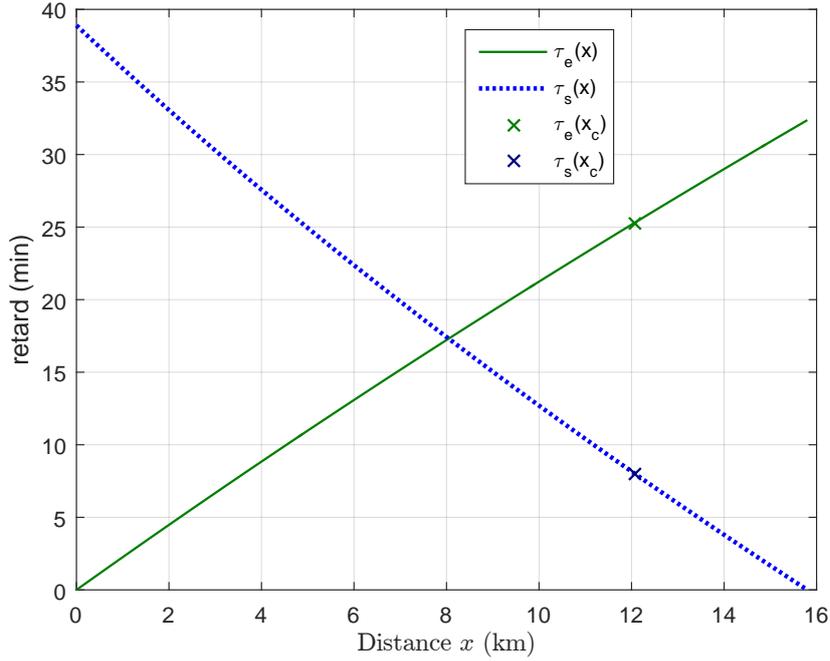


FIGURE 3.2 – Retards en tout  $x$  associés aux variations de débit amont et aval pour  $Q_0 = 1000m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$ .

On sait résoudre analytiquement cette équation en imposant des conditions aux limites,  $q_{BFr}(x = 0) = q_e^{BFr}$  et  $q_{BFr}(x = L) = q_s^{BFr}$ , ce qui nous permet ensuite d'obtenir les gains  $K_e(x)$  et  $K_s(x)$ . Nous pouvons remarquer que, l'EDO (3.79) ayant une solution  $q_{BFr}$  indépendante de  $s$ , les gains  $K_e$  et  $K_s$  identifiés en basses fréquences sont alors nécessairement indépendants de  $x$ . Les calculs sont présentés ci-dessous.

On pose  $u(x) = \frac{dq_{BFr}(x)}{dx}$ , L'EDO (3.79) devient alors :

$$\frac{\left(\frac{du(x)}{dx}\right)}{u(x)} = \frac{\rho_0(x)}{\delta_0(x)}. \quad (3.80)$$

La solution de l'EDO (3.80) est donc :

$$u(x) = C_u \exp \left[ \int_0^x \frac{\rho_0(\xi)}{\delta_0(\xi)} d\xi \right] \quad (3.81)$$

où  $C_u$  est une constante d'intégration à déterminer. On obtient ensuite l'expression de  $q_{BFr}(x)$  par intégration.

$$q_{BFr}(x) = \int_0^x C_u \exp \left[ \int_0^\kappa \frac{\rho_0(\xi)}{\delta_0(\xi)} d\xi \right] d\kappa + C_q \quad (3.82)$$

où  $C_q$  est une constante d'intégration à déterminer.

Les constantes  $C_u$  et  $C_q$  sont déterminées en fonction de  $q_e^{BFr}$  et  $q_s^{BFr}$ . On pose :

$$F(x) = \int_0^x \exp \left[ \int_0^\kappa \frac{\rho_0(\xi)}{\delta_0(\xi)} d\xi \right] d\kappa, \quad F(x=0) = F_0 = 0, \quad F(x=L) = F_L. \quad (3.83)$$

Ainsi, l'équation (3.82) s'écrit :

$$q_{BFr}(x) = C_u F(x) + C_q. \quad (3.84)$$

Les conditions aux limites imposent la résolution de :

$$\begin{cases} C_u F_0 + C_q = q_e^{BFr} \\ C_u F_L + C_q = q_s^{BFr} \end{cases} \quad (3.85)$$

$$(3.86)$$

La solution du système précédent ((3.85), (3.86)) est :

$$\begin{cases} C_u = \frac{q_s^{BFr} - q_e^{BFr}}{F_L} \\ C_q = q_e^{BFr} \end{cases} \quad (3.87)$$

$$(3.88)$$

On injecte les solutions (3.87) et (3.88) dans l'équation (3.84) et on factorise en  $q_e^{BFr}$  et  $q_s^{BFr}$ , on obtient alors :

$$q_{BFr}(x) = K_e(x)q_e^{BFr} + K_s(x)q_s^{BFr} \quad (3.89)$$

avec

$$K_e(x) = \frac{F_L - F(x)}{F_L}, \quad (3.90)$$

et

$$K_s(x) = \frac{F(x)}{F_L}. \quad (3.91)$$

Les gains  $K_e(x)$  et  $K_s(x)$  sont présentés en figure 3.3 pour l'exemple défini en sous section 1.2.2.

### 3.3.2 Modèle hauteurs/débits : IDZ

A partir du bilan de masse dans le domaine de Laplace (3.12), nous calculons les modèles hauteurs/débits

$$\widehat{G}_e(x, s) = -\frac{1}{B_0(x)s} \frac{\partial \widehat{H}_e(x, s)}{\partial x}, \quad (3.92)$$

$$\widehat{G}_s(x, s) = -\frac{1}{B_0(x)s} \frac{\partial \widehat{H}_s(x, s)}{\partial x}, \quad (3.93)$$

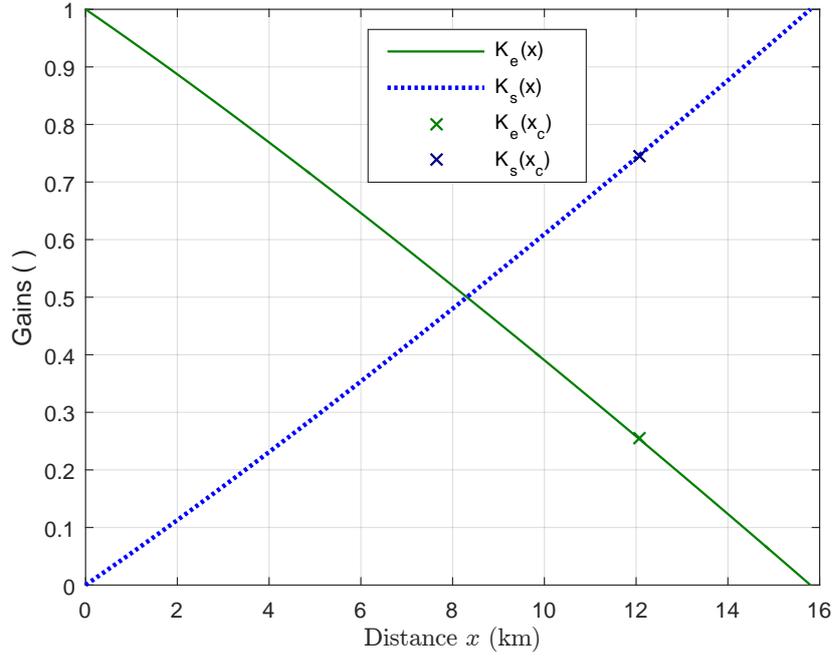


FIGURE 3.3 – Gains basses fréquences en tout  $x$  des modèles débits/débits pour  $Q_0 = 1000m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$ .

tels que

$$h(x, s) = \widehat{G}_e(x, s)q_e(s) + \widehat{G}_s(x, s)q_s(s). \quad (3.94)$$

D'après les expressions de  $\widehat{H}_e(x, s)$  en (3.74) et  $\widehat{H}_s(x, s)$  en (3.75), on a :

$$\frac{\partial \widehat{H}_e(x, s)}{\partial x} = \left( \frac{dK_e(x)}{dx} - K_e(x) \frac{d\tau_e(x)}{dx} s \right) e^{-\tau_e(x)s}, \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial \widehat{H}_s(x, s)}{\partial x} = \left( \frac{dK_s(x)}{dx} - K_s(x) \frac{d\tau_s(x)}{dx} s \right) e^{-\tau_s(x)s}. \quad (3.96)$$

Ainsi, les fonctions de transfert hauteur/débit s'expriment :

$$\widehat{G}_e(x, s) = \frac{K_e(x) \frac{d\tau_e(x)}{dx} s - \frac{dK_e(x)}{dx}}{B_0(x)s} e^{-\tau_e(x)s}, \quad (3.97)$$

$$\widehat{G}_s(x, s) = \frac{K_s(x) \frac{d\tau_s(x)}{dx} s - \frac{dK_s(x)}{dx}}{B_0(x)s} e^{-\tau_s(x)s}. \quad (3.98)$$

On obtient donc des fonctions de transfert de la forme :

$$\boxed{\widehat{G}_e(x, s) = \frac{1 + T_e(x)s}{A_e(x)s} e^{-\tau_e(x)s}} \quad (3.99)$$

avec

$$T_e(x) = -K_e(x) \frac{\left(\frac{d\tau_e(x)}{dx}\right)}{\left(\frac{dK_e(x)}{dx}\right)}, \quad (3.100)$$

$$A_e(x) = -\frac{B_0(x)}{\left(\frac{dK_e(x)}{dx}\right)}, \quad (3.101)$$

et

$$\widehat{G}_s(x, s) = \frac{1 + T_s(x)s}{A_s(x)s} e^{-\tau_s(x)s} \quad (3.102)$$

avec

$$T_s(x) = -K_s(x) \frac{\left(\frac{d\tau_s(x)}{dx}\right)}{\left(\frac{dK_s(x)}{dx}\right)}, \quad (3.103)$$

$$A_s(x) = -\frac{B_0(x)}{\left(\frac{dK_s(x)}{dx}\right)}. \quad (3.104)$$

Les modèles obtenus sont directement de type IDZ.

### 3.3.3 Analyse des propriétés de l'approximation

Dans les sous-sections suivantes, on s'intéresse aux propriétés mathématiques des modèles, notamment au comportement aux frontières et à une configuration de canal semi-infini. On montre aussi que l'on peut estimer le point de basculement des lignes d'eau à partir d'un modèle synchronisé basé sur les modèles IDZ proposés.

#### Propriétés mathématiques

D'après l'annexe B, on vérifie la conservation des propriétés physiques des écoulements laminaires :

- le retard  $\tau_e(x)$  est positif et croissant en  $x$ , soit
 
$$\left(\forall x \in [0, L], \quad \tau_e(x) > 0, \quad \frac{d\tau_e(x)}{dx} > 0\right),$$

- le retard  $\tau_s(x)$  est positif et décroissant en  $x$ , soit
 
$$\left( \forall x \in [0, L], \quad \tau_s(x) > 0, \quad \frac{d\tau_s(x)}{dx} < 0 \right),$$
- la somme des gains  $K_e(x)$  et  $K_s(x)$  est unitaire, impliquant des sens de variation opposés pour  $K_e(x)$  et  $K_s(x)$ , soit
 
$$\left( \forall x \in [0, L], \quad K_e(x) + K_s(x) = 1, \quad \frac{dK_e(x)}{dx} = -\frac{dK_s(x)}{dx} \right),$$
- le gain  $K_e(x)$  est compris entre 0 et 1 et décroissant en  $x$ , soit
 
$$\left( \forall x \in [0, L], \quad K_e(x) \in [0, 1], \quad \frac{dK_e(x)}{dx} < 0 \right),$$
- le gain  $K_s(x)$  est compris entre 0 et 1 et croissant en  $x$ , soit
 
$$\left( \forall x \in [0, L], \quad K_s(x) \in [0, 1], \quad \frac{dK_s(x)}{dx} > 0 \right).$$

Le cas particulier du canal semi-infini, souvent traité dans la littérature (voir [LP03],[LPG10]), s'obtient simplement par étude de la limite du modèle développé quand  $L$  tend vers l'infini :

- la hauteur et le débit en un  $x$  donné sont indépendants des variations du débit sortant en  $+\infty$ , soit
 
$$\left( \forall x \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathfrak{S}, \quad |\widehat{H}_s(x, s)| \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 0, \quad |\widehat{G}_s(x, s)| \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 0 \right),$$
- la hauteur et le débit en un  $x$  donné restent impactés par les variations du débit entrant, en particulier le transfert débits/débits est unitaire en tout point  $x$  par conservation du mouvement, soit
 
$$\left( \forall x \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathfrak{S}, |\widehat{H}_e(x, s)| \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 1 \right).$$

Ainsi, on obtient quelques propriétés des modèles IDZ obtenus :

- $T_e(x)$  et  $T_s(x)$  sont positifs,
- $A_e(x)$  est positif, la réponse indicielle du système à un échelon positif de débit entrant est une augmentation du tirant d'eau,
- $A_s(x)$  est négatif, de valeur  $-A_e(x)$ , la réponse indicielle du système à un échelon de débit sortant est une baisse du tirant d'eau.

Les constantes de temps  $T_e(x)$  et  $T_s(x)$  sont présentées en figure 3.4 et la surface équivalente  $A_e(x)$  en figure 3.5 pour l'exemple défini en sous section 1.2.2. La surface équivalente est à distinguer de la surface réelle du canal qui est dans l'exemple de  $4.3 \text{ km}^2$ . En effet, la surface équivalente peut être variable en  $x$ , cette différence de valeur selon la position longitudinale le long du bief correspond au phénomène hydraulique de basculement de plan d'eau suite à des changement de valeur du débit support.

On observe donc pour chacun des modèles  $\widehat{G}_e(x, s)$  et  $\widehat{G}_s(x, s)$  :

- un gain équivalent sur la plage des hautes fréquences  $\left( \frac{T_e(x)}{A_e(x)} \text{ pour } \widehat{G}_e(x, s), \frac{T_s(x)}{A_s(x)} \text{ pour } \widehat{G}_s(x, s) \right)$ , modélisant la propagation des ondes de surface libre,

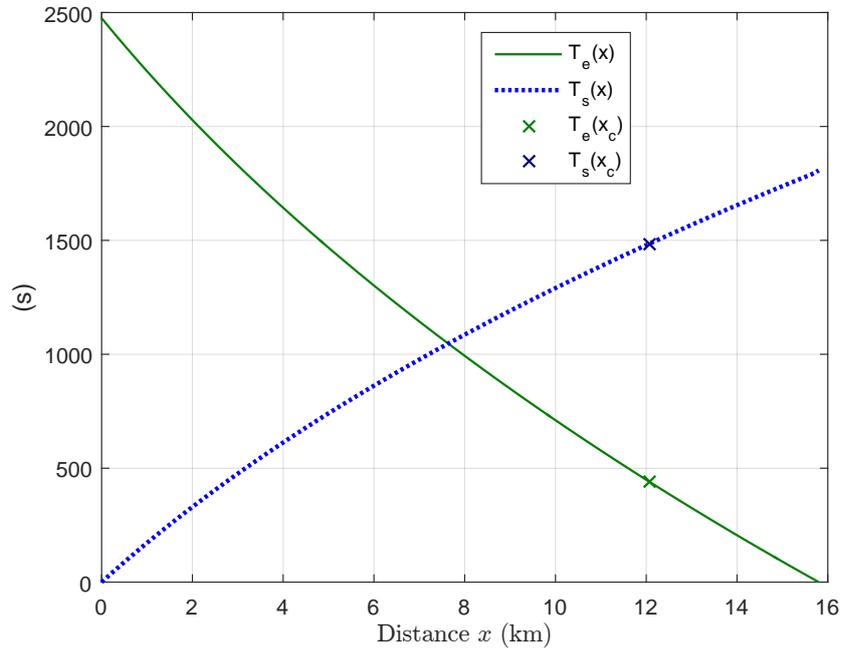


FIGURE 3.4 – Zéros des modèles IDZ hauteurs/débits en tout  $x$  pour  $Q_0 = 1000m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$ .

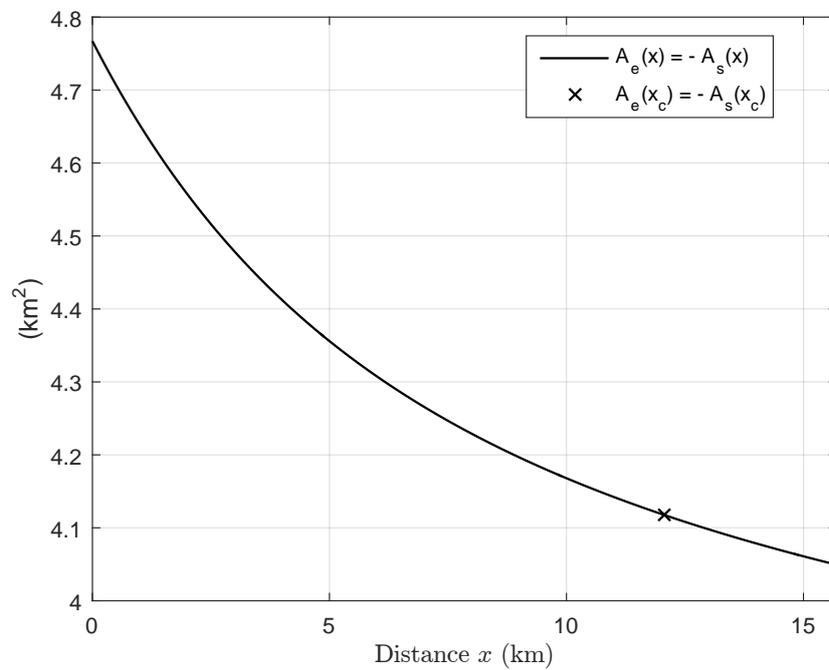


FIGURE 3.5 – Surface équivalente des modèles IDZ hauteurs/débits en tout  $x$  pour  $Q_0 = 1000m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$ .

- un intégrateur sur la plage des basses fréquences (de gain  $\frac{1}{A_e(x)}$  pour  $\widehat{G}_e(x, s)$ ,  $\frac{1}{A_s(x)}$  pour  $\widehat{G}_s(x, s)$ ), correspondant au bilan de volume sur le bief,
- un retard ( $\tau_e(x)$  pour  $\widehat{G}_e(x, s)$ ,  $\tau_s(x)$  pour  $\widehat{G}_s(x, s)$ ) non négligeable étant donnée la distance entre les points de régulations et les organes de réglage (plusieurs kilomètres).

On peut retrouver des particularités du comportement aux frontières en analysant les paramètres des modèles simplifiés en  $x = 0$  et  $x = L$

- en  $x = 0$ , le retard  $\tau_e$  est nul, le gain hautes fréquences  $T_e$  maximal, la surface équivalente  $A_e$  aussi.
- en  $x = L$ , le retard  $\tau_s$  est nul, le gain hautes fréquences  $T_s$  maximal, la surface équivalente  $A_e$  minimale.

### Modèle synchronisé : Calcul du point de basculement

On peut analyser le modèle synchronisé dans une configuration où non seulement le débit support initial est constant  $Q_{e0} = Q_{s0} = Q_0$ , mais aussi où la commande du débit sortant est telle que  $q_s = q_e$ . On parle de prise de charge pour un échelon de débit positif, et de baisse de charge pour un échelon de débit négatif. On se place dans le cas idéal où  $q_e$  est parfaitement connu et où  $q_s$  est strictement imposé égal à  $q_e$ . On parle d'opération équivolume. Le modèle

$$h(x, s) = \widehat{G}_e(x, s)q_e(s) + \widehat{G}_s(x, s)q_s(s) \quad (3.105)$$

s'écrit alors

$$h(x, s) = \left( \widehat{G}_e(x, s) + \widehat{G}_s(x, s) \right) q_e(s) . \quad (3.106)$$

Pour un  $x$  quelconque le modèle synchronisé, noté  $\widehat{G}(x, s)$ , est alors

$$\widehat{G}(x, s) = \widehat{G}_e(x, s) + \widehat{G}_s(x, s) \quad (3.107)$$

$$= \frac{(1 + T_e(x)s)e^{-\tau_e(x)s} - (1 + T_s(x)s)e^{-\tau_s(x)s}}{A_e(x)s} . \quad (3.108)$$

Ce modèle nous permet aussi de déterminer le point de basculement du bief que l'on notera  $x_b$ . Le point de basculement est situé environ au milieu du bief. Il est tel que les lignes d'eau "basculent" autour de ce point pour des opérations équivolumes, c'est à dire où le niveau d'eau reste constant. On retrouve la position exacte de ce point, par calcul du  $x_b$  tel que

$$\|\widehat{G}(x_b, s)\| = 0 . \quad (3.109)$$

Ce modèle synchronisé nous permet aussi de déterminer les variations de hauteurs en tout  $x$  pour une prise ou baisse de charge quelconque.

Soit une prise ou baisse de charge d'amplitude  $\Delta Q$ , et les variations de hauteur résultantes le long du bief  $\Delta H(x, s)$ , on a alors :

$$\Delta H(x, s) = \frac{1}{A_e(x)s} \left( (1 + T_e(x)s)e^{-\tau_e(x)s} - (1 + T_s(x)s)e^{-\tau_s(x)s} \right) \frac{\Delta Q}{s} \quad (3.110)$$

On approxime les retards  $\tau_e(x)$  et  $\tau_s(x)$  par leur développement limité à l'ordre 1 d'où

$$\Delta H(x, s) \approx \frac{(1 + T_e(x)s)(1 - \tau_e(x)s) - (1 + T_s(x)s)(1 - \tau_s(x)s)}{A_e(x)s} \frac{\Delta Q}{s} \quad (3.111)$$

$$\approx \frac{T_e(x) - \tau_e(x) - \tau_e(x)T_e(x)s - T_s(x) + \tau_s(x) + \tau_s(x)T_s(x)s}{Ae(x)s} \frac{\Delta Q}{s} . \quad (3.112)$$

Le comportement en régime permanent par application du théorème de la valeur finale est le suivant :

$$\Delta H_\infty(x) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta H(x, s) . \quad (3.113)$$

Le point de basculement se localise en  $x_b$  pour lequel  $\Delta H_\infty(x_b) = 0$ . Le point de basculement est donc défini par :

$$\boxed{T_e(x_b) - \tau_e(x_b) = T_s(x_b) - \tau_s(x_b)} . \quad (3.114)$$

L'annexe C explicite l'expression de  $x_b$  en fonction des propriétés géométriques du bief. On remarque que dans le cas d'un bief à section mouillée rectangulaire (c'est-à-dire dont le fruit des berges est nul), le point de basculement se situe en  $x_b = L/2$  comme il l'est démontré dans l'annexe C.

### 3.3.4 Application au cas particulier uniforme

Dans le cas particulier uniforme, nous pouvons expliciter les paramètres du modèle IDZ. On les note avec un indice  $U$ . Dans cette configuration particulière, l'expression donnée en (3.83) de la fonction de  $x \rightarrow F(x)$  à laquelle sont reliés les paramètres des fonctions de transfert approximées  $T_e(x), T_s(x), K_e(x), K_s(x), A_e(x)$  devient alors :

$$F_U(x) = \frac{\delta_0}{\gamma_0} e^{\frac{\gamma_0}{\delta_0} x} \quad (3.115)$$

Ainsi, les gains  $K_e(x), K_s(x)$  dont les expressions générales sont données en (3.90) et (3.91) s'écrivent alors :

$$K_{eU}(x) = e^{\frac{\gamma_0}{\delta_0} x} - e^{\frac{\gamma_0}{\delta_0} L} \quad (3.116)$$

$$K_{sU}(x) = 1 - K_{eU}(x) \quad (3.117)$$

Les zéros  $T_e(x)$  et  $T_s(x)$  dont les expressions générales sont données en (3.100) et (3.103)

Pour ce qui est des expressions de  $T_e(x)$  et  $T_s(x)$ , on exprime d'abord les dérivées spatiales des retards :

$$\frac{\tau_{eU}}{dx} = \frac{1}{c_0 + V_0} \quad (3.118)$$

$$\frac{\tau_{sU}}{dx} = -\frac{1}{c_0 - V_0} \quad (3.119)$$

Comme c'est le cas déjà en non-uniforme, on a :

$$\frac{dK_e(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} \frac{1}{F_0 - F_L} \quad (3.120)$$

$$\frac{dK_s(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx} \frac{1}{F_0 - F_L} \quad (3.121)$$

Or, d'après (3.115) on a

$$\frac{dF_U}{dx} = e^{\frac{\gamma_0}{\delta_0}x} \quad (3.122)$$

D'où,

$$A_e(x) = -A_s(x) = -\frac{B_0(x)}{e^{\frac{\gamma_0}{\delta_0}x}} \quad (3.123)$$

Et d'où, en appliquant les expressions générales (3.100) et (3.103) au cas uniforme,

$$T_{eU}(x) = -\frac{\delta_0 \left( 1 - e^{\frac{\gamma_0}{\delta_0}(L-x)} \right)}{\gamma_0 (c_0 + V_0)} \quad (3.124)$$

$$T_{sU}(x) = \frac{\delta_0 \left( 1 - e^{\frac{\gamma_0}{\delta_0}x} \right)}{\gamma_0 (c_0 - V_0)} \quad (3.125)$$

### 3.3.5 Analyse de sensibilité

Afin d'illustrer la sensibilité des modèles à la configuration initiale, on considère ici différents débits supports  $Q_0$  et différents états de remplissage du canal de Gerstheim (décrit dans le chapitre 1). En figure 3.6, les trois valeurs de débits supports correspondent au minimum d'exploitation avec  $Q_0 = 300m^3/s$ , au fonctionnement nominal avec  $Q_0 = 1000m^3/s$ , et au maximum d'exploitation avec  $Q_0 = 1400m^3/s$ . En figure 3.7, deux états de remplissage sont

considérés pour les débits de minimum et maximum d'exploitation. Les points de fonctionnement sont alors définis par des hauteurs d'eau à l'aval du bief variant de  $7.38m$  à  $8.08m$ , ce qui correspond à un marnage de  $0.7m$ .

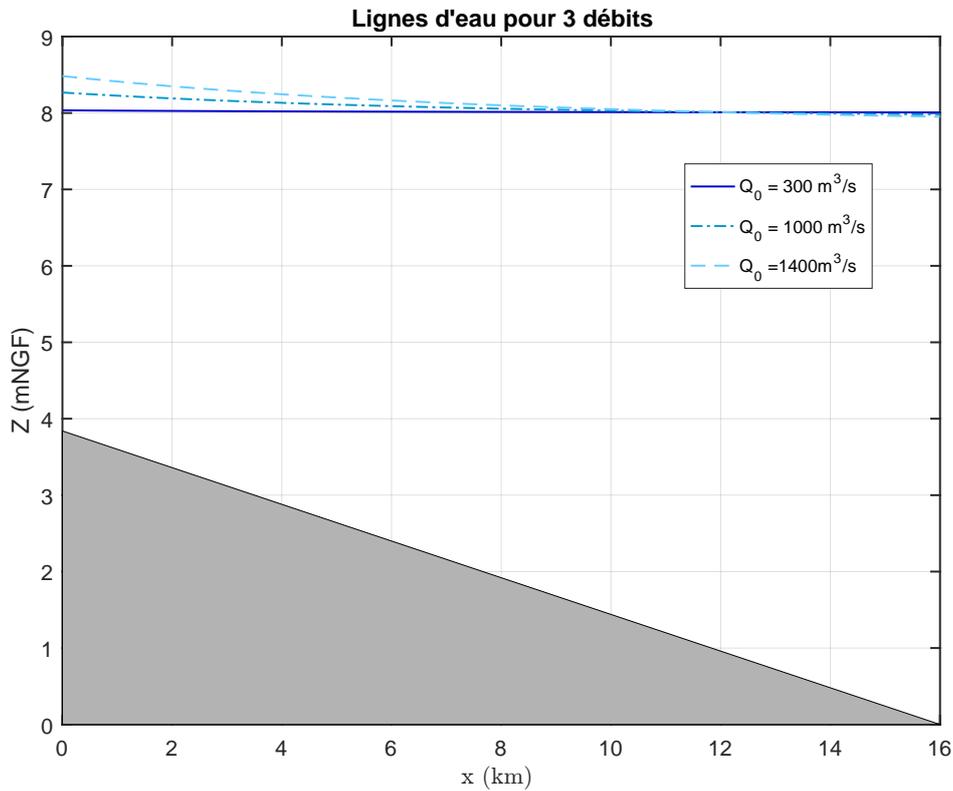


FIGURE 3.6 – Courbes de remous avec hauteur d'eau constante de  $7.05m$  en  $x = 0.75L$  pour trois débits supports (analyses de sensibilité correspondantes en tables 3.1 et 3.2).

$Q_0$ [ $m^3/s$ ]	$A_e$ [ $m^2$ ]	$T_e$ [s]	$T_s$ [s]	$\tau_e$ [s]	$\tau_s$ [s]
300	$4.117e^6$	743.8	1786	1607	485
1400	$3.857e^6$	636.9	1695	1434	524
%	7%	17%	5%	12%	8%

TABLE 3.1 – Pourcentage de variation pour  $Q_0 = [300, 1400]m^3/s$  et  $H_0(x = 0.75L) = 7.05m$

$H_{av}$ [m]	$A_e$ [ $m^2$ ]	$T_e$ [s]	$T_s$ [s]	$\tau_e$ [s]	$\tau_s$ [s]
min : 7.38	$3.869e^6$	646.7	1775	1545	534
nominal : 7.98	$3.978e^6$	677.6	1753	1493	509
max : 8.08	$3.993e^6$	680.9	1747	1483	505

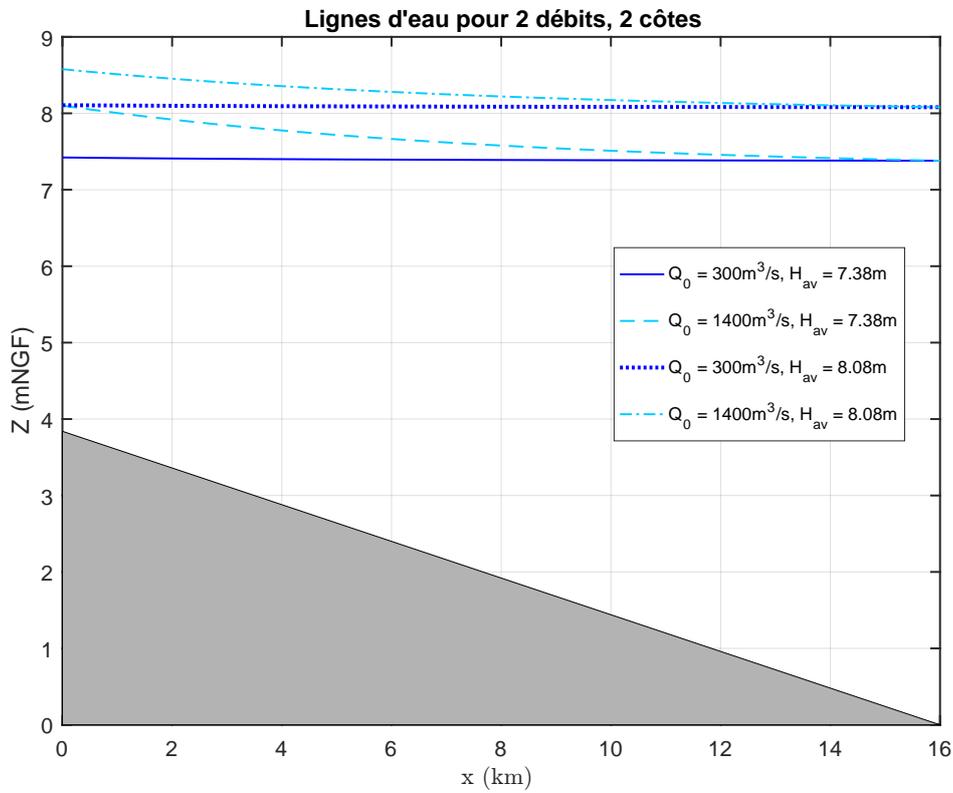
TABLE 3.2 – Analyse de sensibilité pour  $Q_0 = 1000m^3/s$ 

FIGURE 3.7 – Courbes de remous pour quatre configurations (analyses de sensibilité correspondantes en tables 3.3, 3.4, 3.5).

$H_{av}$ [m]	$A_e$ [ $m^2$ ]	$T_e$ [s]	$T_s$ [s]	$\tau_e$ [s]	$\tau_s$ [s]
min : 7.38	$4.077e^6$	742.6	1871	1694	507
max : 8.08	$4.121e^6$	743.5	1777	1597	483

TABLE 3.3 – Analyse de sensibilité pour  $Q_0 = 300m^3/s$ .

$H_{av}$ [m]	$A_e$ [ $m^2$ ]	$T_e$ [s]	$T_s$ [s]	$\tau_e$ [s]	$\tau_s$ [s]
min : 7.38	$3.714e^6$	597.6	1679	1471	550
max : 8.08	$3.884e^6$	643.3	1694	1425	518

TABLE 3.4 – Analyse de sensibilité pour  $Q_0 = 1400m^3/s$ .

$A_e$ [ $m^2$ ]	$T_e$ [s]	$T_s$ [s]	$\tau_e$ [s]	$\tau_s$ [s]
11%	24%	11%	19%	14%

TABLE 3.5 – Pourcentages de variation pour  $Q_0 = [300, 1400]m^3/s$  et  $H_{av} = [7.38, 8.08]m$ .

$Q_0$ [ $m^3/s$ ]	200	500	1000	1400	% de variation sur la plage de débits
$A_e$ [ $km^2$ ]	4.26	4.23	4.12	4.0	7 %
$Ke$ [ ]	0.243	0.246	0.254	0.264	8 %
$T_e$ [s]	461.3	453.0	441.4	433.8	6 %
$T_s$ [s]	1474	1488	1485	1464	2%
$\tau_e$ [min, s]	27min 28s	26min 37s	25min 17s	24min 19s	13 %
$\tau_s$ [min, s]	7min 37s	7min 46s	8min 1s	8min 15s	8 %

TABLE 3.6 – Valeurs des paramètres des modèles simplifiés pour divers débits supports.

L'impact du changement de débit support sur les valeurs des paramètres des modèles simplifiés est faible dans le cas particulier de cette modélisation. Contrairement au régime uniforme où un changement de débit support engendre nécessairement un changement important du tirant d'eau, dans le cas traité, la courbe de remous est initialisée avec un même tirant d'eau à un  $x$  donné. Ainsi, le changement est moins fort. Toutefois, comme on le remarque sur les diagrammes de Bode des réponses fréquentielles numériques en figures 3.8 et 3.9, l'impact est important sur les amplitudes des pics de résonance/anti-résonance qui ont été négligés dans cette approche.

$H_0$ [m]	7.08		6.48		% de variation sur la plage
	(exploitation nominale)		(mode éclusée)		
$Q_0$ [m <sup>3</sup> /s]	200 (minimal)	1400 (maximal)	200 (minimal)	1400 (maximal)	\
$Ae$ [km <sup>2</sup> ]	4.26	4.0	4.21	3.82	12%
$Ke$ [ ]	0.243	0.264	0.244	0.276	14%
$Te$ [s]	461.3	433.8	480.1	450.4	7%
$Ts$ [s]	1474	1464	1537	1475	5%
$\tau_e$ [min, s]	27min 28s	24min 19s	28min 55s	24min 59s	19 %
$\tau_s$ [min, s]	7min 37s	8min 15s	7min 56s	8min 42s	14 %

TABLE 3.7 – Valeurs des paramètres des modèles simplifiés pour diverses configurations nominales.

Diagramme de Bode de  $G_e$

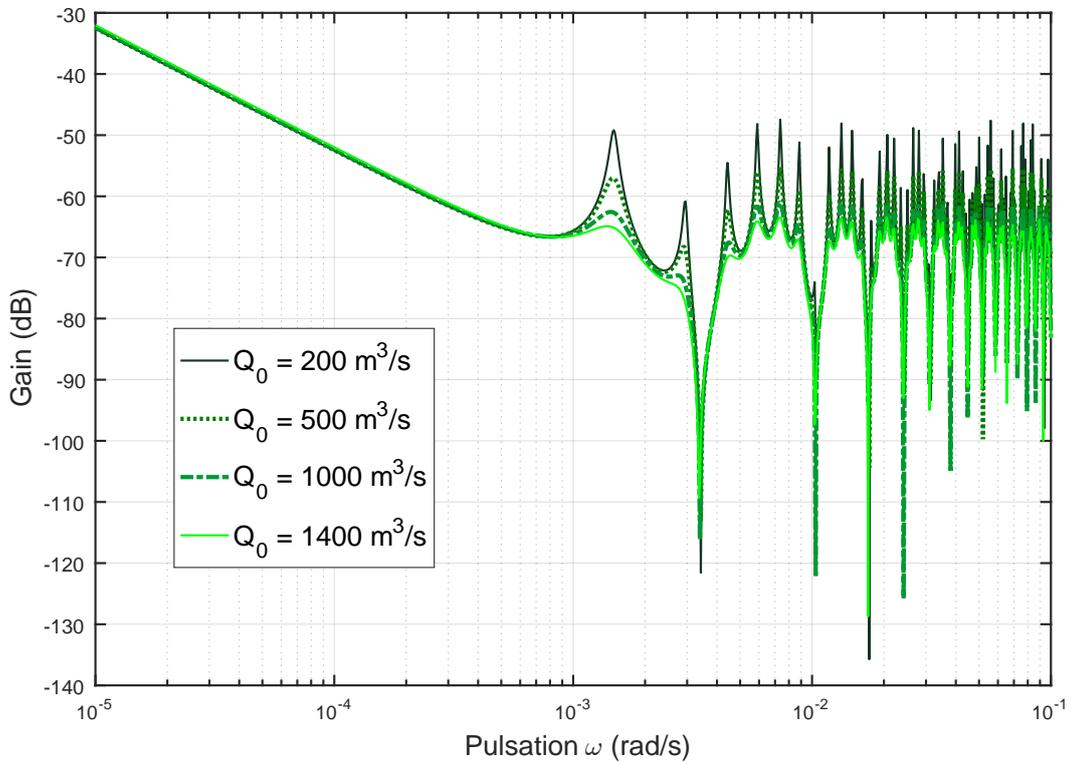


FIGURE 3.8 – Diagrammes de Bode de  $G_e$  en  $x = 0.75L$  pour différents débits support avec  $H_{av} = 7.98m$ .

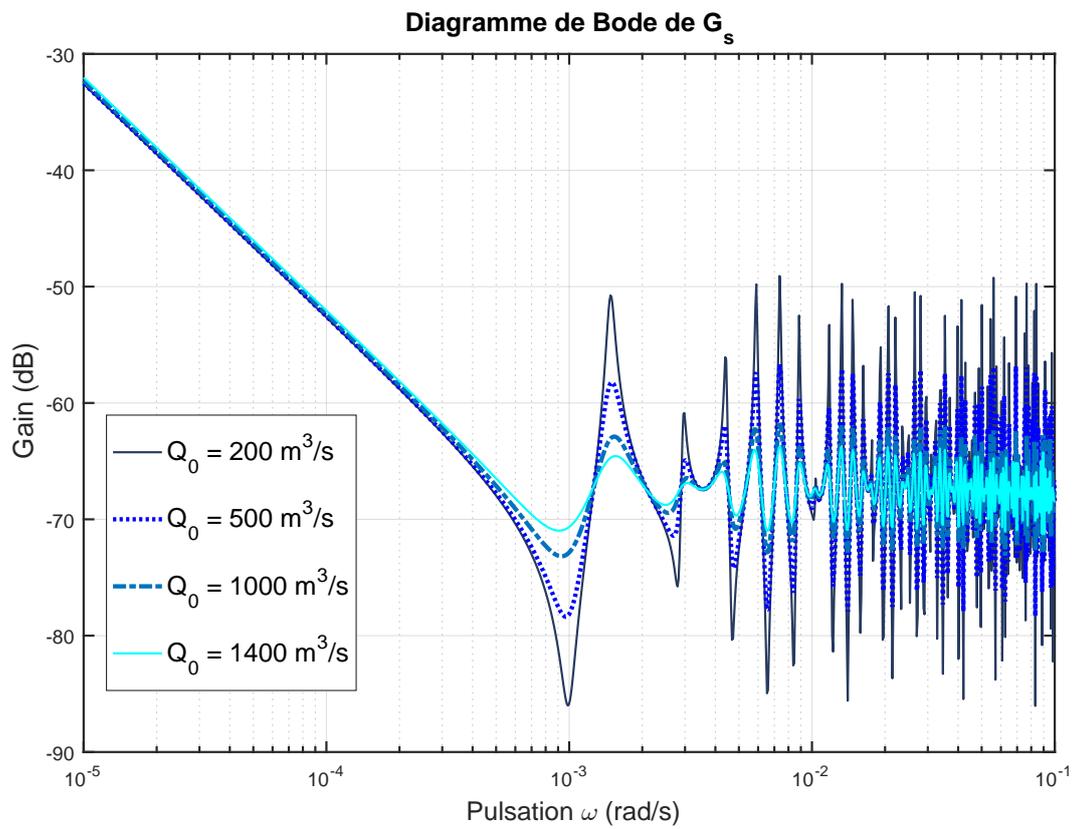


FIGURE 3.9 – Diagrammes de Bode de  $G_s$  en  $x = 0.75L$  pour différents débits support avec  $H_{av} = 7.98m$ .

