A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un "environnement calculatrice" : étude des rapports entre processus d'instrumentation et processus de conceptualisation

Luc Trouche

▶ **To cite this version:**

Luc Trouche. A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un "environnement calculatrice" : étude des rapports entre processus d'instrumentation et processus de conceptualisation. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Montpellier 2, 1996. Français. NNT : . tel-02374810

HAL Id: tel-02374810
https://theses.hal.science/tel-02374810

Submitted on 3 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADEMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITE MONTPELLIER II

SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THÈSE

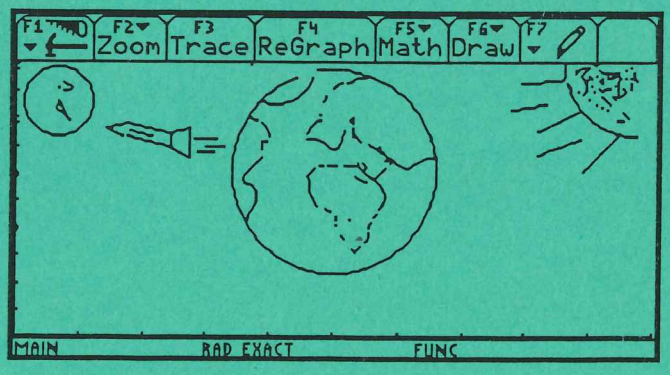
Présentée à l'Université de Montpellier II Sciences et Techniques du Languedoc pour obtenir le diplôme de DOCTORAT

Spécialité : Sciences de l'éducation.
Formation Doctorale : Didactique des Disciplines Scientifiques

A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans "un environnement calculatrice" :

Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation.

Par Luc TROUCHE



Volume 1

Soutenue le 14 Décembre 1996 devant le Jury composé de :

Michèle ARTIGUE	Professeur, IUFM de Reims, rapporteur
Dominique GUIN	Professeur, Université Montpellier II, directrice de thèse
Yves LADEGAILLERIE	Professeur, IUFM de Montpellier
Sylvette MAURY	Professeur, Université de Paris V, rapporteur
Gérard MICHAILLE	Maître de conférences, Université Montpellier II
Marc ROGALSKI	Professeur, Université de Lille I.

Résumé

L'étude épistémologique fait apparaître trois points de vue sur les limites de fonctions : cinématique, algébrique et "approximation". C'est ce dernier point de vue qui a permis la stabilisation du concept.

Après beaucoup d'oscillations, les programmes d'enseignement en France ont renoncé à donner une définition construite de la notion de limite dans les classes de lycée, prônant une simple utilisation du "langage des limites". **Dans la pratique, cet enseignement se réduit à un travail algébrique sur les limites.**

Les calculatrices graphiques, non prises en compte par l'institution scolaire, sont de plus en plus utilisées par les élèves. Une enquête réalisée en Terminale et en première année universitaire montre **l'influence de ces outils qui renforcent chez les élèves une conception monotone des limites, liée au point de vue cinématique.**

Le point de vue "approximation" ne ressort ainsi ni de l'enseignement reçu, ni de l'utilisation des calculatrices.

Une observation plus suivie d'une classe dans laquelle les calculatrices graphiques puis symboliques sont intégrées par le professeur indique que l'influence des outils de calcul est plus ou moins grande suivant les élèves : **les processus d'instrumentation dépendent des caractéristiques cognitives des élèves.**

Cette thèse met en évidence :

- **cinq profils d'élèves** (liés aux métaconnaissances essentielles : l'investigation, le stockage, la comparaison, l'interprétation, l'inférence et le contrôle général sur l'activité) ;

- **les rapports différents pour chacun de ces types entre les processus d'instrumentation et les processus de conceptualisation.**

Cette thèse débouche sur la nécessité, pour contrôler les outils, de trois prises en compte :

- **une prise en compte épistémologique** : on ne peut pas parler d'un concept -les limites- sans s'intéresser à son sens ;

- **une prise en compte technologique** : l'intégration des outils de calcul est de la responsabilité du professeur ;

- **une prise en compte psychologique** : l'attention portée aux profils d'élèves est une condition de la gestion de la classe, encore plus nécessaire dans une activité avec instruments.

Introduction.

Au bout du compte,
nous finissons tous par dépendre
des créatures que nous avons faites.
Méphisto dans le Faust de Goethe,
in [Lecourt 1996].

Il suffit de considérer une classe de lycée, pendant un cours de mathématiques, pour relever l'écart considérable qui s'est creusé, en vingt ans, entre l'environnement des élèves et celui du professeur :

- tous les élèves ont désormais une "machine à calculer" (de plus en plus sophistiquée) sur leur table, avec un écran (de plus en plus grand) ;
- le professeur dispose toujours d'un tableau noir, d'une estrade, de craies, d'un chiffon. L'environnement de son travail n'a pas changé depuis vingt ans.

Zoom arrière, sur cette évolution sociale.

Depuis l'avènement de la télévision en couleur, les "machines à voir" ont envahi notre espace.

Machines à voir, machines avoir.

Paradoxe apparent : en même temps qu'il y a dématérialisation des supports de représentation, il y a matérialisation de la chose représentée [Debray, 1992]. La représentation (d'une fonction... ou du monde) devient présentation. Comprendre, c'est désormais prendre. Prendre, c'est désormais voir.

Machines pour voir, machines pouvoir.

Dans le même mouvement, l'illusion de posséder ce que l'on ne "fait" que voir, donne l'illusion de l'action. On se rappelle les "frappes chirurgicales" dans la dernière guerre contre l'Irak. Sur nos écrans de télé se dessinaient les écrans des avions de chasse, les zooms successifs et l'explosion finale. Ce n'est rien d'autres que nos élèves font, pour localiser la racine d'une équation sur leurs écrans. Au bout de leurs approches successives, une valeur chirurgicalement exacte. Tellement vraie, qu'elle est fausse.

Zoom arrière, sur cette évolution historique.

On peut lire cette évolution à travers le débat sur la légitimité des images. Débat qui n'a pas cessé depuis les controverses entre iconoclastes et iconodules (cf le Concile de Nicée...).

Ou le lire à travers les grands mythes qui, sous différents masques, traduisent les bouleversements sociaux.

D. Lecourt écrit :

> *"Le trait qui unit Faust et Prométhée n'est autre que le culte de l'action. Il dessine ce qui aura été le destin de l'Occident, celui d'une bête de proie qui culmine dans l'idée de la machine comme "petit cosmos qui n'obéit plus qu'à la volonté de l'homme""* [Lecourt, 1996].

Pour ce qui concerne l'évolution récente, D. Lecourt écrit :

> *"Faust et Frankenstein triomphent dans les toutes premières années du XIX e siècle et donnent le spectacle de leur hésitation entre magie et science, même si l'un et l'autre prennent en fin de compte le parti de la seconde, pour le meilleur (Faust) ou pour le pire (Frankenstein). Le siècle des Lumières se clôt sur cette indécision, le siècle du positivisme s'ouvre sur ce vertige".*

Double zoom avant et retour.

Retour donc à la classe, au professeur et son tableau noir, aux élèves et à leur machine.

Nous voudrions montrer dans cette thèse le caractère indispensable pour un enseignant d'une triple compréhension : compréhension de l'évolution de la discipline, compréhension de l'évolution des élèves, compréhension de l'évolution des outils.

Et plus profondément, de la compréhension des rapports entre le travail avec des instruments, le comportement des élèves et la nature des connaissances construites.

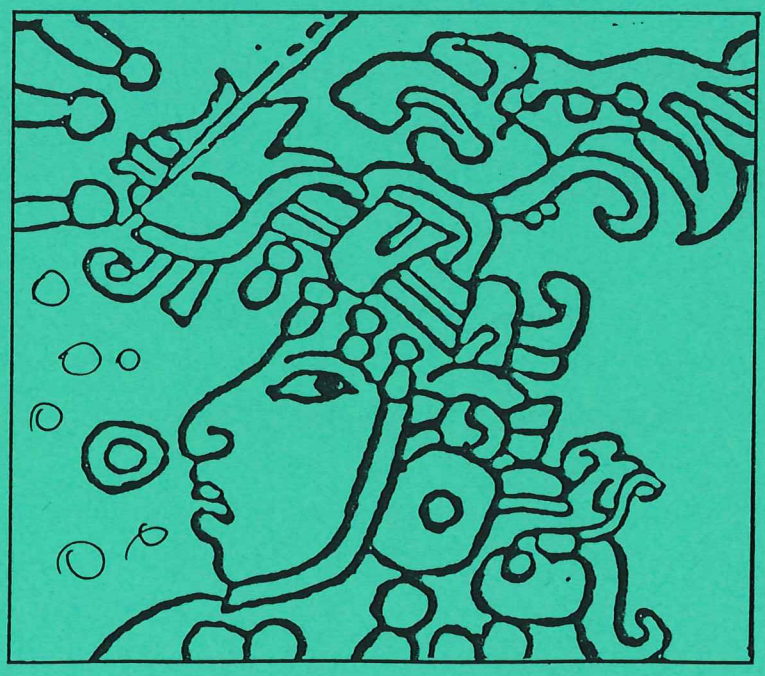
Compréhension, non pas pour s'adapter, mais pour agir.
Il y va de la formation de "l'esprit scientifique" et au delà de "l'esprit citoyen".

A la place du vertige, la lucidité.

0 Prologue.

Mais je veux dire clairement que notre capacité
à restituer l'expérience en terme de récits
n'est pas seulement un jeu d'enfant :
c'est un outil pour fabriquer de la signification,
qui domine l'essentiel de notre vie
au sein d'une culture,
depuis nos soliloques au moment de nous endormir,
jusqu'au poids du testament
dans notre système judiciaire.

Bruner



Sommaire du prologue (Chapitre 0)

0.a Voir (genèse d'une thèse) : une histoire personnelle p.9

0.a.1 Jeune professeur, la difficulté du métier.
0.a.2. Vieil étudiant, l'intérêt pour l'apprentissage.
0.a.3. Chercheur en herbe, la complexité des choses.
- 0.a.3.i. L'image a l'autorité de la chose jugée.
- 0.a.3.ii. Conciliation de résultats contradictoires.
- 0.a.3.iii. Un puzzle improbable.
- 0.a.3.iv Une forte contextualisation.
- 0.a.3.v. Contagion du signifiant sur le signifié.

0.b. Comprendre, (cadre théorique) : une histoire universelle p.15

0.b.1. Magie et image ont mêmes lettres et c'est justice. p.17
- 0.b.1.i. Une perspective épistémologique : les obstacles (Bachelard).
- 0.b.1.ii. Une perspective historique : la vidéosphère (Debray).
- 0.b.1.iii Une perspective philosophique : le sur-rationalisme (Bachelard).

0.b.2. Images du sujet, de la société, de l'apprentissage. p.21
- 0.b.2.i. Processus auto-régulés ou interactions dyssymétriques.
- 0.b.2.ii. Situations didactiques, situations a-didactiques (Brousseau).
- 0.b.2.iii. Un point de vue anthropologique : Chevallard..
- 0.b.2.iv. L'interaction sociale, moteur des processus de preuve (Balacheff).
- 0.b.2.v Chaque mot est un microcosme de la pensée humaine (Vygotski).

0.b.3. Concepts, conceptions et comportements. p.27
- 0.b.3.i. La conceptualisation : un processus (Vergnaud).
- 0.b.3.ii. La transposition didactique (Chevallard).
- 0.b.3.iii. Conceptions locales et globales (Artigue).
- 0.b.3.iv. Métaconnaissances, processus de contrôle (Pitrat, Robert, Houdé).

0.b.4. Les images, entre icônes, indices et symboles. p.38
- 0.b.4.i. Du texte aux images, une coordination à géométrie variable.
- 0.b.4.ii. D'une traduction au texte original : tradutore, traditore ?
- 0.b.4.iii. Registre, cadre... Changer, mais de quoi ?(Douady, Duval)

0.b.5. Images que l'on a de l'instrument, images produites par l'instrument. p.44
- 0.b.5.i. Une hagiographie fondée sur les métaphores.
- 0.b.5.ii. Points de vue de didacticiens (Artigue).
- 0.b.5.iii. La transposition informatique (Balacheff).
- 0.b.5.iv. Un point de vue de la psychologie du travail (Rabardel).

0.c. Chercher (méthodologie) : une histoire... sans fin. p.51

0.c.1. Sur la lancée d'un DEA. p.51
- 0.c.1.i. Le statut des objets techniques.
- 0.c.1.ii. L'influence sur la conceptualisation.
- 0.c.1.iii. L'influence sur les comportements.

0.c.2. Mesurer l'influence de la calculatrice sur les conceptions. Orientation. p.59
- 0.c.2.i. Les critères pour le choix d'un sujet.
- 0.c.2.ii. Les critères pour le choix d'un terrain.
- 0.c.2.iii. Une nouvelle remise en question, théorique et pratique.

0.c.3. Contrôler la genèse instrumentale. Réorientation. p.63
- 0.c.3.i. Une meilleure connaissance d'ensemble.
- 0.c.3.ii. Un recueil d'information multiformes.

Quels sont les problèmes qui ont été à l'origine de cette thèse ?

Quels sont les fondements théoriques sur lesquels repose l'édifice ?

Quels sont les hypothèses qui soustendent ce travail ?

Il s'agit de délimiter un champ opératoire.

Problématique, cadre théorique et méthodologie vont être ici définis.

Thèse, chapitre 0.

0 a. Voir.

Genèse d'une thèse. (Une histoire personnelle).

Je dois mon premier contact précis
avec la notion d'infini
à une boîte de cacao de marque hollandaise,
matière première de mes petits déjeuners.
Michel Leiris, cité par [Fischetti, 1996].

Il est de tradition de commencer une thèse par la présentation d'une problématique, d'un cadre théorique et d'une méthodologie. On ne dérogera pas à cette coutume.

Ou très légèrement, en faisant d'abord un petit pas de côté ou en arrière.

On reconstituera ici l'itinéraire qui a amené à cette thèse. La genèse d'une thèse fait aussi partie d'une thèse.

0.a.1 Jeune professeur : la difficulté du métier.

1975, pour commencer une carrière de professeur de mathématiques, était une période singulière :

- il y avait à la fois un effort considérable de l'institution pour former les professeurs de mathématiques aux "math modernes" (2 heures de formation hebdomadaires sur le temps de travail...) et en même temps une critique qui montait contre les effets de cette réforme et qui allait déboucher sur la contre réforme de 1982 (voir sur ce point cette thèse en I.b.2.). Sur le plan des programmes, c'était donc une période charnière ;

- c'est l'époque où les calculatrices "4 opérations" apparaissent sur le marché. Elles vont être suivies bientôt par des calculatrices scientifiques, puis graphiques et envahir les salles de classe. Les professeurs débutant en 1975, qui ont fait toutes leurs études scientifiques avec la règle à calcul et les tables numériques, commencent leur vie professionnelle alors même que ces instruments de calcul tombent en désuétude. Sur le plan des outils de calcul, c'était donc aussi une période charnière.

Et pourtant, ce n'est qu'avec le recul que cette période apparaît comme telle. Sur le moment, ma principale préoccupation était d'assurer les cours à des classes difficiles (déjà...), sans réaliser les modifications profondes de l'enseignement des mathématiques qui étaient en gestation. Cette relative indifférence n'est pas surprenante : toutes les études montrent bien que les professeurs stagiaires, ou rentrant dans le métier, ont une pratique professionnelle dans la continuité de leurs prédécesseurs (voir par exemple l'étude de R. Bernard [Bernard et alii, 1996]).

Se souvenir de ces premières années d'enseignement aide souvent à avoir un jugement plus nuancé sur les stagiaires que nous pouvons rencontrer dans les IUFM...

Il a fallu 10 ans d'enseignement pour commencer à réfléchir sur ma propre pratique. Cela débouche sur un engagement à l'IREM de Montpellier, dans une équipe travaillant sur le soutien aux élèves en difficulté, puis dans une équipe "lycée" qui réfléchit sur l'effet des réformes de l'enseignement des mathématiques.

0.a.2 Vieil étudiant : l'intérêt pour l'apprentissage.

Cette implication dans la formation des maîtres nécessite une formation personnelle, à la fois sur la discipline (en 15 ans, on a à peu près tout oublié en Mathématiques...) et sur l'enseignement de la discipline. D'où la préparation de l'Agrégation interne de mathématiques et la participation à diverses Universités d'été.

De façon paradoxale (ou faussement paradoxale), c'est la préparation de l'Agrégation qui m'a fait le plus réfléchir sur les mécanismes d'apprentissage :
- d'où vient l'impression de mieux comprendre à 40 ans qu'à 20 ans ?
- qu'appelle-t-on "le recul" sur une notion ?
- qu'est ce qu'une "référence" en mathématiques ?
- quelles sont les relations entre les activités de coordination, d'interprétation, d'inférence ?

En même temps et sur le plan théorique cette fois, une réflexion-nouvelle pour moi- sur le calcul numérique, son contrôle, l'étude qualitative des équations différentielles, donnait une perspective nouvelle à l'utilisation des outils de calcul.
Sur cet élan, je préparais un DEA en didactique des disciplines scientifiques, se concluant par un mémoire consacré au statut des calculatrices graphiques pour les élèves et les maîtres [Trouche, 1992].

0.a.3 Chercheur en herbe : la complexité des choses.

Cette période d'études-bouffée d'oxygène se prolonge par un investissement dans l'équipe "Analyse" de l'IREM qui recentre ses travaux autour de l'intégration des calculatrices graphiques dans les lycées (conditions, viabilité et effets induits).

En même temps, les titres des articles que j'écris sur la lancée du DEA témoignent d'un certain scepticisme ou, pour le moins, d'une certaine perplexité ("La grande illusion", "Anatomie d'une déréglementation", "Masques", "Par delà les nuages", "Révélation, ou mystification ?", cf bibliographie).

La raison en est simple : l'espoir d'une intégration "sans douleur" des calculatrices dans mes propres classes ne résiste pas à l'expérience. Et ce n'est pas faute de volonté de ma part, ou de manque de vigilance, ou de cadres adéquats : des séances de présentation des outils sont organisées, leurs potentialités et leurs faiblesses sont exposées, des TP d'application mis en place, une calculatrice rétroprojetable régulièrement utilisée.

Et pourtant, pourrait-on dire en paraphrasant Galilée, les élèves se trompent et se trompent encore.

Quelques résultats de mes remarques "d'observateur engagé", pour illustrer cette perplexité :

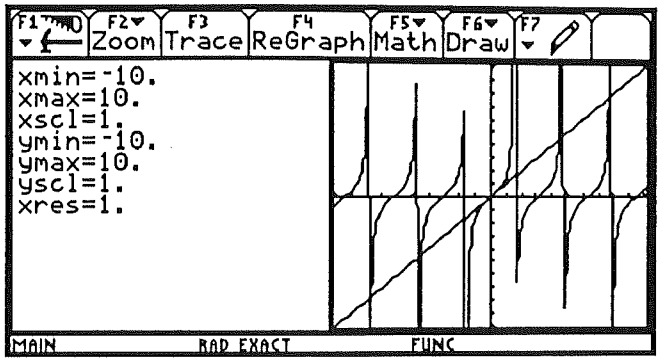
0.a.3.i. L'image de la calculatrice a, la plupart du temps, l'autorité de la chose jugée :

A la question : "combien l'équation x = tanx a-t-elle de solutions ?", la réponse

des élèves est 5, ou 6 (suivant la calculatrice possédée) [1].

Ces élèves oublient l'étude des branches infinies de la fonction tangente et "se fient" à leur écran [Trouche 1994 a].

Le poids des images, le choc des notions...



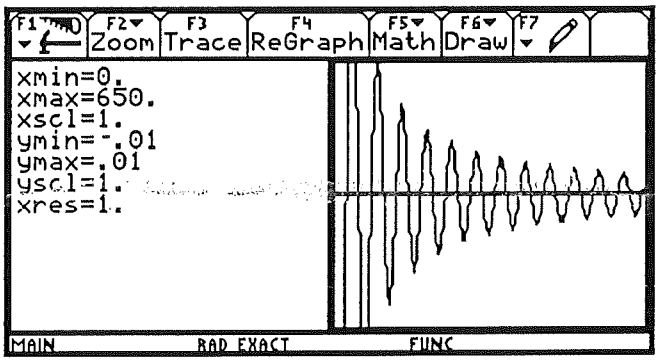
0.a.3.ii. Des résultats contradictoires peuvent coexister sans problèmes apparents :

Ainsi, on demande [Trouche, 1995 b] à des élèves de déterminer par le calcul le nombre de solutions de l'équation $\frac{\sin x}{x} = 0$ sur l'intervalle [0, 650].

Un peu plus tard, on leur demande de considérer graphiquement cette équation [2].

De nombreux élèves annoncent alors, après lecture graphique, un résultat contradictoire avec le résultat théorique établi.

C'est la vraie-fausse résolution d'équation.



0.a.3.iii. Les différentes images de l'écran, un puzzle improbable :

Ce n'est pas seulement entre les résultats théoriques et les résultats de la calculatrice que la coordination est difficile.

Entre deux images successives issues de la calculatrice, la coordination est problématique.

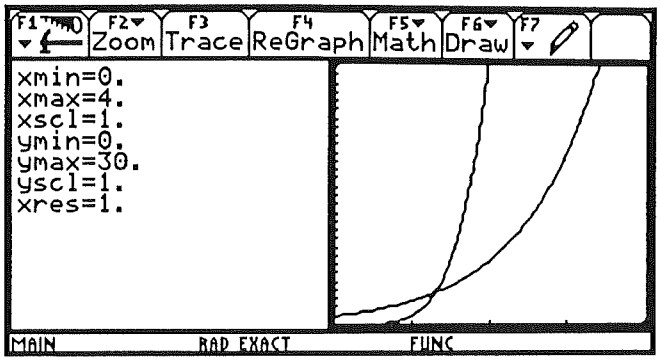
---

[1] Deux remarques :
- quand on dira "les élèves", ou "des élèves", il s'agira - simplification du langage - d'un "certain nombre d'élèves", dont des élèves dont on aurait pu imaginer, a priori, qu'ils auraient plus de "distance" avec l'écran de leur calculatrice ;
- les copies d'écran insérées dans ce chapitre sont issues de TI-92. Cela ne signifie pas bien sûr que les élèves disposaient d'un tel outil. Mais les écrans de ces machines, assez grands et pourvus d'une option de partage d'écran, sont assez commodes pour l'illustration des problèmes présentés ici.

[2] Le graphique apparamment paradoxal que l'on observe ici est dû aux phénomènes de discrétisation de l'écran (voir C. Faure [Faure et alii, 1993], ou la partie I.c.2. de cette thèse).

On s'intéresse ici à l'équation $e^x = x^5$ [Trouche 1995c].

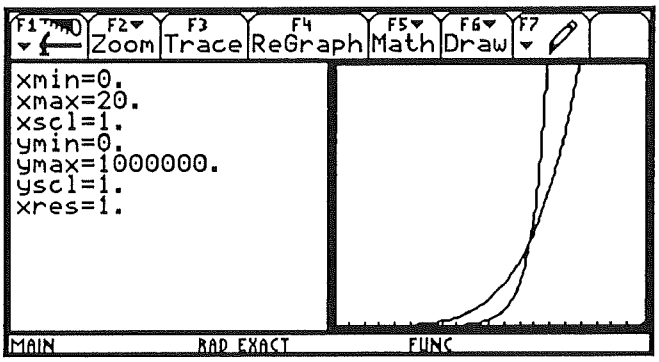
Un premier cadrage indique la présence probable d'une solution.



Un deuxième cadrage indique la présence aussi d'une solution.

Pour beaucoup d'élèves, il s'agira de la même (alors que le repérage des points en question "montre" que les deux solutions sont distinctes...).

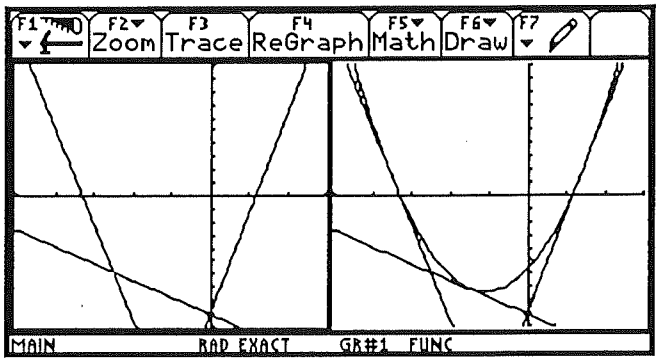
Peut-on dire que "trop d'images tue l'image" ?



0.a.3.iv. Une contextualisation très forte des résultats issus de l'expérience :

Dans [Trouche, 1995 a], nous évoquons la recherche expérimentale d'une parabole d'axe vertical tangente à trois droites données. Il s'agit d'adapter les trois coefficients a, b et c pour trouver une parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ convenable, en utilisant une calculatrice graphique. On observe que très vite la recherche des élèves s'organise de façon rationnelle (on bloque deux coefficients et on fait varier le dernier) : dans cette action, l'influence des trois coefficients apparaît. Par approches successives, les élèves arrivent assez vite à déterminer un objet correspondant (à peu près) à l'objet cherché.

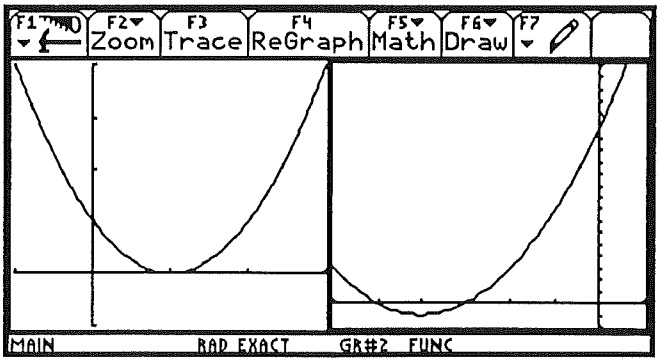
A gauche les trois droites données, à droite le problème résolu.



Il reste de cette activité le rôle des trois coefficients de la parabole. Ainsi, pour c, les élèves expriment le résultat suivant : *quand "c" augmente, la parabole monte, quand c diminue, la parabole descend.*

Même après proposition d'une nouvelle forme par le professeur (*"c" est l'ordonnée à l'origine de la courbe*), c'est le premier résultat, plus proche de l'expérience, qui est mémorisé.

Quand on demande alors le signe de c, pour les deux paraboles ci-contre, les élèves répondent que c = 0 pour la parabole de gauche *(la parabole est au niveau 0)* et c < 0 pour la parabole de droite *(la parabole est au dessus de l'axe des abscisses)*.



Le "théorème-élève" s'est ainsi stabilisé sous une forme liée au travail de recherche réalisé.

0.a.3.v. Une contagion très forte du "signifiant sur le signifié"

([Lerouge, 1992] cf 0.b.4.ii.)

Ainsi, toujours dans la même activité, des élèves donnent un contenu à l'expression "une droite est tangente à la parabole". On trouve comme définition :

"une droite est d'autant plus tangente à la parabole qu'elle a plus de points communs avec elle"...

Ce résultat découle directement du travail d'approche réalisé par les élèves : pour vérifier la qualité de la parabole envisagée, ils ont opéré des zooms successifs. La qualité du contact entre droite et parabole était d'autant "meilleure" que l'approximation affine était bonne, ce qui, sur un écran formé de pixels, se traduisait bien par plus ou moins de points communs à la droite et à la parabole.

L'activité avec une calculatrice crée donc d'une certaines façons ses propres résultats, ses propres objets. L'activité régulière avec une calculatrice stabilise ces résultats, ces objets.

C'est avec la volonté de comprendre les racines de ces phénomènes, pour pouvoir les contrôler, que s'est engagée la préparation de cette thèse. Pour comprendre, il faut des références.

D'où la nécessité d'un cadre théorique que nous allons délimiter maintenant.

0 b. Comprendre.

Cadre théorique.
(Une histoire universelle).

Si une théorie me convainquait,
elle ne me restait pas extérieure ;
elle changeait mon rapport au monde,
elle colorait mon expérience..
Simone de Beauvoir, La Force de l'Age.

On aurait pu faire le choix de définir un cadre théorique partagé entre différents champs : philosophique, psychologique, sociologique, didactique, sémiotique, informatique... Mais un tel partage, outre son aspect parfois artificiel, ne permet pas les confrontations de points de vue, souvent productrices.

D'ailleurs, plusieurs études récentes ont fait le choix d'un abord d'une même question avec des "lunettes" diverses (par exemple A. Robert [Robert et Baron, 1993]).

Sur un plan plus général, à propos des origines de la Raison, D. Lecourt ([Lecourt , 1996]) écrit :

> *"On ne saurait se satisfaire de l'état actuel des recherches qui épousent les divisions et sous-divisions des disciplines universitaires -historiens de l'Antiquité, de l'époque élisabéthaine, des religions, historiens des sciences, de la philosophie... La vision d'ensemble manque.*
>
> *Ce manque, on peut être tenté de l'attribuer à un défaut de communication entre les disciplines. Quitte à invoquer une fois de plus l'arlésienne de nos innombrables colloques : l'interdisciplinarité. Il renvoie plus profondément à une question philosophique obstinément refoulée. Cette question dûment posée réunirait dans la lumière de son foyer les recherches dispersées ; elle n'est autre que celle de la réalité à attribuer à l'imaginaire".*

On essaiera ici de combiner des approches différentes pour préciser les points décisifs sur lesquels nous nous appuierons ensuite :

les rapports entre les personnes et les institutions ;
les rapports entre concepts, conceptions, connaissances ;
les rapports entre registres, cadres et points de vue ;
les rapports entre les personnes et les outils ;

On choisira pour cela un fil conducteur, que l'on pourrait décliner en plusieurs mots de même racine : image, imagination, imaginaire.
Trois mots qui ne peuvent se comprendre que dans les rapports qu'ils entretiennent entre eux.

Bachelard écrit, dans L'Air et les Songes (1943) :

"La valeur d'une image se mesure à l'étendue de son auréole imaginaire. Grâce à l'imaginaire, l'imagination est essentiellement ouverte, évasive. Elle est dans le psychisme humain l'expérience même de l'ouverture, l'expérience même de la nouveauté".

0.b.1 Magie et image ont mêmes lettres, et c'est justice.

[Debray, 1992]

Trois perspectives pour comprendre le rapport aux images : une perspective épistémologique, une perspective historique, une perspective philosophique.

0.b.1.i. Une perspective épistémologique: les obstacles.

Dans "La formation de l'esprit scientifique", G. Bachelard décrit l'évolution de l'esprit scientifique comme un mouvement vers l'abstraction :

> *"Rendre géométrique la représentation, c'est à dire dessiner les phénomènes et ordonner en série les évènements décisifs d'une expérience, voilà la tâche première où s'affirme l'esprit scientifique. C'est en effet de cette manière qu'on arrive à la quantité figurée, à mi-chemin entre le concret et l'abstrait, dans une zone intermédiaire où l'esprit prétend concilier les mathématiques et l'expérience, les lois et les faits.*
>
> *Cette tâche de géométrisation qui sembla souvent réalisée - soit après le succès du cartésianisme, soit après le succès de la mécanique Newtonienne, soit encore après l'optique de Fresnel - en vient toujours à révéler une insuffisance. Tôt ou tard, dans la plupart des domaines, on est forcé de constater que cette première représentation géométrique, fondée sur un réalisme naïf des propriétés spatiales, implique des convenances plus cachées, des lois topologiques moins nettement solidaires des relations métriques immédiatement apparentes, bref des liens essentiels plus profonds que les liens de la représentation géométrique familière.*
>
> *On sent peu à peu le besoin de travailler pour ainsi dire sous l'espace, au niveau des relations essentielles qui soutiennent et l'espace et les phénomènes. La pensée scientifique est alors entraînée vers des "constructions" plus métaphoriques que réelles, vers des "espaces de configuration" dont l'espace sensible n'est, après tout, qu'un pauvre exemple (...) Si on médite sur l'évolution de l'esprit scientifique, on décèle bien vite un élan qui va du géométrique plus ou moins visuel à l'abstraction complète".*

Bachelard met en évidence ensuite le caractère non linéaire de cette démarche scientifique :

> *"on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation".*

Il précise alors le concept "d'obstacle épistémologique" :

> *"un fait mal interprété par une époque reste un fait pour l'historien. C'est, au gré de l'épistémologue, un obstacle, c'est une contre pensée".*

Il évoque ensuite un certain nombre d'obstacles dont nous retiendrons plus particulièrement ceux qui ont à voir avec l'observation et la verbalisation :

- **l'obstacle de l'observation première** : *"cette observation première se présente avec un luxe d'images ; elle est pittoresque, concrète, naturelle facile. Il n'y a qu'à la décrire et à s'émerveiller. On croit alors la comprendre" ;*

- **l'obstacle de la généralisation hâtive** : *"on généralise ses premières remarques l'instant d'après qu'on ne remarquait rien.(..) De l'observation au système, on va ainsi des yeux ébahis aux yeux fermés" ;*

- **l'obstacle verbal** : *"c'est à dire une fausse explication obtenue à l'aide d'un mot explicatif, par cet étrange renversement qui prétend développer la pensée en analysant un concept au lieu d'impliquer un concept particulier dans une analyse rationnelle".*

Précisons tout de même l'ambiguïté de nos citations. Tout ce que dit Bachelard ne concerne pas pour lui les mathématiques :

> *"En fait l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas de périodes d'erreurs. Aucune des thèses que nous soutenons dans ce livre ne vise donc la connaissance mathématique. Elles ne traitent que de la connaissance du monde objectif".*

On soutiendra cependant ici l'idée que la démarche scientifique décrite par Bachelard s'applique aussi aux Mathématiques : on en trouvera une magnifique illustration 30 ans plus tard dans l'ouvrage de I. Lakatos au titre évocateur : "Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique" [Lakatos, 1976].

En particulier le premier obstacle, celui de l'observation première, est au coeur de notre sujet :

> *"en donnant une satisfaction immédiate à la curiosité, en multipliant les occasions de curiosité, loin de favoriser la culture scientifique, on l'entrave. On remplace la connaissance par l'admiration, les idées par les images".*

Bachelard illustre son point de vue à partir de l'exemple de l'électricité :

> *"La première emprise empirique ne donne même pas le juste dessin des phénomènes, même pas une description bien ordonnée, bien hiérarchique des phénomènes (...) Quel curieux va et vient des images ! Le soleil des artificiers a reçu son nom de l'astre solaire. Et voici, par une étrange récurrence, qu'il fournit une image pour illustrer une théorie du soleil ! De tels chassés-croisés entre les images sont fréquents quand on ne psychanalyse pas l'imagination. Une science qui accepte les images est, plus que toute autre, victime des métaphores. Aussi l'esprit scientifique doit-il sans cesse lutter contre les images, contre les analogies, contre les métaphores...On ne saurait trop conseiller au professeur d'aller sans cesse de la table d'expériences au tableau noir pour extraire aussi vite que possible l'abstrait du concret.*
>
> *Ainsi dans la classe de chimie moderne comme dans l'atelier de l'Alchimiste, l'élève et l'adepte ne se présentent pas de prime abord comme de purs esprits. La matière elle même ne leur est pas une raison suffisante de calme objectivité. Au spectacle des phénomènes les plus intéressants, les plus frappants, l'homme va naturellement avec tous ses désirs, avec toutes ses passions, avec toute son âme. On ne doit donc pas s'étonner que la première connaissance objective soit une première erreur".*

Longueur d'une citation nécessaire, pour mettre en évidence un point de vue sur la formation des connaissances par dépassement d'obstacles épistémologiques et par un mouvement assez schématique, "du concret à l'abstrait". Dans ce mouvement, le passage par les images apparaît comme un mal nécessaire.

On verra en 0.b.1.iii. que Bachelard lui-même aura plus tard un point de vue plus nuancé sur cette question.

0.b.1.ii. Une perspective historique : l'avènement de la vidéosphère.

Après un point de vue philosophique, un point de vue historique.

R. Debray [Debray, 1992] distingue trois âges dans l'histoire des rapports à l'image : la logosphère qui commence avec l'invention de l'écriture, la graphosphère qui commence avec l'invention de l'imprimerie et la vidéosphère qui s'installe avec la généralisation de la télévision couleur.

Il associe la logosphère au régime "idole", la graphosphère au régime "art" et la vidéosphère au régime "visuel" :

> *"En régime "idole", je peux contester les apparences visibles, mais non qu'il existe un au-delà du visible et que je doive focaliser vers lui mon oeil spirituel. En régime "art", je peux douter des dieux et des idoles, mais non de la vérité et qu'elle doit être déchiffrée dans le grand livre du monde, en rapportant les phénomènes visibles aux lois invisibles. En régime "visuel", je peux ignorer les discours de vérité et de salut, contester les universaux et les idéaux, mais non la valeur des images".*

Il y aurait donc une différence radicale par rapport aux périodes antérieures.

Aujourd'hui, il y a identification entre ce qui se voit et ce qui existe :

> *"Nous sommes la première civilisation qui peut se croire autorisée par ses appareils à en croire ses yeux, la première à avoir posé un trait d'égalité entre visibilité, réalité et vérité. Toutes les autres et la notre jusqu'à hier, estimaient que l'image empêchait de voir. Maintenant, elle vaut pour preuve. (...) Nos principes de vision étant aussi de division, le reste, tout ce qui n'est pas "à voir", sera réputé non-être, trompe-l'oeil ou faux semblant".*

La nature des matériels influence même la façon de penser le réel :

> *"Dématérialisation des supports ? Déréalisation du réel extérieur. Miniaturisation des appareillages ? Réduction des discours logiques en micro-récits. Cadrage des représentations ? Formatage correspondant du représentatif. Instantanéité de la transmission hertzienne ? Disparition de la profondeur du temps. Décomposition de l'image en pixels ? Eclatement pointilliste de l'observation. Montage "cut" ou en mosaïque ? Désarticulation logique des faits".*

En conséquence, Debray prône un recul salutaire par rapport aux "images automatiques" :

> *"Aujourd'hui, la lutte pour l'imagination passe par la lutte contre le "tout à l'image". On ne sauvera pas notre droit à l'infini sans limiter les droits du visuel à authentifier, à lui seul, n'importe quel discours. En voyant moins, on imaginera plus".*

Ce point de vue est important, on y reviendra : on ne peut parler du statut des images indépendamment de leur mode de production et du cadre social dans lequel elles s'inscrivent. On ne peut comprendre par exemple le rapport d'un élève en classe avec un écran de calculatrice, ou d'ordinateur, indépendamment du rapport qu'il entretient avec l'écran de télévision.

Avoir ceci en tête sera utile, quand il s'agira de considérer l'influence, sur les processus de conceptualisation des élèves, des outils de calcul qui leur "donnent à voir" une image des objets mathématiques.

0.b.1.iii. Une perspective philosophique : le "sur-rationalisme".

On a présenté en 0.b.1.i Bachelard épistémologue, décrivant la formation de l'esprit scientifique comme un mouvement d'abstraction et les premières images comme un obstacle à franchir. Plus généralement, au monde de la rationalité, il semblait opposer l'univers complémentaire de l'imagination poétique et de ses symboles, qu'inspirent les éléments naturels (feu, eau, air et terre) dont il a tenté une psychanalyse.

En fait, ce n'est pas tout à fait d'opposition qu'il s'agit pour Bachelard :

> *"Bachelard, pour sa part, écrivait déjà, à la fin des années 30, contre le "rationalisme sec" de certains de ses maîtres, que la raison est "à géométrie variable" et que loin de gouverner les progrès du savoir, elle s'instruit sur eux. Quinze ans plus tard, il se montrait beaucoup plus radical, en caractérisant sa position comme "sur-rationaliste". Ce clin d'oeil vers le sur-réalisme avait un sens fort. Le philosophe ne proposait ni de perfectionner le rationalisme, ni de le dépasser. Le surréalisme jouait du langage et de l'imaginaire pour faire apparaître les virtualités du réel que manque le réalisme ; il en va de même du sur-rationalisme vis-à-vis du rationalisme (...)*
>
> *Aux yeux de Bachelard, l'imagination n'est point une faculté parmi d'autres ; à vrai dire elle n'est point une faculté du tout.*
>
> *Elle constitue l'étoffe de la vie des êtres humains en tant qu'ils se rapportent à eux-mêmes et aux autres par un langage dont les jeux donnent sens à leurs moindres gestes et à leurs silences même. Les grandes images qui, recueillies et élaborées sous forme poétique, invitent ces êtres à toujours s'arracher à eux-mêmes, portent-elles la marque mystérieuse de l'appartenance de l'homme au cosmos ? La "racine rêveuse des mots" (Bachelard) relie-t-elle la Terre au Ciel par l'entremise humaine ?"* [Lecourt, 1996].

Le travail scientifique, en ayant surmonté les obstacles des premières images, issues de l'expérience, n'en a pas fini pour autant avec l'imagination.
Elle en est en permanence à la fois le support et le frein.

Et ceci est d'autant plus profond, s'agissant du "calcul de l'infini", que nous aborderons dans la partie II de cette thèse. D. Lecourt [Lecourt, 1996] évoque Giordano Bruno, brûlé par l'inquisition en 1600 pour avoir soutenu "l'infinité du monde" :

> *"Cette tension* (entre "rêverie" et "rationalisme", ndlr) *oblige à repenser l'histoire de la pensée scientifique moderne en ses racines mêmes. Son avènement, dans les premières années du dix-septième siècle, si fulgurant qu'il apparaisse, ne s'effectue point sans trouver son élan dans des conceptions et des pratiques appartenant à la magie naturelle très puissante à la Renaissance. Johannes Kepler aussi bien que Giordano Bruno en sont les plus illustres témoins".*

Y. Chevallard l'exprime clairement : **le problème n'est pas l'utilisation de métaphores, mais dans leur choix et leur contrôle.**

> *"Contrairement à ce que beaucoup pensent, j'affirme ici que toute activité scientifique (y compris en mathématiques) se constitue (en son langage) et se décrit (dans son métalangage) par l'usage de métaphores. La pensée prend son essor en s'appuyant sur des métaphores ; plus généralement, le "rhétorique" apparaît constitutif de l'activité scientifique comme de toute économie noétique.*
>
> ***Il n'est donc a priori nullement illégitime de penser théories et modèles en terme d'images et de représentations. Mais le grand problème, ici, tient dans le choix des "bonnes" métaphores, des métaphores véritablement fécondes et dans leur contrôle"*** [Chevallard, 1992].

0.b.2. Images du sujet, de la société, de l'apprentissage.

On abordera ici quelques grandes questions relatives à l'apprentissage :
- quelles sont les responsabilités du sujet et des institutions (l'institution scolaire en particulier) ?
- quel est le rôle des situations d'apprentissage, quelle est la nature des processus de preuve ? Plus généralement quel est le rôle du langage ?

0.b.2.i. Processus auto-régulés ou interactions dissymétriques : J. Bruner - J. Piaget.

On se situera ici dans le cadre théorique d'un apprentissage par adaptation à un milieu problématique, cadre théorique qui semble faire consensus dans la "communauté didactique".

Derrière ce consensus, se cachent quelques difficultés.

Piaget a produit une théorie constructiviste de l'apprentissage, qui rompt avec les théories antérieures, pour lesquelles la connaissance était fournie de l'extérieur. Au centre de cette théorie constructiviste, les processus d'assimilation et d'accomodation.
G. Ricco décrit ainsi le "système piagétien" [Ricco, 1996] :

> *"Le pivot du système piagétien étant la notion de coordination et d'organisation des actions (matérielles au départ, intériorisées par la suite) sur les objets, c'est à partir des processus d'assimilation et d'accomodation que l'équilibre cognitif est établi. Le sujet "interprète", "organise l'objet" en fonction des instruments assimilateurs qu'il a construits. Si la nouvelle situation ne se laisse pas appréhender par les instruments cognitifs déjà construits, il y a alors perturbation, conflit, déséquilibre, rupture du système d'équilibre élaboré précédemment, qui permettra d'intégrer et de dépasser les perturbations (...). La position piagétienne reste solidaire de son projet : l'élaboration d'une épistémologie génétique qui est censée rendre compte de l'accroissement et de l'organisation des connaissances par un sujet épistémique qui construit ses objets de connaissance en même temps qu'il élabore ses instruments de pensée".*

Dans un tel processus, c'est bien l'enfant qui est en charge de son propre apprentissage.

Bärbel Inhelder, dans son introduction à [Piaget et Garcia, 1983] (dernier ouvrage de Piaget), décrit ainsi les "mécanismes du progrès de la connaissance" :

> *"Ils peuvent être saisis dans les transitions menant d'un niveau d'organisation de moindre adaptation du sujet au milieu à connaître, aux niveaux séquentiels ultérieurs. Piaget a cherché à rendre compte de cette amélioration ou augmentation de la connaissance par un modèle emprunté aux mécanismes biologiques : celui de l'équilibration.* ***Ce mécanisme, qui obéit à un guidage d'origine endogène****, permet de neutraliser les perturbations productrices de déséquilibres. Les rééquilibrations, loin d'aboutir nécessairement à une homéostasie, peuvent être source de nouveauté. Les processus particuliers responsables des dépassements et de l'intégration du dépassé dans des formes nouvelles de connaissance sont nombreux : l'abstraction réfléchissante et la généralisation, la prise de conscience et la thématisation, l'invention des possibles et les inférences conduisant à la nécessité. Tous sont responsables d'une évolution en spirale, de nature dialectique, marquant le rôle important des déséquilibres qui incitent le sujet à des réadaptations productives".*

Nous avons souligné en gras la phrase indiquant l'origine **endogène** du mécanisme d'équilibration. La question est alors : *"L'abstraction réfléchissante et la généralisation, la prise de conscience et la thématisation, l'invention des possibles et les inférences"* sont-elles des inventions, des créations individuelles ? Ce qui entraîne d'autres questions : quelle est la responsabilité de l'enseignant ? Du système d'enseignement ?

J.-P. [Fischer, 1993] confronte les théories de J. Piaget et de J. Bruner : il relève des accords (les structures générales jouent un rôle important dans le développement et il est décisif d'avoir des moyens formels pour représenter ces structures) pour mieux souligner les divergences :
- là où J. Piaget dépeint le développement humain comme une entreprise solitaire et risquée pour l'enfant, dans laquelle les autres ne peuvent pas l'aider avant qu'il n'ait reconstruit les choses par lui-même, J. Bruner avance un point de vue selon lequel la croissance de l'individu est une responsabilité de la société ;
- là où J. Piaget pense que le processus mental est auto-régulé, J. Bruner dit que le langage et la culture jouent un rôle vital dans le développement intellectuel.

Ainsi J. Bruner accorde une importance beaucoup plus grande à l'école :

> *"Lorsqu'une société va au delà de ces techniques relativement primitives, l'instruction par l'école, moins spontanée, doit prendre le relais (...) L'activité humaine est dépendante, pour sa pleine expression, d'un lien avec une boîte à outil culturels - un ensemble de prothèses pour ainsi dire"* [Bruner, 1983].

F. Boschet [Boschet, 1988] étudie la filiation entre L. Vygotski et J. Bruner : le premier avait mis en évidence une "zone de proche développement", définie par ce que l'enfant peut faire, en anticipant sur son développement ultérieur, en collaboration avec un adulte.
Bruner en précise le contenu, en étudiant les processus de tutelle, ou d'étayage :

"Le soutien consiste en une prise en main, par le tuteur, des élements de la tâche qui, initialement, excèdent les capacités du débutant, pour lui permettre de se concentrer sur les seuls éléments de son domaine de compétence". [Bruner, 1983]

Il détaille les fonctions du tuteur :

> *"- le tuteur doit provoquer l'intérêt et l'adhésion à la tâche de celui qui cherche ;*
> *- le tuteur réduit les degrés de liberté, en comblant les lacunes et en ramenant la tâche dans des limites surmontables, il laisse le débutant mettre au point des subroutines constitutives ;*
> *- le tuteur maintient l'orientation vers la résolution de la tâche, en faisant en sorte que cela vaille la peine pour le débutant de risquer un pas de plus ;*
> *- le tuteur signale les caractéristiques déterminantes de la tâche et fait ainsi comprendre l'écart entre ce que l'enfant a produit et ce que lui-même considère comme correct ;*
> *- le tuteur contrôle la frustration, la résolution du problème étant moins périlleuse avec un tuteur que sans lui, le risque étant alors de créer une trop grande dépendance à son égard ;*
> *- enfin, le tuteur montre les solutions quand l'enfant peut les reconnaître".*

Plus que d'opposition entre Piaget et Bruner, on peut parler d'une tension entre deux théories, l'une mettant au centre du processus d'apprentissage les processus d'accomodation/assimilation autorégulés par l'enfant, l'autre mettant l'accent sur les interactions dissymétriques entre un enfant et un adulte, *l'adulte agissant comme médiateur de la culture* [Ricco, 1996].

0.b.2.ii. Situations didactiques, situations a-didactiques (G. Brousseau)

D'une certaine façon, G. Brousseau traduit cette tension à l'intérieur du système scolaire :

> ***"Dans la didactique moderne, l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation a-didactique, correcte -c'est la responsabilité du maître-, l'apprentissage est une adaptation à cette situation - c'est la responsabilité de l'élève (...) ;***
> (le maître) *doit provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées par un choix judicieux des problèmes qu'il lui propose. Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter, doivent le faire agir, parler, réfléchir, de son propre mouvement.* ***Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître*** *(...) ;*
> *L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en oeuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle"* [Brousseau, 1986].

Dans le même texte, G. Brousseau relève les paradoxes d'une telle situation :

- le paradoxe de la dévolution des situations pour le professeur et l'élève :
"Tout ce que (le professeur) entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à l'apprentissage de la notion visée (...) ; apprendre implique pour l'élève qu'il accepte la relation didactique mais aussi qu'il l'accepte comme provisoire et s'efforce de la rejeter".

- le paradoxe de l'apprentissage par adaptation :
"D'une certaine façon, l'adaptation par l'élève seul à une nouvelle situation contredit l'idée de la création d'un savoir nouveau".

Ces paradoxes sont-ils le reflet des difficultés mêmes de l'acte d'enseigner, ou le signe de la contradiction même de la "théorie des situations" ?
Pour J.-P. Fischer, c'est le deuxième point de vue qui prévaut :

> *"La théorie initiale de Brousseau ne convient pas pour des élèves plus agés lorsque l'apprentissage concerne des notions vraiment nouvelles (...). D'ailleurs, le fait que Brousseau érige en axiome l'assertion que "pour toute connaissance, il est possible de construire au moins un jeu formel, communicable sans utiliser cette connaissance et dont elle détermine pourtant la stratégie optimale" , ne fait que renforcer l'hypothèse qu'il est impossible de la prouver"* [Fischer, 1993].

Il serait souhaitable sans doute de penser en termes de niveaux de modélisation des situations et de classes de situations :
- il y a des moments où le maître doit refuser d'intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître (situations a-didactiques de G. Brousseau) ;
- il y a des circonstances où le tuteur prend en main des éléments de la tâche qui, initialement, excèdent les capacités du débutant (processus de tutelle de J. Bruner).

0.b.2.iii. Un point de vue anthropologique (Y. Chevallard).

En évoquant les questions générales de l'apprentissage, nous avons alternativement parlé de "la société" et de "l'école". Il nous faut définir ici dans quel système didactique nous situerons notre étude.

Y. Chevallard [Chevallard, 1992] définit une anthropologie cognitive à partir de trois termes primitifs, les objets, les personnes, les institutions, dont les rapports permettent de penser un univers plus vaste qu'*un univers didactique restreint.*

Dans ce cadre, il définit un système didactique, autour de *"trois termes" : l'enseignant, l'élève et un ou plusieurs enjeux didactiques"*. Il précise les conditions "écologiques" *"pour qu'un système didactique puisse, non seulement exister, mais continuer à exister" :*

> *- "un système didactique n'existe jamais seul. Ecologiquement, son existence appelle généralement celle d'autres types de systèmes didactiques, fonctionnant en association, qui rassembleront par exemple, en ce qui concerne l'école primaire, le même élève et le même savoir autour d'autres "enseignants" : l'enfant avec sa mère, ou son père, etc. ; et surtout l'enfant avec lui-même -cas des systèmes auto-didactiques, où la même personne occupe les positions d'enseignant et d'enseigné* (...) ;
> *- il faut qu'à chaque instant -par rapport au temps propre du système didactique comme institution, il existe un ensemble d'objets institutionnels, qui, pour les sujets du système didactique, aillent de soi. En d'autres termes, il faut minimalement qu'il existe un milieu (...)* ;
> *- aucun système didactique ne peut vivre in vacuo, dans un vide institutionnel. Derrière tout système didactique, vous trouverez un autre système, qui apparaît génériquement comme l'une des conditions de possibilité et que je nomme système d'enseignement"* [Chevallard, 1992].

Nous nous placerons ici de ce point de vue qui *"situe d'emblée le didactique au sein de l'anthropologique".*

Tout ceci est décisif pour notre étude :

- la prise en compte des différents systèmes didactiques dans leur interdépendance (les élèves travaillant avec leur calculatrice seuls ou "se faisant expliquer par un copain" -ce qui est assez fréquent cf. 0.c.1.i.) ;

- la nécessité de l'existence d'un "consensus naturel", pour un enseignant et un élève, autour des objets institutionnels (se pose à nouveau le problème du statut des outils de calcul, comme les calculatrices cf. 0.c.1.i.) ;

- la prise en compte du système d'enseignement et de l'environnement sociétal. Par exemple, à propos du rapport à l'image ou à l'écran, il serait bien difficile de ne pas tenir compte du "rapport social" :
  - un "spécialiste de la communication" écrit (Libération, 28 Juillet 1994) : *L'image apporte ce dont rêvent les grandes plumes du journalisme d'investigation : la preuve irréfutable ;*
  - le Ministre de l'Education déclare devant "l'Université de la Communication" (Le Monde, 1 Septembre 1994) : *Existe ce qui est sur l'écran, n'existe pas ce qui n'y est pas.*

On ne peut pas comprendre un système didactique sans référence aux systèmes qui le contiennent... et le contraignent.

0.b.2.iv. L'interaction sociale comme moteur des processus de preuve (N. Balacheff).

N. Balacheff, dans un article consacré aux "Processus de preuve et situations de validation" [Balacheff, 1978], insiste sur l'importance de la situation pour la mise en oeuvre, ou non, d'un processus de validation par l'élève :

> ***"Ainsi, la situation dans laquelle a lieu l'action de l'élève peut tolérer l'absence de travail sur la validation.***
>
> ***C'est le cas dans certaines situations didactiques,*** *des phases d'appropriation des règles d'un jeu ou* ***du fonctionnement d'un matériel*** *(...). La situation tolère l'absence de validation.*
>
> *Cependant pour des raisons qui leur appartiennent, des élèves voulant gagner chercheront des raisons, des preuves de la validité de leur stratégie. Dans ces situations, des succès réitérés peuvent instituer des règles d'action comme autant de sources possibles de théorèmes-en-acte"* (cf. 0.b.3.).

Nous avons souligné l'appropriation du fonctionnement d'un matériel puisqu'elle concerne directement notre travail.

Dans le cadre d'un processus de validation, N. Balacheff distingue plusieurs types de preuve, des "preuves pragmatiques" aux "preuves intellectuelles" :

> *"(elles) se différencient à la fois par le statut des connaissances engagées et par la nature de la rationalité sous-jacente :*
>
> *- l'empirisme naïf consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la validité de la vérité d'une assertion ;*
> *- l'expérience cruciale est un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible ;*
> *- l'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus ;*
> *- l'expérience mentale invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisaton sur un cas particulier ;*
> *- enfin la démonstration est une suite d'énoncés organisée suivant des règles particulières, reconnue comme preuve par la communauté mathématique.*

Il souligne aussi le lien entre "type de preuve" et "moyens langagiers mis en oeuvre" :

> *"C'est quelque part entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles (...)*
> *Une marque de ce passage est une évolution des moyens langagiers mis en oeuvre.* ***On passe ainsi du langage familier au langage fonctionnel, ce qui requiert en particulier une décontextualisation, une dépersonnalisation et une détemporalisation."***

Type de situations, types de preuve et type de langage sont ainsi liés.
Ceci sera à prendre en compte dans l'étude des processus de validation mis en oeuvre par les élèves.

