



**HAL**  
open science

# Commande robuste multi-variable des systèmes de comanipulation

Neil Abroug

► **To cite this version:**

Neil Abroug. Commande robuste multi-variable des systèmes de comanipulation. Automatique / Robotique. Université de Strasbourg, 2018. Français. NNT : 2018STRAD027 . tel-02163729

**HAL Id: tel-02163729**

**<https://theses.hal.science/tel-02163729>**

Submitted on 24 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE n° 269 : mathématiques, sciences de l'information  
et de l'ingénieur

**THÈSE** présentée par:

**Neil ABROUG**

soutenue le : 17 Septembre 2018

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**  
Spécialité : **Automatique, Signal, Robotique**

## **Commande Robuste Multi-Variable des Systèmes de Comanipulation**

**THÈSE dirigée par :**

**M. Edouard LAROCHE,** Professeur Université de Strasbourg

**RAPPORTEURS :**

**M. Pierre APKARIAN,** Directeur de Recherches ONERA

**M. Guillaume MOREL,** Professeur Université Pierre et Marie Curie

**EXAMINATEURS :**

**M. Guillaume MERCÈRE,** Maître de Conférences Université de Poitiers

**Mme. Gabriela Iuliana BARA,** Maître de Conférences Université de Strasbourg

# Commande Robuste Multi-Variable des Systèmes de Comanipulation

## Résumé

À l'aube de la quatrième révolution industrielle, la comanipulation robotique est une technologie clé tant elle allie la dextérité de l'opérateur humain à la puissance de la machine. Ce partage de tâche entre humain et la machine, en sus dans un environnement incertain et inconnu à l'avance, apporte un lot de difficultés intrinsèques à la nature de cette interaction.

Cette problématique a été intensivement étudiée durant les vingt dernières années, par diverses équipes de recherches, le plus souvent sur des dispositifs à un seul degré de liberté et avec des hypothèses fortes sur la nature du contrôleur.

Dans la présente thèse, nous traitons la problématique de la comanipulation robotique à travers la commande Hoo structurée, cadre de travail particulièrement adapté aux systèmes multivariables et pouvant être étendu à une certaine classe de systèmes non linéaires – les robots manipulateurs en font partie – à travers une modélisation linéaire à paramètres variants (LPV). Les exigences de performance et de stabilité propres aux systèmes de comanipulation sont exprimées en termes de contraintes Hoo et de conditions de secteurs à respecter. Les objectifs de commande ainsi formalisés, sont résolus par optimisation non lisse afin de tirer profit des structures particulières des contrôleurs de robots de comanipulation. La validation de la méthodologie est réalisée par des simulations intensives et des expérimentations sur des dispositifs réels.

## Résumé en anglais

At the dawn of the fourth industrial revolution, robotic comanipulation is a key technology as it combines the dexterity of the human operator with the power of the machine. This task sharing between human and machine, in an uncertain and previously unknown environment, brings a lot of intrinsic difficulties to the nature of this interaction.

This problem has been intensively studied over the last two decades by various research teams, mostly on devices with a single degree of freedom and with strong hypotheses about the controller structure.

In this thesis, we deal with the problem of robotic comanipulation through the scope of the structured Hoo control, a framework particularly adapted to multivariable systems and which can be extended to a certain class of non-linear systems – manipulating robots are part of it – through linear parameter varying (LPV) models. The performance and stability requirements specific to comanipulation systems are expressed in terms of Hoo constraints and sector bounds. The control objectives thus formalised are solved by non-smooth optimization in order to take advantage of the particular structures of the comanipulation robot controllers. The validity of the methodology is carried out by intensive simulations and experiments on real devices.

يحكى ان كسرى كان يتنزه في ضاحية عاصمته، فشاهد فلاحاً  
عجوزاً قد علت سنه، وشاب راسه، وغارت عيناه، ووهنت قواه،  
وتقوس ظهره، وكان يغرس فسيلاً، فوقف كسرى بجانبه ماخوذاً  
بنشاطه فقال له: يا هذا كم اتى عليك من العمر؟  
قال: ثمانون سنة.  
قال: افتغرس فسيلاً بعد الثمانين؟ ومتى تاكل ثمره وهو لا يثمر  
الى بعد عدة سنين؟  
فاجاب الفلاح:

**زرعوا فاكلنا ونزرع فياكلون!**

**They planted so we ate, and we plant so they  
would eat !**

à Rajae  
à Yasmine  
à mon père  
à Pavel  
à la mémoire de ma mère  
à la mémoire de Baba-Hmid  
à la mémoire de Mama-Zohra

---

# Remerciements

Je tiens à remercier Edouard Laroche pour m'avoir accompagné tout au long de cette aventure. Je remercie également Mathieu Grossard et Xavier Lamy pour les échanges scientifiques riches. Je remercie Rajae qui m'a toujours soutenue dans tout ce que j'ai entrepris.

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte . . . . .	2
1.2	Motivations et Contributions . . . . .	4
1.3	Plan de la Thèse . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Contribution à la modélisation et à l'identification de systèmes en cobotique</b>	<b>9</b>
2.1	Concepts et Notations . . . . .	11
2.2	Présentation des dispositifs étudiés . . . . .	17
2.3	Rappels sur la modélisation et l'identification en robotique et dans d'autres domaines . . . . .	21
2.4	Modélisation et identification des cobots considérés . . . . .	32
2.5	Conclusion . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Contributions à la commande robuste multi-variable en cobotique</b>	<b>61</b>
3.1	Rappels sur la commande des systèmes . . . . .	63
3.2	Problématique de commande en cobotique . . . . .	74
3.3	Conclusion . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>117</b>
4.1	Conclusion . . . . .	118
4.2	Perspectives . . . . .	119
<b>A</b>	<b>Annexe : Liste des communications scientifiques</b>	<b>I</b>
<b>B</b>	<b>Annexe : Illustration des commandes Matlab de l'outil d'aide au réglage</b>	<b>XXIX</b>





# Liste des figures

1.1	Illustration du robot iiwa de KUKA . . . . .	3
1.2	Illustration du robot YuMI de ABB . . . . .	3
2.1	Transformation Linéaire Fractionnaire . . . . .	12
2.2	Repères d'un robot . . . . .	13
2.3	vérin à câble ( $D_1$ ) . . . . .	17
2.4	Cobot A6.15 ( $D_2$ ) . . . . .	18
2.5	Cobot LDC ( $D_3$ ) . . . . .	19
2.6	Modèle boîte noire d'un cobot . . . . .	26
2.7	prédictions du modèle de frottement de $D_1$ . . . . .	35
2.8	fonctions de réponse fréquentielle de $D_1$ . . . . .	36
2.9	fonctions de transfert identifiées de $D_1$ . . . . .	38
2.10	Schéma-Bloc de $D_2$ . . . . .	39
2.11	Diagramme de Bode de $D_2$ . . . . .	41
2.12	Diagramme de Bode de ${}_q\mathcal{Y}_R(s)$ . . . . .	41
2.13	Cinématique du cobot LDC . . . . .	44
2.14	Diagramme de Bode de $\mathcal{Y}_{D_3}$ . . . . .	47
2.15	Indice de passivité de $\mathcal{Y}_{D_3}$ . . . . .	48
2.16	Partie Réelle Maximale des pôles de $D_3$ . . . . .	54
2.17	Indice de passivité en sortie de $Y_h(j\omega)$ pour différents $q_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . . . . .	54
2.18	Indice de passivité en sortie de $Y_t(j\omega)$ pour différents $q_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . . . . .	55
2.19	Diagramme de Bode des transferts diagonaux de $\mathcal{Y}_h(s)$ pour différents $q_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . . . . .	56
2.20	Diagramme de Bode des transferts diagonaux de $\mathcal{Y}_t(s)$ pour différents $q_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . . . . .	56
3.1	Marges stabilité dans le plan complexe . . . . .	64
3.2	Système de Lur'e . . . . .	64
3.3	Illustration des cycles limites dans le plan complexe . . . . .	65

3.4	Schéma bloc d'un problème de régulation . . . . .	67
3.5	Spécifications de performance pour la fonction de sensibilité . . . . .	67
3.6	Incertitude Multiplicative . . . . .	68
3.7	Illustration du problème $H_\infty$ standard . . . . .	69
3.8	Boucle fermée à rétro-action positive . . . . .	71
3.9	Illustration de la Stabilité par Conditions de Secteur . . . . .	72
3.10	Illustration des indices de passivité $\nu$ et $\rho$ . . . . .	82
3.11	Illustration de la rétroaction entre deux systèmes IF-OFP . . . . .	82
3.12	Architecture PI pour la commande en transparence . . . . .	85
3.13	Proposition d'architecture de commande pour la en transparence . . . . .	86
3.14	Proposition d'architecture de commande pour la commande en transparence d'un vérin à câble . . . . .	87
3.15	Illustration des performances de commande en transparence par l'approche II . . . . .	89
3.16	Illustration des performances de commande en transparence par l'approche III . . . . .	91
3.17	Illustration des performances de commande en transparence par l'approche IV . . . . .	92
3.18	Proposition d'architecture de commande pour l'amplification d'effort . . . . .	94
3.19	Proposition d'architecture de commande pour l'amplification d'effort à un seul capteur . . . . .	95
3.20	Illustration des performances d'amplification d'effort . . . . .	96
3.21	Illustration du respect de la stabilité inconditionnelle en mode couplé . . . . .	96
3.22	Structure de commande pilotant la raideur d'un actionneur à transmission flexible . . . . .	97
3.23	Illustration du contrôle de la raideur apparente du vérin à câble . . . . .	99
3.24	Indice de passivité en entrée de l'impédance de la plaque de verre dans le plan horizontal. Le trait en gras représente l'indice pire cas. . . . .	101
3.25	Diagrammes de Bode de l'impédance de la plaque de verre dans le plan horizontal . . . . .	102
3.26	$\rho$ de $\mathcal{Y}_{r_h}(s, p)$ avec et sans $K_{damp}$ . . . . .	103
3.27	Diagramme de Bode de $\mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p)$ et $\mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s, p)$ . . . . .	105
3.28	indice de passivité en sortie de $\mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p)$ . . . . .	106

3.29 Diagramme de Bode de $\mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p)$ et $\mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s, p)$ avec et sans boucle d'amortissement interne . . . . .	107
3.30 Diagramme de Bode de $\mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p)$ et $\mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s, p)$ avec et sans poignet mou . . . . .	110
3.31 Indice de passivité en entrée de $\mathcal{Z}_{r_h}^{cl}$ . . . . .	111



# Liste des tableaux

2.1	Impédances et Admittances mécaniques courantes à 1 ddl	15
2.2	résumé des trois modèles considérés . . . . .	20
2.3	exemples d'efforts et flux . . . . .	29
2.4	paramètres de frottement identifiés pour $D_1$ . . . . .	34
2.5	paramètres dynamiques identifiés pour $D_1$ . . . . .	37
2.6	paramètres dynamiques considérés pour $D_3$ . . . . .	45
2.7	. . . . .	47
3.1	Relation entre les conditions de secteurs et des résultats classiques en automatique . . . . .	72
3.2	Dimensions de la planche de verre . . . . .	99



# Liste des définitions

**admittance** : fonction de transfert entre l'effort exercé sur un point matériel et sa vitesse. [15](#)

**impédance** : fonction de transfert entre la vitesse d'un point matériel et l'effort qui en résulte. [15](#)

**Lur'e** : système non linéaire constitué d'un bloc linéaire invariant dans le temps rebouclé sur une non-linéarité statique. [64](#)

**passivité** : propriété d'un système à restituer à son environnement une quantité d'énergie au plus égale à celle reçue de sa part dans le passé. [16](#)





# Liste des acronymes

**LFT** transformation linéaire fractionnaire. [12](#)

**LMI** inégalité matricielle linéaire. [69](#)

**LPV** linéaire à paramètres variants. [30](#)

**LTI** linéaire invariant dans le temps. [11](#)

**MIMO** multi-entrées multi-sorties. [11](#)

**PHS** système Hamiltonien à ports. [27](#)

**SIC** stabilité inconditionnelle en mode couplé. [74](#)

**SISO** simple-entrée simple-sortie. [63](#)



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1 Contexte</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>1.2 Motivations et Contributions</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>1.3 Plan de la Thèse</b> . . . . .	<b>5</b>

---

## 1.1 Contexte

La cobotique, anglicisme issu de la contraction de "collaborative robotics", est la discipline qui s'intéresse à l'usage de la robotique à proximité étroite voire au contact d'un opérateur humain. On la retrouve généralement là où le remplacement d'un opérateur humain par une machine n'est pas souhaitable, soit parce que la dextérité nécessaire à la réalisation d'une tâche n'est pas atteignable par une machine, soit parce que le coût nécessaire à la programmation (en argent et en temps) d'un robot classique est supérieur au gain potentiel d'une automatisation complète de la tâche.

L'introduction d'un cobot sur un poste de travail s'accompagne généralement d'un gain de productivité et d'une réduction des troubles musculo-squelettiques (TMS).

Bien qu'il s'agisse d'une discipline dont les premiers développements remontent aux années 80 du siècle dernier [1], la cobotique suscite un regain d'intérêt important dans les dernières années notamment en Europe avec la volonté de réindustrialisation du continent par les pouvoirs publics.

Parmi les fonctions fondamentales offertes par les cobots on peut citer la compensation de poids [2], le guidage virtuel [3, 4], l'atténuation des vibrations [5] et la programmation par démonstration<sup>1</sup> [6]. Les travaux précurseurs de Kosuge [7], Kazerooni [8], Cagnau [9], Lamy [10] et Buerger [11] apportent des solutions pour mettre en œuvre des lois de commande pour les cobots munis de capteurs d'efforts.

Plusieurs constructeurs historiques et nouveaux entrants commencent, aujourd'hui, à commercialiser des robots collaboratifs tel que le LBR iiwa de KUKA (figure 1.1) ou le YuMI de ABB (figure 1.2). Moyennant un effort marketing important, l'usage de la cobotique commence à intéresser les industriels soucieux d'améliorer leur productivité.

Ces machines, spécifiquement conçues pour la collaboration avec un opérateur humain, proposent généralement un contrôle de l'effort d'interaction sans capteur sur l'effecteur grâce à la réversibilité intrinsèque du robot. Elles sont par ailleurs moins puissantes et plus limitées en vitesse que les robots classiques pour satisfaire aux exigences de sécurité des opérateurs humains.

Il persiste néanmoins plusieurs freins à une diffusion plus large de la cobotique. Le premier est l'inadaptabilité du cadre réglementaire

---

1. L'opérateur manipule l'outil avec le cobot qui apprend les trajectoires effectuées pour les répéter en toute autonomie dans un second temps.



FIGURE 1.1 – Illustration du robot iiwa de KUKA



FIGURE 1.2 – Illustration du robot YuMI de ABB

classique de l'usage des robots dans l'industrie qui interdisait pendant longtemps le mouvement de ceux-ci à partir d'une certaine proximité de l'humain. Un premier texte réglementaire adapté à l'usage des cobots est disponible depuis 2016 à travers la norme ISO/TS15066 : 2016. Le second frein, d'ordre technique, tient au fait que la réversibilité s'accompagne en général d'une flexibilité accrue de la machine pouvant engendrer des instabilités pendant les tâches au contact [12].

## 1.2 Motivations et Contributions

Les niveaux de performance des différents systèmes cobotiques cités ci-dessus dépendent pour leur majorité de la capacité du cobot à être transparent, au sens où son impédance mécanique perçue par l'opérateur doit être la plus faible possible. Les travaux précurseurs de Colgate [13] et de Kazerooni [8] ont mis en évidence les seuils de ce qui est atteignable par la commande en terme de compensation de l'impédance mécanique d'un cobot. Depuis, plusieurs travaux ont été menés pour repousser les limites de ces seuils. On peut notamment citer les travaux de Buerger [11] qui exploite les techniques de commande  $H_\infty$  par loop-shaping pour réduire le conservatisme induit par les exigences de passivité (au sens thermodynamique). On peut également citer les travaux de Lamy [10] qui introduit un filtre mécanique permettant également de repousser ces limites.

En analysant ces différents travaux, nous constatons qu'ils se limitent d'une manière générale à l'étude de cobots à un seul degré de liberté. Nous souhaitons dans cette thèse développer une méthodologie de réglage de commande générique qui puisse être appliquée à un cobot à plusieurs degrés de liberté. Nous exploitons, pour cela, les développements récents en commande  $H_\infty$  multivariables pour les systèmes linéaire à paramètres variants (LPV).

Nos différents échanges avec les partenaires industriels intéressés par les technologies cobotiques indiquent des attentes fortes sur les fonctionnalités d'équilibrages et de compensation d'inertie. Aussi, bien que les limites de compensation d'inertie établies soient avérées, nous nous interrogeons sur leurs origines. Sont-elles intrinsèques au système mécanique ou dépendent-elles également de la structure de commande proposée? L'analyse des travaux précédents ne fournit pas une réponse univoque à cette question. Dans l'espoir de pousser davantage les limites de la compensation d'inertie et de répondre aux at-

tentes des partenaires industriels, nous souhaitons explorer de nouvelles architectures de commande avec un nombre important de degrés de liberté dont le réglage est permis par les développements de la commande  $H_\infty$  structurée.

### 1.3 Plan de la Thèse

La présent thèse est constituée de deux chapitres principaux. Dans le premier chapitre, nous abordons les questions de modélisation et d'identification pour la commande de cobots. Nous déroulons une démarche de modélisation et d'identification originale à travers 3 dispositifs expérimentaux à la complexité croissante. Nous présentons les approches classiques de modélisation en robotique, qui sont basées sur les équations de la mécanique, et discutons leurs avantages et inconvénients. Nous discutons également les approches de modélisation boîte noire, et illustrons leur usage à travers un cobot présentant plusieurs modes flexibles difficilement modélisable par l'approche analytique. Nous mettons également en évidence, à travers un cobot d'architecture SCARA, la difficulté de mise en œuvre pratique de ces techniques dans le cas multi-entrées multi-sorties.

Dans le second chapitre, après avoir fait quelques rappels sur la commande avancée des systèmes, nous exprimons les exigences de commande pour cobots en contraintes  $H_\infty$  et conditions de secteurs et exploitons les avancées récentes en optimisation non lisse pour illustrer leurs usages à travers les 3 modèles établis au premier chapitre. Nous traitons notamment les exigences de passivité, de transparence et d'amplification d'effort dans ce nouveau formalisme.



## Bibliographie

- [1] J. E. Colgate and N. Hogan. Robust control of dynamically interacting systems. *International Journal of Control*, 48, 1988. 2
- [2] H. Kazerooni. Human power amplifier for vertical maneuvers, 2001. 2
- [3] L.D. Joly. *Commande Hybride Position/Force pour la Teleoperation : Une approche Basee sur des Analogies Mecaniques*. PhD thesis, Paris6, 1997. 2
- [4] M.A. Peshkin, E.J. Colgate, W. Wannasuphoprasit, C.A.Moore, R.B. Gillespie, and P. Akella. Cobot architecture. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, page 377–390, 2001. 2
- [5] B. Mitchell, J. Koo, M. Iordachita, P. Kazanzides, A. Kapoor, J. Handa, G. Hager, and R. Taylor. Development and application of a new steady-hand manipulator for retinal surgery. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2007. 2
- [6] H. A. Marcelo, L. Wei Lin, and L. Ser-Yong. A walk-through programmed robot for welding in shipyards. *Industrial Robot : An International Journal*, 26 :377–388, 1999. 2
- [7] K. Kosuge, Y. Fujisawa, and T. Fukuda. Control of robot directly maneuvered by operator. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 1993. 2
- [8] H. Kazerooni. Extender : a case study for human-robot interaction via transfer of power and information signals. In *IEEE International Workshop Robot on and Human Communication*, 1993. 2, 4
- [9] B. Cagneau, G. Morel, D. Bellot, N. Zemiti, and G.A. d’Agostino. A passive force amplifier. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2008. 2
- [10] X. Lamy. *Conception d’une Interface de Pilotage d’un Cobot*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2011. 2, 4
- [11] S.P. Buerger and N. Hogan. Complementary stability and loop shaping for improved human-robot interaction. *IEEE Transactions on Robotics*, 23 :232 – 244, 2007. 2, 4

- [12] X. Lamy, F. Colledani, F. Geffard, Y. Measson, and G. Morel. Overcoming human force amplification limitations in comanipulation tasks with industrial robot. In *8th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, 2010. [4](#)
- [13] J. E. Colgate. *The Control of Dynamically Interacting Systems*. PhD thesis, 1988. [4](#)



# Chapitre 2

## Contribution à la modélisation et à l'identification de systèmes en cobotique

### Objet du chapitre

Dans ce chapitre, nous rappelons les approches classiques de modélisation et d'identification en robotique et avant d'aborder leurs déclinaisons dans le cas de la cobotique. Nous discutons les avantages et inconvénients de chaque approche de modélisation. Enfin, nous illustrons l'approche retenue en section 2.4 à travers trois dispositifs expérimentaux.

### Sommaire

---

<b>2.1 Concepts et Notations</b> . . . . .	<b>11</b>
2.1.1 Algèbre linéaire . . . . .	11
2.1.2 Repérage . . . . .	13
2.1.3 Vitesses et efforts . . . . .	14
2.1.4 Impédance, admittance et passivité . . . . .	15
<b>2.2 Présentation des dispositifs étudiés</b> . . . . .	<b>17</b>
2.2.1 vérin à câble (dispositif $D_1$ ) . . . . .	17
2.2.2 robot A6.15 (dispositif $D_2$ ) . . . . .	18
2.2.3 robot LDC (dispositif $D_3$ ) . . . . .	19
<b>2.3 Rappels sur la modélisation et l'identification en robotique et dans d'autres domaines</b> . . . . .	<b>21</b>
2.3.1 Modélisation « boîte grise » . . . . .	21

*CHAPITRE 2. CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION ET À  
L'IDENTIFICATION DE SYSTÈMES EN COBOTIQUE*

---

2.3.2	Modélisation « boîte noire » . . . . .	25
2.3.3	Systèmes Hamiltoniens à Ports (PHS) . . . . .	27
2.3.4	Systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) . . . . .	30
<b>2.4</b>	<b>Modélisation et identification des cobots considérés</b> . . . . .	<b>32</b>
2.4.1	Modélisation du vérin à câble (dispositif $D_1$ ) . . . . .	32
2.4.2	Modélisation du robot A6.15 (dispositif $D_2$ ) . . . . .	38
2.4.3	Modélisation du robot LDC (dispositif $D_3$ ) . . . . .	42
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>57</b>

---

## 2.1 Concepts et Notations

### 2.1.1 Algèbre linéaire

Pour un vecteur  $u$  ou une matrice  $A$ ,  $u^T$  et  $A^T$  représentent transposées respectives de  $u$  et de  $A$ .  $u^H$  et  $A^H$  représentent les transconjuguées de  $u$  et de  $A$ .

Pour une matrice  $A$  avec plus de lignes que de colonnes et aux colonnes linéairement indépendantes,

$$A^+ \triangleq (A^T A)^{-1} A^T \quad (2.1)$$

représente la pseudo-inverse de Moore-Penrose de  $A$ .

Pour une matrice  $A$  carrée,  $A > 0$  signifie que  $A$  est définie positive.  $A$  est dite indéfinie lorsqu'elle dispose de valeurs propres négatives et positives.

Pour une matrice complexe  $A$ ,  $\sigma_{max}(A)$  représente la valeur singulière maximale de  $A$ ,

Pour une matrice complexe  $A$ ,  $E_\lambda(A)$  représente le vecteur des valeurs propres de  $A$ ,

Pour une matrice réelle symétrique ou complexe hermitienne  $A$ ,  $\lambda_{min}(A)$  représente la plus petite valeur propre de  $A$ .

Pour un système [linéaire invariant dans le temps \(LTI\) multi-entrées multi-sorties \(MIMO\)](#)  $G(s)$  stable, on définit la norme  $H_\infty$  comme :

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \max_{0 \leq \omega < \infty} (\sigma_{max}(G(j\omega))) \quad (2.2)$$

Lorsque le contexte ne prête pas à confusion, une fonction de transfert  $G(s)$  pourra, par souci de compacité, être notée simplement  $G$  en omettant la variable de Laplace  $s$ .

La matrice identité d'ordre  $n$  est notée  $I_n$  ou tout simplement  $I$  quand le contexte ne prête pas à confusion.

Pour une paire de signaux vectoriels temporels  $u(t)$  et  $y(t)$  de mêmes dimensions, on définit le produit scalaire de  $u(t)$  par  $v(t)$  comme :

$$\langle u(t), y(t) \rangle_T \triangleq \int_0^T u^T y \, dt \quad (2.3)$$

On définit la semi-norme<sup>1</sup> de  $u(t)$  comme :

$$\|u(t)\|_T \triangleq \sqrt{\langle u(t), u(t) \rangle_T} \quad (2.4)$$

Lorsque  $T \rightarrow \infty$ , 2.4 rejoint la norme  $\mathcal{L}_2$  classique.

Pour deux systèmes LTI  $H(s)$  et  $L(s)$  aux dimensions appropriées, et avec la répartition  $H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}$ , les **transformations linéaires fractionnaires (LFTs)** supérieures et inférieures illustrées en figure 2.1, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l(H, L) &\triangleq H_{11} + H_{12}L(I - H_{22}L)^{-1}H_{21} \\ \mathcal{F}_u(L, H) &\triangleq H_{22} + H_{21}L(I - H_{11}L)^{-1}H_{12} \end{aligned} \quad (2.5)$$

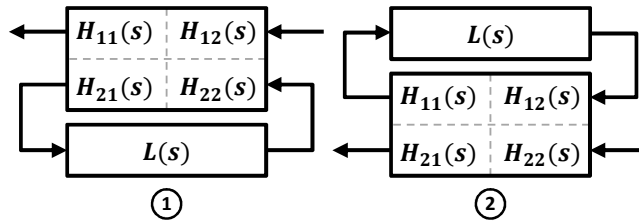


FIGURE 2.1 – Transformation Linéaire Fractionnaire

---

1. Pour une semi-norme, la propriété de **séparation**, contrairement à une norme, n'est pas respectée : la semi-norme d'un vecteur non nul peut être nulle

### 2.1.2 Repérage

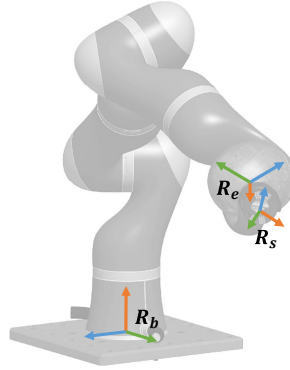


FIGURE 2.2 – Repères d'un robot

Pour un robot manipulateur – considéré comme étant un système mécanique rigide ou déformable poly-articulé –, trois repères principaux nous intéressent (cf. figure 2.2) :

- Le repère de Base  $R_b$  : repère galiléen d'origine  $O_b$  lié au local dans lequel se trouve le robot et dont l'origine se trouve à la base du robot.
- Le repère de l'effecteur  $R_e$  : repère d'origine  $O_e$  choisi pour suivre le mouvement de l'effecteur dans l'espace.
- Le repère du ou des capteurs  $R_s$  : repère conventionnel du ou des capteurs (e.g. effort, vitesses, accélérations...) installé sur l'effecteur, d'origine  $O_s$  et dans lequel sont exprimées les composantes mesurées.

La position  $x_e \in \mathbb{R}^3$  et l'orientation  $\theta_e \in \mathbb{R}^3$  du repère  $R_e$  dans  $R_b$  décrivent d'une façon exhaustive la configuration géométrique de l'effecteur dans l'espace.

Un capteur multidimensionnel est rarement isotrope. C'est pourquoi il est souvent souhaitable de le positionner en fonction de ses axes prépondérants dans des directions qui sont différentes de celles de  $R_e$ . Ainsi; les composantes mesurées par le capteur selon les directions de  $R_s$  doivent dans un premier temps être réduites en  $O_e$ , puis projetées en  $R_b$  avant de pouvoir être exploitées.



### 2.1.3 Vitesses et efforts

#### 2.1.3.1 Dans l'espace cartésien

Dans l'espace cartésien, les efforts extérieurs et vitesses de l'effecteur sont représentés par les torseurs cinématiques et d'effort :

$$\begin{aligned} V_e &= \begin{bmatrix} v_e \\ \omega_e \end{bmatrix} \\ F_e &= \begin{bmatrix} f_e \\ \Gamma_e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

où :

- $v_e \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur des composantes de la vitesse de  $O_e$  dans le repère  $R_b$ , exprimées dans le repère  $R_b$ .
- $\omega_e \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur des coordonnées de la vitesse de rotation de  $R_e$  dans le repère  $R_b$ , exprimées dans le repère  $R_b$ .
- $f_e \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur des efforts exercés sur l'effecteur, réduits en  $O_e$  et projetés dans le repère  $R_b$ .
- $\Gamma_e \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur des moments d'efforts exercés sur l'effecteur, réduits en  $O_e$  et projetés dans le repère  $R_b$ .

En notant  $F_s = \begin{bmatrix} f_s \\ \Gamma_s \end{bmatrix}$  le torseur des efforts exprimé dans le repère  $R_s$  du capteur d'efforts, le torseur  $F_e$  se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} f_{s|O_e} &= f_s \\ \Gamma_{s|O_e} &= \Gamma_s + f_s \wedge (O_s - O_e) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$F_e = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{be}^T & \mathcal{R}_{es}^T & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{be}^T & \mathcal{R}_{es}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s|O_e} \\ \Gamma_{s|O_e} \end{bmatrix}$$

où  $\mathcal{R}_{be}$  est la matrice de rotation exprimant l'orientation de  $R_e$  dans  $R_b$  et  $\mathcal{R}_{es}$  est la matrice de rotation exprimant l'orientation de  $R_s$  dans  $R_e$ .

### 2.1.3.2 Dans l'espace articulaire

Dans un espace articulaire à  $n$  degrés de liberté, les efforts et vitesses des articulations sont représentés par les vecteurs :

$$\begin{aligned} V_q &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \\ \Gamma_q &= \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.8}$$

où  $q_i$  représente la position de la  $i^{\text{ème}}$  articulation et  $\Gamma_i$  l'effort de l'actionneur (couple ou force) appliqué sur la  $i^{\text{ème}}$  articulation.

### 2.1.4 Impédance, admittance et passivité

D'une manière générale, l'**impédance** d'un système notée  $\mathcal{Z}$  est l'application permettant de passer d'une variable intensive de flux  $f(t)$  d'un système – pour les systèmes mécaniques, il s'agit du torseur cinématique – à une variable extensive d'effort  $e(t)$  appliquée au même système – pour les systèmes mécaniques, il s'agit du torseur des efforts extérieurs. Les deux variables doivent être exprimées au même point d'application et dans la même base.

L'**admittance**, représentée généralement par la lettre  $\mathcal{Y}$ , est l'application inverse de l'impédance.

Le tableau 2.1 illustre, dans l'espace cartésien, quelques impédances et admittances mécaniques linéaires simples.

TABLEAU 2.1 – Impédances et Admittances mécaniques courantes à 1 ddl

Système	Impédance	Admittance
Masse	M s	$\frac{1}{M s}$
Ressort	$\frac{K}{s}$	$\frac{s}{K}$
Amortisseur	B	$\frac{1}{B}$

Un système physique est dit **passif** s'il ne produit pas d'énergie [1]. Il ne peut alors fournir à son environnement une énergie supérieure à celle précédemment reçue de ce dernier. En reprenant les deux variables d'effort et de flux  $e(t)$  et  $f(t)$ , la passivité équivaut d'après [1] à la condition suivante :

$$\langle e(t), f(t) \rangle_T + W(0) > 0, \quad \forall T > 0 \quad (2.9)$$

où  $W(0)$  représente l'énergie initiale stockée dans le système. Cette inéquation représente la condition de passivité dans sa forme la plus générique. Il existe différentes déclinaisons de la passivité pour les systèmes linéaires et certaines classes de systèmes non linéaires. Dans un souci pédagogique, nous les présenterons plus loin dans le présent manuscrit lorsque cela s'avère nécessaire, car elles font appel à des concepts que nous n'avons pas introduits jusqu'à présent.

La passivité est une notion très importante dans l'étude des systèmes complexes [16]; et toute notre étude est construite autour de la notion de passivité. En effet, tous les systèmes passifs sont stables. Ils se distinguent, en plus, par la propriété que l'agencement de plusieurs systèmes passifs, aussi arbitraire soit-il, constitue également un système passif – et donc stable, y compris lorsque ce sont des systèmes non linéaires [2]. Un second aspect intéressant de la passivité réside dans la propriété des systèmes passifs commutés à rester stables quelle que soit la séquence de commutation considérée [2]. Bien que plus conservative que la seule stabilité, ces propriétés de la passivité ont guidé pendant longtemps et encore aujourd'hui la conception de systèmes complexes tels que les robots collaboratifs [2], les systèmes micro et nano mécaniques [3], ou encore les systèmes intelligents distribués [4].

## 2.2 Présentation des dispositifs étudiés

Tout au long de l'étude, nous ferons appel, selon les besoins, à trois dispositifs expérimentaux à la complexité croissante, pour illustrer et valider les méthodologies de synthèse de lois de commande : le vérin à câble, le robot A6.15 et le robot LDC.

### 2.2.1 vérin à câble (dispositif D<sub>1</sub>)

Le premier dispositif considéré est un actionneur développé au CEA-LIST dit « vérin à câble » qui est particulièrement adapté aux systèmes de comanipulation. Il est constitué, tel qu'illustré dans la figure 2.3, d'un moteur électrique entraînant, à travers deux poulies et une courroie, un système vis-écrou en rotation — soit par l'écrou, soit par la vis. La translation engendrée sur la vis ou sur l'écrou applique une traction sur un brin de câble métallique qui à son tour entraîne une poulie de sortie en rotation. Cet agencement particulier confère au vérin à câble un rapport de réduction comparable aux réducteurs à onde de déformation — e.g. Harmonic Drive™ — et épicycloïdaux, tout en assurant une faible inertie et une bonne réversibilité [5]. Néanmoins la présence d'un câble dans la transmission fait apparaître une résonance à une fréquence relativement basse, qui constitue un frein à l'obtention de bonnes performances en boucle fermée. Associé à un bras robotique, le vérin à câble constitue un dispositif qui nous permet d'étudier la commande des systèmes de comanipulation dans un contexte relativement simple — linéaire et monovisible —, avant de l'étendre à des modélisations plus représentatives de la complexité réelle des robots de comanipulation.

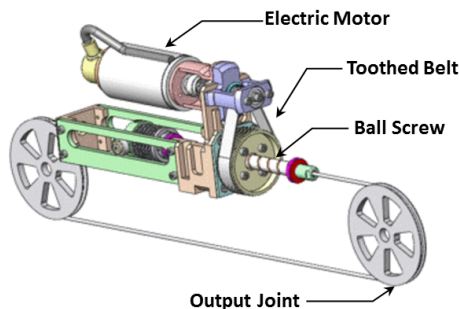


FIGURE 2.3 – vérin à câble (D<sub>1</sub>)

### 2.2.2 robot A6.15 (dispositif $D_2$ )

Le second dispositif considéré est le cobot A6.15 d'assistance au rechapage de pneus, développé par l'entreprise RB3D<sup>2</sup> dans le cadre d'un transfert de technologie opéré par le CEA-LIST. Comme illustré en figure 2.4, il s'agit d'un cobot à 5 ddl. Chacun des ddl du cobot est actionné par un moteur brushless et un réducteur Harmonic Drive™. Il dispose par ailleurs d'un capteur de force à 6ddl au niveau du poignet opérateur ainsi que de capteurs de position au niveau de chaque moteur. Pour les besoins de l'étude, les ddl 1, 2, 3 et 5 ont été délibérément bloqués par un asservissement de position articulaire. Seul le ddl n°4 est dès lors considéré. Par rapport à  $D_1$ ,  $D_2$  représente un gain significatif en complexité et il est davantage représentatif de la réalité. En effet, il s'agit d'un dispositif robotique complet pouvant manifester une dynamique plus complexe — essentiellement des modes flexibles structurels et des niveaux de frottement non négligeables —. Nous nous limitons, toutefois, à ce stade, au cas d'un système à un seul ddl.



FIGURE 2.4 – Cobot A6.15 ( $D_2$ )

2. Entreprise spécialisée dans l'ergonomie des postes de travail

### **2.2.3 robot LDC (dispositif $D_3$ )**

Le troisième niveau de complexité considéré dans ce travail est représenté par le cobot LDC d'assistance à la palettisation, développé par le CEA-LIST. Comme illustré à travers la figure 2.5, il s'agit d'un robot d'architecture SCARA [6] à fort élancement dont chaque ddl est actionné par un vérin à câble. Seuls les trois premiers ddl sont considérés dans la présente étude, le quatrième étant dynamiquement dé-couplé des autres.  $D_3$  présente un gain en complexité par rapport aux deux précédents modèles, dans la mesure où il s'agit d'un système à 3 ddl aux dynamiques couplées et non-linéaires.  $D_3$  permet de généraliser la procédure de réglage et de valider son efficacité dans le cadre de systèmes de co-manipulation à plusieurs ddl.



FIGURE 2.5 – Cobot LDC ( $D_3$ )

*CHAPITRE 2. CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION ET À  
L'IDENTIFICATION DE SYSTÈMES EN COBOTIQUE*

---

Le tableau 2.2 résume les différences entre les trois modèles considérés dans cette étude.

TABLEAU 2.2 – résumé des trois modèles considérés

modèle	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>
nombre de ddl	1	1	3
flexibilité dans la transmission	oui	oui	oui
flexibilité structurelle	non	oui	non
variant dans le temps	non	non	oui

## 2.3 Rappels sur la modélisation et l'identification en robotique et dans d'autres domaines

### 2.3.1 Modélisation « boîte grise »

Lorsqu'on dispose d'une connaissance suffisante du fonctionnement interne du robot, nous pouvons adopter une démarche de modélisation basée sur les équations de la physique. Il convient, dans ce cas, de différencier le cas trivial des robots rigides du cas des robots flexibles.

#### 2.3.1.1 Cas des robots rigides

##### 2.3.1.1.1 Modèle géométrique d'un robot

Pour un robot rigide – dans le sens où la première résonance se situe au delà de la bande passante d'intérêt –, le vecteur des positions articulaires  $q = [q_1 \dots q_n]^T$  décrit d'une façon univoque la configuration géométrique de l'ensemble du robot. On appelle modèle géométrique direct l'application  $G$  faisant correspondre, à chaque vecteur  $q$ , un vecteur  $X_e = \begin{bmatrix} x_e \\ \theta_e \end{bmatrix}$  tel que :

$$X_e = G(q) \quad (2.10)$$

Si le calcul d'un modèle géométrique est relativement aisé pour un nombre limité (généralement jusqu'à 3) de degrés de liberté, avec un nombre de degrés de liberté plus élevé, il est nécessaire de disposer d'une méthodologie de calcul plus systématique. Tel est typiquement le cas de la paramétrisation géométrique de Danvit-Hartenberg [7]. Nous ne détaillerons pas ces méthodes pour ne pas surcharger le présent travail. Pour plus de détails sur cette approche, le lecteur peut se référer à [7].

##### 2.3.1.1.2 Modèle cinématique d'un robot

La dérivation en fonction du temps du modèle géométrique direct de l'équation 2.10 fournit le modèle cinématique direct liant le vecteur de vitesses articulaires au vecteur de vitesses de l'effecteur :

$$V_e = J_e(q) V_q \quad (2.11)$$



où  $J_e(q) = \frac{\partial}{\partial q} G(q)$  représente la matrice Jacobienne du robot exprimée dans le repère  $R_b$  au niveau du point  $O_e$ .

Sachant que le bilan de puissance du robot s'écrit :

$$\dot{q}^T \Gamma_q = V_e^T F_e \quad (2.12)$$

en remplaçant  $V_e^T$  par  $\dot{q}^T J_e^T(q)$ , on obtient l'équation duale :

$$\Gamma_q = J_e^T(q) F_e \quad (2.13)$$

liant le torseur des efforts extérieurs appliqués sur l'effecteur aux efforts articulaires.

### 2.3.1.1.3 Modèle dynamique d'un robot

Il existe deux approches principales pour calculer les équations de mouvement d'un robot : la méthode d'Euler-Newton qui se base sur le principe fondamental de la dynamique, et la méthode d'Euler-Lagrange qui adopte une approche énergétique. Nous nous limiterons ci-présent à la méthode d'Euler-Lagrange qui sera utilisée plus loin au chapitre 2.4. Les lecteurs intéressés par plus de détails sur la méthode d'Euler-Newton peuvent se référer à [7].

Dans la méthode d'Euler-Lagrange, en notant  $q$  le vecteur des coordonnées généralisées du robot, les équations de mouvement du robot peuvent être obtenues en résolvant l'équation de Lagrange suivante :

$$\Gamma_q = \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{L} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L}; \quad (2.14)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$$

avec  $\mathcal{T}$  l'expression de l'énergie cinétique totale du système et  $\mathcal{V}$  son énergie potentielle. D'une manière générale, pour un robot rigide,  $\mathcal{V}$  contient uniquement l'énergie potentielle de pesanteur. Après simplification, les équations de mouvement du robot prennent la forme conventionnelle suivante :

$$\Gamma_q = M(q) \ddot{q} + H(q, \dot{q}) + G(q) \quad (2.15)$$

où  $M(q)$  est la matrice d'inertie du robot, et  $H(q, \dot{q})$  regroupe les efforts centrifuges et de Coriolis induits par les mouvements des segments. L'équation 2.15 est appelée modèle dynamique inverse car elle permet de calculer les efforts des actionneurs à partir de la connaissance des trajectoires des positions et de ses dérivées.

#### 2.3.1.1.4 Modèle complet d'un cobot

Afin de contrôler l'interaction entre le cobot et son environnement, il est nécessaire d'avoir un modèle de robot faisant intervenir l'ensemble des efforts exercés sur le robot. Ainsi, en intégrant les équations 2.11, 2.13 et 2.14, nous obtenons le modèle complet suivant :

$$\begin{aligned} M(q) \ddot{q} &= -H(q, \dot{q}) - G(q) + \Gamma_q + J_e^T(q) F_e \\ V_e &= J_e(q) \dot{q} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Afin de faire appel aux outils d'analyse et de synthèse de commande des systèmes linéaires, il est nécessaire de linéariser le modèle dynamique au tour d'un point de fonctionnement  $\{q_{eq}, \Gamma_{q_{eq}}, F_{eq}\}$ . En faisant l'hypothèse que  $M(q_{eq})$  est constante autour de ce point de fonctionnement, le modèle linéarisé prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} M(q_{eq}) \delta \ddot{q} &= -\frac{\partial}{\partial q} H(q, 0)|_{q_{eq}} \delta q - \frac{\partial}{\partial q} G(q)|_{q_{eq}} \delta q + \delta \Gamma_q + J_e^T(q_{eq}) \delta F_e \\ V_e &= J_e(q_{eq}) \dot{q} \end{aligned} \quad (2.17)$$

où  $\delta q = q - q_{eq}$  indique les variations autour du point d'équilibre.

#### 2.3.1.2 Cas d'un robot présentant des modes flexibles non négligeables

En présence de modes flexibles visibles dans la bande de fréquence d'intérêt, l'ajout de coordonnées internes supplémentaire rendant compte de ces flexibilités en plus du vecteur  $q$  et regroupées dans un vecteur  $q_d$  est nécessaire pour avoir une modélisation plus précise de la configuration géométrique de l'ensemble du robot.

L'usage des équations 2.14, 2.15, 2.16 et 2.17 reste valable, néanmoins  $\mathcal{V}$  doit inclure, en plus des potentiels de pesanteur, les contributions de l'énergie potentielle élastique emmagasinée dans le système à travers ses éléments flexibles [8].

#### 2.3.1.3 Identification paramétrique

Parmis l'ensemble des approches d'identification connues, l'identification par erreur de sortie est un cadre couramment utilisé pour l'identification des systèmes non linéaires notamment en robotique.

Le modèle du robot étant établi, la démarche d'identification paramétrique consiste à estimer les valeurs numériques des paramètres qui minimisent le critère des moindres carrés entre les sorties du modèle et les données expérimentales.

Khalil fournit en [7] une boîte à outils assez complète pour l'identification de robots. Il s'agit de méthodes temporelles largement utilisées en robotique. La démarche générale de ces méthodes consiste à :

- réécrire le modèle dynamique du robot sous une forme linéaire en fonction des paramètres (LP). Cette opération peut parfois nécessiter un changement de variables dans le modèle [9],
- soumettre le robot à des trajectoires permettant, à tour de rôle, d'exciter les paramètres du modèle LP précédemment établi – il s'agit des paramètres de frottement, de pesanteur, d'inertie, ou d'une combinaison linéaire de ces derniers –,
- filtrer les données temporelles obtenues [7], le modèle LP nécessitant généralement d'avoir accès aux trajectoires de positions et de leurs dérivées premières et secondes,
- résoudre le problème des moindres carrés du modèle LP permettant d'estimer les paramètres du modèle.

#### 2.3.1.4 Remarques

La démarche de modélisation basée sur la connaissance des équations régissant la dynamique du robot est largement répandue et utilisée en robotique [7]. Elle permet de prendre en compte d'une manière relativement simple les phénomènes non linéaires qu'ils soient continus (e.g. efforts centrifuges) ou discontinus (e.g. frottements).

Elle a pour avantage également de garantir les propriétés de passivité intrinsèques à tous les systèmes mécaniques ; propriétés qui nous seront fort utiles pour garantir la stabilité du cobot en interaction, comme nous le discuterons au chapitre 3.

Toutefois, en présence de modes structurels complexes, l'approche analytique peut échouer à modéliser correctement les effets de ces modes, ce qui peut être dommageable pour le système si ces modes structurels ont lieu à l'intérieur de la bande passante de la commande. À titre d'exemple, si elle n'est pas prise en compte dans la synthèse, une résonance dont la fréquence se trouve à l'intérieur de la bande passante de commande peut se trouver amplifiée par la commande ce qui peut être destructeur pour le système. Les approches boîte noire

présentées ci-après peuvent sous certaines hypothèses répondre au besoin de modélisation des modes flexibles complexes.

## 2.3.2 Modélisation « boîte noire »

### 2.3.2.1 Approche de modélisation

Pour pallier les limitations de la modélisation analytique, la modélisation boîte noire peut s'avérer utile lorsque le système présente des dynamiques difficiles à modéliser analytiquement. L'approche boîte noire fait néanmoins, le plus souvent, l'hypothèse que le système est linéaire – du moins au tour d'un point de fonctionnement  $q$  donné. Un robot poly-articulé étant par essence non linéaire mais dont les nonlinéarités sont dérivables, nous pouvons adopter une approche multi-modèles. Cette approche consiste à définir un ensemble de points de fonctionnement représentatifs de l'espace de travail de la machine autour desquels nous identifions des modèles dont le comportement est supposé linéaire. Il convient de vérifier la validité de cette hypothèse a posteriori pour chaque point de fonctionnement. Pour pallier les limitations de la modélisation analytique, la modélisation boîte noire peut s'avérer utile lorsque le système présente des dynamiques difficiles à modéliser analytiquement. L'approche boîte noire fait néanmoins, le plus souvent, l'hypothèse que le système est linéaire – du moins au tour d'un point de fonctionnement  $q$  donné. Un robot poly-articulé étant par essence non linéaire mais dont les nonlinéarités sont dérivables, nous pouvons adopter une approche multi-modèles. Cette approche consiste à définir un ensemble de points de fonctionnement représentatifs de l'espace de travail de la machine autour desquels nous identifions des modèles dont le comportement est supposé linéaire. Il convient de vérifier la validité de cette hypothèse a posteriori pour chaque point de fonctionnement. D'ordinaire, le modèle boîte noire prend la forme d'une fonction de transfert ou d'une matrice de transfert abstraite dont il faut estimer les valeurs des pôles et zéros.

Le modèle boîte noire d'un cobot introduit par Lamy en [10], présenté en figure 2.6 prend la forme générique suivante :

$$\begin{aligned}
 V_q(s, q_{eq}) &= H(s, q_{eq}) \begin{bmatrix} \Gamma_q \\ J_e^T(q_{eq}) F_e(s) \end{bmatrix} \\
 V_e(s) &= J_e(q_{eq}) V_q(s, q_{eq})
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

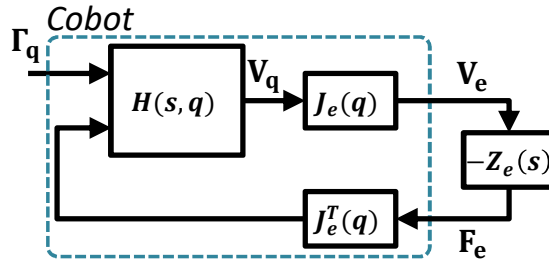


FIGURE 2.6 – Modèle boîte noire d'un cobot

où  $H(s, q) = [A(s, q) \quad \mathcal{Y}_r(s, q)]$  est une matrice de transfert à identifier. Deux difficultés principales s'opposent à l'identification de  $H(s, q)$  :

- Point de fonctionnement : étant donné que d'une manière générale le modèle d'un robot est non linéaire, il est primordial de bien choisir les points de fonctionnement autour desquels nous linéarisons le système [11], afin de rendre compte de la variabilité de la dynamique du cobot.
- Excitation et mesure sur  $Y(s, q)$  : Une difficulté supplémentaire réside dans l'impossibilité de disposer d'une source de force/couple purs pour stimuler  $F_e(t)$ . En effet, tout système d'excitation dispose d'une impédance propre qui biaise l'identification de l'impédance du cobot. Une autre difficulté réside dans l'absence, en règle générale, d'un moyen de mesure efficace de  $V_e(t)$ . En effet, l'utilisation des mesures de vitesses articulaires pour construire  $V_e(t)$  nécessite de faire une hypothèse de rigidité structurale qui n'est pas toujours vérifiée.

Lamy [10] propose à cet effet une démarche expérimentale originale permettant d'identifier  $H(s, q)$  sans avoir besoin de mesurer  $V_e(t)$  ni de disposer d'un système d'excitation de  $F_e(t)$ . Nous détaillerons cette démarche en section 2.4.2.2 à travers un dispositif expérimental.

### 2.3.2.2 Identification des fonctions de transfert

En identification boîte noire, il existe deux approches essentielles, l'approche temporelle et l'approche fréquentielle. À travers les modèles ARX, ARMAX, ARIMAX [12], l'identification dans le domaine temporel a prouvé une certaine robustesse dans l'estimation de modèles boîte noire. Néanmoins, étant donné l'importance de l'information de phase dans notre approche, nous préférons effectuer l'identification dans le domaine fréquentiel. Nous adoptons à cet effet les re-

commandations de la norme ISO7626<sup>3</sup> [13] sur le conditionnement des signaux fréquentiels pour obtenir des fonctions de réponse fréquentielle (FRF) de bonne qualité. Les différentes FRF étant obtenues, l'étape suivante consiste à chercher, par des méthodes de « curve-fitting » [14], des fonctions de transfert rationnelles collant au mieux aux FRF

### 2.3.2.3 Remarques

Dans le domaine fréquentiel, il est relativement aisé de vérifier si la propriété de passivité est respectée au niveau des FRF. Une FRF MIMO  $G(j \omega)$  est passive si et seulement si :

$$\lambda_{\min}(G(j \omega) + G(j \omega)^H) > 0 \quad (2.19)$$

Dans le cas où  $G(j \omega)$  est SISO, 2.19 équivaut à avoir :

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(G(j \omega)) < \frac{\pi}{2} \quad (2.20)$$

Le non respect de cette propriété à ce niveau doit nous amener à reconsidérer la démarche expérimentale ou l'hypothèse de linéarité.

Si les FRF respectent les propriétés de passivité, nous pouvons procéder à l'estimation des fonctions de transfert rationnelles associées. Néanmoins, l'état actuel des travaux de recherche ne permet pas, à notre connaissance, de garantir a priori des propriétés de passivité sur les fonctions de transfert. Ce qui implique une vérification a posteriori des propriétés de passivité des fonctions de transfert identifiées. Si cette propriété est fortement violée sur la bande passante d'intérêt, il est préférable d'adopter l'approche analytique tout en limitant la bande passante de la commande au domaine de validité du modèle analytique. En effet, si le système identifié n'est pas passif sans la commande, une loi de commande assurant la passivité de la boucle fermée sera trop conservatrice.

### 2.3.3 Systèmes Hamiltoniens à Ports (PHS)

Le formalisme des [systèmes Hamiltoniens à ports \(PHSs\)](#) est une approche de modélisation et de synthèse de commande pour des systèmes complexes et multi-physiques se basant sur la généralisation des équations de la mécanique Hamiltonienne. Utilisée notamment

---

3. Vibrations et chocs – Détermination expérimentale de la mobilité mécanique

dans l'étude des systèmes micro électro-mécaniques, l'approche PHS comporte deux volets essentiels, le volet modélisation et le volet synthèse de commande. Dans le présent paragraphe, nous nous limiterons à l'introduction des concepts de modélisation qui seront utiles pour la suite. Nous n'aborderons typiquement pas les approches de commande spécifiques aux PHS tel que l'IDA-PBC [15]. De plus amples informations sur l'approche PHS se trouvent dans [16].

La modélisation PHS est un formalisme d'état convenant à la modélisation des systèmes physiques et multi-physiques y compris non-linéaires. La spécificité de l'approche réside dans le choix particulier du vecteur d'état.

En mécanique Hamiltonienne classique, en notant  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{V}$  les énergies cinétique et potentielle du système, les équations de mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{H}(q, p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial}{\partial q} \mathcal{H}(q, p) + F\end{aligned}\tag{2.21}$$

où  $\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{T} + \mathcal{V}$  est le Hamiltonien représentant l'énergie totale du système,  $q$  le vecteur des coordonnées généralisées,  $p$  le vecteur des impulsions généralisées (i.e. quantités de mouvement), et  $F$  le vecteur des forces généralisées.

En posant  $x = [q \quad p]^T$ , nous obtenons la forme compacte suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}\tag{2.22}$$

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial^T}{\partial q} \mathcal{H}(q, p) \dot{q} + \frac{\partial^T}{\partial p} \mathcal{H}(q, p) \dot{p} = \frac{\partial^T}{\partial p} \mathcal{H}(q, p) F = \dot{q}^T F\tag{2.23}$$

exprimant ainsi la variation de l'énergie interne du système par le travail  $\dot{q}^T F$ . Chaque couple  $\{\dot{q}_i, F_i\}$  correspond à un port d'interaction  $i$  entre le système et son environnement. Par souci de causalité, on considère, pour chaque port  $i$ ,  $F_i$  comme entrée et  $\dot{q}_i$  comme sortie. Par analogie entre différents domaines de la physique, nous généralisons les notions de force et vitesse à travers les concepts d'effort et de flux. Le tableau 2.3 illustre les efforts et les flux selon le domaine physique considéré.

TABLEAU 2.3 – exemples d'efforts et flux

Domaine physique	Effort	Flux
Mécanique	Force	Vitesse
Hydraulique	Pression	Débit
Électricité	Tension	Courant
Thermodynamique	Température	Flux d'entropie

Il peut dans certains cas être intéressant de considérer des coordonnées locales différentes des coordonnées généralisées. Dans ce cas, l'équation d'état s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathcal{J}(x) \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(x) + g(x)u \\ y &= g(x)^T \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(x)\end{aligned}\tag{2.24}$$

avec  $\mathcal{J}(x) = -\mathcal{J}^T(x)$ , pour ainsi respecter l'équation de conservation de l'énergie 2.23 – i.e.  $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = y^T u$ .

À ce stade, l'équation 2.24 rend compte uniquement des systèmes conservatifs. Afin d'inclure des points de dissipation, nous augmentons  $u$  en  $\begin{bmatrix} u \\ u_R \end{bmatrix}^T$  et  $y$  en  $\begin{bmatrix} y \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x)^T \\ g(x)_R^T \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(x)$  pour ainsi reboucler  $y_R$  sur  $u_R$  par une structure dissipative :

$$u_R = -S y_R\tag{2.25}$$

où  $S$  est une matrice semi-définie positive symétrique<sup>4</sup>  $S = S^T > 0$ . En injectant 2.25 dans 2.24, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\mathcal{J}(x) - \mathcal{R}(x)) \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(x) + g(x)u \\ y &= g(x)^T \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(x)\end{aligned}\tag{2.26}$$

avec  $\mathcal{R}(x) = g_R(x)Sg_R(x)^T$  également semi-définie positive.

On appelle 2.26 un système Hamiltonien à ports avec une matrice de structure  $\mathcal{J}(x)$ , une matrice de dissipation  $\mathcal{R}(x)$ , une matrice d'entrée  $g(x)$ , et un Hamiltonien  $\mathcal{H}(x)$ .