### 3.3.6 Limites de l'approximation basses fréquences et perspectives

Les comparaisons des diagrammes de Bode des fonctions de transfert débits/débits en figures 3.10(a) et 3.10(c) montrent que l'hypothèse d'indépendance de  $K_e$  et  $K_s$  de  $s$  n'est pas vérifiée au delà de  $10^{-3}$  rad/s. Par conséquent, le modèle hauteurs/débits en découlant présente lui aussi cette limite. Cette remarque concerne particulièrement les  $x$  proches des extrémités (c'est-à-dire vers 0 ou L), comme on peut le voir sur les figures 3.11(b) et 3.11(d). L'amplitude des pics de résonance/ anti-résonance est de plus sensible à la valeur du débit support comme on l'a vu en figures 3.8 et 3.9.

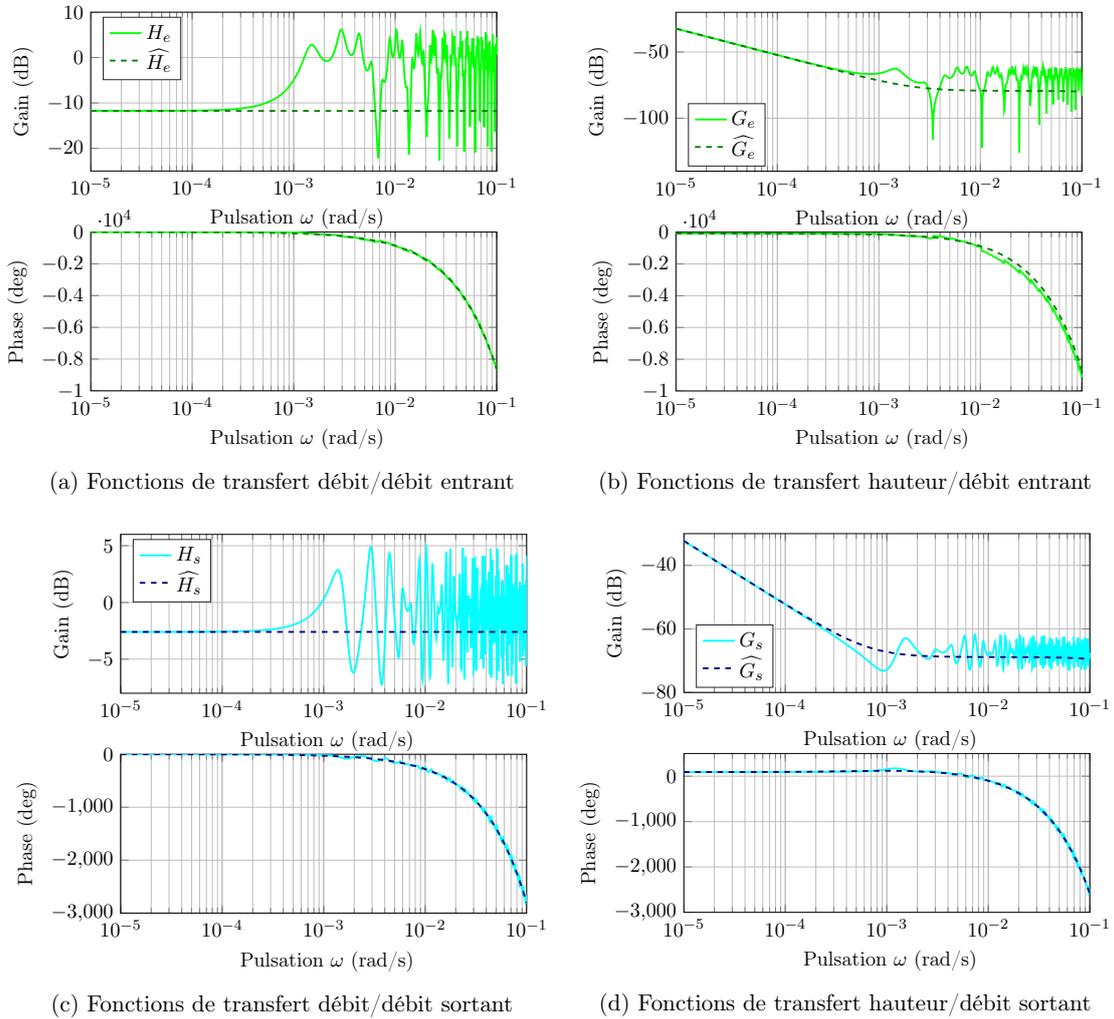
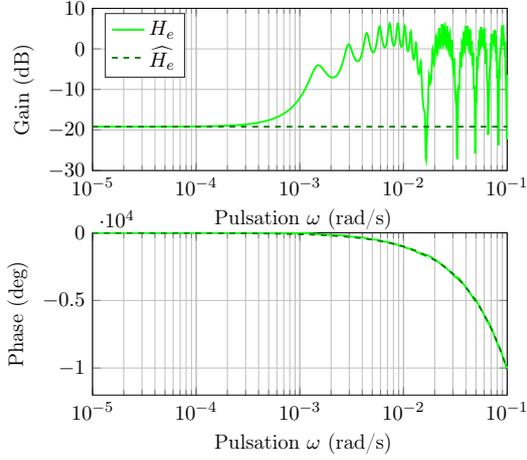


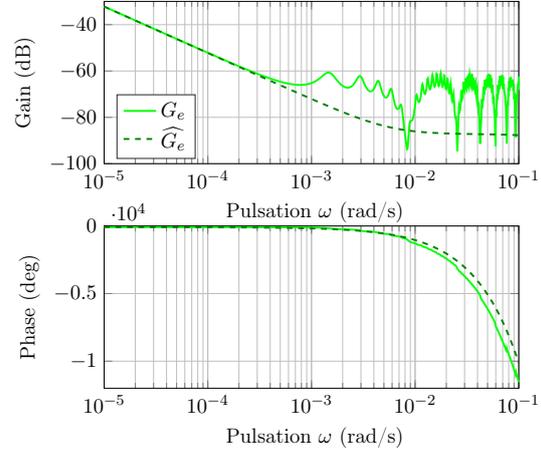
FIGURE 3.10 – Diagrammes de Bode en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 1000m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$ .

Pour prendre en compte le comportement oscillant pour des fréquences plus élevées, on propose une autre approche détaillée dans la section suivante. Elle est basée sur une méthode de réduction de modèle, et permet avec un ordre plus élevé de prendre en compte les premiers

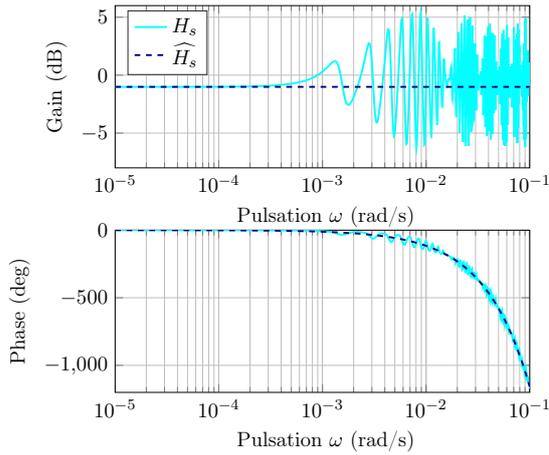
modes de résonance/anti-résonance.



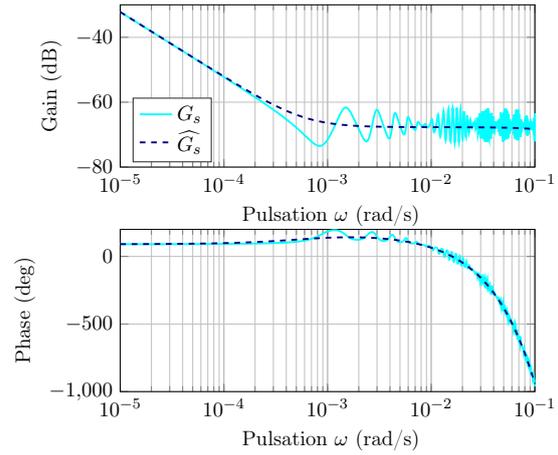
(a) Fonctions de transfert débit/débit entrant



(b) Fonctions de transfert hauteur/débit entrant



(c) Fonctions de transfert débit/débit sortant



(d) Fonctions de transfert hauteur/débit sortant

FIGURE 3.11 – Diagrammes de Bode en  $\mathbf{x} = 0.9\mathbf{L}$  pour  $Q_0 = 1000m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$ .

### 3.4 Approximation par réduction de modèle optimale

Les résultats présentés dans cette partie 3.4 ont été obtenus en collaboration avec Charles Poussot-Vassal, Igor Pontes Duff et Cédric Seren de l'ONERA de Toulouse. Les résultats de cette collaboration ont donné lieu à la publication en conférence de [Dal+16]. A l'origine, les outils de réduction de modèle ont été développés dans un contexte aéronautique, avec des applications pour la modélisation de modes de vibrations d'ailes d'avion par exemple [PV+13].

### 3.4.1 Méthode

#### Algorithme IPTFA

On propose un algorithme nommé IPTFA pour Irrational and Proper Transfer Function Algorithm. Celui-ci s'effectue en deux étapes. Dans un premier temps, on se place dans le cadre de Loewner pour la génération d'un modèle d'ordre  $n$  potentiellement grand à partir des données fréquentielles. Dans un second temps, une réduction d'ordre est proposée basée sur un critère de minimisation de la norme  $\mathcal{H}_2$ . Le cadre de Loewner est défini dans [MA07]. La réduction d'ordre développée pour un système strictement propre est effectuée à partir de l'algorithme IETIA pour Iterative Eigenvector Tangential Interpolation Algorithm présenté dans [PVV13].

On rappelle la définition de la norme  $\mathcal{H}_2$  d'une fonction de transfert quelconque  $H(s)$  :

$$\|H\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \text{tr} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{H(i\omega)} H(i\omega) d\omega \right) \quad (3.126)$$

La norme  $\mathcal{H}_2$  de fonctions non strictement propres, telles que celles obtenues à partir des équations de Saint-Venant, n'est pas bornée. Ainsi, afin de pouvoir définir un critère d'approximation en norme  $\mathcal{H}_2$ , il est nécessaire de filtrer préalablement les fonctions de transfert obtenues numériquement. Ceci introduit une valeur propre que l'on note  $\lambda^*$  que l'on préserve lors des étapes d'interpolation de Loewner et de réduction avec un ordre  $r$ . Cette valeur propre ajoutée peut être exactement annulée en dernière étape, préservant ainsi l'optimalité de l'approximation d'ordre réduit d'un modèle original présentant un gain direct.

#### Génération des modèles paramétriques

Pour des systèmes à paramètres variants, il est important de prendre en compte la dépendance au point de fonctionnement, pour cela des modèles LPV sont classiquement utilisés. Afin de diminuer le coût de calcul, l'algorithme IPTFA peut être appliqué pour quelques valeurs de paramètres. Et pour les valeurs intermédiaires, les modèles peuvent être calculés par interpolation linéaire. On obtient ainsi un modèle LFR [Mag06] (Linear Fractional Representation) paramétrique adapté aux méthodes d'analyse et de synthèse de contrôleur robuste. L'équivalence entre modèles LPV et LFR est discuté dans [APM16].

### 3.4.2 Application : modèles hauteur/débit d'ordre 4 et 8

Pour l'application de cette méthode de réduction, on a considéré le modèle en régime uniforme dont la réponse fréquentielle peut être obtenue analytiquement sous forme de fonctions de transfert irrationnelles. On a donné en section 3.3.4 l'expression de ces fonctions de transfert qui sont notamment paramétriques en  $Q_0$ , le débit support définissant le point de fonctionnement. Comme dans [LF04a], des modes de résonance sont présents même proche du régime uniforme.

L'algorithme IPTFA est appliqué aux deux fonctions de transfert hauteurs/débits obtenues pour les débits minimal de  $Q_{0min} = 200m^3/s$  et maximal de  $Q_{0max} = 1400m^3/s$ . La grille fréquentielle est constituée de 200 points répartis logarithmiquement de  $10^{-5}$  à  $10^{-1}$  rad/sec. La génération de fonctions de transfert d'ordre réduit pour 20 débits intermédiaires est réalisée par interpolation linéaire des deux modèles LTI obtenus avec l'algorithme IPTFA pour  $Q_{0min}$  et  $Q_{0max}$ .

On illustre les résultats pour  $r = 4$  en figure 3.12 et pour  $r = 8$  en figure 3.13.

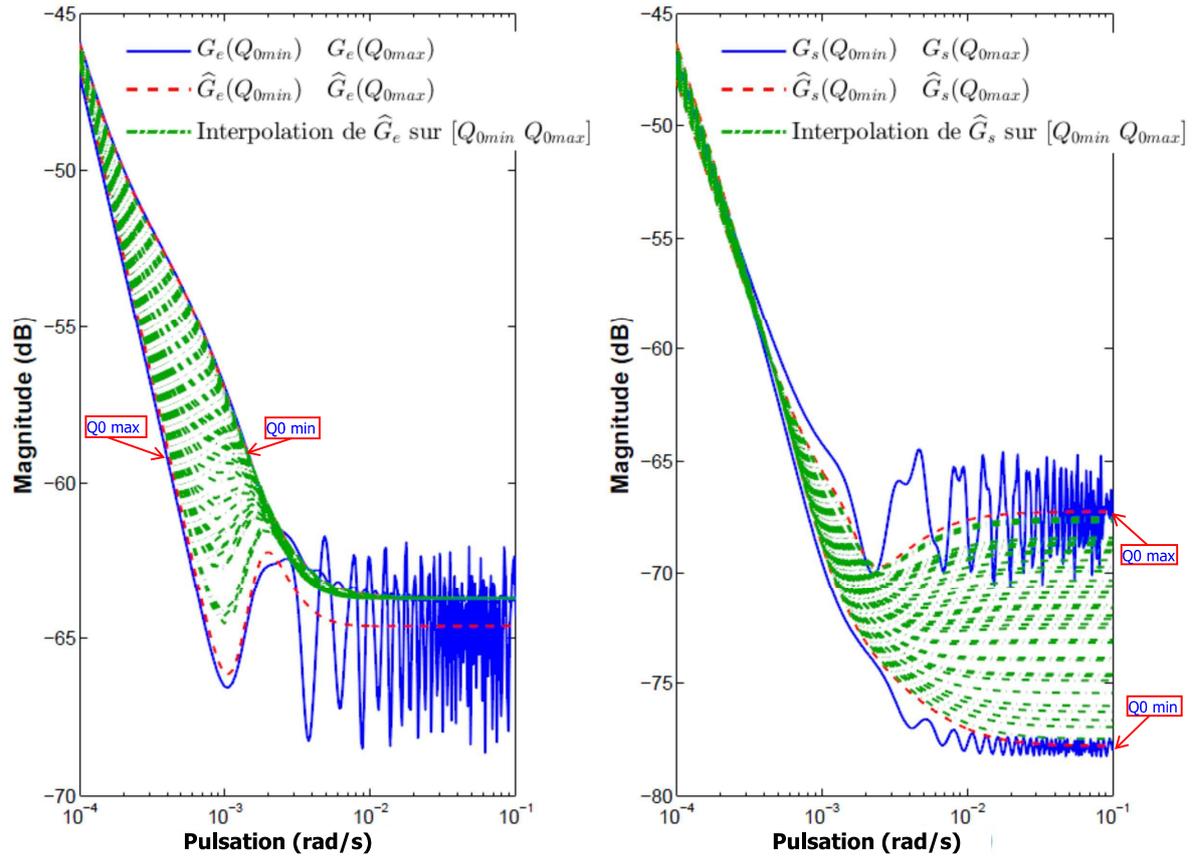


FIGURE 3.12 – Diagrammes de Bode en  $x = 0.4L$  pour  $Q_{0min} = 200m^3/s$ ,  $Q_{0max} = 1400m^3/s$  avec approximation d'ordre  $r = 4$ .

Augmenter l'ordre permet de diminuer l'erreur d'approximation, en particulier plus de modes sont alors modélisés.

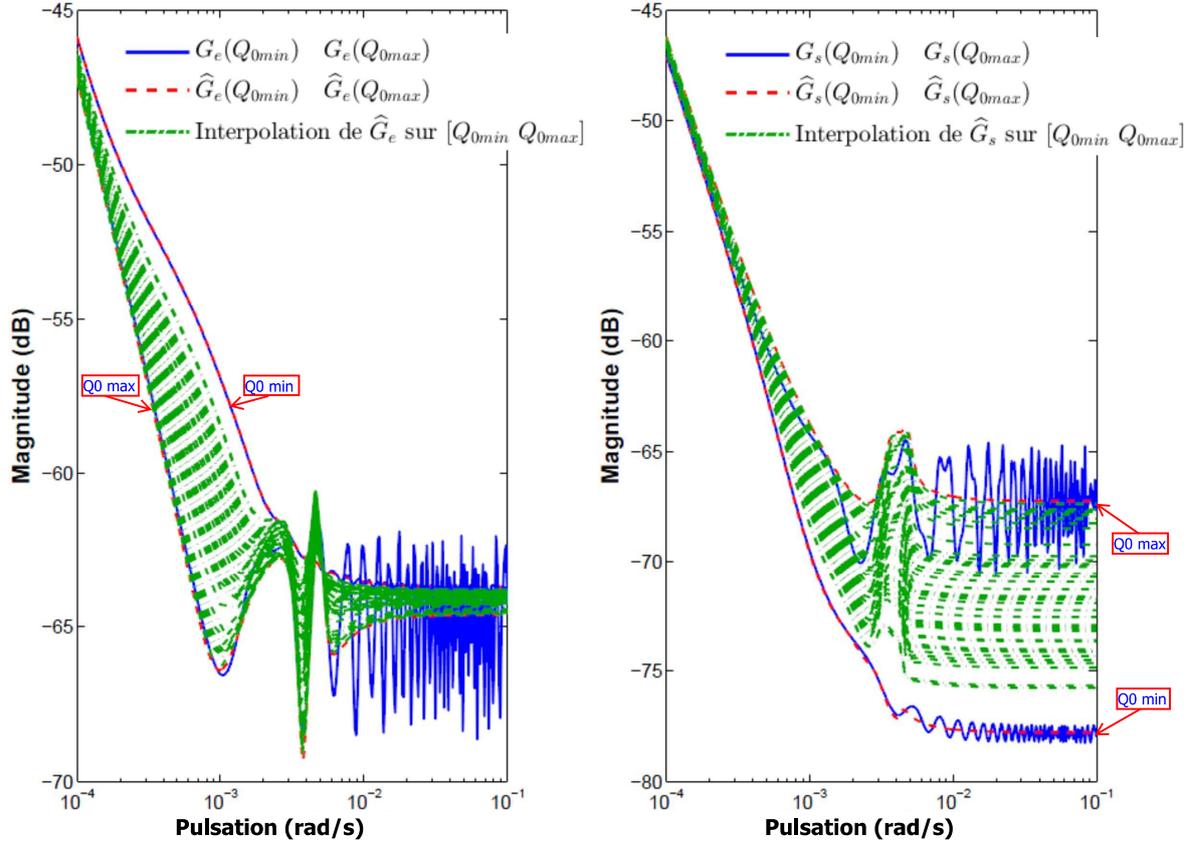


FIGURE 3.13 – Diagrammes de Bode en  $x = 0.4L$  pour  $Q_{0min} = 200m^3/s$ ,  $Q_{0max} = 1400m^3/s$  avec approximation d'ordre  $r = 8$ .

### 3.4.3 Limites de l'approximation par l'algorithme IPTFA et perspectives

La méthode présentée dans la section précédente 3.4.1 peut aussi être appliquée en régime non-uniforme si l'on a la réponse fréquentielle du système. Or obtenir la réponse fréquentielle des équations de Saint-Venant est numériquement coûteux et la dépendance analytique aux paramètres du système et au point de fonctionnement n'est pas préservée. Dans le contexte de la modélisation des écoulements à surface libre dans les canaux, la dépendance paramétrique n'est pas seulement intéressante vis à vis du point de fonctionnement caractérisé par  $Q_0$  et  $H_0$  mais aussi vis à vis d'autres données caractérisant le bief, par exemple les frottements, la géométrie.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé d'aborder le problème de la non-existence de solutions analytique des équations de Saint-Venant linéarisées autour d'un régime non-uniforme par deux approches. La première basée sur une approximation basses fréquences présente l'in-

---

convénient de ne pas modéliser les phénomènes résonant/anti-résonant liés à la propagation d'onde autour d'un équilibre présentant une profondeur spatialement variable. La seconde basée sur une méthode de réduction de modèle optimale permet de modéliser les dynamiques plus hautes fréquences du système mais nécessite de générer numériquement la réponse fréquentielle du système non-linéaire et n'est pas paramétrique, ce qui ne permet pas de calibrer a posteriori ce modèle sur des considérations physiques.



# Approximation WKB et modèles réduits en découplant

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>64</b>
<b>4.2</b>	<b>Cadre général</b>	<b>65</b>
4.2.1	Cas $r$ constant	65
4.2.2	Cas $r$ graduellement variable	65
4.2.3	Calcul de la phase approximée	66
4.2.4	Calcul de l'amplitude approximée	67
4.2.5	Solution WKB générale	67
<b>4.3</b>	<b>Formulation pour les équations de Saint-Venant</b>	<b>67</b>
4.3.1	Existence et unicité d'une solution exacte	67
4.3.2	Changement de variables	68
4.3.3	Critère de validité	69
4.3.4	Représentation sous forme de fonctions de transfert	71
<b>4.4</b>	<b>Fonctions de transfert irrationnelles WKB</b>	<b>77</b>
4.4.1	Exactitude des expressions en régime uniforme	77
4.4.2	Analyse du comportement basses fréquences	78
4.4.3	Analyse du comportement hautes fréquences	80
	Gains moyens hautes fréquences	81
	Pôles	84
	Zéros	86
<b>4.5</b>	<b>Fonctions de transfert réduites avec modes WKB estimés</b>	<b>88</b>
4.5.1	Modèle débits/débits : Gain-RAR retardé	90
4.5.2	Modèle hauteurs/débits : IDZ-RAR	90
<b>4.6</b>	<b>Fonctions de transfert rationalisées basées sur le développement de Padé</b>	<b>93</b>
<b>4.7</b>	<b>Combinaison de canaux</b>	<b>99</b>
4.7.1	Modèles hauteur/débit	99
4.7.2	Combinaison conservative	100
<b>4.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>105</b>

## 4.1 Introduction

On s'inspire dans ce chapitre d'une méthode développée en 1926 par trois physiciens en parallèle G. Wentzel [Wen26], A.H. Kramers [Kra26] L. Brillouin [Bri26] dans le cadre de travaux pour la recherche de solutions approximées de l'équation de Schrödinger monodimensionnelle, indépendante du temps. Sa généralisation à la résolution de problèmes physiques divers est nommée par l'acronyme WKB. Dans le contexte de la mécanique quantique exposé dans le chapitre 8 de [Gri05], cette méthode s'inscrit dans la théorie de la perturbation. On retrouve en effet une série fonction d'un petit paramètre du problème original. La méthode WKB se prête aussi à la résolution de problèmes non perturbés pour lesquels les dynamiques à modéliser sont liées à des milieux lentement variables. La méthode WKB appliquée à des systèmes non perturbés sans petit paramètre est équivalente à son application à des systèmes perturbés où la série est d'ordre 1.

Le développement en série avec  $\epsilon$  petit paramètre indépendant de  $x$  permet d'obtenir une approximation de  $y$  solution de

$$\epsilon^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - P(x)y(x) = 0. \quad (4.1)$$

La solution sous forme de série d'ordre N est alors :

$$y(x) = e^{\frac{1}{\epsilon} \sum_{k=0}^N \epsilon^k S_k(x)} \quad (4.2)$$

avec les premiers termes :

$$S_0(x) = \pm \int_0^x \sqrt{P(t)} dt \quad (4.3)$$

$$S_1(x) = -\frac{1}{4} \ln(P(x)) \quad (4.4)$$

$$S_2(x) = \pm \int_0^x \left( \frac{d^2 P(t)}{dt^2} \frac{1}{8P^{3/2}(t)} - 5 \left( \frac{dP(t)}{dt} \right)^2 \frac{1}{32P^{5/2}(t)} \right) dt \quad (4.5)$$

$$S_3(x) = -\frac{d^2 P(x)}{dx^2} \frac{1}{16P^2(x)} + 5 \left( \frac{dP(x)}{dx} \right)^2 \frac{1}{64P^3(x)}. \quad (4.6)$$

L'équation par récurrences des  $S_k$  pour  $k > 0$  quelconque est :

$$2 \frac{dS_0(x)}{dx} \frac{dS_k(x)}{dx} + \frac{d^2 S_{k-1}(x)}{dx^2} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{dS_i(x)}{dx} \frac{dS_{k-i}(x)}{dx} = 0. \quad (4.7)$$

On montrera que considérer une décomposition amplitude/phase permet d'identifier les deux premiers termes  $S_0(x)$  et  $S_1(x)$ . Un très bon historique de l'application de la méthode WKB à des problèmes physiques divers est présenté dans [FF02]. Une introduction à la méthode WKB en tant qu'outil mathématique peut se trouver dans [BO99].

Dans ce chapitre, on montre que les équations de Saint-Venant linéarisées autour d'un régime fluvial non-uniforme quelconque peuvent être écrites sous une forme adaptée à l'application de la méthode WKB. On introduit alors un critère spatio-fréquentiel de validité et

propose une solution approximée aux équations de Saint-Venant linéarisées sous forme de fonctions de transfert irrationnelles. Celles-ci sont exprimées analytiquement et incluent la dynamique hautes fréquences de l'écoulement.

Dans la section suivante 4.2, on introduit la méthode WKB de façon formelle pour la résolution d'un problème non perturbé. Ensuite dans la section 4.3, on spécifie la dérivation d'une solution au problème de modélisation de la dynamique d'écoulement autour d'un régime non-uniforme. Dans la section 4.4, on présente cette solution sous forme de fonctions de transfert irrationnelles dont on effectue en particulier une analyse modale. A partir des ces fonctions de transfert irrationnelles, on propose des fonctions de transfert d'ordre réduit selon deux approches. La première basée sur l'analyse analytique des fonctions de transfert WKB est présentée dans la section 4.5. La seconde basée sur un développement de Padé est présentée dans la section 4.6. Enfin dans la section 4.7, on propose une approche pour modéliser les canaux à pente variable.

## 4.2 Cadre général

Considérons la résolution de l'EDO du second ordre suivante :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + r(x)w = 0 \quad (4.8)$$

où  $r(x)$  est une fonction lentement variable en  $x$ . L'équation (4.8) ne peut être résolue analytiquement que pour  $r$  constant ou pour des expressions spécifiques de  $r(x)$ .

### 4.2.1 Cas $r$ constant

Dans le cas où  $r$  est constant, la solution est une onde oscillante de longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{r}}$ . En, effet, la solution générale peut s'écrire comme la combinaison linéaire des deux solutions linéairement indépendantes suivantes :

$$w_+(x) = W_0 e^{j\sqrt{r}x} \quad (4.9)$$

$$w_-(x) = W_0 e^{-j\sqrt{r}x} \quad (4.10)$$

avec  $W_0$  constante quelconque.

### 4.2.2 Cas $r$ graduellement variable

Lorsque  $r$  est variable en  $x$ , et dépend aussi de la variable de Laplace  $s$ , la solution exacte analytique est inconnue. On cherche alors une solution approximée  $\hat{w}(x, s)$ . En s'inspirant de la solution dans le cas constant, on suppose deux fonctions linéairement indépendantes de la forme :

$$\hat{w}_\pm(x, s) = A(x, s)e^{\pm j\phi(x, s)} \quad (4.11)$$

où  $A$  et  $\phi$  sont des fonctions inconnues en  $x$  et  $s$ . On exprime alors la solution générale de la façon suivante :

$$\hat{w}(x, s) = C_- \hat{w}_- + C_+ \hat{w}_+. \quad (4.12)$$

Dans le cadre de la mécanique quantique [Gri05],  $A(x, s)$  et  $\phi(x, s)$  sont réels et peuvent être identifiés par séparation de l'équation (4.8) en parties réelle et imaginaire. On montre en annexe D que dans le cas où ces termes dépendent aussi de la variable de Laplace, la même séparation est obtenue, s'exprimant sous la même forme de deux équations couplées. Après calculs donnés en annexe E, on obtient que  $A(x, s)$  et  $\phi(x, s)$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A(x, s)}{\partial x^2} - A(x, s) \left( \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} \right)^2 = -r(x, s) A(x, s) & (4.13) \\ A(x, s) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial A(x, s)}{\partial x} \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} = 0 & (4.14) \end{cases}$$

Dans la suite, on appelle par abus de langage "phase" la fonction  $\phi$  et "amplitude" la fonction  $A$  mais ces deux fonctions sont complexes, elles ne correspondent pas au sens exact à la phase et l'amplitude des fonctions  $\hat{w}_\pm$ .

### 4.2.3 Calcul de la phase approximée

L'équation (4.13) peut être écrite comme suit :

$$\frac{1}{A(x, s)} \frac{\partial^2 A(x, s)}{\partial x^2} + r(x, s) - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (4.15)$$

Celle-ci ne peut être résolue analytiquement que pour  $r$  constant. C'est un problème non trivial lorsque la fonction  $r(x)$  est non-uniforme. On propose alors une hypothèse supplémentaire

consistant à négliger le terme  $\frac{\partial^2 A(x, s)}{A(x, s) \partial x^2}$  devant  $r(x)$ . Cette hypothèse sera analysée dans la section 4.3.3 lorsque l'on l'applique dans le contexte des équations de Saint-Venant. Dans le cas général, cette hypothèse consiste à considérer que le changement d'amplitude est plus lent que l'amplitude elle-même en absolue, ce qui correspond à considérer un milieu lentement variable. Cette expression nous permet d'exprimer la phase explicitement en fonction de  $r(x)$  comme suit :

$$\frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} = \pm \sqrt{r(x, s)} \quad (4.16)$$

soit

$$\phi(x, s) = \pm \int_0^x \sqrt{r(x', s)} dx' + \phi_0 \quad (4.17)$$

où  $\phi_0$  est une constante d'intégration.

#### 4.2.4 Calcul de l'amplitude approximée

L'équation (4.14) peut être écrite :

$$\frac{1}{A(x, s)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( A^2(x, s) \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.18)$$

En supposant  $A(x, s) \neq 0$ , ceci revient à  $A^2(x, s) \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x}$  constant. Ainsi, on obtient :

$$A(x, s) = \frac{C(s)}{\sqrt{\frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x}}} \quad (4.19)$$

avec  $C(s)$  constant en  $x$ . En injectant l'expression de  $\phi(x, s)$  obtenue en (4.17), l'amplitude (4.19) peut être explicitement exprimée en fonction de  $r(x, s)$  :

$$A(x, s) = \frac{C(s)}{(r(x, s))^{1/4}}. \quad (4.20)$$

#### 4.2.5 Solution WKB générale

Les deux solutions linéairement indépendantes approximatives résultantes des sections 4.2.3 et 4.2.4 sont donc :

$$\hat{\omega}_+ = \frac{e^{jR(0, x, s)}}{(r(x, s))^{1/4}} \quad (4.21)$$

$$\hat{\omega}_- = \frac{e^{-jR(0, x, s)}}{(r(x, s))^{1/4}} \quad (4.22)$$

avec

$$R(x_1, x_2, s) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r(x, s)} dx. \quad (4.23)$$

Par combinaison linéaire de  $\hat{\omega}_+$  et  $\hat{\omega}_-$ , la solution générale approximée est donnée par :

$$\hat{w}(x, s) = \frac{C_1(s)}{(r(x, s))^{1/4}} e^{jR(0, x, s)} + \frac{C_2(s)}{(r(x, s))^{1/4}} e^{-jR(0, x, s)} \quad (4.24)$$

avec  $C_1(s), C_2(s)$  à déterminer selon les conditions limites.

### 4.3 Formulation pour les équations de Saint-Venant

#### 4.3.1 Existence et unicité d'une solution exacte

Comme présenté dans la section 3.2.3, la résolution des équations de Saint-Venant linéarisées en régime non-uniforme peut se ramener à la résolution du problème aux limites

suivant :

$$\frac{\partial^2 q(x, s)}{\partial x^2} + M(x, s) \frac{\partial q(x, s)}{\partial x} + N(x, s)q(x, s) = 0 \quad (4.25)$$

avec les conditions limites ( $q(x = 0, s) = q_e(s)$ ,  $q(x = L, s) = q_s(s)$ ).

L'existence et l'unicité de la solution de ce problème aux limites sont garanties sous une généralisation de la condition du Wronskian [BO99] :

#### Théorème 4.1

Soit  $q_1$  et  $q_2$  deux fonctions complexes différentiables,

Si  $q_1$  et  $q_2$  sont deux solutions linéairement indépendantes de (4.25) alors la solution générale peut s'écrire  $\forall x \in [0, L]$ ,  $q(x, s) = C_1(s)q_1(x, s) + C_2(s)q_2(x, s)$ .

Les conditions limites imposent  $C_1(s)q_1(x = 0, s) + C_2(s)q_2(x = 0, s) = q_e(s)$  et  $C_1(s)q_1(x = L, s) + C_2(s)q_2(x = L, s) = q_s(s)$ . Ces équations peuvent être résolues avec  $C_1$  et  $C_2$  fonctions uniques de  $q_e(s)$  et  $q_s(s)$  si

$$\det \begin{vmatrix} q_1(x = 0, s) & q_2(x = 0, s) \\ q_1(x = L, s) & q_2(x = L, s) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.26)$$

La nullité ( $q_1(x = 0, s)q_2(x = L, s) - q_1(x = L, s)q_2(x = 0, s) = 0$ ) correspond à un problème mal posé avec soit aucune solution soit une infinité de solutions.

### 4.3.2 Changement de variables

Afin de se ramener à une équation de la forme de (4.8), on propose le changement de variables suivant :

$$w(x, s) = q(x, s)e^{-S(0, x, s)}, \quad (4.27)$$

avec

$$S(x_1, x_2, s) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} M(x, s) dx. \quad (4.28)$$

L'EDO (4.25) s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 w(x, s)}{\partial x^2} + r(x, s)w(x, s) = 0 \quad (4.29)$$

avec

$$r(x, s) = N(x, s) - \frac{1}{2} \frac{\partial M(x, s)}{\partial x} - \frac{1}{4} M^2(x, s). \quad (4.30)$$

L'équation (4.30) est polynomiale en  $s$ , elle s'écrit :

$$r(x, s) = - \left( r_2(x)s^2 + r_1(x)s + r_0(x) \right) \quad (4.31)$$

avec

$$r_2(x) = N_2(x) + \frac{1}{4}M_1^2(x) > 0 \quad (4.32)$$

$$r_1(x) = N_1(x) - \frac{1}{2} \frac{dM_1(x)}{dx} + \frac{1}{2}M_1(x)M_0(x) > 0 \quad (4.33)$$

$$r_0(x) = -\frac{1}{2} \frac{dM_0(x)}{dx} + \frac{1}{4}M_0^2(x) > 0, \quad (4.34)$$

où  $N_2(x)$ ,  $N_1(x)$  sont données en (3.20) et  $M_1(x)$ ,  $M_0(x)$  sont donnés en (3.19). En régime non-uniforme,  $r$  n'est pas constant en  $x$  et dépend de l'état stationnaire considéré comme le montre l'expression de ses coefficients  $r_2(x)$ ,  $r_1(x)$  et  $r_0(x)$ .

L'équation (4.28) est affine en  $s$  et peut s'écrire :

$$S(x_1, x_2, s) = S_1(x_1, x_2)s + S_0(x_1, x_2) \quad (4.35)$$

avec

$$S_1(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2}M_1(x)dx > 0, \quad (4.36)$$

$$S_0(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2}M_0(x)dx > 0. \quad (4.37)$$

### 4.3.3 Critère de validité

Dans un contexte général (voir sous-section 4.2.3), l'approximation suivante est proposée :

$$\forall x \in [0, L], \forall s, \quad \left| \frac{\frac{\partial^2 A(x, s)}{\partial x^2}}{A(x, s)} \right| \ll |r(x, s)|. \quad (4.38)$$

Après application aux équations de Saint-Venant, l'inégalité précédente s'exprime :

$$\boxed{\forall x \in [0, L], \forall s, \quad \left| \frac{1}{16} \frac{4r(x, s) \frac{\partial^2 r(x, s)}{\partial x^2} - 5 \left( \frac{\partial r(x, s)}{\partial x} \right)^2}{r^2(x, s)} \right| \ll |r(x, s)|}. \quad (4.39)$$

Cette condition de validité n'est pas vérifiée si  $|r(x, s)|$  varie trop fortement en  $x$  ou si  $|r(x, s)|$  s'annule. Or le régime fluvial permet de garantir que les coefficients  $r_2(x)$ ,  $r_1(x)$  et  $r_0(x)$  varient lentement.  $r(x, s)$  peut toutefois s'annuler pour des bas débits, la solution WKB devient divergente proche de la fréquence correspondante à cette annulation. Dans ces cas, l'annulation se situe dans la partie basses fréquences de la réponse fréquentielle, ainsi l'erreur peut être corrigée lors de l'étape de réduction de modèle car le comportement basses fréquences est connu (voir [Dal+17]). Dans le contexte de la mécanique quantique voir [FF02] [Gri05], on parle de point tournant. Dans le contexte des équations de Saint-Venant, ce point est atteint pour une fréquence précise. Cela crée un artefact non réel sur les digrammes de Bode des modèles WKB.

Asymptotiquement en hautes fréquences, l'inégalité (4.39) est toujours vérifiée. En effet, le terme de gauche est constant et le terme de droite est croissant en  $|s^2|$ . Dans certains cas,

le terme de droite  $r(x, s)$  n'est croissant qu'à partir de certain  $\omega_+ > 0$  Ceci est possible en particulier pour des bas débits. On a en effet :

$$|r(x, s)|^2 = r_2(x)\omega^4 + (r_1(x)^2 - 2r_0(x)r_2(x))\omega^2 + r_0(x)^2 \quad (4.40)$$

et ainsi

$$\frac{d|r(x, s)|^2}{d\omega} = 2\omega (2r_2(x)^2\omega^2 + r_1(x)^2 - 2r_0(x)r_2(x)) \quad (4.41)$$

La fonction  $|r(x, s)|$  est donc croissante pour  $\omega$  tel que :

$$\omega > 0 \quad \text{et} \quad \omega^2 > \frac{2r_0(x)r_2(x) - r_1(x)^2}{2r_2(x)^2}. \quad (4.42)$$

Asymptotiquement en basses fréquences, les termes de droite et de gauche tendent vers des constantes. Le critère est alors uniquement fonction de la ligne d'eau en régime stationnaire, il s'exprime :

$$\left| \frac{1}{16} \frac{4r_0(x) \frac{d^2 r_0(x)}{dx^2} - 5 \left( \frac{dr_0(x)}{dx} \right)^2}{r_0^2(x)} \right| \ll |r_0(x)| \quad (4.43)$$

où  $r_0(x)$  est défini en (4.34). L'inégalité basses fréquences (4.43) n'est pas toujours vérifiée comme on le voit sur les figures 4.1 et 4.2. Il en résulte un biais en basses fréquences entre le résultat exact et le résultat approximé par la méthode WKB. Cette erreur peut être corrigée lors de l'étape de réduction de modèle puisque le comportement asymptotique basses fréquences est connu (voir [Dal+17]).

Contrairement au cas univarié pour lequel cette approximation a été introduite, son expression appliquée aux équations de Saint-Venant est alors bivariable, en espace et en fréquence.

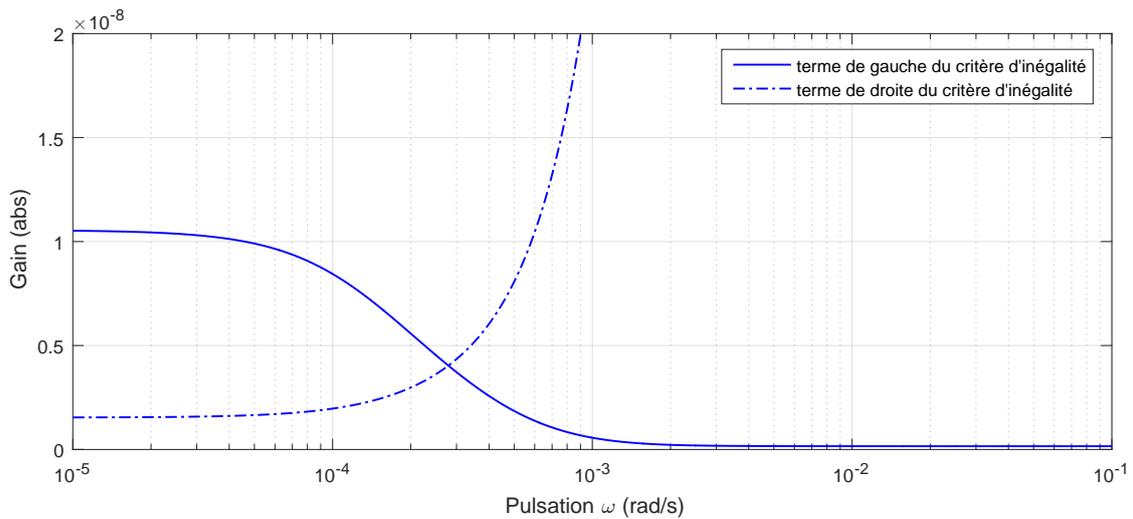


FIGURE 4.1 – Critère fréquentiel (4.39) en  $\mathbf{x} = \mathbf{0.25L}$  pour  $Q_0 = 1000\text{m}^3/\text{s}$ ,  $H_{av} = 7.98\text{m}$ .