0.b.2.v. Chaque mot est un microcosme de la pensée humaine (L.Vygotski).

C'est toujours dans une perspective anthropologique que L.Vygotski aborde cette question.

Il avance dans son ouvrage "Langage et Pensée" [Vygotski, 1985] un point de vue selon lequel le développement de l'individu dépend de la société qui dispose du langage comme outil majeur de ce développement.

Pour lui, les rapports entre le mot et la pensée ne sont pas donnés : ils sont le produit du développement historique -et social- de la conscience humaine.

Il distingue deux plans dans le langage : l'aspect phonétique (externe) et l'aspect sémantique (interne), le premier allant de la partie au tout, du mot à la proposition, le second du tout à la partie, de la proposition au mot.

> *"La pensée de l'enfant apparaît initialement comme un tout vague et indifférencié, qui trouve son expression orale dans un mot isolé. Au fur et à mesure que sa pensée se différencie et parvient à structurer des parties isolées, l'enfant passe, dans son langage, des parties au tout différencié. En se transformant en langage, la pensée se réorganise et se modifie. Elle se réalise dans le mot. Et c'est justement parce que les processus de développement de l'aspect sémantique et de l'aspect phonétique du langage sont orientés en sens inverse qu'ils forment une véritable unité".*

Il définit le "langage intérieur" comme un processus de "volatilisation" du langage dans la pensée, avec des particularités sémantiques essentielles :

- **la prédominance du sens du mot sur sa signification** : le sens représentant l'ensemble de tous les faits psychologiques qu'un mot fait apparaître dans notre conscience et la signification n'étant qu'une des zones du sens, la plus stable, la plus unifiée, la plus précise.

> *"Dans le langage intérieur, la prédominance de la phrase sur le mot, de tout le contexte sur la phrase, n'est pas l'exception, mais la règle".*

- **les lois d'union et de fusion des sens des mots :**

> *"Les sens des mots, plus dynamiques, plus larges que leurs significations, font apparaître d'autres lois d'union et de fusion que celles des significations. Les sens semblent couler les uns dans les autres, influer les uns sur les autres, si bien que les précédents sont contenus dans les suivants et les modifient (...) Dans le langage intérieur, un seul mot est tellement saturé de sens qu'il faudrait de nombreux mots pour l'expliciter dans le langage externe".*

On voit ici que l'introduction d'un mot dont la définition n'est pas prise en charge socialement (c'est-à-dire, pour ce qui nous intéresse ici, par l'institution scolaire), n'est pas neutre.

Ce mot "s'évapore" dans la pensée et y construit un territoire de sens, par union et fusion avec d'autres sens. On y reviendra bien sûr à propos de l'introduction des concepts mathématiques.

Conclusion du paragraphe par une citation extraite encore de "Langage et pensée" :

> ***"Les mots jouent un rôle central, non seulement dans le développement de la pensée, mais dans la croissance historique de la conscience toute entière. Chaque mot est un microcosme de la conscience humaine".***

0.b.3 Concepts, conceptions, comportements.

Nous allons étudier maintenant le processus qui va de l'objet théorique -le concept- à l'objet enseigné, puis de l'objet enseigné à l'objet reconstruit par les élèves. Nous étudierons d'abord ce processus, le processus de conceptualisation, avant d'aborder 3 points plus particuliers :
- le processus de transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné ;
- le problème de repérage des conceptions ;
- la question des connaissances sur les connaissances.

0.b.3.i. La conceptualisation : un processus (G. Vergnaud).

G. Vergnaud analyse les ressorts du processus de conceptualisation [Vergnaud, 1996]. Nous nous attarderons un peu plus sur ce point, sur lequel nous prendrons souvent appui. On retiendra en particulier la définition d'un schème, la théorie de la représentation, le rôle de médiation de l'enseignant et la définition d'un concept.
Dans tout ce qui suit, les passages en italique et les schémas sont extaits de ce texte.

1. Le schème, cadre théorique pour mettre en relation le geste et la pensée.

Vergnaud distingue deux formes de connaissance :

> *"**la forme prédicative de la connaissance** qui est associée de manière privilégiée à l'idée de science, (...) exprimable par des suites d'énoncés dont les éléments sont des objets, des prédicats monadiques ou polyadiques, des transformations, des conditions, des circonstances, des modalités... et la forme qui ressort de l'activité humaine (...), **forme opératoire de la connaissance**".*

Il introduit alors le concept de schème, qui permet la mise en relation des deux formes de connaissance. Ce concept n'est pas nouveau, Piaget (qui avait emprunté le mot à Kant, rappelle Vergnaud) avait situé le schème au centre du processus d'adaptation des structures cognitives (assimilation et accomodation).

Mais Vergnaud en approfondit l'analyse, en donnant trois approches complémentaires :
- le schème est une totalité dynamique fonctionnelle. Cette définition indique qu'un schème a *"une intention et un but"*, qu'il s'inscrit dans le temps et qu'on doit prendre en compte *"l'ensemble de ses composantes pour en comprendre la fonction et la dynamique"*.
- un schème est une organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations : cela indique à la fois qu'un schème ne s'applique qu'à une certaine classe de situations et que *"ce qui est invariant, c'est l'organisation de la conduite, pas la conduite elle-même"*.
- un schème est un quadruplet de quatre composantes :
  "- le but, les sous-buts et les anticipations ;
  - les règles d'action, de prise d'information et de contrôle ;
  - les invariants opératoires ;
  - les possibilités d'inférences en situation."

Un schème repose ainsi toujours sur une conceptualisation implicite. Vergnaud appelle "invariants opératoires" les connaissances contenues dans les schèmes, qui peuvent être des **concepts-en-acte**, c'est à dire des concepts implicitement tenus pour pertinents et des **théorèmes-en-acte**, c'est à dire des propositions tenues pour vraies.

Ces invariants opératoires occupent une place centrale pour G. Vergnaud : *"il y a une différence entre un schème et un autre lorsqu'ils sont constitués d'invariants opératoires distincts"*. Il distingue les théorèmes-en-acte et les concepts-en-acte *("la vérité est autre chose que la pertinence")*, mais signale en même temps leurs liens profonds *("il n'y a pas de théorème-en-acte sans concept-en-acte, pas plus qu'il n'y a de théorèmes sans concepts et réciproquement")*.

2. Ceci débouche sur une nouvelle théorie de la représentation.

G. Vergnaud conteste le triangle "classique" (schéma 1 ci-dessous) organisant les rapports entre la référence, le signifié et le signifiant : *"il ne tient compte ni de l'activité humaine et des situations dans lesquelles se développe cette activité, ni de l'analyse des prédicats, ni des équivoques du langage"*.

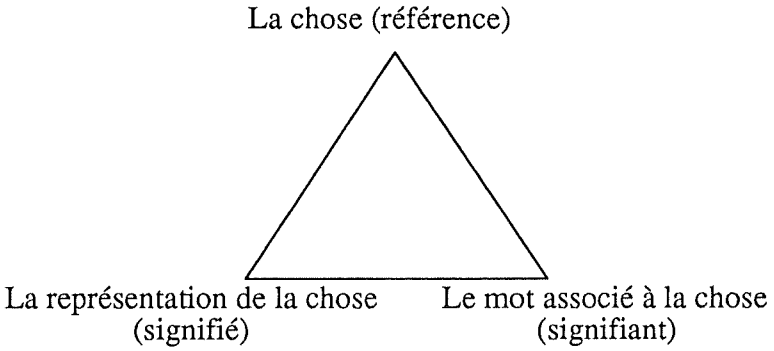


Schéma 1

Il propose un nouveau schéma descriptif, basé sur une autre organisation interne (schéma 2 ci-dessous) :

- il y a éclatement de la référence en deux sous-ensembles dialectiquement liés, les situations et les objets ;
- il y a prise en compte des invariants opératoires qui ne sont pas réductibles aux signifiés de la langue ;
- les schèmes renvoient aux situations, les énoncés et les invariants opératoires renvoient aux objets, à leurs propriétés et à leurs relations.

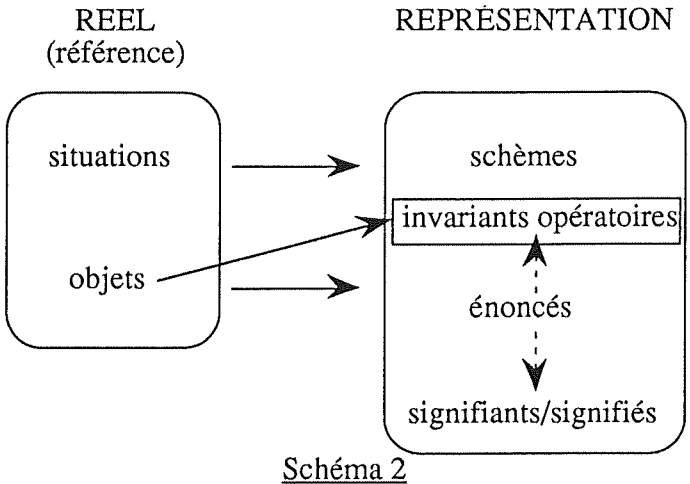


Schéma 2

3. En découle une nouvelle définition du rôle de l'enseignant : la médiation.

G. Vergnaud, comme on le verra dans le schéma 3 (ci-dessous) qu'il propose, tente une synthèse entre différents points de vue que nous avons présentés, en particulier ceux de J. Piaget, L. Vygotski, J. Bruner et G. Brousseau.

Le premier acte de "médiation" (le mot évoque L. Vygotski et J. Bruner) est le choix d'une situation didactique, *"dont l'opportunité repose à la fois sur l'épistémologie du savoir dont l'acquisition est visée et sur les connaissances supposées des élèves".*

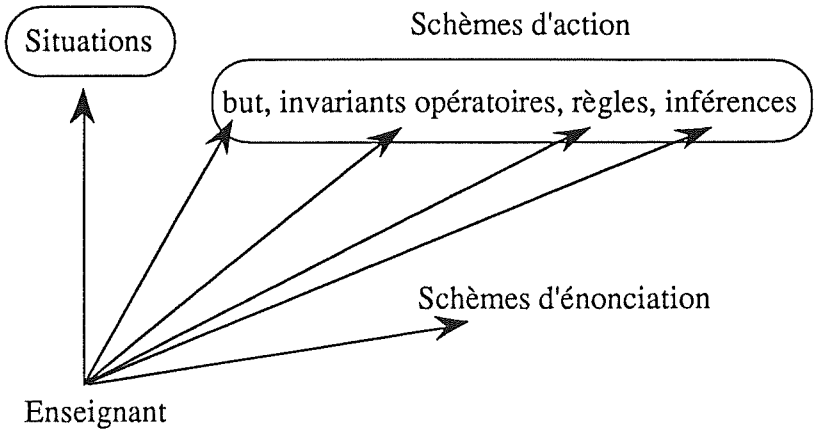


Schéma 3

Cet acte de médiation en précède d'autres. Il s'agit d'aider l'élève :
- *"à reconnaitre dans la situation un problème intéressant pour lui* " (on retrouve la problématique de dévolution de G. Brousseau) ;
- *"à identifier et sélectionner l'information pertinente, à accomplir une action ou une suite d'actions trop complexes pour lui"* (on reconnaît la problématique de tutelle de Bruner) ;
- *"à raisonner, à expliciter les informations, les contrôles et les théorèmes-en-acte"* (on retrouve l'importance du langage de L. Vygotski).
- à institutionnaliser la connaissance construite.

4. Le processus de conceptualisation débouche sur le concept.

Vergnaud le définit comme un triplet de trois ensembles :

> *"- **l'ensemble des situations** qui donnent du sens au concept (la référence) ;*
> *- **l'ensemble des invariants** sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ;*
> *- **l'ensemble des formes langagières et non langagières** qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés et les procédures de traitement (le signifiant)".*

Il définit aussi un champ conceptuel :

> *"une situation ne s'analyse pas à l'aide d'un seul concept et un concept ne prend pas sa signification dans une seule classe de situations. Il faut donc se donner comme objets de recherche des ensembles relativement larges de situations et de concepts, en classant les types de relations, les classes de problèmes, les schèmes de traitement, les représentations langagières et symboliques et les concepts mathématiques qui organisent cet ensemble".*

Le problème se pose alors du suivi de ce processus de conceptualisation.
Il y a là en fait un double problème :
- d'abord le problème du repérage du passage du concept de la forme construite, à la forme enseignée : la transposition didactique ;
- ensuite le problème du repérage des différentes étapes du processus de conceptualisation à l'oeuvre chez les élèves. Cela nous conduira à parler de conception.

0.b.3.ii. La transposition didactique : un processus (Y. Chevallard).

Y. Chevallard a mis en évidence l'écart entre un concept, tel qu'il a été construit et reconnu par la communauté des mathématiciens et le concept tel qu'il est enseigné [Chevallard, 1985].

Il définit la transposition didactique "stricto sensu" et "sensu lato" :

> *" La transposition stricto sensu (est) le "travail" qui, d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement. (...) ; l'étude scientifique du processus de transposition didactique (qui est une dimension fondamentale de la didactique des mathématiques) suppose la prise en compte de la transposition didactique sensu lato, représentée par le schéma :*
>
> *→ objet de savoir → objet à enseigner → objet d'enseignement."*

La transposition didactique est ainsi un processus qui commence dès qu'il y a production (par le chercheur), communication (à une communauté mathématicienne), identification (par une institution d'enseignement) d'un objet de savoir.

Et elle ne peut se comprendre que, pour l'essentiel, comme double transposition :

- **une première transposition**, sous l'effet de ce que Chevallard désigne "sous le nom parodique de noosphère", **des objets de savoir aux objets à enseigner**. Il s'agit de trier, de réorganiser, de réinterpréter les objets de savoir pour définir le savoir-initialement-désigné-comme-devant-être-enseigné.

Cette première transposition peut être étudiée en confrontant le texte du savoir reconnu comme tel par la communauté des mathématiciens au texte des programmes et instructions.

- une deuxième transposition, qui amène du savoir à enseigner au savoir tel qu'il est enseigné.

La transposition didactique n'est pas donnée une fois pour toutes : *"le "travail" de transposition se poursuit".*

Cette deuxième transposition est plus complexe à observer. On dispose du texte des manuels scolaires (si ceux-ci constituent une mise en forme du savoir effectivement enseigné - après un temps de "deuil" des anciens programmes et un temps de "naturalisation" des nouveaux) et de l'observation de l'enseignement dispensé dans les classes.

Y. Chevallard précise que poser le problème de l'existence de la transposition didactique participe du principe de "vigilance épistémologique" :

> *"Le doute systématique à cet égard ("Est-ce bien là l'objet dont l'enseignement était projeté ?") est la marque et la condition de la rupture épistémologique qui permet au didacticien de se déprendre des évidences et de la transparence de l'univers d'enseignement qu'il vit en tant qu'enseignant (...).*
>
> *Mise en question systématique qui l'arrache à l'illusion de la transparence."*

C'est cette mise en question systématique que nous essaierons d'exercer dans l'examen de la double transposition didactique de la notion de limite (cf. I.b.)

0.b.3.iii Conceptions locales et globales (M. Artigue).

Dans un article intitulé "Epistémologie et didactique" [Artigue, 1990], M. Artigue essaie de "restituer la trajectoire de la notion de conception dans la communauté didactique française".

Cette notion répond pour elle à deux nécessités distinctes :

*"- **mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique**, différencier les représentations et mode de traitement qui leur sont associés, mettre en évidence leur adaptation plus ou moins bonne à la résolution de telle ou telle classe de problèmes ;*
*- aider le didacticien à lutter contre l'illusion de la transparence de la communication didactique véhiculée par les modèles empiristes de l'apprentissage, en lui permettant de **différencier le savoir que l'enseignant veut transmettre et les connaissances effectivement construites par l'élève**".*

Ces deux nécessités constituent deux pôles, le premier ancré dans l'analyse du savoir, le deuxième ancré dans l'analyse des connaissances construites par les élèves.
Entre ces deux pôles il y a place pour plusieurs "conceptions des conceptions".

1. Une première conception, globale : la conception est alors décrite comme étant l'ensemble de la structure cognitive associée, pour un sujet donné, à un concept.

On trouve cette conception chez D. Tall et S. Vinner [Tall et Vinner 1981] : ils définissent le "concept image" comme *"the total cognitive structure that is associated with the concept, wich include all the mental pictures and associated properties and process".*

C'est le même type de conception que l'on trouve chez B. Cornu [Cornu, 1983]. Il définit les "conceptions spontanées" (à propos de limites), qui ne sont pas le fruit d'un enseignement organisé et les "conceptions propres", *"qui contiennent à la fois les images mentales, les représentations, les mots liés à la notion, mais aussi des définitions, des propriétés, des "théorèmes" (parfois faux), des processus, des algorithmes, des exemples".*

Tout le problème est dans le repérage de ces conceptions. B. Cornu écrit sur ce point :

> *"Pour étudier les conceptions propres, on peut utiliser et analyser les erreurs que commettent les étudiants. Ces erreurs ne sont pas le fruit du hasard, de l'inattention, ou de l'ignorance : elles sont le fruit de conceptions organisées, de représentations mentales précises".*

Mais à partir de quel recueil d'erreurs peut-on être assuré d'avoir déterminé l'ensemble de la "conception propre" de l'élève ? M. Artigue note d'ailleurs :

> *"En fait, la définition globale de la notion de conception, même si elle peut apparaître séduisante dans l'absolu, ne constitue pas l'outil dont a besoin le didacticien. Il est d'une part inutilisable et ce, parce qu'il ne correspond pas à un niveau accessible à l'analyse didactique : comment inférer de l'observation de l'élève dans une ou au mieux quelques situations la globalité de sa conception sur tel ou tel objet mathématique ?*
> *D'autre part, il n'est pas réellement pertinent.*

En effet, ce qui intéresse le didacticien, ce n'est pas au fond la compréhension de cette structure globale hypothétique, mais l'identification de conceptions locales qui se manifestent en situation et l'analyse des conditions de passage de telle conception locale à telle autre, qu'il s'agisse de rejeter une conception erronée, de mettre en place une conception permettant d'améliorer l'efficacité dans la résolution de telle ou telle classe de problèmes, ou de favoriser la mobilité entre des conceptions déjà disponibles.

De ce point de vue, c'est l'objet local qui est bien l'outil adéquat".

2. D'autres conceptions, locales.

Définir une conception comme "objet local" ne résout pas pour autant tous les problèmes : comment déterminer les différentes conceptions sur un "objet de savoir" ? On peut le faire à partir de l'observation des élèves, ou à partir de l'analyse du savoir.

M. Artigue montre que la première piste n'est pas satisfaisante :

"(...) le fait d'inférer les conceptions, comme c'est souvent le cas, non de l'analyse du savoir en jeu mais de l'observation directe de comportements d'élèves dans des situations précises conduit à les aplatir sur les observables (...)

Face à ces difficultés, l'ancrage des conceptions dans l'analyse a priori des points de vue possibles sur le savoir en jeu, sur les classes de problèmes accessibles ou bien adaptés à tel ou tel point de vue, à travers l'étude du fonctionnement actuel de ce savoir comme de son développement historique peut apparaître comme une garantie nécessaire".

M. Artigue montre alors que le choix de conceptions locales et ancrées dans l'analyse du savoir ne résout pas tous les problèmes :

- pour éviter un émiettement trop grand des conceptions, il faudra les regouper en classes. Mais quels seront les critères pour *"un regroupement pertinent" ?*

- rien ne garantit que la détermination des conceptions à partir de l'analyse épistémologique donnera *"de bons instruments pour l'analyse didactique".*

Mais le fait même que les conceptions issues de l'analyse du développement historique ne permettent pas d'interpréter tous les travaux d'élèves est en soi intéressant pour l'analyse didactique. M. Artigue note :

"En fait, ce que mettent en évidence ces disparités, c'est le fait que l'élève ne peut être réduit au statut de sujet épistémique ou de sujet cognitif. Ce qui détermine son comportement c'est aussi et souvent son statut de sujet didactique. C'est ce fait qui est au centre de la théorie (...) élaborée par Y. Chevallard.

Les savoirs y apparaissent par définition liés à des institutions et les rapports à tel ou tel objet de savoir développés par un individu, conditionnés par la ou les institutions dans lesquelles il a eu à rencontrer ces savoirs, ces institutions ne se limitant pas en général à des institutions scolaires".

Le repérage des conceptions apparaît ainsi comme un processus : partant d'une analyse épistémologique d'un savoir, il se prolonge par l'analyse didactique des adéquations et des disparités entre les conceptions répertoriées et les réalisations des élèves, puis par l'analyse didactique des institutions qui conditionnent ce savoir.

0.b.3.iv. Métaconnaissances : une approche en I.A., en didactique et en psychologie cognitive.

Après avoir évoqué le processus de construction par le sujet de ses propres connaissances, nous allons étudier maintenant les connaissances qu'il a de ses propres connaissances : les métaconnaissances.

Approches croisées pour une notion d'abord[3] introduite en Intelligence Artificielle (I.A.) [Pitrat, 1990], puis en didactique des mathématiques [Robert et alii, 1993], en y suscitant quelques débats. G. Brousseau évoque par exemple le "glissement métacognitif" :

> *"Lorsqu'une activité d'enseignement a échoué, le professeur peut être conduit à se justifier et pour continuer son action, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique. (...) L'exemple le plus frappant est probablement celui qui concerne l'usage des graphes (...). A la fin des années trente, la théorie des ensembles quitte sa fonction scientifique initiale pour devenir moyen d'enseignement afin de satisfaire les besoins qu'ont les professeurs d'une métamathématique et d'un formalisme fondamental. (...)*
>
> *Ce "moyen" devient à son tour objet d'enseignement et se surcharge de conventions, de langages spécifiques à leur tour enseignés et expliqués à chaque étape de diffusion. Dans ce processus, plus l'activité d'enseignement produit de commentaires et de conventions, moins les étudiants peuvent contrôler les situations qui leur sont proposées"* [Brousseau, 1986]

Il y a là deux problèmes entrelacés :
- doit-on enseigner des "règles" ou des "méthodes" (de démonstration, de résolution...) ? ;
- doit-on repérer, dans l'activité de l'élève, les "règles" qui sont "intégrées" (même provisoirement) et celles qui ne le sont pas ?

Si la première question fait l'objet d'un débat dans la communauté didactique, la deuxième semble relever d'un certain consensus. Ainsi B. Sarrazy, dans un texte critiquant l'enseignement de procédures de résolution, écrit-il :

> *"Les procédures de résolution enseignées ne peuvent pas être conceptualisées par les élèves du fait de leur subordination aux notions protomathématiques inhérentes au contrat didactique (...) ; si ces notions ne peuvent pas être l'objet d'un enseignement, l'enseignant ne peut que les désigner par leur absence : "tu n'as pas reconnu qu'il s'agissait là d'un problème où tu n'avais pas assez de données pour répondre à la question qui t'était posée"* [Sarrazy, 1994].

C'est de ce point de vue du repérage des "métaconnaissances" que nous placerons d'abord. Pour cela, l'échange entre l'Intelligence Artificielle et la didactique des mathématiques est sans doute utile, comme le souligne A. Robert :

> *"Comment concevoir les règles d'un système informatique pour la résolution de problèmes ? Comment concevoir les E.I.A.O.[4] pour que les élèves apprennent ? C'est là que les deux disciplines peuvent se rejoindre, ou au moins se répondre"* [Robert et alii, 1993].

---

[3] Dater l'apparition d'un nouveau concept est toujours chose délicate. En fait, on peut voir dans [Polya, 1967] un précurseur dans la recherche de "méthodes" et de "règles de la découverte".

[4] Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur, déclinaison du sigle EIAO dont [Balacheff, 1994] signale qu'elle est due à Monique Baron, et adoptée par la communauté française depuis les deuxièmes journées de Cachan, en 1993.

1. Considérons d'abord l'apport de l'I.A.

Nous faisons référence ici à l'ouvrage de J. Pitrat "Métaconnaissance, futur de l'Intelligence Artificielle" [Pitrat, 1990]. Il distingue les **connaissances** et les **métaconnaissances** qui sont des connaissances sur les connaissances (et donc des connaissances particulières).

Parmi les connaissances, il distingue :
- **connaissance déclarative** (*"elle est séparée de son mode d'emploi, elle ne contient ni l'instant, ni le mode de son utilisation") ;*
- **connaissance procédurale** *("la connaissance est mélangée à son mode d'emploi, elle incorpore implicitement le but à atteindre et elle dépend du mécanisme qui va l'utiliser").*

On retrouve ici la distinction de G. Vergnaud (cf. 0.b.3.i.) entre la forme prédicative et la forme opératoire de la connaissance. J. Pitrat précise cependant que *"la séparation entre déclaratif et procédural n'est pas toujours nette et (qu') il existe un continuum entre le procédural pur et le déclaratif pur".*

Il distingue ensuite de nombreuses variétés de métaconnaissances :

> *"- Certaines sont des propriétés des connaissances, "le théorème de Pythagore est un résultat très utile et il était déjà connu des babyloniens";*
> *- d'autres sont des connaissances sur les connaissances des individus, "Monsieur Dupond ignore le théorème de Pythagore".*
> *- D'autres enfin sont des connaissances qui servent à manipuler des connaissances : "dans quelles circonstances il est utile de se servir du théorème de Pythagore, comment il se démontre, quels trucs mnémotechniques permettent de se rappeler son énoncé."*

Trois familles de métaconnaissances donc, qu'il détaille :

- pour **les connaissances sur les connaissances :** l'historique d'une connaissance, la véracité d'une connaissance, la précision d'une connaissance, la classification des connaissances, l'importance d'une connaissance ;

- pour **les connaissances sur les connaissances des individus** : savoir ce qu'un individu sait, savoir ce qu'un individu veut faire, savoir ce qu'un individu peut faire, savoir comment un individu fait quelque chose, connaître les habitudes d'un individu ;

- pour **les connaissances qui servent à manipuler les connaissances** : les connaissances pour acquérir les connaissances, les connaissances pour exprimer les connaissances, les connaissances pour utiliser les connaissances, les connaissances pour stocker les connaissances, les connaissances pour rechercher les connaissances en mémoire, les connaissances pour découvrir des connaissances.

Cette classification est intéressante, mais elle met en évidence des niveaux de nature différente :

- le deuxième niveau, avec un effet récursif (connaissances sur les connaissances d'un individu, c'est à dire aussi sur la connaissance qu'il a de ses connaissances, etc.), concerne en particulier l'activité du professeur qui évalue ce que sait l'élève ;
- on s'intéressera ici au premier niveau (connaissances sur les connaissances) qu'on appellera, par commodité, **métaconnaissances locales,** liées à une connaissance donnée ;
- on s'intéressera aussi au troisième niveau (connaissances qui servent à manipuler les connaissances) qu'on appellera, par la même commodité, **métaconnaissances globales.**

2. Considérons maintenant un point de vue de la didactique des mathématiques

M. Artigue distingue "métaconnaissances" et "connaissances" à partir d'"*une séparation entre des connaissances servant à la prise de décision et au **contrôle** et des connaissances sur lesquelles s'appuient à la fois cette activité réflexive et l'exécution proprement dite*". Elle distingue "*les connaissances et métaconnaissances ancrées dans un domaine précis, de métaconnaissances plus générales concernant la résolution de problèmes mathématiques*" [in Robert et Baron, 1993]. On retrouve la distinction que nous avons faites au paragraphe précédent entre "métaconnaissances locales" et "métaconnaissances globales".

Dans un article consacré à la "*prise en compte du méta en didactique des mathématiques*" [Robert et Robinet, 1996], A. Robert et J. Robinet définissent le "méta" :

> "*Nous utiliserons le préfixe méta devant les mots connaissances ou cognitif ou cognition pour désigner des éléments d'information ou de connaissances SUR les mathématiques, sur leur fonctionnement, sur leur utilisation, sur leur apprentissage, qu'ils soient généraux ou tout à fait liés à un domaine particulier*".

Elles distinguent aussi plusieurs niveaux de métaconnaissances :

> "*- des informations constitutives de la connaissance mathématique (méthodes, structures, organisation) ;*
> *- des informations constitutives de l'accès à la connaissance mathématique, accès d'un individu donné, ou plus général (jeux de cadres [5], rôle des questionnements, des exemples et des **contrôles** et aussi rôle de la réflexion épistémologique pour apprendre) ;*
> *- des informations sur les (modes de) production ou les mises en fonctionnement mathématique de soi et des autres (**contrôle**, guidage)*".

Enfin A. Robert et J. Robinet prennent une position claire sur l'enseignement du "méta" dont on a vu en introduction du 0.b.3.iv. qu'il était un sujet de controverse :

> "*Nous proposons de travailler en admettant l'hypothèse suivante : pour des connaissances assez complexes, ou pour des enfants ayant eu peu d'occasions de construire un savoir se rapprochant du savoir mathématique, l'enseignement doit (et peut) proposer des situations propices à une construction efficace de l'accès au savoir, le "méta" intervenant comme un des ingrédients de choix de ces situations. Cela ne veut pas dire qu'il y ait lieu de séparer les situations de construction de savoir des autres : au contraire nous pensons qu'il y a lieu de les imbriquer, tout comme l'accès au savoir est imbriqué chez tout un chacun à son propre savoir*" [Robert et Robinet, 1996].

C'est de ce point de vue que nous nous placerons quand nous formulerons des "propositions d'amélioration de l'enseignement" (cf. II.b.3.vi.).

En ce qui concerne le repérage des métaconnaissances, nous avons souligné l'importance du "contrôle" dans les propos de M. Artigue et de A. Robert, importance que l'on retrouve en psychologie cognitive, en particulier dans les écrits de O. Houdé [Houdé, 1995] que nous allons aborder maintenant.

---

[5] On définira le "jeu de cadres" en 0.b.4.ii.

3. O. Houdé [Houdé, 1995] accorde une place centrale à l'inhibition des schèmes (cf. 0.b.3.i. page 27) non pertinents .

O. Houdé conteste l'analyse piagétienne linéaire et hiérarchique du "temps de la science" en évoquant l'historien des sciences M. Serres :

> *"(ce temps) ne coule pas toujours selon une ligne, ni selon un plan, mais selon une variété extraordinairement complexe, comme s'il montrait des points d'arrêt, des ruptures, des puits, des cheminées d'accélération foudroyante, des déchirures, des lacunes"* [Serres, 1992].

O. Houdé propose un modèle du développement de la rationalité en cohérence avec ce développement de la science :

> *"La thèse soutenue ici est que le* ***développement de la rationalité ne peut se réduire à la substitution majorante de structures nouvelles, qu'elles soient symboliques ou subsymboliques, mais que se développer c'est aussi et souvent inhiber une structure concurrente****"* [Houdé, 1995].

Il compare ce modèle (modèle 2) à celui de J. Piaget (modèle 1a) et à celui des néostructuralistes (modèle 1b) à l'aide du schéma 4 ci-dessous. Il s'agit d'illustrer le développement des performances cognitives d'un niveau 1 à un niveau 2. Les carrés représentent, pour chaque niveau, le répertoire des schèmes disponibles ; les hachures représentent l'inhibition des schèmes dangereux, le grisé l'activation de la structure rationnelle.

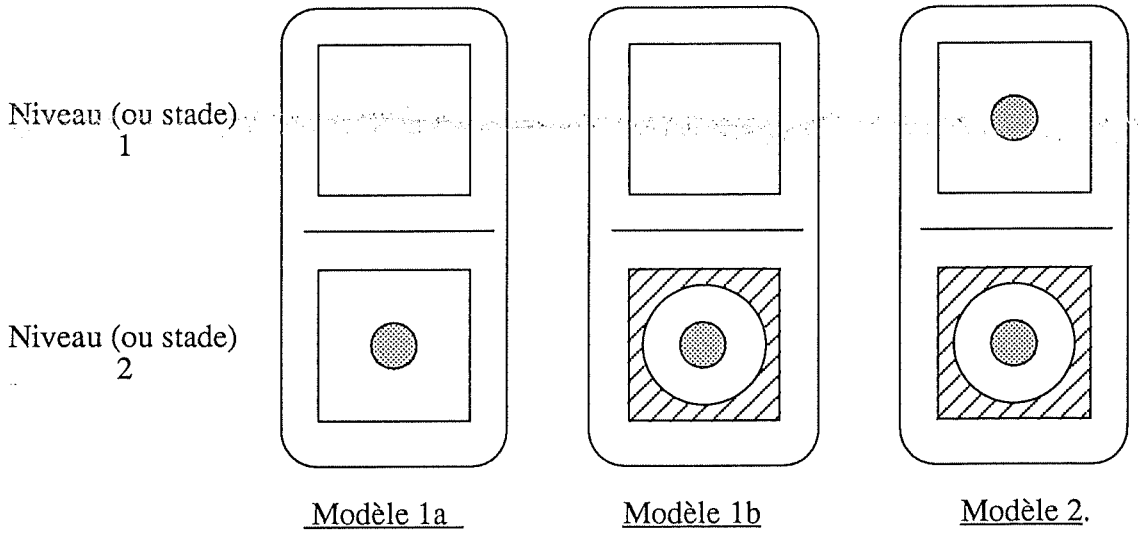


Schéma 4. Rationalité, développement et inhibition : trois modèles d'analyse des performances cognitives [Houdé, 1995]

Dans le modèle 1a (J. Piaget), un processus majorant substitue une structuration rationnelle à une structuration qui ne l'est pas ou qui l'est moins. C'est, pour O. Houdé, *"une conception linéaire et hiérarchique de l'essor des connaissances"*.

Le modèle 1b décrit, de façon très simplifiée, la théorie de Pascual-Leone (néostructuraliste). Celle-ci retient en particulier l'importance des opérateurs d'inhibition et d'activation. On retrouve le même processus majorant qu'en 1a : l'accroissement de la puissance d'activation substitue une structure rationnelle à une structure qui ne l'est pas ou qui l'est moins. L'élément nouveau est que la nouvelle structure permet l'inhibition des schèmes dangereux.

Le modèle 2 proposé par O. Houdé tranche radicalement avec les deux autres, puisque la structure rationnelle est déjà présente au niveau 1.

Si cette rationalité n'apparaît pas dans les performances cognitives, c'est par défaut d'inhibition des schèmes dangereux. O. Houdé illustre cette thèse à partir de l'analyse de "l'erreur A-non-B" [6] et des "biais de raisonnement" [7] :

> *"(Notre modèle), par l'accent mis sur la possibilité d'un défaut spécifique d'inhibition, permet d'envisager un développement de la rationalité "qui se plie et qui se tord", qui part de travers, l'erreur A-non-B et qui arrive en zigzag : les biais de raisonnement. Lorsque le mouchoir se chiffonne, selon la métaphore de Serres, les "plis du temps" révèlent la coexistence possible, à tout moment du développement , du "rationnel construit", la permanence de l'objet ou la règle logique dans les exemples retenus et de "l'irrationnel présumé révolu" : leur transgression par l'erreur A-non-B ou les biais de raisonnement. On retrouve ainsi, au niveau psychogénétique, la coexistence du moderne et de l'archaïque soulignée aujourd'hui par les historiens des sciences".*

L'aptitude à inhiber les schèmes non pertinents rejoint ce qui était dit au paragraphe précédent du "contrôle" comme métaconnaissance.

On évoquait à la fin du paragraphe précédent une hypothèse d'A. Robert et J. Robinet sur la nécessité de l'enseignement des métaconnaissances. O. Houdé montre l'utilité de l'apprentissage à l'inhibition à partir d'un pré-test des capacités déductives [8] : après le test, on analyse avec le sujet la situation et le piège qu'elle comporte :

> *"Dans ce problème, la source de l'erreur vient de l'habitude que l'on a tous de se concentrer sur les cartes dont la lettre est citée (...). Cela peut nous influencer dangereusement : on croit que cela facilite les choses alors qu'en fait on tombe dans un piège ! C'est vraisemblablement ce que tu as fait"* [Houdé, 1995].

O. Houdé montre que, lors du post-test, les résultats du groupe ayant suivi l'apprentissage à l'inhibition sont bien meilleurs que ceux du groupe témoin. Ce résultat incite pour lui *"à substituer à l'opposition irrationnel/rationnel (...) une distinction plus exacte des sujets en termes "d'inhibiteurs inefficients" et "d'inhibiteurs efficients", les uns et les autres étant susceptibles d'être rationnels".*

Le rôle attribué à "l'opérateur d'inhibition" rejoint celui qui était attribué au "contrôle" dans le paragraphe précédent. Nous en reparlerons en évoquant le travail avec instrument (le travail avec une calculatrice peut-il entraîner un fonctionnement plutôt automatisé ?). Nous en reparlerons aussi quand il s'agira de construire un dispositif descriptif du fonctionnement de l'élève (II.b.1.iii). L'importance du "contrôle" interviendra dans la hiérarchisation des "métaconnaissances globales".

---

[6] Il s'agit de savoir quand le bébé prend conscience de l'existence des objets en tant que tels. Piaget distingue 6 étapes qui marquent, au cours de la première année, la construction de cette notion. Le stade 4 est marqué par la recherche systématique de l'objet disparu, mais avec des erreurs de localisation : si l'on place devant le bébé deux caches A et B et si l'on introduit un objet sous A, le bébé ira le rechercher sous A. Si, après plusieurs répétitions de l'expérience, on place l'objet sous B, le bébé ira cependant rechercher l'objet sous A. C'est l'erreur A-non-B.

[7] Evans [Evans, 1989] définit les biais de raisonnement comme une tendance systématique à prendre en compte des facteurs non "relevants" pour la tâche à résoudre et à ignorer les facteurs pertinents. Cela remet en question "la présomption de rationalité qui crédite l'esprit humain d'une logique de principe" [Houdé, 1995].

[8] Il s'agit du test d'Evans qui fait apparaître des biais du fonctionnement déductif à partir de tâches de falsification de règles conditionnelles [Evans, 1989].

0.b.4 Les images, entre symboles, icônes et indices.

On a parlé dans le paragraphe précédent de "jeu de cadres". On a évoqué aussi des connaissances pour rechercher, manipuler les connaissances.

Dans l'enseignement comme dans l'apprentissage, comme dans les activités humaines en général, la manipulation d'une connaissance nécessite souvent la modification de la "forme" sous laquelle elle est représentée.

Nous aborderons successivement :

- les problèmes de passage d'un concept à ses images ;

- les problèmes inverses de passage d'une image au concept qu'elle est censée "donner à voir" ;

- plus généralement les problèmes de passage d'une représentation à l'autre d'un objet donné.

0.b.4.i. Du concept aux images : une coordination à géométrie variable.

Les objets des mathématiques sont des objets idéaux, qui ne sont pas donnés à voir.

Cela est vrai pour des concepts comme ceux de fonction ou de limite, mais aussi pour un carré tout simple : le carré géométrique n'est pas le carré vu ou dessiné.

G. Vergnaud a construit un modèle de concept (cf. 0.b.3.i.) permettant de traiter cette difficulté : la définition d'un concept à partir de situations, d'invariants et de signifiants permet la construction d'un objet qui, en tant que tel, nous échappe.

Cela règle le problème une fois que l'objet a été construit.

Mais, au début (et au cours) du processus de conceptualisation, l'objet étudié est encore chargé d'images qui ont été construites dans d'autres systèmes didactiques que le système scolaire (cf. 0.b.2.iii.).

Il peut y avoir ainsi une profusion d'images associées à un concept, comme le souligne A.-M. Drouin qui cite Rousseau :

> *"Essayez de vous tracer l'image d'un arbre en général, jamais vous n'en viendrez à bout ; malgré vous, il faudra le voir petit ou grand, rare ou touffu, clair ou foncé ; et s'il dépendait de vous de n'y voir que ce qui se trouve en tout arbre, cette image ne ressemblerait plus à un arbre"* [Drouin, 1987].

Il peut y avoir au contraire une fixation sur une image familière. Proust écrit ainsi, dans "A la recherche du temps perdu" :

> *"Quand je pensais à Florence, c'était comme à une ville miraculeusement embaumée et semblable à une corolle, parce qu'elle s'appelait la cité des lys et sa cathédrale Sainte Marie des Fleurs (...). Ces images étaient fausses... parce que elles étaient forcément très simplifiées. Peut-être même la simplification des images fut-elle une des causes de l'empire qu'elles prirent sur moi".*

L'association d'images à un concept rappelle ce que Vygotski dit des lois d'union et de fusion des mots (cf. 0.b.2.v.).

Le contrôle des métaphores (cf. 0.b.1.iii.) est décisif à toutes les étapes du processus de conceptualisation.

0.b.4.ii. D'une traduction au texte original : tradutore, traditore ?

Après avoir souligné le rôle général des images (cf. 0.b.1.), on insistera davantage ici sur la question des représentations rencontrées en mathématiques.

J.-L. Verley évoque le rôle des représentations graphiques en général (à la fois description et aide à la conceptualisation). Il note l'augmentation croissante des graphiques dans tous les domaines. En mathématiques, le graphique prend une place particulière :

> *"L'intuition géométrique est omniprésente dans la formulation, sans démonstration, de résultats fondamentaux, comme le théorème des valeurs intermédiaires (...).*
> *Le graphisme peut engendrer lui-même de nouveaux problèmes qui échappaient à l'analyse traditionnelle : ainsi le problème des "ponts de Koenigsberg" permet à Euler de poser les bases de la "théorie des graphes".*
> *Enfin le graphisme peut donner un statut acceptable pour la communauté mathématique à des objets dont la nature était restée mystérieuse : ainsi, au début du XIX^e siècle, le représentation géométrique des nombres complexes (...).*
>
> ***La figure en mathématique a acquis une nouvelle autonomie : elle sert de support aux concepts.***" [Verley, 1992]

L'interprétation des graphiques est donc décisive.

Il y a sur ce point des conceptions assez optimistes : J. Bertin décrit la représentation graphique, "la graphique" :

> *(C'est) "un système de signes fondamentaux que l'homme a construit pour retenir, comprendre et communiquer les observations qui lui sont nécessaires. Système de signes monosémique, elle se définit comme la partie rationnelle du monde des images.*
> *(...) Lorsqu'on emploie un système monosémique, le domaine considéré est rigoureusement précisé et délimité, si grand soit-il. Toute interprétation a priori, toute discussion sur le mot est, par définition, réglée au préalable. La chaîne des propositions peut donc se développer dans une succession d'évidences, qui deviennent logiques à la seule condition de se déduire l'une de l'autre indiscutablement.* ***Sur ce point, graphique et mathématique sont semblables et construisent le domaine rationnel***" [Bertin, 1984].

En contrepoint, viennent des points de vue plus nuancés :

1. Un point de vue d'ordre philosophique :

J. Bouveresse cite Wittgenstein *("Nous ne voyons pas seulement des formes, mais des perceptions")*, Hermann Von Helmholtz, psychophysiologue de la perception du XIX^e *("Les illusions de la perception ne sont en réalité rien d'autre que des erreurs de raisonnement (...) la représentation en nous juge, raisonne, réfléchit")*.

Il conclut :

> ***"La perception apparemment la plus immédiate fait intervenir de façon décisive des actes et des processus que l'on ne peut qualifier autrement que de psychiques".***
> [Bouveresse, 1995]

2. Un point de vue d'ordre sémiotique :

U. Eco critique l'iconisme (illusion de la ressemblance entre l'icône et son objet) :
- il serait naïf de croire qu'un signe iconique possède les propriétés de l'objet qu'il représente : un jugement de ressemblance est fondé sur des critères de pertinence fixé par des conventions culturelles.
- il serait naïf de croire qu'une icône ressemble à son objet : la similarité est un produit, culturel lui aussi, qui nécessite un apprentissage.

Il conclut en affirmant qu' ***"une icône est en fait un texte iconique et, plutôt que de dépendre d'un code, c'est un procédé d'institution de code"*** [Eco, 1976].

3. Un point de vue didactique, sur lequel nous insisterons davantage.

R. Duval présente le fonctionnement cognitif individuel organisé autour de *"la mobilisation d'une pluralité de registres de représentations sémiotiques"* [Duval, 1996].

Il distingue plusieurs aspects dans la production de représentations sémiotiques :
- un aspect structural (la nature et le nombre de ses signes, les règles de représentation permettant de combiner les signes...) ;
- un aspect phénoménologique (le mode de production, physique ou mental, le mode sensoriel d'appréhension -vue, audition...) ;
- un aspect fonctionnel, qui peut permettre **une fonction de communication, une fonction de traitement, une fonction d'objectivation.**

Un **registre** est défini comme un système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions ci-dessus. R. Duval met en évidence les deux appréhensions possibles pour une représentation sémiotique :

> *"Toute représentation étant représentation de quelque chose de réel, d'imaginaire ou de théorique, on peut se centrer directement sur l'objet représenté comme si la représentation était transparente ;*
> *- on peut au contraire se centrer sur la représentation, c'est à dire sur la manière dont la représentation représente".*

Dans un article antérieur, R. Duval indique que le mathématicien fonctionne souvent par rapport à la **référence** (2, ou 1+1, ou $\sqrt{4}$ représentent le même objet) et se situe au premier niveau d'appréhension des représentations sémiotiques. Mais l'élève fonctionne souvent par rapport à la représentation : de ce point de vue, 2 et 1+1 n'ont pas pour lui la même **signification** [Duval, 1988 a]. Il évoque dans ce cadre les problèmes posés par l'assimilation de $\mathbb{R}$ à une droite.

A. Lerouge, à partir de l'intersection de deux droites, met aussi en évidence les effets de contagion du signifiant (les deux "droites" tracées, avec les propriétés physiques qui leur sont attachées) sur le signifié (les droites mathématiques, théoriques). Il cite un commentaire éloquent d'un élève [Lerouge, 1992] :

> *"Plus l'angle que forment les deux droites au point d'intersection est petit, plus l'intersection s'étend sur plusieurs points".*

Il existe bien des difficultés profondes dans le passage d'une représentation à l'objet représenté.
Il existe aussi des difficultés importantes dans le passage d'une représentation à une autre représentation.
Ce que nous allons décrire plus précisément.

0.b.4.iii. Cadre, registre, point de vue : changer, mais de quoi ?

La plupart du temps, on dispose (en mathématiques comme "ailleurs") de plusieurs représentations du même objet. Ce qui est essentiel pour distinguer un objet d'une de ses représentations. D'où la nécessité de préciser ce que l'on entend par changement de cadre, de registre, de point de vue.

1. Le changement de registres.

On a donné au paragraphe précédent la définition d'un registre par R. Duval. Un changement de représentation peut se faire à l'intérieur d'un même registre (on parlera de **traitement** : 1+1=2), ou entre deux registres (Duval parle alors de **transformation**).

Il insiste sur deux points :

- les apprentissages requièrent une **coordination** des différents registres de représentation qu'un domaine de connaissance mobilise ;

- il y a un caractère **problématique**, aussi bien des traitements que des transformations :
  - à l'intérieur d'un même registre (traitement), on a vu que le rapport des élèves à la signification plus qu'à la référence fait que l'identification de deux expressions (1+1 et $\sqrt{4}$ par exemple) n'a rien de naturel ;
  - entre deux registres (conversion, ou transformation) :

> *"Cette coordination n'a rien de spontané. On peut enregistrer à différents niveaux de l'apprentissage la permanence d'un cloisonnement des registres de représentation entre eux".* [Duval, 1996]

Le problème principal repose pour lui dans la distinction des éléments pertinents pour l'appréhension d'une représentation particulière et dans la mise en relation des éléments correspondant au même objet dans deux registres différents.

Cette coordination est cependant essentielle :

> *"(c'est) la condition pour la maîtrise de la compréhension dans la mesure où elle est la condition pour une différentiation réelle entre les objets mathématiques et leur représentation.*
> *Elle constitue un seuil dont le franchissement change radicalement l'attitude vis à vis d'un type d'activité ou d'un domaine (conscience de franchissement d'un seuil, initiative et auto-contrôle dans le domaine des démarches)"* [Duval, 1996].

2. Le changement de cadres.

R. Duval situe **registre** et **cadre** l'un par rapport à l'autre :

> *"Un registre se détermine par rapport à un système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions cognitives fondamentales. Un cadre se détermine par rapport à des objets théoriques, en l'occurence des objets mathématiques.*
>
> *Il peut y avoir changement de cadre sans changement de registre et changement de registre sans changement de cadre, car un cadre peut exiger la mobilisation de plusieurs registres (par exemple le cadre géométrique)".* [Duval, 1996]

R. Douady, à qui est due la notion didactique de cadre, y intègre aussi les images mentales associées :

> *"Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre ces objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et élements"* [Douady, 1986].

Douady parle ainsi de cadre algébrique, arithmétique, géométrique.

La notion, plus générale que celle de registre, vaut surtout par son caractère dynamique. Le changement de cadre (le "jeu de cadres") est alors présenté comme producteur, permettant aux élèves de fonctionner d'une certaine façon comme le chercheur :

> *"Les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des résultats non connus, à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux, en somme à l'enrichissement du cadre origine et des cadres auxiliaires de travail"* [Douady, 1986].

Le changement de cadres est un élément moteur pour le processus de conceptualisation de l'élève.

Dans le même texte, R. Douady évoque aussi la "dialectique outil-objet" qui permet la construction des concepts :

> ***"- Un concept est un outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème".***

(on retrouve ici une idée assez proche des "théorèmes-en-acte" de G. Vergnaud que R. Douady évoque d'ailleurs quand elle parle "d'outils implicites") :

> ***- un concept devient objet quand il acquiert une place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement".***

Douady distingue plusieurs phases à l'intérieur de cette dialectique : la phase de mobilisation des anciennes connaissances, la phase de recherche d'un "nouveau implicite", la phase "d'explicitation et d'institutionnalisation locale", la phase "d'institutionnalisation-statut d'objet", la phase de familiarisation-réinvestissement", la phase "complexification de la tâche ou nouveau problème".

3. Le changement de points de vue.

C'est le mot le plus incertain. C. Castella propose cette définition :

> *"Un **point de vue** est un découpage dans le corps des savoirs mathématiques sur un objet donné, rassemblant définitions, théorèmes, situations et signifiants. (...) Ainsi, à propos de la tangente au cercle, on pourra distinguer les points de vue "normale au rayon", "unicité du point d'intersection", "limite des sécantes"* [Castella, 1995].

R. Douady parle de changement de points de vue dans un sens différent :

> *"Une part importante du travail des mathématiciens est consacrée à interpréter les problèmes qu'ils se proposent de résoudre, à changer de point de vue (par exemple, pour une équation différentielle, à adopter un point de vue qualitatif ou un point de vue algébrique)".* [Douady, 1986],

Le "point de vue" est alors un objet plus transversal. C'est dans ce sens que le mot est utilisé dans les "Vues et changements de points de vue" qui constituent les retours critiques sur les TP des élèves dans [Trouche, 1996 b1].

On gardera dans cette thèse le sens attribué à ce mot par C. Castella car cela permet de disposer d'**un "jalon" entre concept et conception** utile pour notre travail.

En effet, un point de vue n'est pas forcément issu du corps des savoirs mathématiques actuellement reconnus sur un objet donné.
Un objet est immergé dans un champ épistémologique. Ainsi, pour l'objet "limite d'une fonction", le champ épistémologique comprend à la fois les savoirs mathématiques (c'est-à-dire reconnus comme tels aujourd'hui) mais aussi toutes les définitions, théorèmes... qui ont abouti à ce savoir constitué par accumulation, reconstruction. On définira alors un "point de vue" comme un découpage dans ce champ épistémologique.

Tout point de vue n'est donc pas forcément "complètement" légitime [9]. :

- on pourra parler ainsi, même pour une tangente à une courbe quelconque, de point de vue "unicité du point d'intersection".
- pour ce qui concerne notre étude, on parlera, pour une limite, de "point de vue cinématique" ou de "point de vue approximation" (cf.I.a.1.iii.)

Ainsi l'étude épistémologique nous permettra de mettre en évidence ces "points de vue" qui seront des points d'appui dans la mise en évidence des conceptions des élèves :

- "chaque point de vue ainsi dégagé donne usuellement naissance à une conception derrière laquelle il s'efface ;
- pour définir certaines étapes transitoires de l'apprentissage (...) on pourra définir des conceptions où coexistent des points de vue différents" **[Castella, 1995].**

Le mot *usuellement* est important : nous avons vu (cf. 0.b.3.iii.) qu'il n'y a pas nécessairement correspondance parfaite entre les résultats de l'analyse épistémologique et les résultats de l'analyse didactique.

Nous en reparlerons en II.a.

---

[9] Heureusement que l'activité mathématique, d'ailleurs, s'autorise à manipuler des points de vue sans être absolument sûre que ceux-ci sont légitimes... Ils peuvent d'ailleurs être "producteurs" sans être vraiment légitimes, cf [Lakatos, 1976].

0.b.5 Images et instruments

L'environnement de notre travail impose de situer, dans leur rapport à l'apprentissage, les outils de calcul qui ont envahi les salles de classe - et les cartables

On parlera dans ce qui suit des calculatrices qui sont à disposition des élèves et, de façon générale, de tout instrument qui concourt à l'action engagée en mathématiques - ou ailleurs.

0.b.5.i. Une hagiographie fondée sur les métaphores.

Une approche souvent superficielle, toujours partiale, de l'action avec instrument a autorisé des réactions enthousiastes de nombreux auteurs. Bien souvent la rapidité de l'analyse va de pair avec la richesse des métaphores.

1. La métaphore du "laboratoire mathématique"

On la trouve en particulier dans la littérature américaine. Ainsi F. Demana écrit-il, dans un ouvrage consacré à une approche graphique de l'analyse :

> *"Instead of being bored and discouraged by conventional contrived problems, students suddenly grow excited by their ability to explore problems that arise from real world situations and learn from their experiences.*
>
> *The mathematic classroom is transformed into a mathematics laboratory, with a new interactive instructional approach that focuse on problem solving.*
>
> *As a natural outgrowth of this excitement, students complete the course with a better understanding of mathematics and a solid intuitive fondation for calculus"* [Demana et alii, 1992].

C'est la même métaphore qui intervient dans la publicité de Texas Instruments (en 1996) pour la calculatrice TI-92 : *"La première plate-forme mathématique !"*.

2. La métaphore de "cognitive technology" et "d'amplificateur"

J. Hillel [Hillel, 1993] évoque le point de vue de R. Pea sur les *"outils pour l'esprit fournis par la culture"* que peuvent être les symboles, l'écriture, les ordinateurs, qui aident le fonctionnement cognitif de l'individu (mémoire, apprentissage) et permettent une amplification des capacités humaines.

Ainsi un ordinateur permettrait de réaliser plus de tâches, plus vite et plus précisément. Pea précise que cette métaphore de l'amplificateur est très superficielle : il faut aussi prendre en compte la réorganisation qu'impose l'utilisation d'un tel outil, à deux niveaux :

- il y a déplacement de l'activité humaine vers un niveau "méta" ;

- il y a changement des objets sur lesquels on agit.

Ce qui nous amène à un point de vue didactique sur la question.

0.b.5.ii. Dans le feu de l'action : points de vue de didacticiens.

Il y a eu simultanéité entre le développement de la didactique des mathématiques en France et la généralisation des outils de calcul (calculatrices plus qu'ordinateurs) dans les classes. D'où le titre de ce paragraphe.

De nombreuses travaux ont été publiés récemment qui permettent à la fois de donner quelques éclairages sur la question et de montrer l'ampleur de la tâche à accomplir pour aller de l'avant. Citons le résultat de recherches liées à des projets institutionnels - ceux du Ministère de l'Eduction Nationale ([Artigue et alii, 1996], [Hirlimann, 1994]), liés à des premiers travaux universitaires ([Canet, 1994], [Dagher, 1994]) ou à des travaux se situant dans une continuité d'élaboration ([Artigue, 1995 b], [Balacheff, 1994], [Chevallard, 1992], [Cornu, 1992]). On en reparlera dans la partie III de cette thèse, consacrée aux perspectives.