4. Dans la grande majorité des systèmes physiques, y compris non-linéaires, cette hypothèse est vérifiée [16].



### 2.3.3.1 Cas Linéaire

Considérons un système linéaire stable et strictement propre ayant pour représentation d'état :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{2.27}$$

et soit  $Q$  une matrice de Lyapunov telle que :

$$\begin{aligned}A^T Q + QA &< 0 \\ Q &> 0\end{aligned}\tag{2.28}$$

Si  $u$  et  $y$  sont de même taille de telle façon que chaque couple  $\{u_i, y_i\}$  constitue un port d'interaction<sup>5</sup>, alors sous forme PHS, l'équation 2.27 s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\mathcal{J} - \mathcal{R})Qx + Bu \\ y &= B^T Qx\end{aligned}\tag{2.29}$$

avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= -\mathcal{J}^T = 0.5(AQ^{-1} - Q^{-1}A^T) \\ \mathcal{R} &= \mathcal{R}^T = -0.5(AQ^{-1} + Q^{-1}A^T) > 0\end{aligned}\tag{2.30}$$

La formulation PHS répartit ainsi la représentation d'état classique en deux parties, une conservative l'autre dissipative, une différenciation qui nous sera fort utile pour structurer le contrôleur tel qu'on le verra au chapitre 3.

### 2.3.4 Systèmes linéaires à paramètres variants (LPV)

La modélisation **linéaire à paramètres variants (LPV)** introduite par Shamma [17] a été appliquée assez tôt aux besoins de commande des systèmes aérospatiaux [18]. Elle a été par la suite adoptée par différents domaines d'ingénierie dont la robotique [8]. Elle présente l'avantage d'étendre l'usage des outils d'analyse des systèmes linéaires à une certaine classe de systèmes non linéaires.

On dit d'un système qu'il est LPV s'il peut se mettre sous la forme d'état :

$$\begin{aligned}\Sigma(\theta) : \\ \dot{x} &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t)\end{aligned}\tag{2.31}$$

---

5.  $\{u_i, y_i\}$  est un port d'interaction ssi  $\frac{\partial}{\partial t} x^T Q x = y^T u$ .

où  $\theta(t)$  est un vecteur de paramètres variants dans le temps.  
Lorsque  $\Sigma(\theta)$  peut se mettre sous la forme :

$$\Sigma(\theta) = \Sigma_0(\theta) + \theta_1 \Sigma_1(\theta) + \theta_2 \Sigma_1(\theta) + \dots \quad (2.32)$$

on parle d'un système LPV affine. Dans ce cas de figure, certaines propriétés de stabilité et performances  $H_\infty$  des systèmes LTI sont généralisées soit par des évaluations sur le polytope formé par les valeurs extrémales de  $\theta(t)$  soit en formulant des conditions sur  $\hat{\theta}(t)$  [19].

Pour un système non-linéaire général ayant pour représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y &= g(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec  $f$  continue dérivable, nous posons  $\{x_{eq}, u_{eq}\}$  point d'équilibre vérifiant  $\dot{x}_{eq} = 0$ . Par linéarisation Jacobienne, nous calculons une représentation d'état dite quasi-LPV du système, dans la mesure où  $\theta$  est fonction de l'état  $x(t)$  :

$$\begin{aligned} &\Sigma(\theta) : \\ \delta \dot{x}(t) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, u)|_{\{x_{eq}, u_{eq}\}} \delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u)|_{\{x_{eq}, u_{eq}\}} \delta u(t) \\ \delta y(t) &= \frac{\partial}{\partial x} g(x, u)|_{\{x_{eq}, u_{eq}\}} \delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u} g(x, u)|_{\{x_{eq}, u_{eq}\}} \delta u(t) \quad (2.34) \\ &\equiv \\ \delta \dot{x}(t) &= A(\theta(x)) \delta x(t) + B(\theta(x)) \delta u(t) \\ \delta y(t) &= C(\theta(x)) \delta x(t) + D(\theta(x)) \delta u(t) \end{aligned}$$

avec  $x(t) = x_{eq} + \delta x(t)$ ,  $u(t) = u_{eq} + \delta u(t)$  et  $y(t) = y_{eq} + \delta y(t)$ .

Le système  $\Sigma(\theta)$  est d'une manière générale non-linéaire, car la propriété de superposition n'est généralement pas assurée. L'approche quasi-LPV est une tentative de généraliser les outils d'analyse et de synthèse des systèmes LTI à la classe des systèmes non-linéaires décrits par 2.31. Lorsque la représentation quasi-LPV se met sous une forme affine en fonction de  $\theta(x)$ , nous retrouvons, pour le point d'équilibre  $\{x_{eq}, u_{eq}\}$ , les résultats des systèmes LPV affines. Bien que l'analyse de la réalisation quasi-LPV ne constitue pas une garantie formelle de performance et de stabilité du système non-linéaire, il s'agit d'une approche couramment utilisée en automatique.

## 2.4 Modélisation et identification des cobots considérés

### 2.4.1 Modélisation du vérin à câble (dispositif $D_1$ )

#### 2.4.1.1 Hypothèses de modélisation

Nous faisons ici le choix de procéder à une modélisation de type boîte grise [20], où la structure du modèle est issue des équations physiques et où seuls les paramètres du modèle sont à estimer. Ce choix est motivé par la simplicité des équations régissant un tel système. Bien que constitué, stricto sensu, de 2 éléments flexibles — le câble et la courroie —, nous faisons l'hypothèse que la courroie est largement plus raide que le câble, ce qui limite le modèle à un seul mode flexible. Par ailleurs, les forces de frottement, bien que distribuées dans différents points de dissipation, sont ramenées au niveau du moteur. Enfin, la poulie de sortie est solidaire d'un segment robotique soumis au poids et dont la masse et la position du centre de gravité sont supposés inconnus. La validité de ces hypothèses est vérifiée a posteriori par la qualité des prédictions fournies par le modèle identifié.

#### 2.4.1.2 Modèle de Connaissances

À partir des hypothèses de modélisation sus-énumérées, les équations mécaniques du système s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\theta}_m &= \Gamma_m - c_m \dot{\theta}_m - f_m \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_m) - \frac{c_c}{N} \left( \frac{\dot{\theta}_m}{N} - \dot{\theta}_a \right) - \frac{k_c}{N} \left( \frac{\theta_m}{N} - \theta_a \right) \\ J_a \ddot{\theta}_a &= \Gamma_i + c_c \left( \frac{\dot{\theta}_m}{N} - \dot{\theta}_a \right) + k_c \left( \frac{\theta_m}{N} - \theta_a \right) + M_x \cos(\theta_a) + M_y \sin(\theta_a) \end{aligned} \quad (2.35)$$

où

- $\theta_m$ ,  $\dot{\theta}_m$  et  $\ddot{\theta}_m$  sont respectivement la position, la vitesse et l'accélération du moteur,
- $\theta_a$ ,  $\dot{\theta}_a$  et  $\ddot{\theta}_a$  sont respectivement la position, la vitesse et l'accélération de la sortie,
- $\Gamma_m$  et  $\Gamma_i$  représentent le couple du moteur et le couple d'interaction entre le bras et son environnement,
- $J_m$  est l'inertie côté moteur,
- $J_a$  est l'inertie de sortie,

- $c_m$  et  $f_m$  sont respectivement les coefficients de frottement visqueux et sec ramenés au niveau du moteur,
- $N$  représente le rapport de transmission de l'actionneur,
- $c_c$  et  $k_c$  sont respectivement l'amortissement et la rigidité de la transmission — modélisés du côté de la sortie.
- $M_x$  et  $M_y$  sont les paramètres du modèle de pesanteur du segment.

En notant  $\delta_\theta$  la déformation de la transmission vue du moteur – la différence entre la position du moteur et celle de l'articulation projetée dans l'espace du moteur –, et en supposant que les frottement secs et le poids sont, après identification, précompensés, la réalisation linéarisée de  $D_1$  dans l'espace d'état suivante est minimale :

$$\begin{bmatrix} J_m & 0 & 0 \\ 0 & J_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_m \\ \ddot{\theta}_a \\ \ddot{\delta}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_m - c_c & c_c N & -k_c \\ c_c N & -c_c N^2 & k_c N \\ 1 & -N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\theta}_a \\ \delta_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_m \\ \Gamma_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\theta}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\theta}_a \\ \delta_\theta \end{bmatrix}$$

(2.36)

### 2.4.1.3 Estimation des paramètres

Le rapport de réduction  $N$  est supposé connu a priori. Nous faisons le choix d'identifier les autres paramètres du modèle en deux étapes consécutives :

- **estimation des termes de frottement et de poids** : Le frottement et le poids étant des termes non-linéaires, nous procédons à une identification dans le domaine temporel. Pour cela, nous concevons une expérience où le moteur effectue des paliers de vitesse d'amplitudes diverses. Dans ce cas de figure, et en faisant abstraction des effets transitoires, les accélérations et les efforts internes s'annulent. L'équation 2.35 se simplifie, alors, comme suit :

$$0 = \Gamma_m - c_m \dot{\theta}_m - f_m \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_m) - M_x \frac{\cos(\theta_a)}{N} - M_y \frac{\sin(\theta_a)}{N} \quad (2.37)$$

Ou d'une façon équivalente :

$$\Gamma_m = [\dot{\theta}_m \quad \text{sgn}(\dot{\theta}_m) \quad \cos(\theta_a) \quad \sin(\theta_a)] \begin{bmatrix} c_m \\ f_m \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} c_m \\ f_m \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

L'écriture de l'équation 2.38 étant compatible avec des  $\Gamma_m$ ,  $\theta_m$  et  $\theta_a$  vectoriels regroupant l'ensemble des mesures relevées au long de l'expérience, la solution des moindres carrés prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_m \\ \tilde{f}_m \\ \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T \Gamma_m \quad (2.39)$$

Le tableau 2.4 fournit les valeurs nominales des estimations de

TABLEAU 2.4 – paramètres de frottement identifiés pour D<sub>1</sub>

Variable	Valeur Nominale	Unité	Incertitude
$c_m$	$6.407e^{-4}$	N.m.rd <sup>-1</sup> .s	7%
$f_m$	0.181	N.m	14%
$M_x$	-9.758	N.m	3%
$M_y$	63.366	N.m	4%

$c_m$ ,  $f_m$ ,  $M_x$  et  $M_y$  ainsi que leurs intervalles de confiance calculés selon la méthode de Booth [21]. La figure 2.7, illustre la prédiction du modèle de frottement. Nous pouvons constater que la prédiction du modèle colle bien aux données expérimentales.

- **estimation des paramètres du modèles linéaire :** Pour identifier les autres paramètres du modèle d'état décrit dans l'équation 2.36, nous adoptons, contrairement à l'étape précédente une approche fréquentielle. Deux raisons justifient ce choix. La première est qu'en l'absence d'une reformulation de l'équation 2.36 sous une forme LP, une estimation des moindres carrés nécessiterait d'avoir recours à un algorithme d'optimisation de type descente de gradient pour lequel la qualité et la justesse des résultats dépend fortement des conditions initiales — que nous supposons inconnues dans notre cas. À contrario, une lecture

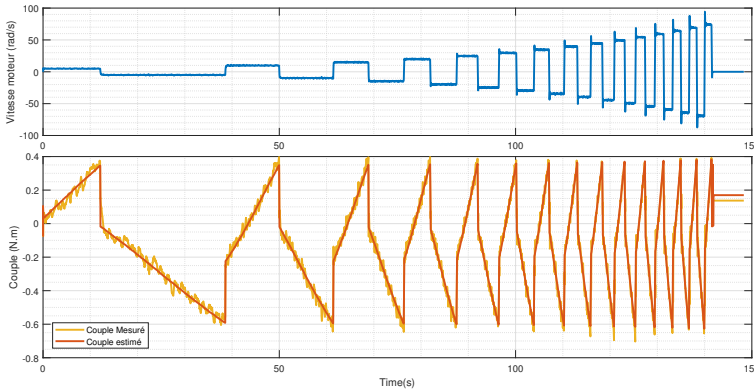


FIGURE 2.7 – prédictions du modèle de frottement de  $D_1$

graphique directe de la réponse fréquentielle du système fournit, tel qu'on l'illustrera ci-dessous, une estimation initiale des paramètres qu'il devient trivial d'affiner par un algorithme basé gradient. La seconde raison tient au fait que l'approche fréquentielle permet d'éviter la double dérivation numérique des signaux de position pour l'identification des paramètres d'inertie — opération générant un bruit important sur le signal d'accélération et pouvant altérer la qualité de l'identification des paramètres inertiels [22].

Aussi, après compensation de  $f_m$ ,  $c_m$ ,  $M_x$  et  $M_y$ , l'actionneur est piloté par un couple moteur  $\Gamma_m$  sinusoïdal d'amplitude constante et de fréquence variant linéairement entre 0.5 et 100Hz. Les signaux de sortie considérés sont les positions du moteur  $\theta_m$  et de la poulie de sortie de l'actionneur  $\theta_a$ . Pour chacune de ces deux sorties, le rapport entre le spectre d'intercorrélacion entrée-sortie  $S_{yu}(\omega)$  et le spectre d'autocorrélacion de l'entrée  $S_{uu}(\omega)$  représente la fonction de réponse fréquentielle (FRF) du système — expression des valeurs expérimentales de la fonction de transfert [13]— :

$$H_{yu}(\omega) = \frac{S_{yu}(\omega)}{S_{uu}(\omega)} \quad (2.40)$$

La figure 2.8-1 illustre les deux FRF du dispositif  $D_1$ .

Afin de vérifier la confiance qu'on peut accorder aux FRF obtenues, nous faisons appel à la fonction de cohérence  $C_{yu}$  définie

comme :

$$C_{yu}(\omega) = \frac{S_{yu}(\omega)^2}{S_{uu}(\omega) S_{yy}(\omega)} \quad (2.41)$$

La fonction de cohérence est un outil couramment utilisé en identification des systèmes flexibles [13]. Elle renseigne sur la qualité de l'identification pour chaque fréquence  $\omega$ . Plus  $C_{yx}$  est proche de l'unité, plus l'hypothèse de linéarité est respectée [13]. La figure 2.8-2 illustre les fonctions de cohérence de chaque FRF. Ainsi, on notera que  $\frac{\dot{\theta}_m(\omega)}{\Gamma_m(\omega)}$  présente une cohérence élevée jusqu'à 50Hz, tandis que la cohérence de  $\frac{\dot{\theta}_a(\omega)}{\Gamma_m(\omega)}$  diminue fortement à partir de 10Hz.

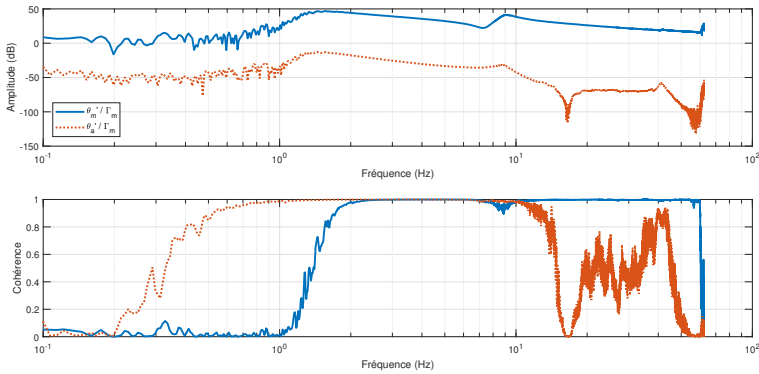


FIGURE 2.8 – fonctions de réponse fréquentielle de D<sub>1</sub>

On démontre que le système décrit par l'équation 2.36 dispose des propriétés suivantes dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}_m(\omega)}{\Gamma_m(\omega)} &\approx \frac{N^2}{(N^2 J_m + J_a) j \omega} && ; \omega \in 2\pi [2 \text{ Hz}, 5 \text{ Hz}] \\ \frac{\dot{\theta}_m(\omega)}{\Gamma_m(\omega)} &\approx \frac{1}{(J_m) j \omega} && ; \omega \in 2\pi [20 \text{ Hz}, 50 \text{ Hz}] \quad (2.42) \\ f_{ar} &\approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_c N^2}{J_a}} && ; f_{ar}^6 \approx 7.2 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Par lecture du tracé de  $\frac{\dot{\theta}_m(\omega)}{\Gamma_m(\omega)}$  donné en figure 2.8, nous pouvons extraire une estimation approximative des paramètres  $J_m$ ,  $J_a$ , et  $k_c$ , en relevant :

---

6. Fréquence de l'anti-résonance

- le gain en basse fréquence
- le gain en haute fréquence
- la fréquence de résonance

et en solvant l'équation 2.42. Par la suite, l'estimation de  $J_m$ ,  $J_a$ ,  $k_c$ , et  $c_c$  est affinée par un algorithme de Levenberg-Marquardt [23, 24] en minimisant le critère des moindres carrés pondérés suivant :

$$\sum C(\omega) (H(\omega) - F(\omega))^2 \quad (2.43)$$

où  $C(\omega)$  est la fonction de cohérence du système,  $H(\omega)$  la fonction de transfert rationnelle à identifier, et  $F(\omega)$  la fonction de réponse fréquentielle. Le tableau 2.5 fournit les estimations des paramètres. On peut constater que l'écart entre les valeurs initiales et les valeurs après optimisation est faible, et que la prédiction du modèle identifié tel qu'illustrée en figure 2.9 est satisfaisante.

TABLEAU 2.5 – paramètres dynamiques identifiés pour  $D_1$

Variable	Valeur Initiale	Valeur Identifiée	Unité	Incertitude
$J_m$	$1.416e^{-5}$	$1.321e^{-5}$	$kg.m^2$	0.8%
$J_a$	0.039	0.063	$kg.m^2$	4%
$k_c$	0.009	0.013	$N.m.rd^{-1}.s^2$	3%
$c_c$	0	$2.944e^{-5}$	$N.m.rd^{-1}.s$	8%



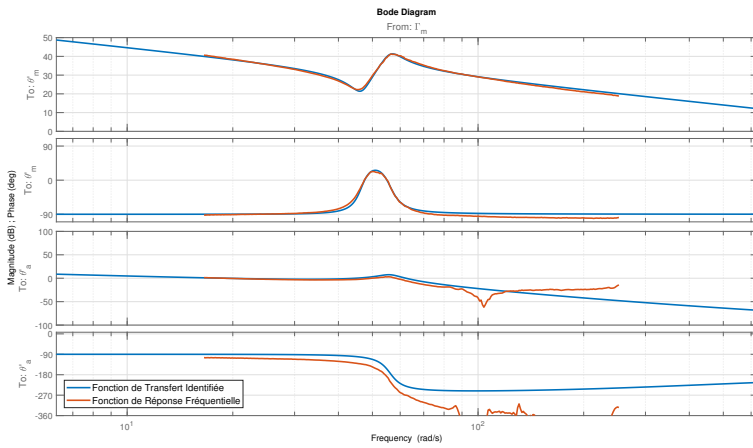


FIGURE 2.9 – fonctions de transfert identifiées de  $D_1$

## 2.4.2 Modélisation du robot A6.15 (dispositif $D_2$ )

### 2.4.2.1 Hypothèses de modélisation

Contrairement à  $D_1$ , dans le cas présent, nous faisons l'économie d'un modèle basé sur les équations de la physique du robot. Ce choix est motivé par le fait qu'une identification de type « boîte noire » permet de rendre compte de phénomènes dynamiques — essentiellement, les flexibilités structurelles — qu'il est difficile de mettre en évidence par une mise en équation analytique. Par ailleurs, la finalité de la présente démarche d'identification étant la synthèse de lois de commande, il est indispensable que le modèle entrée-sortie identifié inclut les actionneurs et capteurs de la machine utilisés dans la boucle de commande.

### 2.4.2.2 Identification du modèle

Après avoir bloqué, par un asservissement de positions, les positions des axes 1, 2, 3 et 5, les fonctions de transfert de l'axes 4 sont identifiées selon la procédure décrite en [10] que l'on a adapté pour prendre en compte les mesures de position.

Nous adoptons la modélisation sous forme de schéma-bloc de la figure 2.10-1, avec  $F_e$  l'effort exercé par l'environnement sur le robot exprimé dans le repère de base du robot,  $\dot{X}_r$  la vitesse de l'effecteur dans le même repère,  $\Gamma_m$  le couple moteur et  $\dot{\theta}_m$  la vitesse du moteur. Le comportement dynamique du robot est modélisé dans l'espace ar-

ticulaire par la matrice de transfert  $G(s)$ . La matrice jacobienne  $J$  du robot projette la vitesse articulaire  $\dot{\theta}_r$  dans l'espace cartésien du repère de base du robot. La jacobienne transposée  $J^T$  projette l'effort  $F_e$  dans l'espace articulaire. On appelle admittance du robot la fonction de transfert  $J G_{11}(s) J^T$ .  $Z_e(s)$  représente l'impédance de l'environnement. Toutefois, afin de limiter les effets des singularités de l'espace de travail du robot, on préférera raisonner dans l'espace articulaire. Ainsi  ${}_q\mathcal{Y}_R(s) = G_{11}(s)$  sera considéré comme l'admittance du robot exprimée dans l'espace articulaire, tandis que  ${}_qZ_e(s) = J^T Z_e(s) J$  représente l'impédance de l'environnement exprimée dans l'espace articulaire (Figure 2.10-2). Nous devons, donc, identifier les quatre fonctions de transfert de  $G(s)$ , avec la particularité que seuls  $\Gamma_m$ ,  $\dot{\theta}_m$  et  $\Gamma_e$  sont mesurables, et que la seule entrée pilotable du système est  $\Gamma_m$ .

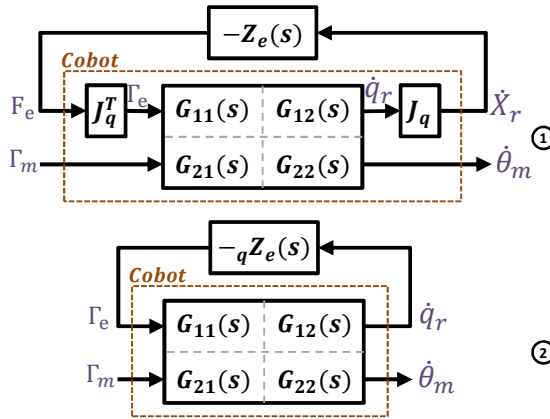


FIGURE 2.10 – Schéma-Bloc de  $D_2$

D'après la figure 2.10-2, on peut obtenir les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_r &= G_{11} \Gamma_e + G_{12} \Gamma_m \\
 \dot{\theta}_m &= G_{21} \Gamma_e + G_{22} \Gamma_m \\
 \Gamma_e &= -{}_qZ_e \dot{q}_r
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

où la variable de Laplace "s" a été omise par souci de compacité. À partir de l'équation 2.44, et considérant deux environnements extrêmes  ${}_qZ_{e\infty} \rightarrow \infty$  (e.g. mur rigide) et  ${}_qZ_{e0} \rightarrow 0$  (e.g. une charge de

masse faible), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \lim_{q\mathcal{Z}_e(s) \rightarrow 0} \frac{\dot{q}_r(s)}{\Gamma_m(s)} &= G_{12}(s) \\
 \lim_{q\mathcal{Z}_e(s) \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_e(s)}{\Gamma_m(s)} &= -\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)} \\
 \lim_{q\mathcal{Z}_e(s) \rightarrow 0} \frac{\dot{\theta}_m(s)}{\Gamma_m(s)} &= G_{22}(s) \\
 \lim_{q\mathcal{Z}_e(s) \rightarrow \infty} \frac{\dot{\theta}_m(s)}{\Gamma_m(s)} &= \frac{G_{11}(s)G_{22}(s) - G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)}
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

En considérant  $H_\gamma = \frac{\Gamma_e}{\Gamma_m}$  et  $H_\theta = \frac{\dot{\theta}_m}{\Gamma_m}$ , les quatre fonctions de transfert de  $G$  s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= -\frac{H_{\gamma_0}}{H_{\gamma_\infty} q\mathcal{Z}_{e_0}} \\
 G_{12} &= \frac{H_{\gamma_0}}{q\mathcal{Z}_{e_0}} \\
 G_{21} &= -\frac{H_{\theta_0} - H_{\theta_\infty}}{H_{\theta_\infty}} \\
 G_{22} &= H_{\theta_0}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

avec  $q\mathcal{Z}_{e_0}(s) = J_0 s$ ,  $J_0$  étant l'inertie de la charge projetée sur l'axe 4, et où les indices 0 et  $\infty$  représentent le contexte dans lequel l'identification a été réalisée — respectivement charge de masse faible et mur rigide —.

Expérimentalement, on commence par identifier les FRF de  $H_{\gamma_0}$ ,  $H_{\gamma_\infty}$ ,  $H_{\theta_0}$  et  $H_{\theta_\infty}$ . Ensuite, on extrait, selon l'équation 2.46, les quatre FRF de  $G(s)$ . Enfin, on approxime les quatre FRF par des fonctions de transfert rationnelles avec des méthodes de « curve-fitting » [14]. La figure 2.11 illustre les FRF et les approximations rationnelles correspondantes pour les quatre transferts de  $G(s)$ . On notera que le système présente une multitude de flexibilités qu'il aurait été difficile de modéliser à partir des équations physiques. Il convient de noter, également, que  $q\mathcal{Y}_R(s)$  présente, en figure 2.12, une phase comprise entre  $90^\circ$  et  $-90^\circ$  ce qui lui fait respecter la contrainte de passivité — propriété indispensable et que nous discuterons plus en profondeur en section 3.2.1. Un non respect de cette contrainte invaliderait l'identification. En effet, le robot, non commandé, étant exclusivement constitué d'éléments passifs — masses, ressorts et amortisseurs —, il est exclu que leur agencement, quel qu'il soit, puisse présenter des propriétés actives. Ainsi,

## CHAPITRE 2. CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION ET À L'IDENTIFICATION DE SYSTÈMES EN COBOTIQUE

si l'admittance identifié n'est pas passive, l'identification est invalide.

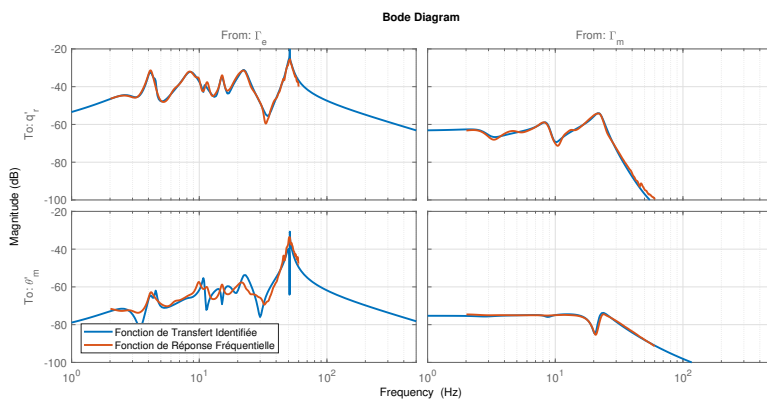


FIGURE 2.11 – Diagramme de Bode de  $D_2$

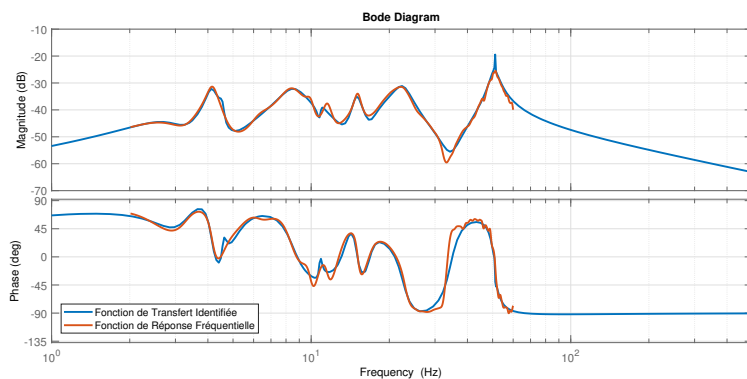


FIGURE 2.12 – Diagramme de Bode de  $q\mathcal{Y}_R(s)$

### 2.4.3 Modélisation du robot LDC (dispositif $D_3$ )

Contrairement à  $D_1$  et  $D_2$ ,  $D_3$  n'est pas un modèle identifié mais un modèle issu des données de la CAO. Il s'agit d'un modèle simulé du cobot LDC — cobot d'assistance à la palettisation d'architecture SCARA à fort élancement — basé sur les équations physiques et dont les paramètres sont issus de modèles CAO.

Après avoir présenté la cinématique du cobot, nous consacrons la sous-section suivante aux essais d'identification réalisés mettant en évidence les verrous constatés, avant d'aborder l'élaboration du modèle  $D_3$  en troisième lieu.

#### 2.4.3.1 Description de la chaîne cinématique du cobot

Comme dans toute architecture de type SCARA, l'axe de translation verticale du cobot est dynamiquement découplé des trois autres ddl. Nous nous limitons, dans le cas présent, à l'étude des trois premiers ddl contrôlant le mouvement plan du robot. Contrairement à une architecture SCARA classique, le cobot LDC dispose d'un segment intermédiaire de faible longueur entre les deux segments principaux du cobot, comme illustré en figure 2.13. L'objectif de cet ajout est de permettre un repliement à  $180^\circ$  du troisième segment. Le cobot n'est pour autant pas sur-actionné, en effet les axes  $q_2$  et  $q_3$ , paramétrant respectivement les positions des segments **2** et **3**, sont cinématiquement liés grâce à une transmission poulie courroie, imposant la contrainte  $q_2 = q_3$ . Le segment **4** du robot est supposé rigide et est réduit à un moment d'inertie  $I_{g_4}$  exprimé en  $\bar{z}_4$ . L'ensemble de la partie avale à l'axe de rotation  $\bar{z}_5$  — appelé ci-après « effecteur » — est réduit à une masse attachée au segment **4** par un ressort-amortisseur, afin de rendre compte de la flexibilité due à la cinématique télescopique de l'axe  $\bar{z}_5$ . Le poignet opérateur est équipé d'un capteur d'effort 6 axes. Les composantes du torseur d'effort mesurées par le capteur sont réduites au niveau de l'axes  $\bar{z}_4$  puis exprimées par rapport au repère  $R_0$  de la base du cobot.

Dans ce qui suit, nous adoptons les notations suivantes pour les variables du modèles  $D_3$  :

- $\Gamma_{mi}$  : Couple du moteur actionnant la  $i^{\text{ème}}$  articulation
- $\theta_{mi}$  : position du moteur actionnant la  $i^{\text{ème}}$  articulation
- $q_i$  : position de la  $i^{\text{ème}}$  articulation

## CHAPITRE 2. CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION ET À L'IDENTIFICATION DE SYSTÈMES EN COBOTIQUE

---

- $x_{gi}$  : position du centre de gravité du  $i^{\text{ème}}$  segment selon l'axe  $x$  du repère  $R_b$
- $y_{gi}$  : position du centre de gravité du  $i^{\text{ème}}$  segment selon l'axe  $y$  du repère  $R_b$
- $x_t$  : position de l'outil selon l'axe  $x$  du repère  $R_b$
- $y_t$  : position de l'outil selon l'axe  $y$  du repère  $R_b$
- $q_t$  : orientation de l'outil selon l'axe  $z$  du repère  $R_b$
- $x_h$  : position du poignet opérateur selon l'axe  $x$  du repère  $R_b$
- $y_h$  : position du poignet opérateur selon l'axe  $y$  du repère  $R_b$
- $q_h$  : orientation du poignet opérateur selon l'axe  $z$  du repère  $R_b$

Par ailleurs, les valeurs des paramètres issus de la CAO et adoptées dans la présente modélisation sont regroupés dans le tableau 2.6.

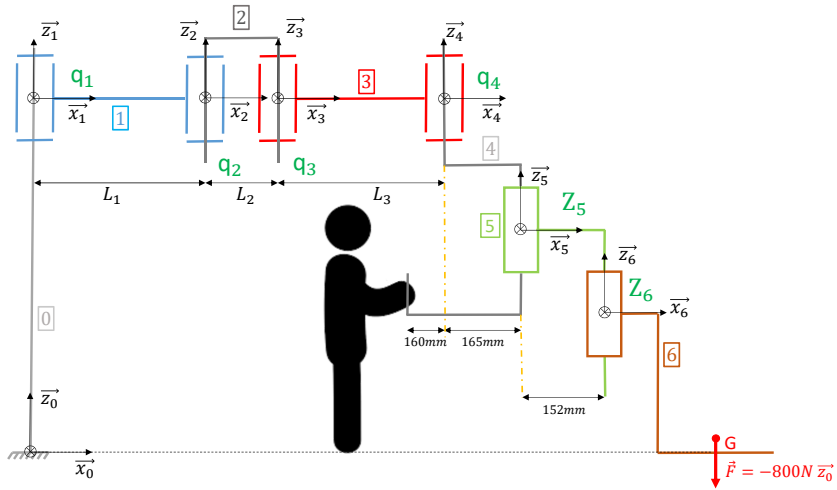
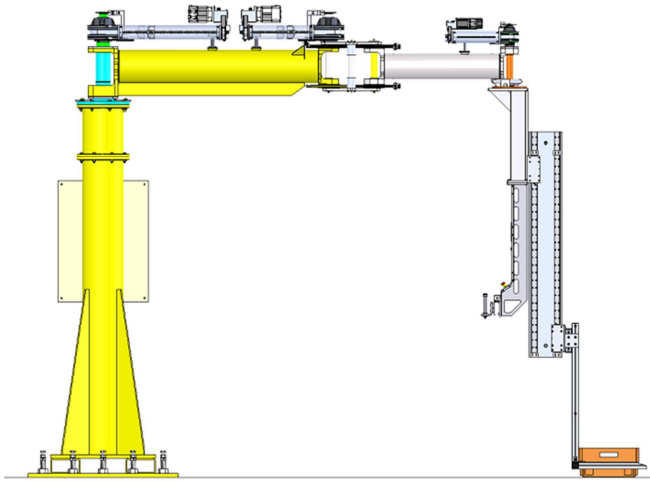


FIGURE 2.13 – Cinématique du cobot LDC

CHAPITRE 2. CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION ET À  
L'IDENTIFICATION DE SYSTÈMES EN COBOTIQUE

TABLEAU 2.6 – paramètres dynamiques considérés pour D<sub>3</sub>

Variable	Valeur Nominale	Unité	Description
$l_1$	$1500e^{-3}$	$m$	Longueur du premier segment
$l_2$	$300e^{-3}$	$m$	Longueur du second segment
$l_3$	$900e^{-3}$	$m$	Longueur du troisième segment
$l_4$	0	$m$	Longueur du quatrième segment
$l_{g1}$	$678e^{-3}$	$m$	Position du centre de gravité du premier segment
$l_{g2}$	$137e^{-3}$	$m$	Position du centre de gravité du second segment
$l_{g3}$	$424e^{-3}$	$m$	Position du centre de gravité du troisième segment
$l_{g4}$	0	$m$	Position du centre de gravité du quatrième segment
$m_1$	133	$kg$	Masse du premier segment
$m_2$	35	$kg$	Masse du second segment
$m_3$	42	$kg$	Masse du troisième segment
$m_4$	27.5	$kg$	Masse du quatrième segment
$m_t$	80	$kg$	Masse de l'effecteur
$I_{g1}$	45.5	$kg.m^2$	Moment d'Inertie du premier segment
$I_{g2}$	0.5	$kg.m^2$	Moment d'Inertie du second segment
$I_{g3}$	5.8	$kg.m^2$	Moment d'Inertie du troisième segment
$I_{g4}$	0.28	$kg.m^2$	Moment d'Inertie du quatrième segment
$I_t$	3.1	$kg.m^2$	Moment d'Inertie de l'effecteur
$J_{m1}$	8.5	$kg.m^2$	Moment d'Inertie du moteur du premier segment projeté dans l'espace articulaire
$J_{m2}$	8.5	$kg.m^2$	Moment d'Inertie du moteur du second segment projeté dans l'espace articulaire
$J_{m4}$	8.5	$kg.m^2$	Moment d'Inertie du moteur du quatrième segment projeté dans l'espace articulaire
$k_{q1}$	13000	$N.m.rad^{-1}$	Raideur de la transmission du premier segment
$k_{q2}$	13600	$N.m.rad^{-1}$	Raideur de la transmission du second segment
$k_{q4}$	13600	$N.m.rad^{-1}$	Raideur de la transmission du quatrième segment
$k_{tf}$	13600	$N.m^{-1}$	Raideur en traction de l'effecteur
$k_{t\omega}$	13600	$N.m.rad^{-1}$	Raideur en torsion de l'effecteur
$\delta$	0.001		Facteur de perte de l'acier



### 2.4.3.2 Tentative d'identification boîte noire de $D_3$

#### 2.4.3.2.1 Démarche expérimentales

Compte tenu des dimensions du cobot, nous faisons en première approximation l'hypothèse que l'axe 3 est découplé des deux premiers, et procédons à l'identification d'un système à deux ddl représentant la dynamique des deux premiers axes.

Comme évoqué au 2.3.2, compte tenu de la non-linéarité intrinsèque des robots, nous procédons, dans une approche multi-modèle, à l'identification de modèles linéaires évalués autour d'un ensemble de points d'équilibre. Dans le cas présent, le premier point d'équilibre choisi est  $\{q_1 = 0, q_2 = \frac{\pi}{4}, q_3 = 0\}$ . Nous reprenons, ci-présent, la même démarche adoptée pour  $D_2$ , et consistant à stimuler le cobot en couple dans deux configurations extrêmes : environnement rigide, environnement inertiel de masse faible.

Afin de limiter la sensibilité de l'identification aux non-linéarités dures autour de zéro (frottement, zones mortes, jeux ...), nous faisons le choix d'exciter les deux moteurs simultanément par deux signaux sinusoïdaux de même fréquence, de même amplitude mais dont la phase peut être différente selon le cas. Notons  $\Gamma_m = \begin{bmatrix} \Gamma_{m1} \\ \Gamma_{m2} \end{bmatrix}$  le vecteur des consignes de couples et  $\Gamma_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} J_e^T(q) F_e$  la projection de  $F_e$  sur les axes 1 et 2.

Le tableau 2.7 illustre la combinatoire des expériences et le traitement associé permettant d'obtenir les matrices de transfert du cobot. Pour chacune des expériences considérées,

$$\phi H_Y(j\omega) = S_{\Gamma_e \Gamma_m}(\omega) S_{\Gamma_m \Gamma_m}(\omega)^+ \quad (2.47)$$

représente la FRF entre  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_e$  pour un déphasage  $\phi$  de  $\Gamma_{m2}$  donné. Selon que  $\Gamma_{m1}$  et  $\Gamma_{m2}$  sont en phase ou en opposition de phase, certains transfert de  $H_Y$  se compensent et d'autres s'amplifient. On reconstitue alors par superposition

$$H_Y(j\omega) = {}_0H_Y(j\omega) + {}_\pi H_Y(j\omega) \quad (2.48)$$

On trace en figure 2.14 le digramme de Bode de  $\mathcal{Y}_{D_3} = -H_{Y_0} (H_{Y_\infty} q Z_{e_0})^{-1}$ . On note que les phases des transferts diagonaux sortent à plusieurs reprises de l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}]$ , ce qui indique un non respect des propriétés de passivité à certaines fréquences. Cette observation se

TABLEAU 2.7

Phase $\phi_1$ de $\Gamma_{m1}$	Phase $\phi_2$ de $\Gamma_{m2}$	Environnement	Matrice ${}_{\phi}H_Y$
0	0	rigide	${}_{0}H_{Y\infty}(j\omega)$
0	$\pi$	rigide	$\pi H_{Y\infty}(j\omega)$
0	0	inertiel	${}_{0}H_{Y0}(j\omega)$
0	$\pi$	inertiel	$\pi H_{Y0}(j\omega)$

confirme à travers le tracé de  $\lambda_{min}(\mathcal{Y}_{D_3}(j\omega) + \mathcal{Y}_{D_3}^H(j\omega))$  donné en figure 2.15 qui est négatif sur un large spectre de fréquences, ce qui confirme la présence d'une violation assez importante de la propriété de passivité.

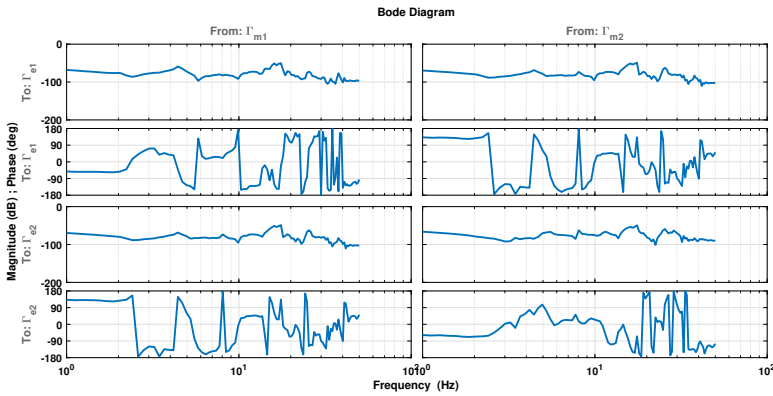


FIGURE 2.14 – Diagramme de Bode de  $\mathcal{Y}_{D_3}$

#### 2.4.3.2.2 Discussion

À notre connaissance, nous ne disposons pas d'outils de « curve-fitting » garantissant a priori la passivité d'une fonction de transfert rationnelle. Dans le cas de  $D_2$ , l'absence de tels outils n'a pas posé de soucis particulier dans la mesure ou la FRF respectait a priori la passivité et un « curve-fitting » classique nous a permis d'obtenir une fonction de transfert rationnelle respectant également la passivité. Dans le cas présent, la FRF ne respecte pas la passivité. Nous ne disposons pas d'outils, aujourd'hui, permettant d'estimer des fonctions de transfert passives à partir de données expérimentales ne respectant pas la passivité. Par ailleurs, il convient de s'interroger sur les causes du non respect des contraintes de passivité par les FRF. Ces deux points méritent à notre sens des développements spécifiques. Aussi, pour dis-

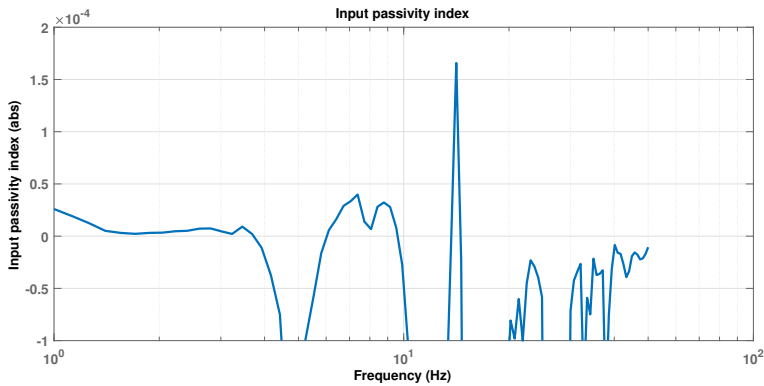


FIGURE 2.15 – Indice de passivité de  $\mathcal{Y}_{D_3}$

poser d'un modèle du dispositif  $D_3$  permettant de valider les outils que nous développons au chapitre 3 dans un cadre MIMO LPV, nous adoptons ci-dessous une démarche de modélisation du cobot basée sur les équations de la mécanique.

#### 2.4.3.3 Hypothèses de modélisation de $D_3$

Le cobot LDC est actionné au niveau de chacun de ses ddl par un vérin à câble. Par ailleurs, d'après l'étude de la CAO du robot, la rigidité des segments est suffisamment importante pour qu'aucune résonance structurelle n'ait lieu en dessous du kHz. Enfin, l'axe  $\vec{z}$  du cobot adopte une cinématique télescopique ce qui lui confère une flexibilité en flexion et en torsion non négligeable. En conséquence, le modèle adopté pour le robot LDC rend compte du couplage dynamique en fonction de la configuration cinématique du robot, de la dynamique décrite plus haut des vérins à câbles ainsi que d'une flexibilité au niveau de l'effecteur.

#### 2.4.3.4 Élaboration du modèle $D_3$

Afin d'obtenir un modèle quasi-LPV multi-variable de  $D_3$ , nous procédons selon les étapes suivantes :

- calcul du Lagrangien du système,
- détermination des équations généralisées du mouvement,
- établissement d'une représentation d'état quasi-LPV sous forme descripteur par linéarisation jacobienne,

- réduction et projection dans l'espace des coordonnées et impulsions généralisées [16].

#### 2.4.3.4.1 Calcul du Lagrangien

À partir des hypothèses de modélisation et plus spécifiquement des répartitions des masses et des flexibilités dans la machine, les énergies cinétiques et potentielles emmagasinées dans le système s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}
 2 \mathcal{T} = & \begin{bmatrix} \dot{x}_{g1} \\ \dot{x}_{g2} \\ \dot{x}_{g3} \\ \dot{x}_{g4} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_1 & & & \mathbf{0} \\ & m_2 & & \\ & & m_3 & \\ \mathbf{0} & & & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{g1} \\ \dot{x}_{g2} \\ \dot{x}_{g3} \\ \dot{x}_{g4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{y}_{g1} \\ \dot{y}_{g2} \\ \dot{y}_{g3} \\ \dot{y}_{g4} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_1 & & & \mathbf{0} \\ & m_2 & & \\ & & m_3 & \\ \mathbf{0} & & & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_{g1} \\ \dot{y}_{g2} \\ \dot{y}_{g3} \\ \dot{y}_{g4} \end{bmatrix} \\
 + & \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{g1} & & & \mathbf{0} \\ & I_{g2} & & \\ & & I_{g3} & \\ \mathbf{0} & & & I_{g4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \\ \dot{q}_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_t & & \mathbf{0} \\ & m_t & \\ \mathbf{0} & & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \\ \dot{q}_t \end{bmatrix} \\
 + & \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{m1} \\ \dot{\theta}_{m2} \\ \dot{\theta}_{m4} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} J_{m1} & & \mathbf{0} \\ & J_{m2} & \\ \mathbf{0} & & J_{m4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{m1} \\ \dot{\theta}_{m2} \\ \dot{\theta}_{m4} \end{bmatrix} \\
 2 \mathcal{V} = & \begin{bmatrix} x_h - x_t \\ y_h - y_t \\ q_h - q_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{tf} & & \mathbf{0} \\ & k_{tf} & \\ \mathbf{0} & & k_{t\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h - x_t \\ y_h - y_t \\ q_h - q_t \end{bmatrix} \\
 + & \begin{bmatrix} \theta_{m1} - q_1 \\ \theta_{m2} - q_2 \\ \theta_{m4} - q_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{q1} & & \mathbf{0} \\ & k_{q2} & \\ \mathbf{0} & & k_{q4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{m1} - q_1 \\ \theta_{m2} - q_2 \\ \theta_{m4} - q_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 x_h &= l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
 y_h &= l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
 q_h &= q_1 + q_2 + q_3 + q_4
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Le lagrangien du système s'écrit, alors :

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} \tag{2.51}$$

### 2.4.3.4.2 Équations du mouvement

Posons  $x = [\theta_{m1} \ \theta_{m2} \ \theta_{m4} \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ x_t \ y_t \ q_t]^T$  le vecteur des coordonnées généralisées du système. Selon le formalisme d'Euler-Lagrange [7], les équations généralisées du mouvement s'écrivent sous la forme vectorielle suivante :

$$\Gamma_{ext} = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L};$$

$$\Gamma_{ext} = \begin{bmatrix} \gamma_{m1} \\ \gamma_{m2} \\ \gamma_{m4} \\ J_h^T \begin{bmatrix} f_{xh} \\ f_{yh} \\ \gamma_{qh} \end{bmatrix} \\ f_{xt} \\ f_{yt} \\ \gamma_{qt} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

où  $\Gamma_{ext}$  regroupe les contributions des efforts extérieurs, avec  $\gamma_{mi}$  le couple moteur de l'axe  $i$ ;  $f_{xt}$ ,  $f_{yt}$  et  $\gamma_{qt}$  les efforts et le couple exercés par l'environnement sur l'effecteur, respectivement, selon les axes  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  du repère de base;  $f_{xh}$ ,  $f_{yh}$  et  $\gamma_{qh}$  les efforts et le couple exercés par l'opérateur sur le poignet, respectivement, selon les mêmes axes; et  $J_h$  la jacobienne du robot définie comme suit :

$$J_h = \frac{\partial}{\partial [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T} [x_h \ y_h \ q_h]^T \quad (2.53)$$

### 2.4.3.4.3 Linéarisation Jacobienne au tour de $q_2$

En reprenant le modèle dynamique linéarisé présenté en équation 2.16, et en posant  $X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$  le vecteur d'état du système, nous obtenons la représentation d'état non linéaire sous forme descripteur suivante :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -H(x, \dot{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_{ext} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & J_h(x) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \dot{x} \quad (2.54)$$

$$\equiv$$

$$E(X) \dot{X} = \mathcal{F}(X, U)$$

$$Y = \mathcal{G}(X)$$

avec  $U = [\Upsilon_{m1} \ \Upsilon_{m2} \ \Upsilon_{m4} \ f_{xh} \ f_{yh} \ \Upsilon_{qh} \ f_{xt} \ f_{yt} \ \Upsilon_{qt}]^T$ ,  
et  $Y = [\dot{\theta}_{m1} \ \dot{\theta}_{m2} \ \dot{\theta}_{m4} \ \dot{x}_h \ \dot{y}_h \ \dot{q}_h \ \dot{x}_t \ \dot{y}_t \ \dot{q}_t]^T$ .

En posant  $\{X_{eq}, \Gamma_{ext_{eq}}\}$  point d'équilibre vérifiant  $\dot{X}_{eq} = 0$  et en supposant que  $M(x)$  est constant au tour de ce point d'équilibre, par linéarisation jacobienne, nous obtenons la représentation d'état linéarisée sous forme descripteur suivante :

$$\begin{aligned} E(X) \delta\dot{X} &= \frac{\partial}{\partial X} \mathcal{F}(X, U)|_{\{X_{eq}, U_{eq}\}} \delta X + \frac{\partial}{\partial U} \mathcal{F}(X, U)|_{\{X_{eq}, U_{eq}\}} \delta U \\ \delta Y &= \frac{\partial}{\partial X} \mathcal{G}(X)|_{\{X_{eq}, U_{eq}\}} \delta X \end{aligned} \quad (2.55)$$

avec  $X = X_{eq} + \delta X$ ,  $U = U_{eq} + \delta U$  et  $Y = \delta Y$

Il convient de noter que, compte tenu de la configuration horizontale du robot annulant le potentiel de pesanteur,  $U_{eq} = 0$ . En conséquence, à effort extérieur nul, toute configuration géométrique du robot est un point d'équilibre. En supposant que les efforts centrifuges – dépendants de  $\dot{x}^2$  – sont compensés a priori et en négligeant les effets de Coriolis – hypothèse valable à faibles vitesses –, l'équation 2.55 se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned} E(p) \delta\dot{X} &= A(p) \delta X + B(p) U \\ Y &= C(p) \delta X \end{aligned} \quad (2.56)$$

avec  $p$  un vecteur de paramètres dépendant trigonométriquement de  $q_1$  et  $q_2$ .

En notant que la dynamique du robot est insensible à la position  $q_1$  – la position  $q_1$  n'intervient que dans le changement de repère entre  $R_0$  à  $R_1$  –, et en posant arbitrairement  $q_1 = 0$ , on observe que le modèles de l'équation 2.56 ne dépend que que  $\sin(q_2)$ ,  $\cos(q_2)$  et leurs produits, ce qui donne :

$$p = [\sin(q_2) \ \cos(q_2) \ \sin(q_2)^2 \ \cos(q_2)^2 \ \sin(q_2) \cos(q_2)] \quad (2.57)$$

#### 2.4.3.4.4 Réduction

Jusqu'à présent, nous avons considéré comme vecteur d'état  $X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$ , or il est connu qu'à partir du moment où seules les vitesses sont considérées en sortie, cette représentation n'est pas minimale –  $\text{rank}(A(p)) =$

17 < 20. Or, une réalisation minimale est nécessaire pour assurer la commandabilité du système. Afin d'obtenir cette réalisation minimale, nous proposons de remplacer le vecteur d'état  $X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$  par le vecteur d'états réduit  $X_r = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$ , où  $\Delta x$  représente le vecteur des déformations des éléments flexibles du système, et tel que :

$$X_r = T_r X$$

$$T_r = \begin{array}{c} \dots \\ \left[ \begin{array}{cccccccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & & & & & & 0 \dots 0 \\ & & & & & & & & & & & & \vdots \ddots \vdots \\ & & & & & & & & & & & & 0 \dots 0 \\ \hline & & & & & & & & & & & & 0 \dots 0 \\ & & & & & & & & & & & & \vdots \ddots \vdots \\ & & & & & & & & & & & & 0 \dots 0 \\ \hline & & & & & & & & & & & & 0 \dots 0 \\ & & & & & & & & & & & & \vdots \ddots \vdots \\ & & & & & & & & & & & & 0 \dots 1 \\ \hline & & & & & & & & & & & & 1 \dots 0 \\ & & & & & & & & & & & & \vdots \ddots \vdots \\ & & & & & & & & & & & & 0 \dots 1 \end{array} \right] \end{array} \quad (2.58)$$

L'équation d'état minimale prends donc la forme :

$$\begin{aligned} E_r(p) \delta \dot{X}_r &= A_r(p) \delta X_r + B_r(p) U \\ Y &= C_r(p) \delta X_r; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r(p) &= T_r E(p) T_r^+ \\ A_r(p) &= T_r A(p) T_r^+ \\ B_r(p) &= T_r B(p) \\ C_r(p) &= C(p) T_r^+ \end{aligned} \quad (2.59)$$

#### 2.4.3.4.5 Formulation Hamiltonienne à Ports

Comme discuté au chapitre 2.3.3, la représentation d'état sous forme hamiltonienne à ports dispose de propriétés intéressantes en terme de dissociation des contributions conservatives et dissipatives. Cette

dissociation nous sera fort utile lors de la synthèse de la commande. Pour mettre le système sous la dite forme, il convient de considérer comme vecteur d'état l'ensemble des coordonnées et impulsions généralisées du système – en mécanique, les impulsions généralisées ne sont autre que les quantités de mouvement –. Le vecteur des quantités de mouvement peut être obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} p &= M(p) \dot{x} \\ &\equiv \\ \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} &= E_r(p) \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Les coordonnées généralisés étant déjà présentes dans les sept premiers termes de  $X_r$ , en injectant 2.60 dans 2.59 on obtient la représentation d'état sous forme hamiltonienne à port suivante :

$$\begin{aligned} \delta \dot{X}_{pq} &= A_{pq}(p) \delta X_{pq} + B_{pq}(p) U \\ Y &= C_{pq}(p) \delta X_{pq} \\ &\dots \\ A_{pq} &= A_r(p) E_r^+(p) \\ B_{pq} &= B_r(p) \\ C_{pq} &= C_r(p) E_r^+(p) \end{aligned} \quad (2.61)$$

On notera  $\mathcal{Y}_h(s, p) = (Y(s, p)[3 \dots 6]) (U(s, p)[3 \dots 6])^{-1}$  l'admittance du robot vue de l'opérateur, et  $\mathcal{Y}_t(s, p) = (Y(s, p)[7 \dots 9]) (U(s, p)[7 \dots 9])^{-1}$  l'admittance du robot vue de l'effecteur.

#### 2.4.3.4.6 Validation du modèle

Le robot non commandé est intrinsèquement passif et donc stable. Avec la linéarisation Jacobienne, on s'attend à une préservation de ces propriétés. Pour le vérifier, nous examinons ces propriétés pour différents tirages de  $q_2 \in \left[-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right]$ . En figure 2.16, nous traçons la valeur réelle maximale des racines de  $A_{pq}$  en fonction de  $q_2$ . On peut noter que  $\max\left(\Re\left(E_\lambda\left(A_{pq}\right)\right)\right) < 0$ , pour l'ensemble de la plage de variation de  $q_2$ . Le modèle obtenu est donc stable.

En figure 2.17 et 2.18, on trace, pour chacune des deux admittances  $\mathcal{Y}_h$  et  $\mathcal{Y}_t$  et pour différentes valeurs de  $q_2 \in \left[-\frac{pi}{2} \quad \frac{pi}{2}\right]$ , l'indice de passivité en sortie  $\rho(\omega) = \lambda_{min}\left(\mathcal{Y}_x^{-1}(j\omega) + \mathcal{Y}_x^{-1H}(j\omega)\right)$  qu'on introduira plus



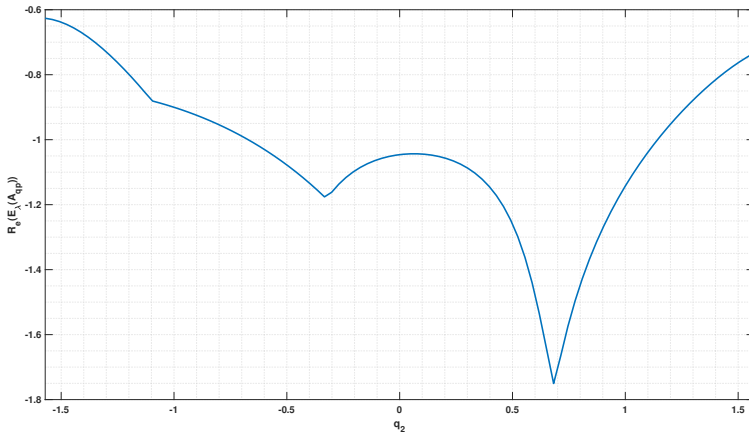


FIGURE 2.16 – Partie Réelle Maximale des pôles de  $D_3$

en détail dans le chapitre suivant.