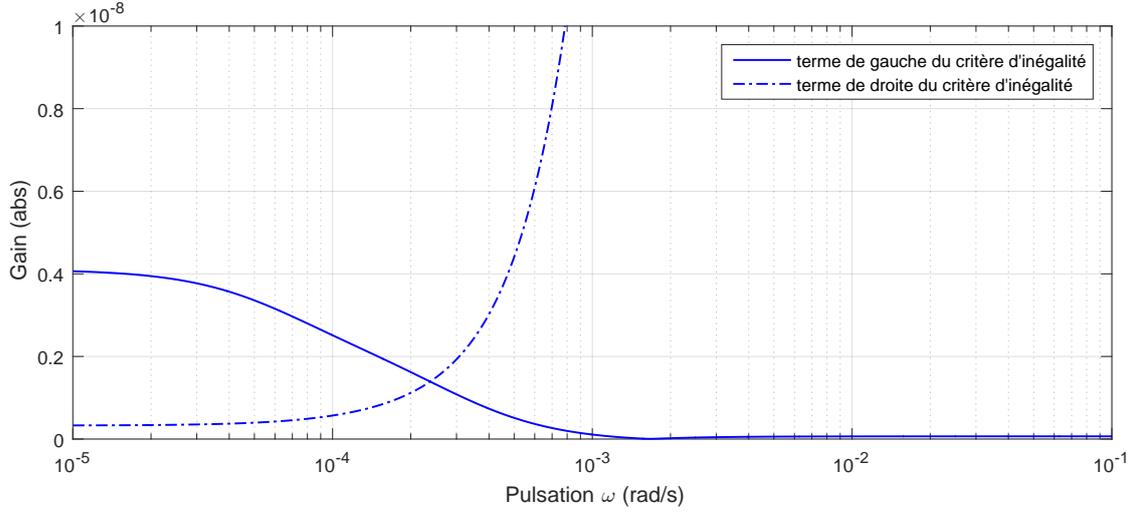


FIGURE 4.2 – Critère fréquentiel (4.39) en  $\mathbf{x} = 0.75\mathbf{L}$  pour  $Q_0 = 1000\text{m}^3/\text{s}$ ,  $H_{av} = 7.98\text{m}$ .

#### 4.3.4 Représentation sous forme de fonctions de transfert

A partir de la solution générale approximée proposée dans la section 4.2.5 exprimée comme une combinaison linéaire de deux fonctions linéairement indépendantes on obtient le Wronskian suivant :

$$\forall s \in \mathbb{C}, A(0, s)A(L, s)e^{j(\phi(0, s) - \phi(L, s))} \left(1 - e^{-2j(\phi(0, s) - \phi(L, s))}\right) \neq 0 \quad (4.44)$$

Par construction, la fonction  $A$  proposée dans la section 4.2.4 est non nulle. De plus, la fonction  $\phi$  proposée dans la section 4.2.3 vérifie :

$$\phi(L, s) = \phi(0, s) + \int_0^L \sqrt{r(x', s)} dx' \quad (4.45)$$

où la fonction  $\int_0^L \sqrt{r(x', s)} dx'$  est non nulle. Ainsi le Wronskian est vérifié, ce qui nous garantit que la solution approximée est bien posée.

Après application du changement de variables proposé dans la section 4.3.2 à la solution générale exprimée dans la section 4.2.5 avec les conditions limites en débit  $q(x = 0, s) = q_e(s)$  et  $q(x = L, s) = q_s(s)$ , on obtient :

$$C_1(s) = \frac{r^{1/4}(0, s)e^{-jR(0, L, s)}q_e(s) - r^{1/4}(L, s)e^{-S(0, L, s)}q_s(s)}{e^{-jR(0, L, s)} - e^{jR(0, L, s)}} \quad (4.46)$$

$$C_2(s) = \frac{-r^{1/4}(0, s)e^{jR(0, L, s)}q_e(s) + r^{1/4}(L, s)e^{-S(0, L, s)}q_s(s)}{e^{-jR(0, L, s)} - e^{jR(0, L, s)}} \quad (4.47)$$

On peut ainsi exprimer la solution WKB sous forme de fonctions de transfert. Pour les modèles

débits/débits, on obtient :

$$\boxed{\widehat{H}_e(x, s) = \frac{\sin(R(x, L, s))}{\sin(R(0, L, s))} \left( \frac{r(0, s)}{r(x, s)} \right)^{1/4} e^{S(0, x, s)}} \quad (4.48)$$

$$\boxed{\widehat{H}_s(x, s) = \frac{\sin(R(0, x, s))}{\sin(R(0, L, s))} \left( \frac{r(L, s)}{r(x, s)} \right)^{1/4} e^{-S(x, L, s)}} \quad (4.49)$$

avec  $r(x, s)$  exprimé en (4.30),  $S(0, x, s)$  exprimé en (4.28).

Par conservation de la masse, on dérive les modèle hauteur/débit :

$$\boxed{\widehat{G}_e(x, s) = -\frac{1}{B_0(x)s} \frac{\partial \widehat{H}_e(x, s)}{\partial x}} \quad (4.50)$$

$$\boxed{\widehat{G}_s(x, s) = -\frac{1}{B_0(x)s} \frac{\partial \widehat{H}_s(x, s)}{\partial x}} \quad (4.51)$$

où les dérivées de  $H_e, H_s$  s'expriment analytiquement :

$$\frac{\partial \widehat{H}_e(x, s)}{\partial x} = \widehat{H}p_{e1}(x, s) + \widehat{H}p_{e2}(x, s) + \widehat{H}p_{e3}(x, s) \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial \widehat{H}_s(x, s)}{\partial x} = \widehat{H}p_{s1}(x, s) + \widehat{H}p_{s2}(x, s) + \widehat{H}p_{s3}(x, s) \quad (4.53)$$

avec

$$\widehat{H}p_{e1}(x, s) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(R(x, L, s))}{\sin(R(0, L, s))} \left( \frac{r(0, s)}{r(x, s)} \right)^{1/4} M(x, s) e^{S(0, x, s)} \quad (4.54)$$

$$\widehat{H}p_{e2}(x, s) = -\frac{\cos(R(x, L, s))}{\sin(R(0, L, s))} \left( \frac{r(0, s)}{r(x, s)} \right)^{1/4} \sqrt{r(x, s)} e^{S(0, x, s)} \quad (4.55)$$

$$\widehat{H}p_{e3}(x, s) = -\frac{1}{4} \frac{\sin(R(x, L, s))}{\sin(R(0, L, s))} \frac{r^{1/4}(0, s)}{r^{5/4}(x, s)} \frac{\partial r(x, s)}{\partial x} e^{S(0, x, s)}. \quad (4.56)$$

et

$$\widehat{H}p_{s1}(x, s) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(R(0, x, s))}{\sin(R(0, L, s))} \left( \frac{r(L, s)}{r(x, s)} \right)^{1/4} M(x, s) e^{-S(x, L, s)} \quad (4.57)$$

$$\widehat{H}p_{s2}(x, s) = \frac{\cos(R(0, x, s))}{\sin(R(0, L, s))} \left( \frac{r(L, s)}{r(x, s)} \right)^{1/4} \sqrt{r(x, s)} e^{-S(x, L, s)} \quad (4.58)$$

$$\widehat{H}p_{s3}(x, s) = -\frac{1}{4} \frac{\sin(R(0, x, s))}{\sin(R(0, L, s))} \frac{r^{1/4}(L, s)}{r^{5/4}(x, s)} \frac{\partial r(x, s)}{\partial x} e^{-S(x, L, s)} \quad (4.59)$$

Par comparaison avec la solution numérique exacte, on illustre la précision de l'approximation WKB pour deux configurations autour de régime non-uniforme dans les figures suivantes.

La première configuration avec  $Q_0 = 1000m^3/s$  et  $H_{av} = 7.98m$  correspond à une configuration nominale type hydroélectrique telle que présentée dans le premier chapitre 1 de cette thèse. Les diagrammes de Bode de  $G_e$  (respectivement  $G_s$ ) sont donnés en  $x = 0.75L$  en figure 4.3 (respectivement 4.4).

La deuxième configuration est plus proche d'une configuration type irrigation avec un débit plus faible de  $Q_0 = 500m^3/s$  et une hauteur d'eau à l'aval plus faible de  $H_{av} = 3.98m$ . La ligne d'eau correspondante est donnée en figure 4.5. En figure 4.6, est illustré le critère d'inégalité correspondant à cette configuration. On rappelle que celui-ci doit être validé en tout  $x$  mais pour des raisons de lisibilité, on donne seulement celui au  $x$  où la sortie est considérée. Les diagrammes de Bode correspondant de  $G_e$  (respectivement  $G_s$ ) sont donnés en  $x = 0.75L$  en figure 4.7 (respectivement 4.8).

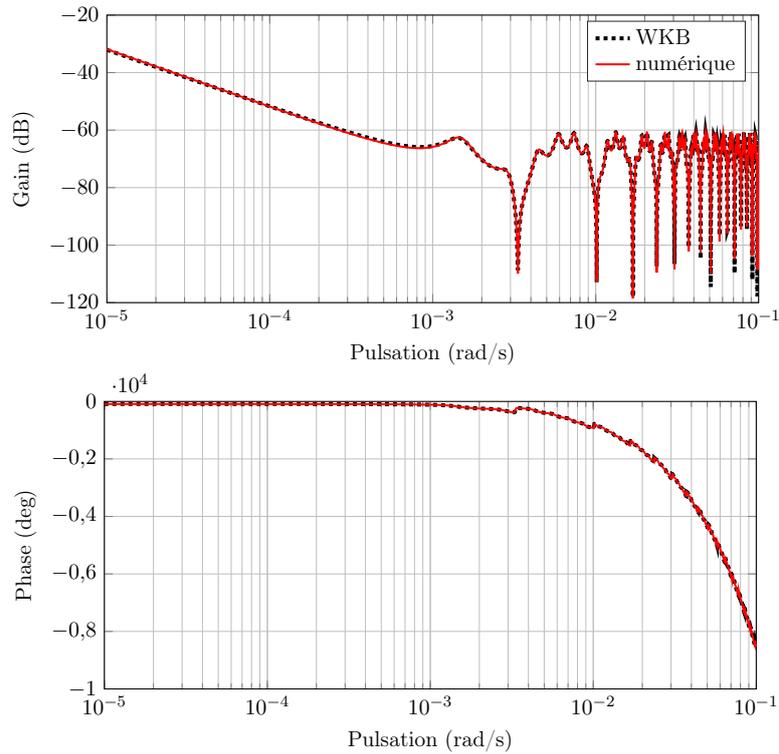


FIGURE 4.3 – Diagramme de Bode de  $G_e$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 1000m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$ .

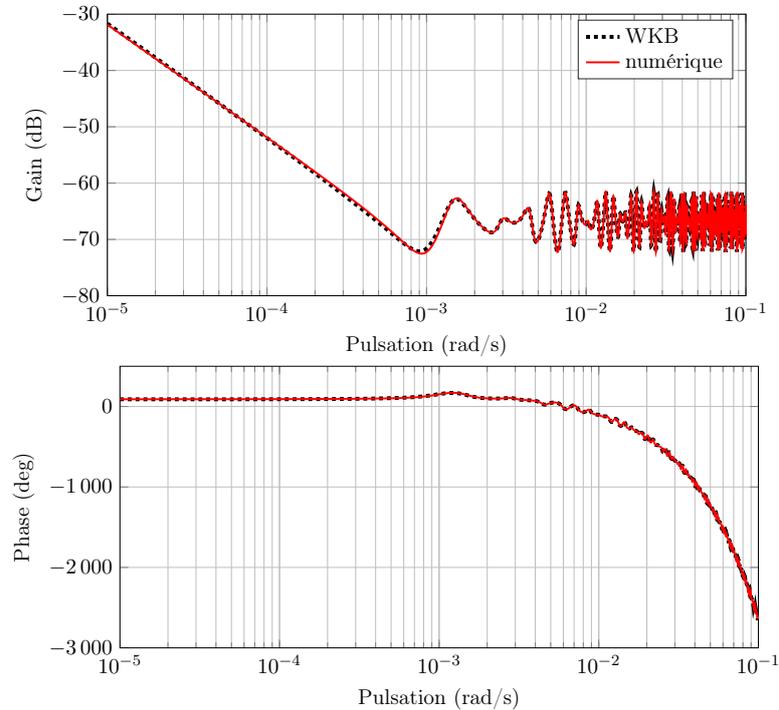


FIGURE 4.4 – Diagramme de Bode de  $G_s$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 1000m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$ .

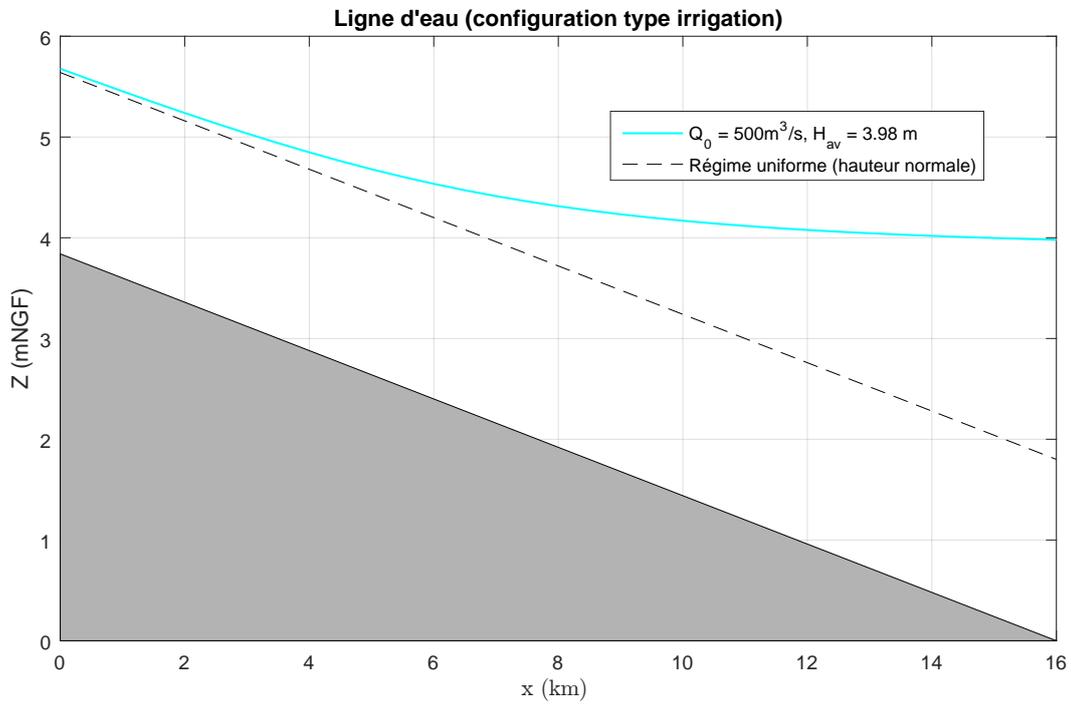


FIGURE 4.5 – Ligne d'eau pour  $Q_0 = 500 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $H_{av} = 3.98 \text{ m}$

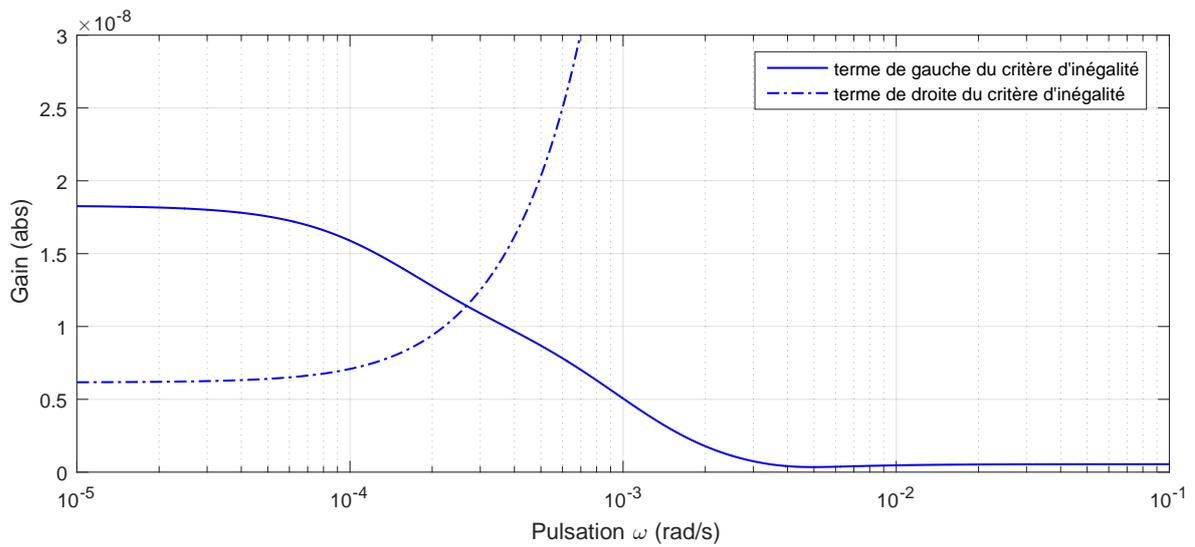


FIGURE 4.6 – Critère fréquentiel (4.39) en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $H_{av} = 3.98 \text{ m}$ .

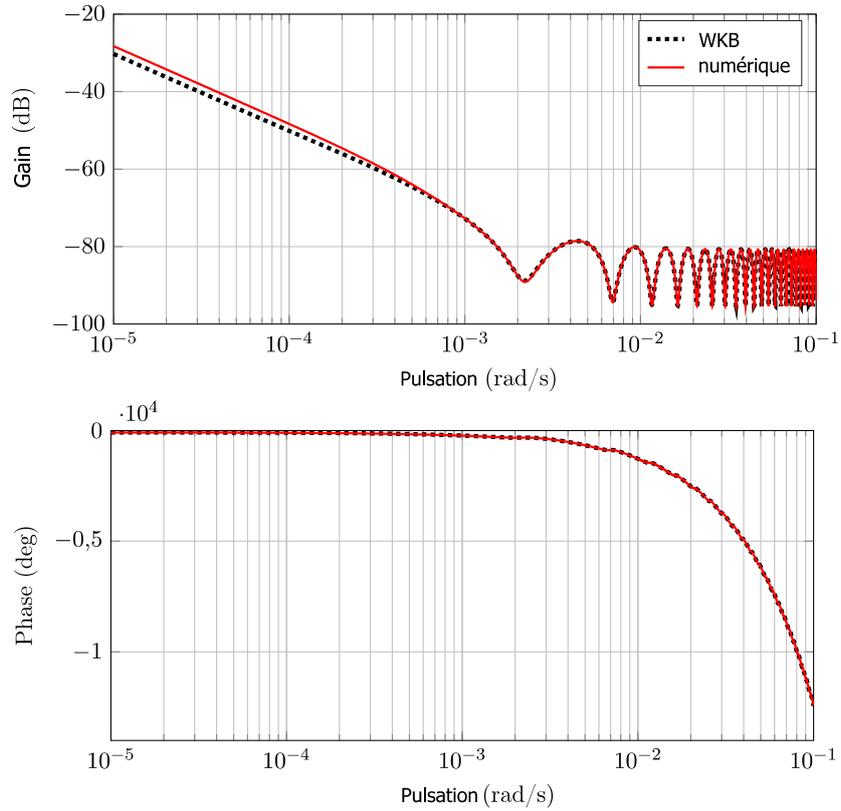


FIGURE 4.7 – Diagramme de Bode de  $G_e$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500\text{m}^3/\text{s}$ ,  $H_{av} = 3.98\text{m}$ .

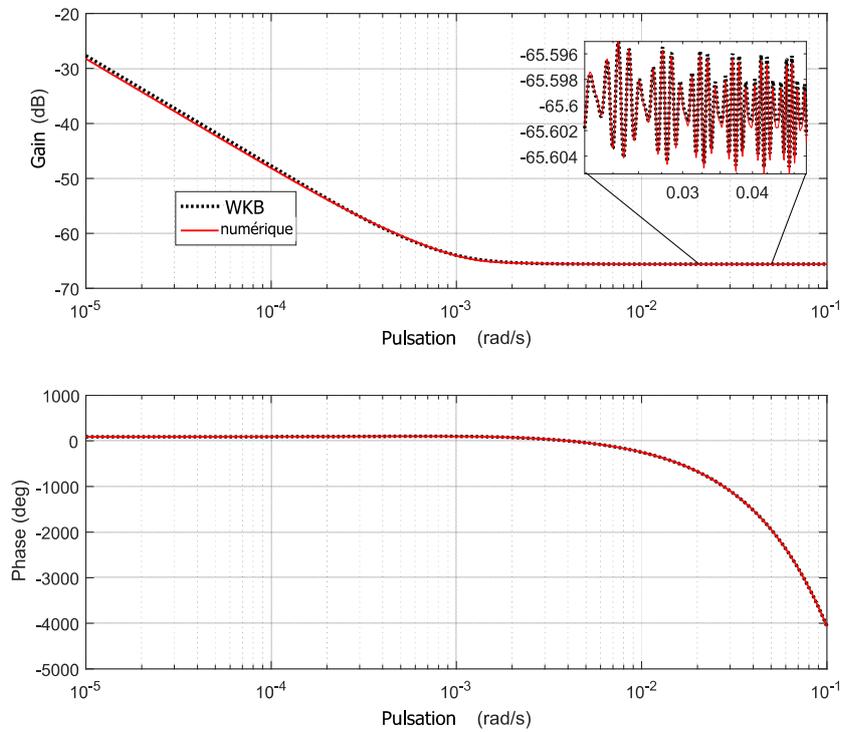


FIGURE 4.8 – Diagramme de Bode de  $G_s$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500\text{m}^3/\text{s}$ ,  $H_{av} = 3.98\text{m}$ .

## 4.4 Fonctions de transfert irrationnelles WKB

### 4.4.1 Exactitude des expressions en régime uniforme

On rappelle les fonctions de transfert WKB obtenues en régime non-uniforme :

$$\widehat{H}_e(x, s) = \frac{\sin(R(x, L, s))}{\sin(R(0, L, s))} \left( \frac{r(0, s)}{r(x, s)} \right)^{1/4} e^{S(0, x, s)} \quad (4.60)$$

$$\widehat{H}_s(x, s) = \frac{\sin(R(0, x, s))}{\sin(R(0, L, s))} \left( \frac{r(L, s)}{r(x, s)} \right)^{1/4} e^{-S(x, L, s)} \quad (4.61)$$

On rappelle les fonctions de transfert obtenues par résolution analytique en régime uniforme :

$$H_{eU}(x, s) = \frac{\sinh(\lambda_d(L - x))}{\sinh(\lambda_d L)} e^{\lambda_c x} \quad (4.62)$$

$$H_{sU}(x, s) = \frac{\sinh(\lambda_d x)}{\sinh(\lambda_d L)} e^{-\lambda_c(L-x)} \quad (4.63)$$

avec

$$\lambda_c = \frac{V_0 s + \varphi_0}{\delta_0} \quad (4.64)$$

et

$$\lambda_d = \frac{\sqrt{c_0^2 s^2 + \Phi_0 s + \varphi_0^2}}{\delta_0}. \quad (4.65)$$

En régime uniforme,  $r(x, s)$  est constant en  $x$ . Ainsi les quotients  $\frac{r(0, s)}{r(x, s)}$  et  $\frac{r(L, s)}{r(x, s)}$  sont unitaires. Montrons qu'en régime uniforme  $S(x_1, x_2, s) = \frac{\lambda_c}{x_2 - x_1}$ . On rappelle :

$$S(x_1, x_2, s) = -\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} M(x, s) dx. \quad (4.66)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{V_0(x)}{\delta_0(x)} dx s + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho_0(x)}{\delta_0(x)} dx. \quad (4.67)$$

En régime uniforme,  $V_0(x)$ ,  $\delta_0(x)$  et  $\rho_0(x)$  sont constants en  $x$ , et  $\rho_0 = \varphi_0$  ainsi :

$$\begin{aligned} S_U(x_1, x_2, s) &= \frac{V_0}{\delta_0} (x_2 - x_1) s + \frac{\varphi_0}{\delta_0} (x_2 - x_1) \\ &= \frac{\lambda_c}{x_2 - x_1}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Montrons qu'en régime uniforme  $R(x_1, x_2, s) = j \frac{\lambda_d}{x_2 - x_1}$ . On rappelle :

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, s) &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r(x, s)} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{-r_2(x) s^2 - r_1(x) s - r_0(x)} dx \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$= j \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r_2(x) s^2 + r_1(x) s + r_0(x)} dx \quad (4.70)$$

En régime uniforme  $(r_2(x), r_1(x), r_0(x))$  se simplifient en  $(r_{2U}, r_{1U}, r_{0U})$  coefficients constants en  $x$  :

$$r_{2U} = \frac{\delta_0 + V_0^2}{\delta_0^2} \quad (4.71)$$

$$r_{1U} = \frac{\delta_0 \beta_0 + V_0 \rho_0}{\delta_0^2} \quad (4.72)$$

$$r_{0U} = \frac{1}{4} \left( \frac{\rho_0}{\delta_0} \right)^2 \quad (4.73)$$

Ainsi,  $R(x_1, x_2, s)$  se simplifie en  $R_U(x_1, x_2, s)$  en régime uniforme :

$$R_U(x_1, x_2, s) = j \frac{\sqrt{c_0^2 s^2 + \Phi_0 s + \varphi_0^2}}{\delta_0} (x_2 - x_1) \quad (4.74)$$

$$= j \frac{\lambda_d}{x_2 - x_1}. \quad (4.75)$$

L'approximation WKB préserve la solution exacte connue en régime uniforme.

#### 4.4.2 Analyse du comportement basses fréquences

En basses fréquences, les modèles  $\widehat{H}_e, \widehat{H}_s$  sont des gains purs retardés :

$$\widehat{H}_e(s=0) = \left( \frac{r_0(0)}{r_0(x)} \right)^{1/4} \frac{\sinh(\int_x^L \sqrt{r_0(x)} dx)}{\sinh(\int_0^L \sqrt{r_0(x)} dx)} e^{S_0(0,x)} \quad (4.76)$$

$$\widehat{H}_s(s=0) = \left( \frac{r_0(L)}{r_0(x)} \right)^{1/4} \frac{\sinh(\int_0^x \sqrt{r_0(x)} dx)}{\sinh(\int_0^L \sqrt{r_0(x)} dx)} e^{-S_0(x,L)}. \quad (4.77)$$

Les expressions obtenues sont légèrement différentes des gains exacts dont on rappelle l'expressions (voir [Dal+17]) :

$$K_e(x) = \frac{F(L) - F(x)}{F(L)}, \quad \text{and} \quad (4.78)$$

$$K_s(x) = \frac{F(x)}{F(L)}. \quad (4.79)$$

avec

$$F(x) = \int_0^x \exp \left[ \int_0^\kappa M_0(\xi) d\xi \right] d\kappa. \quad (4.80)$$

Comme expliqué en section 4.3.3, l'approximation WKB introduit un biais en basses fréquences. On retrouve aussi la présence d'un biais sur le calcul de la surface apparente :

$$A_{e_{wkb}}(x) = -B_0(x) \frac{1}{\left( \frac{\partial \widehat{H}_e(x, s=0)}{\partial x} \right)}, \quad \text{et} \quad (4.81)$$

$$A_{s_{wkb}}(x) = -B_0(x) \frac{1}{\left( \frac{\partial \widehat{H}_s(x, s=0)}{\partial x} \right)}. \quad (4.82)$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ae_{wkb}(x)} = \frac{\exp[S_0(0, x)]}{B_0(x)} & \left( -\frac{1}{2}M_0(x) \frac{\sinh(\int_x^L \sqrt{r_0(t)} dt)}{\sinh(\int_0^L \sqrt{r_0(t)} dt)} \left(\frac{r_0(0)}{r_0(x)}\right)^{1/4} \right. \\ & + \sqrt{r_0(x)} \frac{\cosh(\int_x^L \sqrt{r_0(x)} dx)}{\sinh(\int_0^L \sqrt{r_0(t)} dt)} \left(\frac{r_0(0)}{r_0(x)}\right)^{1/4} \\ & \left. + \frac{1}{4} \frac{\sinh(\int_x^L \sqrt{r_0(t)} dt)}{\sinh(\int_0^L \sqrt{r_0(x)} dx)} \frac{r_0(0)^{1/4}}{r_0(x)^{5/4}} \frac{dr_0(x)}{dx} \right) \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{As_{wkb}(x)} = \frac{\exp[-S_0(x, L)]}{B_0(x)} & \left( -\frac{1}{2}M_0(x) \frac{\sinh(\int_0^x \sqrt{r_0(t)} dt)}{\sinh(\int_0^L \sqrt{r_0(t)} dt)} \left(\frac{r_0(L)}{r_0(x)}\right)^{1/4} \right. \\ & - \sqrt{r_0(x)} \frac{\cosh(\int_0^x \sqrt{r_0(t)} dt)}{\sinh(\int_0^L \sqrt{r_0(t)} dt)} \left(\frac{r_0(L)}{r_0(x)}\right)^{1/4} \\ & \left. + \frac{1}{4} \frac{\sinh(\int_0^x \sqrt{r_0(t)} dt)}{\sinh(\int_0^L \sqrt{r_0(t)} dt)} \frac{r_0(L)^{1/4}}{r_0(x)^{5/4}} \frac{dr_0(x)}{dx} \right) \end{aligned} \quad (4.84)$$

On remarque en particulier que  $|Ae_{wkb}(x)| \neq |As_{wkb}(x)|$ . Or la surface apparente exacte a pour expression (voir [Dal+17]) :

$$A_e(x) = B_0(x) \frac{\int_0^L \exp[\int_0^\kappa M_0(\xi) d\xi] d\kappa}{\exp[\int_0^x M_0(k) dk]}, \quad (4.85)$$

$$A_s(x) = -A_e(x). \quad (4.86)$$

Ainsi pour le calcul de modèles d'ordre réduit, les biais basses fréquences introduits par la méthode WKB peuvent être annulés par la connaissance du comportement asymptotique exact en basses fréquences présenté en section 3.3. En figures 4.9 et 4.10, les gains basses fréquences et surfaces équivalentes des modèles WKB sont comparés aux valeurs exactes asymptotiques basses fréquences obtenues dans la section 3.3.

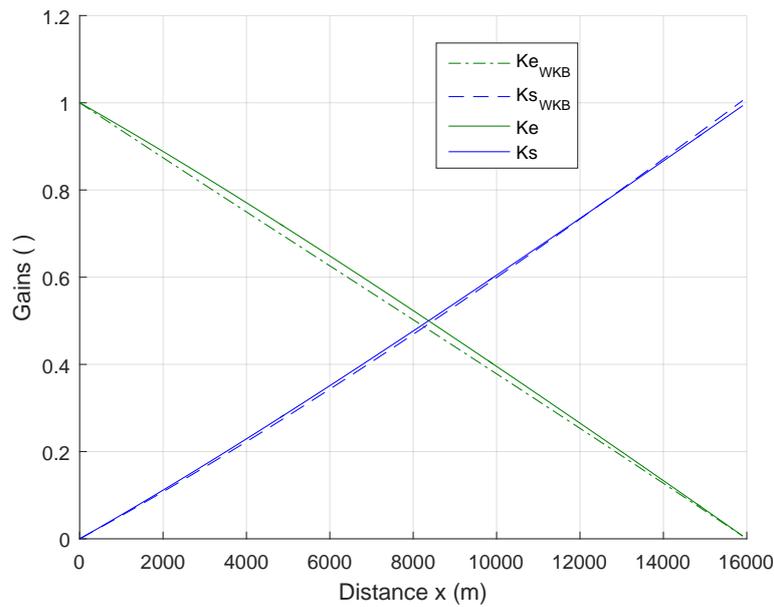


FIGURE 4.9 – Gains basses fréquences des modèles débits/débits

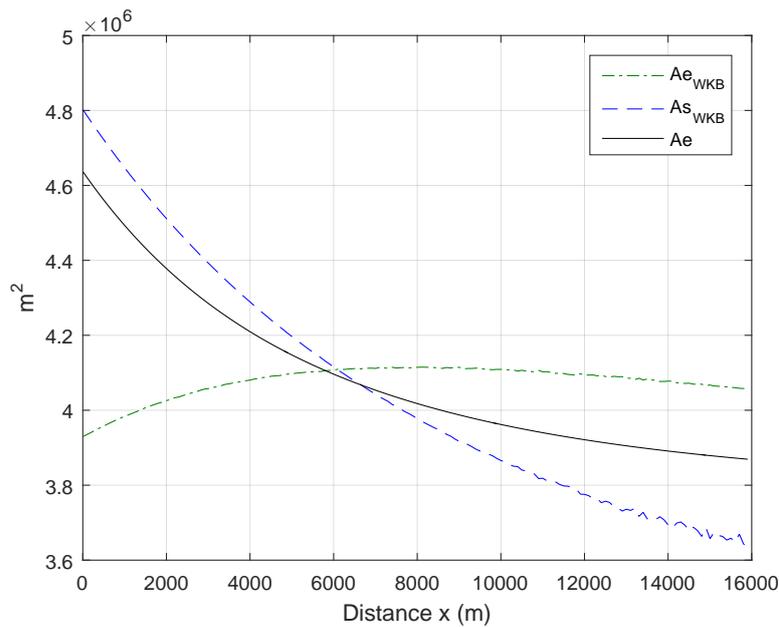


FIGURE 4.10 – Surface équivalente des modèles hauteurs/débits

#### 4.4.3 Analyse du comportement hautes fréquences

L'étude analytique des fonctions de transfert WKB permet d'améliorer notre connaissance du comportement dynamique autour d'un régime non-uniforme. De plus, certaines propriétés peuvent être utilisées pour proposer des modèles d'ordre réduit (voir section 4.5). Nous nous intéressons au contenu suffisamment hautes fréquences des fonctions de transfert WKB afin

de s'assurer que le critère d'approximation est vérifié. Ainsi, dans les sous-sections suivantes, on s'intéresse :

- aux gains moyens hautes fréquences des fonctions de transferts hauteurs/débits qui nous permettent d'estimer la valeur des zéros des modèles IDZ
- à l'estimation des pôles, racines du dénominateur en particulier les modes résonants
- à l'estimation des zéros, racines du numérateur en particulier les modes anti-résonants.

Par la suite, les modes dominants seront utilisés pour la proposition de modèle d'ordre réduit en section 4.5.

### Gains moyens hautes fréquences

On se propose ici d'estimer le gain moyen hautes fréquences des fonctions de transfert hauteurs/débits à partir du comportement asymptotique hautes fréquences des fonctions de transfert WKB. L'objectif est de calculer le zéro des modèles IDZ en prenant en compte le comportement hautes fréquences et non par dérivation du modèle débits/débits basses fréquences comme proposé dans le chapitre précédent en section 3.3. Dans un second temps, on estime aussi le gain moyen hautes fréquences des fonctions de transfert débits/débits. En pratique, ce gain étant proche de celui basses fréquences, il ne sera pas utilisé pour le calcul d'un modèle débits/débits d'ordre réduit.