Mais déjà examinons ce qui sera utile pour notre étude.
On trouve dans les travaux évoqués des questions :

1. Relatives au statut épistémologique des objets techniques.

Y. Chevallard pose le problème de l'intégration des outils :

> *"(Il y a) un contraste extraordinaire entre la rapidité et le degré de pénétration des objets techniques nouveaux (télé, calculette, ordinateur) dans la vie sociale et le barrage qu'élève devant eux cette part de la société, l'école, que d'aucuns regardent pourtant comme la matrice du futur"* [Chevallard, 1992].

Et au delà de l'intégration se pose le problème du statut : la calculette a un statut aussi bien pour le physicien que pour l'épicier. Ce n'est pas le cas en mathématiques (cf. 0.c.1.i.).

2. Relatives au comportement des élèves.

M. Artigue indique les potientialités théoriques des logiciels :

> *"Développer une approche expérimentale des mathématiques, aborder des problèmes plus riches, plus intéressants, moins strictement scolaires, permettre une meilleure convivialité de l'enseignement, mieux adapter cemlui-ci au fonctionnement de chaque élève, favoriser un fonctionnement plus réflexif, plus stratégique"* [Artigue, 1995 b].

Quant aux résultats, elle observe des tendances contradictoires :
- une première favorisant un fonctionnement réflexif ;
- une deuxième une atomisation de la réflexion -ou comportement de "**pêche**". Elle évoque par exemple un problème de factorisation d'une expression trigonométrique avec le logiciel Derive :

> *"L'observation effectuée montrera que les élèves choisissant d'utiliser Derive seront plus perturbés qu'aidés par cette utilisation (...). Un nombre non négligeable de choix de commandes et d'options ne conduisent qu'à un changement de l'ordre des termes de l'expression donnée. Dans ces conditions, l'élève est emporté dans un monde sans repères qui lui soient accessibles, voué à des phénomènes de "pêche" hasardeux"* [Artigue, 1995 b].

3. Relatives à la nature des gestes effectués

M. Rogalski oppose le calcul "papier/crayon" au calcul/machine :

> *"Seul (le papier/crayon) permet pour l'instant une "vision agissante instantanée" qui semble, en particulier, spécifique du calcul : la vitesse de réaction, l'écriture immédiate pour rapprocher des termes, corriger des morceaux, la vision globale des formules, l'anticipation visuelle des modifications possibles... utilisent une interaction entre la main, l'oeil et le cerveau qui est, semble-t-il bien plus rapide et efficace que l'utilisation d'un clavier, la manipulation d'une souris, le choix dans un menu...* ***actions qui sont lentes, réductrices et séquentielles"*** [Rogalski, 1994].

4. Relatives aux nouvelles compétences requises.

J. Hillel montre que le répertoire des objets change (plus d'objets plus complexes peuvent être exhibés, sous différents points de vue, à partir de démarches plus expérimentales). Dans le cadre d'un logiciel de calcul formel, une fonction peut être représentée par sa formule, mais aussi sous forme graphique et avec de nombreux cadrages différents.

Mais cela implique une nouvelle activité, de niveau "méta", que J. Hillel appelle le "window shopping" : savoir changer les graduations des axes, coordonner différentes vues issues de cadrages différents.

Plus, cela demande de choisir et de combiner différentes méthodes (numériques, graphiques, analytiques) et de rester critique ("being on guard") devant la modélisation discrète du continu que réalise la machine :

> *"La façon avec laquelle l'objet est représenté change l'objet lui-même"* [Hillel, 1993].

Les études didactiques relatives au "travail avec instrument" font apparaître trois types de problèmes :

- des problèmes d'ordre institutionnel (nous y reviendrons dans la partie III de cette thèse) ;
- des problèmes liés aux gestes et aux comportements ;
- des problèmes liés à la représentation des connaissances par les instruments.

Sur ces deux derniers points, essentiels pour cette thèse, une étude plus approfondie est nécessaire (cf. paragraphes suivants 0.b.5.iii. et 0.b.5.iv.).

0.b.5.iii. La transposition informatique (N. Balacheff).

N. Balacheff évoque cette transformation des objets représentés en parlant de "transposition informatique" :

> ***"Une "représentation du monde" n'est pas le monde lui-même, cette assertion largement partagée passe aujourd'hui pour une banalité.*** *Pourtant, tel n'est pas le cas. Pour le percevoir, il faut aller plus loin et considérer qu'une représentation n'est même pas une approximation de son objet au sens d'une simplification de la réalité pour permettre sa "re-présentation". Toute représentation a des propriétés héréditées à la fois des choix de modélisation qui ont été faits et des caractéristiques des moyens sémiotiques retenus. Ces propriétés sont a priori étrangères au "monde" représenté. De plus, en temps que dispositif matériel, l'ordinateur impose un ensemble de contraintes qui, elles-mêmes, vont exiger une transformation appropriée pour permettre la mise en oeuvre de la représentation adoptée.*
>
> *Je parlerai de transposition informatique pour désigner ce travail sur la connaissance qui en permet une représentation symbolique et la mise en oeuvre de cette représentation par un dispositif informatique, qu'il s'agisse ensuite de "montrer" la connaissance ou de la "manipuler". Dans le contexte de l'enseignement, cette transposition prend une importance particulière.* ***Elle signifie en effet une contextualisation de la connaissance qui peut avoir des conséquences importantes sur le résultat des apprentissages".***
>
> [Balacheff, 1994 a]

Dans le même texte, N. Balacheff distingue les contraintes liées à l'univers interne de la machine et les contraintes liées à l'interface :

> ***"Les systèmes de représentations ayant leurs propres caractéristiques, l'univers interne et l'interface combinent des effets générateurs et des phénomènes non intrinsèques aux entités représentées".***

Cette situation est parfaitement illustrée par le schéma 5 ci-dessous, tiré de [Balacheff, 1994 b].

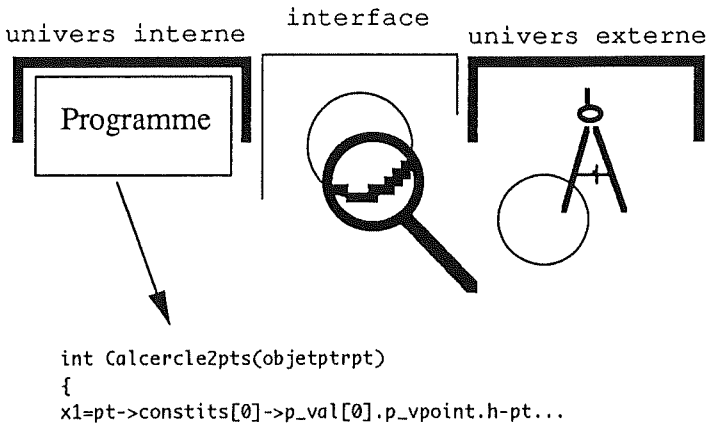
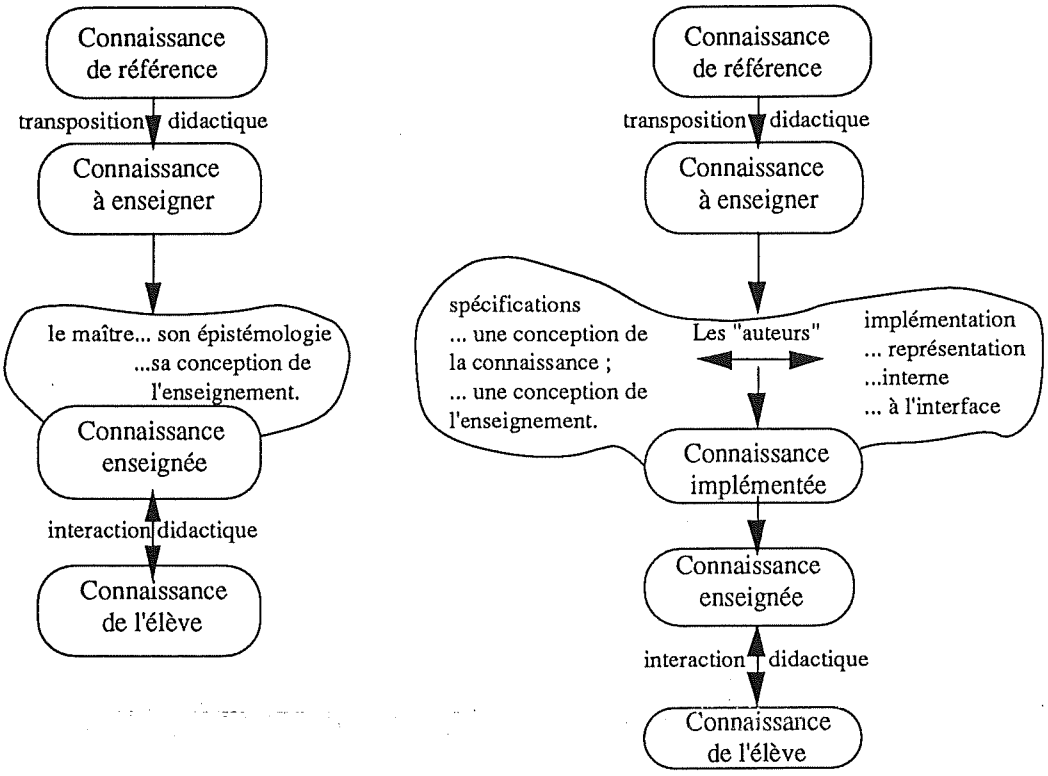


Schéma 5
Evocation des représentations, à propos du cercle, dans les univers interne et externe et à l'interface (in [Balacheff, 1994 b])

Ces distinctions restent tout à fait pertinentes pour les calculatrices graphiques ou symboliques.

Il y a ainsi une double transposition à l'oeuvre dans le cadre d'un enseignement au sein "d'un environnement calculatrice" (ou ordinateur) :
- une transposition didactique (cf 0.b.3.ii.) ;
- une transposition informatique.

N. Balacheff précise à l'aide de deux schémas (schémas 6 et 7 ci-dessous) les places respectives des deux transpositions hors ou en EIAO :



Schémas 6 et 7 (in [Balacheff, 1991]).
Schéma de transformation d'une connaissance donnée
- dans un contexte non EIAO (schéma de gauche)
- dans un contexte EIAO (schéma de droite)

Deux remarques sur ces schémas :

- même dans un contexte EIAO (et plus encore dans un contexte d'environnement calculatrice), l'influence du maître, donc de son épistémologie, est importante ;

- on ne peut pas dire que la transposition informatique commence là où la tranposition didactique s'arrête. La transposition informatique repose à la fois sur la nature des matériels disponibles (ce qui est indépendant de la transposition didactique) et sur les connaissances à enseigner (qui dépendent d'elle). La transposition didactique se poursuit au sein même du système d'enseignement. Comme nous l'avons vu en 0.b.3.ii., c'est un processus.

Les contraintes liées au matériel (à l'univers interne comme à l'interface de l'ordinateur), les choix de modélisation et les caractéristiques des moyens sémiotiques retenus par les auteurs des logiciels aboutissent à une transformation de la connaissance : la transposition informatique.
Celle-ci combine ses effets avec ceux de la transposition didactique.

0.b.5.iv. Un peu de recul : un point de vue issu de la psychologie du travail (Rabardel)

On s'intéressera ici aux travaux de P. Rabardel relatifs à l'enseignement (in [Bruillard, 1995 b]) et au cadre plus général qu'il définit pour le "travail avec instrument" [Rabardel, 1995]. On décrit ci-dessous les points principaux de son analyse des artefacts (terme qu'il préfère à objet technique, ou machine car *"il est plus neutre et n'implique pas un point de vue technologique sur ces objets"* :

1. L'utilisation d'un artefact influence la construction du savoir.

Parce qu'il requiert (relativement) un certain type d'activités, d'abord à cause de contraintes de structure *("il participe de la résistance du monde des objets au sens philosophique du terme")*, ensuite parce qu'il est *"porteur de contraintes en référence aux modalités d'actions sur la réalité qu'il organise et qui s'imposent au sujet"*, et enfin *"dans la mesure où il comprend, plus ou moins explicitement, une préstructuration de l'action de celui qui l'utilise"*.

Rabardel distingue plusieurs types de contraintes.

> *"Elles sont liées :*
> *- aux propriétés de l'artefact en tant qu'objet matériel ou cognitif, ce sont les* ***"contraintes de modalités d'existence"*** *;*
> *- aux objets sur lesquels il permet d'agir et aux transformations qu'il autorise, ce sont les* ***"contraintes de finalisation"*** *;*
> *- à la préstructuration de l'action de l'utilisateur, ce sont les* ***"contraintes de pré-structuration de l'action"****."*

2. L'appropriation d'un artefact s'accompagne de l'élaboration de "schèmes d'utilisation".

P. Rabardel parle à propos de schème de "concept nomade" :
- il évoque Piaget, pour qui *"les schèmes constituent des moyens du sujet à l'aide desquels il peut assimiler les situations et les objets auxquels il est confronté" ;*
- il évoque aussi Vergnaud : *"les schèmes sont du même type logique que les algorithmes, mais, s'ils sont en général "efficaces", il leur manque éventuellement l'effectivité, c'est à dire la propriété d'aboutir à coup sûr en un nombre de pas fini. Une représentation implicite ou explicite du réel fait partie intégrante du schème, analysable en terme d'objets, de catégories en acte (propriétés et relations) et de théorèmes-en-acte. Mais il y a toujours beaucoup d'implicites dans un acte et donc de difficulté à analyser pour le sujet".*

Il apporte aussi une précision essentielle pour la compréhension du concept de schème. **Il précise que les schèmes se situent à la fois en amont et en aval de la conceptualisation** :
- en aval, car ils contiennent déjà des "théorèmes-en-acte" et même des "concepts en acte" (cf. 0.b.3.i.). On pourrait dire que, dans ce sens, "la pensée se traduit par un geste" ;
- mais aussi en amont, dans la mesure où ils remplissent :
  "- des fonctions épistémiques tournées vers la compréhension des situations ;
  - des fonctions pragmatiques tournées vers la transformation de la situation et l'obtention de résultats ;
  - des fonctions heuristiques orientant et contrôlant l'activité".

On pourrait dire que dans ce sens "le geste produit de la pensée".

Rabardel distingue les **schèmes d'usage**, *"orientés vers les tâches secondes correspondant aux actions et activités spécifiques directement liées à l'artefact"* ; et les **schèmes d'action instrumentée**, dont *"la signification est donnée par l'acte global*

ayant pour but d'opérer des transformations sur l'objet de l'activité". Ces derniers schèmes contiennent, comme constituants, les premiers (cf schéma 5 ci-dessous).

Ce sont tous des schèmes sociaux dans la mesure où leur émergence résulte, pour une part d'un processus collectif auquel contribuent les utilisateurs, mais aussi les concepteurs des artefacts.

Il appelle ce processus de construction de schèmes : **la genèse instrumentale.**

3. Cela permet de définir un instrument.

Un instrument est alors défini comme étant formé (à l'issu de la genèse instrumentale) d'un artefact (ou de la partie d'un artefact mobilisé pour l'action), *"et des schèmes d'utilisation associés, résultant d'une construction propre du sujet, autonome, ou résultant de l'appropriation de schèmes sociaux"*, ce que l'on a traduit sur le schéma 8 ci-dessous.

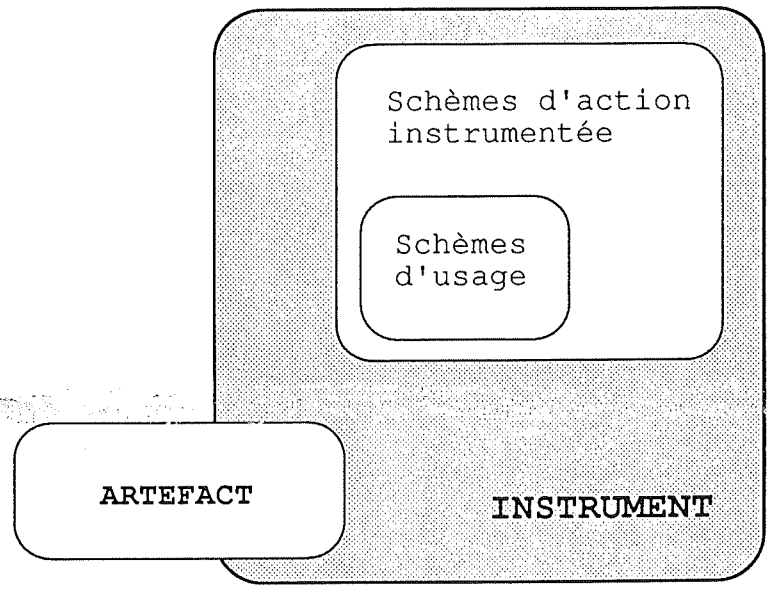


Schéma 8 : rapport entre l'artefact et l'instrument.

4. P. Rabardel définit et distingue instrumentalisation et instrumentation.

L'instrumentalisation est définie comme un processus d'enrichissement des propriétés de l'artefact par le sujet (cela peut être momentané, ou permanent, se traduire par une modification de l'artefact ou non).
L'instrumentation est définie par l'accomodation des schèmes du sujet, consécutive à la découverte progressive des propriétés intrinsèques de l'instrument et donc par un changement de signification de l'instrument résultant de l'association de l'artefact à de nouveaux schèmes.

Pour simplifier les choses, nous pourrions dire que dans le processus d'instrumentalisation l'individu modifie l'instrument et dans le processus d'instrumentation, l'instrument modifie l'individu. Instrumentalisation et instrumentation seront des outils précieux pour l'analyse de l'activité des élèves dans la partie II de cette thèse.

Le cadre théorique de cette thèse est installé, les artefacts (ou outils) d'analyse sont choisis. La genèse instrumentale peut commencer.

0 c. Chercher.

Problématique. (Une histoire sans fin).

La certitude n'est jamais achevée ;
les fondations ne sont jamais trouvées.
Mais, dans le domaine des mathématiques,
l'art de la raison transforme
chaque progrès de la rigueur
en un accroissement du contenu.
[Lakatos, 1974]

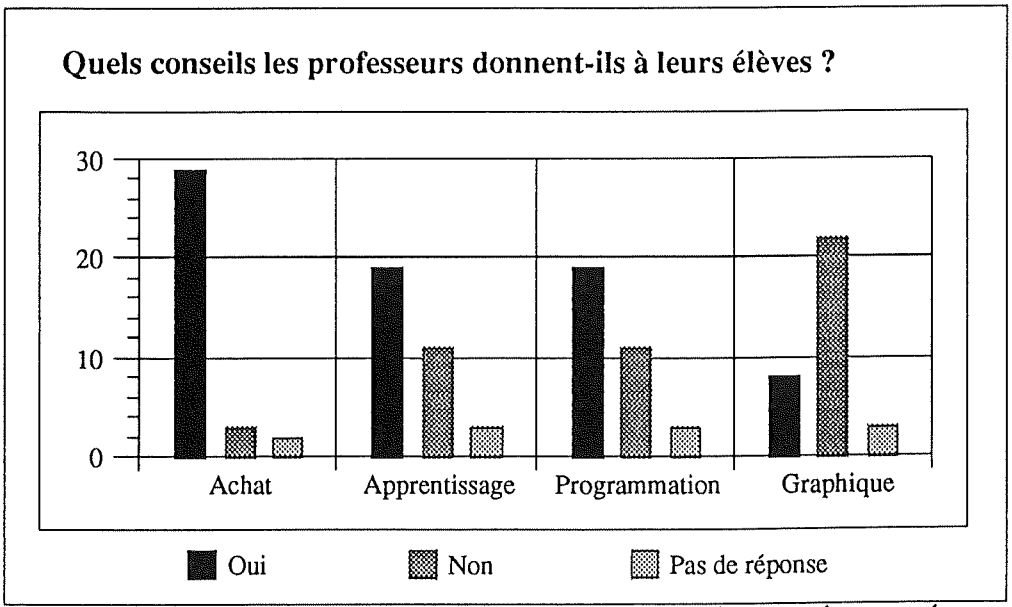
II en est de la présentation habituelle d'une thèse comme d'une démonstration. Dans la rédaction finale, disparaissent les phases d'hésitation, de recul, de rectification qui ont abouti au résultat. Nous ne dérogerons à cette règle implicite que pour signaler les moments où nous avons été entraînés plus loin ou plutôt dans une autre direction que celle prévue initialement.

0.c.1 Sur la lancée d'un DEA

On reprend ici sommairement les résultats du DEA [Trouche, 1992] parce qu'ils sont à l'origine de notre problématique.

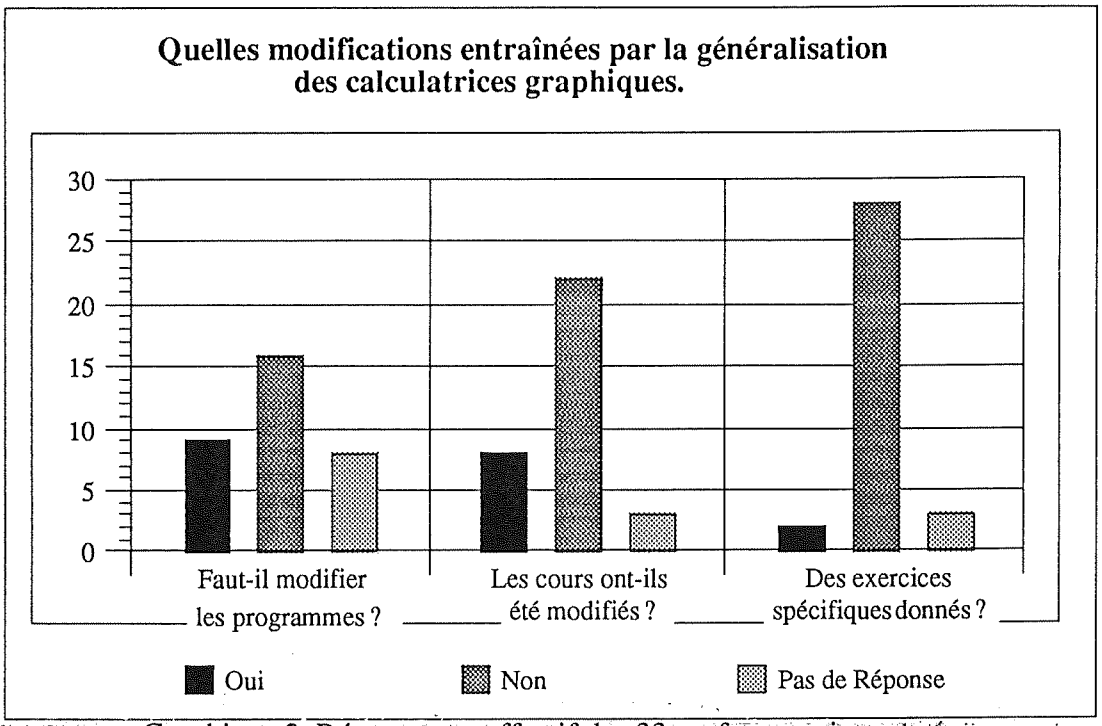
0.c.1.i. Un premier résultat : le statut des outils techniques.

Le premier résultat, toujours actuel, est que les mathématiques vivent, dans l'institution scolaire, avec une technologie assez sommaire : le tableau noir, la craie, évoqués dans l'introduction, parfois un compas ou une équerre (cf. les résultats de l'enquête menée dans le cadre du DEA, graphiques 1, 2 et 3 ci-dessous).

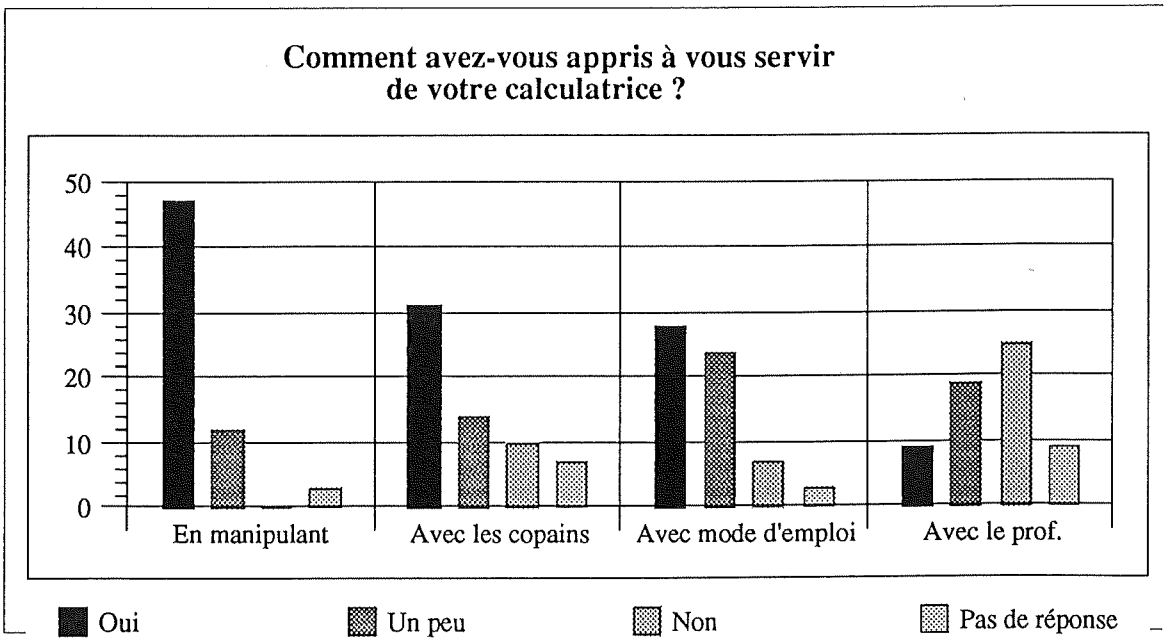


Graphique 1. Réponse en effectif des 33 professeurs interrogés à propos des conseils donnés aux élèves, relatifs aux calculatrices

Les calculatrices graphiques (pourtant possédées par une grande majorité d'élèves dans les classes scientifiques de lycée) ne sont pas prises en compte par l'institution. On le voit, sur les graphiques 1 et 2 ci-contre, du point de vue des professeurs et sur le graphique 3 du point de vue des élèves (l'enquête est menée auprès des professeurs de mathématiques et des élèves de 33 classes de 1ère S en 1992).



Graphique 2. Réponses en effectif des 33 professeurs interrogés.



Graphique 3. Réponses en effectif des 64 élèves interrogés

L'utilisation régulière par les élèves d'un instrument ignoré par les professeurs a sans doute des conséquences sur le processus d'apprentissage.

L'image crayon-papier	L'image clavier-écran
L'image papier est fabriquée Il y a un caractère producteur particulier qui relève d'un tracé à la main : le geste doit prendre en compte certaines contraintes pour réaliser la tâche (angulosité, inflexion).	**L'image machine est reçue** L'élève est spectateur de la courbe qui se construit. Il y a en même temps disparition de la profondeur du temps qui permet le recul.
L'image papier reste Elle réside dans le cahier de cours, dans un contexte de savoir. Elle n'est pas autonome, elle colle aux définitions et aux théorèmes.	**L'image écran s'efface.** Quand on change de vue, ou quand on arrête la calculatrice (tant qu'il n'y a pas d'imprimante), l'image s'en va. L'image colle à la machine qui n'a pas un statut d'outil mathématique.
L'image papier est unique Obtenir des renseignements nécessite de réfléchir sur la courbe. Répondre aux questions posées nécessite un minimum de concentration sur l'image : il faut obtenir d'elle le meilleur d'elle même.	**L'image écran est multiple** On peut faire des zoom avant, arrière, mais a-t-on du recul sur l'image du moment ? On peut changer le cadrage, mais les images successives sont-elles raccordées ? Raccordables ? Ne constituent-elles pas un puzzle ?
L'image papier est statique Une fois construite, la courbe est stable. C'est ainsi plus la représentation d'un graphe (x, f(x)) que d'un mouvement.	**L'image graphique est dynamique** La mobilisation de l'option "trace" fait se déplacer un point lumineux sur la courbe. La courbe devient ainsi la trajectoire d'un "point courant".
L'image papier donne l'illusion de la continuité Au XVIII° siècle, est continue une fonction dont le graphe se dessine sans lever la plume. Le théorème des valeurs intermédiaires s'éprouve (alors qu'il se prouve beaucoup plus tard) par la rencontre physique de deux traits.	**L'image machine donne l'illusion de la discontinuité** La machine donne à voir n points, un par colonne de pixels. En l'absence de "lissage" de la courbe, il y a une reconstitution implicite du tracé par l'élève : le vrai tracé s'obtient en joignant deux points consécutifs. Il y a une dissolution des frontières entre discret et continu.
L'image papier est une image de synthèse L'image papier apparaît comme le résultat d'un travail, un aboutissement. Ce statut, naturel, est conforté par l'ordre usuel des questions du problème standard.	**L'image machine est une image pour l'analyse** Quand l'image surgit, tout reste à faire. L'image écran est donc, potentiellement, un outil pour la formulation de conjectures, la vérification partielle de celles-ci et plus généralement pour la résolution de problèmes.
L'image papier est faillible Elle a à la fois l'autorité du papier, bien dévalué et du porteur du crayon qui se trompe bien souvent.	**L'image écran est infaillible** Elle a à la fois l'autorité indiscutable de la machine et l'autorité indiscutée de l'écran.
L'image papier est une image de la fonction Coexistant sur le même support, la définition "algébrique" de la fonction, son étude même et son graphique, tracé dans le même mouvement, sont autant d'angles de vue du même objet.	**L'image écran est la fonction** Détachée de tout contexte mathématique, l'image écran a un rôle de concrétisation très fort. Paradoxe apparent, alors même qu'il y a dématérialisation des supports, il y a matérialisation des objets représentés. La représentation devient présentation.

Tableau 1. Image "crayon/papier", image "clavier"écran" (cf. 0.c.1.ii.)

0.c.1.ii. Un deuxième résultat : la nature des images construites.

Cette nature a été étudiée à partir de la comparaison des "caractères réducteurs et producteurs" des graphiques "papier-crayon" et des graphiques "machine" :

- la notion didactique de "caractères réducteurs et producteurs" des représentations graphiques est due à J. Rogalski [Rogalski, 1982] ;
- les éléments d'analyse des images sont empruntés à R. Debray [Debray, 1992].

Le tableau 1 (page précédente) qui résume cette analyse croisée [Trouche, 1994 b] donne déjà un certain nombre de pistes pour analyser l'influence des calculatrices graphiques sur l'apprentissage de l'analyse.

0.c.1.iii. Un troisième résultat : l'influence sur les comportements.

Le DEA se terminait par le bilan d'une activité organisée autour de la notion de limites dans une classe de 1ère S. Voici l'intégralité de ce qui était noté :

Début de l'extrait. *Les élèves sont en classe entière.*

Je me propose, au moyen d'une activité très dirigée, d'observer leurs réactions, confrontés à une contradiction entre les résultats affichés par leur machine et les résultats annoncés par le maître. Il s'agit d'étudier la limite éventuelle en zéro de la fonction $\frac{\sin x - x}{x^3}$ *. Les élèves n'ont évidemment pas les moyens théoriques de déterminer seuls cette limite en 1°S.*

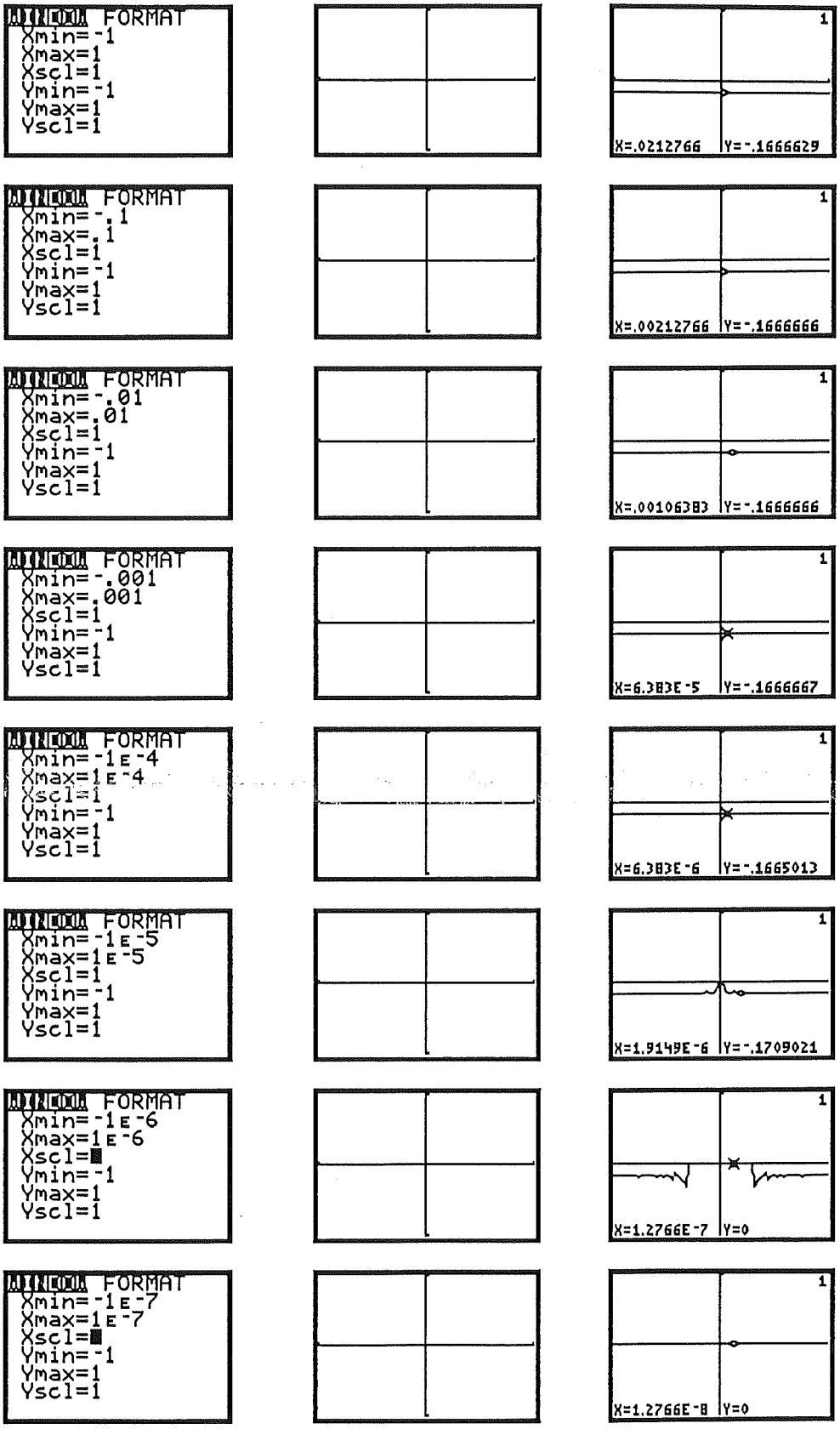
***Dans un premier temps**, je leur propose une étude graphique: ils reçoivent chacun une feuille avec 8 écrans et les fenêtres d'affichage imposées (voir page suivante). Ils doivent observer ce qui se passe "quand on se rapproche de plus en plus de zéro". Les élèves qui disposent d'une TI-81 et ils sont les plus nombreux dans ce cas, vont observer les graphiques successifs reproduits page suivante. Jusqu'à Xmax=* 10^{-4}*, le résultat affiché de - 0, 166... n'est pas étonnant pour le mathématicien qui connaît la valeur* $\frac{-1}{6}$ *de la limite.*

Mais ensuite on assiste à un comportement erratique puis à un "applatissement" de la courbe sur l'axe des abscisses : cela vient du fait qu'à partir de $x=10^{-5}$*, on va avoir au numérateur comme au dénominateur des réels de l'ordre de* 10^{-15}*, c'est à dire hors des zones de contrôle de la machine.*

Confrontés à cette situation, <u>tous</u> les élèves concluent à une limite nulle, en zéro, de la fonction : pour plus de sécurité, certains se rapprochent encore plus près sur les deux écrans laissés libres au bas de la feuille à leur disposition. Sur quatre copies, on trouve des expressions du type: "au début, la limite paraît être $-\frac{1}{6}$ *, puis il y a une incertitude, puis une stabilisation : la limite est 0, c'est une <u>certitude</u>". Le débat provoqué par le maître sur la raison des errements de la représentation graphique à un moment donné ne suscite aucun enthousiasme : la réponse qui semble faire consensus est que, venant de la fonction sinus, on pouvait bien s'attendre à quelques oscillations.*

***Dans un deuxième temps,** je leur propose une démonstration analytique.*

$[(\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{1}{6}]$ *est compris entre 0 et* $\frac{x^2}{120}$*, ce qui permet de conclure que la limite cherchée est* $-\frac{1}{6}$.



Feuille distribuée aux élèves, avec les fenêtres imposées.

(on a rajouté sur chaque ligne, à droite, les graphiques censés être obtenus)

Les élèves sont donc confrontés à deux résultats contradictoires : un résultat, incontestable, de la machine. Et un résultat, incontesté, du maître. Ils ont 15mn pour réfléchir à cette contradiction et proposer des tentatives d'explications. 27 élèves vont répondre à cette question. Je classe les réponses en quatre catégories :

*- **Il y a d'abord la catégorie la plus nombreuse, celle des "exclusifs"**. En cas de conflit résultats théoriques/machine, les uns prennent immédiatement le pas sur les autres. Vu les conditions du contrat didactique, c'est ici évidemment le maître qui l'emporte sur la machine. Les arguments sont à observer de près :*

*- pour 8 élèves, l'argument est très frustre: " La **meilleure** réponse est celle du calcul, car la machine ne donne que des approximations ". On notera au passage le mot "meilleure", présent dans 5 copies sur 8. Pour ces élèves, il n'y a pas une bonne réponse et une mauvaise, mais des réponses dont la qualité est plus ou moins bonne.*

- pour 9 élèves, l'argument est plus précis : la machine se trompe parce qu'on est dans des zones trop "petites": "On ne peut se fier à la machine que pour des calculs simples et ne dépassant pas une certaine valeur limite", "Pour un petit nombre, la machine a tendance à arrondir, "La machine arrondit les nombres quand ils sont trop grands ou trop petits", "Pour des chiffres si infimes, elle se dérègle", "La machine arrondit les résultats surtout dans des zones extrèmement pointues", " On ne peut pas se fier à la machine pour un calcul si minutieux".

Pour ces 17 élèves, le résultat du maître supprime purement et simplement le résultat machine.

*- **il y a ensuite la catégorie des "conciliateurs"** : ces élèves vont essayer de faire coexister les résultats machines et les résultats théoriques. Il s'agit en fait d'une superposition des deux résultats, d'une "relecture" du résultat machine pour le faire rentrer "dans le rang". Ainsi, pour 4 élèves : " la machine donnait à peu près le résultat: -1/6 est plus ou moins égal à 0", "Le range de la machine en y était trop grand et ne laissait pas à la machine la possibilité de distinguer la courbe de l'axe des abscisses".*

*- **il y a aussi la catégorie des "critiques"**: ceux-ci vont tenter d'analyser la contradiction, vont faire agir un résultat sur l'autre. Ainsi 4 élèves notent que pour un Range "raisonnable", la machine donnait "le bon" résultat. C'est à dire que ces élèves essaient de cerner le domaine de validité de la machine: "Quand x max plus grand que 10^{-3}, la machine donnait bien -1/6, après, comme elle calcule point par point, quand les nombres sont trop petits, on ne voit plus rien"*

- il y a enfin la catégorie des "perplexes": Ces réactions me semblent importantes parce que significatives des conceptions de beaucoup d'élèves. Voici ce qu'écrivent donc les deux derniers élèves :

*" Les résultats machine démontrent que la fonction se concentre de plus en plus avec l'axe des abscisses ; **la fonction, elle, ne semble pas démontrer** que sa limite en 0 est -1/6"*

" La machine arrondit les résultats, donc le graphique n'est pas précis et on ne peut pas voir que la fonction tend vers 0"

*Il ressort de ces phrases il me semble deux éléments très importants : pour l'élève pourvu d'une calculatrice graphique, la fonction **est** confondue avec sa représentation graphique. Une calculatrice graphique confère le statut de preuve aux observations qu'on sera amené à faire.* **Fin de l'extrait du DEA.**

On voit là un certain nombre de faiblesses dans l'analyse :

- le temps de réflexion laissé aux élèves (15mn) est bien court ;
- on a entremêlé des observations relatives aux **conceptions** des élèves concernant les limites et des résultats concernant les **comportements** de ces élèves ;
- on ne sait pas s'il y a stabilité des comportements repérés dans d'autres types d'activité.

Mais, plus profondément, si on situe cette observation dans le cadre théorique que nous avons choisi, on en voit mieux les limites :

- quel est le type de situation dans laquelle sont plongés les élèves avec les observations graphiques qui leur sont proposées ?

- ce n'est pas une situation a-didactique, au sens de Brousseau (0.b.2.ii). Il n'y a pas dévolution de la situation ni appropriation par les élèves ni marge de manoeuvre gérable par eux ni connaissance visée. Le cheminement des élèves est trop contraint par le cadre fixé ;
- ce n'est pas une situation de tutelle, au sens de Bruner (0.b.2.i). Il n'y a pas prise en main, par le tuteur, d'éléments de la tâche qui excèdent les capacités du débutant.

Il s'agit donc d'une sorte de piège, d'une contradiction devant laquelle on souhaite mettre les élèves pour recueillir leurs réactions. C'est un dispositif tout à fait imaginable, dès lors que les élèves disposent des clefs pour démêler le vrai du faux, l'essentiel de l'accessoire, l'apparence de la réalité. D'où la question suivante :

- de quels éléments disposent les élèves pour se prononcer ?

Ils ont à choisir entre la validité d'une démonstration assez complexe et les résultats affichés par une calculatrice dont ils ne connaissent pas le fonctionnement intime (à vrai dire, ils ne connaissent pas le fonctionnement intime de la démonstration non plus). Devant la nécessité d'un choix, ils vont opter pour "le bon sens", c'est à dire que leur détermination va être sociale ou plutôt institutionnelle (0.b.2.iii.). Le maître a raison et la machine a tort. Ou plutôt, ce qui n'a rien d'une remarque "frustre" : "La meilleure réponse est celle du calcul théorique car la machine ne donne que des approximations".

- de quelles transformations les élèves ont-ils la responsabilité ?

Ils avaient à comparer des résultats graphiques avec les résultats d'une démonstration analytique. Il s'agit là d'un changement de cadre (0.b.4.iii.) qui n'allait pas de soi. Surtout s'agissant d'une notion délicate comme celle de limite.

- justement, quelle conception de "limite" induit-on ?

Par le biais des fenêtres successives imposées, on accrédite bien l'idée d'un rapprochement de la fonction vers L, soumis au rapprochement de la variable de 0. On induit plutôt un point de vue "cinématique" de limite (cf. I.a.1.iv.) dont portent trace les réponses des élèves.

- en fonction de quelle grille analyse-t-on les comportements des élèves ?

L'attention portée aux comportements d'élèves permet une première typologie. Mais celle-ci reste assez vague. Par exemple, la catégorie des "conciliateurs" demanderait à être précisée : faire concilier les résultats théoriques avec ceux de la machine et faire concilier les résultats de la machine avec les résultats théoriques, cela ne relève peut-être pas du même "profil".

- quels sont les éléments d'analyse des gestes des élèves avec leur calculatrice ?

Très peu, puisque l'action est très encadrée. Ainsi échappe l'instrumentalisation de l'outil (cf. 0.b.5.iii.).

Malgré ces remarques, ce DEA avait le mérite de mettre en évidence les problèmes décisifs qui vont être étudiés désormais et d'abord celui de l'influence des outils de calcul sur le processus de conceptualisation.

0.c.2 Mesurer l'influence de la calculatrice sur les conceptions. Orientation.

Quand les travaux de cette thèse ont débuté, en 1992, les outils à disposition des élèves étaient des calculatrices "graphiques et programmables", qui sont dans la pratique des calculatrices graphiques (comme l'évolution du nom et de l'usage en ont décidé). Il n'était pas imaginable que d'autres outils viennent, dans l'immédiat, remplacer ces outils. On verra que l'histoire est allée un peu plus vite que prévu. L'étude s'est donc engagée, dans un premier temps, sur les conséquences de l'utilisation des calculatrices graphiques.

0.c.2.i. Les critères pour le choix d'un sujet

Les défauts repérés du DEA étaient le caractère assez vague de la plupart des résultats. **D'où la décision de limiter la thèse dans un premier temps à l'étude de l'influence des calculatrices graphiques sur les conceptions (et pas sur les comportements) et à propos d'une notion très précise. Pour creuser profond, creuser étroit.**

L'extrait du DEA choisi ci-dessus n'est pas tout à fait innocent. C'est en effet sur la question des limites que l'étude de la calculatrice, outil d'influence (comme on dit "agent d'influence"), va porter. Pourquoi ce choix ?

- il fallait une notion relativement "balisée", c'est à dire qui ait été l'objet d'études antérieures, sur le plan épistémologique et didactique ;
- il fallait choisir une notion dont la présentation se fasse alors que les élèves étaient déjà en possession de calculatrices graphiques ;
- il fallait que la calculatrice graphique soit effectivement sollicitée par les élèves pour explorer cette notion ;
- il fallait qu'il n'y ait pas adéquation parfaite entre les contraintes de l'outil (l'activité requise) et les besoins de l'élève relativement à cette notion : l'écart entre le voulu et le possible déboucherait alors sur les processus d'instrumentalisation dont parle P. Rabardel (cf. 0.b.5.iv.).

Sur ces quatre points, le calcul de limite convient : de nombreuses études s'y sont attachées, à tous les niveaux ; les élèves découvrent le calcul infinitésimal en classe de Seconde et surtout de Première, alors qu'ils sont déjà, pour la plupart, "équipés" en calculatrices graphiques ; la calculatrice graphique ne donne accès ni à l'infiniment petit ni à l'infiniment grand, ce qui rend impossible **la détermination** d'une limite à partir de cet outil. Quant à l'utilisation effective des calculatrices pour étudier les limites, elle est attestée par l'observation par les professeurs de l'activité des élèves. Cependant un questionnaire permettra de s'en assurer.

Une fois la notion choisie, il faut la délimiter au plus près :

- sur le plan de l'objet lui-même (délimiter le concept mathématique, le concept transposé dans l'institution scolaire, les contraintes instrumentales relatives à son étude) ;

- sur le plan du sujet, examiner les conceptions mises en évidence dans "la littérature", déterminer un dispositif qui permette de repérer l'influence de la calculatrice sur ces conceptions.

0.c.2.ii. Les critères pour le choix du terrain.

Pour avoir des informations fiables, l'idée est d'étudier dans un premier temps une population assez vaste. Quatre questions se posent dans un premier temps :

1. Faut-il choisir, pour l'enquête, des classes d'élèves dans laquelle la calculatrice est intégrée par le professeur ?

Cela supposerait de définir ce que l'on appelle intégration. Et de disposer d'un nombre suffisant de classes dans lesquelles cette intégration est réalisée de façon à peu près semblable. Ou alors de situer la qualité ou le degré d'intégration comme un des paramètres de la recherche. On comprend bien que, s'il est difficile de définir ce que l'on entend par intégration, il est encore plus difficile de qualifier ou quantifier celle-ci. D'où un premier choix : celui d'un échantillon assez représentatif de l'ensemble de la population de lycée (cf. 0.c.1.i.), c'est à dire des classes dans lesquelles la calculatrice n'est pas prise en compte par le maître.

2. A quel niveau scolaire se situer ?

Le choix était entre la classe de 1ère S et la classe de Terminale S, les deux niveaux, au lycée, dans lesquels le calcul infinitésimal intervient vraiment. C'est la Terminale S qui a été choisie : il a été jugé plus efficace de choisir un niveau dans lequel un certain nombre d'habitudes avaient été prises, les processus d'instrumentation et d'instrumentalisation de la calculatrice graphique, à propos de la notion de limite, déjà bien engagés. On aurait pu étudier les deux niveaux de 1ère S et de TS, pour comparaison. A choisir deux niveaux, on a préféré étudier une population d'élèves de TS et une population d'étudiants de Deug A : l'intérêt du Deug A est que les étudiants y découvrent une définition de la notion de limite dont ils ne disposaient pas jusqu'alors. On peut alors voir comment cette définition agit sur les conceptions déjà construites, observer la stabilité ou la fragilité de ces conceptions.

3. Comment mesurer l'influence des calculatrices sur les conceptions des élèves ?

Comme d'autres enquêtes sur le même thème des limites ([Cornu, 1983], [Robert, 1982]) cette mesure sera faite à partir d'un questionnaire, où l'on sollicitera les réponses des élèves à la fois sur des définitions, sur des méthodes et sur des exercices.

La quasi-totalité des élèves travaillant d'habitude avec une calculatrice, il n'est pas envisageable de comparer un groupe travaillant toujours avec calculatrice et un groupe ne travaillant jamais avec calculatrice. On ne peut qu'évaluer l'influence **locale** d'une calculatrice en observant les résultats d'une activité pour laquelle une partie de la classe travaillera sans et l'autre, avec cet outil.

4. Comment choisir, à l'intérieur de chaque classe, les élèves qui composeront avec et ceux qui composeront sans calculatrice ?

La première méthode envisagée était un choix aléatoire plutôt qu'un choix libre des élèves : on voulait éviter que ce soit les élèves ayant le plus l'habitude de composer avec calculatrice qui compose avec calculatrice et les élèves ayant le moins l'habitude de composer avec la calculatrice qui composent sans. Pour une comparaison utile, il fallait que, statistiquement, ce soit les "mêmes" élèves qui composent avec ou sans outil de calcul.

Les préexpérimentations basées sur cette méthode ont révélé son caractère impraticable : dans chaque classe, des élèves choisis pour composer avec calculatrice déclaraient avoir oublié la leur. Il fallait alors essayer de trouver parmi les élèves composant sans calculatrice une calculatrice du même modèle. Cette répétition des

mêmes incidents induisait l'idée, surprenante au départ, que les élèves préféraient composer sans calculatrice. La décision a donc été prise de laisser les élèves libres de choisir leur groupe (avec ou sans calculatrice). La nature de ce choix devient alors un élément d'appréciation du comportement général de l'élève.

En cohérence avec nos travaux antérieurs, nos hypothèses au départ de cette recherche seront que :

H1. L'utilisation de la calculatrice a un effet important sur les réalisations des élèves ;

H2. Cet effet est lié aux contraintes de l'outil (sa façon de "déformer" les objets mathématiques) et aux actions qu'il favorise (cf. 0.b.5.iv.).

0.c.2.iii. Une nouvelle remise en question par la théorie et par la pratique.

1. Une réorientation théorique.

Si l'on confronte à nouveau le cadre théorique avec la méthodologie présentée, des faiblesses apparaissent encore :

- si l'on choisit comme outil d'analyse une conception *"objet local ancré dans l'analyse du savoir"* [Artigue, 1990], **comment ne pas prendre en compte dans l'analyse l'enseignement reçu par l'élève ?**
- de la même façon qu'il n'y a pas qu'un type d'intégration d'un instrument dans une classe, on ne peut pas dire qu'il n'y a qu'un type de non-intégration d'un instrument. **Traiter la question par une photographie instantanée ne permet pas de suivre la genèse instrumentale**, essentielle pour la compréhension des processus d'instrumentation et d'instrumentalisation.

Ainsi la forme choisie ne permet de traiter que très superficiellement les processus individuels et pas du tout les processus sociaux à l'oeuvre dans l'apprentissage. Ces remarques théoriques induisent le prolongement nécessaire de l'étude dans le sens d'une observation continue d'une population d'élèves.

2. Une réorientation pratique.

En Juillet 1995, l'occasion se présente [10] d'enseigner les mathématiques dans une classe dont tous les élèves seront équipés de calculatrices TI-92.

Insérer cette nouvelle expérience dans le cadre de l'étude engagée présente un double avantage :

- **cela permet de prendre en compte une nouvelle génération d'outils de calcul** (les calculatrices dotées d'un logiciel de calcul symbolique) ;
- **cela permet de suivre à la fois les processus individuels et collectifs d'apprentissage.**

Le suivi d'une classe sur une année permet de contrôler à la fois l'enseignement dispensé et la genèse instrumentale.

---

[10] L'expérimentation est à l'initiative du CRDP de Montpellier qui a équipé la classe. Elle a été aussi rendue possible par la constitution d'une équipe de suivi, grâce à des heures attribuées par l'INRP, le Groupe de Recherche Didactique du CNRS et l'IREM de Montpellier.

0.c.3 Contrôler la genèse instrumentale. Ré-orientation ?

Il s'agit ainsi d'une double réorientation :
- de l'étude instantanée d'une grande population, on passe à l'étude longue d'une petite population ;
- de l'instrument "calculatrice graphique", on passe à l'instrument "calculatrice graphique et symbolique" (la TI-92 contient un logiciel de calcul symbolique, Dérive).
Plutôt que d'une réorientation, on parlera plutôt d'approfondissement.

0.c.3.i. Une meilleure connaissance d'ensemble

Le suivi régulier d'une classe devrait permettre d'appréhender les comportements différents des élèves, relativement à l'outil de calcul et, de façon générale, relativement à l'apprentissage :

- le contenu du cours relativement aux limites étant connu, on pourra mesurer l'écart entre ce qui est dit, ce qui est retenu et ce qui est mis en pratique.
- tous les élèves recevant en même temps leur calculatrice, on pourra suivre la "genèse instrumentale" individuelle et collective ;
- le suivi des élèves permettra un repérage des métaconnaissances (cf. 0.b.3.iv.) et la construction d'une typologie mieux assurée que lors du DEA (cf. 0.c.1.iii.).

On pourra suivre ainsi les rapports avec les calculatrices des élèves au "profil" connu.

0.c.3.ii. Un recueil d'informations multiforme.

Le même questionnaire (que celui proposé aux TS et Deug A) sera proposé à la classe expérimentale au début de l'année (quand les élèves auront encore leurs calculatrices graphiques) puis plus tard (avec les TI-92). Cela permettra une double comparaison :

- avec les résultats antérieurs (TS-Deug A) ;
- à l'intérieur de la classe expérimentale entre les réalisations "calculatrices graphiques" et les réalisations "TI-92".

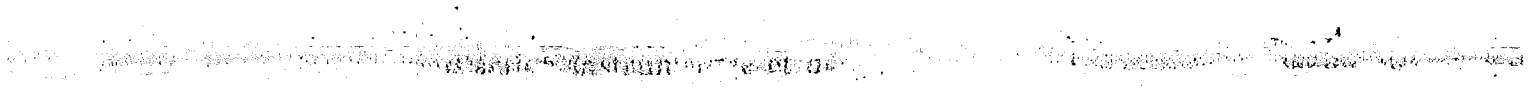
Nous disposerons d'un avantage cependant par rapport aux années antérieures : comme les élèves seront connus, il sera possible d'organiser une répartition des groupes travaillant avec ou sans calculatrice, en tenant compte de la typologie mise en place. Au delà de ce recueil d'informations, nous disposerons d'observations portant sur des réalisations individuelles mais aussi sur des travaux de recherche nécessitant des échanges entre élèves. Bref un dispositif assez dense de recueil d'informations.

On émet ici une triple hypothèse (les deux premières proches des hypothèses de "l'expérimentation large") :

H'1. L'utilisation de la TI-92 a un effet important sur les processus de conceptualisation ;

H'2. Cet effet est lié aux processus d'instrumentation, eux-mêmes liés aux contraintes de l'outil et aux actions qu'il favorise ;

H'3. Les processus d'instrumentation sont liés aux "profils" des élèves.



Conclusion de 0.c.

L'étude de l'effet des outils de calcul sur les réalisations des élèves (H1, H2, H'1 et H'2) nécessite :

- une étude préalable du concept de limite (0.b.3.i.), de sa transposition didactique (0.b.3.ii.) et de sa transposition informatique (0.b.5.iii.) ;
- une détermination d'un ensemble de conceptions relatives à ce concept (0.b.3.iii.).