On note que  $\rho(\omega)$  est strictement positif,  $\forall \omega$ , ce qui prouve que les admittances du cobot aux points d'observation ont un comportement passif.

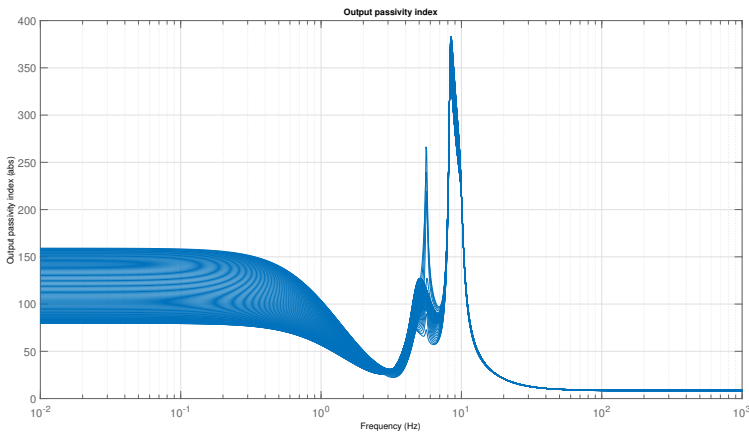


FIGURE 2.17 – Indice de passivité en sortie de  $Y_h(j\omega)$  pour différents  $q_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Le modèle LPV obtenu a été évalué fréquemment pour différentes valeurs de  $q_2$ . Les admittances du cobot selon les axes de mouvements principaux sont tracées en figures 2.19 et 2.20. Nous pouvons observer qu'elles mettent en évidence une variabilité importante de la dy-

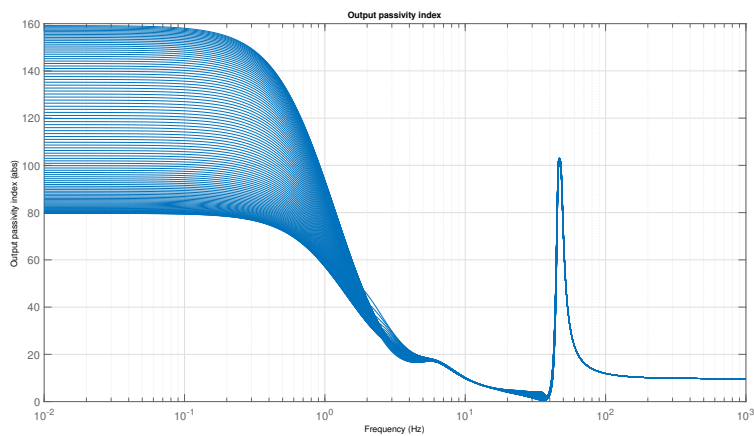


FIGURE 2.18 – Indice de passivité en sortie de  $Y_t(j\omega)$  pour différents  $q_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

namique du cobot LDC (modèle  $D_3$ ) en fonction de  $q_2$ . Le modèle  $D_3$  représente donc un benchmark intéressant pour évaluer les méthodes de réglage qu'on développe dans le chapitre 3.

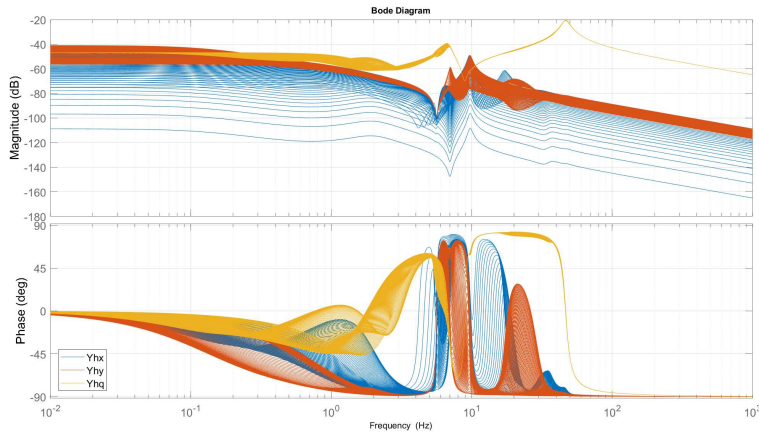


FIGURE 2.19 – Diagramme de Bode des transferts diagonaux de  $\mathcal{Y}_h(s)$  pour différents  $q_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

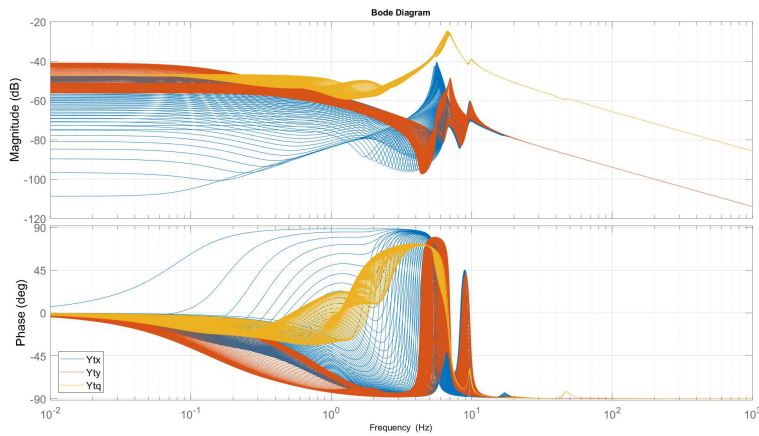


FIGURE 2.20 – Diagramme de Bode des transferts diagonaux de  $\mathcal{Y}_t(s)$  pour différents  $q_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

## **2.5 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons abordé le sujet de la modélisation et de l'identification en cobotique. Sur 3 dispositifs expérimentaux, nous avons appliqué différentes méthodes d'identification temporelles et fréquentielles. Les modèles obtenus sont globalement satisfaisants, représentatifs des données expérimentales et suffisamment riches pour permettre d'évaluer correctement les méthodes de synthèse de commande que nous développerons dans le chapitre suivant. Toutefois, nous avons également mis en évidence un manque de méthodes d'identification pouvant garantir a priori la passivité du modèle identifié, notamment dans les cas MIMO et LPV. Des travaux de recherche spécifiques à la problématique de l'identification sont nécessaires pour remédier à ce manque.

## Bibliographie

- [1] J. Wyatt, L. Chua, J. Gannett, I. Goknar, and D. Green. Energy concepts in the state-space theory of nonlinear n-ports : Part i-passivity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 28, 1981. 16
- [2] J. E. Colgate and N. Hogan. Robust control of dynamically interacting systems. *International Journal of Control*, 48, 1988. 16
- [3] I. P. M. Wickramasinghe, D. H. S. Maithripala, B. D. Kawade, J. M. Berg, and W. P. Dayawansa. Passivity-based stabilization of a 1-dof electrostatic mems model with a parasitic capacitance. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009. 16
- [4] Nicholas Kottenstette, Xenofon Koutsoukos, Joseph Hall, Janos Sztipanovits, and Panos Antsaklis. Passivity-based design of wireless networked control systems for robustness to time-varying delays. *Real-Time Systems Symposium*, 2008. 16
- [5] Philippe Garrec. *Robotics 2010 Current and Future Challenges*, chapter Screw and cable actuators (SCS) and their applications to force feedback teleoperation, exoskeleton and anthropomorphic robotics. INTECH, 2010. 17
- [6] Hiroshi Makino. Assembly robot, 4,341,502. 19
- [7] W. Khalil and E. Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science, 2000. 21, 22, 24, 50
- [8] Housseem Halalchi, Edouard Laroche, and Gabriela Iuliana Bara. Flexible-link robot control using a linear parameter varying systems methodology. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2014. 23, 30
- [9] Poignet P. and Gautier M. Comparison of weighted least squares and extended kalman filtering methods for dynamic identification of robots. *IEEE ICRA*, 2000. 24
- [10] X. Lamy. *Conception d'une Interface de Pilotage d'un Cobot*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2011. 25, 26, 38
- [11] Szewczyk Roman, Zieliński Cezary, and Kaliczyńska Małgorzata. *Challenges in Automation, Robotics and Measurement Techniques*. 2016. 26

- [12] Landau Ioan Doré. *Identification et commande des systèmes*. 1993. [26](#)
- [13] ISO, editor. *ISO 7626 : Mechanical vibration and shock – Experimental determination of mechanical mobility*. ISO, 2011. [27](#), [35](#), [36](#)
- [14] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004. [27](#), [40](#)
- [15] R. Ortega, A. Van Der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 2002. [28](#)
- [16] V. Duindam, A. Macchelli and S. Stramigioli, and H. Bruyninckx. *Modeling and control of complex physical systems : the port-Hamiltonian approach*. Springer, 2009. [16](#), [28](#), [29](#), [49](#)
- [17] J.S. Shamma. *Analysis and design of gain scheduled control systems*. PhD thesis, 1988. [30](#)
- [18] Gary J. Balas. Linear, parameter-varying control and its application to aerospace systems. *ICAS CONGRESS*, 2002. [30](#)
- [19] J. Choi A.P. White, G. Zhu. *Linear Parameter-Varying Control for Engineering Applications*. Springer, 2013. [31](#)
- [20] Lennart Ljung. Perspectives on system identification. *Annual Reviews in Control*, 2010. [32](#)
- [21] J.G. Booth and J.P. Hobert. Standard errors of prediction in generalized linear mixed models. *Journal of the American Statistical Association*, 1998. [34](#)
- [22] CARSTEN SCHEDLINSKI and MICHAEL LINK. A survey of current inertia parameter identification methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15 :189–211, 2001. [35](#)
- [23] K. Levenberg. A method for the solution of certain problems in least squares. *Quart. Appl. Math*, pages 164–168, 1944. [37](#)
- [24] D. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. *SIAM J. Appl. Math.*, pages 431–441, 1963. [37](#)

*CHAPITRE 2. CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION ET À  
L'IDENTIFICATION DE SYSTÈMES EN COBOTIQUE*

---

# Chapitre 3

## Contributions à la commande robuste multi-variable en cobotique

### Objet du chapitre

Ce chapitre a pour objet de présenter l'usage possible de la commande  $H_\infty$  structurée et des conditions de secteur pour résoudre des problèmes de commande en cobotique. Nous déclinons, notamment, les performances d'un cobot (transparence, raideur, amplification d'effort...) exprimées en langage humain en expressions mathématiques décidables (en terme de contraintes  $H_\infty$  et conditions de secteurs) pour les inclure dans une procédure de conception de commande assistée par ordinateur exploitant les avancées récentes en optimisation non-lisse. Nous commençons par introduire les concepts et techniques de commande des systèmes. La compréhension de ces concepts est nécessaire pour le déroulement des démarches d'analyse et de synthèse commande en cobotique abordée en section 3.2. Nous n'avons pas la prétention, de passer en revue l'ensemble des techniques de commande avancées connues à ce jour. Nous nous limiterons à introduire celles dont nous avons fait usage dans le présent travail tout en faisant référence à de la littératures plus spécialisée pour ceux qui veulent approfondir certains sujets.



## Sommaire

---

<b>3.1 Rappels sur la commande des systèmes</b> . . . . .	<b>63</b>
3.1.1 Approche fréquentielle classique . . . . .	63
3.1.2 Commande Robuste $H_\infty$ . . . . .	65
3.1.3 Conditions de secteurs . . . . .	71
3.1.4 Aperçu de la commande en impédance . . . . .	73
<b>3.2 Problématique de commande en cobotique</b> . . . . .	<b>74</b>
3.2.1 Stabilité au contact . . . . .	74
3.2.2 Commande en transparence . . . . .	85
3.2.3 Commande en amplification d'effort . . . . .	93
3.2.4 Commande en impédance à raideur pilotable . . . . .	97
3.2.5 Extension au cas MIMO-LPV . . . . .	99
3.2.6 Pour aller plus loin : démarche de co-design . . . . .	108
<b>3.3 Conclusion</b> . . . . .	<b>112</b>

---

## 3.1 Rappels sur la commande des systèmes

### 3.1.1 Approche fréquentielle classique

#### 3.1.1.1 Domaine d'application

L'approche dite classique de la commande porte sur l'étude des systèmes LTI **simple-entrée simple-sortie (SISO)** dans le domaine fréquentiel. Les systèmes sont alors modélisés par des fonctions de transfert rationnelles mettant en jeu la variable Laplace  $s$ . Une fonction de transfert est dite stable si et seulement si les racines du dénominateur sont toutes à partie réelle négative.

#### 3.1.1.2 Quelques Rappels

##### 3.1.1.2.1 Spécifications des performances

Les spécifications de commande se matérialisent classiquement dans le triplet  $\langle$  bande passante, dépassement, précision  $\rangle$ . L'erreur statique en boucle fermée  $\epsilon$  dépend du gain statique en basse fréquence  $g$  de la boucle ouverte :  $\epsilon = \frac{1}{g+1}$ . En présence d'un intégrateur dans la boucle ouverte, l'erreur statique est annulée. La bande passante et le dépassement sont, quand à eux, définis par le modelage du tracé de la boucle ouverte dans le plan de Nichols. Pour plus de détails, il convient de se référer à [1].

##### 3.1.1.2.2 Stabilité au sens de Nyquist

Le critère de stabilité de Nyquist [2] est communément utilisé dans l'analyse de la stabilité des systèmes. Il s'agit d'une condition sur un système en boucle ouverte permettant d'évaluer la stabilité du même système en boucle fermée. Il stipule :

Le système en boucle fermée  $\frac{H(s)}{1+H(s)}$  est asymptotiquement stable à la condition nécessaire et suffisante que le diagramme de Nyquist de la boucle ouverte  $H(s)$  effectuée autour du point  $-1$  du plan complexe et dans le sens trigonométrique, un nombre de tours égal au nombre de pôles instables de  $H(s)$ .

##### 3.1.1.2.3 Marges de stabilité

La stabilité est un concept binaire. Afin de quantifier la proximité d'un système de la limite de stabilité, on introduit des métriques qu'on appelle marges de stabilité. Dans l'automatique classique nous disposons de deux types de marges, la marge de gain  $\Delta_G$  et la marge de

phase  $\Delta_\phi$ . Elles quantifient le gain et la phase qu'un contrôleur peut ajouter au système avant d'atteindre l'instabilité. La figure 3.1 fournit une lecture graphique des marges de stabilité. Généralement, on

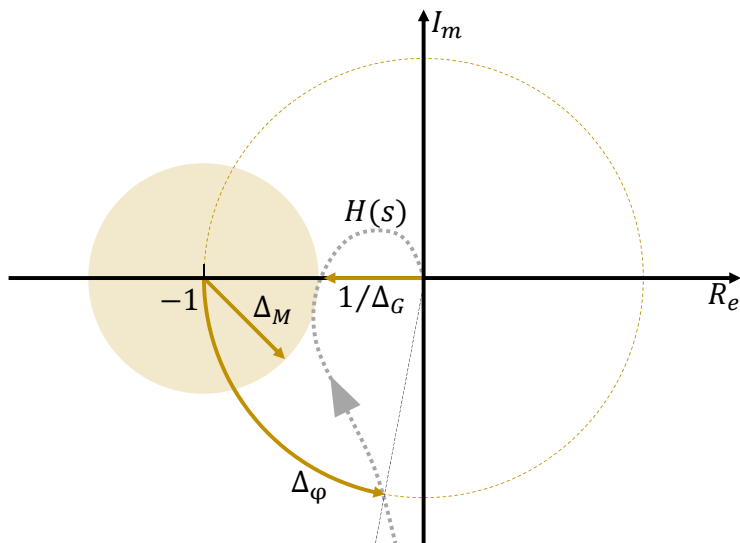


FIGURE 3.1 – Marges stabilité dans le plan complexe

considère que  $\Delta_G = 6dB$  et  $\Delta_\phi = 15^\circ$  sont les marges minimales que tout système à asservir doit respecter.

#### 3.1.1.2.4 Stabilité des systèmes de Lur'e

Les systèmes de Lur'e sont une classe particulière de systèmes non

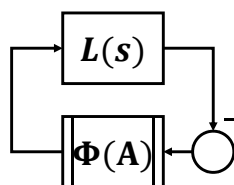


FIGURE 3.2 – Système de Lur'e

linéaires constitués d'un sous-système linéaire rebouclé sur une non linéarité statique. L'étude de ces systèmes a un intérêt pratique en permettant notamment de prédire la stabilité ou non d'un système en boucle fermée en présence de nonlinéarités courantes : saturation, zone morte, quantification...

Par extension du critère de Nyquist, on définit un critère de stabilité

des systèmes de Lur'e de la figure 3.2 couramment appelé « méthode du premier harmonique ». Avec l'hypothèse forte que la partie linéaire du système se comporte comme un filtre passe bas qui atténue les harmoniques créés par le bloc non linéaire, la méthode du premier harmonique s'énonce comme suit :

Supposons un système linéaire passe bas  $L(j\omega)$  rebouclé sur une non linéarité statique  $\Phi(A)$  caractérisée par sa fonction de transfert généralisée<sup>1</sup>  $N(A)$ , avec  $A$  l'amplitude de l'entrée du bloc non linéaire. Le système en boucle fermée présente autant de cycles-limites<sup>2</sup> qu'il n'y a d'intersection entre  $L(j\omega)$  et  $-\frac{1}{N(A)}$  dans le plan de Nyquist. Le cycle limite est stable si l'intersection est telle qu'en parcourant  $L(j\omega)$  dans le sens des  $\omega$  croissants, on laisse sur sa gauche la direction des  $A$  croissants sur  $-\frac{1}{N(A)}$ . La figure 3.3 illustre un système présentant deux cycles limites, un stable et un instable.

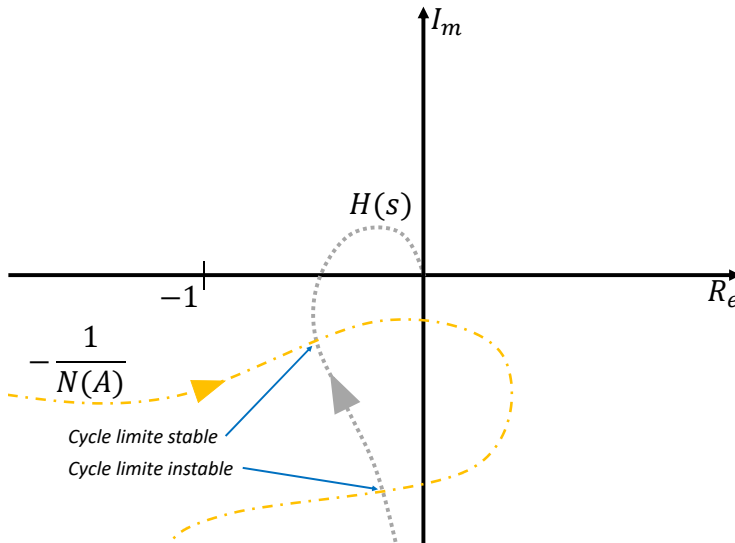


FIGURE 3.3 – Illustration des cycles limites dans le plan complexe

### 3.1.2 Commande Robuste $H_\infty$

#### 3.1.2.1 Fonction de transfert vs. représentation d'état

Les techniques de commande multivariables se basent généralement sur le formalisme d'état. Si la fonction de transfert est une re-

1. Describing Function en anglais
2. Oscillations auto-entretenues

présentation d'un système LTI décrit par une équation différentielle ordinaire d'ordre  $n$ , la représentation d'état modélise le système par  $n$  équations différentielles ordinaires de premier ordre. Trois raisons principales sont à l'origine de la préférence de ce paradigme :

- La représentation d'état limite la redondance des paramètres dans les modélisation de systèmes MIMO.
- La représentation d'état rend compte de conditions initiales non nulles dans le vecteur d'état.
- La représentation d'état permet l'analyse des systèmes grâce à l'algèbre linéaire ce qui représente un gain en rapidité et en fiabilité des calculs.
- La représentation d'état peut intégrer certaines non-linéarités comme nous le verrons un peu plus loin.

Dans le cas LTI, la représentation d'état prends la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $u(t)$  est le vecteur des entrées du système,  $x(t)$  le vecteur d'état, et  $y(t)$  le vecteur des sorties.

### 3.1.2.2 Principe

Considérons deux systèmes LTI MIMO causaux<sup>3</sup>  $H(s)$  et  $G(s)$  aux dimensions appropriées, avec  $G(s)$  inversible<sup>4</sup> et  $G(s)^{-1}$  également causal. Il convient de noter que :

$$\sigma_{max}(H(s)) \leq \sigma_{min}(G(s)) \iff \left\| G(s)^{-1}H(s) \right\|_{\infty} \leq 1 \tag{3.2}$$

Le principe sous-jacent à la commande  $H_{\infty}$  est d'exprimer les exigences de performance sous la forme de gabarits fréquentiels  $|G(s)|$  que les transfert de  $H(s)$  ne doivent pas dépasser comme indiqué dans le formalisme 3.2.

Afin de mieux assimiler l'approche, nous considérons le cas d'école présenté en figure 3.4.  $P(s)$  est rebouclé sur lui-même par une rétroaction négative unitaire. On appelle fonction de sensibilité du système en boucle fermée le terme  $S(s) = (I + P(s))^{-1}$ . On appelle fonction de sensibilité complémentaire  $T(s) = P(s) (I + P(s))^{-1} = P(s)S(s)$ .

---

3. Un système LTI  $H(s)$  est causal – ou propre – si et seulement si son gain  $|H(j\omega)|$  quand  $\omega \rightarrow +\infty$  est fini.

4.  $G(s)$  est inversible si sa matrice  $D$  est inversible

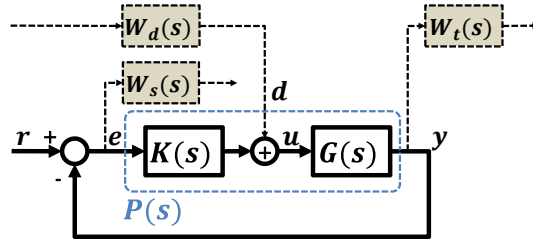


FIGURE 3.4 – Schéma bloc d'un problème de régulation

### 3.1.2.3 Spécification des performances en suivi de consigne

Dans le formalisme  $H_\infty$ , bande passante, dépassement et erreur statique peuvent être spécifiés par un seul gabarit sur la fonction de sensibilité  $S(s)$ . Ainsi si

$$\|W_s(s)S(s)\|_\infty < 1; W_s(s)^{-1} = \frac{(1 + \zeta)s + \omega_c \epsilon}{s + \omega_c} \quad (3.3)$$

alors  $T(s)$  aura une bande passante au moins égale à  $\omega_c$ , un dépassement inférieur à  $\zeta$  et une erreur statique inférieure à  $\epsilon$ . La figure 3.5 fournit une lecture graphique du critère :

- $\epsilon$  est le gain statique de  $W_s(s)^{-1}$ ,
- $1 + \zeta$  est le gains en haute fréquence de  $W_s(s)^{-1}$ ,
- $\omega_c$  est la fréquence de coupure de  $W_s(s)^{-1}$ .

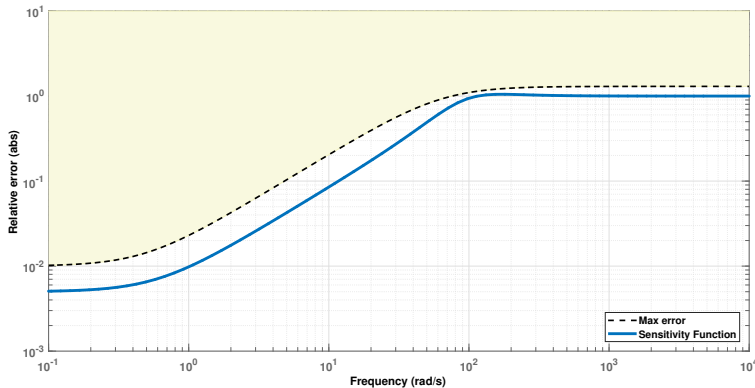


FIGURE 3.5 – Spécifications de performance pour la fonction de sensibilité

### 3.1.2.4 Spécification des performances en rejet de perturbations

L'effet d'une perturbation  $d$  sur la sortie  $y$  qu'on souhaite réguler est égale à  $H(s) S(s)$ . Une spécification sur la dynamique du système en rejet de perturbation passe généralement par un filtre de pondération  $W_d(s)$  tel qu'illustré en figure 3.4.

### 3.1.2.5 Spécification des exigences de stabilité

Contrairement à l'automatique classique, la proximité de la limite de stabilité est appréciée à travers le concept de marge de module  $\Delta_M$ . Pour un système LTI SISO, il s'agit de la plus petite distance entre le  $P(j\omega)$  et le point  $-1$  du plan complexe pour tous les  $0 \leq \omega < \infty$ . Une interprétation graphique du critère est donnée en figure 3.1. Dans le cas plus général des systèmes MIMO, on écrit :

$$\Delta_M^{-1} = \|S(s)\|_\infty \quad (3.4)$$

Il convient de noter que, pour une pondération  $W_s(s)$  sur  $S(s)$  donnée, on peut inclure une spécification sur la marge de module souhaitée en s'assurant que :

$$\|W_s(s)^{-1}\|_\infty < \Delta_M^{-1} \quad (3.5)$$

### 3.1.2.6 Robustesse

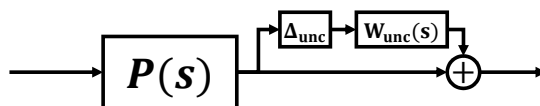


FIGURE 3.6 – Incertitude Multiplicative

La commande  $H_\infty$  prend le qualificatif de robuste grâce à sa capacité de fournir une spécification de marge de module y compris pour des systèmes incertains. Dans le cas particulier où les incertitudes de la fonction de transfert en boucle ouverte se mettent sous la forme d'une incertitude multiplicative [3] tel qu'illustré en figure 3.6 :

$$\hat{P}(s) = P(s) (1 + \Delta_{unc} W_{unc}(s)); \|\Delta_{unc}\|_\infty \leq 1 \quad (3.6)$$

Une marge de module  $\Delta_M$  est garantie pour l'ensemble des valeurs possibles de  $\Delta_{unc}$ , si :

$$\left\| \frac{\Delta_M S_u(s)}{W_{unc}(s) T_u(s)} \right\|_\infty \leq 1 \quad (3.7)$$

### 3.1.2.7 Synthèse

L'ensemble des spécifications de performance et de stabilité robuste peuvent être regroupées et diagonalisées dans deux fonctions de pondérations  $W_u(s)$  et  $W_y(s)$ , pour ainsi former la LFT du problème  $H_\infty$  standard illustré en figure 3.7, où  $M$  est une matrice constante assurant le rebouchage entre  $P(s)$  et  $K(s)$  et la définition des entrées et des sorties.

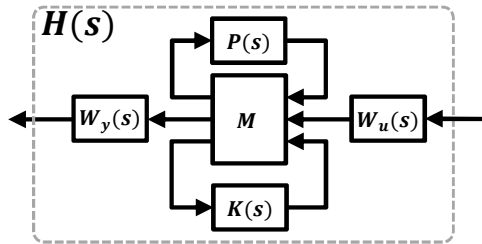


FIGURE 3.7 – Illustration du problème  $H_\infty$  standard

La finalité de la synthèse  $H_\infty$  est de trouver un contrôleur  $K(s)$  assurant  $\|H(s)\|_\infty < 1$ . Pour plus de détail sur la commande  $H_\infty$ , il convient de se référer à [4].

### 3.1.2.8 Mise en œuvre

Dans l'approche classique de la commande  $H_\infty$ ,  $K(s)$  est dit d'ordre plein : l'ordre de  $K(s)$  est égal à la somme des ordres de  $P(s)$  et  $W(s)$  réunis. Dans ce cas de figure, le problème  $H_\infty$  est convexe ; la solution obtenue est certifiée globalement optimale. Une résolution possible du problème consiste à utiliser la méthode du point intérieur [5] après avoir mis le problème sous la forme d'une **inégalité matricielle linéaire (LMI)**. La complexité algorithmique de cette approche est <sup>5</sup>  $\mathcal{O}(n^2)$  par itération <sup>6</sup> [5], où  $n$  est l'ordre du système. Avec un ordre élevé, l'implémentation de  $K(s)$  peut s'avérer peu pratique. Il convient, dans ce cas, de réduire l'ordre du contrôleur obtenu [6, 7] et de vérifier a posteriori que les spécifications  $H_\infty$  sont toujours respectées par le contrôleur réduit.

En cas de test négatif sur le modèle réduit, il convient de réitérer la procédure en apportant des ajustements soit aux spécifications soit à

5. au sens du nombre de flops

6. Algorithme solvant le problème en un temps d'exécution quadratique en fonction de la taille des données d'entrée.



l'ordre du contrôleur réduit.

Afin d'éviter ces itérations et la part d'aléatoire qui y est associée, différents travaux ont été menés pour permettre une synthèse  $H_\infty$  systématique de contrôleurs d'ordre réduit. La réduction ultime consiste à utiliser un contrôleur par retour de sortie statique (contrôleur d'ordre nul). La faculté de synthèse d'un contrôleur d'ordre nul ouvre, alors, la voie à la synthèse de contrôleurs structurés — e.g. PID. Toutefois, la synthèse  $H_\infty$  d'ordre réduit est un problème d'optimisation non convexe – au sens où la fonction de coût présente plusieurs minima locaux – et non lisse – au sens où la fonction de coût n'est pas dérivable partout. Sa résolution optimale est réputée être  $\mathcal{NP}$ -complet [8]<sup>7</sup>. Toute tentative de résolution pratique de tels problèmes ne doit pas être abandonnée, pour autant. Ainsi, des algorithmes d'optimisation non-lisse tels que ceux présentés par Apkarian ou Burke en [9, 10], permettent de trouver une solution locale au problème  $H_\infty$  réduit — et par voie de conséquence  $H_\infty$  structuré — suivant une complexité  $\mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(p^3)$  par itération<sup>8</sup>, où  $n$  est l'ordre du système et  $p$  le nombre de paramètres à optimiser.

### 3.1.2.9 Accent sur la synthèse $H_\infty$ structurée

La synthèse  $H_\infty$  structurée a fait l'objet de développements importants par plusieurs équipes de recherche. Deux types d'approches ont été adoptées pour faire face à la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème : les approches méta-heuristiques [11] et les approches basées sur les sous-gradients ou optimisation non-lisse [9, 10]. Au delà de l'optimisation des paramètres de lois de commande, il est intéressant de noter deux applications ayant profité des travaux sur l'optimisation non lisse. La première est l'identification paramétrique dans le domaine fréquentiel. On peut citer à ce propos les travaux de Vizier [12] sur l'identification en robotique. La seconde application concerne le co-design. Les travaux de Gonzalez [13] sur le co-design mécanique / contrôle d'attitude sont précurseurs dans ce domaine.

---

7. Tous les algorithmes connus pour résoudre des problèmes  $\mathcal{NP}$ -complets ont un temps d'exécution qui varie de manière exponentiel en fonction de la taille des données d'entrée dans le pire des cas, et sont donc souvent inexploitable pour des problèmes de taille importante.

8. Algorithme solvant le problème en un temps d'exécution cubique en fonction de la taille des données d'entrée.

### 3.1.3 Conditions de secteurs

Pour un signal vectoriel  $z(t)$  donné, on appelle condition de secteur la contrainte :

$$\langle z, Qz \rangle_T \leq 0, \forall T \geq 0 \quad (3.8)$$

avec  $Q$  une matrice symétrique donnée. L'ensemble des  $z(t)$  satisfaisant cette contrainte forme le secteur conique :

$$\mathcal{S}(Q) \triangleq \{z(t) \in \mathcal{L}_2 : \langle z, Qz \rangle_T \leq 0, \forall T \geq 0\} \quad (3.9)$$

Considérons un système causal, potentiellement non-linéaire,  $G$ , ayant pour entrée  $u(t)$  et pour sortie  $y(t)$ .  $G$  représente l'application permettant de passer de l'espace  $u(t)$  à l'espace  $y(t)$  et on note  $y(t) = Gu(t)$ . On dit que  $G$  est à l'intérieur du secteur  $\mathcal{S}(Q)$  si, pour avec des conditions initiales nulles, toutes ses trajectoires entrée-sortie  $z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$  appartiennent au secteur  $\mathcal{S}(Q)$ . Autrement dit :

$$\left\langle \begin{bmatrix} Gu \\ u \end{bmatrix}, Q \begin{bmatrix} Gu \\ u \end{bmatrix} \right\rangle_T \leq 0, \forall T \geq 0 \quad (3.10)$$

Le théorème de stabilité par conditions de secteurs [14, Théorème

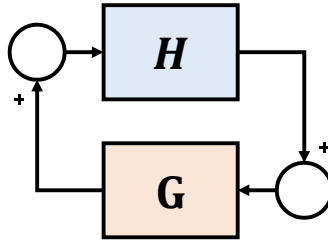


FIGURE 3.8 – Boucle fermée à rétro-action positive

2.2] stipule que deux systèmes  $H$  et  $G$  causaux rebouclés l'un sur l'autre par une rétro-action positive tel qu'illustré en figure 3.8 forment une boucle fermée stable si les trajectoires entrée-sortie de chacun des deux décrivent deux secteurs disjoints. D'une façon plus formelle, pour un  $\epsilon > 0$  donné, si  $G$  et  $H$  respectent les conditions de secteurs :

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} Gu \\ u \end{bmatrix}, (Q + \epsilon I) \begin{bmatrix} Gu \\ u \end{bmatrix} \right\rangle_T &\leq 0, \forall T \geq 0 \\ \left\langle \begin{bmatrix} y \\ Hy \end{bmatrix}, Q \begin{bmatrix} y \\ Hy \end{bmatrix} \right\rangle_T &\geq 0, \forall T \geq 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

alors le système en boucle fermée par rétro-action positive est stable. La figure 3.9 fournit une interprétation graphique du critère.

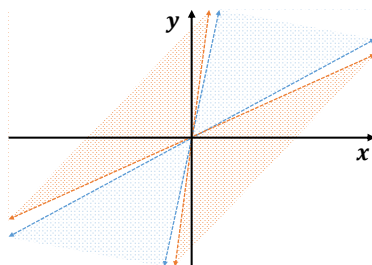


FIGURE 3.9 – Illustration de la Stabilité par Conditions de Secteur.  $H$  se trouve dans le secteur bleu, alors que  $G^{-1}$  se trouve dans le secteur orange. La séparation stricte des deux secteurs assure la stabilité de la boucle fermée

Le choix du secteur  $\mathcal{S}(Q)$  rend compte de différentes propriétés du système. Le tableau 3.1 résume quelques unes des propriétés les plus courantes.

TABEAU 3.1 – Relation entre les conditions de secteurs et des résultats classiques en automatique

Matrice $Q$	Propriété du Système associée
$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$	$y = Gu$ est stable et présente un gain $\mathcal{L}_2$ inférieur à $\gamma$
$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$	$y = Gu$ est passif
$\begin{bmatrix} 2\rho & -I \\ -I & 2\nu \end{bmatrix}$	$y = Gu$ présente un indice de passivité en entrée supérieur à $\nu$ et un indice de passivité en sortie supérieur à $\rho$
$\begin{bmatrix} 1 & -c \\ -c & c^2 - r^2 \end{bmatrix}$	$y = Gu$ évolue à l'intérieur du secteur de centre $c$ et de rayon $r$
$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$	$y = Gu$ est dissipatif ayant pour fonction d'alimentation $y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u$

### 3.1.3.1 Cas linéaire

Dans le cas particulier où  $G$  est un système LTI ayant autant d'entrées que  $Q$  n'a de valeurs propres négatives, 3.10 équivaut d'après [15,

Théorème 5] à :

$$Z(j\omega)^H Q Z(j\omega) \leq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad Z = \begin{bmatrix} G \\ I \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Cette formulation permet de traiter les conditions de secteurs dans le domaine fréquentiel, ce qui permet leur prise en compte par l'algorithme d'optimisation non lisse développé par Apkarian et Noll [? ].

### 3.1.4 Aperçu de la commande en impédance

La commande en impédance est un paradigme introduit par Hogan à la fin du siècle dernier pour pallier certaines difficultés de synthèse de commande pour les systèmes interactifs par des méthodes de synthèse classiques[16].

Habituellement, les performances des systèmes en automatique portent sur une variable d'intérêt qu'on souhaite réguler. On souhaite qu'elle puisse suivre une consigne avec une certaine précision et qu'elle rejette au mieux les perturbations externes. Lorsqu'il s'agit d'une variable d'interaction entre le système et son environnement (e.g. force d'interaction, vitesse d'un effecteur), sa régulation dépend aussi bien du système que de son environnement. Le niveau de performance exprimé en ces termes n'est pas univoque, face à des environnements divers. Présentée pour la première fois en [16], la commande en impédance se donne pour objectif de modifier l'impédance apparente du système plutôt que de réguler ses variables d'interaction. Ainsi, le niveau de performance d'une commande en impédance s'exprime en terme d'inertie apparente, d'amortissement apparent et de raideur apparente.

La commande en impédance trouve toute sa pertinence lorsque le système à piloter dispose de plusieurs degrés de libertés et que l'on souhaite lui affecter une impédance mécanique apparente aux propriétés différentes selon les axes (e.g. raide selon un axe, et souple selon un autre). En théorie, nous aimerions pouvoir affecter à l'effecteur des impédances apparentes arbitrairement choisies. En pratique, le comportement intrinsèque du système physique limite les bornes hautes de la raideur apparente [17] et les bornes basses de l'inertie apparente [18]. C'est pourquoi il est généralement préférable d'exprimer la performance d'une commande en impédance en terme de gains relatifs par rapport à l'impédance intrinsèque du système (e.g. diviser l'inertie apparente par deux, multiplier la raideur apparente par deux...).

## 3.2 Problématique de commande en cobotique : du concept à la formulation mathématique décidable<sup>9</sup>

### 3.2.1 Stabilité au contact

On parle de stabilité au contact, lorsque la stabilité du système robotisé seul ne préjuge pas de sa stabilité au contact de son environnement. Ce phénomène a lieu lorsque le système robotisé échange avec son environnement une quantité d'énergie importante sur un large spectre fréquentiel et sur une durée suffisamment longue pour que les propriétés statiques et dynamiques du cobot soient modifiées dans de larges proportions par le contact avec l'environnement [16]. Ceci est généralement le cas en co-manipulation, mais aussi pour toutes les tâches de contact telles que le ponçage ou l'ébavurage. Le sujet de la stabilité au contact a été largement étudié depuis les trois dernières décennies comme nous l'avons évoqué en introduction. Trois approches principales se distinguent pour traiter le sujet :

- **Passivité** : Partant de la propriété des systèmes passifs d'être assemblés arbitrairement tout en procurant à l'assemblage cette même passivité, et sachant qu'une large partie des objets amenés à être manipulés par un système robotisé sont passifs, il peut être souhaitable de conférer au cobot un comportement passif. Le cobot est, ainsi, en mesure d'interagir avec un large panel d'environnements en toute sécurité
- **stabilité inconditionnelle en mode couplé (SIC)** : La propriété de passivité peut s'avérer structurellement impossible à respecter dans certains cas de co-manipulation avec deux ports d'interaction. Tel est typiquement le cas quand le cobot amplifie l'effort de l'opérateur. Connaissant la charge maximale du cobot, nous pouvons adopter le critère de SIC [19] moins conservatif que la passivité. Pour réduire le conservatisme de la passivité, la SIC fait l'hypothèse que les deux environnements du cobot aux deux ports d'interaction n'échangent jamais d'énergie si ce n'est à travers le cobot.
- **Stabilité complémentaire (CS)** : la stabilité complémentaire est

---

9. Une expression mathématique est décidable s'il existe un algorithme qui réponde par oui ou non à la question posée.

une approche de la stabilité au contact qui se base sur une connaissance partielle de l'environnement, modélisé par un modèle nominal augmenté d'une incertitude non structurée. Cette approche a pour vocation de concilier la commande en impédance avec les techniques de commande classiques telle que la synthèse  $H_\infty$ . La difficulté de son adoption, plusieurs années après sa théorisation, réside dans la difficulté de borner d'une façon adéquate l'incertitude de l'environnement. En effet, une stabilité robuste du cobot à une incertitude trop large de l'environnement est sensiblement équivalente à sa passivité. Cette difficulté est d'autant plus importante que le nombre de ddl augmente [20].

Dans ce qui suit, nous déclinons la passivité et la SIC en critères mathématiquement décidables pouvant être combinés avec d'autres critères de performance dans un formalisme unifié de synthèse de commande assistée par ordinateur. Nous présenterons également une alternative à la CS, certes plus conservative mais au déploiement calculatoire plus aisé : il s'agit de la méthode des indices de passivité. Ces approches ont fait l'objet d'une validation expérimentale en SISO à travers les dispositifs  $D_1$  et  $D_2$ . Quant au cas MIMO, nous nous sommes limités à une validation en simulation, compte tenu des difficultés de modélisation relevées au chapitre 2.

### 3.2.1.1 Stabilité au contact basée passivité

Un système MIMO est par définition passif si et seulement si, à conditions initiales nulles, toutes ses trajectoires entrées-sorties  $\{u(t), y(t)\}$  respectent la contrainte :

$$\langle y(t), u(t) \rangle_T > 0, \forall T > 0 \quad (3.13)$$

Pour un système linéaire – ce qui est le cas dans notre approche – l'équation 3.13 équivaut à :

$$G(j\omega) + G(j\omega)^H > 0 \quad (3.14)$$

Dans le cas particulier où le système est SISO, l'équation 3.14 équivaut à :

$$\Re(G(j\omega)) > 0 \quad (3.15)$$

d'où le qualificatif de système réel positif. Ce qui équivaut également à avoir une phase du système comprise entre  $-90^\circ$  et  $90^\circ$ . Or, les outils de l'automatique moderne sont essentiellement basés sur les normes

–  $H_2$  et  $H_\infty$ . Pour inclure la passivité comme critère dans un formalisme basé norme, nous faisons appel à la transformation bilinéaire de Cayley [21].

### 3.2.1.1.1 Approche $H_\infty$ structuré

La transformation bilinéaire de Cayley

$$(x - I)(x + I)^{-1} \quad (3.16)$$

est une bijection permettant de passer du demi-plan complexe droit au cercle unité et vice-versa. Par conséquent, on peut écrire :

$$G(j\omega) + G(j\omega)^H > 0 \iff \left\| (G(j\omega) - I)(G(j\omega) + I)^{-1} \right\|_\infty < 1 \quad (3.17)$$

Il s'agit là d'une caractérisation  $H_\infty$  de la passivité. Si, par ailleurs, nous exprimons les performances sous la forme  $H_\infty$  classique  $\|W_y(j\omega)G(j\omega)W_u(j\omega)\|_\infty < 1$ , nous obtenons une formulation qu'il n'est pas possible d'écrire sous la forme d'une LFT mettant en oeuvre une seule occurrence de  $G(j\omega)$ . Sous cette forme, nous ne pouvons pas faire appel aux méthodes de résolution de type LMI [22] ou Riccati [23]. On considère, donc, que le problème de commande est intrinsèquement structuré. Pour résoudre ce type de problèmes nous faisons appel à l'optimisation non lisse [24]. Nous pouvons noter que :

$$\begin{aligned} (G(j\omega) - I)(G(j\omega) + I)^{-1} &= \mathcal{F}_u(G(j\omega), M); \\ M &= \begin{bmatrix} -I & 2I \\ I & -I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.2.1.1.2 Remarques

Comme souligné en [25], la formulation  $H_\infty$  de la passivité pose deux difficultés algorithmiques majeures :

- pour un système  $G(s)$  strictement propre tel que l'admittance d'un système inertiel ou un système présentant un comportement de type passe haut tel qu'un système élastique, on a :

$$\left\| \mathcal{F}_l(G(j\omega), M) \right\|_\infty \geq 1 \quad (3.19)$$

La recherche d'une solution respectant 3.17 peut amener l'algorithme d'optimisation à pénaliser excessivement les autres critères de performances sans pour autant respecter strictement

3.17. On pourrait être tenté, face à ce constat, de relâcher légèrement la contrainte sur 3.17 et de se satisfaire d'une norme légèrement supérieure à 1. On tomberait dans ce cas dans le second écueil de cette formulation, que nous détaillons ci-après.

- La propriété de passivité de  $G(j\omega)$  est invariante selon que  $G(j\omega)$  est multiplié par un facteur d'échelle  $\gamma > 0$ . Il en est tout autrement de la caractérisation  $H_\infty$  de la passivité. Ainsi selon que  $G(j\omega)$  ait un gain important ou faible par rapport à 1, l'obtention de :

$$\left\| (G(j\omega) - I)(G(j\omega) + I)^{-1} \right\|_\infty = 1 + \epsilon \quad (3.20)$$

avec  $\epsilon \ll 1$  positif, ne fournit pas une interprétation univoque de la passivité de  $G(j\omega)$ .

Il convient, alors, d'utiliser la présente formulation avec précautions, notamment en limitant la synthèse à une plage de fréquence particulière, et de vérifier a posteriori les propriétés de passivité du système commandé.

### 3.2.1.1.3 Approche basée sur les conditions de secteur

Comme présenté au chapitre 3.1.3, différents secteurs  $\mathcal{S}(Q)$  permettent de saisir différentes propriétés d'un système  $G$ . En particulier, en injectant 3.13 dans 3.10, la passivité de  $G$  équivaut à :

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H Q \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Par ailleurs, d'après [15] on a :

$$\|G\|_\infty \leq \gamma \iff \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H Q \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Par conséquent, les conditions de secteur permettent de combiner efficacement des spécifications  $H_\infty$  de performances et des spécifications de passivité au niveau de certains ports d'un système. Nous discuterons dans le paragraphe suivant la différence entre l'approche  $H_\infty$  structurée et l'approche par conditions de secteurs.

### 3.2.1.1.4 Discussion

D'après Apkarian et al. [24], l'algorithme d'optimisation non lisse que nous avons adopté dans le présent travail, et qui permet de résoudre



des problèmes  $H_\infty$  structurés, fait partie de la classe de complexité algorithmique  $\mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(p^3)$ , où  $n$  est le nombre d'états du système et  $p$  le nombre de degrés de liberté dans le contrôleur. Cet algorithme a été adapté par Xia [26] aux conditions de secteurs<sup>10</sup> permettant, ainsi, de traiter d'une façon équivalente et sans changement de classe de complexité, les contraintes  $H_\infty$  et la passivité. L'approche par condition de secteur permet donc une convergence vers l'optimum 8 fois plus rapide que par la formulation  $H_\infty$  de la passivité, du fait de la non-double occurrence du système dans le problème d'optimisation :  $\mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(p^3) < \mathcal{O}((2n)^3) + \mathcal{O}((p)^3)$ .

Par ailleurs, l'approche par condition de secteur fournit, contrairement à l'approche  $H_\infty$ , une interprétation univoque du manque de passivité. En effet, pour :

$$\exists \omega \in \mathbb{R}, \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^H \mathbf{Q} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \epsilon > 0, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$\epsilon$  s'interprète, par définition, comme l'excès d'énergie restituée par  $G$  à son environnement sur la période  $[0, T]$ . En conséquence, nous adoptons l'approche de synthèse par conditions de secteurs pour caractériser la passivité du système ainsi que les performances  $H_\infty$ .

### 3.2.1.2 Stabilité au contact basée SIC

#### 3.2.1.2.1 Approche $H_\infty$ structurée

Dans le cas d'une tâche de comanipulation avec amplification d'effort, où l'opérateur et l'outil partagent exactement la même vitesse – absence d'une élasticité entre les deux – le cobot seul ne peut par définition pas être passif [19]. En faisant l'hypothèse que l'opérateur n'interagit avec la charge qu'à travers le cobot, nous pouvons faire appel au critère de SIC pour assurer conjointement la passivité de l'ensemble robot-opérateur vu de la charge ainsi que la passivité de l'ensemble robot-charge vu de l'opérateur. Considérons un cobot modélisé par son admittance  $Y = [\mathcal{Y}_h \quad \mathcal{Y}_e]$  telle que :

$$\dot{x} = Y \begin{bmatrix} f_h \\ f_e \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

---

10. L'algorithme d'optimisation non lisse adopté dans le présent travail et packagé dans la routine MATLAB `sysune` a bénéficié en 2017 de développements chez MathWorks® pour supporter les formulations de type condition de secteur

avec  $\dot{x}$  est la vitesse de l'effecteur du robot,  $f_h$  l'effort de l'opérateur et  $f_e$  l'effort de la charge. D'après [19, équations 5.9-5.12], les conditions de SIC s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Re(\mathcal{Y}_h(j\omega)) &\geq 0 \\ \Re(\mathcal{Y}_h(j\omega)) \Re(\mathcal{Y}_e(j\omega)) + \Im(\mathcal{Y}_h(j\omega)) \Im(\mathcal{Y}_e(j\omega)) &\geq 0 \\ \Re(\mathcal{Y}_h(j\omega)) \Im(\mathcal{Y}_e(j\omega)) - \Im(\mathcal{Y}_h(j\omega)) \Re(\mathcal{Y}_e(j\omega)) &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

En injectant 3.14 dans 3.25, nous obtenons le corollaire suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_h(j\omega) + \mathcal{Y}_h(j\omega)^H &\geq 0 \\ \mathcal{Y}_h(j\omega)^{-1} \mathcal{Y}_e(j\omega) + (\mathcal{Y}_h(j\omega)^{-1} \mathcal{Y}_e(j\omega))^H &\geq 0 \\ -j \mathcal{Y}_h(j\omega)^{-1} \mathcal{Y}_e(j\omega) - (j \mathcal{Y}_h(j\omega)^{-1} \mathcal{Y}_e(j\omega))^H &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Les outils dont nous disposons et que nous avons évoqués en 3.1.2.8 ne supportent pour le moment pas les nombres imaginaires. Ainsi, pour rester dans le cadre des fonctions de transfert à coefficients réels, nous multiplions la dernière équation par  $\omega$ . Il en découle le corollaire suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_h(j\omega) + \mathcal{Y}_h(j\omega)^H &\geq 0 \\ \mathcal{Y}_h(j\omega)^{-1} \mathcal{Y}_e(j\omega) + (\mathcal{Y}_h(j\omega)^{-1} \mathcal{Y}_e(j\omega))^H &\geq 0 \\ \frac{1}{j\omega} \mathcal{Y}_h(j\omega)^{-1} \mathcal{Y}_e(j\omega) + \left( \frac{1}{j\omega} \mathcal{Y}_h(j\omega)^{-1} \mathcal{Y}_e(j\omega) \right)^H &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

En reprenant la formulation 3.18, nous obtenons, en définitive, la formulation  $H_\infty$  suivante pour la SIC :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_u(M, \mathcal{Y}_{r_h}(s))\|_\infty &\leq 1 \\ \|\mathcal{F}_u(M, \mathcal{Y}_h(s)^{-1} \mathcal{Y}_e(s))\|_\infty &\leq 1 \\ \left\| \mathcal{F}_u\left(M, \frac{1}{s} \mathcal{Y}_h(s)^{-1} \mathcal{Y}_e(s)\right) \right\|_\infty &\leq 1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

### 3.2.1.2.2 Approche par conditions de secteur

Nous avons vu précédemment, que les conditions de secteur représentent une alternative intéressante à la formulation  $H_\infty$  de la passivité avec moins de complexité algorithmique et plus de stabilité numérique. Étant données les similarités entre la passivité et la SIC, nous proposons de dériver une formulation SIC par conditions de secteurs

et d'en discuter les performances.

Nous rappelons :

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_e(s) &= \dot{x}(s) f_e^{-1}(s) \\ \mathcal{Y}_h(s) &= \dot{x}(s) f_h^{-1}(s)\end{aligned}\tag{3.29}$$

En injectant 3.29 dans 3.27, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_h(s) + \mathcal{Y}_h(s)^H &\geq 0 \\ f_h(s) f_e^{-1}(s) + (f_h(s) f_e^{-1}(s))^H &\geq 0 \\ \frac{1}{s} f_h(s) f_e^{-1}(s) + \left(\frac{1}{s} f_h(s) f_e^{-1}(s)\right)^H &\geq 0\end{aligned}\tag{3.30}$$

En reprenant l'expression de la passivité en terme de produit scalaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}, f_h \rangle_T &\geq 0, \forall T \geq 0 \\ \langle f_h, f_e \rangle_T &\geq 0, \forall T \geq 0 \\ \left\langle \int_0^T f_h, f_e \right\rangle_T &\geq 0, \forall T \geq 0\end{aligned}\tag{3.31}$$

que nous pouvons, en définitive, réécrire comme suit :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_h(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^H \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_h(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} &\leq 0 \\ \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_e(j\omega) & \mathcal{Y}_h(j\omega) \end{bmatrix} \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_e(j\omega) & \mathcal{Y}_h(j\omega) \end{bmatrix}^H &\leq 0 \\ \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_e(j\omega) & \mathcal{Y}_h(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q} \begin{bmatrix} -\frac{1}{j\omega} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_e(j\omega) & \mathcal{Y}_h(j\omega) \end{bmatrix}^H &\leq 0; \\ \forall \omega \in \mathbb{R}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} &\tag{3.32}\end{aligned}$$

### 3.2.1.2.3 Discussion

On rappelle, que d'une façon générale, l'algorithme d'optimisation non lisse suit une loi de complexité algorithmique :  $\mathcal{O}((n)^3) + \mathcal{O}((p)^3)$ . La résolution de 3.28 suit donc une loi de complexité algorithmique de :  $\mathcal{O}((6n)^3) + \mathcal{O}((p)^3)$ <sup>11</sup>. La formulation  $H_\infty$  de la SIC multiplie par 216 le temps d'exécution de l'algorithme d'optimisations, par rapport

---

11. Comme pour la passivité, l'utilisation de la transformation bilinéaire fait apparaître deux occurrences du système dans le problème d'optimisation, ce qui multiplie par deux le nombre d'états.

à un problème sans SIC. Nous commençons donc à atteindre les limites de la formulation  $H_\infty$  pour résoudre des problèmes pratiques dans un temps raisonnable.

Dans l'approche par conditions de secteurs, du fait de l'ajout d'un intégrateur supplémentaire dans le système, la résolution de 3.32 suit, une loi de complexité algorithmique de la forme :  $\mathcal{O}((n+m)^3) + \mathcal{O}(p^3)$ ; où  $m$  est le nombre de ports d'interactions considérés. On remarque que si la formulation  $H_\infty$  de la SIC dégrade considérablement le temps de calcul, dans le formalisme des conditions de secteur, ce temps n'est que marginalement modifié. Par ailleurs, les critiques sur l'équilibrage entre les contraintes de passivité et les objectifs de performances dans le formalisme  $H_\infty$  restent valable pour la SIC. L'approche des conditions de secteur est donc largement plus appropriée pour traiter la SIC.

### 3.2.1.3 Stabilité au contact basée sur les indices de passivité

#### 3.2.1.3.1 Introduction aux indices de passivité

Il est souvent reproché à la passivité son niveau élevé de conservatisme, notamment lorsque l'environnement du cobot est parfaitement borné. Pour autant, la caractérisation de l'incertitude de l'environnement, en vue de l'élaboration de spécifications de robustesse pour la synthèse de commande n'est pas triviale. Ainsi, le concept de stabilité complémentaire adopté en [27] s'appuie sur le théorème du petit gain appliqué au pire cas de l'ensemble des environnements envisageables. Au delà de la difficulté de caractérisation du dit pire cas, l'approche petit gain occulte les caractéristiques de phase de l'environnement, rendant l'approche relativement conservatrice, et pouvant dans la pratique rejoindre le niveau de conservatisme de la passivité [19]. Sans nous éloigner énormément du concept de passivité, nous proposons une approche alternative à [27] pour réduire le conservatisme des contraintes de passivité. Alors que la passivité, tout comme la stabilité, est un concept binaire, il peut s'avérer utile d'introduire des métriques pour quantifier l'excès ou le manque de passivité : l'indice de passivité en entrée (IFP)  $\nu$ , et l'indice de passivité en sortie (OFP)  $\rho$  [26]. La figure 3.10 fournit une interprétation en terme de schéma-bloc de  $\nu$  et  $\rho$ . Pour un système LTI stable  $G(s)$ , l'indice de passivité en entrée  $\nu$  représente le gain qu'on peut retrancher à  $G(s)$  sans perdre la propriété de passivité, ou plus formellement :

$$\langle u, y \rangle_T > \nu \langle u, u \rangle_T \quad (3.33)$$

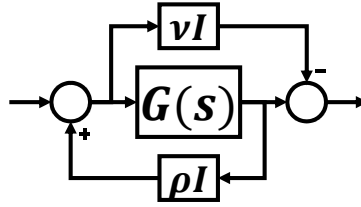


FIGURE 3.10 – Illustration des indices de passivité  $\nu$  et  $\rho$

Une interprétation de  $\nu$  pour un système mécanique serait l'amortissement à retrancher à une impédance  $\mathcal{Z}$  sans qu'elle perde la passivité (e.g.  $\mathcal{Z} = \frac{K}{s} + B$  est IFP(B)).