Les fonctions de transfert WKB sont composées de fonctions trigonométriques complexes. Pour analyser leur comportement hautes fréquences, on décompose  $R(x_1, x_2, s)$  donné en (4.23) en partie réelle et imaginaire.

$$R(x_1, x_2, s) = \int_{x_1}^{x_2} j \sqrt{r_2(x)s^2 + r_1(x)s + r_0(x)} dx \quad (4.87)$$

peut s'écrire avec  $s = j\omega$

$$R(x_1, x_2, s) = a(x_1, x_2, \omega) + jb(x_1, x_2, \omega) \quad (4.88)$$

avec  $a$  et  $b$  réels tels que

$$a(x_1, x_2, \omega) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\sqrt{(r_0(x) - r_2(x)\omega^2)^2 + (r_1(x))^2} - r_0(x) + r_2(x)\omega^2} dx \quad (4.89)$$

$$b(x_1, x_2, \omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\sqrt{(r_0(x) - r_2(x)\omega^2)^2 + (r_1(x))^2} + r_0(x) - r_2(x)\omega^2} dx. \quad (4.90)$$

Ensuite, les gains de  $G_e$  et  $G_s$  peuvent être exprimés par utilisation des relations trigonométriques suivantes :

$$|\sin(a + ib)|^2 = \sin^2(a) + \sinh^2(b) \quad (4.91)$$

$$|\cos(a + ib)|^2 = \cosh^2(b) - \sin^2(a). \quad (4.92)$$

Le terme  $\sin^2(a)$  est borné dans l'intervalle  $[0, 1]$ . D'autre part,  $\sinh$  et  $\cosh$  sont des fonctions croissantes sur  $\mathbb{R}^+$ . Comme  $r_2$ ,  $r_1$  et  $r_0$  sont positifs,  $b$  est positif et donc

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sinh(b(x_1, x_2, \omega)) = \sinh\left(\lim_{\omega \rightarrow \infty} b(x_1, x_2, \omega)\right). \quad (4.93)$$

On note  $b_\infty(x_1, x_2)$  la limite suivante

$$b_\infty(x_1, x_2) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} b(x_1, x_2, \omega) = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{r_1(x)}{\sqrt{r_2(x)}} dx > 0. \quad (4.94)$$

Tout d'abord, on rappelle que les fonctions de transfert WKB  $\widehat{G}_e$  et  $\widehat{G}_s$  sont données par la somme de trois termes. Asymptotiquement en hautes fréquences, le troisième (4.56) pour  $\widehat{G}_e$  (respectivement (4.59) pour  $\widehat{G}_s$ ) est négligeable. Après analyse asymptotique hautes fréquences des termes rationnels en facteur, on obtient les expressions de réponses fréquentielles suivantes :

$$g\widehat{G}_{e\infty} = -\frac{\exp[S_0(0, x)]}{B_0(x)} \left(\frac{r_2(0)}{r_2(x)}\right)^{1/4} \frac{-0.5M_1(x) \sin(R(x, L, s)) + j\sqrt{r_2(x)} \cos(R(x, L, s))}{\sin(R(0, L, s))} \quad (4.95)$$

$$g\widehat{G}_{s\infty} = \frac{\exp[-S_0(x, L)]}{B_0(x)} \left(\frac{r_2(L)}{r_2(x)}\right)^{1/4} \frac{0.5M_1(x) \sin(R(0, x, s)) + j\sqrt{r_2(x)} \cos(R(0, x, s))}{\sin(R(0, L, s))}. \quad (4.96)$$

Pour calculer le gain moyen en hautes fréquences, on estime l'enveloppe des réponses fréquentielles (4.95) et (4.96). Posons :

$$Ng\widehat{G}_{e\infty} = -0.5M_1(x) \sin(R(x, L, s)) + j\sqrt{r_2(x)} \cos(R(x, L, s)) \quad (4.97)$$

$$Ng\widehat{G}_{s\infty} = 0.5M_1(x) \sin(R(0, x, s)) + j\sqrt{r_2(x)} \cos(R(0, x, s)) \quad (4.98)$$

$$Dg\widehat{G}_\infty = \sin(R(0, L, s)). \quad (4.99)$$

En utilisant la décomposition de la fonction  $R$  selon (4.88) et les résultats (4.93) et (4.94), on calcule les limites en hautes fréquences des trois termes (4.97), (4.98) et (4.99). Ces limites sont données par (4.100) pour le numérateur de  $\widehat{G}_e$  (4.97), par (4.101) pour le numérateur de  $\widehat{G}_s$  (4.98), et par (4.102) pour le dénominateur commun de  $\widehat{G}_e$  et  $\widehat{G}_s$  (4.99) selon :

$$\begin{aligned} |Ng\widehat{G}_{e\infty}(x)| &= \{\cos^2(a(x, L))[\ \\ &\quad \left(-0.5M_1(x) \sinh(b_\infty(x, L)) + \sqrt{r_2(x)} \cosh(b_\infty(x, L))\right)^2 - \\ &\quad \left(-0.5M_1(x) \cosh(b_\infty(x, L)) + \sqrt{r_2(x)} \sinh(b_\infty(x, L))\right)^2] + \\ &\quad \left(-0.5M_1(x) \cosh(b_\infty(x, L)) + \sqrt{r_2(x)} \sinh(b_\infty(x, L))\right)^2\}^{1/2} \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} |Ng\widehat{G}_{s\infty}(x)| &= \{\cos^2(a(0, x))[\ \\ &\quad \left(0.5M_1(x) \sinh(b_\infty(0, x)) + \sqrt{r_2(x)} \cosh(b_\infty(0, x))\right)^2 - \\ &\quad \left(0.5M_1(x) \cosh(b_\infty(0, x)) + \sqrt{r_2(x)} \sinh(b_\infty(0, x))\right)^2] + \\ &\quad \left(0.5M_1(x) \cosh(b_\infty(0, x)) + \sqrt{r_2(x)} \sinh(b_\infty(0, x))\right)^2\}^{1/2} \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$|Dg\widehat{G}_\infty| = \sqrt{\sin^2(a(0, L, \omega)) + \sinh^2(b_\infty(0, L))}. \quad (4.102)$$

On sait qu'en régime fluvial,

$$\forall x \in [0, L], \quad \sqrt{r_2(x)} > \frac{M_1(x)}{2} > 0. \quad (4.103)$$

D'autre part, on sait aussi que

$$\forall y > 0, \quad \cosh(y) > \sinh(y). \quad (4.104)$$

A priori, on ne sait pas quel extremum de  $|Ng\widehat{G}_{e_\infty}(x)|$  et  $|Ng\widehat{G}_{s_\infty}(x)|$  est minimum ou maximum. Cela dépend de  $x$  et de la configuration hydraulique initiale. On note  $B_1, B_2$  ces extrema obtenus par encadrement des fonctions trigonométriques à argument réel :

$$B_1|Ng\widehat{G}_{e_\infty}(x)| = | -0.5M_1(x) \cosh(b_\infty(x, L)) + \sqrt{r_2(x)} \sinh(b_\infty(x, L)) | \quad (4.105)$$

$$B_2|Ng\widehat{G}_{e_\infty}(x)| = | -0.5M_1(x) \sinh(b_\infty(x, L)) + \sqrt{r_2(x)} \cosh(b_\infty(x, L)) | \quad (4.106)$$

$$B_1|Ng\widehat{G}_{s_\infty}(x)| = 0.5M_1(x) \cosh(b_\infty(0, x)) + \sqrt{r_2(x)} \sinh(b_\infty(0, x)) \quad (4.107)$$

$$B_2|Ng\widehat{G}_{s_\infty}(x)| = 0.5M_1(x) \sinh(b_\infty(0, x)) + \sqrt{r_2(x)} \cosh(b_\infty(0, x)) \quad (4.108)$$

$$\min |Dg\widehat{G}_\infty| = \sinh(b_\infty(0, L)) \quad (4.109)$$

$$\max |Dg\widehat{G}_\infty| = \cosh(b_\infty(0, L)) \quad (4.110)$$

A partir de ces extrema, la borne minimale de  $|Ng\widehat{G}_{e_\infty}(x)|$  (respectivement  $|Ng\widehat{G}_{s_\infty}(x)|$ ) est ainsi donnée par (4.111) (respectivement (4.113)) et la borne maximale par (4.112) (respectivement (4.114)) :

$$\min |g\widehat{G}_{e_\infty}(x)| = \frac{\exp[S_0(0, x)]}{B_0(x)} \left( \frac{r_2(0)}{r_2(x)} \right)^{1/4} \min \left( \frac{B_1|Ng\widehat{G}_{e_\infty}(x)|}{\max |Dg\widehat{G}_\infty|}, \frac{B_2|Ng\widehat{G}_{e_\infty}(x)|}{\max |Dg\widehat{G}_\infty|} \right), \quad (4.111)$$

$$\max |g\widehat{G}_{e_\infty}(x)| = \frac{\exp[S_0(0, x)]}{B_0(x)} \left( \frac{r_2(0)}{r_2(x)} \right)^{1/4} \max \left( \frac{B_1|Ng\widehat{G}_{e_\infty}(x)|}{\min |Dg\widehat{G}_\infty|}, \frac{B_2|Ng\widehat{G}_{e_\infty}(x)|}{\min |Dg\widehat{G}_\infty|} \right), \quad (4.112)$$

$$\min |g\widehat{G}_{s_\infty}(x)| = \frac{\exp[-S_0(x, L)]}{B_0(x)} \left( \frac{r_2(L)}{r_2(x)} \right)^{1/4} \min \left( \frac{B_1|Ng\widehat{G}_{s_\infty}(x)|}{\max |Dg\widehat{G}_\infty|}, \frac{B_2|Ng\widehat{G}_{s_\infty}(x)|}{\max |Dg\widehat{G}_\infty|} \right), \quad (4.113)$$

$$\max |g\widehat{G}_{s_\infty}(x)| = \frac{\exp[-S_0(x, L)]}{B_0(x)} \left( \frac{r_2(L)}{r_2(x)} \right)^{1/4} \max \left( \frac{B_1|Ng\widehat{G}_{s_\infty}(x)|}{\min |Dg\widehat{G}_\infty|}, \frac{B_2|Ng\widehat{G}_{s_\infty}(x)|}{\min |Dg\widehat{G}_\infty|} \right). \quad (4.114)$$

Ainsi les zéros des modèles IDZ sont :

$$T_e(x) = 0.5A_e(x) \left( \min |g\widehat{G}_{e_\infty}(x)| + \max |g\widehat{G}_{e_\infty}(x)| \right) \quad (4.115)$$

$$T_s(x) = 0.5A_e(x) \left( \min |g\widehat{G}_{s_\infty}(x)| + \max |g\widehat{G}_{s_\infty}(x)| \right) \quad (4.116)$$

Comme nous nous intéressons à l'amplification associée à la réponse fréquentielle des modèles hauteurs/débits, les zéros (4.115) et (4.116) peuvent être calculés avec une échelle en dB. Sur la figure 4.11, on compare les constantes de temps de ces zéros, indicées *WKB*, à celles obtenues par considérations basses fréquences, indicées *BFr*.

On remarque que  $\min |g\widehat{G}_{e\infty}(x)|$  peut être nul pour un  $x \in [0, L]$  intermédiaire. En effet,  $|Ng\widehat{G}_{e\infty}(x)|$  peut être nul. Cela correspond à un amortissement complet pour certaines pulsations. On parle de noeud hydraulique, ce point correspond à une interférence négative de la propagation des ondes, l'amplitude des oscillations est alors minimale en ce point. Le zéro  $T_e(x)$  est maximal en  $x = 0$ , décroissant jusqu'au point d'amortissement complet et croissant dans la partie aval jusqu'en  $x = L$  comme on peut le voir sur la figure 4.11. Pour  $T_e$ , le calcul par considération basses fréquences conduit à une surestimation sur la majeure partie du canal. Pour  $T_s$ , le calcul par considération basses fréquences conduit à une sous-estimation sur l'ensemble du canal.

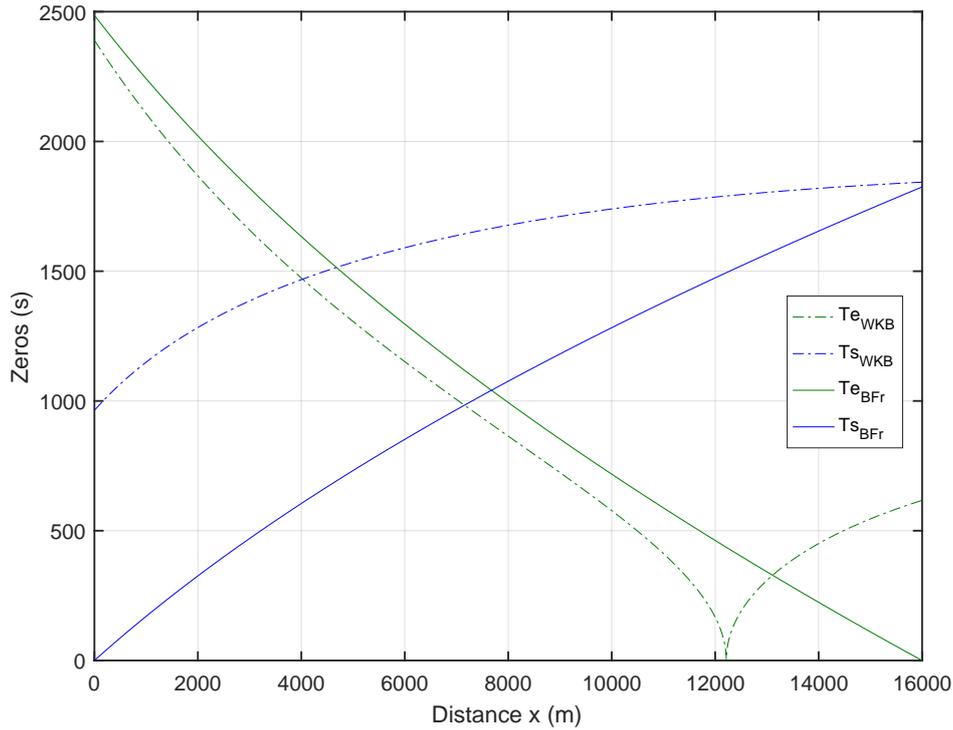


FIGURE 4.11 – Valeurs des zéros des modèles IDZ pour  $Q_0 = 1000m^3/s$  et  $H_{av} = 7.98m$ .

De façon similaire, on obtient les gains hautes fréquences des modèles débits/débits  $\widehat{H}_e$  (4.48) et  $\widehat{H}_s$  (4.49) en moyennant les bornes minimale et maximale de l'enveloppe de leur réponse fréquentielle :

$$g\widehat{H}_{e\infty} = 0.5 \exp [S_0(0, x)] \left( \frac{r_2(0)}{r_2(x)} \right)^{1/4} \left( \frac{\sinh(b_\infty(x, L))}{\cosh(b_\infty(0, L))} + \frac{\cosh(b_\infty(x, L))}{\sinh(b_\infty(0, L))} \right) \quad (4.117)$$

$$g\widehat{H}_{s\infty} = 0.5 \exp [-S_0(x, L)] \left( \frac{r_2(L)}{r_2(x)} \right)^{1/4} \left( \frac{\sinh(b_\infty(0, x))}{\cosh(b_\infty(0, L))} + \frac{\cosh(b_\infty(0, x))}{\sinh(b_\infty(0, L))} \right). \quad (4.118)$$

## Pôles

Les pôles oscillants  $s_p$  des fonctions de transfert  $\widehat{H}_e$ ,  $\widehat{H}_s$ ,  $\widehat{G}_e$  et  $\widehat{G}_s$  sont infinis et identiques. Ces pôles résonants étant indépendants de  $x$ , ils peuvent être considérés comme des propriétés

du canal pour une configuration hydraulique donnée. Ils sont solutions de :

$$\sin(R(0, L, s_p)) = 0. \quad (4.119)$$

Ils sont donc définis par :

$$R(0, L, s_p) = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \quad (4.120)$$

La fonction  $R$  définie en (4.23) est l'intégrale en  $x$  de la racine d'un polynôme en  $s$  d'ordre 2. Afin d'obtenir une approximation analytique de leur position, on simplifie  $R$  comme suit :

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, s) &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{-r_2(x)s^2 - r_1(x)s - r_0(x)} dx \\ &\approx j (R_1(x_1, x_2)s + R_0(x_1, x_2)) \end{aligned} \quad (4.121)$$

avec

$$R_1(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r_2(x)} dx \quad (4.122)$$

$$R_0(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r_0(x)} dx. \quad (4.123)$$

Cette approximation est basée sur le choix d'un comportement asymptotique exact en basses et hautes fréquences. L'équation (4.124) devient alors :

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, s) &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{-r_2(x)s^2 - r_1(x)s - r_0(x)} dx \\ &\approx j (R_1(x_1, x_2)s + R_0(x_1, x_2)) \end{aligned} \quad (4.124)$$

L'équation (4.120) devient alors :

$$R_1(0, L)s_p + R_0(0, L) = \pm j p \pi \text{ avec } p \in \mathbb{N}. \quad (4.125)$$

On obtient les pôles suivants :

$$s_p = -\frac{R_0(0, L)}{R_1(0, L)} + j \frac{\pi p}{R_1(0, L)} \text{ avec } p \in \mathbb{N} \quad (4.126)$$

et leurs complexes conjugués  $s_p^*$ . Chaque paire de pôles complexes conjugués peut être interprétée comme un mode résonant de pulsation propre  $\omega_p$ , de coefficient d'amortissement  $\zeta_p$  dont l'expression sous forme factorisée d'un second ordre est

$$(s - s_p)(s - s_p^*) = s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2. \quad (4.127)$$

Par identification, on obtient

$$\omega_p^2 = s_p s_p^* \Rightarrow \omega_p = \frac{\sqrt{(p\pi)^2 + R_0(0, L)^2}}{R_1(0, L)} \quad (4.128)$$

$$2\zeta_p \omega_p = -(s_p + s_p^*) \Rightarrow \zeta_p = \frac{R_0(0, L)}{\sqrt{(p\pi)^2 + R_0(0, L)^2}}. \quad (4.129)$$

D'autre part, les quatre fonctions de transfert  $(H_e, H_s, G_e, G_s)$  présentent une paire de pôles réels  $s_{pr}$  solutions de

$$(r(x, s_{pr}))^{1/4} = 0, \quad (4.130)$$

soit

$$s_{pr} = \frac{-r_1(x) \pm \sqrt{r_1(x)^2 - 4r_2(x)r_0(x)}}{2r_2(x)}. \quad (4.131)$$

De plus,  $\widehat{G}_e$  et  $\widehat{G}_s$  contiennent un pôle à l'origine correspondant à l'effet intégrateur des variations de débits entrant et sortant sur la hauteur d'eau.

### Zéros

Les zéros anti-résonants dépendent de la position  $x$  et de la sortie de modèle considérée, ils sont différents pour  $\widehat{H}_e$ ,  $\widehat{H}_s$ ,  $\widehat{G}_e$  et  $\widehat{G}_s$ . Ils ont solutions (4.132) pour  $\widehat{H}_e$  et (4.133) pour  $\widehat{H}_s$  :

$$\sin(R(x, L, s_z \widehat{H}_e)) = 0 \quad (4.132)$$

$$\sin(R(0, x, s_z \widehat{H}_s)) = 0. \quad (4.133)$$

On applique la même approximation pour  $R$  donnée en (4.124) et on obtient respectivement les zéros suivants :

$$s_z \widehat{H}_e = -\frac{R_0(x, L)}{R_1(x, L)} + j \frac{\pi p}{R_1(x, L)} \text{ avec } p \in \mathbb{N} \quad (4.134)$$

$$s_z \widehat{H}_s = -\frac{R_0(0, x)}{R_1(0, x)} + j \frac{\pi p}{R_1(0, x)} \text{ avec } p \in \mathbb{N} \quad (4.135)$$

et leur complexes conjugués. Chaque paire de zéros complexes conjugués peut être interprétée comme un mode anti-résonant. Par analogie avec les modes résonants, on calcule leur pulsation propre et coefficient d'amortissement :

$$\omega_z \widehat{H}_e = \frac{\sqrt{(p\pi)^2 + R_0(x, L)^2}}{R_1(x, L)} \quad (4.136)$$

$$\xi_z \widehat{H}_e = \frac{R_0(x, L)}{\sqrt{(p\pi)^2 + R_0(x, L)^2}} \quad (4.137)$$

$$\omega_z \widehat{H}_s = \frac{\sqrt{(p\pi)^2 + R_0(0, x)^2}}{R_1(0, x)} \quad (4.138)$$

$$\xi_z \widehat{H}_s = \frac{R_0(0, x)}{\sqrt{(p\pi)^2 + R_0(0, x)^2}} \quad (4.139)$$

Pour  $G_e$ , les zéros sont solutions de (4.140), et pour  $G_s$  de (4.141) :

$$N_{\widehat{G}_e}(s_{z\widehat{G}_e}) = \cos(R(x, L, s_{z\widehat{G}_e})) = 0 \quad (4.140)$$

$$N_{\widehat{G}_s}(s_{z\widehat{G}_s}) = \cos(R(0, x, s_{z\widehat{G}_s})) = 0. \quad (4.141)$$

Après application de l'approximation de  $R$  donnée en (4.124), on obtient les zéros suivants :

$$s_{z\widehat{G}_e} = -\frac{R_0(x, L)}{R_1(x, L)} + j\frac{\pi k + \frac{\pi}{2}}{R_1(x, L)} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \quad (4.142)$$

$$s_{z\widehat{G}_s} = -\frac{R_0(0, x)}{R_1(0, x)} + j\frac{\pi k + \frac{\pi}{2}}{R_1(0, x)} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \quad (4.143)$$

et leur complexes conjugués. Leur pulsation propre et coefficient d'amortissement correspondants sont :

$$\omega_{z\widehat{G}_e} = \frac{\sqrt{(p\pi + \frac{\pi}{2})^2 + R_0(x, L)^2}}{R_1(x, L)} \quad (4.144)$$

$$\xi_{z\widehat{G}_e} = \frac{R_0(x, L)}{\sqrt{(p\pi + \frac{\pi}{2})^2 + R_0(x, L)^2}} \quad (4.145)$$

$$\omega_{z\widehat{G}_s} = \frac{\sqrt{(p\pi + \frac{\pi}{2})^2 + R_0(0, x)^2}}{R_1(0, x)} \quad (4.146)$$

$$\xi_{z\widehat{G}_s} = \frac{R_0(0, x)}{\sqrt{(p\pi + \frac{\pi}{2})^2 + R_0(0, x)^2}} \quad (4.147)$$

Les zéros des quatre fonctions de transfert sont localisés dans le demi-plan complexe gauche, ceux de  $\widehat{H}_e, \widehat{G}_e$  sont plus proches de l'axe imaginaire.

D'autre part,  $\widehat{H}_e, \widehat{G}_e, \widehat{H}_s$  et  $\widehat{G}_s$  présentent une paire de zéros réels solutions de (4.148) pour  $\widehat{H}_e$  et  $\widehat{G}_e$  et de (4.149) pour  $\widehat{H}_s$  et  $\widehat{G}_s$  :

$$(r(0, s_{zre}))^{1/4} = 0 \quad (4.148)$$

$$(r(L, s_{zrs}))^{1/4} = 0 \quad (4.149)$$

soit

$$s_{zre} = \frac{-r_1(0) \pm \sqrt{r_1(0)^2 - 4r_2(0)r_0(0)}}{2r_2(0)} \quad (4.150)$$

$$s_{zrs} = \frac{-r_1(L) \pm \sqrt{r_1(L)^2 - 4r_2(L)r_0(L)}}{2r_2(L)}. \quad (4.151)$$

On illustre les analyses hautes fréquences des modèles WKB hauteurs/débits en figures 4.12 et 4.13 avec les modes résonants, anti-résonants et l'enveloppe des réponses fréquentielles en hautes fréquentielles.

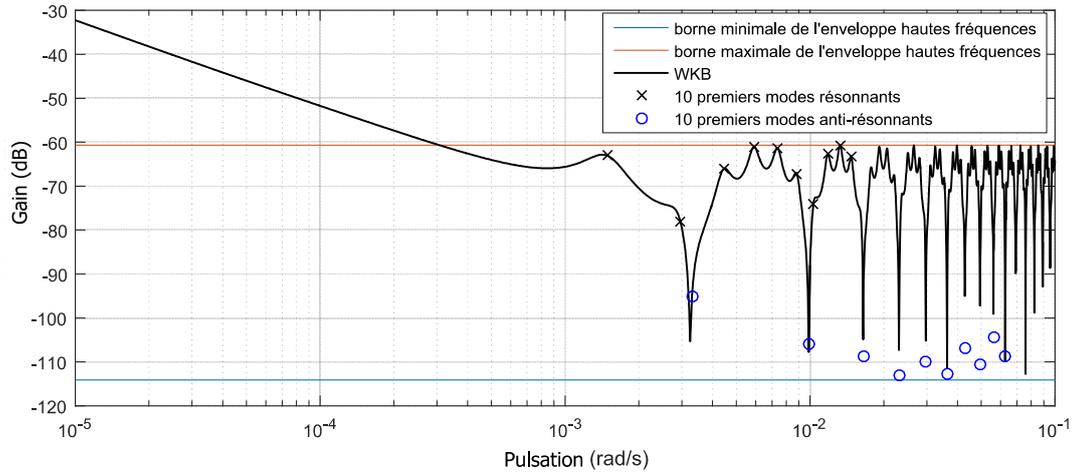


FIGURE 4.12 – Gain de  $G_e$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 1000\text{m}^3/\text{s}$  et  $H_{av} = 7.98\text{m}$ .

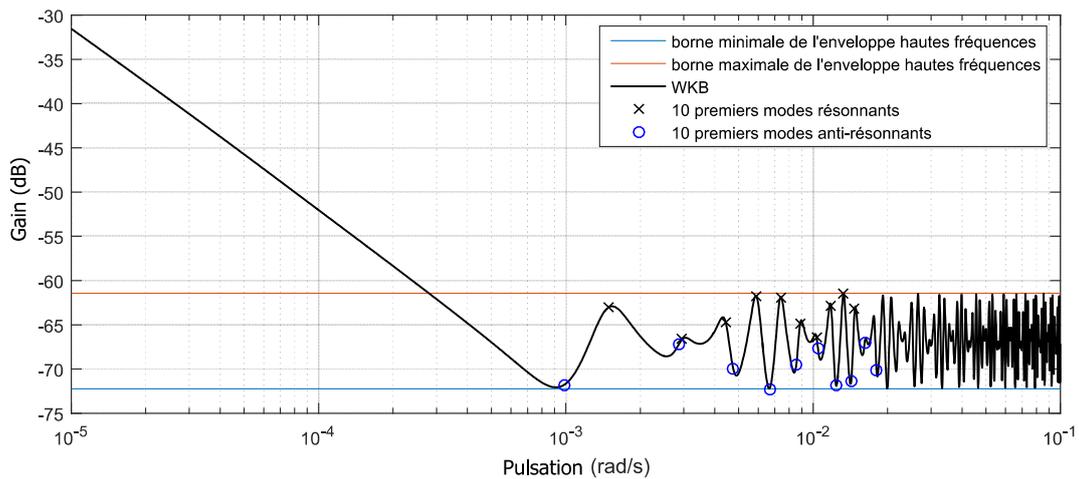


FIGURE 4.13 – Gain de  $G_s$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 1000\text{m}^3/\text{s}$  et  $H_{av} = 7.98\text{m}$ .

## 4.5 Fonctions de transfert réduites avec modes WKB estimés

On propose dans cette section des modèles d'ordre réduits où seuls les modes dominants basses fréquences sont représentés. Ceux-ci sont issus de l'analyse des fonctions de transfert WKB sous leur forme irrationnelle réalisée dans la section précédente 4.4. La structure du modèle hauteurs/débits de type Intégrateur Retard Zéro plus modes résonant/anti-résonants (noté par la suite IDZ-RAR) est inspirée des solutions connues dans la littérature. Les résultats sont donnés dans la section 4.5.2. Pour le modèle débits/débits, le modèle équivalent est de la forme gain-RAR avec retard. Les résultats sont donnés dans la section 4.5.1.

Pour un mode résonant, on exprime :

$$\frac{\omega_p^2 + 2\widehat{\xi}_p\omega_p s + s^2}{\omega_p^2 + 2\xi_p\omega_p s + s^2} \quad (4.152)$$

où  $\widehat{\xi}_p$  est tel que le gain en  $\omega_p$  est exact. Pour un mode anti-résonant, on exprime :

$$\frac{\omega_z^2 + 2\xi_z\omega_z s + s^2}{\omega_z^2 + 2\widehat{\xi}_z\omega_z s + s^2} \quad (4.153)$$

où  $\widehat{\xi}_z$  est estimé tel que le gain en  $\omega_z$  est exact. Dans le cas où les deux premiers modes sont résonant et anti-résonant,  $\widehat{\xi}_p$  et  $\widehat{\xi}_z$  peuvent être obtenus analytiquement. On a alors :

$$\widehat{\xi}_p = \sqrt{\frac{l_1 + l_2 l_3}{1 - l_4 l_2}} \quad (4.154)$$

$$\widehat{\xi}_z = \sqrt{\frac{l_3 + l_4 l_1}{1 - l_4 l_2}}. \quad (4.155)$$

avec

$$l_1 = \left| \frac{F_{WKB}(j\omega_p)}{F_{BF}(j\omega_p)} \right|^2 \xi_p^2 \frac{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2}{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2 + (2\xi_z\omega_z\omega_p)^2} \quad (4.156)$$

$$l_2 = \left| \frac{F_{WKB}(j\omega_p)}{F_{BF}(j\omega_p)} \right|^2 \xi_p^2 \frac{(2\omega_z\omega_p)^2}{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2 + (2\xi_z\omega_z\omega_p)^2} \quad (4.157)$$

$$l_3 = \left| \frac{F_{BF}(j\omega_z)}{F_{WKB}(j\omega_z)} \right|^2 \xi_z^2 \frac{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2}{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2 + (2\xi_z\omega_z\omega_p)^2} \quad (4.158)$$

$$l_4 = \left| \frac{F_{BF}(j\omega_z)}{F_{WKB}(j\omega_z)} \right|^2 \xi_z^2 \frac{(2\omega_z\omega_p)^2}{(\omega_z^2 - \omega_p^2)^2 + (2\xi_z\omega_z\omega_p)^2} \quad (4.159)$$

où  $F_{WKB}$  correspond aux fonctions de transfert WKB  $\widehat{H}_e, \widehat{H}_s, \widehat{G}_e$  ou  $\widehat{G}_s$  obtenues dans la sous section 4.3.4 et  $F_{BF}$  correspond aux fonctions de transfert obtenues par approximation basses fréquences dans le chapitre précédent section 3.3.

Les retards sont identiques en une position  $x$  donnée pour les modèles débits/débits et hauteurs/débits, ils sont connus hydrauliquement selon [Cho59]. Leurs expressions démontrées en section 1.3.2 sont rappelées ci-dessous :

$$\tau_e(x) = \int_0^x \frac{1}{c_0(\sigma) + V_0(\sigma)} d\sigma, \quad (4.160)$$

$$\tau_s(x) = \int_x^L \frac{1}{c_0(\sigma) - V_0(\sigma)} d\sigma. \quad (4.161)$$

#### 4.5.1 Modèle débits/débits : Gain-RAR retardé

La structure du modèle débits/débits avec deux modes résonants/anti-résonants est notée  $H_{RAR}$  :

$$H_{RAR} = K_{BF} e^{-\tau s} H_{1RAR} H_{2RAR} \quad (4.162)$$

où  $K_{BF}$  est calculé selon l'approximation basses fréquences proposée dans le chapitre précédent section 3.3 et les modes dominants sont représentés par des quotients du second ordre selon (4.152) (4.153).

#### 4.5.2 Modèle hauteurs/débits : IDZ-RAR

La structure du modèle hauteurs/débits avec deux modes résonants/anti-résonants est notée  $G_{IDZ-RAR}$  :

$$G_{IDZ-RAR} = \frac{1 + Ts}{As} e^{-\tau s} G_{1RAR} G_{2RAR} \quad (4.163)$$

où la surface équivalente  $A$  est calculée selon l'approximation basses fréquences proposée dans le chapitre précédent section 3.3, le zéro  $T$  est calculé par estimation du gain moyen hautes fréquences dans la sous-section 4.4.3 et les modes dominants sont représentés par des quotients du second ordre selon (4.152) (4.153).

En illustration, on considère la configuration type hydroélectricité où la comparaison des diagrammes de Bode obtenus numériquement avec la réponses fréquentielle du modèle WKB a été réalisée dans la section 4.3.4. Pour  $G_e$ , on obtient un modèle IDZ avec deux modes résonants (voir figure 4.14) tandis que pour  $G_s$  on obtient un modèle avec un mode résonant et un mode anti-résonant (voir figure 4.15).

Pour la configuration type irrigation, comme montré dans la section 4.3.4, un modèle IDZ est suffisant pour  $G_s$ . Pour  $G_e$ , on obtient un modèle avec un mode résonant et un mode anti-résonant (voir figure 4.16). On remarque en particulier que pour ce cas où le biais statique lié à l'erreur basses fréquences introduite par l'approximation WKB est le plus important, le modèle d'ordre réduit présente bien un comportement basses fréquences corrigé correspondant au comportement que l'on trouve numériquement sur la figure 4.7.

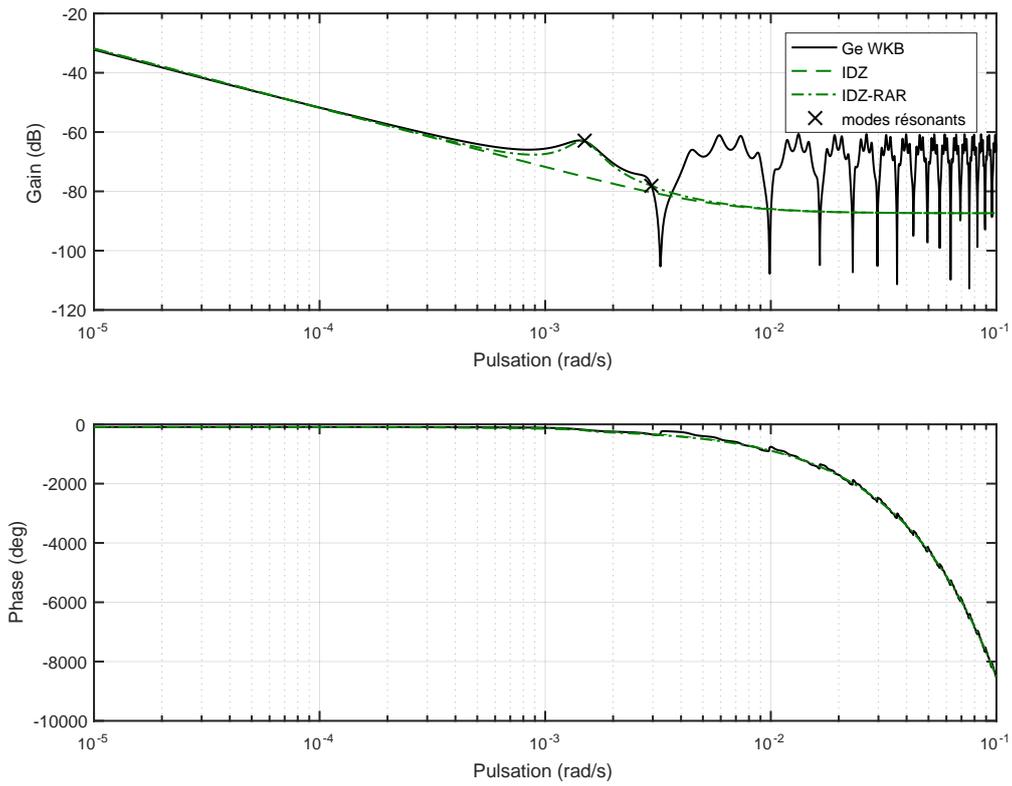


FIGURE 4.14 – Diagramme de Bode de  $G_e$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 1000m^3/s$  et  $H_{av} = 7.98m$ .

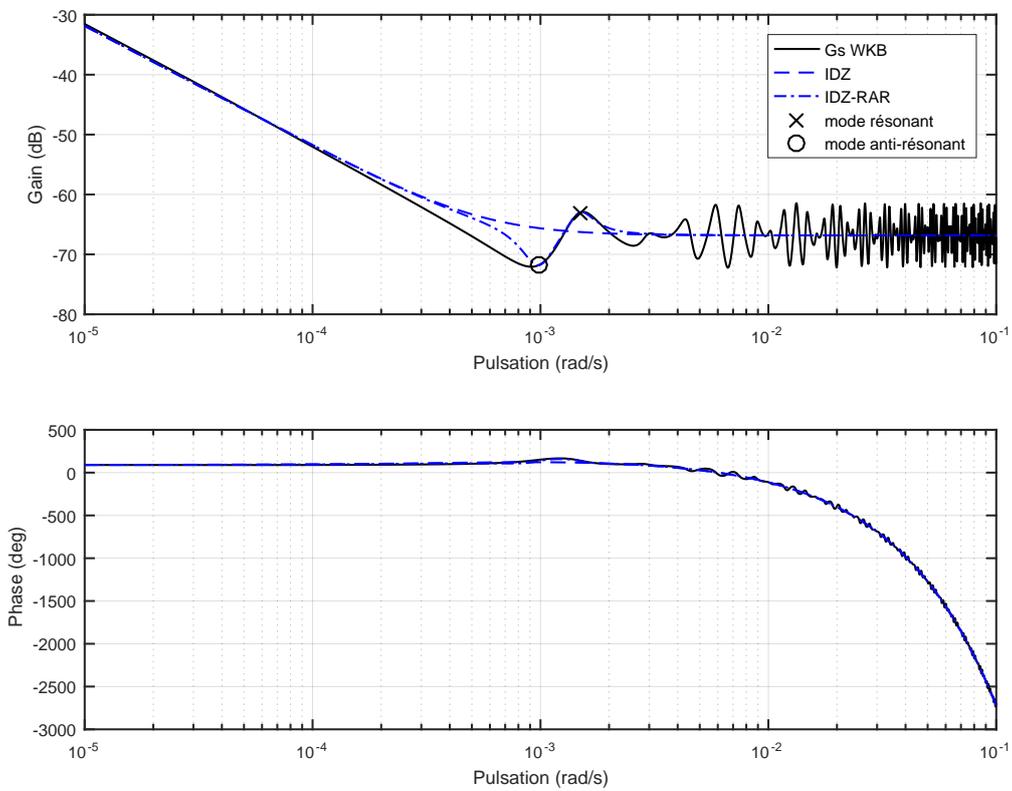


FIGURE 4.15 – Diagramme de Bode de  $G_s$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 1000m^3/s$  et  $H_{av} = 7.98m$ .

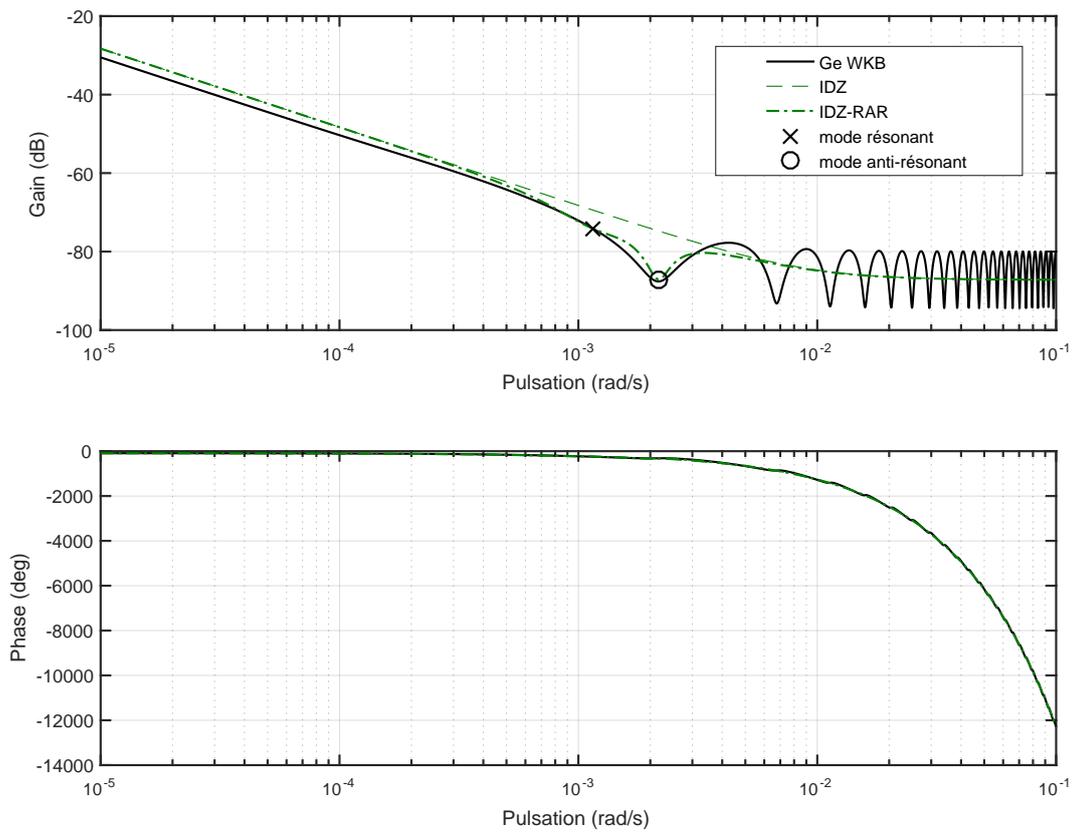


FIGURE 4.16 – Diagramme de Bode de  $G_e$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500m^3/s$  et  $H_{av} = 3.98m$ .

## 4.6 Fonctions de transfert rationalisées basées sur le développement de Padé

Une alternative à la réduction de modèle basée sur les modes calculés analytiquement à partir des fonctions de transfert WKB irrationnelles (voir section précédente 4.5) consiste à faire un développement de Padé des termes en exponentiel. Plus précisément, on propose d'écrire les modèles débits/débits sous la forme factorisée suivante :

$$\widehat{H}_e(x, s) = K(x, L, s)F(0, x, s)e^{S(0, x, s)} \quad (4.164)$$

$$\widehat{H}_s(x, s) = K(0, x, s)F(L, x, s)e^{-S(x, L, s)} \quad (4.165)$$

avec

$$K(x_1, x_2, s) = \frac{\sin(R(x_1, x_2, s))}{\sin(R(0, L, s))} \quad (4.166)$$

$$F(x_1, x_2, s) = \left(\frac{r(x_1, s)}{r(x_2, s)}\right)^{1/4} \quad (4.167)$$

Pour obtenir des fonctions de transfert rationnelles plus retard on propose les approximations suivantes :

1. On propose d'approximer  $F$  qui est un quotient en puissance non-entière de  $s$  par une fonction de transfert classique de type zéro/pôle,
2. On propose d'approximer  $K$  qui un quotient trigonométrique par développement de Padé après approximation rationnelle de  $R$  (4.23) et factorisation des termes de type retard.

Pour l'étape 1, on propose de calculer les coefficients de la fonction de transfert approximée afin d'avoir un comportement asymptotique exact en basses et hautes fréquences. On obtient alors une approximation  $\widehat{F}$  :

$$\widehat{F}(x_1, x_2, s) = \left(\frac{r_0(x_1)}{r_0(x_2)}\right)^{1/4} \frac{1 + k\left(\frac{r_2(x_1)}{r_0(x_1)}\right)^{1/4} s}{1 + k\left(\frac{r_2(x_2)}{r_0(x_2)}\right)^{1/4} s} \quad (4.168)$$

avec  $k$ , coefficient à caler. On propose de le calculer de façon à ce que  $F$  et  $\widehat{F}$  soient égaux en  $s_{\text{moyen}} = j\omega_{\text{moyen}}$  où  $|\widehat{F}(x_1, x_2, s_{\text{moyen}})| = |F(x_1, x_2, s_{\text{moyen}})| = \text{mean}\left(\left(\frac{r_0(x_1)}{r_0(x_2)}\right)^{1/4}, \left(\frac{r_2(x_1)}{r_2(x_2)}\right)^{1/4}\right)$  dénoté  $m$ . Ainsi  $\omega_{\text{mean}}$  est la solution positive racine de  $W$  tel que :

$$\begin{aligned} & \left(r_0(x_1) - m^8 r_0^2(x_2)\right) + \left(\sqrt{r_1(x_1)} - 2r_2(x_1)r_0(x_1) + m^8(2r_2(x_2)r_0(x_2) - \sqrt{r_1(x_2)})\right)W \\ & + \left(r_2(x_1) - m^8 r_2^2(x_2)\right)W^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.169)$$

Par égalité de  $F$  et  $\widehat{F}$  en  $s_{\text{moyen}}$ , on obtient :

$$k^2 = \frac{m^2 \sqrt{\frac{r_0(x_2)}{r_0(x_1)}} - 1}{\omega_{\text{moyen}}^2 \left(\sqrt{\frac{r_2(x_1)}{r_0(x_1)}} - m^2 \sqrt{\frac{r_2(x_2)}{r_0(x_1)}}\right)} \quad (4.170)$$

Pour l'étape 2, nous rappelons d'abord l'expression de l'approximation de Padé de la fonction exponentielle d'ordre  $n$  [Per57] (voir [SV75]) sous forme fractionnaire :

$$e^z = \frac{\sum_{k=0}^n A_k z^k}{\sum_{k=0}^n A_k (-1)^k z^k} \quad (4.171)$$

$$\text{avec } A_k = \frac{(2n-k)!n!}{(2n)!k!(n-k)!}. \quad (4.172)$$

On applique l'approximation de  $R$  introduite pour le calcul des modes résonants/anti-résonants dans 4.4.3. Ainsi  $K$  est approximé dans un premier temps par  $\tilde{K}$  :

$$\tilde{K}(x_1, x_2, s) = \frac{\sinh(R_1(x_1, x_2)s + R_0(x_1, x_2))}{\sinh(R_1(0, L)s + R_0(0, L))}, \quad (4.173)$$

soit après factorisation

$$\tilde{K}(x_1, x_2, s) = e^{-R_1(x_1, x_2)s - R_0(x_1, x_2)} P(x_1, x_2, s) \quad (4.174)$$

avec

$$P(x_1, x_2, s) = \frac{1 - e^{-2R_0(x_1, x_2)} e^{-2R_1(x_1, x_2)s}}{1 - e^{-2R_0(0, L)} e^{-2R_1(0, L)s}}. \quad (4.175)$$

On obtient une approximation rationnelle de  $P$  par développement de Padé des exponentielles que l'on note  $\hat{P}$  :

$$\hat{P}(x_1, x_2, s) = \frac{\sum_{k=0}^n B_k(0, L) s^k \sum_{k=0}^n B_k(x_1, x_2) (1 - (-1)^k e^{-2R_0(x_1, x_2)}) s^k}{\sum_{k=0}^n B_k(x_1, x_2) s^k \sum_{k=0}^n B_k(x_1, x_2) (1 - (-1)^k e^{-2R_0(0, L)}) s^k} \quad (4.176)$$

avec

$$B_k(x_1, x_2) = A_k 2^k R_1^k(x_1, x_2). \quad (4.177)$$

Les modèles réduits complets s'expriment alors

$$\hat{H}_{e/\text{pade}}(x, s) = H_{e0}(x) \hat{P}(x, L, s) \hat{F}(0, x, s) e^{-\tau_e(x)s} \quad (4.178)$$

$$\hat{H}_{s/\text{pade}}(x, s) = H_{s0}(x) \hat{P}(0, x, s) \hat{F}(L, x, s) e^{-\tau_s(x)s} \quad (4.179)$$

avec

$$\tau_e(x) = R_1(0, x) - S_1(0, x), \quad (4.180)$$

$$\tau_s(x) = R_1(x, L) + S_1(x, L), \quad (4.181)$$

$$H_{e0}(x) = e^{-R_0(0, x) + S_0(0, x)}, \quad (4.182)$$

$$H_{s0}(x) = e^{-R_0(x, L) - S_0(x, L)}. \quad (4.183)$$

On retrouve bien les retards exacts que nous avons exprimé en (4.160) et (4.161) selon [Cho59].