Mais si l'on compare les hypothèses de "l'expérimentation large" et les deux premières hypothèses de "l'expérimentation continue", on constate des différences qui ne relèvent pas que de la forme.

- là où nous parlions de "réalisations des élèves"(H1), nous parlons désormais de "processus de conceptualisation"(H'1) ;
- là où nous parlions "d'effets liés à l'outil"(H2), nous parlons désormais de "processus d'instrumentation et d'instrumentalisation"(H'2).

Ces différences, liées à la nature continue de l'observation, ont des conséquences importantes sur notre méthodologie. Elles imposent :
- la détermination des schèmes d'action instrumentée et des schèmes d'usage (0.b.5.iv.) qui participent à l'étude des limites d'une fonction ;
- la considération de ces schèmes d'action instrumentée comme partie instrumentée du schème d'étude de limite (0.b.3.i.).

Cette étude débouchera alors sur l'étude des rapports entre les processus d'instrumentation et les processus de conceptualisation.

Enfin la validation de l'hypothèse H'3 demande que l'on mette en évidence les métaconnaissances (0.b.3.iv.) essentielles dans l'activité logico-mathématique ; nous pourrons alors définir des "profils d'élèves" qui aboutiront à une typologie des comportements. Nous mettrons alors en rapport cette typologie avec les processus d'instrumentation et de conceptualisation. Et nous montrerons que la prise en compte de cette typologie est une des clefs de la compréhension de ces deux processus.

Pour parler du choix d'un sujet, nous utilisions en 0.c.2.i. la métaphore du terrassier ("pour creuser profond, il faut creuser étroit"). En conformité avec ce qu'est vraiment un travail de terrassier et ce qu'est un travail de recherche, il faut en modifier les termes : "pour creuser profond, il faut creuser large".

I Les limites, côté objet.

La connaissance du réel est une lumière qui projette toujours quelque part des ombres.

Bachelard, la formation de l'esprit scientifique.

Sommaire du chapitre I : Les limites, côté objet.

I.a Un point de vue épistémologique : le concept de limite. p.71

I.a.1. Trois points de vue sur les points de vues. p.73
- I.a.1. i. Une révolution "par étapes" .
- I.a.1.ii. Un jeu autour de trois cadres .
- I.a.1.iii. Un balancement autour de deux points de vue.

I.a.2. Limites et invariants. p.81
- I.a.2. i. Tactiques et techniques, problèmes de vocabulaire.
- I.a.2.ii. Problème de repérage des tactiques.

I.a.3. Limites et langages. p.83
- I.a.3. i. Infini privatif, infini positif, infini opératoire.
- I.a.3.ii. Le temps et le mouvement, figures de l'infini.
- I.a.3.iii. Le révélateur du "langage courant".

I.b. Un point de vue institutionnel : la transposition didactique. p.89

I.b.1. Une histoire de ce siècle p.90

I.b.2. Une première histoire verticale, ce que disent les programmes. p.91
- I.b.2.i. A propos des limites de fonctions
- I.b.2.ii. A propos du calcul numérique, des graphiques et des outils.

I.b.3. Une deuxième histoire verticale, ce que disent les sujets du bac. p.101
- I.b.3.i. Le baccalauréat de 1969.
- I.b.3.ii. Le baccalauréat de 1972.
- I.b.3.iii. Le baccalauréat de 1984.
- I.b.3.iv. Le baccalauréat de 1988.
- I.b.3.v. Le baccalauréat de 1993.
- I.b.3.vi. Le baccalauréat de 1995.

I.b.4. Une histoire horizontale, ce que disent les manuels scolaires. p.109
- I.b.4.i. Les limites dans les manuels de TS.
- I.b.4.ii. Le baccalauréat de 1972.
- I.b.4.iii. Le baccalauréat de 1984.

I.b.5. Définition des limites en aval et en amont de la TS. p.119

I.c. Un point de vue "artefactuel" : la transposition informatique. p.125

I.c.1. Inventaire des contraintes. p.126

I.c.2. Artefacts et contraintes. p.127
- I.c.2.i. Voyage à l'intérieur des calculatrices graphiques.
- I.c.2.ii Brève visite des calculatrices symboliques.

I.c.3. Le point de vue des promoteurs et thuriféraires. p.141
- I.c.3.i. Revue de presse sur les calculatrices graphiques.
- I.c.3.ii Notes sur les TI-92.

Limites côté objet, limites côté sujet.

Il faut dissiper d'éventuels malentendus liés à cette délimitation des parties I et II de cette thèse.

On n'imagine pas ici que les "objets" mathématiques sont indépendants des "sujets" qui ont contribué à les constituer.

Comme l'écrit I. Lakatos :

"aucune des périodes "créatives" et pratiquement aucune des périodes "critiques" des théories mathématiques ne pourraient être admises au paradis formaliste, où les théories mathématiques séjournent tels des séraphins, purifiées de toutes les incertitudes terrestres" [Lakatos, 1976].

Dans la première partie, il s'agira de délimiter un concept tel qu'il a été construit dans l'histoire et dans l'institution scolaire.

Dans la deuxième partie, "côté sujet", il s'agira de considérer l'effet de l'enseignement sur les conceptions des élèves.

Dans la première partie, "côté objet", on examinera l'objet "limite", à partir de trois points de vue :

- un point de vue épistémologique (les limites pour la communauté des mathématiciens) ;
- un point de vue institutionnel (les limites pour le système d'enseignement) ;
- un point de vue instrumental (les limites vues à travers les calculatrices à disposition des élèves).

I a. Le concept de limite.

Un, deux, trois, de nombreux points de vue...

Comment l'intuition a-t-elle pu nous tromper à ce point ?

Poincaré, cité par [Dhombres, 1978].

L'abord de cette étude par la considération de la construction, historique, du concept de limite, se justifie de deux points de vue :

- **le premier, élémentaire, relatif à la compréhension même du concept**. On comprend d'autant mieux un concept qu'on connaît les "Routes et Dédales" [Dahan-Dalmédico et Peiffer, 1982] qui ont amené à sa forme actuelle. Comme l'écrit Jean-Toussaint Desanti dans la préface à cet ouvrage :

> *"Les mathématiques aussi ont leur mémoire ; comme toute mémoire, elle comporte des replis, des lieux cachés, qu'il importe de débusquer pour les ramener au jour (...). Qui laisse totalement dormir sa mémoire devient étranger à son présent même, au point d'oublier le sens de ce qu'il fait".*

- **le deuxième, plus profond, lié à la compréhension des difficultés d'apprentissage**. On ne peut pas bien sûr soutenir que les difficultés rencontrées par les élèves correspondent exactement aux difficultés d'émergence du concept dans l'histoire.

Cependant, les unes et les autres ne sont pas sans rapport (cf. 0.b.3.iii.).

Ainsi, dans son dernier ouvrage, "Psychogénèse et Histoire des Sciences", Jean Piaget insiste-t-il sur l'étude des mécanismes communs de la construction scientifique et de la psychogénèse. Il en distingue cinq :

> *"Le plus général tient naturellement à la nature des raisonnements qui, à tous les niveaux de la psychogénèse comme de l'histoire des sciences, comportent des abstractions réfléchissantes (...) ;*
>
> *- un second caractère général est qu'en aucune élaboration cognitive le sujet ne fait appel à des expériences pures puisque (...) tout observable est toujours interprété et tout fait implique nécessairement une interaction entre le sujet et les objets considérés (...) ;*
>
> *- le troisième mécanisme commun repose sur le double processus de différentiations et d'intégrations dont témoigne tout progrès cognitif et dont les deux aspects deviennent tôt ou tard solidaires (...) ;*
>
> *- en quatrième lieu, dès le savoir-faire sensorimoteur jusqu'aux théories les plus élevées, il y a recherche des raisons des échecs comme des succès et les raisons reviennent à rattacher les résultats obtenus à des structures, ou coordination de schèmes (...);*
>
> *- en cinquième lieu, au cours de l'histoire de la pensée scientifique (...) comme au cours de la psychogénèse (...) on assiste à une succession de constructions qui ne s'enchaînent pas au hasard, mais dont chacune est rendue possible par les précédentes et prépare les suivantes".* [Piaget et Garcia, 1983],

On tentera de mettre ici en valeur les "mécanismes de différentiations et d'intégrations", préparant ainsi notre étude de l'apprentissage scolaire de cette notion.

I.a.1. Trois points de vue sur les points de vues.

Une première remarque : des paradoxes de Zénon à la formalisation de Weierstrass, il y a près de 2500 ans d'histoire tumultueuse pour qu'émerge et se contruise le concept de limite. Pour comprendre une histoire aussi riche, disposer de plusieurs points de vue n'est pas inutile.

I.a.1.i. Une révolution "par étapes"

On peut envisager d'abord un point de vue chronologique. Dans "Routes et dédales" [Dahan-Dalmédico et Peiffer, 1982], on retrouve l'histoire de l'idée de limite, "de l'impensé au concept". Cette histoire est inextricablement liée à l'idée d'infini.

Toutes les parties en italique de ce paragraphe sont extraites de cet ouvrage.

1. Première étape : le refoulement de l'infini.

Avec Pythagore, la géométrisation générale apparaît comme un obstacle au dégagement de la notion de nombre. La découverte des irrationnels détruit la correspondance entre nombres et longueurs.

> *"Selon Proclus, Euclide aurait commenté la légende d'après laquelle celui qui le premier avait divulgué l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ aurait péri noyé dans un naufrage :*
> *"Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de forme doit rester caché. Que si l'âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants" ".*

On retrouve dans la même métaphore la mer, le temps ("le devenir"), *"l'incessant mouvement"*, dont on verra qu'ils sont bien souvent associés à l'idée d'infini (cf. I.a.3.ii.)

2. Deuxième étape : l'intrusion de l'infini.

L'irruption de l'infini par le biais des grandeurs incommensurables entraîne une crise qui se traduit par un débat entre deux "conceptions" :

> *"la conception "continuiste" pensait le nombre, l'espace et la matière comme divisible à l'infini ; la conception atomiste préconisait l'existence d'éléments premiers indivisibles".*

Illustration de cette crise : les paradoxes de Zénon tentent d'établir que les deux conceptions aboutissent à des impasses.

3. Troisième étape : la négation de l'infini.

La théorie des proportions d'Eudoxe débouche sur la méthode d'exhaustion qui va permettre à Archimède de traiter des problèmes de longueur, d'aires, de volumes.

Les difficultés théoriques sont contournées de deux façons :

- **d'une part séparant nombres et "grandeurs"**. La crise des irrationnels a mis en évidence des grandeurs incommensurables, c'est à dire des grandeurs auxquelles ne correspondait pas de nombre. Désormais, mesurer des grandeurs géométriques signifie les comparer entre elles.

- d'autre part en évitant l'infini :

"On voit que, dans l'application concrète de sa méthode, Archimède évite d'utiliser une notion aussi obscure que celle d'un polygone à un nombre infini de côtés qui coïnciderait à la limite avec le segment parabolique. Il augmente le nombre de côtés du polygone jusqu'à ce que la quantité résiduelle soit aussi petite que l'on voudra, mais il y aura toujours un reste. Les aires approchées n'épuisent pas exhaustivement l'aire recherchée, contrairement à ce qui se passera dans les méthodes du XVIIème siècle".

Les méthodes grecques sont développées par les mathématiciens arabes.

4. Quatrième étape : la levée de quelques tabous.

D'un double mouvement de débat philosophique (sur l'incommensurable, les indivisibles, l'infini) et de réappropriation de l'héritage grec via les mathématiciens arabes émergent les notions de vitesse, d'accélération, d'instantanéité (Ecoles d'Oxford et de Paris, au XIV^{e} siècle). **Cette période débouche sur des audaces théoriques "productives" : les objets ne sont pas définis, mais leur justification repose sur leur efficacité.**

"Ainsi Képler assimile le cercle à un polygone régulier à un nombre infini de côtés et calcule son aire en sommant les aires des triangles infinitésimaux ayant les côtés du polygone comme base et le centre du cercle comme sommet".

De même Cavalieri introduit (sans les définir) les indivisibles comme éléments infinitésimaux dont se composent les lignes, les surfaces, les volumes.

Grégoire de St Vincent donne forme à cette évolution :

"(il conçoit) une infinité de figures rectilignes qui remplissent exhaustivement la figure curviligne donnée, contrairement à ses prédécesseurs qui augmentaient le nombre de côtés des polygones inscrits ou circonscrits jusqu'à ce que la différence entre ceux-ci et la figure soit inférieure à une quantité donnée et ***énonçant le premier qu'une série infinie définit une grandeur, qu'il nomme "terminus"".***

Ces travaux se situent toujours dans le cadre géométrique, mais les bouleversements philosophiques et techniques permettent l'émergence d'objets qui vont favoriser les progrès ultérieurs.

5. Cinquième étape : l'éclosion des méthodes infinitésimales.

L'étude du mouvement (pour la trajectoire d'un boulet de canon comme pour celles des planètes), les recherches en optique, entraînent au XVIIème siècle le développement de recherches sur la vitesse instantanée, les tangentes, les extrémums, la longueur des courbes, les normales.

On observe un premier déplacement de la géométrie vers l'algèbre avec Descartes et Fermat. Leibniz développe une algèbre des infiniments petits.

"Le calcul des différences est l'opération fondamentale du calcul leibnizien. La sommation est l'opération inverse. (...) Ce qui fait la force du formalisme Leibnizien, c'est la simplicité de son algorithme, sa notation élégante, son formalisme opératoire qui permet d'effectuer quasi-automatiquement tous les calculs, masquant la nature des objets en jeu. Leibniz oscille entre une attitude formaliste et un appui sur des analogies géométriques."

Au même moment, Newton fonde sa méthode sur le mouvement :

> *"Newton se désolidarise des quantités infiniment petites et introduit dans la "Méthode des fluxions et des suites infinies" sa méthode la plus fameuse. Il y considère les quantités mathématiques comme engendrées "par une augmentation continuelle, à la manière de l'espace que décrit un corps en mouvement" et imagine "les vitesses des mouvements qui les engendrent". Ces vitesses seront appelées "fluxions". Pour fonder sa méthode sur des bases solides, Newton s'inspire du modèle de la mécanique théorique et introduit le temps comme variable universelle de toute correspondance fonctionnelle."*

On peut voir dans ces démarches des tentatives de se dégager du cadre géométrique (par le recours à l'algèbre pour Leibniz, le recours au mouvement pour Newton). Cependant le cadre dans lequel s'inscrivent les travaux de Newton et de Leibniz n'est pas encore un cadre numérique, ce qui contribue sans doute à expliquer que le concept de limite n'émerge pas encore :

> *"Leibniz, comme Newton, est tenté de ne pas considérer les éléments infinitésimaux, mais leurs rapports. L'identification des rapports à des nombres n'étant toujours pas accomplie, la conception restrictive du nombre est en partie responsable du fait que le concept de limite ne peut se dégager des théories newtoniennes et leibniziennes."*

6. Sixième étape : la clarification des règles de calcul..

Les mathématiciens du XVIII[e] (Euler, Lagrange) tentent une clarification du calcul différentiel et intégral.

> ***"Euler essaie de clarifier les règles, plutôt que d'élucider la nature des objets sur lesquels elles opérent"***

Lagrange tente de réduire le calcul infinitésimal à l'algèbre, ainsi que le précise le titre de son ouvrage de 1797 :

> *"La théorie des fonctions analytiques" contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniments petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.*

7. Septième étape : la recherche des fondements.

D'Alembert tente de fonder le calcul différentiel sur le calcul des limites. C'est une avancée importante, puisque la dérivée n'est plus le rapport de deux quantités infinitésimales, mais limite d'un rapport de quantités non nulles. Mais ***"D'Alembert n'arrive pas à trouver une forme logiquement cohérente"***.

Bolzano dégage les notions de base du calcul infinitésimal, Cauchy clarifie la notion "d'infiniment petit", mais c'est Weierstrass qui donne à l'Analyse sa forme actuelle. **Il dégage la notion du temps et du mouvement en introduisant un formalisme arithmétique précis.**

Mais cette nouvelle rigueur exige de donner un fondement à la notion de nombre : c'est sur cette construction que débouchent les travaux des mathématiciens du XIX (Weierstrass, Cantor, Dedekind). **Ainsi la construction de la notion de limite, partie d'une situation où tout devait se ramener à la géométrie, aboutit à une situation où tout se ramène au nombre.** Cette évolution est synthétisée par B. Cornu :

"La notion de limite, issue de la géométrie, a donc eu bien du mal à passer en Analyse et c'est lorsqu'on a su la ramener dans le champ numérique qu'elle s'est enfin précisée, dans un langage finalement plus proche de celui des géomètres antiques." [Cornu, 1981]

Cette proximité ne doit pas cependant faire illusion. La méthode d'exhaustion d'Archimède (la grandeur cherchée diffère de la grandeur approchée d'aussi peu que l'on voudra) "ressemble" à la formulation en (ε, α) de Weierstrass mais **le cadre de référence des Grecs est un cadre géométrique, le cadre de Weierstrass est un cadre numérique. La proximité du langage cache un bouleversement épistémologique.**

Ce parcours historique met en évidence plusieurs éléments :

- les liens profonds entre les conceptions du nombre et les conceptions du monde (la levée des premiers tabous mathématiques est liée à la levée des premiers tabous philosophiques sur l'infinité du monde) ;

- l'importance de l'intuition, aussi bien géométrique que liée au mouvement, pour la construction du concept ;

- la mise en place d'outils de traitement de problèmes mal définis et justifiés uniquement par leur efficacité opératoire (les indivisibles, les infiniments petits...) ;

- la pluralité des cadres (géométrique, cinématique, algébrique, numérique) qui coexistent de façon parfois conflictuelle avant de se fondre dans un cadre numérique unifié ;

- l'évolution de la fonction d'un cadre donné : d'abord producteur, il peut devenir réducteur et se constituer en obstacle. Ainsi en est-il du cadre géométrique dont on a vu qu'il avait agi comme obstacle au dégagement de la notion de nombre.

I.a.1.ii. Un jeu autour de trois cadres.

J.-L. Ovaert et J.-L. Verley attribuent les difficultés de formation des concepts de convergence, de divergence et plus généralement de fonction et de calcul infinitésimal, aux confusions entre les différentes formes de l'analyse, à savoir les cadres [11] géométrique, algébrique et numérique (citations de leur ouvrage en italique dans ce paragraphe [Ovaert et Verley, 1983]).

1. Le cadre géométrique et mécanique.

> *"Selon ce point de vue, la notion de limite porte non seulement sur les grandeurs, mais aussi sur les objets géométriques eux-mêmes."*

J.-L. Ovaert et J.-L. Verley rattachent à ce cadre cinq grands types de problèmes : problème de mécanique (connaissant le mouvement d'un point, déterminer sa vitesse et son accélération à un instant donné), problème de géométrie (détermination de la tangente à une courbe), problème d'extrémums (détermination d'extrémums de grandeurs géométriques ou mécaniques assujetties à des contraintes données), problème de mesure de grandeurs (calcul d'aires, de volumes, ...), problème d'algèbre et de combinatoire (résolution de problème de sommation ou d'interpolation par le calcul aux différences finies). Ils dégagent une idée importante :

> *"L'élaboration de méthodes générales pour traiter ces cinq types de problèmes nécessitait la mise en évidence de leurs liens et c'est là que se situait la principale difficulté, laquelle a été surmontée par Newton et Leibniz."*

Ainsi la résolution d'un problème particulier nécessite la mise en relation avec d'autres problèmes qui n'apparaissent pas toujours très proches :

> *"Newton combine des méthodes algébriques et numériques esquissées par Wallis et Gregory et les méthodes cinématiques développées par Barrow, avec une idée nouvelle : les développements en série entière. (...) De même, Leibniz combine les méthodes algébriques esquissées par Pascal et les méthodes géométriques esquissées par Torricelli et Barrow."*

L'efficacité des méthodes utilisées, les résultats fondamentaux établis (rôle inverse joué par l'intégration et la dérivation), permettent d'éclipser les problèmes de définition des objets manipulés. C'est ce critère d'efficacité qui permet d'expliquer, selon J.-L. Ovaert et J.-L. Verley, le succès des algorithmes formels de Leibniz pour la résolution de problèmes.

2. Le cadre algébrique.

> *"(Ce cadre est issu) à la fois des travaux de Newton sur les séries entières et de Leibniz sur les algorithmes et les langages formels. Selon ce point de vue, le calcul porte sur des expressions formelles mettant en jeu une infinité de termes, par exemple les séries entières et les formules sont universellement valides* ***(principe de généralité de l'algèbre)".***

---

[11] Ovaert et Verley parlent de "domaines", ou de "conceptions" géométrique, formel et numérique. En cohérence avec le vocabulaire fixé en 0.b.4.iii. , nous parlerons plutôt ici de cadre. C'est bien d'un "jeu de cadre" qu'il s'est agit dans cette lente émergence du concept. On peut se poser la question de la définition d'un cadre "géométrique et cinématique". Il faudrait sans doute parler de cadre géométrique **et** de cadre mécanique. Nous en reparlerons en I.a.1.iii.

On retrouve ce que nous avons relevé des travaux de la fin du XVIII^{e} siècle, avec Euler et Lagrange (I.a.1.i.) : il s'agit de *"clarifier des règles"*, d'arrêter *"des principes de calcul"* indépendants des objets auxquels ils s'appliquent.

3. Le cadre numérique.

"Ce sont les dysfonctionnements du point de vue formel dans le domaine des séries entières et des séries trigonométriques qui provoquent au début du XIX^{e} siècle le développement d'un point de vue purement numérique."

Ce travail de synthèse confirme ce qui était dit au paragraphe précédent sur l'évolution du concept de limite.
Il présente l'intérêt de clarifier trois grands cadres qui ont permis à la fois la construction, puis la contention, de ce concept le cadre numérique, le cadre algébrique, le cadre géométrique et mécanique.

I.a.1.iii. Un balancement autour de deux points de vue (R. Bkouche).

R. Bkouche, dans un article relatif à l'enseignement des limites et de la continuité [Bkouche, 1996], distingue deux points de vue : un point de vue cinématique et un point de vue approximation :

1. Le point de vue cinématique

"C'est, comme son nom l'indique, lié au mouvement. Si une grandeur variable x tend vers une valeur a de cette grandeur (au sens qu'elle prend des valeurs de plus en plus proches de la valeur a), alors une grandeur y qui dépend de la grandeur x (qui est une fonction de la grandeur x) tend vers une valeur b si, au fur et à mesure que la grandeur x se rapproche de la valeur a, la grandeur y se rapproche de b.

(...) on voit dans cette définition le rôle du mouvement, c'est alors, pourrait-on dire, la grandeur variable x qui tire la grandeur y. C'est cette conception cinématique qui conduit à la notion d'infiniment petit (...). Dire que la grandeur y, fonction de la grandeur variable x, tend vers b lorsque x tend vers a signifie que y-b est un infiniment petit lorsque x-a est un infiniment petit".

Il rattache à ce point de vue la définition de Cauchy.

2. Le point de vue approximation illustré par l'approximation décimale d'un nombre a par la suite des décimaux (a_n) :

"La définition en (ε, η) n'est autre qu'une systématisation de cette notion d'approximation".

R. Bkouche met en évidence l'opposition de ces deux points de vue :

"Si, dans la notion cinématique c'est la variable qui tire la fonction, dans la notion d'approximation, c'est le degré d'approximation que l'on veut qui fixe l'approximation de la variable".

En même temps, il exprime une sorte de complémentarité entre ces points de vue :

> *"S'il est vrai que ce qui a conduit à la prédominance de ce point de vue (d'approximation), c'est sa valeur opératoire et son efficacité dans les démonstrations de l'analyse, il serait dangereux de rejeter le point de vue cinématique dans la mesure où il reste le cadre intuitif dans lequel se pense la notion de limite".*

Cette opposition/complémentarité trouve son sens dans une certaine conception de l'Analyse :

> *"On peut alors penser l'Analyse comme le lieu où se rencontrent , à propos de l'une de ses notions fondamentales, un cadre intuitif trop flou pour assurer une sécurité opératoire, autant sur le plan du raisonnement que sur le plan du calcul et un cadre formel qui prend en charge cette sécurité opératoire".*

Les deux points de vue dégagés ici permettent de réinterpréter les résultats de I.a.1.ii.

3. Synthèse des "points de vue" possibles.

C'est la notion didactique de "point de vue" (cf. 0.b.4.iii.) qui nous semble ici la plus adéquate pour une première synthèse épistémologique. Parler de cadre nous semble en effet trop restrictif :
- le point de vue approximation s'inscrit en général dans le cadre numérique, mais il peut tout à fait se traduire dans le registre graphique (avec un schéma) ;
- le point de vue cinématique peut s'inscrire dans le cadre géométrique, ou mécanique, il a aussi une expression dans le registre graphique.

R. Bkouche ne distingue pas de catégorie particulière pour le point de vue algébrique. Ce qui amène dans le texte cité quelques ambiguïtés sur les statuts relatifs du "formel", du "théorique", de "l'opératoire". C'est sans doute parce que son article est consacré à l'enseignement des limites et non pas à un examen historique épistémologique.

Cependant, même à l'examen du processus d'apprentissage, on n'échappe pas, on le verra, à la distinction d'un point de vue "algébrique" : on peut en effet manipuler des théorèmes opératoires, utiliser des résultats relatifs aux "limites usuelles", en dehors de tout point de vue cinématique ou d'approximation. Il ne reste alors des limites que le calcul sur les limites. Il s'agit bien là d'un "point de vue algébrique" qui repose sur des *"principes de calcul dégagés de toutes considérations (...) de limites"* (cf. I.a.1.i.).

Points de vue sur les limites.

L'analyse épistémologique met en évidence trois "points de vue" sur le concept de limite :

- un point de vue "cinématique" : *"C'est la variable qui tire la fonction"* [R. Bkouche] ;

- un point de vue "approximation" : *"C'est le degré d'approximation que l'on veut qui tire la variable"* [R. Bkouche] ;

- un point de vue "algébrique" : il fonctionne sur des règles, *"sans élucider la nature des objets sur lesquels elles opèrent"* [Dahan-Dalmédico, 1982].

I.a.2. Limites et invariants.

Il n'est pas question ici de classer ou détailler tous les invariants relatifs au calcul infinitésimal. Ceci nous entraînerait à écrire un cours d'analyse, ce qui n'est pas le propos de cette thèse. On ne fera que préciser des points de vocabulaire et quelques éléments relatifs aux techniques possibles.

I.a.2. i. Tactiques et techniques

On s'intéressera dans la deuxième partie de cette thèse aux élèves en situation et donc aux schèmes qu'ils mettront en oeuvre. Ces schèmes pourront être pertinents, ou non pertinents. Il sera ainsi utile de les situer dans l'éventail des "actions" possibles pour l'étude d'une limite de fonction. Le mot "action" est évidemment un peu vague.

Nous allons préciser le vocabulaire qui sera utilisé ici.

M. Rogalski utilise le mot de "tactiques", qui incorporent des "techniques". Il évoque par exemple, pour l'étude de la convergence d'une suite, **la tactique** *"(ε, N) avec encadrement de morceaux de la suite dont on connaît la limite"*. Pour mettre en oeuvre cette **tactique**, on pourrait utiliser les **techniques** *"suite croissante majorée", ou "u_{2n} et u_{2n+1} sont adjacentes" ou encore "le critère de Cauchy"* [Rogalski, 1994].

A. Robert utilise le mot de "procédures" pour décrire les méthodes de résolution [Robert, 1982]. Le mot "procédure", on l'a vu, incorpore une idée de mode d'emploi donc de conditions d'application (cf. 0.b.3.iv.).

On lui préfèrera donc ici le vocabulaire, plus "neutre" (c'est à dire détaché de "conditions déclenchantes") de tactiques et techniques.

Le problème se pose alors du repérage des tactiques et techniques relatives à l'étude des limites. Où les relever ? Dans les livres scolaires ? Mais ce serait observer l'objet après transposition didactique, donc à une certaine distance de l'objet d'origine. Problèmes d'analyse d'un objet de savoir in abstracto.

I.a.2.ii. Techniques de calcul de limites.

1. Des techniques difficiles.

A l'émergence difficile du concept dans l'histoire correspondent la difficulté des techniques d'étude associées.

En effet, **l'existence d'une limite est une propriété locale. Au sens mathématique, une propriété locale est une propriété ayant lieu sur un certain voisinage dont on ne connaît que l'existence** (une propriété globale est une propriété vraie sur tout un intervalle donné à l'avance). La première technique pour prouver l'existence d'une limite donnée consiste, en utilisant la définition en (α, ε), à prouver **l'existence** d'un nombre α permettant d'obtenir le degré d'approximation voulu sur la fonction, sans qu'il soit nécessaire (ou possible) de le calculer explicitement.

Ainsi la technique issue de la définition même de l'objet est-elle sans doute la plus complexe parmi celles que l'on va passer en revue.

2. Repérage des techniques.

Pour ce repérage, nous avons eu recours à l'ouvrage de J.-L. Ovaert et J.-L. Verley, déjà évoqué en I.a.1.ii., élément d'une collection au titre évocateur "Léonard Epistemon" ([Ovaert et Verley, 1983]), qui se donne comme objectif de :

> *"- mettre en lumière l'interaction entre l'approfondissement des problèmes et celui des concepts (...) ;*
> *- situer les problèmes et les concepts dans un contexte culturel et historique et dégager les modalités de leur développement ;*
> *- conjuguer un travail solide sur des exemples significatifs et la mise en oeuvre de méthodes générales."*

On peut espérer de ces objectifs la mise en oeuvre d'une vigilance épistémologique dont [Chevallard, 1985] dit qu'elle est l'élément de base du travail didactique [12]. Dans cet ouvrage, Ovaert et Verley utilisent indifféremment les mots de "techniques", ou de "méthodes". Ils distinguent :

i) les méthodes d'étude directe, où l'existence et le calcul de la limite s'établissent simultanément. A l'intérieur de ces méthodes, deux "techniques" :

a. <u>les opérations sur les fonctions</u>, avec deux situations possibles :
- s'il n'y a aucune indétermination, on applique les théorèmes d'opérations et de composition ;
- s'il y a indétermination, on utilise les équivalents, ou les développements asymptotiques, ou le passage au logarithme ;

b. <u>la comparaison directe</u>, qui consiste à se ramener à la situation précédente par majoration et minoration.

ii) les méthodes d'étude indirecte, qui assurent la seule existence de la limite à partir de la seule donnée de f, avec trois méthodes fondamentales :

a. <u>par monotonie</u> : toute fonction croissante majorée sur [a, b[admet une limite au point b ;
b. <u>par complétude</u> : on applique le critère de Cauchy ;
c. <u>par compacité</u> : on utilise les valeurs d'adhérence d'une fonction en un point. En particulier, pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite, il suffit d'exhiber deux valeurs d'adhérence de f distinctes.

On constatera que J.-L. Ovaert et J.-L. Verley n'évoquent pas l'utilisation de la définition de limite pour l'étude des limites. Comme envisagé au paragraphe précédent, c'est sans doute la technique la moins utilisée.

Pour finir, nous retiendrons les techniques suivantes :

Techniques	TS	Deug A
Techniques opératoires (i.a.)		
Techniques de comparaison (de minoration pour lim=+∞)		
Techniques de croissance majorée (ou non majorée)		
Techniques "définition" (α, ε)		

En grisé les cases correspondant aux techniques "au programme" ; nous en reparlerons dans le chapitre I.c. relatif à la transposition didactique.

---

[12] Chevallard est d'ailleurs membre du comité de rédaction du volume de la collection Léonhard Epistemon utilisé ici.

I.a.3. Langage des limites, langage de l'infini.

Nous aborderons ici d'abord l'évolution de l'idée même d'infini dans l'histoire, puis l'association entre l'infini et le mouvement, enfin le révélateur du langage courant.

G. Vergnaud insiste, on l'a vu, sur le rôle du signifiant :

> *"Le langage a d'abord une fonction de communication et l'apprentissage des mathématiques est un apprentissage très fortement socialisé. Mais cette fonction de communication ne peut s'exercer utilement qu'en s'appuyant sur cette autre fonction du langage qu'est sa fonction de représentation. En relation avec ces deux fonctions, on observe une autre fonction du langage : l'aide à la pensée et à l'organisation de l'action. Cette fonction s'appuie elle-même sur la fonction de représentation, mais ce qui est représenté alors, c'est à la fois les éléments de la situation pris en compte, l'action et leurs relations.*
> ***Le langage et les symboles mathématiques jouent donc un grand rôle dans la conceptualisation et l'action***". [Vergnaud, 1990].

Mais les rapports entre le mot et la pensée *"sont le produit du développement historique et social, de la pensée humaine"* (cf. 0.b.2.v.). C'est particulièrement vrai pour une notion comme celle de "limite", définie par D'Alembert, dans l'article "Différentiel" de son Encyclopédie, comme étant *"la vraie métaphysique du calcul différentiel"*.

I.a.3.i. Infini privatif, infini positif, infini opératoire

Au mot "limite" répond en écho le mot "infini". Opposés dans le langage "courant", les deux mots se retrouvent "soudés" dans des expressions mathématiques comme " $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ".

Contradiction dont Engels pensait qu'elle était l'application de la dialectique aux questions mathématiques :

> *"En niant la quantité finie, on a la différentielle dx et en niant la diffférentielle via l'intégrale, on retrouve le fini... C'est précisément parce que l'infini est une contradiction qu'il est un processus infini, se déroulant sans fin, dans l'espace et le temps (...). La suppression de la contradiction serait la fin de l'infini.".* (cité par [Dhombres, 1978]).

Immergé dans le même "champ conceptuel" que le concept de limite, le concept d'infini offre un terrain d'investigation de choix pour l'analyse épistémologique. On s'inspirera dans ce qui suit des écrits de Jean Seidengart, professeur de philosophie, parus dans [Salanskis et alii, 1992], dans [Monnoyeur et alii, 1993] et dans [Fischetti et alii, 1996].

> *"L'histoire de l'infini laisse apparaître trois acceptions principales : un infini privatif, un infini positif en soi et un infini opératoire. Bien que ces trois sens relèvent de démarches intellectuelles différentes, ils ont constamment interagi au cours de l'histoire, donnant lieu à une dialectique très riche en inventions conceptuelles de toutes sortes "*
> [dans Fischetti, 1996] (les citations suivantes dans ce paragraphe en italique seront issues du même article).

1. L'infini privatif.

L'analyse étymologique montre que le mot naît d'une privation :

"Le mot grec apeiron présente un "a" privatif qui désigne ce qui est à la fois indéterminé et illimité ; le mot peras désigne la borne, la limite et l'extrémité. Le calque latin in-finitum conserve ce même caractère privatif : ce qui est sans terme et sans but".

Cet infini privatif est alors le principe même du fonctionnement du monde *"qu'il s'agisse de la formation du monde sous l'action du démiurge, des transformations naturelles, ou même des productions naturelles ou artistiques"*. Il a des illustrations symboliques (par exemple le châtiment des Danaïdes condamnées à remplir un tonneau sans fond, ou le mythe de Sysiphe). Il a des illustrations dans le domaine numérique : l'infini privatif désigne également une pluralité innombrable,

> *"c'est-à-dire telle qu'aucun nombre, si grand soit-il, ne saurait la contenir parce qu'elle est inépuisable. C'est le cas des mondes innombrables dont Anaximandre disait qu'ils ne cessent de se former et de se désagréger au sein du Tout de l'Univers.*
>
> *L'infini, imparfait, est alors opposé au fini : à cette infinité amorphe, les Anciens opposaient la finité de la forme parachevée qui est souverainement enclose dans l'invariance de ses déterminations".*

2. L'infini positif.

Seidengart évoque une lente refonte du concept, occasionnée par la confluence de la pensée grecque et de la tradition biblique et (qui) aboutit à l'idée d'un infini existant en acte, opérant ainsi un renversement des valeurs et une transformation décisive de l'idée de Dieu. Il évoque une phrase de saint Anselme :

> *"Seigneur nous croyons que tu es quelque chose dont on ne peut rien concevoir de plus grand" : Dieu n'est pas l'être le plus grand de tout ce que nous concevons, mais il est tel que rien de plus grand ne pourrait être pensé".*

Il s'agit bien d'un renversement conceptuel total :

> *"En fait, seul l'infini est le positif en soi, car il exclut toute limitation ou négation. Il est donc absolument premier, tandis que le fini présuppose toujours quelque autre chose que lui-même qui l'englobe, le dépasse et, peut-être même, le fonde. En ce sens, le plus incompréhensible n'est pas l'infini, mais le fini".*

Ce renversement conceptuel aboutira en au XVI^{e} siècle à Giordano Bruno, proclamant l'infinité du monde (il sera brûlé par l'inquisition) et au XIX^{e} siècle aux ensembles infinis de Cantor, c'est à dire à "l'infini actuel".

3. L'infini opératoire.

Seidengart désigne sous cette appellation "l'infini potentiel" d'Aristote qui a régné sur les mathématiques jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle [13] : il désigne le dépassement incessant de tout résultat fini vers une totalisation irréalisable. Alors que l'infini privatif n'a pas de but, l'infini opératoire en a un : c'est lui qui permet par exemple les calculs d'Archimède (cf I.a.1.i.).

---

[13] Toute règle a bien sûr ses exceptions : ainsi, quand Euclide définit les droites parallèles comme étant "des droites qui, dans un même plan, prolongées à l'infini, ne se rencontrent ni d'un côté, ni de l'autre", il fait référence à un infini actuel (positif, dirait Seidengart).

Seidengard note que ces trois types d'infini interagissent en permanence, *"pour produire les recherches les plus fécondes"*.

On peut essayer d'établir des relations entre ces "conceptions de l'infini" et "les points de vue" sur les limites : trois conceptions de l'infini, trois points de vue sur les limites. Les associations ne sont pas simples :

- **un point de vue algébrique** sur les limites peut consister à éliminer toute idée de l'infini : on manipule des objets de calcul. On applique les règles de l'algèbre à des objets particuliers, indépendamment de leur sens.

Ecrire par exemple :" $\lim_{a\to+\infty} (f+g)(x) = \lim_{a\to+\infty} f(x) + \lim_{a\to+\infty} g(x)$" ne suppose pas l'expression d'une conception particulière de l'infini.

Cette manipulation de l'objet ∞ comme un objet quelconque peut exprimer deux idées (on le verra plus précisément en II.a.1.i.) :

- un refus (une peur ?) d'envisager la singularité de l'infini (ce serait l'infini "privatif") ;
- en même temps, manipuler de tels symboles peut exprimer une certaine idée de "l'infini actuel", c'est à dire de l'infini "positif".

On peut d'ailleurs considérer comme Seidengard (cf 1.a.3.i.) que, pour ce point de vue "algébrique", les idées d'infini positif et privatif interagissent chez un même individu, l'une pouvant prendre momentanément le pas sur l'autre.

- **le point de vue d'approximation**, comme **le point de vue cinématique**, se situe "naturellement" au niveau de l'infini opératoire. C'est dans ce cadre que peuvent se comprendre les travaux d'Eudoxe, de Newton, ou de Weierstrass. Si on y regarde de plus près, on peut voir une différence entre les deux points de vue :

- **le point de vue cinématique** est davantage lié à "l'infini privatif" : par exemple, dans le cas de $\lim_{a\to+\infty} f(x) = +\infty$, la variable a beau être très grande, elle ne tirera jamais assez la fonction assez "haut" pour atteindre un objectif irréalisable. C'est bien une situation type "tonneau des Danaïdes" ;

- **le point de vue approximation** est davantage lié à "l'infini positif" : le renversement de l'ordre des choses (on part désormais de la fonction et pas de la variable) traduit bien un renversement conceptuel. On peut se rapprocher d'aussi près que l'on veut du "terminus" (cf I.a.1.i.).

On le voit, les associations entre "points de vue" sur les limites et "types d'infini" sont complexes.

I.a.3.ii. Le temps, le mouvement, insaisissables comme l'infini, figures de l'infini.

S'agissant d'infini, on ne peut éviter d'évoquer les peurs qui accompagnent souvent cette idée : J. Cottraux, psychiatre, évoque dans [Fischetti, 1996] la pensée de Pascal *"Le silence éternel des espaces infinis m'effraie"*, la chute dans un trou sans fin d'Alice, l'héroïne de Lewis Caroll et d'autres phobies symptômes de diverses pathologies.

Il note :

"Si ces pathologies sont souvent bénignes, elles créent parfois de profondes angoisses, liées au refus de vivre dans un monde sans limites, ou à la sensation d'être soi-même infini".

Il est frappant de voir que ces pathologies sont souvent liées au vertige du temps qui passe, ou au vertige de la chute et plus globalement du mouvement et de la vitesse. Mais les rapports étroits entre infini, temps, vitesse, n'apparaissent pas que comme symptômes pathologiques.

1. Le temps d'abord.

Mayet, dans [Fischetti, 1996], revient sur l'infini d'Aristote. Pour Aristote, *"tout est infini ou par composition, ou par division, ou par les deux". "L'infini par composition"* s'applique en particulier aux nombres (on peut toujours trouver un nombre plus grand qu'un nombre donné), *"l'infini par division"* s'applique en particulier aux grandeurs spatiales (1/2, 1/4, 1/8 etc).

> *"Mais le nombre n'est pas potentiellement divisible au regard de la division, car l'unité est une quantité discrète. De même que la grandeur spatiale n'est pas potentiellement infini, car elle est limitée par la clôture du monde".*

Une seule quantité est à la fois infinie "par composition" et "par division", c'est le temps. Mais ceci a un prix : pour le temps, à la différence de l'espace, ou des nombres, *"chaque partie prise disparaît avant d'être systématiquement remplacée"*. Ainsi, la meilleure figure de l'infini est en même temps la plus précaire : connaître "ce qui vient après" suppose de perdre "ce qui est maintenant".

2. Le mouvement ensuite.

Le mouvement est évidemment lié au temps.
Il intervient à tous les moments décisifs de l'histoire des limites et de l'infini.
- les 4 paradoxes de Zénon sont liés au mouvement (le paradoxe de la course à pied, le paradoxe d'Achille et de la Tortue, le paradoxe de la flèche qui vole, le paradoxe du stade) ;
- c'est encore par le mouvement qu'au XVI^{e} siècle Giordano Bruno évoque sa fuite vers l'infini :

> *"C'est donc vers l'air que je déploie mes ailes confiantes, ne craignant nul obstacle, ni de cristal, ni de verre; je fends les cieux et je m'érige à l'infini ..."*

(cité par Seidengart, dans [Monnoyeur et alii, 1993]) ;

- on a vu le rôle du mouvement dans l'élaboration théorique de Newton au XVII^{e} siècle ;
- pour finir, R. Thom, dans [Salanskis et ali, 1992], évoque pour justifier l'antériorité ontologique du continu sur le discret le mouvement "primitif" :

> *"Il faut revenir à l'expérience primitive d'un être vivant qui se déplace dans un milieu acqueux".*

Ces considérations sont importantes : le "point de vue cinématique" évoqué par R. Bkouche à propos des limites est un point de vue qui s'alimente aux sources de l'imaginaire de l'humanité.

I.a.3.iii. Le révélateur du "langage courant".

B. Cornu, dans une thèse consacrée à l'apprentissage de la notion de limite [Cornu, 1983], montre l'importance du langage courant à deux niveaux.

1. Premier niveau.

Le langage courant est révélateur des conceptions existant avant l'apprentissage. Dans une enquête réalisée au niveau de la classe de seconde, c'est à dire avant l'apprentissage de la notion de limite, il montre que les expressions "tend vers" et "limite" sont déjà chargées de sens.

A travers les phrases associées par les élèves à ces expressions, il dégage des régularités :

- on ne trouve jamais la même phrase associée à ces deux expressions ;
- l'expression "tend vers" est associée en général à des notions de mouvement *("tendance à se rapprocher de, rapprochement inexorable vers un but, tendre la main vers...")*.

Du point de vue de l'enseignement des limites, on peut faire l'hypothèse que l'expression "tend vers" permet de traduire assez naturellement un "point de vue cinématique" ; du point de vue de l'infini, cette expression est en lien avec "l'infini opératoire" ;

- le mot "limite" désigne presque toujours quelque chose de statique, de fixe *("limite géographique, limite à ne pas dépasser, borne que l'on s'interdit de franchir, limite impossible à atteindre, limite impossible à franchir")*. Une certaine proximité avec "l'infini privatif" apparaît.

On peut faire l'hypothèse que des correspondances existent entre l'expression "avoir pour limite" et un "point de vue algébrique" (une limite, objet constitué sur lequel on transfère les règles de calcul de l'algèbre) ou avec un "point de vue approximation" : l'expression suppose que l'on se place d'abord du point de vue de la limite à approcher.

2. Deuxième niveau.

Il y a un rapport complexe entre langage et apprentissage : le langage courant va influer sur les nouvelles notions et va subir en même temps les déformations induites par ses nouveaux usages. Ainsi lors d'une deuxième enquête (toujours [Cornu, 1983]), les mêmes questions relatives au sens des expressions "tend vers" et "limite" sont posées, mais après des exercices mettant en scène "ces notions".

On peut alors constater que le mot limite, s'il a conservé son sens antérieur (une frontière, une borne infranchissable), est alors doté d'une signification supplémentaire : l'idée de mouvement, de rapprochement, fait son apparition.

C'est à dire qu'il est lié désormais à un "point de vue cinématique" qu'il n'avait pas jusque là.

On retrouve ce que dit Vygotski de la construction du sens des mots

> *"Les sens des mots, plus dynamiques, plus larges que leurs significations, font apparaître d'autres lois d'union et de fusion que les significations. Les uns semblent couler les uns dans les autres, influer les uns sur les autres, si bien que les précédents sont contenus dans les suivants et les modifient"*. (cf. 0.b.2.v.).

Conclusion de cette partie I.a.

Nous avons tenté de cerner les contours du concept de limite.

Après une histoire tumultueuse, ce concept s'est stabilisé dans un cadre numérique. Il est repérable par les situations dans lequel il opère, par les tactiques et les techniques de traitement, qui correspondent à des invariants identifiables.

Les mots dans lesquels il s'exprime portent la trace des différents points de vue qui ont permis son émergence : un point de vue cinématique, un point de vue algébrique et un point de vue d'approximation numérique.

Il nous reste à étudier la transformation de ce concept, à travers l'institution scolaire qui le met en scène et les outil de calcul qui sont censés le "dévoiler".

I b. La transposition didactique. Les limites en Terminale Scientifique

L'être, le fantôme de l'être,
et l'ombre du fantôme de l'être.

Moitié ombre, moitié lumière :
c'est l'éclairage des planètes.
Une moitié du monde repose, l'autre travaille.
Mais, de toute cette moitié qui songe,
émane une force mystérieuse.

Cocteau, Le grand écart.

Nous allons étudier ici l'effet de la première transposition, la "transposition didactique" (cf. 0.b.3.ii.), sur le concept de limite.

Nous considèrerons les formes d'existence de ce concept dans l'institution scolaire à travers trois indicateurs : les programmes, les énoncés du baccalauréat et les manuels scolaires.

Cette étude sera limitée dans le temps et l'espace.

1. Dans le temps.

L'étude portera sur la période 1960-1996. Cette période correspond à la période de formation et d'enseignement des enseignants actuellement en exercice. Sa connaissance est donc utile à qui veut comprendre certains écarts entre l'enseignement dispensé et les programmes du moment. La période choisie est aussi importante parce qu'elle recouvre les deux grands mouvements de balancier de l'histoire de l'analyse qui sont d'une certaine façon "fondateurs" de l'enseignement d'aujourd'hui.

2. Dans l'espace.

On étudiera ici le niveau de la Terminale Scientifique (à partir de 1994, la TC devient TS : on considèrera alors les programmes de la TS "option math", qui est en quelque sorte l'héritière de la classe de TC). Pour plusieurs raisons, là aussi :

- d'abord parce que c'est à ce niveau que se situe un examen national, le baccauréat, qui contraint davantage le contenu des enseignements, la forme des exercices. Cela nous permet aussi de bénéficier de l'énoncé des problèmes posés au baccalauréat et donc du point de vue de l'institution elle-même sur la "mise en musique" du programme ;
- ensuite parce que la TS constitue une charnière entre la Première S qui est la première classe à dominante scientifique et l'Université.

Nous achèverons cette étude par un point de vue en amont et en aval : nous donnerons quelques indications sur la présentation du concept de limite en Première S et en Deug A.

I.b.1 En guise d'introduction, une histoire de ce siècle.

M. Artigue [Artigue, 1995a], dans une communication au colloque Inter-IREM Analyse, évoquait les grands tournants de l'histoire de l'Analyse. Elle retient quatre moments, 1902, 1960, 1970 et les années 1980 :

- en 1902, il s'agit de l'introduction du calcul différentiel et intégral. C'est une introduction mesurée, dans le cadre d'un enseignement qui reste d'élite. M. Artigue cite la conférence de Poincaré de 1904 qui met en cause l'intuition source d'erreur mais qui souligne que la rigueur nécessaire ne peut être atteinte qu'en faisant primer la logique sur la réalité, ce qui n'est pas souhaitable dans le cadre de l'enseignement : "La satisfaction du maître n'est pas l'unique objet de l'enseignement ; on doit d'abord se préoccuper de ce qu'est l'esprit de l'élève et de ce que l'on veut qu'il devienne" ;

- en 1960 les structures de corps, d'anneau, sont introduites, ainsi que la formalisation de la limite en ε, η. Là aussi, l'introduction est mesurée : on conseille d'introduire notations et structures avec modération. On observe d'ailleurs dans les manuels des définitions assez loin de la réalité mathématique... Le terrain se prépare, en douceur, pour la réforme suivante ;

- il s'agit en 1970 de la réforme des "mathématiques modernes". Contrairement aux précédentes, elle s'adresse à tous les niveaux de l'enseignement. L'enseignement de l'Analyse n'est d'ailleurs pas au coeur de cette réforme. Il prend cependant son autonomie par rapport à l'Algèbre. Les changements seront profonds : *"le langage bouge, la formalisation s'accroît, les intérêts se déplacent vers les problèmes de fondement, de définition"*. Mais l'Analyse sera relativement épargnée par la polémique qui suit : son enseignement ne touche que les élèves de lycée, contrairement à l'Algèbre et la Géométrie ;

- la contre-réforme de 1980 émane du terrain, à la différence des réformes précédentes. Le rôle de la commission Inter-Irem Analyse est d'ailleurs déterminant. L'introduction des limites se réduit désormais au "langage des limites". Les stratégies d'encadrement sont privilégiées, pour *"redonner son véritable sens à l'Analyse"*. Les activités de recherche sont largement évoquées.

M. Artigue conclut en évoquant les problèmes posés par l'enseignement de l'Analyse qui découle de ces réformes :

- les définitions données en terme de conditions suffisantes empêchent la mise en évidence de contre-exemples ;
- les démarches expérimentales, prônées par les programmes, deviennent, après adaptation par les manuels et les professeurs, un simple bricolage guidé, renforçant des des fonctionnements peu scientifiques.

Cette étude indique bien l'existence des deux moments décisifs, les années 1960 et les années 1980, sur lesquels l'étude portera désormais.

Elle situe aussi l'enseignement de l'Analyse comme problématique, au sens ou l'introduction de ses principaux concepts ou méthodes se heurte à des difficultés qu'aucune réforme n'a pu régler durablement.

Ceci à l'inverse de certaines illusions que semblent véhiculer certains protagonistes du système éducatif, comme André Warusfel, mathématicien et Inspecteur Général de Mathématiques (et donc à ce titre particulièrement concerné par l'évaluation de l'enseignement). Il écrit [Fischetti, 1996] :

"La considération des branches infinies des fonctions élémentaires est très simple ; c'est la première fois que des lycéens sont conduits à rencontrer à la fois le mot et le symbole ∞.

Toutefois, cette prise de contact reste très sommaire et ne pose généralement pas de difficultés particulières ; infini signifie ici essentiellement très grand (à la rigueur très petit) et ce concept n'est pas l'objet de manipulations très subtiles".

I.b.2 Une première histoire verticale : ce que disent les programmes.

Un deuxième texte de M. Artigue [Artigue, 1993] analyse plus précisément la période récente à travers le filtre des fonctions de référence :

- en 1982, sur la lancée des réflexions, menées en particulier dans les IREM, sur le renouvellement de l'Analyse, une réforme voit le jour : après la réforme des math modernes, il s'agit de mettre au coeur de l'enseignement des activités de résolution de problème. Diminution de l'aspect purement théorique, développement des stratégies de majoration et minoration, exploration numérique à l'aide des calculatrices ;

- en 1985 , pour donner du sens aux minorations et majorations, les fonctions de référence envahissent les programmes et surtout les recueils d'exercice ; au départ simples références pour nourrir les explorations numériques, elles deviennent vite le lieu de passage obligé de toute activité ; en même temps on passe de la notion de limite au langage des limites ;

- en 1990, le rééquilibrage intervient, les fonctions de référence s'estompent au bénéfice d'une réintroduction d'une algèbre des limites.

Nous allons étudier ces moments clefs, d'abord à partir des programmes et commentaires. Les années retenues sont celles qui correspondent à des changements de programme.

Les sources utilisées sont les Bulletins Officiels du Ministère de l'Education Nationale (cf bibliographie pour les dates et numéros).

Pour faciliter la lecture, on a choisi une présentation en tableau, en distinguant les éléments utiles :

Que dit-on des nombres réels ?
Quelle structure proposée pour l'étude des limites ?
Quelle définition des limites ?
Quelles techniques d'étude indiquées ?
Quel statut pour les représentations graphiques ?
Quel statut pour le calcul numérique ?
Quel statut pour les outils de calcul ?

I.b.2.i. A propos de la définition des limites.

On notera :
- en écriture standard, le texte des programmes ;
- en italique, les commentaires les accompagnant ;
- en souligné, les commentaires personnels ;
- en gras, les éléments importants pour notre étude.

