



**HAL**  
open science

# Nombres d'ondes, masses volumiques et modules effectifs de milieux composites formés d'une matrice poro-élastique contenant des inclusions de forme cylindrique

Dossou Gnadjro

► **To cite this version:**

Dossou Gnadjro. Nombres d'ondes, masses volumiques et modules effectifs de milieux composites formés d'une matrice poro-élastique contenant des inclusions de forme cylindrique. Mécanique [physics]. Normandie Université; Université de Lomé (Togo), 2019. Français. NNT : 2019NORMLH16 . tel-02313683

**HAL Id: tel-02313683**

**<https://theses.hal.science/tel-02313683>**

Submitted on 11 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité : Mathématiques / Mécanique

Préparée au sein des universités de Lomé et Le Havre-Normandie

**Nombres d'onde, masses volumiques et modules effectifs de milieux composites formés d'une matrice poro-élastique contenant des inclusions de forme cylindrique**

Présentée et soutenue par  
**Dossou GNADJRO**

Thèse soutenue publiquement le 12 juillet 2019  
devant le jury composé de

M. TCHARIE Kokou	Professeur, Université de Lomé (Togo)	Président
M. Zine El Abiddine FELLAH	Chargé de Recherche HDR au CNRS Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Marseille (France)	Rapporteur
M. Moussa Zakari DJIBIBE	MCF HDR, Université de Lomé (Togo)	Rapporteur
M. Rabah LABBAS	Professeur, Université le Havre Normandie (Togo)	Examineur
M. Hervé FRANKLIN	Professeur, Université le Havre Normandie (France)	Directeur de thèse
M. Amah Séna d'ALMEIDA	MCF HDR, Université de Lomé (Togo)	Codirecteur de thèse

Thèse dirigée par :

**H. FRANKLIN, Laboratoire Ondes et Milieux Complexes, UMR 6294 CNRS, Le Havre.**

**A. S. d'ALMEIDA, Laboratoire d'Analyse de Modélisations Mathématiques et Applications, Lomé.**

# *Thèse de Doctorat*

Spécialité : Mathématiques/ Mécanique

Nombres d'onde, masses volumiques et modules  
effectifs de milieux composites formés d'une  
matrice poro-élastique contenant des inclusions  
de forme cylindrique



# Remerciements

Je remercie les professeurs Amah Séna d'ALMEIDA et Hervé FRANKLIN mes codirecteurs de thèse pour leur disponibilité. Leurs rigueurs m'ont permis d'avancer et de terminer mon travail dans de bonnes conditions.

Je remercie les rapporteurs M. Zine El Abiddine FELLAH et M. Moussa Zakari DJIBIBE pour avoir bien voulu rapporter ce manuscrit de thèse. Mes remerciements vont également à M. Rabah LABBAS qui a examiné ce document. Leurs apports et suggestions ont été très constructifs. Je remercie les membres du Jury d'avoir consacré leur temps pour examiner ce travail. Merci au professeur Kokou TCHARIE d'avoir présidé mon jury de thèse.

Un grand merci à tous les enseignants du département de mathématiques pour avoir partagé avec moi leurs nombreuses connaissances.

Je remercie les professeurs et le personnel du laboratoire LOMC (Laboratoire Ondes et Milieux Complexes) pour leur accueil et disponibilité durant mon séjour au Havre. Je suis particulièrement reconnaissant à Francine LUPPE pour son aide et le temps consacré pour me faire découvrir le Havre.

Un grand merci au service de la coopération française (Campus France- Agence française pour la promotion de l'enseignement supérieur, l'accueil et la mobilité internationale) de m'avoir accordé la bourse EIFFEL pour bien préparer ma thèse.

Je suis reconnaissant au service de relation international (SRI) de l'université Le Havre pour leur accueil pendant mon séjour au Havre.

Je remercie Komi TOKOU et ma famille (mes parents, mes frères, mes soeurs, mon oncle Koffi ALOMASSOU) pour leur soutien et prière durant ces quatre années. Un spécial merci à ma femme de m'avoir supporter et encourager. J'adresse toute ma gratitude au pasteur Yao ALI pour ses conseils et prières.

Je ne saurais oublier les doctorants et docteurs du laboratoire LAMMA (Laboratoire d'Analyse de Modélisations Mathématiques et Applications) de l'Université de Lomé pour leurs conseils et moments de détente.

Enfin, ma reconnaissance va à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'élaboration de ce document.



# Résumé

On étudie la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu poreux obéissant à la théorie de Biot et contenant une distribution aléatoire de cavités cylindriques et celle d'une onde acoustique dans un fluide contenant une distribution polydisperse aléatoire de sphères poreuses.

Dans le premier cas on utilise la généralisation de Conoir-Norris de la formule de Linton-Martin. En effet, elle permet de prendre en compte le phénomène de la conversion entre les trois ondes (deux longitudinales et une transversale) se propageant naturellement dans un milieu poreux de Biot contenant une distribution aléatoire de cavités. Des expressions analytiques sont trouvées pour les nombres d'onde effectifs des ondes cohérentes dans la limite de Rayleigh. Les approximations des masses volumiques et modules des milieux hétérogènes sont présentées jusqu'à l'ordre  $c^2$  en concentration. Le cas limite des cavités fluides aléatoires dans une matrice élastique est également discuté. Dans le deuxième cas on détermine les nombres d'onde, modules et masses volumiques effectifs pour des distributions polydisperses de sphères poroélastiques. Pour y parvenir, les formules récentes du nombre d'onde effectif données par Linton et Martin dans le cas dilué monodisperse ont été modifiées. Compte tenu de l'incertitude entourant la prédiction de la distribution en taille des obstacles, trois densités de probabilité différentes sont étudiées et comparées : uniforme, Schulz et lognormal. Plus précisément, l'approximation de Rayleigh (régime de basse fréquence) est prise en compte lorsque les longueurs d'onde peuvent être supposées très grandes par rapport à la taille des obstacles. Dans cette limite, des formules simplifiées des concentrations sont fournies en fonction du paramètre caractérisant la dispersion en taille.





# Abstract

We study the propagation of acoustic waves in a porous medium obeying the Biot theory and containing a random distribution of cylindrical cavities and that of an acoustic wave in a fluid containing a random polydisperse distribution of porous spheres.

In the first case we use the generalization by Conoir-Norris of the Linton-Martin formula. It allows to take into account the phenomenon of the conversion between the three waves (two longitudinal and one transverse) naturally propagating in a porous Biot medium containing a random distribution of cavities. Analytical expressions are found for the effective wavenumbers of coherent waves in the Rayleigh limit (low frequency regime). The approximations of the densities and heterogeneous media modules are presented up to the order of  $c^2$  in concentration. The limiting case of random fluid cavities in an elastic matrix is also discussed. In the second case the effective wavenumbers, moduli and density are determined for polydisperse distributions of poroelastic spheres. To achieve this, the recent formulas of the effective wave number given by Linton and Martin in the dilute monodisperse case have been modified. Given the uncertainty for predicting the distribution in size of obstacles, three different probability densities are studied and compared : uniform, Schulz and lognormal. More precisely, the Rayleigh limit is taken into account when the wave lengths can be assumed to be very large compared to the size of the obstacles. Within this limit, simplified formulas for concentrations are provided depending on the parameter characterizing the size dispersion.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
<b>1 Diffusion multiple</b>	<b>13</b>
1.1 Généralités . . . . .	13
1.1.1 Description déterministe . . . . .	13
1.1.2 Moyennages . . . . .	15
1.1.3 Evitement de l'interpénétration des diffuseurs . . . . .	17
1.1.4 Approximation quasi-cristalline (Quasi Crystalline Approximation QCA) de Lax . . . . .	19
1.2 Nombres d'ondes de Foldy et de Lax . . . . .	20
1.2.1 Nombre d'onde effectif obtenu en utilisant l'approximation de Foldy . . . . .	21
1.2.2 Nombre d'onde effectif obtenu en utilisant l'approximation de Lax . . . . .	23
1.3 Généralisation du nombre d'onde effectif . . . . .	25
1.4 Diffusion par une cavité cylindrique dans un milieu poreux de Biot . . . . .	27
1.4.1 Milieu poreux de Biot . . . . .	27
1.4.2 Ondes dans un milieu poreux saturé . . . . .	28
1.4.3 Diffusion par un cylindre fluide dans un milieu poreux . . . . .	31
1.5 Généralisation de la théorie de Conoir et Norris à un milieu poreux élastique contenant des inclusions cylindriques . . . . .	36
1.5.1 Théorie de Fikioris et Waterman . . . . .	36
1.5.2 Formulation matricielle des équations modales . . . . .	40
1.5.3 Solution asymptotique de l'équation du nombre d'onde . . . . .	42
1.6 Conclusion . . . . .	45
<b>2 Limites de Rayleigh des nombres d'ondes effectifs pour des cylindres fluides</b>	<b>47</b>
2.1 Approximations des coefficients de diffusion pour les conditions des pores fermés . . . . .	47
2.1.1 Comparaison numérique . . . . .	51
2.1.2 Limites des coefficients de diffusion lorsque la porosité tend vers 0 . . . . .	52
2.2 Approximation des nombres d'ondes effectifs d'un milieu poreux . . . . .	53
2.2.1 Nombre d'onde effectif de l'onde cohérente rapide 1 . . . . .	54
2.2.2 Nombre d'onde effectif de l'onde cohérente transversale $t$ . . . . .	54
2.3 Modules et masses volumiques effectifs . . . . .	56
2.4 Conclusion . . . . .	60
<b>3 Diffusion multiple en présence d'une dispersion en taille de rayons</b>	<b>61</b>
3.1 Introduction . . . . .	61
3.2 Diffusion par une sphère poreuse dans un milieu fluide . . . . .	61
3.3 Approximation des coefficients de diffusion . . . . .	65
3.4 Limites de Rayleigh des nombres d'ondes effectifs pour des sphères poreuses dans le cas polydisperse . . . . .	67
3.4.1 Nombre d'onde effectif de Linton et Martin . . . . .	67

---

3.4.2	Les concentrations . . . . .	69
3.5	Nombres d'onde effectif, module effectif et masse volumique effective . . . . .	71
3.5.1	Diffuseurs poreux . . . . .	71
3.5.2	Diffuseurs élastiques . . . . .	72
3.5.3	Diffuseurs fluides . . . . .	73
3.6	Conclusion . . . . .	73
<b>Conclusion générale</b>		<b>75</b>
<b>Annexes</b>		<b>77</b>
<b>A Fonctions de Bessel cylindriques</b>		<b>79</b>
<b>B Fonctions de Bessel sphériques</b>		<b>81</b>
<b>C Fonctions de Legendre, fonctions harmoniques sphériques, coefficient de Gaunt</b>		<b>83</b>
<b>D Coefficients de diffusion pour les conditions aux limites de <i>pores ouverts</i></b>		<b>85</b>
<b>E Calcul de l'intégrale <math>I_p^\alpha</math></b>		<b>87</b>
<b>F Equation de la diffusion par une cavité cylindrique fluide dans un milieu élastique</b>		<b>93</b>

# Introduction générale

Les matériaux composites sont présents partout dans la nature. Dans les sols, roches ou sédiments marins, ils sont à l'état de milieux poreux hétérogènes contenant des cavités remplies d'air, de liquide ou d'inclusions élastiques ou poreuses de tailles et de formes diverses. Chez les animaux et les hommes, la chair est un milieu composite puisque c'est une matrice élastoplastique remplie de canaux et cavités dans lesquels circulent l'air et le sang. Le tissu osseux constitue également un matériau composite puisque l'os contient des pores à différentes échelles remplis de moelle. Par ailleurs les produits manufacturés font appel aux matériaux composites artificiels qui sont utilisés en lieu et place des matériaux naturels car, souvent une combinaison adéquate de deux ou plusieurs milieux homogènes peut fournir des propriétés mécaniques et acoustiques n'existant pas à l'état naturel. On parle alors de métamatériaux. Cette omniprésence des matériaux composites dans la nature et l'utilisation des métamatériaux est à l'origine de nombreux problèmes tels que en géologie, la contamination des sols par les polluants, en biologie l'ostéoporose qui est une maladie des os causant la perte en densité osseuse. Il est donc important d'avoir des moyens de diagnostic pour évaluer par exemple le degré de pollution d'un sol après une catastrophe écologique ou la perte en densité osseuse. On peut y parvenir par l'étude des propriétés acoustiques de ces matériaux. Il existe plusieurs méthodes pour étudier les propriétés acoustiques d'un matériau composite. On peut citer la méthode basée sur les fonctions de Green de Bourret [7] en 1962, Furutsu [8] en 1963, Sornette [29] en 1989..., la méthode basée sur les équations de la diffusion multiple de Foldy [1] en 1945, Lax [2] en 1951, Waterman et Truell [6] en 1961, Fikoris et Waterman [12] en 1964...

Notre étude s'inscrit dans le cadre de la recherche sur les métamatériaux et s'intéresse à la diffusion multiple d'ondes dans des milieux contenant des obstacles aléatoirement répartis. Les résultats peuvent s'appliquer dans des domaines variés comme l'acoustique médicale, la prospection et le diagnostic des sols ou la confection de nouveaux matériaux.

Notre travail étend des résultats antérieurs afin de traiter les cas de la diffusion multiple dans un milieu poroélastique obéissant à la théorie de Biot et contenant une distribution aléatoire de cavités cylindriques fluides et d'un milieu fluide contenant une distribution aléatoire polydispersée de cavités sphériques poreuses.

Le mémoire est organisé de la manière suivante.

Le premier chapitre assez classique sert de revue bibliographique sur la diffusion multiple et les milieux poreux et donne des précisions et des justifications sur des notions qui sont utilisées par la suite. On rappelle d'abord la description déterministe et statistique de la diffusion multiple. Ensuite on rappelle les formules des nombres d'onde des ondes cohérentes de Foldy et de Lax pour un milieu fluide contenant des inclusions sphériques ou cylindriques fluides [45], et la formule du nombre d'onde de l'onde cohérente de Linton et Martin [45] dans un milieu fluide qui représente une extension des formules des nombres d'onde des ondes cohérentes de Foldy et de Lax. On donne un bref aperçu de la théorie du milieu poreux de Biot [4], [5]. Le milieu poreux est supposé continu et les longueurs d'onde des ondes se propageant dans ce milieu sont très grands devant les éléments caractéristiques du milieu poreux. L'hypothèse des petits mouvements permet de montrer que dans ce milieu il y a trois ondes qui se propagent. Enfin on établit la formule des nombres d'onde des ondes cohérentes de Conoir-Norris [49] dans un milieu poreux élastique homogénéisé saturé par un fluide contenant des cavités cylindriques distribuées aléatoirement. Ce modèle dérive de l'approximation quasi-cristalline

(QCA) de Lax [2] [45].

Le deuxième chapitre est consacré à la détermination des nombres d'onde effectifs d'ondes rapide, lente et de cisaillement dans les limites de Rayleigh (limite de basse fréquence). Ainsi on détermine les approximations des coefficients de diffusion d'un obstacle pour les conditions aux limites des *pores fermés*. Des études numériques sont menées afin de comparer les coefficients de diffusion respectivement pour les conditions aux limites des *pores fermés* et les conditions aux limites des *pores ouverts*. On détermine les propriétés effectives du milieu (masses volumiques, modules) à partir des nombres d'ondes cohérentes de Conoir-Norris tronqués. On évalue la validité des coefficients de diffusion approximatés en supprimant les micro-pores afin de retrouver les résultats pour des inclusions cylindriques fluides dans un milieu élastique ou fluide (module d'élasticité nul).

On étudie dans le chapitre trois la propagation acoustique dans un milieu fluide contenant une distribution polydisperse en taille d'inclusions sphériques poreuses isotropes. On établit d'abord les équations de base permettant de déterminer les coefficients de diffusion pour une inclusion sphérique poreuse. En supposant une distribution continue du rayon des obstacles, on détermine la formule du nombre d'onde effectif dans le cas polydisperse en s'appuyant sur la formule du nombre d'onde effectif de Linton-Martin [45] (cas monodisperse). On en déduit les propriétés effectives dans le milieu fluide. Celles du cas monodisperse sont obtenues (rayon identique pour toutes les sphères) en faisant tendre vers zéro le coefficient de dispersion. Les distributions de rayons obéissant aux lois uniforme, de Schulz et log-normale sont examinées et comparées numériquement, montrant l'importance des lois sur la propagation acoustique.

# Chapitre 1

## Diffusion multiple

### 1.1 Généralités

Le phénomène de la diffusion multiple est fréquemment observé lors de la propagation d'une onde (ou champ) acoustique dans un milieu contenant un nombre d'obstacles (ou diffuseurs) supérieur ou égal à deux. On examine ici le cas des concentrations faibles, c'est-à-dire que les obstacles (cylindres ou sphères) ne se touchent pas, étant séparés les uns des autres par une distance de plusieurs diamètres. Lorsque l'onde interagit avec un seul obstacle, on parle de diffusion simple.

Soit  $\lambda_0$  la longueur d'onde de l'onde acoustique : si  $\lambda_0$  est très grand devant les dimensions des obstacles alors l'onde subit peu le phénomène de diffusion multiple (ricochets multiples sur les obstacles).

Si la longueur d'onde  $\lambda_0$  est inférieure ou égale aux dimensions des obstacles, en un point donné l'onde peut subir un grand nombre de va et vient dans tous les sens. L'onde sortant du milieu n'a plus en mémoire la direction de l'onde incidente. Dans la théorie de la diffusion multiple, on s'intéresse au comportement des ondes diffusées c'est-à-dire à l'évaluation des champs acoustiques diffusés. Il faut alors calculer les *nombre d'onde effectifs* décrivant le mieux possible la propagation à travers le milieu étudié. Il existe plusieurs théories dans la littérature permettant cette évaluation lorsque les obstacles sont distribués aléatoirement.

On peut citer en particulier la méthode de la matrice  $\mathbf{T}$  de Foldy [1], Lax [2], Waterman et Truell [6]... et les méthodes utilisant les fonctions de Green et des approches diagrammatiques de Sornette [29], Sheng [32]... Ces deux théories se fondent sur une analyse exacte générale de la diffusion multiple puis sur un calcul du champ moyen obtenu en prenant une moyenne sur toutes les positions.

Dans ce qui suit, nous allons donner un bref aperçu de la méthode de la matrice  $\mathbf{T}$ .

#### 1.1.1 Description déterministe

Soient  $N$  obstacles placés aux points  $\vec{r}_j$  ( $1 \leq j \leq N$ ) de l'espace (ou du plan). On suppose que l'on connaît toutes les propriétés de chaque obstacle (orientation, conditions au limites,...etc). Au point d'observation  $\vec{r}$  (où il n'y a pas d'obstacles), le champ acoustique total  $\psi(\vec{r})$  est la superposition (ou la somme) de l'onde incidente  $\psi_{inc}(\vec{r})$  et des ondes  $\psi^s(\vec{r}, \vec{r}_j)$  provenant de chaque diffuseur  $j$  (figure(1.1)). On a donc

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^N \psi^s(\vec{r}, \vec{r}_j). \quad (1.1)$$

Le champ  $\psi^s(\vec{r}, \vec{r}_j)$  tient compte non seulement de la diffusion simple de l'onde incidente  $\psi_{inc}(\vec{r})$ , mais aussi de toutes les interactions ayant eu lieu entre les diffuseurs avant d'arriver sur le diffuseur  $j$  (figure(1.2)).

Plus précisément  $\psi^s(\vec{r}, \vec{r}_j)$  prend en compte tous les trajets acoustiques qui passent par le diffuseur

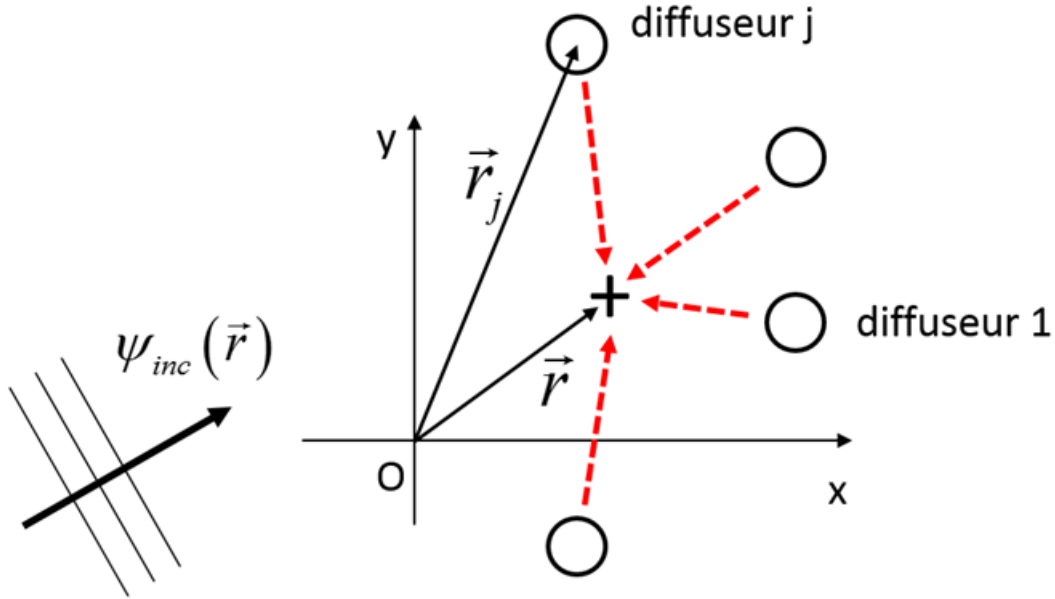


FIGURE 1.1 –

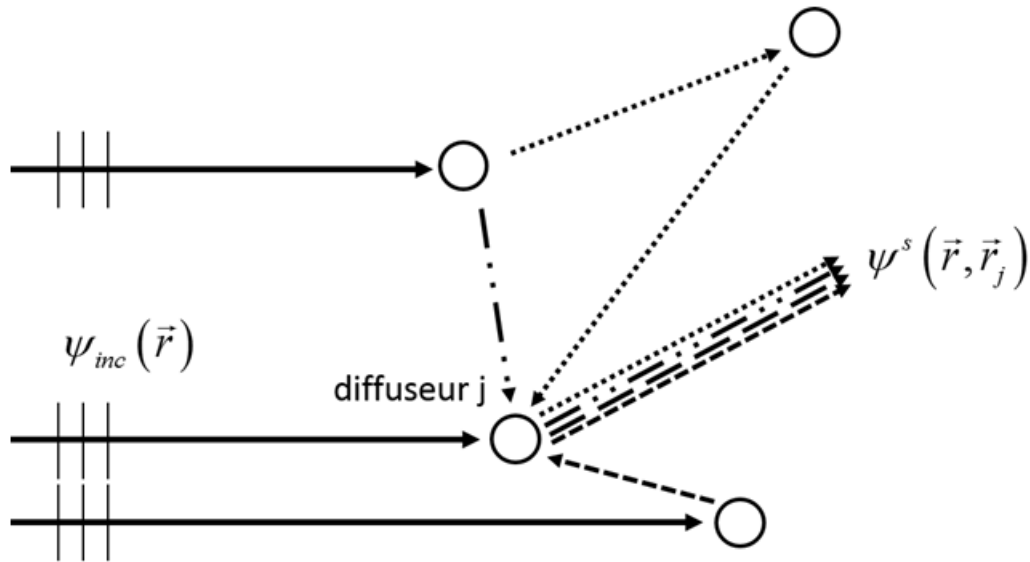


FIGURE 1.2 –

$j$ , juste avant d'arriver au point d'observation  $\vec{r}$ . La superposition de tous les champs arrivant sur  $j$  est notée  $\psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j)$ , champ incident sur  $j$ , et est appelée *champ effectif* (ou champ d'excitation du diffuseur  $j$ ). On a (figure(1.3))

$$\psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \psi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^N \psi^s(\vec{r}, \vec{r}_m), \quad (1.2)$$

expression signifiant que  $\psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j)$  est la somme du champ incident  $\psi_{inc}(\vec{r})$  et des ondes diffusées par les diffuseurs autres que  $j$ .

L'examen des équations (1.1) et (1.2) montre que celles-ci sont insuffisantes pour déterminer le champ  $\psi(\vec{r})$ . Il faut nécessairement connaître le champ  $\psi^s(\vec{r}, \vec{r}_j)$ , c'est-à-dire la diffusion par chacun des  $N$  diffuseurs pris isolément. On introduit pour ce faire une *relation de fermeture* en imposant l'égalité

$$\psi^s(\vec{r}, \vec{r}_j) = T(\vec{r}_j)\psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j). \quad (1.3)$$



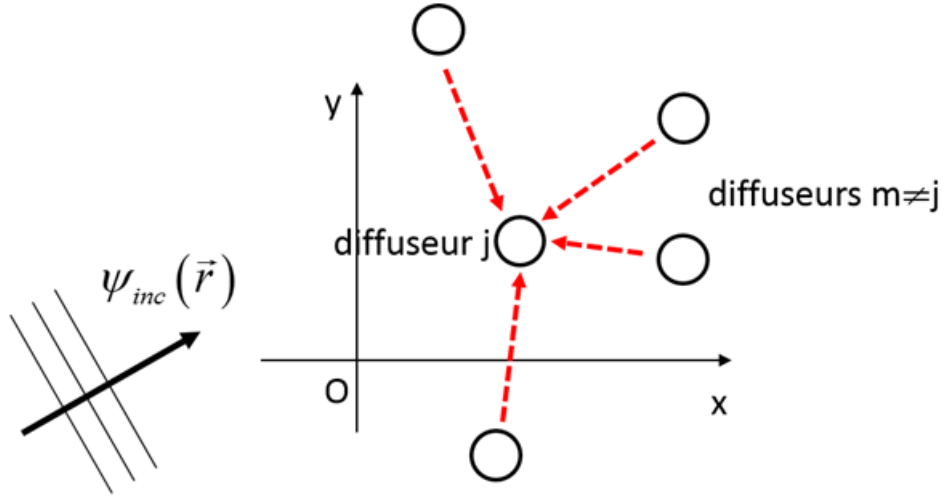


FIGURE 1.3 –

Ainsi, on convertit  $\psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j)$  en  $\psi^s(\vec{r}, \vec{r}_j)$  à l'aide d'un opérateur de transition  $T(\vec{r}_j)$  connu pour chaque diffuseur. En reportant (1.3) dans (1.1) et (1.2), on obtient des équations de base de la diffusion multiple [51] :

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^N T(\vec{r}_j) \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j) \quad (1.4)$$

$$\psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j) = \psi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^N T(\vec{r}_m) \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_m). \quad (1.5)$$

En pratique, le nombre de diffuseurs  $N$  est très grand et ces équations ne peuvent pas être résolues de façon exacte. La solution consiste alors à :

- effectuer un grand nombre de tirages aléatoires sur la position  $\vec{r}_j$  des diffuseurs,
- effectuer une moyenne d'ensemble afin de trouver le champ total moyen  $\langle \psi(\vec{r}) \rangle$ . En fait cela revient à trouver l'équation régissant le champ acoustique moyen  $\langle \psi(\vec{r}) \rangle$ ,
- trouver  $\langle \psi(\vec{r}) \rangle$  en introduisant un certain nombre d'approximations.

C'est à partir de ce dernier point que prennent forme les différentes théories de milieux effectifs telles que l'approximation de Foldy [1], l'approximation quasi-cristalline de Lax [2], la méthode de perturbation développée par Keller et al. [11]...etc.

## 1.1.2 Moyennages

### Quelques définitions et propriétés

Soit  $\vec{r}$  le vecteur indiquant le point d'observation et soient  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  les vecteurs positions de chaque diffuseur dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $D$  le domaine inclus dans  $\mathbb{R}^3$  contenant les  $N$  diffuseurs. On a

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \in D^N \subset (\mathbb{R}^3)^N.$$

Posons  $B_N = D^N$ . On définit par  $p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ , la probabilité de présence des diffuseurs (probabilité conjointe) vérifiant les hypothèses suivantes :

- $\int_{B_N} p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1, \dots, d\vec{r}_N = 1$
- Les diffuseurs sont indiscernables donc

$$p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{i-1}, \vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_j, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_N) = p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{i-1}, \vec{r}_j, \vec{r}_{i+1}, \dots, \vec{r}_{j-1}, \vec{r}_i, \vec{r}_{j+1}, \dots, \vec{r}_N).$$

- Il n'y a pas d'inter-pénétrabilité entre les diffuseurs car  $p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0$  si deux diffuseurs s'interpénètrent.

L'intégrale est prise sur  $N$  copies du domaine  $B_N$  contenant les  $N$  diffuseurs.

**Définition 1.1.1** La probabilité de trouver un diffuseur dans le volume élémentaire  $d\vec{r}_1$  autour de  $\vec{r}_1$  est donnée par une intégration sur toutes les positions sauf une,  $\vec{r}_1$  :

$$p(\vec{r}_1)d\vec{r}_1 = \left[ \int_{B_{N-1}} p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_N \right] d\vec{r}_1. \quad (1.6)$$

On a

$$\begin{aligned} p(\vec{r}_1)d\vec{r}_1 &= \left[ \int_{B_{N-1}} p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_N \right] d\vec{r}_1 \\ &= \left[ \int_{B_{N-1}} p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_{i-1}; d\vec{r}_{i+1}, \dots, d\vec{r}_N \right] d\vec{r}_i \\ p(\vec{r}_1)d\vec{r}_1 &= p(\vec{r}_i)d\vec{r}_i \quad \forall i \ 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Puisque les  $N$  diffuseurs ont la même probabilité d'occuper le volume élémentaire  $d\vec{r}_1$  et sont isotropes, Foldy [1] définit la densité  $n(\vec{r}_1)$  de diffuseurs autour de  $\vec{r}_1$  sous la forme

$$n(\vec{r}_1) = Np(\vec{r}_1)$$

et

$$\int_D n(\vec{r}_1) dr_1 = N.$$

**Définition 1.1.2** La probabilité conjointe de trouver un diffuseur dans le volume élémentaire  $d\vec{r}_1$  autour de  $\vec{r}_1$  et un second diffuseur dans le volume élémentaire  $d\vec{r}_2$  autour de  $\vec{r}_2$  est donnée par

$$p(\vec{r}_1, \vec{r}_2)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = \left[ \int_{B_{N-2}} p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_3 \dots d\vec{r}_N \right] d\vec{r}_1 d\vec{r}_2. \quad (1.7)$$

La densité de diffuseurs  $n(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  autour de  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  est donc  $n(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = Np(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ .

Cette définition se généralise à  $N$  diffuseurs : la densité  $n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  pour  $N$  diffuseurs dont les centres sont placés en  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  est donnée par

$$n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = Np(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (1.8)$$

**Remarque 1.1.3** Ecrire  $p(\vec{r}_1, \vec{r}_2)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$  signifie que les positions des diffuseurs ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. En cas d'indépendance, on écrira plutôt  $p(\vec{r}_1)p(\vec{r}_2)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$ . Bien évidemment

$$\int_{B_2} p(\vec{r}_1, \vec{r}_2)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = 1. \quad (1.9)$$

**Définition 1.1.4** La probabilité conditionnelle  $p(\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1)$  correspondant au diffuseur 1 de position connue (fixée) est définie par

$$p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = p(\vec{r}_1)p(\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1). \quad (1.10)$$

Si deux diffuseurs sont fixés, on écrit la probabilité conditionnelle

$$p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = p(\vec{r}_1, \vec{r}_2)p(\vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (1.11)$$

$p(\vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1, \vec{r}_2)$  est la probabilité pour que les diffuseurs repérés par  $\vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N$  soient dans les volumes respectifs  $d\vec{r}_3, \dots, d\vec{r}_N$ , sachant que les diffuseurs  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  sont localisés (fixés). On notera que

$$p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = p(\vec{r}_1)p(\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1) = p(\vec{r}_1)p(\vec{r}_2 | \vec{r}_1)p(\vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (1.12)$$

C'est la probabilité  $p(\vec{r}_2 | \vec{r}_1)$  qui permet d'éviter l'interpénétration des diffuseurs. Lorsque l'on fixe la position 1 par exemple, la densité de probabilité conditionnelle s'écrit

$$n(\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = (N - 1)p(\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1). \quad (1.13)$$

**Définition 1.1.5** La densité de probabilité conditionnelle du  $j^{\text{ième}}$  diffuseur lorsqu'un diffuseur est à la position fixée 1 en  $\vec{r}_1$  est définie par

$$n(\vec{r}_j | \vec{r}_1) = (N - 1)p(\vec{r}_j | \vec{r}_1), \quad j \neq 1$$

avec

$$\int_D n(\vec{r}_j | \vec{r}_1) d\vec{r}_j = N - 1.$$

**Définition 1.1.6** On considère une grandeur aléatoire  $\psi(\vec{r}; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ . Sa moyenne par rapport à la configuration  $\{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N\}$  est donnée par :

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle = \int_{B_N} \psi(\vec{r}; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N. \quad (1.14)$$

La moyenne conditionnelle, en supposant la position  $\vec{r}_1$  du diffuseur 1 connue, est :

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle_1 = \langle \psi(\vec{r} | \vec{r}_1) \rangle = \int_{B_{N-1}} \psi(\vec{r}; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) p(\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1) d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N. \quad (1.15)$$

C'est une fonction de  $\vec{r}_1$ . On n'intègre pas sur  $\vec{r}_1$  puisque la position est connue. De même si deux diffuseurs sont fixés en  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  on a

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle_{1,2} = \int_{B_{N-2}} \psi(\vec{r}; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) p(\vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1, \vec{r}_2) d\vec{r}_3 \dots d\vec{r}_N. \quad (1.16)$$

On peut encore écrire les trois moyennes ci-dessus sous les forme suivantes :

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle = \int_D \langle \psi(\vec{r}) \rangle_1 p(\vec{r}_1) d\vec{r}_1, \quad (1.17)$$

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle_1 = \int_D \langle \psi(\vec{r}) \rangle_{1,2} p(\vec{r}_2 | \vec{r}_1) d\vec{r}_2, \quad (1.18)$$

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle_{12} = \int_D \langle \psi(\vec{r}) \rangle_{123} p(\vec{r}_3 | \vec{r}_1, \vec{r}_2) d\vec{r}_3. \quad (1.19)$$

### 1.1.3 Evitement de l'interpénétration des diffuseurs

L'espace est réduit au plan. On suppose que les diffuseurs sont tous identiques et localisés dans un domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Cette hypothèse ne réduit pas la généralité de l'étude. La position d'un seul diffuseur est équiprobable dans  $D$ . Par contre, les positions de deux diffuseurs pris au hasard ne sont pas indépendantes. On introduit donc une probabilité conjointe  $p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ . Les diffuseurs étant identiques, on a

$$p(\vec{r}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{r}_{\sigma(N)}) = p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N), \quad (1.20)$$

pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, N\}$ .

Ceci conduit à écrire que

$$\begin{cases} p(\vec{r}_i) &= p(\vec{r}_1) \quad \forall i, \\ p(\vec{r}_i|\vec{r}_j) &= p(\vec{r}_2|\vec{r}_1) \quad \forall i \neq j. \end{cases} \quad (1.21)$$

L'équiprobabilité de la répartition d'un diffuseur dans  $D$  implique que

$$\begin{cases} p(\vec{r}_1) &= \frac{1}{S} \quad \text{si } \vec{r}_1 \in B_N, \\ p(\vec{r}_1) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.22)$$

$S$  étant la surface du domaine  $D$ .

Pour simplifier le raisonnement, on suppose que les diffuseurs sont des disques circulaires de rayon  $a$ . Dans la suite, on examine la probabilité conditionnelle  $p(\vec{r}_2|\vec{r}_1)$  interdisant l'interpénétration de deux diffuseurs (1 et 2). Toutefois, le modèle n'est valable que pour de faibles concentrations de diffuseurs. Bose et Mal [18] posent :

$$\begin{cases} p(\vec{r}_2|\vec{r}_1) &= \frac{1}{S} [1 - f(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|)] \quad \text{si } \vec{r}_2 \in D, \\ p(\vec{r}_2|\vec{r}_1) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.23)$$

La fonction  $f$  ne dépend que de la distance séparant les deux diffuseurs et est appelée *pair correlation function*. Posons  $\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = r_{12}$ . On a

### Propriété 1.1.7

i.  $0 \leq f(r_{12}) \leq 1$  puisque  $p(\vec{r}_2|\vec{r}_1) \geq 0$ .

ii.  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r_{12}) r_{12} dr_{12} d\theta = 0$ .  $R$  étant le rayon du domaine circulaire  $D$  contenant les diffuseurs.

iii. L'interpénétration est interdite lorsque  $p(\vec{r}_2|\vec{r}_1) = 0$  si  $r_{12} < 2a$ .

La dernière condition équivaut à  $f(r_{12}) = 1$  si  $r_{12} < 2a$ .

Dans l'article de Bose et Mal, la fonction  $f$  qui respecte ces conditions est

$$\begin{cases} f(r_{12}) &= 1 \quad \text{si } r_{12} < 2a, \\ f(r_{12}) &= Ae^{-\frac{r_{12}}{L}} \quad \text{si } r_{12} \geq 2a \end{cases} \quad (1.24)$$

avec  $0 < A < e^{\frac{2a}{L}}$ . La quantité  $L$  homogène à une longueur, est appelée *longueur de corrélation*.