## 4.6. Fonctions de transfert rationalisées basées sur le développement de Padé 95

---

Ce type d'approximation conduit à des modèles d'ordre très élevé si l'on souhaite représenter les modes même si l'ordre des fonctions de transfert débits/débits ou hauteurs/débits est linéaire en l'ordre du développement de Padé  $N$ . En effet pour les modèles débits/débits, l'ordre global est de  $2N + 1$ . Par dérivation l'ordre global des modèles hauteurs/débits est de  $2(2N + 1) + 1$ . De plus, on ne sait pas a priori quel ordre est nécessaire pour représenter un nombre donné de modes. Or d'autre part, les approximants de Padé deviennent instables à des ordres élevés même lorsque le système d'origine est stable (voir [Sha80]). De plus, les coefficients du développement de Padé sont croissants en puissance de  $N$ , ils sont numériquement mal conditionnés. Un développement de Padé d'ordre  $N = 1$  ne permet pas de représenter de modes comme le montre les diagrammes de Bode F.1 et F.2 donnés en Annexe F.

Une perspective pour éviter les instabilités introduites par le développement de Padé consiste à forcer le choix pôles stables et à identifier les zéros de façon à ce que les moments temporels ou les paramètres de Markov correspondent à ceux du modèle non-réduit [MCD09]. L'inconvénient est que seuls les premiers moments ou premiers paramètres de Markov peuvent être identifiés ne garantissant pas une bonne réponse temporelle globale. Le choix des pôles peut être fait selon plusieurs méthodes [BB86] : la méthode de l'équation de stabilité, la sélection des pôles dominants, la méthode de Routh, la méthode de Schwarz. On parle d'approximation de Padé modale pour désigner cet ensemble de méthodes.

Les résultats sont illustrés pour le bief de Gerstheim simplifié introduit dans le chapitre 1 autour d'un débit support de  $500m^3/s$ . L'approximation de  $F$ , fonction de transfert à puissance non-entière par une fonction de transfert rationnelle lors de l'étape 1 est illustrée dans les figures 4.17 et 4.18. Le développement de Padé est effectué à l'ordre  $N = 4$  en figure 4.19 pour  $G_e$  et 4.21 pour  $G_s$ . L'ordre  $N = 10$  est présenté en figure 4.20 pour  $G_e$  et 4.22 pour  $G_s$ . Le mauvais conditionnement numérique des coefficients de Padé est visible sur la réponse fréquentielle des fonctions de transfert F.3 et F.4 donnés en Annexe F.

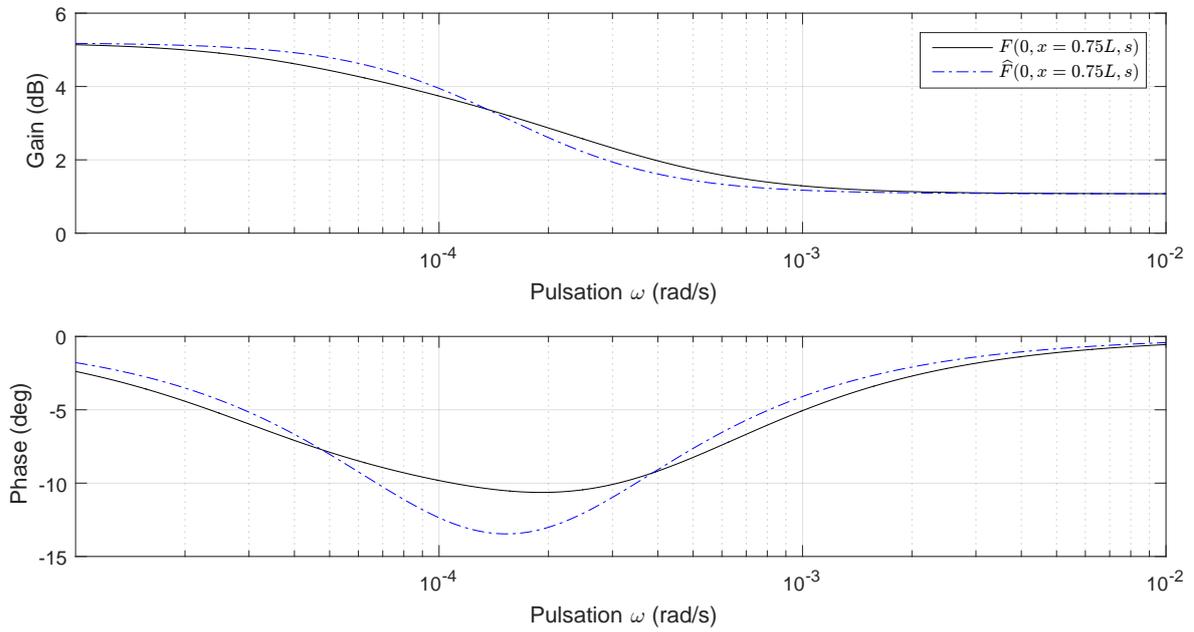


FIGURE 4.17 – Comparaison de  $F(0, x, s)$  et  $\hat{F}(0, x, s)$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$ .

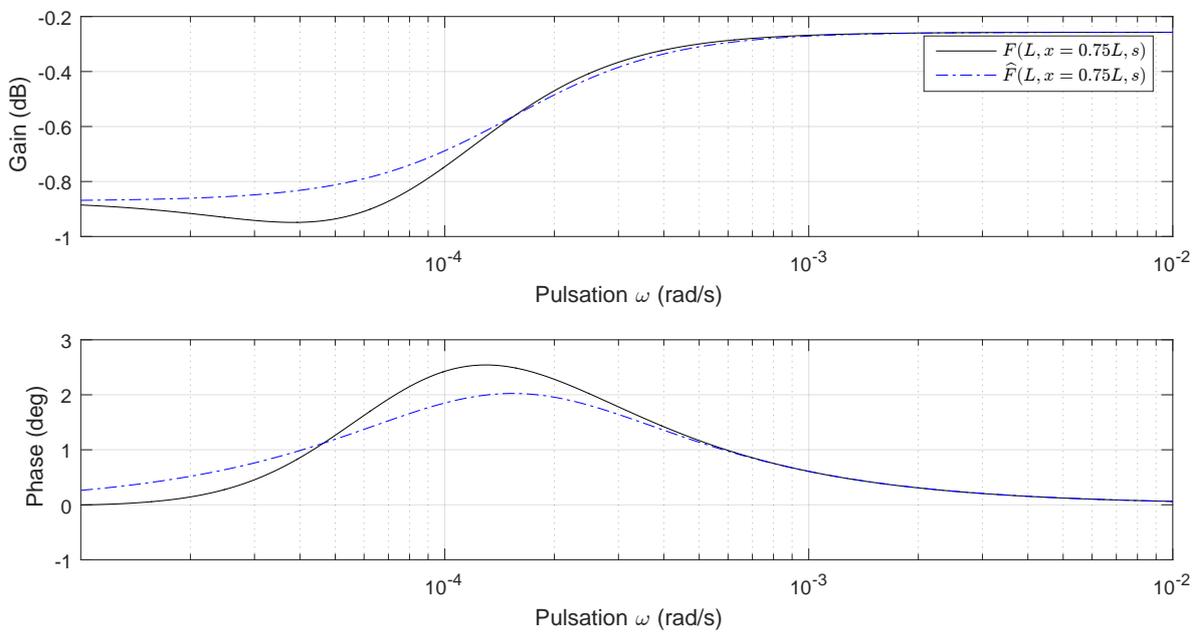


FIGURE 4.18 – Comparaison de  $F(L, x, s)$  et  $\hat{F}(L, x, s)$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$ .

#### 4.6. Fonctions de transfert rationalisées basées sur le développement de Padé 97

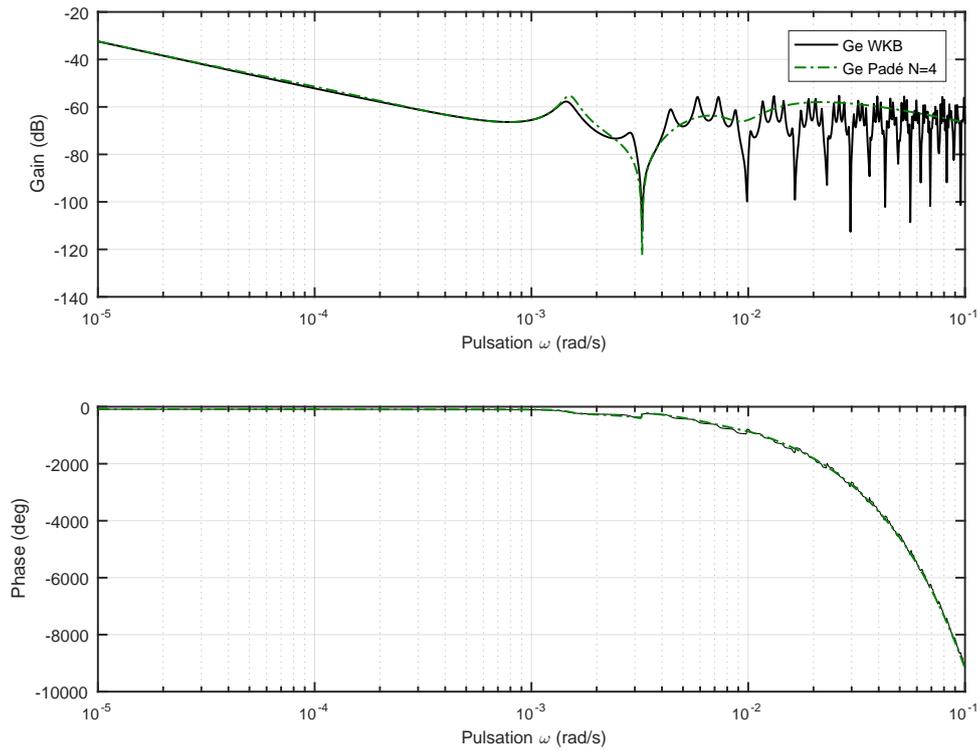


FIGURE 4.19 – Diagramme de Bode de  $G_e$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$  (approximation de Padé d'ordre 4).

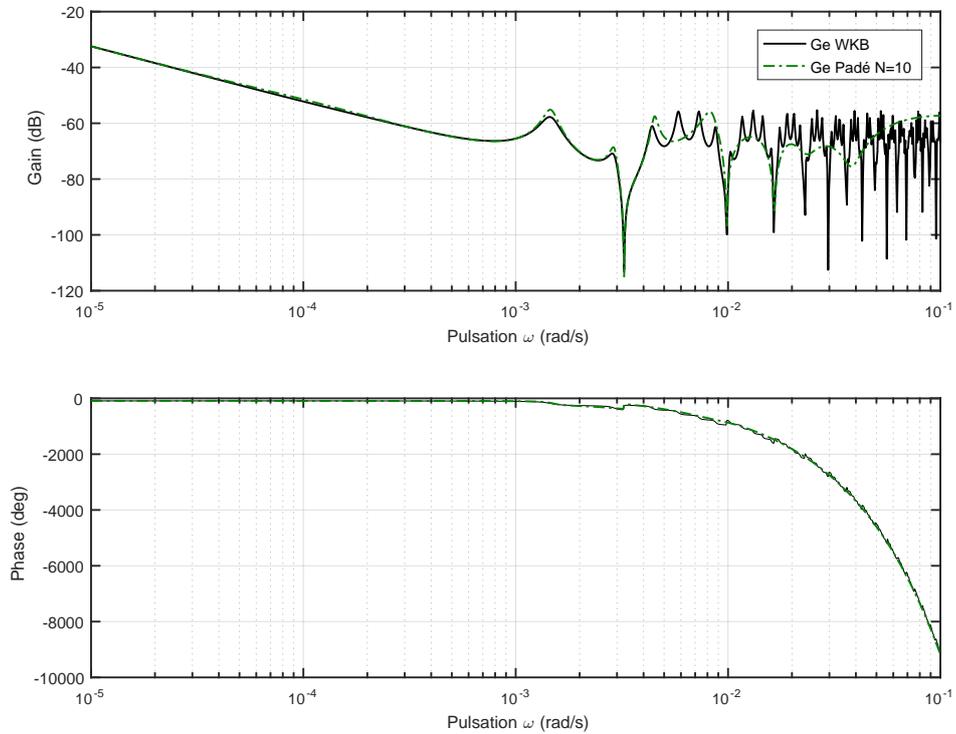


FIGURE 4.20 – Diagramme de Bode de  $G_e$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$  (approximation de Padé d'ordre 10).

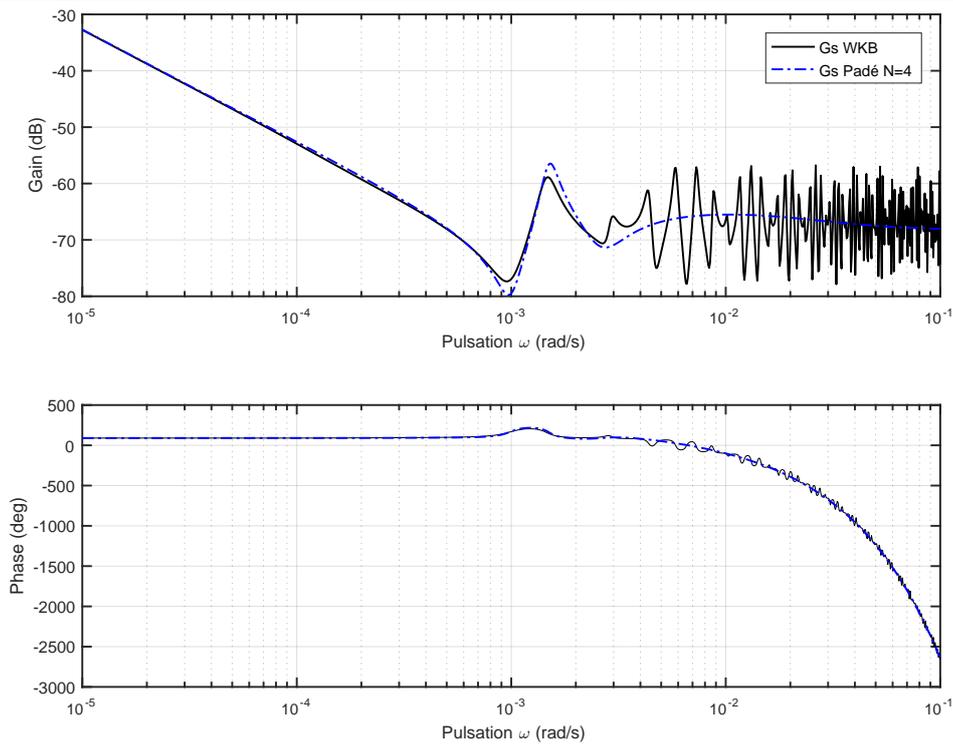


FIGURE 4.21 – Diagramme de Bode de  $G_s$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500\text{m}^3/\text{s}$ ,  $H_{av} = 7.98\text{m}$  (approximation de Padé d'ordre 4).

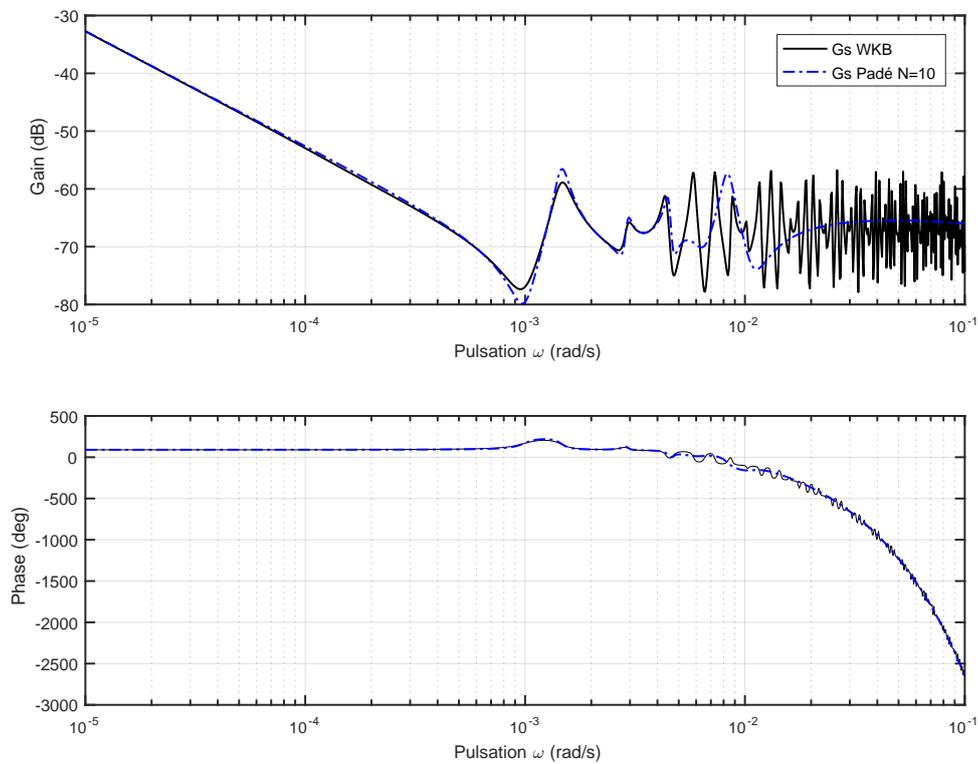


FIGURE 4.22 – Diagramme de Bode de  $G_e$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500\text{m}^3/\text{s}$ ,  $H_{av} = 7.98\text{m}$  (approximation de Padé d'ordre 10).

## 4.7 Combinaison de canaux

### 4.7.1 Modèles hauteur/débit

Jusqu'alors nous avons considéré des canaux à pente constante. Il s'avère que l'approximation WKB n'est pas vérifiée si la pente au fond change de façon trop abrupte. Le critère exprimé dans la section 4.3.3 n'est pas toujours vérifié car les termes de l'inégalité ne sont plus strictement monotones en  $s$ . Dans un contexte d'exploitation hydroélectrique, les canaux sont entretenus, régulièrement nettoyés. En effet, il est nécessaire de protéger les turbines contre les corps qui peuvent être charriés dans les rivières et s'accumuler sur les grilles de protection à l'amont des centrales hydroélectriques. En conséquence, la pente au fond des canaux reste faiblement variable, excepté au niveau des jonctions :

- entre le canal de restitution et la rivière naturelle
- entre la rivière naturelle et le canal d'amenée
- entre le canal d'amenée et le canal de force motrice

Ainsi une représentation par combinaison de deux ou trois canaux à pente constante est pertinente. On propose alors d'appliquer la méthodologie précédente indépendamment sur chaque portion à pente constante et de combiner les modèles hauteur/débit par continuité de la profondeur d'eau à leur jonction.

En illustration, on considère un canal constitué de deux canaux successifs ayant chacun une pente constante différente. L'indice 1 fait référence au premier canal de longueur  $L_1$ . La coordonnée spatiale associée est dénotée  $x_1 \in [0, L_1]$ . L'indice 2 fait référence au second canal de longueur  $L_2$ . La coordonnée spatiale  $x_2 \in [0, L_2]$ . On note  $q_{int}(s)$  la transformée de Laplace des variations de débit à l'intersection telle que ( $x_1 = L_1 \leftrightarrow x_2 = 0$ ). La combinaison est réalisée par continuité de la surface libre à ce point de jonction. Ainsi, le système complet est décrit par le système d'équations suivant :

$$\forall x_1 \in [0, L_1], \forall x_2 \in [0, L_2]$$

$$\begin{cases} h(x_1, s) = G_{e1}(x_1, s)q_e(s) + G_{s1}(x_1, s)q_{int}(s) & (4.184) \\ h(x_2, s) = G_{e2}(x_2, s)q_{int}(s) + G_{s2}(x_2, s)q_s(s) & (4.185) \\ h(x_1 = L_1, s) = h(x_2 = 0, s) & (4.186) \end{cases}$$

On peut exprimer le système précédent de façon à identifier deux paires de fonctions de transfert hauteur/débit selon que la coordonnée longitudinale  $x$  de la sortie soit dans le premier ou le second canal de la combinaison :

$\forall x \in [0, L_1 + L_2]$

$$\left\{ \begin{array}{ll} G_{e12}(x, s) = G_{e1}(x, s) - \frac{G_{e1}(L_1, s)G_{s1}(x, s)}{G_{e1}(L_1, s) - G_{e2}(0, s)} & \text{si } x \in [0, L_1] \\ = -\frac{G_{e2}(x - L_1, s)G_{e1}(L_1, s)}{G_{e1}(L_1, s) - G_{e2}(0, s)} & \text{si } x \in [L_1, L_1 + L_2] \\ G_{s12}(x, s) = \frac{G_{s1}(x, s)G_{s2}(0, s)}{G_{e1}(L_1, s) - G_{e2}(0, s)} & \text{si } x \in [0, L_1] \\ = G_{s2}(x - L_1, s) + \frac{G_{s2}(0, s)G_{e2}(x - L_1)}{G_{e1}(L_1, s) - G_{e2}(0, s)} & \text{si } x \in [L_1, L_1 + L_2] \end{array} \right.$$

tels que  $\forall x \in [0, L_1 + L_2]$

$$h(x, s) = G_{e12}(x, s)q_e(s) + G_{s12}(x, s)q_s(s). \quad (4.187)$$

#### 4.7.2 Combinaison conservative

On se propose de montrer que la combinaison ainsi réalisée est conservative, c'est-à-dire que la combinaison de deux canaux à pente identique conduit au même modèle que celui obtenu en considérant directement le canal complet sans combinaison. En illustration, les tracés des erreurs des réponses fréquentielles des modèles sont donnés pour deux coordonnées longitudinales de sortie :

- $x_1 = 4000 \in [0, L_1]$  en figure 4.23 pour  $G_e$  et en figure 4.24 pour  $G_s$ ,
- $x_2 = 12000 \in [L_1, L_1 + L_2]$  en figure 4.25 pour  $G_e$  et en figure 4.26 pour  $G_s$ .

où  $L_1 = 10000m$  et  $L_2 = 6000m$ . Les autres données numériques sont celles de l'exemple introduit dans le chapitre 1.

On remarque que l'erreur n'est pas strictement nulle. Cela est dû au calcul des modèles aux frontières intermédiaires  $G_{e1}(L, s)$ ,  $G_{e2}(0, s)$ ,  $G_{s2}(0, s)$ . Ceux-ci sont calculés avec une approximation des dérivées. Il en résulte en particulier des pics d'erreur dus au décalage des pulsations des modes résonants/anti-résonants.

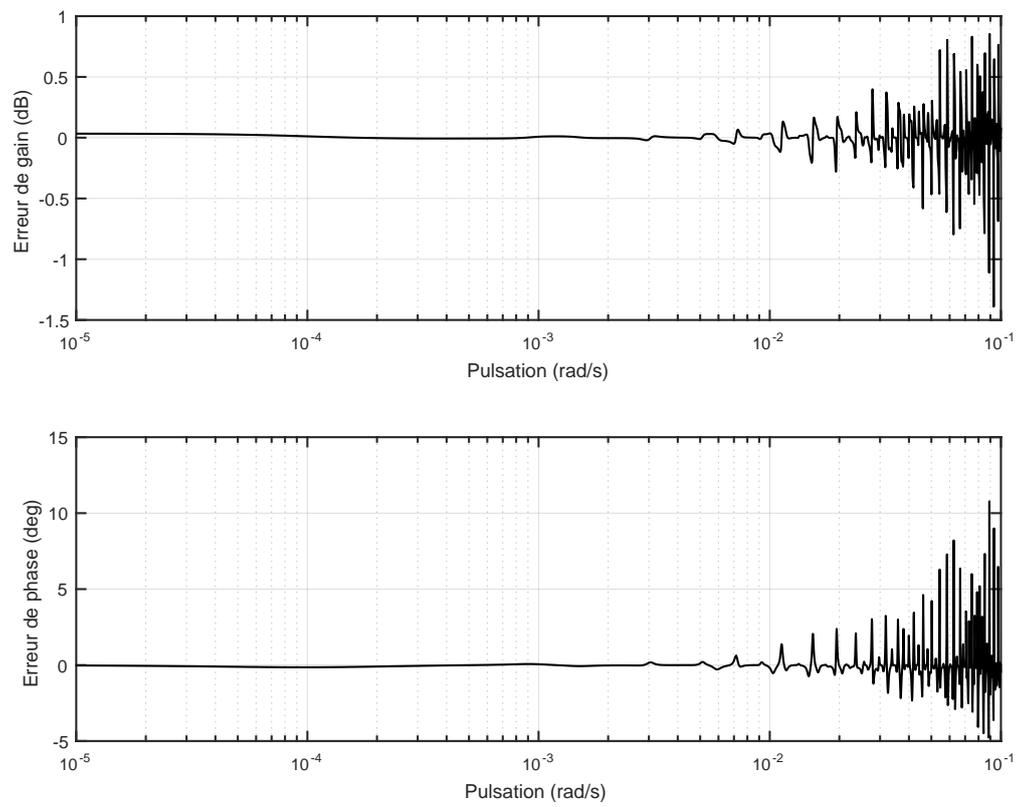
Les retards sont préservés, on retrouve analytiquement :  $\forall x \in [0, L_1 + L_2]$

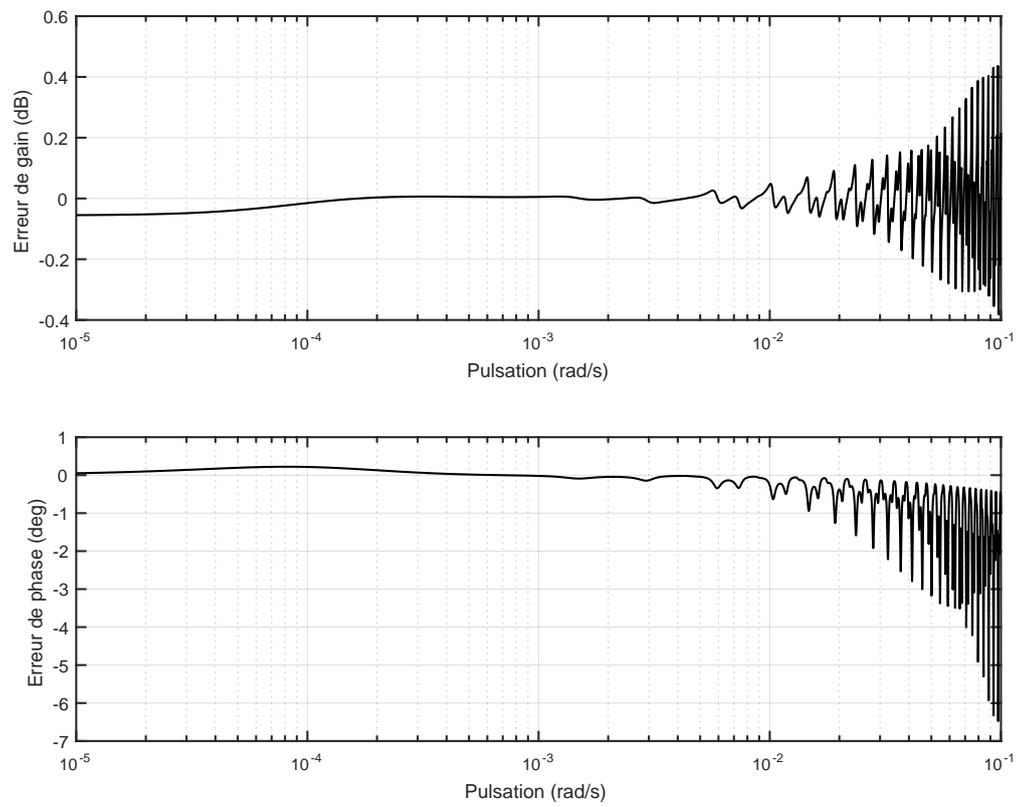
$$\tau_{e12}(x) = \int_0^x \frac{1}{c_{01}(\sigma) + V_{01}(\sigma)} d\sigma \quad \text{si } x \in [0, L_1] \quad (4.188)$$

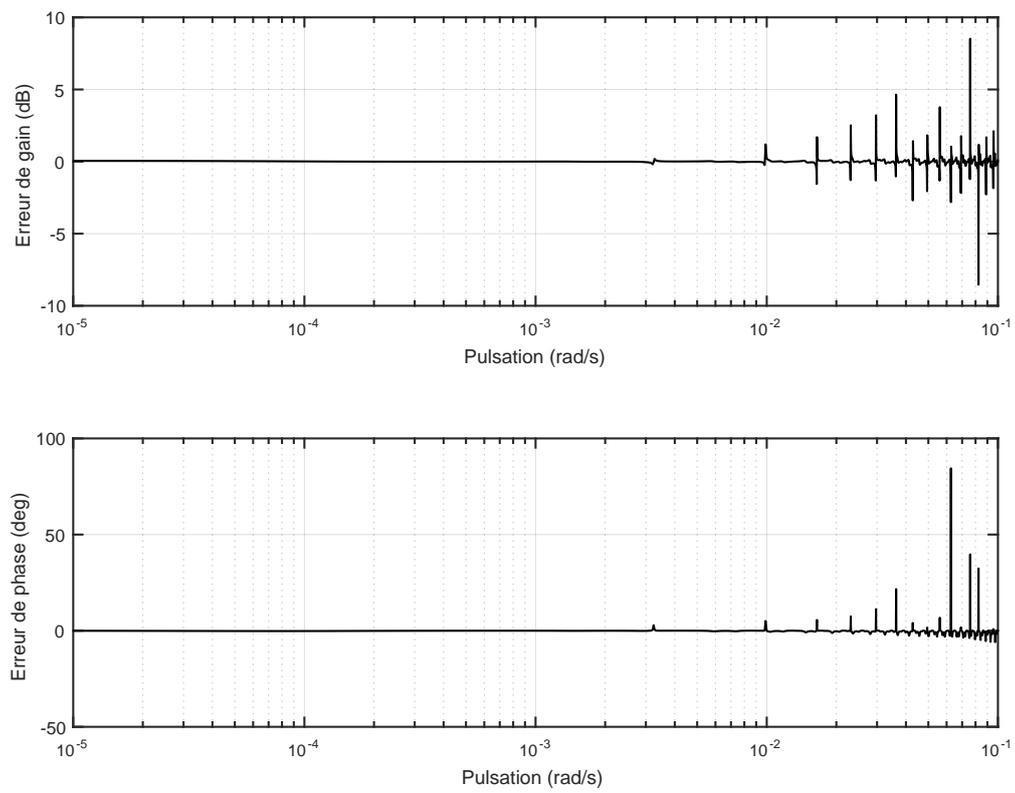
$$= \int_0^{L_1} \frac{1}{c_{01}(\sigma) + V_{01}(\sigma)} d\sigma + \int_0^{x-L_1} \frac{1}{c_{02}(\sigma) + V_{02}(\sigma)} d\sigma \quad \text{si } x \in [L_1, L_1 + L_2] \quad (4.189)$$

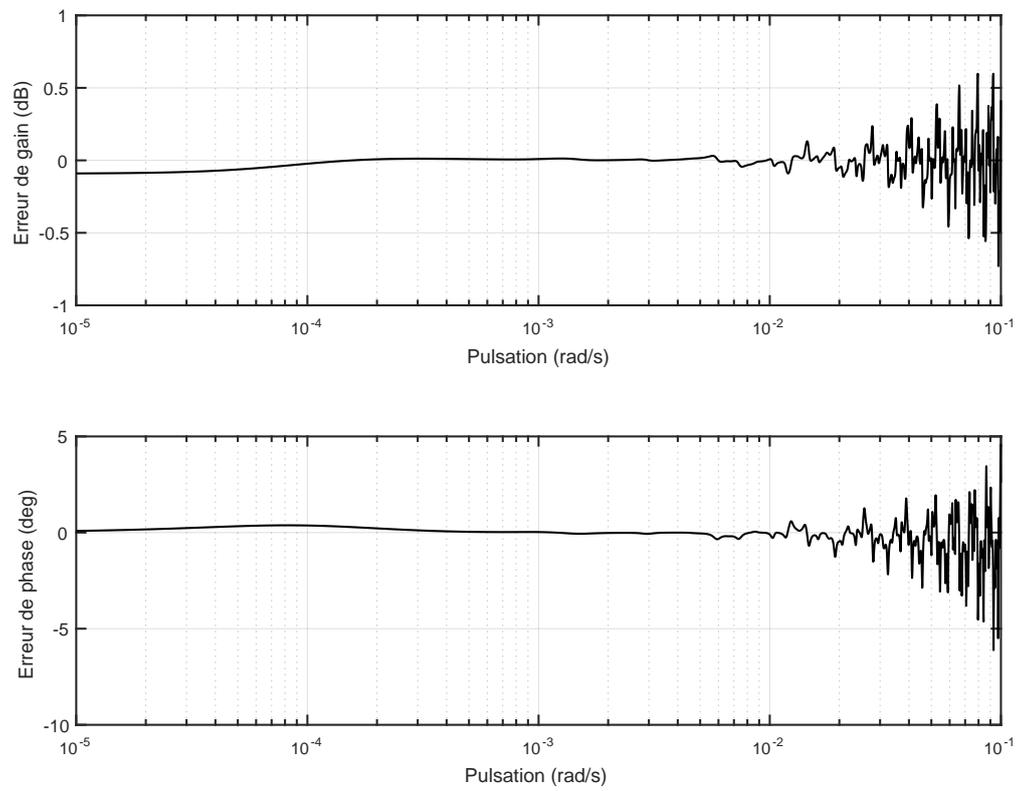
$$\tau_{s12}(x) = \int_x^{L_1} \frac{1}{c_{01}(\sigma) - V_{01}(\sigma)} d\sigma + \int_0^{L_2} \frac{1}{c_{02}(\sigma) - V_{02}(\sigma)} d\sigma \quad \text{si } x \in [0, L_1] \quad (4.190)$$

$$= \int_{x-L_1}^{L_2} \frac{1}{c_{02}(\sigma) - V_{02}(\sigma)} d\sigma \quad \text{si } x \in [L_1, L_1 + L_2] \quad (4.191)$$

FIGURE 4.23 – Erreurs en gain et phase entre  $G_e(x_1, s)$  and  $G_{e12}(x_1, s)$

FIGURE 4.24 – Erreurs en gain et phase entre  $G_s(x_1, s)$  and  $G_{s12}(x_1, s)$

FIGURE 4.25 – Erreurs en gain et phase entre  $G_e(x_2, s)$  and  $G_{e12}(x_2, s)$

FIGURE 4.26 – Erreurs en gain et phase entre  $G_s(x_2, s)$  and  $G_{s12}(x_2, s)$

## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la méthode WKB en application à la recherche de solutions approximées des équations de Saint-Venant autour d'un régime non-uniforme. La solution approximée obtenue est exprimée dans le domaine de Laplace sous forme de fonctions de transfert paramétriques avec un nombre infini de pôles et de zéros dû à l'aspect distribué du système considéré. Un critère de validité est donné dans le domaine fréquentiel. Celui-ci montre que la solution approximée présente un biais en basses fréquences. Afin de proposer des modèles adaptés pour des simulations temporelles et des études de régulation, on utilise les résultats du chapitre précédent (section 3.3) pour proposer des modèles d'ordre réduit dont les comportements sont asymptotiquement exacts en basses fréquences. La forme analytique des fonctions de transfert WKB débits/débits et hauteurs/débits en tout point le long du canal nous permet d'en effectuer une analyse modale explicite. On propose alors des modèles avec modes résonants anti-résonants issus de cette analyse. Une autre approche est proposée, elle repose sur un développement de Padé des termes exponentiels. On obtient alors des fonctions de transfert avec retard dont l'ordre est plus élevé que lorsque l'on prend en compte directement les résultats de l'analyse modale des fonctions de transfert WKB. De plus, les fonctions de transfert résultantes présentent des instabilités pour des ordres élevés. Dans la dernière section 4.7 de ce chapitre, on a considéré l'enchaînement de canaux à pente constante pour prendre en compte des changements de pente.



# Discussions autour d'applications

---

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>107</b>
<b>5.2</b>	<b>Analyse des différentes configurations selon les approches fréquentielles proposées</b>	<b>107</b>
5.2.1	Configuration type irrigation	108
5.2.2	Configuration hydroélectrique	109
	Phénomène d'oscillation de la ligne d'eau	109
	Caractérisations des variations de débit	112
	Scenario à partir de mesures	114
<b>5.3</b>	<b>Considération d'un cas réel</b>	<b>115</b>
<b>5.4</b>	<b>Régulation de niveau</b>	<b>119</b>
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>121</b>

---

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on souligne la pertinence des modèles IDZ-RAR et gain-RAR retardé pour la modélisation d'écoulement autour d'une configuration hydroélectrique. Les simulations non-linéaires présentées en référence sont légendées "Mascaret" selon le nom du logiciel utilisé qui a été introduit dans le premier chapitre section 1.4. Les simulations des modèles linéaires à retard sont réalisées sous Matlab.

## 5.2 Analyse des différentes configurations selon les approches fréquentielles proposées

Afin de mettre en évidence les différences entre le comportement autour d'une configuration type irrigation et autour d'une configuration type hydroélectrique, on considère un même scénario temporel initialisé autour de débits entrant et sortant égaux. Celui-ci correspond dans un premier temps à une augmentation du débit entrant de  $50m^3/s$  en 5 minutes puis d'un débit entrant maintenu constant pendant 20 minutes avant une baisse du débit entrant en 5 minutes pour un retour à sa valeur initiale constante égale au débit sortant. Dans un

second temps, les mêmes variations de débits sortants sont appliquées avec un débit entrant maintenu constant. On s'intéressera particulièrement à la configuration hydroélectrique, en montrant l'importance de prendre en compte les premiers modes résonants pour les modèles hauteurs/débits et débits/débits, ceci sera confirmé par des simulations à partir de mesures.

### 5.2.1 Configuration type irrigation

La configuration type irrigation considérée ici est la même que celle introduite dans le chapitre précédent section 4.3.4

La réponse non-linéaire du système ne présente pas d'oscillation comme l'analyse fréquentielle nous l'avait montré dans le chapitre précédent. Dans ce cas, un modèle basses fréquences type IDZ tel que proposé dans le troisième chapitre section 3.3 est satisfaisant comme on peut le voir en figure 5.1. La prise en compte des deux premiers modes résonant/anti-résonant selon la méthode présentée dans le quatrième chapitre section 4.5 améliore toutefois le régime transitoire de la réponse aux variations de débits entrant comme on peut le voir sur la figure 5.2.