Année	Les nombres	Structure du chapitre.	Définition des limites	Techniques de recherche
1966	***Quel que soit l'ordre et le mode d'exposition choisis, il importe de ne pas s'attarder sur les théories.*** Construction de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$. Nécessité d'une extension de $\mathbb{Q}$. Exposé sans démonstration des propriétés des réels. Les réels forment un corps commutatif ordonné.	Les suites sont traitées dans le chapitre fonctions. Ordre d'exposé : Limites, continuité, dérivation.	**Définitions concernant les limites** (finies ou infinies).	Enoncé sans démonstration des propriétés élémentaires des limites : - unicité ; - **opérations élémentaires** (somme, produit, quotient, racine $n^{ième}$), cas d'indétermination
1971	$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Inventaire sans démonstration des propriétés de $\mathbb{R}$: - c'est un corps commutatif totalement ordonné ; - toute partie non vide majorée admet un plus petit majorant ; - tout intervalle contenant plus d'un point contient un nombre rationnel.	Les suites toujours parmi les fonctions. Ordre : Continuité, limites, dérivation. *Il est loisible de permuter les alinéas relatifs à la continuité et aux limites.*	Limite d'une fonction quand la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini. Unicité.	**Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.** (sans démonstration).
1982	*Les élèves ont été en Première initiés à des structures. L'étude de celles-ci n'a pas à être développée pour elle-même : il s'agit cependant de pouvoir disposer du langage approprié.* *Le professeur donnera donc au moment convenable la définition d'un corps commutatif, sans en apporter d'autre exemple que $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$.*	Les suites sortent du chapitre sur les fonctions. Continuité et limites traitées simultané-ment.	**Compléments sur la continuité et les limites.**	- Composée d'une fonction de limite L par une fonction continue au point L. - Une fonction croissante majorée admet une limite. - Stabilité du comportement d'une fonction tendant vers $+\infty$ par addition d'une fonction bornée, ou multiplication par une fonction admettant un minorant strictement positif (énoncés admis). **Développements limités.**

Année	Les nombres	Structure du chapitre.	Définition des limites	Techniques de recherche
1986	*On s'abstiendra de toute considération théorique sur le principe de récurrence. L'introduction de la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est hors programme. A propos de $\mathbb{C}$, on donnera la définition d'un corps commutatif, mais aucune étude de cette notion n'est au programme..*	L'étude des suites précède l'étude des fonctions. Continuité et limites traitées simultanément	*Les définitions par (ε,α) sont hors programme. La signification intuitive des énoncés doit être mise en valeur.* ***Il convient d'interpréter graphiquement et numériquement les notions et les énoncés afin d'éclairer leur signification. On s'appuiera sur l'analogie avec les suites.*** **Langage des limites et de la continuité.** Introduction du symbole $\lim_{x\to a} f(x)$. Lorsque a appartient à I, cette limite est alors égale à f(a). Si f admet une limite en tout point de I, on dit que f est continue sur I.	- Comparaison, compatibilité avec l'ordre ; - **Somme, produit, quotient** ; - Application à la recherche des limites d'une fonction polynôme ou rationnelle en $+\infty$; - Limite d'une fonction composée.
1991	*On pourra donner la définition d'un corps commutatif, mais aucune étude de cette notion n'est au programme.*	L'étude des suites précède l'étude des fonctions. La continuité est traitée avant les limites.	*Les définitions par (ε,α) sont hors programme. A travers les exemples étudiés, on soulignera le caractère local de la notion de limite, mais tout exposé sur la notion de propriété locale est exclu.* **Langage de la continuité** : si f admet une limite en tout point de I, on dit que f est continue sur I. **Puis énoncés usuels sur les limites (admis).**	**- Les suites et fonctions de référence font leur apparition;** - Comparaison, compatibilité avec l'ordre; - Limite d'une fonction composée. **Les énoncés concernant les opérations algébriques ne sont indiqués que dans les commentaires, comme rappels de Première.**

Année	Les nombres	Structure du chapitre.	Définition des limites	Techniques de recherche
1994	*On évitera la mise en forme de récurrence dans les cas évidents et on s'abstiendra de toute considération théorique sur le principe de récurrence.* Disparition à propos de $\mathbb{C}$ de la notion de corps : *les idées doivent être mises en valeur, mais une construction détaillée n'est pas souhaitable.*	***Le programme d'analyse porte essentiellement sur les fonctions numériques, en relation avec l'étude des situations continues.*** *Quelques notions sur les suites complètent le programme d'analyse dans le seul but de permettre l'étude de situations discrètes sur des exemples simples.* Les suites réintègrent le chapitre sur les fonctions, en dernier paragraphe et réduites à un genre mineur. La continuité est encore traitée avant les limites.	***La formulation mathématique du concept de limite est hors programme ; l'unique objectif est d'acquérir une première idée de cette notion et de la faire fonctionner sur des exemples simples.*** Pas de changement quant à la définition de la continuité et aux énoncés sur les limites.	**Disparition des suites et fonctions de référence.** On retrouve, plus détaillées, les méthodes de comparaison, de compatibilité avec l'ordre et de composition. Les opérations algébriques ne sont toujours indiquées que dans les commentaires, en forme de rappel de Première. Une nouvelle restriction : l'étude des opérations sur les suites n'est plus au programme.

A la lecture de ce tableau comparatif, des lignes de force apparaissent clairement :

- une diminution de la formalisation et de la théorisation (après une ascension jusqu'en 1971). Il suffit de considérer la colonne "nombres" et la colonne "définition des limites". On ne parle plus ainsi que du langage de la continuité et des limites ;

- une réduction (officiellement) de l'aspect algébrique (opérations sur les limites) au profit de l'approximation, décisive en Analyse [Artigue, 1993] ;

- une place de plus en plus grande accordée à la continuité des fonctions. On passe de l'ordre chronologique limites-continuité à une étude conjointe (1986 : langage des limites et de la continuité) et enfin à l'ordre inverse, continuité puis limites. Ce qui revêt un aspect un peu "circulaire" : on définit la continuité à partir des limites et la limite à partir de la continuité, en appauvrissant au passage la notion même de limite. Comme le note R. Bkouche :

> *"une fonction f étant définie dans un intervalle contenant un point a, l'existence de la limite de f(x) lorsque x tend vers a implique (d'après le programme) que f(x) tend vers f(a), laissant entier le problème de la limite des fonctions admettant une discontinuité de première espèce"* [Bkouche, 1996].

Cette place de premier plan accordée à la continuité rend d'ailleurs problématique la place des suites :

- traitées jusqu'en 1982 comme des fonctions numériques particulières, elles obtiennent à partir de cette date un statut particulier et une relative autonomie vis à vis des fonctions ;

- en 1991, on insiste sur l'importance de l'étude conjointe des suites et des fonctions : *"les interactions entre suites et fonctions sont à souligner : mise en valeur des analogies et des différences, passage du continu au discret (approximation de nombres attachés à des fonctions au moyen de suites) et du discret au continu (emploi des ressources du calcul différentiel pour l'étude de suites)"*. C'est au même moment qu'est privilégiée l'étude des suites et fonctions de référence ;

- en 1994, l'optique est toute autre : *"le programme d'Analyse porte essentiellement sur les fonctions numériques, en relation avec l'étude de situations continues"*.

La question se pose évidemment du fondement des notions introduites. Après le formalisme des années 1970, puis le recours aux fonctions de référence, sur quoi repose désormais "le langage des limites" ? Pour répondre à cette question, il faut achever notre étude des programmes et commentaires officiels, du côté maintenant des représentations graphiques, du calcul numérique et des outils de calcul.

I.b.2.ii. Graphiques, calcul et outils.

Année	Représentations graphiques	Calcul numérique	Outils de calcul
1966	Aucune allusion à des représentations graphiques de fonction. On ne parle que : - "d'interprétation géométrique", pour la dérivée d'une fonction, la fonction réciproque et le théorème des accroissements finis, - et de "courbe représentative" pour les fonctions log et exponentielle.	Un paragraphe spécial intitulé "Calcul numérique" : - valeur approchée d'un nombre réel, encadrement, marge d'incertitude (erreur absolue, erreur relative), valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient. - approximation par les nombres décimaux. ***De nombreux exercices de calcul numérique seront faits,*** *à l'occasion de l'étude des fonctions usuelles et à l'occasion de problèmes, pour mettre en application des notions de valeur approchée, d'encadrement, d'ordre de grandeur d'un résultat ou d'une erreur.*	- Usage des tables numériques de fonctions usuelles, usage des tables de logarithmes. Notions pratiques sur l'interpolation linéaire ; - Usage de la règle à calcul.

Année	Représentations graphiques	Calcul numérique	Outils de calcul
1971	On parle encore d'interprétation géométrique de la dérivée, mais l''expression "représentation graphique" apparaît : - représentation graphique ; exercices simples de recherche d'asymptotes ; - représentation graphique de la fonction logarithme.	Apparition d'un chapitre : Nombres réels, calcul numérique, nombres complexes : - valeurs décimales approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès, d'un nombre réel ; - représentation d'un nombre réel par une suite décimale illimitée; - valeurs approchées d'un nombre réel, encadrement, incertitudes absolue et relative ; - valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient, de nombres réels dont on connaît des valeurs approchées. ***De nombreux exercices de calcul numérique seront faits à l'occasion de l'étude des fonctions usuelles et à l'occasion de problèmes,*** *... (même commentaire que lors du précédent programme).*	- Usage de la règle à calcul ; usage des tables; pratique de l'interpolation linéaire. Table de logarithmes. **- Usage de machines à calculer de bureau.**
1982	***On entretiendra l'habitude de la représentation graphique, car celle-ci joue un rôle important dans la description du comportement :*** *une indication d'allure peut suffire pour exprimer un aspect qualitatif, un tracé soigné est nécessaire lorsqu'on passe aux aspects quantitatifs.* - Exemples de comportement asymptotiques d'une fonction, aspect graphique ; - Théorème de Rolle, interprétation géométrique.	Tout chapitre spécifique sur le calcul numérique disparaît. On trouve une allusion au calcul numérique à deux occasions : - La fonction log décimal sera introduite en vue du calcul numérique; - obtention d'une valeur approchée d'une intégrale : on exposera seulement la méthode des rectangles, avec majoration du reste.	***On continuera à utiliser largement les calculatrices.***

Année	Représentations graphiques	Calcul numérique	Outils de calcul
1986	*Les représentations graphiques doivent tenir* ***une place très importante*** *dans l'ensemble des parties du programme.* ***Outre leur intérêt propre, elles permettent de donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques étudiés*** *; leur mise en oeuvre développe aussi les qualités de soin et de précision et met l'accent sur des réalisations combinant une compétence manuelle et une réflexion théorique.* - Exemples de tracés de la courbe représentative d'une fonction.	Le calcul numérique est présent dans tout le programme. *Les problèmes et méthodes numériques figurant dans les différentes parties du programme doivent être largement exploités :* ***ils jouent un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses notions mathématiques*** *et dans les différents secteurs d'intervention des mathématiques ; ils permettent aussi d'entraîner les élèves à combiner l'expérimentation et le raisonnement en mathématiques et concourent au développement des qualités de soin et de rigueur.* - Exemples d'emploi de majorations et d'encadrements d'une fonction par des fonctions plus simples (recherche de valeurs approchées en un point, recherche de limites); - Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique ; - Exemples de calcul approché d'intégrales.	***L'emploi systématique des calculatrices*** *vient renforcer l'étude des questions numériques, aussi bien pour effectuer des calculs que pour vérifier des résultats ou alimenter le travail de recherche..* *Les élèves doivent savoir utiliser une calculatrice scientifique programmable dans les situations liées au programme.* ***Un modèle bas de gamme suffit****. Cet emploi repose sur les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles ;* *- savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme ;* *- savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une variable permis par ces touches;* *- savoir programmer une suite définie par récurrence.* *L'impact de l'informatique doit être progressivement pris en compte : la mise en valeur des aspects algorithmiques et l'emploi des calculatrices programmables ont été évoqués ci-dessus ; il convient aussi d'utiliser les matériels informatiques existant dans les établissements et d'habituer les élèves, sur des exemples simples, à rédiger des programmes de manière méthodique, mais aucune capacité n'est exigible sur ce point.*
1991	Mêmes commentaires, avec en plus : ***on développera une vision géométrique des problèmes, notamment en Analyse, car la géométrie met au service de l'intuition son langage et ses procédés de représentation.***	Mêmes commentaires.	Pour les calculatrices, on ne parle plus d'un modèle bas de gamme, mais : *il est conseillé de disposer d'un modèle comportant les fonctions statistiques. En revanche,* ***les écrans graphiques ne sont pas demandés.*** Pour l'informatique, on met l'accent désormais sur ***l'exploitation des systèmes graphiques*** *(écrans, tables traçantes).*

Année	Représentations graphiques	Calcul numérique	Outils de calcul
1994	Idem	Idem	Idem

Remarques sur ces évolutions.

1. Du point de vue des représentations graphiques, l'évolution est considérable.

En 1966 les représentations graphiques n'ont pas de statut reconnu, en 1982 elles *"jouent un rôle important dans la description du comportement"* et en 1986 elles *"permettent de donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques étudiés"*. Cette orientation est confirmée en 1991 : ***"la géométrie met au service de l'intuition son langage et ses procédés de représentation"***.

2. Du point de vue du calcul numérique, on assiste à deux évolutions croisées :

- d'une part le calcul numérique se répand dans l'ensemble du programme (il n'est plus confiné dans un chapitre spécifique) ; chaque chapitre du programme d'Analyse peut donner lieu à des calculs numériques : ***"les problèmes et méthodes numériques jouent un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses notions mathématiques" ;***

- d'autre part toute évocation d'incertitude ou d'erreur sur un calcul approché disparaît. On parle désormais d'encadrement ou d'approximation.

Cette évolution de l'introduction du calcul numérique doit être mise en relation avec l'évolution de l'introduction des réels. On a pu observer en I.b.2.i. la disparition progressive de cette étude :

- en 1971, inventaire sans démonstration des propriétés de $\mathbb{R}$ (comme corps doté de la propriété de la borne supérieure) ;
- en 1982, $\mathbb{R}$ n'est évoqué que comme corps ;
- en 1986, on évoque $\mathbb{R}$ seulement pour dire que l'introduction de la droite numérique achevée est hors programme ;
- à partir de 1991, on évoque $\mathbb{R}$ seulement dans le cadre de la définition des fonctions numériques "sur un intervalle de $\mathbb{R}$".

3. Du point de vue des outils de calcul.

Il y a là aussi une évolution considérable des intentions des programmes. **Les calculatrices ont une place de plus en plus grande** : en 1971, on évoque **l'usage des machines à calculer** ; en 1982, on demande **d'utiliser largement les calculatrices** ; à partir de 1986, on évoque **l'emploi systématique des calculatrices.** Il y a cependant un décalage notable entre l'intention générale et la prise en compte des matériels existant. Entre 1986 et 1996, alors que l'évolution des matériels se précipite, rien ne change dans les instructions ministérielles : il n'est question que de **calculatrices programmables non graphiques.** Alors que l'utilisation des représentations graphiques est désormais très importante, l'exploitation de systèmes graphiques n'est recommandée que dans le cadre de la salle informatique, dont on connait le succès dans les lycées. On peut voir dans ce décalage la marque d'une certaine résistance de l'institution scolaire à la pénétration de nouveaux outils [Chevallard, 1992]

Ce bilan de l'évolution du statuts des représentations graphiques, du calcul numérique et des outils de calcul, autorise une première réponse à la question posée : sur quoi repose le "langage des limites ?". Ce "langage" semble bien reposer sur la seule observation graphique et numérique .

On avait remarqué, à la lecture des programmes, une nette diminution de la formalisation. **L'importance donnée conjointement à l'utilisation des graphiques, du calcul numérique et des outils de calcul va dans le sens d'une construction "concrète et intuitive" des concepts mathématiques.** Avec un système de balancier assez habituel dans l'organisation de l'enseignement et des programmes, on est passé d'une formalisation sans doute excessive à une situation où l'observation avait force de loi[14]. Comme le note M. Artigue :

> *"Ainsi on a voulu, à juste titre, limiter la formalisation mais on n'a pas suffisamment réfléchi aux problèmes des rapports à la vérité mathématique qui pouvaient découler des choix effectués à ce niveau et aux moyens de les gérer. Si le cours est un ensemble de vérités admises sur la base de quelques explorations ou confirmations pragmatiques, comment constituer chez l'élève fortement la conviction que le vrai mathématique ne souffre aucun contre-exemple, que des exemples, aussi nombreux et variés soient-ils, n'ont jamais valeur de preuve pour un énoncé universel ?"* [Artigue 1993]

Ce problème des "rapports à la vérité mathématique" se pose d'autant plus que les programmes ne mettent pas en place des procédures de contrôle des observations numériques ou graphiques réalisées : dire que "les problèmes et méthodes numériques permettent d'entraîner les élèves à combiner l'expérimentation et le raisonnement en mathématiques" (programme de 94) ne suffit pas si on supprime les moyens de contrôle :

- disparition complète de l'étude des nombres pour eux-mêmes ;
- disparition de toute allusion à l'étude des erreurs dans le calcul numérique.

Au delà des rapports à la vérité, il y a aussi sans doute une conséquence de cette approche pragmatique sur l'enseignement des notions mathématiques, ici sur la notion de limite. En effet, s'il est question de voir pour comprendre, il va être tentant de privilégier justement ce qui se voit, c'est à dire le comportement global des fonctions, plutôt que le comportement local :

- à partir de 1982, apparaît "le théorème des croissances comparées", donnant les limites en $+\infty$ des fonctions $\frac{\ln x}{x}$ et $\frac{e^x}{x}$. L'appellation même induit l'idée que "la fonction logarithme croît moins vite que la fonction puissance" et peut renforcer la confusion entre comportement global et local ;

- à partir de 1986, c'est un même chapitre du programme qui parle de "comportement local et global" des fonctions ;

- en 1991, on précise que tout exposé sur la notion de propriété locale est exclu ;

- en 1991 l'algèbre des limites passe (officiellement) en second plan, au bénéfice des propriétés relatives à la comparaison : désormais, "le théorème des gendarmes" est promu au rang d'outil principal pour établir des limites.

La transposition didactique observée à partir de l'évolution des programmes produit une notion de limite qui se rattache à un double point de vue :

- un point de vue cinématique, issu de l'observation graphique des phénomènes (le global à la place du local) ;

- un point de vue d'approximation non contrôlée, issu de l'observation numérique (si x est proche de x_0, alors f(x) est proche de L).

---

[14] S'agissant du calcul infinitésimal, ceci est tout de même assez naïf. On songe ici à l'exclamation de Poincaré [Dhombres, 1978], à propos justement du rapport entre continuité et dérivabilité : *"Comment l'intuition a-t-elle pu nous tromper à ce point ?"*.

I.b.3 Une deuxième histoire verticale : ce que disent les énoncés des sujets de bac.

L'intérêt du baccalauréat est qu'il est une bonne indication de ce que l'institution considère comme étant à la fois une mise en pratique d'un programme. L'intérêt est aussi que l'épreuve de mathématiques du baccalauréat a gardé au cours de la période considérée un format à peu près constant (un ensemble de deux exercices et d'un problème, censés couvrir une bonne partie du programme) ; cela permet ainsi des comparaisons assez simples.

On relèvera les questions portant sur les limites dans ces énoncés et ceci dans les 23 académies "métropolitaines". On a laissé de côté des sujets des académies "hors de France", ceux-ci ayant la réputation d'être un peu plus difficiles. L'ensemble des 23 académies "intra muros" est un échantillon assez représentatif. La recherche des asymptotes sera considérée comme une question de limite si elle s'insère dans le cadre d'un problème d'analyse. Par contre, on ne comptabilisera pas les recherches d'asymptotes d'hyperboles dans le cadre d'exercices sur les coniques. Il s'agira en effet alors de l'application de formules : cela n'a plus grand chose à voir avec un problème de limites. On considèrera à chaque fois une session du baccalauréat suivant de près un changement de programme. Ce qui suit est donc à lire en référence au programme correspondant (cf. pages antérieures pour ce qui concerne les limites).

Notre objectif est de voir si les évolutions des sujets correspondent à l'évolution des programmes (cf. chapitre précédent I.b.2.).

I.b.3.i Le baccalauréat 1969.

Le programme a été changé en 1966. Le bac 68 a été un peu particulier ; on considère le bac 69.

Sur les 23 académies considérées :

- 3 académies posent une question relative aux limites dans un exercice. Il s'agit de :
  - l'étude des branches infinies de $\frac{x}{2} + \sqrt{x^2 - 4}$;
  - existence de $\lim_{a \to +\infty} \int_1^a \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right) dx$;
  - étude des branches infinies de $f(x) = x - 1 + e^{-x}$, existence d'une limite de l'aire comprise entre la courbe, l'asymptote $y = x-1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a$ quand a tend vers $+\infty$.

- une seule académie pose une question relative aux limites dans un problème. Il s'agit, pour la fonction $f(x) = x + \frac{1}{2x^2}$ de l'existence d'une limite de l'aire comprise entre la courbe, l'asymptote $y = x$, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = a$ quand a tend vers $+\infty$.

Trois observations sur ce récapitulatif :

- **sur 69 énoncés (46 exercices et 23 problème), 4 seulement (6%) évoquent un calcul de limite** (le programme était assez vaste, comportant une bonne dose d'arithmétique, de géométrie et de "structures") ;

- les questions sont techniquement assez simples (il s'agit de l'application de techniques opératoires et de l'utilisation de limites de référence) ;
- il s'agit à chaque fois de limites liées à des objets géométriques (asymptotes "obliques", aire de surfaces limitées par une courbe et une droite.

La réforme des mathématiques modernes n'est pas encore là : on ne distingue donc pas encore en Analyse l'intérêt pour les problèmes liés à la définition des objets qui en sera une des caractéristiques (cf. I.b.1.).

I.b.3.ii Le baccalauréat 1972.

Le programme a été changé en 1971.

Retournement complet de situation : seules 4 académies ne proposent aucune question sur les limites. On trouve en tout 23 énoncés portant des questions sur les limites (ce qui implique que, pour 4 académies, ce type de question apparaît à la fois dans le problème et dans un exercice).

Pour la plupart des énoncés, il s'agit de l'étude de fonctions. On trouve ainsi :

$\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{2}$, $x\text{Log}\frac{2x-1}{x}$, xe^{-x+1}, $\frac{x\text{Log}x}{x-1}$, $x-\frac{1}{2}\text{Log}|2e^x-1|$, $\frac{x^n}{n!}e^{1-x}$, $\frac{2t}{1+t}-\text{Log}(1+t)$,

$2x-x\text{Log}x$, $x(1-\text{Log}x)$, $\frac{\text{Log}(ax)}{x}$, $x+1+2e^{-2x}$, $x\text{Log}x$, xe^{-x}, $-\frac{(x^2+4x-3)}{|x+6|}$,

$x^3\text{Log}|x|$, $\frac{2}{e^{1/x}-2}$, $x\text{Log}|x|$, $\frac{x^2}{2}\text{Log}x-\frac{x^2}{4}$.

Il s'agit alors d'étudier la limite des fonctions aux bornes de l'intervalle de définition, d'étudier la continuité et/ou la dérivabilité en des points de raccord (du type $f(x) = x\text{Log}x$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$), d'étudier l'existence éventuelle d'asymptotes ou enfin d'étudier la limite de l'aire comprise entre la courbe et l'asymptote.

Pour deux énoncés, il s'agit de la limite de suites, qui s'obtient dans un cas par le "théorème des gendarmes" (on dispose de $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$), dans l'autre cas par le théorème relatif à la limite des suites géométriques convergentes.

Quelques conclusions sur ce tour d'horizon 1972 :

- l'étude des fonctions est désormais centrale ;

- les fonctions étudiées deviennent plus "complexes". La fonction logarithme prend une place très importante. Il s'agit là d'un virage : cette fonction sera désormais moins étudiée dans le cadre du calcul numérique (pour ses propriétés algébriques) et davantage dans un cadre analytique ;

- alors que, dans la période précédente, **le calcul des limites** était lié à des questions "pratiques", ici il **est décisif pour s'assurer de la qualité des fonctions en des points critiques** (continuité, dérivabilité). C'est sans doute un effet de la réforme des mathématiques modernes ;

- les problèmes ont pour seul objectif l'étude des fonctions pour elles-mêmes (sauf un des problèmes qui aboutit à un encadrement de e) ;

- alors que l'on est au plus fort de la formalisation des limites, aucune question ne fait appel aux définitions vues en cours, qui n'ont ainsi aucun caractère "opératoire";

- toutes les limites de fonction, sans exception, se traitent par application de techniques opératoires et utilisation de résultats de référence.

I.b.3.iii Le baccalauréat 1984.

Le programme a changé en 1982.Il y a à partir de cette année un changement dans l'organisation du baccalauréat : économie d'efforts, certaines académies se regroupent. Les académies de Créteil et Versailles apparaissent.

On dénombre 10 sujets. Tous sont construits sur un modèle qui va devenir assez stable sur une période assez longue : deux exercices sur des points particuliers du cours et un problème sur l'analyse (suite et fonctions). Tous les énoncés abordent donc à la fois des limites de suites et de fonctions (deux sujets n'abordent que des fonctions dans le problème, mais comportent alors un exercice sur les suites).

Première constatation : **le calcul des limites apparaît désormais central** dans ces problèmes. On en dénombre une moyenne de 4 par problème et une fois sur deux le problème se conclut par un calcul de limite ;

Deuxième constatation : alors que le calcul des limites servait surtout dans la période précédente à étudier les propriétés des fonctions "pour elles-mêmes" (continuité, dérivabilité), **il va maintenant intervenir de plus en plus dans des problèmes d'approximation de réels**, dans des contextes très variés.

Troisième constatation : on constate **une diversification et une nette complexification des suites et des fonctions** (les fonctions trigonométriques font leur apparition) et de plus en plus souvent on trouve des suites et des fonctions "imbriquées" :

- pour les fonctions : $\frac{1-\cos t}{(1-e^t)^2}$, e^x-x-3, $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $-2x+\sqrt{3(x^2-1)}$, $e^{-x}\ln x$, $x^a e^{-x}$, $\int_1^x x^n e^{-t}dt$, $-\ln|\cos x|$, $\int_{\ln\sqrt{2}}^x \frac{dt}{\sqrt{e^{2t}-1}}$, $\frac{\sin(ax)}{x}$, $\int_1^x \frac{t}{t-\ln t}dt$;

- pour les suites : on trouve 4 fois des doubles récurrences linéaires, 3 fois des suites simplement récurrentes, 3 fois des suites géométriques et deux fois une suite définie par une borne d'une intégrale.

Quatrième constatation : on constate **une diversification des techniques à mettre en oeuvre pour étudier des limites** :

- pour les fonctions : on trouve deux fois un développement limité, une fois le théorème des fonctions décroissantes minorées, deux fois le théorème d'encadrement, une fois un raisonnement assez subtil par récurrence (et le reste par application des limites du cours et par opérations) ;

- pour les suites : 3 fois les suites géométriques, , 3 fois le théorème des suites monotones bornées, 3 fois le théorème des gendarmes, une fois le produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0.

On peut constater d'ailleurs que la diversification des objets et des techniques qui leur sont appliquées n'est pas étonnante : c'est à ce moment (programme de 1982) que le contenu du cours sur les limites est le plus riche (sur le plan des définitions et des méthodes de calcul).

On commence à voir apparaître aussi la volonté de ne pas traiter les objets pour eux-mêmes, mais dans le cadre de la résolution de problèmes. Cette période est une période charnière.

I.b.3.iv Le baccalauréat 1988.

Le programme a changé en 1986.
On assiste à un nouveau resserrement du nombre des sujets : il n'y a plus que 6 sujets différents.
Les sujets sont construits sur le même modèle : deux exercices sur des points particuliers (complexes, géométrie...) et un problème d'analyse.

Première constatation : **le calcul des limites reste très important, mais moins systématique.** On rencontre ainsi des fonctions continues définies sur des segments fermés bornés, comme $e^{-x}\cos x$ sur $[-\pi, \pi]$.

Deuxième constatation : **les problèmes sont toujours construits autour de questions d'approximation mais on observe une standardisation des sujets :** définition d'une fonction, puis utilisation de cette fonction pour définir une suite récurrente et étude de la convergence de cette suite.

Troisième constatation : **les objets étudiés sont plus simples et moins variés** :

- pour les fonctions : $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$, $\frac{e^x-1}{xe^{2x}}$, $1-e^{ax}$, $e^{-x}\cos x$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{\ln x}{x^n}$, $\int_1^x \frac{\ln x}{x^2}$;

- pour les suites : 5 problèmes (sur 6) évoquent des suites. Pour 4 d'entre eux, il s'agit d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, définie à partir de la fonction du problème. Pour l'autre, il s'agit d'une série.

Quatrième constatation : **on assiste à un resserrement des techniques mises en oeuvre.** Pour les fonctions, il s'agit en début de problème d'étudier des limites par utilisation de résultats connus, puis de mettre en place un encadrement et d'appliquer le théorème des gendarmes pour établir une continuité, ou une dérivabilité. Pour les suites, il s'agit, en utilisant le point fixe a, d'encadrer (u_n-a) en utilisant l'inégalité des accroissements finis et de conclure en utilisant le théorème des gendarmes (dans 3 problèmes). Dans les deux autres problèmes, on applique le théorème des suites monotones bornées.

Cinquième constatation. **Une nouveauté apparaît dans 3 problèmes sur 6 : le problème comporte une application numérique.** Il s'agit en général de déterminer une valeur approchée avec une précision donnée de la limite d'une suite en utilisant l'encadrement mis en place.

La nouveauté est encore plus éclatante dans le problème de Paris :
- la première partie du problème s'achève par la preuve de la convergence de la suite (u_n) vers 0 et la question "à l'aide de la calculatrice, obtenir des valeurs approchées de u_{10}, u_{50}, u_{100}. Que peut-en conjecturer pour la limite de (nu_n) quand n tend vers $+\infty$?" ;
- et ce n'est qu'à la fin de la deuxième partie du problème que la convergence de la suite (nu_n) est effectivement établie.

Il y a là une application des recommandations du programme ("interpréter numériquement et graphiquement les notions", utiliser les calculatrices "aussi bien pour effectuer des calculs que pour vérifier des résultats ou alimenter le travail de recherche"). On observe une diminution de la technicité requise et de l'éventail des problèmes posés. L'observation et les conjectures commencent à apparaître.

I.b.3.v Le baccalauréat 1993.

Le programme a changé en 1991.

Nouveau resserrement des sujets : il y a désormais 4 groupes d'académie. La structure des problèmes est la même.

Première constatation : **le calcul des limites est moins important.** Alors que dans les sujets précédents on établissait des encadrements pour obtenir des limites, là il semble que l'essentiel soit d'obtenir des encadrements "pour eux-mêmes".

- ainsi le sujet 1 s'achève par l'établissement de l'inégalité
$\ln 2 + \ln\frac{x}{x+1} - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.
On demande alors d'admettre que F admet une limite en $+\infty$ et de prouver alors que cette limite est comprise entre ln2 et 1. Sans parler des risques de confusion que cette question risque d'établir pour le "théorème des gendarmes", il est clair que c'est ici le renseignement quantitatif qui prime sur le renseignement qualitatif (existence de la limite);

- de même le sujet 2 s'achève par une utilisation de la méthode des rectangles pour le calcul d'une intégrale I.
On dispose alors de l'inégalité : $|I - I_n| \leq \frac{2}{n}$. L'énoncé ne demande pas alors la limite de la suite I_n mais demande simplement d'en déduire une valeur approchée de I à 10^{-1} près. Là aussi, c'est le quantitatif qui prime sur le qualitatif.

Deuxième constatation : **les problèmes sont toujours construits autour de questions d'approximation, mais dans un cadre assez peu varié.** On observe aussi une sorte de standardisation des problèmes. Exit le point fixe. La première partie des problèmes consiste à étudier une fonction ; il y a alors calcul des limites aux bornes (avec éventuellement des prolongements par continuité, des études de dérivabilité), application du "théorème de la bijection". La deuxième partie consiste à étudier une suite définie à partir d'intégrales.

Troisième constatation : **l'éventail des fonctions est à peu près le même sur le plan de la diversité et de la complexité.** On trouve ainsi :
$1+x^2-2x^2\ln x$, $\frac{x}{x^n - \ln x}$, $e^{-x}\sin x$, $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Quatrième constatation : **il y a encore resserrement des techniques utilisées pour établir des limites.** Dans trois problèmes sur 4, il ne s'agit que d'appliquer les résultats sur les limites connues (xlnx etc.) et les opérations sur les limites. Dans le quatrième problème, on utilise un théorème d'encadrement et le théorème sur les suites monotones bornées.

Cinquième constatation : **on trouve dans trois problèmes sur 4 des applications numériques utilisant le calculatrice, pour encadrer des solutions d'équation ou la limite d'une suite.**

I.b.3.v Le baccalauréat 1995.

Le programme a changé en 1995.

Il n'y a plus de bac C mais un bac S. Certains élèves ont choisi l'option "Math" (ce qui revient à peu près à la section C), d'autres ont choisi une option Physique ou Biologie. Un seul exercice est spécifique à l'option "Math", le reste (un exercice et le problème) est commun à tout le bac S.

Le sujet est le même pour toutes les académies. **Il constitue un changement profond par rapport aux sujets antérieurs** :

- l'exercice spécifique pour l'option "Math" porte sur une suite (u_n) définie par une intégrale, sur l'étude de la limite de (u_n) (par le théorème des suites monotones bornées) et sur la limite de (nu_n) (par la combinaison d'un théorème d'encadrement et des théorèmes opératoires). Pour ceux qui n'ont pas l'option "Math", l'exercice ne pose aucune question sur les limites.

- le problème consiste à chercher les tangentes communes aux courbes des fonctions logarithme et exponentielle. Les outils de calcul différentiel sont évidemment indispensables (dérivée, équation de tangente) mais **il n'y a quasiment plus de calcul de limite en tant que tel** (un seul calcul dans le problème : la limite en $+\infty$ de $\frac{x-1}{x+1} e^x$).

Il est clair ici que le problème n'est plus construit autour de questions d'approximations mais autour d'une interaction entre le cadre graphique, le cadre algébrique et le cadre numérique, via la calculatrice.

Les objets manipulés sont donc assez simples, les techniques de calcul de limites assez restreintes (utilisation de limites connues et opérations). La calculatrice intervient pour donner les valeurs approchées cherchées. **La difficulté réside dans le "changement de cadres" lui-même** (cf. 0.b.4.iii.). On peut même considérer que la nouveauté importante de l'énoncé constitue une rupture du contrat implicite noué autour de l'épreuve de mathématique du baccalauréat : les élèves et les professeurs attendent un sujet construit autour de l'étude d'une fonction (résultat de la standardisation constatée des énoncés depuis 1988). Ainsi peuvent s'expliquer les très nombreuses protestations issues des correcteurs de l'épreuve de mathématique cette année-là.

Résultat de cette protestation sans doute, le sujet de 1996 renoue avec la forme habituelle des énoncés. Les études de limite occupent une place resteinte, les techniques d'étude sont opératoires [15]

On retrouvera un problème plus classique en 1996 mais situant le calcul de limites dans un même cadre assez frustre.

---

[15] Remarque sur l'énoncé de 1996 : la seule limite problématique (cf. I.c.2.i.) ne pouvait pas être calculée par les calculatrices symboliques du type TI-92. Il s'agissait là d'un hasard et non pas d'une prise en compte (par les concepteurs des énoncés) des outils de calcul à la disposition de certains élèves.

Synthèse sur l'évolution des énoncés de baccalauréat.

1. De 1971 à 1984, on constate une diminution du formalisme et une augmentation de l'intervention de l'analyse : manipulation d'inégalités, approximation de réels. Les situations dans lesquelles les limites interviennent sont variées, la gamme des fonctions étudiées est étendue et la résolution des problèmes requiert la mobilisation de nombreuses techniques.

2. A partir de 1984, on note une simplification des problèmes [16] :

- du point de vue des énoncés : on observe une standardisation des problèmes dont "le point fixe" constitue une forme assez caractéristique. L'éventail des fonctions se retrécit (il y a une quasi disparition des fonctions trigonométriques) ;

- du point de vue des limites : on repère moins d'interventions du calcul de limite, plus localisées (autour de l'étude habituelle des fonctions), avec des techniques d'étude moins variées (le théorème des croissances comparées, les théorèmes opératoires et plus rarement le "théorème des gendarmes") ;

- du point de vue du calcul numérique : de plus en plus de questions y font appel, souvent de façon non contrôlée.

Ce double mouvement de simplification technique et de développement de l'observation numérique réduit la place du calcul infinitésimal à la portion congrue.

Les objectifs affichés par les concepteurs des programmes de 1994 étaient ambitieux : "entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique" (exposé des motifs du programme de 1994).

Ce dont porte témoignage l'évolution des énoncés de bac ne va pas particulièrement dans ce sens.
L'Analyse que l'on y trouve est une combinaison d'algèbre (pour les calculs) et d'observations numériques (pour l'approximation).

---

16 Les commentaires des programmes de 1994 recommandent d'ailleurs "d'écarter les sujets présentant de trop grandes difficultés conceptuelles ou techniques au bénéfice d'une meilleure solidité sur les points essentiels".

I.b.4 Une histoire horizontale : ce que disent les manuels scolaires.

Nous avions évoqué en 0.b.3.ii. une double transposition didactique : une transposition "stricto sensu", de l'objet de savoir à l'objet à enseigner et une transposition "sensu lato" [Chevallard, 1985], de l'objet à enseigner à l'objet d'enseignement.

Nous avons étudié en I.b.2. la première transposition à travers les programmes et en I.b.3. une transposition "intermédiaire", repérable par les sujets du baccalauréat [17]. La transposition "sensu lato" est plus difficile à mesurer.

Nous considererons que les manuels scolaires en sont une indication. En conclusion de cette étude, nous discuterons le bien fondé de cette hypothèse (I.b.4.iii.).

I.b.4.i Les limites dans les manuels de TS.

On prendra en compte ici 5 manuels scolaires correspondant à l'enseignement obligatoire de Mathématiques en TS, relatif au programme de 1994. Il s'agit des ouvrages des éditeurs Belin, Bordas ("Fractale"), Didier ("Dimathème"), Hachette ("Terracher") et Nathan ("Transmath") qui couvrent la quasi-totalité du marché (références en bibliographie). Par commodité, nous désignerons par la suite ces ouvrages par le titre de la collection qui est d'ailleurs leur nom d'usage dans l'institution scolaire.

On s'intéressera ici au cours sur les limites proposé par ces manuels. Nous présenterons les choix de chaque manuel pour l'ordre d'exposition des notions, la définition (ou à la non définition) des limites, l'activité introductive, les techniques de calcul de limites, les exercices d'entraînement et le théorème de croissances comparées.

1. L'ordre d'exposition des notions.

	Belin	Fractale	Dimathème	Terracher	Transmath
Ordre d'exposition des notions.	Limites et continuité ; Dérivation.	Continuité ; Limites ; Dérivation.	Dérivée ; Sens de variation ; Asymptotes Limites.	Limites et continuité ; Dérivation.	Révisions (suites, fonctions); Limites Continuité Dérivation.

La plupart des manuels suivent la lettre du programme qui suggère de commencer l'analyse par le **langage de la continuité**. On a ainsi l'impression d'une définition circulaire : la continuité est définie à partir des limites, les limites sont définies à partir de la continuité. Il semble implicite qu'il s'agit là de rappels, que les notions dont on parle sont déjà définies.

---

[17] On qualifie ici cette transposition d'intermédiaire entre la transposition "stricto sensu" et la transposition "sensu lato" pour une raison simple : la cohérence du cours avec les énoncés attendus du baccalauréat est une contrainte beaucoup plus forte pour les professeurs que le programme lui-même. En cas de non conformité, la "sanction" par la réussite ou l'échec des élèves est immédiate. On peut donc estimer qu'il y a une assez grande cohérence entre les exercices proposés en TS et les énoncés du bac.

La tendance est de ne plus parler de propriété locale, comme le dit le programme : *"la continuité en un point, considérée isolément, ne doit pas faire l'objet d'une étude systématique".* L'ouvrage qui pousse cette logique jusqu'au bout est le Dimathème, qui ne présente le calcul de limite que comme l'aboutissement de l'étude globale d'une fonction.

2. La "définition" des limites.

	Belin	Fractale	Dimathème	Terracher	Transmath
Définition des limites	Aucune.	Limite = continuité.	Aucune.	Définition à partir de l'action.	Une définition pour tous et une autre pour aller plus loin.

Parler de définition des limites est excessif puisque celle-ci n'est pas au programme. Mais introduire ou réintroduire une notation (le symbole " $\lim_{a\to+\infty}$ " apparaît 20 fois dans le programme de 1994) nécessite souvent de dire ce qu'elle recouvre, au moins par un exemple ou une périphrase. C'est cette présentation que nous relèverons ici pour chacun des manuels envisagés..

- **Belin** commence le cours par les limites sans aucune définition de l'objet, ni rappel de Première. On trouve d'emblée les théorèmes de comparaison et la limite d'une fonction composée.

- Sous le titre "définition", on trouve dans **Fractale** :

> *"* Il a été dit en Première que, si une fonction f, définie sur un intervalle I, admet une limite en un élément a de I, alors* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
>
> ** Définition : si une fonction f, définie sur un intervalle I, admet une limite en tout point de I, alors on dit que f est continue sur I.*
>
> ** Lorsqu'une fonction f est telle que* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$*, on dit que f est continue au point a.*
>
> **** Si f est continue sur I, alors la courbe représentant f est un "trait continu" (dessiné sans lever le crayon)."***

Il y a bien confusion entre limite et continuité, confusion conforme à la lettre du programme. On peut noter tout de même le caractère paradoxal qu'il y a à définir un objet, la continuité, à partir d'un objet, les limites, non défini.
On peut donc faire l'hypothèse que ce qui restera de ce paragraphe sera la phrase que nous avons mise en valeur : "si f est continue, alors la courbe représentant f est un trait continu" (on notera l'absence étrange de réciproque).

Pour illustrer l'exposé, Fractale met, en regard de ces définitions, sous le titre "Le saviez-vous ?", une citation de Cauchy :

> *"Lorsque, la fonction f(x) admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence f(x+i) - f(x) est toujours, entre ces limites, une quantité infiniment petite, on dit que f(x) est une fonction continue de la variable x entre les limites dont il s'agit."*

On peut supposer que cette citation n'aidera pas davantage les élèves que les définitions entremêlées des limites et de la continuité.

- **Dimathème** est le seul à ne pas suivre du tout le programme. Il traite d'abord la dérivation et, dans la foulée, les théorèmes sur "limites et ordre", "limite et composition des fonctions". Il n'y a dans ce cadre aucune définition suggérée.
Ce n'est que dans le chapitre suivant que la continuité est abordée.
Elle est abordée sous le même angle que dans Belin :

> *"Une fonction f, définie sur un intervalle I, est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si la fonction f a une limite en x_0. Cette limite est alors $f(x_0)$".*

- **Terracher** est prudent. Il indique en introduction :

> *"Sans nous attarder à donner une formulation mathématique à l'expression "**f(x) se rapproche de 2 lorsque x devient grand**", nous nous bornerons à mettre en place des techniques efficaces de calcul de limites (opérations, comparaison, composition de fonctions), qui seront exploitées dans plusieurs directions :*
> *- pour l'étude de branches infinies d'une courbe représentative ;*
> *- pour l'examen des questions de dérivation ;*
> *- pour le transfert à l'étude des suites".*

On peut certes admettre que la notion prend son sens à partir des situations où elle sera rencontrée. La formulation en terme de rapprochement n'est cependant pas neutre. Mais plus profondément, il y a un problème dans l'exposition des choses : au lieu de dire "sans nous attarder à donner une formulation mathématique de la situation $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$", c'est-à-dire de partir de la nécessité de donner un sens à un objet mathématique, l'auteur part de la nécessité de donner une formulation mathématique d'une définition en langage courant de cet objet. Cette distinction peut paraître artificielle, mais elle semble révélatrice de la difficulté des auteurs de manuels à manipuler des objets définis par leur seul nom.

- **Dimathème** s'ouvre sur le chapitre consacré aux limites. Premier thèorème, "limite d'une fonction composée". C'est l'occasion d'un commentaire illustratif :

> *"Nous admettrons ce théorème. Expliquons le néanmoins de manière intuitive, par exemple dans le cas où a, b et c sont tous réels.*
> ** Lorsque x tend vers a, les nombres $h(x) = X$ se rapprochent de b, puisque $\lim_{x\to a} h(x) = b$;*
> ** Mais lorsque les nombres $h(x) = X$ se rapprochent de b, les nombres $g(h(x))$ se rapprochent de c, puisque $\lim_{X\to b} g(X) = c$. D'où $\lim_{x\to a} g(h(x)) = c$".*

Le contenu en terme de "rapprochement" est clair.

Le chapitre se termine curieusement par une rubrique "post-bac" (comme la plupart des chapitres de cet ouvrage) :

> *"Définition précise d'une limite.*
> *f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle du type $[b, +\infty[$, λ est un réel. Par définition, " $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$" signifie que pour tout réel $a > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que si $x \geq A$, alors $|f(x) - \lambda| \leq a$".*

Une illustration est alors donnée avec la fonction $\frac{2}{x} + 1$.

On peut penser que la coexistence dans un livre de mathématique d'une "définition précise" et d'une "définition imprécise" n'éclaire pas nécessairement les choses. [18]

Ce tour des "définitions" données par les différents manuels révèle la difficulté de l'exercice que les auteurs de ces manuels devaient résoudre. Un seul ouvrage, Fractale, suit les indications du programme pour un résultat, on l'a vu, assez peu convaincant.

Il est clair que ce sont les activités proposées qui vont donner du sens à l'objet.

3. Les activités introductives proposées.

	Belin	Fractale	Dimathème	Terracher	Transmath
Activité introductive	Fonctions de référence ; asymptotes.	Limites et continuité.	Asymptotes obliques.	Techniques de calcul.	Asymptotes horizontales, verticales.

Le terme "activité" est un peu vague. On relèvera ici la première illustration de l'idée de limite rencontrée dans chaque manuel.

- Dans la rubrique "Activités", **Belin** propose deux exercices introductifs :

" Avec l'aide de la calculatrice, rappeler les limites des fonctions de référence* $x, x^2, \sqrt{x}, \frac{1}{x}$ *... lorsque x tend vers* $+\infty$

** Soit la fonction* $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$.

- Tracer sa représentation graphique ;
- Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ *;*
- Comment ce comportement se traduit-il graphiquement ?"

On va ici de l'observation au résultat, sans aucun recul sur celui-ci. Il y a un certain nombre d'implicites :

- comment trouver les limites d'une fonction "avec la calculatrice" ? Ce n'est dit nulle part. On imagine qu'il s'agira de prendre des valeurs de x de plus en plus grandes, de constater que les valeurs de la fonction sont de plus en plus grandes (ou petites) et d'en conclure la valeur des limites cherchées.
- comment tracer une représentation graphique avant l'étude d'une fonction ? S'agit-il de recopier ce que l'on observe sur un écran ? La détermination de la limite se fait-elle par lecture graphique ?

On imagine tous les comportements induits par ce type d'"activités".

- **Fractale** ne donne aucune activité, ni illustration préalable. On se reporte donc au premier exemple donné qui suit les définitions entremêlées de limites et continuité.

** Soit f la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $f(x) = \frac{1}{x}$.

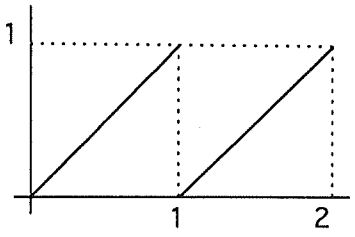
Pour tout a de $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$, *donc* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

---

[18] André Antibi, rédacteur de l'ouvrage, est l'auteur d'une thèse qui porte sur l'enseignement de la notion de limite [Antibi, 1988]. On examinera plus loin le point de vue qu'il y développe, et on observera la cohérence entre ses propositions théoriques et la réalisation pratique.

** La fonction dont la représentation graphique est donnée ci-contre est telle que*
$f(x)=x$ pour $x \in [0,1]$ et $f(x) = x-1$ pour $x \in]1,2]$
$\lim_{x \to 1,\, x<1} f(x) = 1$ et $\lim_{x \to 1,\, x>1} f(x) = 0$.
f n'admet donc pas de limite en 1.
Par suite, f n'est pas continue sur [0, 2].



Les notions de limites à gauche et à droite n'ont pas été introduites par ailleurs : on peut faire l'hypothèse d'une certaine difficulté de compréhension pour $\lim_{x \to 1,\, x>1} f(x) = 0$.

- **Dimathème** présente, sous la rubrique "Activités", un exercice de comparaison de fonctions.

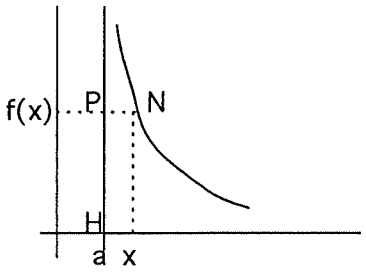
"On donne les fonction $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$ et $g(x) = x-4$.
** Comparer les valeurs de f et g pour de grandes valeurs de x (on suggère de faire un tableau avec des valeurs de x égales à 100, 1000, ...) ;*
** Montrer qu'il existe un réel a, tel que, pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$, $f(x) = g(x) + \frac{a}{x+1}$;*
** Quel est le signe de $f(x) - g(x)$ pour x appartenant à $[0, +\infty[$?*
** Que vaut $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x))$?*
** Pour que $|f(x)-g(x)|<10^{-3}$, suffit-il de prendre $x>10^3$? $x>10^4$?*
** Interprétation graphique des questions précédentes."*

On part là de l'observation du rapprochement régulier de deux fonctions. L'avant dernière question introduit cependant un début de contrôle numérique de la limite. Parmi tous les exemples relevés, cela fait figure d'exception.

- **Terracher** présente une première activité qui consiste à déterminer des limites de fonctions simples par utilisation des règles opératoires vues en classe de Première. Ni interprétation graphique, ni observation numérique.

- **Transmath**, sous l'étiquette "Pour prendre un bon départ", présente des asymptotes horizontales ou verticales. Des schémas de fonctions monotones illustrent ces configurations.

"Lorsque la fonction f a pour limite $+\infty$ en un point a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentant f, au voisinage de a.



Graphiquement, lorsque les valeurs de x se rapprochent de a, les distances HP tendent vers $+\infty$ et les distances PN vers 0."

On observe encore ici les notions de rapprochement et une certaine confusion des registres : *graphiquement, lorsque les valeurs de x se rapprochent de a...*

4. Les techniques suggérées.

- **Belin**, dans une rubrique intitulée "*Comment calculer des limites à l'infini ?*", répond :

" Appliquer les théorèmes des opérations sur les limites ;*
** Si on obtient une forme indéterminée :*
- pour un polynôme, mettre en facteur x^n ;
- pour une fonction rationnelle : factoriser le numérateur et le dénominateur par des puissances convenables de x, puis simplifier ;
- pour une fonction irrationnelle : multiplier et diviser par l'expression conjuguée."

Il ne s'agit là que de techniques opératoires (cf. I.a.2.ii.).

- Les seuls exercices commentés de **Fractale** utilisent les théorèmes opératoires et la dérivation.
- On trouve 3 exercices rédigés dans **Dimathème** à propos de limites. Tous font appel aux techniques opératoires.

- Dans une rubrique "point méthode", **Terracher** indique **trois techniques de référence** pour lever une indétermination :

" Factorisation du terme prépondérant ;*
** utilisation de l'expression conjuguée ;*
** utilisation de la définition du nombre dérivé."*

- Dans la rubrique "des réflexes à avoir", **Transmath** note :

" Pour lever une indétermination, pensez à mettre en facteur le terme dominant ;*
** pour lever d'autres indéterminations, pensez au changement de variable ;*
** pour lever des indéterminations en présence de radicaux, pensez à utiliser l'expression conjuguée ;*
** pour lever une indétermination $\frac{0}{0}$, pensez à utiliser la dérivation."*

On peut noter l'uniformité des manuels sur cette question des techniques : sont exclusivement évoquées les techniques opératoires.

5. Les exercices proposés.

On a repéré dans le tableau ci-après le nombre d'exercices sur les limites faisant intervenir les théorèmes et les techniques opératoires (en distinguant le théorème sur les polynômes, le thèorème sur les fonctions rationnelles et les exercices faisant intervenir des racines carrées, dont la résolution revient à "lever une indétermination" en utilisant la "quantité conjuguée"), la continuité, l'utilisation d'un calcul de dérivée, la composition des fonctions et la comparaison (les théorèmes d'encadrement dans leurs différentes versions).

Comme on le voit dans ce tableau, à l'inverse du point de vue du programme (qui ne signale les théorèmes opératoires qu'en annexe et privilégie la comparaison), l'utilisation des théorèmes d'encadrement intervient relativement peu.

Ce sont les techniques opératoires qui prennent la plus grande place.

	Belin	Fractale	Dimathème	Terracher	Transmath
Exercices "d'entraînement"	**Opérations 46** (Polyn. 10, Ration. 12, Racines 12) **Continuité 3 Dérivation 4 Composée 8 Comparaison : 0**	**Opérations 23** (Polyn. 6, Ration. 6, Racines 11) **Continuité 0 Dérivation 13 Composée 4 Comparaison : 5**	**Opérations 12** (Polyn. 1, Ration. 6, Racines 0) **Continuité 3 Dérivation 2 Composée 1 Comparaison : 0**	**Opérations 20** (Polyn. 4, Ration. 10, Racines 6) **Continuité 2 Dérivation 2 Composée 4 Comparaison : 5**	**Opérations 13** (Polyn. 3, Ration. 5, Racines 4) **Continuité 2 Dérivation 3 Composée 2 Comparaison : 2**

6. Le théorème des croissances comparées.

Nous évoquerons pour terminer ce chapitre le théorème des croissances comparées dont on a vu l'introduction dans les programmes à partir de 1982.

On a commenté jusqu'à présent les premiers chapitres des manuels de TS. Ceux-ci ne contiennent pas encore ce théorème puisque ce dernier suppose l'introduction préalable des fonction logarithme et exponentielle présentées en cours d'année. Tous les manuels présentent ce théorème en bonne place comme aboutissement des chapitres consacrés aux fonctions logarithmes, exponentielles et puissances.

Terracher (schéma ci-dessous) présente, pour illustrer ce théorème, sur un axe orienté les fonctions logarithmes, puissances et exponentielles :

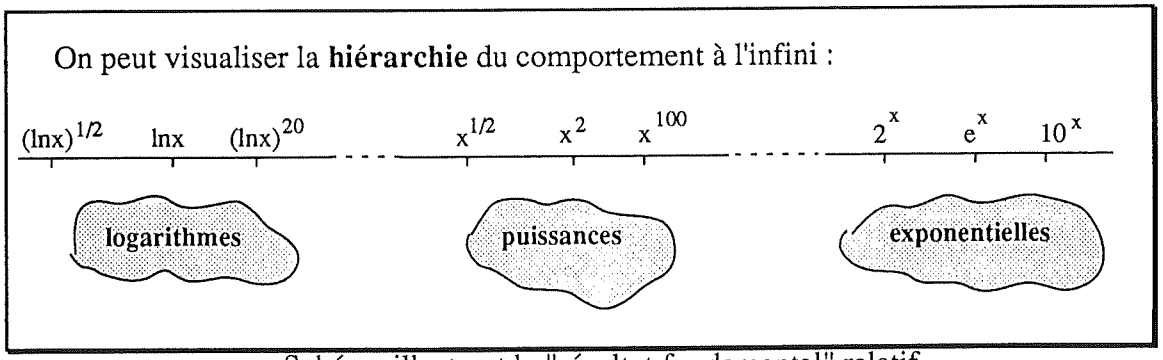


Schéma illustrant le "résultat fondamental" relatif à la "croissance comparée" dans Terracher de TS

Nous faisions l'hypothèse en conclusion de I.b.2. que ce théorème pouvait induire une confusion entre croissance et limite des fonctions, entre comportement global et comportement local. Le schéma ci-dessus peut accréditer aussi l'association entre la relation locale de domination ($\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$) et la relation globale de majoration $\ln x < x$ (même si l'auteur précise qu'il s'agit du comportement à l'infini, **la hiérarchie** suggérée peut avoir une portée plus globale).

On peut faire l'hypothèse qu'un tel théorème contribuera à induire des théorèmes-en acte (cf. 0.b.3.i.) erronés concernant la levée d'indéterminations dans le calcul de limite : il s'agirait alors de comparer les variations ou les valeurs relatives des fonctions en présence sur un intervalle donné.

Nous en reparlerons en II.a.2.v.

I.b.4.ii. Manuels scolaires : bilan de l'examen.

On peut retenir de l'examen des manuels plusieurs éléments importants.

1. On perçoit une grande gêne dans la présentation sans définition de la notion de limite. A la lecture des chapitres introductifs, les définitions entremêlées des limites et de la continuité apparaissent très artificielles.

2. En l'absence de définition formelle, ce sont des observations numériques ou graphiques qui donnent un contenu à la notion de limite.

Il est frappant de voir l'écart entre la complexité de certains théorèmes, toujours admis (comme le théorème sur la composition des limites) et le caractère sommaire des exemples choisis pour les illustrer.

Du point de vue graphique, des choix plus ou moins implicites sont faits associant l'existence d'une limite à **l'idée d'un rapprochement**. Ainsi toutes les illustrations (sauf deux dessins du Fractale) concernent-elles des fonctions monotones.

Pour l'introduction numérique de la notion de limite, on assiste au même phénomène : "on prend des x de plus en plus près de a et on constate que f(x) se rapproche de L". **On n'a repéré aucun travail d'approche numérique d'une fonction oscillante. Aucun ouvrage** (sauf l'activité introductive du Dimathème évoquée plus haut) **n'introduit un contrôle numérique de la limite**, préparant les constructions théoriques de l'objet (par exemple : pour quelle valeurs de x peut-on avoir f(x) plus grand que...). Ce type de question n'apparaît que de façon marginale, à la fin de certains problèmes.