### Equation intégrale gouvernant le champ d'excitation moyen $\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_1) \rangle$

On rappelle que  $\psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j)$  est le champ incident sur le  $j^{\text{ème}}$  diffuseur,  $\psi^S(\vec{r}, \vec{r}_j)$  est le champ diffusé par ce  $j^{\text{ème}}$  diffuseur et que l'on dispose de la relation fondamentale (1.3) reliant  $\psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j)$  et  $\psi^S(\vec{r}, \vec{r}_j)$ . Pour calculer le champ moyen, on choisit un diffuseur au hasard que l'on fixe, par exemple celui repéré par  $\vec{r}_i$ , ce qui conduit à considérer une probabilité conditionnelle

$$p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_i) = \frac{p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{p(\vec{r}_i)} \quad (1.25)$$

où le prime signifie que l'on a considéré tous les diffuseurs sauf  $\vec{r}_i$ . On a donc

$$\underbrace{\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_k | \vec{r}_i) \rangle}_{\text{fonction de } \vec{r} \text{ et } \vec{r}_i} = \int_{B_{N-1}} \underbrace{\psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_k)}_{\text{fonction de } \vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N} p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_i) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N. \quad (1.26)$$

Si l'on choisit de fixer deux diffuseurs  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_j$ , on doit considérer la probabilité conditionnelle

$$p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_i)}{p(\vec{r}_j | \vec{r}_i)}. \quad (1.27)$$

On alors

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_k | \vec{r}_i, \vec{r}_j) \rangle = \int_{B_{N-2}} \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_k) p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_i, \vec{r}_j) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N \quad (1.28)$$

et ainsi de suite.

L'introduction des probabilités conditionnelles permet de faire le moyennage et de faire opérer les opérateurs de transition non pas sur les champs acoustiques mais sur les champs moyens.

Les diffuseurs étant indiscernables, choisissons celui repéré par  $\vec{r}_1$ . De la relation (1.5), on déduit que

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_1 | \vec{r}_1) \rangle = \psi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{j=2}^N \int_{B_{N-1}} T(\vec{r}_j) \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j) p(\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1) d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N, \quad (1.29)$$

soit encore

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_1 | \vec{r}_1) \rangle = \psi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{j=2}^N \int_D T(\vec{r}_j) \left[ \int_{B_{N-2}} \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j) p(\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1, \vec{r}_j) d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N \right] p(\vec{r}_j | \vec{r}_1) d\vec{r}_j. \quad (1.30)$$

Le terme entre [.] est égal à  $\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j | \vec{r}_1, \vec{r}_j) \rangle$ . On a donc

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_1 | \vec{r}_1) \rangle = \psi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{j=2}^N \int_D T(\vec{r}_j) \langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j | \vec{r}_1, \vec{r}_j) \rangle p(\vec{r}_j | \vec{r}_1) d\vec{r}_j. \quad (1.31)$$

Comme les diffuseurs sont indiscernables on a

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j | \vec{r}_1, \vec{r}_j) \rangle = \langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_k | \vec{r}_1, \vec{r}_k) \rangle, \quad (1.32)$$

et (1.31) devient alors

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_1 | \vec{r}_1) \rangle = \psi_{inc}(\vec{r}) + (N-1) \int_D T(\vec{r}_j) \langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j | \vec{r}_1, \vec{r}_j) \rangle p(\vec{r}_j | \vec{r}_1) d\vec{r}_j. \quad (1.33)$$

On sait que (Définition 1.1.5)

$$n(\vec{r}_j | \vec{r}_1) = (N-1) p(\vec{r}_j | \vec{r}_1), \quad j \neq 1.$$

Il s'ensuit que

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_1 | \vec{r}_1) \rangle = \psi_{inc}(\vec{r}) + \int_D T(\vec{r}_j) \langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j | \vec{r}_1, \vec{r}_j) \rangle n(\vec{r}_j | \vec{r}_1) d\vec{r}_j. \quad (1.34)$$

### 1.1.4 Approximation quasi-cristalline (Quasi Crystalline Approximation QCA) de Lax

Dans cette approximation introduite par Lax en 1954, on pose

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j | \vec{r}_1, \vec{r}_j) \rangle \cong \langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j | \vec{r}_j) \rangle. \quad (1.35)$$

Cela suppose que le champ d'excitation de deux diffuseurs fixés est le même que pour un seul diffuseur fixé. Elle signifie que fixer le diffuseur 1 ou pas ne change pas beaucoup (et même peu) le champ

moyen si la moyenne est prise sur un grand nombre de diffuseurs (en général  $N = 10^6$ ). Il est habituel de simplifier la notation ci-dessus en posant

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j | \vec{r}_j) \rangle = \langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j) \rangle. \quad (1.36)$$

En tenant compte de (1.35), la relation (1.34) devient

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_1) \rangle = \psi_{inc}(\vec{r}) + \int T(\vec{r}') \langle \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}') \rangle n(\vec{r}' | \vec{r}_1) d\vec{r}'. \quad (1.37)$$

C'est l'équation gouvernant le champ moyen (voir aussi [52]).

## 1.2 Nombres d'ondes de Foldy et de Lax

Afin de déterminer le nombre d'onde de l'onde cohérente, que l'on désignera par la suite par *nombre d'onde effectif*, Foldy [1] a simplifié le modèle de la diffusion multiple en considérant  $N$  diffuseurs sphériques émettant de façon isotrope (il s'agit de sources monopolaires, les ondes diffusées étant identiques dans toutes les directions). Ces diffuseurs sont répartis dans un milieu fluide et repérés par leurs positions  $\vec{r}_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) dans l'espace. Toutes les fonctions rencontrées dépendent de la variable spatiale  $\vec{r}$  et du temps  $t$  sous la forme :  $f(\vec{r}, t)e^{-i\omega t}$ ,  $\omega$  étant la pulsation.

On considère un champ incident (onde plane scalaire longitudinale)  $\psi_{inc}$  défini par

$$\psi_{inc}(\vec{r}, t) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t}, \quad (1.38)$$

où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde associé à l'onde incidente en l'absence de diffuseurs et  $\vec{r}$  le vecteur désignant une position quelconque de l'espace où il n'y a pas de diffuseurs. Dans la suite, on simplifiera les notations en évitant d'écrire le terme temporel  $e^{-i\omega t}$ .

Le champ total  $\psi(\vec{r})$  diffusé en un point  $\vec{r}$  est [45],

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{inc}(\vec{r}) + g \sum_{j=1}^N \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j) h_0(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) \quad (1.39)$$

où

$$\psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_n) = \psi_{inc}(\vec{r}) + g \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \psi^{ex}(\vec{r}, \vec{r}_j) h_0(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) \quad (1.40)$$

est le champ d'excitation du  $n$ -ième diffuseur.  $\|\vec{k}\| = k$  (nombre d'onde) étant la norme du vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Ci-dessus  $g$  est le coefficient de diffusion d'une sphère,  $h_0$  la fonction de Hankel sphérique d'ordre 0 de première espèce exprimant que les ondes s'éloignent des diffuseurs.

Les  $N$  champs d'excitation requis dans l'équation (1.39) sont obtenus en résolvant numériquement l'équation (1.40) au point  $\vec{r} = \vec{r}_n$ .

Supposons que les diffuseurs sont distribués aléatoirement. On calcule la moyenne d'ensemble du champ  $\psi$  sur toutes les configurations possibles pour les positions des diffuseurs. D'après les équations (1.39) et (1.40), il vient que

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle = \psi_{inc}(\vec{r}) + gn_0 \int_D \langle \psi^{ex}(\vec{r}_1) \rangle_1 h_0(k|\vec{r} - \vec{r}_1|) d\vec{r}_1 \quad (1.41)$$

où

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}) \rangle_1 = \psi_{inc}(\vec{r}) + g(N-1) \int_D p(\vec{r}_2 | \vec{r}_1) \langle \psi^{ex}(\vec{r}_2) \rangle_2 h_0(k|\vec{r} - \vec{r}_2|) d\vec{r}_2. \quad (1.42)$$

Ci-dessus,  $D$  désigne le volume contenant les  $N$  diffuseurs et  $n_0$  le nombre de sphères par unité de volume.

Pour résoudre l'équation (1.41), Foldy suppose que l'onde cohérente garde la même direction que l'onde plane incidente et que les champs moyens totaux et d'excitation sont approximativement égaux :

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}) \rangle_1 \approx \langle \psi(\vec{r}) \rangle. \quad (1.43)$$

Twersky [10] a montré que la condition (1.43) ne tient pas compte des interactions aller-retour entre deux diffuseurs. Autrement dit, pour obtenir l'équation (1.43), on néglige toutes les interactions doubles, triples, ... etc entre les diffuseurs pour ne garder que les trajets directs orientés globalement vers l'avant.

L'utilisation de l'approximation de Foldy permet de transformer l'équation (1.41) en la suivante

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle = \psi_{inc}(\vec{r}) + gn_0 \int_D \langle \psi^{ex}(\vec{r}_1) \rangle h_0(k|\vec{r} - \vec{r}_1|) d\vec{r}_1, \quad \forall \vec{r} \in D \quad (1.44)$$

dite équation intégrale de Foldy.

### 1.2.1 Nombre d'onde effectif obtenu en utilisant l'approximation de Foldy

Soient  $K$  le nombre d'onde relatif à l'onde cohérente,  $\vec{r} = (x, y, z)$  le vecteur position d'un point quelconque dans le demi-espace ( $z > 0$ ) dans le repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et

$$\vec{k} = k(\sin\theta_{inc}\cos\phi_{inc}, \sin\theta_{inc}\sin\phi_{inc}, \cos\theta_{inc})$$

les coordonnées du vecteur onde incident dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On décompose le vecteur  $\vec{k}$  sous la forme  $\vec{k} = \vec{k}_T + \alpha\vec{e}_z$  où

$$\begin{aligned} \vec{k}_T &= k(\sin\theta_{inc}\cos\phi_{inc}, \sin\theta_{inc}\sin\phi_{inc}, 0), \\ \alpha &= k\cos\theta_{inc} \text{ et } 0 \leq \theta_{inc} < \pi/2. \end{aligned}$$

L'expression (1.38) devient

$$\psi_{inc} = e^{i\alpha z} e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{q}}, \quad \text{avec } \vec{q} = (x, y, 0). \quad (1.45)$$

En utilisant l'équation (1.44), on obtient

$$\langle \psi(x, y, z) \rangle = \psi_{inc}(x, y, z) + gn_0 \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \psi^{ex}(x_1, y_1, z_1) \rangle h_0(k\rho_1) dx_1 dy_1 dz_1 \quad (1.46)$$

où  $\rho_1 = |\vec{r} - \vec{r}_1|$  et  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ .

Dans la suite, on effectue le changement de variables  $X = x - x_1$  et  $Y = y - y_1$ . L'équation (1.46) devient

$$\langle \psi(x, y, z) \rangle = \psi_{inc}(x, y, z) + gn_0 \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \psi^{ex}(X + x, Y + y, z_1) \rangle h_0(k\rho_1) dXdYdz_1 \quad (1.47)$$

Compte-tenu de la forme (1.45) prise par le champ incident, on suppose que le champ total peut se mettre sous la forme

$$\langle \psi(x, y, z) \rangle = U(z) e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{q}}, \quad z > 0, \quad (1.48)$$

où  $U$  est une fonction inconnue. Dans l'approximation de Foldy l'onde cohérente garde en mémoire la direction de l'onde incidente ; de ce fait les coordonnées du vecteur d'onde effectif dans le repère cartésien peuvent s'écrire sous la forme

$$\vec{K} = K(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) = (k\sin\theta_{inc}\cos\phi_{inc}, k\sin\theta_{inc}\sin\phi_{inc}, \lambda). \quad (1.49)$$

A partir de l'égalité (1.49), on déduit que

$$K \sin \vartheta = k \sin \theta_{inc} \quad (1.50)$$

et que

$$\lambda = K \cos \vartheta, \quad (1.51)$$

$\lambda$  et  $K$  étant des nombres complexes avec des parties imaginaires strictement positives. L'équation (1.51) constitue la loi de Snell. En introduisant (1.48) dans (1.47), on obtient

$$U(z) = e^{i\alpha z} + gn_0 \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(z_1) e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{Q}} h_0(k_{Q1}) dXdYdz_1$$

où  $\vec{Q} = (X, Y, 0)$ . D'après la référence [45] on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{Q}} h_0(k_{Q1}) dXdY = \frac{2\pi}{k\alpha} e^{i\alpha|z-z_1|}, \quad (1.52)$$

d'où

$$U(z) = e^{i\alpha z} + \frac{2\pi gn_0}{k\alpha} \int_0^{+\infty} U(z_1) e^{i\alpha|z-z_1|} dz_1, \quad (z > 0). \quad (1.53)$$

On suppose qu'à la distance  $l$  ( $0 < z \leq l$ ), on ne dispose d'aucune information sur le champ acoustique total et que si  $z > l$ , on doit avoir

$$U(z) = U_0 e^{i\lambda z}, \quad (z > l) \quad (1.54)$$

où  $U_0$ ,  $\lambda$  et  $l$  sont des inconnues. L'introduction de (1.54) dans (1.53) permet d'écrire la succession d'égalités suivantes

$$U(z) = e^{i\alpha z} + \frac{2\pi gn_0}{k\alpha} \int_0^l U(t) e^{i\alpha|z-t|} dt + \frac{2\pi gn_0}{k\alpha} \int_l^{+\infty} U(t) e^{i\alpha|z-t|} dt,$$

$$U(z) - e^{i\alpha z} = \frac{2\pi gn_0}{k\alpha} e^{i\alpha z} \int_0^l U(t) e^{-i\alpha t} dt + \frac{2\pi gn_0}{k\alpha} \int_l^{+\infty} U(t) e^{i\alpha|z-t|} dt,$$

puis

$$U(z) - e^{i\alpha z} = \frac{2\pi gn_0}{k\alpha} e^{i\alpha z} \int_0^l U(t) e^{-i\alpha t} dt + \frac{2\pi gn_0}{k\alpha} \int_l^z U(t) e^{i\alpha|z-t|} dt + \frac{2\pi gn_0}{k\alpha} \int_z^{+\infty} U(t) e^{i\alpha|z-t|} dt.$$

La première intégrale ne peut pas être calculée car on ne sait rien sur  $U$  pour  $0 < t < l$ . En calculant les deux dernières intégrales, on trouve

$$U_0 e^{i\lambda z} - e^{i\alpha z} = -\frac{4\pi gn_0 U_0}{k(\lambda^2 - \alpha^2)} e^{i\lambda z} + \left( \frac{2\pi gn_0}{k\alpha} \int_0^l U(t) e^{-i\alpha t} dt + \frac{2i\pi gn_0 U_0}{k\alpha(\lambda - \alpha)} e^{i(\lambda - \alpha)l} \right) e^{i\alpha z}. \quad (1.55)$$

Pour que l'équation ainsi obtenue soit satisfaite pour tout  $z$  strictement supérieur à  $l$ , il faut que les coefficients de  $e^{i\lambda z}$  et  $e^{i\alpha z}$  soient simultanément nuls. Il s'ensuit deux égalités

$$U_0 = -\frac{4\pi gn_0 U_0}{k(\lambda^2 - \alpha^2)} \quad (1.56)$$

d'une part et

$$\left( \frac{2\pi gn_0}{k\alpha} \int_0^l U(t) e^{-i\alpha t} dt + \frac{2i\pi gn_0 U_0}{k\alpha(\lambda - \alpha)} e^{i(\lambda - \alpha)l} \right) = 1 \quad (1.57)$$

d'autre part. D'après la loi de Snell (1.51) et la définition de  $\alpha$ , on a

$$\lambda^2 - \alpha^2 = K^2 - k^2. \quad (1.58)$$



En introduisant (1.58) dans (1.56), on déduit que

$$K^2 = k^2 - 4\pi i g n_0 / k. \quad (1.59)$$

L'équation (1.59) est le nombre d'onde effectif s'arrêtant à l'ordre 1 en  $n_0$  trouvé par Foldy pour des diffuseurs sphériques.

Dans le cas des diffuseurs cylindriques, le nombre d'onde effectif  $K$  prend la forme [56]

$$K^2 = k^2 - 4i g n_0. \quad (1.60)$$

## 1.2.2 Nombre d'onde effectif obtenu en utilisant l'approximation de Lax

L'approximation de Lax va permettre d'étendre la formule (1.59) à l'ordre 2 en  $n_0$ . D'après l'équation (1.35)

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}) \rangle_1 \simeq \langle \psi(\vec{r}) \rangle_2 \quad (1.61)$$

l'équation (1.42) peut s'écrire sous la forme

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}) \rangle_1 = \psi_{inc}(\vec{r}) + g(N-1) \int_D p(\vec{r}_2|\vec{r}_1) \langle \psi^{ex}(\vec{r}_2) \rangle_2 h_0(k|\vec{r} - \vec{r}_2|) d\vec{r}_2 \quad (1.62)$$

appelée *équation intégrale de Lax*. On introduit la probabilité conditionnelle  $p(\vec{r}_2|\vec{r}_1) = \frac{n_0}{N}$  et on récrit l'équation (1.62) en prenant l'intégrale sur l'ensemble

$$D^b(\vec{r}) = \{\vec{r}_2 \in D : R_2 = |\vec{r} - \vec{r}_2| > b\}.$$

On obtient

$$\langle \psi^{ex}(\vec{r}) \rangle_1 = \psi_{inc}(\vec{r}) + g n_0 \frac{N-1}{N} \int_{D^b} \langle \psi^{ex}(\vec{r}_2) \rangle_2 h_0(k|\vec{r} - \vec{r}_2|) d\vec{r}_2. \quad (1.63)$$

Dans la suite, on considère un grand nombre de diffuseurs c'est-à-dire  $N \rightarrow \infty$  et par analogie avec l'équation (1.46), l'équation (1.63) devient

$$\langle \psi^{ex}(x, y, z) \rangle_1 = e^{iaz} \exp(i\vec{k}_T \cdot \vec{q}) + g n_0 \int_{z_2 > 0, \varrho_2 > b} \langle \psi^{ex}(X+x, Y+y, z_2) \rangle_2 h_0(k\varrho_2) dXdYdz_2 \quad (1.64)$$

où  $0 < |q| < \infty$ ,  $z > 0$  et  $\varrho_2 = |\vec{r} - \vec{r}_2|$ . Comme dans le cas de Foldy, on suppose que

$$\langle \psi^{ex}(x, y, z) \rangle_1 = V(z) \exp(i\vec{k}_T \cdot \vec{q}), \quad z > 0. \quad (1.65)$$

On peut alors récrire l'équation (1.64) sous la forme

$$V(z) = e^{iaz} + g n_0 \int_{z_2 > 0, \varrho_2 > b} V(z_2) h_0(k\varrho_2) e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{Q}} dXdYdz_2$$

$$V(z) = e^{iaz} + g n_0 \int_{z_2 > 0; X, Y \in \mathbb{R}} V(z_2) h_0(k\varrho_2) e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{Q}} dXdYdz_2 - g n_0 \int_{z_2 > 0, \varrho_2 < b} V(z_2) h_0(k\varrho_2) e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{Q}} dXdYdz_2$$

avec  $\vec{Q} = (X, Y, 0)$ . En coordonnées polaires  $X = Q \cos \phi$  et  $Y = Q \sin \phi$  et on pose  $Z = z - z_2$ . On a alors  $\varrho_2 < b \Leftrightarrow Q^2 + Z^2 < b^2$  c'est-à-dire  $Q < \sqrt{b^2 - Z^2}$ . La première intégrale est calculée en utilisant l'équation (1.52). La deuxième intégrale est réécrite en coordonnées polaires. Il vient

$$V(z) = e^{iaz} + g n_0 \int_0^{+\infty} V(z_2) \frac{2\pi}{k\alpha} e^{i\alpha|z-z_2|} dz_2 - g n_0 \int_0^{+\infty} \int_0^{\sqrt{b^2-Z^2}} \int_0^{2\pi} V(z_2) h_0\left(k\sqrt{Q^2+Z^2}\right) e^{(ikQ \sin \theta_{in} \cos(\phi - \phi_{in}))} Q dQ d\phi dz_2. \quad (1.66)$$

Posons ensuite  $c(Z) = \sqrt{b^2 - Z^2} H(b - |Z|)$  où  $H$  est la fonction de Heaviside.

Puisque

$$2\pi J_0(kQ \sin \theta_{inc}) = \int_0^{2\pi} e^{ikQ \sin \theta_{inc} \cos(\phi - \phi_{inc})} d\phi$$

il vient

$$V(z) = e^{i\alpha z} + gn_0 \int_0^{+\infty} V(z_2) \frac{2\pi}{k\alpha} e^{i\alpha|z-z_2|} dz_2 - 2\pi gn_0 \int_0^{+\infty} \int_0^{c(Z)} V(z_2) h_0\left(k\sqrt{Q^2 + Z^2}\right) J_0(kQ \sin \theta_{inc}) Q dQ dz_2 \quad (1.67)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 (Annexe A).

Comme dans le cas de Foldy, la solution  $V$  de l'équation (1.67) est supposée être de la forme

$$V(z) = V_0 e^{i\lambda z} \quad \forall z > l, \quad (1.68)$$

où  $V_0$ ,  $\lambda$  et  $l$  sont des inconnues. Considérons l'équation (1.67). Pour  $z > l + b$  et  $|z - z_2| < b$ , il faut que  $z_2 > l$ . En utilisant les équations (1.67) et (1.68), on obtient

$$\frac{V_0 e^{i\lambda z} - e^{i\alpha z}}{gn_0} = \frac{2\pi}{k\alpha} e^{i\alpha z} \int_0^l V(t) e^{-\alpha t} dt + I_1 + I_2, \quad z > l + b. \quad (1.69)$$

où

$$I_1 = \frac{2\pi}{k\alpha} \int_l^{+\infty} V(t) e^{\alpha|z-t|} dt,$$

$$I_2 = -2\pi \int_0^{+\infty} V(t) \int_0^{c(Z)} h_0\left(k\sqrt{Q^2 + Z^2}\right) J_0(kQ \sin \theta_{in}) Q dQ dt.$$

Le calcul des intégrales  $I_1$  et  $I_2$  donne d'après [45]

$$I_1 = \frac{2\pi i V_0}{k\alpha} \left[ \frac{e^{i(\lambda-\alpha)l}}{\lambda-\alpha} e^{i\alpha z} - \frac{2\alpha}{\lambda^2 - \alpha^2} e^{i\lambda z} \right], \quad (1.70)$$

$$I_2 = \frac{4\pi i V_0}{k(K^2 - k^2)} e^{i\lambda z} (1 - \mathcal{N}_0(Kb)), \quad (1.71)$$

où

$$\mathcal{N}_0(x) = e^{ikb} (\cos x - i(kb/x) \sin x). \quad (1.72)$$

En introduisant  $I_1$  et  $I_2$  dans (1.69), on obtient

$$V_0 e^{i\lambda z} - e^{i\alpha z} = \mathcal{A} e^{i\lambda z} + \mathcal{B} e^{i\alpha z}, \quad \forall z > l + b \quad (1.73)$$

où

$$\mathcal{A} = \frac{4\pi i gn_0 V_0}{k(k^2 - K^2)} \mathcal{N}_0(Kb) \quad (1.74)$$

et

$$\mathcal{B} = \frac{2\pi gn_0}{k\alpha} \int_0^l V(t) e^{-i\alpha t} dt + \frac{2\pi gn_0 V_0}{k\alpha(\lambda - \alpha)} e^{i(\lambda-\alpha)l}. \quad (1.75)$$

L'équation (1.73) est satisfaite quelque soit  $z > l + b$  si les coefficients de  $e^{i\alpha z}$  et  $e^{i\lambda z}$  sont tous nuls. On a donc

$$\mathcal{A} = V_0 \quad (1.76)$$

et

$$\mathcal{B} = -1. \quad (1.77)$$

On introduit l'équation (1.76) dans (1.74). On en déduit que

$$K^2 - k^2 = -4\pi ig(n_0/k)\mathcal{N}_0(Kb). \quad (1.78)$$

Supposons maintenant que  $Kb - kb \ll 1$ . Pour  $n_0$  petit on peut écrire le nombre d'onde effectif sous la forme

$$K^2 = k^2 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0^2 + \dots \quad (1.79)$$

où  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont des fonctions inconnues qu'il faut déterminer.

Le développement limité de  $\mathcal{N}_0(Kb)$  au voisinage de  $kb$  à l'ordre 1 est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0(Kb) &= \mathcal{N}_0(kb) + (Kb - kb)\mathcal{N}'(kb) + \dots \\ &= e^{ikb} (\cos(kb) - i\sin(kb)) - i(Kb - kb) \left(1 - e^{kb} \frac{\sin(kb)}{kb}\right) + \dots \\ &= 1 - i(Kb - kb) \left(1 - e^{kb} \frac{\sin(kb)}{kb}\right) + \dots \end{aligned}$$

La méthode de Foldy a permis l'obtention de  $\delta_1$  lorsqu'on s'arrête à l'ordre 1 en  $n_0$ , c'est-à-dire  $K^2 - k^2 = \delta_1 n_0$  avec  $\delta_1 = -\frac{4\pi ig}{k}$ . On a  $(K - k)(K + k) = \delta_1 n_0$ . En faisant l'équivalence au voisinage de  $kb$ , on obtient  $K - k = \frac{\delta_1}{2k} n_0$ , d'où

$$\mathcal{N}_0(Kb) = 1 - ib\delta_1 \frac{n_0}{2k} \left(1 - e^{kb} \frac{\sin(kb)}{kb}\right).$$

Son introduction dans l'équation (1.78), permet de déduire que

$$K^2 = k^2 - \frac{4\pi nig}{k} n_0 + \frac{8ib(\pi gn_0)^2}{k^3} \left(1 - e^{kb} \frac{\sin(kb)}{kb}\right). \quad (1.80)$$

avec  $\delta_1 = -\frac{4\pi ig}{k}$  et  $\delta_2 = \frac{8\pi^2 ig^2 b}{k^3} \left(1 - e^{kb} \frac{\sin(kb)}{kb}\right)$ .

L'équation (1.80) est la formule du nombre d'onde effectif trouvée par Lax. C'est une extension à l'ordre 2 en  $n_0$  de celui trouvé par Foldy. On remarque l'absence de l'angle d'incidence dans les formules des nombres d'ondes effectifs.

Si l'on remplace les sphères par des cylindres le nombre d'onde effectif de Lax devient

$$K^2 = k^2 - 4in_0g + 4\pi i(bg n_0)^2 c_0(kb),$$

où  $c_0(kb) = J_0(kb)H_0(kb) + J_1(kb)H_1(kb)$ . Dans la section suivante on va examiner brièvement la façon dont le nombre d'onde effectif a été amélioré par Linton et Martin.

### 1.3 Généralisation du nombre d'onde effectif

En 1961, Waterman et Truell [6] ont trouvé une formule du nombre d'onde effectif sous la forme de l'équation (1.79) en considérant un angle d'incidence nul. Ils ont trouvé

$$\delta_1 = -\frac{4i\pi}{k} f(0) \quad (1.81)$$

et

$$\delta_2 = \frac{4\pi^2 i}{k^4} \left( [f(\pi)]^2 - [f(0)]^2 \right) \quad (1.82)$$

$f$  étant la fonction de forme en champ lointain d'un seul diffuseur que nous définirons ultérieurement. Cette fonction  $f$  contient les informations sur la diffusion et tient compte de la diffusion vers l'avant

$f(0)$  et la diffusion vers arrière  $f(\pi)$  (rétrodiffusion). Lorsque  $f(0) = f(\pi)$ , on retrouve la formule de Foldy.

En 1967 Lloyd et Berry[13] ont utilisé des techniques issues de la physique nucléaire afin d'étendre la formule du nombre d'onde effectif de Waterman et Truell au cas où la fonction du champ lointain est définie pour tout angle de diffusion  $\theta$ . Ils ont montré que

$$\delta_2 = \frac{4\pi^2}{k^4} \left\{ -[f(\pi)]^2 + [f(0)]^2 + \int_0^\pi \frac{1}{\sin(\theta/2)} \frac{d}{d\theta} [f(\theta)]^2 d\theta \right\} \quad (1.83)$$

L'expression de  $\delta_1$  reste toujours la même.

Une quarantaine d'années après Lloyd et Berry, en 2006 plus exactement, Linton et Martin [45] ont trouvé une formule équivalente à celle de Lloyd et Berry [13] mais plus simple à utiliser en vue des applications numériques. Pour résumer, ils ont obtenu les résultats suivants

$$K^2 = k^2 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0^2, \quad (1.84)$$

où

$$\delta_1 = -\frac{4\pi}{k} f(0), \quad (1.85)$$

et

$$\delta_2 \cong -\frac{(4\pi)^4}{2k^4} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} T_\nu T_n K_{n\nu}. \quad (1.86)$$

Noter, que ci-dessus

$$f(\theta) = -4\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) T_n P_n(\cos\theta), \quad (1.87)$$

$$K_{n\nu}(\hat{K}) = \sqrt{\frac{(2n+1)(2\nu+1)(2q+1)}{(4\pi)^{3/2}}} \sum_q q \sqrt{2q+1} \mathcal{G}(n, 0, \nu, q). \quad (1.88)$$

$T_n$  est le coefficient de diffusion d'une sphère pour un mode  $n$ ,  $P_n$  désigne le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ ,  $\mathcal{G}$  le coefficient de Gaunt (Annexe C),  $q$  varie de  $|n-\nu|$  à  $(n+\nu)$  à pas de 2 tel que  $q+n+\nu$  paire.

L'expression du nombre d'onde effectif  $K$  à l'ordre 2 en  $n_0$  dans le cas où les diffuseurs sont cylindriques parallèles répartis aléatoirement immergés dans un fluide a été trouvé par Conoir et Norris [52] en 2010. Ils ont montré que

$$K^2 = k^2 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0^2 \quad (1.89)$$

où

$$\delta_1 = -4i f_{cy}(0), \quad (1.90)$$

$$\delta_2 = -\frac{8}{k^2} \sum_{m,n} |m-n| T_m T_n, \quad (1.91)$$

$$f_{cy}(\theta) = \sum_n T_n e^{in\theta}. \quad (1.92)$$

$f_{cy}$  est la fonction de forme en champ lointain d'un cylindre et les  $T_n$ , les coefficients de diffusion de ce cylindre.

## 1.4 Diffusion par une cavité cylindrique dans un milieu poreux de Biot

### 1.4.1 Milieu poreux de Biot

Un milieu poreux est un milieu formé d'une matrice solide le *squelette* (grains agglomérés par exemple, figure (1.4)) dans lequel se situent des cavités ou fissures reliées entre elles par des canaux appelé *pores*. On s'intéresse plus particulièrement aux milieux poreux saturés par un fluide visqueux (de viscosité dynamique  $\eta$ ) et dont la taille des pores est suffisamment faible pour que le nombre de Reynolds (nombre sans dimension représentant le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses) soit très petit devant l'unité (écoulements à faibles vitesses). Un tel milieu poreux est décrit par un certain nombre de paramètres :

- la porosité  $\phi$  qui est définie de la façon suivante

$$\phi = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}} = 1 - X$$

où  $X$  désigne la compacité (toujours plus petite que 1). Si le milieu poreux est homogène et isotrope, on a aussi en considérant une section plane quelconque

$$\phi = \frac{\text{surface occupée par les pores}}{\text{surface totale}}.$$

- la constante de structure  $\alpha$  appelée la tortuosité. Elle rend compte de la complexité des chemins de circulation du fluide à travers l'espace des pores et de l'influence de la taille des pores et des bras morts (pores connectés avec le milieu extérieur par une seule de leurs extrémités). La quantité  $\alpha$  est souvent mesuré expérimentalement ( $\alpha \geq 1$ ).
- La perméabilité  $\kappa$  qui relie  $\alpha$  et  $\phi$ . Il existe des formules pour approximer la perméabilité. On peut citer celle de Kozeny-Carman :

$$\kappa = \frac{\phi^3}{6S_v^2\alpha}$$

où  $S_v^2$  est la surface interne des pores par unité de volume (ou encore aire spécifique).

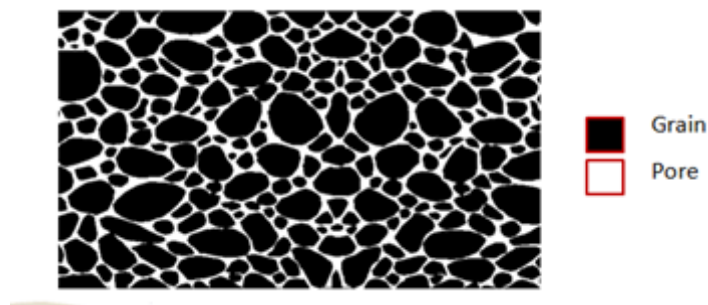


FIGURE 1.4 – Milieu poreux

La masse volumique du milieu poreux saturé est définie par

$$\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f \quad (1.93)$$

où  $\rho_s$  est la masse volumique du solide et  $\rho_f$  est la masse volumique du fluide saturant.

Le milieu est aussi décrit par des modules  $K_f$  (module d'incompressibilité du fluide dans les pores),  $K_r$  (module d'incompressibilité du solide),  $K_b$  (module d'incompressibilité des grains) et par quatre

constantes  $H$ ,  $M$ ,  $C$  et  $\mu$  caractérisant le comportement du solide et du fluide.  $\mu$  est le coefficient de Lamé de cisaillement des grains. Les expressions des trois premières constantes sont :

$$H = \frac{(K_r - K_b)^2}{D - K_b} + K_b + \frac{4}{3}\mu, \quad (1.94)$$

$$M = \frac{K_r^2}{D - K_b}, \quad (1.95)$$

$$C = \frac{K_r(K_r - K_b)}{D - K_b}, \quad (1.96)$$

avec

$$D = K_r \left[ 1 + \phi \left( \frac{K_r}{K_f} - 1 \right) \right]. \quad (1.97)$$

Une description détaillée des paramètres du milieu poreux est faite dans [26], [16], [20].

## 1.4.2 Ondes dans un milieu poreux saturé

La théorie qui décrit la propagation des ondes acoustiques dans les milieux poreux saturés est celle développée par Biot [4], [5], [16]. Biot suppose que la longueur d'onde est grande devant les dimensions macroscopiques du milieu poreux, ce qui conduit à faire l'hypothèse que le milieu poreux est un milieu continu [26].

### Loi de comportement

On suppose que la partie solide ou squelette (formée des grains) est élastique, le fluide saturant est visqueux et compressible, les forces volumiques sont nulles et que le milieu est en équilibre statique. Soient  $\vec{u}$  le déplacement dans le squelette,  $\vec{U}$  le déplacement dans le fluide saturant,  $P_f$  la pression au sein du fluide,  $\sigma$  et  $\varepsilon$  les tenseurs des contraintes et des déformations en un point du solide. Le déplacement relatif du fluide par rapport au solide dépend de la porosité et s'écrit sous la forme

$$\vec{w} = \phi (\vec{U} - \vec{u}) \quad (1.98)$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations (élasticité linéaire), Biot montre qu'on peut écrire le tenseur des contraintes du milieu poreux et la pression dans les pores sous la forme

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [(H - 2\mu)\varepsilon_I - C\zeta]\delta_{ij}, \quad (1.99)$$

$$P_f = M\zeta - C\varepsilon_I \quad (1.100)$$

où  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  représente les composantes du tenseur des déformations dans l'hypothèse des petites perturbations,  $\zeta = -\text{div}\vec{w} = -w_{i,i}$  mesure la variation du volume de fluide dans le milieu poreux ou l'augmentation locale de teneur en fluide,  $\varepsilon_I = \varepsilon_{ii}$  est le premier invariant du tenseur des déformations dans l'hypothèse des petites perturbations et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker.

Lorsque  $\beta = 0$  (milieu sans porosité), la pression du fluide  $P_f$  disparaît et l'équation (1.99) devient

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_I\delta_{ij}. \quad (1.101)$$

Le milieu se comporte alors comme un milieu élastique défini uniquement par deux constantes,  $\mu$  et  $\lambda = H - 2\mu$  ( $\mu$  et  $\lambda$  coefficients de Lamé) où  $H \rightarrow K_r + \frac{4\mu}{3}$ . Les équations (1.99) et (1.100) représentent la loi de comportement du milieu poreux saturé de Biot-Stoll [5], [16].

## Equations du mouvement

Biot a montré que les équations du mouvement d'une particule du milieu poreux pouvaient s'écrire sous la forme de deux équations vectorielles couplées :

$$\begin{cases} (H - \mu) \vec{\nabla} \varepsilon_I - C \vec{\nabla} \zeta + \mu \Delta \vec{u} &= \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} \\ C \vec{\nabla} \varepsilon_I - M \vec{\nabla} \zeta &= \rho_f \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + \frac{\eta}{\kappa} \overline{F(\chi)} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.102)$$

A la place du rapport  $\frac{\rho_f}{\phi}$  qui devrait normalement apparaître, Biot a introduit un paramètre  $m = \frac{\alpha}{\phi} \rho_f$  ( $\alpha \geq 1$ ) traduisant le fait que le mouvement du fluide dans les pores n'a pas toujours la direction du gradient de pression macroscopique.

La fonction  $F$  prend en compte le fait qu'à haute fréquence l'écoulement du fluide dans les pores n'est plus de type Poiseuille. Soit  $\omega_T$  la fréquence au-delà de laquelle l'hypothèse du flux Poiseuille n'est plus vérifiée alors

$$\overline{F(\chi)} = 1 \text{ pour } \omega \leq \omega_T \quad (1.103)$$

$$\overline{F(\chi)} = \frac{1}{4} \frac{\chi \overline{T(\chi)}}{1 + \frac{2}{i\chi} \overline{T(\chi)}} \text{ pour } \omega \geq \omega_T \quad (1.104)$$

avec

$$\chi = a_p \sqrt{\frac{\omega \rho_f}{\eta}} \quad (1.105)$$

et

$$T(\chi) = \frac{ber'(\chi) + ibei'(\chi)}{ber(\chi) + ibei(\chi)} \quad (1.106)$$

$ber + ibei$  étant la fonction de Kelvin définie par  $J_0(e^{i\frac{3\pi}{4}}\chi) = ber(\chi) + ibei(\chi)$  ( $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre 0) et  $ber' + ibei'$  sa dérivée par rapport à  $\chi$ ,  $a_p$  le rayon moyen des pores. Généralement,  $a_p$  et  $\omega_T$  sont déterminés expérimentalement.