L'indice de passivité en sortie  $\rho$  représente le gain maximal qu'on peut mettre dans la branche de retour d'une rétroaction positive sur  $G(s)$  sans perdre la propriété de passivité; ou plus formellement :

$$\langle u, y \rangle_T > \rho \langle y, y \rangle_T \quad (3.34)$$

Une interprétation de  $\rho$  pour un système mécanique serait l'amortissement à retrancher à une admittance  $\mathcal{Y}$  sans qu'elle perde la passivité (e.g.  $\mathcal{Y} = \frac{1}{J s + B}$  est OFP(B)).

On dit que  $G(s)$  est IF-OFP( $\nu, \rho$ ) lorsqu'il présente à la fois un IFP  $\nu$  et un OFP  $\rho$ ; ou plus formellement :

$$\langle u, y \rangle_T > \rho \langle y, y \rangle_T + \nu \langle u, u \rangle_T \quad (3.35)$$

La démonstration de ces résultats en trouve en [26].

### 3.2.1.3.2 Usage des Indices de Passivité en Cobotique

L'intérêt de faire appel aux indices de passivité réside dans les propriétés de stabilité et de passivité de deux systèmes rebouclés l'un sur l'autre, en tenant compte des IFP et OFP de chacun des deux systèmes établis par XIA en [26]. Considérons le système en boucle fermée  $\Sigma$

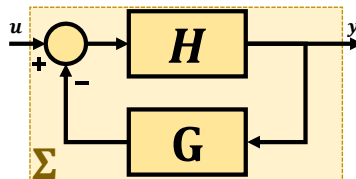


FIGURE 3.11 – Illustration de la rétroaction entre deux systèmes IF-OFP

représenté en figure 3.11. Si  $H$  et  $G$  sont tous les deux passifs, alors  $\Sigma$

est passif.

Considérons à présent que  $H$  est IF-OFP( $v_1, \rho_1$ ) et que  $G$  est IF-OFP( $v_2, \rho_2$ ).  
D'après [26, Théorèmes 1 et 2] :

$$\begin{cases} v_1 + \rho_2 > 0 \\ v_2 + \rho_1 > 0 \end{cases} \implies \Sigma \text{ est stable} \quad (3.36)$$

$$\{v_1 > 0 \implies \Sigma \text{ est IF-OFP}\left(\frac{v_1 \rho_2}{v_1 + \rho_2}, v_2 + \rho_1\right)$$

L'usage des indices de passivité a d'autant plus d'intérêt que l'on autorise ces derniers à être dépendants de la pulsation  $\omega$ .

En effet, deux environnements différents peuvent avoir les mêmes indices de passivité, pour peu qu'ils aient le même niveau d'amortissement (e.g.  $\frac{1}{s} + 1$  vs.  $\frac{10}{s} + 1$ ).

Ainsi, par une caractérisation des valeurs minimales de l'indice de passivité en entrée  $v_{env}(\omega)$  d'un environnement borné, il est possible de synthétiser un contrôleur assurant la passivité de l'ensemble cobot-environnement même si le modèle du robot n'est pas parfaitement passif. Le contrôleur ainsi obtenu est alors, moins conservatif que celui d'un contrôleur assurant une passivité intrinsèque au cobot. En effet le manque de passivité en sortie  $\rho_{rob}(\omega)$  du cobot est compensé par l'excès de passivité en entrée  $v_{env}(\omega)$  de l'environnement.

### 3.2.1.3.3 Mise en pratique

Tout comme pour la passivité, nous adoptons d'emblée le formalisme des conditions de secteur pour éviter les problèmes de calcul numérique inhérent à la formulation  $H_\infty$  de la passivité (voir 3.2.1.1.4).

Pour  $n$  réalisations aléatoirement choisies et statistiquement représentatives de l'environnement  $G(s)$ , nous évaluons, pour chaque  $\omega$  :

$$v_{min}(\omega) = \min_n (v(G(j\omega))) \quad (3.37)$$

Par la suite, nous cherchons une fonction de transfert rationnelle  $v_{min}(s)$ , qui approxime  $v_{min}(\omega)$ . Notons que  $v_{min}(\omega)$  représente des valeurs réelles dépendant de  $\omega$ . Quelle que soit la qualité des approximations rationnelles de  $v_{min}(s)$ , la phase de celle-ci ne sera pas strictement nulle. Ainsi pour forcer  $v_{min}(s)$  à avoir une phase strictement nulle, nous lui substituons  $0.5(v_{min}(s) + v_{min}(s)^H)$ .

En reprenant la condition de secteur représentative des indices de passivité du tableau 3.1, nous construisons la matrice  $Q(s)$  comme

suit :

$$Q(s) = \begin{bmatrix} -(\mathbf{v}_{min}(s) + \mathbf{v}_{min}(s)^H) \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

L'admittance du cobot  $\mathcal{Y}_e(s)$  incluant le contrôleur doit, alors, respecter la condition de secteur suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_e(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^H Q(j\omega) \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_e(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.39)$$

La résolution de ce problème suit une loi de complexité algorithmique de la forme :  $\mathcal{O}((n + 2l)^3) + \mathcal{O}(p^3)$ ; où  $l$  est l'ordre de  $\mathbf{v}_{min}(s)$ .

### 3.2.2 Commande en transparence

#### 3.2.2.1 Analyse sémantique de la commande en transparence

On entend par commande en transparence les lois de commande octroyant au cobot des propriétés de faible opposition à un effort externe. Moins le robot oppose de résistance à un effort externe plus il est transparent. Un cobot sera d'autant plus transparent que son impédance mécanique apparente est faible. L'objectif de la commande en transparence est donc de minimiser l'impédance apparente du cobot, où plus exactement de maximiser son admittance apparente.

#### 3.2.2.2 Réflexions sur la structure du contrôleur

##### 3.2.2.2.1 Commande avec capteur d'effort

La commande en transparence avec capteur d'effort a été largement étudiée dans la littérature. Une architecture de commande couramment proposée est celle présentée en figure 3.12 où  $K_{comp}$  est un contrôleur de type PI. Cette architecture de commande s'inspire des approches classiques de commande, où l'objectif est de réguler la variable  $F_e$  (figure 3.12-1). Nous pouvons observer toutefois, qu'en l'absence de l'environnement du cobot, nous tombons dans le cas d'une commande en boucle ouverte (figure 3.12-2). Avec cette architecture, le terme intégral du correcteur contribue à minimiser l'inertie apparente alors que le terme proportionnel contribue à minimiser l'amortissement apparent [19].

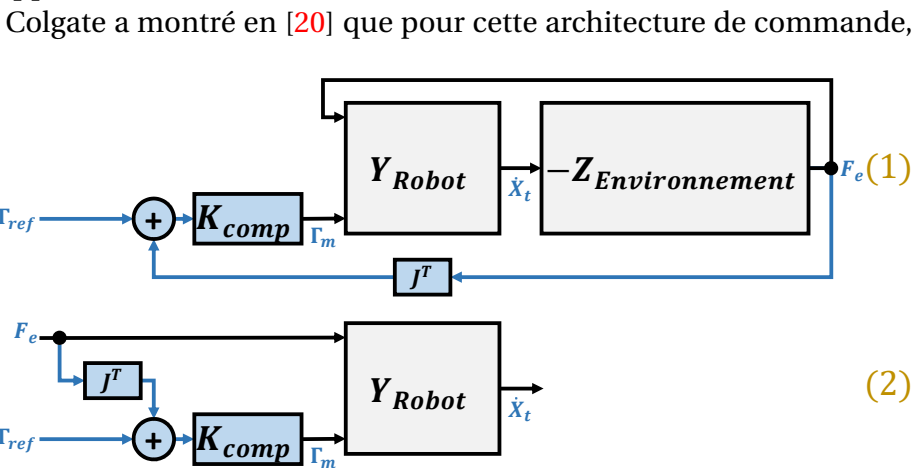


FIGURE 3.12 – Architecture PI pour la commande en transparence

en présence d'une flexibilité interne dans le système, l'impédance mi-



nimale qu'il est possible d'atteindre correspond à l'inertie physique en aval de la flexibilité. Dans la pratique, cette performance ultime peut être difficile à atteindre en présence de multiples modes flexibles. Il a été observé à cet effet en [19] que l'inclusion d'une boucle de vitesse interne contribue à l'amélioration de la stabilité du système et permet au contrôleur PI d'avoir des gains plus importants. L'explication avancée par l'auteur repose sur la faculté d'un asservissement en vitesse d'injecter de l'amortissement dans le système ce qui contribue à améliorer l'indice de passivité en sortie  $\rho$  du système.

**Proposition 1**

Afin de réduire davantage le conservatisme des contrôleurs de type PI, nous proposons, tout en gardant le contrôleur PI sur l'effort d'interaction  $F_e$ , de mettre en place une boucle de rétroaction interne qui injecte un amortissement multi-modal dans le système. Pour ce faire, nous faisons appel la décompositions PHS présentée dans l'équation 2.29 pour structurer un retour d'état ne faisant qu'injecter de l'amortissement dans le système. En considérant l'équation d'état du système suivante  $\dot{x} = A x + B \begin{bmatrix} F_e \\ \Gamma_m \end{bmatrix}$ , la loi de commande finale prend la forme :

$$\Gamma_m = K_{comp} (\Gamma_{ref} + J^T F_e) + K_{damp} x \tag{3.40}$$

avec  $K_{damp} = B^T G Q$ , et où  $Q$  est une matrice de Lyapunov du système,  $J$  la matrice jacobienne du cobot et  $G$  une matrice diagonale dont les termes sont réglables.

La figure 3.13 illustre la structure de commande proposée. Les performances de cette structure seront discutées au 3.2.5.

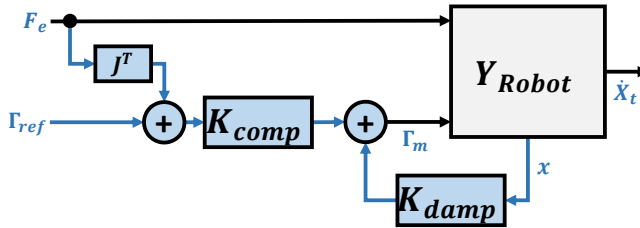


FIGURE 3.13 – Proposition d'architecture de commande pour la en transparence

### 3.2.2.2.2 Commande sans capteur d'effort

La commande en transparence sans capteur d'effort est adaptée aux systèmes mécaniquement réversibles – ceux pouvant être manipulés en agissant du côté de la charge. Le vérin à câble présenté en figure 2.4.1 est une illustration de ce type de systèmes.

D'une manière générale, pour un dispositif cobotique disposant d'une certaine réversibilité mécanique, il convient, tout en gardant l'idée générale de l'architecture de commande proposée précédemment, de remplacer la mesure d'effort par une estimation.

Dans le cas d'un vérin à câble, la mesure de déflexion interne dans la transmission mécanique représente un candidat possible pour l'estimation de cet effort.

#### Proposition 2

Pour un vérin à câble ( $D_1$  présenté en 2.4), la loi de commande en transparence prend la forme :

$$\Gamma_m = K_{comp} (\Gamma_{ref} - k_c \delta\theta) + K_{damp} \dot{q}_m \quad (3.41)$$

où  $K_{comp}$  est correcteur PI et où  $K_{damp}$  est réduit à un simple gain statique compte tenu de la simplicité du système. La figure 3.14 illustre

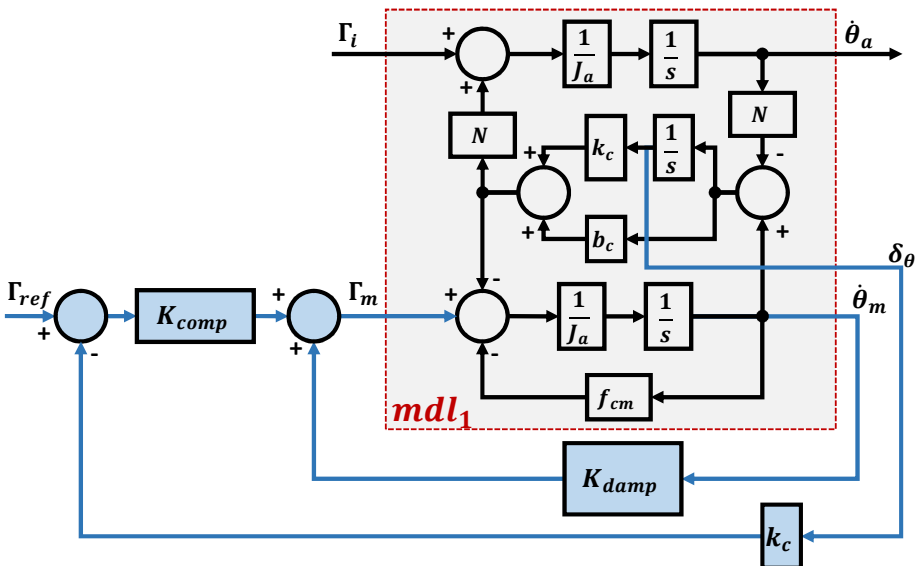


FIGURE 3.14 – Proposition d'architecture de commande pour la commande en transparence d'un vérin à câble

l'architecture de commande proposée.

Les performances de la structure de commande proposée sont discutées ci-après.

### 3.2.2.3 Réglage des paramètres du correcteur par synthèse $H_\infty$ structuré et conditions de secteurs

Pour respecter la causalité, le cobot est modélisé par une admittance plutôt qu'une impédance. Pour améliorer la transparence, nous cherchons donc à maximiser l'admittance du cobot, en utilisant des outils de synthèse pensés initialement pour minimiser des normes (e.g.  $H_\infty$ ). Afin d'adapter les outils dont nous disposons à notre objectif de commande, nous avons envisagé différentes approches.

#### 3.2.2.3.1 Approche I : Minimiser l'écart à un modèle de référence

Nous illustrons la présente approche à travers le modèle  $D_1$ . Notons  $\mathcal{Y}_r^{cl} = \frac{\hat{\theta}_a}{I_i}$  l'admittance apparente du vérin à câble. Nous savons que  $\forall K_{damp}$  et  $K_{comp}$ ,  $\mathcal{Y}_r^{cl}(j\omega) \approx \frac{1}{J_a j\omega}$  lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ . Le modèle de référence optimal pour  $\mathcal{Y}_r^{cl}(s)$  est donc  $\frac{1}{J_a s}$ .

Une solution triviale pour approcher l'admittance du vérin du modèle de référence est de résoudre le problème d'optimisation non lisse suivant :

$$\begin{aligned} & \underset{\{K_{comp}, K_{damp}\}}{\text{minimize}} && \left\| \mathcal{Y}_r^{cl}(s) - \frac{1}{J_a s} \right\|_\infty \\ & \text{subject to} && \mathcal{Y}_r^{cl} \text{ passive} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Cette solution ne fournit toutefois pas une mesure univoque de l'atteinte ou non de l'objectif de commande. En effet, à une même valeur de la norme  $H_\infty$ , peuvent correspondre différents écarts relatifs du modèle de référence selon que  $J_a$  est grand ou petit.

#### 3.2.2.3.2 Approche II : Minimiser de sorte à maximiser

Nous illustrons la présente approche à travers le modèle  $D_1$ . En [9], il a été établi que du fait de l'effet « waterbed », la minimisation du gain d'une fonction de transfert dans une plage fréquentielle a tendance à faire remonter le gain dans d'autres plages. Cette propriété, considérée généralement comme un inconvénient, est mise dans notre cas à profit pour faire remonter le gain de l'admittance du vérin à câble.

En partant de  $\omega = +\infty$  et en parcourant le diagramme de Bode de l'admittance du vérin à câble illustrée en figure 2.9 dans le sens des  $\omega$  décroissants, on observe que le premier écart significatif entre  $\mathcal{Y}_r^{cl}(j\omega)$  et  $\frac{1}{J_a j \omega}$  se produit au niveau de la résonance, fréquence à laquelle  $|\mathcal{Y}_r^{cl}(j\omega)|$  dépasse  $|\frac{1}{J_a j \omega}|$ . Ainsi, en exploitant la propriété présentée ci-dessus de l'optimisation non lisse, nous proposons de résoudre le problème de synthèse suivant :

$$\begin{aligned} & \text{solve}_{\{\kappa_{comp}, \kappa_{damp}\}} \left\| \mathcal{Y}_r^{cl}(s) W_y(s) \right\|_{\infty} \leq 1; W_y(s)^{-1} = \frac{1}{J_a s} \\ & \text{subject to } \mathcal{Y}_r^{cl}(s) \text{ passive} \end{aligned} \quad (3.43)$$

La résolution de ce problème aura pour effet d'atténuer l'amplitude de la résonance, ce qui aura pour effet de remonter le gain de l'admittance en basse fréquence.

Par optimisation non lisse, et en utilisant la formulation par conditions de secteur de la commande  $H_{\infty}$  et de la passivité, nous obtenons, les performances illustrées en figure 3.15. Nous pouvons ob-

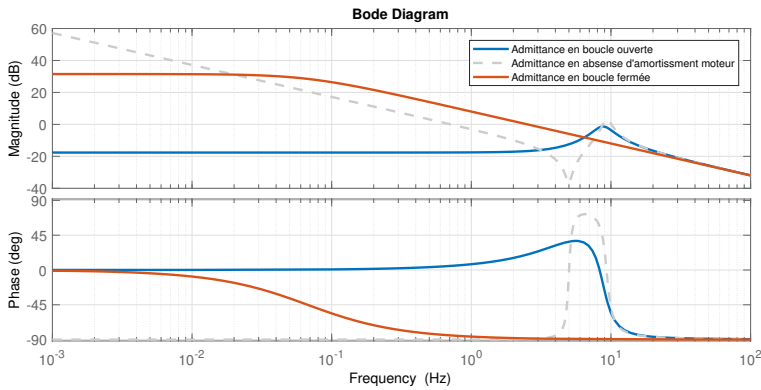


FIGURE 3.15 – Illustration des performances de commande en transparence par l'approche II

server à travers cette figure que l'inertie du moteur est complètement compensée, et que l'amortissement est compensé à plus de 99% – Le gain statique de l'admittance correspondant à l'inverse de l'amortissement passe de  $-20$  dB à plus de  $20$  dB.

### 3.2.2.3.3 Limitations

Bien que l'approche présentée ait fourni des résultats satisfaisants, il

convient de mettre en lumière ses limitations. En premier lieu, il faut noter que cette approche n'a de sens que si le système est suffisamment faiblement amorti. En effet, lorsque  $k_c \geq \frac{c_c^2(J_m N^2 + J_a)}{4 J_m J_a}$ , on n'observe plus de résonance. L'inéquation 3.43 est d'emblée respectée en boucle ouverte et la technique consistant à minimiser la résonance pour maximiser l'impédance ne fonctionnera plus. Le second écueil de cette formulation réside dans la non maîtrise du niveau de performance finale à atteindre. En effet, si l'on peut prédire que le gain en basse fréquence sera remonté par la présente approche de synthèse, nous ne pouvons pas quantifier a priori de combien. L'approche présentée ci-après permet de remédier à cet inconvénient.

#### 3.2.2.3.4 Approche III : Minimiser l'écart à un modèle de référence pondéré

Nous illustrons la présente approche à travers le modèle  $D_2$  présenté en figure 2.11. Nous reprenons la structure de commande présentée en figure 3.13 sans le bloc  $K_{damp}$ . Nous avons observé que l'approche proposée au paragraphe précédent présente des inconvénients qui limitent son usage à des cas très particuliers.  $D_2$  permet de mettre en lumière cette limitation et de mettre en valeur des solutions alternatives. Afin d'obtenir une formulation plus générique, nous reprenons la problématique 3.42 et pondérons l'écart entre le système et le modèle de référence par l'inverse du modèle. Après simplification, nous obtenons l'expression suivante du problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} & \underset{\{k_{comp}\}}{\text{solve}} \quad \left\| 1 - \mathcal{Y}_r^{cl}(s) W_y(s) \right\|_{\infty} \leq 1; \quad W_y = J_a s \\ & \text{subject to} \quad \mathcal{Y}_r^{cl} \text{ passive} \end{aligned} \quad (3.44)$$

avec  $J_a = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \mathcal{Y}_r^{ol}(j\omega) j\omega$ .

Par optimisation non lisse, et en utilisant la formulation par conditions de secteur de la commande  $H_{\infty}$  et de la passivité, nous obtenons, les performances illustrées en figure 3.16.

Nous observons que l'admittance du cobot A6.15 présente un comportement inertiel en basse fréquence et un gain amplifié par rapport à la boucle ouverte dans la limite de ce que permet la contrainte de passivité. Cette formulation semble donc adaptée aux systèmes présentant plusieurs modes flexibles. Toutefois, nous ne disposons toujours pas d'une mesure quantitative de l'écart entre la performance souhaitée et la performance obtenue.

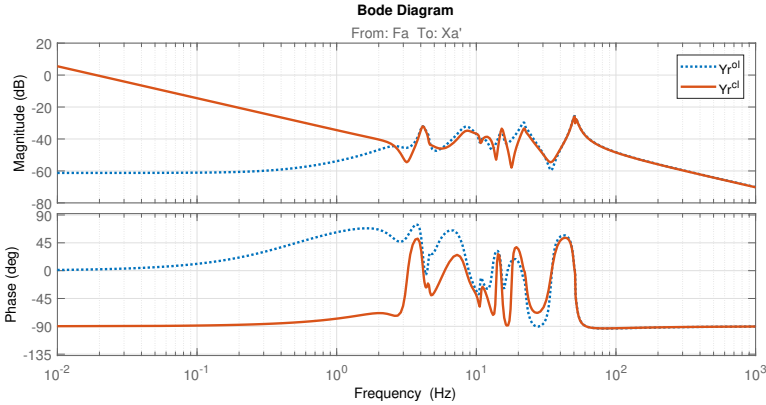


FIGURE 3.16 – Illustration des performances de commande en transparence par l’approche III

### 3.2.2.3.5 Approche IV : Minimiser la fonction de sensibilité d’une boucle externe

Nous illustrons la présente approche à travers le modèle  $D_2$ . Tout comme précédemment, la structure de commande considérée comporte uniquement le bloc  $K_{comp}$ . Bien que la formulation élaborée dans le précédent paragraphe soit adaptée au problème de commande en transparence, il peut s’avérer utile d’avoir des formulations alternatives. En effet, selon le cas d’étude, certaines formulations peuvent s’avérer plus adaptées que d’autres.

Dans le paragraphe présent, nous essayons de nous remettre dans le contexte d’une minimisation d’impédance. Nous ne pouvons pas le faire d’emblée car l’inverse de  $\mathcal{Y}_r^{cl}$  est non causale. Pour remédier à cela, nous commençons dans un premier temps par reboucler  $\mathcal{Y}_r^{cl}$  sur elle-même par une rétroaction négative unitaire, et considérons la fonction de sensibilité associée :  $S_Y = (I + \mathcal{Y}_r^{cl})^{-1}$ . Avec  $\mathcal{Y}_r^{cl}$  passive, on est assuré que  $S_Y$  est stable. Minimiser  $\|S_Y\|_\infty$  fait mécaniquement maximiser  $\mathcal{Y}_r^{cl}$ . Supposons que l’on souhaite faire remonter le gain de  $\mathcal{Y}_r^{cl}$  au dessus d’une admittance de référence  $\mathcal{Y}_{ref}$ , cet objectif se traduit sur  $S_Y$  dans les termes suivants :

$$\begin{aligned} & \underset{\{K_{comp}; K_{damp}\}}{\text{solve}} \quad \left\| S_Y(s) W_y(s) \right\|_\infty \leq 1; \quad W_y = I + \mathcal{Y}_{ref} \\ & \text{subject to} \quad \mathcal{Y}_r^{cl} \text{ passive} \end{aligned} \quad (3.45)$$

En considérant  $\mathcal{Y}_{ref} = \frac{1}{J_a s}$ , avec  $J_a = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \mathcal{Y}_r^{ol}(j\omega) j\omega$ , la résolution du problème 3.45 par optimisation non lisse, fournit, pour  $D_2$  les

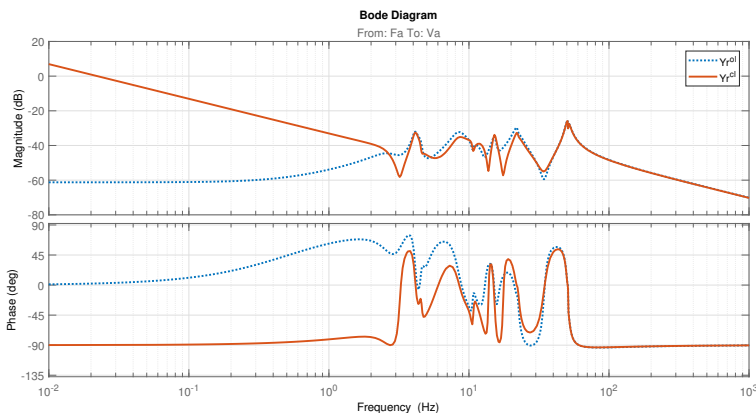


FIGURE 3.17 – Illustration des performances de commande en transparence par l’approche IV

performances illustrées en figure 3.17.

Nous observons que les performances obtenues sont sensiblement comparables à celles de l’approche III. L’admittance contrôlée se comporte comme une inertie pure en basse fréquence et le taux de compensation de l’inertie est contenu dans la limite de ce que permet la contrainte de passivité.

### 3.2.2.4 Discussion

Sur quatre approches de la commande en transparence, les approches III et VI fournissent des résultats prometteurs sur un cas d’usage linéaire SISO multimodal. En 3.2.5, nous vérifierons si ces approches peuvent être étendues aux cas MIMO et LPV. En effet, compte tenu du caractère non-linéaire et multi-variable des modèles robotiques, il est indispensable que les approches de synthèse proposées puissent être généralisées à ces cas de figure.

Nous vérifierons également la pertinence de l’utilisation du bloc  $K_{damp}$  dans les cas MIMO et LPV.

### 3.2.3 Commande en amplification d'effort

#### 3.2.3.1 Analyse sémantique de la commande en amplification d'effort

Par l'amplification d'effort, nous souhaitons que le cobot exerce sur l'outil un multiple de l'effort exercé par l'opérateur. En notant  $\alpha$  un gain d'amplification d'effort supérieur à un, le cobot réalise la fonction d'amplification d'effort si pour effort opérateur  $F_h$  et un effort outil  $F_e$ , l'équation suivante est respectée en régime permanent :

$$F_e = \alpha F_h \quad (3.46)$$

En supposant que l'outil et le poignet opérateur sont co-localisés, différencier l'admittance du robot vue du côté l'opérateur  $\mathcal{Y}_{r_h}(s) = \frac{\dot{X}_r}{F_h}$  de celle vue du côté de l'outil  $\mathcal{Y}_{r_e} = \frac{\dot{X}_r}{F_e}$ , nécessite, dans l'absolu, de disposer de deux capteurs d'efforts l'un mesurant  $F_e$  l'autre  $F_h$ . Dans ce cas, l'équation 3.46 peut s'écrire :

$$\mathcal{Y}_{r_h}(j\omega) = \alpha \mathcal{Y}_{r_e}(j\omega); \omega \leq \omega_c \quad (3.47)$$

où  $\omega_c$  est une fréquence de coupure donnée. En effet, la loi de commande n'a que peu d'effet sur le système en haute fréquence, ce qui donne alors :

$$\mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(j\omega) \approx \mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(j\omega) \approx \mathcal{Y}_{r_h}^{ol}(j\omega) \approx \mathcal{Y}_{r_e}^{ol}(j\omega); \omega \gg \omega_c \quad (3.48)$$

#### 3.2.3.2 Réflexions sur la structure du contrôleur

##### 3.2.3.2.1 Avec deux capteurs d'effort

D'une manière générale, la structure de commande pour l'amplification d'effort ne diffère pas fondamentalement de celle de la commande en transparence. Classiquement, on utilise la lois de commande suivante pour implémenter une amplification d'effort :

$$\Gamma_m = K_{comp} (\Gamma_{ref} + J^T (F_h + \alpha^{-1} F_e)) \quad (3.49)$$

#### Proposition 3

Pour plus de degrés de libertés au niveau du réglage, nous proposons d'ajouter un compensateur interne  $K_{damp}$  comme pour la commande



en transparence, ainsi qu'un filtre d'anticipation  $F_{comp}$  sur  $F_e$ . La loi de commande prend alors la forme suivante :

$$\Gamma_m = K_{comp} (\Gamma_{ref} + J^T (F_h + \alpha^{-1} F_e)) + F_{comp} J^T \alpha^{-1} F_e + K_{damp} x \quad (3.50)$$

La figure 3.18 illustre l'architecture de commande proposée.

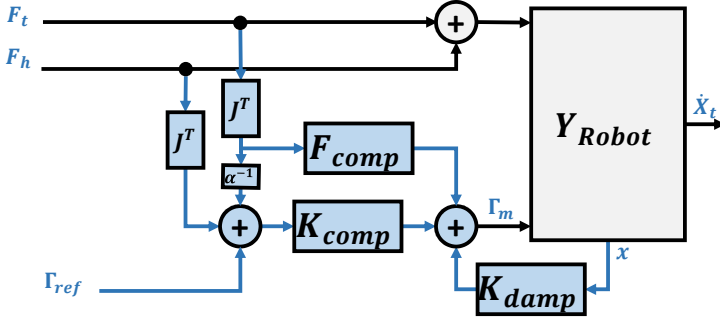


FIGURE 3.18 – Proposition d'architecture de commande pour l'amplification d'effort

### 3.2.3.2.2 Avec un seul capteur d'effort

Si, d'une manière générale, il est utile de disposer de deux capteurs pour distinguer l'effort opérateur de l'effort outil, lorsque une réversibilité suffisante le permet, il est possible de se satisfaire d'un seul capteur d'effort sur le poignet opérateur tout en estimant l'effort outil grâce à la réversibilité mécanique.

#### Proposition 4

D'après l'équation 2.18, à l'équilibre, nous avons  $\Gamma_m + J^T (F_h + F_e) = 0$ . Afin de mettre en place une loi de commande d'amplification d'effort avec un seul capteur d'effort, nous devons substituer la mesure de l'effort  $F_e$  par une estimation de celui-ci. Nous proposons, alors, de remplacer le terme  $\Gamma_e = J^T F_e$  de l'équation 3.50 par  $\hat{\Gamma}_e = -H \Gamma_m - J^T F_h$ , où  $H$  est un filtre passe bas dont la fréquence de coupure constitue un degré de liberté de réglage de la loi de commande. Une illustration de la loi de commande proposée est donnée en figure 3.19.

### 3.2.3.3 Réglage des paramètres de la commande par synthèse $H_\infty$ structuré et conditions de secteurs

Afin de garantir une amplification d'effort jusqu'à  $\omega_c$ , nous souhaitons que le système respecte l'équation 3.47. On notera que cette

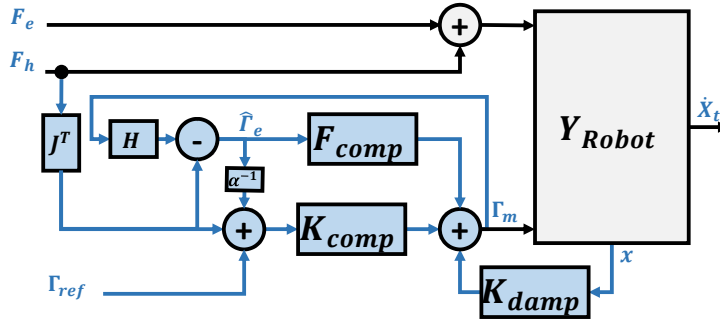


FIGURE 3.19 – Proposition d’architecture de commande pour l’amplification d’effort à un seul capteur

exigence partage des similitudes avec les exigences classiques sur les fonctions de sensibilité tel qu’illustré en figure 3.5 : gain faible en basse fréquence, gain unitaire en haute fréquence et fréquence de coupure  $\omega_c$ . Ainsi, nous reprenons l’expression de la fonction de pondération de la fonction de sensibilité de l’équation 3.3, et proposons de résoudre le problème suivant pour optimiser les paramètres d’une loi de commande d’amplification d’effort :

$$\begin{aligned} & \text{solve} \quad \left\{ \begin{array}{l} \|W_y(s) S_Y(s)\|_\infty \leq 1 \\ \left\| W_{amp}(s) \left( \mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s) - \alpha \mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s) \right) \right\|_\infty \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.51) \\ & \text{subject to} \quad [\mathcal{Y}_{r_h}^{cl} \quad \mathcal{Y}_{r_e}^{cl}] \text{ SIC} \end{aligned}$$

avec  $S_Y = (I + \mathcal{Y}_{r_h}^{cl})^{-1}$ ,  $W_y = I + \mathcal{Y}_{ref}$  et  $W_s(s)^{-1} = \frac{(1+\zeta)s + \omega_c \epsilon}{s + \omega_c}$ .

En prenant  $\mathcal{Y}_{ref} = \frac{1}{J_a s}$ , avec  $J_a = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \mathcal{Y}_{r_h}^{ol}(j\omega) j\omega$ , la résolution du problème 3.51 par optimisation non lisse en annulant le bloc  $K_{damp}$  fournit pour  $D_2$  les performances illustrées en figure 3.20.

Nous pouvons observer que la fonction d’erreur respecte en grande partie le gabarit fixé. Les deux admittances ont un comportement inertiel en basse fréquence et l’objectif  $\mathcal{Y}_{r_h} = \alpha \mathcal{Y}_{r_e}$  est respecté en basse fréquence. Par ailleurs, on peut voir en figure 3.21 que les trois conditions de SIC de l’équation 3.32 sont parfaitement respectées. Par cet exemple, nous validons la pertinence de l’approche de synthèse de commande en transparence et en amplification d’effort proposée pour des systèmes ayant des dynamiques complexes. Néanmoins, seul le cas LTI SISO a été abordé jusqu’à présent. Le cas LPV MIMO sera étudié dans le chapitre 3.2.5.

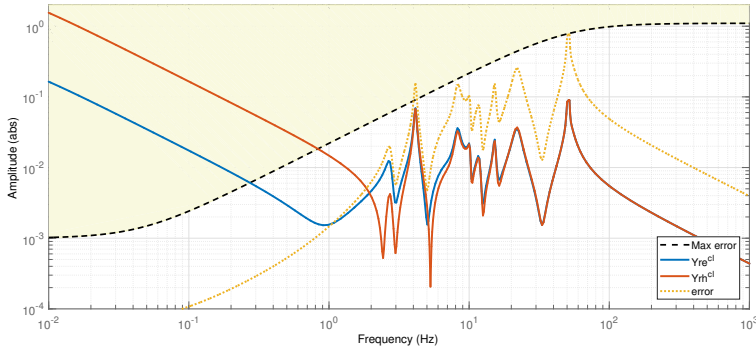


FIGURE 3.20 – Illustration des performances d'amplification d'effort

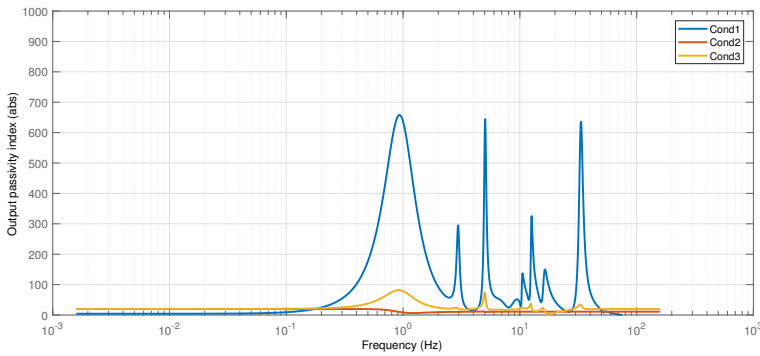


FIGURE 3.21 – Illustration du respect de la stabilité inconditionnelle en mode couplé

### 3.2.4 Commande en impédance à raideur pilotable

#### 3.2.4.1 Réflexions sur la structure du contrôleur

Le contrôleur de type PI en vitesse ou PD en position a depuis longtemps été utilisé comme structure de prédilection pour contrôler la raideur apparente d'un cobot. En effet, il existe une correspondance terme à terme entre les équations d'un contrôleur PI en vitesse (ou PD en position) et les équations d'un système Masse-Ressort-Amortisseur. La modification en ligne de la valeur du terme intégral module la raideur apparente  $k_w$  du cobot. Toutefois, en présence de flexibilités internes, la raideur atteignable par la commande ne peut excéder la raideur intrinsèque de l'élément flexible, que la rétroaction soit basée sur une mesure aval ou amont à cette flexibilité [28]. Afin de repousser les limites de la raideur atteignable, nous proposons, tout en gardant un PD en position, d'ajouter une rétroaction supplémentaire dont la fonction est de compenser la flexibilité interne. Dans le cas du vérin à câble, nous proposons la structure de commande illustrée dans le schéma-bloc de la figure 3.22, où  $K_k(s, k_w)$

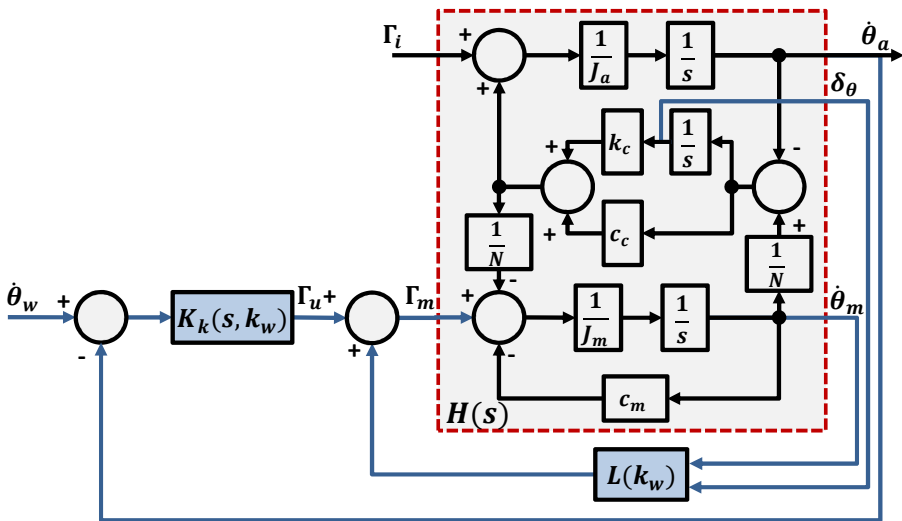


FIGURE 3.22 – Structure de commande pilotant la raideur d'un actionneur à transmission flexible

est un contrôleur PI dépendant linéairement de  $k_w$  et  $L(k_w)$  est une gain statique dépendant affinement de  $k_w$ .

### 3.2.4.2 Réglage des paramètres de la commande par synthèse $H_\infty$ structuré et conditions de secteurs

Nous avons observé précédemment que le comportement haute fréquence du système est égal à  $\frac{1}{J_a s}$  et que celui-ci n'est pas modifiable par la commande. Par conséquent, l'objectif de commande se résume à modéliser le comportement basse fréquence de l'admittance et à la faire coller à  $\frac{s}{k_w}$ , admittance d'un ressort de raideur  $k_w$ . Une manière de ramener  $|\mathcal{Y}_r(s, k_w)|$  au niveau de  $\frac{s}{k_w}$  consiste à résoudre l'inéquation :

$$\left\| \left( \frac{k_w}{s} + J_a s \right) \mathcal{Y}_r(s, k_w) \right\|_\infty \leq 1 \quad (3.52)$$

On note que l'amortissement n'est pas affecté par ce gabarit fréquentiel, c'est pourquoi nous proposons de lui ajouter des contraintes de placement de pôle pour assurer un amortissement critique  $\xi = 0.7$ . Par ailleurs, nous souhaitons que le système conserve ses propriétés de stabilité pour une séquence de commutation aléatoire du paramètre de séquençage  $k_w$ . Garantir la passivité de la fonction de transfert  $\frac{\hat{\theta}_a(s, k_w)}{\Gamma_m(s, k_w)}$  permet, du fait de la passivité de  $K_k(s, k_w)$ , de garantir cette stabilité [29]. Ainsi, le problème de synthèse peut être formulé comme suit :

$$\begin{array}{ll} \text{solve} & \left\| W_y(s, k_w) \mathcal{Y}_r(s, k_w) \right\|_\infty \leq 1; \quad W_y(s, k_w) = \frac{k_w}{s} + J_a s \\ \text{subject to} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Y}_r^{cl}(s, k_w) \quad \text{passive} \\ \frac{\hat{\theta}_a(s, k_w)}{\Gamma_m(s, k_w)} \quad \text{passive} \\ \frac{\Re(p)}{|p|} > \xi \end{array} \right. \end{array} \quad (3.53)$$

où  $p$  représente les pôles de  $\mathcal{Y}_r^{cl}(s, k_w)$ .

En posant  $k_w \in [0, 2 k_c]$ , la résolution du problème 3.55 simultanément pour différentes valeurs<sup>12</sup> de  $k_w$  en utilisant l'optimisation non lisse donne les résultats illustrés dans la figure 3.23. Nous observons que la résonance du système est masquée et qu'en basse fréquence le système a bien un comportement élastique dont la raideur varie bien linéairement en fonction de  $k_w$  pour atteindre une valeur extrême supérieure à  $k_c$ .

---

12. Dans notre cas, nous avons observé que deux valeurs suffisent.

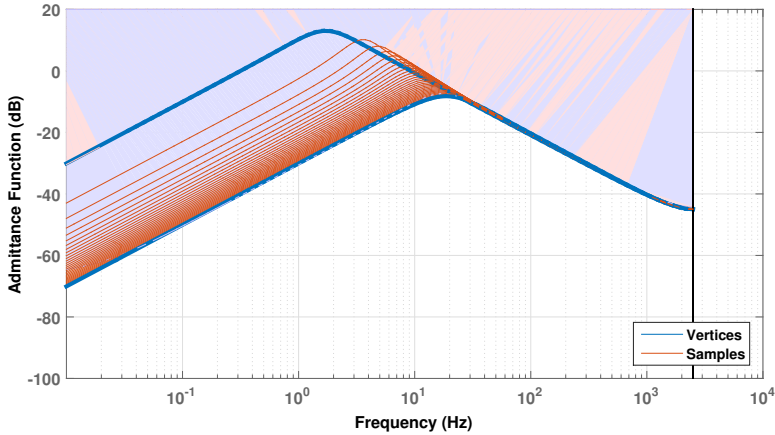


FIGURE 3.23 – Illustration du contrôle de la raideur apparente du vérin à câble

### 3.2.5 Extension au cas MIMO-LPV

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités à l'étude de cas LTI SISO. Or pour pouvoir prétendre à un usage nominal dans les applications robotiques, il est nécessaire de valider la démarche de synthèse sur un cas d'étude LPV et MIMO. Pour cela, nous considérons le cas d'usage du cobot LDC présenté en 2.4.3, et dont on a établi le modèle  $D_3$ .

#### 3.2.5.1 Définition des objectifs de commande

Le modèle  $D_3$  représente un cobot SCARA de palettisation. Supposons que les objets que nous souhaitons palettiser sont des plaques de verre verticales de 130 kg et dont les dimensions sont données en tableau 3.2. Nous souhaitons implémenter une loi de commande en

TABLEAU 3.2 – Dimensions de la planche de verre

Paramètre	Valeur
Longueur	3 m
Hauteur	1.5 m
Epaisseur	12 mm

transparence permettant à l'opérateur de comanipuler, dans l'espace

libre, les plaques dans le plan horizontal avec un minimum de résistance. Au contact, nous souhaitons que l'effort opérateur soit amplifié d'un facteur 10.

### 3.2.5.2 Description de la loi de commande proposée

$D_3$  est un modèle LPV affine en fonction de  $p$  d'ordre 17, où :

$$p = [\sin(q_2) \quad \cos(q_2) \quad \sin(q_2)^2 \quad \cos(q_2)^2 \quad \sin(q_2) \cos(q_2)] \quad (3.54)$$

Toutefois, avant d'envisager une loi de commande dont les gains sont séquencés en fonction de  $p$ , nous souhaitons évaluer les performances d'un correcteur LTI. La loi de commande que nous proposons est celle présentée en figure 3.18 avec :

$$\bullet \quad K_{comp} = \begin{bmatrix} K_{p_1} + K_{i_1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{p_2} + K_{i_2} & 0 \\ 0 & 0 & K_{p_3} + K_{i_3} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad F_{comp} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad K_{damp} = B^T \begin{bmatrix} K_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & K_{d_{17}} \end{bmatrix} Q(p)$$

$Q(p)$  étant une matrice de Lyapunov dépendant affinement du vecteur de paramètres  $p$

### 3.2.5.3 Résolution par synthèse $H_\infty$ et conditions de secteurs

Nous pouvons observer que le nombre total de paramètres à optimiser est 26. Par ailleurs, le système contrôlé est d'ordre 20. Si l'on considère 4 réalisations du système en fonction de  $q_2$ , la complexité algorithmique du problème d'optimisation monte à  $\mathcal{O}(663\,976)$ . Étant donné le caractère non convexe du problème d'optimisation et le nombre élevé de paramètres à optimiser, il est indispensable d'avoir une bonne initialisation des paramètres pour converger vers une solution acceptable. Nous proposons donc de procéder en deux étapes : l'optimisation des paramètres de  $K_{damp}$  dans un premier temps, suivie de celle de  $K_{comp}$  et  $F_{comp}$ .

### 3.2.5.3.1 Définition des conditions de stabilité du cobot

Avant de nous atteler au réglage des paramètres de commande, nous définissons les contraintes que doit satisfaire le cobot pour être stable en toute circonstance.

Dans le présent cas d'étude, nous disposons d'informations permettant de borner l'impédance de l'environnement du cobot dans une certaine plage de variations. Connaissant la masse volumique du verre  $\rho = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$  et le module de Young  $E = 69 \text{ GPa}$ , les dimensions de la plaque de verre et supposant que l'orientation  $\theta_{beam}$  de la plaque dans le plan peut prendre toutes les valeurs entre  $-\pi$  et  $\pi$ , nous construisons par la méthode des éléments finis l'impédance de la plaque vue du cobot telle qu'illustré en figure 3.25. Pour différents tirages aléatoires de  $\theta_{beam}$ , nous construisons l'indice de passivité en entrée  $v_{beam}(\omega)$  et évaluons l'indice pire cas (figure 3.24) pour construire une matrice de secteur  $Q_{beam}(\omega)$  telle que présentée en 3.38.

Ainsi, nous pouvons définir les conditions suivantes pour la stabilité

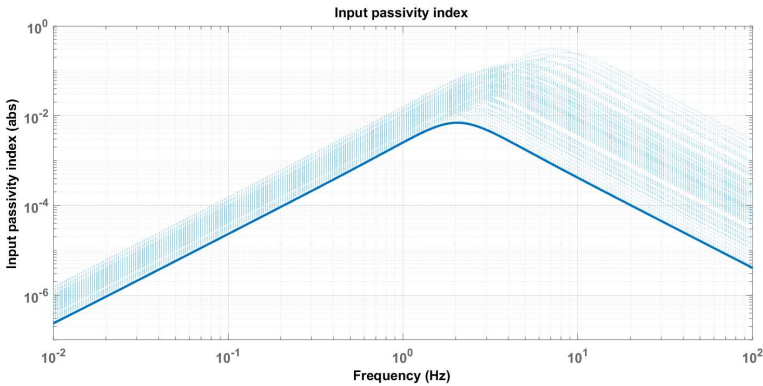


FIGURE 3.24 – Indice de passivité en entrée de l'impédance de la plaque de verre dans le plan horizontal. Le trait en gras représente l'indice pire cas.

du cobot :

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p) & \text{passive} \\ \mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s, p) & \text{IFOFP}(0, -v_{beam}(\omega)) \end{cases} \quad (3.55)$$



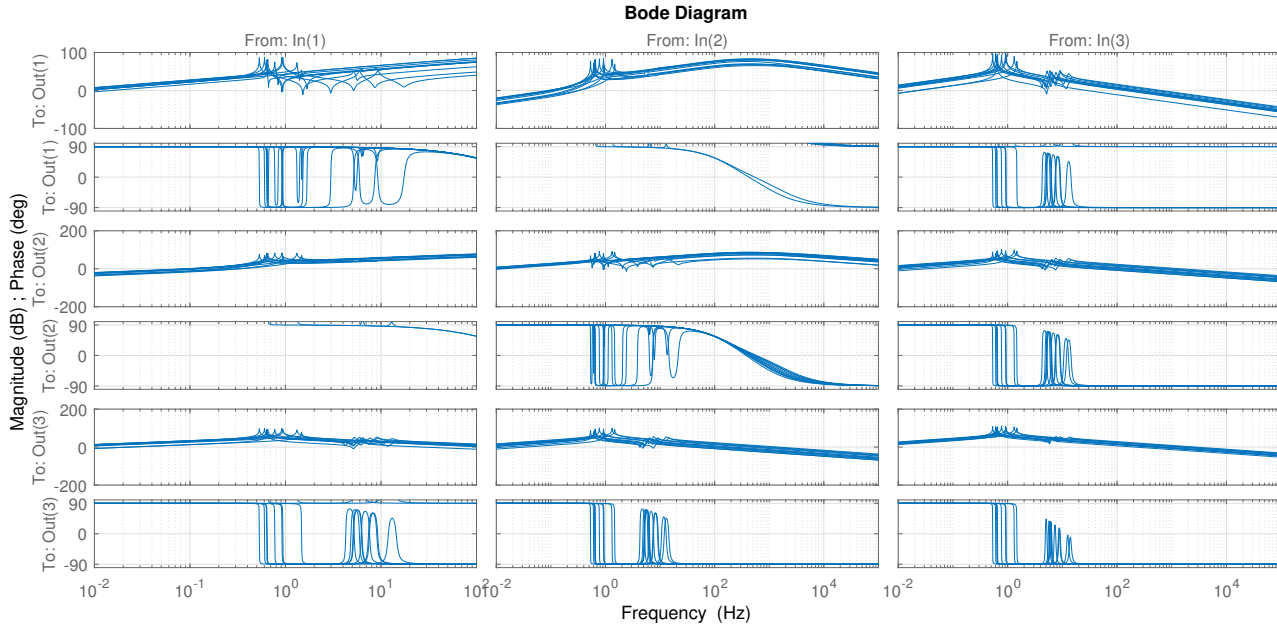


FIGURE 3.25 – Diagrammes de Bode de l'impédance de la plaque de verre dans le plan horizontal

### 3.2.5.3.2 Optimisation des paramètres de $K_{damp}$

Nous rappelons que, d'après l'équation 3.40,  $K_{damp}$  est structuré de sorte à injecter de l'amortissement dans le système tout en ayant un nombre limité de paramètres de réglage : 17 au lieu de 51 pour un retour d'état complet – Le système est d'ordre 17 avec 3 entrées de commande. Ainsi, l'objectif de synthèse pour  $K_{damp}$  peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} & \underset{\{K_{damp}\}}{\text{minimize}} && \frac{|p|}{\Re(p)} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} \mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p) & \text{passive} \\ \mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s, p) & \text{IFOFP}(0, -v_{beam}(\omega)) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Afin de résoudre ce problème, et compte tenu de la complexité algorithmique associée, nous procédons à 20 tirages aléatoires des paramètres initiaux à régler par optimisation non lisse. Les 20 tirages ont nécessité entre 168 et 260 itérations chacun, les contraintes de passivité ont été strictement respectées pour chaque tirage, et le  $\bar{\sigma}$  final varie entre 6.74 et 6.92 selon le tirage. D'après la figure 3.26, nous pouvons observer qu'après synthèse, le système commandé est nettement plus amorti que le système initial, ce qui, selon notre proposition initiale formulée dans l'équation 3.40, contribuerait à améliorer la transparence finale avec un contrôleur PI.

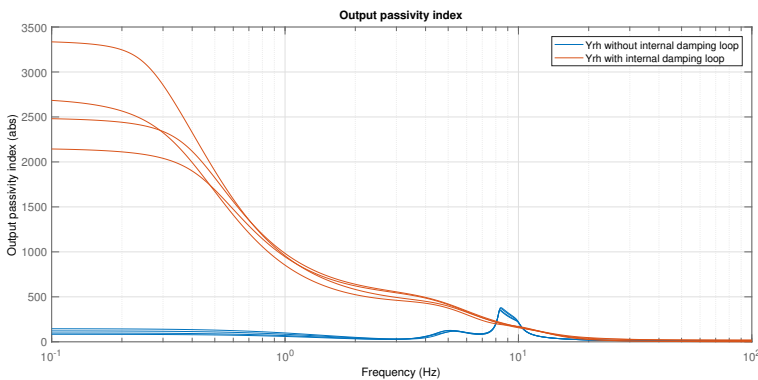


FIGURE 3.26 –  $\rho$  de  $\mathcal{Y}_{r_h}(s, p)$  avec et sans  $K_{damp}$

### 3.2.5.3.3 Optimisation des paramètres de $K_{comp}$ et $F_{comp}$

Après un premier réglage de  $K_{damp}$ , deux options s'offrent à nous pour

la suite du réglage : figer les paramètres de  $K_{damp}$  ou autoriser leur optimisation simultanément à  $K_{comp}$  et  $F_{comp}$ . Bien que l'autorisation de l'optimisation des paramètres de  $K_{damp}$  permette en théorie un résultat optimal, elle s'accompagne d'une complexité croissante du problème d'optimisation. Ainsi, nous faisons le choix de figer les paramètres obtenus dans la première phase et prenons le risque d'obtenir un résultat sous-optimal. Nous autoriserons leur optimisation si le résultat final s'avère insatisfaisant. Le nombre de paramètres à optimiser est donc de 9.

Pour régler les paramètres de commande en vue d'une amplification d'effort, nous reprenons la formulation 3.51 et construisons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{solve}_{\{K_{comp}, F_{comp}\}} & \begin{cases} \|W_y(s) S_Y(s)\|_\infty & \leq 1 \\ \|W_{amp}(s) (\mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s) - \alpha \mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s))\|_\infty & \leq 1 \end{cases} \\
 \text{subject to} & \begin{cases} \mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p) & \text{passive} \\ \mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s, p) & \text{IFOFP}(0, -v_{beam}) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

avec  $S_Y = (I + \mathcal{Y}_{r_h}^{cl})^{-1}$ ,  $W_y = I + (J_a s)^{-1}$ ,  $J_a = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \mathcal{Y}_{r_h}^{ol}(j \omega)$   $j \omega$  et  $W_{amp}(s)^{-1} = \frac{(1+\zeta)s + \omega_c \epsilon}{s + \omega_c}$ .

Comme précédemment, nous procédons à 20 tirages aléatoires des paramètres initiaux à régler par optimisation non lisse. Sur les 20 tirages, 6 aboutissent à un résultat ne respectant pas les contraintes de stabilité. Sur les 14 restants, chaque tirage a nécessité entre 204 et 460 itérations et la norme  $\bar{\sigma}$  finale varie entre 180 et 366 selon le tirage. Le problème d'optimisation est donc plus difficile que celui du réglage de  $K_{damp}$  même si le nombre de paramètres à régler est plus faible. Au final, nous obtenons les admittances illustrés en figure 3.27.