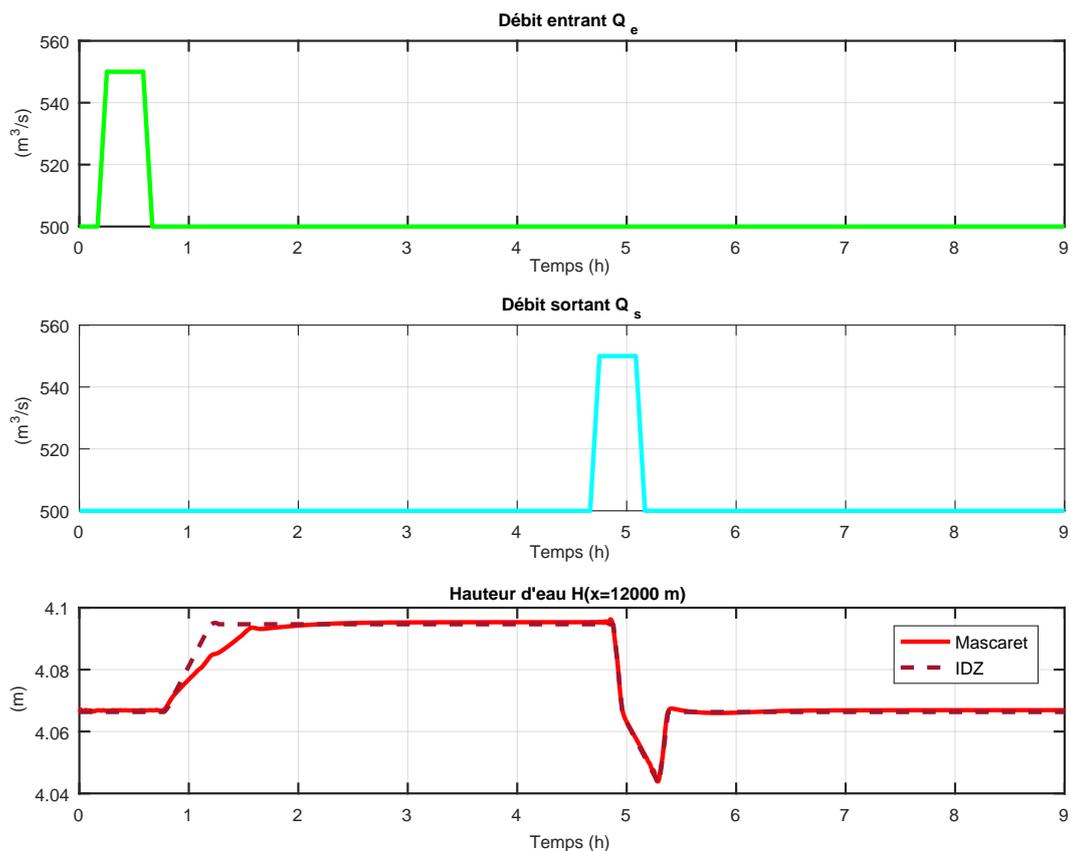


FIGURE 5.1 – Évolution de la hauteur d'eau en  $x = 0.75L$  en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d'une configuration type irrigation selon un modèle IDZ.

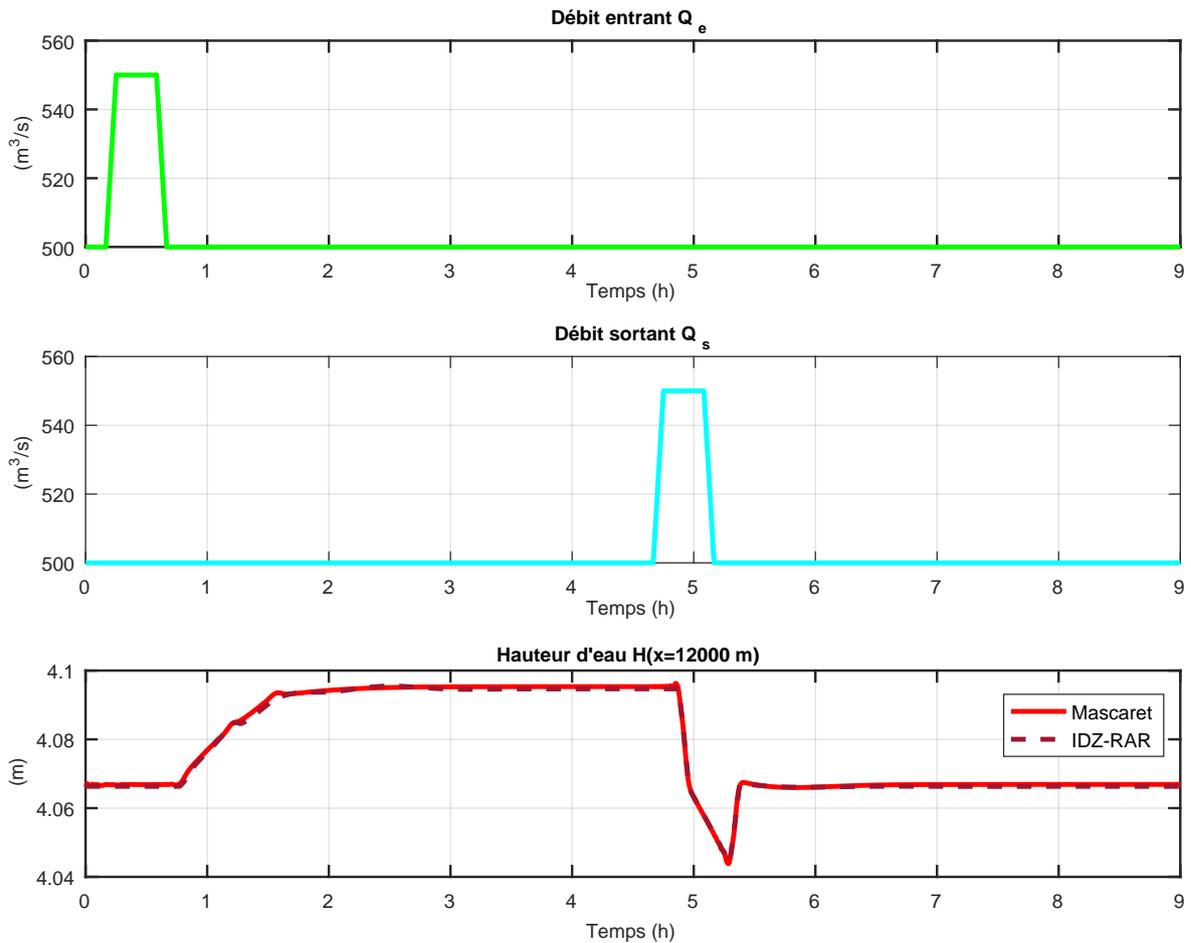


FIGURE 5.2 – Évolution de la hauteur d'eau en  $x = 0.75L$  en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d'une configuration type irrigation selon un modèle IDZ-RAR.

### 5.2.2 Configuration hydroélectrique

La configuration hydroélectrique considérée ici correspond à celle introduite dans le premier chapitre section 1.2.2.

#### Phénomène d'oscillation de la ligne d'eau

Contrairement à la dynamique autour d'une configuration type irrigation, les configurations hydroélectriques présentent des dynamiques oscillantes. Un modèle IDZ n'est pas suffisant pour représenter ce phénomène comme on peut le voir sur la figure 5.3 tandis que le modèle IDZ-RAR permet de l'approcher comme on peut le voir sur la figure 5.4.

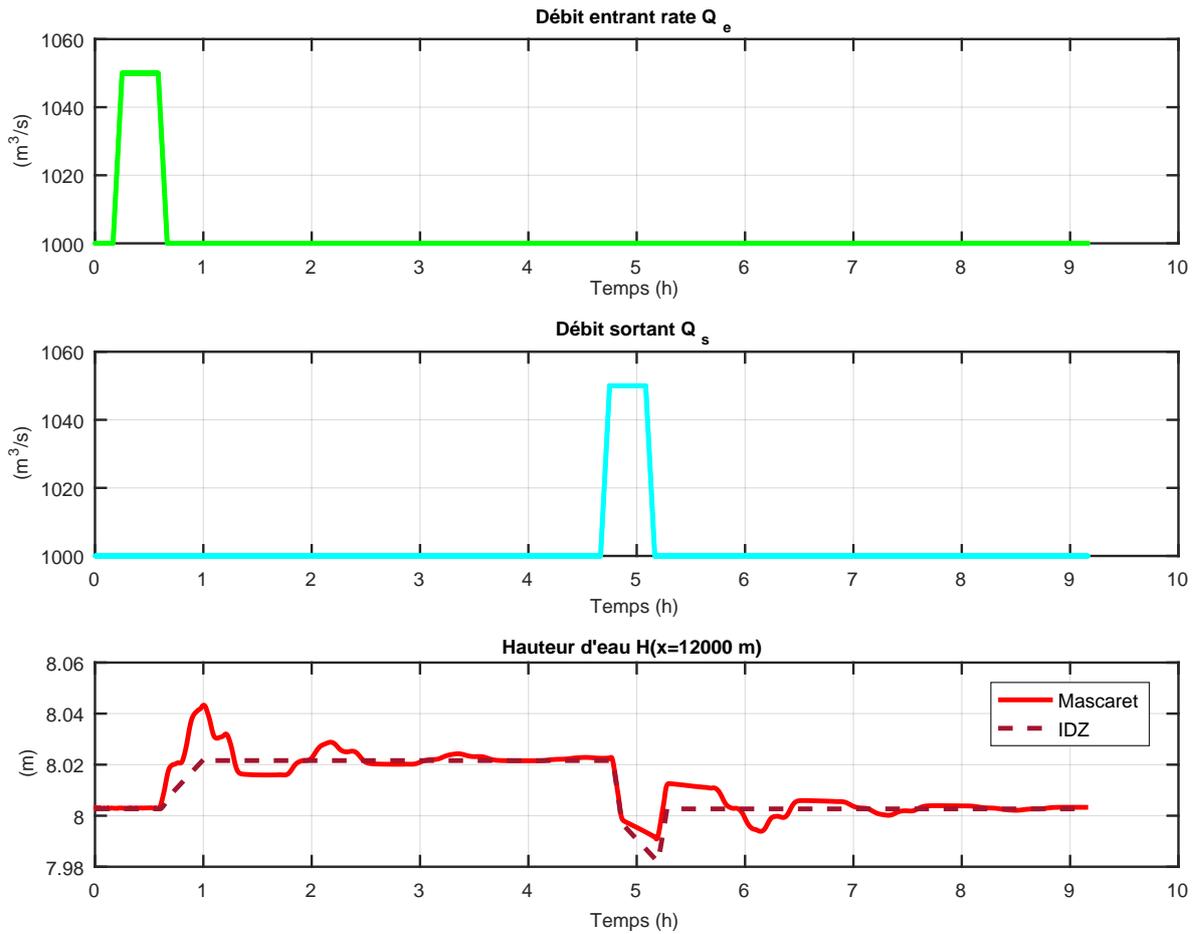


FIGURE 5.3 – Évolution de la hauteur d'eau en  $x = 0.75L$  en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d'une configuration hydroélectrique selon un modèle IDZ.

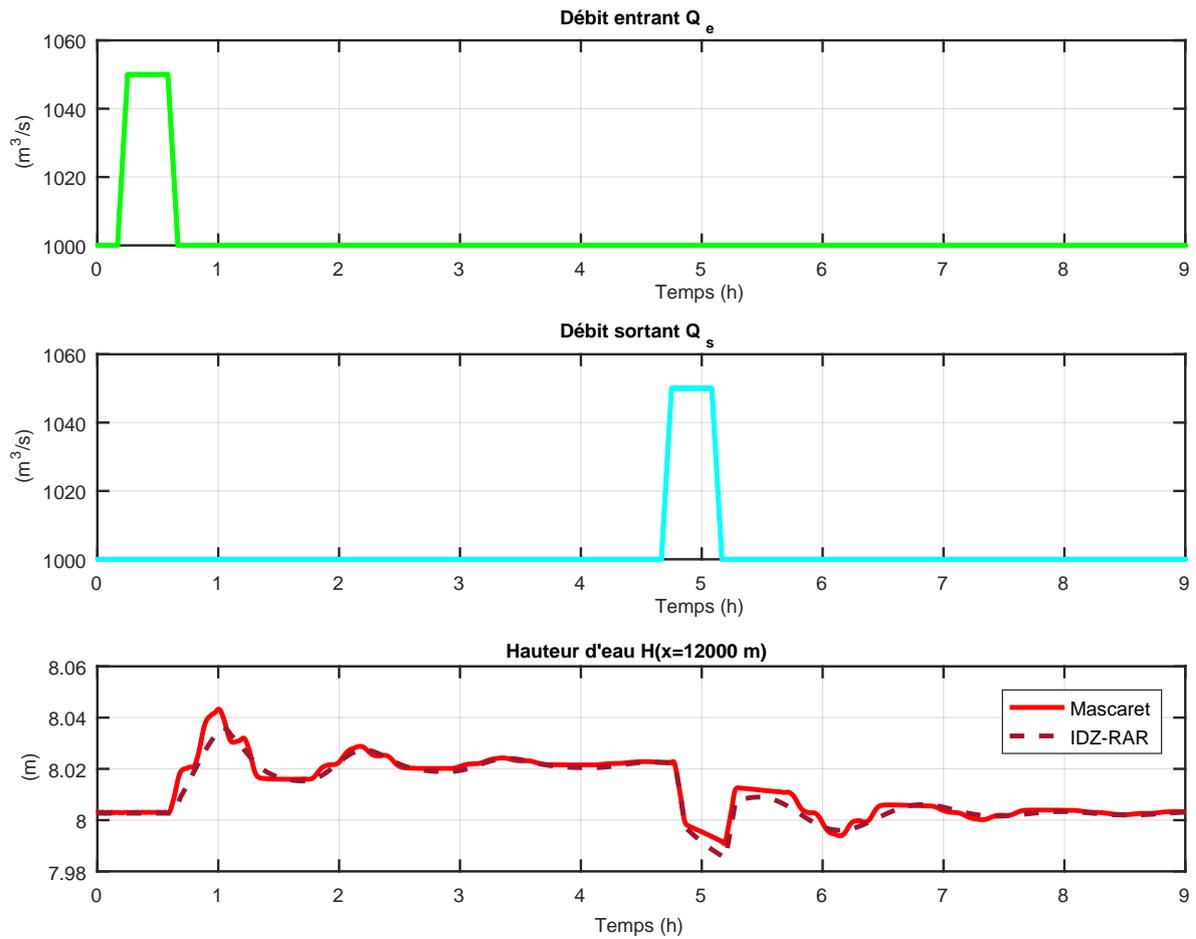


FIGURE 5.4 – Évolution de la hauteur d'eau en  $x = 0.75L$  en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d'une configuration hydroélectrique selon un modèle IDZ-RAR.

### Caractérisations des variations de débit

Dans les configurations hydroélectriques, un enjeu de maîtrise de variations des débits se présente aussi en plus de celui du contrôle de la hauteur d'eau. Les modes dominants du système ont un impact important sur cette dynamique que l'on peut caractériser à l'aide des modèles gain-RAR développés dans le chapitre précédent. Ceci est illustré sur les figures 5.5 et 5.6, sur cette dernière figure on voit que la dynamique oscillante est bien représentée par le modèle gain-RAR retardé.

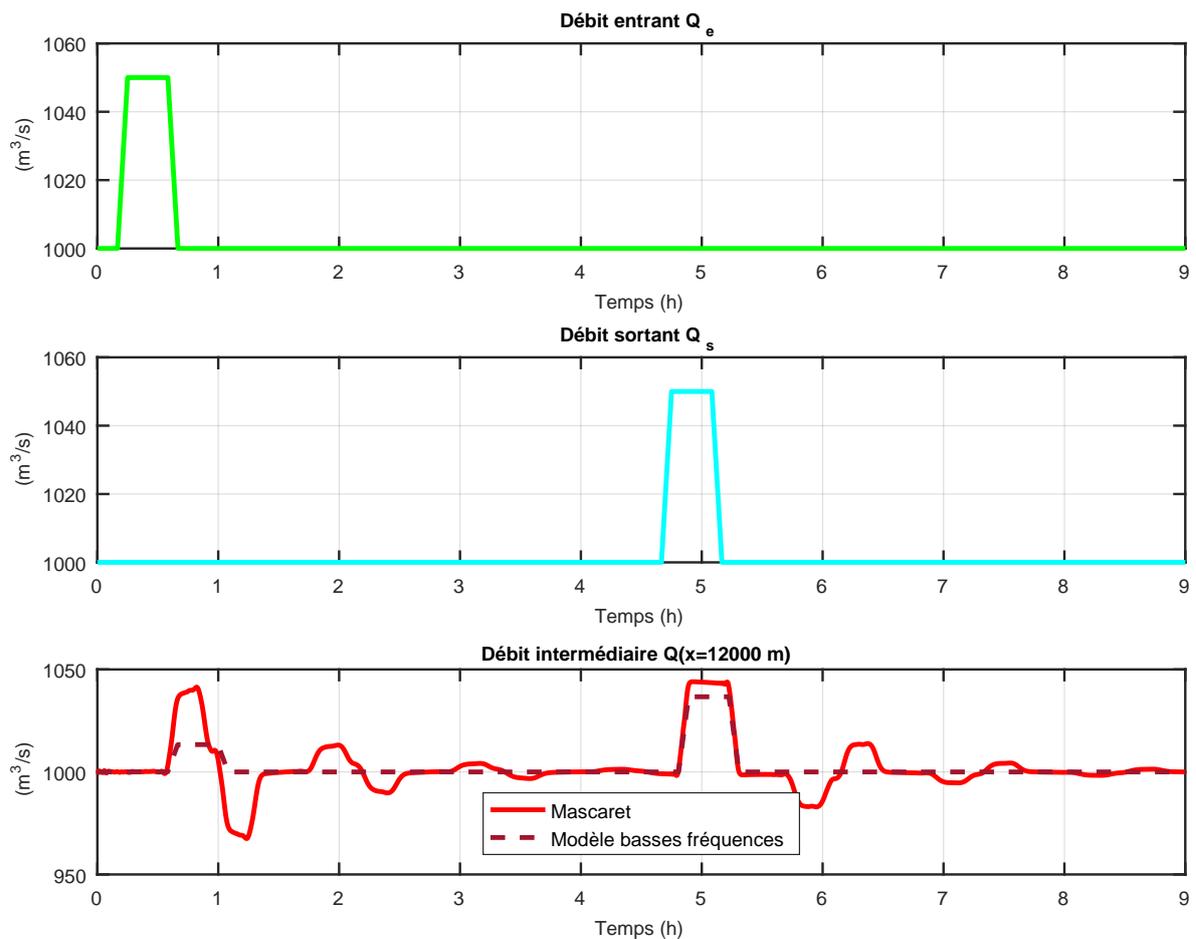


FIGURE 5.5 – Évolution du débit en  $x = 0.75L$  en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d'une configuration hydroélectrique selon un modèle basses fréquences.

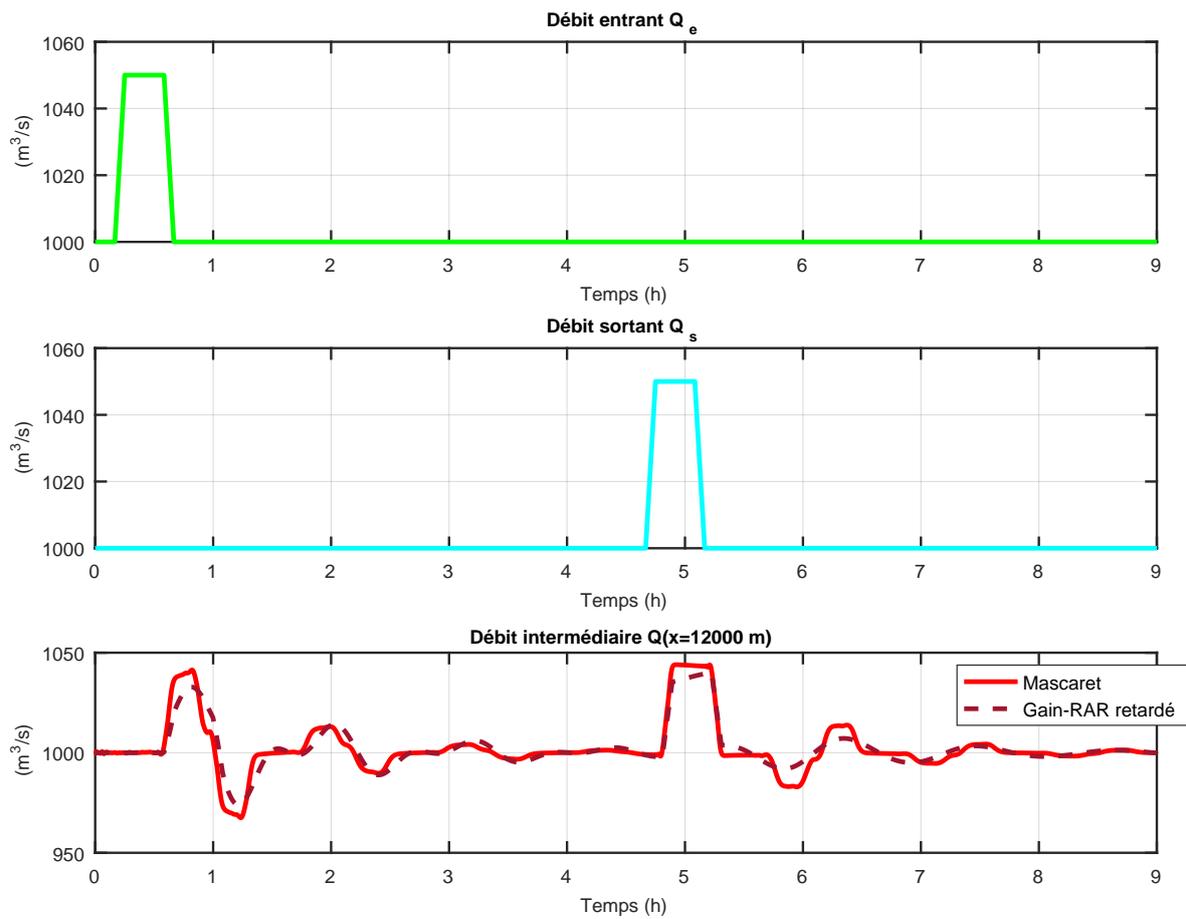


FIGURE 5.6 – Évolution du débit en  $x = 0.75L$  en réponse à des variations de débits entrant et sortant autour d’une configuration hydroélectrique selon un modèle gain-RAR retardé.

### Scenario à partir de mesures

Les débits entrant et sortant utilisés pour la simulation donnée en figures 5.7 et 5.8 sont issus de mesures de débits turbinés, le débit entrant correspondant à celui de la centrale de Rhinau et le débit sortant à celui de la centrale de Gerstheim. La comparaison avec les résultats issus du modèle non-linéaire montre une amélioration significative lorsque que les modes résonants et anti-résonnant sont modélisés. Les illustrations sont données pour un débit intermédiaire sur la figure 5.7 et pour une hauteur d'eau intermédiaire sur la figure 5.8.

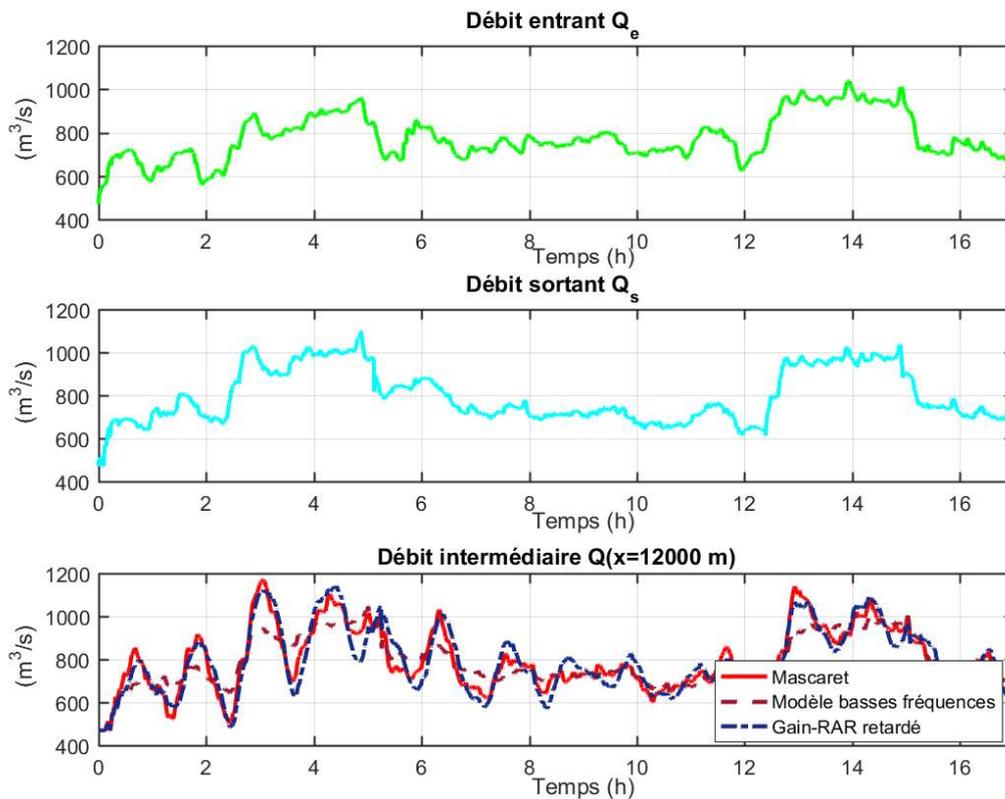


FIGURE 5.7 – Évolution du débit en  $x = 0.75L$  en réponse à des variations de débits entrant et sortant mesurés.

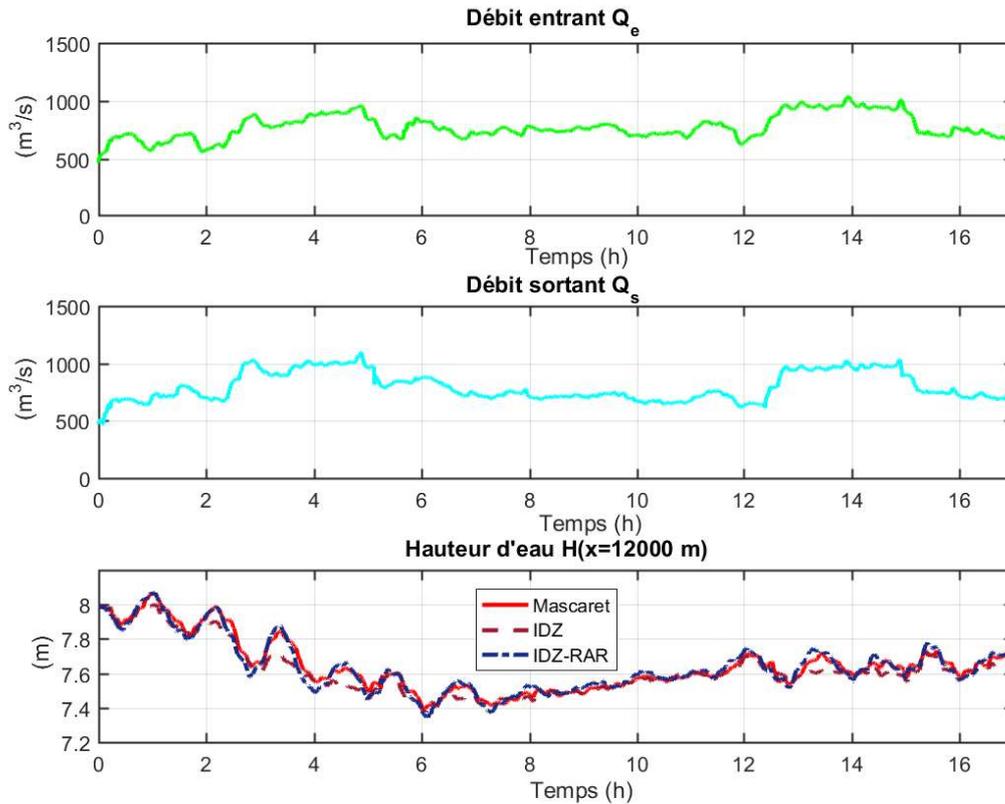


FIGURE 5.8 – Évolution de la hauteur d'eau en  $x = 0.75L$  en réponse à des variations de débits entrant et sortant mesurés.

### 5.3 Considération d'un cas réel

Afin d'illustrer les résultats sur un canal à géométrie variable, on propose de faire des comparaisons dans le domaine temporel sur un cas réel correspondant au canal de Fessenheim. Les conditions nominales d'exploitation correspondent pour ce canal à un régime non-uniforme défini par un débit support  $Q_0 = 1000m^3/s$  et une hauteur d'eau à l'aval de  $H_{av} = 13.1m$ . Afin d'illustrer de façon découplée le comportement du système vis à vis des variations du débit entrant d'une part, et vis à vis du débit sortant d'autre part, on considère un scénario simplifié comme dans la section précédente 5.2. La comparaison est effectuée en deux temps :

- dans un premier temps en code à code, c'est-à-dire vis à vis d'une représentation géométrique identique donnée dans le tableau 5.1 (voir figure 5.9) ,
- dans un second temps vis à vis d'une représentation plus réaliste de la géométrie du canal, c'est à dire avec une pente au fond et une section variables (voir figure 5.10).

Longueur du canal	$L(m)$	16 160
Coordonnée longitudinale	$x(m)$	12 900
largeur au radier	$b(m)$	80
fruit des berges	$\alpha(deg)$	76
Pente du fond	$I$	$3.9e^{-4}$
Coefficient de Manning-Strickler	$K_s(m^{1/3}/s)$	44

TABLE 5.1 – Caractéristiques du bief de Fessenheim

La représentation dite réaliste est construite à partir de quatorze coupes topographiques du profil au fond issues de mesures. Celles-ci sont données en annexe G. Entre le profil  $N^{\circ}6$  et  $N^{\circ}8$ , la section est constante, cette partie d'une longueur de  $12160m$  correspond au canal d'amenée. Entre le profil  $N^{\circ}12$  et le dernier  $N^{\circ}14$ , la section est aussi constante, cette partie d'une longueur de  $1570m$  correspond au canal de force motrice.

On montre à partir de mesures réelles du profil au fond qu'en configuration type hydroélectricité, l'approximation par une géométrie moyenne constante (pente au fond constante, profil en travers constant) est valide. Cela ne signifie pas que la section mouillée soit constante, en effet la profondeur d'eau n'est elle pas constante dans l'espace le long du canal. La simulation non-linéaire de l'écoulement dans le canal représenté à partir de relevés topographiques réels montre des résonances supplémentaires pour le modèle  $G_s$ , toutefois celles-ci sont d'amplitude négligeable. Ceci motive l'utilisation d'un modèle IDZ-RAR basé sur une représentation simplifiée de la géométrie du canal pour les études de régulation.

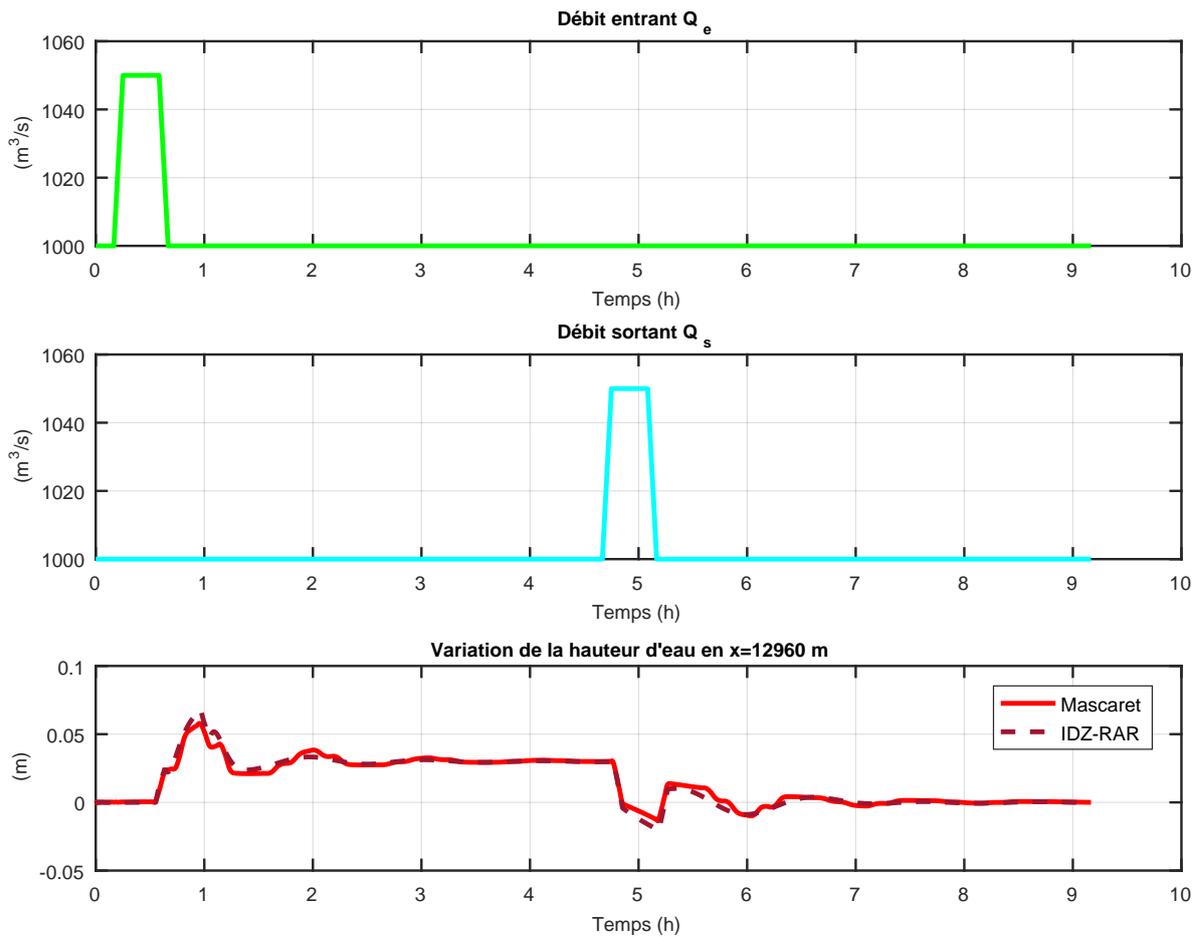


FIGURE 5.9 – Variation de la hauteur d'eau en  $x = 12960m$  en réponse à des variations de débits entrant et sortant avec une représentation simplifiée du canal.

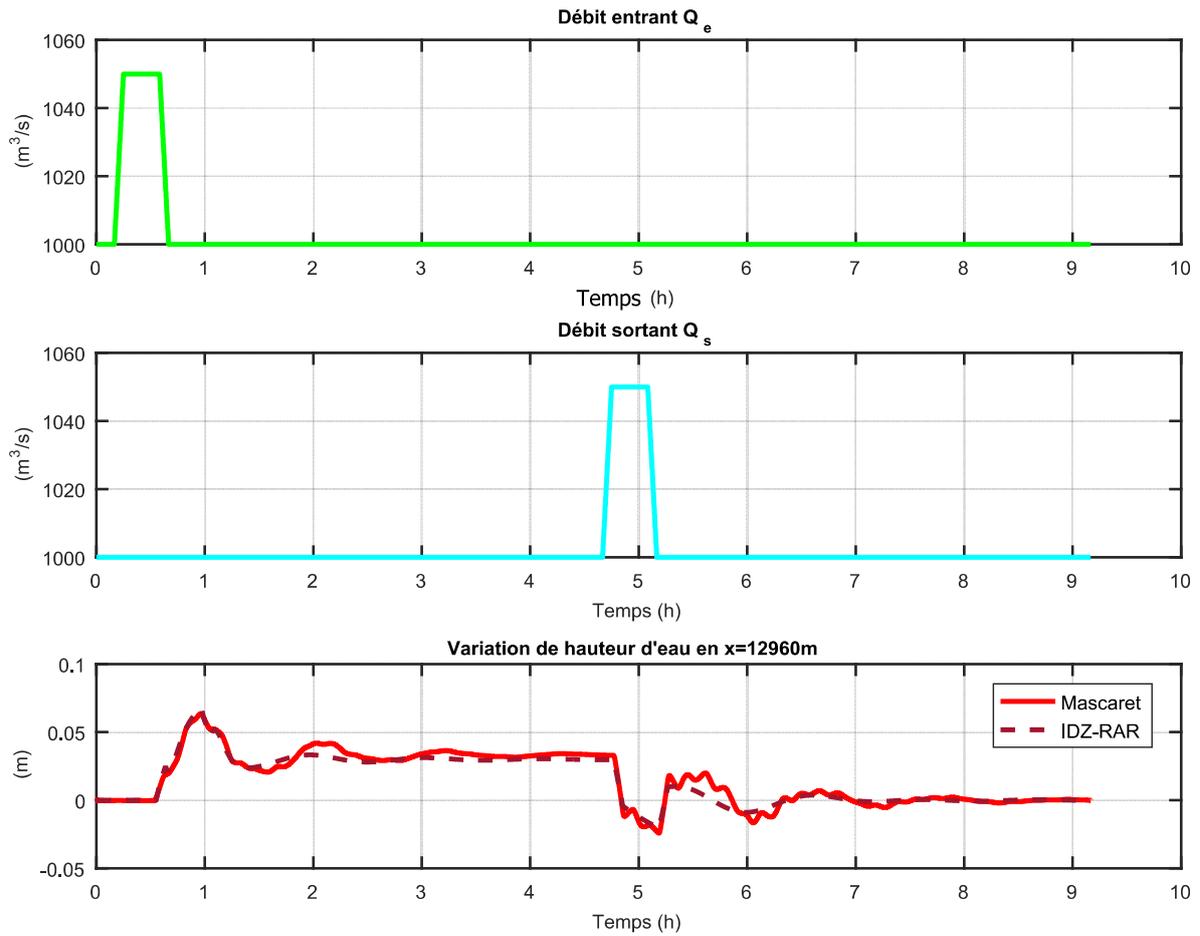


FIGURE 5.10 – Variation de la hauteur d'eau en  $x = 12\ 960m$  en réponse à des variations de débits entrant et sortant avec une représentation détaillée de la topographie du canal.

## 5.4 Régulation de niveau

On propose de donner un exemple d'utilisation des modèles d'ordre réduit développés dans cette thèse pour la synthèse d'un régulateur de niveau. Pour un canal donné, la régulation de niveau est classiquement effectuée par contrôle du débit turbiné de la centrale située à son aval (voir [MRS98]). Dans un contexte hydroélectrique, une élévation de la consigne de niveau peut correspondre à un placement de production qui nécessite d'augmenter le stockage dans un canal afin de produire plus d'électricité ultérieurement. Les perturbations à rejeter peuvent être la conséquence de nombreux phénomènes comme un prélèvement d'eau non prévu, un fonctionnement dégradé des écluses ou de certains groupes d'une centrale hydraulique. Le besoin de contrôler le niveau en un point intermédiaire du canal est lié à la configuration hydroélectrique. En régime non-uniforme dans un canal à section trapézoïdale, la valeur du niveau à une extrémité du canal ne correspond pas de façon bijective à des valeurs de niveau en tous points du canal. Or, la navigation sur ces canaux traversés par des ponts ainsi que le marnage limité sur certaines portions de canaux nécessitent de maintenir les niveaux dans des intervalles restreints en des points intermédiaires.

On trouve dans la littérature de nombreuses méthodes de synthèse de contrôleur basées sur des modèles ID (voir [RRC09], [Rus10]). Dans le contexte hydroélectrique, la robustesse est un aspect important puisque les paramètres du canal modélisé sont incertains. Pour l'évaluer quantitativement, on peut utiliser un critère sur l'inverse de la marge de module  $M_S$ . La marge de module correspond à la plus petite distance du point critique  $-1$  au lieu de transfert en boucle ouverte, son inverse correspond au maximum de la fonction de sensibilité soit

$$M_S = \max_{\omega} \frac{1}{|1 + C_y(j\omega)P(j\omega)|} \quad (5.1)$$

avec  $C_y$  le contrôleur et  $P$  le modèle du système. Pour une régulation de niveau par l'aval, le modèle du système est  $G_s$ .

La marge de module permet de garantir des bornes minimales sur la marge de gain  $A_m$  et la marge de phase  $\Phi_m$ , on peut montrer que

$$A_m > \frac{M_S}{M_S - 1}, \quad (5.2)$$

$$\Phi_m > 2 \sin^{-1} \left( \frac{1}{2M_S} \right). \quad (5.3)$$

Ainsi un maximum de la fonction de sensibilité de 1.4 (équivalente à une marge de module d'environ 0.7) garantit une marge de gain supérieur à 10 dB et une marge de phase supérieure à  $41^\circ$ .

Dans [AR12], une méthode est proposée pour obtenir un régulateur Proportionnel Intégral à deux degrés de liberté à partir d'une spécification de marge de module. Les paramètres optimisés sont  $\{ K_p$  le gain proportionnel,  $T_i$  la constante de temps de l'intégrateur,  $\beta$  la pondération proportionnelle sur le suivi de consigne  $\}$ . On a alors le contrôleur suivant :

$$u(s) = K_p \left( \beta r(s) - y(s) + \frac{1}{T_i s} [r(s) - y(s)] \right) \quad (5.4)$$

avec  $r(s)$  la consigne,  $u(s)$  le contrôle,  $y(s)$  la sortie contrôlée. Pour une régulation de niveau par l'aval, le contrôle est la variation de débit sortant et la sortie est la variation de hauteur d'eau en  $x$ . On propose ici d'appliquer cette méthode à la régulation de niveau pour l'exemple pris tout au long de ce manuscrit introduit dans la section 1.2.2.

Afin de prendre en compte le contenu hautes fréquences de  $G_s$ , on ajoute un compensateur à avance de phase. En effet, sans le prendre en compte, le contrôleur proposé conduit à un système instable. La dynamique hautes fréquences représentée par le zéro et les modes résonants du système n'est pas négligeable.