## Solutions des équations du mouvement

En appliquant le théorème de décomposition de Helmholtz, on peut voir les vecteurs déplacements  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  comme la somme du gradient d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur. Soit  $(\phi_s, \vec{\psi}_s)$  le couple de potentiels scalaire et vecteur pour le déplacement  $\vec{u}$  et  $(\phi_f, \vec{\psi}_f)$  celui pour le déplacement  $\vec{w}$ . D'après le théorème de Helmholtz, on a

$$\vec{u} = -\vec{\nabla} \phi_s + \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}_s, \quad \text{div}(\vec{\psi}_s) = 0, \quad (1.107)$$

$$\vec{w} = -\vec{\nabla} \phi_f + \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}_f, \quad \text{div}(\vec{\psi}_f) = 0. \quad (1.108)$$

En introduisant les équations (1.107) et (1.108) dans les équations de mouvement puis en prenant successivement la divergence et le rotationnel, Biot obtient deux systèmes séparés de deux équations :

$$\begin{cases} -\rho \omega^2 \phi_s - \rho_f \omega^2 \phi_f &= H \Delta \phi_s + C \Delta \phi_f \\ -\rho_f \omega^2 \phi_s - m \omega^2 \phi_f &= C \Delta \phi_s + M \Delta \phi_f + i \left( \frac{\eta F(\chi)}{\kappa} \right) \omega \phi_f \end{cases} \quad (1.109)$$

et

$$\begin{cases} -\rho \omega^2 \vec{\psi}_s - \rho_f \omega^2 \vec{\psi}_f &= \mu \Delta \vec{\psi}_s \\ -\rho_f \omega^2 \vec{\psi}_s - m \omega^2 \vec{\psi}_f &= i \left( \frac{\eta F(\chi)}{\kappa} \right) \omega \vec{\psi}_f \end{cases} \quad (1.110)$$

Le système (1.109) d'inconnues  $\phi_s$  et  $\phi_f$ , traduit la propagation des ondes de compression ou longitudinales et l'autre (1.110) d'inconnues  $\vec{\psi}_s$  et  $\vec{\psi}_f$  décrit la propagation des ondes de cisaillement ou

transverses.

Considérons le cas des ondes planes monochromatiques telles que

$$(\phi_s, \phi_f, \vec{\psi}_s, \vec{\psi}_f) = (A, B, \vec{C}, \vec{D}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1.111)$$

où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde :  $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$ ,  $\vec{k} \cdot \vec{k} = \ell^2$ ,  $\vec{k}'$  colinéaire à  $\vec{k}''$  et où  $\vec{r}$  est un vecteur repérant la position d'un point d'observation quelconque. On obtient les systèmes linéaires homogènes

$$\begin{cases} A(H\ell^2 - \rho\omega^2) + B(C\ell^2 - \rho_f\omega^2) = 0 \\ A(C\ell^2 - \rho_f\omega^2) + B(M\ell^2 - m\omega^2 - i\frac{\eta^F(\chi)}{\kappa}\omega) = 0 \end{cases} \quad (1.112)$$

$$\begin{cases} \vec{C}(\mu\ell^2 - \rho\omega^2) - \rho_f\omega^2\vec{D} = 0 \\ \rho_f\omega^2\vec{C} + (m\omega^2 - i\frac{\eta^F(\chi)}{\kappa}\omega)\vec{D} = 0 \end{cases} \quad (1.113)$$

A partir du système (1.112), on déduit une équation de dispersion de degré 2 en  $\ell^2$  (équation bicarrée) dont les solutions sont  $\ell_1^2$  et  $\ell_2^2$ . Elles indiquent que dans un milieu poreux il se propage deux types d'ondes de compression : une dite rapide  $\ell_1$  et l'autre lente  $\ell_2$  telles que

$$\ell_1^2 = \omega^2 \left( \frac{-\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_2\Delta_3}}{2\Delta_3} \right), \quad (1.114)$$

$$\ell_2^2 = \omega^2 \left( \frac{-\Delta_1 - \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_2\Delta_3}}{2\Delta_3} \right), \quad (1.115)$$

où  $\Delta_1 = \rho M - 2\rho_f C + \alpha\rho_f H/\beta$ ,  $\Delta_2 = \rho_f(\rho_f - \rho\alpha/\beta)$  et  $\Delta_3 = C^2 - HM$ .

Le système (1.113) permet quant à elle d'obtenir une équation de dispersion de degré un en  $\ell^2$  telle que

$$\mu\ell^2 = \omega^2 \left( \rho - \frac{\phi\rho_f}{\alpha} \right). \quad (1.116)$$

Il n'existe donc qu'une seule onde de cisaillement.

### Autres grandeurs permettant de caractériser les ondes

Ce sont les coefficients de compatibilités  $\gamma_j$  [36] tels que

$$\gamma_j = \frac{H\ell_j^2 - \rho\omega^2}{\rho_f\omega^2 - C\ell_j^2} \quad (j = 1, 2), \quad (1.117)$$

$$\gamma_t = \frac{\mu\ell_t^2 - \rho\omega^2}{\rho_f\omega^2}, \quad (1.118)$$

et les masses volumiques acoustiques [36] :

$$\rho_j = (H + \gamma_j C) \frac{\ell_j^2}{\omega^2} = \rho_f \gamma_j + \rho \quad (j = 1, 2), \quad (1.119)$$

$$\rho_t = \mu \frac{\ell_t^2}{\omega^2} = \rho_f \gamma_t + \rho, \quad (1.120)$$

$$(C + \gamma_j M) \frac{\ell_j^2}{\omega^2} = \left( 1 + \gamma_j \frac{\alpha}{\phi} \right) \rho_f = \rho_{fj} \quad (j = 1, 2). \quad (1.121)$$



### 1.4.3 Diffusion par un cylindre fluide dans un milieu poreux

On considère un milieu poreux élastique contenant une cavité cylindrique infiniment longue de rayon  $a$ , remplie d'un fluide de propriété  $(\rho_0, c_0)$ . On envoie une onde incidente  $\vec{k}_{inc}$  ( $inc = 1, 2, t$ ) dans la direction des  $x > 0$  perpendiculairement à l'axe du cylindre. Le problème est alors bidimensionnel. On suppose toujours une dépendance harmonique en temps  $e^{-i\omega t}$  et on travaille en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . L'objectif est d'établir les équations de la diffusion acoustique d'une onde plane monochromatique harmonique par un cylindre fluide.

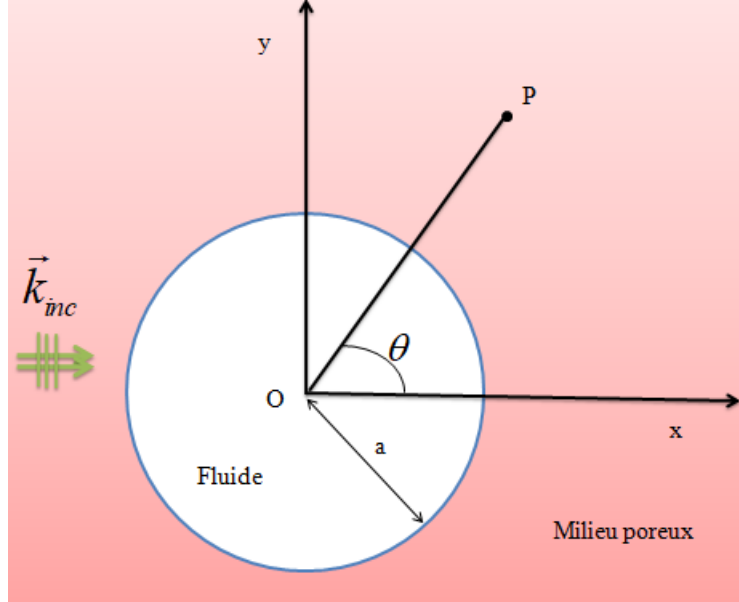


FIGURE 1.5 – Configuration géométrique d'un diffuseur cylindrique dans un milieu poreux

#### Déplacement et pression dans la cavité fluide

On suppose qu'il existe un potentiel scalaire  $\phi_0$  tel que le champ de déplacement  $\vec{u}_0$  des particules s'écrive

$$\vec{u}_0 = -\vec{\nabla}\phi_0 \quad (1.122)$$

où  $\vec{u}_0 = (u_{0r}, u_{0\theta}, 0)$ . Le potentiel  $\phi_0$  vérifie l'équation de Helmholtz  $\Delta\phi_0 + k_0^2\phi_0 = 0$ . L'équation d'Euler reliant  $\vec{u}_0$  à la pression  $p_0$  est :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} p_0. \quad (1.123)$$

Le déplacement  $\vec{u}_0$  étant harmonique en temps d'après (1.122), l'équation (1.123) devient  $\rho_0 \omega^2 \vec{u}_0 = -\vec{\nabla} p_0$  soit encore  $-\rho_0 \omega^2 \vec{\nabla} \phi_0 = \vec{\nabla} p_0$ . On déduit de cette dernière relation que la pression dans le fluide est donnée par :

$$p_0 = -\rho_0 \omega^2 \phi_0. \quad (1.124)$$

#### Déplacements, contraintes et pression dans le milieu poreux

Dans le milieu poreux, on suppose qu'il existe des potentiels vérifiant l'équation de Helmholtz :

- $\phi_1$  potentiel scalaire de l'onde rapide 1
- $\phi_2$  potentiel scalaire de l'onde lente 2
- $\vec{\psi}_t = \psi_t \vec{z}$  potentiel vectoriel de l'onde transversal  $t$ .

Le champ de déplacement  $\vec{u}$  dans la partie solide est :

$$\vec{u} = - \sum_{j=1}^2 \vec{\nabla} \phi_j + \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}_t. \quad (1.125)$$

En coordonnées cylindriques on obtient :

$$\vec{u} = \left( - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_t}{\partial \theta}, - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_t}{\partial r}, 0 \right)^T. \quad (1.126)$$

Le vecteur champ de déplacement  $\vec{w}$  du fluide par rapport au solide est donné par :

$$\vec{w} = - \sum_{j=1}^2 \gamma_j \vec{\nabla} \phi_j + \gamma_t \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}_t \quad (1.127)$$

ou bien

$$\vec{w} = \left( - \sum_{j=1}^2 \gamma_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{1}{r} \gamma_t \frac{\partial \psi_t}{\partial \theta}, - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{r} \gamma_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} - \gamma_t \frac{\partial \psi_t}{\partial r}, 0 \right)^T. \quad (1.128)$$

Ainsi, le vecteur déplacement total est donné par :

$$\vec{u} + \vec{w} = \left( - \sum_{j=1}^2 (1 + \gamma_j) \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + (1 + \gamma_t) \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_t}{\partial \theta}, - \sum_{j=1}^2 (1 + \gamma_j) \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} - (1 + \gamma_t) \frac{\partial \psi_t}{\partial r}, 0 \right)^T. \quad (1.129)$$

D'après la théorie de Biot, on sait que le tenseur des contraintes  $\sigma$  en un point du milieu est donnée par :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \left[ (H - 2\mu) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + C \vec{\nabla} \cdot \vec{w} \right] \delta_{ij}. \quad (1.130)$$

Sachant par ailleurs que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = - \sum_{j=1}^2 \Delta \phi_j$  et que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = - \sum_j \gamma_j \Delta \phi_j$ , on obtient

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \left[ - \sum_{k=1}^2 (H - 2\mu + \gamma_k C) \Delta \phi_k \right] \delta_{ij}. \quad (1.131)$$

Comme  $\phi_k$  vérifie l'équation de Helmholtz, (1.131) devient

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \left[ \sum_{k=1}^2 \ell_k^2 \mathcal{H}_k \phi_k \right] \delta_{ij}. \quad (1.132)$$

où  $\mathcal{H}_k = H - 2\mu + \gamma_k C$ . En coordonnées cylindriques, la composante  $\sigma_{rr}$  est donnée par

$$\sigma_{rr} = 2\mu \left[ - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_t}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial \theta \partial r} \right] + \sum_{j=1}^2 \mathcal{H}_j \ell_j^2 \phi_j$$

ou encore

$$\sigma_{rr} = \sum_{j=1}^2 \left( -2\mu \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + \mathcal{H}_j \ell_j^2 \phi_j \right) + 2\mu \left[ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_t}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial \theta \partial r} \right]. \quad (1.133)$$

et la composante  $\sigma_{r\theta}$  par

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu \sum_{j=1}^2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} \right) + \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_t}{\partial r} \right). \quad (1.134)$$

La pression dans les pores s'exprime sous la forme

$$P_f = -M \vec{\nabla} \cdot \vec{w} - C \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \sum_{j=1}^2 (\gamma_j M + C) \Delta \phi_j = - \sum_{j=1}^2 (\gamma_j M + C) \ell_j^2 \phi_j. \quad (1.135)$$

### Expressions des potentiels

Dans le milieu poreux, il faut tenir compte de l'onde incidente et des ondes diffusées par la cavité cylindrique. On écrit le potentiel  $\phi_{inc}$  incident sous la forme

$$\phi_{inc}(r) = e^{i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}} = e^{ik_{inc}x}, \quad inc = 1, 2, t, \quad (1.136)$$

où l'amplitude du potentiel est supposé unitaire. Le développement en série de fonctions de Bessel de l'équation (1.136) est [14] :

$$\phi_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k_{inc}r) e^{in\theta}, \quad (1.137)$$

où  $J_n$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$  (Annexe A).

Les ondes diffusées, de nombres d'onde  $k_1$  (ou  $\ell_1$ ),  $k_2$  (ou  $\ell_2$ ) et  $k_t$  (ou  $\ell_t$ ) c'est-à-dire celles qui s'éloignent de la cavité, dépendent de la fonction de Hankel  $H_n^{(1)}$  de première espèce d'ordre  $n$ . On a alors

$$\phi_{jinc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n A_n^{jinc} H_n^{(1)}(k_j r) e^{in\theta}, \quad j = 1, 2 \quad (1.138)$$

$$\psi_{tinc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{n-1} A_n^{tinc} H_n^{(1)}(k_t r) e^{in\theta}, \quad (1.139)$$

$A_n^{1inc}$ ,  $A_n^{2inc}$ ,  $A_n^{tinc}$  étant des coefficients à valeurs complexes. Le double exposant  $jinc$  indique la conversion de l'onde  $inc$  en l'onde  $j$  ( $j, inc = 1, 2, t$ ) [55].

Dans la cavité, comme le potentiel ne peut pas devenir infini, on prend donc la fonction de Bessel qui ne possède pas de singularité en  $r = 0$ , c'est-à-dire  $J_n$ . Par suite, l'expression du potentiel  $\phi_0$  dans la cavité prend la forme

$$\phi_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n B_n^{0inc} J_n(k_0 r) e^{in\theta} \quad (1.140)$$

où  $B_n^{0inc}$  est un coefficient à valeurs complexes.

Pour la suite on pose  $A_n^{jinc} = T_n^{jinc}$ ,  $j, inc = 1, 2, t$ . Ils représentent des amplitudes modales des ondes diffusées dans le milieu poreux et en provenance de l'inclusion [55].

L'objectif de la section suivante est de déterminer les quatre inconnues  $T_n^{1inc}$ ,  $T_n^{2inc}$ ,  $T_n^{tinc}$  et  $B_n^{0inc}$  en utilisant les conditions de passage à l'interface fluide-milieu poreux en  $r = a$ .

### Conditions de passage à l'interface fluide-milieu poreux

On cherche à déterminer ces amplitudes en utilisant la continuité du vecteur champ de déplacement radial, de la pression et du vecteur contrainte. A l'interface  $r = a$ , on a pour toute valeur de  $\theta$  :

– Continuité du débit ,

$$(u_{inc,r} + w_{inc,r}) + (u_{diff,r} + w_{diff,r}) = u_{0r}, \quad (1.141)$$

– Continuité de la pression,

$$p_{inc,f} + p_{diff,f} = p_0, \quad (1.142)$$

– Continuité de la contrainte radiale,

$$\sigma_{inc,rr} + \sigma_{diff,rr} = -p_0, \quad (1.143)$$

– Continuité de la contrainte tangentielle,

$$\sigma_{inc,r\theta} + \sigma_{diff,r\theta} = 0. \quad (1.144)$$

Nous appellerons ces conditions de passage aux limites *des pores ouverts*. La détermination de ces inconnues en utilisant les conditions aux limites des *pores ouverts* a été faite par Franklin et al [55] (Voir aussi [49]).

### Cas d'une onde longitudinale incidente $inc = 1$ ou $2$

La continuité du débit (déplacement radial) en  $r = a$  conduit à l'équation

$$-(1 + \gamma_{inc}) \frac{\partial \phi_{inc}}{\partial r} - \sum_j (1 + \gamma_j) \frac{\partial \phi_{jinc}}{\partial r} + (1 + \gamma_t) \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{tinc}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \phi_{0inc}}{\partial r}.$$

En remplaçant les potentiels par leurs expressions puis en introduisant les nombres d'onde sans dimension  $x_{inc} = k_{inc}a$ ,  $x_j = k_j a$  ( $j = 1, 2$ ),  $x_t = k_t a$  et  $x_0 = k_0 a$ , on obtient :

$$-(1 + \gamma_{inc}) x_{inc} J'_n(x_{inc}) - \sum_{j=1}^2 (1 + \gamma_j) x_j H_n^{(1)'}(x_j) T_n^{jinc} + (1 + \gamma_t) n H_n^{(1)}(x_t) T_n^{tinc} = -x_0 J'_n(x_0) B_n^{0inc}. \quad (1.145)$$

De même, les 3 autres conditions conduisent respectivement à

$$\rho_{finc} J_n(x_{inc}) + \sum_{j=1}^2 \rho_{fj} H_n^{(1)}(x_j) T_n^{jinc} = \rho_0 J_n(x_0) B_n^{0inc}, \quad (1.146)$$

$$2x_{inc} J'_n(x_{inc}) + (-2n^2 + \rho_{inct} x_t^2) J_n(x_{inc}) + \sum_{j=1}^2 [2x_j H_n^{(1)'}(x_j) + (-2n^2 + \rho_{jt} x_t^2) H_n^{(1)}(x_j)] T_n^{jinc} + 2n [-H_n^{(1)}(x_t) + x_t H_n^{(1)'}(x_t)] T_n^{tinc} = 0, \quad (1.147)$$

et

$$2n (J_n(x_{inc}) - x_{inc} J'_n(x_{inc})) + 2n \sum_{j=1}^2 (H_n^{(1)}(x_j) - x_j H_n^{(1)'}(x_j)) T_n^{jinc} + ((2n^2 - x_t^2) H_n^{(1)}(x_t) - 2x_t H_n^{(1)'}(x_t)) T_n^{tinc} = 0. \quad (1.148)$$

Ces quatre équations forment un système linéaire à quatre inconnues que l'on peut mettre sous la forme matricielle suivante

$$M_n \cdot \begin{pmatrix} T_n^{1inc} \\ T_n^{2inc} \\ T_n^{tinc} \\ B_n^{0inc} \end{pmatrix} = S_n, \quad (1.149)$$

où  $M_n = (a_{ij}^n)$  est une matrice carré d'ordre 4 et  $S_n$  un vecteur tels que

$$M_n = \begin{bmatrix} (1 + \gamma_1)x_1 H_n^{(1)'}(x_1) & (1 + \gamma_2)x_2 H_n^{(1)'}(x_2) & -n(1 + \gamma_t)H_n^{(1)}(x_t) & -x_0 J_n'(x_0) \\ \rho_{f1} H_n^{(1)}(x_1) & \rho_{f2} H_n^{(1)}(x_2) & 0 & -\rho_0 J_n(x_0) \\ 2x_1 H_n^{(1)'}(x_1) + (\rho_{1t} x_t^2 - 2n^2) H_n^{(1)}(x_1) & 2x_2 H_n^{(1)'}(x_2) + (\rho_{2t} x_t^2 - 2n^2) H_n^{(1)}(x_2) & 2n [x_t H_n^{(1)'}(x_t) - H_n^{(1)}(x_t)] & -\rho_{0t} x_t^2 J_n(x_0) \\ -2n H_n^{(1)}(x_1) + 2nx_1 H_n^{(1)'}(x_1) & -2n H_n^{(1)}(x_2) + 2nx_2 H_n^{(1)'}(x_2) & -\rho_{0t} x_t^2 J_n(x_0) & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$S_n = \begin{bmatrix} -(1 + \gamma_{inc}) x_{inc} J_n'(x_{inc}) \\ -\rho_{finc} J_n(x_{inc}) \\ -2x_{inc} J_n'(x_{inc}) - (\rho_{inct} x_t^2 - 2n^2) J_n(x_{inc}) \\ 2n (J_n(x_{inc}) - x_{inc} J_n'(x_{inc})) \end{bmatrix}.$$

### Onde transversale incidente

La continuité du débit en  $r = a$  conduit à

$$-(1 + \gamma_t) n J_n(x_t) - \sum_{j=1}^2 (1 + \gamma_j) x_j H_n^{(1)'}(x_j) T_n^{jt} + (1 + \gamma_t) n H_n^{(1)}(x_t) T_n^{tt} = -x_0 J_n'(x_0) B_n^{0t}. \quad (1.150)$$

Pour les trois autres conditions, on obtient respectivement :

$$\sum_{j=1}^2 \rho_{fj} H_n^{(1)}(x_j) T_n^{jt} = \rho_0 J_n(x_0) B_n^{0t}, \quad (1.151)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 [2x_j H_n^{(1)'}(x_j) + (\rho_{jt} x_t^2 - 2n^2) H_n^{(1)}(x_j)] T_n^{jt} + [2nx_t H_n^{(1)'}(x_t) - 2n H_n^{(1)}(x_t)] T_n^{tt} - \rho_{0t} x_t^2 J_n(x_0) B_n^{0t} \\ = 2n [J_n(x_t) - x_t J_n'(x_t)], \end{aligned} \quad (1.152)$$

et

$$\begin{aligned} ((2n^2 - x_t^2) J_n(x_t) - 2x_t J_n'(x_t)) + 2n \sum_{j=1}^2 (H_n^{(1)}(x_j) - x_j H_n^{(1)'}(x_j)) T_n^{jt} \\ + ((2n^2 - x_t^2) H_n^{(1)}(x_t) - 2x_t H_n^{(1)'}(x_t)) T_n^{tt} = 0. \end{aligned} \quad (1.153)$$

Ces équations forment un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues. La forme matricielle est

$$N_n \cdot \begin{pmatrix} T_n^{1t} \\ T_n^{2t} \\ T_n^{tt} \\ B_n^{0t} \end{pmatrix} = R_n, \quad (1.154)$$

où  $N_n = (b_{ij}^n)$  est une matrice carré d'ordre 4 et  $R_n$  un vecteur tels que

$$N_n = M_n \quad (1.155)$$

et

$$R_n = \begin{bmatrix} -(1 + \gamma_t)nJ_n(x_t) \\ 0 \\ 2n[J_n(x_t) - x_t J_n'(x_t)] \\ -(x_t^2 - 2n^2)J_n(x_t) - 2x_t J_n'(x_t) \end{bmatrix}. \quad (1.156)$$

Pour la suite on pose  $N_n = M_n = D_n$ . Soit  $D_n^i$  la matrice déduite de  $D_n$  en remplaçant les éléments de la  $i$ ème colonne par les éléments du vecteur  $S_n$  si l'onde incidente est longitudinale ou par les éléments du vecteur  $R_n$  si l'onde incidente est transversale, en utilisant la méthode de Cramer, les coefficients de diffusion pour un mode  $n$  s'écrivent sous la forme d'un quotient

$$T_n^{ij} = \frac{\det(D_n^i)}{\det(D_n)}, \quad i, j = 1, 2, t. \quad (1.157)$$

où  $\det(D_n^i)$  et  $\det(D_n)$  sont les déterminants respectifs des matrices  $D_n^i$  et  $D_n$ .

## 1.5 Généralisation de la théorie de Conoir et Norris à un milieu poreux élastique contenant des inclusions cylindriques

D'après la théorie de Biot, on sait que dans un milieu poreux élastique saturé par un fluide il se propage trois types d'onde : deux longitudinales et une transversale. Si la porosité est nulle, le milieu est élastique et deux ondes seulement se propagent : une longitudinale et l'autre transversale. Si la porosité est égale à un, alors le milieu devient fluide et l'on a seulement une onde longitudinale qui se propage. Partant des travaux de Fikioris et Waterman [12] en 1964 dans un milieu fluide contenant des inclusions sphériques, Conoir et Norris [51] en 2010 ont trouvé la formule du nombre d'onde effectif pour un milieu élastique contenant des diffuseurs cylindriques infiniment longs. On présente ici la généralisation à un milieu poreux élastique contenant des cavités cylindriques, basée sur les travaux de Conoir et Norris. On rappelle d'abord brièvement la théorie de Fikioris et Waterman.

### 1.5.1 Théorie de Fikioris et Waterman

#### Equations de la diffusion multiple

La géométrie du problème est la suivante : Soit  $\vec{r} = (x, y)$  la position d'un point d'observation quelconque  $P$  du plan  $(O, x, y)$ . Soit  $O_j$  le centre du diffuseur (cylindre)  $j$  ( $j = 1, \dots, N$ ), repéré par le vecteur  $\vec{r}_j = (x_j, y_j)$ . Soit  $(x', y')$  les coordonnées du point  $P$  dans le repère d'origine  $O_1$ . On désigne par  $\vec{\varrho}_j$  la position du point  $P$  dans le repère d'origine  $O_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ). On suppose partout une dépendance harmonique en temps des ondes longitudinales de nombres d'ondes  $k_j$  ( $j = 1, 2$ ) et transversale  $t$  de nombre d'onde  $k_t$  qui se propagent perpendiculairement à  $N$  cylindres parallèles dans un milieu poreux élastique. On note  $\vec{\varrho}_j = \vec{r} - \vec{r}_j$ ,  $\vec{r}_{kj} = \vec{r}_k - \vec{r}_j$ ,  $\theta(\vec{\varrho}_j) = \arg(\vec{\varrho}_j) = \text{angle}(\vec{x}, \vec{\varrho}_j)$  et  $\psi^\alpha(\vec{r})$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ), le champ acoustique total en un point  $\vec{r}$  où il n'y a pas de diffuseur. Après le passage de l'onde incidente  $\psi_{inc}^\alpha(\vec{r})$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ), il y a trois ondes acoustiques qui sont diffusées à savoir deux ondes longitudinales et une onde transversale. Le champ diffusé par le  $j^{\text{ème}}$  diffuseur est noté  $\psi_s^\alpha(\vec{r}, \vec{r}_j)$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ). Le champ acoustique total est alors

$$\psi^\alpha(\vec{r}) = \psi_{inc}^\alpha(\vec{r}) + \sum_{j=1}^N \psi_s^\alpha(\vec{r}, \vec{r}_j), \quad \alpha = 1, 2, t. \quad (1.158)$$

Soit  $\psi_{ex}^\alpha(\vec{r}, \vec{r}_j)$  le champ incident sur le  $j^{\text{ème}}$  diffuseur ou le champ excitant et  $\mathbf{T}$  l'opérateur de transition. On a alors

$$\psi_s^\alpha(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{\beta=1, 2, t} \mathbf{T}^{\beta\alpha}(\vec{r}_j) \psi_{ex}^\beta(\vec{r}, \vec{r}_j) \quad (1.159)$$

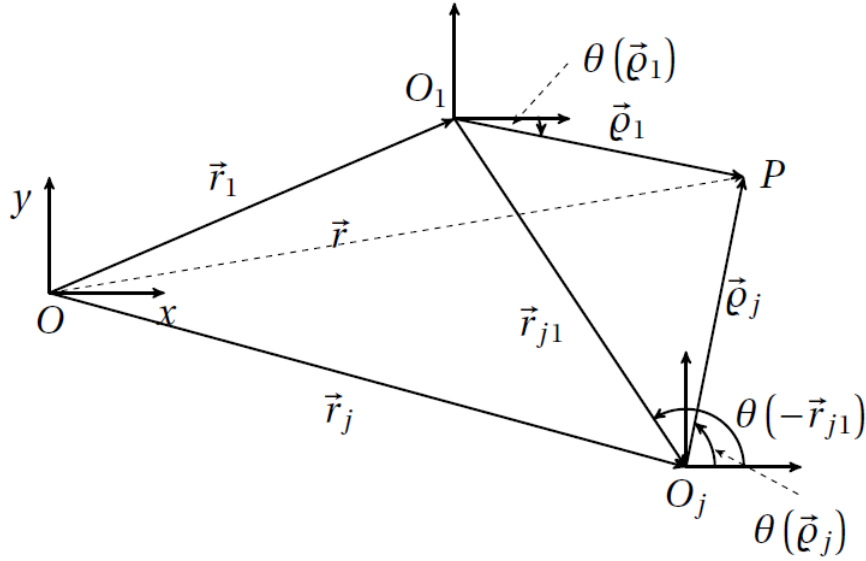


FIGURE 1.6 – Configuration géométrique

où les  $\mathbf{T}^{\beta\alpha}$  ( $\beta, \alpha = 1, 2, t$ ) sont des opérateurs tels

$$\mathbf{T}(\vec{r}_j) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{11}(\vec{r}_j) & \mathbf{T}^{12}(\vec{r}_j) & \mathbf{T}^{1t}(\vec{r}_j) \\ \mathbf{T}^{21}(\vec{r}_j) & \mathbf{T}^{22}(\vec{r}_j) & \mathbf{T}^{2t}(\vec{r}_j) \\ \mathbf{T}^{t1}(\vec{r}_j) & \mathbf{T}^{t2}(\vec{r}_j) & \mathbf{T}^{tt}(\vec{r}_j) \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.160)$$

$\psi_{ex}^\alpha(\vec{r}, \vec{r}_j)$  étant la contribution de tous les champs arrivant sur le  $j^{\text{ème}}$  diffuseur donc

$$\psi_{ex}^\alpha(\vec{r}, \vec{r}_j) = \psi_{inc}^\alpha(\vec{r}) + \sum_{\beta=1,2,t} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^N \mathbf{T}^{\beta\alpha}(\vec{r}_m) \psi_s^\beta(\vec{r}, \vec{r}_m). \quad (1.161)$$

Les équations (1.158) à (1.161) sont les équations de la diffusion multiple. D'après la méthode du moyennage sur toutes les configurations des diffuseurs développée par Foldy et Lax, le champ d'excitation moyen sur toutes les configurations des diffuseurs est

$$\langle \psi_{ex}^\alpha(\vec{r}, \vec{r}_1) \rangle = \psi_{inc}^\alpha(\vec{r}) + \sum_{\beta=1,2,t} \int_D n(\vec{r}, \vec{r}_j) \mathbf{T}^{\beta\alpha}(\vec{r}) \langle \psi_{ex}^\beta(\vec{r}, \vec{r}_j) \rangle d\vec{r}. \quad (1.162)$$

où  $\langle \psi_{ex}^\alpha(\vec{r}, \vec{r}_1) \rangle$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ) désigne le champ d'excitation moyen,  $\vec{r}_1$  la position de l'un des diffuseurs (diffuseur 1). L'intégrale est prise sur toute la surface  $D$  occupée par les diffuseurs et  $n(\vec{r}, \vec{r}_j)$  la densité de probabilité du diffuseur localisé à la position  $\vec{r}_j$ .

Pour une répartition uniforme et aléatoire de cylindres identiques de densité constante  $n_0$  et de rayon  $a$ , Fikioris et Waterman [12] ont défini la densité de probabilité conditionnelle sous la forme

$$n(\vec{r}, \vec{r}_j) = \begin{cases} n_0 & \text{si } |\vec{r} - \vec{r}_j| > b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.163)$$

où  $b > 2a$ .  $b$  est la distance la plus courte entre les centres des cylindres adjacents. Elle a pour raison physique d'éviter le recouvrement des cylindres. Le champ moyen effectif devient alors

$$\langle \psi_{ex}^\alpha(\vec{r}, \vec{r}_1) \rangle = \psi_{inc}^\alpha(\vec{r}) + n_0 \sum_{\beta=1,2,t} \int_D \mathbf{T}^{\beta\alpha}(\vec{r}_j) \langle \psi_{ex}^\beta(\vec{r}, \vec{r}_j) \rangle d\vec{r}_j. \quad (1.164)$$

### Equations modales

Les cylindres sont distribués de manière aléatoire dans le demi-espace noté  $S^+ = \{x > 0\}$ . On suppose que l'onde incidente est de la forme

$$\psi_{inc}^\alpha(\vec{r}) = A_\alpha e^{ik_\alpha x} \quad (1.165)$$

où  $A_\alpha$  est une constante ( $\alpha = 1, 2, t$ ) et  $x$  l'abscisse du vecteur position  $\vec{r}$ . Les champs incidents et effectifs vérifient l'équation d'Helmholtz c'est-à-dire

$$\nabla^2 \psi^\alpha + k_\alpha^2 \psi^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, t. \quad (1.166)$$

On peut écrire le champ excitation sous la forme d'une série :

$$\langle \psi_{ex}^\alpha(\vec{r}, \vec{r}_j) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^\alpha(\vec{r}_j) J_n(k_\alpha \varrho_j) e^{in\theta(\vec{q}_j)}. \quad (1.167)$$

En tenant compte de (1.76), la relation de fermeture entre le champ excitation et le champ diffusé devient alors [51]

$$\mathbf{T}^{\beta\alpha}(\vec{r}_j) J_n(k_\beta \varrho_j) e^{in\theta(\vec{\rho}_j)} = T_n^{\beta\alpha} H_n^{(1)}(k_\beta \rho_j) e^{in\theta(\vec{\rho}_j)}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, t. \quad (1.168)$$

$J_n$  est la fonction de Bessel de première espèce et  $H_n^{(1)}$  fonction de Hankel d'ordre  $n$  (Annexe A),  $T_n^{\beta\alpha}$  représentant le coefficient de diffusion du diffuseur  $j$ . L'équation (1.168) montre que les ondes arrivant sur le diffuseur  $j$  (membre de gauche) sont transformées en ondes s'éloignant de ce même diffuseur (membre de droite). On déduit à partir de l'équation (1.168), l'écriture en champ lointain de la fonction de diffusion ou fonction de forme  $f^{\beta\alpha}$  sous la forme d'une série de Fourier :

$$f^{\beta\alpha}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^{\beta\alpha} e^{in\theta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, t. \quad (1.169)$$

En remplaçant les équations (1.165) et (1.167) dans (1.164) et en tenant compte de la relation [14], [44] :

$$e^{ik_\alpha x} = e^{ik_\alpha x_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k_\alpha \rho_1) e^{in\theta(\vec{\rho}_1)},$$

il vient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{A_n^\alpha(\vec{r}_1) - i^n A_\alpha e^{ik_\alpha x_1}\} J_n(k_\alpha \varrho_1) e^{in\theta(\vec{\rho}_1)} = \sum_{\beta=1,2,t} \int_{S^+} n(\vec{r}_j, \vec{r}_1) \mathbf{T}^{\beta\alpha}(\vec{r}_j) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^\beta(\vec{r}_j) J_n(k_\beta \varrho_j) e^{in\theta(\vec{q}_j)} d\vec{r}_j.$$

En y insérant (1.168), il s'ensuit que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{A_n^\alpha(\vec{r}_1) - i^n A_\alpha e^{ik_\alpha x_1}\} J_n(k_\alpha \varrho_1) e^{in\theta(\vec{\rho}_1)} = \sum_{\beta=1,2,t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^{\beta\alpha} \int_{S^+} n(\vec{r}_j, \vec{r}_1) A_n^\beta(\vec{r}_j) H_n^{(1)}(k_\beta \varrho_j) e^{in\theta(\vec{q}_j)} d\vec{r}_j. \quad (1.170)$$

Dans la suite on va écrire la série à droite de l'équation (1.170) dans le repère d'origine  $O_1$ . Pour cela, on impose la condition  $\varrho_1 < r_{j1}$  nécessaire pour utiliser le théorème d'addition [14] :

$$H_n^{(1)}(k_\alpha \varrho_j) e^{in\theta(\vec{q}_j)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m-n} e^{i(n-m)\theta(-\vec{r}_{j1})} H_{m-n}^{(1)}(kr_{j1}) J_m(k\varrho_1) e^{im\theta(\vec{q}_1)}. \quad (1.171)$$



Il permet d'écrire les ondes diffusées par les diffuseurs en  $\vec{r}_j$  au voisinage de  $\vec{r}_1$ . L'équation (1.170) devient alors

$$A_n^\alpha(\vec{r}_1) = \sum_{\beta=1,2,t} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p T_{p+n}^{\beta\alpha} \int_{S^+} n(\vec{r}_j, \vec{r}_1) A_{n+p}^\beta(\vec{r}_j) H_p^{(1)}(k_\beta r_{j1}) e^{ip\theta(\vec{r}_{j1})} + i^n A_\alpha e^{ik_\alpha x_1} d\vec{r}_j \quad (1.172)$$

pour  $\alpha = 1, 2, t$ .