Pour l'utilisation des outils de calcul, on note deux pôles parmi les auteurs de manuels :

- pour la majorité des auteurs, la calculatrice est évoquée au détour d'un exercice introductif comme outil d'investigation sommaire de rapprochement de la limite ;
- de l'autre côté (Terracher), on incite à se méfier d'une telle approche. On trouve ainsi l'exercice suivant (n°44 page 81) :

> Catastrophe !
>
> On pose $f(x) = \dfrac{(50+x^{20})^2 - 2500}{x^{20}}$.
>
> - à l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de $(50+x^{20})^2$, puis de f(x), pour x=0,6 ; 0,5 ; 0,4 ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1 ; 0,01.
> - En développant $(50+x^{20})^2$, simplifier l'expression de f(x), pour $x \neq 0$. Calculer alors la limite de f en 0.
> - Vaincre la tentation de se débarrasser de la calculatrice.

Il semble qu'il n'y ait pas de juste milieu entre une confiance aveugle dans la calculatrice, censée induire naturellement les limites et un discrédit total de l'outil. Ni dans un cas, ni dans l'autre, on incite à une utilisation raisonnée de l'outil.

Ce qui vient d'être dit des observations numériques ou graphiques doit être relativisé : la place de ses activités est extrêmement réduite, confinée dans les premiers chapitres présentant les notions. Mais on peut penser que la forme sous laquelle un objet est présenté aura une importance certaine pour le processus de conceptualisation.

3. Sur le plan des techniques de calcul, les techniques opératoires dominent très largement les exercices proposés.

On trouve en effet des batteries d'exercices de calcul de limites (dans tous les manuels sans exception) utilisant le plus souvent les opérations algébriques et la levée des indéterminations (par multiplication par la fameuse "quantité conjuguée").

A l'inverse de la lettre du programme qui privilégie les théorèmes de comparaison (cf I.b.2.), on constate une algébrisation du calcul de limites.

On peut faire sur cet enseignement des limites la même remarque que C. Azcarate à propos de l'enseignement des limites en Espagne :

> *"Les activités sont mécaniquement simples, les techniques requises sont rigides, sans lien entre elles, réduites au simple champ d'application du moment. Le seul environnement où les limites apparaissent est l'étude des fonctions, sous la seule forme algébrique."* [Azcarate et Espinoza, 1995]

4. Des théorèmes interviennent fréquemment, relatifs à la comparaison des fonctions de référence.

Il s'agit des théorèmes sur les fonctions polynômes ("elles se comportent comme leur terme de plus haut degré"), les théorèmes sur les fonctions rationnelles et **le théorème sur les croissances comparées** des fonctions logarithme, exponentielle et puissances.

Ce dernier théorème occupe une position intermédiaire :

- il lie l'existence des limites aux variations des fonctions. **Il se rattache ainsi à un point de vue cinématique** ;

- **il se rattache aussi à une algèbre des limites**, du type "la fonction la plus forte impose sa limite". Dimathème présente ainsi ce théorème :

> *"En $+\infty$ et en 0, la fonction puissance $x \to x^{\alpha}$, $\alpha > 0$ impose sa limite à ln".*

En conclusion de cette étude des manuels.

Le point de vue cinématique est présent :

- à travers l'évocation du théorème des croissances comparées ;

- à travers les observations graphiques et numériques de phénomènes de rapprochement.

Mais c'est le point de vue algébrique qui domine largement à travers les techniques opératoires utilisées.

I.b.4.iii. Hypothèses sur l'enseignement effectivement dispensé.

Nous avons constaté en I.b.4.ii. un écart entre le programme et sa mise en forme par les manuels. On pourrait se poser la question : s'il y a un écart entre le texte du programme et le texte des ouvrages scolaires, ne peut-on pas penser qu'il existe un écart de même nature entre le texte des manuels et le texte mathématique effectivement enseigné dans les classes ? Trois raisons incitent à penser que le texte des ouvrages scolaires est sans doute assez proche du savoir enseigné.

1. Une raison liée à des effets de coutume.

Le programme de 1994 n'est qu'une adaptation du programme de 1991. Les ouvrages que nous avons examinés sont donc des adaptations d'ouvrages précédemment publiés par chaque maison d'édition. Il y a entre le texte des manuels et le texte enseigné une double influence : les manuels, écrits par des équipes d'enseignants travaillant dans les classes, sont une sorte de mise en forme des mathématiques enseignées à un moment donné. Et la majorité des enseignants se guide sur la progression d'un manuel scolaire. Au moment où change un programme, cette adaptation ne se fait pas immédiatement. Des enseignants gardent des habitudes antérieures. **Après 4 ans de fonctionnement, on peut penser qu'il y a une certaine osmose entre manuels et enseignement dans les classes.**

2. Une raison liée à des effets de cohérence.

La classe de Terminale est prise entre deux contraintes : en amont les programmes interprétés par les manuels et en aval le baccalauréat. **La cohérence entre les interprétations du programme par tous les manuels (cf. I.b.4.ii.) et par les énoncés du baccalauréat (cf. I.b.3.) induit l'idée que, dans les classes, le texte du savoir dispensé n'échappe pas à cette orientation.**

3. Une raison liée à des effets de système.

M. Artigue, à propos de l'histoire des fonctions de référence, écrit :

> *"Au delà du champ de l'Analyse, cette histoire nous rappelle que toute réforme induite dans le système d'enseignement échappe à ses concepteurs pour mener une vie conditionnée par des lois et des contraintes que nous connaissons encore mal mais qui n'en existent pas moins pour autant"* [Artigue, 1993].

Les fonctions de référence ont ainsi pendant un temps envahi le terrain laissé libre par l'abandon de la formalisation. L'abandon des fonctions de référence a créé un vide. Il fallait un nouvel axe autour duquel puisse s'organiser l'enseignement des limites. Celui-ci ne pouvait pas être un enseignement construit autour d'observations numériques, graphiques et des outils de calcul : on a vu la résistance de l'institution scolaire à l'introduction des calculatrices (cf. 0.c.1.i.). Les techniques algébriques présentaient par contre plusieurs avantages : elles dispensent de définir l'objet manipulé et elles ont une sorte de "supériorité" (au sens de facilitation de l'adaptation didactique) sur les fonctions de référence : leur application, mécanique, dispense d'un travail d'approximation. Il est donc raisonnable d'imaginer qu'elles aient pu occuper le vide créé par les fonctions de référence.

On considèrera donc désormais l'hypothèse "le texte des manuels concernant le travail sur les limites correspond "en moyenne" à l'enseignement dispensé par les professeurs de mathématique dans les classes" comme une hypothèse raisonnable. Ce que nous avons décrit en I.b.4.i. et I.b.4.ii. serait ainsi une assez bonne approximation de la transposition didactique "sensu lato".

I.b.5 Définition des limites en amont et en aval de la TS

Nous ne ferons pas ici une étude exhaustive de l'introduction des limites dans les classes précédant et suivant la Terminale scientifique. On donnera juste quelques points de repère pour indiquer des éléments de continuité et de rupture entre les différents niveaux. Le fil conducteur sera la verbalisation de la définition de limite, seul élément comparatif possible. Les éléments d'observation seront des manuels de cours.

1. Une hypothèse : la verbalisation de la définition des limites n'est pas prise en charge de façon cohérente par l'institution.

Cette hypothèse découle de l'étude des programmes et des manuels de Terminale S. Nous avons vu que les limites n'étaient à aucun moment définies même si elles étaient des éléments essentiels de la définition d'autres notions (la continuité, la dérivabilité). Dans cette situation de vide, on peut imaginer que ce sont les observations numériques ou graphiques réalisées qui vont se charger de donner un sens à la notion de limite. La verbalisation est laissée à la charge de l'élève. On peut penser alors que ce qui se passe en Terminale est la manifestation locale d'une situation plus générale :

- un objet complexe (ici l'objet "limite") est introduit sous forme d'exemples, de cas particuliers. C'est la responsabilité de l'élève de repérer, à travers des situations différentes, les éléments de ressemblances qui permettent alors de définir l'objet complexe. L'élève construit, hors contrôle du maître, ses propres images et sa propre verbalisation du concept ;
- une fois introduit, après un temps de développement autonome, l'objet est délimité à partir d'une définition formelle qui dispense d'une verbalisation. Ce sera alors à l'élève d'organiser la cohabitation ou le conflit entre la verbalisation ancienne et la définition formelle nouvelle.

Notre étude ici étant limitée à quelques ouvrages, il n'est pas question pour nous de vérifier que cette hypothèse est fondée. Plus modestement nous donnerons quelques éclairages qui seront autant de "preuves pragmatiques" (cf. 0.b.2.iv.).

2. En Seconde et Première se forgent les premières images.

On utilisera ici les manuels de la collection Terracher (Hachette) de Seconde et Première S : ce sont les seuls qui présentent une verbalisation correcte des définitions. Mais nous verrons que cela ne constitue pas une garantie pour un apprentissage cohérent.

En Seconde, voici la première rencontre avec la notion de limite (il s'agit d'un chapitre de cours consacré aux fonctions usuelles) :

"La fonction carré : (le graphique de la fonction est inséré à côté de l'étude).

Propriétés
** La fonction est définie sur $\mathbb{R}$.*
** f est une fonction paire. En effet, on a $f(-x) = (-x^2) = x^2 = f(x)$. Ainsi (Oy) est axe de symétrie de Cf.*
** f est croissante sur $[0, +\infty[$; cela résulte du théorème de rangement des carrés.*
** La courbe représentant f est une parabole.*

Et les grandes valeurs de x ?

x	10^5	10^{10}	10^{20}	10^{25}	10^{100}
$f(x)$	10^{10}	10^{20}	10^{40}	10^{50}	10^{200}

On pressent que l'on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut : il suffit d'imposer à x d'être assez grand. ***Nous dirons que f(x) tend vers +∞ lorsque x tend vers +∞.***

On note un effort de clarté et de rigueur pour la verbalisation : *"on pressent que l'on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut : il suffit d'imposer à x d'être assez grand"*. Cet effort est d'ailleurs poursuivi pour l'étude des deux fonctions suivantes. Mais il n'y a pas correspondance entre la verbalisation de la définition et l'étude concrète de la fonction : en effet, on indique simplement que la fonction est croissante et le tableau de valeurs souligne que, quand x prend des valeurs de plus en plus grandes, f(x) se comporte de la même façon.

On peut supposer que l'élève mémorisera alors plutôt cette dernière formalisation qui est sans doute la plus "naturelle".

En Première S, le même phénomène, dans l'ouvrage de la même collection, apparaît.

On trouve en introduction :

"Ce chapitre initie à la notion de limite en vue d'étudier quelques exemples simples de branche infinie d'une courbe représentative et de faciliter l'examen des questions concernant la dérivation (...). Nous ne pouvons éviter, en préliminaires, certaines questions qui vont rapidement se poser. Faute de réponse (...) le contenu de ce chapitre risque d'apparaître étonnament étrange et artificiellement subtil. Nul ne sera surpris d'apprendre que ***"si x est grand, $\frac{1}{x}$ est très petit" ou que "si x se rapproche de 0, $3-x^2$ se rapproche de 3"****. On peut donc s'étonner de tout cet "arsenal" d'approches, de notations, de théorèmes...*

Disons simplement qu'une approche mathématique correcte (avec laquelle on peut travailler) de la phrase ***"f(x) se rapproche de 3 quand x se rapproche de 0"*** *:*

- devient indispensable dans certaines situations ;
- a été historiquement difficile et longue à obtenir (...);
- ne fait pas partie des objectifs de ce chapitre : nous nous contenterons d'une approche et de l'utilisation des théorèmes auquels cette approche conduit."

Après cette introduction, des définitions correctes sont données dans la partie cours :

"Soit une fonction définie sur un intervalle de la forme [a, +∞[.
Nous écrirons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ pour rendre compte du comportement suivant :
un réel étant arbitrairement choisi et ce, aussi grand que l'on veut, alors toutes les valeurs de la fonction dépassent ce réel, dès que x est assez grand."

L'auteur indique dans son introduction que le chapitre risque d'être *"étonnament étrange"* et *"artificiellement subtil"* pour un bénéfice assez réduit : *"une approche mathématique correcte ne fait pas partie des objectifs de ce chapitre"*.

En fait, on peut constater que l'approche mathématique des limites, dans ce chapitre, est formellement correcte. Mais elle n'est pas du tout associée aux situations qui pourraient lui donner du sens. Les seules fonctions rencontrées sont monotones, les rapprochement régulier entre les courbes et les asymptotes sont la règle. L'ensemble paraît bien alors *"étonnament étrange"* : on pourrait tout à fait se contenter, pour comprendre les exemples traités, des verbalisations données dans l'introduction. Ce sont d'ailleurs sans doute celles que les élèves retiendront, comme description cohérente des phénomènes rencontrés.

Quand une définition correcte des limites est donnée, elle ne correspond pas à des activités qui lui donneraient du sens. On peut supposer que le résultat est le même que dans les cas, les plus fréquents, où les seules "activités" introductives (basées sur des "rapprochements") donnent du sens.

3. A l'université, la question de la verbalisation est supposée dépassée.

On peut donner deux exemples opposés, entre lesquelles prennent peut-être place beaucoup de pratiques de professeurs de mathématiques de l'enseignement supérieur :

- J-L Sol [Sol, 1993], dans un ouvrage de mathématiques à destination des étudiants de Sciences Economiques, écrit :

> ***Limite en un point (approche intuitive)***
> *"Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, sauf, peut-être, au point x_0 de I ; si "quand x, tout en restant dans I, se rapproche de x_0, f(x) se rapproche du nombre L, on dit que l est la limite de f quand x tend vers x_0 et on note*
> $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$."

- E. Lehman [Lehman, 1984], dans un ouvrage de mathématiques pour les étudiants de Deug, note :

> *"Nous supposerons connue du lecteur la notion de limite. Les diverses définitions données dans l'enseignement secondaire seront tout à fait suffisantes pour nous. Le lecteur qui souhaiterait lire un exposé précis à ce sujet est prié de se reporter au chapitre 3 du thème 8"* (c'est à dire à la fin du livre).

A la fin de l'ouvrage, on trouve une définition formelle de la limite, sans "traduction" verbalisée.

Dans le premier cas, pour des étudiants non spécialistes, on donne une définition supposée simple, correspondant à une "approche intuitive".

Dans le deuxième cas, on suppose que l'introduction de la définition formelle règlera les problèmes de sens. Dans l'attente de cette définition, ce sont les images anciennes qui sont appellées à fonctionner.

Dans les deux cas, le problème d'une verbalisation correcte n'est pas pris en charge par l'enseignant.

Notre hypothèse de départ d'une non prise en charge par le système d'enseignement d'une verbalisation correcte de la définition des limites a été éclairée par quelques exemples de l'enseignement secondaire et supérieur.

Des études plus complètes seraient évidemment nécessaires sur ce point, sortant du cadre de notre travail.

Conclusion du chapitre I.b. consacré à la transposition didactique.

1. L'analyse des programmes depuis 1966 a mis en évidence un balancement majeur et un balancement mineur :

- le balancement majeur correspond au renforcement considérable du formalisme ("les mathématiques modernes") largement abandonné à partir de 1982 au profit des "activités de recherche" ;
- le balancement mineur correspond au développement, puis à l'abandon, des "fonctions de référence" comme méthode universelle de calcul des limites.

Le programme actuel propose désormais pour l'étude des limites la découverte de la notion à partir "d'exemples simples", d'observations numériques et graphiques et privilégie les techniques de comparaison.

2. L'analyse des manuels et celle des énoncés de baccalauréat donnent des résultats semblables qui ne sont pas en cohérence avec la lettre du programme officiel :
- une faible place est laissée à l'observation numérique ou graphique, une place encore plus faible accordée aux outils de calcul ;
- ce sont les techniques opératoires qui dominent largement dans la résolution des exercices proposés.

3. Mais ces deux transpositions "stricto sensu" et "lato sensu" coïncident sur un point : la définition précise des objets est laissée à la charge des élèves. La construction de la notion de limite pourra alors s'appuyer, dans le cadre des activités proposées en classe sur :

- les observations graphiques et numériques "d'exemples simples". C'est ici un point de vue cinématique qui dominera ;

- le développement de techniques opératoires, plus rarement d'encadrement. C'est ici un point de vue algébrique qui dominera ;

- l'utilisation du théorèmes sur les croissances comparées qui réalise une sorte de synthèse de différents points de vue (algébrique : on fait une opération entre des fonctions de "poids" différent ; cinématique : on établit les limites à partir des variations des fonctions).

Si l'on pondère ces différents points de vue par la fréquence des activités qui s'y rattachent, c'est le point de vue algébrique qui l'emporte largement.

De cette double transposition didactique, un seul point de vue n'émerge pas : le point de vue d'approximation.

I.c Limites et calculatrices: la transposition informatique.

Voir l'invisible, dire l'indicible.

Vous voilà munis d'instruments commodes,
qui vous servent
à vous faire réciproquement
de larges plaies.

La Bruyère, Les caractères.

Ce n'est pas seulement sous le contrôle direct (cours et exercices) ou indirect (problèmes, T.P.) du maître que l'élève découvre la notion de limite. On a vu surgir dans les programmes et instructions (I.b.2.) les calculatrices comme outils prescrits. Les différentes enquêtes menées dans l'institution scolaire indiquent clairement que cette prescription est loin d'être suivie d'effets (0.c.1.i.). C'est donc la plupart du temps sous leur propre contrôle que les élèves manipulent (et les mêmes enquêtes montrent que cette manipulation est intensive) leurs calculatrices. On va observer ici l'image des limites de fonctions que renvoient ces outils.

On précisera d'abord le vocabulaire que l'on utilisera à propos de "contraintes instrumentales" puis on étudiera la transposition informatique (cf. 0.b.5.iii.) à travers les deux types de calculatrices à disposition des élèves (les "graphiques" et les "symboliques"). On montrera ainsi l'importance des "textes iconiques" [Eco, 1976].

I.c.1 Inventaire des contraintes.

Dès qu'il y a action instrumentée, il y a des contraintes qui pèsent sur l'utilisateur (cf 0.b.5.iv).

N. Balacheff (cf. 0.b.5.iii.) parle de **contraintes liées à l'univers interne** et de **contraintes liées à l'interface**. P. Rabardel (cf. 0.b.5.iv.) parle de **contraintes de modalités d'existence**, de **contraintes de finalisation** et de **contraintes de préstructuration de l'action.**

Nous distinguerons trois types de contraintes :

1. Les contraintes internes.

Elles recouvrent les contraintes de modalités d'existence et les contraintes liées à l'univers interne. Ces contraintes recouvrent aussi celles liées à la nature de l'écran : les pixels (ce qui est "interne" ne coïncide pas nécessairement avec ce qui "ne se voit pas").

2. Les contraintes de commande.

C'est ce que P. Rabardel entend par contraintes de finalisation, liées aux opérations que l'outil autorise : y a-t-il une commande dédiée au calcul de limite par exemple ? Il s'agit d'une partie des contraintes liées à l'interface.

3. Les contraintes d'organisation.

L'existence d'une commande n'est pas tout : il faut aussi considérer l'accès à cette commande, comparer les différents accès... Il s'agit de l'organisation de l'interface qui contribue d'une certaine façon à *"préstructurer l'action de l'utilisateur"* (mais ce n'est pas le seul élément de préstructuration : l'existence même des commandes est aussi une préstructuration). Les contraintes de commande regroupent aussi une partie des contraintes liées à l'interface.

La détermination de ce triple réseau de contraintes (contraintes internes, de commande et d'organisation) nous permettra d'avoir accès à la transposition informatique (0.b.5.iii.).

Précisons que nous n'étudions pas ici les outils pour eux-mêmes, mais les outils dans leur **relation possible** à l'élève.

Cette précision est essentielle. P. Rabardel le précise :

"l'activité requise (par l'instrument) est un concept relatif, une tension entre deux pôles :
- les contraintes et ressources liées à l'artefact ;
- le sujet psychologique lui-même, acteur singulier et intentionnel" (cf. 0.b.5.iv.).

Nous examinerons dans partie II de cette thèse les gestes instrumentés des élèves et pourrons ainsi étudier l'effet de ces contraintes sur leur activité.

I.c.2 Artefacts et contraintes

Le fait de parler des outils avant de parler des élèves a cependant un sens clair : il permet de rejeter l'idée naïve qu'un outil est neutre, qu'il sera "ce que l'on en fera". Nous verrons, par la suite, à quel point cette idée est erronée.

Précisons de quel "artefact" il s'agit.

On parlera dans un premier temps (I.c.2.i.) des calculatrices graphiques possédées par une grande majorité d'élèves dans des classes de Première Scientifique et par la quasi-totalité des élèves dans les classes de Terminale Scientifique (les élèves acquièrent donc ces outils au moment même où ils découvrent le calcul infinitésimal).

Dans un deuxième temps (I.c.2.ii.) on parlera des calculatrices graphiques et "symboliques", c'est-à-dire dotées d'un système de mathématiques symboliques (pour la définition de cette expression cf. [Canet 1994]). Il s'agira en fait exclusivement des calculatrices TI-92 de Texas Instruments qui sont les seules pour le moment de ce type sur le marché. Ces calculatrices, du fait de leur prix, ne sont pas encore très répandues dans les classes ; on peut penser cependant que, comme cela a été le cas pour les calculatrices graphiques, la situation sur ce point évoluera assez vite.

I.c.2.i Voyage à l'intérieur des calculatrices graphiques.

Il n'est pas possible ici de décrire de façon exhaustive le fonctionnement d'une calculatrice graphique. Des informations utiles sur "l'intimité" de ces machines, en particulier du point de vue graphique et du point de vue de la représentation des nombres sont données dans [Bernard et alii 1995a]. **Nous nous intéresserons ici aux contraintes des calculatrices graphiques relatives aux limites de fonction** (sur ce point, cf. [Kuntz, 1993] et [Trouche, 1996 a]). Pour faire le tour de ces contraintes, on s'appuiera sur les articles cités, sur la notice du constructeur et sur la connaissance de ce type de calculatrice résultant de son utilisation régulière personnelle et en situation de classe.

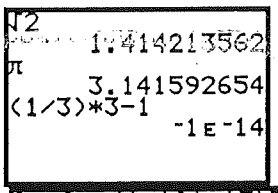
1. Les contraintes internes

Il est connu que toute calculatrice est limitée par ses capacités de mémoire. Il existe pour elles un plus grand nombre et un plus petit nombre (en valeur absolue). De plus, tout nombre a un successeur. "Mieux" même, l'écart entre deux nombres successifs représenté par la calculatrice n'est pas constant [Bernard et alii 1995a]. En fait, les nombres manipulés par la calculatrice ne sont qu'une "petite" partie des décimaux. Les nombres réels, sur lesquels les élèves travaillent quand ils étudient des limites, ne sont pas "à la portée" des calculatrices. A cette limitation dans la représentation des nombres correspond une limitation de l'écran : ensemble fini de points (les pixels) que la machine éclaire, ou non. **Les conséquences de cette structure interne sont multiples.**

Il y a confusion entre un nombre et une valeur approchée de ce nombre [19] :

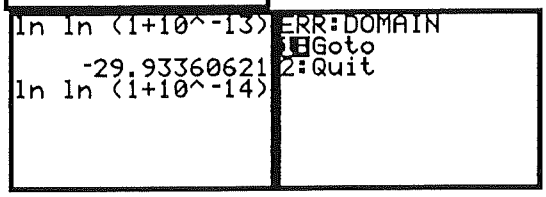
* Il y a identification entre $\sqrt{2}$ et une valeur approchée. De même pour π.

$3.\frac{1}{3} - 1$ n'est plus égal à fait 0.



*La calculatrice veut bien donner une valeur approchée de $\ln\ln(1+10^{-13})$.

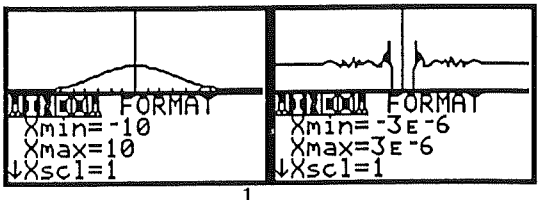
Par contre, comme elle ne dispose que de 14 chiffres significatifs, elle ne connaît aucun nombre entre 1 et $1+10^{-13}$.



Elle identifie donc 1 et $1+10^{-14}$. Et ainsi refuse de calculer le logarithme de ce nombre, en annonçant une "erreur domaine".

Certaines "surprises" au niveau graphique sont les conséquences des problèmes de calcul interne signalés :

Ci-contre, la représentation graphique de la fonction $\frac{x-\sin x}{x^3}$ avec Ymin=0 et Ymax=0,5 (cf. sur ce point 0.c.1.iii.).



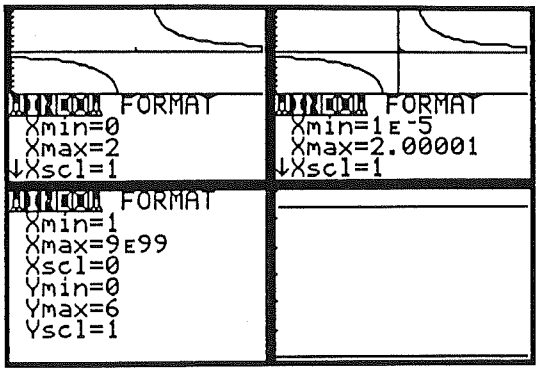
Alors que l'on sait que la limite de cette fonction en 0 est $\frac{1}{6}$, on constate que l'écran donne bien une telle indication... à condition de ne pas trop se rapprocher de 0 !

---

[19] Les copies d'écran insérées dans ce chapitre I.c.2.i. sont issues d'une calculatrice TI-82 de Texas Instruments. Les phénomènes décrits sont de même nature sur d'autres calculatrices graphiques.

Certaines surprises graphiques enfin ne découlent pas de problèmes calculatoires, mais uniquement de problèmes de représentations sur l'écran :

Ci-contre, la représentation graphique de la fonction $\frac{1}{x-1}$ (Ymin= -7 et Ymax=7). Un déplacement de 10^{-5} "à droite" fait apparaître une "asymptote" verticale.

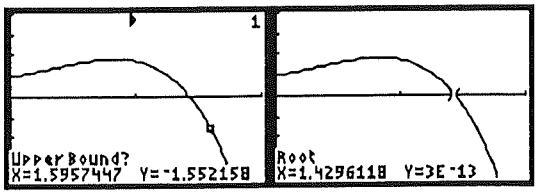


Ci-contre la représentation graphique de la fonction lnlnx, qui est strictement croissante et a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (ce qui ne se "voit" pas clairement, alors qu'on a choisi le plus grand intervalle de variation possible pour x)

On peut noter d'ailleurs, à propos du graphique, l'insuffisance du vocabulaire utilisé. On distingue valeur exacte et valeur approchée d'un nombre. Les utilisateurs du logiciel de géométrie Cabri distinguent une figure et un "Cabri-dessin", représentation informatique de cette figure [Laborde, 1994]. **Il faudrait distinguer ici fonction, représentation graphique d'une fonction sur un intervalle donné et "TI-82-représentation graphique d'une fonction sur un intervalle donné"**. La clarté se paie parfois d'une certaine lourdeur [20]. Mais elle est indispensable à un apprentissage dans de bonnes conditions : la confusion pratiquée couramment entre représentation et représentation-machine par les élèves a des conséquences qu'on a déjà évoquées.

A propos des problèmes langagiers, on peut aussi évoquer l'intervention du mot "limite" dans le fonctionnement même de la machine. Si on cherche dans l'index du mode d'emploi de la TI-82, on découvre bien le mot "limite" et même les expressions "limite inférieure" et "limite supérieure". En fait ces expressions sont les traductions de "Lower bound" et "Upper bound" (c'est à dire "borne inférieure" et "borne supérieure"), qui interviennent par exemple dans la localisation des racines d'une équation [21].

Ci-contre la représentation graphique de $e^x - x^4$ et la recherche de la valeur approchée d'une solution, après une localisation grossière de celle-ci, via "Lower bound" et "Upper bound".



On peut cependant supposer que cette intervention intempestive du mot "limite" n'aura pas grande conséquence pour les élèves, vu le rapport assez lâche qu'ils entretiennent avec le mode d'emploi de la calculatrice [Trouche, 1992].

2. Les contraintes de commande :

Il s'agit là, rappelons le, des objets sur lesquels la machine permet d'agir c'est à dire des transformations qu'elle autorise. **Cette étude nous permettra d'émettre des hypothèses à propos des schèmes d'action instrumentée (cf. 0.b.5.iv.) relatifs au calcul de limite de fonction.**

Il faut d'abord noter qu'il n'y a pas de commande spécifique pour ce type de calcul. Cette remarque ne règle pas pour autant le problème pour deux raisons au moins.

---

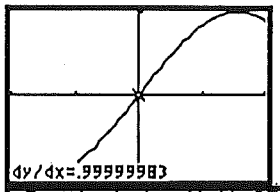
[20] D'ailleurs, par souci d'économie, on omettra assez souvent le mot "représentation-machine" dans ce qui suit, supposant que, pour le lecteur averti, il n'y aura pas d'ambiguité.

[21] D'Alembert utilisait aussi le mot "limite" pour désigner les bornes d'un intervalle [Cornu, 1981]. Curieux retour des choses.

i) La machine prend en main des tâches particulières relatives au calcul infinitésimal pour le calcul de dérivée (sur ce point, voir [Bernard et alii, 1995b]).

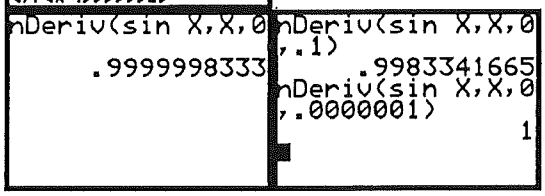
Voyons ce fonctionnement sur un exemple (dérivée de la fonction sinus en 0).

La question peut être traitée dans le registre graphique : la calculatrice annonce que le nombre dérivé cherché est égal à 0, 999 999 83.



Dans le registre numérique, on dispose de deux possibilités :

- soit le calcul automatique ci-contre à droite (la machine met alors en oeuvre des algorithmes de calcul approché) ;



- soit en calibrant soi-même la qualité de l'approximation (ci-dessus à droite, on a choisi un "pas" de 0,1 puis de 0,0000001 qui donne le résultat "légitime".

Il y a, dans tous les cas de figures, identification pour le nombre dérivé entre valeur exacte et valeur approchée. De plus, c'est le rapprochement de la variable qui "tire" le raprochement de la fonction. Un point de vue cinématique s'affirme (cf. 1.a.1.iii).

ii) Des conduites de substitutions du même type que les calculs approchés de nombre dérivé peuvent pallier l'absence de commande pour le calcul de limite.

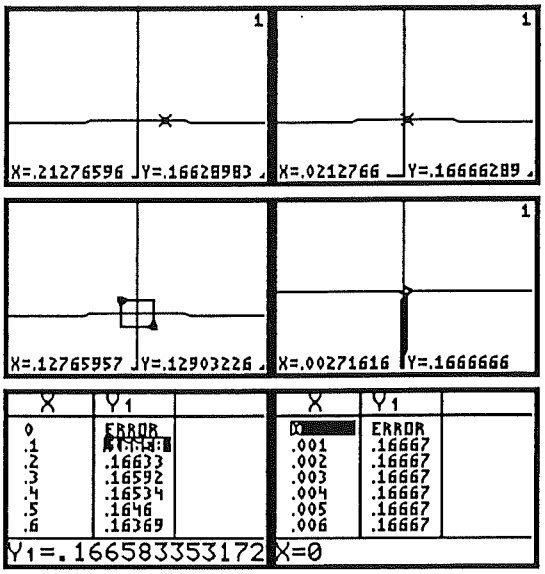
Revenons à l'étude de $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$.

Si l'on veut avoir une idée de l'existence et de la valeur de cette limite, on peut :

-considérer la représentation graphique de la fonction ; on choisit une fenêtre "adaptée" puis on déplace alors (commande "Trace") un point sur la courbe, en se "rapprochant" de 0 et on observe l'évolution de f(x).

On peut aussi, à partir de l'application graphique, procéder à un "Zoom". Plusieurs commandes sont alors possibles (ci-contre, la commande "Box" qui permet de définir le cadrage du graphique souhaité).

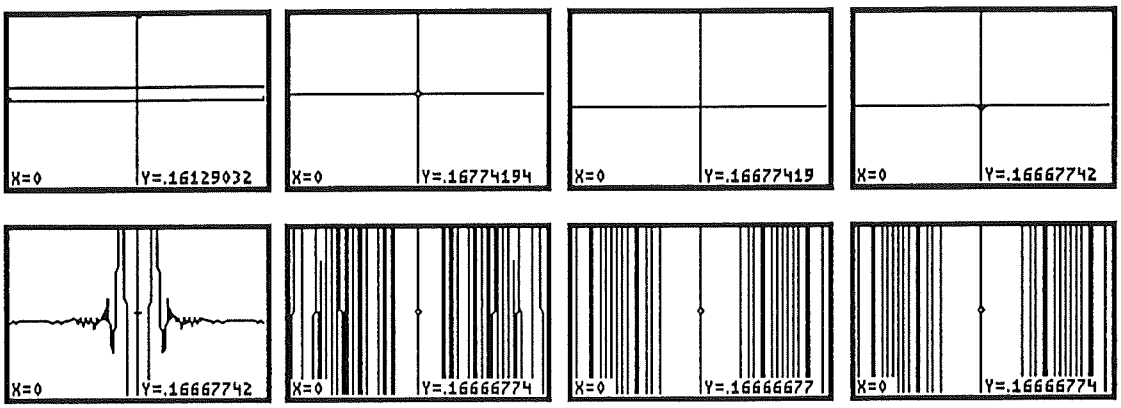
- considérer un tableau de valeurs : pour un pas de x de plus en plus fin, on observe alors l'évolution de f(x) (ci-contre, on a choisi un pas de 0,1 puis de 0,001).



On peut faire l'hypothèse qu'apparaitront, malgré l'absence de commande, des schèmes d'action instrumentée (cf. 0.b.5.iv.) relatifs à l'étude des limites à partir de l'utilisation de l'application graphique ou de l'application "tableau de valeurs". Cependant ces schèmes pourraient être mis en oeuvre suivant des formes différentes. Par exemple, pour l'application graphique, on peut choisir un "petit" nombre ou un "grand" nombre de fenêtres successives, on peut réfléchir un "petit" moment ou un "grand" moment sur chacune d'entre elles, on peut utiliser la commande "zoom" ou modifier la fenêtre par réglage du "Range".

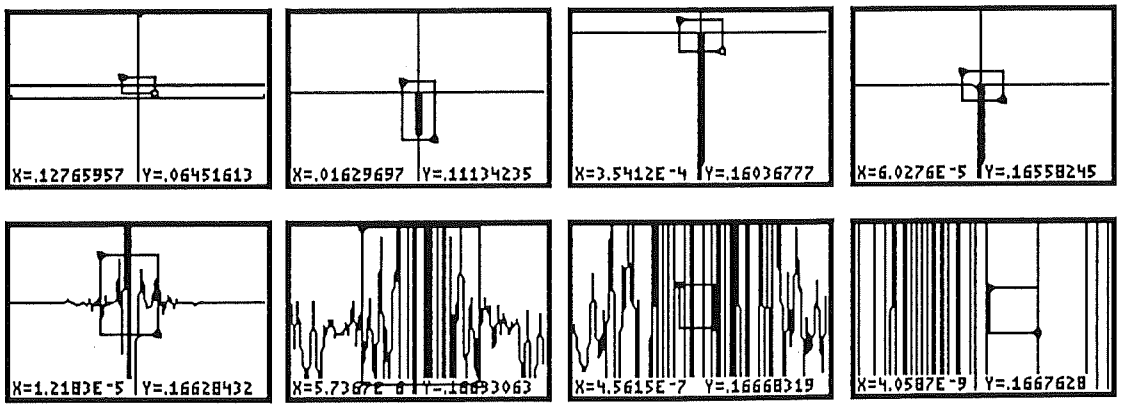
Revenons à l'étude de $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$. **On peut imaginer trois conduites possibles dans le cadre de l'application graphique.**

Première possibilité : actionner plusieurs fois la commande "Zoom in". On obtient les écrans ci-dessous (on a pris un facteur d'agrandissement de 10 sur les abscisses et les ordonnées ; on obtiendrait des résultats différents si les facteurs d'agrandissements n'étaient pas les mêmes).

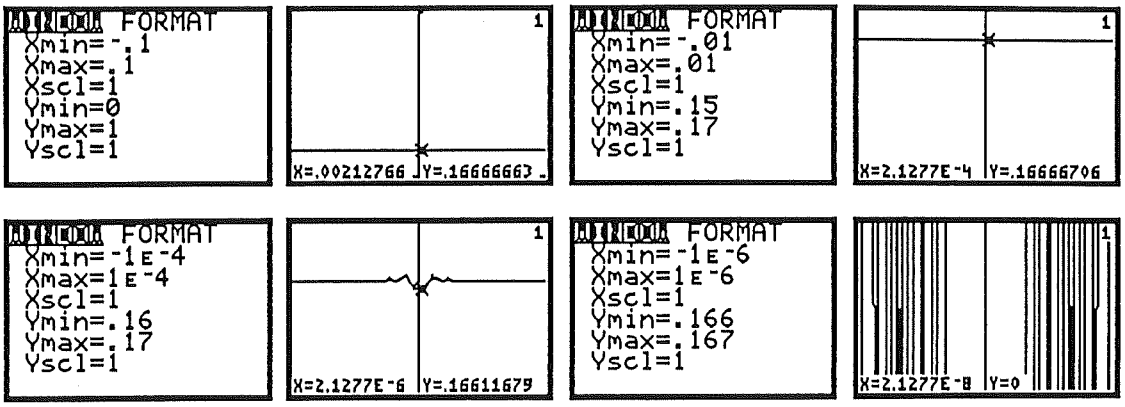


On peut remarquer que seul le choix du centre de l'image agrandie appartient à l'utilisateur. L'agrandissement est ensuite opéré automatiquement par la machine. L'utilisateur ne contrôle plus le cadrage de l'image. Le seul point de repère est le "pointeur" du zoom qui n'est pas sur un point de la courbe (puisque 0 n'a pas d'image).

Deuxième possibilité : l'utilisation de "zoom box": Cela revient à délimiter la zone que l'on veut voir agrandie donc à décider quelle est la zone "problématique". Il faut alors réaliser deux choix (qui délimitent deux coins opposés du rectangle). On peut (théoriquement) repérer ainsi les coordonnées de ces deux points et connaître ainsi le "Range" correspondant à la nouvelle fenêtre (voir ci-dessous l'étude réalisée en utilisant cette commande).



Troisième possibilité : on peut régler la fenêtre par retour au "Range", ce qui suppose un effort de mémorisation, de petits calculs pour faire les bons choix, un aller-retour entre registres graphique et numérique. On peut à chaque fois utiliser, ou ne pas utiliser la commande Trace pour situer un point sur la courbe.



Il y a aussi toutes les possibilités reposant sur des combinaisons de commandes (Zoom, Trace, Range...) ou sur des combinaisons d'applications (considérer la courbe et un tableau de valeurs [22]. La même application graphique peut être utilisée de façons différentes. Analyser un schème d'action instrumentée nécessitera d'en préciser le plus possible les différents gestes.

3. Les contraintes d'organisation.

Nous en distinguerons trois.

i) La variable "tire" la fonction.

On commence par fixer la variable et on obtient la valeur correspondante de la fonction. C'est toujours dans ce sens que les choses fonctionnent pour la calculatrice :

- quand on fixe la "fenêtre" ("Range" ou "Window"), on fixe d'abord "l'intervalle des x", puis "l'intervalle des y" (ce n'est pas obligatoire mais c'est dans cet ordre que les gestes se présentent) ;
- pour le tableau de valeurs, on choisit le pas pour les x (il est impossible de choisir le pas sur les y) ;
- pour le déplacement sur la courbe, on se déplace en agissant sur les abscisses (on passe d'une colonne de pixels à la colonne suivante -et non pas d'une ligne à l'autre).

Il ne s'agit ainsi pas de stratégies que l'on prête à l'élève, mais d'un fonctionnement induit par la structure même de l'outil.

ii) On voit avant de calculer.

Sur la TI-82, les touches du bandeau juste sous l'écran sont les touches graphiques : Y= (Fichier de fonctions), Window, Zoom, Trace, Graph. Les touches numériques (réglage du pas du tableau de valeurs et le tableau de valeurs lui-même) sont en retrait et ne peuvent être atteintes qu'à partir d'une combinaison de touches. Ainsi, le plus direct, pour avoir une information assez large sur la fonction est de passer d'abord par une étape d'observation graphique. Ce n'est pas pour rien que ces calculatrices sont appelées par tous désormais "calculatrices graphiques" et non plus "calculatrices numériques et graphiques" ("calculatrices graphiques programmables").

Ce "voir avant de calculer" est d'autant plus fort comme préstructuration de l'action qu'il s'inscrit dans une évolution sociale (0.b.1.ii.) qui prête à l'image des vertus de compréhension et au delà de présentation des objets (c'est à dire plus que de simple représentation).

---

[22] Toutes les calculatrices graphiques ne disposent pas d'un tableau de valeurs préprogrammé. En cas d'absence de cette application, on peut toujours programmer soi-même ce type de tableau mais le coût (en temps) et les capacités requises ne sont pas les mêmes que lorsque le tableau est déjà là.

iii) On étudie des comportements globaux et non pas locaux.

Nous avons évoqué en I.a.2.ii. le caractère essentiellement local des études de limite. On vient de voir que, s'agissant de fonction, une calculatrice graphique ne donnera que des renseignements (et encore très partiels) sur un intervalle choisi à l'avance. C'est à dire qu'elle s'inscrit bien dans une perspective d'étude de comportements globaux.

Organisation interne qui fait que c'est la variable qui tire toujours la fonction, mise en avant du cadre graphique plutôt que numérique, étude exclusive des comportements globaux : ces trois contraintes d'organisation ont un effet de cohérence très fort.

Calculatrices graphiques.
De l'examen des contraintes
à la suggestion d'un point de vue sur les limites.

Pour "observer" $\lim_{x \to a} f(x) = L$, différentes conduites sont possibles (plutôt dans l'application graphique mais aussi dans l'application numérique). L'objet que donne à voir, ou à considérer, une calculatrice graphique à propos de limite de fonction est assez loin de l'objet mathématique :

- quand la variable se rapproche par saut ("mais pas trop près") de a, f(x) est censé se rapprocher de L ;

- la calculatrice confondant valeur exacte et valeur approchée, la limite apparaît comme un "arrondi", l'aboutissement ultime d'un phénomène régulier.

Cette transposition instrumentale accouche ainsi d'une sorte de "monstre". Les manuels de Terminale abordaient, à propos de limites, ces questions de "rapprochement" avec beaucoup de discrétion, préférant se réfugier dans une algèbre des limites assez rassurante. L'étude d'une limite dans "un environnement calculatrice" semble être en cohérence forte avec un point de vue cinématique.

I.c.2.ii Voyage à l'intérieur des calculatrices symboliques (TI-92).

Le travail d'inventaire des contraintes liées à l'utilisation des TI-92 est d'une certaine façon plus simple (il y a une touche qui permet de déterminer les limites des fonctions) et plus complexe : il s'agit de gérer les interactions entre des applications différentes, entre calcul exact et calcul approché. On aura donc ici une approche prudente, s'appuyant sur des travaux récents ([Canet et alii, 1996], [Trouche, 1996a], [Trouche, 1996b] .

1. Les contraintes internes :

Nouveauté essentielle par rapport aux calculatrices graphiques, la TI-92 a trois modes de calcul :

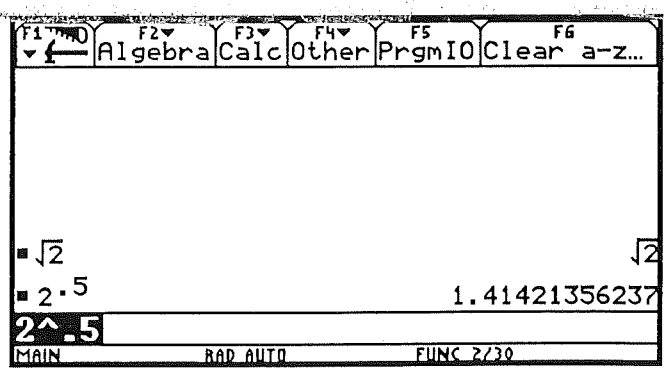
- **le mode calcul approché**, pour lequel on retrouve les mêmes contraintes que les calculatrices graphiques "ordinaires" ; l'application graphique fonctionne aussi sur ce mode [23];
- **le mode calcul exact** ;
- **le mode "automatique"** pour lequel le logiciel choisit la forme d'écriture qui lui semble "la meilleure".

Pour autant, la distinction exact/approché n'est pas assurée pour autant et ce pour plusieurs raisons :

i) Le mode "automatique" assure une sorte de "passerelle" entre le mode exact et le mode approché :

Suivant la forme de la question, on peut avoir des réponses différentes : ainsi $\sqrt{2}$ et $2^{0,5}$ sont traités différemment.

Une même entrée (mathématique), un même mode, deux sorties différentes...



N.B. Pour comprendre le contenu des écrans de la TI-92 que l'on a insérés ici, il suffit de considérer que l'écran est partagé en quatre secteurs :
- une ligne étroite, en bas de l'écran : la ligne d'état. Il y est indiqué (premier écran ci-dessus) que l'on est dans l'application principale ("Main"), celle qui gère les calculs exacts et approchés ; que la calculatrice est réglée en radian et en mode "auto".
- une ligne encadrée par deux lignes horizontales : la ligne d'entrée. Elle permet de lire sous quelle forme ont été posées les questions au logiciel ;
- une espace qui occupe la plus grande partie de l'écran, avec à gauche les questions posées (et reécrites par le logiciel sous forme mathématique "standard") et à droite les réponses ;
- un bandeau supérieur où s'affichent les différents "menus" disponibles.

---

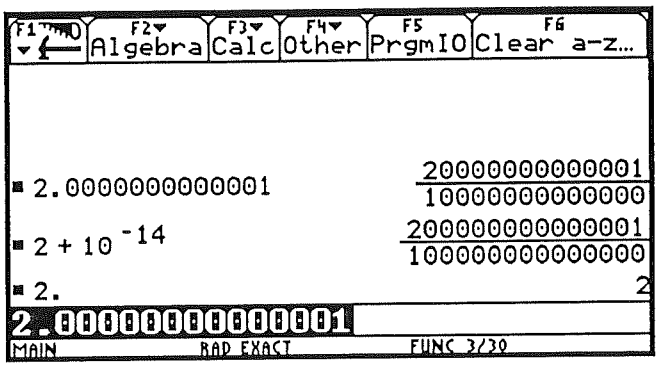
[23] L'application graphique de la TI-92 est accessible par les mêmes touches et avec la même syntaxe que les calculatrices graphiques TI-81 ou TI-82 du même constructeur. Ce qui permet, pour les élèves passant d'un outil à l'autre, une transition douce (en ce qui concerne l'application graphique).

ii) Le mode exact lui-même ne prémunit pas contre certaines surprises [24]:

Le mode exact ne peut gérer que 14 chiffres significatifs. Ainsi comme on le voit sur l'écran ci-dessous, la machine transforme 2, 000 000 000 000 1 en $\frac{20000000000001}{10000000000000}$, ce qui est bien normal. Par contre, si on ajoute un zéro "intermédiaire" de plus (dernière entrée), la machine transforme 2, 000 000 000 000 01 en 2 alors qu'on est en mode exact.

Par contre, la machine analyse correctement $2+10^{-14}$.

Là encore, alors qu'on est en mode exact, deux nombres égaux entrés dans la calculatrice **en mode exact** sont traités comme deux nombres différents.

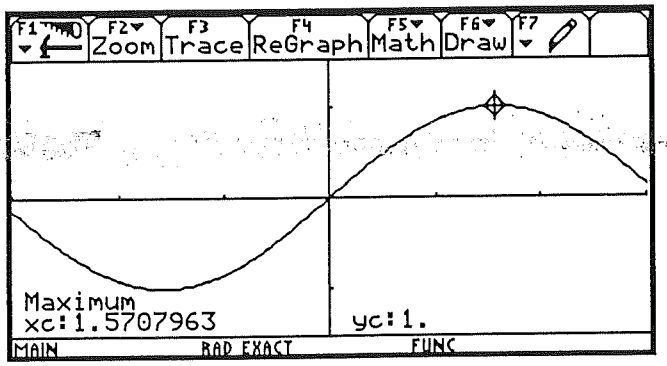


iii) La confusion est entretenue sur le mode de calcul utilisé par la TI-92 dans l'application graphique.

Si l'on travaille dans l'application initiale en mode exact, alors ce mode reste affiché dans la ligne d'état quand on passe dans l'application graphique (alors que le mode de calcul dans l'application graphique est toujours approché).

On voit ci-contre que la fonction sinus, sur l'intervalle [-3, 3], admet un maximum égal à 1, ce qui n'est pas surprenant, mais pour x = 1,5707963 exactement, ce qui est un peu plus surprenant...

Cette confusion est particulièrement grave, s'agissant de l'application graphique, dont on a déjà évoqué l'influence auprès des élèves.

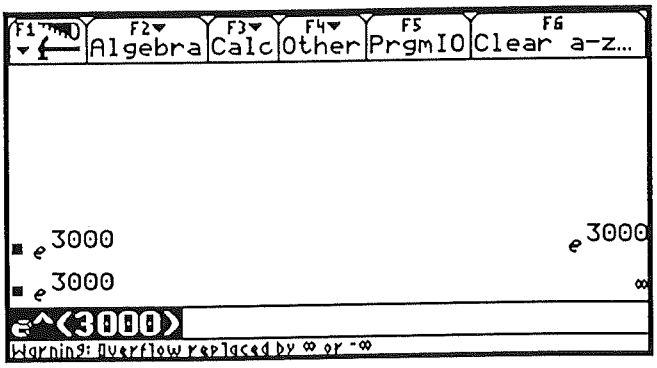


iv) De la même façon qu'il peut y avoir confusion entre un nombre et une de ses valeurs approchées, il peut y avoir confusion entre l'infini et un "grand nombre".

En mode exact, e^{3000} est égal à lui-même.

En mode approché, on trouve, pour la même expression, ∞.

La calculatrice évalue ici ce qui dépasse ses capacités comme relevant de l'infini (cf. ligne d'état en bas d'écran).



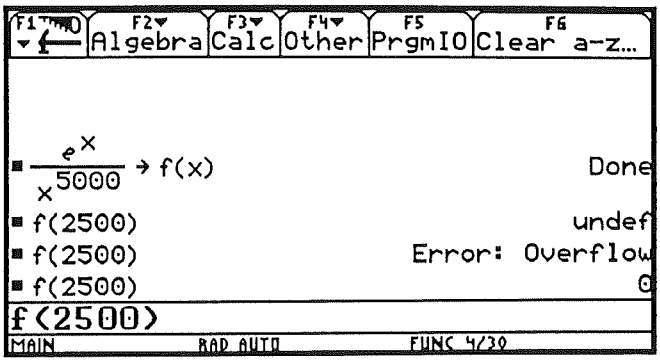
---

[24] Il faut bien sûr distinguer :
- ce qui est contrainte intrinsèque liée à la transposition informatique (cf. 0.b.5.iii.) (un nombre fini de pixels pour l'écran, une limitation de la mémoire) ;
- et les choix du constructeur : les problèmes repérés en c, d, et e relèvent du concepteur du logiciel. Une fois ces choix faits, les contraintes qui en résultent sont bien internes à l'outil, incorporées dans ses mécanismes de calcul ou de représentation, inaccessibles à l'utilisateur .

v) Il peut y avoir aussi confusion entre "dépassement de capacité" et "non définition" d'un objet :

On définit une fonction f, rapport entre la fonction exponentielle et une fonction puissance.

Pour f(2500), la calculatrice donne "Overflow", c'est à dire dépassement de capacité, en mode exact ; 0, en mode "automatique" ; "undef", c'est à dire non défini, en mode approché.



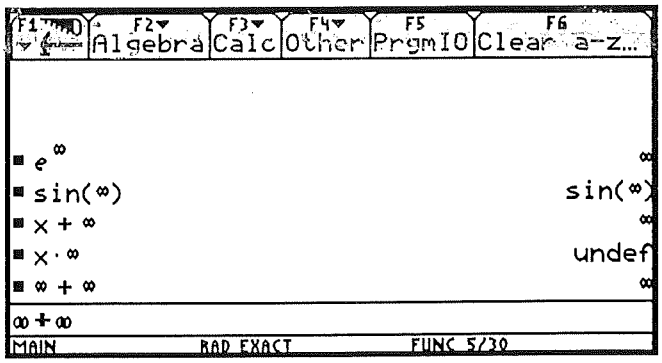
Le problème est ici que la machine ne garde pas sur l'écran la mémoire des différents mode de calcul (exact, automatique, approché) successifs. **Il y a donc la tentation pour l'utilisateur de considérer comme équivalentes les différentes réponses (dans des contextes différents) à la même question, par la même machine, sur le même écran.**

Deuxième nouveauté essentielle, liée évidemment au calcul exact : la TI-92 fait du "calcul formel", c'est à dire manipule des expressions (π, $\sqrt{2}$, ou ... ∞).

Il y a en effet sur le clavier une touche ∞. L'infini peut être traité comme un nombre quasi-ordinaire avec des tables d'opérations singulières :

Cela permet de mettre en place une algèbre des limites assez curieuse, comme on le voit ci-contre...

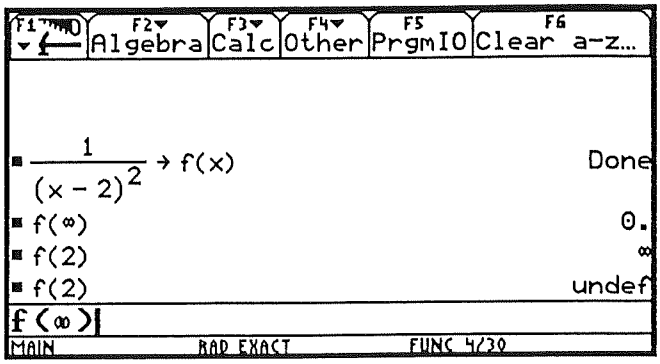
On peut penser que cela va dans le sens d'un point de vue algébrique sur l'infini et, au delà, sur les limites.



On peut aussi profiter de l'algèbre mise en évidence ci-dessus pour remplacer les calculs de limite par l'évaluation de la fonction au point donné. Ainsi, pour $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ au lieu de calculer les limites, on peut évaluer directement $f(\infty)$ et $f(2)$:

On obtient bien les résultats attendus.

On note que f(2) donne ∞ en valeur exacte et undef. en valeur approchée.



On le voit, les rapports entre calcul exact, calcul approché, fini et infini, ne sont pas réglés sur une TI-92 par la distinction "technique" entre calcul exact et approché, nombre fini et infini.

2. Contraintes de commandes

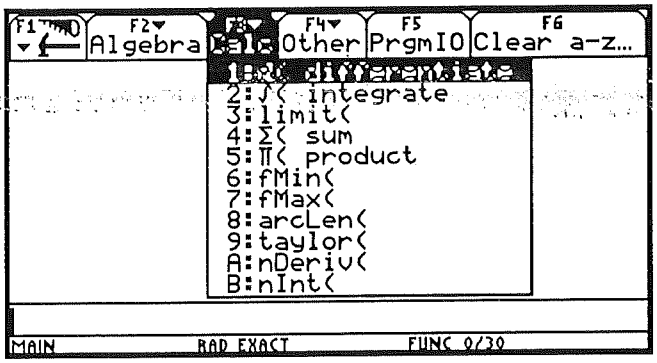
i) La commande spécifique de calcul de limite.