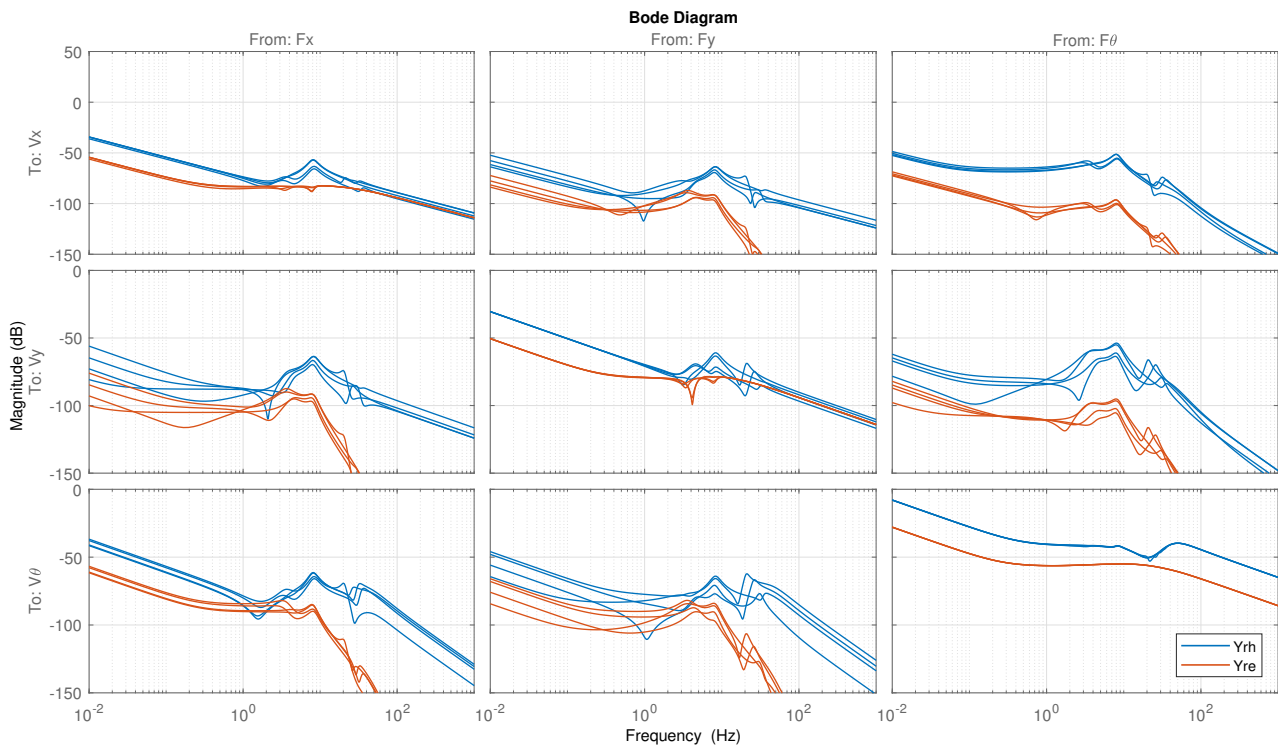


FIGURE 3.27 – Diagramme de Bode de  $\mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p)$  et  $\mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s, p)$

Nous observons que l'admittance du cobot vue de l'opérateur  $\mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p)$  affiche un comportement inertiel en basse fréquence, et que  $\mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s, p)$  respecte le facteur d'amplification d'effort sur la même bande de fréquence. En figure 3.28, nous traçons l'indice de passivité en sortie  $\rho$  de  $\mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p)$ . On note que  $\rho$  est positif sur une large bande de fréquence,

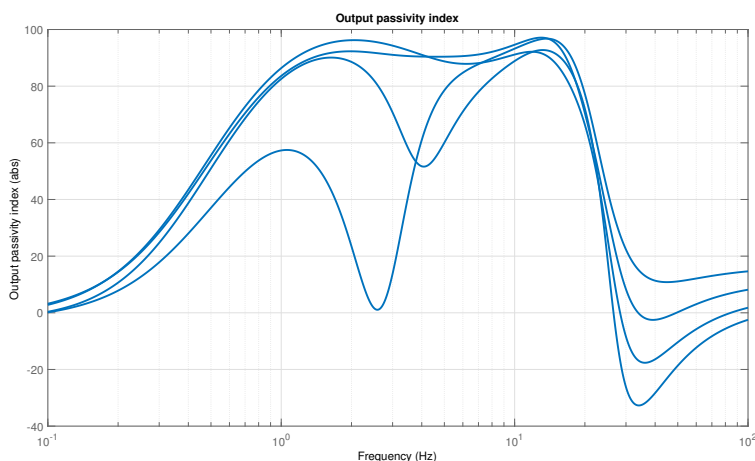


FIGURE 3.28 – indice de passivité en sortie de  $\mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p)$

et que pour trois valeurs de  $\theta_2$ , il y a une perte de passivité entre 30 et 80 Hz.

En vue de valider la pertinence de l'introduction du bloc  $K_{damp}$ , nous résolvons à nouveau le problème 3.57, mais en supprimant le bloc  $K_{damp}$ . Nous pouvons observer en figure 3.29, qu'avec le seul correcteur PI, nous ne parvenons pas à réaliser une commande qui octroie au système un comportement inertiel en basse fréquence tout en respectant les contraintes de stabilité. Contrairement à  $D_2$  pour lequel une solution simple à base d'un contrôleur PI existe, l'usage du bloc  $K_{damp}$  semble pertinent pour les systèmes MIMO fortement couplés.

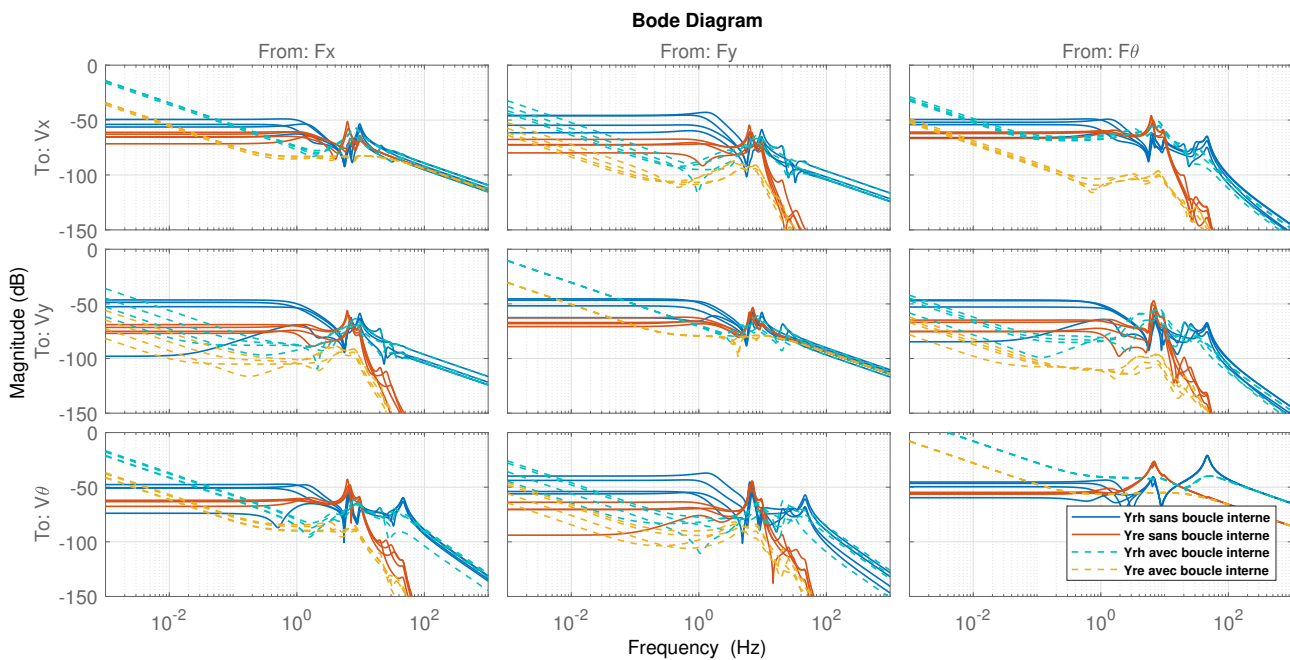


FIGURE 3.29 – Diagramme de Bode de  $\mathcal{Y}_{rh}^{cl}(s, p)$  et  $\mathcal{Y}_{re}^{cl}(s, p)$  avec et sans boucle d’amortissement interne

### 3.2.6 Pour aller plus loin : démarche de co-design

Le co-design est une démarche de conception consistant à chercher simultanément les paramètres optimaux du système physique et du système de contrôle. L'usage de l'optimisation non-lisse dans ce contexte a été abordé par Gonzalez en [13] dans le cadre des systèmes aérospaciaux. En [30], Grossard aborde le problème de co-design en robotique à travers la méthode des Grammiens.

En cobotique, Lamy a établi en [19] que l'ajout d'un matériau mou, tel qu'une mousse, entre l'opérateur et le cobot permet au cobot d'atteindre des niveaux de transparence plus importants, sans perdre la propriété de passivité. Le choix du matériau conditionne les performances pouvant être atteintes par la commande. Nous souhaitons faire appel aux formulations précédemment établies pour optimiser simultanément les paramètres de commande et de choix du matériau. Nous gardons le contrôleur présenté en 3.2.5.2 inchangé, et ajoutons un matériau mou caractérisé par son impédance

$$\mathcal{Z}_h = \begin{bmatrix} b_h + \frac{k_h}{s} & 0 & 0 \\ 0 & b_h + \frac{k_h}{s} & 0 \\ 0 & 0 & b_h + \frac{k_h}{s} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Du côté de l'environnement, le cobot continue d'être modélisé par son admittance  $\mathcal{Y}_{r_e}^{cl}$ , tandis que du côté opérateur, il est à présent modélisé par son impédance

$$\mathcal{Z}_{r_h}^{cl} = \mathcal{Z}_h \left( \mathbf{I}_3 + \mathcal{Z}_h \mathcal{Y}_{r_h}^{cl} \right)^{-1} \quad (3.59)$$

Le problème de synthèse de commande pour l'amplification d'effort 3.57 est alors modifié comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{solve} \\ \{K_{comp}, F_{comp}\} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left\| W_y(s) S_Y(s) \right\|_{\infty} \leq 1 \\ \left\| W_{amp}(s) \left( \mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s) - \alpha \mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s) \right) \right\|_{\infty} \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.60)$$

$$\text{subject to} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Z}_{r_h}^{cl}(s, p) \quad \text{passive} \\ \mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s, p) \quad \text{IFOFP}(0, -v_{beam}) \end{array} \right.$$

Tout comme précédemment, nous procédons à 20 tirages aléatoires des conditions initiales. Sur les 20 tirages, seuls trois donnent un résultat respectant les contraintes de stabilité. La norme  $\bar{\sigma}$  atteinte varie

entre 1.01 et 1.47. On observe donc un gain substantiel dans la norme  $H_\infty$  grâce à l'introduction du matériau mou : l'inertie objectif  $J_a$  est quasiment atteinte. Toutefois, il convient de rappeler que sur les 20 tirages aléatoires, seuls trois ont donné une solution possible, ce qui indique une difficulté accrue du problème d'optimisation et une forte sensibilité aux conditions initiales. Sur la figure 3.30, nous pouvons observer que l'inertie apparente en basse fréquence vue de l'opérateur a été minimisée jusqu'à atteindre  $J_a$ , et que le gains d'amplification d'effort est toujours respecté.

En figure 3.31, nous observons que l'indice  $\nu(\omega)$  reste strictement supérieur à 0.



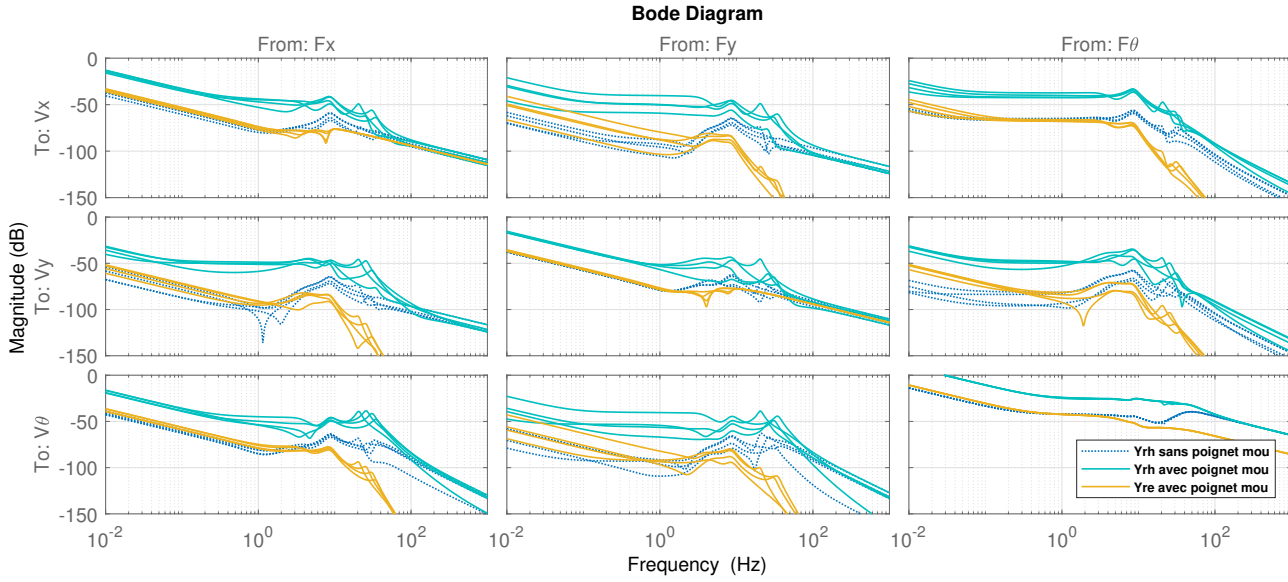


FIGURE 3.30 – Diagramme de Bode de  $\mathcal{Y}_{r_h}^{cl}(s, p)$  et  $\mathcal{Y}_{r_e}^{cl}(s, p)$  avec et sans poignet mou

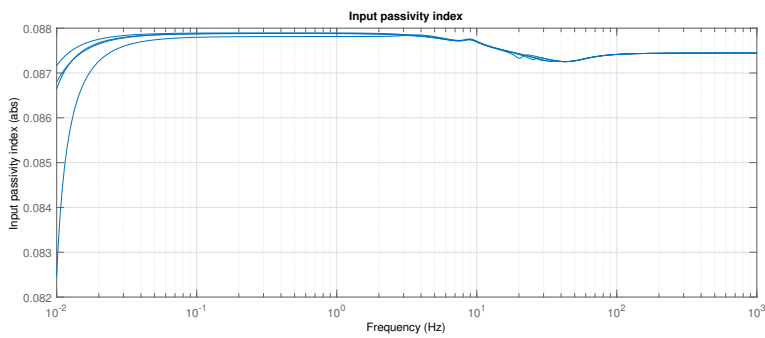


FIGURE 3.31 – Indice de passivité en entrée de  $Z_{r_h}^{cl}$

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi des conditions  $H_\infty$  et des conditions de secteurs pour différents problèmes de commande en cobotique. Ces formulations sont validées tour à tour sur des modèles SISO LTI puis MIMO LPV. Avec la montée en complexité du problème, nous observons que l'algorithme d'optimisation non-lisse éprouve de plus en plus de difficulté à trouver une solution respectant l'ensemble des exigences de commande, notamment celles liées à la passivité. À la fin du chapitre, nous avons abordé la questions du co-design, et avons montré que l'optimisation non lisse pouvait répondre à ce type de problèmes dans le domaine de la cobotique. Nous avons observé par ailleurs, que le problème de co-design est largement plus sensible à l'initialisation de l'algorithme d'optimisation que le seul problème de synthèse de commande.

## Bibliographie

- [1] I.M. Horowitz. *Synthesis of Feedback Systems*, , New York, 1963. Academic Press, 1963. 63
- [2] H. Nyquist. Regeneration theory. *The Bell System Technical Journal*, 1932. 63
- [3] A. A. Stoorvogel. Robust stabilization of systems with multiplicative perturbations. *Proceedings of CDC*, pages 365–370, 1991. 68
- [4] Gilles Duc and Stéphane Font. *Commande H infini et mu-analyse*. Hermes, 2000. 69
- [5] Y. Nesterov and A. Nemirovsky. Interior point polynomial methods in convex programming. *SIAM*, 1994. 69
- [6] K. Glover. All optimal hankel norm approximation of linear multivariable systems, and their  $L_\infty$  error bounds. *International Journal of Control*, pages 1145–1193, 1984. 69
- [7] M. G. Safonov and R. Y. Chiang. A schur method for balanced model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 729–733, 1989. 69
- [8] V.D. Blondel and J.N. Tsitsiklis. Np-hardness of some linear control design problems. *SIAM J. of Control and Opt.*, pages 2118–2127, 1997. 70
- [9] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1) :71–86, 2006. 70, 88
- [10] J. V. Burke, D. Henrion, A. S. Lewis, and M. L. Overton. HIFOO - a MATLAB package for fixed-order controller design and  $H_\infty$  optimization. In *IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2006. 70
- [11] K. F. Man, K. S. Tang, and S. Kwong. *Genetic Algorithms in H-infinity Control*. 1999. 70
- [12] Daniel Vizer, Guillaume Mercere, and Edouard Laroche. Gray-box lpv model identification of a 2-dof surgical robotic manipulator by using an  $h_\infty$ -norm-based local approach. 2015. 70

- [13] Jose Alvaro PEREZ GONZALEZ. *Commande Robuste Structurée : Application Co-Design Mécanique / Contrôle d'Attitude d'un Satellite Flexible*. PhD thesis, 2016. [70](#), [108](#)
- [14] M. G. Safonov. *Stability and robustness of multivariable feedback systems*. MIT press, 1980. [71](#)
- [15] Meng Xia, Pascal Gahinet, Neil Abroug, and Craig Buhr. Sector bounds in control design & analysis. *IEEE Conference on Decision and Control*, 2017. [72](#), [77](#)
- [16] N. Hogan and S. P. Buerger. *Impedance and interaction control*. CRC Press, 1992. [73](#), [74](#)
- [17] M. W. Spong. Modeling and control of elastic joint robots. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 109 :310–319, 1987. [73](#)
- [18] J.E. Colgate. Robust impedance shaping telemanipulation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9 :374–384, 1993. [73](#)
- [19] X. Lamy. *Conception d'une Interface de Pilotage d'un Cobot*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2011. [74](#), [78](#), [79](#), [81](#), [85](#), [86](#), [108](#)
- [20] J. E. Colgate. *The Control of Dynamically Interacting Systems*. PhD thesis, 1988. [75](#), [85](#)
- [21] Arthur Cayley. Sur quelques propriétés des déterminants gauches. *The Collected Mathematical Papers*, 1 :332–336, 2009 (Originally Published in 1889). [76](#)
- [22] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(4) :421–448, 1994. [76](#)
- [23] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8) :831–847, 1989. [76](#)
- [24] P. Apkarian, P. Gahinet, and C. Buhr. Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers. In *European Control Conference*, 2014. [76](#), [77](#)

- [25] C. A. Jacobson, A.M. Stankovic, and G. Tadmor. On the reduction of certain frequency-shaped linear quadratic dissipative design problems to an  $h_\infty$  formulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996. 76
- [26] Meng Xia, Panos J. Antsaklis, Vijay Gupta, and Feng Zhu. Passivity and dissipativity analysis of a system and its approximation. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, 2017. 78, 81, 82, 83
- [27] S.P. Buerger and N. Hogan. Complementary stability and loop shaping for improved human-robot interaction. *IEEE Transactions on Robotics*, 23 :232 – 244, 2007. 81
- [28] Andrea Calanca, Riccardo Muradore, and Paolo Fiorini. A review of algorithms for compliant control of stiff and fixed-compliance robots. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2015. 97
- [29] J. E. Colgate and N. Hogan. Robust control of dynamically interacting systems. *International Journal of Control*, 48, 1988. 98
- [30] Mathieu Grossard. *Contribution à la conception optimale et la commande de systèmes mécatroniques flexibles à actionnement piézoélectrique intégré : application en microrobotique*. PhD thesis, 2008. 108



# Chapitre 4

## Conclusion générale et perspectives

### Sommaire

---

<b>4.1 Conclusion</b> . . . . .	<b>118</b>
<b>4.2 Perspectives</b> . . . . .	<b>119</b>
4.2.1 Identification . . . . .	119
4.2.2 Co-design . . . . .	119

---



## 4.1 Conclusion

Dans la présente thèse, nous nous sommes intéressés à l'usage des avancées récentes en commande  $H_\infty$  structuré dans le cadre de la cobotique.

Pour ce faire, nous avons, en premier lieu, abordé la question de la modélisation et de l'identification pour la commande en cobotique. Nous avons montré que les méthodes d'identification dans le domaine fréquentiel sont pertinentes aussi bien pour les modèles boîte grise que les modèles boîte noire, lorsque le système considéré est simple-entrée simple-sortie invariant en fonction du temps. Les modèles obtenus dans ce cadre respectent l'exigence de passivité intrinsèque à tout système mécanique non commandé. Toutefois, pour le cas plus générique des systèmes multi-entrées multi-sorties variants en fonction du temps, les approches classiques d'identification fréquentielle n'ont pas permis de fournir des modèles pertinents. Ce point étant indispensable à l'adoption des méthodes de synthèse de commande basées modèles, nous proposons de conduire de nouveaux travaux de recherche spécifiques à l'identification de modèles MIMO LPV respectant la passivité.

Nous avons également formulé, en terme de contraintes  $H_\infty$  et conditions de secteurs, les exigences de commande classiquement rencontrées en cobotique : la stabilité au contact, la transparence, l'amplification d'effort et la commande en impédance à raideur variable. Nous avons illustré l'usage des ces formulations à travers trois modèles de cobots de complexités différentes. Nous avons observé que l'augmentation des degrés de libertés du robot s'accompagne d'une difficulté accrue de résolution du problème d'optimisation. Il est indispensable de tester d'avantage ces formulations sur d'autres modèles pour relever leurs points forts et limites, en vue d'obtenir un outil de synthèse de commande robuste.

Nous avons abordé également la question du co-design contrôle-mécatronique. Nous avons observé que le problème d'optimisation est très sensible aux conditions initiales. Des travaux plus poussés sont nécessaires pour comprendre plus finement les difficultés associées à ce problème.

## 4.2 Perspectives

### 4.2.1 Identification

Dans le présent travail, nous avons mis en exergue deux difficultés liées à l'obtention de modèles représentatifs des comportements dynamiques d'un cobot dans le cas MIMO et qui respectent les contraintes de passivité. Ces difficultés se sont opérées à deux niveaux : au niveau de l'obtention de FRF et au niveau de l'estimation de fonctions de transfert rationnelles à partir de ces FRE. Nous avons décidé, dans ce travail, de privilégier les approches fréquentielles. Dans un futur travail consacré à la modélisation, il convient de s'interroger sur la pertinence de cette voie. Les approches ARX peuvent-elles inclure des contraintes de passivité?

Si oui, la robustesse dont jouissent les approches ARX et ARMAX peut présenter un atout non négligeable pour l'identification en cobotique. Si en revanche, il est confirmé que les approches fréquentielles sont plus pertinentes, il convient d'investiguer plus en profondeur les raisons qui nous ont amenés à obtenir des FRF violant manifestement la passivité. Nous serons amenés également à développer des méthodes de curve-fitting pouvant inclure des contraintes de passivité. Nous avons observé également, que les approches boîte noire, bien que permettant de prendre en compte des dynamiques difficilement modélisables, occultent une partie importante de la connaissance accessible du modèle – non linéaire – du cobot (notamment son modèle cinématique). Il serait intéressant d'explorer les possibilités d'inclure ces informations dans l'identification, y compris dans le cadre des méthodes boîte noire.

### 4.2.2 Co-design

À la fin du chapitre 3, lorsque nous avons abordé le co-design, nous avons mis en évidence que l'ajout d'un filtre mécanique améliore sensiblement les niveaux de performance atteignables. Nous avons mis en exergue également, que le problème d'optimisation devenait beaucoup plus sensible aux initialisations. Des développements spécifiques au co-design seraient, à notre sens, utiles pour repousser davantage les limites des performances en cobotique. Une modélisation mécatronique plus fidèle à la réalité, et des paramètres de réglages plus représentatifs de la réalité (masse volumique, modules

d'Young, coefficient de poisson...) sont des points saillants à prendre en considération pour que ces développements aboutissent à une utilisation pratique. Par ailleurs, il convient de prendre en considération les proportions dans lesquelles les paramètres mécatroniques peuvent évoluer. En effet, si les paramètres de contrôle peuvent prendre n'importe quelle valeur, il n'en est pas de même pour les paramètres mécatroniques. Il n'est par exemple pas possible de disposer simultanément d'une masse volumique extrêmement faible et d'un module d'Young très élevé. Enfin, afin que ce type d'outil trouve une utilisation pratique dans les mains du concepteur, il est primordial de prendre en considération que certains paramètres mécatroniques ne peuvent prendre que des valeurs discrètes. L'optimisation discrète est un problème réputé  $\mathcal{NP}$ -complet. Les problèmes  $\mathcal{NP}$ -complet étant réductibles en un temps polynomial les uns aux autres, nous avons bon espoir de pouvoir combiner ce besoin d'optimisation entière avec la synthèse  $H_\infty$  structurée qui est, rappelons-le, également un problème  $\mathcal{NP}$ -complet.

# **Annexe A**

## **Annexe : Liste des communications scientifiques**

# Structured $H_\infty$ framework for impedance minimization on robot arm with compliant actuation

Neil Abroug<sup>1</sup> and Edouard Laroche<sup>2</sup>

**Abstract**—In most cases where robots have a physical interaction with humans, it is needed to minimize the feeling of the robot opposition to the human movement during the free movement phase. This is usually done by minimizing the robot interaction port apparent impedance. This task is particularly challenging in presence of a flexibility between the actuator and the considered interaction port. In this paper, we propose a new approach that minimizes the robot arm apparent impedance to the absolutely minimal achievable impedance ensuring passivity on the interaction port. Impedance minimization is formulated as a particular standard two-block  $H_\infty$  problem. Passivity constraint is considered using the positive real lemma applied to the admittance of the interaction port. The resulting problem is a structured  $H_\infty$  problem for which solvers based on non-smooth optimization have been recently developed. The proposed methodology was evaluated experimentally on a testbed and allowed to obtain very satisfying results.

## I. INTRODUCTION

Cobotics is a subdomain of robotics that consider robots physically interacting with humans. Cobots, as a subset of intelligent assistive devices, are generally designed to perform assistive functions such as software defined virtual guiding surfaces; force amplification [1]; accuracy improvement [2]; velocity and position limitations; haptic feedback and other force centered control strategies. In addition to these controlled and suitable features, the operator manipulating with a robot would feel some extra opposition to his movement corresponding to the robot's friction, damping and inertia. Two main control approaches are generally considered to minimize these disturbing forces: usual servo control of the human robot interaction force [3], [4] and robot impedance control [5], thus, minimizing the apparent robot arm impedance will also minimize its resistance to the operator movement. In this work, we consider the impedance control approach.

As a special case of impedance control, two main approaches are commonly considered for impedance minimization, according to whether the transmission mechanism is reversible or not [6]. In the irreversible case, impedance control loop needs a force or torque measurement [4], whereas in the reversible case it is possible to implement impedance control based on velocity and acceleration measurements or estimates only [7]. This work focusses on the reversible case. To the best of authors knowledge, all currently available

reversible mechanisms are compliant. Thus, compliant actuators are considered in the current paper.

Without strong knowledge about the robot environment, it is sensible to ensure passivity of the robot interaction port, which can be considered as conservative compared to the pure stability. To overcome this conservatism, Buerger et al. [8] introduced the “complementary stability” concept. This approach relaxes the constraints on the controller dynamics but needs a prior knowledge on all the possible interaction environments. In this work, we argue that passivity conservatism will be reduced by relaxing constraints on controller structure.

Minimizing the apparent inertia of an arm in the presence of joint compliance by a PID controller while ensuring passivity has been already studied and the lowest reachable impedance by control loop has been formally parametrized according mechanical parameters and PID controller gains [9]. More recently, Aguirre-Ollinger et al. in [7] proposed to design a controller ensuring negative apparent arm impedance in low frequencies to enhance even more the arm agility.

In the multivariable robust control framework, the controller is designed by solving the so-called standard problem consisting in minimizing the  $H_\infty$  norm of some performance channel [10]. When a full order and unstructured controller is considered, the  $H_\infty$  norm minimization problem is convex and solutions are available through Riccati or LMI equations [11], [12]. However, the issues considered in this paper rely on a structured  $H_\infty$  optimization issue. Based on non-smooth optimization, efficient methods have been recently developed to solve the non-convex structured problem [13]. They are available under Matlab with the Robust Control Toolbox [14] or with the HIFOO freeware [15].

The proposed contribution relies on available tools for the synthesis of structured controllers that minimize  $H_\infty$  performance criteria. In this novel framework, the structured  $H_\infty$  synthesis allows to design controllers that minimize the impedance while preserving the passivity. Passivity is ensured by a  $H_\infty$  characterization of positive-realness of some performances channels [16] which leads to a structured problem. In the proposed approach, the controllers can be multivariable and can support any structure such as PI or PID.

Within the proposed framework, it is easy to compare the performances obtained with different sensors and actuators. Therefore, the proposed framework is a nice tool for selecting the effective sensors and actuators in the design. It then contributes to the co-design, a tentative to get more effi-

<sup>1</sup>CEA, LIST; Interactive Robotics Laboratory; Clinatex Biomedical Research Center; 17 Rue des Martyrs, 38054 Grenoble, France  
neil.abroug@cea.fr

<sup>2</sup>Cube laboratory; University of Strasbourg & CNRS; 300 bd Sébastien Brant; F-67412 Illkirch laroche@unistra.fr

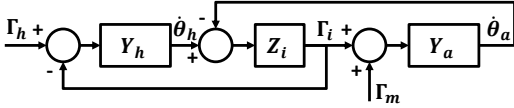


Fig. 1: human robot interaction diagram

cient solutions by optimizing simultaneously the electrical, mechanical and control aspects.

This paper is organized as follows. Section II addresses more formally the impedance minimization problem. In section III, this impedance minimization problem is formulated as a structured  $H_\infty$  synthesis problem. In Section IV, the methodology is implemented and the resulting controller is experimentally verified.

*Notations:* The Laplace variable being denoted  $s$ , the ratio between the force  $F(s)$  applied to an object and its velocity  $V(s)$  is the **impedance**  $Z(s)$  such that  $F(s) = Z(s)V(s)$ . The inverse of an impedance is the **admittance**  $Y(s)$ . Given two linear dynamic systems  $H(s)$  and  $K(s)$  of appropriate dimensions and consider a bloc partition  $H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}$ , the lower linear fractional transformation (LFT) presented in Fig. 2 writes  $F_l(H(s), K(s)) = H_{11} + H_{12}K(I - H_{22}K)^{-1}H_{21}$  where  $I$  is the identity matrix and the Laplace variable  $s$  has been omitted for compactness. Given a complex matrix  $M$ ,  $\bar{\sigma}(M)$  denotes its maximal singular value. For a multivariable dynamical system, denoted by its transfer function  $H(s)$ , its  $H_\infty$  norm is  $\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^+} \bar{\sigma}(H(j\omega))$ .

## II. ON THE IMPEDANCE MINIMIZATION PROBLEM

A general bloc diagram of a 1-DOF cobotic system in interaction with human arm is given in Fig. 1.  $\Gamma_i$  is the interaction torque between the human and the robot. Denoting  $\Gamma_m$  the motor torque, the robot arm of admittance  $Y_a(s)$  and speed  $\dot{\theta}_a$  receives the torque  $\Gamma_i + \Gamma_m$ . Denoting  $\dot{\theta}_h$  the human speed, its admittance  $Y_h(s)$  is fed by torque  $\Gamma_h + \Gamma_i$ . The interaction impedance is denoted  $Z_i$ .

The transfer function between the torque that the operator applies to his arm  $\Gamma_h$  and the torque that the robot arm opposes to the operator's movement  $\Gamma_i$  is:

$$\frac{\Gamma_i}{\Gamma_h} = \frac{Y_h(s)Z_i(s)}{(Y_a(s) + Y_h(s))Z_i(s) + 1} \quad (1)$$

From this equation, it can be seen that the higher the robot arm admittance  $Y_a$  is, the less it opposes the operator movement. The impedance minimization problem consists in selecting measurements sensors and designing a transfer function that allows to compute the motor torque  $\Gamma_m$  in order to minimize the apparent arm impedance. The corresponding control issue is illustrated in Fig. 2 written into standard form: the goal is to maximize the closed-loop admittance  $Y_a^{cl}(s)$  defined as the transfer between  $\Gamma_i$  and  $\ddot{\theta}_a$ . Notice that at this step, the set of minimal measurements needed by the controller remains to be decided.

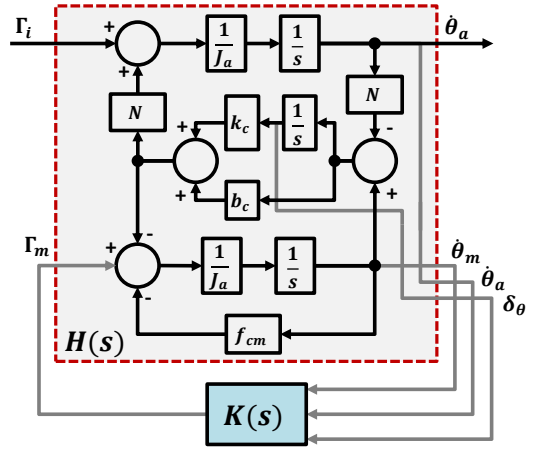


Fig. 2: control scheme in standard  $H_\infty$  form

## III. IMPEDANCE MINIMIZATION AS A STRUCTURED $H_\infty$ PROBLEM

### A. Flexible Joint Arm Model

As depicted in the introduction, the current work considers a robot arms exhibiting a joint compliance. Assuming that the motor (DC or Brushless) is torque controlled with a sufficiently high bandwidth, the equations describing the dynamical behaviors of the flexible joint arm can be written as follows :

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\theta}_m &= \Gamma_m - f_{cm} \dot{\theta}_m - b_c (\dot{\theta}_m - N \dot{\theta}_a) - k_c (\theta_m - N \theta_a) \\ &\quad - f_{sm} \text{sign}(\dot{\theta}_m) \\ J_a \ddot{\theta}_a &= \Gamma_i + N b_c (\dot{\theta}_m - N \dot{\theta}_a) + N k_c (\theta_m - N \theta_a) \\ &\quad + M_x \cos(\theta_m) + M_y \sin(\theta_m) \end{aligned} \quad (2)$$

where  $J_m$  is the motor side inertia,  $f_{cm}$  and  $f_{sm}$  respectively the viscous and Coulomb friction ratios (modeled on the motor side),  $N$  the transmission ratio,  $b_c$  and  $k_c$  respectively the damping and the stiffness of the transmission (modeled on the motor side), and  $J_a$  the joint side inertia.  $\theta_m$ ,  $\dot{\theta}_m$ ,  $\ddot{\theta}_m$  are the position, velocity and acceleration of the motor,  $\theta_a$ ,  $\dot{\theta}_a$ ,  $\ddot{\theta}_a$  the position, velocity and acceleration of the joint.  $M_x$  and  $M_y$  projects the weight of the arm in the joint space.  $\Gamma_m$  denotes the motor torque.

In order to derive a simplified model dedicated to controller synthesis, in the next section, the contributions of the nonlinear terms of Eq. 2 will be neglected. They will be reconsidered in section IV-A. Therefore, a minimal state-space realization of the system given in (2) is:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_m \\ \dot{\theta}_a \\ \delta_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b_c - f_{cm}}{J_m} & \frac{N b_c}{J_m} & \frac{k_c}{J_m} \\ \frac{N b_c}{J_a} & \frac{-N^2 b_c}{J_a} & \frac{N k_c}{J_a} \\ 1 & -N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m \\ \dot{\theta}_a \\ \delta_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_m \\ \Gamma_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

where  $\delta_\theta$  denotes the difference between the motor and joint position modeled on the motor side.

From Eq. 2, the open-loop robot arm admittance can be written as follows:

$$Y_a^{ol}(s) = \frac{J_m s^2 + b_c s + k_c}{J_m J_a s^3 + (J_m b_c N^2 + J_a b_c) s^2 + (J_m k_c N^2 + J_a k_c) s} \quad (4)$$

### B. $H_\infty$ Formulation of Impedance Minimization

Let us consider the standard  $H_\infty$  problem depicted in Fig. 2, with  $H(s)$  a multi-input multi-output model of the robot arm represented in block diagram form, and  $K(s)$  a controller with an arbitrary structure.  $K(s)$  considers the entire state vector of Eq. 3 containing  $\theta_m$ ,  $\dot{\theta}_a$ , and  $\delta_\theta$  measurements and acts on the motor torque  $\Gamma_m$ . The possibility to reduce the number of the needed measurement signals will be checked in section IV-B. In high frequencies, the controller has no more effect and the closed-loop arm admittance  $Y_a^{cl}(s) = F_l(H(s), K(s))$  between  $\Gamma_i$  and  $\dot{\theta}_a$  will be therefore equal to the open-loop admittance  $\frac{1}{J_a s}$ . Therefore, the first control objective will be to design a closed-loop admittance that is close to  $\frac{1}{J_a s}$  on the widest possible bandwidth.

Assuming that the admittance highlights a resonance<sup>1</sup>, it can be noticed that, beginning from  $\omega = +\infty$ , the first time, that  $Y_a^{ol}(j\omega)$  significantly differs from  $\frac{1}{J_a j\omega}$  is when  $\omega$  gets close to the resonance frequency at which  $|Y_a(j\omega)|$  exceeds  $|\frac{1}{J_a j\omega}|$ . (A typical admittance Bode plot of a robot arm with joint flexibility is illustrated in Fig.6). So, to obtain a closed-loop admittance  $|Y_a^{cl}(j\omega)|$  that is close to  $|\frac{1}{J_a j\omega}|$  for a wider bandwidth than in open-loop, it is proposed to design a controller  $K(s)$  that solves the following constraint:

$$\left\| Y_a^{cl}(s) J_a s \right\|_\infty \leq 1 \quad (5)$$

### C. $H_\infty$ Characterization of Admittance Passivity

Without any other assumption about the robot environment than its passivity, the stability of the interacting system requires the passivity of the controlled robot arm (i.e. the positive realness of  $Y_a^{cl}(s)$ ). Positive realness and bounded realness are closely related via Cayley transform [17]. In addition, the  $H_\infty$  characterization of bounded realness norm via the bounded real lemma [12] allows to formulate the passivity test as follows:

$$\left\| \frac{Y_a^{cl}(s) - 1}{Y_a^{cl}(s) + 1} \right\|_\infty \leq 1 \quad (6)$$

Notice that the rational function  $\frac{Y_a^{cl}(s) - 1}{Y_a^{cl}(s) + 1}$  can be rewritten as a LFT with only one occurrence of  $Y_a^{cl}(s)$ :

$$\frac{Y_a^{cl}(s) - 1}{Y_a^{cl}(s) + 1} = F_l(M, Y_a^{cl}(s)) \quad (7)$$

with  $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Using  $Y_a^{cl}(s) = F_l(H(s), K(s))$  given in (6), the synthesis of a passivating controller  $K(s)$  is straightforward.

<sup>1</sup> $Y_a(s)$  has a resonance if and only if  $k_c \geq \frac{b_c^2(J_m N^2 + J_a)}{4J_m J_a}$ .

### D. $H_\infty$ Characterization of Control Signal Limitation

To limit the energy on the control  $\Gamma_m$  and manage the actuator saturation, it is recommended to constrain the transfer  $T_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_m}(s)$  between  $\Gamma_i$  and  $\Gamma_m$  as follows:

$$\|W_u(s) T_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_m}(s)\|_\infty \leq 1 \quad (8)$$

where  $W_u(s)$  is a weighting function taking into account the actuator saturation and making the controller have a ‘‘roll-off’’ effect, i.e. a reduction of the controller gain in high-frequency, which improves the robustness with respect to unmodelled dynamics and attenuates the effect on the control signal of the measurement noise.

### E. Resolution with Structured $H_\infty$ Synthesis

Our problem is to find a controller  $K(s)$  that simultaneously satisfies the constraints (5), (6) and (8). Notice that, considered independently, each of these three sub-problems can be solved in an unstructured framework. However, solving simultaneously these three sub-problems can only be done in a structured framework.

Unlike the unstructured case, the fixed-structure  $H_\infty$  synthesis problem is non convex and can not be written as a linear matrix inequality (LMI) problem. It is still possible to solve this kind of problems locally by the mean of bounded real lemma and bilinear matrix inequalities (BMI). Unfortunately, the complexity of the optimization problem grows quadratically with the number of the system states. The method from Apkarian and Doll [13] overcomes the limitations of bounded real lemma and exploits tailored sub-gradient-based optimization in the reduced space of controller tunable parameters. The counterpart of this approach is that the cost-function to minimize become non-smooth hence the need of specialized optimization techniques [13]. This method is, however, endowed by a local convergence certificate for any starting point and, applied to the considered problem, shows acceptable execution time.

## IV. ILLUSTRATION

### A. Case Study overview

1) *Description:* As a special realization of Series Elastic Actuators (SEA) [18], we have considered in this work a ball-screw cable actuator (SCS) [19] which principle is depicted in Fig. 3. In such a type of actuator, the joint is actuated by the mean of a cable. The cable is pushed and pulled by a ball-screw that is prevented from rotating. The ball-screw movement is due to the nut rotation itself actuated by a belt transmission. The belt is driven by an electric motor. This type of actuator brings out an overall transmission ratio similar to other techniques such as Harmonic Drives [20]. It, however, features very low overall friction and inertia. Due to the cable actuation, SCS actuators have relatively low rigidity comparatively to Harmonic Drives.

Fig. 4 shows a testbed realization of a screw-cable actuator. The motor is a MAXON brushed DC motor equipped with an incremental encoder while the joint is equipped with a rotation potentiometer to measure absolute position. The

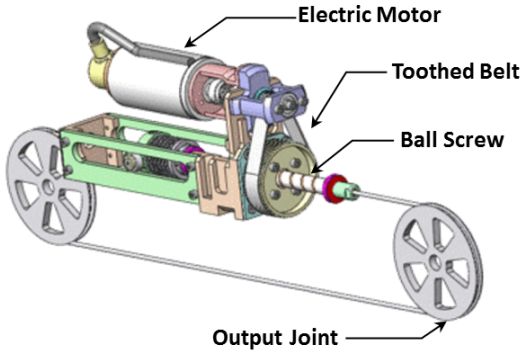


Fig. 3: screw-cable actuator principle

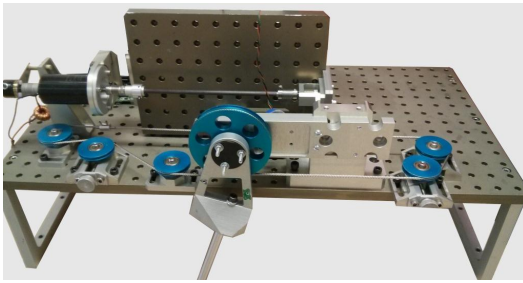


Fig. 4: considered experimental setup

motor is controlled by a TI C2000 MCU. The C2000 MCU has a dedicated module that captures clock ticks and estimates accurately the duration between two increments, thus enhancing the velocity estimation comparatively to numerical derivation of the motor position [21]. The encoder measures 20,000 increments per revolution while the potentiometer signal is acquired with a 12-bits analog-to-digital converter. The output pulley is attached to an arm equipped with a 0.8 kg mass at its end.

2) *Corresponding model*: On such type of systems, the cable represents the main source of flexibility. So, it is reasonable, for control synthesis purposes, to model the system as two inertias connected by a spring and a damper like in Eq. 2.

Among the methods available to identify the dynamic model of a robot from time-domain data, the method from Khalil and Dombre relies on an input error formulation that is linear with respect to the parameters [22]. However, the estimation of speed and accelerations required by this method is quite tedious. Herein, friction and gravity parameters have been estimated by a least-square minimization from time-domain data as described in [22], [23], while, for inertial and flexibility parameters, a frequency method has been used that was rather simple to implement. Notice that the transmission ratio  $N$  is already known:  $N = 109$ .

a) *Time-Domain Identification*: To identify friction parameters, the motor velocity has been servo-controlled at

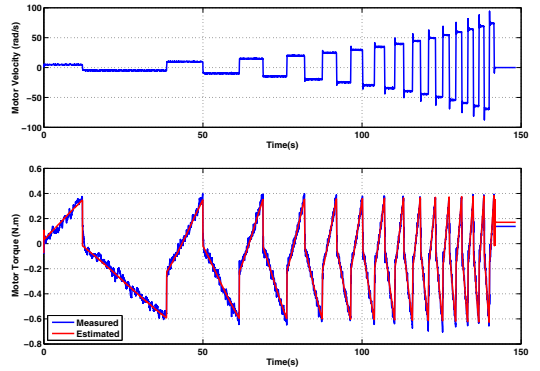


Fig. 5: predicted and measured motor torque time plot

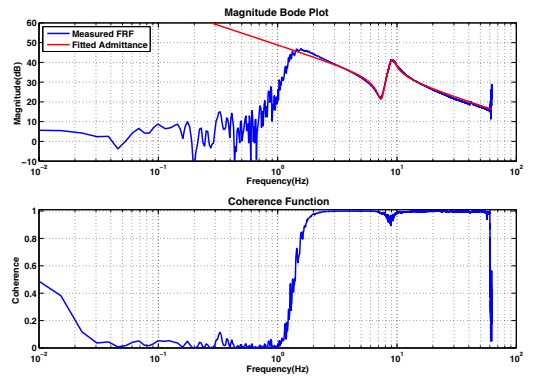


Fig. 6: motor side admittance frequency function

different constant velocities, in order to prevent exciting inertia and deformation forces. In this configuration, the first equation in (2) writes:

$$\Gamma_m = f_{cm}\dot{\theta}_m + f_{sm} \text{sign}(\dot{\theta}_m) + M_x \frac{\cos(\theta_a)}{N} + M_y \frac{\sin(\theta_a)}{N} \quad (9)$$

This model is linear with respect to the parameters  $f_{cm}$ ,  $f_{sm}$ ,  $M_x$ , and  $M_y$  to be identified. Estimates were obtained by solving the least squares problem presented in [22]:  $f_{cm} = 9.47 \cdot 10^{-4}$  N.m/(rad/s),  $f_{sm} = 0.155$  N.m,  $M_x = -9.758$  N.m, and  $M_y = 63.366$  N.m.

Fig. 5 shows the good matching between the measured and estimated data.

In the following, it is assumed that the nonlinear terms are compensated by a positive feedback:

$$\Gamma_{comp} = f_{sm} \cdot \tanh(a\dot{\theta}_m) + f_{cm} \cdot \dot{\theta}_m + M_x \frac{\cos(\theta_a)}{N} + M_y \frac{\sin(\theta_a)}{N} \quad (10)$$

where  $a$  parametrizes the slope of  $\tanh$  around zero.

b) *Frequency-Domain Identification*: To identify the remaining unknown parameters of  $Y_a^{ol}(j\omega)$ , the system has



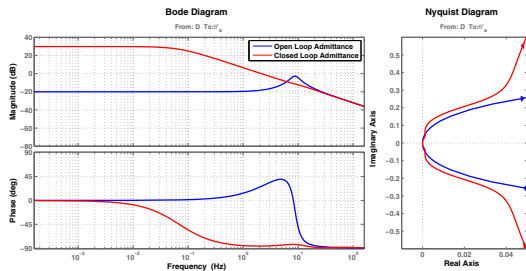


Fig. 7: Bode and Nyquist plots of open and closed-loop admittances

been excited by a sweep sine with a frequency varying linearly from 0 to 60 Hz. The motor torque, motor position and joint position signals have been logged at 5 kHz and windowed with a Flat-Top window [24]. Fig. 6 shows the experimental frequency response function (FRF) for Motor side Admittance. Inspired by the plot of the coherence function [25], only measurements in the band 2–60 Hz have been considered for identification. The parameters of the analytical model (2) have been tuned in order to minimize the least square error on the FRF using gradient-based optimization [26]. The obtained parameters values are:  $J_m = 1.48 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^2$ ,  $J_a = 0.0712 \text{ kg.m}^2$ ,  $k_c = 0.011 \text{ N.m/rad}$ ,  $b_c = 2.24 \cdot 10^{-5} \text{ N.m/(rad/s)}$ .

## B. Results and Discussion

1) *Synthesis Results:* The problem of finding a controller  $K(s)$  solving the constraints of (5), (6) and (8) has been successfully resolved using the `hinfstruct` Matlab routine [14]. The obtained overall  $\bar{\sigma}$  is equal to 1.001, which is a good result as, in the current scheme, the optimal value cannot be lower than 1 (see section III-B). Additionally, the peak gain of the sensitivity function evaluated at the control signal level is about 1.24 which results in modulus margin of 0.81.

Fig. 7 shows the Bode and the Nyquist plots of both open and closed-loop admittances. It can be noticed that the closed-loop admittance  $Y_a^{cl}(s)$  remains close to  $\frac{1}{J_a s}$  for a wider bandwidth compared to the open-loop case  $Y_a^{ol}(s)$ . The motor side inertia has been compensated up to 98.5%. A residual damping ratio remains up to 0.1 Hz. It can be also observed on the Bode plot that the phase of  $Y_a^{cl}(s)$  remains bounded between  $-90^\circ$  and  $90^\circ$ , and on the Nyquist plot,  $Y_a^{cl}(s)$  remains on the right side of the imaginary axis, which indicates that the passivity of the admittance has been ensured [27].

2) *Controller order and input signals reduction:* In the previous paragraph, it has been assumed that  $K(s)$  is of full order and has access to all the state variables of the system. In the following, trials are made in order to obtain less complex controllers, i.e. of reduced order and depending on less measurement signals, but with a reasonable performances loss.

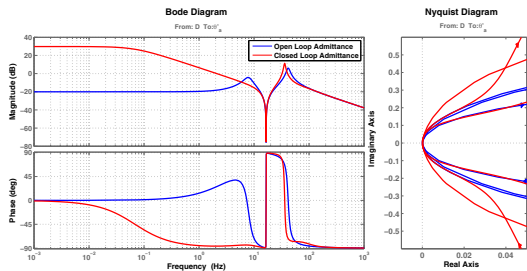


Fig. 8: robustness to neglected dynamics

To quantify the contribution of every input of  $K(s)$  to its output, we propose to consider the  $H_2$  norm of every SISO transfer of  $K(s)$ . Thus,  $|K_{11}(s)|_2 = 3.47$ ,  $|K_{12}(s)|_2 = 538$ ,  $|K_{13}(s)|_2 = 169$ . So, it can be noticed that  $\theta_a$  and  $\delta_\theta$  have almost 100 times more influence on  $\Gamma_m$  the output of  $K(s)$  than  $\dot{\theta}_m$ . In addition, based on the observation that the two first states of the balanced realization of  $K(s)$  contributes more than the third one to the output (the Hankel singular values of  $K(s)$  are respectively 16.48, 11.34, and 0.11, a controller of order two with only two inputs was designed. The obtained  $\bar{\sigma}$  is equal to 1.023 which is close to one and the obtained closed-loop has almost the same behavior as the one illustrated in Fig.7.

3) *Robustness to neglected dynamics:* In section IV-A, only the first flexible mode has been considered for synthesis purposes. In the following, we propose to consider a second flexible mode and verify the robustness of the proposed approach according to dynamics that were neglected during synthesis.  $J_a$  has been splitted into two inertias  $J_{a1} = 0.0123 \text{ kg.m}^2$  and  $J_{a2} = 0.0589 \text{ kg.m}^2$  related by a spring  $k_a = 577 \text{ N.m/rad}$  and a damper  $b_a = 0.005 \text{ N.m/(rad/s)}$ , thus creating a second resonance around 40 Hz and an anti-resonance around 16 Hz<sup>2</sup>. Without any change on the already synthesized controller  $K(s)$ , it is proposed to study its behavior when connected to the new system.

Fig. 8 shows the resulting Bode and Nyquist plots. It can be seen that, even in presence of higher order resonance, the closed-loop ensures almost the same performances in low frequencies as for the reduced model and ensures the passivity of the closed-loop system.

4) *Implementation Results:* From its original continuous-time version, a discrete-time version of the controller has been computed using the bilateral Tustin transform at 5 kHz and implemented in its balanced realization on the C2000 micro controller. The closed-loop performances have been checked using hammer testing [24] to get the apparent impedance. Fig. 9 shows the experimental frequency response function of both open and closed-loop admittances. It can be noticed that the motor side inertia has been accurately compensated and the cable flexibility has been efficiently masked.

<sup>2</sup>These values of resonance and anti-resonance has been actually observed on the real system

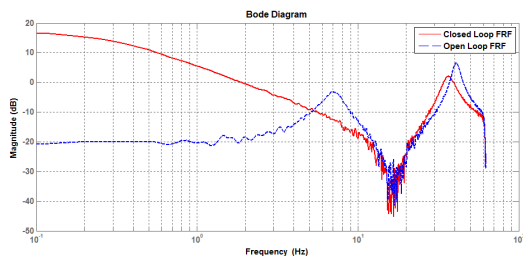


Fig. 9: experimental admittances frequency response functions

The passivity of the controlled arm has been verified experimentally by connecting it to a stiff environment and noticing that the arm does not jump and the interconnection remaining stable.

## V. CONCLUSION

In this work, the problem of impedance minimization on compliant robot joint has been considered and a new formulation using the structured  $H_\infty$  control framework has been proposed. The proposed approach takes advantage of the availability of tools that can solve structured  $H_\infty$  problems to ensure the passivity of the robot admittance. It has been shown that the designed controller compensates efficiently the motor side inertia thus enhancing the robot arm agility. Beside the considered context of impedance minimization, the proposed methodology is a flexible framework for solving many other control issues where passivity is a strong requirement. Compared to the analytical synthesis of PID controllers that is often used to solve this kind of problem, in the proposed numerical synthesis framework, controllers of more complex structures can be considered and are tuned in one shot in order to satisfy all the requirements simultaneously.

## REFERENCES

- [1] H. Kazerooni, "Extender : a case study for human-robot interaction via transfer of power and information signals," in *IEEE International Workshop Robot on and Human Communication*, 1993.
- [2] B. Cagneau, G. Morel, D. Bellot, N. Zemiti, and G. d'Agostino, "A passive force amplifier," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2008.
- [3] S. Eppinger and W. Seering, "On dynamic models of robot force control," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1986.
- [4] X. Lamy, F. Colledani, and P. Gutman, "Stability margins and passivity for the control of robots operating in varying-impedance environments," in *18th Mediterranean Conference on Control & Automation*, 2010.
- [5] N. Hogan, "Controlling impedance at the man/machine interface," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1989.
- [6] P. Garrec, F. Geffard, O. David, F.-X. Russotto, Y. Measson, and Y. Perrot, "Telerobotics research and development at CEA-LIST," in *ANS EPRRS - 13th Robotics & Remote Systems for Hazardous Environments and 11th Emergency Preparedness & Response*, 2011.
- [7] G. Aguirre-Ollinger, J. Colgate, M. Peshkin, and A. Goswami, "Design of an active one-degree-of-freedom lower-limb exoskeleton with inertia compensation," *The International Journal of Robotics Research*, 2010.
- [8] S. Buerger and N. Hogan, "Complementary stability and loop shaping for improved human-robot interaction," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 23, pp. 232 – 244, 2007.
- [9] X. Lamy, F. Colledani, F. Geffard, Y. Measson, and G. Morel, "Human force amplification with industrial robot : Study of dynamic limitations," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2010.
- [10] G. Zames and B. Francis, "Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, no. 5, pp. 585–601, 1983.
- [11] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, 1989.
- [12] P. Gahinet and P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, no. 4, pp. 421–448, 1994.
- [13] P. Apkarian and D. Noll, "Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 1, pp. 71–86, 2006.
- [14] P. Gahinet and P. Apkarian, "Structured  $H_\infty$  synthesis in MATLAB," in *IFAC World Congress*, 2011.
- [15] J. V. Burke, D. Henrion, A. S. Lewis, and M. L. Overton, "HIFOO - a MATLAB package for fixed-order controller design and  $H_\infty$  optimization," in *IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2006.
- [16] N. Kottenstette, M. McCourt, M. Xia, V. Gupta, and P. Antsaklis, "On relationships among passivity, positive realness, and dissipativity in linear systems," *Automatica*, vol. 50, no. 4, pp. 1003 – 1016, 2014.
- [17] W. Sun, P. Khargonekar, and D. Shim, "Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 2034 – 2046, 1994.
- [18] G. Pratt and M. Williamson, "Series elastic actuators," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 1995.
- [19] P. Garrec, *Robotics 2010 Current and Future Challenges*. INTECH, 2010, ch. Screw and cable actuators (SCS) and their applications to force feedback teleoperation, exoskeleton and anthropomorphic robotics.
- [20] US Patent 3996816 A, 1976.
- [21] Z. Jabbour, S. M. A. Riwan, F. Khatounian, and G. Champenois, "Speed estimation improvement using full order state observer for a haptic interface," in *IEEE International Conference on Industrial Technology*, 2009.
- [22] W. Khalil and E. Dombre, *Modeling, Identification and Control of Robots*, K. P. Science, Ed. Kogan Page Science, 2000.
- [23] M. Gautier, "Numerical calculation of the base inertial parameters of robots," *Journal of Robotic Systems*, vol. 8, pp. 485–506, 1991.
- [24] ISO, Ed., *ISO 7626: Mechanical vibration and shock – Experimental determination of mechanical mobility*. ISO, 2011.
- [25] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation*, E. Cliffs, Ed. Prentice-Hall, 1988.
- [26] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical Optimization*. Springer, 2006, ch. Conjugate Gradient Methods.
- [27] J. Colgate, "Robust impedance shaping telemanipulation," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, pp. 374–384, 1993.

# Transforming Series Elastic Actuators into Variable Stiffness Actuators thanks to Structured $H_\infty$ Control

Neil Abroug<sup>1</sup> and Edouard Laroche<sup>2</sup>

**Abstract**—Soft Robotics and Variable Stiffness Actuation (VSA) are active research domains in robotics. The aim is to design human-friendly machines that can perform safely dexterous tasks close to or in contact with humans. Whereas most of current works focus on biomimetic VSA by using two antagonistic motors to simultaneously deal with motion control and stiffness adaptation, in this work, we present a control approach that takes advantage of the mechanical reversibility of series elastic actuators and the recent availability of structured  $H_\infty$  synthesis. The paper introduces a methodology for the design of a control law that allows to turn a force-sensorless actuator that includes a flexible link into a variable stiffness actuator where the stiffness can be set arbitrarily in some interval. With the proposed framework, it has been possible to accurately control the motion and the stiffness of a cable-screw actuator.