On cherche maintenant à déterminer les solutions du système linéaire (1.172) sous la forme suivante

$$A_n^\alpha(\vec{r}_j) = i^n A_n^\alpha e^{\vec{\xi} \cdot \vec{r}_j} + i^n B_n^\alpha e^{\vec{\xi}' \cdot \vec{r}_j} + i^n C_n^\alpha e^{\vec{\xi}'' \cdot \vec{r}_j} \quad (1.173)$$

ou encore

$$A_n^\alpha(\vec{r}_j) = i^n A_n^\alpha e^{\xi x_j} + i^n B_n^\alpha e^{\xi' x_j} + i^n C_n^\alpha e^{\xi'' x_j}, \quad \vec{r}_j = (x_j, y_j), \quad (1.174)$$

les  $\vec{\xi} = (\xi, 0)$ ,  $\vec{\xi}' = (\xi', 0)$  et  $\vec{\xi}'' = (\xi'', 0)$  étant des vecteurs d'ondes effectifs relatifs aux ondes qui se propagent suivant l'axe des abscisses ( $\xi$  pour l'onde rapide,  $\xi'$  pour l'onde lente et  $\xi''$  pour l'onde transversale). Les coefficients  $A_n^\alpha$ ,  $B_n^\alpha$  et  $C_n^\alpha$  sont des inconnues. En insérant la relation (1.173) dans l'équation (1.172), il vient

$$A_n^\alpha e^{\vec{\xi} \cdot \vec{r}_1} + B_n^\alpha e^{\vec{\xi}' \cdot \vec{r}_1} + C_n^\alpha e^{\vec{\xi}'' \cdot \vec{r}_1} = \sum_{\beta=1,2,t} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p T_{p+n}^{\beta\alpha} \left[ A_{n+p}^\beta I_p^\alpha(\xi) + B_{n+p}^\beta I_p^\alpha(\xi') + C_{n+p}^\beta I_p^\alpha(\xi'') \right] + A_\alpha e^{ik_\alpha x_1} \quad (1.175)$$

où

$$I_p^\alpha(\zeta) = \int_{S^+} n(\vec{r}_j, \vec{r}_1) H_p^{(1)}(k_\alpha r_{j1}) e^{ip\theta(\vec{r}_{j1})} e^{i\vec{\zeta} \cdot \vec{r}_j} d\vec{r}_j, \quad \zeta \in \{\xi, \xi', \xi''\}. \quad (1.176)$$

En utilisant la "hole correction" (1.163), on peut encore écrire l'équation (1.176) sous la forme

$$I_p^\alpha(\zeta) = n_0 e^{i\vec{\zeta} \cdot \vec{r}_1} \int_{S_b} \phi(k_\alpha r_{j1}) e^{i\vec{\zeta} \cdot \vec{r}_j} d\vec{r}_{j1}, \quad (1.177)$$

pour tout  $\zeta \in \{\xi, \xi', \xi''\}$  avec  $\phi(k_\alpha r_{j1}) = H_p^{(1)}(k_\alpha r_{j1}) e^{ip\theta(\vec{r}_{j1})}$ , ( $\alpha = 1, 2, t$ ). L'ensemble  $S_b$  étant défini sous la forme

$$S_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 > b\}.$$

Le calcul de l'intégrale (1.177) (Annexe E) donne

$$I_p^\alpha(\zeta) = i^p \left[ \frac{2in_0}{k_\alpha(\zeta - k_\alpha)} e^{ik_\alpha x_1} + \frac{2\pi n_0}{(\zeta^2 - k_\alpha^2)} N_p^\alpha(\zeta) e^{i\zeta x_1} \right] \quad (1.178)$$

où

$$N_p^\alpha(\zeta) = \zeta b H_p^{(1)}(k_\alpha b) J_p'(\zeta b) - k_\alpha b H_p^{(1)'}(k_\alpha b) J_p(\zeta b) \quad (1.179)$$

pour tout  $\zeta \in \{\xi, \xi', \xi''\}$ , ( $\alpha = 1, 2, t$ ). On peut récrire alors l'équation (1.175) sous la forme

$$A_n^\alpha e^{\xi x_1} + B_n^\alpha e^{\xi' x_1} + C_n^\alpha e^{\xi'' x_1} = A_\alpha e^{ik_\alpha x_1} + e^{i\xi x_1} \kappa_\alpha(\xi, A) + e^{i\xi' x_1} \kappa_\alpha(\xi', B) + e^{i\xi'' x_1} \kappa_\alpha(\xi'', C) + e^{ik_\alpha x_1} \{ \kappa'_\alpha(\xi, A) + \kappa'_\alpha(\xi', B) + \kappa'_\alpha(\xi'', C) \} \quad (1.180)$$

où

$$\kappa_\alpha(\zeta, G) = \frac{2\pi n_0}{(\zeta^2 - k_\alpha^2)} \sum_{\beta=1,2,t} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{p+n}^{\beta\alpha} G_{n+p}^\beta N_p^\alpha(\zeta),$$

et

$$\kappa'_\alpha(\zeta, G) = \frac{2in_0}{k_\alpha(\zeta - k_\alpha)} \sum_{\beta=1,2,t} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{p+n}^{\beta\alpha} G_{n+p}^\beta$$

pour tout  $\zeta \in \{\xi, \xi', \xi''\}$ , ( $\alpha = 1, 2, t$ ). L'équation (1.180) est appelée équation modale.

### Généralisation des équations de Fikioris et Waterman

L'équation (1.180) est satisfaite pour tout  $x_1$  si les coefficients de  $e^{ik_\alpha x_1}$ ,  $e^{i\xi x_1}$ ,  $e^{i\xi' x_1}$  et  $e^{i\xi'' x_1}$  sont nuls simultanément. Dans ce cas, on obtient la loi de Lorentz-Lorenz :

$$\begin{cases} A_n^\alpha - \frac{2\pi n_0}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \sum_{\beta=1,2,t} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{p+n}^{\beta\alpha} A_{n+p}^\beta N_p^\alpha(\xi) = 0 \\ B_n^\alpha - \frac{2\pi n_0}{(\xi'^2 - k_\alpha^2)} \sum_{\beta=1,2,t} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{p+n}^{\beta\alpha} B_{n+p}^\beta N_p^\alpha(\xi') = 0 \\ C_n^\alpha - \frac{2\pi n_0}{(\xi''^2 - k_\alpha^2)} \sum_{\beta=1,2,t} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{p+n}^{\beta\alpha} C_{n+p}^\beta N_p^\alpha(\xi'') = 0 \end{cases}, \quad \alpha = 1, 2, t. \quad (1.181)$$

On a trois systèmes d'équations algébriques linéaires homogènes identiques soit avec les inconnues  $\{A_n^\alpha\}$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ) pour  $\xi$  ou  $\{B_n^\alpha\}$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ) pour  $\xi'$  ou  $\{C_n^\alpha\}$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ) pour  $\xi''$ . Chacune des équations (1.181) est une équation de Fikioris et Waterman et servira à la détermination des nombres d'ondes effectifs.

### 1.5.2 Formulation matricielle des équations modales

On prend le système dépendant de  $\xi$  c'est-à-dire

$$A_n^\alpha - \frac{2\pi n_0}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \sum_{\beta=1,2,t} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{p+n}^{\beta\alpha} A_{n+p}^\beta N_p^\alpha(\xi) = 0, \quad (1.182)$$

pour tout  $\alpha = 1, 2, t$ . Si on pose  $p + n = q$  alors on peut écrire l'équation (1.182) sous la forme :

$$A_n^\alpha - \frac{2\pi n_0}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \sum_{\beta=1,2,t} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} T_q^{\beta\alpha} A_q^\beta N_{n-q}^\alpha(\xi) = 0. \quad (1.183)$$

Il faut remarquer que  $N_{-n}^\alpha(\xi) = N_n^\alpha(\xi)$  pour tout  $n$ .

On définit les vecteurs  $\vec{a}_\alpha$  et  $\vec{e}$ , la matrice diagonale  $\mathbf{T}^{\beta\alpha}$  et la matrice symétrique  $\bar{\mathbf{Q}}^\alpha$  tels que :

$$\vec{a}_\alpha = (\dots, A_{-1}^\alpha, A_0^\alpha, A_1^\alpha, \dots)^t, \quad \forall \alpha = 1, 2, t$$

$$\vec{e} = (\dots, 1, 1, 1, \dots)^t,$$

$$\bar{Q}_{mn}^\alpha = \frac{i\pi N_{m-n}^\alpha(\xi) - 1}{\xi^2 - k_\alpha^2}, \quad \forall \alpha = 1, 2, t,$$

$$T_{mn}^{\beta\alpha} = T_n^{\beta\alpha} \delta_{mn}, \quad \forall \beta, \alpha = 1, 2, t.$$

On pose  $\varepsilon = -4in_0$  et  $y_\alpha = \xi^2 - k_\alpha^2$ .

En utilisant ces quantités, l'équation (1.183) devient

$$A_n^\alpha - \varepsilon \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left( \bar{Q}_{mn}^\alpha + \frac{1}{y_\alpha} \right) \sum_{\beta=1,2,t} T_m^{\beta\alpha} A_m^\beta = 0,$$

ou encore

$$\vec{a}_\alpha - \varepsilon \left( \bar{\mathbf{Q}}^\alpha + \frac{\vec{e}\vec{e}^t}{y_\alpha} \right) \sum_{\beta} \mathbf{T}^{\beta\alpha} \vec{a}_\beta = 0 \quad \forall \beta, \alpha = 1, 2, t.$$

Si l'on remplace  $\alpha$  successivement par 1, 2 et  $t$ , il vient

$$\vec{a}_1 - \varepsilon \left( \bar{\mathbf{Q}}^1 + \frac{\vec{e}\vec{e}^t}{y_1} \right) (\mathbf{T}^{11} \vec{a}_1 + \mathbf{T}^{21} \vec{a}_2 + \mathbf{T}^{t1} \vec{a}_t) = 0, \quad (1.184)$$

$$\vec{d}_2 - \varepsilon \left( \bar{\mathbf{Q}}^2 + \frac{\vec{e}\vec{e}^t}{y_2} \right) (\mathbf{T}^{12}\vec{d}_1 + \mathbf{T}^{22}\vec{d}_2 + \mathbf{T}^{t2}\vec{d}_t) = 0, \quad (1.185)$$

et

$$\vec{d}_t - \varepsilon \left( \bar{\mathbf{Q}}^t + \frac{\vec{e}\vec{e}^t}{y_t} \right) (\mathbf{T}^{1t}\vec{d}_1 + \mathbf{T}^{2t}\vec{d}_2 + \mathbf{T}^{tt}\vec{d}_t) = 0. \quad (1.186)$$

En combinant les équations (1.184), (1.185) et (1.186), on obtient une seule équation de la forme :

$$\left\{ \mathbf{J} - \varepsilon \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T} - \varepsilon \frac{\vec{e}_1 \vec{e}_1^t}{y_1} \mathbf{T} - \varepsilon \frac{\vec{e}_2 \vec{e}_2^t}{y_2} \mathbf{T} - \varepsilon \frac{\vec{e}_t \vec{e}_t^t}{y_t} \mathbf{T} \right\} \vec{d} = 0 \quad (1.187)$$

où les vecteurs  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_t$  et  $\vec{d}$  sont définis par :

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \vec{e} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{e} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{e} \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \\ \vec{d}_t \end{pmatrix}$$

et les matrices blocs  $\mathbf{J}$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}$  et  $\mathbf{T}$  par

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{Q}}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{Q}}_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{11} & \mathbf{T}^{12} & \mathbf{T}^{1t} \\ \mathbf{T}^{21} & \mathbf{T}^{22} & \mathbf{T}^{2t} \\ \mathbf{T}^{t1} & \mathbf{T}^{t2} & \mathbf{T}^{tt} \end{pmatrix}$$

avec  $\mathbf{I}$  matrice identité. On multiplie à gauche l'équation (1.187) par  $\mathbf{T}^{1/2}$  [51], il vient

$$\left\{ \mathbf{T}^{1/2} \mathbf{J} - \varepsilon \mathbf{T}^{1/2} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T} - \varepsilon \mathbf{T}^{1/2} \frac{\vec{e}_1 \vec{e}_1^t}{y_1} \mathbf{T} - \varepsilon \mathbf{T}^{1/2} \frac{\vec{e}_2 \vec{e}_2^t}{y_2} \mathbf{T} - \varepsilon \mathbf{T}^{1/2} \frac{\vec{e}_t \vec{e}_t^t}{y_t} \mathbf{T} \right\} \vec{d} = 0.$$

Comme  $\mathbf{T}^{1/2} \mathbf{J} = \mathbf{J} \mathbf{T}^{1/2}$  on a même

$$\left\{ \mathbf{J} - \varepsilon \mathbf{T}^{1/2} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{1/2} - \varepsilon \mathbf{T}^{1/2} \frac{\vec{e}_1 \vec{e}_1^t}{y_1} \mathbf{T}^{1/2} - \varepsilon \mathbf{T}^{1/2} \frac{\vec{e}_2 \vec{e}_2^t}{y_2} \mathbf{T}^{1/2} - \varepsilon \mathbf{T}^{1/2} \frac{\vec{e}_t \vec{e}_t^t}{y_t} \mathbf{T}^{1/2} \right\} \vec{u} = 0,$$

où  $\vec{u} = \mathbf{T}^{1/2} \vec{d}$ . Introduisons ensuite les vecteurs

$$\vec{f}_\alpha = \mathbf{T}^{1/2} \vec{e}_\alpha, \quad \forall \alpha = 1, 2, t$$

et la matrice  $\mathbf{Q}$  définie par

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{1/2} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{1/2}.$$

On a donc

$$\left\{ \mathbf{J} - \varepsilon \mathbf{Q} - \frac{\varepsilon}{y_1} \vec{f}_1 \vec{f}_1^t - \frac{\varepsilon}{y_2} \vec{f}_2 \vec{f}_2^t - \frac{\varepsilon}{y_t} \vec{f}_t \vec{f}_t^t \right\} \vec{u} = 0. \quad (1.188)$$

L'équation (1.188) est encore équivalente à

$$\left\{ \mathbf{J} - \varepsilon (\mathbf{J} - \varepsilon \mathbf{Q})^{-1} \left( \frac{1}{y_1} \vec{f}_1 \vec{f}_1^t - \frac{1}{y_2} \vec{f}_2 \vec{f}_2^t - \frac{1}{y_t} \vec{f}_t \vec{f}_t^t \right) \right\} \vec{u} = 0. \quad (1.189)$$

On déduit un système de trois équations d'inconnues les scalaires  $\vec{f}_\alpha^t \cdot \vec{u}$ ,  $\forall \alpha = 1, 2, t$  :

$$\begin{cases} \vec{f}_1^t \vec{u} - \vec{f}_1^t \otimes \frac{\varepsilon}{y_1} \vec{f}_1 \vec{f}_1^t \vec{u} - \vec{f}_1^t \otimes \frac{\varepsilon}{y_2} \vec{f}_2 \vec{f}_2^t \vec{u} - \vec{f}_1^t \otimes \frac{\varepsilon}{y_t} \vec{f}_t \vec{f}_t^t \vec{u} = 0 \\ \vec{f}_2^t \vec{u} - \vec{f}_2^t \otimes \frac{\varepsilon}{y_2} \vec{f}_2 \vec{f}_2^t \vec{u} - \varepsilon \vec{f}_2^t \otimes \frac{1}{y_1} \vec{f}_1 \vec{f}_1^t \vec{u} - \vec{f}_2^t \otimes \frac{\varepsilon}{y_t} \vec{f}_t \vec{f}_t^t \vec{u} = 0 \\ \vec{f}_t^t \vec{u} - \vec{f}_t^t \otimes \frac{\varepsilon}{y_t} \vec{f}_t \vec{f}_t^t \vec{u} - \vec{f}_t^t \otimes \frac{\varepsilon}{y_2} \vec{f}_2 \vec{f}_2^t \vec{u} - \vec{f}_t^t \otimes \frac{\varepsilon}{y_1} \vec{f}_1 \vec{f}_1^t \vec{u} = 0 \end{cases}$$

où  $\mathcal{Q} = (\mathbf{J} - \varepsilon \mathbf{Q})^{-1}$ .

Sous forme matricielle on a

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon}{y_1} M_{11} & -\frac{\varepsilon}{y_2} M_{12} & -\frac{\varepsilon}{y_t} M_{1t} \\ -\frac{\varepsilon}{y_1} M_{21} & 1 - \frac{\varepsilon}{y_2} M_{22} & -\frac{\varepsilon}{y_t} M_{2t} \\ -\frac{\varepsilon}{y_1} M_{t1} & -\frac{\varepsilon}{y_2} M_{t2} & 1 - \frac{\varepsilon}{y_t} M_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{f}_1^t \vec{u} \\ \vec{f}_2^t \vec{u} \\ \vec{f}_t^t \vec{u} \end{pmatrix} = 0, \quad (1.190)$$

où la matrice  $M$  est définie par

$$M_{\alpha\beta} = \vec{f}_\alpha^t (\mathbf{J} - \varepsilon \mathbf{Q})^{-1} \vec{f}_\beta, \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2, t. \quad (1.191)$$

Calculons le déterminant de la matrice carrée  $M$  dépendant du nombre d'onde effectif  $\xi$ . On a :

$$(y_1 - \varepsilon M_{11}) \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon}{y_2} M_{22} \right) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{y_t} M_{tt} \right) - \frac{\varepsilon^2}{y_2 y_t} M_{t2} M_{2t} \right] + \varepsilon M_{21} \left[ -\frac{\varepsilon}{y_2} M_{12} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{y_t} M_{tt} \right) - \frac{\varepsilon^2}{y_2 y_t} M_{t2} M_{1t} \right] - \varepsilon M_{t1} \left[ \frac{\varepsilon^2}{y_2 y_t} M_{12} M_{2t} + \frac{\varepsilon}{y_t} M_{1t} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{y_2} M_{22} \right) \right] = 0.$$

En développant cette équation, on obtient une équation polynomiale de degré 3 en  $\varepsilon$  :

$$y_1 y_2 y_t - \varepsilon [y_1 y_2 M_{tt} + y_1 y_t M_{22} + y_2 y_t M_{11}] + \varepsilon^2 [y_1 M_{22} M_{tt} + y_2 M_{11} M_{tt} + y_t M_{11} M_{22} - y_1 M_{t2} M_{2t} - y_2 M_{t1} M_{1t} - y_t M_{21} M_{12}] + \varepsilon^3 [M_{11} M_{t2} M_{2t} + M_{22} M_{t1} M_{1t} + M_{tt} M_{21} M_{12} - M_{21} M_{t2} M_{1t} - M_{t1} M_{12} M_{2t} - M_{11} M_{22} M_{tt}] = 0. \quad (1.192)$$

L'équation (1.192) s'appelle l'équation fondamentale des ondes cohérentes ou équation de dispersion.

### 1.5.3 Solution asymptotique de l'équation du nombre d'onde

Considérons l'équation (1.191). On a

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \vec{f}_\alpha^t (\mathbf{J} - \varepsilon \mathbf{Q})^{-1} \vec{f}_\beta \\ &= \vec{e}_\alpha^t \mathbf{T}^{1/2} (\mathbf{J} - \varepsilon \mathbf{T}^{1/2} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^{1/2})^{-1} \mathbf{T}^{1/2} \vec{e}_\beta \\ &= \vec{e}_\alpha^t \mathbf{T}^{1/2} [\mathbf{T}^{1/2} (\mathbf{T}^{-1} - \varepsilon \bar{\mathbf{Q}}) \mathbf{T}^{1/2}]^{-1} \mathbf{T}^{1/2} \vec{e}_\beta \\ M_{\alpha\beta} &= \vec{e}_\alpha^t (\mathbf{T}^{-1} - \varepsilon \bar{\mathbf{Q}})^{-1} \vec{e}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, t. \end{aligned}$$

Cette expression suggère qu'on peut calculer les éléments de la matrice  $M$  sans calculer  $\mathbf{T}^{1/2}$ . Le développement limité en  $\varepsilon = -4in_0$  de  $(\mathbf{J} - \varepsilon \mathbf{Q})^{-1}$  est  $(\mathbf{J} - \varepsilon \mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{J} + \varepsilon \mathbf{Q} + \varepsilon^2 \mathbf{Q}^2 + \dots$  ( $|\varepsilon| \ll 1$ ). L'équation (1.191) devient

$$M_{\alpha\beta} = \vec{f}_\alpha^t \vec{f}_\beta + \varepsilon \vec{f}_\alpha^t \mathbf{Q} \vec{f}_\beta + \varepsilon^2 \vec{f}_\alpha^t \mathbf{Q}^2 \vec{f}_\beta + \dots$$

Soit encore

$$M_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha^t \mathbf{T} \vec{e}_\beta + \varepsilon \vec{e}_\alpha^t \mathbf{T} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T} \vec{e}_\beta + \varepsilon^2 \vec{e}_\alpha^t \mathbf{T} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T} \vec{e}_\beta + \dots, \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2, t. \quad (1.193)$$

**Développement asymptotique aux faibles concentrations**

On considère le développement asymptotique pour de faibles concentrations  $|\varepsilon| \ll 1$  suivant

$$y_\alpha = \varepsilon y_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 y_\alpha^{(2)} + \dots, \quad \alpha = 1, 2, t. \quad (1.194)$$

Pour la suite, on s'intéresse au développement asymptotique pour  $\alpha = 1$ . Les cas  $\alpha = 2, t$  se font de la même manière.

On introduit l'équation (1.194) et les relations  $y_2 = y_1 + k_1^2 - k_2^2$ ,  $y_t = y_1 + k_1^2 - k_t^2$  dans l'équation fondamentale des ondes cohérentes. On obtient

$$\begin{aligned} & (y_1^{(1)} + \varepsilon y_1^{(2)} + \dots)(\varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \dots + k_1^2 - k_2^2)(\varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \dots + k_1^2 - k_t^2) - \\ & \quad (\varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \dots)(\varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \dots + k_1^2 - k_2^2)M_{tt} - (\varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \dots) \\ & (\varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \dots + k_1^2 - k_t^2)M_{22} - (\varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \dots + k_1^2 - k_2^2)(\varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \dots + k_1^2 - k_t^2)M_{11} + \\ & \quad \varepsilon \left[ (\varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \dots)(M_{22}M_{tt} - M_{2t}M_{t2}) + (\varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \dots + k_1^2 - k_2^2)(M_{11}M_{tt} - M_{1t}M_{t1}) + \right. \\ & \quad \left. (\varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \dots + k_1^2 - k_t^2)(M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}) \right] + \varepsilon^2 (M_{11}M_{t2}M_{2t} + M_{21}M_{12}M_{tt} + M_{t1}M_{1t}M_{22} - \\ & \quad M_{21}M_{t2}M_{1t} - M_{t1}M_{12}M_{2t} - M_{11}M_{22}M_{tt}) = 0. \quad (1.195) \end{aligned}$$

Le terme  $y_1^{(1)}$  est déterminé en posant  $\varepsilon = 0$  dans l'équation (1.195). Il vient

$$y_1^{(1)} - M_{11} \Big|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (1.196)$$

On déduit que

$$y_1^{(1)} = \vec{e}_1^t \mathbf{T} \vec{e}_1 = f^{11}(0). \quad (1.197)$$

Pour calculer  $y_1^{(2)}$ , on dérive l'équation fondamentale des ondes cohérentes par rapport à  $\varepsilon$  puis on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro. Il vient

$$y_1^{(2)} - \frac{dM_{11}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{M_{1t}M_{t1} \Big|_{\varepsilon=0}}{k_1^2 - k_t^2} - \frac{M_{12}M_{21} \Big|_{\varepsilon=0}}{k_1^2 - k_2^2} = 0. \quad (1.198)$$

D'après l'équation (1.193) on a

$$M_{\alpha\beta} \Big|_{\varepsilon=0} = \vec{e}_\alpha^t \mathbf{T} \vec{e}_\beta,$$

et

$$\frac{dM_{11}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = e_1^t \mathbf{T} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T} \vec{e}_1.$$

L'équation (1.198) devient donc

$$y_1^{(2)} = \vec{e}_1^t \mathbf{T} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T} \vec{e}_1 + \frac{\vec{e}_1^t \mathbf{T} \vec{e}_t \vec{e}_t^t \mathbf{T} \vec{e}_1}{k_1^2 - k_t^2} + \frac{\vec{e}_1^t \mathbf{T} \vec{e}_2 \vec{e}_2^t \mathbf{T} \vec{e}_1}{k_1^2 - k_2^2}, \quad (1.199)$$

où

$$\vec{e}_1^t \mathbf{T} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{T} \vec{e}_1 = \sum_{\alpha=1,2,t} \vec{e}_1^t \mathbf{T}^{\alpha 1} \bar{\mathbf{Q}}^{\alpha 1} \mathbf{T}^{\alpha 1} \vec{e}_1,$$

$$\vec{e}_1^t \mathbf{T} \vec{e}_t \vec{e}_t^t \mathbf{T} \vec{e}_1 = \vec{e}_1^t \mathbf{T}^{t1} \vec{e}_t \vec{e}_t^t \mathbf{T}^{1t} \vec{e}_1,$$

et

$$\vec{e}_1^t \mathbf{T} \vec{e}_2 \vec{e}_2^t \mathbf{T} \vec{e}_1 = \vec{e}_1^t \mathbf{T}^{21} \vec{e}_2 \vec{e}_2^t \mathbf{T}^{12} \vec{e}_1.$$

En introduisant les relations précédentes dans (1.199) pour  $\xi = k_1$ , il vient

$$y_1^{(2)} = \vec{e}^t \mathbf{T}^{11} \bar{\mathbf{Q}}^1(k_1) \mathbf{T}^{11} \vec{e} + \vec{e}^t \mathbf{T}^{21} \left( \bar{\mathbf{Q}}^2(k_1) + \frac{\vec{e} \vec{e}^t}{k_1^2 - k_2^2} \right) \mathbf{T}^{12} \vec{e} + \vec{e}^t \mathbf{T}^{t1} \left( \bar{\mathbf{Q}}^t(k_1) + \frac{\vec{e} \vec{e}^t}{k_1^2 - k_t^2} \right) \mathbf{T}^{1t} \vec{e}. \quad (1.200)$$

On remplace  $\bar{\mathbf{Q}}^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ) par ses composantes  $\bar{Q}_{mn}^\alpha = \frac{i\pi N_{m-n}^\alpha(\xi) - 1}{\xi^2 - k_\alpha^2}$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ) dans l'équation (1.200), on obtient

$$y_1^{(2)} = \vec{e}^t \mathbf{T}^{11} \bar{\mathbf{Q}}^1(k_1) \mathbf{T}^{11} \vec{e} + \frac{i\pi}{2(k_1^2 - k_2^2)} \vec{e}^t \mathbf{T}^{21} \bar{\mathbf{N}}^2(k_1) \mathbf{T}^{12} \vec{e} + \frac{i\pi}{2(k_1^2 - k_t^2)} \vec{e}^t \mathbf{T}^{t1} \bar{\mathbf{N}}^t(k_1) \mathbf{T}^{1t} \vec{e}. \quad (1.201)$$

où  $\bar{\mathbf{N}}^\alpha = (\bar{N}_{mn}^\alpha)$  avec  $\bar{N}_{mn}^\alpha(\xi) = N_{m-n}^\alpha(\xi)$ .

### Développement du nombre d'onde à l'ordre $(n_0^2)$

Les développements de  $N_p^\alpha(\xi)$  pour  $\xi \rightarrow k_\alpha$ , donnent pour tout  $\alpha = 1, 2, t$ :

$$\bar{Q}_{mn}^\alpha(k_\alpha) = \frac{1}{k_\alpha^2} D_{m-n}^{(0)}(k_\alpha), \quad (1.202)$$

où

$$D_p^{(0)}(k) = \frac{-i\pi}{4} \left[ ((kb)^2 - p^2) J_p(kb) H_p^{(1)}(kb) + (kb)^2 J_p'(kb) H_p^{(1)'}(kb) \right]. \quad (1.203)$$

On a  $y_\alpha = \xi^2 - k_\alpha^2$  et  $\varepsilon = -4in_0$ . On remplace  $\varepsilon, y_1^{(1)}$  et  $y_1^{(2)}$  par leurs expressions dans l'équation (1.194). On obtient

$$\xi^2 = k_1^2 + d_1^1 n_0 + d_2^1 n_0^2 + \dots \quad (1.204)$$

où

$$d_1^1 = -4if^{11}(0), \quad (1.205)$$

et

$$d_2^1 = -\frac{16}{k_1^2} \sum_{m,n} D_{m-n}^{(0)}(k_1) T_m^{11} T_n^{11} - \frac{i8\pi}{k_1^2 - k_2^2} \sum_{p,q} N_{p-q}^2(k_1) T_p^{21} T_q^{12} - \frac{i8\pi}{k_1^2 - k_t^2} \sum_{r,s} N_{r-s}^t(k_1) T_r^{t1} T_s^{1t}. \quad (1.206)$$

Dans (1.205) il n'y a pas de conversion 21 ou t1 contrairement à (1.206). Alors que (1.205) ne met en jeu que des coefficients  $T_n^{11}$ , (1.206) fait intervenir des termes  $T_n^{21}, T_n^{t1}$  etc...

### Limite des grandes longueurs d'onde

Pour de grandes longueurs d'ondes c'est-à-dire  $k_1 b, k_2 b$  et  $k_t b$  tendent tous vers zéro, on déduit les approximations suivantes

$$N_p^\alpha(\xi) \cong \frac{2}{i\pi} \left( \frac{\xi}{k_\alpha} \right)^{|p|}, \quad \alpha \in \{1, 2, t\}, \quad (1.207)$$

$$\bar{Q}_{mn}^\alpha \cong \frac{1}{k_\alpha^{|m-n|}} \frac{\xi^{|m-n|} - k_\alpha^{|m-n|}}{\xi^2 - k_\alpha^2}, \quad (1.208)$$

et

$$\bar{Q}_{0mn}^\alpha \cong \lim_{\xi \rightarrow k_\alpha} \bar{Q}_{mn}^\alpha = \frac{1}{2} |m - n|. \quad (1.209)$$

Le nombre d'onde devient alors aux faibles concentrations  $\left| \frac{n_0}{k_\alpha^2} \right| \ll 1$  :

$$\left( \frac{\xi_\alpha}{k_\alpha} \right)^2 = 1 + \frac{n_0}{k_\alpha^2} \delta_1^\alpha + \frac{n_0^2}{k_\alpha^4} \left( \delta_2^{\alpha(0)} + \delta_2^{\alpha(c)} \right) + O\left( \frac{n_0^3}{k_\alpha^6} \right), \quad (1.210)$$

où

$$\delta_1^\alpha = -4i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^{\alpha\alpha}, \quad (1.211)$$

$$\delta_2^{\alpha(0)} = -8 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |m-n| T_m^{\alpha\alpha} T_n^{\alpha\alpha}, \quad \delta_2^{\alpha(c)} = -16 \sum_{\substack{\beta=1,2,t \\ \beta \neq \alpha}} \delta_2^{\alpha\beta}, \quad (1.212)$$

$$\delta_2^{\alpha\beta} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 - \kappa_{\alpha\beta}^{-2}} \left( \kappa_{\alpha\beta} \right)^{|m-n|} T_m^{\beta\alpha} T_n^{\alpha\beta}. \quad (1.213)$$

Ici les termes  $\delta_1^\alpha$  et  $\delta_2^{\alpha(0)}$  mettent en jeu uniquement les coefficients de diffusion  $T_n^{\alpha\alpha}$  (pas de conversion de modes) et sont identiques aux expressions trouvées dans le cas où le milieu hôte est un fluide parfait. Les conversions de modes représentées par les coefficients de diffusion  $T_n^{\alpha\beta}$  intervenant lors de chaque processus de diffusion sont prises en compte dans le terme  $\delta_2^{\alpha(c)}$ . La lettre  $\alpha$  représente l'onde incidente, la lettre  $\beta$  l'onde diffusée, et de plus  $T_n^{\alpha\beta}$  est une fonction paire ou impaire en  $n$ ,  $T_0^{\alpha t} = T_0^{t\alpha} = 0$  si  $\alpha \neq t$ . Dans l'équation (1.213), on a posé  $\kappa_{\alpha\beta} = \frac{k_\alpha}{k_\beta}$ . La validité de l'équation (1.210) a été discutée dans [55].

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a rappelé les notions fondamentales de la diffusion multiple, en particulier les expressions du nombre d'onde effectif établies par Foldy, Lax, Linton-Martin dans le cas où le milieu extérieur est fluide. On a fait un bref aperçu de la théorie des milieux poreux. Sous l'hypothèse de petites perturbations il existe trois ondes qui se propagent dans ces milieux poreux dont deux longitudinales et une transversale. On a aussi rappelé l'équation de la diffusion par un cylindre fluide dans un milieu poreux en utilisant les conditions des pores ouverts et établi la formule du nombre d'onde effectif de Conoir et Norris pour un milieu poreux contenant des cylindres.





# Chapitre 2

## Limites de Rayleigh des nombres d'ondes effectifs pour des cylindres fluides

On considère le problème de la propagation d'ondes élastiques dans un milieu poreux contenant une distribution aléatoire de cavités cylindriques remplies par un fluide identique au fluide saturant de masse volumique  $\rho_0$  et de vitesse de son  $c_0$ . Les pores sont connectés et le rayon du cylindre est supposé bien supérieur à la taille des pores de la matrice. Dans le milieu poroélastique sans diffuseurs, il se propage trois types d'ondes [4] : une onde rapide (1), une onde lente (2) et une onde transversale (t). Elles sont polarisées perpendiculairement aux axes des cylindres. Lors de la traversée d'une cavité de rayon  $a$  par une onde incidente d'un type donné, les conversions de modes aux interfaces fluide-cylindre donnent lieu à des ondes diffusées de type 1, 2 et t. L'onde cohérente, qui résulte d'une moyenne statistique sur toutes les configurations possibles de diffuseurs, fait apparaître le milieu hétérogène comme un milieu homogène possédant une atténuation et une vitesse de phase différentes des ondes 1, 2 et t. La propagation dans le milieu aléatoire est alors gouvernée par des nombres d'ondes effectifs dépendant de la fréquence qui contiennent des informations sur la vitesse de phase, l'atténuation, la masse volumique effective et le module effectif. Le nombre d'onde est un nombre complexe dont la partie réelle contient l'information sur la vitesse de phase et la partie imaginaire celle sur l'atténuation lors de la traversée du milieu. Soit  $k_\alpha$  ( $\alpha \in \{1, 2, t\}$ ) le nombre d'onde dans le milieu poreux élastique et  $k_0$  celui dans la cavité cylindrique. Nous allons déterminer les approximations des coefficients de diffusion dans les limites de Rayleigh et ensuite déduire les propriétés effectives de l'onde cohérente en utilisant la formule du nombre d'onde effectif de Conoir et Norris (1.210).