A la différence des calculatrices graphiques, la TI-92 dispose d'une commande spécifique pour les calculs de limite. Dans le menu "calcul" de l'application initiale, elle repose pour le calcul de $\lim_{x \to a} f(x)$ sur la syntaxe limit(f(x), x, a).
L'existence de cette commande peut induire l'idée d'une utilisation unique et simple de l'outil pour le calcul de limite. Ni l'unicité ni la simplicité ne sont pourtant évidentes.

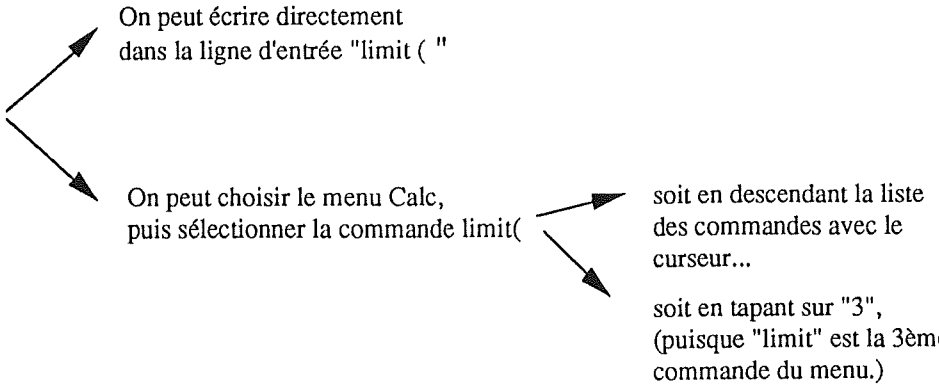
- **L'unicité d'abord** : rien n'interdit pour rechercher une limite de passer encore par l'application graphique (ce qui serait la marque de l'enracinement de schèmes d'action instrumentée antérieurs) ou de combiner recherche graphique et action sur la commande spécifique. Même dans le cadre du recours à la commande spécifique, plusieurs choix sont possibles.

La commande "limit" apparaît en troisième position dans le menu calcul de l'application initiale. Mais on n'est pas obligé de passer par là pour l'appeler.

On a en fait un arbre des conduites possibles, comme on peut le voir ci-dessous :



- on a d'abord plusieurs possibilités pour sélectionner la commande "limit"



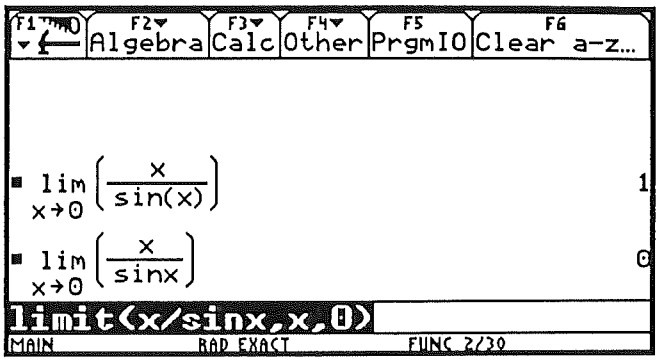
- on a ensuite deux possibilités pour "entrer" la fonction étudiée (soit en extension, soit en la rappelant par une étiquette) ;
- enfin, on peut lancer le calcul en mode exact, en mode approché ou en mode automatique.

Cela ne signifie pas que, pour chaque calcul de limite, l'utilisateur se trouvera devant un arbre à 18 ramifications. Il est en effet probable que (pour des raisons liées à l'économie de résolution) l'instrumentation débouchera sur un schème reposant sur un chemin donné dans l'arbre des possibles. Mais, avant qu'il y ait stabilisation de la conduite, il faudra qu'il y ait mémorisation d'un itinéraire. Et les choix opérés donneront des renseignements sans doute utiles sur les comportements généraux des élèves.

- La simplicité ne la commande ne doit pas non plus faire illusion.

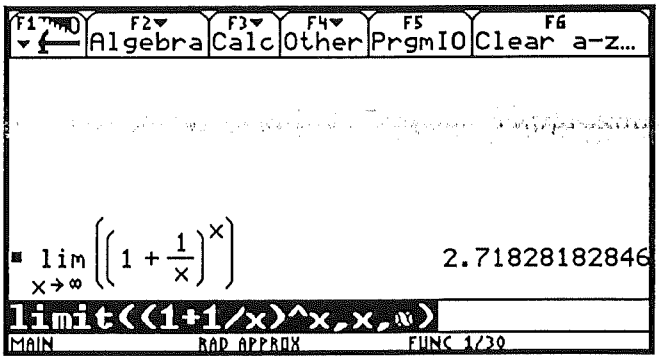
L'utilisation de la commande nécessite la maîtrise de la syntaxe : l'oubli des parenthèses autour de la variable pour le sinus entraîne une réponse fausse à la deuxième question.

Une petite différence et ses grandes conséquences (voir sur ce point M. Artigue ([Artigue, 1995b]).



Les problèmes rencontrés avec les calculatrices graphiques réapparaissent aussi si la limite est calculée en mode approché et non pas en mode exact :

Dès que l'on quitte le mode exact, on rejoint le domaine de l'approximation.



L'existence d'une commande "limite" ne signifie pas nécessairement la mise en oeuvre simplifiée d'une conduite unique. Cependant l'action sur cette commande opère un bouleversement des modes antérieurs d'étude des limites dans un environnement calculatrice graphique.

En effet la syntaxe limit (f(x), x, ∞) :

- situe une limite comme un nombre et non pas comme un processus (à la différence des calculatrices graphiques) ;

- inverse le sens "habituel" d'écriture (x, y) : la syntaxe exige ici de donner ici la fonction puis la variable.

Cette commande semble rompre ainsi avec le point de vue cinématique qui était de mise avec l'utilisation des calculatrices graphiques.

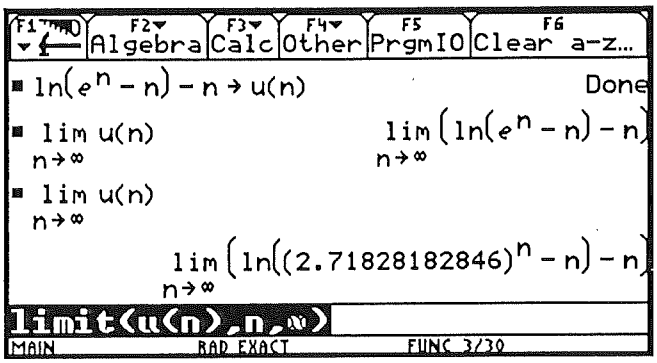
ii) Les manoeuvres de coutournements du blocage de la commande "limite".

Il peut arriver que la commande "limite" ne donne pas de réponse, comme en témoigne un exemple récent, tiré de l'épreuve de mathématique du baccalauréat, série S, session de Juin 1996 (sujet national). On disposait en fin de problème de :

$u_n = \ln(e^n - n)n$, il fallait calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

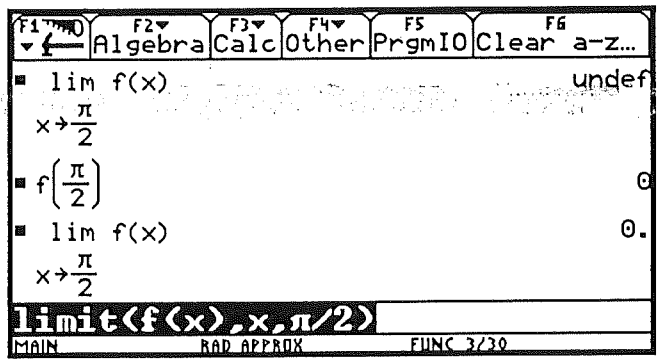
En valeur exacte, le logiciel renvoie simplement la question.

Le détour par un calcul approché permet d'obtenir la question reformulée avec une valeur approchée de e ce qui n'apporte pas une aide particulière,



Devant une telle situation, on peut modifier la forme de la question, revenir à un calcul "à la main" ou utiliser une des stratégies de recherche expérimentale du type "calculatrices graphiques" (via un tableau de valeurs ou l'application graphique). On peut aussi utiliser quelques raccourcis surprenants. Ainsi, pour la fonction f qui à x associe $f(x) = (\cos x)^x$:

En calcul exact, la limite n'est pas définie (évidemment, il faudrait demander ici une "limite à gauche").



Deux manoeuvres de contournement permettent alors d'avoir la limite cherchée :

- le calcul (en mode exact) $f(\frac{\pi}{2})$ (le logiciel opère alors un "prolongement par continuité") ;
- la mise en oeuvre de la commande "limite" en mode approché (le logiciel donne alors la réponse qu'il refusait en mode exact).

Les manoeuvres de contournement de blocage de la commande "limite" sur TI-92 peuvent se ramener à :

- un recours au mode de calcul approché ou à l'application graphique (il s'agit alors de manoeuvres "d'approche" du même type qu'en environnement calculatrice graphique) ;

- à des artifices de calcul qui consistent à "forcer le refus de réponse" (on peut considérer alors qu'il pourrait s'agir d'un point de vue algébrique "aveugle" : il s'agirait alors davantage d'une dilution que d'une construction du sens du concept).

3. Les contraintes d'organisation.

i) Sur la TI-92, c'est le calcul qui occupe une place privilégiée.

Par rapport aux calculatrices graphiques, la situation semble inversée :

- l'application initiale, au nom évocateur ("Home", maison), est celle qui gère les calculs exacts ou approchés, numériques ou formels. On y accède par la première touche en haut à gauche de l'écran (si on choisit la touche "APPS", qui donne accès à toutes les applications de la TI-92, l'application "Home" est encore la première) ;
- l'application graphique et l'application "tableau de valeurs" sont au même niveau d'accessibilité (mais dans la "hiérarchie" des touches, l'application graphique se trouve après "Home" et avant "Table" sur la première ligne de la calculatrice).

Il y a donc en principe une prime au traitement formel des fonctions et des limites. En principe seulement. En effet si l'on veut uniquement calculer une limite de fonction, le plus simple (au sens de l'efficacité et de la rapidité), est de choisir l'application "Home" et d'actionner la commande "limite". **Mais, la plupart du temps, la question sur les limites sera immergée dans une étude plus générale de fonction. La tentation sera alors grande de considérer la courbe de la fonction, pour avoir une idée de la limite.** Il s'agirait alors d'un schème hérité de la manipulation des calculatrices graphiques. La rapidité et l'efficacité ne sont en effet pas forcément du côté de la commande "Limite" : on a vu les contraintes qui pèsent sur la syntaxe.

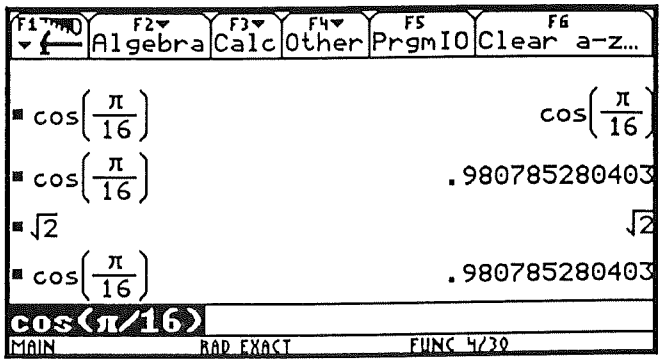
Mais plus profondément il peut s'agir aussi du désir de voir les contours de l'objet pour le comprendre : une fonction est définie la plupart du temps par une formule : une fois "rentrée en machine", le passage à l'application graphique donnera, via la courbe, une "réalité" à l'objet. **En somme voir, c'est à dire posséder (0.b.1.ii.), suppose d'accepter de perdre l'exactitude gagnée dans l'application initiale. Regagner l'exactitude suppose d'accepter "l'évanouissement de l'objet" derrrière la formule qui le définit.**

ii) C'est le mode "calcul approché" qui est le plus facilement accessible.

Notons d'abord que quand on définit le mode de calcul (dans le Menu "Mode") les choix sont, dans l'ordre les mode automatique, puis exact et enfin approché. Il y a donc un certain avantage au calcul "auto" placé en premier. Cependant l'étude des contraintes d'organisation permet de discerner un avantage beaucoup plus efficace. En effet si l'on veut changer de mode de calcul, il faut appuyer successivement sur 5 ou 6 touches... sauf pour accéder au mode "calcul approché" : celui-ci est le seul à disposer d'un raccourci-clavier (touche "diamant vert", combiné avec la touche "enter"). **Ainsi quelque soit le mode de calcul ambiant, on peut disposer d'une valeur approchée d'un nombre donné. Cela pose un premier problème, relatif à l'identification valeur exacte/valeur approchée, comme on le voit sur l'écran ci-dessous** :

On rappelle que le raccourci clavier ne modifie pas la ligne d'état.

On obtient ainsi une valeur approchée de $\sqrt{2}$, ou de $\cos\frac{\pi}{16}$, avec une ligne d'état indiquant pourtant qu'il s'agit de calculs exacts.



On retrouve en fait, derrière le rapport entre "calcul exact" et "calcul approché" le même rapport qu'entre l'application initiale et l'application graphique : travailler en mode exact suppose d'accepter de perdre d'une certaine façon la substance même de l'objet :

- $\sqrt{2}$ est un nombre, mais, pour "le dévoiler", tout élève pense à "1, 414 et des poussières", qui le situe (presque!) dans l'ensemble ordonné des réels ;

- de la même façon, le mode "calcul approché" renseigne plus sur $\cos\frac{\pi}{16}$ (cf ci-dessus) que le "mode exact" (qui ne "connaît" pas la valeur exacte de ce nombre sur une TI-92, cf copie d'écran ci-dessus).

L'existence nouvelle sur les TI-92 d'un "mode calcul exact", même s'il est privilégié dans la genèse instrumentale collective (cf. II.b.1.i.), n'en fera pas nécessairement le mode de calcul de référence.

Calculatrices TI-92.
De l'examen des contraintes
à la suggestion d'un point de vue sur les limites.

La situation est ainsi beaucoup moins nette dans un environnement TI-92 que dans un environnement calculatrice graphique :

- si l'on ne considère que la commande spécifique "limite", on peut estimer que la transposition informatique favorisera un point de vue algébrique sur les limites. Il y aurait alors une réduction de la limite à un symbole ;
- mais le contournement de cette commande, en cas de non-réponse ou pour obtenir des renseignements complémentaires sur le comportement plus général de la fonction, ramènera au même point de vue cinématique que dans un environnement calculatrice graphique.

Les rapports entre calcul exact et approché, application graphique et application initiale ne sont pas fixés une fois pour toutes sur une TI-92. Même si l'étude des différentes contraintes nous donne quelques indications, on doit constater que la marge de manoeuvre sur une telle machine est sans commune mesure avec la marge de manoeuvre sur une calculatrice graphique.

Beaucoup dépendra sans doute de la genèse instrumentale, mise en oeuvre par l'élève "sujet singulier et attentionnel" (0.b.5.iii.).

I.c.3 Point de vue des constructeurs promoteurs et thuriféraires.

Nous venons de réaliser une étude a priori sur l'utilisation des calculatrices graphiques ou symboliques. Nous allons étudier maintenant la correspondance entre cette étude et les prescriptions des constructeurs ou promoteurs de ces outils. Il ne s'agit pas d'imaginer que les prescriptions d'utilisation des calculatrices que l'on trouve dans ces manuels sont nécessairement suivies d'effet. On veut seulement, en parcourant une partie de cette littérature consacrée aux calculs de limite, voir s'il y a concordance entre ce qui y est dit et ce que l'étude de la structure des matériels nous a montré.

I.c.3.i Revue de presse sur les calculatrices graphiques.

Quelques exemples illustrant ce que nous avons vu en I.c.2.i.

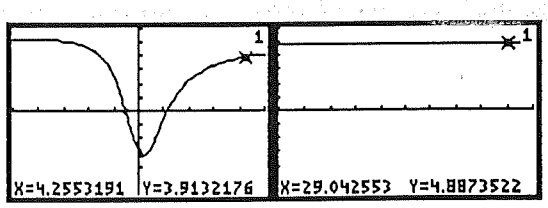
Exemple 1 [Baudrant et Vagost 1991]

Il s'agit d'étudier la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{5x^2-3x-3}{x^2+1}$. On lit :

" Grandes valeurs de x.*

Par Trace, promener le curseur sur la courbe jusqu'au point le plus à droite de l'écran ; en poursuivant l'action, on s'aperçoit que l'écran défile vers la gauche et on obtient des points en dehors de la fenêtre initiale.

Poursuivre ainsi jusqu'à obtenir par exemple la représentation ci-contre. On a mis ainsi en évidence expérimentalement la notion d'asymptote."



Cela correspond bien à un schème d'action instrumentée possible que nous avons envisagé en I.c.2.i. :

On observe le déplacement d'un point sur la courbe en utilisant la commande "Trace" et on observe les régularités qui apparaissent. **L'existence d'une asymptote horizontale est alors assimilée à l'apparition d'une représentation graphique horizontale sur l'écran** (on a vu en I.c.2.i. que cela se produisait pour lnlnx). **On notera cependant, à propos de l'exemple ci-dessus, que l'asymptote est "mise en évidence" alors que rien n'est dit sur la limite de cette fonction en $+\infty$.**

Exemple 2 [Texas Instruments, 1995]

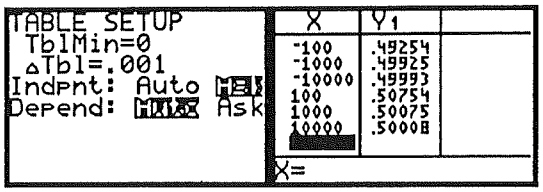
Il s'agit ici d'étudier la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{2x^2+x+1}$. On lit :

"Pour commencer, définissons la fonction en utilisant la touche Y.

On calcule ensuite quelques valeurs pour se faire une idée des limites en $-\infty$ et $+\infty$.

NB : Le choix du mode Indpnt Ask permet d'entrer librement les valeurs souhaitées dans la première colonne de la table de valeurs.

Il suffit d'utiliser les touches TblSet et Table.



Il semble bien que la limite cherchée soit égale à 0,5. Il est facile de la justifier."

Deuxième action possible repérée, à partir d'un tableau de valeurs. On constatera ici que les valeurs de la variable ne sont pas équiréparties : cela a nécessité un réglage particulier du tableau (via la touche TblSet). La validation est encore laissée dans l'ombre ("il est facile de justifier"...). Mais l'essentiel est dans le schème lui-même : on prend des valeurs de la variable de plus en plus grandes et on observe les régularités apparentes pour la fonction. **Le rapprochement vers 0,5 (et pourquoi pas vers 0,49 ?) permet de conclure** : "il semble bien que la limite cherchée soit égale à 0,5".

Exemple 3 [Vagost et Verdier, 1993]

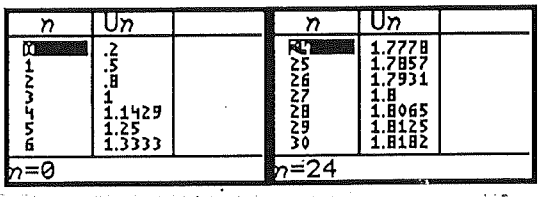
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n}{3+n}$

Représenter graphiquement cette suite et étudier pour les grandes valeurs de n.

Résolution proposée :

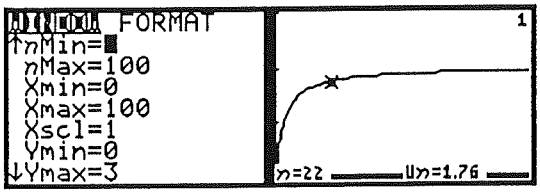
"Après avoir choisi le mode Séq (mode suite), définir la suite dans Y.

Afficher par Table les premières valeurs. Parcourir la table pour obtenir les valeurs ci-contre.



Ces résultats permettent de prévoir l'intervalle dans lequel varient les valeurs de la suite et donc de définir dans Window les paramètres suivants :

nStart=0, nMin=0, nMax=100, Xmin=0, XMax=100, Ymin=0, YMax=3, pour obtenir, par Graph, la représentation graphique ci-contre ":



Il est alors possible de parcourir (par Trace) cette courbe pour lire par exemple : $u_{47} \approx 1{,}88$, $u_{100} \approx 1{,}94$.
Il est même possible en changeant le nMax (dans Window) de lire $u_{243} \approx 1{,}98$ ou... $u_{610} \approx 1{,}99$..... ce qui permet de faire l'hypothèse que la limite de cette suite (pour n tendant vers $+\infty$) est 2. Il est alors possible, dès la classe de première, de démontrer que c'est vrai."

On notera ici aussi quelques éléments de conduite caractéristiques :

- le calcul des 30 premiers termes permet de conclure que tous les termes de la suite seront dans l'intervalle [0, 3] : "Ces résultats permettent de prévoir l'intervalle dans lequel varient les valeurs de u_n". **Ainsi ce qui se trouve en dehors du tableau se conduit dans le prolongement de ce qui se trouve dans le tableau** ;

- la représentation graphique de la suite fait apparaître...une courbe, qui est d'ailleurs évoquée en tant que telle dans le texte : "il est possible de parcourir cette courbe". Il y a là une belle adaptation à la contrainte interne déjà mentionnée : **pour la calculatrice, il**

y a une discrétisation du continu et donc, pour l'utilisateur, une dilution des frontières entre discret et continu ;

- comme pour les deux exemples précédents, **la validation de la limite n'est que vaguement évoquée ("il est possible de démontrer que c'est vrai"...) et le rapprochement vers 2 permet de conclure, par arrondi, à l'existence d'une limite égale à 2.**

Exemple 4 (et dernier) [Casio, 1995]

Il s'agit ici d'approcher la dérivée d'une fonction en un point.

"De l'observation des résultats numériques de la fiche n°8, il ressort que :
- quand h prend des valeurs de plus en plus proches de zéro (on dit que h tend vers 0 et on écrit $h \rightarrow 0$), le rapport $A = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tend vers une valeur qui est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0.
- pour la calculatrice la valeur $h = 10^{-8}$ permet d'obtenir une valeur arrondie de A qui se confond avec la vraie valeur de A (pente de la tangente).

D'une manière générale, en imposant à h la valeur 10^{-8}, on obtiendra directement la valeur de A cherchée (correspondant à la droite tangente, quand elle existe)."

(Deux dernières lignes en gras dans le texte, ndlr).

C'est l'aboutissement ultime des confusions :

- A n'est pas indiquée comme étant une fonction de h. D'ailleurs, on ne sait plus ce qu'est A : que dire "d'une valeur arrondie de A qui se confond avec la vraie valeur de A (pente de la tangente)" ?

- pour h suffisamment petit, la limite est atteinte (!).

Délaissons l'aspect caricatural du dernier exemple. Ces manuels sont écrits en général par des professeurs de mathématiques. Eux, bien sûrs, disposent du contrôle théorique des approximations numériques et des approximations de formulations que l'on vient de relever. Le problème est évidemment que les lecteurs de ces ouvrages ne disposent pas du même contrôle.

L'étude des limites dans les ouvrages consacrés aux calculatrices graphiques correspond exactement aux conduites possibles que nous avons envisagées à partir des contraintes des outils (cf. I.c.2.i.).

La recherche des limites se réduit le plus souvent à l'observation d'un rapprochement, graphique ou numérique et à un "coup de pouce" ultime pour atteindre la limite.

C'est un point de vue cinématique qui est largement privilégié.

I.c.3.ii Notes sur les TI-92.

Les ouvrages consacrés aux calculatrices "symboliques" sont encore rares. On considèrera donc les ouvrages ou documents disponibles ([Lemberg, 1996], [Hypothèses, 1996]) avec prudence.

TI-92, du Lycée à la Prépa. [Lemberg, 1996]

L'ouvrage comporte un chapitre intitulé "Limites, continuité". Dans le paragraphe "La notion de limite", on lit :

> ***"Le concept de limite en mathématiques est d'abord intuitif : une fonction f admet une limite L lorsque x tend vers a, si, lorsqu'on s'approche de a, f(x) s'approche de L.***
> *Le travail du professeur de Mathématiques est alors de préciser (et surtout de faire comprendre) ce que l'on appelle "s'approcher". Aujourd'hui, donner la définition exacte qui utilise les "ε, α" n'a de sens qu'une fois que l'étudiant aura compris, à l'aide des outils graphiques ou calculatoires à sa disposition, ce que l'on entend par "voisinage d'un point", voire même ce qu'est un nombre réel. Mais, comme toujours, il faudra garder un oeil critique sur tout résultat donné par la machine."*

Il y a encore référence à l'idée de rapprochement (guidé par la variable), perçu comme définition intuitive. L'arrivée d'une définition exacte est reportée à l'heureux temps où l'étudiant *"aura compris, à l'aide des outils graphiques et calculatoires à sa disposition, ce que l'on entend par voisinage d'un point, voire même ce qu'est un nombre réel"*. **C'est une nouvelle manifestation de l'illusion de l'apprentissage naturel assisté par l'outil de calcul.** On en reparlera dans la partie III de cette thèse.

Examinons l'utilisation de la calculatrice pour la recherche des limites, à travers deux exercices.

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$.

a) Trouver la limite de f en $+\infty$;

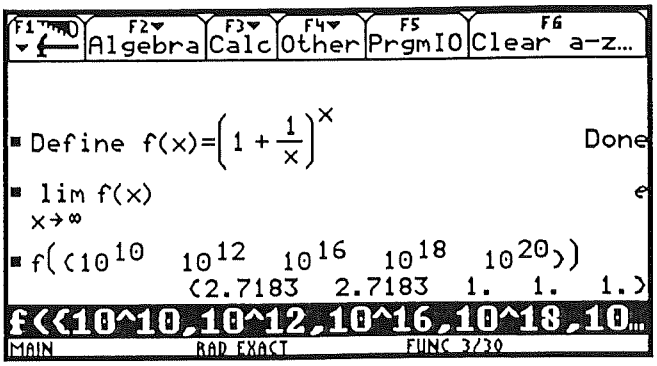
b) En utilisant une liste, calculer la valeur de f(x) pour $x \in \{10^{10}, 10^{12}, ..., 10^{20}\}$

Solution :

"Il suffit d'utiliser la commande limit pour obtenir le nombre e. Mais lors du calcul de la suite demandée, on pourra être surpris du résultat pour de grandes valeurs de x. Il s'agit d'une erreur due aux erreurs d'arrondis dans tout calcul effectué par un ordinateur, puisqu'une telle machine ne travaille jamais en précision infinie, mais toujours sur un ensemble fini de nombres."

"La limite est e, lorsque x tend vers l'infini.

Par contre, $f(10^{16}) = 1$. Problèmes d'arrondis..."



Il est clair qu'ici le calcul de limite est purement algébrique, mais il n'est pas indépendant de l'idée de rapprochement. En effet, jusqu'à 10^{12}, les calculs approchés faits par la machine sont "cohérents" avec la limite trouvée. L'auteur du manuel souligne les problèmes repérés pour les grandes valeurs de x et situe leur origine dans le calcul approché réalisé.

Tous les autres exercices sont bâtis sur ce modèle : calcul de la limite par la commande ad hoc et coup d'oeil sur le graphique ou un tableau de valeurs. Si une dérive est constatée, elle est attribuée au "calcul approché". Il n'y a ni preuve théorique de la limite trouvée (ni simple évocation d'une telle preuve), ni recherche des causes des dérives numériques constatées.

Exercice 2

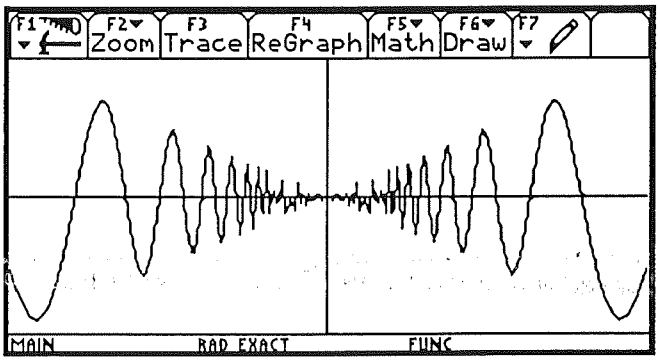
Il s'agit d'étudier la limite en 0 de la fonction $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$.

"La commande "limite" donne 0 pour résultat. La démonstration est simple : bien que la fonction f ne soit pas définie en 0, elle est bornée parce que c'est la fonction sinus.

En multipliant par x qui tend vers 0, on démontre le résultat trouvé par notre machine."

"La représentation graphique et un zoom sont représentés ci-après.

Intuitivement, on a bien $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$".



On retrouve encore ici des techniques purement algébriques : la calculatrice donne la limite et la preuve est apportée par le produit d'une fonction bornée et d'une fonction à limite nulle. Le graphique est ici un support "intuitif". Il aurait été possible d'établir la limite de f par un encadrement entre - |x| et |x|, ce qui aurait sans doute permis un lien avec les représentations graphiques. Ce n'est pas le choix qui a été fait.

A travers ces exercices, il semble bien que le point de vue algébrique soit favorisé et que l'aspect graphique ou numérique soit réduit au rôle d'observation d'appoint.

Hypothèses n°10, Sepembre 1996
(consacré à l'utilisation du logiciel de géométrie Cabri).

Il s'agit ici d'introduire la notion de dérivée comme meilleure approximation affine. L'étude est faite pour la fonction $(1+x)^2$, au point B d'abscisse 0. M est un point variable de la courbe. L'auteur écrit :

"Pour chaque position de M, on affiche la pente p de la droite (BM). L'équation de cette droite est de la forme y = px+1. On calcule la quantité :

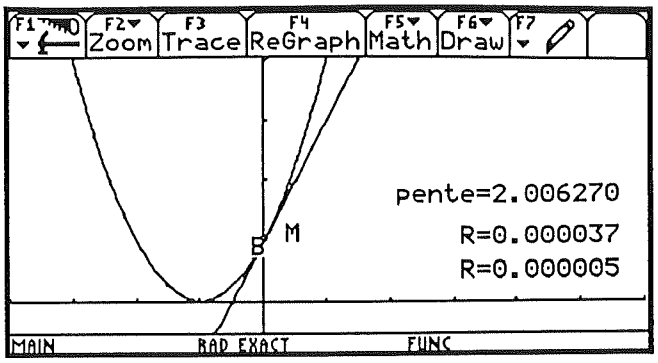
$|(1 + 0{,}01)^2 - (0{,}01p + 1)|$ (c'est le premier R porté sur l'écran ci-dessous).

On regarde quelle est la pente pour laquelle cette quantité est minimale.

On peut faire en parallèle le même calcul pour $|(1 + 0{,}001)^2 - (0{,}001p + 1)|$ (c'est le deuxième R porté sur l'écran).

"On fait constater alors que la valeur de p qui minimise simultanément ces deux quantités est très proche de 2 (il est difficile d'obtenir 2 avec une telle précision, mais les résultats semblent assez convaincants).

Il est indispensable de faire "admettre" aux élèves qu'aux erreurs de pixels près, le "bon nombre" c'est 2.""



"Comptons sur l'autorité naturelle des professeurs de mathématiques.

(...) L'interprétation du résultat obtenu pourrait se traduire sous une phrase du type "plus x se rapproche de 0, plus $(1+x)^2$ se rapproche de $1+2x$"

On peut émettre quelques doutes sur l'intérêt de cette activité pour l'apprentissage de la notion de dérivée et de limite :

- la première question est banale : pour minimiser l'écart entre un point de la courbe et une droite issue de B, il suffit de prendre la droite passant par B et ce point ;
- la deuxième question est plus complexe : que veut dire "minimiser simultanément deux quantités ?".

Quant à la suite, dire que le "bon nombre" proche de 2, 006 270 est 2 (et pourquoi pas 2, 006 ?) cela requiert une audace certaine. Avec deux conséquences graves :
- remplacer l'étude critique par "l'autorité naturelle du professeur de mathématique";
- renforcer les points de vue sur les limites du type "cinématique", éloigner du point de vue de l'approximation.

L'activité se poursuit il est vrai par une étude formelle convenable. Mais ceci ne légitime pas cela.

Il y a là une illustration de ce que pourrait être une utilisation "naturelle" de la TI-92 :

- l'utilisation du calcul formel pour s'assurer du résultat correct (via la commande spécifique "limite" par exemple) ;

- le recours au calcul approché pour donner une justification du résultat avancé, en revenant aux actions en vigueur avec les calculatrices graphiques.

Comme on le disait lors de l'étude des contraintes des TI-92, les rapports entre calcul symbolique et calcul numérique, entre calcul exact et approché, sont loin d'être définitivement réglés.

Conclusion de la partie I.

L'étude épistémologique a permis de dégager trois points de vue sur le concept de limite :

- un point de vue "cinématique" ;
- un point de vue "algébrique" ;
- un point de vue "approximation".

C'est ce dernier point de vue qui a pu donner au concept sa forme reconnue actuellement par la communauté des mathématiciens.

L'étude de la transposition didactique a montré la domination d'un point de vue algébrique dans les manuels scolaires et les énoncés de baccalauréat. Le point de vue cinématique apparaît de façon marginale, à l'occasion d'observations numériques ou graphiques de rapprochements, censées donner un sens à ce concept qui n'est défini que par son "langage" (cf. I.b.2.).

Ce point de vue cinématique semble être largement induit par la manipulation des calculatrices graphiques. Quant aux calculatrices symboliques, l'analyse des contraintes suggère le développement d'un point de vue algébrique important, mais la diversité des conduites possibles ne permet pas de se limiter a priori à ce seul point de vue.

Le point de vue approximation n'émerge pas de la transposition didactique, il ne semble pas émerger non plus de la transposition informatique. Il nous faut étudier maintenant ce qu'il en est du côté du sujet. P. Rabardel (cf. 0.b.5.iv.) écrit :

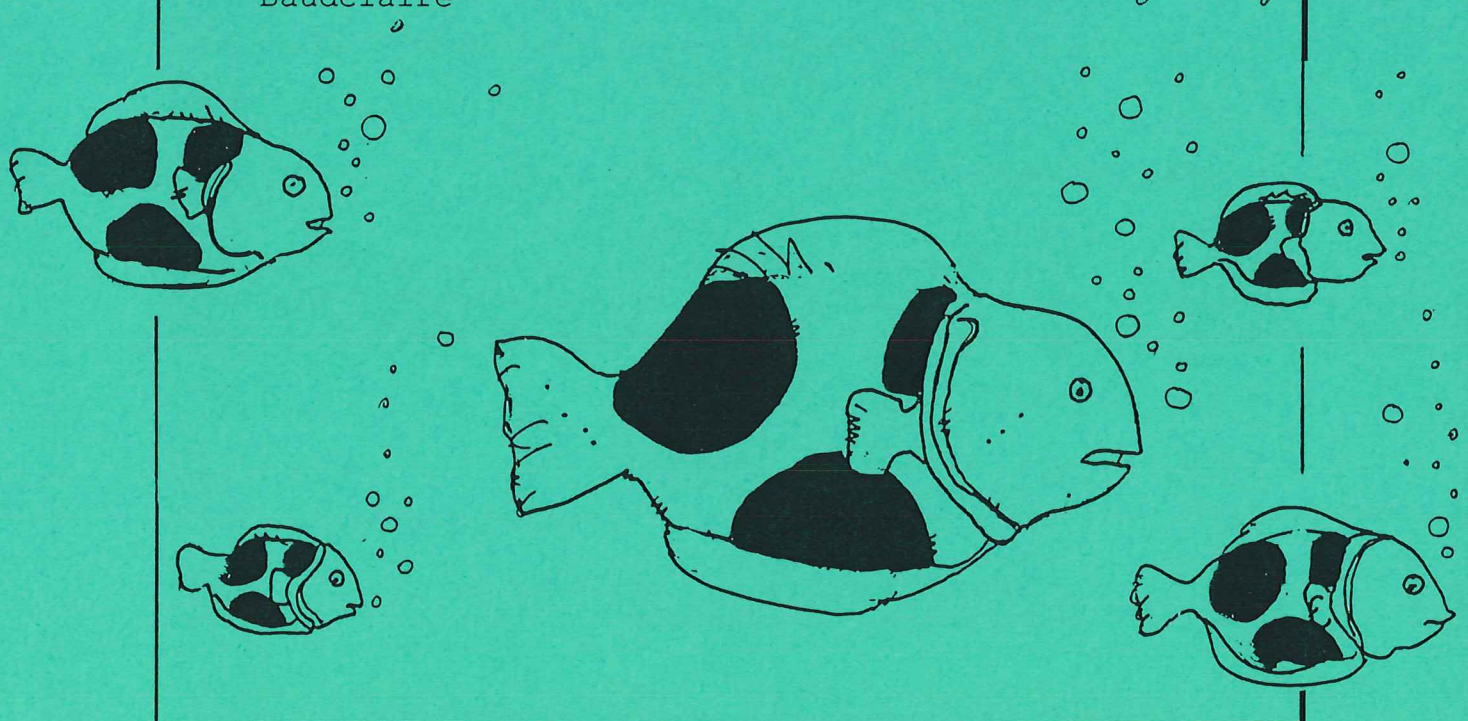
> *"L'activité relativement requise est la traduction des compromis établis par le sujet entre les contraintes qui s'imposent à lui en provenance de sources multiples : l'artefact, la tâche, l'environnement, ses propres compétences et capacités etc., compte tenu de sa finalisation et de son engagement dans la situation."*

Place à l'élève, *"acteur singulier et intentionnel"* !

II Les limites, côté sujet.

Pourquoi le spectacle de la mer est-il si infiniment
et si éternellement agréable ?
Parce que la mer offre parfois l'idée
de l'immensité et du mouvement.
Six ou sept lieux représentent pour l'homme
le rayon de l'infini.
Qu'importe, s'il suffit à suggérer
l'idée de l'infini total

Baudelaire



Sommaire du chapitre II :

Les limites, côté sujet.

II.a Les conceptions, arrêt sur image. p.153

II.a.1. Repérage des conceptions. p.155

II.a.1.i	Obstacles et processus producteur d'obstacles.	p.155
II.a.1.ii	Points de vue épistémologiques et repérages didactiques.	p.160
II.a.1.iii	Un choix de conceptions a posteriori et a priori.	p.162

II.a.2. Bilan d'une première expérimentation. p.165

II.a.2.i.	Présentation du questionnaire.	p.165
II.a.2.ii.	Présentation du dispositif.	p.173
II.a.2.iii.	Dépouillement, côté conceptions.	p.174
II.a.2.iv.	Dépouillement, côté techniques.	p.188
II.a.2.v.	Des techniques aux théorèmes-en-actes.	p.192
II.a.2.vi.	Calculatices et processus producteurs d'obstacles.	p.197

II.b. Un an d'observations à la loupe. p.201

II.b.1. Présentation du dispositif. p.203

II.b.1.i.	L'intégration des instruments (calculatrices graphiques, puis symboliques).	p.203
II.b.1.ii.	L'activité mathématique organisée et le recueil d'observations.	p.206
II.b.1.iii.	Une typologie des comportements.	p.208
II.b.1.iv.	Typologie, défense et illustration.	p.213

II.b.2. Limites, enseignement dispensé, conceptions exprimées. p.221

II.b.2.i.	Définition, intervention de la notion.	p.221
II.b.2.ii.	Questionnaire avec calculatrice graphique, comparaison externe.	p.229
II.b.2.iii.	Questionnaire avec calculatrice graphique, comparaison interne.	p.238
II.b.2.iv.	Questionnaire avec TI-92, double comparaison interne.	p.248

II.b.3. Genèse instrumentale et conceptualisation. p.269

II.b.3.i.	Le prévu et l'observé, contraintes et schèmes	p.269
II.b.3.ii.	Schèmes d'action et théorèmes-en-acte.	p282
II.b.3.iii.	Articulation des schèmes d'action instrumentée et typologie	p.285
II.b.3.iv.	Portée des schèmes d'action et typologie.	p.289
II.b.3.v.	Les schèmes d'action, liés à des schèmes d'usage.	p.301
II.b.3.vi.	Instrumentation et conceptualisation.	p.310

Trois étapes dans cette étude :

- une première étude des "conceptions" déjà identifiées dans des travaux antérieurs, concernant les limites de fonction ;

- une deuxième étude, comparée, concernant deux photographies d'une population d'élèves de Terminale scientifique et d'élèves de première année de Deug A [25] ;

- une troisième étude, où l'on étudiera, dans la continuité, l'évolution d'élèves d'une Terminale Scientifique.

Comme l'écrit Bergson (cité par Bouveresse, dans [Salanskis et alii, 1992]) :

"L'entendement décompose le changement en états successifs et distincts, censés invariables. Considère-t-on de plus près chacun de ces états, s'aperçoit-on qu'il varie... Vite, l'entendement le remplace par une série d'états plus courts, qui se décomposeront à leur tour s'il le faut et ainsi de suite, indéfiniment... Ce qui est réel, ce n'est pas les "états", simples instantanés pris par nous, encore une fois, le long du changement ; c'est au contraire le flux, c'est la continuité de transition, c'est le changement lui-même".

C'est cette "continuité de transition" que nous étudierons à travers les processus de conceptualisation et d'instrumentation, sur lesquels cette deuxième partie s'achèvera.

[25] Il s'agit de la première année universitaire, à dominante mathématique.

II.a. Les conceptions.

20000 lieux sous les mers.

L'homme est un être de nature variable, multiforme et voltigeante

Pic de la Mirandole, cité par [Lecourt, 1996]

Nous avons vu en 0.b.3.iii. la difficulté de la définition des conceptions à partir d'un texte de M. Artigue dont sont extraites les citations de cette page [Artigue, 1990].

M. Artigue indique des tendances opposées :

- dans le nombre de conceptions relevées :

> *"il y a (parfois) regroupement de conceptions autour de grandes tendances pertinentes par rapport à l'analyse didactique, dans d'autres cas le souci d'affiner l'analyse des comportements des élèves conduit à différencier à l'extrême les conceptions" ;*

- dans la méthode de relevé de ces conceptions :

> *"à partir de l'observation directe de comportements d'élèves ou à partir du fonctionnement actuel de ce savoir comme de son développement historique".*

On tâchera ici d'éviter deux dangers :

- le premier qui serait *"d'aplatir des conceptions sur les observables"* (comment pourrait-on être assuré en effet d'avoir un dispositif expérimental permettant de mettre en évidence toutes les "conceptions" possibles et de les repérer toutes ?)

- le deuxième qui serait d'inférer des seuls obstacles épistémologiques l'existence et l'importance des obstacles à franchir pour "les élèves d'aujourd'hui".

Nous suivrons pour cela la démarche suivante :

- on confrontera d'abord les obstacles épistémologiques relatifs aux limites au fonctionnement didactique de cette notion ; il s'agira alors de repérer "*les processus producteurs d'obstacles*" liés à la transposition didactique ou aux instruments ;

- on confrontera ensuite les différents "points de vue" dégagés par l'analyse épistémologique avec les conceptions sur les limites relevées par les travaux antérieurs ;

- ceci débouchera sur un éventail de conceptions dont nous testerons la validité opératoire à partir d'un questionnaire.

II.a.1 Repérage des conceptions.

Comment repérer de l'extérieur les indices de processus psychologiques profonds, liés à l'expérience propre, à l'enseignement reçu, aux désirs et aux passions ? La plus grande prudence est de mise ici.

II.a.1.i Obstacles et processus producteurs d'obstacles.

On a déjà évoqué des travaux portant sur les "conceptions" des limites de fonction (0.b.3.iii.). On utilisera ici ceux d'Aline Robert ([Robert, 1982]), de Bernard Cornu ([Cornu, 1983]) et d'Anna Sierpinska ([Sierpinska, 1985]). Quand on évoquera ces auteurs par la suite, ce sera relativement aux travaux que l'on vient de mentionner. **On va tenter de relever ici les obstacles relatifs à l'acquisition de la notion de limite. Ces obstacles sont de différente nature.** On a vu en 0.b.1.i. que G. Bachelard avait mis en évidence les obstacles épistémologiques :

> *"La notion d'obstacle épistémologique peut être étudiée dans le développement historique de la pensée scientifique et dans la pratique de l'éducation"* .

Cela introduit une première distinction entre les obstacles repérés dans *"le développement historique"* et ceux repérés dans *"la pratique de l'éducation"*. Les obstacles épistémologiques dans la pratique de l'éducation peuvent être recherchés à partir de la transposition didactique de la notion, à partir de l'étude de situations de classes ou de productions d'élèves. A. Sierpinska distingue deux conditions pour qu'un obstacle puisse être considéré comme étant de nature épistémologique :

"- l'apparition des obstacles a un caractère inévitable (...) ;
- la répétition de leur apparition dans la philogénèse et l'ontogénèse des concepts."

C'est dire que tout obstacle repéré dans *"la pratique de l'éducation"* n'est pas nécessairement de nature épistémologique.

G. Brousseau [Brousseau, 1988] distingue en effet trois types d'obstacles :
- **les obstacles épistémologiques**, liés à la résistance d'un savoir mal adapté ;
- **les obstacles didactiques**, liés au choix du système d'enseignement ;
- **les obstacles d'origine ontogénique**, liés aux capacités cognitives des élèves.

Pour les deux premiers types d'obstacles, l'étude de l'émergence du concept de limite dans l'histoire (cf I.a.1), comme l'analyse des programmes et des manuels (cf I.b.), a donné déjà d'utiles indications. Le troisième type d'obstacle devra être abordé avec beaucoup de prudence : on ne disposera a priori que des éléments donnés en I.a.3 relatifs aux rapports entre limite et langage.

B. Cornu a une conception encore plus large des obstacles : il évoque *"les obstacles d'origine génétique, didactique, psychologique, sociale, technique, épistémologique"*.

Les obstacles sociaux sont sans doute importants. La classe sociale d'origine, le "milieu culturel", la religion ont à voir avec l'idée que l'on se fait des "limites" et de l'infini "privatif" ou "positif". Mais ce type d'étude sort du cadre de cette thèse.

Les obstacles techniques sont eux aussi importants. **B. Cornu n'évoque en fait l'obstacle technique que comme un manque.** Il écrit :

"Les obstacles d'origine technique sont les obstacles qui peuvent être franchis grâce à un apport matériel, technologique ou technique. Par exemple, les calculatrices de poche ou les ordinateurs aident à franchir certains obstacles techniques en permettant de faire des calculs précis et nombreux".

C'est probablement révélateur d'un moment où la pression pour l'équipement informatique était forte dans l'institution scolaire en France [26]. Ce que nous avons évoqué de la transposition informatique (I.c.) impliquera de situer autrement les obstacles techniques. Nous allons analyser désormais maintenant les obstacles épistémologiques, puis les obstacles liés à la transposition didactique et à la transposition informatique.

1. Les obstacles épistémologiques.

A. Sierpinska en dénombre cinq :

- **l'horror infiniti**, qui regroupe tous les obstacles liés au refus ou à l'évitement de l'infini (en particulier le transfert automatique des méthodes d'algèbre des grandeurs finies aux grandeurs infinies, l'association du passage à la limite à un mouvement physique, à un rapprochement...) ;
- **les obstacles liés au concept de fonction** (confusion fonction/suite de valeurs, réduction monotone...) ;
- **les obstacles géométriques** (la limite étant alors un objet géométrique n'a plus rien à voir avec un cadre d'approximation numérique) ;
- **les obstacles logiques**, liés à la présence des quantificateurs et de leur ordre ;
- **l'obstacle du symbole**, lié à la résistance à introduire un symbole spécifique pour la limite.

B. Cornu en dénombre aussi cinq :

- **la transposition numérique**, liée à la difficulté de s'abstraire du contexte géométrique et cinématique pour travailler sur des nombres ;
- **l'aspect métaphysique**, lié au "vertige" de l'infini ;
- **la notion "d'infiniment petit" ou "d'infiniment grand"** ;
- **l'idée qu'une limite ne peut pas être atteinte** ;
- "d'autres obstacles", parmi lesquels B. Cornu cite en premier l'idée de la nécessité de **la convergence monotone**.

Certains des obstacles évoqués ci-dessus ("horror infiniti", ou "aspect métaphysique") sont très vagues. D'autres sont au contraire très précis (l'obstacle logique lié à la présence des quantificateurs par exemple). Pour d'autres encore, leur existence même comme obstacle peut être remise en question : ce n'est pas parce que le symbole des limites est arrivé tard dans l'histoire que l'on peut considérer qu'il constitue aujourd'hui un obstacle.

---

[26] En 1983, l'idée que l'informatique était en soi une aide pour l'apprentissage dominait dans l'institution scolaire française :
- circulaire ministérielle du 24 Mars 1983 : "introduction d'un éveil informatique et technologique à l'école élémentaire";
- circulaire du 2 Septembre 1983 : "le développement de l'informatique dans l'enseignement en 1983-1984" ;
- 1984 : plan "100.000 micro-ordinateurs, 100.000 enseignants formés" ;
- 1985 : plan "Informatique pour tous".
La circulaire de présentation de ce plan par le Premier Ministre, Laurent Fabius, se termine par ces phrases : "La formation est l'investissement le plus important de la Nation, la clef de voûte de la modernisation du pays. L'informatique va devenir de plus en plus une seconde langue. L'objectif du Président de la République, le nôtre, est de faire de cette génération la mieux formée de notre histoire".
Références dans un des *Cahiers de la FEN* [Delapierre et alii, 1985].

On peut ainsi incorporer les obstacles repérés dans une nouvelle grille qui prend aussi son sens relativement au concept de limite fixé dans un cadre numérique (cf I.a.1.) : ce sont des obstacles relativement à la construction d'un concept identifié :

i) L'obstacle atomiste (qui regroupe l'obstacle des infiniments petits de B. Cornu, l'obstacle de la confusion fonction/suite d'A. Sierpinska) : tout réel a un successeur séparé de lui par un "infiniment petit". C'est "le même" infiniment petit qui séparera éventuellement la fonction de sa limite (on retrouve là l'obstacle évoqué par B. Cornu : une limite ne peut pas être atteinte) ;
ii) L'obstacle géométrique (une courbe "tend" vers son asymptote) ;
iii) L'obstacle cinématico-monotone (l'idée de limite est associé à un rapprochement numérique) ;
iv) L'obstacle algébrique (cela recoupe une partie de "l'horror infiniti" de Sierpinska : le transfert automatique des méthodes de l'algèbre des grandeurs finies aux grandeurs infinies) ;
v) L'obstacle logique (le contrôle de la variable précède celui de la fonction : c'est donc plus large que la simple localisation d'éventuels quantificateurs).

On remarquera que nous n'avons pas distingué en tant que tel d'obstacle de l'infini, beaucoup trop général : c'est "le vertige de l'infini" qui donne de la vigueur aux cinq obstacles que nous venons d'indiquer. Nous n'avons pas distingué non plus l'obstacle du symbole, dont nous n'avons pas pu remarquer la pertinence dans les faits. Nous avons distingué un obstacle cinématico-monotone, parce que ces deux idées sont très difficilement détachables l'une de l'autre, on l'a vu dans l'histoire (cf I.a.1.ii.).

Ces obstacles sont liés aux différents points de vue que nous avons repérés (I.a.1.iii.), c'est à dire que l'expression de tel ou tel point de vue sera le signe de la vivacité de tel ou tel obstacle : les obstacles géométrique, cinématico-monotone et logique sont liés à un point de vue cinématique ; l'obstacle algébrique est lié au point de vue algébrique.

L'obstacle atomiste est plus difficile à associer à un point de vue ou à un autre :
- il peut être "compatible" avec un point de vue cinématique : "si une fonction est strictement croissante, cela veut dire que pour tout accroissement de la variable, on a un accroissement non nul de la fonction ; même s'il est très petit, si on renouvelle l'opération une infinité de fois, cela entraînera une limite infinie pour la fonction" ;
- il peut être "compatible" avec un point de vue approximation : le ε peut alors représenter un réel strictement positif "le plus petit possible".

Les différents obstacles ont entre eux des relations complexes :

- les obstacles cinématico-monotone et logique, ont une grande cohérence (dans les deux cas, la variable "tire" la fonction, cf I.a.1.iii.). Mais ils ont aussi une certaine autonomie : un élève peut accepter l'idée, ou comprendre, que l'existence d'une limite n'implique pas la monotonie, même localement, de la fonction, sans pour autant arriver à l'exprimer, en partant du contrôle de la fonction ; de même un élève peut comprendre que le contrôle part de la fonction et exprimer dans cet ordre... la monotonie de f : "f(x) se rapproche de plus en plus de la limite quand x se rapproche de plus en plus de a" ;

- les obstacles géométrique et cinématico-monotone sont aussi liés, mais le premier fonctionne dans le cadre géométrique ("une courbe se rapproche de son asymptote") et le deuxième dans un cadre numérique. Cette distinction a une certaine importance. Ainsi, par exemple, un élève qui n'aurait pas franchi l'obstacle géométrique ne pourrait pas comprendre pourquoi les deux courbes représentant les fonctions $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}$ sont asymptotes, alors que les courbes des fonctions réciproques x^2 et x^2-1, qui leur correspondent pourtant par symétrie, ne sont pas asymptotes (cf. [Gasquet, 1994]).

2. Nous allons maintenant confronter ces obstacles de nature épistémologique aux effets des différentes transpositions.

i) La transposition didactique :

Comme le constate M. Artigue [Artigue, 1990], *"les noeuds actuels de résistance sévère correspondent souvent aux points où un obstacle d'origine épistémologique historique intervient renforcé par un obstacle d'une autre origine, en particulier un obstacle d'origine didactique".*

Notre analyse de la transposition didactique (I.b.) a mis en évidence deux éléments :

- une "dérive algébrique", dont on peut penser qu'elle renforcera l'obstacle algébrique ;
- la création en Terminale de l'objet "croissance comparée", légitimant et illustrant à la fois les théorèmes sur les limites des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles et introduisant une confusion entre comportement local et global, c'est à dire renforçant l'obstacle cinématico-monotone ;
- l'existence d'observations numériques et graphiques de "rapprochement", dont on peut penser qu'elles renforceront les obstacles i, ii, iii et v.

ii) La "transposition informatique" :

Nous avons vu (I.c.) l'importance des obstacles "atomiste", "géométrique", "cinématico-monotone" et "logique" dans le cadre de l'utilisation des calculatrices graphiques et un jeu plus complexe, centré autour de l'obstacle algébrique, mais dans lequel les quatre autres obstacles peuvent intervenir aussi, dans le cadre de l'utilisation des calculatrices symboliques.

iii) Les "figures" de l'infini et du langage "familier" :

Nous avons mis en évidence (I.a.3.ii. et I.a.3.iii.) l'importance de l'association du "mouvement" à l'idée de limite et l'importance de la "concrétisation" des objets. Une fonction est donnée à voir par une courbe, c'est par la courbe que l'on désignera cet objet. Ainsi le "langage familier", comme les "images" de l'infini sont en cohérence avec l'obstacle géométrique et cinématico-monotone.

3. On peut enfin confronter ces obstacles avec ce que M. Artigue [Artigue, 1990] appelle les processus producteurs d'obstacles repérables aussi bien sur le plan épistémologique que sur le plan didactique. Elle distingue :

i) La généralisation abusive :

Ce processus a en effet une force particulière. Il agit au niveau de la conception des nombres : ce qui est vrai pour les naturels se généralise pour tous les nombres. Dans la mesure où rien n'est dit sur la nature des nombres manipulés, on peut imaginer que cela alimentera l'obstacle atomiste. Il agit aussi au niveau de la généralisation des exemples : la plupart des fonctions rencontrées étant monotones "à partir d'un certain moment", on associera l'idée de limite à celle de monotonie nécessaire.

On peut aussi mettre dans cette catégorie la confusion condition suffisante/condition nécessaire : une fonction croissante majorée admettant une limite finie, on en déduira que si une fonction admet une limite et si elle est majorée, alors elle est forcément monotone.

Ce principe de généralisation abusive fonctionne d'autant mieux que le concept se construit sur la seule base d'un "langage des limites" et que les exemples rencontrés ont ainsi force de loi.