## I. INTRODUCTION

In recent years, there has been an increasing interest in the so called “Variable Stiffness Actuation” (VSA) [1]. When operating in an unstructured environment, Variable Stiffness Actuators represent an interesting alternative to servomechanisms as they can adapt the amount of stored energy (through adaptation in stiffness) to a given task without the need of an accurate modeling of the environment. Actually, when performing tasks in an unknown environment, conventional stiff robots tend to fail in achieving contact tasks when hitting unexpected rigid bodies generating potentially high efforts or shocks that can be harmful for both the robot and the environment. Thanks to VSA, tasks like unknown object grasping, human force amplification, brushing and many other contact tasks become easier and intrinsically safer. Notice that animals have this kind of feature and have inspired research on the topic [1].

Many recent works are related to VSA design, and they can be classified into three families. The most widespread approach to VSA design is based on the principle of agonistic-antagonistic actuation [2]. The end effector is actuated by two different motors through two springs. the average of the motor positions controls the end-point position while the difference between the two positions adjusts the end-point stiffness. Another principle for the design of a VSA consists in using two springs attached antagonistically to a variable-ratio lever mechanism [3]. Changing the lever pivot point modifies the apparent stiffness. Alternatively, to avoid the added complexity and other induced drawbacks it is possible

to take advantages of the capabilities of some actuators that allow accurate load torque control to produce an apparent variation of stiffness thanks to impedance control. The DLR Lightweight Robot [4] and the CEA ASSIST Robot [5] are some examples of such Robots. Contrarily to the Lightweight Robot that requires torque sensors to perform torque control, the ASSIST Robot exhibits sensorless torque control capabilities. This is made possible thanks to the mechanical back-drivability [6] of some Series Elastic Actuators (SEA) like Screw-Cable actuators (SCS).

In this paper, we propose a convenient methodology that takes advantage of the mechanical back-drivability of SCS and of available tools for structured  $H_\infty$  synthesis, to design a single motor force-sensorless Variable Stiffness Actuator. The proposed technique considers structured  $H_\infty$  synthesis to design a gain-scheduled controller that shapes the robot admittance frequency function in order to match a given arbitrary stiffness while preserving passivity. Passivity is ensured by an  $H_\infty$  characterization of positive-realness [7]. The controllers can be of any structure.

In the  $H_\infty$  control framework, the controller is designed by solving the so-called standard problem consisting in minimizing the  $H_\infty$  norm of some performance channel [8]. Based on non-smooth optimization, efficient methods have been recently developed to solve the non-convex structured  $H_\infty$  problem [9].

Within the proposed methodology it is easy to design a compact (single motor) and cost efficient (force-sensorless) Variable Stiffness Actuator.

This paper is organized as follows. Section II reviews Series Elastic Actuators features. In section III, stiffness control is formulated as a structured gain-scheduled  $H_\infty$  synthesis problem. In Section IV, the methodology is illustrated through an experimental setup and the resulting controller is experimentally verified.

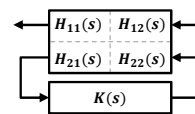


Fig. 1. Linear Fractional Transform

**Notations:** The Laplace variable being denoted  $s$ , the ratio between the force  $F(s)$  applied to a mechanical system and its velocity  $V(s)$ , measured at the same point, is the **impedance**  $Z(s)$  such that  $F(s) = Z(s) V(s)$ . The inverse of an impedance is the **admittance**  $Y(s)$ . The ratio between

<sup>1</sup>CEA, LIST; Interactive Robotics Laboratory; Clinatex Biomedical Research Center; 17 Rue des Martyrs, 38054 Grenoble, France neil.abroug@cea.fr

<sup>2</sup>Cube laboratory; University of Strasbourg & CNRS; 300 bd Sébastien Brant; F-67412 Illkirch laroche@unistra.fr

the force  $F_1(s)$  applied to a mechanical system and its velocity  $V_2(s)$ , measured at a different point, is the **transfer impedance**  ${}_iZ(s)$  such that  $F_1(s) = {}_iZ(s) V_2(s)$ . The inverse of a transfer impedance is the **transfer admittance**  ${}_iY(s)$ . Given two linear dynamic systems  $H(s)$  and  $K(s)$  of appropriate dimensions and considering a bloc partition  $H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}$ , the lower linear fractional transformation (LFT) presented in Fig. 1 writes  $F_l(H(s), K(s)) = H_{11} + H_{12}K(I - H_{22}K)^{-1}H_{21}$  where  $I$  is the identity matrix and the Laplace variable  $s$  has been omitted for compactness. Given a complex matrix  $M$ ,  $\bar{\sigma}(M)$  denotes its maximal singular value. For a multivariable dynamical system, denoted by its transfer function  $H(s)$ , its  $H_\infty$  norm is  $\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^+} \bar{\sigma}(H(j\omega))$ .

## II. SERIES ELASTIC ACTUATORS REVIEW

### A. Series Elastic Actuators Principle

A Series Elastic Actuator (SEA) [10] is an apparatus based on conventional rigid body actuation augmented by a compliant passive element in series with the source of movement. The elastic element confers to the actuator a lower output impedance, tolerance to shocks, and an increased peak power. SEAs are generally composed of an electric motor, a torque amplification mechanism and a compliant element connecting the amplification mechanism to the load. According to the technological choice of each element and their friction and inertia characteristics, SEAs can bring out more or less inherent back-drivability. In this work, we have considered a ball-screw cable actuator (SCS) [11] that is a special realization of SEAs and which principle is depicted in Fig. 2. In such a type of actuator, the joint is actuated by the mean of a cable which represents the compliant part of the SEA. The cable is moved by a ball-screw that is prevented from rotating. The ball-screw movement is due to the nut rotation itself actuated by a belt transmission. The belt is driven by an electric motor.

Like every cable driven mechanism, the SCS actuator features very low friction and inertia and has relatively low rigidity comparatively to gear based mechanisms. Therefore, it is a convenient mechanical base for force-sensorless VSA design.

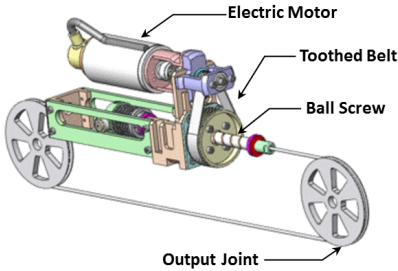


Fig. 2. screw-cable actuator principle

### B. Common Features and Modeling

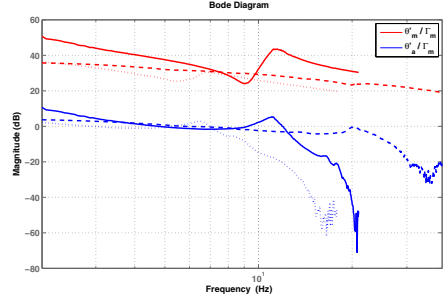


Fig. 3. Frequency Response Functions for 3 realizations of SCS

In order to justify the modeling assumptions of the SCS model, we highlight experimentally the dominant dynamics of three different SCS realizations available in the Interactive Robotics Laboratory. Fig. 3 illustrates the experimental frequency response functions (FRF) of  $Y_m(s) = \frac{\hat{\theta}_m(s)}{\Gamma_m(s)}$  and  ${}_iY_{m \rightarrow a}(s) = \frac{\hat{\theta}_a(s)}{\Gamma_m(s)}$ , where  $\Gamma_m$  denotes the motor torque,  $\hat{\theta}_m$  the motor velocity, and  $\hat{\theta}_a$  the robot arm velocity. These FRF are typical of a flexible mechanism having two inertias connected by a spring and a damper. Assuming that the motor (DC or brushless) is torque controlled accurately and with a sufficiently high bandwidth, the equations describing the dynamical behaviors of such a system can be written as follows:

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\theta}_m &= \Gamma_m - c_m \dot{\theta}_m - \frac{c_c}{N} \left( \frac{\dot{\theta}_m}{N} - \dot{\theta}_a \right) - \frac{k_c}{N} \left( \frac{\theta_m}{N} - \theta_a \right) \\ J_a \ddot{\theta}_a &= \Gamma_i + c_c \left( \frac{\dot{\theta}_m}{N} - \dot{\theta}_a \right) + k_c \left( \frac{\theta_m}{N} - \theta_a \right) \end{aligned} \quad (1)$$

where  $J_m$  is the motor side inertia,  $c_m$  the motor viscous friction,  $N$  the transmission ratio,  $c_c$  and  $k_c$  respectively the damping and the stiffness of the transmission (modeled on the joint side), and  $J_a$  the joint side inertia.  $\theta_m$ ,  $\dot{\theta}_m$ ,  $\ddot{\theta}_m$  are respectively the position, velocity and acceleration of the motor,  $\theta_a$ ,  $\dot{\theta}_a$ ,  $\ddot{\theta}_a$  the position, velocity and acceleration of the joint.  $\Gamma_m$  denotes the motor torque, and  $\Gamma_i$  the interaction torque between the arm and its environment.

Denoting  $\delta_\theta$  denotes the difference between the motor and joint position modeled on the motor side, the following state-space realization is minimal and suits for any velocity output:

$$\begin{bmatrix} J_m & 0 & 0 \\ 0 & J_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_m \\ \ddot{\theta}_a \\ \delta_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_m - \frac{c_c}{N} & \frac{c_c}{N} & -\frac{k_c}{N} \\ \frac{N c_c}{N} & -c_c & \frac{k_c}{N} \\ 1 & -N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\theta}_a \\ \delta_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_m \\ \Gamma_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

In the following this MIMO system will be denoted  $H(s)$ .

## III. STIFFNESS CONTROL AS A STRUCTURED GAIN-SCHEDULED $H_\infty$ PROBLEM

### A. $H_\infty$ Characterization of Stiffness Matching

The idea behind designing a single motor VSA from SCS is depicted in Fig. 4. A controller  $K(s)$  collects some suitable

robot arm states and calculates the right motor torque that modifies the arm dynamics and confer it the behavior of an inertia  $J_a$  connected to a frame moving at  $\dot{\theta}_w$  rate by the mean of a variable spring  $k_w$  and damper  $c_w$ . For a given value of the tunable parameter  $k_w$ , the controller parameters are adjusted to precisely fit to this stiffness and to guarantee a minimal fixed damping ratio  $\xi_w$ . To accurately fit to  $\xi_w$ ,  $c_w$  will match to the following equation:

$$c_w = 2\xi_w \sqrt{\frac{k_w}{J_a}} \quad (3)$$

Unfortunately, this relationship is non rational, increases the complexity of the synthesis problem. The proposed method allows to circumvent this issue (detailed in III-B).

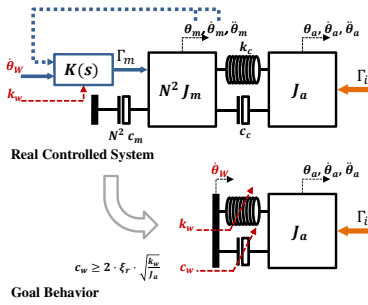


Fig. 4. Control Objectives

1) *Control Structure Proposal:* Stiffness is generally tuned with proportional position feedback. Unfortunately, direct proportional feedback on a non co-located system like SEAs can rapidly destabilize the closed-loop. As a work-around, the joint position control loop can be followed by a notch filter to penalize the system resonance. This approach, however, is likely to result in pole-zero cancellation, between the controller and the system, which is known to be troublesome for robustness when dealing with flexible systems [12]. An other approach consists in adding a derivative feedback on motor position. It has been shown in [13] that for the considered structure, there is no way to ensure an apparent stiffness higher than the stiffness of the compliant element between the two inertias without destabilizing the system. In [7], we have proposed the control structure shown in Fig. 6 that solves to impedance minimization problem and shapes the SCS closed-loop admittance to match a unique inertia.  $L = [L_\theta, L_\delta]$ , that is a partial static state-feedback compensator, is designed to mask the contributions of  $J_m$ ,  $k_c$  and  $c_c$  to the closed-loop arm admittance  $Y_a^{cl}(s) = \frac{\theta_a(s)}{\Gamma_i(s)} = F_i((H(s), K(s))$  while ensuring its positive-realness and consequently the passivity of the robot's interaction port. This previous work has focused only on  $Y_a^{cl}(s)$ . However, if we take a look to the resulting transfer function  ${}_t Y_{m \rightarrow a}^{cl}(s) = \frac{\theta_a(s)}{\Gamma_u(s)}$ , it can be noticed that it exhibits almost the same dynamics as  $Y_a^{cl}(s)$  (Fig. 5). Thus, both  $Y_a^{cl}(s)$  and  ${}_t Y_{m \rightarrow a}^{cl}(s)$  can be reasonable approximated by a single inertia/damper  $\frac{1}{J_a s + c_a}$

system actuated through two torques  $\Gamma_i(s)$  and  $G \cdot \Gamma_u(s)$  where  $G = k_c \cdot L_\delta^{-1}$ . According to this observation, a stiff

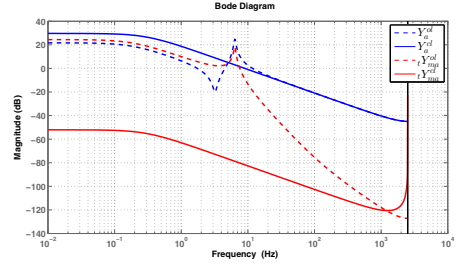


Fig. 5.  ${}_t Y_{m \rightarrow a}$  and  $Y_a$  Dynamics

behavior of the arm can be easily obtained by adding a *PI* controller  $K_k(s)$  on  $\theta_a$  as depicted in Fig 7 where  $\dot{\theta}_w$  refers to the frame velocity. The integral gain will modulate the stiffness while the proportional gain will modulate the damping.

Considering that  $K_k(s)$  is designed to mainly shape  $Y_a^{cl}(s)$ , it is appropriate to add a feed-forward controller  $F_k(s)$  to have an extra degree of freedom on the  $T_{\theta_w - \theta_a}(s)$  transfer function shaping. Therefore the entire controller  $K(s)$  is composed of a static state-feedback compensator  $L = [L_\theta, L_\delta]$ , an output dynamic feedback controller  $K_k(s) = P_k + \frac{I_k}{s}$  and a first order feed-forward filter  $F_k(s) = \frac{G_f}{\tau s + 1}$  (Fig. 7).

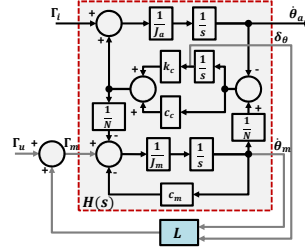


Fig. 6. Impedance Minimization Control Scheme

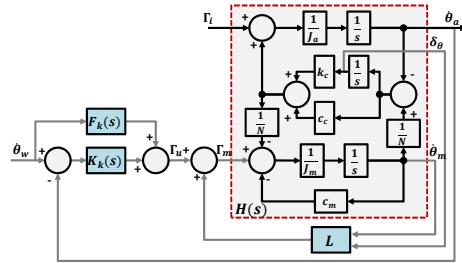


Fig. 7. Stiffness Matching Control Scheme

2)  $H_\infty$  Characterization of a fixed value Stiffness Matching: In [7], it has been seen that solving the following  $H_\infty$  constraint allows to mask the actuator internal flexibility dynamics<sup>1</sup>:

$$\left\| Y_a^{cl}(s) W_y(s) \right\|_\infty \leq 1, W_y^{-1}(s) = \frac{1}{J_a s} \quad (4)$$

It can be noticed that the closed-loop apparent inertia can not be lower than  $J_a$ , otherwise, it will violate passivity requirement. Moreover, spring admittance writes  $Y(s) = \frac{s}{k_w}$ , where  $k_w$  denotes the spring stiffness. Therefore, we propose the following  $H_\infty$  constraint that shapes  $Y_a^{cl}(s)$  to be close to  $\frac{s}{k_w}$  in low frequencies and close to  $\frac{1}{J_a s}$  in high frequencies:

$$\left\| Y_a^{cl}(s) W_y(s) \right\|_\infty \leq 1, W_y^{-1}(s) = \frac{s}{J_a s^2 + k_w} \quad (5)$$

It should be noticed that the  $W_y(s)$  weighting function allows to specify the stiffness but not the damping. Actually, frequency domain templates on the system gain are not sufficient to ensure sufficient damping. Therefore, in the proposed framework, minimal damping ratio  $\xi$  is not handled as a  $H_\infty$  weight but through the pole placement constraint:

$$\frac{Re(p)}{|p|} > \xi \quad (6)$$

where  $p$  denotes the poles of the closed-loop system. This framework has the advantage of being applicable even on systems that highlight more than one flexible mode.

3) *Extention to Variable Stiffness Matching Case*: Due to the variation of the stiffness, the resulting controller is Linear Parameter Varying (LPV). However, instead of the usual case of a controller that reacts to changes in a time-varying plant in order to ensure almost constant performances, in the current case, the parameters of the controller are modified in order to ensure variable performances of a time-invariant (LTI) plant. LPV control theory extends, to a class of nonlinear systems, the possibility to use efficient tools for studying LTI systems. The case where scheduling parameters are functions of states is a more complex issue than when they are exogenous signals, which is the case herein [14]. In the current problem, the parameter dependance is affine, which allows to use complementary tests for the global analysis of stability and performance [15].

Using the variable stiffness parameter  $\mathbf{k}_w$ , an affine realization of the controller can be written in the following way:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{k}_w) &= [L_\theta^0, L_\delta^0] + \mathbf{k}_w [L_\theta^1, 0] \\ K_k(s, \mathbf{k}_w) &= \mathbf{k}_w P_k^1 + \mathbf{k}_w \frac{I_k^1}{s} \\ F_k(s, \mathbf{k}_w) &= \frac{\mathbf{k}_w}{\tau^0 s + 1} \end{aligned} \quad (7)$$

It should be noticed that  $K_k(s)$  and  $F_k(s)$  depend linearly and not affinely on  $k_w$  in order to avoid residual stiff behavior when  $k_w = 0$ . Therefore, the closed-loop system writes:

$$E\dot{x} = A^0 x + \mathbf{k}_w A^1 x + B^0 u + \mathbf{k}_w B^1 u \quad (8)$$

<sup>1</sup>As  $Y_a^{cl}(s)$  is strictly proper,  $Y_a^{cl}(s) W_y(s)$  is proper even for an unproper  $W_y(s) = J_a s$

where:

$$A^0 = \begin{bmatrix} -\frac{c_w}{N\tau} - cm + L_\theta^0 & \frac{c_w}{N\tau} & \frac{-k}{N\tau} + L_\delta^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_w}{N} & -c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, A^1 = \begin{bmatrix} L_\theta^1 & P_k^1 & 0 & I_k^1 & 1 \\ 0 & P_k^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B^1 = \begin{bmatrix} P_k^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} J_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Within the proposed affine LPV form, we propose to tune the controller parameters simultaneously for two extreme values of  $k_w$  in order to satisfy (5) and (6). As a result, we will obtain a gain-scheduled controller that adapts the apparent actuator stiffness linearly according to  $k_w$ .

### B. $H_\infty$ Characterization of Admittance Passivity

For robots operating in an unknown environment, it is sensible to ensure the passivity of the controlled robot arm (i.e. the positive-realness of  $Y_a^{cl}(s)$ ). Handling positive-realness constraint using the  $H_\infty$  theory is straightforward thanks to structured  $H_\infty$  synthesis and to the Cayley transform [16] that relates positive realness to bounded realness. Therefore, passivity constraint can be written as:

$$\left\| \frac{Y_a^{cl}(s) - 1}{Y_a^{cl}(s) + 1} \right\|_\infty \leq 1 \quad (10)$$

Notice that the rational function  $\frac{Y_a^{cl}(s)-1}{Y_a^{cl}(s)+1}$  can be rewritten as a LFT with only one occurrence of  $Y_a^{cl}(s)$ :

$$\frac{Y_a^{cl}(s) - 1}{Y_a^{cl}(s) + 1} = F_l(M, Y_a^{cl}(s)); M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Using  $Y_a^{cl}(s) = F_l(H(s), K(s))$  given in (10), specifying a passivating controller  $K(s)$  is straightforward.

### C. $H_\infty$ Characterization of Stiffness Variation Rate

When dealing with LPV systems, it is well known that the stability of a LTI models for all values of the scheduling parameter is not a sufficient condition for the stability in case of arbitrary parameter variations. For instance, for switching systems, a condition on the dwell-time between two switches can be given [17]. However, an interesting result in the domain of passive systems relies on the absence of minimum bound on the connection/disconnection dwell-time of two passive systems [18]. In other words, two given interacting passive systems remain stable under an arbitrary connecting and disconnecting sequence. According to this result, and if we notice that  $K_k(s)$  and  $L_\theta$  are both positive-real systems for any chosen positive parameter, ensuring passivity on both  ${}_t Y_{m \rightarrow a}^{cl}(s)$  and  $Y_m^{cl}(s)$  allows abrupt changes in  $K_k(s)$  and  $L$  values without a loss of stability. This constraint can be handled as follows:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Y_m^{cl}(s) - 1}{Y_m^{cl}(s) + 1} \right\|_\infty &\leq 1 \\ \left\| \frac{{}_t Y_{m \rightarrow a}^{cl}(s) - 1}{{}_t Y_{m \rightarrow a}^{cl}(s) + 1} \right\|_\infty &\leq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

#### D. $H_\infty$ Characterization of Control Signal Limitation

It is sensible to penalize the actuator output amplitudes in order to limit saturation and fatigue which degrade the performances and the mechanics lifespan. Based on the maximum values of  $\theta_w$  and  $\Gamma_i$  in normal operating conditions, the transfer  $T_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_m}(s)$  between  $\Gamma_i(s)$  and  $\Gamma_m(s)$  could be constrained as follows:

$$\|T_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_m}(s) W_u\|_\infty \leq 1 \quad (13)$$

where  $W_u$  is a constant penalty function on the control signal amplitude.

#### E. $H_\infty$ Characterization of Stability Margins

The proposed framework handles stability margin by the mean of modulus margin by ensuring the following  $H_\infty$  constraint:

$$\|S_{\Gamma_i}(s) M_m^{-1}\|_\infty \leq 1 \quad (14)$$

where  $S_{\Gamma_i}(s)$  denotes the system sensitivity function evaluated in  $\Gamma_i$  and  $M_m$  is the required modulus margin.

#### F. Resolution with Structured $H_\infty$ Synthesis

The goal of the synthesis procedure is to find a controller  $K(s, \mathbf{k}_w)$  that simultaneously satisfies the constraints (5), (6), (10), (12), (13) and (14) for all values of  $\mathbf{k}_w$  in a specified interval. In practice, the interval is sampled and the conditions are considered simultaneously for all scheduling parameter samples. In this work, only  $\mathbf{k}_w$  vertices have been considered for synthesis. The analysis for other values of  $\mathbf{k}_w$  is evaluated in IV-B.1. Notice that, for an unstructured controller without considering passivity requirements, the  $H_\infty$  problem can be solved with classical *LMI* [19] and *Riccati* [20] approaches. However, when considering the passivity requirement, solving these four sub-problems needs the use of structured  $H_\infty$  synthesis, even for an unstructured controller.

Unlike the unstructured case, the fixed-structure  $H_\infty$  synthesis problem is non convex and can no longer be written as a linear matrix inequality (LMI) problem. Because of the NP-hardness of the structured  $H_\infty$  synthesis, there is no known time-efficient algorithm that can solve it with global optimality guaranties. The method from Apkarian and Noll operates a specialized sub-gradient-based optimization algorithm [9] that, locally, solves the  $H_\infty$  problem in the reduced space of system tunable parameters. Despite its lack of global optimality, this method have shown accurate results with an acceptable execution time (about 5s), for the considered problem and using multiple random starting points.

An interesting application of nonsmooth optimization, that has been presented recently by Gahinet and Apkarian [21], relies on designing fixed-structure gain-scheduled controller for LPV systems with polynomial dependency on parameters. The controller parameters are tuned simultaneously for a set of system samples in the space of scheduling parameters. More recent developments [22] on the use of non-smooth optimization allowed to distinguish hard requirements that could not be violated from soft requirements that tolerate

violation. In this new framework, it is also possible to synthesize the controller directly in the discrete-time domain. In this work, objectives (10), (12) and (14), which guarantee the integrity of the robot and its environment, have been considered as hard constraints, while the other objectives have been considered as soft constraints.

## IV. ILLUSTRATION

### A. Case Study Overview

To illustrate the use of the proposed methodology, we consider a 52 mm robot arm actuated with a SCS. The motor is a MAXON R30 brushed DC motor equipped with an 8,000 points incremental encoder. The arm joint is equipped with a rotation potentiometer of lower accuracy to measure the absolute position. The potentiometer signal is acquired with a 12-bits analog-to-digital converter. The arm is controlled by a TI C2000 MCU.

The mechanical parameters of the arm have been identified by combining frequency-domain and time-domain identification methods [23],[24]. Fig. 8 illustrates the matching between experimental and identified model frequency functions. Tab. I summarizes the identified parameter values.

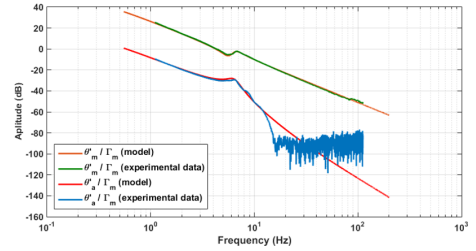


Fig. 8. Experimental and fitted frequency functions

TABLE I  
IDENTIFIED PARAMETERS

Parameter Name	Nominal Value	Uncertainty
$J_m$	$3.04 \cdot 10^{-5} \text{kg.m}^2$	$\pm 0.8\%$
$J_a$	$0.0177 \text{kg.m}^2$	$\pm 4\%$
$N$	41.25	—
$k_c$	$21.2 \text{N.m/rad}$	$\pm 3\%$
$c_c$	$0.155 \text{N.m.s/rad}$	$\pm 8\%$
$c_m$	$9.7 \cdot 10^{-5} \text{N.m.s/rad}$	$\pm 14\%$

We propose to design a VSA controller able to reach an apparent stiffness from  $0.1 \cdot k_c$  to  $10 \cdot k_c$  with a minimal damping ratio  $\xi = 0.6$ . The controller output amplitude is penalized in order remain below 130 % of the actuator saturation value (the residual 30 % of overshoot are managed using an anti-windup mechanism). The controller is also expected to ensure arm passivity, a gain margin of 10 dB and phase margin of  $30^\circ$  for all values of  $\mathbf{k}_w$ . The synthesis is based on a nominal model. Robustness with respect to the parameter uncertainties will be investigated in a second time.

## B. Results and Discussion

1) *Synthesis Results*: The problem of finding a controller satisfying the constraints (5), (6), (10), (12), (13) and (14) has been solved using the `systeme` Matlab routine [22]. The maximum  $\bar{\sigma}$  is about 1.42. The controller is designed directly in discrete-time domain. The obtained performance index is greater than one. Therefore, all the specifications are not satisfied. Let us see more in details the different specifications.

- **Nominal Stability**: If we focus on stability criteria, it can be seen that both stability margins and passivity specifications have been reached for the two considered extreme values of  $\mathbf{k}_w$ :  $\bar{\sigma}_{eq,10} = 0.99$ ,  $\bar{\sigma}_{eq,12} = 0.98$ ,  $\bar{\sigma}_{eq,14} = 0.8$ , where the numbers in lower indexes refer to the considered equations.

Fig. 9 represents the Bode diagram of the loop opened at  $\Gamma_m$  for different values of  $\mathbf{k}_w$ . It can be noticed that the worse case stability margins respect the given (14) specification.

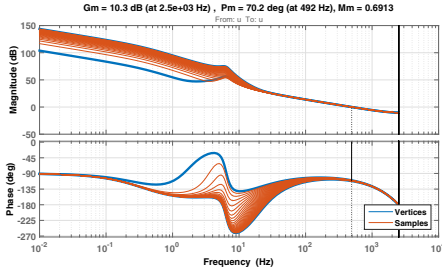


Fig. 9. Loop transfer Bode plot

Fig. 10 represents the singular value plot of  $\frac{Y_a^{cl}(s)-1}{Y_a^{cl}(s)+1}$  and  $\frac{Y_{m \rightarrow a}^{cl}(s)-1}{Y_{m \rightarrow a}^{cl}(s)+1}$  evaluated for different values of  $\mathbf{k}_w$ . From this figure, it can be seen that (10) and (12) are satisfied.

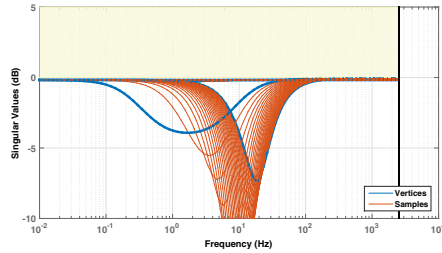


Fig. 10. Singular values plot of  $\frac{Y_a^{cl}(s)-1}{Y_a^{cl}(s)+1}$  and  $\frac{Y_{m \rightarrow a}^{cl}(s)-1}{Y_{m \rightarrow a}^{cl}(s)+1}$

- **Robust Stability**: Using structured singular value ( $\mu$ ) analysis [25] and considering all variations of  $\mathbf{k}_w$  and the uncertainties of the robotic arm given in Tab. I, the closed-loop system remains stable for uncertainties variations up to 121% of the modeled values (Fig. 11).

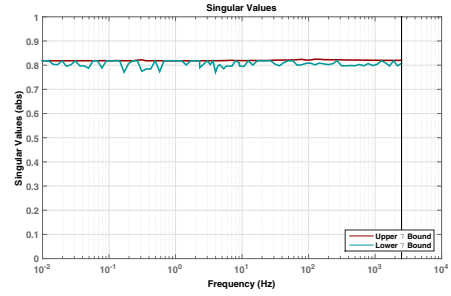


Fig. 11. Structured singular Value ( $\mu$ )

- **Robust Performances**: Fig. 12 illustrates vertices and regularly spaced samples of  $Y_a^{cl}$  frequency function. It can be observed that the apparent stiffness (the 20 dB slope of  $|Y_a^{cl}|$ ) depends linearly on the reference stiffness  $\mathbf{k}_w$  ( $\bar{\sigma}_{eq,5} = 1.07$ ). As can be seen from the closed-loop poles locations (Fig. 13), the apparent damping violates (6) for some values of  $\mathbf{k}_w$  ( $\bar{\sigma}_{eq,6} = 1.42$ ). This is mainly due to the linear dependency of  $P_k$  on  $\mathbf{k}_w$  while (3) states that  $P_k$  has to depend linearly on the square root of  $\mathbf{k}_w$ , to ensure constant damping ratio.

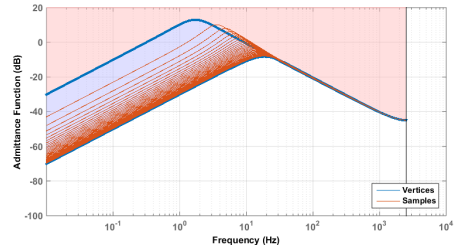


Fig. 12.  $Y_a^{cl}(s)$  amplitude Bode plot

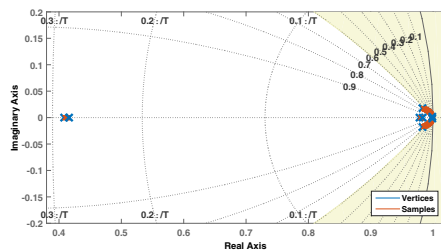


Fig. 13. Closed-loop pole locus

Fig. 14 represents the singular value of  $T_{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_m}(s) W_u$ . It can be noticed that the controller output has been accurately penalized according to the chosen  $W_u$  ( $\bar{\sigma}_{eq,13} = 0.92$ ).



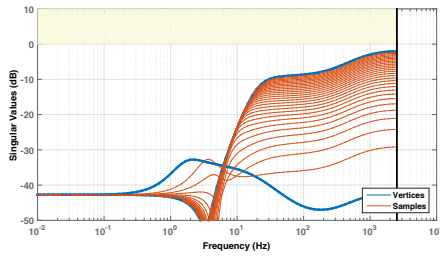


Fig. 14. Singular value plot of  $T_{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_m}(s) W_u$

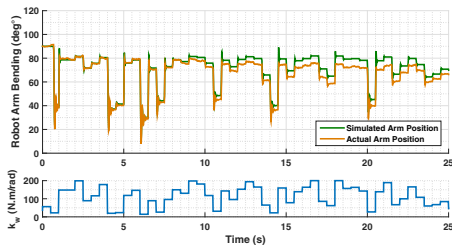


Fig. 15. Arm Bending under Arbitrary Switching Sequence of  $k_w$

2) *Experimental Results:* In the following, we show implementation results obtained with the controller implemented on the C2000 MCU. While maintaining the  $\hat{\theta}_w$  reference at 0, the value of  $k_w$  is modified according to a multi-level pseudo-random sequence. From its initial horizontal position and under its own weight of 1.8 kg, the arm is expected to bend more or less depending on the stiffness value. Assuming that the center of mass is at the middle of the robot length, we construct a simulation model of the arm consisting of a rigid body linked to the frame through a variable stiffness torsional spring  $k_w$  and subject to gravity acceleration. The same  $k_w$  switching sequence is applied to both real and simulated arms, the positions being given in Fig. 15. It can be noticed that the real arm bending fits quite well with the predicted simulation. The residual gap may be caused by friction and some uncertainty in the position of the center of mass.

## V. CONCLUSIONS

In this work, the problem of stiffness control has been solved using structured  $H_\infty$  synthesis.  $H_\infty$  characterization of positive realness allowed to design a passivating gain-scheduled controller that can accept arbitrary fast variations. Experimental results using the obtained controller have confirmed that the robot apparent stiffness accurately fits to the desired stiffness and remains stable with the considered switching sequence. One advantage of the proposed method is that, for the considered subset of impedance control problems – i.e. stiffness control –, it is possible to consider rich specification regarding robustness and implementation requirements, thanks to the structured  $H_\infty$  synthesis. Within

the proposed methodology, it is also possible to consider any arbitrary controller structure.

## REFERENCES

- [1] D. Trivedi, C. D. Rahn, W. M. Kierb, and I. D. Walker, "Soft robotics: Biological inspiration, state of the art, and future research," *Applied Bionics and Biomechanics*, vol. 5, pp. 99–117, 2008.
- [2] R. Schiavi, G. Grioli, S. Sen, and A. Bicchi, "VSA-II: a novel prototype of variable stiffness actuator for safe and performing robots interacting with humans," in *Robotics and Automation, 2008. ICRA 2008. IEEE International Conference on*, 2008.
- [3] N. Tsagarakis, I. Sardellitti, and D. Caldwell, "A new variable stiffness actuator (compact-vsa): Design and modelling," in *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2011 IEEE/RSJ International Conference on*, 2011.
- [4] A. D. Luca, A. Albu-Schaffer, S. Haddadin, and G. Hirzinger, "Collision detection and safe reaction with the DLR-III lightweight manipulator arm," in *Intelligent Robots and Systems, 2006 IEEE/RSJ International Conference on*, 2006.
- [5] M. Makarov, M. Grossard, P. Rodriguez-Ayerbe, and D. Dumur, "Active damping strategy for robust control of a flexible-joint lightweight robot," in *Control Applications (CCA), 2012 IEEE International Conference on*, 2012.
- [6] P. Garrec, F. Geffard, O. David, F.-X. Russotto, Y. Measson, and Y. Perrot, "Telerobotics research and development at CEA-LIST," in *ANS EPRRS-D - 13th Robotics & Remote Systems for Hazardous Environments and 11th Emergency Preparedness & Response*, 2011.
- [7] N. Abroug and E. Laroche, "Structured  $H_\infty$  framework for impedance minimization on robot arm with compliant actuation," in *Multi Conference on Systems and Control*, 2014.
- [8] G. Zames and B. Francis, "Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, no. 5, pp. 585–601, 1983.
- [9] P. Apkarian and D. Noll, "Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 1, pp. 71–86, 2006.
- [10] G. Pratt and M. Williamson, "Series elastic actuators," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 1995.
- [11] P. Garrec, *Robotics 2010 Current and Future Challenges*. INTECH, 2010, ch. Screw and cable actuators (SCS) and their applications to force feedback teleoperation, exoskeleton and anthropomorphic robotics.
- [12] Clark and N. Robert, *Introduction to Automatic Control Systems*, Wiley, Ed. Wiley, 1962.
- [13] A. D. Luca, *Handbook of Robotics*. Springer, 2008, ch. Robots with flexible elements, pp. 287–319.
- [14] J. Shamma and M. Athans, "Gain scheduling: potential hazards and possible remedies," *Control Systems*, vol. 12, pp. 101–107, 1992.
- [15] P. Apkarian and P. Gahinet, "A convex characterization of gain-scheduled  $H_\infty$  controllers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 40, pp. 853–864, 1995.
- [16] W. Sun, P. Khargonekar, and D. Shim, "Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 2034 – 2046, 1994.
- [17] D. Stilwell and W. Rugh, "Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduled controllers," *Automatica*, vol. 36, pp. 665–671, 2000.
- [18] J. E. Colgate and N. Hogan, "Robust control of dynamically interacting systems," *International Journal of Control*, vol. 48, 1988.
- [19] P. Gahinet and P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, no. 4, pp. 421–448, 1994.
- [20] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, 1989.
- [21] P. Gahinet and P. Apkarian, "Automated tuning of gain-scheduled control systems," in *IEEE Conference on Decision and Control*, 2013.
- [22] P. G. P. Apkarian and C. Buhr, "Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers," in *European Control Conference*, 2014.
- [23] W. Khalil and E. Dombre, *Modeling, Identification and Control of Robots*, K. P. Science, Ed. Kogan Page Science, 2000.
- [24] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical Optimization*. Springer, 2006, ch. Conjugate Gradient Methods.
- [25] J. Doyle, "Analysis of feedback systems with structured uncertainties," *Control Theory and Applications, IEEE Proceedings*, vol. 129, pp. 242–250, 1982.

# Human Force Augmentation : Optimal Control Parameters Tuning using Structured $H_\infty$ Synthesis

Neil Abroug<sup>1</sup> and Xavier Lamy<sup>2</sup> and Edouard Laroche<sup>3</sup>

**Abstract**—Human-Robot Co-Working is an active research domain in the field of robotics and control theory. Most of pioneering contributions addressing Co-Working interaction control problems has focused on PID based control. On the other hand, there are, in modern control theory, several tools allowing to design and tune arbitrarily complex servo-controllers. Non-Smooth optimization is one of recently developed tools that addresses the problem of tuning structured controllers according to  $H_\infty$ ,  $H_2$ , and pole placement specifications. In this paper, the problem of force amplification is transcribed into high level  $H_\infty$  specifications and is solved using Non-Smooth optimization. The resulting controller is tested on an industrial robot and shows similar performances as the state of the art while respecting some extra robustness certificates. Therefore, thanks to the abstraction level of the proposed technique, it becomes possible to tune interaction controllers with high number of tunable parameters according to complex performance/robustness specifications.

## I. INTRODUCTION

A current trend of robotic research is to address painful manufacturing tasks that are still performed entirely by human workers. Among the difficulties that restrain the use of classical robotic solutions for a particular task, we may point the variability of the process or the bad ratio between programming and manufacturing costs for little series production that need complex trajectories.

Intelligent assist devices [1] and more specifically cobots are good trade-off to address those tasks: by allowing the worker to interactively drive the robot with a force feedback, they allow to combine the force and precision of the robot to the ease of human worker to perceive the current task's state and to adapt to its variations.

Among the fundamental features offered by cobots that are weight compensation [2], virtual guidance [3], [4], vibration filtering [5], lead-through programming [6] and force augmentation, we will focus on the last one. In force augmentation control, the operator applies some force on the cobot, and the cobot applies the up-scaled force to the tool. This allows the operator to guide the robot, using its strength to perform the task with much less effort. Depending on the task he wants to perform, it may be useful for the user to adjust the force amplification ratio: note that the choice of this ratio is subject to a trade-off between the lowest execution force to be provided by the user (this leads to

select a high force amplification ratio) and sufficient force sensitivity in order to prevent tool or current workpiece destruction (this leads to reduce the force ratio).

Former publications [7], [8], [9], [10] provide solutions to implement such a control law using two force sensors (one for the tool side force measurement, the other one for the user side). Two force sensors are required in case of non or poorly back-drivable actuating mechanism that are commonly used on industrial robot. But on modern robots that are specifically designed for force feedback control (such as KUKA IWA or RB3D A6.15), only one sensor is required for force amplification: motor torques allow good end-effector force estimation, but it is still mandatory to distinguish the forces applied to the cobot's end effector from the tool side and the force applied from the user side.

Force augmentation on a compliant arm using two force sensors and PI controllers, while ensuring robust stability in an unstructured environment, has been already studied, and the reachable performances have been formally parametrized according to mechanical parameters and controller gains [11]. For controllers with more tunable parameters, it is hopeless to obtain analytical solutions.

In the  $H_\infty$  framework, the controller is designed by solving the so-called standard problem consisting in minimizing the  $H_\infty$  norm of some weighted performance channel [12]. Based on non-smooth optimization, efficient methods have been recently developed to solve the non-convex structured  $H_\infty$  problem which allows to design a fixed-structure controller that respects  $H_\infty$  performance and robustness criteria [13].

The human force augmentation problem has been commonly studied as a special case of end-effector force tracking [10]. Available tuning rules are closely related to the proposed control scheme, so it is impractical to extend them to alternative control structures. In order to have a more generic control design framework that is independent from the chosen control structure, we re-investigate the human force augmentation problem and infer formal control design specifications that are reformulated as an  $H_\infty$  norm minimization program. In this novel framework, the non-smooth optimization allows to tune, under free-space and contact stability constraints, a controller that minimizes the user's required force to drive the cobot during free-space task and that amplifies user's force during contact task. In practice, the designed controller enables settable force augmentation for back-drivable robots using only one force sensor. A particular method for identifying the cobot's dynamics is depicted. It particularly reports well the cobot's base and bodies flexibilities that are known to affects the stability of

<sup>1</sup>CEA, LIST; Interactive Robotics Laboratory; DIGITEO Labs, 91190 Gif sur Yvette, France neil.abroug@cea.fr

<sup>2</sup>CEA, LIST; Interactive Robotics Laboratory; DIGITEO Labs, 91190 Gif sur Yvette, France xavier.lamy@cea.fr

<sup>3</sup>Cube laboratory; University of Strasbourg & CNRS; 300 bd Sébastien Brant; F-67412 Illkirch laroche@unistra.fr

the non-collocated force-feedback loop [14], [15]. To ensure the robust stability of the cobot interacting with a wide range of environments and user behaviors, a passivity-like criterion has been considered [10] using an  $H_\infty$  characterization of positive-realness [16].

Within the proposed framework, it is easy to tune a linear controller with an arbitrary structure (for whom, unlike PI controllers, analytical solutions defining an acceptable parameter tuning region are not available) according to rich performance and robustness specifications.

This paper is organized as follows. Section II formalizes the human force amplification problem. In section III, the problem is translated into a structured  $H_\infty/H_2$  synthesis problem. In Section IV, the methodology is illustrated through a case study using an industrial robot and the resulting controller is experimentally verified and compared to the method from [11].

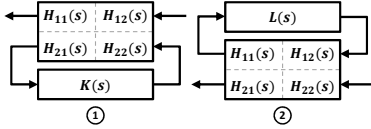


Fig. 1. Linear Fractional Transform

*Notations:* The Laplace variable being denoted  $s$ , the ratio between the force  $F(s)$  applied to a mechanical system and its velocity  $V(s)$ , measured at the same point, is the **impedance**  $Z(s)$  such that  $F(s) = Z(s)V(s)$ . The inverse of an impedance is the **admittance**  $Y(s)$ . The ratio between the force  $F_1(s)$  applied to a mechanical system and its velocity  $V_2(s)$ , measured at a different point, is the **transfer impedance**  ${}_iZ(s)$  such that  $F_1(s) = {}_iZ_{1 \rightarrow 2}(s)V_2(s)$ . The inverse of a transfer impedance is the **transfer admittance**  ${}_iY(s)$ . Given two linear dynamic systems  $H(s)$  and  $K(s)$  of appropriate dimensions and considering a block partition  $H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix}$ , the lower linear fractional transformation (LFT) presented in Fig. 1-1 writes  $\mathcal{F}_l(H(s), K(s)) = H_{11} + H_{12}K(I - H_{22}K)^{-1}H_{21}$  where  $I$  is the identity matrix and the Laplace variable  $s$  has been omitted for compactness. The upper LFT (Fig. 1-2) writes  $\mathcal{F}_u(L(s), H(s)) = H_{22} + H_{21}L(I - H_{11}L)^{-1}H_{12}$ . Given a complex matrix  $M$ ,  $\bar{\sigma}(M)$  denotes its maximal singular value. For a multivariable dynamical system, denoted by its transfer function  $H(s)$ , its  $H_\infty$  norm is  $\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^+} \bar{\sigma}(H(j\omega))$  and its  $H_2$  norm is  $\|H(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum \sigma^2(H(j\omega)) d\omega}$ .

## II. HUMAN FORCE AMPLIFICATION PROBLEM FORMALIZATION

One of the main difficulties, when addressing interaction control problems, is that there are, generally, very few assumptions on the robot's environment (typically no other assumption except passivity). In most cases, it is mandatory to build the interaction control specifications on the robotic

system regardless to the interaction with the environment. Such an approach is commonly called **impedance control**. The task is even more challenging, if a unique linear time-invariant (LTI) controller is considered to address both the free space movement and contact task. This approach has, already, been studied by Colgate [17] and Kazerooni [18] in the context of PID control. In the following, we re-investigate this problem from the scope of the  $H_\infty$  control theory.

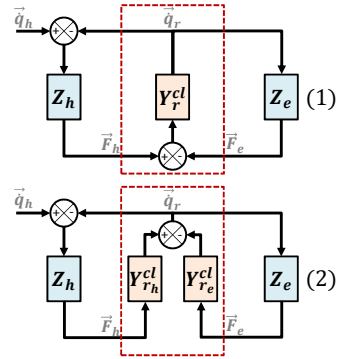


Fig. 2. Human-Robot Interaction Block Diagram

Fig. 2 represents a Human-Robot-Environment Interaction (HREI) block-diagram. In the following, both the human and the environment (assumed to be stiff) are modeled as impedances  $Z_h$  and  $Z_e$ . The **controlled** robot arm is modeled as a unique admittance  $Y_r^{cl}$  or two different admittances  $Y_{rh}^{cl}$  and  $Y_{re}^{cl}$  according to whether forces applied respectively from the human and from environment sides are distinguishable or not.  $Z_h$  and  $Z_e$  are collocated (i.e. they share the same robot velocity  $\dot{q}_r$ ).

### A. Free Space movement (Transparency)

During free space movement ( $Z_e = 0$ ), the robot controller should allow the robot's velocity  $\dot{q}_r$  to track the human's desired velocity  $\dot{q}_h$  using the lowest possible human-robot interaction force  $F_h$ . Such a behavior is called **transparency**. Formally, minimizing the robot resistance to human movement can be expressed as the minimization of  $\int_0^\infty |F_h(t)| dt$ .  $\dot{q}_h(t)$  being the only input of the HREI system, this specification can be also expressed as the minimization of the effect of  $\dot{q}_h(t)$  on  $F_h(t)$ .

From Fig. 2-1, the transfer function  $\frac{F_h(s)}{\dot{q}_h(s)}$  can be expressed as follows:

$$\frac{F_h(s)}{\dot{q}_h(s)} = \frac{Z_h(s)}{1 + Z_h(s)Y_r^{cl}(s)} \quad (1)$$

From this equation, it can be seen that the higher the closed loop robot arm admittance  $Y_r^{cl}(s)$  is, the less it opposes the operator movement. Therefore, the control specification for the free space movement can be expressed as the maximization of  $Y_r^{cl}(s) = \frac{\dot{q}_r(s)}{F_h(s)}$ .

### B. Contact Task (Force Augmentation)

Denoting  $\alpha$  a number greater than one representing the desired amplification factor, the basic idea behind force amplification is to ensure  $F_e(t) = \alpha F_h(t)$  in steady state, when considering a step input on  $\dot{q}_h$ . According to the final value theorem, and denoting  $Z_h^{cl}(s) = \frac{F_h(s)}{\dot{q}_h(s)}$  and  ${}_t Z_{h \rightarrow e}^{cl}(s) = \frac{F_e(s)}{\dot{q}_h(s)}$ , the preceding condition can be rewritten as:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \alpha Z_h^{cl}(s) - {}_t Z_{h \rightarrow e}^{cl}(s) = 0 \quad (2)$$

Without a distinction of the robot admittance appearing from the human side and the one appearing from the environment side (Fig. 2-1), and assuming  $\lim_{s \rightarrow 0} Z_e(s) = +\infty$  (stiff environments), we have:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \alpha Z_h^{cl}(s) - {}_t Z_{h \rightarrow e}^{cl}(s) = Z_h(\alpha - 1) \quad (3)$$

Therefore, condition (2) is reachable only for  $\alpha = 1$  (i.e. no amplification is possible). Consequently, it is mandatory to **distinguish the human side robot admittance from the environment side one**. Such a distinction is possible, at least in low frequencies, using forces measurement discrimination between  $F_h$  and  $F_e$  (Fig. 2-2). In this case, we obtain :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \alpha Z_h^{cl}(s) - {}_t Z_{h \rightarrow e}^{cl}(s) = Z_h \frac{\alpha Y_{r_e}^{cl} - Y_{r_h}^{cl}}{Y_{r_e}^{cl}} \quad (4)$$

where  $Y_{r_h}^{cl}(s)$  denotes the robot closed-loop admittance seen from the human side and  $Y_{r_e}^{cl}(s)$  the robot closed loop admittance seen from the environment side. In this case, and assuming  $Y_{r_h}^{cl}(s) = \alpha Y_{r_e}(s)$ , we obtain:  $\lim_{s \rightarrow 0} \alpha Z_h^{cl}(s) - {}_t Z_{h \rightarrow e}^{cl}(s) = 0$  for any  $\alpha \geq 1$ .

**Conclusion:** Given two tunable transfer functions  $Y_{r_h}^{cl}(s)$  and  $Y_{r_e}^{cl}(s)$  representing respectively the human side and the environment side robot admittances and  $\alpha$  the desired amplification factor greater than 1, the force amplification functionality is realized by maximizing  $Y_{r_h}^{cl}(s)$  and approaching  $Y_{r_h}^{cl}(s) = \alpha Y_{r_e}^{cl}(s)$  up to a desired band-width  $\omega_c$ .

## III. TRANSLATION TO STANDARD $H_\infty/H_2$ REQUIREMENTS

### A. $H_\infty$ characterization of $Y_{r_h}$ maximization

In [19], admittance maximization problem was addressed by solving the following  $H_\infty$  problem:

$$\text{minimize} \left( \left\| W_{y_h}(s) Y_{r_h}^{cl}(s) \right\|_\infty; W_{y_h}^{-1}(s) = \frac{1}{J_r s} \right) \quad (5)$$

where  $W_{y_h}^{-1}(s)$  represents the specified admittance at the human side and  $J_r$  being the desired robot arm apparent inertia. This formulation takes advantage of mini-max problem feature that tends to rise the overall function curve when pressing on its peaks [13]. The main drawback of the proposed formulation is its limitation to resonant systems (exhibiting peaks on its frequency response function) and the impossibility to control the low frequency behavior, which represents some limitation. Therefore, to extend its applicability, we propose to add the following objective:

$$\text{minimize} \left( \left\| 1 - W_{y_h}(s) Y_{r_h}^{cl}(s) \right\|_\infty \right) \quad (6)$$

Noticing that  $W_{y_h}(W_{y_h}^{-1}(s) - Y_{r_h}^{cl}(s)) = 1 - W_{y_h}(s) Y_{r_h}^{cl}(s)$ , this specification tends to minimize the maximum gap between  $Y_{r_h}(s)$  and  $W_{y_h}^{-1}(s)$  after weighting the output error by  $W_{y_h}$  to regularize the problem by considering finite gain in low frequencies<sup>1</sup>.

### B. $H_\infty/H_2$ characterization of force amplification

From II-B, it has been shown that respecting the following condition gives a sufficient condition to amplify  $\alpha$  times the human force:

$$\alpha Y_{r_e}^{cl}(s) - Y_{r_h}^{cl}(s) = 0 \quad (7)$$

Due to the limited control bandwidth, it is impractical to modify the high frequency dynamics of the controlled system:

$$Y_{r_e}^{cl}(j\omega) \simeq Y_{r_h}^{cl}(j\omega) \simeq Y_{r_e}^{ol}(j\omega) \simeq Y_{r_h}^{ol}(j\omega); \omega \gg \omega_c \quad (8)$$

where  $cl$  and  $ol$  exponents denote respectively the closed-loop and the open-loop transfer functions.

Therefore, (7) condition can be approached only for a limited bandwidth. Given  $\omega_c$  the desired force amplification bandwidth and assuming (5) and (6) are reachable, (7) can be expressed in the following  $H_\infty$  form:

$$\text{minimize} \left( \left\| W_{amp}(s) \left( Y_{r_h}^{cl}(s) - \alpha Y_{r_e}^{cl}(s) \right) \right\|_\infty \right) \quad (9)$$

$$W_{amp}(s) = \frac{p_o s + \delta}{s + \omega_c}$$

with  $\delta$  being the authorized amplification error and  $p_o$  the authorized percentage of transient over-shoot.

### C. $H_\infty$ characterization of system's stability regardless to interaction with the human and the environment

To ensure robot's integrity, it is mandatory to ensure its stability, even before considering its physical interaction with the human operator and the environment, and notwithstanding uncertainties covering the unmodeled dynamics.

Given a stability gain margin  $M_g[dB]$ , a sufficient modulus margin  $M_\alpha$  to satisfy is given by the expression:

$$M_\alpha = 1 - \frac{1}{10^{\frac{M_g}{20}}} \quad (10)$$

Let  $H(s)$  be the nominal transfer function matrix of the considered robot and  $K(s)$  the robot controller such as  $[Y_{r_h} | Y_{r_h}] = \mathcal{F}_l(H(s), K(s))$ . In order to account for a set of possible behaviors of the system around a nominal model, an uncertain model can be built according to the so called multiplicative uncertainty modeling framework [20]. The system's uncertain transfer function matrix writes :

$$\tilde{H}(s, \Delta) = H(s) \left( 1 + \tilde{\Delta} W_{unc}(s) \right) \quad (11)$$

with  $W_{unc}(s)$  a weighting function whose norm is the upper bound of the input multiplicative uncertainty, and  $\tilde{\Delta}$  a complex scalar uncertainty respecting  $\|\tilde{\Delta}\|_\infty \leq 1$ .

<sup>1</sup>it is also possible to consider  $H_2$  norm instead of  $H_\infty$  one.

Denoting  $S_u(s)$  and  $T_u(s)$  respectively the sensitivity and the complementary sensitivity functions [21] of the nominal closed-loop system  $\mathcal{F}_l(H(s), K(s))$  evaluated at the controller output, the following specification gives a sufficient condition for robust stability of the uncertain closed-loop system  $\mathcal{F}_l(\tilde{H}(s, \Delta), K(s))$  [22]:

$$\left\| \begin{array}{c} W_s(s) \cdot S_u(s) \\ W_t(s) \cdot T_u(s) \end{array} \right\|_{\infty} \leq 1; \quad W_s = M_{\alpha}^{-1}, \quad W_t = W_{unc} \quad (12)$$

*D.  $H_{\infty}$  characterization of system's stability when interacting with the human and the environment*

In order to ensure unconditional stability of robots performing contact tasks in an unstructured environment, it is sensible to ensure the passivity of the controlled robot at its interaction ports [17]. Unfortunately, force augmentation cobots are inherently non-passive systems as force augmentation is an intrinsically non power conserving task. Passivity based stability criterion is no-longer helpful to prove unconditional contact stability in this case. In [10], Lamy et al. have proposed a passivity-like unconditional stability criterion for a force augmentation system in contact with a stiff passive environments, given an upper bound on cobot's end-point tool weight/inertia  $J_{tmax}$ , stated in the following theorem.

**Theorem 1:** Assuming there is **no direct physical interaction between the human and the environment**, a force augmentation assist devices is unconditionally stable when interacting simultaneously with a human and a passive stiff environments if and only if:

$$\begin{aligned} \Re(Y_{rh}) &\geq 0 \\ \Re(Y_{rh}) \Re(Y_{re}) + \Im(Y_{rh}) \Im(Y_{re}) &\geq 0 \\ \Re(Y_{rh}) \Im(Y_{re}) - \Im(Y_{rh}) \Re(Y_{re}) &\geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$\Re(Y_{rh}) - (\Re(Y_{rh}) \Im(Y_{re}) - \Im(Y_{rh}) \Re(Y_{re})) J_{tmax} \omega \geq 0$  where  $\Re(x)$  denotes the real part of a complex number  $x$  and  $\Im(x)$  its imaginary part.