### 2.1 Approximations des coefficients de diffusion pour les conditions des pores fermés

La limite des basses fréquences ou limite de Rayleigh est le cas limite où  $|x_\alpha| \ll 1$  et  $|x_0| \ll 1$  avec  $x_\alpha = k_\alpha a = \frac{\omega a}{c_\alpha}$ ,  $x_0 = k_0 a = \frac{\omega a}{c_0}$  où  $c_\alpha$  est la vitesse de phase de l'onde  $\alpha$  dans le milieu poreux sans diffuseurs et  $\omega$  la pulsation. Franklin et al [55] en utilisant la condition *des pores ouverts* (chapitre 1) ont obtenu une approximation basses fréquences des coefficients de diffusion (Annexe D). Nous avons considéré les conditions *des pores fermés* en remplaçant dans les conditions des *pores ouverts*, la continuité de la pression (voir équation (1.142)) par la condition

$$w_{inc, r} + w_{diff, r} = 0. \quad (2.1)$$

Cela suppose qu'il n'y a pas échange entre le fluide saturant le milieu poreux et le fluide dans les cylindres. Les conditions de passage à l'interface  $r = a$  ( $a$  rayon du cylindre) sont alors

– la continuité du débit :

$$(u_{inc, r} + w_{inc, r}) + (u_{diff, r} + w_{diff, r}) = u_{0r}, \quad (2.2)$$

– la nullité du mouvement relatif du fluide par rapport au solide :

$$w_{inc, r} + w_{diff, r} = 0, \quad (2.3)$$

– la continuité de la contrainte radiale :

$$\sigma_{inc, rr} + \sigma_{diff, rr} = -p_0, \quad (2.4)$$

– la continuité de la contrainte tangentielle :

$$\sigma_{inc, r\theta} + \sigma_{diff, r\theta} = 0. \quad (2.5)$$

L'équation matricielle pour un mode  $n$  régissant la diffusion par une cavité fluide cylindrique dans un milieu poreux, compte-tenu des conditions de *pores fermés* est :

– pour une onde longitudinale incidente  $inc = 1, 2$  :

$$M'_n \cdot \begin{pmatrix} T_n^{1inc} \\ T_n^{2inc} \\ T_n^{tinc} \\ B_n^{0inc} \end{pmatrix} = S'_n \quad (2.6)$$

où

$$M'_n = \begin{bmatrix} (1 + \gamma_1)x_1 H_n^{(1)'}(x_1) & (1 + \gamma_2)x_2 H_n^{(1)'}(x_2) & -(1 + \gamma_t)H_n^{(1)}(x_t) & -x_0 J_n'(x_0) \\ \gamma_1 x_1 H_n^{(1)'}(x_1) & \gamma_2 x_2 H_n^{(1)'}(x_2) & -n\gamma_t H_n^{(1)}(x_t) & 0 \\ 2x_1 H_n^{(1)'}(x_1) + (\rho_{1t} x_t^2 - 2n^2)H_n^{(1)}(x_1) & 2x_2 H_n^{(1)'}(x_2) + (\rho_{2t} x_t^2 - 2n^2)H_n^{(1)}(x_2) & 2n [x_t H_n^{(1)'}(x_t) - H_n^{(1)}(x_t)] & -\rho_{0t} x_t^2 J_n(x_0) \\ -2nH_n^{(1)}(x_1) + 2nx_1 H_n^{(1)'}(x_1) & -2nH_n^{(1)}(x_2) + 2nx_2 H_n^{(1)'}(x_2) & -\rho_{0t} x_t^2 J_n(x_0) & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$S'_n = \begin{bmatrix} -(1 + \gamma_{inc})x_{inc} J_n'(x_{inc}) \\ -\gamma_{inc} x_{inc} J_n'(x_{inc}) \\ -2x_{inc} J_n'(x_{inc}) - (\rho_{inct} x_t^2 - 2n^2) J_n(x_{inc}) \\ 2n (J_n(x_{inc}) - x_{inc} J_n'(x_{inc})) \end{bmatrix}.$$

– pour une onde transversale incidente  $t$  :

$$M'_n \cdot \begin{pmatrix} T_n^{1t} \\ T_n^{2t} \\ T_n^{tt} \\ B_n^{0t} \end{pmatrix} = R'_n, \quad (2.7)$$

où

$$R'_n = \begin{bmatrix} -(1 + \gamma_t)nJ_n(x_t) \\ -\gamma_t nJ_n(x_t) \\ 2n [J_n(x_t) - x_t J_n'(x_t)] \\ -(x_t^2 - 2n^2)J_n(x_t) - 2x_t J_n'(x_t) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Les expressions des coefficients de diffusion  $T_n^{\alpha\beta}$ , où  $n \in \mathbb{Z}$  dans les limites de Rayleigh dépendent de  $x_\alpha$ . En utilisant les développements en série de Taylor des fonctions de Bessel et de Hankel cylindriques pour  $|x_\alpha| \ll 1$  et en extrayant les termes dominants, on peut écrire les coefficients de diffusion  $T_n^{\alpha\beta}$  pour  $n = 0, 1, 2, 3$  sous la forme :

– Pour l'onde rapide incidente (1)

$$T_0^{11} = i\frac{\pi}{4}x_1^2 [B_0^{11} - 1] + O(x_1^4), \quad B_0^{11} = \frac{1 - \Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_0 c_0^2 + \rho_t c_t^2}, \quad (2.9)$$

$$T_0^{12} = i\frac{\pi}{4}x_1^2 B_0^{12} + O(x_1^4), \quad B_0^{12} = \frac{\Gamma_1 - 1}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_0 c_0^2 + \rho_t c_t^2}, \quad (2.10)$$

$$T_0^{1t} = 0, \quad B_0^{1t} = 0, \quad (2.11)$$

$$T_1^{11} = i\frac{\pi}{4}x_1^2 B_1^{11} + O(x_1^4), \quad B_1^{11} = -\frac{1 - \Gamma_1 - \Gamma_2 \rho_{1t} + \Gamma_t \rho_{1t} + \rho_{2t} - \Gamma_1 \rho_{2t} + \Gamma_2 \rho_{0t} - \Gamma_t \rho_{0t}}{D_1}, \quad (2.12)$$

$$T_1^{12} = i\frac{\pi}{4}x_1 x_2 B_1^{12} + O(x_1^4), \quad B_1^{12} = -\frac{-1 + \Gamma_1 - \rho_{1t} + 2\Gamma_1 \rho_{1t} - \Gamma_t \rho_{1t} - \Gamma_1 \rho_{0t} + \Gamma_t \rho_{0t}}{D_1}, \quad (2.13)$$

$$T_1^{1t} = i\frac{\pi}{4}x_1 x_t B_1^{1t} + O(x_1^4), \quad B_1^{1t} = -\frac{\rho_{1t} - 2\Gamma_1 \rho_{1t} + \Gamma_2 \rho_{1t} - \rho_{2t} + \Gamma_1 \rho_{2t} + \Gamma_1 \rho_{0t} - \Gamma_2 \rho_{0t}}{D_1}, \quad (2.14)$$

$$T_2^{11} = i\frac{\pi}{4}x_1^2 B_2^{11} + O(x_1^4), \quad B_2^{11} = \frac{(\Gamma_t - \Gamma_2)x_1^2}{D_2}, \quad (2.15)$$

$$T_2^{12} = i\frac{\pi}{4}x_1^2 B_2^{12} + O(x_1^4), \quad B_2^{12} = \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_t)x_2^2}{D_2}, \quad (2.16)$$

$$T_2^{1t} = i\frac{\pi}{4}x_1^2 B_2^{1t} + O(x_1^4), \quad B_2^{1t} = \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1)x_t^2}{D_2}, \quad (2.17)$$

$$T_3^{11} = i\frac{\pi}{32}x_1^4 B_3^{11} + O(x_1^6), \quad B_3^{11} = \frac{(\Gamma_t - \Gamma_2)x_1^2}{D_3}, \quad (2.18)$$

$$T_3^{12} = i\frac{\pi}{32}x_1^3 x_2 B_3^{12} + O(x_1^6), \quad B_3^{12} = \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_t)x_2^2}{D_3}, \quad (2.19)$$

$$T_3^{1t} = i\frac{\pi}{32}x_1^3 x_t B_3^{1t} + O(x_1^6), \quad B_3^{1t} = \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1)x_t^2}{D_3}, \quad (2.20)$$

où

$$D_1 = \Gamma_1(1 + \rho_{2t}) - \Gamma_2(1 + \rho_{1t}) + \Gamma_t(\rho_{1t} - \rho_{2t}), \quad (2.21)$$

$$D_2 = (\Gamma_2 + \Gamma_t)\rho_{1t}x_t^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_t)\rho_{2t}x_t^2 + (\Gamma_t - \Gamma_1)x_2^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_t)x_1^2 \quad (2.22)$$

et

$$D_3 = (\Gamma_2 - \Gamma_t)x_1^2 + (\Gamma_t - \Gamma_1)x_2^2. \quad (2.23)$$

– Pour l'onde lente incidente (2)

$$T_0^{21} = i\frac{\pi}{4}x_2^2 B_0^{21} + O(x_2^4), \quad B_0^{21} = \frac{1 - \Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \frac{\rho_2 c_2^2}{\rho_0 c_0^2 + \rho_t c_t^2}, \quad (2.24)$$

$$T_0^{22} = i\frac{\pi}{4}x_2^2 [B_0^{22} - 1] + O(x_2^4), \quad B_0^{22} = \frac{\Gamma_1 - 1}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \frac{\rho_2 c_2^2}{\rho_0 c_0^2 + \rho_t c_t^2}, \quad (2.25)$$

$$T_0^{2t} = 0, \quad B_0^{2t} = 0, \quad (2.26)$$

$$T_1^{21} = i\frac{\pi}{4}x_1 x_2 B_1^{21} + O(x_2^4), \quad B_1^{21} = -\frac{1 - \Gamma_2 + \rho_{2t} - 2\Gamma_2 \rho_{2t} + \Gamma_t \rho_{2t} + \Gamma_2 \rho_{0t} - \Gamma_t \rho_{0t}}{D_1}, \quad (2.27)$$

$$T_1^{22} = i\frac{\pi}{4}x_2^2 B_1^{22} + O(x_2^4), \quad B_1^{22} = -\frac{-1 + \Gamma_2 - \rho_{1t} + \Gamma_2\rho_{1t} + \Gamma_1\rho_{2t} - \Gamma_t\rho_{2t} - \Gamma_1\rho_{0t} + \Gamma_t\rho_{0t}}{D_1}, \quad (2.28)$$

$$T_1^{2t} = i\frac{\pi}{4}x_t x_2 B_1^{2t} + O(x_2^4), \quad B_1^{2t} = -\frac{\rho_{1t} - \Gamma_2\rho_{1t} - \rho_{2t} - \Gamma_1\rho_{2t} + 2\Gamma_2\rho_{2t} + \Gamma_1\rho_{0t} - \Gamma_2\rho_{0t}}{D_1}, \quad (2.29)$$

$$T_2^{21} = i\frac{\pi}{4}x_2^2 B_2^{21} + O(x_2^4), \quad B_2^{21} = -\frac{(\Gamma_2 - \Gamma_t)x_1^2}{D_2}, \quad (2.30)$$

$$T_2^{22} = i\frac{\pi}{4}x_2^2 B_2^{22} + O(x_2^4), \quad B_2^{22} = \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_t)x_2^2}{D_2}, \quad (2.31)$$

$$T_2^{2t} = i\frac{\pi}{4}x_2^2 B_2^{2t} + O(x_2^4), \quad B_2^{2t} = \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1)x_t^2}{D_2}, \quad (2.32)$$

$$T_3^{21} = i\frac{\pi}{32}x_2^3 x_1 B_3^{21} + O(x_2^6), \quad B_3^{21} = \frac{(\Gamma_t - \Gamma_2)x_1^2}{D_3}, \quad (2.33)$$

$$T_3^{22} = i\frac{\pi}{32}x_2^4 B_3^{22} + O(x_2^6), \quad B_3^{22} = \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_t)x_2^2}{D_3}, \quad (2.34)$$

$$T_3^{2t} = i\frac{\pi}{32}x_2^3 x_t B_3^{2t} + O(x_2^6), \quad B_3^{2t} = \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1)x_t^2}{D_3}. \quad (2.35)$$

– Pour l'onde transversale incidente ( $t$ )

$$T_0^{t1} = 0, \quad T_0^{t2} = 0, \quad T_0^{tt} = 0, \quad (2.36)$$

$$T_1^{t1} = i\frac{\pi}{4}x_1 x_t B_1^{t1} + O(x_t^4), \quad B_1^{t1} = -\frac{-1 + \Gamma_2 - \rho_{2t} + \Gamma_t\rho_{2t} - \Gamma_2\rho_{0t} + \Gamma_t\rho_{0t}}{D_1}, \quad (2.37)$$

$$T_1^{t2} = i\frac{\pi}{4}x_t x_2 B_1^{t2} + O(x_t^4), \quad B_1^{t2} = -\frac{1 - \Gamma_1 + \rho_{1t} - \Gamma_t\rho_{1t} + \Gamma_1\rho_{0t} - \Gamma_t\rho_{0t}}{D_1}, \quad (2.38)$$

$$T_1^{tt} = i\frac{\pi}{4}x_t^2 B_1^{tt} + O(x_t^4), \quad B_1^{tt} = -\frac{\Gamma_1 - \Gamma_2 - \rho_{1t} + \Gamma_t\rho_{1t} + \rho_{2t} - \Gamma_t\rho_{2t} - \Gamma_1\rho_{0t} + \Gamma_2\rho_{0t}}{D_1}, \quad (2.39)$$

$$T_2^{t1} = i\frac{\pi}{4}x_t^2 B_2^{t1} + O(x_t^4), \quad B_2^{t1} = \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_t)x_1^2}{D_2}, \quad (2.40)$$

$$T_2^{t2} = i\frac{\pi}{4}x_t^2 B_2^{t2} + O(x_t^4), \quad B_2^{t2} = \frac{(\Gamma_t - \Gamma_1)x_2^2}{D_2}, \quad (2.41)$$

$$T_2^{tt} = i\frac{\pi}{4}x_t^2 B_2^{tt} + O(x_t^4), \quad B_2^{tt} = \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2)x_t^2}{D_2}, \quad (2.42)$$

$$T_3^{t1} = i\frac{\pi}{32}x_t^3 x_1 B_3^{t1} + O(x_t^6), \quad B_3^{t1} = \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_t)x_1^2}{D_3}, \quad (2.43)$$

$$T_3^{t2} = i\frac{\pi}{32}x_t^3 x_2 B_3^{t2} + O(x_t^6), \quad B_3^{t2} = \frac{(\Gamma_t - \Gamma_1)x_2^2}{D_3}, \quad (2.44)$$

$$T_3^{tt} = i\frac{\pi}{32}x_t^4 B_3^{tt} + O(x_t^6), \quad B_3^{tt} = \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2)x_t^2}{D_3}. \quad (2.45)$$

Ci-dessus  $\rho_{0t} = \frac{\rho_0}{\rho_t}$ ,  $\rho_{\alpha t} = \frac{\rho_\alpha}{\rho_t}$  et  $\Gamma_\alpha = 1 + \gamma_\alpha$  ( $\alpha \in \{1, 2, t\}$ ) [36].

Les développements aux basses fréquences des coefficients de diffusion montrent comme l'ont constaté Conoir et *al* [55] pour les conditions des *pores ouverts* que

$$T_n^{\alpha\beta} = \begin{cases} i\frac{\pi}{4}x_\alpha x_\beta B_n^{\alpha\beta} + O(x_\alpha^4) & \text{si } n \in \{0, 1, 2\} \\ O(x_\alpha^4) & \text{si } n > 2. \end{cases} \quad (2.46)$$

Pour illustrer le choix des *pores fermés* à la place des *pores ouverts* on a mené deux études comparatives : l'une basée sur une comparaison numérique et l'autre sur la limite vers le cas du milieu élastique.

### 2.1.1 Comparaison numérique

Nous faisons des applications numériques afin de comparer les coefficients de diffusion exacts et approchés  $T_1^{11}$ ,  $T_1^{12}$ ,  $T_2^{11}$  et  $T_2^{12}$  (figure(2.1), figure(2.2)). Le milieu poreux élastique saturé par un fluide utilisé pour la comparaison numérique est le QF20. C'est un milieu qui obéit à la théorie de Biot et est caractérisé par les propriétés physiques données dans le tableau suivant

Paramètres	Symboles	Valeurs
Module d'incompressibilité des grains	$K_r$	$36,6.10^9 Pa$
Module d'incompressibilité du milieu poreux sec	$K_b$	$9,67.10^9 Pa$
Module de cisaillement du solide élastique	$\mu$	$7,63.10^9 Pa$
Masse volumique du solide élastique	$\rho_s$	$2760 kg.m^{-3}$
Module d'incompressibilité de l'eau	$K_0$	$2,22.10^9 Pa$
Masse volumique de l'eau	$\rho_0$	$1000 kg.m^{-3}$
Viscosité de l'eau	$\eta$	$1,14.10^{-3} kg.m^{-1}.s^{-1}$
Porosité	$\phi$	0,402
Perméabilité	$k$	$1,68.10^{-11} m^2$
Rayon des pores	$a_p$	$3,26.10^{-5} m$
Tortuosité	$\alpha$	1,89

TABLE 2.1 – Paramètres du QF20

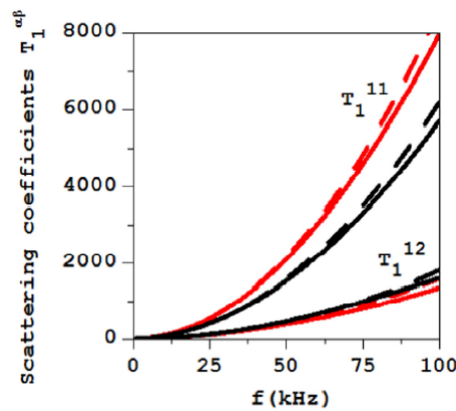


FIGURE 2.1 – Les coefficients de diffusion  $T_n^{\alpha\beta}$  exacts (courbe continue) et approchés (courbe discontinue) pour une cavité cylindrique de rayon  $a = 10^{-3} m$  dans un QF20. Courbes noires pour les pores ouverts et rouges pour les pores fermés.

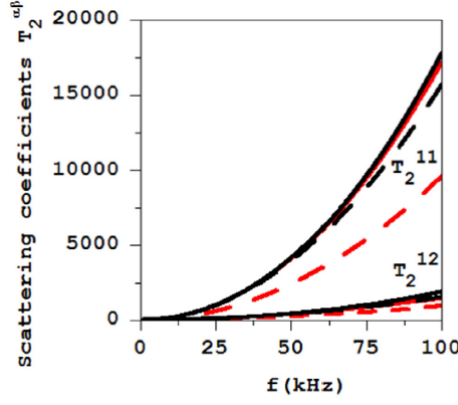


FIGURE 2.2 – Les coefficients de diffusion  $T_n^{\alpha\beta}$  exacts (courbe continue) et approchés (courbe discontinue) pour une cavité cylindrique de rayon  $a = 10^{-3}m$  dans un QF20. Courbes noires pour les pores ouverts et rouges pour les pores fermés.

On observe un bon accord entre les coefficients de diffusion exacts et approximatés  $T_n^{\alpha\beta}$  ( $n = 1, 2$ ) pour les *pores fermés*. Pour les *pores ouverts*, des écarts peuvent exister entre les coefficients exacts et approximatés (figure(2.2)). Par conséquent, les conditions aux limites jouent un rôle important même à basse fréquence.

### 2.1.2 Limites des coefficients de diffusion lorsque la porosité tend vers 0

Afin de valider les approximations des coefficients de diffusion pour les *pores fermés*, nous avons étudié le passage à la limite de ces coefficients vers ceux d'un milieu élastique (porosité nulle). En supprimant la porosité il faut que les coefficients de diffusion tendent vers les coefficients de diffusion du milieu élastique contenant une cavité cylindrique fluide.

#### Milieu élastique

On considère une cavité fluide cylindrique de rayon  $a$  immergé dans un milieu élastique de masse volumique  $\rho_s$  dont les coefficients de Lamé sont  $\lambda_s, \mu_s$ . Le fluide a un module  $K_0 = \rho_0 c_0^2$  où  $\rho_0$  est la masse volumique du fluide dans la cavité et  $c_0$  sa vitesse de phase. Dans le milieu élastique, il existe deux ondes : une onde longitudinale de vitesse de phase  $c_L = \sqrt{\frac{(\lambda_s + 2\mu_s)}{\rho_s}}$  et une onde transversale de vitesse de phase  $c_T = \sqrt{\frac{\mu_s}{\rho_s}}$  ( $c_L$  et  $c_T$  sont des réels strictement positifs). Les expressions exactes des coefficients de diffusion dans un milieu élastique sont fournies par Solomon et al [24] (Annexe F). En basse fréquence, le développement des coefficients  $T_n^{\alpha\beta}$  donne :

– pour l'onde longitudinale incidente ( $L$ )

$$T_0^{LL} = i\frac{\pi}{4}x_L^2[E_0^{LL} - 1] + O(x_L^4), \quad E_0^{LL} = \frac{\rho_s c_L^2}{\rho_s c_T^2 + \rho_0 c_0^2} = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\mu_s + K_0}, \quad (2.47)$$

$$T_0^{LT} = 0, \quad (2.48)$$

$$T_1^{LL} = i\frac{\pi}{4}x_L^2 E_1^{LL} + O(x_L^4), \quad E_1^{LL} = -\frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho_s}, \quad (2.49)$$

$$T_1^{LT} = i\frac{\pi}{4}x_L x_T E_1^{LT} + O(x_L^4), \quad E_1^{LT} = \frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho_s}, \quad (2.50)$$

$$T_2^{LL} = i\frac{\pi}{4}x_L^2 E_2^{LL} + O(x_L^4), \quad E_2^{LL} = \frac{c_T^2}{c_L^2 - c_T^2} = \frac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s}, \quad (2.51)$$

$$T_2^{LT} = i\frac{\pi}{4}x_L x_T E_2^{LT} + O(x_L^4), \quad E_2^{LT} = -\frac{c_L c_T}{c_L^2 - c_T^2} = -\frac{(\lambda_s + 2\mu_s)^{\frac{1}{2}} \mu_s^{\frac{1}{2}}}{\lambda_s + \mu_s}, \quad (2.52)$$

– pour l'onde transversale incidente ( $T$ )

$$T_0^{TL} = T_0^{TT} = 0, \quad (2.53)$$

$$T_1^{TL} = i\frac{\pi}{4}x_T x_L E_1^{TL} + O(x_T^4), \quad E_1^{TL} = \frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho_s}, \quad (2.54)$$

$$T_1^{TT} = i\frac{\pi}{4}x_T^2 E_1^{TT} + O(x_T^4), \quad E_1^{TT} = -\frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho_s}, \quad (2.55)$$

$$T_2^{TL} = i\frac{\pi}{4}x_T x_L E_2^{TL} + O(x_T^4), \quad E_2^{TL} = -\frac{c_L c_T}{c_L^2 - c_T^2} = -\frac{(\lambda_s + 2\mu_s)^{\frac{1}{2}} \mu_s^{\frac{1}{2}}}{\lambda_s + \mu_s}, \quad (2.56)$$

$$T_2^{TT} = i\frac{\pi}{4}x_L^2 E_2^{TT} + O(x_T^4), \quad E_2^{TT} = \frac{c_L^2}{c_L^2 - c_T^2} = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\lambda_s + \mu_s}. \quad (2.57)$$

Lorsque la porosité tend vers 0, on peut montrer que les masses volumiques acoustiques  $\rho_1, \rho_2, \rho_t$  et les coefficients  $\Gamma_\alpha = 1 + \gamma_\alpha, \alpha \in \{1, 2, t\}$  tendent vers les limites suivantes [56] :

$$\Gamma_1 \rightarrow 1, \quad \Gamma_t \rightarrow 1, \quad \Gamma_2 \rightarrow 1 - H/C,$$

$$\rho_1 \rightarrow \rho_s, \quad \rho_t \rightarrow \rho_s, \quad \rho_2 \rightarrow 0,$$

$$c_1 \rightarrow c_L, \quad c_t \rightarrow c_T.$$

A partir de ces limites, on montre que les coefficients de diffusion pour les *pores fermés* convergent vers ceux du milieu élastique c'est-à-dire  $T_n^{11} \rightarrow T_n^{LL}, T_n^{12} \rightarrow 0, T_n^{1t} \rightarrow T_n^{LT}, T_n^{t1} \rightarrow T_n^{TL}, T_n^{t2} \rightarrow 0, T_n^{tt} \rightarrow T_n^{TT}$  pour  $n = 0, 1, 2$ . Par contre les coefficients de diffusion pour les *pores ouverts* ne tendent pas tous vers les coefficients de diffusion du milieu élastique.

## 2.2 Approximation des nombres d'ondes effectifs d'un milieu poreux

D'après l'équation (2.46), on peut remplacer les séries infinies dans les équations (1.117)-(1.213) par des sommes partielles allant de  $n = -2$  à  $n = 2$ , c'est-à-dire

$$\delta_1^\alpha = -4i \left[ T_0^{\alpha\alpha} + 2T_1^{\alpha\alpha} + 2T_2^{\alpha\alpha} \right], \quad (2.58)$$

$$\delta_1^{\alpha(0)} = -32 \left[ T_0^{\alpha\alpha} T_1^{\alpha\alpha} + 2T_0^{\alpha\alpha} T_2^{\alpha\alpha} + 4T_1^{\alpha\alpha} T_2^{\alpha\alpha} + (T_1^{\alpha\alpha})^2 + 2(T_2^{\alpha\alpha})^2 \right], \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \delta_2^{\alpha\beta} = \frac{2}{1 - \kappa_{\alpha\beta}^{-2}} & \left[ \frac{1}{2} T_0^{\beta\alpha} T_0^{\beta\alpha} + (1 + \kappa_{\alpha\beta}^2) T_1^{\beta\alpha} T_1^{\alpha\beta} + (1 + \kappa_{\alpha\beta}^4) T_2^{\beta\alpha} T_2^{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} (T_0^{\beta\alpha} T_1^{\alpha\beta} + T_1^{\beta\alpha} T_0^{\alpha\beta}) \right. \\ & \left. + \kappa_{\alpha\beta}^2 (T_2^{\beta\alpha} T_0^{\alpha\beta} + T_0^{\beta\alpha} T_2^{\alpha\beta}) + (\kappa_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}^3) (T_2^{\beta\alpha} T_1^{\alpha\beta} + T_1^{\beta\alpha} T_2^{\alpha\beta}) \right], \quad \alpha, \beta = 1, 2 (\alpha \neq \beta), \quad (2.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2^{\alpha t} = \frac{2}{1 - \kappa_{\alpha t}^{-2}} & \left[ \frac{1}{2} T_0^{t\alpha} T_0^{\alpha t} + (1 - \kappa_{\alpha t}^2) T_1^{t\alpha} T_1^{\alpha t} + (1 - \kappa_{\alpha t}^4) T_2^{t\alpha} T_2^{\alpha t} + (\kappa_{\alpha t} - \kappa_{\alpha t}^3) (T_2^{t\alpha} T_1^{\alpha t} + T_1^{t\alpha} T_2^{\alpha t}) \right], \\ & \alpha = 1, 2, \quad (2.61) \end{aligned}$$

$$\delta_2^{t\alpha} = \frac{2}{1 - \kappa_{t\alpha}^{-2}} \left[ \frac{1}{2} T_0^{t\alpha} T_0^{\alpha t} + (1 - \kappa_{t\alpha}^2) T_1^{t\alpha} T_1^{\alpha t} + (1 - \kappa_{t\alpha}^4) T_2^{t\alpha} T_2^{\alpha t} + (\kappa_{t\alpha}^2 - \kappa_{t\alpha}^3) (T_2^{t\alpha} T_1^{\alpha t} + T_1^{t\alpha} T_2^{\alpha t}) \right],$$

$$\alpha = 1, 2. \quad (2.62)$$

$\delta_1^\alpha$  est  $O(k_\alpha^2 a^2)$ ,  $\delta_2^{\alpha(0)}$  et  $\delta_2^{\alpha(c)}$  sont  $O(k_\alpha^4 a^4)$ .  $\delta_1^\alpha \frac{n_0}{k_\alpha^2}$  est  $O(c)$ ,  $\delta_2^{\alpha(0)} \frac{n_0}{k_\alpha^4}$  et  $\delta_2^{\alpha(c)} \frac{n_0}{k_\alpha^4}$  sont  $O(c^2)$  où  $c = n_0 \pi a^2$  est la concentration. Il est montré dans [55] la conservation de  $\delta_2^{\alpha(c)}$ .

### 2.2.1 Nombre d'onde effectif de l'onde cohérente rapide 1

En remplaçant les coefficients de diffusion approchés dans (1.210), on obtient après développement

$$\left( \frac{\xi_{1,eff}}{k_1} \right)^2 = 1 + c \left[ B_0^{11} - 1 + 2B_1^{11} + 2B_2^{11} \right] + 2c^2 \left[ (B_1^{11})^2 + 4B_1^{11} B_2^{11} + 2(B_2^{11})^2 \right. \\ \left. + (B_0^{11} - 1) B_1^{11} + 2(B_0^{11} - 1) B_2^{11} + \frac{r_t^1}{(\kappa_{1t}^2 - 1)} + \frac{r_2^1}{(\kappa_{12}^2 - 1)} \right] + O(c^3), \quad (2.63)$$

où

$$r_2^1 = \frac{1}{2} B_0^{12} B_0^{21} + (1 + \kappa_{12}^2) B_1^{21} B_1^{12} + (1 + \kappa_{12}^4) B_2^{21} B_2^{12} + (B_0^{21} B_1^{12} + \kappa_{12}^2 B_1^{21} B_0^{12}) \\ + \kappa_{12}^2 (B_0^{21} B_2^{12} + B_2^{21} B_0^{12}) + (1 + \kappa_{12}^2) (\kappa_{12}^2 B_1^{21} B_2^{12} + B_2^{21} B_1^{12}), \quad (2.64)$$

$$r_t^1 = (1 - \kappa_{1t}^2) \left[ B_1^{t1} B_1^{1t} + (1 + \kappa_{1t}^2) B_2^{t1} B_2^{1t} + (\kappa_{1t}^2 B_1^{t1} B_2^{1t} + B_2^{t1} B_1^{1t}) \right]. \quad (2.65)$$

L'équation (2.63) représente le nombre d'onde effectif de l'onde rapide 1. On peut encore écrire (2.63) sous la forme

$$\left( \frac{\xi_{1,eff}}{k_1} \right)^2 = (1 + cp + c^2q)(1 + cl + c^2h) + O(c^3), \quad (2.66)$$

où

$$p = 2B_1^{11} \quad q = 2 \left( (B_1^{11})^2 - B_1^{t1} B_1^{1t} \right), \quad (2.67)$$

$$l = B_0^{11} - 1 + 2B_2^{11}, \quad (2.68)$$

et

$$h = 2 \left[ 2(B_0^{11} - 1) B_2^{11} + 2(B_2^{11})^2 + 2B_1^{11} B_2^{11} - (1 + \kappa_{1t}^2) B_2^{t1} B_2^{1t} - (\kappa_{1t}^2 B_1^{t1} B_2^{1t} + B_2^{t1} B_1^{1t}) + \frac{r_2^1}{(\kappa_{12}^2 - 1)} \right]. \quad (2.69)$$

Dans l'équation (2.66),  $p$  et  $q$  dépendent uniquement du rapport des masses volumiques,  $l$  dépend du rapport des modules de rigidité et de cisaillement. Le coefficient  $h$  dépend du rapport des masses volumiques et des modules.

Le nombre d'onde effectif de l'onde cohérente lente 2 est obtenu de la même manière en échangeant la place de 1 et 2.

### 2.2.2 Nombre d'onde effectif de l'onde cohérente transversale $t$

En utilisant une procédure analogue à celle décrite précédemment, on obtient une écriture du nombre d'onde effectif de l'onde cohérente  $t$  sous la forme

$$\left( \frac{\xi_{t,eff}}{k_t} \right)^2 = (1 + c\bar{p} + c^2\bar{q})(1 + c\bar{l} + c^2\bar{h}) + O(c^3), \quad (2.70)$$



où

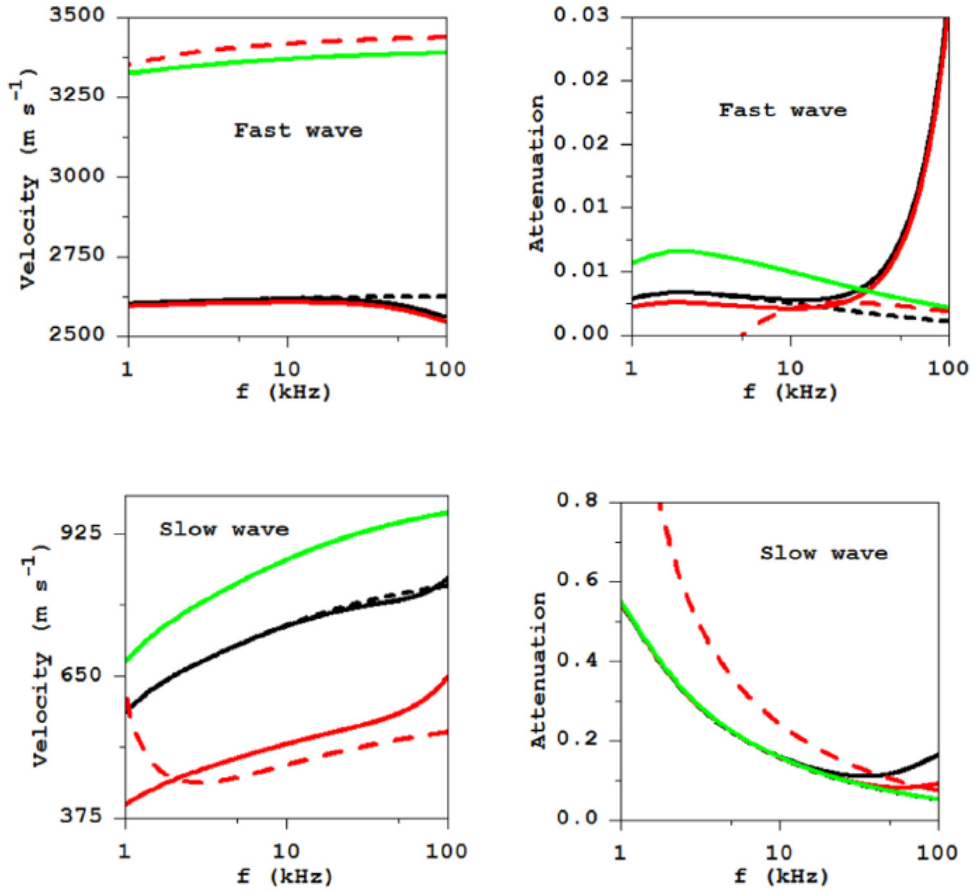
$$\bar{p} = 2B_1^{tt}, \quad \bar{q} = 2\left((B_1^{tt})^2 - B_1^{t1}B_1^{1t} - B_1^{t2}B_1^{2t}\right), \quad (2.71)$$

$$\bar{l} = 2B_2^{tt}, \quad \bar{h} = 2\left(2(B_2^{tt})^2 + 2B_1^{tt}B_2^{tt} - r_1^t - r_2^t\right), \quad (2.72)$$

$$r_\alpha^t = \kappa_{t\alpha}^2 B_1^{t\alpha} B_2^{\alpha t} + B_2^{t\alpha} B_1^{\alpha t} + (1 + \kappa_{t\alpha}^2) B_2^{t\alpha} B_2^{\alpha t}, \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.73)$$

$\bar{p}$  et  $\bar{q}$  contiennent uniquement des rapports de masses volumiques,  $\bar{l}$  dépend uniquement des modules. Le coefficient  $\bar{h}$  dépend de rapport de masses volumiques et de modules.

Les calculs numériques relatifs aux vitesses de phases  $c_{\alpha,eff} = Re\left(\frac{\omega}{\xi_{\alpha,eff}}\right)$  et aux atténuations  $A_{\alpha,eff} = \frac{Im(\xi_{\alpha,eff})}{Re(\xi_{\alpha,eff})}$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ) effectives déduites des nombres d'onde effectifs  $\left(\frac{\xi_{\alpha,eff}}{k_\alpha}\right)^2$  sont présentés sur la figure (2.3) dans le cas des pores fermés (en noir) et ouverts (en rouge). Les courbes exactes sont représentées par des traits continus et les approchées par des traits discontinus.



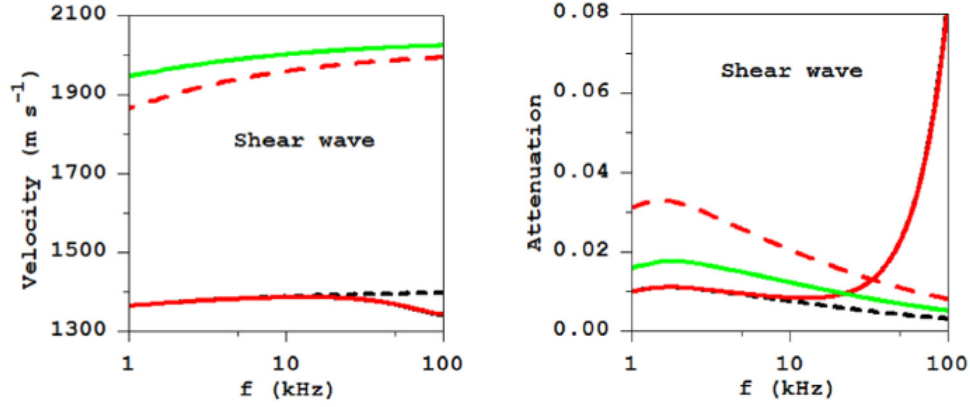


FIGURE 2.3 – Vitesses des ondes cohérentes à gauche et atténuations à droite. La matrice poreuse élastique est le QF20 saturé par un fluide. Rayon des diffuseurs est  $a = 10^{-3}m$  et la concentration est 10%. La courbe verte correspond à une matrice poroélastique sans diffuseurs.

On remarque que les approximations donnent de bons résultats pour les conditions de *pores fermés* (courbes en noires). Mais pour les conditions de *pores ouverts*, on observe un grand écart entre les quantités approchées et celles qui sont exactes (courbes en rouges). On observe un écart entre les vitesses des *pores fermés* et des *pores ouverts* lorsqu'on considère l'onde lente. Ainsi les conditions à l'interface influencent la vitesse de l'onde lente. L'atténuation de l'onde lente en présence des diffuseurs est pratiquement la même lorsque le milieu est sans diffuseurs (courbe en vert). Les vitesses des ondes rapide et transversale diminuent lorsque l'on introduit des cavités dans le milieu poreux. Leurs atténuations ont un comportement différent de celui du milieu poreux sans diffuseurs.

## 2.3 Modules et masses volumiques effectifs

Soit  $k_\alpha^2 = \omega^2/c_\alpha^2$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ) les nombres d'ondes des ondes longitudinales et transversale dans le milieu poreux sans diffuseurs. On sait que pour le fluide saturant le milieu poreux, le module d'incompressibilité est défini par  $K_0 = \rho_0 c_0^2$  [56], [48]. On définit aussi les modules d'élasticité à la compression isostatique  $M_1, M_2$  et le module de cisaillement  $M_t$  sous la forme  $c_\alpha^2 = M_\alpha/\rho_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ). On peut écrire alors  $k_\alpha$  sous la forme

$$k_\alpha^2 = \omega^2 \frac{\rho_\alpha}{M_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, t. \quad (2.74)$$

En basse fréquence, les nombres d'ondes  $k_\alpha$  ont pour expressions [20]

$$k_1^2 \cong \frac{\omega^2 \rho}{H}, \quad (2.75)$$

$$k_2^2 \cong \frac{i\omega\omega_c\rho_0 H}{(HM - C^2)}, \quad (2.76)$$

$$k_t^2 \cong \frac{\omega^2 \rho}{\mu}, \quad (2.77)$$

$$\kappa_{12}^2 = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \cong -i \frac{\omega}{\omega_c} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{HM - C^2}{H^2}, \quad (2.78)$$

$$\kappa_{1t}^2 = \left(\frac{k_1}{k_t}\right)^2 \cong \frac{\mu}{H}, \quad (2.79)$$

$$\kappa_{2t}^2 = \left( \frac{k_2}{k_t} \right)^2 \cong i \frac{\omega_c \rho_0}{\omega \rho} \frac{\mu H}{HM - C^2} \quad (2.80)$$

où  $\omega_c = \frac{\eta}{\rho_0 \kappa}$  est la fréquence caractéristique dépendant de la viscosité dynamique  $\eta$  du fluide et de la perméabilité  $\kappa$  ( $\omega \ll \omega_c$ ). A partir de ces approximations, on obtient les approximations

$$M_1 \cong H, \quad (2.81)$$

$$M_2 \cong -\frac{i\omega (\rho - H\rho_0/C)(HM - C^2)}{\omega_c H\rho_0}, \quad (2.82)$$

et

$$M_t \cong \mu. \quad (2.83)$$

On remarque que  $M_1$  et  $M_t$  ne dépendent pas de la fréquence. Par analogie avec l'équation (2.74), on écrit les nombres d'ondes des ondes cohérentes sous la forme  $\xi_{\alpha,eff}^2 = \omega^2 \rho_{\alpha,eff} / M_{\alpha,eff}$   $\alpha = 1, 2, t$  où  $\rho_{\alpha,eff}$  est la masse volumique effective et  $M_{\alpha,eff}$  le module d'élasticité à la compression isostatique effectif.