On illustre les performances obtenues avec une spécification de marge de module de  $M_S = 1.4$  pour deux scénarii temporels. Le premier correspond à un changement de consigne de niveau de  $10\text{cm}$  imposé au temps  $t = 5\text{min}$ , il est donné sur la figure 5.11. Le second correspond à une perturbation avec une prise de charge de  $3\text{m}^3/\text{s}/\text{min}$  appliquée au temps  $t = 60\text{min}$  jusqu'à atteindre une valeur constante de  $60\text{m}^3/\text{s}$ , le comportement du système est donné sur la figure 5.12. Le système non-linéaire se comporte de façon similaire au résultat obtenu avec le modèle IDZ-RAR utilisé pour la synthèse du contrôleur.

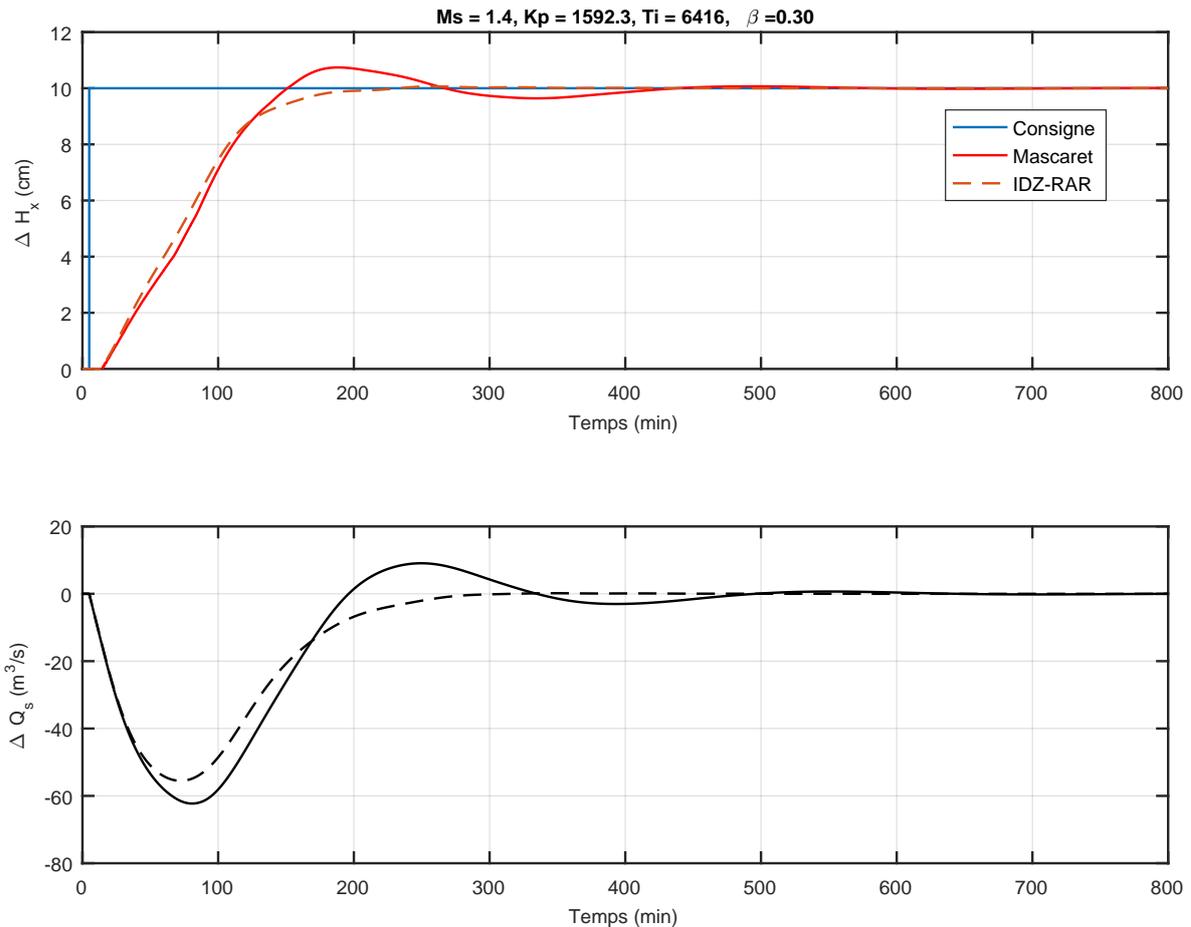


FIGURE 5.11 – Suivi de consigne.

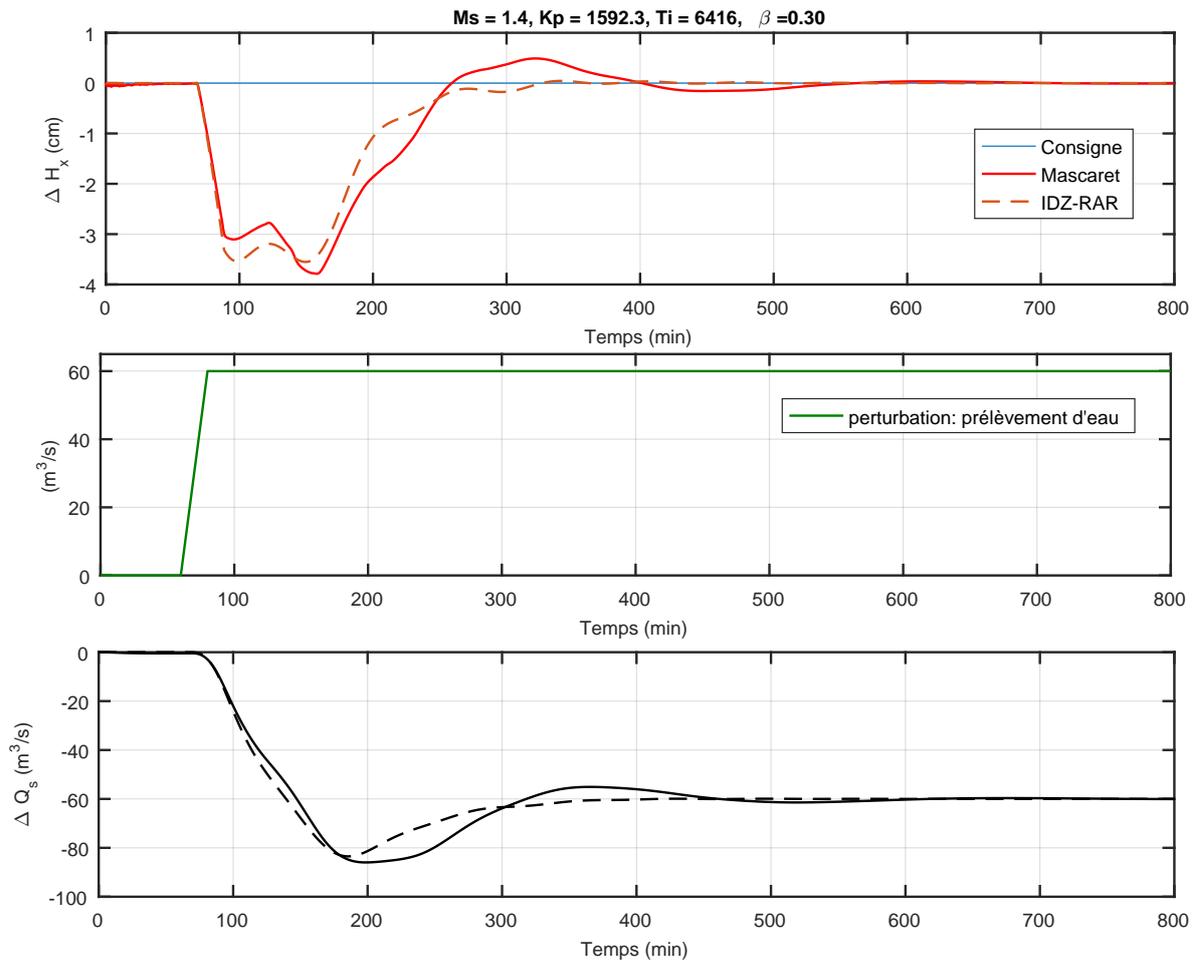


FIGURE 5.12 – Rejet de perturbation.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons illustré les performances des approximations de modèles proposées dans les deux chapitres précédents. Le besoin de représenter les modes dominants en configuration hydroélectrique a été mis en évidence à partir de scénarii temporels. Enfin, une régulation de niveau basée sur un modèle IDZ-RAR a été proposée.



# Conclusion et perspectives

Après une conclusion concernant les contributions de cette thèse, différentes perspectives ouvertes à la suite de ces travaux seront discutées.

Plusieurs approches permettant de modéliser et de caractériser la dynamique d'écoulement dans les canaux sous exploitation hydroélectrique ont été proposées. L'accent a été mis sur la recherche de modélisations d'ordre réduit permettant d'évaluer de façon explicite la sensibilité du système à ses paramètres. Ces approches sont basées sur une étude des équations de Saint-Venant dans le contexte d'une configuration hydroélectrique. Ce type de configuration ne permet pas de faire les hypothèses classiquement utilisées dans le contexte plus largement étudié des écoulements dans les canaux d'irrigation. La définition de cette notion de configuration hydroélectrique nous a permis d'envisager trois approches principales partant d'une considération des équations de Saint-Venant linéarisées autour d'un régime non-uniforme. On les rappelle ici :

- une approche analytique basses fréquences,
- une réduction de modèle basée directement sur la réponse fréquentielle du canal,
- une recherche de solution approximée par la méthode WKB.

Les avantages et inconvénients de ces approches ont été soulignés dans les conclusions partielles des chapitres 3 et 4. On en rappelle les éléments importants.

La première approche nous a conduit à des fonctions de transfert analytiques dont le domaine de validité est par construction limité. Les deuxième et troisième approches, bien que reposant sur des critères différents, permettent de modéliser les premiers modes de résonance/anti-résonance.

Pour la deuxième approche, la plage de fréquence sur laquelle la réduction de modèle est réalisée, et l'ordre réduit désiré sont des données d'entrée. Ceci nous permet de garantir une optimalité du modèle résultant. Cette approche nécessite d'avoir une réponse fréquentielle numérique des équations de Saint-Venant linéarisées, ce qui complexifie l'étude de différents points de fonctionnement et paramétrisations.

Pour la troisième approche, l'approximation est réalisée en imposant la forme de la solution. Cette approche est inspirée de la méthode WKB. Son adaptation à la résolution des équations de Saint-Venant linéarisées nous a conduit à un critère spatio-fréquentiel. Celui-ci met en évidence une erreur en basses fréquences, ainsi pour la proposition de modèle d'ordre réduit, les résultats issus de la première approche sont utilisés. L'expression analytique de la solution approximée WKB permet de modéliser les modes de résonance/anti-résonance explicitement. Après avoir illustré vis à vis de simulations non-linéaires le comportement de modèles d'ordre réduit, avec et sans prise en compte des premiers modes de résonance et anti-résonance, une utilisation du modèle IDZ-RAR issu de cette dernière approche a été proposée pour la régulation de niveau.

Une perspective théorique consiste à étudier des bornes sur les erreurs d'approximations des solutions approximées obtenues par l'approche basses fréquences et l'approche WKB.

La perspective d'une conduite en puissance de la vallée hydraulique du Rhin, avec la possibilité de réaliser de l'ajustement et de la modulation de puissance de façon automatique, était une motivation sous-jacente aux travaux de modélisation de cette thèse. Dans cette perspective, la prise en compte explicite des sensibilités des différents canaux aux phénomènes d'oscillation pourrait être incluse dans l'optimisation globale de la répartition de puissance globale de la vallée.

Dans la continuité des travaux réalisées dans cette thèse, il serait intéressant de considérer l'interconnexion de canaux. A partir des modèles avec modes de résonances que l'on a proposés, on pourrait évaluer l'impact sur leur fréquence propre, leur amortissement.

Les canaux utilisés pour la production d'électricité et la navigation se divisent en deux à l'amont des centrales hydrauliques, avec un canal de force motrice et un canal de navigation qui conduit aux écluses. Dans certains cas, la longueur du canal de navigation n'est pas négligeable. Il est possible de combiner les modèles d'ordre réduit par continuité de la hauteur d'eau au niveau de la division du canal. Une perspective consisterait à évaluer l'intérêt de la modélisation de cette configuration pour la synthèse des régulateurs de niveau. Une autre perspective consisterait à calibrer les paramètres d'une représentation simplifiée en un seul canal global vis à vis de mesures. En effet, que ce soit par l'approche basses fréquences ou l'approche WKB, les modèles obtenus sont des fonctions analytiques des paramètres du canal (pente au fond, coefficient de frottement etc), dans cette thèse ces paramètres sont issus de données théoriques. En pratique, une étape supplémentaire consisterait à caler les valeurs de ces paramètres vis à vis de mesures. Cette étape serait aussi utile pour les canaux qui ne présentent pas cette configuration mais dont on n'a pas une connaissance précise des paramètres.

Dans la suite du développement de modèles LPV réalisé dans cette thèse par une méthode de réduction de modèle optimale, il serait envisageable de développer une commande LPV à partir de ces modèles pour la régulation de niveau. Le paramètre variant le plus pertinent dans ce contexte est le débit support. Ce type de commande, bien qu'étant plus complexe qu'un régulateur PI de par cette dépendance paramétrique, pourrait permettre d'atteindre de meilleures performances.

Jusque récemment, des résultats par approche de Lyapunov de stabilisation des équations de Saint-Venant sous leur forme non-linéaire avaient été obtenus uniquement dans le cas uniforme, c'est-à-dire en absence de pente et de frottement (voir [CNB99], [CNB07]). De nouvelles contributions abordent la stabilisation des équations de Saint-Venant sans négliger les termes de frottement et de pente. Des fonctions de Lyapunov adaptées sont notamment proposées dans [HS18] et [BC17]. Un régulateur PI en a été dérivé dans [BC18]. Il serait intéressant de comparer les performances obtenues en régulation de niveau avec ces approches vis à vis de celles obtenues en synthétisant le contrôleur à partir d'approximations des équations de Saint-Venant linéarisées proposées dans cette thèse. On pourrait combiner ces approches en ajoutant un terme de tendance lié à l'impact de variations de débits prévues, par exemple causées par des modulations de puissance.

# Linéarisation des équations de Saint-Venant

Dans cette annexe, la linéarisation des équations de Saint-Venant est réalisée autour d'un point de fonctionnement défini par un régime fluvial non-uniforme. Soient les EDP de Saint-Venant pour un canal de section trapézoïdale :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 & \text{(A.1)} \\ \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{\text{(A.2.1)}} + \underbrace{\frac{\partial(Q^2/S)}{\partial x}}_{\text{(A.2.2)}} + \underbrace{gS \frac{\partial H}{\partial x}}_{\text{(A.2.3)}} = \underbrace{gSI}_{\text{(A.2.4)}} - \underbrace{gSJ}_{\text{(A.2.5)}} & \text{(A.2)} \end{cases}$$

avec  $S$  la section mouillée,  $Q$  le débit,  $g$  la constante gravitationnelle,  $H$  la hauteur d'eau,  $I$  la pente au fond,  $J$  les pertes de charge.

Posons,  
 $h(x, t) = H(x, t) - H_0(x)$  , noté  $h$  par la suite,  
 $q(x, t) = Q(x, t) - Q_0$  , noté  $q$  par la suite.

La linéarisation de la surface (et donc du premier terme de (A.1) et de (A.2.4)) s'écrit :

$$\Delta S = \left. \frac{\partial S}{\partial H} \right|_{H_0(x)} h \quad \text{(A.3)}$$

$$\Delta S = B_0(x)h \quad \text{(A.4)}$$

avec

$$B_0(x) = 2mH_0(x) + b. \quad \text{(A.5)}$$

La linéarisation du terme (A.2.2) s'écrit :

$$\Delta \left( \frac{Q^2}{S} \right) = \left. \frac{\partial \left( \frac{Q^2}{S} \right)}{\partial Q} \right|_{H_0(x), Q_0} q + \left. \frac{\partial \left( \frac{Q^2}{S} \right)}{\partial H} \right|_{H_0(x), Q_0} h \quad \text{(A.6)}$$

$$\Delta \left( \frac{Q^2}{S} \right) = 2 \frac{Q_0}{S_0(x)} q - \frac{Q_0^2}{S_0^2(x)} B_0 h \quad \text{(A.7)}$$

que l'on peut exprimer en fonction de la vitesse d'écoulement d'équilibre  $V_0(x) = \frac{Q_0}{S_0(x)}$

$$\Delta \left( \frac{Q^2}{S} \right) = 2V_0(x)q - B_0V_0^2(x)h. \quad (\text{A.8})$$

La linéarisation du terme (A.2.3) s'écrit :

$$\Delta \left( S \frac{\partial H}{\partial x} \right) = S_0(x) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial H_0(x)}{\partial x} B_0 h. \quad (\text{A.9})$$

Soit le modèle de pertes de charge, J,

$$J = \frac{Q|Q|}{K_s^2 S^2 R_h^{4/3}}, \quad (\text{A.10})$$

la linéarisation du terme (A.2.5) s'écrit :

$$\Delta(SJ) = S_0(x)\Delta J + J_0(x)\Delta S \quad (\text{A.11})$$

avec

$$S_0(x) = mH_0^2(x) + bH_0(x), \quad (\text{A.12})$$

$$\Delta J = J_{0h}(x)h + J_{0q}(x)q, \quad (\text{A.13})$$

$$J_0(x) = \frac{Q_0^2}{K_s^2 S_0^2(x) R_{h_0}^{4/3}(x)} \quad (\text{A.14})$$

$\Delta S$  donné en (A.4).

Ainsi (A.11) s'écrit :

$$\Delta(SJ) = \left( S_0(x)J_{0q}(x) \right) q + \left( J_0(x)B_0(x) + S_0(x)J_{0h}(x) \right) h. \quad (\text{A.15})$$

Les coefficients  $J_{0h}(x)$  et  $J_{0q}(x)$  de la linéarisation de (A.13) s'expriment :

$$J_{0h}(x) = \left. \frac{\partial J_0}{\partial H} \right|_{H_0(x), Q_0} \quad (\text{A.16})$$

$$J_{0q}(x) = \left( \frac{Q_0}{K_s} \right)^2 \left. \frac{d}{dH} \left( P_m^{4/3} S^{-10/3} \right) \right|_{H_0(x)} \quad (\text{A.17})$$

$$J_{0h}(x) = \left( \frac{Q_0}{K_s} \right)^2 \left( P_{m0}(x)^{4/3} \left. \frac{d(S^{-10/3})}{dH} \right|_{H_0(x)} + S_0(x)^{-10/3} \left. \frac{d(P^{4/3})}{dH} \right|_{H_0(x)} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$J_{0h}(x) = \left(\frac{Q_0}{K_s}\right)^2 \left( P_{m0}^{4/3}(x) \left(-\frac{10}{3} B_0(x) S_0^{-\frac{10}{3}-1}(x)\right) + S_0^{-10/3}(x) \frac{4}{3} \frac{2}{\cos(\alpha)} P_{m0}^{\frac{4}{3}-1}(x) \right) \quad (\text{A.19})$$

$$J_{0h}(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{P_{m0}^2(x)}{S_0^5(x)}\right)^{2/3} \left(\frac{Q_0}{K_s}\right)^2 \left( \frac{4}{\cos(\alpha) P_{m0}(x)} - \frac{5B_0(x)}{S_0(x)} \right) \quad (\text{A.20})$$

et

$$J_{0q}(x) = \frac{\partial J_0(x)}{\partial Q} \Big|_{H_0(x), Q_0} \quad (\text{A.21})$$

$$J_{0q}(x) = \frac{2Q_0}{K_s^2 S_0^2(x) R_{h0}^{4/3}(x)}. \quad (\text{A.22})$$

Le système linéarisé s'écrit donc :

$$\begin{cases} B_0(x) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + 2V_0(x) \frac{\partial q}{\partial x} + 2 \frac{dV_0(x)}{dx} q - B_0(x) V_0^2(x) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial (B_0(x) V_0^2(x))}{\partial x} h \\ + g S_0(x) \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial H_0(x)}{\partial x} B_0(x) h \\ = g I B_0(x) h - g (J_0(x) B_0(x) + S_0(x) J_{0h}(x)) h - g S_0(x) J_{0q}(x) q \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

$$= g I B_0(x) h - g (J_0(x) B_0(x) + S_0(x) J_{0h}(x)) h - g S_0(x) J_{0q}(x) q \quad (\text{A.24})$$

soit,

$$\begin{cases} B_0(x) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + 2V_0(x) \frac{\partial q}{\partial x} + \left(g S_0(x) - B_0(x) V_0^2(x)\right) \frac{\partial h}{\partial x} + \left(g S_0(x) J_{0q}(x) + 2 \frac{dV_0(x)}{dx}\right) q \\ + \left( - \frac{\partial (B_0(x) V_0^2(x))}{\partial x} + g \frac{\partial H_0(x)}{\partial x} B_0(x) \right. \\ \left. - g I B_0(x) + g (J_0(x) B_0(x) + S_0(x) J_{0h}(x)) \right) h = 0. \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

$$- g I B_0(x) + g (J_0(x) B_0(x) + S_0(x) J_{0h}(x)) \Big) h = 0. \quad (\text{A.26})$$

Notons,

$$\delta_0(x) = c_0^2(x) - V_0^2(x) \quad (\text{A.27})$$

$$\beta_0(x) = g S_0(x) J_{0q}(x) + 2 \frac{dV_0(x)}{dx} \quad (\text{A.28})$$

$$\gamma_0(x) = g \left( I - J_0(x) - \frac{dH_0(x)}{dx} - \frac{S_0(x) J_{0h}(x)}{B_0(x)} \right) + \frac{V_0(x)}{B_0(x)} \left( V_0(x) \frac{dB_0(x)}{dx} + 2B_0(x) \frac{dV_0(x)}{dx} \right), \quad (\text{A.29})$$

on obtient le système de Saint-Venant linéarisé suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -B_0(x) \gamma_0(x) & \beta_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_0(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B_0(x) \delta_0(x) & 2V_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.30})$$



# Démonstration des propriétés des modèles basses fréquences

---

Dans cette annexe, les paramètres des modèles débits/débits et hauteurs/débits obtenus par une approche basses fréquences (voir section 3.3) sont analysés. On rappelle la structure de ces modèles :

- modèles débits / débit entrant :  $\forall x \in [0, L], H_e(x, s) = K_e(x)e^{-\tau_e(x)s}$ ,
- modèles débits / débit sortant  $\forall x \in [0, L], H_s(x, s) = K_s(x)e^{-\tau_s(x)s}$ ,
- modèles hauteurs / débit entrant  $\forall x \in [0, L], G_e(x, s) = \frac{1 + T_e(x)s}{A_e(x)s}e^{-\tau_e(x)s}$ ,
- modèles hauteurs / débit entrant  $\forall x \in [0, L], G_s(x, s) = -\frac{1 + T_s(x)s}{A_e(x)s}e^{-\tau_s(x)s}$ .

## Propriété 1

Le retard  $\tau_e(x)$  est positif et croissant en  $x$  le long du bief.

*Preuve.* Montrons que  $\left(\forall x \in [0, L], \tau_e(x) > 0, \frac{d\tau_e(x)}{dx} > 0\right)$ .

Soit  $x \in [0, L]$ .

Nous rappelons l'expression de  $x \mapsto \tau_e(x)$  :

$$\tau_e(x) = \int_0^x \frac{1}{c_0(\sigma) + V_0(\sigma)} d\sigma. \quad (\text{B.1})$$

Soit  $x \mapsto g_e(x)$ , une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{c_0(x) + V_0(x)}$ , par définition,

$$\frac{dg_e(x)}{dx} = \frac{1}{c_0(x) + V_0(x)}. \quad (\text{B.2})$$

Par définition de l'écoulement fluvial,

$$c_0(x) > 0 \text{ et } V_0(x) > 0. \quad (\text{B.3})$$

Ainsi,

$$\frac{dg_e(x)}{dx} > 0. \quad (\text{B.4})$$

La fonction  $x \mapsto g_e(x)$  est donc croissante. Par définition de  $x \mapsto g_e(x)$  et de  $x \mapsto \tau_e(x)$ ,

$$\tau_e(x) = g_e(x) - g_e(x = 0), \quad \text{et donc} \quad \frac{d\tau_e(x)}{dx} = \frac{dg_e(x)}{dx}. \quad (\text{B.5})$$

Ainsi  $x \mapsto \tau_e(x)$  est croissante par croissance de  $x \mapsto g_e(x)$  et expression (B.5). De plus,

$$\tau_e(x = 0) = \int_0^0 \frac{1}{c_0(\sigma) + V_0(\sigma)} d\sigma = 0, \quad (\text{B.6})$$

d'où la positivité de  $x \mapsto \tau_e(x)$  par nullité en  $x = 0$  et croissance de  $x \mapsto \tau_e(x)$ .  $\square$

### Propriété 2

*Le retard  $\tau_s(x)$  est positif et décroissant en  $x$  le long du bief.*

*Preuve.* Montrons que  $\left( \forall x \in [0, L], \quad \tau_s(x) > 0, \quad \frac{d\tau_s(x)}{dx} < 0 \right)$ .

Soit  $x \in [0, L]$ .

Nous rappelons l'expression de  $x \mapsto \tau_s(x)$  :

$$\tau_s(x) = \int_x^L \frac{1}{c_0(\sigma) - V_0(\sigma)} d\sigma. \quad (\text{B.7})$$

Soit  $x \mapsto g_s(x)$ , une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{c_0(x) - V_0(x)}$ , par définition,

$$\frac{dg_s(x)}{dx} = \frac{1}{c_0(x) - V_0(x)}. \quad (\text{B.8})$$

Par définition de l'écoulement fluvial,

$$c_0(x) > V_0(x) > 0. \quad (\text{B.9})$$

Ainsi,

$$\frac{dg_s(x)}{dx} > 0. \quad (\text{B.10})$$

La fonction  $x \mapsto g_s(x)$  est donc croissante. Par définition de  $x \mapsto g_s(x)$  et de  $x \mapsto \tau_s(x)$ ,

$$\tau_s(x) = g_s(x = L) - g_s(x), \quad \text{et donc} \quad \frac{d\tau_s(x)}{dx} = -\frac{dg_s(x)}{dx}. \quad (\text{B.11})$$

Ainsi  $x \mapsto \tau_s(x)$  est décroissante par croissance de  $x \mapsto g_s(x)$  et expression (B.11). De plus,

$$\tau_s(x = L) = \int_L^L \frac{1}{c_0(\sigma) - V_0(\sigma)} d\sigma = 0, \quad (\text{B.12})$$

d'où la positivité de  $x \mapsto \tau_s(x)$  par nullité en  $x = L$  et décroissance de  $x \mapsto \tau_s(x)$ .  $\square$

**Propriété 3**

la somme des gains  $K_e(x)$  et  $K_s(x)$  est unitaire tout au long du bief, ces gains ont donc nécessairement des sens de variations opposés.

*Preuve.* Montrons que  $\left(\forall x \in [0, L], \quad K_e(x) + K_s(x) = 1, \quad \frac{dK_e(x)}{dx} = -\frac{dK_s(x)}{dx}\right)$ .

Soit  $x \in [0, L]$ . Nous rappelons les expressions de  $x \mapsto K_e(x)$  et  $x \mapsto K_s(x)$  :

$$K_e(x) = \frac{F(x) - F_L}{F_0 - F_L}, \quad (\text{B.13})$$

$$K_s(x) = \frac{F_0 - F(x)}{F_0 - F_L}. \quad (\text{B.14})$$

D'où

$$\begin{aligned} K_e(x) + K_s(x) &= \frac{F(x) - F_L + F_0 - F(x)}{F_0 - F_L} \\ &= \frac{F_0 - F_L}{F_0 - F_L} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

(B.15) implique

$$\begin{aligned} \frac{dK_e(x)}{dx} + \frac{dK_s(x)}{dx} &= 0 \\ \frac{dK_e(x)}{dx} &= -\frac{dK_s(x)}{dx} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

□

**Propriété 4**

Le gain  $K_e(x)$  est compris entre 0 et 1 et décroissant en  $x$  le long du bief.

*Preuve.* Montrons que  $\left(\forall x \in [0, L], \quad K_e(x) \in [0, 1], \quad \frac{dK_e(x)}{dx} < 0\right)$ .

Soit  $x \in [0, L]$ .

Nous rappelons l'expression de  $x \mapsto K_e(x)$  :

$$K_e(x) = \frac{F(x) - F_L}{F_0 - F_L}, \quad (\text{B.17})$$

où  $x \mapsto F(x)$  est la primitive de la fonction  $x \mapsto e^{\int \left(\frac{\rho_0(x)}{\delta_0(x)}\right) dx}$  telle que,

$$F(x=0) = F_0, \quad F(x=L) = F_L. \quad (\text{B.18})$$

Par positivité de la fonction exponentielle,  $F$  est une fonction croissante. Ainsi,

$$F_0 - F_L \leq F(x) - F_L \leq 0. \quad (\text{B.19})$$

On en déduit directement  $K_e(x) \in [0, 1]$ . De plus,

$$\frac{dK_e(x)}{dx} = \frac{1}{F_0 - F_L} \frac{dF(x)}{dx} \leq 0, \quad (\text{B.20})$$

ce qui prouve la décroissance de  $x \mapsto K_e(x)$ .  $\square$

### Propriété 5

*Le gain  $K_s(x)$  est compris entre 0 et 1 et croissant en  $x$  le long du bief.*

*Preuve.* Montrons que  $\left( \forall x \in [0, L], \quad K_s(x) \in [0, 1], \quad \frac{dK_s(x)}{dx} > 0 \right)$ .

Soit  $x \in [0, L]$ .

Nous rappelons l'expression de  $x \mapsto K_s(x)$  :

$$K_s(x) = \frac{F_0 - F(x)}{F_0 - F_L}, \quad (\text{B.21})$$

où  $x \mapsto F(x)$  est la primitive de la fonction  $x \mapsto e^{\int \left( \frac{\rho_0(x)}{\delta_0(x)} \right) dx}$  telle que,

$$F(x=0) = F_0, \quad F(x=L) = F_L. \quad (\text{B.22})$$

Par positivité de la fonction exponentielle,  $F$  est une fonction croissante. Ainsi,

$$F_0 - F_L \leq F_0 - F(x) \leq 0. \quad (\text{B.23})$$

On en déduit directement  $K_s(x) \in [0, 1]$ . De plus,

$$\frac{dK_s(x)}{dx} = -\frac{1}{F_0 - F_L} \frac{dF(x)}{dx} \geq 0, \quad (\text{B.24})$$

ce qui prouve la croissance de  $x \mapsto K_s(x)$ .  $\square$

### Propriété 6

*La hauteur  $h(x, s)$  et le débit  $q(x, s)$  sont indépendants des variations du débit sortant  $q_s(s)$  quand  $L$  tend vers plus l'infini.*

*Preuve.* Montrons que  $\left( \forall (x, s) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{S}, \quad |\widehat{H}_s(x, s)| \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{} 0, \quad |\widehat{G}_s(x, s)| \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{} 0 \right)$ .

Soit  $(x, s) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{S}$ .

Nous rappelons l'expression de  $\widehat{H}_s(x, s)$  :

$$\widehat{H}_s(x, s) = \frac{F_0 - F(x)}{F_0 - F_L} e^{-\tau_s(x)s} \quad (\text{B.25})$$

où  $x \mapsto F(x)$  est la primitive de la fonction  $x \mapsto e^{\int \left( \frac{\rho_0(x)}{\delta_0(x)} \right) dx}$  telle que,

$$F(x=0) = F_0, \quad F(x=L) = F_L. \quad (\text{B.26})$$

Par positivité de la fonction exponentielle,  $F$  est une fonction croissante qui tend vers plus l'infini en plus l'infini. De plus  $F$  est indépendante de  $L$ , ainsi,

$$K_s(x) = \frac{F_0 - F(x)}{F_0 - F_L} \underset{L \rightarrow +\infty}{\sim} 0 \quad (\text{B.27})$$

Comme  $|e^{-\tau_s(x)s}| = 1$ , on obtient finalement

$$|\widehat{H}_s(x, s)| \underset{L \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (\text{B.28})$$

Nous rappelons l'expression de  $\widehat{G}_s(x, s)$  :

$$\widehat{G}_s(x, s) = \frac{1 + T_s(x)s}{A_s(x)s} e^{-\tau_s(x)s} \quad (\text{B.29})$$

avec

$$T_s(x) = -K_s(x) \frac{\left( \frac{d\tau_s(x)}{dx} \right)}{\left( \frac{dK_s(x)}{dx} \right)}, \quad (\text{B.30})$$

$$A_s(x) = -\frac{B_0(x)}{\left( \frac{dK_s(x)}{dx} \right)}, \quad (\text{B.31})$$

soit

$$\widehat{G}_s(x, s) = \frac{1}{B_0(x)s} \left( -\frac{dK_s(x)}{dx} + K_s(x) \frac{d\tau_s(x)}{dx} s \right) e^{-\tau_s(x)s}. \quad (\text{B.32})$$

Or

$$\frac{dK_s(x)}{dx} = -\frac{1}{F_0 - F_L} \frac{dF(x)}{dx} \underset{L \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{B.33})$$

car

- $F$  est une fonction indépendante de  $L$ ,
- $F$  est une fonction croissante qui tend vers plus l'infini en plus l'infini par positivité de la fonction exponentielle,
- $B_0(x)$  et  $\frac{d\tau_s(x)}{dx}$  sont indépendants de  $L$ ,
- $K_s(x) \underset{L \rightarrow +\infty}{\sim} 0$  d'après (B.27)

d'où

$$|\widehat{G}_s(x, s)| \underset{L \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{B.34})$$

□

**Propriété 7**

La hauteur  $h(x, s)$  et le débit  $q(x, s)$  restent impactés par les variations du débit entrant  $q_e(s)$  quand  $L$  tend vers plus l'infini, en particulier le transfert débit/débit  $H_e(x, s)$  est unitaire par conservation du mouvement.

*Preuve.* Montrons que  $\left( \forall (x, s) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{S}, \quad |\widehat{H}_e(x, s)| \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 1 \right)$ .

Soit  $(x, s) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{S}$ .

Nous rappelons l'expression de  $\widehat{H}_e(x, s)$  :

$$\widehat{H}_e(x, s) = \frac{F(x) - F_L}{F_0 - F_L} e^{-\tau_e(x)s} \quad (\text{B.35})$$

où  $x \mapsto F(x)$  est la primitive de la fonction  $x \mapsto e^{\int \left( \frac{\rho_0(x)}{\delta_0(x)} \right) dx}$  telle que,

$$F(x=0) = F_0, \quad F(x=L) = F_L. \quad (\text{B.36})$$

Par positivité de la fonction exponentielle,  $F$  est une fonction croissante qui tend vers plus l'infini en plus l'infini. De plus  $F$  est indépendante de  $L$ , ainsi,

$$K_e(x) = \frac{F(x) - F_L}{F_0 - F_L} \underset{L \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \quad (\text{B.37})$$

d'où

$$\widehat{H}_e(x, s) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} e^{-\tau_e(x)s} \quad (\text{B.38})$$

d'où

$$|\widehat{H}_e(x, s)| \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 1 \quad (\text{B.39})$$

□

# Basculement de bief

---

Dans cette annexe, on s'intéresse à la localisation du point de basculement d'un bief. On a montré à l'aide des modèles IDZ développés dans la section 3.3 que le basculement de bief a lieu en  $x_b \in [0, L]$  tel que

$$\boxed{T_e(x_b) - \tau_e(x_b) = T_s(x_b) - \tau_s(x_b)} . \quad (\text{C.1})$$

On développe dans cette annexe l'expression de  $x_b$ .

On se place dans les conditions initiales d'un débit nul, on sait alors résoudre analytiquement l'équation de la ligne d'eau qui se réduit à :

$$\frac{dH_0(x)}{dx} = I. \quad (\text{C.2})$$

On a alors un plan d'eau horizontal :

$$H_0(x) = H_{av}(0) + Ix \quad (\text{C.3})$$

où  $H_{av}(0)$  est le tirant d'eau à l'aval.

A débit nul, les retards s'expriment :

$$\tau_e(x) = \int_0^x \frac{1}{c_0(\sigma)} d\sigma \quad (\text{C.4})$$

$$\tau_s(x) = \int_x^L \frac{1}{c_0(\sigma)} d\sigma . \quad (\text{C.5})$$

D'où leurs dérivées

$$\frac{d\tau_e(x)}{dx} = \frac{1}{c_0(x)} \text{ et} \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{d\tau_s(x)}{dx} = \frac{-1}{c_0(x)} . \quad (\text{C.7})$$

On rappelle les expressions de  $T_e(x)$  et  $T_s(x)$  :

$$T_e(x) = -\frac{\left(\frac{d\tau_e(x)}{dx}\right)}{\left(\frac{d \ln [K_e(x)]}{dx}\right)}, \text{ et} \quad (\text{C.8})$$

$$T_s(x) = -\frac{\left(\frac{d\tau_s(x)}{dx}\right)}{\left(\frac{d \ln [K_s(x)]}{dx}\right)}. \quad (\text{C.9})$$

Or,

$$K_e(x) = \frac{F(L) - F(x)}{F(L)} \text{ et} \quad (\text{C.10})$$

$$K_s(x) = \frac{F(x)}{F(L)}. \quad (\text{C.11})$$

D'où

$$T_e(x) = \frac{F(L) - F(x)}{\frac{dF(x)}{dx}} \frac{1}{c_0(x)} \text{ et} \quad (\text{C.12})$$

$$T_s(x) = \frac{F(x)}{\frac{dF(x)}{dx}} \frac{1}{c_0(x)}. \quad (\text{C.13})$$

Par injection dans (C.1) la localisation du point de basculement  $x_b$  est donc solution de

$$\frac{F(L) - 2F(x_b)}{\frac{dF(x_b)}{dx_b}} \frac{1}{c_0(x_b)} = \int_0^{x_b} \frac{1}{c_0(\sigma)} d\sigma - \int_{x_b}^L \frac{1}{c_0(\sigma)} d\sigma \quad (\text{C.14})$$

On rappelle l'expression de  $F(x)$  :

$$F(x) = \int_0^x \exp \left[ \int_0^\kappa \frac{\rho_0(\xi)}{\delta_0(\xi)} d\xi \right] d\kappa, \quad F(x=0) = F_0 = 0, \quad F(x=L) = F_L. \quad (\text{C.15})$$

Dans le cas particulier du débit nul, on a

$$\frac{\rho_0(x)}{\delta_0(x)} = \frac{dB_0(x)}{B_0(x)} \quad (\text{C.16})$$

ainsi,

$$\int_0^x \frac{\rho_0(\sigma)}{\delta_0(\sigma)} d\sigma = \ln(B_0(x)). \quad (\text{C.17})$$

D'où

$$F(x) = \int_0^x B_0(x) dx. \quad (\text{C.18})$$

Ainsi  $x_b$  est tel que :

$$\boxed{\int_0^L B_0(k) dk - 2 \int_0^{x_b} B_0(\sigma) d\sigma = c_0(x_b) B_0(x_b) \left( \int_0^{x_b} \frac{1}{c_0(\sigma)} d\sigma - \int_{x_b}^L \frac{1}{c_0(\sigma)} d\sigma \right)}. \quad (\text{C.19})$$

# Séparation pour l'identification découplée de $A(x, s)$ et $\phi(x, s)$

---

Soient  $f(s), g(s), h(s)$  des fonctions à coefficients réels à paramètre complexe  $s = j\omega$  infiniment différentiables en  $s$  définies sur un intervalle infini  $I$  tel que  $\omega \in [0, +\infty[$ .

Montrons que  $\forall s \in I, f(s) + jg(s) = h(s) \Rightarrow f(s) = h(s), g(s) = 0$ .