In order to be handled in a  $H_{\infty}$  framework, this theorem is rewritten as the following lemma:

**Lemma 1:** Assuming there is **no direct physical interaction between the human and the environment**, a force augmentation assist device is unconditionally stable when interacting simultaneously with a human and a passive stiff environments if and only if:

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{F}_u(M, Y_{rh}(s)) \right\|_{\infty} &\leq 1 \\ \left\| \mathcal{F}_u\left(M, \frac{Y_{re}(s)}{Y_{rh}(s)}\right) \right\|_{\infty} &\leq 1 \\ \left\| \mathcal{F}_u\left(M, \frac{Y_{re}(s)}{s Y_{rh}(s)}\right) \right\|_{\infty} &\leq 1 \\ \left\| \mathcal{F}_u\left(M, \frac{Y_{re}(s) J_{tmax} s + 1}{Y_{rh}(s)}\right) \right\|_{\infty} &\leq 1 \end{aligned} \quad (14)$$

with  $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

**Proof 1:** The proof of the Lemma is developed in three steps. In step 1, the inequalities in (13) are, reformulated as half plane constraints in the Nyquist domain. In Step 2, the

mapping properties of the Cayley's transform are recalled. In step 3, a minimal LFT realization of Cayley's transform is proposed.

**Step 1:** Let  $Y_{re} = aY_{re} + j bY_{re}$  and  $Y_{rh} = aY_{rh} + bY_{rh} j$  be the separation of  $Y_{re}$  and  $Y_{rh}$ , into real and imaginary parts. Now, let's consider the two transfer functions  $X_1 = \frac{Y_{re}}{Y_{rh}}$  and  $X_2 = \frac{Y_{re} J_{tmax} s + 1}{Y_{rh}}$ . Separating  $X_1$  and  $X_2$  into real and imaginary parts gives the following expressions:

$$\begin{aligned} \Re(X_1) &= \frac{aY_{re} aY_{rh} + bY_{re} bY_{rh}}{aY_{rh}^2 + bY_{rh}^2} \\ \Im(X_1) &= \frac{bY_{re} aY_{rh} - aY_{re} bY_{rh}}{aY_{rh}^2 + bY_{rh}^2} \\ \Re(X_2) &= \frac{aY_{rh} + (aY_{re} bY_{rh} - aY_{rh} bY_{re}) J_{tmax} \omega}{aY_{rh}^2 + bY_{rh}^2} \\ \Im(X_2) &= \frac{-bY_{rh} + (aY_{re} aY_{rh} - bY_{re} bY_{rh}) J_{tmax} \omega}{aY_{rh}^2 + bY_{rh}^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Since  $aY_{rh}^2 + bY_{rh}^2 \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}^+$ , inequalities in (13) are respectively equivalent to:

$$\begin{aligned} \Re(Y_{rh}) &\geq 0 \\ \Re(X_1) &\geq 0 \\ \Im(X_1) &\geq 0 \\ \Re(X_2) &\geq 0 \\ \forall \omega \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (16)$$

**Step 2:** Cayley transform [16] is a conformal map that projects a given complex half plane to the unit disc. Given a complex function  $G$ , we have:

$$\begin{aligned} \Re(G) \geq 0 &\iff \left\| \frac{G-1}{G+1} \right\|_{\infty} \leq 1 \\ \Im(G) \geq 0 &\iff \left\| \frac{G-j}{G+j} \right\|_{\infty} \leq 1 \end{aligned} \quad (17)$$

Since  $s = j \omega$  in the frequency domain, we obtain:

$$\begin{aligned} \Re(G) \geq 0 &\iff \left\| \frac{G-1}{G+1} \right\|_{\infty} \leq 1 \\ \Im(G) \geq 0 &\iff \left\| \frac{\frac{G}{s}-1}{\frac{G}{s}+1} \right\|_{\infty} \leq 1 \\ &\forall \omega \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (18)$$

**Step 3:** If the Cayley transform is used directly,  $G$  appears two times, which raises the dimension of the problem. Given  $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ , a minimal realization of the Cayley transform writes<sup>2</sup>:

$$\frac{G-1}{G+1} = \mathcal{F}_1(M, G) \quad (19)$$

Inserting (16) in (18) and (18) in (19) provides (14) which concludes the proof.

<sup>2</sup>Using this LFT form instead of the direct bi-linear forms fastens the convergence of the optimization problem [23].

### E. Solving using non-smooth optimization

The goal of the synthesis procedure is to find a controller  $K(s)$  that simultaneously solves (5), (6), (9), (12), and (14) specifications. It can be noticed that, for an unstructured controller and without considering contact stability requirements, the  $H_\infty$  problem can be solved with classical LMI (Linear Matrix Inequalities) [24] and Riccati [25] tools. However, when considering the contact stability requirements, the control design synthesis problem becomes structured, even for an unstructured controller.

Unlike the unstructured case, the fixed-structure  $H_\infty$  synthesis problem is non convex and can no longer be written as a linear matrix inequality (LMI) problem. Because of the NP-hardness of the structured  $H_\infty$  synthesis, there is no known time efficient algorithm that can solve it with global optimality guarantees. The method from Apkarian and Noll operates a specialized sub-gradient-based optimization algorithm [13] that, locally, solves the  $H_\infty$  minimization problem in the reduced space of system tunable parameters. Despite its lack of global optimality, applied to the considered problem, this method has shown accurate results with an acceptable execution time<sup>3</sup>.

The proposed procedure allows also to distinguish hard requirements that are mandatory from soft requirements that tolerate violation.

In this work, objectives (12) and (14), which guarantee the integrity of the robot and its environment, have been considered as hard requirements, while the rest of the objectives have been considered as soft specifications.

## IV. ILLUSTRATION

### A. Case Study Overview

1) *System Description*: To illustrate the use of the methodology, we consider an A6.15 industrial cobot (Fig. 3) equipped with 6 actuated joints allowing 5 degrees of freedom in the workspace frame. The joints are actuated using DC motors (equipped by incremental encoders) and Harmonic Drives [26] transmission mechanism. The end effector is equipped at the human side by a 6 axis force/torque sensor, while there is no sensor at the tool side. As a simplified use case, we consider force amplification only on the 4<sup>th</sup> axis (indicated by an arrow in Fig. 3) while the remaining degrees of freedom are blocked using a stiff position control. The motor controller (which is not under the scope of this contribution) operates a high gain inner proportional velocity loop based on motor velocity measure  $\dot{\theta}_m$  (Fig. 4) which squeezes joint friction nonlinearities. In this configuration, the robot can be reasonably considered as a linear system.

The chosen controller is composed of two parts (Fig. 4):

- an estimator of the environment side interaction force projected to the joint space: Denoting  $\Gamma_e = J_T F_e$  and  $\Gamma_h = J_T F_h$ , where  $J_T$  represents the robot Jacobian transpose matrix, an estimation of the environment side torque  $\hat{\Gamma}_e$  is obtained by subtracting the contribution of

<sup>3</sup>the execution time grows polynomially with the number of states  $n_x$  and the number of tunable parameters  $n_p$ :  $O(n_p^2) + O(n_x^2)$



Fig. 3. RB3D's A6.15 cobot

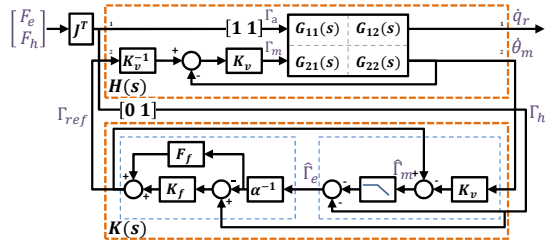


Fig. 4. Robot Control Architecture

$\Gamma_h$  from the entire motor torque estimation  $-\hat{\Gamma}_m$  filtered with a 1<sup>st</sup> order low pass filter cutting at  $\omega_f$ .

- a 2 DoF PI force amplification controller: a feedback compensator  $K_f(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$  is fed by  $\Gamma_h - \alpha^{-1}\hat{\Gamma}_e$ , while  $\alpha^{-1}\hat{\Gamma}_e$  is also passed through a static feed-forward filter  $F_f$  to contribute to the controller output  $\Gamma_{ref}$ .

Therefore, according to the proposed control structure, there are 4 parameters to tune using the non-smooth optimization to solve the force amplification problem.

2) *System Identification*: The robot is considered as a black-box and the four SISO transfer functions are identified separately:  $H_{11}(s) = \frac{\dot{q}_r(s)}{\Gamma_a(s)}$ ,  $H_{12}(s) = \frac{\dot{q}_r(s)}{\Gamma_{ref}(s)}$ ,  $H_{11}(s) = \frac{\Gamma_m(s)}{\Gamma_a(s)}$  and  $H_{22}(s) = \frac{\dot{\theta}_m(s)}{\Gamma_{ref}(s)}$ . The identification procedure is performed in two steps. First, the frequency response functions (FRF) of every SISO transfer of  $H(s)$  are obtained using cross-power method [27] with logarithmic sweep sine excitation. Second, a rational transfer function is fitted to every FRF using curve fitting tools [28]. To ensure an inertia-like behavior in high frequencies, the fitted function is forced to have a relative degree of one.

Lamy et al. [29] have proposed an experimental setup for the identification of the FRF of  $H_{11}(s)$  and  $H_{12}(s)$ . In this work we consider the same setup and extend it to the identification of  $H_{21}(s)$  and  $H_{22}(s)$  since  $\dot{\theta}_m$  is measurable. Considering an

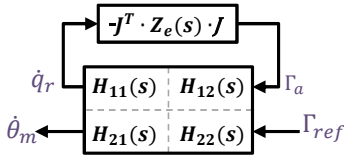


Fig. 5. Robot-Environment Interaction Block Diagram

upper LFT model of the uncontrolled robot arm connected to an environment  $Z_e$  (Fig. 5), it can be seen that for the two limits  $Z_e \rightarrow 0$  and  $Z_e \rightarrow \infty$  we obtain the following results:

$$\begin{aligned}
 \lim_{Z_e(s) \rightarrow 0} \frac{\dot{q}_r(s)}{\Gamma_{ref}(s)} &= H_{12}(s) \\
 \lim_{Z_e(s) \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_a(s)}{\Gamma_{ref}(s)} &= -\frac{H_{12}(s)}{H_{11}(s)} \\
 \lim_{Z_e(s) \rightarrow 0} \frac{\dot{\theta}_m(s)}{\Gamma_{ref}(s)} &= H_{22}(s) \\
 \lim_{Z_e(s) \rightarrow \infty} \frac{\dot{\theta}_m(s)}{\Gamma_{ref}(s)} &= \frac{H_{11}(s)H_{22}(s) - H_{12}(s)H_{21}(s)}{H_{11}(s)}
 \end{aligned} \quad (20)$$

Therefore, if we consider two experiences, one satisfying  $\|Y_r(s)Z_e(s)\|_2 \ll 1$  (small mass  $M_o$  connected to the robot effector), the second  $\|Y_r(s)Z_e(s)\|_2 \gg 1$  (stiff environment connected to the robot effector), and denoting  $H_{rf}(s) = \frac{F(s)}{\Gamma_{ref}(s)}$  and  $H_{rm}(s) = \frac{\dot{\theta}_m(s)}{\Gamma_{ref}(s)}$ , each SISO transfer function of the robot can be expressed by solving (20) as follows:

$$\begin{aligned}
 H_{11}(s) &= -\frac{H_{rf_o}(s)}{H_{rf_\infty}(s)Z_{e_o}(s)} \\
 H_{12}(s) &= \frac{H_{rf_o}(s)}{Z_{e_o}(s)} \\
 H_{21}(s) &= -\frac{H_{rm_o}(s) - H_{rm_\infty}(s)}{H_{rm_\infty}(s)} \\
 H_{22}(s) &= H_{rm_o}(s)
 \end{aligned} \quad (21)$$

such that  $Z_{e_o}(s) = M_o s$ ; and where  $o$  and  $\infty$  indexes stand for the considered experience (respectively small mass and stiff wall). An acceptable fitting has been obtained for  $H(s)$  of 22<sup>nd</sup> order. The obtained FRF and the fitted  $H(s)$  MIMO system are illustrated in Fig. 6.

In order to ensure some robustness with respect to the model uncertainties, an uncertain model of  $H_{22}(s)$ <sup>4</sup> has been established in the multiplicative form  $\tilde{H}_{22}(s, \Delta) = H_{22}(s)(1 + \tilde{\Delta}W_{unc}(s))$  where  $\tilde{\Delta}$  is a scalar complex uncertainty bounded in norm by one.  $H_{22}(s)$  is chosen as the analytic identified model whereas  $W_{unc}(s)$  is identified such that the FRF identified experimentally is included in the uncertain model, as shown in Fig. 7.

## B. Results

1) *Synthesis Results and Analysis*: The problem of finding a controller satisfying (5), (6), and (9), while respecting (12) and (14), and considering  $\alpha = 10$  has been solved using the

<sup>4</sup> $H_{22}(s)$  is the only transfer function involving in a closed-loop

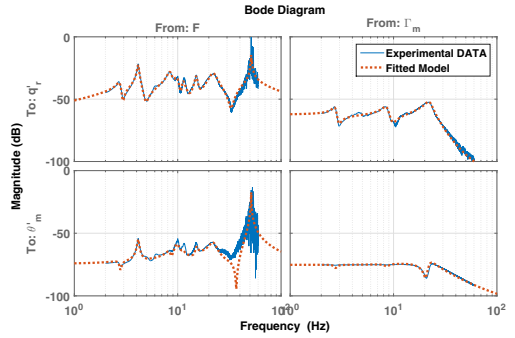


Fig. 6. Robot Model Identification

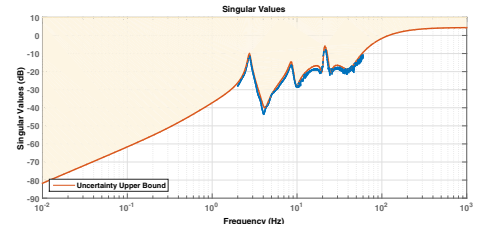


Fig. 7. Multiplicative Uncertainty Bound

systeme Matlab routine [23].<sup>5</sup> The resulting parameters of  $K(s)$  are summarized in the TABLE I. The controller is

TABLE I  
LIST OF TUNED CONTROL PARAMETERS

Parameter Name	Value
$K_p$	2.7
$K_I$	168.3 s <sup>-1</sup>
$F_f$	2.8
$\omega_f$	276 rad.s <sup>-1</sup>

designed directly in its discrete-time form (with sampling rate  $T_s = 2$  ms) while the system has been discretized considering a zero-order hold at input. The resulting  $\bar{\sigma}_{max}$  is 1.00 for the hard constraints and 0.81 for the soft requirements. The obtained performance indexes being equal to one, all the specifications are almost satisfied<sup>6</sup>. In the following, we will take a look to the different specifications individually.

- **Free-Space Stability**: If we focus on the robust stability of the closed-loop system and considering a modulus margin  $M_\alpha = 0.5$  (corresponding to a gain margin  $M_g = 6$  dB), it can be seen that the specification has been satisfied :  $\bar{\sigma}_{eq,12} = 0.732$ , where the number in lower index refers to the considered equation.

<sup>5</sup>with 8 random starts, *systeme* takes around 14 seconds to converge using an Intel® Core™ i7-6600U CPU and a 4Gb RAM

<sup>6</sup>We recall that the specification is satisfied as soon as the singular  $\bar{\sigma}$  value is lower or equal to 1.

Fig. 8 gives a graphical interpretation of (12) where the Nyquist plot of all randomly selected realizations of  $K_{12}(s) \hat{H}_{22}(s, \Delta)$  should remain outside the circle centered on  $-1$  and of radius  $M_\alpha$ . It can be noticed that the given criterion is satisfied for all variations of the uncertainty.

- **Contact Stability:** Specifications ensuring contact stability have been exactly satisfied as highlighted from the obtained  $H_\infty$  norm:  $\bar{\sigma}_{eq,14} = 1.00$ . As a graphical interpretation, it can be seen, from Fig. 9 that the phase of both  $Y_{rh}^{cl}(s)$  and  $\frac{Y_{re}^{cl}(s) J_{max} s + 1}{Y_{rh}^{cl}(s)}$  remains almost bounded in the  $[-90^\circ, 90^\circ]$  interval, while the phase of  $\frac{Y_{re}^{cl}(s)}{Y_{rh}^{cl}(s)}$  remains bounded in the  $[0^\circ, 90^\circ]$  interval.

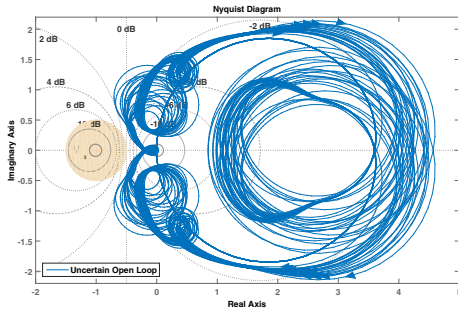


Fig. 8. Nyquist diagram of  $K_{12}(s)\hat{H}_{22}(s, \Delta)$  for robust stability evaluation

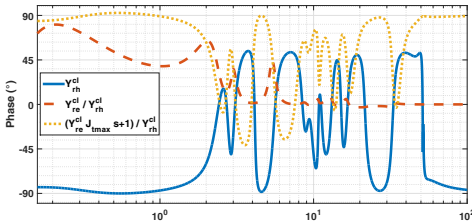


Fig. 9. Different Bode phase diagrams for contact stability evaluation

- **Transparency:** Both (5) and (6) have been largely satisfied:  $\bar{\sigma}_{eq,5} = 0.64$ ,  $\bar{\sigma}_{eq,6} = 0.81$ . From Fig. 10, it can be seen that  $Y_{rh}^{cl}(s)$  has been efficiently risen up compared to  $Y_{rh}^{ol}(s)$  but without exactly reaching the specified inertia. It is expected that more degrees of freedom on the controller would reduce this conservatism.
- **Force Augmentation:** Given  $\delta = 0.1$ ,  $\omega_c = 2 \pi 0.5 \text{ rad.s}^{-1}$  and  $p_o = 1.1$ , (9) has been accurately satisfied :  $\bar{\sigma}_{eq,9} = 0.81$ . From Fig. 11, it can be seen that the equation (7) is verified up to  $0.5 \text{ Hz}$  and beyond.

2) *Experimental Results:* In order to validate the proposed tuning procedure, the behavior of the controlled system

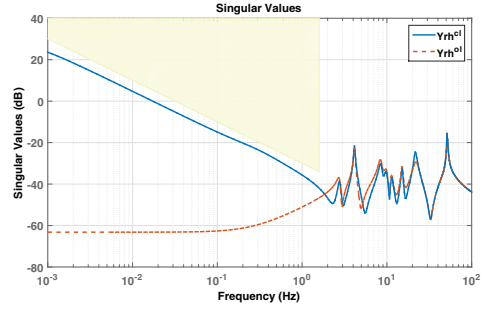


Fig. 10.  $Y_{rh}$  Maximization Specification

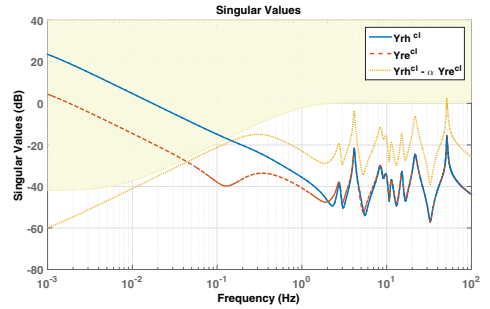


Fig. 11. Force Amplification Specification

with the proposed controller labeled  $K_1$  is experimentally compared to two other controllers. The first one,  $K_0$ , is the original controller of the A6.15 cobot, synthesized using [11] while the cutting frequency of the estimator filter has been set arbitrarily to  $50 \text{ Hz}$ . The last controller,  $K_2$ , has been synthesized using the present  $H_\infty$  approach, but without considering (14) requirement. The different controllers have been implemented in the TAO robotic middleware [30] that controls the A6.15 cobot. The assigned task of the cobot is to assist the operator in bending a stiff metallic bar (see Fig.12).

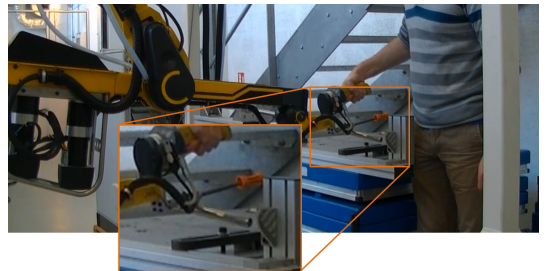


Fig. 12. RB3D's A6.15 cobot



$K_1$  shows similar performances as the initial controller  $K_0$  in term of force amplification and contact stability. However, thanks to the abstraction level of the  $H_\infty$  framework, it was possible to tune the control parameters systematically and to give some extra specification to the synthesis like robustness to uncertainties. Compared to  $K_1$ ,  $K_2$  allows better transparency and more agility. However, instabilities were observed when being in contact with a stiff environment.

## V. DISCUSSION AND CONCLUSION

In this work, the problem of human force augmentation has been solved using non-smooth optimization and high level  $H_\infty$  specifications. The proposed methodology has been tested for tuning a PI controller, a structure that has been largely considered in the literature. In this case, the results reported in the paper match those available in the literature, which comforts the efficiency of the methodology. Moreover, in this novel framework, it becomes possible to take advantage of the power of standard  $H_\infty$  and  $H_2$  norms to specify complex performance and robustness requirements. In addition, solving an  $H_\infty/H_2$  problem using non-smooth optimization allows considering more complex control structures than simple PI in order to get less conservative human-robot interaction control systems. Considering more complex control structures will be the scope of future works. Moreover, despite the paper focuses on single robot joint, future works will, also, investigate the extension of the presented approach to multi-DOF robots using Linear Parameter Varying (LPV) modeling of the robots non-linear dynamics.

## REFERENCES

- [1] J. Colgate, M. Peshkin, and S. Klostermeyer, "Intelligent assist devices in industrial applications: a review," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, vol. 3, 2003, p. 25162521.
- [2] H. Kazerooni, "Human power amplifier for vertical maneuvers," US Patent 6 299 139, 2001.
- [3] L. Joly, "Commande hybride position/force pour la teleoperation : Une approche basee sur des analogies mecaniques." Ph.D. dissertation, Paris6, 1997.
- [4] M. Peshkin, E. Colgate, W. Wannasuphprasit, C.A.Moore, R. Gillespie, and P. Akella, "Cobot architecture," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, p. 377390, 2001.
- [5] B. Mitchell, J. Koo, M. Iordachita, P. Kazanzides, A. Kapoor, J. Handa, G. Hager, and R. Taylor, "Development and application of a new steady-hand manipulator for retinal surgery," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2007.
- [6] H. A. Marcelo, L. W. Lin, and L. Ser-Yong, "A walk-through programmed robot for welding in shipyards," *Industrial Robot : An International Journal*, vol. 26, p. 377388, 1999.
- [7] K. Kosuge, Y. Fujisawa, and T. Fukuda, "Control of robot directly maneuvered by operator," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 1993.
- [8] H. Kazerooni, "Extender : a case study for human-robot interaction via transfer of power and information signals," in *IEEE International Workshop Robot on and Human Communication*, 1993.
- [9] B. Cagneau, G. Morel, D. Bellot, N. Zemiti, and G. dAgostino, "A passive force amplifier," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2008.
- [10] X. Lamy, F. Colledani, F. Geffard, Y. Measson, and G. Morel, "Human force amplification with industrial robot : Study of dynamic limitations," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2010.
- [11] X. Lamy, F. Colledani, F. Geffard, Y. Measson, and G. Morel, "Overcoming human force amplification limitations in comanipulation tasks with industrial robot," in *8th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, 2010.
- [12] G. Zames and B. Francis, "Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, no. 5, pp. 585–601, 1983.
- [13] P. Apkarian and D. Noll, "Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 1, pp. 71–86, 2006.
- [14] S. Eppinger and W. Seering, "On dynamic models of robot force control," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1986.
- [15] W. S. Newman, "Stability and performance limits of interaction controllers," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, p. 563570, 1992.
- [16] A. Cayley, "Sur quelques proprietes des determinants gauches," *The Collected Mathematical Papers*, vol. 1, pp. 332–336, 2009 (Originally Published in 1889).
- [17] J. E. Colgate and N. Hogan, "Robust control of dynamically interacting systems," *International Journal of Control*, vol. 48, 1988.
- [18] H. Kazerooni, J.-L. Racine, L. Huang, and R. Steger, "On the control of the berkeley lower extremity exoskeleton (bleex)," in *Robotics and Automation, IEEE International Conference on*, 2005.
- [19] N. Abroug and E. Laroche, "Structured  $H_\infty$  framework for impedance minimization on robot arm with compliant actuation," in *Multi Conference on Systems and Control*, 2014.
- [20] A. A. Stoorvogel, "Robust stabilization of systems with multiplicative perturbations," *Proceedings of CDC*, pp. 365–370, 1991.
- [21] H. Sung and S. Hara, "Properties of sensitivity and complementary sensitivity functions in single-input single-output digital control systems," *International Journal of Control*, vol. 48, pp. 2429–2439, 1988.
- [22] M. Sidi, "A combined  $QFT/H_\infty$  design technique for tdof uncertain feedback systems," *International Journal of Control*, vol. 75, pp. 475–489, 2002.
- [23] P. Apkarian, P. Gahinet, and C. Buhr, "Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers," in *European Control Conference*, 2014.
- [24] P. Gahinet and P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, no. 4, pp. 421–448, 1994.
- [25] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, 1989.
- [26] D. K. Brighton, "Harmonic drives," US Patent 3 996 816 A, 1976.
- [27] ISO, Ed., *ISO 7626: Mechanical vibration and shock – Experimental determination of mechanical mobility*. ISO, 2011.
- [28] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 1975.
- [29] X. Lamy, F. Colledani, and P. Gutman, "Identification and experimentation of an industrial robot operating in varying-impedance environments," in *International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2010.
- [30] F. Geffard, P. Garrec, G. Piolain, M. Brudieu, J. Thro, A. Coudray, and E. Lelann, "TAO2000 v2 computer-assisted force feedback telemanipulators used as maintenance and production tools at the areva ncla hague fuel recycling plant," *Journal of Field Robotics*, vol. 29, pp. 161–174, 2012.

# Sector Bounds in Control Design and Analysis

Meng Xia, Pascal Gahinet, Neil Abroug, and Craig Buhr

**Abstract**—The Sector Stability Theorem is an intuitive condition for the stability of feedback loops that unifies many lines of research including robust control, passivity theory, dissipativity theory, and integral quadratic constraints (IQC) theory. This theorem plays a central role in deriving a frequency-domain test for general sector bounds and is used to develop efficient numerical algorithms for checking and enforcing sector bounds on linear time-invariant (LTI) systems. The notion of relative and directional indices are also developed. Two application examples illustrate the potential of the tool and techniques discussed in the paper.

## I. INTRODUCTION

Quadratic sector bounds have long been recognized as a useful characterization of dynamical system behavior [1]–[3]. Passivity, dissipativity with quadratic supply rate, and input/output gain are all special types of quadratic sector bounds. The Sector Stability Theorem [3] provides a very general geometric condition for the stability of feedback systems. Well-known corollaries include the Small Gain Theorem, the Passivity Theorem, the Circle Criterion, and the QSR Dissipativity Theorem [4]. Many recent results on passivity-based control and passivity indices [5] can also be viewed as special cases of the Sector Stability Theorem. This makes sector bounds appealing both as a unifying concept and as a bridge between robust control theory and the theory of passive/dissipative systems.

Sector bounds are also useful in control engineering. In haptic teleoperation, for example, safety considerations often dictate that the robot be passive when interacting with its environment, which puts a passivity constraint on the control system [6]. More generally, if plant behavior can be characterized in terms of sector bounds, the stability in the face of model uncertainty can be guaranteed by imposing corresponding sector bounds on the controller. This procedure is rooted in the Sector Stability Theorem and the related integral quadratic constraints (IQC) Theorem [7]. Passivity-based design has applications in large space structures, networked robotics and cyber security. Despite their practical value, sector bounds have not received as much attention as gain ( $H_\infty$ ) bounds [8] and computational tools for evaluating and enforcing sector bounds remain somewhat rudimentary.

The goals of this paper are threefold. First, provide a tutorial introduction to the concept of sector bound and its applications. Second, raise awareness of Sector Stability Theorem and show how it unifies many lines of research.

Meng Xia, Pascal Gahinet, and Craig Buhr are with MathWorks, Natick, MA, USA. Email: meng.xia, pascal.gahinet, craig.buhr@mathworks.com

Neil Abroug is with CEA-LIST, 91190 Gif sur Yvette, France. Email: neil.abroug@cea.fr

Third, propose efficient numerical algorithms to check or enforce sector bounds. The paper is organized as follows. Section II presents the notation. Section III gives a formal definition and various examples of quadratic sector bounds. Section IV recaps the Sector Stability Theorem and its many corollaries in stability analysis of feedback systems. Section V derives an important frequency-domain characterization of sector bounds. Sections VI introduces the notions of relative and directional sector indices for testing to which degree a system satisfies or violates a given sector bound. Section VII discusses numerical methods for computing these indices and enforcing sector bounds during controller synthesis. Finally, Section VIII illustrates the potential of the theory and algorithms on two applications.

## II. NOTATION

For vectors  $u$  or matrices  $A$ ,  $u^T$  and  $A^T$  denote the transpose, and  $u^H$  and  $A^H$  denote the Hermitian transpose. For a symmetric matrix  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \geq 0$  denotes that  $A$  is positive semi-definite,  $A > 0$  denotes that  $A$  is positive definite, and  $A$  is called indefinite if it has both positive and negative eigenvalues. The  $n$ -dimensional identity matrix is denoted by  $I_n$  or simply  $I$ . For a matrix pair  $(A, B)$ ,  $\sigma_{\max}(A, B)$  denotes the largest generalized singular value of  $(A, B)$ . For  $A$  symmetric,  $\lambda_{\min}(A)$  denotes the smallest eigenvalue of  $A$ .

Vector-valued signals are denoted by  $u(t)$  or simply  $u$  when the context is clear. Signals are considered in  $\mathcal{L}_{2e}$ , the space of signals that are square-integrable over all finite time intervals  $[0, T]$ . For such signals the following inner products and semi-norms are used:

$$\langle u, v \rangle_T \triangleq \int_0^T u^T(t)v(t)dt, \quad \|u\|_T \triangleq \sqrt{\langle u, u \rangle_T}.$$

When  $u(t)$  is square integrable,  $\|u\| = \lim_{T \rightarrow \infty} \|u\|_T$  is the standard  $\mathcal{L}_2$  norm (total signal energy).

The input/output behavior of a dynamical system is denoted by  $y = Gu$  where  $G$  is the operator mapping input signals  $u(t)$  to output signals  $y(t)$ . Unless otherwise stated, the mapping  $G$  is only required to be causal and can be nonlinear, MIMO, and unstable. The inverse mapping is denoted by  $G^{-1}$ . For linear time-invariant (LTI) systems,  $G(s)$  denotes the transfer function. Given a state-space realization  $(A, B, C, D)$  of  $G$ , the poles of  $G$  are the eigenvalues of  $A$  and  $G$  is stable when all its poles are in  $\text{Re}(s) < 0$ . The complex number  $s$  is a (invariant) zero of  $G$  if and only if the system matrix  $\begin{pmatrix} A-sI & B \\ C & D \end{pmatrix}$  is rank deficient. A zero  $s$  is in the right-half plane (RHP) when  $\text{Re}(s) \geq 0$ . When  $D$  is rank deficient,  $G$  is said to have zeros at infinity.

TABLE I

$Q$ matrix	System Property
$Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix}$	$y = Gu$ is finite-gain $\mathcal{L}_2$ stable and its gain is less than $\gamma$ : $\ y\ _T \leq \gamma \ u\ _T, \forall T \geq 0$ .
$Q = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$	$y = Gu$ is passive: $\langle u, y \rangle_T \geq 0, \forall T \geq 0$ .
$Q = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ -c & c^2 - r^2 \end{pmatrix}$	$y = Gu$ belongs to the conic sector with center $c$ and radius $r$ discussed in [1]: $\ y - cu\ _T \leq r \ u\ _T, \forall T \geq 0$ .
$Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a+b}{2} \\ -\frac{a+b}{2} & ab \end{pmatrix}$	A static nonlinearity $y = \phi(u)$ lies in the sector $[a, b]$ [9]: $au^2 \leq uy \leq bu^2$ .
$Q = -\begin{pmatrix} \bar{Q} & \bar{S} \\ \bar{S}^T & \bar{R} \end{pmatrix}$	$y = Gu$ is $(\bar{Q}, \bar{S}, \bar{R})$ -dissipative [4]: $\langle y, \bar{Q}y \rangle_T + 2\langle y, \bar{S}u \rangle_T + \langle u, \bar{R}u \rangle_T \geq 0, \forall T \geq 0$ .

### III. QUADRATIC SECTOR BOUNDS

A quadratic sector bound is a constraint

$$\langle z, Qz \rangle_T \leq 0, \quad \forall T \geq 0. \quad (1)$$

on the vector-valued signal  $z(t)$ , where  $Q$  is a fixed symmetric matrix. The set of signals satisfying this constraint forms the conic sector

$$\mathcal{S}(Q) \triangleq \{z(t) \in \mathcal{L}_{2e} : \langle z, Qz \rangle_T \leq 0, \forall T \geq 0\}.$$

A system  $y = Gu$  is inside the sector  $\mathcal{S}(Q)$  when all its I/O trajectories  $z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$  belong to  $\mathcal{S}(Q)$ . In other words, for all  $u \in \mathcal{L}_{2e}$ :

$$\langle \begin{pmatrix} Gu \\ u \end{pmatrix}, Q \begin{pmatrix} Gu \\ u \end{pmatrix} \rangle_T \leq 0, \quad \forall T \geq 0. \quad (2)$$

Different choices of  $Q$  matrix capture different properties of dynamical systems, see Table I for a summary.

The sector matrix  $Q$  specifies the sector geometry. Throughout this paper we assume that  $Q$  is an indefinite matrix with  $p$  positive eigenvalues and  $n$  negative eigenvalues. Define  $J \triangleq \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ . Any nonsingular indefinite  $Q$  has a factorization

$$Q = VJV^T = V_1V_1^T - V_2V_2^T. \quad (3)$$

Finally, Eq. (2) are special cases of the generalized sector bound

$$\langle Zu, Q(Zu) \rangle_T \leq 0, \quad \forall T \geq 0 \quad (4)$$

where  $Z$  is an arbitrary causal system. The remainder of the paper focuses on this generalization.

### IV. SECTOR STABILITY THEOREM

This section is concerned with the closed-loop stability of the feedback interconnection depicted in Fig. 1. Note that this assumes positive feedback. Results for the negative feedback case are obtained by replacing  $H$  by  $-H$ . Besides causality, no assumptions are made on the systems  $G$  and  $H$  which can be nonlinear, MIMO, and even unstable.

Closed-loop stability of the feedback interconnection in Fig. 1 is defined as follows.

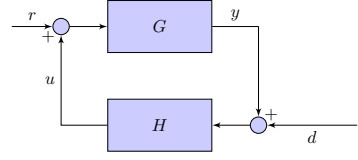


Fig. 1. Feedback interconnection.

**Definition 1:** The interconnection of Fig. 1 is stable if there exists a constant  $\gamma > 0$  such that for all  $r, d \in \mathcal{L}_{2e}$ ,

$$\| \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \|_T \leq \gamma \| \begin{pmatrix} d \\ r \end{pmatrix} \|_T, \quad \forall T \geq 0.$$

This definition yields the following sufficient condition for closed-loop stability.

**Theorem 1 (Sector Stability Theorem [3, Theorem 2.2]):** Consider the positive feedback interconnection of  $G$  and  $H$  in Fig. 1. If there exists a symmetric matrix  $Q$  and  $\varepsilon > 0$  such that for all signals  $u, y \in \mathcal{L}_{2e}$  and all  $T \geq 0$ :

$$\langle \begin{pmatrix} Gu \\ u \end{pmatrix}, (Q + \varepsilon I) \begin{pmatrix} Gu \\ u \end{pmatrix} \rangle_T \leq 0, \quad (5)$$

$$\langle \begin{pmatrix} y \\ Hy \end{pmatrix}, Q \begin{pmatrix} y \\ Hy \end{pmatrix} \rangle_T \geq 0, \quad (6)$$

then the feedback interconnection is stable.

This result can be rephrased as follows. If the graph of  $G$  is strictly inside the sector  $\mathcal{S}(Q)$ , and the graph of  $H^{-1}$  is outside  $\mathcal{S}(Q)$ , then the positive feedback interconnection is stable. This is a special case of the Graph Separation Theorem of [3] and a generalization of the results in [1]. By applying Theorem 1 for different  $Q$  matrices in Table I, the following well-known stability results are obtained: the Small Gain Theorem [9, pp. 217-218], the Passivity Theorem [9, pp. 245-248] and the Conic Sector Stability Theorem [1, Theorem 2].

The following corollary is a useful reformulation of Theorem 1.

**Corollary 1:** Consider the positive feedback interconnection of  $G$  and  $H$  in Fig. 1 and suppose there exist matrices  $Q_G$  and  $Q_H$  such that for all  $u, y \in \mathcal{L}_{2e}$  and all  $T \geq 0$ :

$$\langle \begin{pmatrix} Gu \\ u \end{pmatrix}, Q_G \begin{pmatrix} Gu \\ u \end{pmatrix} \rangle_T \leq 0, \quad \langle \begin{pmatrix} y \\ Hy \end{pmatrix}, Q_H \begin{pmatrix} y \\ Hy \end{pmatrix} \rangle_T \leq 0.$$

If  $Q_G + \alpha Q_H > 0$  for some  $\alpha > 0$ , the feedback interconnection is stable.

This corollary is equivalent to the QSR Dissipativity Theorem [4, pp. 478-480] by assuming negative feedback and partitioning

$$Q_G = -\begin{pmatrix} Q_1 & S_1 \\ S_1^T & R_1 \end{pmatrix}, \quad Q_H = -\begin{pmatrix} R_2 & -S_2^T \\ -S_2 & Q_2 \end{pmatrix},$$

( $S_2$  becomes  $-S_2$  when using negative feedback).

Finally, the IQC Theorem of [7] is also related to the Sector Stability Theorem, see [10], [11] for details.

### V. FREQUENCY-DOMAIN CHARACTERIZATION

In this section assume that  $Q$  is given by Eq. (3) and  $Z$  is a linear time-invariant (LTI) system with state-space realization

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (7)$$

There are well-known frequency-domain tests for the following cases:

- The input/output gain of  $G(s)$  is bounded by  $\gamma$  if and only if  $G$  is stable and  $\|G(j\omega)\| \leq \gamma$  for all frequency  $\omega \in \mathbb{R}$  (e.g., [12, pp. 46-50]).
- If  $G$  has no imaginary axis poles,  $G(s)$  is passive if and only if  $G$  is stable and  $G(j\omega) + G(j\omega)^H \geq 0$  for all  $\omega \in \mathbb{R}$  (e.g., [13, pp. 174-175]).

The next theorem generalizes these results to arbitrary sector bounds Eq. (4). This result plays a key role in developing efficient numerical methods for checking and enforcing sector bounds. The proof is omitted for brevity.

*Theorem 2:* Assume  $(A, B)$  is controllable and  $V_2^T Z$  is square (where  $V_2$  is defined in Eq. (3)), that is,  $Z$  has the same number of inputs as the number of negative eigenvalues in  $Q$ . Then the following statements are equivalent:

- 1)  $Z$  has no infinite or RHP zeros and satisfies the sector bound Eq. (4) for all inputs  $u \in \mathcal{L}_{2e}$  with  $x(0) = 0$  (zero initial condition).
- 2)  $V_2^T Z$  has no infinite or RHP zeros and  $Z$  satisfies the frequency-domain inequality (FDI):

$$Z(j\omega)^H Q Z(j\omega) \leq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

This result warrants several remarks. The notation  $Z_1 \triangleq V_1^T Z$  and  $Z_2 \triangleq V_2^T Z$  is used for readability.

*Remark 1:* Regardless of the shape of  $Z_2$ , the conditions 2) of Theorem 2 are necessary for the sector bound in Eq. (4). When  $Z_2$  has no infinite or RHP zeros, the FDI in Eq. (8) is sufficient only when  $Z_2$  is square. If  $Z_2$  is wide, neither the FDI nor the sector bound can hold because  $Q$  does not have enough negative eigenvalues. If  $Z_2$  is tall, the FDI is not sufficient in general and an additional condition involving a Riccati equation is necessary for sufficiency (see Section VII).

*Remark 2:* Using the factorization of  $Q$  in Eq. (3), the FDI can be rewritten as

$$Z_1(j\omega)^H Z_1(j\omega) \leq Z_2(j\omega)^H Z_2(j\omega), \quad \forall \omega.$$

When  $Z_2(s)$  is square, Theorem 2 shows that  $Z_2^{-1}(s)$  is stable and that the sector bound in Eq. (4) is equivalent to  $\|Z_1 Z_2^{-1}\|_\infty \leq 1$  where  $\|\cdot\|_\infty$  denotes the  $H_\infty$  norm.

*Remark 3:* The requirement “ $V_2^T Z$  has no RHP zeros” is independent of the particular choice of factorization in Eq. (3) for  $Q$ . As a result, if it holds for one such factorization, it holds for all such factorizations. This is useful in practice because often a factorization for which this minimum-phase condition has a simple interpretation. In particular this results in the following theorem that will be stated without proof.

*Theorem 3:* Let  $Z = \begin{pmatrix} G \\ I_p \end{pmatrix}$  and partition  $Q$  conformably as  $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix}$ . Assume  $Q$  has  $p$  negative eigenvalues. If  $Q_{11} > 0$ , then the condition “ $V_2^T Z$  has no infinite or RHP zeros” in Theorem 2 is equivalent to  $G(s)$  has no RHP poles, that is,  $G$  is stable.

## VI. SECTOR INDEX

This section focuses on quantifying the degree to which a system  $Z$  satisfies a sector bound of the form (4).

### A. Relative Sector Index

*Definition 2 (R-Index):* Let  $Q$  be an indefinite matrix with  $p$  positive eigenvalues,  $n$  negative eigenvalues, and orthogonal factorization

$$Q = W_1 W_1^T - W_2 W_2^T, \quad W_1^T W_2 = 0 \quad (9)$$

with  $W_1 \in \mathbb{R}^{(p+n) \times p}$  and  $W_2 \in \mathbb{R}^{(p+n) \times n}$ . The relative index, or R-index, of the sector bound in Eq. (4) is defined as

$$R \triangleq \min \left\{ r > 0 : (4) \text{ holds for } Q = W_1 W_1^T - r^2 W_2 W_2^T \right\}.$$

Note that a factorization in Eq. (9) is readily obtained from the Schur decomposition of  $Q$ . From Definition 2, it also follows that the sector bound in Eq. (4) holds if and only if  $R \leq 1$ . When  $Z$  is LTI and  $W_2^T Z$  is square, Theorem 2 provides the following frequency-domain characterization of the R-index.

*Theorem 4:* Assume  $Z$  is linear time invariant, consider an orthogonal factorization in Eq. (9) of  $Q$ , and assume  $W_2^T Z$  is square. Then  $R < +\infty$  if and only if  $W_2^T Z$  has no infinite or RHP zeros, in which case

$$\begin{aligned} R &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max} \left( W_1^T Z(j\omega), W_2^T Z(j\omega) \right) \\ &= \|(W_1^T Z)(W_2^T Z)^{-1}\|_\infty. \end{aligned} \quad (10)$$

This result shows that the R-index is a generalization of the notion of peak gain over frequency. In the linear domain, analyzing sector bounds with the R-index is equivalent to analyzing the gain(s) of the frequency response of the transformed system  $(W_1^T Z)(W_2^T Z)^{-1}$ . This suggests using the same type of algorithm for computing the R-index as for computing the  $H_\infty$  norm, as further discussed in Section VII.

### B. Directional Sector Index

Directional sector indices measure by how much the sector must be deformed in a particular direction to tightly fit the range of a given system  $Z$ . Given the sector bound in Eq. (4), the directional index  $\tau^*$  in the direction  $\Delta Q \geq 0$  is defined as

$$\tau^* \triangleq \sup \{ \tau : \langle Zu, (Q + \tau \Delta Q)Zu \rangle_T \leq 0, \forall T \geq 0, \forall u \in \mathcal{L}_{2e} \}. \quad (11)$$

For  $Q = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ -I_p & 0 \end{pmatrix}$  and  $Z = \begin{pmatrix} G \\ I_p \end{pmatrix}$ , the following passivity indices are special cases of directional indices [5]:

- 1) The Input Feedforward Passivity (IFP) index corresponds to  $\Delta Q = \text{Diag}(0, 2I_p)$ .
- 2) The Output Feedback Passivity (OFP) index corresponds to  $\Delta Q = \text{Diag}(2I_p, 0)$ .
- 3) The Input Feedforward Output Feedback Passivity (IFOFP) index corresponds to  $\Delta Q = 2I_{2p}$ .

A difficulty with directional indices is that the number of negative eigenvalues of  $Q + \tau \Delta Q$  varies with  $\tau$ , as well as the  $W_2$  matrix in the decomposition in Eq. (9) of  $Q + \tau \Delta Q$ . By comparison, both are fixed for the R-index. Depending on the  $Q, \Delta Q$  combination, this can significantly complicate the task of computing the directional index even when  $W_2^T Z$  is square (see Section VII). This makes directional indices less appealing from a numerical standpoint. Pure frequency-domain characterizations remain available, however, for the

passivity indices mentioned above. As an example, the IFP index  $\nu^*$  for stable  $G(s)$  can be characterized by

$$\nu^* \triangleq \max \{ \nu : G(j\omega) + G^H(j\omega) \geq 2\nu I, \forall \omega \in \mathbb{R} \}.$$

## VII. NUMERICAL ASPECTS

This section discusses efficient algorithms for computing relative and directional indices when  $Z$  is LTI with state-space realization  $(A, B, C, D)$ . Further, optimization-based techniques are discussed for enforcing sector bounds as additional design constraints on controllers.

A popular approach for evaluating sector bounds is to convert them into linear matrix inequalities (LMIs). Specifically,  $Z(s)$  satisfies Eq. (4) if and only if there exists a symmetric matrix  $P$  solving the system of LMIs [14]

$$\begin{pmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C^T \\ D^T \end{pmatrix} Q (C \ D) \leq 0, \quad P \geq 0.$$

There are efficient convex optimization algorithms for solving LMIs (e.g., [15]). Yet the complexity of solving such LMIs remains high compared to that of ordinary matrix computations. If  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $Z$  has  $n$  states), the flopping point operations count is  $O(n^6)$  per LMI solver iteration compared to only  $O(n^3)$  for computing eigenvalues or solving Riccati equations. This large complexity gap warrants looking at more efficient alternatives, especially in the context of optimization-based tuning of control systems [16].

### A. Computing the R-Index

Consider an orthogonal decomposition in Eq. (9) of  $Q$  and use the notation

$$\begin{pmatrix} W_1^T \\ W_2^T \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} W_1^T \\ W_2^T \end{pmatrix} (C \ D) = \begin{pmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

First consider the case when  $Z_2$  is square. If  $D_2$  is singular or  $Z_2$  has RHP zeros, the R-index is  $+\infty$ , otherwise it is given by Eq. (10). Define

$$\mathcal{M}_r \triangleq \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & -A^T & 0 & -C_1^T & -rC_2^T \\ 0 & B^T & 0 & D_1^T & rD_2^T \\ C_1 & 0 & D_1 & -I & 0 \\ rC_2 & 0 & rD_2 & 0 & I \end{pmatrix}$$

and  $\mathcal{N} \triangleq \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . The Bruinsma-Steinbuch algorithm [17] can be adapted to compute the R-index.

*Algorithm 1:* Assume that  $Z$  has no poles on the imaginary axis and that  $Z_2$  is square with no infinite or RHP zeros. To compute the R-index of Eq. (4) within the relative tolerance  $\delta > 0$ :

- 1) Initialize  $R = \max_{k=1, \dots, N} \sigma_{\max}(Z_1(j\omega_k), Z_2(j\omega_k))$  where  $\omega_1, \dots, \omega_N$  are “test frequencies” that include  $\omega = 0$  and  $\omega = \infty$  but are otherwise arbitrary. In practice, the magnitudes of the zeros of  $Z_2$  constitute a good choice of test frequencies.
- 2) Set  $r = (1 + \delta)R$  and compute the finite eigenvalues of  $\mathcal{M}_r - s\mathcal{N}$ . Let  $j\nu_1, \dots, j\nu_M$  denote the eigenvalues

on the imaginary axis with  $0 < \nu_1 < \dots < \nu_M < +\infty$  (note that  $M$  is always even).

- 3) If  $M = 0$ , terminate.
- 4) Otherwise, set  $R = \max(R, \sigma_{\max}(Z_1(j\nu), Z_2(j\nu)))$  for the mid-points  $\nu = (\nu_{2k-1} + \nu_{2k})/2$ ,  $k = 1, \dots, M/2$ , and repeat Steps 2) through 4).

This algorithm produces a monotonically increasing sequence of lower estimates for  $R$ . The generalized eigenvalues of  $\mathcal{M}_r - s\mathcal{N}$  can be computed using SLICOT’s structure-preserving skew-Hamiltonian/Hamiltonian solvers [18]. With smart initialization, this algorithm typically terminates within a few iterations and only involves generalized eigenvalue and singular value computation, all  $O(n^3)$  when  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Next turn to the case when  $Z_2$  is tall and denote

$$R_{\text{FDI}} \triangleq \sup_{\omega} \sigma_{\max}(Z_1(j\omega), Z_2(j\omega)), \quad (12)$$

$$Q_r \triangleq W_1^T W_1 - r^2 W_2^T W_2.$$

We know that  $R \geq R_{\text{FDI}}$  since the FDI in Eq. (8) is necessary, but the inequality can now be strict. Assume  $D_2$  has full rank and  $Z_2$  has no RHP zeros (necessary for  $R$  to be finite, see Remark 1). To efficiently compute  $R$ , recall from [14] that any solution  $P$  of the LMI

$$\begin{pmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C^T \\ D^T \end{pmatrix} Q_r (C \ D) \leq 0 \quad (13)$$

is dominated by the anti-stabilizing solution  $P_+(r)$  of the associated algebraic Riccati equation (ARE):

$$A^T P + P A + C^T Q_r C - (P B + C^T Q_r D)(D^T Q_r D)^{-1}(B^T P + D^T Q_r C) = 0. \quad (14)$$

In other words, all solutions  $P$  of the LMI in Eq. (13) satisfy  $P \leq P_+(r)$ . It is easily established that Eq. (13) has a solution  $P \geq 0$  if and only if  $P_+(r) \geq 0$ , and that  $P_+(r)$  is a monotonically increasing function of  $r$ . This leads to the following algorithm for computing the R-index when  $Z_2$  is tall.

*Algorithm 2:* Assume that  $Z$  has no poles on the imaginary axis. When  $Z_2$  is tall with no infinite or RHP zeros the R-index of Eq. (4) can be computed as follows:

- 1) Compute  $R_{\text{FDI}}$  in Eq. (12) using Algorithm 1.
- 2) Use a bisection algorithm to find the zero crossing of the function  $\lambda_{\min}(P_+(r))$  in the interval  $(R_{\text{FDI}}, +\infty)$ .
- 3) If a zero crossing  $r_0$  is found, set  $R = r_0$ . Otherwise set  $R = R_{\text{FDI}}$ .

Note that there is at most one zero crossing since  $\lambda_{\min}(P_+(r))$  is monotonically increasing. This algorithm is conceptually similar to computing the optimal  $H_\infty$  performance  $\gamma$  in state-feedback  $H_\infty$  control [8].

### B. Computing Directional Indices

To compute the directional index  $\tau^*$  in Eq. (11), define the associated FDI-based index

$$\tau_{\text{FDI}} \triangleq \sup \left\{ \tau : Z^H(j\omega)(Q + \tau \Delta Q)Z(j\omega) \leq 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \right\}.$$

Recall that  $\tau^* \leq \tau_{\text{FDI}}$ . The high-level algorithm for computing  $\tau^*$  is conceptually similar to Algorithm 2. Details are omitted for brevity.

### C. Enforcing Sector Bounds in Control Design

Enforcing sector bounds when designing or tuning control systems is the final question to address. Typically, sector bounds derived from safety or robustness considerations are added to nominal performance requirements to further constrain the design. Accordingly, multi-objective control design is a more relevant framework for dealing with sector constraints. One technique that can readily accommodate sector bounds is the non-smooth optimization algorithm of [16]. This algorithm can tune arbitrary fixed-order control structures subject to a mix of  $H_\infty$ ,  $H_2$ , and pole confinement goals. Each goal can act on a different open-loop or closed-loop transfer function, independently of the other goals. Because of its close connection with the  $H_\infty$  norm, the R-index is well suited for incorporating sector bounds into this multi-objective control design framework.

Consider a sector bound  $\langle Zu, QZu \rangle_T \leq 0$  on some open-loop or closed-loop transfer function  $Z(s, x)$  that depends on the tuned controller variables  $x$ . Assume  $W_2^T Z$  is square, that is,  $Z$  has as many inputs as negative eigenvalues in  $Q$ . Constraining or minimizing the R-index within the optimization framework [16] involves the following tasks at each iteration:

- 1) Compute the invariant zeros of  $W_2^T Z(s, x)$  for the current iterate  $x$ .
- 2) Compute the R-index of  $\langle Zu, QZu \rangle_T \leq 0$  for  $Z(s, x)$  using Eq. (10).
- 3) Compute the gradient of any (simple) zero of  $W_2^T Z(s, x)$  as a function of  $x$ .
- 4) Compute the gradient of

$$f(x) = \sigma_{\max} \left( W_1^T Z(j\omega, x), W_2^T Z(j\omega, x) \right)$$

for the maximizing frequencies  $\omega$  in Eq. (10).

If  $(A(x), B(x), C(x), D(x))$  is a state-space realization of  $Z(s, x)$ , the zeros of  $W_2^T Z(s, x)$  are the eigenvalues of  $A(x) - B(x)(W_2^T D(x))^{-1}W_2^T C(x)$  since  $W_2^T D$  is square. This expression is used for Tasks 1) and 3). Algorithm 1 provides a highly efficient way to perform Task 2) and also gives the maximizing frequencies needed in Task 4). Speed is critical here since each outer iteration typically requires several evaluations of the R-index during the line search. Finally, computing the gradient of (simple) generalized singular values is elementary given the corresponding generalized singular vectors. The `systeme` function in MATLAB® [19] fully implements these calculations and can tackle arbitrary sector bounds that satisfy the “ $W_2^T Z$  square” condition, including passivity constraints.

### VIII. EXAMPLES

This section illustrates the potential of the theoretical and numerical tools discussed in Sections IV and VII on two applications.

*Example 1:* This example shows how to obtain a low-order passive linear quadratic Gaussian (LQG) controller for reducing vibrations in a flexible beam (see [20] for details).

The beam model includes the first six dominant modes of the beam:

$$G(s) = \sum_{i=1}^6 \frac{\alpha_i^2 s}{s^2 + 2\xi_i w_i s + w_i^2}.$$

LQG control is a natural formulation for active vibration control. However, the LQG-optimal controller has the same order as the plant  $G(s)$  and may not be robust to modeling errors. Since the beam is a passive physical system, the Passivity Theorem guarantees closed-loop stability with negative feedback as long as  $-C(s)$  is passive, where  $C(s)$  denotes the controller. Fig. 2 shows that the LQG-optimal controller is far from satisfying this condition. Instead, seek a second-order controller  $C(s)$  that minimizes the same LQG cost subject to the passivity constraint:

$$\begin{aligned} \underset{C(s)}{\text{minimize}} \quad & J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left( \int_0^T (y^2(t) + 0.001u^2(t)) dt \right) \\ \text{subject to} \quad & -C(s) \text{ is passive and of order 2} \end{aligned}$$

This multi-objective optimization problem is readily formulated and solved with `systeme` [19]. The best design has an LQG cost only 5% higher than the optimal LQG controller, is much simpler (2 vs. 12 states), and guarantees closed-loop stability on the physical system since  $-C$  is passive (see Fig. 2).

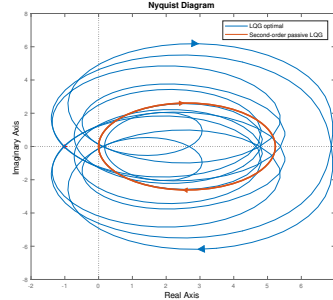


Fig. 2. Nyquist plots of optimal and passive LQG controllers.

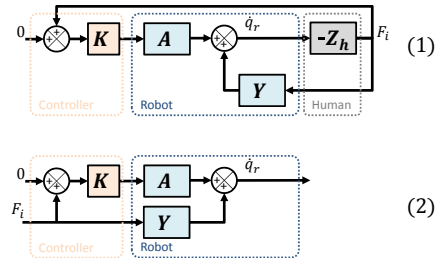


Fig. 3. Human-robot interaction problem.

*Example 2:* This example shows how to obtain an impedance controller that minimizes the interaction force during human-robot co-manipulation. Fig. 3-(1) illustrates a typical human-robot interaction block diagram, where

- $Z_h(s)$  is the human's impedance (ratio between the force they apply to the robot and the velocity of their hand).
- $Y(s)$  is the robot's natural admittance (ratio between its velocity and the force applied to its environment). Note that the admittance is the reciprocal of the impedance.
- $A(s)$  is the transfer function from the controlled torque to the velocity  $\dot{q}_r$  of the robot's interaction port.
- $K(s)$  the controller, typically a PI controller.