A partir des définitions données ci-dessus, on peut écrire une relation entre  $k_\alpha$  et  $\xi_{\alpha,eff}$  sous la forme

$$\left( \frac{\xi_{\alpha,eff}}{k_\alpha} \right)^2 = \frac{\rho_{\alpha,eff}}{\rho_\alpha} \times \frac{M_\alpha}{M_{\alpha,eff}}. \quad (2.84)$$

Cette équation a permis de séparer les masses volumiques et les modules. L'objectif est de comparer cette équation avec les expressions factorisées (2.66) et (2.70) en vue de déterminer les modules effectifs et masses volumiques effectives des ondes cohérentes. Donc il faut que dans les équations (2.66) et (2.70) on sépare aussi les masses volumiques et les modules. Dans ces expressions le premier facteur  $(1 + cp + c^2q)$  ou  $(1 + c\bar{p} + c^2\bar{q})$  dépend uniquement du rapport des masses volumiques alors que le deuxième facteur  $(1 + cl + c^2h)$  ou  $(1 + c\bar{l} + c^2\bar{h})$  ne dépend pas uniquement des modules. Cette anomalie vient du coefficient  $h$  ou  $\bar{h}$  de  $c^2$ . Il faut noter que la contribution de  $h$  ( $\bar{h}$ ) est négligeable devant  $l$  ( $\bar{l}$ ) et que le deuxième facteur est le facteur qui fait apparaître les modules du milieu poreux élastique. Donc en comparant les équations (2.66) et (2.84) pour  $\alpha = 1$  d'une part et les équations (2.70), (2.84) pour  $\alpha = t$  d'autre part, on déduit les expressions des modules effectifs

$$\frac{1}{M_{1,eff}} = \frac{1-c}{H} + \frac{c}{H/(B_0^{11} + 2B_2^{11})} + \frac{c^2 h}{H}, \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{M_{2,eff}} = \frac{1-c}{M_2} + \frac{c}{M_2/(B_0^{22} + 2B_2^{22})} + \frac{c^2 h'}{M_2}, \quad (2.86)$$

et

$$\frac{1}{M_{t,eff}} = \frac{1-c}{\mu} + \frac{c}{\mu/(1 + 2B_2^{tt})} + \frac{c^2 \bar{h}}{\mu}, \quad (2.87)$$

où  $h'$  est le coefficient déduit de  $h$  lorsque l'onde lente 2 est incidente. Les masses volumiques effectives sont données par

$$\frac{\rho_{1,eff}}{\rho_1} = 1 + 2c(B_1^{11}) + 2c^2 \left[ (B_1^{11})^2 - B_1^{t1} B_1^{1t} \right], \quad (2.88)$$

$$\frac{\rho_{2,eff}}{\rho_2} = 1 + 2c(B_1^{22}) + 2c^2 \left[ (B_1^{22})^2 - B_1^{t2} B_1^{2t} \right], \quad (2.89)$$

et

$$\frac{\rho_{t,eff}}{\rho_t} = 1 + 2c(B_1^{tt}) + 2c^2 \left[ (B_1^{tt})^2 - B_1^{t1} B_1^{1t} - B_1^{t2} B_1^{2t} \right]. \quad (2.90)$$

Ces expressions sont à valeurs complexes et dépendent de la fréquence. Pour différentes concentrations on montre sur les figures ci-dessous l'évolution de  $\rho_{1,eff}/\rho$  et  $\rho_{t,eff}/\rho$  en fonction de la fréquence.

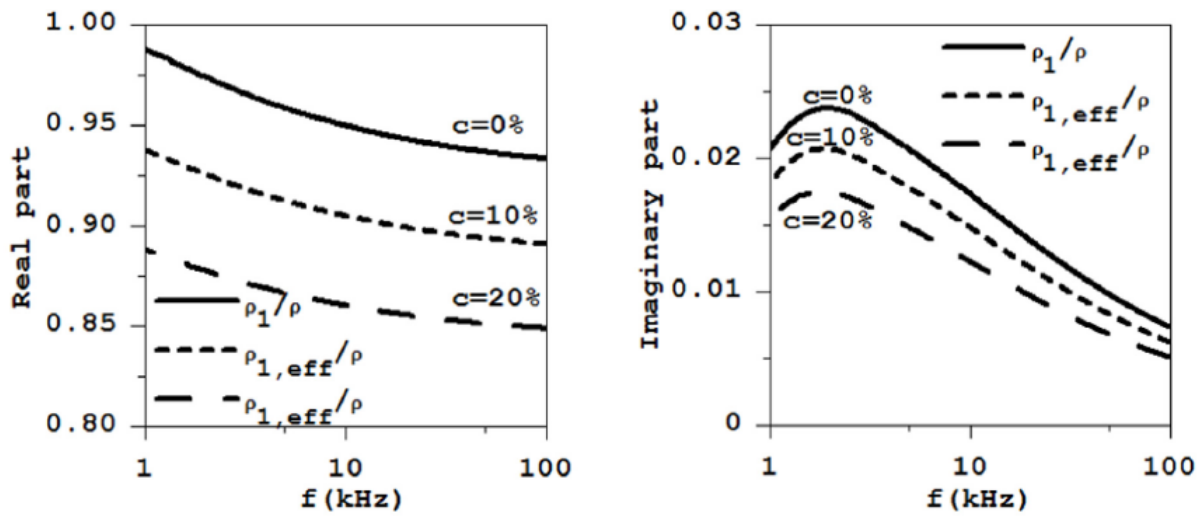


FIGURE 2.4 – Evolution de la masse volumique effective de l'onde cohérente rapide en fonction de la fréquence

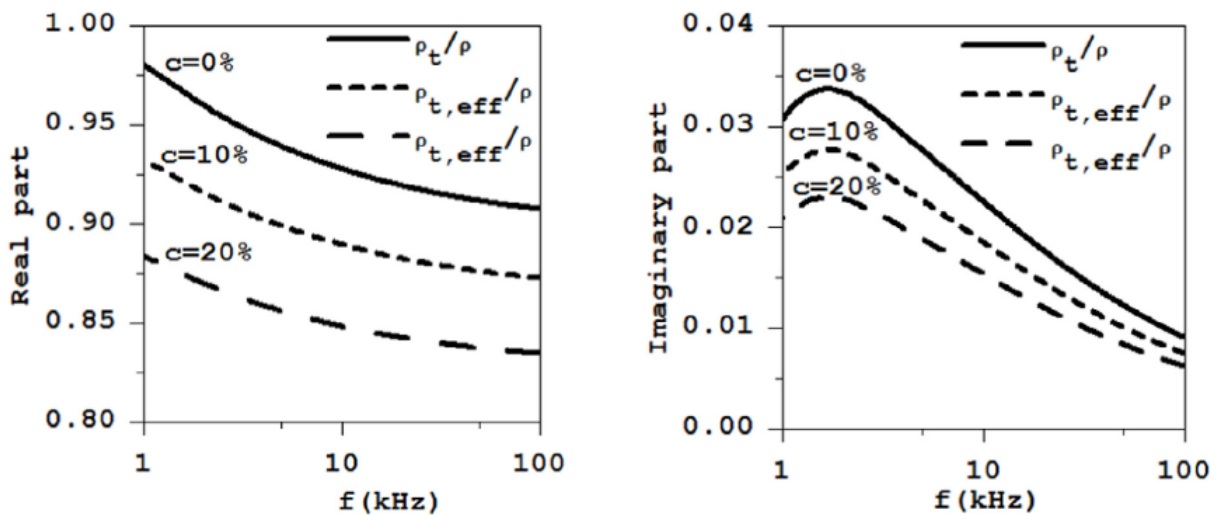


FIGURE 2.5 – Evolution de la masse volumique effective de l'onde cohérente transversale en fonction de la fréquence

On sait que  $\rho_2 = (H + \gamma_2 C) \frac{k_2^2}{\omega^2} = i(H + \gamma_2 C) \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\rho_0 H}{HM - C^2}$ ;  $\rho_1 = (H + \gamma_1 C) \frac{\rho}{H}$  et  $\rho_t = \mu \frac{k_t^2}{\omega^2} = \rho$  (confère chapitre 1). En basse fréquence on obtient  $\rho_1 \cong \rho$ ,  $\rho_t \cong \rho$ ,  $\rho_2 \cong 0$  ( $\gamma_1 \cong 0$ ,  $\gamma_t \cong 0$ ,  $\gamma_2 \cong -\frac{H}{C}$ ). En utilisant les équations (2.75) à (2.77) et en tenant compte de la limite basse fréquence des masses volumiques, on obtient les approximations des coefficients  $B_n^{\alpha\beta}$  suivantes :

$$\begin{aligned} B_0^{11} &\rightarrow \frac{H}{K_0 + \mu}, & B_0^{12} &\rightarrow 0, \\ B_1^{11} &\rightarrow \frac{\rho_0 - \rho}{2\rho}, & B_1^{1t} &\rightarrow \frac{\rho_0 - \rho}{2\rho}, & B_1^{12} &\rightarrow 0, \\ B_2^{11} &\rightarrow \frac{\mu}{H - \mu}, & B_2^{1t} &\rightarrow \frac{H}{H - \mu}, & B_2^{12} &\rightarrow 0, \\ B_1^{1t} &\rightarrow \frac{\rho - \rho_0}{2\rho}, & B_1^{t1} &\rightarrow \frac{\rho - \rho_0}{2\rho}, & B_1^{t2} &\rightarrow 0, \\ B_2^{1t} &\rightarrow \frac{H}{\mu - H}, & B_2^{t1} &\rightarrow \frac{\mu}{\mu - H}, & B_2^{t2} &\rightarrow 0, \\ B_0^{22} &\rightarrow 0, & B_2^{22} &\rightarrow 0, & B_0^{t2} &\rightarrow 0, & B_1^{22} &\rightarrow -1. \end{aligned}$$

D'après l'équation (1.119), on a  $\rho_2 = (H + \gamma_2 C) \frac{k_2^2}{\omega^2}$ . Donc on peut écrire encore l'équation (2.82) en basse fréquence sous la forme

$$M_2 = H + \gamma_2 C \cong 0, \quad \left( \gamma_2 \cong -\frac{H}{C} \right). \quad (2.91)$$

En utilisant les limites basses fréquences des coefficients  $B_n^{\alpha\beta}$  et les équations (2.78), (2.79), (2.80) et (2.91), les modules effectifs et masses volumiques effectives deviennent

$$\frac{1}{M_{1,eff}} \cong \frac{1-c}{H} + \frac{c}{H} \left[ \frac{H}{K_0 + \mu} + \frac{2\mu}{H - \mu} \right] + \frac{2c^2}{H} \frac{\mu}{H - \mu} \left( \frac{2H}{K_0 + \mu} - 3 \right), \quad (2.92)$$

$$M_{2,eff} \cong 0, \quad (2.93)$$

$$\frac{1}{M_{t,eff}} \cong \frac{1-c}{\mu} + \frac{c}{\mu} \frac{3H - \mu}{H - \mu} + \frac{2c^2}{\mu} \frac{H}{H - \mu}, \quad (2.94)$$

$$\frac{\rho_{1,eff}}{\rho_1} \cong 1 + 2c(\delta\rho), \quad (2.95)$$

$$\frac{\rho_{t,eff}}{\rho_t} = \frac{\rho_{1,eff}}{\rho_1}, \quad (2.96)$$

et

$$\rho_{2,eff} \cong 0 \quad (2.97)$$

où  $\delta\rho = (\rho_0 - \rho)/2\rho$ ,  $H = \frac{(K_r - K_b)^2}{K_r \left[ 1 + \phi \left( \frac{K_r}{K_f} - 1 \right) \right] - K_b} + K_b + \frac{4}{3}\mu$  et  $\mu$  dépendent de la porosité  $\phi$ . Les équations (2.92), (2.94), (2.95) et (2.96) sont à valeurs réelles, ce qui implique qu'aucune dissipation ne se produit dans le milieu.

### Comparaison avec un milieu élastique (porosité tendant vers 0)

Dans cette section, on cherche à retrouver les résultats des modules effectifs et masses volumiques effectives dans un milieu élastique. Pour cela il suffit de faire tendre la porosité vers 0 dans les équations (2.92), (2.94), (2.95) et (2.96).

Soit  $K_s = \lambda_s + 2\mu_s/3$  le module d'élasticité à la compression isostatique du milieu élastique, lorsque la porosité tend vers 0, on a  $\mu \rightarrow \mu_s$ ,  $\rho \rightarrow \rho_s$  et  $H \rightarrow K_r = K_s + 4\mu_s/3$ . On déduit alors les propriétés effectives pour un milieu élastique :

$$\frac{1}{M_{1,eff}} \rightarrow \frac{1}{M_{L,eff}} = \frac{1-c}{K_s + 4\mu_s/3} + \frac{c}{K_s + 4\mu_s/3} \left[ \frac{K_s + 4\mu_s/3}{K_0 + \mu_s} + \frac{2\mu_s}{K_s + \mu_s/3} \right] + \frac{2c^2}{K_s + 4\mu_s/3} \frac{\mu_s}{K_s + \mu_s/3} \left[ \frac{2(K_s + 4\mu_s/3)}{K_0 + \mu_s} - 3 \right], \quad (2.98)$$

$$\frac{1}{M_{t,eff}} \rightarrow \frac{1}{M_{T,eff}} = \frac{1-c}{\mu_s} + \frac{3c}{\mu_s} \frac{K_s + \mu_s}{K_s + \mu_s/3} + \frac{2c^2}{\mu_s} \frac{K_s + 4\mu_s/3}{K_s + \mu_s/3}, \quad (2.99)$$

$$\frac{\rho_{1,eff}}{\rho_1} \rightarrow \frac{\rho_{L,eff}}{\rho_s} = 1 + 2c\delta\rho_s, \quad (2.100)$$

et

$$\frac{\rho_{t,eff}}{\rho_t} \rightarrow \frac{\rho_{T,eff}}{\rho_s} = \frac{\rho_{L,eff}}{\rho_s}, \quad (2.101)$$

où  $\delta\rho_s = (\rho_0 - \rho_s)/2\rho_s$ . Les équations (2.100) et (2.101) sont en accord avec les résultats trouvés par Varadan [25] pour les masses volumiques effectives. Si on néglige le terme d'ordre 2 en concentration ( $c \ll 1$ ) dans les équations (2.98) et (2.99), on déduit les modules effectifs suivants :

$$\frac{M_{T,eff}}{\mu_s} = 1 - c \left( \frac{2K_s + 8\mu_s/3}{K_s + \mu_s/3} \right) + O(c^2), \quad (2.102)$$

$$\frac{M_{L,eff}}{K_s + 4\mu_s/3} = 1 - c \left[ \frac{K_s + \mu_s/3 - K_0}{K_0 + \mu_s} + \frac{2\mu_s}{K_s + \mu_s/3} \right] + O(c^2). \quad (2.103)$$

L'équation (2.102) peut être déduite de celle de Christensen [19] ou Varadan [25] en supprimant l'élasticité des cavités cylindriques. En négligeant le terme  $k_L a$  dans l'expression du nombre d'onde effectif trouvé par Varadan [25] ( $L = p$ ), on a l'équation (2.103).

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a calculé les coefficients de diffusion d'une cavité cylindrique dans un milieu poreux saturé d'extension infinie pour les *pores fermés*. On a ensuite utilisé les formules des nombres d'ondes effectifs dans un milieu poreux saturé par un fluide avec des inclusions de formes cylindriques fluides, pour déduire les modules effectifs et les masses volumiques effectives pour les trois types d'ondes cohérentes dans les limites de Rayleigh. On a également obtenu les modules effectifs et les masses volumiques effectives dans le cas d'un milieu élastique en calculant la limite basse fréquence puis en faisant tendre la porosité vers zéro dans les modules effectifs et des masses volumiques effectives du milieu poreux. Lorsque la fréquence croît, la longueur d'onde de l'onde incidente devient comparable à la taille des cavités cylindriques et le phénomène de diffusion multiple devient fort. Les résultats trouvés ne sont plus applicables. Une partie des travaux a été présentée au Congrès Français de Mécanique à Lille en 2017 [58]. Les résultats de ce chapitre ont été publiés en 2018 dans la revue internationale de rang A Wave Motion [59].

# Chapitre 3

## Diffusion multiple en présence d'une dispersion en taille de rayons

### 3.1 Introduction

On considère la diffusion d'une onde incidente longitudinale par une suspension de diffuseurs sphériques poroélastiques aléatoirement répartis avec un nombre donné par unité de volume  $n_0$ . On s'intéresse à la limite basse fréquence du nombre d'onde de l'onde cohérente se propageant dans le milieu. On examinera plus particulièrement le modèle de nombre d'onde proposé par Linton-Martin (LM) [45] qui constitue une sophistication des modèles plus anciens de Foldy [1] et de Waterman et Truell [6] dans le cas de la distribution en taille des diffuseurs. En étendant ce modèle par la prise en compte de la polydispersité en taille, on déduit le module effectif et la masse volumique effective de la suspension polydispersée. La définition de la polydispersité utilisée est celle de Mascaro et al [54] tenant compte de l'écart type et du rayon moyen des diffuseurs. Le cas de la monodispersité où tous les diffuseurs ont le même rayon est obtenu comme cas particulier de la polydispersité. Le phénomène de la polydispersité est observé dans l'étude des colloïdes (Russell et al [30] en 1989, R. E. Challis et al [42] en 2005), dans le transport de particules (Scheidegger [15] en 1974), dans la distribution des bulles d'air dans un fluide ([Gaunard et al [22] en 1981, Leroy et al [50] en 2005, Mascaro et al [54] en 2013)... Une compréhension des effets qu'entraînent la distribution en taille des diffuseurs sur les propriétés effectives acoustiques des dispersions peut se révéler d'un grand intérêt. Par ailleurs, en considérant des diffuseurs sphériques poreux, on étend des résultats antérieurs établis pour les sphères élastiques ou fluides. On commence par l'étude de la diffusion par une sphère poreuse dans un milieu fluide infini.

### 3.2 Diffusion par une sphère poreuse dans un milieu fluide

On considère une sphère poroélastique placée dans un milieu fluide d'extension infinie dans l'espace physique rapporté au repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On suppose que la direction de propagation de l'onde incidente est celui de l'axe  $(O, \vec{e}_z)$ . On se place en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  et on utilise les résultats établis aux chapitres précédents. On désigne par  $\omega$  la vitesse angulaire et  $k_{inc} = k_0 = \frac{\omega}{c_0}$  ( $c_0$  la vitesse du son) le nombre d'onde de l'onde incidente longitudinale en l'absence de diffuseur. Lors de sa pénétration dans le diffuseur cette onde incidente se convertit en trois ondes : deux ondes longitudinales de nombres d'ondes respectifs  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$  (rapide) et  $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$  (lente) et une onde transversale de nombre d'onde  $k_t = \frac{\omega}{c_t}$ . Ces nombres d'ondes étant tous complexes, les ondes s'atténuent au cours de leur propagation dans l'espace poreux. On suppose qu'il n'y a pas de dépendance en  $\phi$ . Les potentiels scalaires ou vectoriels dépendent des variables spatiales  $r, \theta$  et du temps.

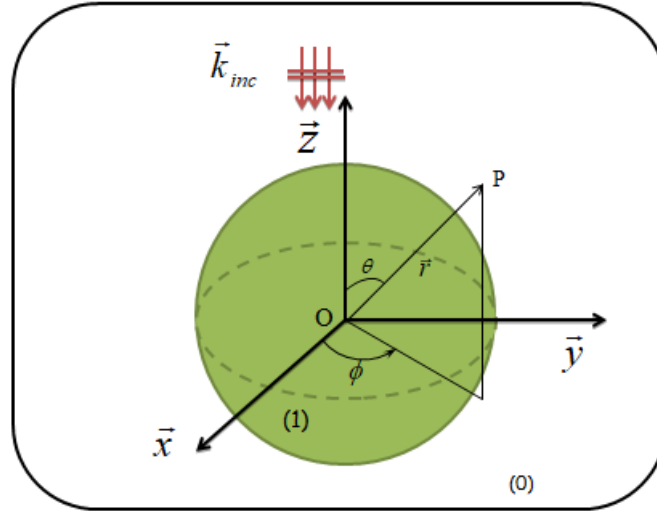


FIGURE 3.1 – Géométrie d'un diffuseur sphérique poreux dans un milieu fluide

La zone (1) est un milieu poroélastique et la zone (0) est le milieu extérieur rempli de fluide. Les pores de la zone (1) et le milieu extérieur fluide (0) sont remplis par un fluide de masse volumique  $\rho_0$ .

## Equations de la diffusion par une sphère poroélastique

### Déplacement et pression dans le milieu (0)

Le vecteur déplacement de l'onde incidente dans le milieu fluide s'écrit sous la forme

$$\vec{u}_0 = -\vec{\nabla}\phi_0 \quad (3.1)$$

$\phi_0$  étant le potentiel de déplacement des particules tel que  $\phi_0(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}} = e^{-ik_0z}$  et  $\vec{r} = (x, y, z)$  dans le repère cartésien. Ce potentiel  $\phi_0$  vérifie l'équation de Helmholtz

$$\Delta\phi_0 + k_0^2\phi_0 = 0. \quad (3.2)$$

En coordonnées sphériques on a (l'exposant  $T$  signifie *transposé*)

$$\vec{u}_0 = \left( -\frac{\partial\phi_0}{\partial r}, -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_0}{\partial\theta}, 0 \right)^T = (u_{0r}, u_{0\theta}, 0)^T. \quad (3.3)$$

On peut encore écrire le champ scalaire  $\phi_0$  sous la forme [44]

$$\phi_0(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2n+1) j_n(k_0r) P_n(\cos\theta) \quad (3.4)$$

où  $j_n$  est la fonction de Bessel sphérique (Annexe B) et  $P_n$  le polynôme de Legendre d'ordre  $n$  (Annexe C).

Le champ diffusé  $\phi_{0d}$  par la sphère poreuse dans le milieu fluide s'écrit sous la forme

$$\phi_{0d}(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2n+1) T_n h_n(k_0r) P_n(\cos\theta) \quad (3.5)$$

où  $T_n$  est le coefficient de diffusion et  $h_n$  la fonction de Hankel sphérique de première espèce (Annexe B). La pression totale  $p_0$  dans le milieu fluide s'exprime :

$$p_0 = -\rho_0\omega^2(\phi_0 + \phi_{0d}). \quad (3.6)$$

Elle est obtenue en utilisant l'équation d'Euler, comme dans le cas cylindrique (cf. Chapitre 1).



### Déplacements, contraintes, pression et potentiels dans le milieu (1)

D'après la théorie de Biot des milieux poreux, il existe trois potentiels dont deux scalaires :  $\phi_1$  pour l'onde rapide 1,  $\phi_2$  pour l'onde lente 2 et un potentiel vecteur  $\vec{\psi}_t = \vec{\nabla} \wedge (r\psi_t\vec{e}_r)$  pour l'onde transversale  $t$ .  $\vec{e}_r$  étant le vecteur unitaire porté par la droite (OP). On suppose que ces trois potentiels vérifient chacun l'équation de Helmholtz :

$$\Delta\phi_j + k_j^2\phi_j = 0, \quad (j = 1, 2) \quad (3.7)$$

$$\Delta\psi_t + k_t^2\psi_t = 0, \quad (3.8)$$

où  $\vec{k}_j$  ( $j = 1, 2, t$ ) sont les vecteurs d'onde. Le champ de déplacement dans la sphère poreuse est alors donné par :

$$\vec{u} = - \sum_{j=1}^2 \vec{\nabla}\phi_j + \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}_t. \quad (3.9)$$

En coordonnées sphériques (3.9) devient

$$\vec{u} = \left( - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial\phi_j}{\partial r} - \frac{1}{r}\Omega\psi_t, - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial\phi_j}{\partial\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\psi_t)}{\partial\theta\partial r}, 0 \right)^T \quad (3.10)$$

où

$$\Omega\psi_t = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\psi_t}{\partial\theta} \right). \quad (3.11)$$

Le vecteur champ de déplacement  $\vec{w}$  du fluide par rapport au solide est donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{w} = - \sum_{j=1}^2 \gamma_j \vec{\nabla}\phi_j + \gamma_t \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi}_t, \quad (3.12)$$

où  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_t$  sont les coefficients de compatibilités respectifs de l'onde rapide (1), de l'onde lente (2) et de l'onde transversale (t) (cf. Chapitre 1).

En coordonnées sphériques, on obtient

$$\vec{w} = \left( - \sum_{j=1}^2 \gamma_j \frac{\partial\phi_j}{\partial r} - \frac{1}{r}\gamma_t\Omega\psi_t, - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{r}\gamma_j \frac{\partial\phi_j}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\gamma_t \frac{\partial^2(r\psi_t)}{\partial\theta\partial r}, 0 \right)^T. \quad (3.13)$$

Le vecteur déplacement total est donc

$$\vec{u} + \vec{w} = \left( - \sum_{j=1}^2 (1 + \gamma_j) \frac{\partial\phi_j}{\partial r} - (1 + \gamma_t) \frac{1}{r}\Omega\psi_t, - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{r} \frac{\partial\phi_j}{\partial\theta} + \frac{(1 + \gamma_t)}{r} \frac{\partial^2(r\psi_t)}{\partial\theta\partial r}, 0 \right)^T. \quad (3.14)$$

D'après la théorie de Biot, le tenseur des contraintes en un point du milieu (1) est

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [(H - 2\mu)\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + C\vec{\nabla} \cdot \vec{w}] \delta_{ij} \quad (3.15)$$

où  $H, \mu, C$  sont des constantes dépendant de la porosité et des caractéristiques du milieu poreux et du fluide saturant. Les quantités  $(\varepsilon_{ij})_{ij}, (\delta_{ij})_{ij}$  désignent respectivement le tenseur des déformations et le tenseur unité. Les développements en coordonnées sphériques conduisent aux composantes suivantes :

$$\sigma_{rr} = \sum_{j=1}^2 \left( -2\mu \frac{\partial^2\phi_j}{\partial r^2} + \mathcal{H}_j k_j^2 \phi_j \right) + 2\mu \left( \frac{1}{r^2} \Omega\psi_t - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Omega\psi_t \right), \quad (3.16)$$

$$\sigma_{r\theta} = -2\mu \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sum_{j=1}^2 \left( -\frac{\phi_j}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( 1 + \frac{r^2 k_t^2}{2} \right) \psi_t + \frac{\Omega \psi_t}{r^2} \right], \quad (3.17)$$

$$\sigma_{r\phi} = 0, \quad (3.18)$$

où  $\mathcal{H}_j = H - 2\mu + \gamma_j C$ . La pression dans les pores est

$$P_f = - \sum_{j=1}^2 (\gamma_j M + C) k_j^2 \phi_j. \quad (3.19)$$

$M$  et  $C$  étant des constantes dépendant de la porosité.

### Expressions des potentiels

Dans la sphère, pour des raisons physiques, les potentiels ne peuvent pas devenir infinis. Comme la seule fonction de Bessel sphérique n'ayant pas de singularité en  $r = 0$  est  $j_n$  (Annexe B), les expressions des potentiels des ondes longitudinales et transversale sont données sous les formes (on ne confondra pas l'indice ou l'exposant  $j$  avec la fonction de Bessel) :

$$\phi_j = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n (2n+1) A_n^j j_n(k_j r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (3.20)$$

et

$$\psi_t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n (2n+1) A_n^t j_n(k_t r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega t}. \quad (3.21)$$

Pour déterminer les quatre inconnues  $A_n^1$ ,  $A_n^2$ ,  $A_n^t$  et  $T_n$ , il faut quatre conditions de passage en  $r = a$  ( $a =$  rayon de la sphère).

### Conditions de passage à l'interface

Les conditions de passage sont écrites pour un mode  $n$ , car une série de Fourier est nulle si tous ses coefficients sont nuls :

1. Continuité du débit

$$(\vec{u}_0 + \vec{u}_{0d}) \cdot \vec{e}_r = (\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{e}_r, \quad (3.22)$$

2. Continuité de la pression

$$p_0 = p_f, \quad (3.23)$$

3. Contrainte radiale

$$-p_0 = \sigma_{rr}, \quad (3.24)$$

4. Contrainte tangentielle

$$0 = \sigma_{r\theta}. \quad (3.25)$$

La continuité du débit en  $r = a$  conduit à

$$- \sum_{j=1}^2 (1 + \gamma_j) x_j j_n'(x_j) A_n^j + (1 + \gamma_t) n(n+1) j_n(x_t) A_n^t + x_0 h_n^{(1)'}(x_0) T_n = -x_0 j_n'(x_0). \quad (3.26)$$

où  $x_j = k_j a$  ( $j = 1, 2$ ),  $x_t = k_t a$  et  $x_0 = k_0 a$ .

Pour les trois autres conditions, on obtient après développement

$$\sum_{j=1}^2 \rho_{fj} j_n(x_j) A_n^j - \rho_0 h_n^{(1)}(x_0) T_n = \rho_0 j_n(x_0), \quad (3.27)$$

$$\sum_{j=1}^2 \left[ 4x_j j_n'(x_j) + (\rho_{jt} x_t^2 - 2n(n+1)) j_n(x_j) \right] A_n^j + 2n(n+1) \left[ x_t j_n'(x_t) - j_n(x_t) \right] A_n^t - \rho_{0t} x_t^2 h_n^{(1)}(x_0) T_n = \rho_{0t} x_t^2 j(x_0), \quad (3.28)$$

$$\sum_{j=1}^2 \left( x_j j_n'(x_j) - j_n(x_j) \right) A_n^j + \left( x_t j_n'(x_t) + \left( 1 + \frac{x_t^2}{2} - n(n+1) \right) j_n(x_t) \right) A_n^t = 0. \quad (3.29)$$

La forme matricielle des équations (3.26) à (3.29) est

$$d_n \cdot \begin{pmatrix} T_n \\ A_n^1 \\ A_n^2 \\ A_n^t \end{pmatrix} = s_n, \quad (3.30)$$

où

$$d_n = \begin{bmatrix} x_0 h_n^{(1)'}(x_0) & -(1+\gamma_1) x_1 j_n'(x_1) & -(1+\gamma_2) x_2 j_n'(x_2) & n(n+1)(1+\gamma_t) j_n(x_t) \\ -\rho_{0t} h_n^{(1)}(x_0) & \rho_{f1} j_n(x_1) & \rho_{f2} j_n(x_2) & 0 \\ -\rho_{0t} x_t^2 h_n^{(1)}(x_0) & 4x_1 j_n'(x_1) + (\rho_{1t} x_t^2 - 2n(n+1)) j_n(x_1) & 4x_2 j_n'(x_2) + (\rho_{2t} x_t^2 - 2n(n+1)) j_n(x_2) & 2n(n+1) [x_t j_n'(x_t) - j_n(x_t)] \\ 0 & x_1 j_n'(x_1) - j_n(x_1) & x_2 j_n'(x_2) - j_n(x_2) & x_t j_n'(x_t) + (1 - n(n+1) + x_t^2/2) j_n(x_t) \end{bmatrix}$$

et

$$s_n = \begin{bmatrix} -x_0 j_n'(x_0) \\ \rho_{0t} j_n(x_0) \\ \rho_{0t} x_t^2 j_n(x_0) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

En utilisant la méthode de Cramer, on obtient l'expression du coefficient de diffusion  $T_n$  sous la forme

$$T_n = \frac{D_n^{[1]}}{D_n} \quad (3.32)$$

où le déterminant  $D_n^{[1]}$  est obtenu en remplaçant les éléments de la première colonne de  $d_n$  par les éléments de  $s_n$  et  $D_n$  le déterminant de la matrice  $d_n$ .

### 3.3 Approximation des coefficients de diffusion

On suppose que le fluide dans lequel baignent les diffuseurs poreux et le fluide saturant l'espace poreux sont identiques. La diffusion acoustique d'une onde plane incidente par un diffuseur de forme sphérique de rayon  $a$  est décrite par les coefficients de diffusion  $T_n$ , où  $n$  est un entier relatif, tels que  $T_{-n} = T_n$ . On se place dans l'hypothèse basse fréquence, c'est à dire  $|k_0 a| \ll 1$  et  $|k_\alpha a| \ll 1$  ( $\alpha = 1, 2, t$ ). En utilisant les développements en série de Taylor des fonctions de Bessel et de Hankel sphériques (Annexe B), on peut approcher les coefficients de diffusion  $T_n$  de la façon suivante

$$T_0(a) = \frac{i}{3} (k_0 a)^3 (B_0 - 1) + O((k_0 a)^5), \quad (3.33)$$

$$T_1(a) = \frac{i}{3} (k_0 a)^3 B_1 + O((k_0 a)^5), \quad (3.34)$$

$$T_n(a) = O((k_0 a)^5) \quad \text{si } n > 1, \quad (3.35)$$

où les coefficients  $B_0$  et  $B_1$  présents dans les équations (3.33) et (3.34) sont donnés par

$$B_0 = -\frac{3\left(\frac{\rho_{f2}c_2^2}{\rho_t c_t^2}\Gamma_1 - \frac{\rho_{f1}c_1^2}{\rho_t c_t^2}\Gamma_2\right) + \left(\left(4 - 3\frac{\rho_2 c_2^2}{\rho_t c_t^2}\right)\Gamma_1 - \left(4 - 3\frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_t c_t^2}\right)\Gamma_2\right)}{\frac{\rho_{f2}c_2^2}{\rho_0 c_0^2}\left(4 - 3\frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_t c_t^2}\right) - \frac{\rho_{f1}c_1^2}{\rho_0 c_0^2}\left(4 - 3\frac{\rho_2 c_2^2}{\rho_t c_t^2}\right)}, \quad (3.36)$$

et

$$B_1 = -\frac{\left(4\frac{c_2^2}{c_1^2}(-\Gamma_2 + \rho_{f20} + \Gamma_t \Delta\rho_2) + 4(\Gamma_1 - \rho_{f10} - \Gamma_t \Delta\rho_1) + 3\frac{c_2^2}{c_1^2}(\Gamma_2 \Delta\rho_1 - \Gamma_1 \Delta\rho_2 + \Delta\rho_{12})\right)}{\left(4\frac{c_2^2}{c_1^2}(-\Gamma_2 - 2\rho_{f20} + \Gamma_t \Delta\rho_2) - 4(-\Gamma_1 - 2\rho_{f10} + \Gamma_t \Delta\rho_1) + 3\frac{c_2^2}{c_1^2}(\Gamma_2 \Delta\rho_1 - \Gamma_1 \Delta\rho_2 - 2\Delta\rho_{12})\right)} \quad (3.37)$$

avec  $\Delta\rho_2 = \rho_{2t} - \rho_{f2t}$ ,  $\Delta\rho_1 = \rho_{1t} - \rho_{f1t}$ ,  $\Delta\rho_{12} = \rho_{2t}\rho_{f10} - \rho_{1t}\rho_{f20}$ ,  $\rho_{f\alpha t} = \frac{\rho_{f\alpha}}{\rho_t}$ , ( $\alpha = 1, 2$ ).

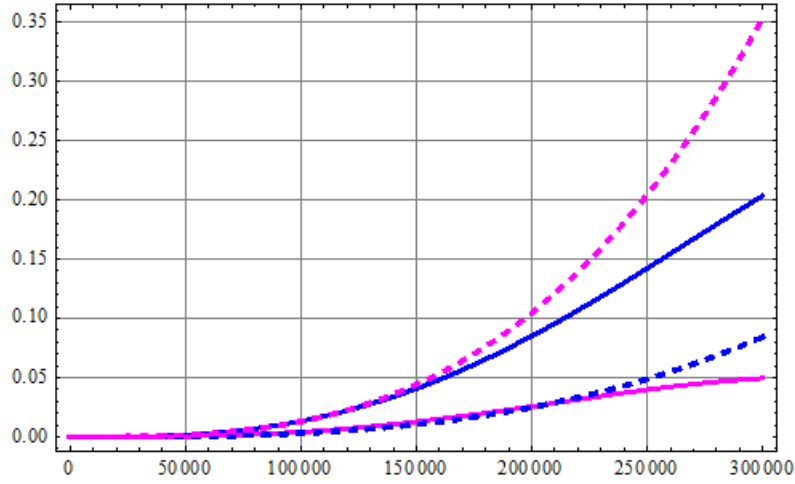


FIGURE 3.2 – Comparaison coefficients de diffusion exacts et approchés. En ordonnée on a le coefficient de diffusion et en abscisse la fréquence en Hertz.

La figure (3.2) montre la comparaison des coefficients de diffusion approchés et exacts. La courbe en bleu représente le coefficient de diffusion pour le mode  $n=0$  et le magenta représente celle du mode  $n=1$ . On observe une bonne approximation en basse fréquence c'est-à-dire en dessous de 50kHz. En utilisant les approximations suivantes en basse fréquence et en fixant la porosité (cf. Chapitre 2) :

$$\begin{aligned} c_2^2 &\cong -i\frac{\omega}{\omega_c} \frac{HM - C^2}{\rho_0 H}, \quad c_1^2 \cong \frac{H}{\rho}, \quad c_t^2 \cong \frac{\mu}{\rho}, \\ \gamma_1 &\cong 0, \quad \gamma_2 \cong -\frac{H}{C}, \quad \gamma_t \cong 0, \\ \rho_1 &\cong \rho, \quad \rho_2 \cong 0, \quad \rho_t \cong \rho, \\ \rho_{f1} &\cong \rho_0, \quad \rho_{f2} \cong -\frac{i\omega_c}{\omega} \frac{H\rho_0}{C}, \end{aligned}$$

on obtient à la limite statique ( $\omega \rightarrow 0$ ) des expressions simplifiées des coefficients  $B_0$  et  $B_1$  sous les formes

$$B_0^s \cong \frac{-3(HM - C^2) / (C\mu) - [3\rho_0 H / (\rho\mu) + (4 - 3H/\mu)](1 - H/C) + 4}{(4 - 3H/\mu)(HM - C^2) / CK_0 + 4\rho_0 H / (\rho K_0)}, \quad (3.38)$$

et

$$B_1^s \cong \frac{\rho - \rho_0}{2\rho + \rho_0}. \quad (3.39)$$

On voit que les limites statiques des coefficients  $B_0$  et  $B_1$  ne dépendent plus de la fréquence. Les seuls paramètres physiques jouant un rôle sont ceux des fluides extérieur et saturant ( $\rho_0$ ,  $K_0 = \rho_0 c_0^2$ ), du milieu poreux ( $H$ ,  $M$ ,  $C$ ,  $\mu$  à valeurs réelles) et la masse volumique totale  $\rho$ .