Considérons

$$\forall s \in I, \quad f(s) + jg(s) = h(s). \quad (\text{D.1})$$

Remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left( f^{(n)}(0), g^{(n)}(0), h^{(n)}(0) \right) \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.2})$$

Ainsi, par identification des parties réelles et imaginaires de l'équation D.1, nous obtenons pour  $s = 0$  :

$$\forall n, \quad f^{(n)}(0) = h^{(n)}(0), \quad (\text{D.3})$$

$$g^{(n)}(0) = 0. \quad (\text{D.4})$$

$f$  et  $h$  étant  $\mathcal{C}^\infty$ , ces fonctions peuvent être écrites sous forme de séries infinies :

$$f(s) = \sum_n^{+\infty} \frac{s^n}{n!} f^{(n)}(0) \quad (\text{D.5})$$

$$h(s) = \sum_n^{+\infty} \frac{s^n}{n!} h^{(n)}(0). \quad (\text{D.6})$$

Par conséquent, à partir de (D.3) nous avons :

$$f(s) = h(s), \quad (\text{D.7})$$

et à partir de (D.1) (ou en écrivant  $g$  sous forme de série infinie) nous obtenons

$$g(s) = 0. \quad (\text{D.8})$$



# Calcul de l'amplitude et de la phase de la solution WKB approximée

---

Dans cette annexe, nous donnons les étapes intermédiaires pour calculer  $A(x, s)$  et  $\phi(x, s)$ . On rappelle que l'on cherche  $w(x, s)$  solution de l'équation suivante :

$$\frac{d^2 w(x, s)}{dx^2} + r(x, s)w(x, s) = 0. \quad (\text{E.1})$$

Selon la méthode WKB, on propose une solution approximée  $\hat{w}(x, s)$  telle que :

$$\hat{w}(x, s) = A(x, s)e^{j\phi(x, s)}. \quad (\text{E.2})$$

La dérivée de  $\hat{w}(x, s)$  par rapport à  $x$  s'exprime :

$$\frac{\partial \hat{w}(x, s)}{\partial x} = \left( \frac{\partial A(x, s)}{\partial x} + jA(x, s) \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} \right) e^{j\phi(x, s)}. \quad (\text{E.3})$$

La dérivée seconde de  $\hat{w}(x, s)$  par rapport à  $x$  s'exprime :

$$\frac{\partial^2 \hat{w}(x, s)}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial^2 A(x, s)}{\partial x^2} - A(x, s) \left( \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} \right)^2 + j \left( A(x, s) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial A(x, s)}{\partial x} \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} \right) \right) e^{j\phi(x, s)}. \quad (\text{E.4})$$

Après remplacement de  $w(x, s)$  par la solution approximée proposée  $\hat{w}(x, s)$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 A(x, s)}{\partial x^2} - A(x, s) \left( \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} \right)^2 + j \left( A(x, s) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial A(x, s)}{\partial x} \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} \right) = -r(x, s)A(x, s). \quad (\text{E.5})$$

Comme montrer en annexe D, on peut séparer (E.5) en deux équations couplées :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A(x, s)}{\partial x^2} - A(x, s) \left( \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} \right)^2 = -r(x, s)A(x, s) & (\text{E.6}) \\ A(x, s) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial A(x, s)}{\partial x} \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} = 0 & (\text{E.7}) \end{cases}$$



# Diagrammes de Bode des modèles $G_e$ et $G_s$ WKB réduits par développement de Padé d'ordre $N = 1$ et $N = 10$

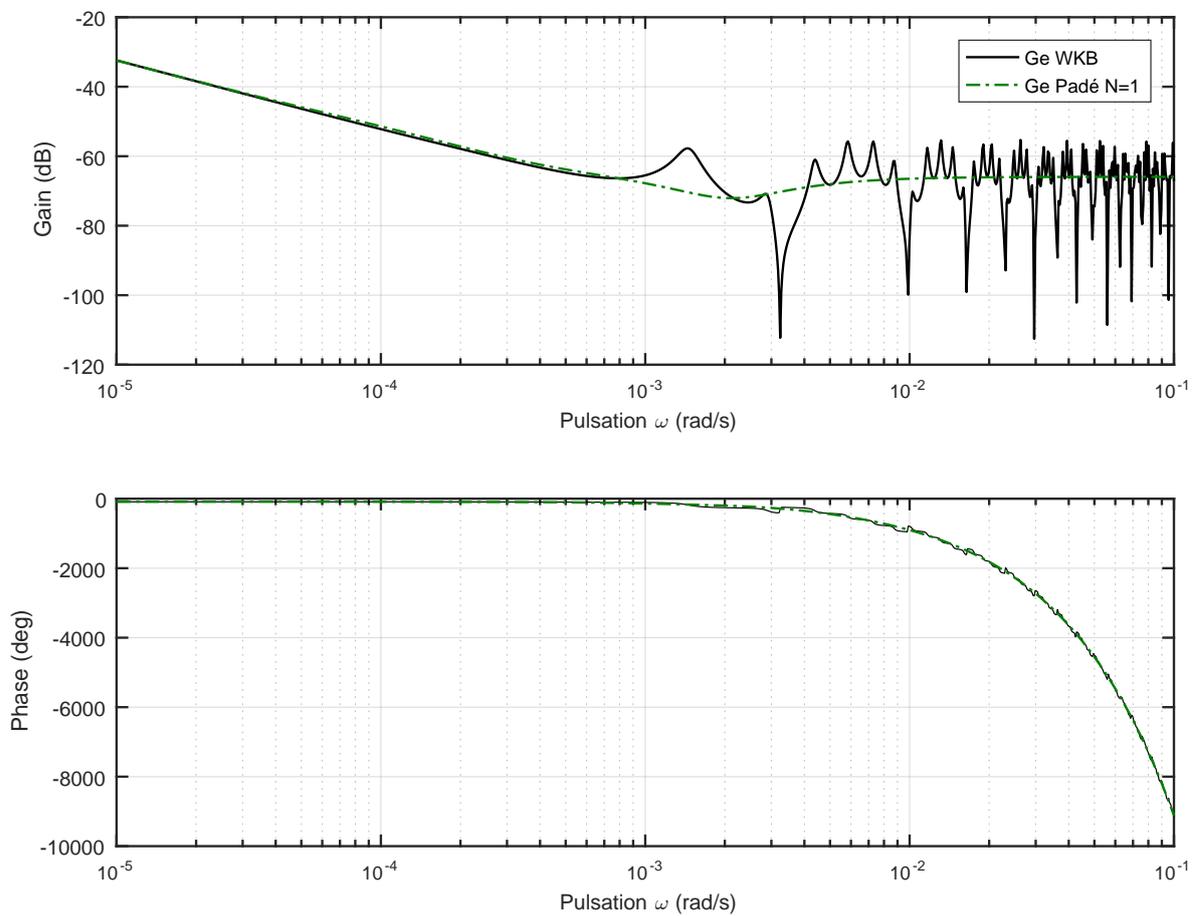


FIGURE F.1 – Diagramme de Bode de  $G_e$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500\text{m}^3/\text{s}$ ,  $H_{av} = 7.98\text{m}$

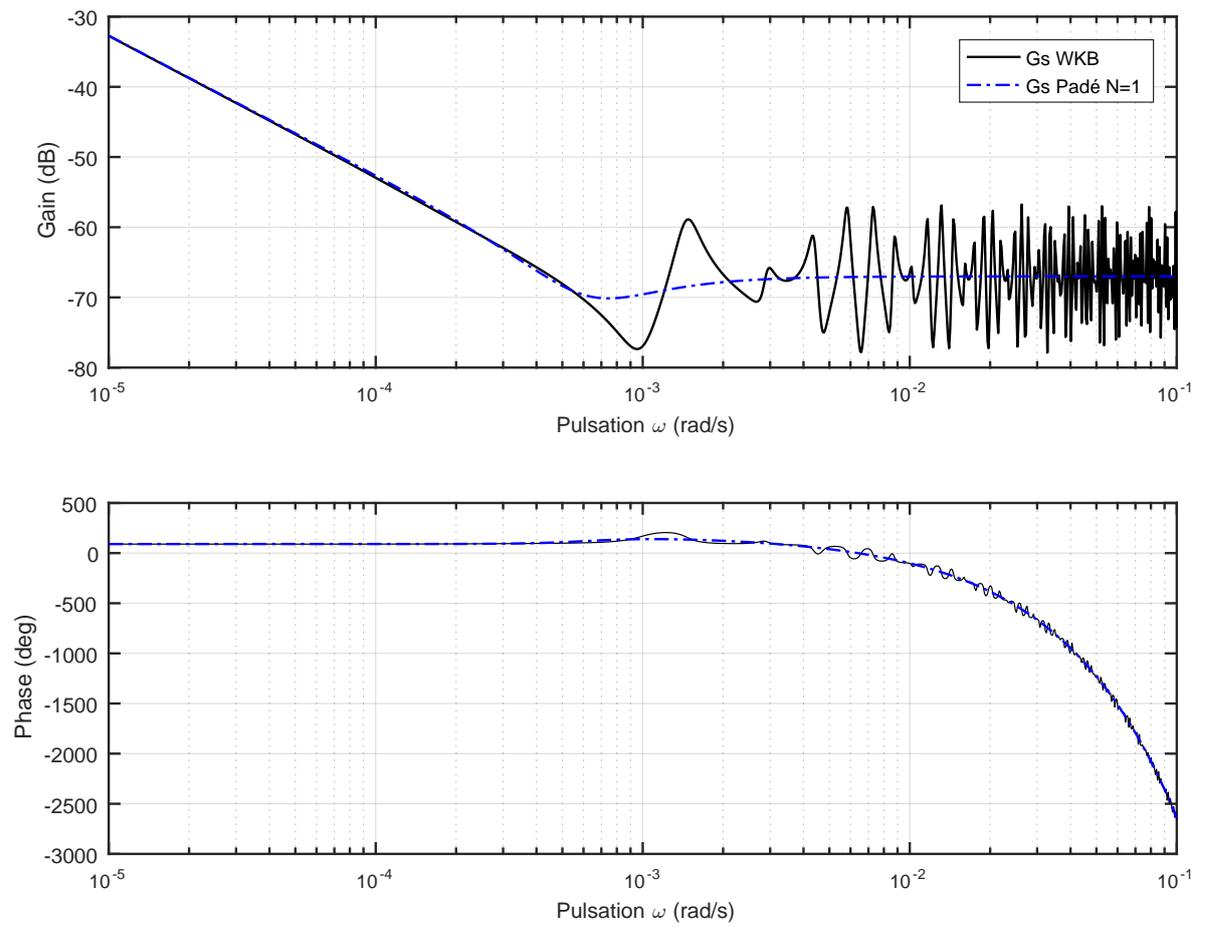


FIGURE F.2 – Diagramme de Bode de  $G_s$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$

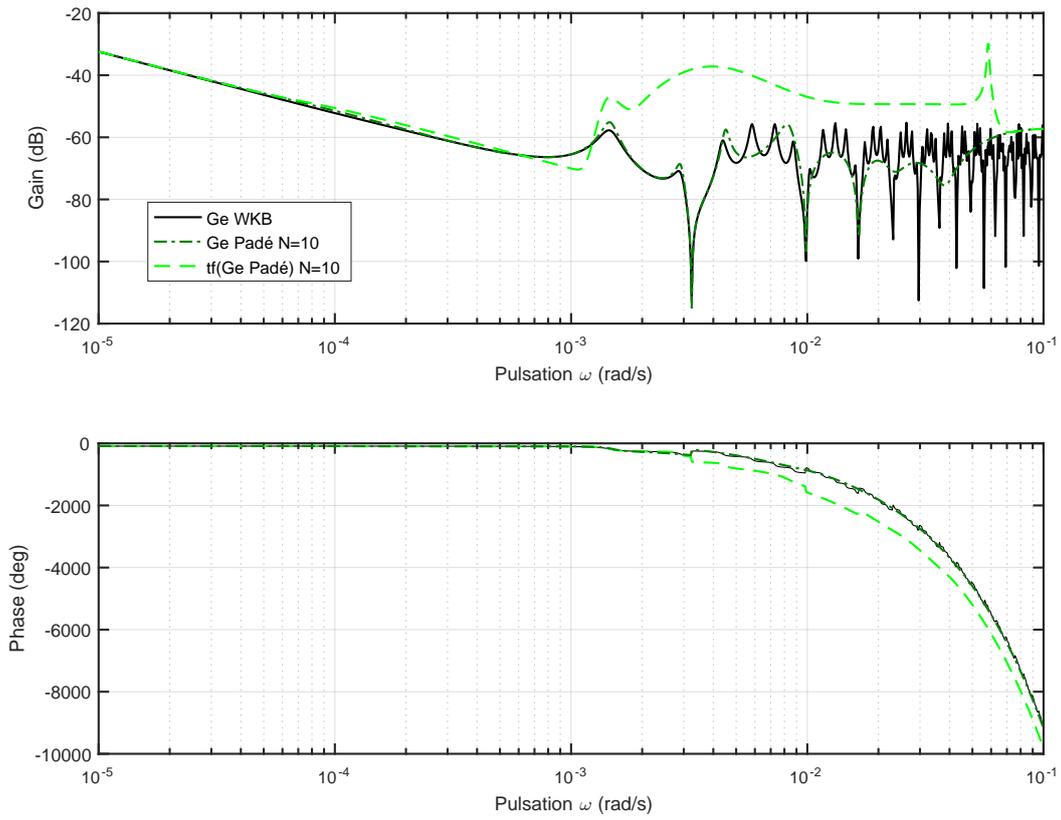


FIGURE F.3 – Diagramme de Bode de  $G_e$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$

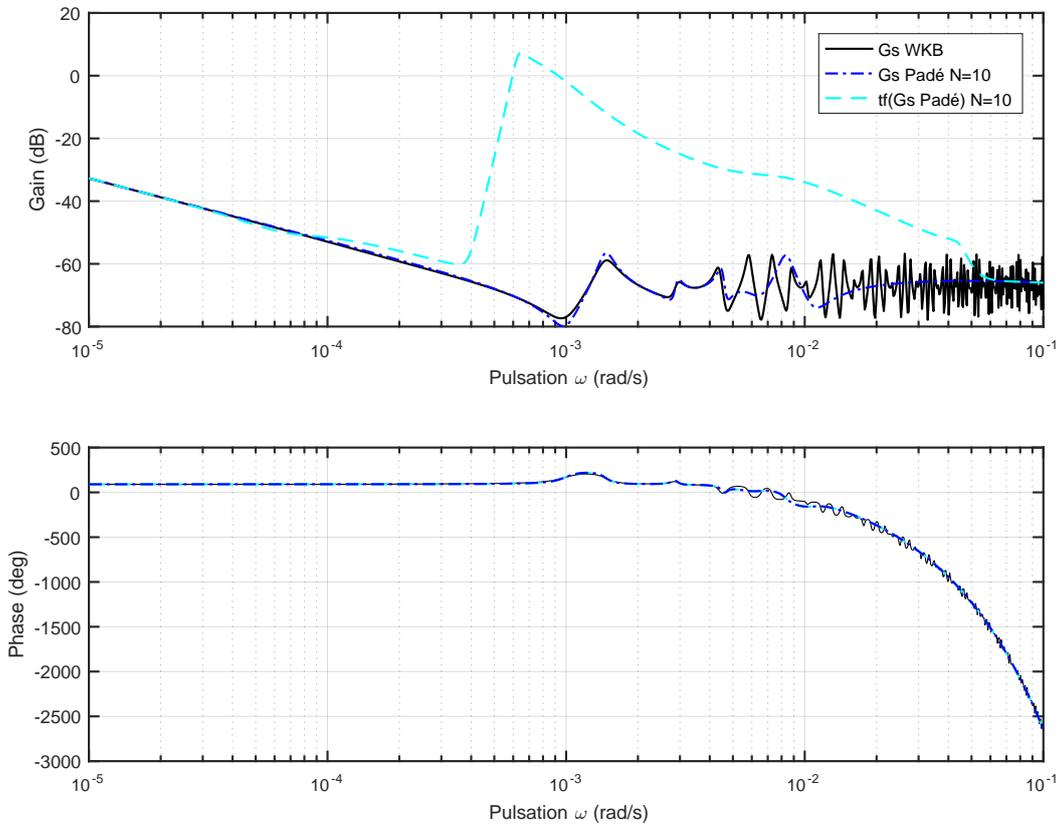


FIGURE F.4 – Diagramme de Bode de  $G_s$  en  $x = 0.75L$  pour  $Q_0 = 500m^3/s$ ,  $H_{av} = 7.98m$



# Profils en travers de Fessenheim

Dans cette annexe, les relevés topographiques le long du bief de Fessenheim sont donnés. Ceux-ci sont utilisés pour des simulations dans le chapitre 5.

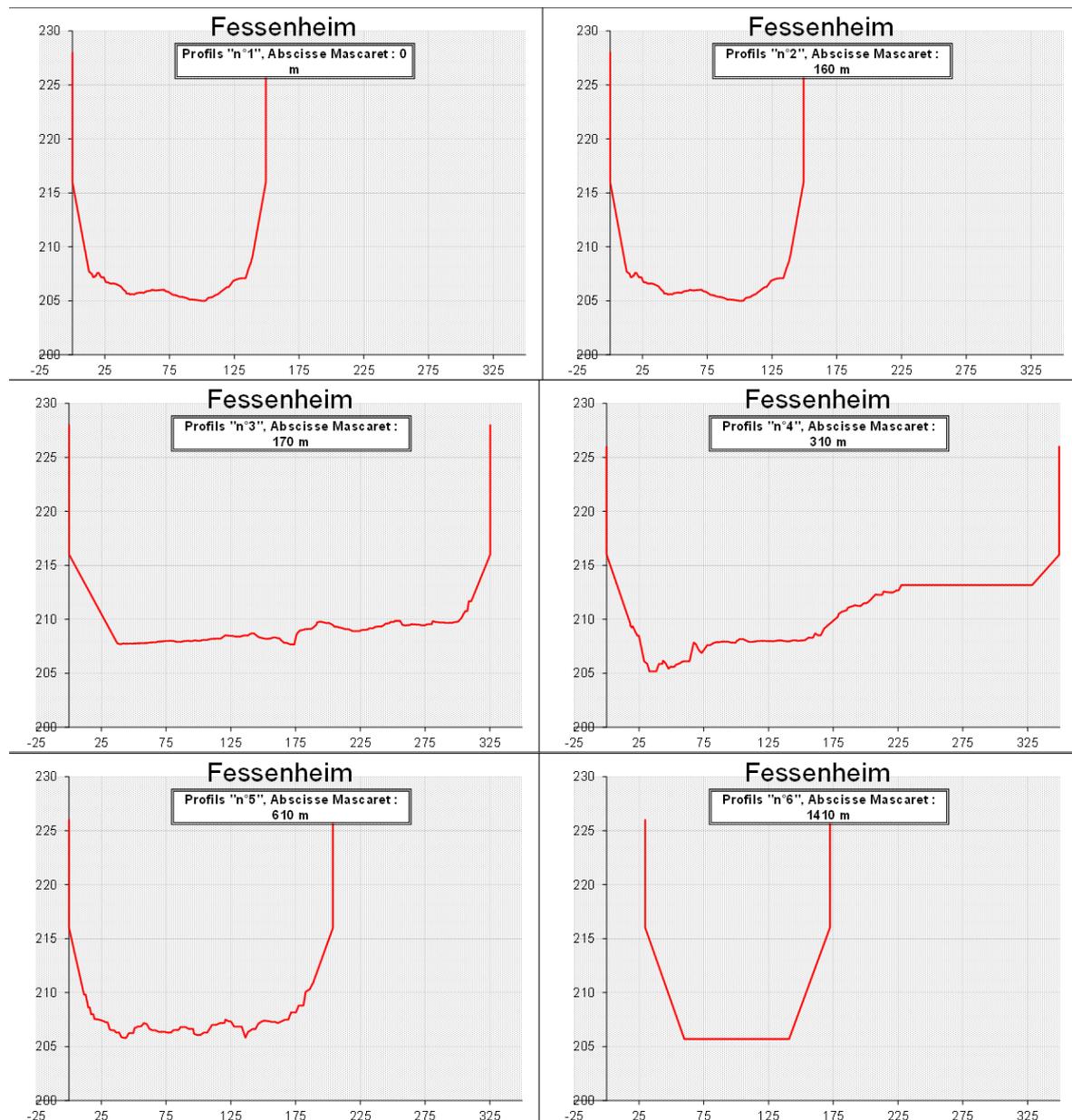


FIGURE G.1 – Coupes topographiques de Fessenheim de 0m à 1410m.

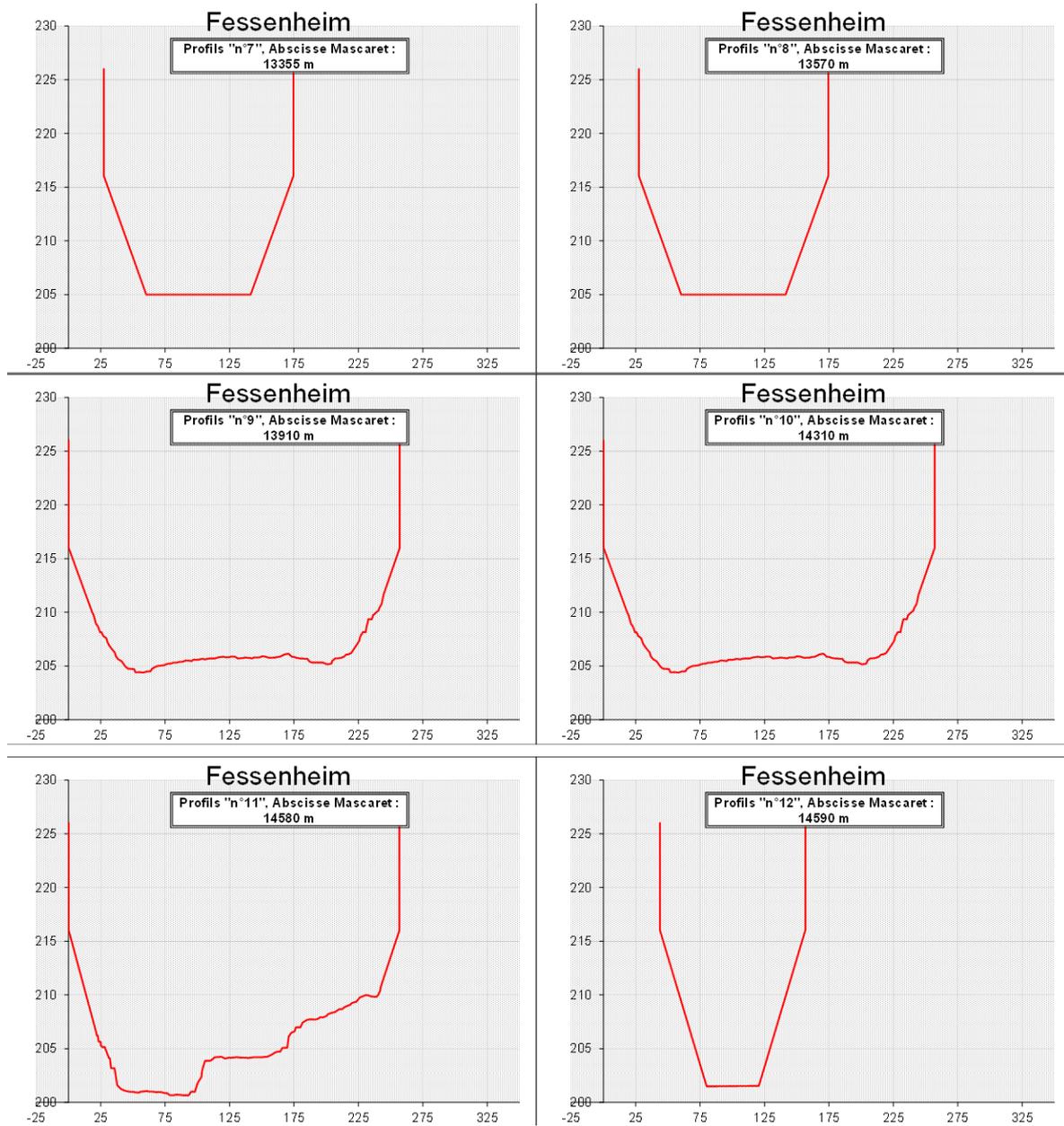


FIGURE G.2 – Coupes topographiques de Fessenheim de 13355m à 14590m.

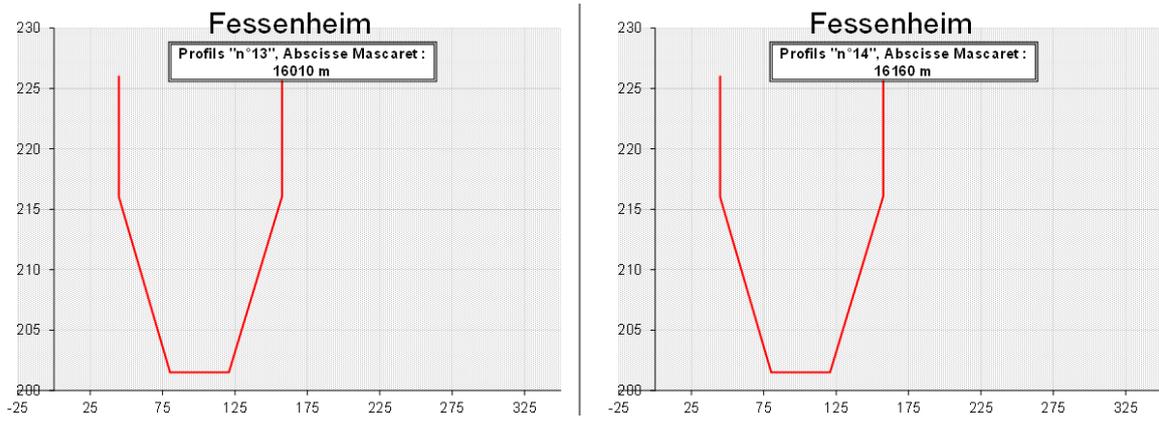


FIGURE G.3 – Coupes topographiques de Fessenheim de 16010m à 16160m.



# Bibliographie

- [APM16] Z. ALKHOURY, M. PETRECZKY et G. MERCÈRE. “Structural properties of LPV to LFR transformation : minimality, input-output behavior and identifiability”. In : *CoRR* 1608.07060 (2016). arXiv : 1608.07060 (cf. p. 58).
- [AR12] VM. ALFARO et R.VILANOVA. “Robust tuning and performance analysis of 2DoF PI Controllers for integrating Controlled Processes”. In : *Ind. Eng. Chem. Res.* 51.40 (2012), p. 13182–13194 (cf. p. 119).
- [BB86] A. BULTHEEL et M. Van BAREL. “Padé techniques for model reduction in linear system theory : a survey. Journal of Computational and Applied Mathematics”. In : 14 (1986), p. 401–438 (cf. p. 95).
- [BC17] G. BASTIN et J-M. CORON. “A quadratic Lyapunov function for hyperbolic density–velocity systems with non uniform steady states”. In : *Systems and Control Letters* 104 (2017), p. 66–71 (cf. p. 124).
- [BC18] G. BASTIN et J-M CORON. “Exponential stability of PI control for Saint-Venant equations”. In : (2018) (cf. p. 124).
- [BCG12] Y. BOLEA, N. CHEFDOR et A. GRAU. “MIMO LPV state-space identification of open-flow irrigation canal systems”. In : *Mathematical Problems in Engineering* 2012 (2012) (cf. p. 28).
- [BDG08] G. BESANÇON, J-F. DULHOSTE et D. GEORGES. “Nonlinear Observer-Based Feedback for Open-Channel Level Control”. In : *Journal of Hydraulic Engineering* 134.9 (2008), p. 1267–1274 (cf. p. 26).
- [BO99] C.M. BENDER et S.A. ORSZAG. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I : Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. Springer, 1999 (cf. p. 64, 68).
- [Bol+02] Y. BOLEA et al. “Identification of an open canal : parametric black-box vs Muskingum approaches”. In : *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. T. 5. Oct. 2002, 6 pp. vol.5– (cf. p. 27).
- [BPB14] Y. BOLEA, V. PUIG et J. BLESÀ. “Linear parameter varying modeling and identification for real-time control of open-flow irrigation canals”. In : *Environmental Modelling & Software* 53 (2014), p. 87–97 (cf. p. 28).
- [BPG14] Y. BOLEA, V. PUIG et A. GRAU. “Discussion on Muskingum versus integrator-delay models for control objectives”. In : *Journal of Applied Mathematics* 2014 (2014) (cf. p. 20).
- [Bri26] L. BRILLOUIN. “La mécanique ondulatoire de Schrödinger : une méthode générale de résolution par approximations successives”. In : *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*. 183 (1926), p. 24–26 (cf. p. 64).

- [Bru10] GW. BRUNNER. *HEC-RAS River Analysis System. Hydraulic Reference Manual. Version 4.1*. Rapp. tech. DTIC Document, 2010 (cf. p. 17).
- [Cho59] V. CHOW. *Open-channel Hydraulics*. New-York : McGraw-Hill Book Company, 1959 (cf. p. 10, 41, 89, 94).
- [CNB07] J-M. CORON, B. d'Andréa NOVEL et G. BASTIN. "A strict Lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws". In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (2007), p. 2–11 (cf. p. 124).
- [CNB99] J-M. CORON, B. d'Andréa NOVEL et G. BASTIN. "A Lyapunov approach to control irrigation canals modeled by Saint-Venant equations". In : *ECC99*. Karlsruhe, Germany, 1999, p. 3178–3183 (cf. p. 124).
- [CVFBRP15] SN. CALDERON-VALDEZ, V. FELIU-BATLLE et R. RIVAS-PEREZ. "Fractional-order mathematical model of an irrigation main canal pool". In : *Spanish Journal of Agricultural Research* 13.3 (2015) (cf. p. 28).
- [Dal+16] V. DALMAS et al. "From infinite dimensional modelling to parametric reduced-order approximation : Application to open-channel flow for hydroelectricity". In : *Proceedings of the European Control Conference*. Aalborg, Denmark, juin 2016 (cf. p. 3, 57).
- [Dal+17] V. DALMAS et al. "Simplified Non-Uniform Models for Various Flow Configurations in Open Channels". In : *Proceedings of the IFAC WC*. Toulouse, France, juil. 2017 (cf. p. 3, 69, 70, 78, 79).
- [Dal+18a] V. DALMAS et al. "New Approximate solution with resonance modes of Saint-Venant equations by WKB-type method". In : *Proceedings of the European Control Conference*. Limassol, Cyprus, juin 2018 (cf. p. 3).
- [Dal+18b] V. DALMAS et al. "Non-uniform open-channel flow modeling based on WKB-type method". In : *Journal of hydraulic engineering* (2018), soumis en août 2018 (cf. p. 4).
- [Dal+18c] V. DALMAS et al. "Saint-Venant reduced order model for water level control in open channels". In : *Proceedings of the 57th IEEE Conference on Decision and Control*. Miami, Floride, USA, déc. 2018 (cf. p. 4).
- [DBG01] J-F. DULHOSTE, G. BESANÇON et D. GEORGES. "Non-linear Control of Water Flow Dynamics by Input-Output Linearization based on a Collocation model". In : *Proceedings of the European Control Conference*. Port, Portugal, juil. 2001, p. 2632–2637 (cf. p. 26).
- [Eng34] U.S. Army Corps of ENGINEERS. *The unit hydrograph and flood routing*. Rapp. tech. North Atlantic Division New London Conn USA, 1934 (cf. p. 20).
- [Erm92] YA. ERMOLIN. "Study of open-channel dynamics as controlled process". In : *Journal of Hydraulic Engineering* 118.1 (1992), p. 59–72 (cf. p. 24).
- [FF02] N. FROMAN et PO. FROMAN. *Physical problems solved by the Phase-Integral Method*. Cambridge University Press, 2002 (cf. p. 64, 69).

- [FOW10] M. FOO, S. Ki OOI et E. WEYER. “Modelling of river for control design”. In : *Proceedings of the IEEE Multi-Conference on Systems and Control*. Yokohama, Japan, sept. 2010 (cf. p. 17, 27).
- [FOW12] M. FOO, S. Ki OOI et E. WEYER. *Modelling of Rivers for Control Design*. Springer, 2012 (cf. p. 27).
- [GDB00] D. GEORGES, J-F. DULHOSSE et G. BESANÇON. “Modelling and control of water flow dynamics via a collocation method”. In : *MTNS*. 2000 (cf. p. 26).
- [GJMLEKA12] N. GOUTAL, F. Zaoui J-M. LACOMBE et K. EL-KADI-ABDERREZZAK. “MASCARET : a 1-D Open-Source Software for Flow Hydrodynamic and Water Quality in Open Channel Networks”. In : (2012), p. 1169–1174 (cf. p. 17).
- [Gri05] D.J. GRIFFITHS. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Education, 2005 (cf. p. 64, 66, 69).
- [HS18] A. HAYAT et P. SHANG. “A quadratic Lyapunov function for Saint-Venant equations with arbitrary friction and space-varying slope”. In : *Preprint <hal-01704710>* (2018) (cf. p. 124).
- [Kra26] HA. KRAMERS. “Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung”. In : *Zeitschrift für Physik* 39 (10-11) (1926), p. 828–840 (cf. p. 64).
- [KS01] J. KIERZENKA et L.F. SHAMPINE. “A BVP solver based on residual control and the Matlab PSE”. In : *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 27.3 (2001), p. 299–316 (cf. p. 37).
- [LF04a] X. LITRICO et V. FROMION. “Analytical approximation of open-channel flow for controller design”. In : *Applied Mathematical Modelling* 28.7 (2004), p. 677–695 (cf. p. 25, 28, 34, 39, 58).
- [LF04b] X. LITRICO et V. FROMION. “Frequency modeling of open-channel flow”. In : 130.8 (2004), p. 806–815 (cf. p. 34).
- [LG99] X. LITRICO et D. GEORGES. “Robust continuous-time and discrete-time flow control of a dam–river system. (I) Modelling”. In : *Applied Mathematical Modelling* 23.11 (1999), p. 809–827 (cf. p. 14, 21).
- [Lju99] L. LJUNG. *System identification - Theory for the user*. Prentice-Hall, 1999 (cf. p. 26).
- [LP03] X. LITRICO et J-B. POMET. “Nonlinear modelling and control of a long river stretch”. In : *European Control Conference*. Cambridge, UK, sept. 2003, p. 838–843 (cf. p. 14, 46).
- [LPG10] X. LITRICO, J-B. POMET et V. GUINOT. “Simplified nonlinear modeling of river flow routing”. In : *Advances in Water Resources* 33.9 (2010), p. 1015–1023 (cf. p. 14, 21, 22, 46).
- [MA07] A.J. MAYO et A.C. ANTOULAS. “A framework for the solution of the generalized realization problem”. In : *Linear Algebra and its Applications* 425.2 (2007), p. 634–662 (cf. p. 58).

- [Mag06] J-F. MAGNI. “Linear fractional representation toolbox for use with matlab”. In : *Onera Tech. Rep* (2006) (cf. p. 58).
- [MCD09] SK. MITTAL, D. CHANDRA et B. DWIVEDI. “The effects of time-moments and Markov-parameters on reduced-order modeling”. In : *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences* 4 (2009), p. 8–14 (cf. p. 95).
- [MRS98] P-O. MALATERRE, DC. ROGERS et J. SCHUURMANS. “Classification of Canal Control Algorithms”. In : *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* 124.1 (1998), p. 3–10 (cf. p. 119).
- [Mun+08] S. MUNIER et al. “Distributed approximation of open-channel flow routing accounting for backwater effects”. In : *Advances in Water Resources* 31.12 (2008), p. 1590–1602 (cf. p. 26).
- [Ove+10] P-J. van OVERLOOP et al. “Identification of resonance waves in open water channels”. In : *Control Engineering Practice* 18.8 (2010), p. 863–872 (cf. p. 27).
- [Per+08] R. Rivas PEREZ et al. “System identification for control of a main irrigation canal pool”. In : *Proceedings of the IFAC WC*. Seoul, Korea, juil. 2008 (cf. p. 28).
- [Per57] O. PERRON. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. T. 2, 3rd edition. Stuttgart, Teubner, 1957 (cf. p. 94).
- [Pon90] VM. PONCE. “Generalized Diffusion Wave equation with inertial effects”. In : *Water Resources Research* 26.5 (1990), p. 1099–1101 (cf. p. 21).
- [PV+13] C. POUSSOT-VASSAL et al. “Business Jet Large-Scale Model Approximation and Vibration Control”. In : *IFAC Proceedings Volumes* 46.11 (2013). 11th IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, p. 199–204 (cf. p. 57).
- [PVV13] C. POUSSOT-VASSAL et P. VUILLEMIN. “An Iterative Eigenvector Tangential Interpolation Algorithm for Large-Scale LTI and a Class of LPV Model Approximation”. In : *Proceedings of the 12th European Control Conference*. Zurich, Switzerland, juil. 2013, p. 4490–4495 (cf. p. 58).
- [PY78] VM. PONCE et V. YEVJEVICH. “Muskingum-Cunge method with variable parameters”. In : *Journal of the Hydraulics Division* 104.12 (1978), p. 1663–1667 (cf. p. 20).
- [RRC09] AS. RAO, VSR. RAO et M. CHIDAMBARAM. “Direct synthesis-based controller design for integrating processes with time delay”. In : *Journal of the Franklin Institute* 346.1 (2009), p. 38–56 (cf. p. 119).
- [Rus10] D. Di RUSCIO. “On tuning PI controllers for integrating plus time delay systems”. In : *MIC* 31.4 (2010), p. 145 (cf. p. 119).
- [SBB95] J. SCHUURMANS, O. BOSGRA et R. BROUWER. “Open-channel flow model approximation for controller design”. In : *Applied Mathematical Modelling* 19 (1995), p. 525–530 (cf. p. 25).

- [Sha80] Y. SHAMASH. “Failure of the Routh-Hurwitz Method of Reduction”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 25.2 (1980), p. 313–314 (cf. p. 95).
- [SS90] PG. SAMUELS et CP. SKEELS. “Stability Limits for Preissmann’s Scheme”. In : *Journal of Hydraulic Engineering* 116.8 (1990), p. 997–1012 (cf. p. 17).
- [SV71] A. SAINT-VENANT. *Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction de marées dans leurs lits*. Comptes rendus des séances de l’Académie des Sciences, 1871 (cf. p. 8).
- [SV75] EB. SAFF et RS. VARGA. “On the zeros and poles of Padé approximants to  $e^z$ ”. In : *Numer. Math* 25 (1975), p. 1–14 (cf. p. 94).
- [Tod07] E. TODINI. “A mass conservative and water storage consistent variable parameter Muskingum-Cunge approach”. In : *Hydrology and Earth System Sciences* 11.5 (2007), p. 1645–1659 (cf. p. 21).
- [VM78] J. VILLADSEN et ML. MICHELSEN. *Solution of differential equation models by polynomial approximation*. Prentice-Hall, 1978 (cf. p. 26).
- [Wen26] G. WENTZEL. “Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik”. In : *Zeitschrift für Physik* 38 (6-7) (1926), p. 518–529 (cf. p. 64).
- [Wey01] E. WEYER. “System identification of an open water channel”. In : *Control Engineering Practice* 9.12 (2001), p. 1289–1299 (cf. p. 17, 28).





---

**Résumé** — L’hydroélectricité est la première des énergies renouvelables électriques. Sa production repose en partie sur des centrales au fil de l’eau dont les capacités de modulation sont encore faiblement exploitées. Les capacités d’ajustement des centrales hydrauliques sont d’autant plus essentielles aujourd’hui que la pénétration d’énergies intermittentes dans un mix énergétique décarboné est indispensable. Dans cette thèse, nous nous intéressons aux centrales au fil de l’eau turbinant le débit de cours d’eau aux marnages limités. Les enjeux de sûreté, notamment liés au multi-usage de l’eau, ainsi que la perspective de moduler les débits turbinés nous ont amenés à considérer le problème de la modélisation des écoulements dans les canaux reliant les centrales au fil de l’eau. Les équations de Saint-Venant sont les plus pertinentes pour ce type de modélisation. Nous avons proposé plusieurs approches à partir de ces dernières pour caractériser analytiquement la dynamique de l’écoulement à des variations de débits turbinés. Nous avons considéré la dynamique du système autour d’un régime fluvial stationnaire non-uniforme caractéristique des configurations hydroélectriques. La première approche est basée sur une approximation basses fréquences. La seconde approche est basée sur une méthode de réduction de modèle avec une paramétrisation selon le débit support. Une troisième approche est proposée en considérant explicitement la recherche d’une solution approximée des équations de Saint-Venant linéarisées autour d’une configuration hydroélectrique. Un critère spatio-fréquentiel est alors introduit, l’existence d’un biais en basses fréquences nous conduit à proposer un modèle d’ordre réduit dont la dynamique basses fréquences est imposée selon les résultats de la première approche. La solution exprimée sous forme de fonctions de transfert, comme pour les deux précédentes approches, met en évidence explicitement la présence de modes de résonance/anti-résonance. Finalement, nous illustrons les résultats vis à vis de simulations non-linéaires et de données réelles et proposons une régulation de niveau basée sur cette dernière approche.

**Mots clés :** Approximation de modèle, équations de Saint-Venant, vallée hydroélectrique, hydraulique à surface libre.

---

**Abstract** — New challenges arise from energy transition toward a more sustainable energy mix. Hydropower is already the main source of renewable electricity. In order to integrate a massive increase in generation of renewable intermittent energies, improving the flexibility of run-of-the-river hydropower plants becomes essential. In this thesis, we focus on run-of-the river power plants facing water level constraints. Safety issues, partly due to the multiple uses of water, and the opportunity to modulate turbinéd flow rates have led us to address the problem of flow modelisation in open channels that connect run-of-the rivers facilities with each others. An accurate model is provided by the Saint-Venant equations. From these latter, we have proposed different approaches to characterize analytically the flow dynamics in response to turbinéd flow variations. The system dynamics have been considered around a subcritical stationary non-uniform regime typical of hydroelectric configuration. The first approach is based on a low frequency approximation. The second approach is based on a parametric model reduction technique. By seeking explicitly an approximate solution to the linearized Saint-Venant equations around an hydroelectric configuration, we have proposed a third approach. A space-frequency criterion is introduced, which shows a bias in low frequency. Results of the first approach are then used to propose a reduced order model asymptotically exact in low frequency. As for the two other approaches, the solution takes the shape of parametric transfer functions. Resonance/anti-resonance modes explicitly appear. Finally, comparisons with non-linear simulations taking into account actual real data are discussed and a water level controller is developed based on the last approach.

**Keywords :** Model approximation, Saint-Venant equations, hydro power valley, open-channel flow.

---