See [6] for details. Assuming  $Z_h(s)$  is arbitrary but passive, it is suitable to use an impedance control framework for defining the control objectives. Instead of regulating the human-robot interaction force  $F_i$ , impedance control shapes the robot dynamics to minimize its opposition to an external force, which can be seen as minimizing its apparent inertia and damping. In other words, a goal is to maximize the apparent admittance  $Y_K = Y + AK$  of the robot (the transfer from  $F_i$  to  $\dot{q}_r$  in Fig. 3-(2)). From the Passivity Theorem,  $Y_K$  must also be passive to guarantee stability when interacting with any passive environment  $Z_h(s)$ .

To leverage existing tools for gain minimization, these goals are formulated as [6]

$$\text{minimize}_{K(s)} \left\| \frac{1}{s(1 + Y_K(s))} \right\|_{\infty} \quad \text{subject to } Y_K(s) \text{ is passive} \quad (15)$$

where the frequency weighting  $1/s$  emphasizes low frequencies. To illustrate, a one-degree-of-freedom robot is considered for which  $A(s)$  and  $Y(s)$  have been experimentally identified in the frequency domain. The program in Eq. (15) is solved with *systeme* [19] for PI controllers of the form  $K(s) = K_p + K_i/s$ . Results are shown in Fig. 4. Note that admittance is boosted at low frequency and made passive (solid phase curve stays between -90 and 90 degrees).

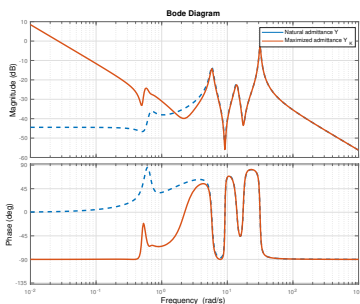


Fig. 4. Robot's natural (dashed) and apparent (solid) admittances.

## IX. CONCLUSIONS

Quadratic sector bounds and the Sector Stability Theorem play a fundamental role in modern control theory. This

paper has highlighted the key concepts and summarized the connections with absolute stability, dissipative systems, robust control, passivity-based control, and IQC theory. To adequately support sector bounds in computer software for control design, this work has developed a general and practical frequency-domain test for sector bounds, introduced the notions of relative and directional indices, and proposed efficient numerical algorithms to check and enforce sector bounds.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank Anders Rantzer for helpful insights.

## REFERENCES

- [1] G. Zames, "On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems – part I: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 11, no. 2, pp. 228–238, 1966.
- [2] J. C. Willems, "Dissipative dynamical systems part II: Linear systems with quadratic supply rates," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 45, pp. 352–393, 1972.
- [3] M. G. Safonov, *Stability and robustness of multivariable feedback systems*. MIT press, 1980.
- [4] W. M. Haddad and V. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach*, 1st ed. Prentice university press, 2008.
- [5] M. Xia, P. J. Antsaklis, V. Gupta, and F. Zhu, "Passivity and dissipativity analysis of a system and its approximation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 2, pp. 620–635, Feb 2017.
- [6] N. Abroug, X. Lamy, and E. Laroche, "Human force augmentation: Optimal control parameters tuning using structured  $H_{\infty}$  synthesis," in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2016.
- [7] A. Megretski and A. Rantzer, "System analysis via integral quadratic constraints," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 42, no. 6, pp. 819–830, 1997.
- [8] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_{\infty}$  control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, Aug 1989.
- [9] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- [10] J. Veenman and C. W. Scherer, "Stability analysis with integral quadratic constraints: A dissipativity based proof," in *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, Dec 2013, pp. 3770–3775.
- [11] P. Seiler, "Stability analysis with dissipation inequalities and integral quadratic constraints," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 60, no. 6, pp. 1704–1709, 2015.
- [12] B. Anderson and S. Vongpanitlerd, *Network analysis and synthesis*. Dover, 2006.
- [13] C. A. Desoer and M. Vidyasagar, *Feedback systems: input-output properties*. SIAM, 2009.
- [14] J. Willems, "Least squares stationary optimal control and the algebraic riccati equation," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 16, no. 6, pp. 621–634, Dec 1971.
- [15] MathWorks, *Robust Control Toolbox*. Release R2016a, Mar 2016.
- [16] P. Apkarian, P. Gahinet, and C. Buhr, "Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers," in *Proc. European Control Conf.*, 2014, pp. 856–861.
- [17] N. A. Bruinsma and M. Steinbuch, "A fast algorithm to compute the  $H_{\infty}$ -norm of a transfer function matrix," *Syst. Control Letters*, vol. 14, no. 5, pp. 287–293, 1990.
- [18] P. Benner, V. Sima, and M. Voigt, "Algorithm 961: Fortran 77 subroutines for the solution of skew-hamiltonian/hamiltonian eigenproblems," *ACM Trans. Math. Softw.*, vol. 42, no. 3, pp. 24:1–24:26, 2016.
- [19] MathWorks, *Control System Toolbox*. Release R2016a, Mar 2016.
- [20] Vibration control in flexible beam. [Online]. Available: [https://www.mathworks.com/examples/control/mw/control\\_featured-ex69442307-vibration-control-in-flexible-beam](https://www.mathworks.com/examples/control/mw/control_featured-ex69442307-vibration-control-in-flexible-beam)

## **Annexe B**

### **Annexe : Illustration des commandes Matlab de l'outil d'aide au réglage**



---

## Table of Contents

.....	1
clearing .....	1
execution config .....	1
Symbolic Variables .....	1
Numerical Values taken from CAD design DATA .....	2
coupling .....	3
human handle coordinates .....	3
tool coordinates .....	3
Kinetic and Potential Energy Calculus .....	3
Lagrangian Mechanics Equations Derivation .....	4
LPV state matrices calculus using Jacobian Linearization / LPV affine form depending on q2 .....	5
LPV System construction .....	7
q2 scheduling .....	7
loop closing .....	8
Adding flexible interaction port for human .....	16

```
% #codegen
```

## clearing

```
clear;clc
try%#ok
    ms.UseParallel = true;
end
```

## execution config

```
tuning opts

opts=systuneOptions('RandomStart',20,'UseParallel',true);
passive_tool=true;
% passive_tool=false;
sector_tool=true;
% sector_tool=false;
recalculate_Hq_phs_opt=1;
% recalculate_Hq_phs_opt=0;
recalculate_CLopt=1;
% recalculate_CLopt=0;
recalculate_CPSopt=1;
% recalculate_CPSopt=0;
% mycase='std_lti';
mycase='phs_lti';
```

## Symbolic Variables

In the following, we define the variables used for modelizing the LDC SCARA Robot

---

```

disp('symbolic variables definition...')
syms qm1 qm2 qm3 qm4 real
syms dqm1 dqm2 dqm3 dqm4 real
syms q1 q2 q3 q4 real
syms dq1 dq2 dq3 dq4 real
syms l1 l2 l3 l4 real
syms lg1 lg2 lg3 lg4 real
syms Jm1 Jm2 Jm4 real
syms kq1 kq2 kq4 real
syms bq1 bq2 bq4 real
syms Ig1 Ig2 Ig3 Ig4 It real
syms m1 m2 m3 m4 mt real
syms xt yt qt real
syms dxt dyt dqt real
syms km ktf ktw real
syms bm btf btw real

```

*symbolic variables definition...*

## Numerical Values taken from CAD design DATA

In the following, we allocate reasonable numerical value to the variables

```

l1=1500e-3;%length of segment 1
l2=300e-3;%length of segment 2
l3=900e-3;%length of segment 3
lg1=678e-3;%position of GC of segment 1
lg2=137e-3;%position of GC of segment 2
lg3=424e-3;%position of GC of segment 3
m1=133;%mass of segment 1
m2=35;%mass of segment 2
m3=42;%mass of segment 3
m4=27.5;%mass of segment 4
mt=80;%mass of tool segment
Ig1=45.5;%inertia of segment 1 in GC
Ig2=0.5;%inertia of segment 2 in GC
Ig3=5.8;%inertia of segment 3 in GC
Ig4=0.28;%inertia of segment 4 in GC
It=3.1;%inertia of segment tool in GC
Jm1=8.5;%inertia of motor 1
Jm2=8.5;%inertia of motor 2
Jm4=8.5;%inertia of motor 4
steel_loss_factor=0.001;
kq1=13000;%joint actuator stiffness 1
bq1=kq1*tan(steel_loss_factor);%joint actuator damping 1
kq2=13600;%joint actuator stiffness 2
bq2=kq1*tan(steel_loss_factor);%joint actuator damping 2
kq4=13600;%joint actuator stiffness 4
bq4=kq1*tan(steel_loss_factor);%joint actuator damping 4
ktf=100000;%tool segment cartesian linear stiffness
btf=ktf*tan(steel_loss_factor);%tool segment cartesian linear damping

```

---

```

ktw=9700;%tool segment cartesian rotation stiffness
btw=ktw*tan(steel_loss_factor);%tool segment cartesian rotation
damping

Bt=[btf;btf;btw];
Bm=[bq1;bq2;bq4];
B0=Bm*100;% motor damping

```

## coupling

```

q12=q1+q2;
dq12=dq1+dq2;
q123=q12+q3;
dq123=dq12+dq3;
q1234=q123+q4;
dq1234=dq123+dq4;

```

## human handle coordinates

```

xh=l1*cos(q1)+l2*cos(q12)+l3*cos(q123);
yh=l1*sin(q1)+l2*sin(q12)+l3*sin(q123);
qh=q1234;
% human handle Jacobian
Jh=jacobian([xh,yh,qh],[q1,q2,q3,q4]);

```

## tool coordinates

```

xt;
yt;
qt;

```

# Kinetic and Potential Energy Calculus

In the following, we calculate the Kinetic and Potential Energies g1 coordinates

```

xg1=lg1*cos(q1);
yg1=lg1*sin(q1);
% g2 coordinates
xg2=l1*cos(q1)+lg2*cos(q12);
yg2=l1*sin(q1)+lg2*sin(q12);
% g3 coordinates
xg3=l1*cos(q1)+l2*cos(q12)+lg3*cos(q123);
yg3=l1*sin(q1)+l2*sin(q12)+lg3*sin(q123);
% g4 coordinates
xg4=l1*cos(q1)+l2*cos(q12)+l3*cos(q123);
yg4=l1*sin(q1)+l2*sin(q12)+l3*sin(q123);
% GC Jacobian
Jg=jacobian([xg1;yg1;xg2;yg2;xg3;yg3;xg4;yg4],[q1,q2,q3,q4]);
% GC velocity vector
Vg=Jg*[dq1;dq2;dq3;dq4];

```

---

```

% GC rate vector
Wg=[dq1;dq12;dq123;dq1234];
% tool position vector
Xt=[xt;yt;qt];
% human handle velocity position
Xh=[xh;yh;qh];
% joint positions vector
Q=[q1;q2;q3;q4];
% motor positions vector
Qm=[qm1;qm2;qm4];
% joint velocities vector
W=[dq1;dq2;dq3;dq4];
% motor velocities vector
Wm=[dqm1;dqm2;dqm4];
% tool velocity vector
Vt=[dxt;dyt;dqt];
% human handle velocity vector
Vh=Jh*W;
dxh=Vh(1);
dyh=Vh(2);
dqh=Vh(3);
% Kinetic Energy
disp('Kinetic Energy Computation...')
Ec=simplify(0.5*(...
    Vg'*diag([m1,m1,m2,m2,m3,m3,m4,m4])*Vg+...GC velocities
    contribution to Kinetic Energy of segments
    Wg'*diag([Ig1,Ig2,Ig3,Ig4])*Wg+...GC rates contribution to
    Kinetic Energy of segments
    Vt'*diag([mt,mt,It])*Vt+...tool's Kinetic Energy
    Wm'*diag([Jm1,Jm2,Jm4])*Wm));% motor's Kinetic Energy
% Potential Energy
disp('Potential Energy Computation...')
Ep=simplify(0.5*(...
    (Xh-Xt) '*diag([ktf,ktf,ktw])*(Xh-Xt)+...tool's Elastic Potential
    Energy
    (Qm-Q([1,2,4])) '*diag([kq1,kq2,kq4])*(Qm-Q([1,2,4]))+...motor-
    joint elastic Potential Energy Elastique
    (q2-q3)*kq2*(q2-q3));%q2-q3 coupling elastic Potential Energy

Kinetic Energy Computation...
Potential Energy Computation...

```

## Lagrangian Mechanics Equations Derivation

In the following, we calculate the lagrangian of the system and derivate the euqations of motion

```

disp('Lagrangian Derivation...')
% Lagrangian
Lag=simplify(Ec-Ep);
Ham=simplify(Ec+Ep);

% Langrange state vector X=[x,v]'
x=[qm1,qm2,qm4,q1,q2,q3,q4,xt,yt,qt,dqm1,dqm2,dqm4,dq1,dq2,dq3,dq4,dxt,dyt,dqt]';

```

---

```

dL1=simplify(jacobian(Lag,
[dqm1,dqm2,dqm4,dq1,dq2,dq3,dq4,dxt,dyt,dqt]'));
dL2=simplify(jacobian(Lag,[qm1,qm2,qm4,q1,q2,q3,q4,xt,yt,qt]'));

syms ddq1 ddq2 ddq3 ddq4 ddqm1 ddqm2 ddqm4 ddxt ddyt ddqt real
dqm1=ddqm1;dqm2=ddqm2;dqm4=ddqm4;dq1=ddq1;dq2=ddq2;dq3=ddq3;dq4=ddq4;dxt=ddxt;dyt=
ddL1=eval(dL1);
syms dqm1 dqm2 dqm4 dq1 dq2 dq3 dq4 dxt
dyt dq1 real

% mouvement equations (Inverse Dynamical Model)
Trq=collect(ddL1-dL2+[Bm.*(Wm-W([1,2,4]))+B0.*Wm;Jh.*(Bt.*(Vh-
Vt))+[Bm.*(W([1,2,4])-Wm);0]+[0;Bm(2)*(W(2)-
W(3));Bm(2)*(W(3)-W(2));0];Bt.*(Vt-Vh)],
[ddqm1,ddqm2,ddqm4,ddq1,ddq2,ddq3,ddq4,ddxt,ddyt,ddqt]);
% inertia matrix M
M=jacobian(Trq,
[ddqm1,ddqm2,ddqm4,ddq1,ddq2,ddq3,ddq4,ddxt,ddyt,ddqt]);
% stiffness matrix K
K=jacobian(Trq,[qm1,qm2,qm4,q1,q2,q3,q4,xt,yt,qt]);
% nonlinear contributions
F=simplify(Trq-
M*[ddqm1;ddqm2;ddqm4;ddq1;ddq2;ddq3;ddq4;ddxt;ddyt;ddqt]);
% Coriolis effects forgetting
F=subs(F,[dq1*dq2,dq1*dq3,dq1*dq4,dq2*dq3,dq2*dq4,dq3*dq4],
[0,0,0,0,0,0]);
% projection matrix to the reduced stave vector Xr=[dx,v]'
T=[[1,0,0,-1,0,0,0,0,0,0;0,1,0,0,-1,0,0,0,0;0,0,1,0,0,0,-1,0,0;0,0,0,0,1,-1,0,
0,0];zeros(7,10);zeros(10),eye(10)];
Jh,eye(3)],zeros(7,10);zeros(10),eye(10)];
T=subs(T,[q3,q1],[q2,0]);% q1 does not influence the dynamics
T=subs(T,[cos(2*q2),sin(2*q2)], [2*cos(q2)^2-1,2*cos(q2)*sin(q2)]);
% reduced state vector Xr=[dx,v]'
xr=T*x;
K=diag([kq1,kq2,kq4,kq2,ktf,ktf,ktw]);
% M simplification
M=subs(M,[q3,q1,qm1],[q2,0,0]);
M=subs(M,[cos(2*q2),sin(2*q2)], [2*cos(q2)^2-1,2*cos(q2)*sin(q2)]);

Lagrangian Derivation...

```

## LPV state matrices calculus using Jacobian Linearization / LPV affine form depending on q2

in the following the motion equations are linearized around  $q_2$   $E \dot{x}' = F(x,u) y = C x E x' \sim A x + B u$  ;  
 $A = \text{Jacobian}(F(x,u),x)$  ;  $B = \text{Jacobian}(F(x,u),u) y = C x$  affine LPV form:  $M(q) = M_0 + M_1 \cos(q_2)$   
 $+ M_2 \sin(q_2) + M_3 \cos(q_2)^2 + M_4 \sin(q_2)^2 + M_5 \cos(q_2) \sin(q_2)$  the obtained state space form is  
first projected to the reduced lagrangian space  $x_r=[dx,v]'$ ; and second to the reduced hamiltonian space

---

$\dot{x} = [dx, p]' = E x$  where the resulting state space model is therefore in the Port Hamiltonian System (PHS) form:  
 $x' = (J-R) Q x + B u$  where  $y = B' Q x$  with  $J$  antisymmetric and  $R$  symmetric positive

```

% Lyapunov Matrix Q calculus
Qq=jacobian(jacobian(Ham,x),x);
Qq=subs(Qq,[xt,yt,qt,dxt,dyt,dqt],[xh,yh,qh,dxh,dyh,dqh]);
Qq=subs(Qq,[q3,q1,qm1],[q2,0,0]);% q1 does not influence the dynamics
Qq=subs(Qq,[dq1,dq2,dq3,dq4],[0,0,0,0]);% linearization around q2
Qq=simplify(Qq);
% Qq projection to Xr
Qq=simplify(pinv(T)'*Qq*pinv(T));
Qq=subs(Qq,[cos(2*q2),sin(2*q2)],[2*cos(q2)^2-1,2*cos(q2)*sin(q2)]);
Qq=subs(Qq,[cos(2*q2),sin(2*q2),cos(2*q2 + pi/4)],
[(cos(q2)^2-sin(q2)^2),(2*sin(q2)*cos(q2)),sqrt(2)*(0.5-
(sin(q2)+cos(q2)).*sin(q2))]);
Qq=collect(expand(Qq));

% Descriptor Matrix E calculus
disp('Descriptor Matrix "E" lfr computation...')
Eq=[eye(7),zeros(7,10);zeros(10,7),M];
Eq=subs(Eq,q3,q2);
Eq=subs(Eq,[cos(2*q2),sin(2*q2)],[2*cos(q2)^2-1,2*cos(q2)*sin(q2)]);
% state matrix A calculus
disp('State Matrix "A" lfr computation...')
Aq=[      zeros(10)          eye(10)  ;
     -jacobian(F,x)          ];
Aq=subs(Aq,[xt,yt,qt,dxt,dyt,dqt],[xh,yh,qh,dxh,dyh,dqh]);
Aq=subs(Aq,[q3,q1,qm1],[q2,0,0]);% q1 does not influence the dynamics
Aq=subs(Aq,[dq1,dq2,dq3,dq4],[0,0,0,0]);% linearization around q2
Aq=simplify(Aq);
% Aq projection to Xr
Aq=simplify(T*Aq*pinv(T));
Aq=subs(Aq,[cos(2*q2),sin(2*q2)],[2*cos(q2)^2-1,2*cos(q2)*sin(q2)]);
Aq=subs(Aq,[cos(2*q2),sin(2*q2),cos(2*q2 + pi/4)],
[(cos(q2)^2-sin(q2)^2),(2*sin(q2)*cos(q2)),sqrt(2)*(0.5-
(sin(q2)+cos(q2)).*sin(q2))]);
Aq=collect(expand(Aq));
% input matrix B calculus
disp('Input Matrix "B" lfr computation...')
Bq=[zeros(10,9);
     [eye(3),zeros(3,6);zeros(4,3),Jh',zeros(4,3);zeros(3),zeros(3),eye(3)]];
Bq=subs(Bq,[xt,yt,qt,dxt,dyt,dqt],[xh,yh,qh,dxh,dyh,dqh]);
Bq=subs(Bq,[q3,q1,qm1],[q2,0,0]);% q1 does not influence the dynamics
Bq=subs(Bq,[dq1,dq2,dq3,dq4],[0,0,0,0]);% linearization around q2
Bq=simplify(Bq);
Bq=subs(Bq,[cos(2*q2),sin(2*q2)],[2*cos(q2)^2-1,2*cos(q2)*sin(q2)]);
% Bq projection to Xr
Bq=simplify(T*Bq);
Bq=subs(Bq,[cos(2*q2),sin(2*q2)],[2*cos(q2)^2-1,2*cos(q2)*sin(q2)]);
% output matrix C calculus
disp('Output Matrix "C" lfr computation...')
Cq=[zeros(9,10),
     [eye(3),zeros(3,7);zeros(3,3),Jh,zeros(3,3);zeros(3,7),eye(3)]];
Cq=subs(Cq,[xt,yt,qt,dxt,dyt,dqt],[xh,yh,qh,dxh,dyh,dqh]);

```

---

---

```

Cq=subs(Cq,[q3,q1,qm1],[q2,0,0]);% q1 does not influence the dynamics
Cq=subs(Cq,[dq1,dq2,dq3,dq4],[0,0,0,0]);% linearization around q2
Cq=simplify(Cq);
Cq=subs(Cq,[cos(2*q2),sin(2*q2)],[2*cos(q2)^2-1,2*cos(q2)*sin(q2)]);
% Cq projection to Xr
Cq=simplify(Cq*pinv(T));
Cq=subs(Cq,[cos(2*q2),sin(2*q2)],[2*cos(q2)^2-1,2*cos(q2)*sin(q2)]);

% Jacobian matrix Jh simplification
Jh=simplify(subs(Jh,[q3,q1],[q2,0]));

Descriptor Matrix "E" lfr computation...
State Matrix "A" lfr computation...
Input Matrix "B" lfr computation...
Output Matrix "C" lfr computation...

```

## LPV System construction

```

disp('Uncertain State Space Model Creation...')
s=tf('s');

Uncertain State Space Model Creation...

```

## q2 scheduling

```

n=4;%number of points
q2l=zeros(1,1,n+2);
q2l(:)=linspace(0,pi/2,n+2);
q2l=q2l(:, :, 2:1:n+1);% singularities avoidance and samples number
reduction

jh=zeros([size(Jh*[1,0,0,0;0,1,1,0;0,0,0,1]'),numel(q2l)]);% Jh
sampling according to q2
e=zeros([size(Eq),numel(q2l)]);% Eq sampling according to q2
a=zeros([size(Aq),numel(q2l)]);% Aq sampling according to q2
a_undamped=zeros([size(Aq),numel(q2l)]);% Aq sampling according to q2
b=zeros([size(Bq),numel(q2l)]);% Bq sampling according to q2
c=zeros([size(Cq),numel(q2l)]);% Cq sampling according to q2
q=zeros([size(Aq),numel(q2l)]);% Cq sampling according to q2
j=zeros([size(Aq),numel(q2l)]);% Cq sampling according to q2
r=zeros([size(Aq),numel(q2l)]);% Cq sampling according to q2
d=zeros(9,9);

for i=1:numel(q2l)

    jh(:, :, i)=double(subs(simplify(Jh*[1,0,0,0;0,1,1,0;0,0,0,1]'),q2,q2l(i)));
    e(:, :, i)=double(subs(Eq,q2,q2l(i)));
    a(:, :, i)=double(subs(Aq,q2,q2l(i)));
    b(:, :, i)=double(subs(Bq,q2,q2l(i)));
    c(:, :, i)=double(subs(Cq,q2,q2l(i)));
    %q(:, :, i)=lyap(a(:, :, i)',eye(size(a(:, :, i))),[ ,e(:, :, i)']);
    q(:, :, i)=double(subs(Qq,q2,q2l(i)));
    j(:, :, i)=0.5*(a(:, :, i)*q(:, :, i)^-1-q(:, :, i)^-1*a(:, :, i)');

```

---

```

    r(:, :, i) = -0.5 * (a(:, :, i) * q(:, :, i) ^ -1 + q(:, :, i) ^ -1 * a(:, :, i));
    a_undamped(:, :, i) = j(:, :, i) * q(:, :, i);
end

Hq = dss(a, b, c, d, e);
Hq_undamped = dss(a_undamped, b, c, d, e);

Hq.InputName = {'T1', 'T2', 'T3', 'Fh1', 'Fh2', 'Fh3', 'Ft1', 'Ft2', 'Ft3'};
Hq.OutputName = {'dqm1', 'dqm2', 'dqm3', 'dxh1', 'dxh2', 'dxh3', 'dxt1', 'dxt2', 'dxt3'};

```

## loop closing

```

disp('Loop Closing...')

% arbitrary amplification ratio
alpha = realp('alpha', 10);
alpha.Free = 0;
% wc = realp('wc', 10000000);
% wc.Minimum = 0.0000001;
% hpfilt = feedback(eye(3), eye(3) / (s * wc));

K0 = append(tunablePID('K01', 'PI'), tunablePID('K02', 'PI'), tunablePID('K03', 'PI'));
%K0 = tunableSS('K0', 1, 3, 3);
%, tunablePID('K02', 'PI'), tunablePID('K03', 'PI'));
F0 = append(tunableGain('F01', 1, 1), tunableGain('F02', 1, 1), tunableGain('F03', 1, 1));

config{1} = 'std_lti'; % Without an additional internal IDA
(interconnection and damping assignment) loop
config{2} = 'phs_lti'; % With an additional internal IDA (interconnection
and damping assignment) loop

Kdamp = tunableGain('Kdamp', eye(17));
Hq_phs = genss(minreal(0 * Hq));
for i = 1: numel(q2l)
    Hq_phs(:, :, i) = lft(1/s * pinv(e(:, :, i)), [a(:, :, i) -
b(:, :, i) * b(:, :, i) * Kdamp * q(:, :, i), b(:, :, i); c(:, :, i), d(:, :, i)]);
end

Hq_phs.InputName = {'T1', 'T2', 'T3', 'Fh1', 'Fh2', 'Fh3', 'Ft1', 'Ft2', 'Ft3'};
Hq_phs.OutputName = {'dqm1', 'dqm2', 'dqm3', 'dxh1', 'dxh2', 'dxh3', 'dxt1', 'dxt2', 'dxt3'};

switch mycase
    case config{2} % phs_lti
        % the idea is to design an internal loop that only injects
damping.
        % due to the high number of degrees of freedom of a state
feedback
        % controller, systune was unable to find even a stabilizing
        % controller.
        % one way to reduce the number of dof of the controller is to
exploit

```



---

```

% the PHS form of the system to design a feedback of the form:
% beta*R*Q, with beta diagonal positive.
% beta will add an extra damping with respect to the structure
of
% the system

%Hq_phs.Blocks.Kdamp.Gain.Free=ones(9,17);
Hq_phs.Blocks.Kdamp.Gain.Free=eye(17);
%   Hq_phs.Blocks.Kdamp.Gain.Free=eye(9);
% Passivity at the human handle
Req_Passiv_HumanPort=TuningGoal.Passivity({'Fh1','Fh2','Fh3'},
{'dxh1','dxh2','dxh3'},0,min(getPassiveIndex(frd(Hq(4:6,4:6)),logspace(-5,8,1000)),
Req_Passiv_HumanPort.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];

% Passivity at the tool
switch sector_tool
case false

Req_Passiv_ToolPort=TuningGoal.Passivity({'Ft1','Ft2','Ft3'},
{'dxt1','dxt2','dxt3'},0,min(getPassiveIndex(frd(Hq(7:9,7:9)),logspace(-5,8,1000)),
Req_Passiv_ToolPort.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];
case true
Qsector=beam;

Req_Passiv_ToolPort=TuningGoal.ConicSector({'Ft1','Ft2','Ft3'},
{'dxt1','dxt2','dxt3','Ft1','Ft2','Ft3'},Qsector);
Req_Passiv_ToolPort.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];
end

%
Req_Passiv_ToolPort=TuningGoal.Passivity({'Ft1','Ft2','Ft3'},
{'dxt1','dxt2','dxt3'},0,min(getPassiveIndex(frd(Hq(7:9,7:9)),logspace(-5,8,1000)),
%   Req_Passiv_ToolPort.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];
% Passivity at the motor
Req_Passiv_MotorPort=TuningGoal.Passivity({'T1','T2','T3'},
{'dqm1','dqm2','dqm3'},0,min(getPassiveIndex(frd(Hq(1:3,1:3)),logspace(-5,8,1000)),
Req_Passiv_MotorPort.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];
% real ports requirement (maximam damping)
Req_PoleDamp=TuningGoal.Poles(0,1,1e10);

Req_Maximize_Passiv_HumanPort=TuningGoal.Passivity({'Fh1','Fh2','Fh3'},
{'dxh1','dxh2','dxh3'},0,Req_Passiv_HumanPort.OPX*2);
disp('IDA Loop Tuning...')

switch recalculate_Hq_phs_opt
case 0
switch passive_tool
case 1
load LDC_Hq_phs_opt_tool_passive
case 0
load LDC_Hq_phs_opt
end
disp('Tuning bypassed. ancient results loaded')

```

---

---

```

        case 1
            switch passive_tool
                case 1
                    Hq_phis_opt=systune(Hq_phis,[Req_PoleDamp],
[Req_Passiv_HumanPort,Req_Passiv_ToolPort],opts);%#ok
                case 0
                    Hq_phis_opt=systune(Hq_phis,[Req_PoleDamp],
[Req_Passiv_HumanPort],opts);%#ok
                end
                %
                %           Hq_phis_opt=systune(Hq_phis,
[Req_PoleDamp],[Req_Passiv_HumanPort]);
                assert(isstable(Hq_phis_opt));
            end

f1=figure(1);bodemag(Hq(4:6,4:6),Hq_phis_opt(4:6,4:6),logspace(-3,5,1000)*2*pi);gr

f2=figure(2);passiveplot(frd(Hq(4:6,4:6),logspace(-1,2,1000)*2*pi),frd(Hq_phis_opt

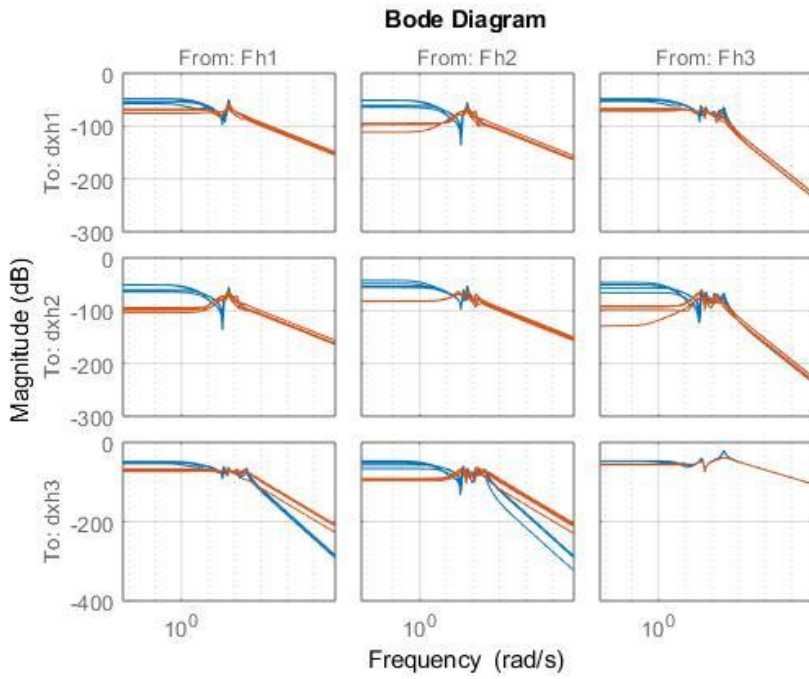
        case config{1}%std_lti
            %           Hq_phis.Blocks.Kdamp.Gain.Free=zeros(17,17);
            replaceBlock(Hq_phis,'Kdamp',zeros(17,17));
            Hq_phis_opt=Hq_phis;
        end

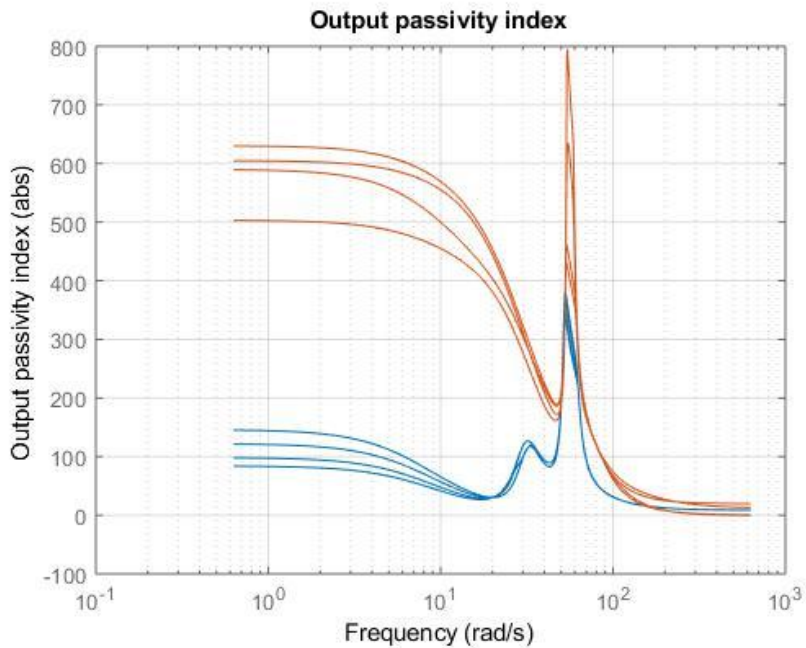
Loop Closing...
Warning: The nominal value is outside the specified range. Resetting
the nominal
value to the middle of the new range.
Warning: The nominal value is outside the specified range. Resetting
the nominal
value to the middle of the new range.
IDA Loop Tuning...
Final: Soft = 6.75, Hard = 1, Iterations = 199
Final: Soft = 6.79, Hard = 1, Iterations = 219
Final: Soft = 6.84, Hard = 1, Iterations = 175
Final: Soft = 6.83, Hard = 1, Iterations = 162
Final: Soft = 6.81, Hard = 1, Iterations = 250
Final: Soft = 6.76, Hard = 1, Iterations = 194
Final: Soft = 6.75, Hard = 1, Iterations = 218
Final: Soft = 6.78, Hard = 1, Iterations = 221
Final: Soft = 6.75, Hard = 1, Iterations = 171
Final: Soft = 6.78, Hard = 1, Iterations = 227
Final: Soft = 6.76, Hard = 1, Iterations = 197
Final: Soft = 6.81, Hard = 1, Iterations = 235
Final: Soft = 6.76, Hard = 1, Iterations = 208
Final: Soft = 6.89, Hard = 1, Iterations = 176
Final: Soft = 6.77, Hard = 1, Iterations = 206
Final: Soft = 6.76, Hard = 1, Iterations = 194
Final: Soft = 6.75, Hard = 1, Iterations = 234
Final: Soft = 7.67, Hard = 1, Iterations = 25
Final: Soft = 6.77, Hard = 1, Iterations = 194
Final: Soft = 6.75, Hard = 1, Iterations = 214

```

---

Final: Soft = 6.76, Hard = 1, Iterations = 209





```

for i=1:numel(jh(1,1,:))
    jht(:,:,i)=jh(:,:,i)';
end
K=K0;
F=F0;
frdHq=frd(Hq_phs_opt({'dxh1','dxh2','dxh3'},
{'Fh1','Fh2','Fh3'}),10^-3);
HqGain=abs(frdHq.Res);

% getting the natural inertia of the human handle
acgainh=diag(diag(evalfr(Hq_phs_opt(4:6,4:6,1)*s,1e4)));
bgainh=evalfr(acgainh/s,0.1*2*pi);
% getting the natural inertia of the tool
acgain=(evalfr(Hq_phs_opt(7:9,7:9,1)*s,1e4));
bgaint=evalfr(acgain/s,0.1*2*pi);

CL0=feedback([zeros(3),eye(3),zeros(3);zeros(3),zeros(3),eye(3)]*Hq_phs_opt*[-
K*jht*[eye(3),alpha^-1*eye(3)]-
F*jht*[zeros(3),alpha^-1*eye(3)]];eye(6)],append(bgainh^-1*AnalysisPoint('H_Imp_Yh
%CL0=feedback([zeros(3),eye(3),zeros(3);zeros(3),zeros(3),eye(3)]*Hq_phs_opt*[-
K*jht*[eye(3),alpha^-1*eye(3)]-
F*[zeros(3),eye(3)]];eye(6)],diag([1,1,-1,0,0,0]));

CL0.InputName={'Fh1','Fh2','Fh3','Ft1','Ft2','Ft3'};
CL0.OutputName={'dxh1','dxh2','dxh3','dxt1','dxt2','dxt3'};
CL0.Blocks.Kdamp.Gain.Free=0;

```

---

```

% Requirements Definition
disp('Control Design Requirements Definition...')
% Human Port Passivity Requirement
Req_Passiv_HumanPort=TuningGoal.Passivity({'Fh1','Fh2','Fh3'},
{'dxh1','dxh2','dxh3'},0,0.001);
Req_Passiv_HumanPort.Openings={'H_Imp_Yh','H_Imp_Yt'};
Req_Passiv_HumanPort.Focus = 2*pi*[1e-1,inf];
% Tool Port Passivity Requirement
switch sector_tool
    case false
        Req_Passiv_ToolPort=TuningGoal.Passivity({'Ft1','Ft2','Ft3'},
{'dxt1','dxt2','dxt3'},0,0.001);
    case true
        Qsector=beam;

    Req_Passiv_ToolPort=TuningGoal.ConicSector({'Ft1','Ft2','Ft3'},
{'dxt1','dxt2','dxt3','Ft1','Ft2','Ft3'},Qsector);
end
Req_Passiv_ToolPort.Openings={'H_Imp_Yh','H_Imp_Yt'};
Req_Passiv_ToolPort.Focus = 2*pi*[1e-1,inf];
% Impedance Minimization Requirement
WeightYh=feedback(bgainh^-1,acgainh/s);
Req_ImpMin1=TuningGoal.Sensitivity('H_Imp_Yh(1)',WeightYh(1,1));
Req_ImpMin1.Openings={'H_Imp_Yt'};
% Req_ImpMin1.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];
Req_ImpMin2=TuningGoal.Sensitivity('H_Imp_Yh(2)',WeightYh(2,2));
Req_ImpMin2.Openings={'H_Imp_Yt'};
% Req_ImpMin2.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];
Req_ImpMin3=TuningGoal.Sensitivity('H_Imp_Yh(3)',WeightYh(3,3));
Req_ImpMin3.Openings={'H_Imp_Yt'};
% Req_ImpMin3.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];

WeightYt=feedback(bgaint^-1,alpha^-1*acgaint/s);
Req_ImpMin4=TuningGoal.Sensitivity('H_Imp_Yt(1)',WeightYt(1,1));
Req_ImpMin4.Openings={'H_Imp_Yh'};
% Req_ImpMin4.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];
Req_ImpMin5=TuningGoal.Sensitivity('H_Imp_Yt(2)',WeightYt(2,2));
Req_ImpMin5.Openings={'H_Imp_Yh'};
% Req_ImpMin5.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];
Req_ImpMin6=TuningGoal.Sensitivity('H_Imp_Yt(3)',WeightYt(3,3));
Req_ImpMin6.Openings={'H_Imp_Yh'};
% Req_ImpMin6.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];

Req_ImpMin=[Req_ImpMin1,Req_ImpMin2,Req_ImpMin3];% ,Req_ImpMin4,Req_ImpMin5,Req_Imp
%Req_ImpMin=TuningGoal.Sensitivity('H_Imp_Yh',Weight(1,1));
% Closed Loop Tuning
disp('Amplification Loop Tuning...')
% We are in pick and place context, we require passivity only on the
human
% handle port

switch recalculate_CLopt

```

---

---

```

case 0
    switch passive_tool
        case 1
            load LDC_CLopt_tool_passive
        case 0
            load LDC_CLopt
    end
    disp('Tuning bypassed. ancient results loaded')
case 1
    switch passive_tool
        case 1
            CLopt=systune(CL0,Req_ImpMin,
[Req_Passiv_HumanPort,Req_Passiv_ToolPort],opts);
        case 0
            CLopt=systune(CL0,
[Req_ImpMin],Req_Passiv_HumanPort,opts);
    end
    assert(isstable(CLopt));
end
% Results
CLopt.Blocks.H_Imp_Yh.Open=1;
CLopt.Blocks.H_Imp_Yt.Open=1;

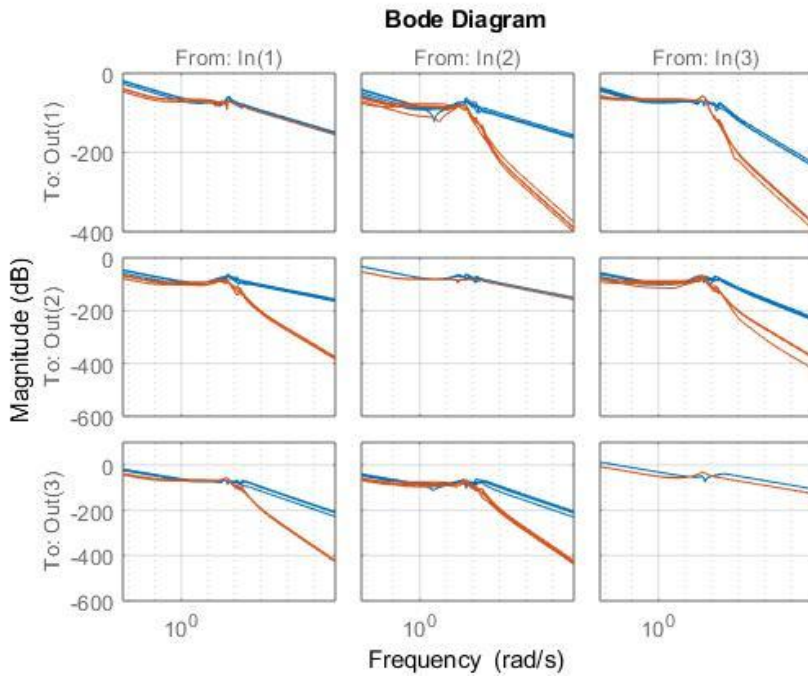
figure(3);bodemag(CLopt(1:3,1:3),CLopt(4:6,4:6),logspace(-3,5,1000)*2*pi);grid
figure(4);passiveplot(frd(CLopt(1:3,1:3),logspace(-1,2,1000)*2*pi),'output');

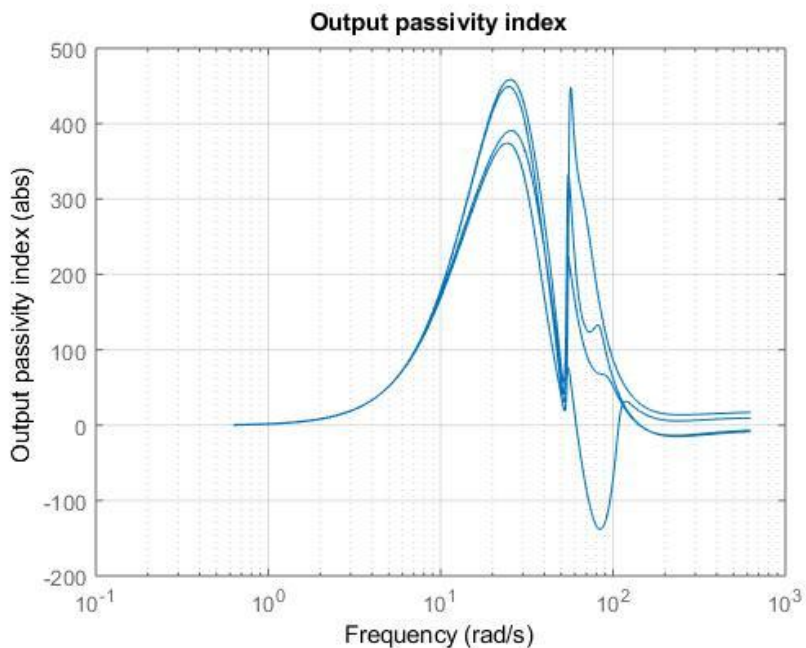
Control Design Requirements Definition...
Warning: The nominal value is outside the specified range. Resetting
the nominal
value to the middle of the new range.
Warning: The nominal value is outside the specified range. Resetting
the nominal
value to the middle of the new range.
Amplification Loop Tuning...
Final: Soft = 160, Hard = 1.0038, Iterations = 186
Final: Soft = 463, Hard = 1, Iterations = 264
Final: Soft = 231, Hard = 1.0007, Iterations = 213
Final: Soft = 441, Hard = 1, Iterations = 384
Final: Soft = 441, Hard = 1, Iterations = 367
Final: Soft = 414, Hard = 1, Iterations = 333
Final: Soft = 40.7, Hard = 1.023, Iterations = 124
Final: Soft = 397, Hard = 1, Iterations = 248
Final: Soft = 40.7, Hard = 1.023, Iterations = 137
Final: Soft = 486, Hard = 1, Iterations = 344
Final: Soft = 411, Hard = 1, Iterations = 352
Final: Soft = 276, Hard = 1.0004, Iterations = 225
Final: Soft = 419, Hard = 1, Iterations = 330
Final: Soft = 415, Hard = 1, Iterations = 325
Final: Soft = 411, Hard = 1, Iterations = 309
Final: Soft = 431, Hard = 1, Iterations = 262
Final: Soft = 160, Hard = 1.0014, Iterations = 211
Final: Soft = 389, Hard = 1, Iterations = 234
Final: Soft = 415, Hard = 1, Iterations = 332
Final: Soft = 410, Hard = 1, Iterations = 344

```

---

Final: Soft = 445, Hard = 1, Iterations = 323





## Adding flexible interaction port for human

In the following, we will explore the possibility to use systune routine for mechanical-control co-design. The idea is to tune simultaneously control and some mechanical parameters. The chosen parameters are the stiffness and damping matrix of the human handle as a technique to ameliorate the inertia compensation. i.e. Xavier Lamy

```
disp('Amplification Loop Tuning in the context of handle-control co-
design...')
try%#ok
    CLOpt.Blocks.Kdamp.Free=0;
end
I=eye(3);O=zeros(3);

% Interconnexion Matrix
M=[ O   I   O   -I   O;
    I   O   O   O   O;
    O   O   O   O   I;
    I   O   O   O   O;
    O   O   I   O   O];

% Loss_factor
Loss_f=tunableGain('Loss_f',2);
Loss_f.Gain.Maximum=inf;
Loss_f.Gain.Minimum=0.001;
% Damping Matrix
```



---

```

Bhx=tunableGain('Bhx',0);
Bhq=tunableGain('Bhq',0);
Bh=append(Bhx,Bhx,Bhq);
%Bh.Gain.Minimum=zeros(3);
% Stiffness Matrix
Kh=Bh/Loss_f;
% Kh=tunableGain('Kh',0*eye(3));
% Kh.Gain.Free=eye(3);
% Kh.Gain.Minimum=zeros(3);

% Handle Impedance
Handle=Bh+Kh/s;
Handle.InputName={'dxhr1','dxhr2','dxhr3'};
Handle.OutputName={'Fh1','Fh2','Fh3'};

Fhu=AnalysisPoint('Fhu',3);
dxhu=AnalysisPoint('dxhu',3);

% Interconnexion
CPS0=lft(Handle,lft(M,append(dxhu,eye(3))*genminreal(replaceBlock(replaceBlock(rep
% CPS0=replaceBlock(CPS0,'H_Imp_Yh',zeros(3)));
CPS0.InputName={'dxhr1','dxhr2','dxhr3','Ft1','Ft2','Ft3'};
CPS0.OutputName={'Fh1','Fh2','Fh3','dxt1','dxt2','dxt3'};
% Requirements Definition

% passivity requirement
Req_Passiv_HumanPort_new=TuningGoal.Passivity({'dxhr1','dxhr2','dxhr3'},
{'Fh1','Fh2','Fh3'},0.001,0);
Req_Passiv_HumanPort_new.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];
%Req_Passiv_HumanPort_new.Openings={'H_Imp_Yh','H_Imp_Yt'};
switch sector_tool
    case false

        Req_Passiv_ToolPort_new=TuningGoal.Passivity({'Ft1','Ft2','Ft3'},
{'dxt1','dxt2','dxt3'},0,0);
        case true

            Req_Passiv_ToolPort_new=TuningGoal.ConicSector({'Ft1','Ft2','Ft3'},
{'dxt1','dxt2','dxt3','Ft1','Ft2','Ft3'},Qsector);
            end
            Req_Passiv_ToolPort_new.Focus = 2*pi*[1e-1,1e2];
            %Req_Passiv_ToolPort_new.Openings={'H_Imp_Yh','H_Imp_Yt'};
            for i=1:n

                CLOptInertia(:, :, i)=diag(diag(evalfr(CLOpt(1:3,1:3,i))*s,1e-2*2*pi));
            end
            inert_goal_coef=0.1;% Inertia reduction goal
            %Weight_CPS=feedback(eye(3),acgainh/(inert_goal_coef*s));
            Weight_CPS=feedback(bgainh^-1,CLOptInertia(:, :, 2)/
            (inert_goal_coef*s));
            %Weight_CPS=inert_goal_coef*s;
            Req_ImpMin1_CPS=TuningGoal.Gain('dxhr1','Fh1',Weight_CPS(1,1));
            Req_ImpMin2_CPS=TuningGoal.Gain('dxhr2','Fh2',Weight_CPS(2,2));

```

---

---

```

Req_ImpMin3_CPS=TuningGoal.Gain('dxhr3','Fh3',Weight_CPS(3,3));
%
% Impedance minimization requirement
Req_ImpMin_CPS=[Req_ImpMin1_CPS,Req_ImpMin2_CPS,Req_ImpMin3_CPS];
% Tuning

```

```

switch recalculate_CPSopt
case 0
    switch passive_tool
    case 1
        load LDC_CPSopt_tool_passive
    case 0
        load LDC_CPSopt
    end
    disp('Tuning bypassed. ancient results loaded')
case 1
    switch passive_tool
    case 1
        CPSopt=systune(CPS0,[Req_ImpMin_CPS],
[Req_Passiv_HumanPort_new,Req_Passiv_ToolPort_new],opts);%#ok
    case 0
        CPSopt=systune(CPS0,[Req_ImpMin_CPS],
[Req_Passiv_HumanPort_new],opts);%#ok
    end
end

```

```

ROBopt=getIOTransfer(CPSopt,
{'Fhu(1)','Fhu(2)','Fhu(3)','Ft1','Ft2','Ft3'},
{'dxhu(1)','dxhu(2)','dxhu(3)','dxt1','dxt2','dxt3'});
ROBopt.Blocks.Bhx.Gain.Value=0;
ROBopt.Blocks.Bhq.Gain.Value=0;
% ROBopt.Blocks.Kh.Gain.Value=0;
ROBopt.InputName={'Fh1','Fh2','Fh3','Ft1','Ft2','Ft3'};
ROBopt.OutputName={'dxh1','dxh2','dxh3','dxt1','dxt2','dxt3'};

```

```
% Results
```

```

figure(5);bodemag(CLOpt(1:3,1:3),ROBopt(1:3,1:3),ROBopt(4:6,4:6),logspace(-7,4,100)
figure(6);passiveplot(frd(CPSopt(1:3,1:3),logspace(-1,2,1000)*2*pi),'input');

```

*Amplification Loop Tuning in the context of handle-control co-design...*

*Warning: By default, the control system is tuned with all loops closed at analysis points. Use the "Openings" property of tuning goals to open specific feedback loops.*

*Final: Failed to enforce closed-loop stability (max Re(s) = 1.3e-15)*

*Final: Soft = 1.51, Hard = 1, Iterations = 196*

*Final: Soft = 0.611, Hard = 1, Iterations = 243*

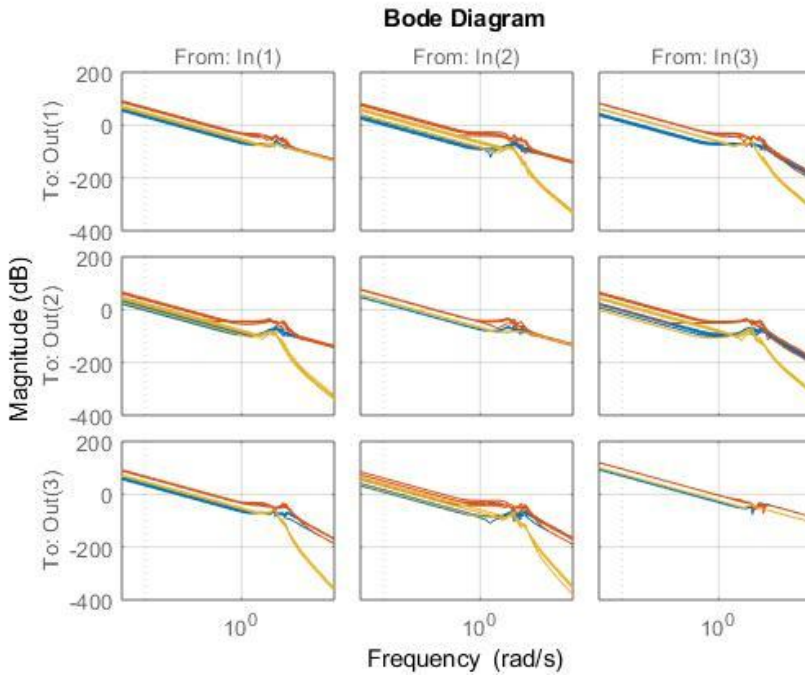
*Final: Failed to enforce closed-loop stability (max Re(s) = 1.3e-15)*

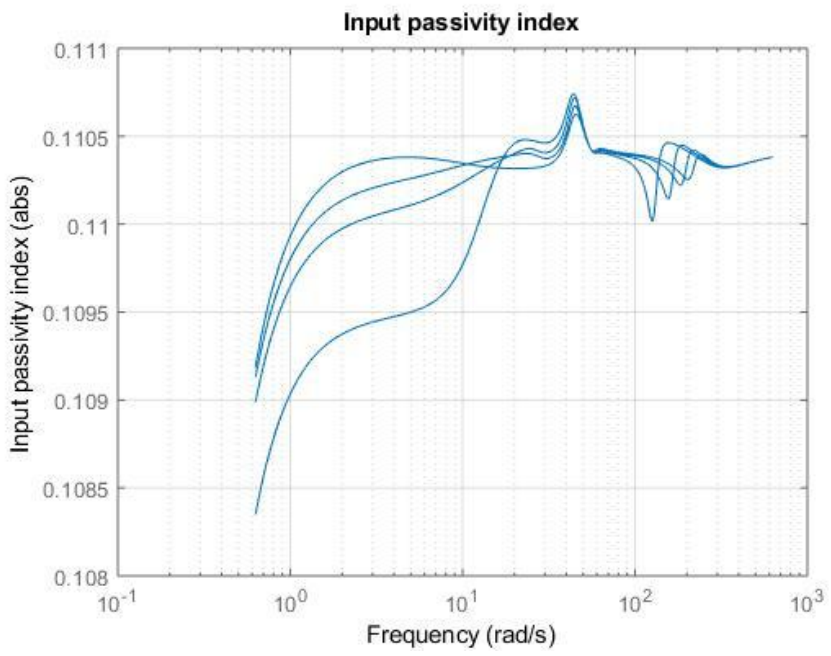
*Final: Failed to enforce closed-loop stability (max Re(s) = 2.9e-17)*

*Final: Failed to enforce closed-loop stability (max Re(s) = 1.6e-15)*

*Final: Failed to enforce closed-loop stability (max Re(s) = 1.6e-14)*

Final: Failed to enforce closed-loop stability ( $\max \operatorname{Re}(s) = 6.9e-16$ )  
 Final: Soft = 1.25, Hard = 1, Iterations = 199  
 Final: Failed to enforce closed-loop stability ( $\max \operatorname{Re}(s) = 4.2e-15$ )  
 Final: Failed to enforce closed-loop stability ( $\max \operatorname{Re}(s) = 9.2e-14$ )  
 Final: Failed to enforce closed-loop stability ( $\max \operatorname{Re}(s) = 5.9e-19$ )  
 Final: Soft = 0.61, Hard = 1, Iterations = 211  
 Final: Failed to enforce closed-loop stability ( $\max \operatorname{Re}(s) = 2.5e-15$ )  
 Final: Failed to enforce closed-loop stability ( $\max \operatorname{Re}(s) = 2.2e-15$ )  
 Final: Failed to enforce closed-loop stability ( $\max \operatorname{Re}(s) = 4.3e-15$ )  
 Final: Failed to enforce closed-loop stability ( $\max \operatorname{Re}(s) = 2.1e-18$ )  
 Final: Failed to enforce closed-loop stability ( $\max \operatorname{Re}(s) = 1.3e-16$ )  
 Final: Failed to enforce closed-loop stability ( $\max \operatorname{Re}(s) = 2.2e-14$ )  
 Final: Failed to enforce closed-loop stability ( $\max \operatorname{Re}(s) = -0$ )  
 Final: Soft = 2.31, Hard = 1, Iterations = 147





*Published with MATLAB® R2017b*