### 3.4 Limites de Rayleigh des nombres d'ondes effectifs pour des sphères poreuses dans le cas polydisperse

#### 3.4.1 Nombre d'onde effectif de Linton et Martin

En utilisant les diffuseurs isotropes ponctuels, Foldy[1] a trouvé une expression du nombre d'onde effectif en s'arrêtant à l'ordre 1 en concentration. Lax [2] a étendu le modèle de Foldy jusqu'à l'ordre 2 en concentration en utilisant la QCA. En 1961 Waterman et Truell (WT) [6] trouvent une expression du nombre d'onde à l'ordre 2 en concentration en utilisant des diffuseurs ponctuels anisotropes et en considérant les ondes diffusées vers l'avant et vers l'arrière sans modifier le premier ordre de Foldy. Utilisant des méthodes mathématiques issues de la physique nucléaire, Lloyd et Berry (LB) [13] étendent en 1967 le modèle du nombre d'onde effectif de WT en ajoutant au deuxième ordre en concentration de ce nombre d'onde une formule intégrale qui tient compte d'une sommation sur tous les angles de diffusion. Plus tard, en 2006, travaillant sur une nouvelle démonstration des résultats de LB à partir d'une approche plus classique, Linton et Martin (LM) [45] ont proposé une réécriture du nombre d'onde effectif équivalente à celle de LB, l'intégrale sur les angles étant transformée en une série double dont le terme général est proportionnel au produit  $T_n T_m$  des coefficients de diffusion. La formule de LM s'arrête à l'ordre 2 en  $n_0$  (nombre de diffuseurs par unité de volume).

Nous allons examiner l'effet de la polydispersité de la taille des diffuseurs dans le cas de trois distributions : uniforme, de Schulz et log-normale. Il faut noter que Mascaro et al [44] ont considéré une distribution gaussienne du rayon. La polydispersité (coefficient de dispersion) est définie par [45]

$$p = \frac{\sigma}{\langle a \rangle}, \quad (3.40)$$

où  $\sigma$  est l'écart-type et  $\langle a \rangle$  le rayon moyen de la distribution considérée.

Considérons un milieu fluide contenant  $n_0$  diffuseurs par unité de volume. Si les diffuseurs ont un même rayon  $a$ , alors le nombre d'onde associé à l'onde cohérente s'écrit sous la forme

$$\xi_{LM}^2 = k_0^2 + n_0 \delta_1 + n_0^2 \delta_2 + O(n_0^3), \quad (3.41)$$

où

$$\delta_1 = \frac{4\pi}{ik_0} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) T_n(a), \quad (3.42)$$

et

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{4\pi}{k_0} \right)^4 \sum_{n,m=0}^{+\infty} K_{nm} T_n(a) T_m(a). \quad (3.43)$$

Ci-dessus,

$$K_{nm} = \left( \frac{1}{4\pi} \right)^{3/2} \sqrt{(2n+1)(2m+1)} \sum_{q=|n-m|}^{n+m} q \sqrt{2q+1} G(n,0; m,0; q), \quad (3.44)$$

où  $G$  est le coefficient de Gaunt [33], [44] (Annexe C). La somme sur l'indice  $q$  est à pas de deux avec  $n+m+q$  pair. Xu Yu-Lin [33] a fourni des algorithmes pour le calcul rapide des coefficients de Gaunt.

Supposons que les obstacles sont constitués du même matériau poreux mais différent cependant par

leur taille. Les interactions entre les obstacles de rayon respectif  $a$  et  $b$  doivent être prises en compte en modifiant (3.43) comme suit

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{4\pi}{k_0} \right)^4 \sum_{n,m=0}^{+\infty} K_{nm} T_n(a) T_m(b). \quad (3.45)$$

On suppose dans la suite que les rayons des obstacles peuvent prendre toutes les valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et que la distribution des obstacles est décrite par une densité de probabilité normalisée  $u$  telle que  $n_0 u(a) da$  est le nombre d'obstacles par unité de volume, ayant un rayon comprise entre  $a$  et  $a + da$ . Ainsi  $\int_0^{+\infty} u(a) da = 1$ . On modifie alors le nombre d'onde de LM en considérant le nombre d'onde effectif

$$\langle \xi_{LM}^2 \rangle = \iint_0^{+\infty} \xi_{LM}^2 u(a) u(b) da db. \quad (3.46)$$

En utilisant les équations (3.41) et (3.45), on obtient le nombre d'onde dans le cas polydisperse sous la forme

$$\langle \xi_{LM}^2 \rangle = k_0^2 + n_0 \Delta_1 + n_0^2 \Delta_2 + O(n_0^3), \quad (3.47)$$

où

$$\Delta_1 = \frac{4\pi}{ik_0} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) T_n(a) u(a) da, \quad (3.48)$$

et

$$\Delta_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{4\pi}{k_0} \right)^4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n,m=0}^{+\infty} K_{nm} T_n(a) T_m(b) u(a) u(b) da db. \quad (3.49)$$

A des fréquences quelconques, on doit évaluer numériquement les intégrales simple et double apparaissant dans ces formules. Cependant, compte-tenu de la limite basse fréquence que nous considérons ici, les approximations des coefficients de diffusion  $T_n$  données ci-dessus permettent de simplifier les calculs des intégrales. L'hypothèse basse fréquence correspond au fait que  $|k_0 a| \ll 1$  et  $|k_\alpha a| \ll 1$ . On a, compte tenu des équations (3.33)-(3.35) et de l'équation (3.47) :

$$\langle \xi_{LM}^2 \rangle \approx k_0^2 (1 + I_1 + I_2), \quad (3.50)$$

où

$$I_1 = (B_0 - 1 + 3B_1) C_u, \quad (3.51)$$

et

$$I_2 = 3 \left[ (B_0 - 1) B_1 + 2B_1^2 \right] (C_u)^2. \quad (3.52)$$

La quantité  $C_u$  est définie par

$$C_u = \left( \frac{4\pi}{3} \right) n_0 \langle a^3 \rangle \quad (3.53)$$

avec

$$\langle a^n \rangle = \int_0^{+\infty} a^n u(a) da. \quad (3.54)$$

L'équation (3.54) représente le moment d'ordre  $n$  de la distribution  $u$ , l'équation (3.53) représente la concentration volumique moyen des diffuseurs pour une distribution  $u$  considérée. On a utilisé aussi les égalités  $K_{01} = K_{10} = 3/(16\pi^2)$  et  $K_{11} = 3/(4\pi^2)$  (Annexe C). Pour évaluer la concentration  $C_u$  qui ne dépend pas des paramètres du milieu, on a besoin de calculer le moment d'ordre 3 de la distribution. Pour cela on considère trois distributions : uniforme, de Schulz et log-normale. Dans la littérature Leroy et al. [50] ont considéré une distribution log-normale, Mascaro et al. [54] une distribution gaussienne qui est un cas particulier de la distribution de Schulz.

### 3.4.2 Les concentrations

#### Distribution uniforme

La distribution uniforme [47] est définie par

$$u(a) = \frac{\langle a \rangle}{2w} 1_{\left[\frac{\langle a \rangle - w}{\langle a \rangle}, \frac{\langle a \rangle + w}{\langle a \rangle}\right]} \left( \frac{a}{\langle a \rangle} \right), \quad (3.55)$$

où  $\langle a \rangle$  est le premier moment,  $w$  la demi-largeur et  $1_{[.]}$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $\left[\frac{\langle a \rangle - w}{\langle a \rangle}, \frac{\langle a \rangle + w}{\langle a \rangle}\right]$ . Le moment d'ordre 3 est donné par

$$\langle a^3 \rangle = \langle a \rangle^3 \left( 1 + \frac{w^2}{\langle a \rangle^2} \right). \quad (3.56)$$

L'écart-type  $\sigma$  est tel que  $\sigma^2 = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2$ . Comme  $\langle a^2 \rangle = \langle a \rangle^2 + w^2/3$  il s'ensuit que  $\sigma^2 = w^2/3$ .

La polydispersité est alors  $p = \sigma/\langle a \rangle = w/\sqrt{3}\langle a \rangle$ . On peut encore écrire l'équation (3.56) sous la forme  $\langle a^3 \rangle = \left(1 + \frac{3\sigma^2}{\langle a \rangle^2}\right)\langle a \rangle^3$ . La concentration moyenne s'écrit dans ce cas en fonction de la polydispersité comme suit :

$$C_u = \frac{4\pi n_0 \langle a \rangle^3}{3} (1 + 3p^2). \quad (3.57)$$

Le cas particulier de la monodispersité s'obtient en effectuant le passage à la limite  $w \rightarrow 0$ . On en déduit que  $\langle a \rangle \rightarrow a$ ,  $\sigma \rightarrow 0$  puis,  $C_u \rightarrow V = 4\pi a^3/3$ ,  $V$  étant le volume moyen.

#### Distribution de Schulz

La distribution de Schulz [37]-[34] est donnée par

$$u(a) = \frac{(j+1)^{j+1}}{\langle a \rangle \Gamma(j+1)} \left( \frac{a}{\langle a \rangle} \right)^j \exp\left[-(j+1) \frac{a}{\langle a \rangle}\right], \quad (3.58)$$

où  $\langle a \rangle$  est le premier moment (rayon moyen),  $\Gamma$  la fonction gamma d'Euler et  $j = \langle a \rangle^2/\sigma^2 - 1$  un nombre réel mesurant la largeur de la distribution ( $\sigma^2$  est la variance). Ce nombre est donc relié à la polydispersité car  $p = \sigma/\langle a \rangle = 1/\sqrt{j+1}$ .

Le cas  $j = 0$  correspond à la distribution exponentielle (les diffuseurs à petits rayons sont largement prépondérants). Le moment d'ordre  $n$  est donné par

$$\langle a^n \rangle = \int_0^{+\infty} a^n u(a) da = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \frac{(j+n)!}{(j+1)^n} \langle a \rangle^n. \quad (3.59)$$

Si  $j$  est un entier naturel, la relation (3.59) devient

$$\langle a^n \rangle = \int_0^{+\infty} a^n u(a) da = \frac{(j+n)!}{j!(j+1)^n} \langle a \rangle^n. \quad (3.60)$$

On déduit la concentration moyenne, pour une distribution de Schulz de diffuseurs sphériques, en fonction de la polydispersité  $p$  sous la forme

$$C_u = \frac{4\pi n_0 \langle a \rangle^3}{3} \frac{(j+3)(j+2)}{(j+1)^2} = \frac{4\pi n_0 \langle a \rangle^3}{3} (1 + 3p^2 + 2p^4). \quad (3.61)$$

Le cas particulier de la monodispersité s'obtient en effectuant le passage à la limite  $j \rightarrow +\infty$ ; on a alors  $\langle a \rangle \rightarrow a$ ,  $p \rightarrow 0$  et  $C_u \approx n_0 V$ .

### Distribution log-normale

Dans le cas d'une distribution log-normale [50][37] du rayon des sphères, la densité  $u$  s'écrit

$$u(a) = \frac{1}{a \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln a - \theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.62)$$

où  $\sigma^2$  est la variance et  $\theta = \ln a_{med}$  avec  $a_{med}$  la médiane des rayons. Le moment d'ordre  $n$  de la distribution est donné par

$$\langle a^n \rangle = \exp\left(n\theta + \frac{n^2\sigma^2}{2}\right). \quad (3.63)$$

La concentration moyenne pour une distribution log-normale de diffuseurs sphériques s'écrit sous la forme

$$C_u = \frac{4\pi n_0}{3} e^{3\theta + \frac{9\sigma^2}{2}} = \frac{4\pi}{3} a_{med}^3 e^{\frac{9\sigma^2}{2}}. \quad (3.64)$$

On sait que  $\sigma^2 = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2 = e^{2\theta + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) > 0$  et  $\langle a \rangle = e^{\left(\theta + \frac{\sigma^2}{2}\right)}$ . En combinant ces deux équations, on obtient

$$p^2 = \frac{\sigma^2}{\langle a \rangle^2} = e^{\sigma^2} - 1.$$

L'équation (3.64) devient  $C_u = \frac{4\pi}{3} a_{med}^3 (p^2 + 1)^{9/2}$ . En prenant  $\langle a_{med} \rangle \cong \langle a \rangle$  [37], la concentration moyenne devient alors

$$C_u = \frac{4\pi n_0}{3} \langle a \rangle^3 (p^2 + 1)^{9/2}. \quad (3.65)$$

La limite monodisperse est obtenue en faisant tendre l'écart-type  $\sigma$  vers zéro.

La figure (3.3) montre les courbes des concentrations relatives  $C_u / \frac{4\pi n_0}{3} \langle a \rangle^3$  en fonction de la polydispersité  $p$ . Les courbes noire, bleue et rouge représentent respectivement les distributions uniforme, de Schulz et log-normale. Toutes sont des fonctions monotones croissantes positives de la variable  $p$ .

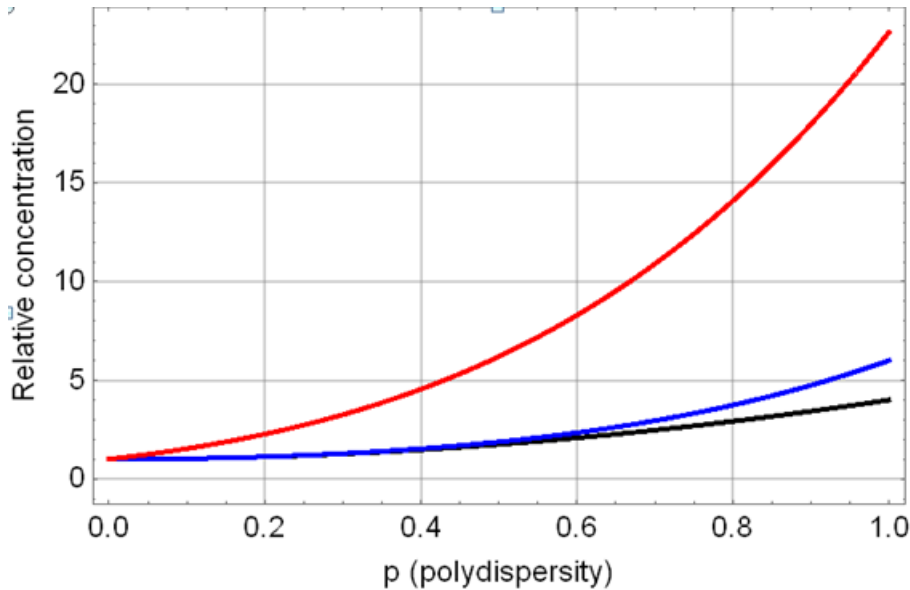


FIGURE 3.3 – –

Pour une valeur donnée de  $p$ , la distribution log-normale fournit la plus grande valeur de la concentration relative, suivie de la distribution de Schultz et ensuite de la distribution uniforme. Pour des valeurs faibles ne dépassant pas 0,6, les distributions de Shultz et uniformes sont très proches.



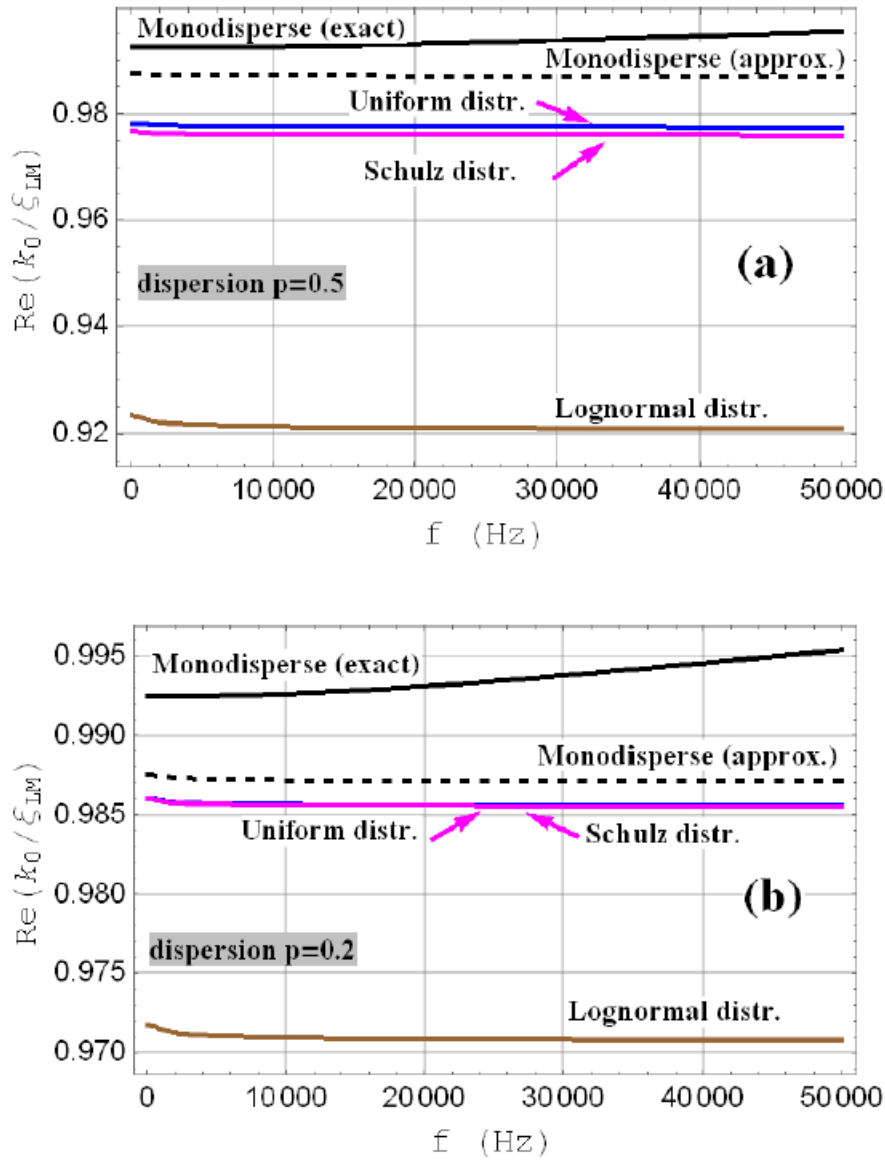


FIGURE 3.4 – Vitesses de phases normalisées

La figure (3.4) montre les représentations des vitesses de phases normalisées en fonction de la fréquence pour les trois distributions polydisperses et monodisperse de sphères poroélastiques pour une densité  $n_0 = 10^5$ . Le rayon des diffuseurs pour le cas monodisperse est  $a = 4 \times 10^{-3} m$  et est utilisé aussi comme rayon moyen pour les distributions en taille. On a construit les courbes pour deux valeurs du coefficient de dispersion :  $p = 0,5$  (figure (3.4)(a)) et  $p = 0,2$  (figure (3.4)(b)). On observe une faible vitesse pour la distribution log-normal, suivie de celle de Schulz et uniforme. La vitesse du cas monodisperse est plus grande que celle du cas polydisperse. On observe aussi une bonne approximation des vitesses de phases approchées et exactes pour une distribution monodisperse.

## 3.5 Nombres d'onde effectif, module effectif et masse volumique effective

### 3.5.1 Diffuseurs poreux

Le carré du nombre d'onde dans le milieu fluide en l'absence de diffuseurs s'écrit  $k_0^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$ , où  $c_0^2 = \frac{K_0}{\rho_0}$  ( $K_0$  et  $\rho_0$  étant le module d'incompressibilité et la masse volumique du fluide). On définit par

analogie le nombre d'onde effectif  $\langle \xi_{LM}^2 \rangle = \frac{\omega^2 \rho_{LM}}{M_{LM}}$  du milieu contenant des diffuseurs.  $\rho_{LM}$  représente la masse volumique effective et  $M_{LM}$  le module effectif de l'onde cohérente. La formule donnant le nombre d'onde effectif peut également s'écrire

$$\frac{\langle \xi_{LM}^2 \rangle}{k_0^2} = \frac{\rho_{LM}}{\rho_0} \times \frac{K_0}{M_{LM}}. \quad (3.66)$$

Au deuxième ordre en concentration, la formule du nombre d'onde effectif (équation (3.50)) de LM ne se présente pas naturellement sous une forme factorisée comme dans le cas de Waterman et Truell [6]. A condition de négliger les termes d'ordre supérieur à  $C_u^2$ , on peut réécrire le nombre d'onde effectif de LM sous la forme factorisée

$$\frac{\langle \xi_{LM}^2 \rangle}{k_0^2} = [1 + C_u(B_0 - 1)] [1 + 3C_u B_1 + 6C_u^2 B_1^2]. \quad (3.67)$$

En comparant les équations (3.66) et (3.67), on déduit la masse volumique  $\rho_{LM}$  effective et le module effectif  $M_{LM}$  d'une distribution aléatoire polydisperse de diffuseurs poreux dans un fluide

$$\frac{\rho_{LM}}{\rho_0} = 1 + 3C_u B_1 + 6C_u^2 B_1^2, \quad (3.68)$$

et

$$\frac{1}{M_{LM}} = \frac{1 - C_u}{K_0} + \frac{C_u B_0}{K_0}. \quad (3.69)$$

On constate que le rapport  $\frac{\rho_{LM}}{\rho_0}$  dépend de  $B_1$  tandis que le module  $M_{LM}$  dépend de  $B_0$ . En remplaçant les équations (3.38) et (3.39) dans les équations (3.68) et (3.69), on obtient la limite statique des équations (3.68) et (3.69). Il vient

$$\left( \frac{\rho_{LM}}{\rho_0} \right) = 1 + 3C_u \frac{(1 - \phi)(\rho_s - \rho_0)}{2(1 - \phi)\rho_s + (1 + 2\phi)\rho_0} + \dots, \quad (3.70)$$

et

$$\frac{1}{M_{LM}} = \frac{1 - C_u}{K_0} + \frac{C_u}{K_0} \frac{4 - \left(1 - \frac{H}{C}\right) \left[4 - 3\frac{H}{\mu} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\right] - 3\frac{HM - C^2}{C\mu}}{\left(4 - 3\frac{H}{\mu}\right) \frac{HM - C^2}{CK_0} + 4\frac{\rho_0 H}{\rho K_0}} + \dots \quad (3.71)$$

$\phi$  étant la porosité. Les limites statiques (3.70) et (3.71) montrent le rôle joué par les paramètres caractérisant le squelette du milieu poreux. Elles ne dépendent pas de la viscosité du fluide ni de la perméabilité mais dépendent toujours de la porosité et du couple de paramètres ( $K_0, \rho_0$ ) caractérisant le fluide saturant.

### 3.5.2 Diffuseurs élastiques

Lorsque la porosité tend vers 0 ( $\phi \rightarrow 0$ ), le milieu devient élastique et est décrit par les paramètres de Lamé  $\lambda_s, \mu_s$  et le module d'incompressibilité  $K_s = \lambda_s + 2\mu_s/3$ . On a  $H \rightarrow H_s = K_s + 2\mu_s/3$ ,  $\mu \rightarrow \mu_s$ ,  $C \rightarrow C_s = K_s$  et donc

$$B_0^s \rightarrow E_0 = \frac{K_0}{\lambda_s + 2\mu_s/3} = \frac{3\rho_0 c_0^2}{\rho_s (3c_L^2 - 4c_T^2)}, \quad (3.72)$$

et

$$B_1^s \rightarrow E_1 = \frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho_s + \rho_0}. \quad (3.73)$$

Dans l'équation (3.72), on a utilisé les relations  $\lambda_s = \rho_s (c_L^2 - 2c_T^2)$  et  $\mu_s = \rho_s c_T^2$ , où  $c_L$  (respectivement  $c_T$ ) est la vitesse de phase de l'onde longitudinale (respectivement la vitesse de l'onde transversale)

dans le milieu élastique. En remplaçant les équations (3.72) et (3.73) dans (3.70) et (3.71), on obtient les expressions statiques suivantes

$$\frac{\rho_{LM}}{\rho_0} \xrightarrow{\phi \rightarrow 0} 1 + 3C_u \frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho_s + \rho_0} + 6C_u^2 \left( \frac{\rho_s - \rho_0}{2\rho_s + \rho_0} \right)^2 \quad (3.74)$$

et

$$\frac{1}{M_{LM}} \xrightarrow{\phi \rightarrow 0} \frac{1 - C_u}{K_0} + \frac{C_u}{\lambda_s + 2\mu_s/3}. \quad (3.75)$$

L'équation (3.74) fournit une extension à l'ordre 2 en concentration des résultats de Aristégui et Angel [48] qui ont utilisé la formule du nombre d'onde effectif de WT en considérant une distribution monodisperse de sphères élastiques dans un milieu fluide.

### 3.5.3 Diffuseurs fluides

Si l'on remplace les diffuseurs élastiques par des diffuseurs fluides dont les paramètres physiques (masse volumique  $\rho_f$ , vitesse du son  $c_f$  et du module d'incompressibilité  $\lambda_f = K_f = \rho_f c_f^2$ ) diffèrent de ceux de la matrice fluide, on doit poser  $\mu_s = 0$  et  $\rho_s = \rho_f \neq \rho_0$  dans les équations (3.74) et (3.75). On obtient alors

$$\frac{\rho_{LM}}{\rho_0} = 1 + 3C_u \frac{\rho_f - \rho_0}{2\rho_f + \rho_0} + 6C_u^2 \left( \frac{\rho_f - \rho_0}{2\rho_f + \rho_0} \right)^2 \quad (3.76)$$

$$\frac{1}{M_{LM}} = \frac{1 - C_u}{K_0} + \frac{C_u}{K_f}. \quad (3.77)$$

L'équation (3.77) est la loi de Wood généralisée au cas de la polydispersité. Les équations (3.76) et (3.77) représentent à l'ordre 1 en concentration respectivement la masse volumique effective et le module effectif trouvés par WT (voir équation 3.35 de l'article [6]).

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la diffusion d'une sphère poreuse immergée dans une matrice fluide. La formule du nombre d'onde effectif de Linton et Martin issue de la QCA a été utilisée pour déterminer les propriétés effectives (masse volumique effective, module effectif) de l'onde cohérente dans un milieu fluide avec des inclusions sphériques poreuses dans le cas d'une dispersion en taille des rayons. On a examiné trois distributions : uniforme, de Schulz et log-normale. On a obtenu la masse volumique effective et le module effectif pour des sphères élastiques en passant d'abord à la limite statique puis en faisant tendre la porosité vers zéro. On déduit le cas des sphères fluides en annulant le module de cisaillement. Toutes les formules effectives dépendent généralement de la concentration qui dépend naturellement de la distribution en taille des obstacles. Le cas monodisperse est déduit du cas polydisperse en faisant tendre le paramètre de polydispersité vers zéro.

Les résultats de ce chapitre ont été soumis dans le journal JASA (Journal of the Acoustical Society of America) en 2019 [61] et une partie des travaux sera présentée au Congrès Français de Mécanique (CFM) en août 2019 à Brest [60].



# Conclusion générale

Cette thèse a abordé la propagation des ondes dans un milieu poroélastique contenant des inclusions cylindriques et la propagation d'une onde dans un milieu fluide contenant des inclusions sphériques poreuses en vue de déterminer les propriétés effectives du milieu que sont les nombres d'ondes effectifs, les modules effectifs et les masses volumiques effectives.

Nous nous sommes d'abord intéressés à la diffusion dans un milieu milieu poreux homogénéisé contenant des cavités cylindriques aléatoirement réparties de même rayon. En utilisant les équations de la diffusion multiple, Nous avons déterminé les coefficients de diffusion  $T_n^{\alpha\beta}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, t$ ) pour les conditions aux limites des *pores fermés* à l'interface du cylindre de rayon  $a$  dans le cadre de la limite de Rayleigh. Nous avons comparé numériquement les coefficients approchés et exacts. Nous avons montré que le calcul des coefficients de diffusion obtenus dans le cas des conditions aux limites des *pores fermés* donnent des résultats meilleurs que ceux obtenus par les conditions aux limites des *pores ouverts* trouvés par Franklin et al [49]. Dans ce contexte, Nous avons écrit des expressions analytiques des nombres d'onde effectifs pour les ondes cohérentes longitudinales (1, 2) et pour l'onde cohérente transversale  $t$  en négligeant les coefficients de diffusion des modes  $n$  différents de  $-2, -1, 0, 1, 2$  dans les formules des nombres d'onde effectifs trouvés par Conoir-Norris [49] dans un milieu poroélastique. Ces expressions analytiques ont ainsi été confrontées à des simulations numériques dans un milieu poreux QF20 respectant la théorie de Biot [4]. Nous avons constaté, à la limite basse fréquence pour une concentration faible des diffuseurs cylindriques, que les approximations des vitesses de phases et des atténuations des ondes cohérentes déduites des expressions analytiques à l'ordre  $c^2$  en concentration, approximent mieux les vitesses de phases et les atténuations exactes.

Nous avons déduit les expressions analytiques des modules effectifs et des masses volumiques effectives en écrivant les nombres d'ondes effectifs approximés sous forme factorisée. Ces propriétés effectives dépendent des paramètres du milieu poreux et des fréquences. En réécrivant les nombres d'onde des ondes dans le milieu sans diffuseurs, les masses volumiques acoustiques et les grandeurs du milieu poreux en basse fréquence puis en faisant tendre la porosité vers zéro, nous avons retrouvé les modules effectifs trouvés par Varadan [25] dans un milieu élastique contenant des cavités cylindriques en négligeant l'ordre  $c^2$  en concentration dans les expressions des modules effectifs. Les masses volumiques effectives trouvées dans le milieu élastique coïncident avec celles trouvées par Varadan [25] et Christensen [19].

Ensuite, nous avons considéré un milieu fluide contenant des inclusions sphériques poreuses aléatoires de rayons différents. Nous avons établi les équations de la diffusion multiple d'une sphère poreuse saturée par le même fluide que le milieu extérieur en utilisant les conditions aux limites des *pores ouverts*. Nous avons déterminé les expressions des coefficients de diffusion de l'onde longitudinale effective en utilisant le développement de Taylor dans la limite de basse fréquence. A partir du nombre d'onde effectif de Linton-Martin [45], nous avons trouvé une expression du nombre d'onde effectif dans le cas polydisperse (distribution en taille des rayons). Nous avons travaillé sur trois distributions en taille des rayons : uniforme, Schultz et log-normale. Les concentrations obtenues à partir de ces distributions dépendent du paramètre polydisperse et du volume moyen. Des simulations numériques des ces concentrations ont été faites. A partir du nombre d'onde effectif dans le cas polydisperse, Nous avons déduit la masse volumique effective et le module effectif du milieu contenant des sphères poreuses. Nous avons retrouvé le cas monodisperse en faisant tendre le coefficient de dispersion vers

zéro. Nous avons fait une extension polydisperse de la masse volumique effective à l'ordre deux en concentration de Aristegui et Angel [48] lorsqu'on fait tendre la porosité vers zéro. On retrouve le module effectif de Aristegui et Angel [48] pour des sphères élastiques. Nous avons retrouvé aussi les propriétés effectives pour des inclusions sphériques polydisperses dans un milieu fluide de Waterman-Truell [6] ainsi que la loi de Wood généralisée au cas polydisperse.

L'étude menée dans ce document mériterait d'être étendue aux cas de milieu poreux contenant des inclusions poreuses cylindriques ou sphériques qui constituent une gamme très répandue de matériaux naturels géologiques. Elle pourrait aussi intéresser l'industrie des matériaux composites et des métamatériaux. Nos simulations numériques ont concerné le QF20, mais d'autres matériaux poreux avec des inclusions bien choisies pourraient présenter des caractéristiques intéressantes telles de forts atténuations acoustiques,... Des comparaisons numériques pourront être faites en considérant d'autres milieux poreux. On pourra étudier le cas des cylindres ou sphères coques (inclusions à trois phases) et les méthodes implicites GSCM (The Generalized Self Consistent Method) des nombres d'ondes effectifs.

# **Annexes**





# Annexe A

## Fonctions de Bessel cylindriques

Les fonctions de Bessel sont solutions de l'équation de Bessel [14]

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.1})$$

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$  notée  $J_n$ , peut s'écrire sous la forme d'une série :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}, \quad (\text{A.2})$$

où  $\Gamma(x)$  désigne la fonction gamma. On a la même formule lorsque  $n$  est réel.

L'expression de la fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre  $n$  entier ou fonction de Neumann notée  $Y_n$  deuxième solution de l'équation de Bessel est :

$$Y_n = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}. \quad (\text{A.3})$$

Cette solution est indépendante de  $J_n$ .

La fonction de Hankel de première espèce d'ordre  $n$  entier ou fonction de Bessel de troisième espèce notée  $H_n^{(1)}$  a pour expression :

$$H_n^{(1)} = J_n + iY_n. \quad (\text{A.4})$$

La fonction de Hankel deuxième espèce est

$$H_n^{(2)} = J_n - iY_n. \quad (\text{A.5})$$

Soit  $b_n$  la fonction de Bessel de première, deuxième ou troisième espèce. Elle vérifie les formules de récurrence suivantes :

$$b_{n-1}(x) - b_{n+1}(x) = 2b'_n(x), \quad (\text{A.6})$$

$$b_{n-1}(x) + b_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}b_n(x), \quad (\text{A.7})$$

$$b_{n+1}(x) = \frac{n}{x}b_n(x) - b'_n(x) \quad (\text{A.8})$$

$$(x^n b_n(x))' = x^n b_{n-1}(x). \quad (\text{A.9})$$

---

# Annexe B

## Fonctions de Bessel sphériques

L'équation différentielle du second ordre [14]

$$x^2 w'' + 2xw' + (x^2 - n(n+1))w = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.1})$$

est appelée équation de Bessel sphérique. Les solutions sont appelées fonctions de Bessel sphériques de première espèce  $j_n(x)$ , de deuxième espèce  $y_n(x)$  et de troisième espèce  $h_n^{(1)}(x)$  et  $h_n^{(2)}(x)$ . Elles sont définies à partir des fonctions de Bessel cylindriques pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  par

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad (\text{B.2})$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad (\text{B.3})$$

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x), \quad (\text{B.4})$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - iy_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x). \quad (\text{B.5})$$

On désigne par  $w_n(x)$  la fonction  $j_n(x)$ ,  $y_n(x)$ ,  $h_n^{(1)}(x)$  ou  $h_n^{(2)}(x)$ .  $w_n(x)$  vérifie les formules de récurrences pour tout  $n$  entier relatif

$$w_{n-1}(x) + w_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} w_n(x), \quad (\text{B.6})$$

$$n w_{n-1}(x) - (n+1) w_{n+1}(x) = (2n+1) w_n'(x), \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{n+1}{x} w_n(x) + w_{n+1}(x) = w_n'(x), \quad (\text{B.8})$$

$$x^2 w_n''(x) = (-x^2 + n(n+1)) w_n(x) + 2x w_n'(x). \quad (\text{B.9})$$



# Annexe C

## Fonctions de Legendre, fonctions harmoniques sphériques, coefficient de Gaunt

On appelle fonction de Legendre[14], la fonction  $P_n^m(x)$  définie pour tout  $0 \leq m \leq n$  et  $-1 \leq x \leq 1$  par

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n, \quad (\text{C.1})$$

$n$  et  $m$  étant des entiers.

Pour des valeurs négatives, la fonction de Legendre s'écrit sous la forme

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x), \quad 0 \leq m \leq n. \quad (\text{C.2})$$

Lorsque  $m = 0$  on pose  $P_n^0 = P_n$ .  $P_n$  est appelé polynôme de Legendre.

On peut écrire  $P_n^m(x)$  en fonction des polynômes de Legendre  $P_n(x)$  sous la forme

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (\text{C.3})$$

Les fonctions de Legendre vérifient les relations de récurrence

$$(x^2-1) \frac{dP_n^m(x)}{dx} = nxP_n^m(x) - (n+m)P_{n-1}^m(x), \quad (\text{C.4})$$

$$(n-m+1)P_{n+1}^m(x) = (2n+1)xP_n^m(x) - (n+m)P_{n-1}^m(x). \quad (\text{C.5})$$

On appelle fonction harmonique sphérique [44] et on la note  $Y_n^m$ , la fonction définie par

$$Y_n^m(\vec{r}) = Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (\text{C.6})$$

où  $m$  est un entier relatif et  $n$  un entier naturel tel que  $|m| \leq n$ ,  $\vec{r}$  un vecteur unitaire,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ .

Les fonctions harmoniques sphériques forment un système orthonormal dans  $L^2(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} Y_n^m \overline{Y_n^\mu} d\Omega = \delta_{nv} \delta_{m\mu}, \quad (\text{C.7})$$

$\Omega$  étant la sphère unité. Elles vérifient la relation

$$Y_n^{-m}(\vec{r}) = (-1)^m \overline{Y_n^m(\vec{r})}. \quad (\text{C.8})$$

On peut écrire une relation entre les polynômes de Legendre et les harmoniques sphériques appelée théorème d'addition de Legendre :

$$P_n(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\vec{r}_1) \overline{Y_n^m}(\vec{r}_2). \quad (\text{C.9})$$

Les coefficients de Gaunt [44] [33] sont des réels définis par

$$\mathcal{G}(n, m; \nu, -\mu; q) = (-1)^m \int_{\Omega} \overline{Y_n^m} Y_{\nu}^{\mu} \overline{Y_q^{\mu-m}} d\Omega. \quad (\text{C.10})$$

D'après [44], on peut montrer que

$$\mathcal{G}(n, m; \nu, \mu; q) = (-1)^{m+\mu} \mathcal{S} \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ m & \mu & -\mu-m \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

où

$$\mathcal{S} = \sqrt{\frac{(2n+1)(2\nu+1)(2q+1)}{4\pi}}. \quad (\text{C.12})$$

$\begin{pmatrix} n & \nu & q \\ m & \mu & s \end{pmatrix}$  est le symbole 3-j de Wigner. Dans le cas particulier  $m = \mu = s = 0$ , on a

$$\begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^s s! \sqrt{(2s-2n)!(2s-2\nu)(2s-2q)!}}{(s-n)!(s-\nu)!(s-q)! \sqrt{(2s+1)!}} \quad \text{si } n + \nu + q = 2s \quad (\text{C.13})$$

et nulle dans le cas contraire.

La formule de linéarisation des harmoniques sphériques s'écrit en fonction des coefficients de Gaunt

$$Y_n^m(\vec{r}) Y_{\nu}^{\mu}(\vec{r}) = \sum_q Y_q^{m+\mu}(\vec{r}) \mathcal{G}(n, m; \nu, \mu; q). \quad (\text{C.14})$$

## Annexe D

### Coefficients de diffusion pour les conditions aux limites de *pores ouverts*

On considère un cylindre de rayon  $a$ . Les expressions exactes des coefficients de diffusion  $T_n^{\alpha\beta}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, t$ ) se trouvent dans l'article [55]. En utilisant les développements de Taylor puis en extrayant les termes dominants, on obtient pour  $n = 0$  et  $n = 1$  [55] :

– pour l'onde incidente longitudinale rapide 1

$$T_0^{11} = -i\frac{\pi}{4}(k_1a)^2 \left[ 1 + \frac{\kappa_{t1}^2 \Gamma_2 R_1 - \kappa_{01}^2 \rho_{f1/0}}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \right], \quad (\text{D.1})$$

$$T_0^{12} = i\frac{\pi}{4}(k_1a)^2 \left[ \frac{\kappa_{t1}^2 \Gamma_1 R_1 - \kappa_{01}^2 \rho_{f1/0}}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \right], \quad (\text{D.2})$$

$$T_0^{1t} = 0, \quad (\text{D.3})$$

$$T_1^{11} = -i\frac{\pi}{4}(k_1a)^2 \left[ \frac{\Gamma_1(1+R_1) + (\Gamma_2 - \Gamma_T)R_1 - \rho_{f1/0} + (\rho_{f2/0}\rho_{1/T} - \rho_{f1/0}\rho_{2/T})}{\Delta} \right], \quad (\text{D.4})$$

$$T_1^{12} = i\frac{\pi}{4}(k_1a)(k_2a) \left[ \frac{\Gamma_1(1+R_1) + (\Gamma_1 - \Gamma_t)R_1 - \rho_{f1/0}}{\Delta} \right], \quad (\text{D.5})$$

$$T_1^{1t} = i\frac{\pi}{4}(k_1a)(k_t a) \left[ \frac{\Gamma_1(R_1 - R_2) - (\Gamma_1 - \Gamma_2)R_1 + (\rho_{f2/0}\rho_{1/t} - \rho_{f1/0}\rho_{2/t})}{\Delta} \right], \quad (\text{D.6})$$

– pour l'onde incidente longitudinale lente 2

$$T_0^{21} = -i\frac{\pi}{4}(k_2a)^2 \left[ \frac{\kappa_{t2}^2 \Gamma_2 R_2 - \kappa_{02}^2 \rho_{f2/0}}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \right], \quad (\text{D.7})$$

$$T_0^{22} = i\frac{\pi}{4}(k_2a)^2 \left[ 1 + \frac{\kappa_{t2}^2 \Gamma_1 R_2 - \kappa_{02}^2 \rho_{f2/0}}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \right], \quad (\text{D.8})$$

$$T_0^{2t} = 0, \quad (\text{D.9})$$

$$T_1^{21} = i\frac{\pi}{4}(k_2a)(k_1a) \left[ \frac{\Gamma_2(1+R_2) + (\Gamma_2 - \Gamma_t)R_2 - \rho_{f2/0}}{\Delta} \right], \quad (\text{D.10})$$

$$T_1^{22} = -i\frac{\pi}{4}(k_2a)^2 \left[ \frac{\Gamma_2(1+R_1) + (\Gamma_1 - \Gamma_t)R_2 - \rho_{f2/0} - (\rho_{f2/0}\rho_{1/t} - \rho_{f1/0}\rho_{2/t})}{\Delta} \right] \quad (\text{D.11})$$

---


$$T_1^{2t} = -i\frac{\pi}{4}(k_2a)(k_1a) \left[ \frac{\Gamma_2(R_2 - R_1) - (\Gamma_1 - \Gamma_2)R_2 + (\rho_{f2/0}\rho_{1/t} - \rho_{f1/0}\rho_{2/t})}{\Delta} \right], \quad (\text{D.12})$$

– pour l'onde incidente transversale  $t$

$$T_0^{t1} = 0, T_0^{t2} = 0, T_0^{2t} = 0, \quad (\text{D.13})$$

$$T_1^{t1} = i\frac{\pi}{4}(k_1a)(k_1a) \left[ \frac{\Gamma_t R_2 + \Gamma_2 + \rho_{f2/0}}{\Delta} \right], \quad (\text{D.14})$$

$$T_1^{t2} = -i\frac{\pi}{4}(k_1a)(k_2a) \left[ \frac{\Gamma_t R_1 + \Gamma_1 + \rho_{f1/0}}{\Delta} \right], \quad (\text{D.15})$$

$$T_1^{tt} = -i\frac{\pi}{4}(k_1a)^2 \left[ \frac{\Gamma_T(R_1 - R_2) + \Gamma_1 - \Gamma_2 + \rho_{f1/0} - \rho_{f2/0}}{\Delta} \right] \quad (\text{D.16})$$

où  $\kappa_{\alpha\beta} = \frac{k_\alpha}{k_\beta}$ ,  $\rho_{f\alpha/t} = \frac{\rho_{f\alpha}}{\rho_t}$ ,  $\rho_{f\alpha/0} = \frac{\rho_{f\alpha}}{\rho_0}$ ,  $\rho_{\alpha/t} = \frac{\rho_\alpha}{\rho_t}$ ,  $R_\alpha = \rho_{\alpha/t} - \rho_{f\alpha/t}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) et  $\Delta = \Gamma_2(1 + R_1) - \Gamma_1(1 + R_2) - \Gamma_t(R_1 - R_2) - \rho_{f1/0}(1 + \rho_{2/t}) - \rho_{f2/0}(1 + \rho_{1/t})$ .



# Annexe E

## Calcul de l'intégrale $I_p^\alpha$

Calculons l'intégrale

$$I_p^\alpha(\xi) = n_0 e^{i\xi \cdot \vec{r}_1} \int_{S_b} d\vec{r} \phi_p(k_\alpha r) e^{i\xi \cdot \vec{r}} \quad (\text{E.1})$$

où

$$\phi_p(k_\alpha r) = H_p^{(1)}(k_\alpha r) e^{ip\theta(\vec{r})}. \quad (\text{E.2})$$

$S_b$  est la surface hachurée ci-dessous.

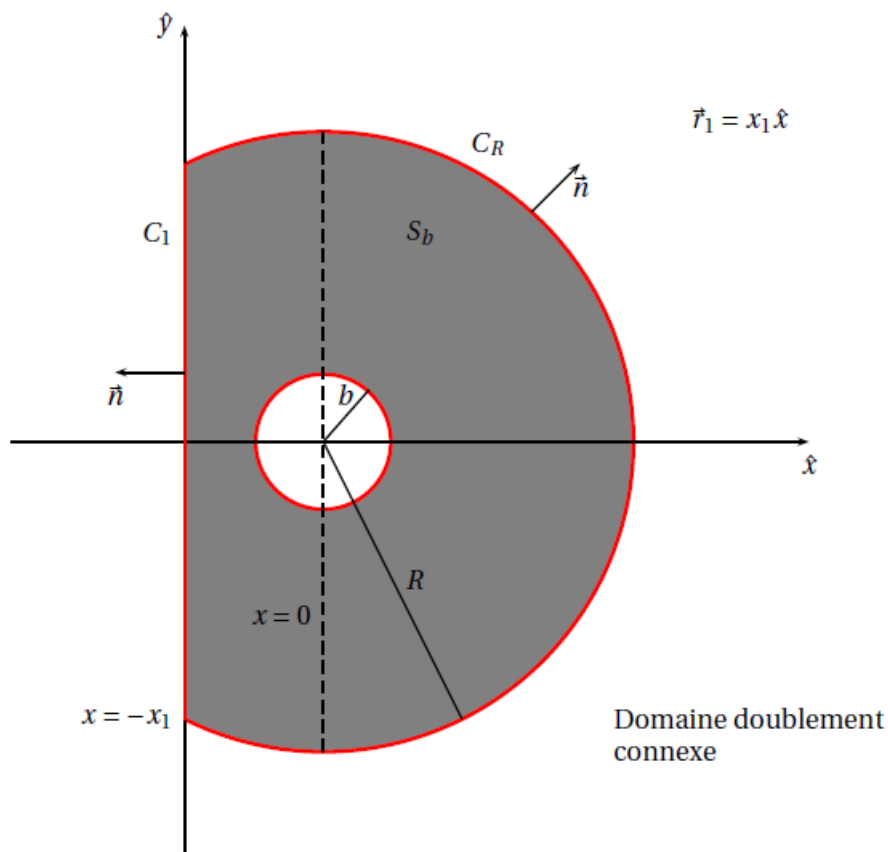


FIGURE E.1 –

Le problème est invariant selon  $y$  donc on peut toujours poser  $y_1 = 0$ .

On peut encore écrire

$$I_p^\alpha(\xi) = n_0 e^{i\xi x_1} \int_{S_b} d\vec{r} \phi_p(k_\alpha r) e^{i\xi x} \quad (\text{E.3})$$

avec pour domaine d'intégration celui délimité par les lignes rouges.

**Théorème E.0.1** (Théorème de Green) Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$ . Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^2$  dans  $\overline{\Omega}$ . Alors

$$\int_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dl, \quad (\text{E.4})$$

où  $\frac{\partial}{\partial n} \equiv \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$  est l'opérateur de dérivation normal.

Les fonctions  $\phi_p(k_\alpha r)$  et  $e^{i\xi x}$  vérifient chacune une équation de Helmholtz :

$$\Delta \phi_p(k_\alpha r) + k_\alpha^2 \phi_p(k_\alpha r) = 0 \quad (\text{E.5})$$

$$\Delta e^{i\xi x} + \xi^2 e^{i\xi x} = 0. \quad (\text{E.6})$$

En multipliant (E.5) par  $e^{i\xi x}$  et (E.6) par  $\phi_p(k_\alpha r)$ , puis en retranchant la première de la seconde, on obtient :

$$(\xi^2 - k_\alpha^2) \phi_p(k_\alpha r) e^{i\xi x} = e^{i\xi x} \Delta \phi_p(k_\alpha r) - \phi_p(k_\alpha r) \Delta e^{i\xi x},$$

c'est-à-dire

$$e^{i\xi x} \phi_p(k_\alpha r) = \frac{1}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \left[ e^{i\xi x} \Delta \phi_p(k_\alpha r) - \phi_p(k_\alpha r) \Delta e^{i\xi x} \right]. \quad (\text{E.7})$$

En introduisant cette relation dans (E.1), on obtient

$$I_p^\alpha(\xi) = \frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_{S_b} \left[ e^{i\xi x} \Delta \phi_p(k_\alpha r) - \phi_p(k_\alpha r) \Delta e^{i\xi x} \right] d\vec{r}. \quad (\text{E.8})$$

L'intégrande dans (E.8) suggère d'utiliser le théorème de Green pour transformer l'intégrale de surface en une intégrale de contour. On obtient donc

$$I_p^\alpha(\xi) = \frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_{\Gamma_b} \left[ e^{i\xi x} \frac{\partial}{\partial n} \phi_p(k_\alpha r) - \phi_p(k_\alpha r) \frac{\partial}{\partial n} e^{i\xi x} \right] dl, \quad (\text{E.9})$$

où  $\Gamma_b$  est le contour englobant le domaine doublement connexe  $S_b$ .

L'intégrale (E.9) peut être décomposée en une somme de trois intégrales sur les chemins  $C_1$ ,  $C_R$  et  $C_b$  avec  $\Gamma_b = C_1 \cup C_R \cup C_b$ .

## Calcul de l'intégrale sur le chemin $C_1$

Posons

$$I_1^\alpha(\xi) = \frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_{C_1} \left[ e^{i\xi x} \frac{\partial}{\partial n} \phi_p(k_\alpha r) - \phi_p(k_\alpha r) \frac{\partial}{\partial n} e^{i\xi x} \right] dl.$$

Compte tenue de l'orientation de la normale, on a

$$I_1^\alpha(\xi) = \frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_{C_1} - \left[ e^{i\xi x} \frac{\partial \phi_p}{\partial n} - \phi_p i\xi e^{i\xi x} \right] dy.$$

Or le long de ce chemin, on a  $x = -x_1$ . Donc

$$I_1^\alpha(\xi) = \frac{n_0}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_{C_1} \left[ i\xi \phi_p - \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right] dy. \quad (\text{E.10})$$

On considère l'opérateur  $L^p$  (voir [44]) définie par :

$$L^p = \frac{(-1)^p}{k_\alpha^p} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^p \quad \text{si } p \geq 0$$

et

$$L^p = \frac{1}{k_\alpha^{|p|}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{|p|} \quad \text{si } p \leq 0.$$

On sait que :  $\phi_p(k_\alpha r) = L^p \phi_0(k_\alpha r) = L^p H_0^{(1)}(k_\alpha r)$ .

Donc

$$I_1^\alpha(\xi) = \frac{n_0}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[ i\xi - \frac{\partial}{\partial x} \right] L^p H_0^{(1)}(k_\alpha r) \Big|_{x=-x_1}$$

avec  $r^2 = x^2 + y^2$ . On a aussi

$$\begin{aligned} I_1^\alpha(\xi) &= \frac{n_0}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[ i\xi - \frac{\partial}{\partial x} \right] L^p \left\{ \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_\alpha \sqrt{u^2 + x^2 + y^2}}}{\sqrt{u^2 + x^2 + y^2}} du \right\} \Big|_{x=-x_1} \\ &= \frac{n_0}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ i\xi - \frac{\partial}{\partial x} \right] L^p \left\{ \frac{1}{i\pi} \frac{e^{ik_\alpha \sqrt{u^2 + x^2 + y^2}}}{\sqrt{u^2 + x^2 + y^2}} \right\} dy \Big|_{x=-x_1} \end{aligned}$$

L'opérateur  $L^p$  se réduit à

$$L^p = \frac{(-1)^p}{k_\alpha^p} \frac{\partial^p}{\partial x^p} \quad (p \geq 0)$$

$$L^p = \frac{1}{k_\alpha^{|p|}} \frac{\partial^{|p|}}{\partial x^{|p|}} \quad (p \leq 0).$$

On a donc

$$I_1^\alpha(\xi) = \frac{n_0}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \left[ i\xi - \frac{\partial}{\partial x} \right] L^p \left\{ \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_\alpha \sqrt{u^2 + x^2 + y^2}}}{\sqrt{u^2 + x^2 + y^2}} du dy \right\} \Big|_{x=-x_1}.$$

Or

$$\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_\alpha \sqrt{u^2 + x^2 + y^2}}}{\sqrt{u^2 + x^2 + y^2}} du dy = \frac{2}{k_\alpha} e^{ik_\alpha |x|}$$

on obtient

$$I_1^\alpha(\xi) = \frac{n_0}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \left[ i\xi - \frac{\partial}{\partial x} \right] L^p \left\{ \frac{2}{k_\alpha} e^{ik_\alpha |x|} \right\} \Big|_{x=-x_1}.$$

Sachant que l'on doit poser  $x = -x_1$ , on a  $x < 0$  de sorte que

$$I_1^\alpha(\xi) = \frac{n_0}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \left[ i\xi - \frac{\partial}{\partial x} \right] L^p \left\{ \frac{2}{k_\alpha} e^{-ik_\alpha x} \right\} \Big|_{x=-x_1}.$$

On a

$$L^p \left\{ \frac{2}{k_\alpha} e^{-ik_\alpha x} \right\} = i^p e^{-ik_\alpha x} \quad (p \in \mathbb{R}).$$

L'intégrale  $I_1(\xi)$  devient alors

$$\begin{aligned} I_1^\alpha(\xi) &= \frac{2i^p n_0}{k_\alpha} (\xi^2 - k_\alpha^2) \left[ i\xi - \frac{\partial}{\partial x} \right] (e^{-ik_\alpha x}) \Big|_{x=-x_1} \\ &= \frac{2i^p n_0}{k_\alpha} (\xi^2 - k_\alpha^2) (i\xi + ik_\alpha) e^{-ik_\alpha x} \Big|_{x=-x_1}, \end{aligned}$$

d'où

$$I_1^\alpha(\xi) = \frac{2i^{p+1} n_0}{k_\alpha (\xi - k_\alpha)} e^{ik_\alpha x_1}. \quad (\text{E.11})$$

## Calcul de l'intégrale le long du chemin $C_b$ (cercle de rayon $b$ )

Posons

$$I_b^\alpha(\xi) = \frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_{C_b} \left[ e^{i\xi x} \frac{\partial}{\partial n} \phi_p(k_\alpha r) - \phi_p(k_\alpha r) \frac{\partial}{\partial n} e^{i\xi x} \right] dl. \quad (\text{E.12})$$

Sur ce chemin,  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$  et  $dl = b d\theta$ . Donc en posant  $x = r \cos\theta$ , on a

$$I_b^\alpha(\xi) = -\frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_0^{2\pi} \left[ e^{i\xi r \cos\theta} \frac{\partial}{\partial r} \phi_p(k_\alpha r) - \phi_p(k_\alpha r) \frac{\partial}{\partial r} e^{i\xi r \cos\theta} \right]_{r=b} b d\theta$$

et si l'on tient compte de  $\phi_p(k_\alpha r) = H_p^{(1)}(k_\alpha r) e^{ip\theta(\vec{r})}$ , il vient

$$\begin{aligned} I_b^\alpha(\xi) &= -\frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_0^{2\pi} \left[ e^{i\xi b \cos\theta} k_\alpha H_p^{(1)'}(k_\alpha b) - H_p^{(1)}(k_\alpha b) i\xi \cos\theta e^{i\xi b \cos\theta} \right] e^{ip\theta} b d\theta \\ &= \frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \left[ b H_p^{(1)}(k_\alpha b) \int_0^{2\pi} i\xi \cos\theta e^{i\xi b \cos\theta} e^{ip\theta} b d\theta - k_\alpha b H_p^{(1)'}(k_\alpha b) \int_0^{2\pi} e^{i\xi b \cos\theta} e^{ip\theta} d\theta \right] \\ I_b^\alpha(\xi) &= \frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \left[ 2\pi(\xi b) i^p H_p^{(1)}(k_\alpha b) J_p'(\xi b) - 2\pi(k_\alpha b) i^p H_p^{(1)'}(k_\alpha b) J_p(\xi b) \right]. \end{aligned}$$

Ci-dessus on a utilisé la relation  $i^p J_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \cos\theta + p\theta)} d\theta$ . Finalement

$$I_b^\alpha(\xi) = \frac{2\pi n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} i^p \left[ (\xi b) H_p^{(1)}(k_\alpha b) J_p'(\xi b) - (k_\alpha b) H_p^{(1)'}(k_\alpha b) J_p(\xi b) \right]. \quad (\text{E.13})$$

## Calcul de l'intégrale le long du chemin $C_R$

Posons

$$I_R^\alpha(\xi) = \frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_{C_R} \left[ e^{i\xi x} \frac{\partial}{\partial r} \phi_p(k_\alpha r) - \phi_p(k_\alpha r) \frac{\partial}{\partial r} e^{i\xi x} \right]_{r=R} r d\theta, \quad (\text{E.14})$$

ici  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ . Calculons l'intégrale

$$I_{R_\infty}^\alpha = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R^\alpha. \quad (\text{E.15})$$

On a

$$I_R^\alpha(\xi) = \frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} (k_\alpha R) H_p^{(1)'}(k_\alpha R) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ip\theta} e^{i\xi R \cos\theta} d\theta$$

$$- \frac{n_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} i(\xi R) H_p^{(1)}(k_\alpha R) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ip\theta} e^{i\xi R \cos\theta} \cos\theta d\theta$$

Lorsque  $|k_\alpha R|$  devient grand, on a

$$H_p^{(1)}(k_\alpha R) \sim \frac{e^{ik_\alpha R}}{\sqrt{R}}$$

$$H_p^{(1)'}(k_\alpha R) \sim \frac{ie^{ik_\alpha R}}{\sqrt{R}}.$$

L'intégrale  $I_R^\alpha$  peut donc se mettre sous la forme

$$I_R^\alpha(\xi) \simeq \frac{n_0 e^{i\xi x_1} i k_\alpha}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \sqrt{R} e^{ik_\alpha R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\xi R \cos\theta} \left(1 - \frac{\xi}{k_\alpha} \cos\theta\right) e^{ip\theta} d\theta.$$

L'évaluation de cette dernière intégrale doit être faite par la méthode de la phase stationnaire. Pour ce faire, on pose

$$A(\theta) = \left(1 - \frac{\xi}{k_\alpha} \cos\theta\right) e^{ip\theta}$$

et

$$q(\theta) = i\xi \cos\theta.$$

L'intégrale  $I_R^\alpha(\xi)$  devient alors

$$I_R^\alpha(\xi) = \frac{in_0 e^{i\xi x_1} k_\alpha \sqrt{R} e^{ik_\alpha R}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A(\theta) e^{Rq(\theta)} d\theta.$$

La méthode de la phase stationnaire appliquée à l'intégrale précédente donne

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} A(\theta) e^{Rq(\theta)} d\theta \simeq \left[ \frac{-2\pi}{Rq''(\theta_s)} \right]^{1/2} A(\theta_s) e^{Rq(\theta_s)}$$

où  $\theta_s$  est un point selle de  $q$ .

On a  $q'(\theta) = -i\xi \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_s = 0$ . On a un seul point selle  $\theta_s = 0$ .

On a  $h''(\theta_s) = -i\xi \neq 0$  et  $h(\theta_s) = i\xi$ .

Donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\xi R \cos\theta} \left[1 - \frac{\xi}{k_\alpha}\right] e^{ip\theta} d\theta \simeq \left[ \frac{2\pi}{Ri\xi} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{\xi}{k_\alpha}\right] e^{iR\xi}$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{R}} \left[ \frac{2\pi}{i\xi} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{\xi}{k_\alpha}\right] e^{iR\xi}.$$

Finalement on a

$$I_R^\alpha(\xi) = \frac{in_0 e^{i\xi x_1}}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} k_\alpha \sqrt{R} e^{ik_\alpha R} \frac{1}{\sqrt{R}} \left[ \frac{2\pi}{i\xi} \right]^{1/2} \left(1 - \frac{\xi}{k_\alpha}\right) e^{iR\xi}.$$

et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R^\alpha(\xi) = 0 \tag{E.16}$$

car  $e^{i\xi R} \rightarrow 0$  lorsque  $R \rightarrow \infty$  ( $\xi = \xi' + i\xi''$  avec  $\xi'' > 0$ ).

On obtient en fin de compte

$$I_p^\alpha(\xi) = \frac{n_0 2i^{p+1}}{k_\alpha(\xi - k_\alpha)} e^{ik_\alpha x_1} + \frac{2\pi n_0 e^{i\xi x_1}}{\xi^2 - k_\alpha^2} i^p \left[ \xi b H_p^{(1)}(k_\alpha b) J_p'(\xi b) - k_\alpha b H_p^{(1)'}(k_\alpha b) J_p(\xi b) \right].$$

On peut poser

$$N_p^\alpha(\xi) = \xi b H_p^{(1)}(k_\alpha b) J_p'(\xi b) - k_\alpha b H_p^{(1)'}(k_\alpha b) J_p(\xi b).$$

D'où

$$I_p^\alpha(\xi) = i^p \left[ \frac{2in_0}{k_\alpha(\xi - k_\alpha)} e^{ik_\alpha x_1} + \frac{2\pi n_0}{(\xi^2 - k_\alpha^2)} N_p^\alpha(\xi) e^{i\xi x_1} \right]. \quad (\text{E.17})$$

## Annexe F

# Equation de la diffusion par une cavité cylindrique fluide dans un milieu élastique

L'équation régissant la diffusion par une cavité fluide cylindrique dans un milieu élastique en utilisant les conditions de continuité des vecteurs déplacements et du tenseur des contraintes à l'interface  $r = a$  ( $a$  rayon du cylindre) donne sous forme matricielle pour un mode  $n \in \mathbb{Z}$  [24] :

– pour l'onde longitudinale incidente  $L$

$$\begin{bmatrix} -\rho_0 x_L H_n^{(1)'}(x_L) & -n\rho_0 H_n^{(1)}(x_T) & -x_0 \rho_s x_0 J_n'(x_0) \\ 2x_L H_n^{(1)'}(x_L) + (x_T^2 - 2n^2) H_n^{(1)}(x_L) & 2n [x_T H_n^{(1)'}(x_T) - H_n^{(1)}(x_T)] & x_T^2 J_n(x_0) \\ -2n (H_n^{(1)}(x_L) - x_L H_n^{(1)'}(x_L)) & 2x_T H_n^{(1)}(x_T)' + (x_T^2 - 2n^2) H_n^{(1)}(x_T) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_n^{LL} \\ T_n^{LT} \\ E_n^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 x_L J_n'(x_L) \\ -2x_L J_n'(x_L) - (x_T^2 - 2n^2) J_n(x_L) \\ 2n (J_n(x_L) - x_L J_n'(x_L)) \end{bmatrix}$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique du fluide dans la cavité cylindrique,  $\rho_s$  la masse volumique du milieu élastique,  $x_L = k_L a$ ,  $x_T = k_T a$ ,  $x_0 = k_0 a$ .  $k_L$  nombre d'onde de l'onde longitudinale  $L$  et  $k_T$  le nombre d'onde de l'onde transversale  $T$  dans le milieu élastique sans diffuseurs.  $k_0$  le nombre d'onde du fluide.

– pour l'onde transversale incidente  $T$  :

On a la même équation matricielle sauf le deuxième membre (vecteur source) c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} -\rho_0 x_L H_n^{(1)'}(x_L) & -n\rho_0 H_n^{(1)}(x_T) & -x_0 \rho_s x_0 J_n'(x_0) \\ 2x_L H_n^{(1)'}(x_L) + (x_T^2 - 2n^2) H_n^{(1)}(x_L) & 2n [x_T H_n^{(1)'}(x_T) - H_n^{(1)}(x_T)] & x_T^2 J_n(x_0) \\ -2n (H_n^{(1)}(x_L) - x_L H_n^{(1)'}(x_L)) & 2x_T H_n^{(1)}(x_T)' + (x_T^2 - 2n^2) H_n^{(1)}(x_T) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_n^{TL} \\ T_n^{TT} \\ E_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 x_T J_n'(x_T) \\ 2n (J_n(x_T) - x_T J_n'(x_T)) \\ -2x_T J_n'(x_T) - (x_T^2 - 2n^2) J_n(x_T) \end{bmatrix}.$$

$T_n^{LL}$  et  $T_n^{LT}$  sont les inconnues à déterminer caractérisant la diffusion de l'onde incidente  $L$  dans le milieu élastique (respectivement  $T_n^{TT}$  et  $T_n^{TL}$  pour l'onde  $T$ ).  $E_n^L$  est le coefficient de transmission caractérisant la diffusion de l'onde incidente  $L$  dans la cavité fluide (respectivement  $E_n^T$  pour l'onde  $T$ ). Les doubles exposants  $LL$ ,  $LT$ ,  $TL$  et  $TT$  représentent respectivement les conversions  $L \rightarrow L$ ,  $L \rightarrow T$ ,  $T \rightarrow L$  et  $T \rightarrow T$ .

---



# Bibliographie

- [1] L. Foldy, *The multiple scattering of waves. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers*, Phys. Rev. 67 (1945), 107-119.
- [2] M. Lax, *Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense systems*, Phys. Rev. 85 (4) (1952), 621-629.
- [3] G. Taylor, *The two coefficients of viscosity for a liquid containing air bubbles*, Proc. R. Soc. A, 226 (1954), 34-39.
- [4] M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid*, J. Acoust. Soc. Am. 28, (1956), 168-191.
- [5] M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. High-frequency range*, J. Acoust. Soc. Am. 28, (1956), 179-191.
- [6] P. C. Waterman, R. Truell, *Multiple scattering of waves*, Journal of Mathematical Physics, 2 (4) (1961), 512-537.
- [7] R. C. Bourret, *propagation of randomly perturbed fields*, Can. J. Phys, 40 (1962), 782-790.
- [8] K. Furutsu, *On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium*. J. Res. N. B. S, 67 (1963), 303-323.
- [9] V. Twersky, *Acoustic bulk parameters of random distribution of small scatterers*, J. Acoust. Soc. Am. 36 (1964), 1314-1326.
- [10] V. Twersky, *On propagation in random media of discrete scatterers*, Proc. Symp. Appl. Math. 16 (1964), 84-116.
- [11] F.C. Karal, J.B. Keller, *Elastic electromagnetic and other waves in random medium*, J. Math. Phys. 5(10) (1964), 537-547.
- [12] J. G. Fikioris, P. C. Waterman, *Multiple scattering of waves. II. Hole corrections in the scalar case*, J. Math. Phys. 5(10) (1964), 1413-1420.
- [13] P. Lloyd and M. V. Berry, *Wave propagation through an assembly of spheres IV. Relations between different multiple scattering theories*, Proc. Phys. Soc. 91 (1967), 678-688.
- [14] M. Abramowicz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover New-York, 1974.
- [15] A. E. Scheidegger, *The Physics of Flow Through Porous Media*, University of Toronto Press, Toronto, Canada, (1974).
- [16] R.D. Stoll, *Acoustic waves in saturated sediments*, In L. Hampton, editor, Physics of Sound in Marine Sediments, 19- 39. Plenum, 1974.
- [17] G. T. Kuster and M. Nafi Toksöz, *Velocity and attenuation of seismic waves in two phase media : part I. Theoretical Formulation*, Part II : Experimental Results, Geophysics 39 (1974), 587-618.
- [18] S. K. Bose and A. K. Mal, *Elastic waves in a fiber- reinforced composite*, J. Mech. Phys. Solids, 22 (1974), 217-229.
- [19] R. M. Christensen, *Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models*, J. Mech. Phys. Solids 27 (1979), 315-330.

- [20] J. G. Berryman, *Elastic wave propagation in fluid saturated porous media*, J. Acoust. Soc. Am. 69 (2) (1981), 416-424.
- [21] R. D. Stoll, T. K. Kan, *Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface*, J. Acoust. Soc. Am. 70 (1981), 149-156.
- [22] G. C. Gaunaurd, H. Uberall, *Resonance theory of bubbly liquids*, J. Acoust. Soc. Am. 69 (2) (1981), 362-370.
- [23] M. Kotlarchyk, S. H. Chen, *Analysis of small angle neutron scattering spectra from polydisperse interacting colloids*, J. Chem. Phys. 79 (1983), 2461-2469.
- [24] S. G. Solomon, H. Uberall, and K. B. Yoo, *Mode conversion and resonance scattering of elastic waves from a cylindrical fluid-filled cavity*, Acustica 55 (1984), 147-159.
- [25] V. K. Varadan, Y. Ma and V. V. Varadan, *Multiple scattering of compressional and shear waves by fiber reinforced composite materials*, J. Acoust. Soc. Am. 80 (1986), 333-339.
- [26] T. Bourbi, O. Coussy, and B. Zinszner, *Acoustique des milieux poreux*, Ed. Technip, 1986.
- [27] D. L. Johnson, J. Koplik, R. Dashen, *Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media*, J. Fluid Mech. 176 (1987), 379-402.
- [28] F. J. Sabina and J. R. Willis, *A simple self-consistent analysis of wave propagation in particulate composites*, Wave Motion 10 (1988), 127-142.
- [29] D. Sornette, *Acoustic waves in random media I. Weak disorder regime*. Acustica, 67(40) (1989), 199- 264.
- [30] W. B. Russell, D. A. Saville, W. R. Schowalter, *Colloidal dispersions*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1989).
- [31] D. L. Johnson, T. J. Plona and H. Kojima, *Probing porous media with first and second sound. II. Acoustic properties of water-saturated porous media*, J. Appl. Phys. 76(1) (1994), 115-125.
- [32] P. Sheng, *Introduction to wave scattering, localization, and mesoscopic phenomena*. Academic Press Inc (1995), 40-43.
- [33] Y. Xu, *Fast evaluation of the Gaunt coefficients*, Mathematics of Computation of the American Mathematical Society, 65 (216) (1996), 1601-1612.
- [34] D. Gazzillo, A. Giacometti, R. Guido Della Valle, E. Venuti, F. Carsughi, *A scaling approximation for structure factors in the integral equation theory of polydisperse nonionic colloidal fluids*, arXiv :cond-mat/9907359v3 [cond-mat.stat-mech] 15 Oct 1999.
- [35] R. K. Pandey, D. N. Tripathi, *Schulz distribution function and the polydispersity of the binary suspension of charged macroions*, Colloids and Surfaces : Physicochemical and Engineering Aspects 190 (2001), 217-227.
- [36] J. M. Conoir, F. Luppé, F. Hervé, *Scattering by a fluid cylinder in a porous medium : application to trabecular bone*, JASA 111 (2002), 2573-2582.
- [37] S. Torquato, *Random heterogeneous materials*, Springer (2002),
- [38] V. Tournat, V. Pagneux, D. Lafarge, and L. Jaouen, *Multiple scattering of acoustic waves and porous absorbing media*. Phys. Rev. E 70, 026609 (2004)
- [39] Y. C. Angel and C. Aristégui, *Analysis of sound propagation in a fluid through a screen of scatterers*, J. Acoust. Soc. Am. 118 (1) (2005), 72-82.
- [40] S. M. Hasheminejad and N. Safari, *Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids*, J. Sound. Vib. 280 (2005), 101-125.
- [41] C. M. Linton and P. A. Martin, *Multiple scattering by random configurations of circular cylinders : Second-order corrections for the effective wavenumber*, J. Acoust. Soc. Am. 117(6) (2005), 3413-3423.

- [42] R. E. Challis, M. J. W. Povey, M. L. Mather, A. K. Holmes, *Ultrasound techniques for characterizing colloidal dispersions*, Rep. Prog. Phys. 68 (2005), 1541-1637.
- [43] M. W. Lee, *Proposed moduli of dry rock and their application to predicting elastic velocities of sandstones*, U.S. Geological Survey Scientific Investigations Report 2005-5119, (2005) 14 p. , available on <http://pubs.usgs.gov/sir/2005/5119/pdf/SIR-2005-5119.pdf>
- [44] P.A. Martin, *Multiple Scattering : Interaction of Time-harmonic Waves with N Obstacles*, Cambridge, New York, 2006.
- [45] C. Linton, and P. Martin, *Multiple Scattering by Multiple Spheres : A New Proof of the Lloyd-Berry Formula for the Effective Wavenumber*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 66 (5) (2006), 1649-1668.
- [46] P. A. Martin, *Multiple Scattering*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006.
- [47] K. Krishnamoorthy, *Handbook of Statistical Distributions with Applications*, Chapman - Hall, 2006.
- [48] C. Aristégui and Y. Angel, *Effective mass density and stiffness derived from P-wave multiple scattering*, Wave Motion 44 (2007), 153-164.
- [49] F. Luppé, J. M. Conoir and S. Robert, *Coherent waves in a multiply scattering poro-elastic medium obeying Biot's theory*, W. Rand. Comp. Media 18 (2) (2008), 241-254.
- [50] V. Leroy, A. Strybulevych, J. H. Page, M. G. Scanlon, *Sound velocity and attenuation in bubbly gels measured by transmission experiments*, J. Acoust. Soc. Am., 123 (4) (2008) 1931-1940
- [51] A. Norris, J. M. Conoir, *Effective wavenumbers and reflection coefficients for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers*, Wave Motion 47,(2010), 183-197.
- [52] A. Norris, J. M. Conoir, *Multiple scattering by cylinders immersed in fluid : High order approximations for the effective wavenumbers*, JASA 129 (2011), 104-113.
- [53] F. Luppe, J. M Conoir, A. Norris, *Effective wave numbers for thermo-viscoelastic media containing random configurations of spherical scatterers*, JASA. 131 (2012), 1113-1120.
- [54] B. Mascaro, T. Brunet, O. Poncelet, C. Aristégui, S. Raffy, O. Mondain-Monval, J. Leng, *Impact of polydispersity on multipolar resonant scattering in emulsions*, The Journal of the Acoustical Society of America, 133(4) (2013), 1996-2003.
- [55] H. Franklin, F.Luppé , J.M.Conoir, *Multiple scattering in porous media : Comparison with water saturated double porosity media*, J. Acoust. Soc. Am. 135 (5) (2014), 2513-2522.
- [56] H. Franklin, *Rayleigh limits for effective wavenumbers of randomly distributed porous cylinders. Comparison of explicit and implicit methods*, Wave Motion, 66 (2016), 106-117.
- [57] V. J. Pinfield, D. M. Forrester, *Multiple scattering in random dispersions of spherical scatterers : Effects of shear-acoustic interactions*, J. Acoust. Soc. Am. 141 (1) (2017), 649-660.
- [58] D. Gnadjro, H. Franklin, A. S. d'Almeida, *Limites de Rayleigh des nombres d'ondes effectifs dans une matrice poroélastique contenant des cylindres parallèles aléatoirement répartis*. Congrès Français de Mécanique à Lille (2017).
- [59] D. Gnadjro, H. Franklin, A. S. d'Almeida, *Low frequency approximations for effective wavenumbers and moduli of randomly perforated poroelastic media*. Wave Motion 79 (2018), 98-111.
- [60] D. Gnadjro, H. Franklin, A. S. d'Almeida, *Effet de la porosité des obstacles sur la propagation à basse fréquence à travers des assemblages polydispersés aléatoires*. Congrès Français de Mécanique à Brest (2019).
- [61] D. Gnadjro, H. Franklin, A. S. d'Almeida, *Low frequency propagation through random poly-disperse assemblies of porous obstacles*. (Soumis au publication dans le journal JASA en avril 2019)