On voit l'importance de ce processus pour les obstacles atomiste, cinématico-monotone et logique ("quand on étudie une fonction, on part toujours de x et on calcule f(x)").

ii) La régularisation formelle abusive :

On retrouve ce processus dans des erreurs du type "la racine d'une somme est la somme des racines". Pour les limites, cela fonctionne aussi bien : "la limite d'un produit est le produit des limites" avec comme conséquence éventuelle $0.\infty = 0$.
On a ici un processus tout à fait "adapté" à l'obstacle algébrique.

iii) La fixation sur une contextualisation, ou une modélisation familière :

Cela peut se manifester par *"la pression de la connaissance culturelle et sociale"* (l'obstacle atomiste par exemple : au niveau des particules, commes des nombres, il y a des éléments si petits qu'ils sont insécables), ou *"l'attachement à une conception scolaire"* (une fonction est définie par un mouvement -une flèche- qui va de x vers f(x), on retrouve l'obstacle logique).

iv) L'amalgame de notions sur un support donné :

C'est particulièrement clair avec l'obstacle géométrique : une fonction n'est pas seulement représentée, mais identifiée avec une partie de son graphe.

v) L'adhérence exclusive à un point de vue :

Ce dernier processus explique la force de certains obstacles : on a vu (I.b.4.) que la plupart des exemples de limites se rapportaient à des fonctions localement monotones. Mieux, que l'étude usuelle d'une fonction traitait toujours en même temps les variations et les limites de celle-ci. D'où l'identification forte de "limite" et "rapprochement".
Une fois fixée comme règle usuelle -et donc générale- cette identification sera difficilement déstabilisée par un contre-exemple qui prendra alors valeur d'exception (qui pour les élèves confirme souvent la règle, comme le veut l'adage).

L'analyse épistémologique nous a ainsi fourni des obstacles qui sont affectés d'un "poids", en fonction des contraintes propres du système d'enseignement, de l'environnement des élèves (les outils de calcul par exemple) et des processus généraux "producteurs d'obstacles".

Cette étude va nous permettre d'aborder l'étude des conceptions. Il y a cependant un rapport non automatique entre "obstacles" et "conceptions" :

- on ne doit pas imaginer que l'on passe d'une conception à l'autre au rythme du franchissement des différents obstacles.

B. Cornu écrit :

> *"Bien évidemment, l'apprentissage des mathématiques n'est pas seulement une succession de franchissements d'obstacles, une succession de sauts. En alternance avec ces sauts, il y a des périodes de lente maturation, d'entraînement, de synthèse, au cours desquelles la connaissance s'organise, se précise, se stabilise, où ce qui a été écrit est progressivement muri, affiné, exercé".*

La construction des connaissances n'est pas une fonction (du temps) croissante, avec des paliers éventuels. Il peut aussi y avoir des retours en arrière, des obstacles une fois surmontés qui ressurgissent.
La phrase de G. Bachelard *"Même chez l'homme nouveau, il reste des vestiges du vieil homme"* doit être prise dans toute sa force ;

- il ne s'agira pas seulement de repérer des conceptions mais aussi de déceler à l'intérieur de certaines conceptions des traces de conceptions anciennes ou de nouvelles conceptions qui se construisent au coeur de l'ancienne .

II.a.1.ii Les "points de vue" épistémologiques et les repérages didactiques.

Les obstacles repérés ne sont pas inertes, balisant en quelque sorte un parcours que l'élève devrait parcourir en forme de "courses de haies". Ils doivent être compris comme des obstacles agissant en permanence dans le processus de conceptualisation. Le problème se pose alors de l'appréhension de ce processus de conceptualisation. L'outil choisi a été celui des conceptions, en précisant le sens donné à ce terme.

On a dit en 0.b.3.ii. qu'il ne s'agissait pas de l'ensemble de la structure cognitive de l'élève associé à un concept (celle-la, dont l'existence même repose sur une pétition de principe, ne nous est pas accessible), mais d'un relevé, local et temporel, de l'expression d'idées qu'on rattachera à un cadre préétabli. Il est d'ailleurs notable que les travaux mettant en avant une "conception globale des conceptions" restent assez discrets sur la classification de celles-ci : B. Cornu parle ainsi de "conceptions spontanées" et de "conceptions propres" sans en faire un relevé explicite [Cornu, 1983].

On retrouve cette idée de localité et de temporalité dans ce que A. Robert appelle "les modèles exprimés" : elle appelle modèle exprimé *"une représentation mentale de la convergence des suites (ou du moins un aspect, exprimable, de celle-ci)"*. Elle s'intéresse au repérage des "modèles exprimés" relatifs à la convergence des suites numériques chez les étudiants post-bac.

Nous allons nous appuyer sur ce travail pour notre propre repérage de conceptions.

A. Robert a proposé à une population d'étudiants douze questions.

Les deux premières permettaient de définir les "modèles exprimés" :
- "si vous aviez à expliquer ce qu'est une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous ?
- comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune ?".

Les questions suivantes, en forme d'exercices, permettaient de repérer des "procédures" (cf I.a.2.i.) et de les mettre en relation avec les modèles exprimés.

A. Robert repère les "modèles" suivants :

- **les modèles "primitifs"** (qui comportent le modèle "stationnaire" -les termes sont les mêmes à partir d'un certain rang, le modèle "barrière" - les valeurs ne dépassent jamais un certain nombre et le modèle "monotone" - la suite est croissante, éventuellement croissante majorée) ;

- **les modèles "dynamiques"** (qui comportent le modèle "tend vers"-dans lequel le seul verbe utilisé est "tendre vers", le modèle "dynamique" tout court - marqué par des verbes d'action se rapproche de, se resserre..., le modèle "dynamique monotone" - comme son nom l'indique) ;

- **les modèles "statique" et "préstatique"** (statique correspondant à la traduction en langage naturel de la définition en (ε, η), préstatique correspondant à une définition du type "pour n assez grand, les nombres u_n restent dans un intervalle autour de l") ;

- **le modèle "mixte"**, attribué à des copies où sont juxtaposées ou imbriquées une description "statique" (ou "préstatique") et une description "dynamique".

- **les copies sans modèle exprimé**, qui regroupent les tautologies, la présence de la seule définition quantifiée ou un ensemble d'éléments non interprétables.

Quelques remarques sur cette classification.

i) D'abord sur son caractère exhaustif.

En ne repérant les modèles qu'à partir des réponses aux questions portant sur la définition, A. Robert passe peut-être à côté d'autres modèles, par exemple relevant du "point de vue algébrique". Que dire par exemple d'un élève ne donnant qu'une tautologie comme définition mais résolvant correctement les exercices de calcul de limites ? Il serait peut-être alors possible de repérer dans le type des techniques utilisées l'expression d'un certain "modèle".

ii) Ensuite sur la pertinence des regroupements en modèles exprimés.

Premier regroupement (cela rejoint la remarque précédente) : celui des tautologies, avec les définitions correctes (mais non traduites en langage "ordinaire"). On peut pourtant estimer que la mémorisation de la définition témoigne tout de même d'une certaine acquisition et que, même si cette acquisition n'est pas la garantie d'une compréhension complète, elle ne peut pas être mise sur le même plan que le seul énoncé d'une tautologie.

Deuxième regroupement : le regroupement préstatique/statique est peut-être trompeur au sens où il induit l'idée que la conception préstatique précède la conception statique. Or de nombreuses études (en particulier celle de B. Cornu) indiquent que le processus de conceptualisation débute souvent par l'idée d'une proximité non contrôlée -"modèle préstatique"- se poursuit par la conception d'un rapprochement -"modèle monotone"- avant de revenir à une conception "statique" : *"ce passage du statique au dynamique doit à son tour être suivi d'un passage du dynamique au statique"*. A. Robert le constate aussi, puisqu'elle note que le modèle préstatique est beaucoup moins précis que le modèle statique et s'avère assez peu discriminant en ce qui concerne les procédures de résolution.

A l'inverse, la distinction, dans la pratique, des modèles monotone et dynamique-monotone semble très difficile. D'ailleurs ceci apparaît dans l'association des procédures aux modèles : les modèles monotone, dynamique monotone, "tend vers", sont associés à des réponses erronées sans justification alors que les modèles statique et mixte sont associés à des procédures correctes ou ambigües.
Comme A. Robert le souligne :

> *"on peut supposer que le modèle dynamique, même si son expression n'est pas explicitement monotone, peut engendrer des représentations monotones"*.

iii) Enfin des remarques sur la "conception des conceptions".

On a signalé que le relevé des "modèles" était fait à partir des réponses à deux questions (l'une relative à la définition pour un élève de 14/15 ans, l'autre pour un élève plus jeune). Ce qui ouvrait la possibilité de donner des réponses éventuellement contradictoires.

A. Robert fait alors un choix :

> *"lorsque deux modèles non "compatibles" (un erroné, un plus correct par exemple) co-existent, que ce soit dans une des deux questions ou dans les deux, nous avons généralement choisi la description la "meilleure", la plus riche, en privilégiant toutefois tout ce qui est écrit en langue naturelle sur les expressions en langage formel quelles qu'elles soient"*.

Ce choix repose sur l'hypothèse de l'unicité de la conception. Hypothèse que l'on retrouve dans les critiques qu'A. Robert fait de sa méthodologie :

> *"Dans certaines classes, les étudiants n'ont pas apprécié d'être des "cobayes" et en particulier ont trouvé bien naïves les premières questions. Cela ne les a pas empêché dans l'ensemble de révéler leur modèle exprimé".*

Révéler "son modèle exprimé" suppose bien l'unicité d'un tel modèle.
Si l'on part d'une telle hypothèse, on va essayer de reconstruire une cohérence à travers le discours de l'élève. Si l'on pense au contraire qu'à un moment du processus de conceptualisation, plusieurs conceptions peuvent coexister, qu'à l'intérieur d'une conception peut s'en construire une autre, alors le relevé de contradictions, à l'intérieur d'un même discours, est tout à fait précieux : il témoigne du processus de conceptualisation en cours.

C'est ce dernier point de vue que nous avons choisi (cf 0.b.4.iii.). C'est dans ce cadre que nous établirons la méthode de recueil de "conceptions" à partir d'un questionnaire (cf II.a.2.i.)

Mais auparavant, il nous faut définir notre herbier de conceptions.

II.a.1.iii Un choix de conceptions, a posteriori et a priori.

Les conceptions sont locales, leur recueil nécessite donc une classification préétablie : sur quels critères de ressemblance pourrait-on en effet regrouper des vues partielles d'objet observé sinon sur des critères délimités a priori, résultats d'une étude épistémologique et didactique ?

Dire que l'identification des conceptions se fait a priori est cependant une position de principe. Dans les faits, le travail de recherche est un peu plus complexe. Il y a identification de conceptions "critiques" à partir d'une étude épistémologique, des obstacles repérés, des programmes en vigueur aux niveaux concernés, mise à l'épreuve à partir de préexpérimentations, ajustements...

On disposait, pour cet "herbier" de conceptions, de plusieurs références :

- les "points de vue" que l'analyse épistémologique a mis en évidence (point de vue cinématique, algébrique, approximation) ;
- les conceptions mises en évidence par les travaux antérieurs, en particulier ceux d'A. Robert que nous venons d'examiner.

Dans un premier temps, l'utilisation des points de vue (cf cf I.a.1.iii.) fournissait trois conceptions possibles :

- **une conception algébrique** (difficilement repérable sur la base d'une simple définition... puisqu'elle repose sur une non-définition et un fonctionnement opératoire) ;

- **une conception monotone** définie à partir du point de vue "cinématico-monotone";

- **une conception approximation** correspondant à la définition de l'expert.

Il s'agissait, on le rappelle (cf 0.c.2.), de repérer les conceptions relatives à une limite particulière $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

L'utilisation des travaux de B. Cornu comme ceux d'A. Robert que nous venons d'évoquer ont conduit à faire l'hypothèse de l'éclatement du "point de vue approximation", c'est à dire du "modèle statique", en trois conceptions :

- une conception "primitive" : "quand x est grand, f(x) est grand" ;

- une conception "non majorée" : "f(x) peut prendre des valeurs plus grandes que tout réel" ;

- une conception "de l'expert" : "f(x) dépassera définitivement tout réel aussi grand que l'on veut, dès que x sera suffisamment grand", c'est à dire la traduction dans le langage naturel de la définition quantifiée.

Une dernière hypothèse était faite : de la même façon qu'A. Robert avait repéré des "modèles mixtes", l'analyse des programmes de Deug[27] pouvait faire penser à l'apparition d'une conception monotone non-majorée.

Les premières préexpérimentations eurent lieu en 1993/1994, aux niveaux Terminale S /Deug A.

Les résultats révélèrent une adéquation entre l'herbier de conceptions que nous venons de définir et les réponses des étudiants de Deug et de TS : les catégories définies permettent de classer la plupart des conceptions recueillies. Toutes, sauf deux :

- il s'est avéré difficile de détecter, avec le filtre d'un questionnaire, des "conceptions algébriques" repérables, on l'a dit ci-dessus, par une non-définition et un fonctionnement opératoire correct : ceux qui ne donnent pas de définition ont peut-être oublié d'en donner une, ou jugent inutile de définir les objets, dès lors que leur manipulation ne pose pas de problème. Il est plus facile d'interpréter une réponse qu'une non-réponse ;

- il s'est avéré également difficile de démêler les conceptions "non majorée" et "monotone non majorée" : c'est le caractère "non majoré" qui apparaissait le plus clairement.

Nous aborderons donc le questionnaire définitif en essayant d'identifier quatre conceptions :

- une conception "primitive" ;

- une conception "monotone" ;

- une conception "non majorée" ;

- une conception "experte".

---

[27] Les étudiants disposent en Deug du théorème des fonctions croissantes non majorées : si f est croissante et non majorée sur [a, b[, alors $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$.

II.a.2. Bilan d'une première expérimentation.

Mars 1995. Un même questionnaire est proposé à trois classes de Terminale S du même lycée de Montpellier et à 180 élèves d'un amphi de Deug A (première année) de l'Université Montpellier II. Nous allons ici présenter le questionnaire, le dispositif de passation et le bilan des réponses.

II.a.2.i Présentation du questionnaire

1. Son principe.

Il s'agissait tout à la fois de repérer les conceptions des élèves relatives aux limites de fonction et d'évaluer l'influence de la calculatrice graphique (seul type de calculatrice disponible à cette époque) sur le processus de conceptualisation. Il fallait donc :

i) élaborer un questionnaire permettant de relever les "conceptions exprimées" à partir de deux questions portant sur la définition des limites ;

ii) faire passer ce questionnaire à deux populations en TS et en Deug, en partageant ces deux populations en **deux sous-groupes, composant soit avec, soit sans, calculatrice** ;

iii) recueillir les traces de plusieurs conceptions éventuelles, en augmentant l'écart entre les deux "sollicitations de définition" :

- la première question demandant la définition actuelle (en TS, ou en Deug) de la limite (au lieu de la définition "pour un élève de 14/15 ans", chez Aline Robert) ;
- la deuxième question demandant une définition adaptée à un élève de seconde (au lieu de "l'adaptation de la définition pour un élève plus jeune") ;

iv) donner, après les questions relatives aux définitions, des exercices portant sur la détermination de limites ;

v) s'intéresser à la nature des techniques mises en oeuvre pour la résolution de ces exercices et à la mise en évidence des théorèmes-en-acte ;

vi) repérer des schèmes de résolution et des schèmes d'action instrumentée tels que les élèves pourraient les décrire.

Cette étude pourrait alors déboucher sur la mise en évidence d'une relation entre l'utilisation de la calculatrice et le processus de conceptualisation.

2. Son contenu.

Des commentaires (destinés à justifier les choix faits) ont été ajoutés en italique. L'ordre d'exposition a été aussi modifié, pour plus de clarté. Le questionnaire initial est en gras (cf. Annexe 1 page 375 pour l'original).

Questionnaire. Questions Q0 à Q7.

En italique, les commentaires ajoutés ici, en gras le questionnaire initial.

Un premier groupe de questions (Q0, Q4', Q4") concernait l'utilisation de la calculatrice :

- sur le plan de son utilisation générale (en cours ou à la maison) ;

- sur le plan de son utilisation pour la recherche de limites (fréquence d'utilisation et nature des gestes réalisés.

Q0 Utilisez-vous votre calculatrice en mathématique :

- En cours ?

Beaucoup ❑ Régulièrement ❑ De temps en temps ❑ Rarement ❑ Pas du tout ❑

- Chez vous ?

Beaucoup ❑ Régulièrement ❑ De temps en temps ❑ Rarement ❑ Pas du tout ❑

Q4' Utilisez-vous votre calculatrice quand vous recherchez des limites de fonction ?

Beaucoup ❑ Régulièrement ❑ De temps en temps ❑ Rarement ❑ Pas du tout ❑

Q4" Que faites-vous avec votre calculatrice quand vous recherchez des limites de fonction ?

Un deuxième groupe de questions concernait la limite étudiée, du point de vue de sa définition (Q1 et Q2), des objets associés (graphiques : Q3, ou "algébriques" : Q3') et des méthodes de recherche (Q4).

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}+$ et vérifiant : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Q1 Donnez une définition mathématique de cette situation.

Cette formulation était celle de la version "élèves de Terminale".

Le questionnaire version Deug A demandait "une définition mathématique précise" et ajoutait : "définition avec quantificateurs vue cette annnée", pour éviter toute ambiguïté.

Q2 Comment expliqueriez vous cela plus simplement à un élève de seconde ?

Q3 Donner 4 exemples de graphiques de fonctions admettant comme limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (on donnera seulement l'allure générale de ces graphiques)

Q3' Donner 5 exemples de fonctions admettant comme limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

f(x) =	f(x) =	f(x) =	f(x) =	f(x) =

Une remarque sur Q3 et Q3' : il n'y avait pas autant de cases disponibles en Q3 et Q3', pour éviter que les élèves ne se sentent "obligés" de donner en Q3' la formule de la fonction représentée en Q3. L'objectif était de leur laisser le plus de liberté possible en Q3 (en donnant éventuellement des allures de graphique pour lesquels ils ne disposeraient pas de formule explicite).

Q4 Quelles méthodes connaissez-vous pour prouver que f tend vers +∞ quand x tend vers+∞ ?

Une remarque sur l'ordre des questions : on constatera en se reportant à la forme originale du questionnaire, en Annexe 1 page 375, que les questions théoriques et les questions relatives à l'utilisation de la calculatrice étaient mêlées.

En particulier la question Q4" précède les exercices de Q5, concernant des exercices de recherche de limite. Cette présentation a été choisie pour éviter un partage trop rigide : d'abord les questions sur l'usage de la calculatrice, puis les questions théoriques. On voulait ainsi intégrer d'une certaine façon l'outil dans le travail de l'élève.

Un troisième groupe de questions (Q5) se rapportait à des recherches de limite.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite +∞ quand x tend vers+∞ ?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté
(issu, ou non, de votre calculatrice)

(Cette dernière parenthèse ne figurait pas et pour cause, sur les copies de ceux qui n'avaient pas de calculatrice à leur disposition).

a)	lnlnx	Oui ❐	Non ❐	Je ne sais pas ❐
b)	x-1000 lnx.	Oui ❐	Non ❐	Je ne sais pas ❐
c)	x^2-10 x.sinx	Oui ❐	Non ❐	Je ne sais pas ❐
d)	x.sinx	Oui ❐	Non ❐	Je ne sais pas ❐
e)	|x.sinx |	Oui ❐	Non ❐	Je ne sais pas ❐
f)	lnx+10.sinx	Oui ❐	Non ❐	Je ne sais pas ❐
g)	x^2 + sinx	Oui ❐	Non ❐	Je ne sais pas ❐
h)	$\frac{100000x-50}{x+1000}$	Oui ❐	Non ❐	Je ne sais pas ❐
h)	$\frac{e^x}{x^{50}}$	Oui ❐	Non ❐	Je ne sais pas ❐

On trouvera dans les pages qui suivent des illustrations de ces 8 fonctions, suivie d'une présentation des variables didactiques relatives à chaque fonction.

Un quatrième groupe de questions était relatif aux propriétés générales des fonctions, en particulier aux rapports entre comportement local et comportement global.

Il s'agissait aussi de tester la cohérence entre les conceptions recueillies dans les définitions Q1 et Q2 et les propriétés reconnues des fonctions.

Q6 Soit f définie sur ℝ+. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?
Justifiez votre réponse et faites un schéma pour l'illustrer.

a) si f est positive non majorée, alors elle admet pour limite +∞ quand x tend vers+∞

Vrai ❐ Faux ❐ Je ne sais pas ❐

b) si f est strictement croissante, alors elle admet pour limite +∞ quand x tend vers +∞

Vrai ❐ Faux ❐ Je ne sais pas ❐

c) si f admet pour limite +∞ quand x tend vers +∞, alors f n'est pas majorée.

Vrai ❐ Faux ❐ Je ne sais pas ❐

d) si f admet pour limite +∞ quand x tend vers+∞, alors f est nécessairement croissante à partir d'une certaine valeur de x.

Vrai ❐ Faux ❐ Je ne sais pas ❐

Enfin, la question Q7 ci-après était destinée à tester l'aptitude des élèves à se détacher des premières impressions de l'écran et surtout à faire intervenir les limites comme outil, à partir de la définition vue en classe :

"Puisque la fonction logarithme a comme limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, alors on peut affirmer qu'à partir d'un certain moment le logarithme dépassera définitivement 250".

Q7 On considère l'équation $\ln x = 250 \sin x$, pour $x > 0$.
a) Combien de solutions a-t-elle ? (on justifiera la réponse fournie)
Un nombre fini ❒ Un nombre infini ❒ Je ne sais pas ❒
b) Donner une valeur approchée à 10^{-5} de la 1000ème solution, en précisant le raisonnement que vous avez suivi et en indiquant l'utilisation faite de la calculatrice.

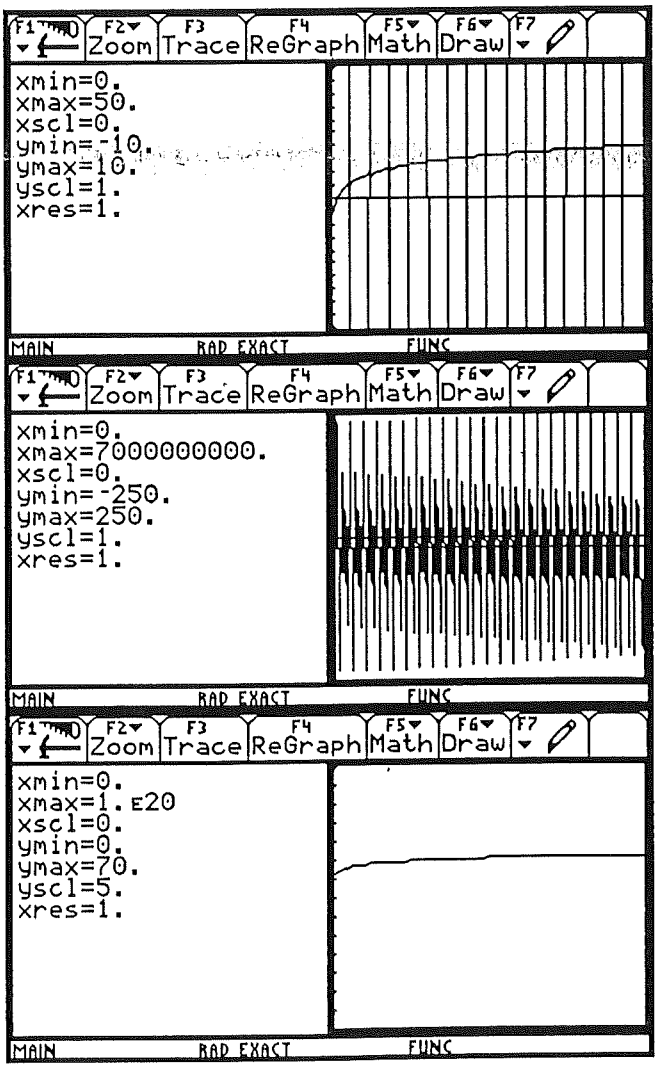
Quelques remarques sur cet exercice :

- l'outil "limite" n'est pas indispensable. Si on traite l'équation sous la forme $\ln x = 250 \sin x$, l'utilisation de la stricte croissance de la fonction ln x suffit pour affirmer que, pour $x > e^{250}$, $\ln x > 250$;

- par contre, si on traite l'exercice sous la forme $\ln x - 250.\sin x = 0$, il est assez naturel d'utiliser la limite infinie de la fonction de gauche pour justifier la recherche des solutions sur un intervalle borné ;

- le choix du coefficient 250 est justifié par le fait que les calculatrices graphiques ne gèrent pas les nombres au-delà de 10^{99} et que e^{250} dépasse 10^{99}...

La détermination graphique, indépendamment de la mobilisation des fonctions de référence, induit l'idée qu'il y a des solutions "aussi loin que l'on aille".



La situation se complique, du fait de l'apparition d'images paradoxales (I.c.2.i.).

Sur l'image ci-contre, on peut aussi apercevoir, avec un certain effort d'imagination, la représentation graphique de la fonction logarithme...

Et au delà d'une certaine valeur de x, la calculatrice n'évalue plus les fonctions trigonométriques.

Exit la sinusoïde.

Il ne reste plus que la courbe de la fonction logarithme.

Représentations graphiques des fonctions intervenant dans la question Q5

Pour pouvoir repérer d'un coup d'oeil la spécificité de l'exercice, on a choisi pour chaque fonction une fenêtre donnant quelques informations sur sa représentation graphique.

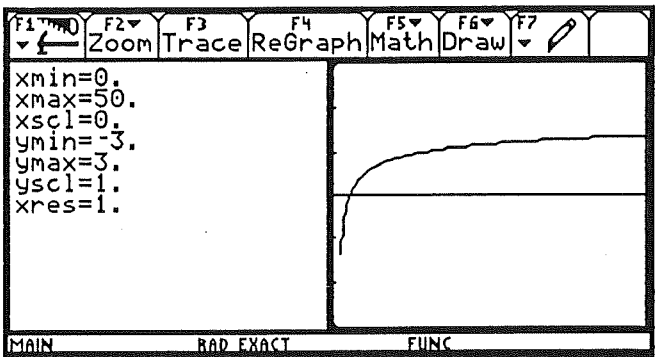
Bien entendu, d'autres choix de fenêtres pourraient donner des informations très différentes.

En fait l'expert ne tire pas ses informations des fenêtres obtenues, mais choisit ces fenêtres à partir de la connaissance qu'il a de ces fonctions.

Pour l'élève, il n'en va pas de même. On trouvera après ces graphiques une classification des variables didactiques motivant le choix de ces fonctions.

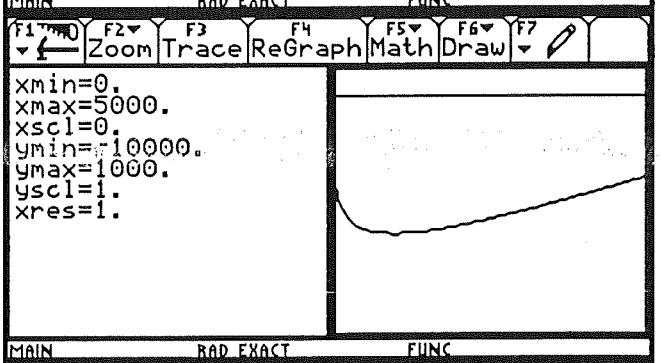
a) **lnlnx**

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$



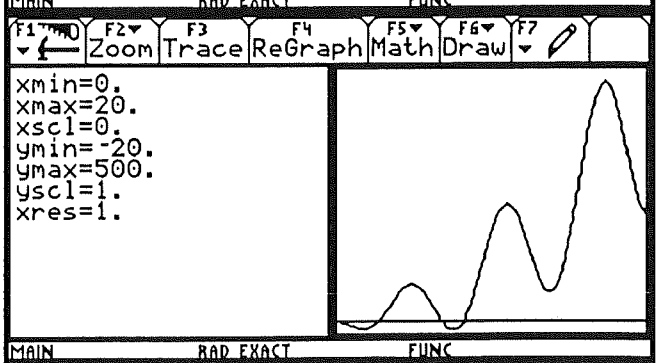
b) **x-1000 lnx.**

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$



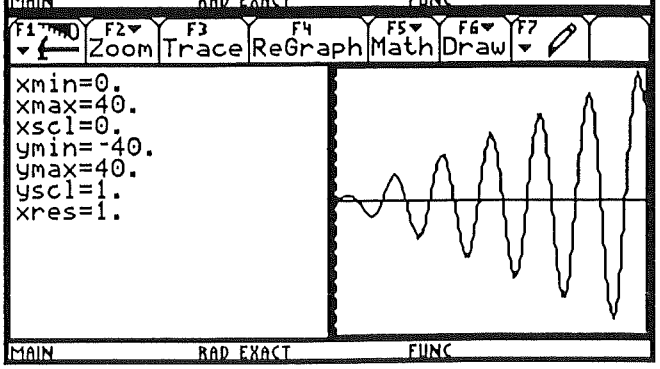
c) **x^2-10 x.sinx**

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$



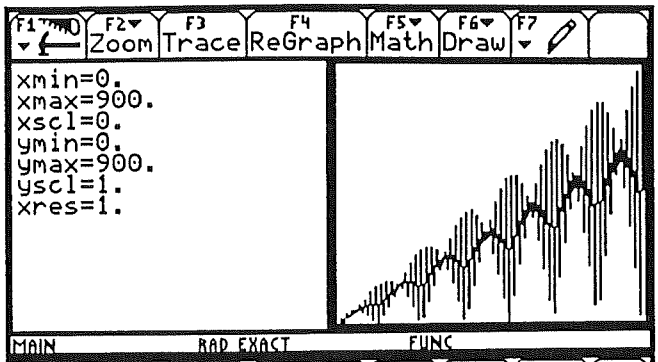
d) **x.sinx**

Pas de limite pour f.



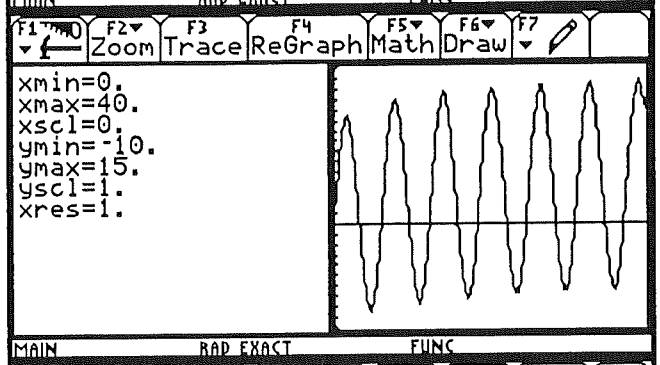
e) $|x.\sin x|$

Pas de limite pour f.



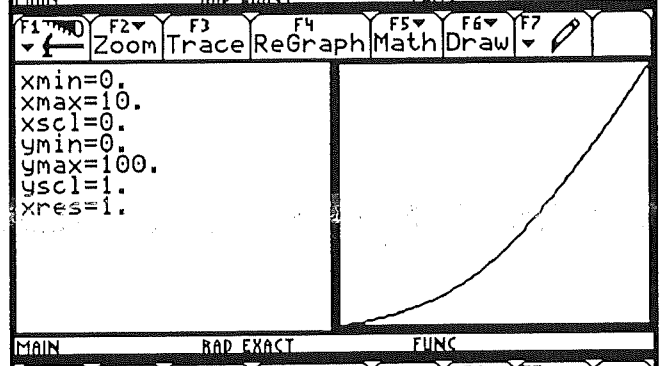
f) $\ln x+10.\sin x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$



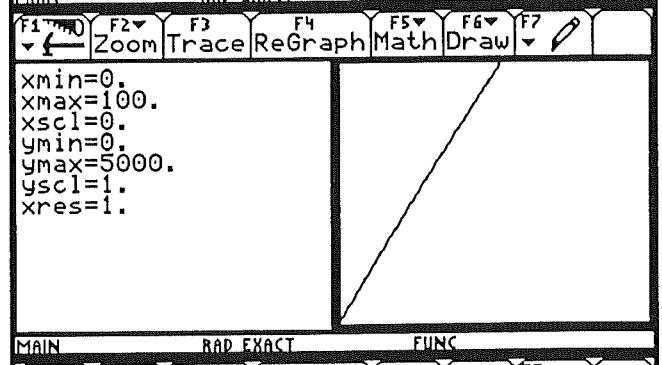
g) $x^2 + \sin x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$



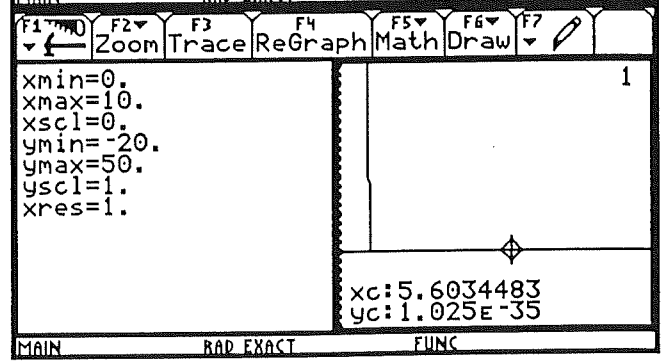
h) $\dfrac{100000x-50}{x+1000}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 100000.$$



h) $\dfrac{e^x}{x^{50}}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$



Fonctions choisies et variables didactiques.

1. On a tenu compte de 5 variables, pour le choix des fonctions, qui peuvent chacune prendre trois valeurs :

- **le sens de variation** : les fonctions pouvaient être croissantes sur $\mathbb{R}+$ (c'est le cas pour lnlnx, ou croissantes à partir d'une certaine valeur de la variable (c'est le cas pour x-1000lnx), ou "oscillantes" (lnx+10sinx) ;
- **les grandes valeurs prises par la fonction** (à échelle de calculatrice) : les fonctions pouvaient prendre des valeurs grandes (xsinx), ou uniquement des valeurs "petites" (c'est le cas pour lnlnx) ou très petites (c'est le cas pour $\frac{e^x}{x^{50}}$ dont la valeur maximale atteinte sur une calculatrice graphique, pour x = 227, est de l'ordre de 10^{-20}) ;
- **la positivité** : les fonctions pouvaient être positives sur $\mathbb{R}+$ (pour |xsinx| par exemple), positives à partir d'un certain moment (c'est le cas pour x-1000lnx) ou prendre des valeurs négatives aussi loin que l'on veut (pour xsinx) ;
- **les tactiques de démonstration** : elles pouvaient reposer sur la simple évocation de fonctions de référence (pour lnlnx, la fonction rationnelle et $\frac{e^x}{x^{50}}$), mettre en oeuvre des techniques opératoires (pour x-1000lnx) ou des techniques de minoration ;
- **le "window shopping"** (cf 0.b.5.ii.): il pouvait être simple de choisir une fenêtre qui "dévoile" la fonction (pour lnlnx ou xsinx), difficile (pour x-1000lnx il faut aller au delà de 10000 pour que la fonction reste positive, pour lnx+10sinx, il faut dépasser 20000) ou impossible (pour $\frac{e^x}{x^{50}}$, aucune fenêtre ne permettra de voir la remontée impétueuse de la fonction -sur une calculatrice graphique).

2. Le choix de ces variables est évidemment lié au choix de conceptions qui a été fait en II.a.1.iii. :

- le sens de variation est important pour la conception "monotone" ;
- les grandes valeurs prises par la fonction sont importantes pour les conceptions "primitive" et "non majorée" ;
- la positivité a été choisie pour tenter de distinguer ces deux dernières conceptions :
  - une conception "primitive" suppose de "grandes valeurs tout le temps" pour la fonction (ce qui interdit implicitement des valeurs négatives) ;
  - une conception "non majorée" suppose que la fonction puisse prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut (ce qui autorise implicitement des valeurs négatives) ;
- l'intervention importante du sinus est censée repérer les traces de conceptions "algébriques" : "si on ajoute à une fonction une autre fonction qui n'a pas de limite, alors la fonction somme n'a pas de limite".

3. On a dressé un bilan croisé des différentes fonctions et des variables didactiques.

On a utilisé différents niveaux de gris : on laissera la case en blanc pour le premier niveau, en gris pour le deuxième, en noir pour le troisième (il s'agit des trois niveaux repérés, dans le paragraphe 1 ci-dessus, pour chaque variable).

Il y a bien sûr des hypothèses implicites dans ce choix de "couleurs" :

- il est plus difficile d'identifier une fonction à limite infinie si elle n'est pas monotone, si elle ne prend pas "vite" de grandes valeurs, si elle ne "devient" pas "vite" positive ;

- il est plus difficile d'utiliser des techniques d'encadrement que des techniques opératoires (largement utilisées dans la pratique, cf I.b.5.), plus difficile d'utiliser des techniques opératoires que d'utiliser les fonctions de référence (encore plus largement utilisées) ;
- il est plus difficile d'identifier une limite quand on n'arrive pas à cerner la représentation graphique de la fonction par un fenêtrage rapide.

Pour déterminer cette difficulté, on s'est appuyé sur des critères a priori et sur les préexpérimentations :

- pas de difficulté pour lnlnx, x^2-10xsinx, xsinx, |xsinx| et x^2+ sinx ; les "caractéristiques" des courbes apparaissent facilement sur des fenêtres standards ;
- des difficultés apparaissent pour cerner x-1000lnx, lnx+10sinx et $\frac{100000x-50}{x+1000}$; les fenêtres sont là moins habituelles ;
- quant à $\frac{e^x}{x^{50}}$, aucune fenêtre ne donne vraiment à voir la représentation graphique qui reste "collée" à l'axe des abscisses.

	Variations.	Grandes valeurs.	Positivité	Tactiques	Window shopping.
lnlnx					
x-1000lnx					
x^2-10xsinx					
xsinx					
|xsinx|					
lnx-10sinx					
x^2+sinx					
$\frac{100000x-50}{x+1000}$					
$\frac{e^x}{x^{50}}$					

Fonctions du questionnaire et variables didactiques.

Le choix des couleurs permet une facilité de lecture. Il ne doit cependant pas conduire à des conclusions trop hâtives. Deux exemples de lecture :

- pour la fonction $\frac{100000x-50}{x+1000}$, la ligne est (presque) toute blanche. Cela ne veut pas dire que l'exercice est facile. Les trois premières cases blanches indiquent que la fonction est croissante, qu'elle prend de grandes valeurs et qu'elle est positive (trois éléments qui pourraient indiquer une limite infinie). La quatrième case blanche indique que c'est une fonction de référence (qui ne tend pas vers l'infini). La cinquième case grisée indique qu'il est difficile de déterminer une fenêtre pertinente. La combinaison de ces éléments en fait une fonction "à problèmes" ;
- pour la fonction lnx-10sinx, il y a aussi une difficulté prévisible : c'est une fonction oscillante (première case noire), qui ne prend pas de grandes valeurs (deuxième case grise), qui reste longtemps négative (troisième case grise), dont l'étude nécessite une minoration (quatrième case noire) et pour laquelle le fenêtrage n'est pas immédiat (quatrième case grise).

II.a.2.ii Présentation du dispositif.

1. Choix des classes, choix des élèves.

Le questionnaire est donc soumis à un échantillon d'élèves de Deug A (un amphi de 185 étudiants) et à trois classes de Terminale S (73 élèves [28]), en Mars 1995. Il fallait que les élèves disposent de 1h30 pour composer (c'est le temps nécessaire révélé par les préexpérimentations). Il n'a d'ailleurs pas été facile de trouver les élèves et les professeurs, acceptant de dégager ce temps là dans des "classes à examen".

La date est choisie pour que les élèves aient déjà rencontré les limites de fonction et les aient utilisées dans des situations variées (en tous cas dans les situations prévues par les programmes).

Les classes en question correspondent à des situations d'intégration de la calculatrice "banales" : la calculatrice n'est pas explicitement exclue du cours, mais rien n'est dit sur son utilisation, laissée à la discrétion des élèves.

La présentation du questionnaire aux élèves est ainsi faite : il s'agit d'un travail pour lequel la calculatrice peut être utilisée ou non. Pour évaluer l'importance de cet outil, dans le cadre d'une recherche universitaire, on propose à la moitié des élèves de composer avec calculatrice, à l'autre moitié sans calculatrice. Dans un premier temps, on laisse les élèves choisir leur groupe, puis on égalise les effectifs par des affectations arbitraires, pour éviter de trop grands déséquilibres. Enfin, pour s'assurer du sérieux des réponses, il est précisé que les résultats individuels seront pris en compte, de façon assez souple, pour l'évaluation semestrielle.

2. Problèmes de répartition à l'intérieur des deux modalités.

Il s'est avéré que la consigne de libre choix du groupe (avec, ou sans, calculatrice) et l'indication d'une prise en compte des résultats pour l'évaluation étaient contradictoires, dans la mesure où la calculatrice relève de la "composante privée" ([Coppé, 1995]) du travail de l'élève. Comme le souligne S. Coppé, le passage du privé au public ne se fait que si l'élève a une idée de la validité de son résultat. L'intégration de la calculatrice dans un processus d'évaluation correspondait à un changement de contrat trop brutal, d'où un refus très majoritaire [29] :

- dans les trois classes de TS, un tiers seulement des élèves choisit la modalité avec calculatrice. Mais le reéquilibrage des groupes peut se faire avec une pression assez modérée ;
- dans l'amphi de Deug A, seuls 24 élèves (sur 185, soit 13%) acceptent de composer avec calculatrice. Et là les sollicitations et pressions diverses n'y feront rien : à la fois les effets de foule, une autorité plus grande des élèves (par rapport à la classe de Terminale), une marginalisation encore plus grande de la calculatrice par rapport au lycée, font que le déséquilibre demeurera : 24 élèves composeront avec calculatrice, 161 élèves composeront sans calculatrice.

Ceci entraînera d'ailleurs des perturbations importantes dans l'organisation pratique : il avait été prévu 90 copies avec la mention "sans calculatrice" et 90 copies avec la mention "avec calculatrice" [30]. L'enseignant présent ce jour là, pour ne rien modifier

---

[28] On constatera que 73 élèves, pour trois classes, ce n'est pas beaucoup... Il s'agit en fait de deux classes de 30 élèves, et d'un groupe de 13 élèves d'une troisième classe : le professeur de mathématiques concerné avait laissé entendre à ses élèves que l'épreuve était facultative. On a pu vérifier à l'occasion de ce travail expérimental qu'il était très difficile de mettre en place des dispositifs... infaillibles, et que la communication parfaite n'existe pas.

[29] On constatera, ce qui est cohérent avec l'interprétation du refus, une situation inverse dans la classe expérimentale (cf II.b.) où la calculatrice est intégrée.

[30] C'était la seule différence, on l'a vu, sur les deux types de copies, avec la différence de parenthèse dans l'énoncé de Q5.

dans les énoncés, ira photocopier 70 questionnaires supplémentaires pour les "sans calculatrice", ce qui entraînera des retards et une certaine agitation préjudiciable à la réflexion générale.

Le choix de composer, avec ou sans calculatrice, apparaît indépendant de la familiarité avec l'outil et de son utilisation -privée- pour étudier les limites. On pourra ainsi remarquer (Annexe 2, page 382, protocole n°1) un questionnaire d'un élève de TS ayant choisi de composer sans calculatrice et annonçant à la question Q4, comme méthode de recherche de limite, une seule méthode : la calculatrice. Ce qui explique d'ailleurs que ses résultats à la question Q5 ne soient pas très bons.

Pour finir, de façon à disposer d'effectifs à peu près équivalents (pour la commodité du dépouillement), n'ont été retenues dans le groupe "Deug A, sans calculatrice" que 27 copies : on a d'abord éliminé les copies indiquant un retard dans la réception du questionnaire (du fait des photocopies supplémentaires nécessaires - voir ci-dessus). Il ne restait alors qu'à peu près 90 copies. On en a retenu 1 sur 3 par un tirage aléatoire.

Au total, on dispose donc de l'effectif :

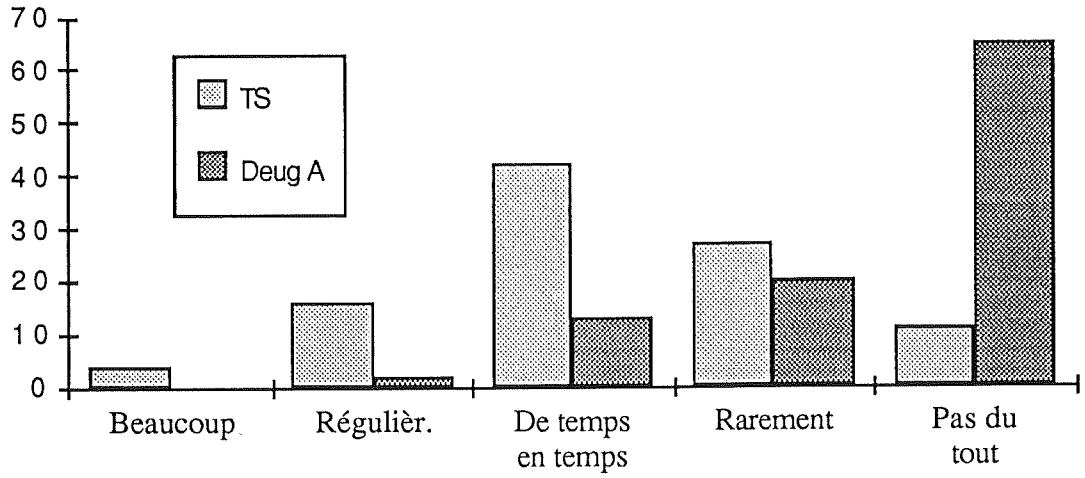
	TS	Deug A	Total
Avec calculatrice	38	24	62
Sans calculatrice	35	27	62
Total	73	51	124

II.a.2.iii Dépouillement : du côté des conceptions.

1. Résultats relatifs à l'utilisation de la calculatrice.

Les trois premiers résultats (relatifs aux questions Q0 et Q4') portent sur l'ensemble de l'effectif de Deug A (185 élèves), les résultats suivants portent sur l'échantillon de 51 élèves (24 élèves avec calculatrice, 27 élèves sans calculatrice).

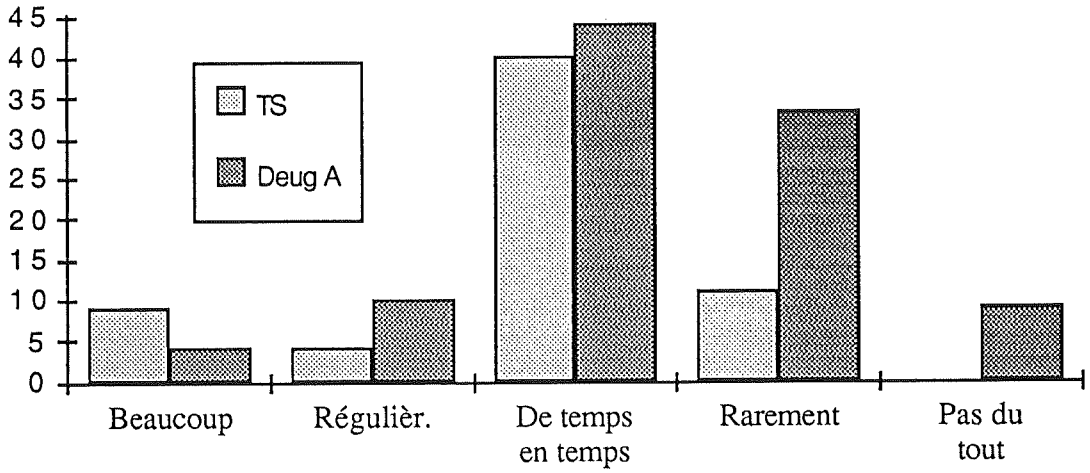
Question Q0



Graphique 1 (réponses en pourcentage de l'effectif total)
Utilisation de la calculatrice en cours.

Pour l'utilisation de la calculatrice "en cours" (graphique 1 ci-dessus), le mode se situe sur "de temps en temps" en Terminale S et sur "pas du tout" en Deug A.. Cela traduit une rupture entre le lycée et l'université.

L'évolution n'est pas du même type si l'on considère l'utilisation de la calculatrice "à la maison" (graphique 2 ci-dessous). On observe dans les deux groupes un déplacement "vers la gauche" : la calculatrice est plus utilisée à la maison qu'en cours. Mais alors qu'en TS, le mode est toujours situé sur "de temps en temps", on constate un basculement du mode en Deug A, qui passe de "pas du tout" à de "temps en temps".

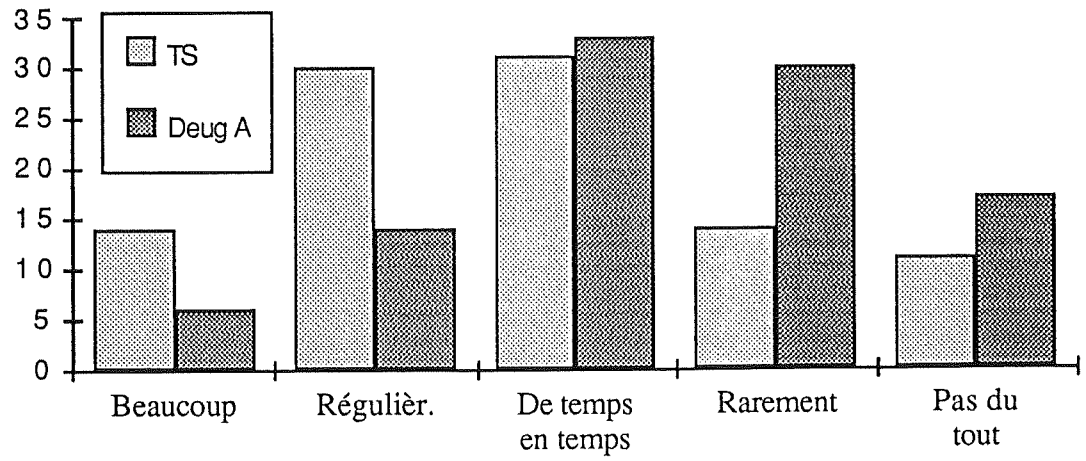


Graphique 2 (réponses en pourcentage de l'effectif total)
Utilisation de la calculatrice à la maison.

Cette situation modale se retrouve pour l'utilisation de la calculatrice dans l'étude des limites.

Question Q4'

La calculatrice est davantage sollicitée pour le calcul de limites en Terminale qu'en Deug A (graphique 3 ci-dessous), mais l'écart n'est pas de même nature que l'écart constaté dans l'utilisation en classe.



Graphique 3 (réponses en pourcentage de l'effectif total)
Utilisation de la calculatrice pour des recherches de limite de fonction.

Il semble bien que le passage du Lycée à l'Université constitue une rupture dans l'utilisation de la calculatrice: au lycée, la calculatrice est d'utilisation privée, mais a une place tolérée en cours. En Deug, la calculatrice est d'utilisation privée et n'a pas "d'espace" en cours [31].

Question Q4"

Comment utilisez-vous votre calculatrice pour conjecturer que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$? (résultats tableau 1 ci-dessous).

	TS	Deug A
Je regarde le graphique, en réglant la fenêtre	57	53
Je regarde le graphique et j'utilise le zoom	1	4
Je combine graphique et calcul de valeurs	22	16
Je calcule quelques valeurs	7	8
J'utilise des fonctions auxiliaires	0	4
On ne peut pas	1	0
Sans réponse	12	15

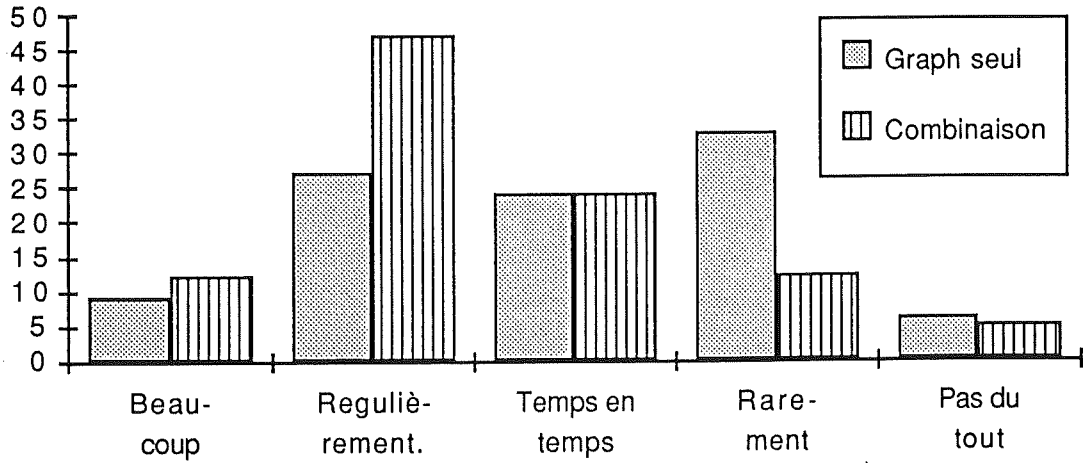
Tableau 1 (réponses en pourcentage de l'effectif total)
Utilisation de la calculatrice pour conjecturer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Quelques remarques sur ce tableau.

i) Un premier renseignement, confirmant ce qui avait été dit concernant les contraintes instrumentales : **la majorité des élèves n'utilise que le graphique.**

ii) Un deuxième renseignement : **la variété des méthodes utilisées est liée à la fréquence de l'utilisation de l'outil.** On a relevé la fréquence d'utilisation de la calculatrice pour l'étude des limites dans les deux groupes les plus importants :

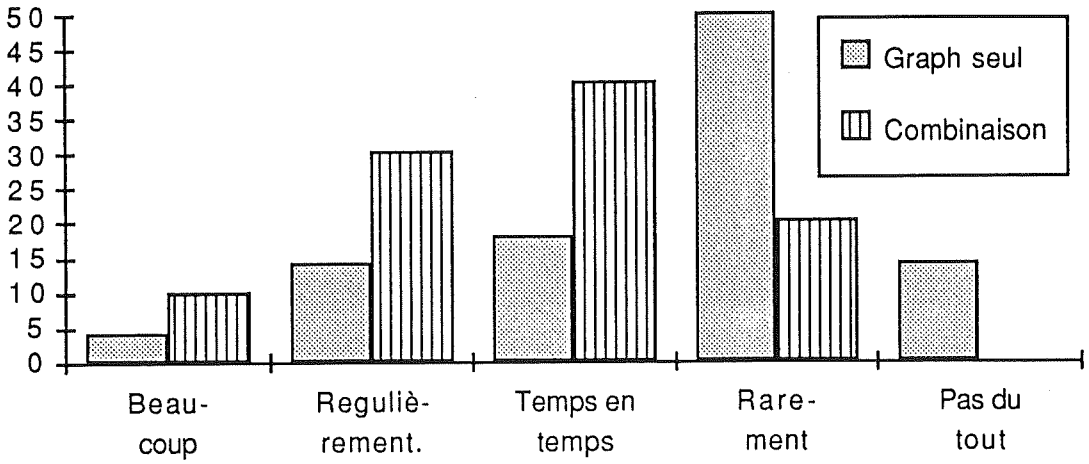
- le groupe des élèves qui déclarent combiner deux méthodes de recherche (graphique et numérique) ;
- le groupe des élèves qui ne déclarent qu'une observation graphique.



Graphique 4. Niveau TS (réponse en pourcentage)
Fréquence de l'utilisation de la calculatrice et méthode de recherche des limites

[31] L'explication de cet état de fait nécessiterait une étude à part entière. On ne peut émettre ici que des hypothèses : la calculatrice est autorisée au baccalauréat, mais souvent refusée lors des examens universitaires ; le cours de mathématiques en lycée est davantage qu'en Deug illustré par des exercices où une calculatrice graphique a sa place.

Le graphique 4 (niveau TS) ci-dessus et le graphique 5 (niveau Deug) ci-dessous sont clairs : **ceux qui combinent observations graphiques et numériques utilisent plus fréquemment leur calculatrice pour la recherche de limites que ceux qui utilisent le graphique seul.**



Graphique 5. **Niveau Deug A** (réponse en pourcentage)
Fréquence de l'utilisation de la calculatrice et méthode de recherche des limites

Les formulations de certains élèves témoignent parfois d'une habileté certaine :

- ainsi l'évocation de "fonctions auxiliaires" (qui correspond à une forte utilisation de la machine) ; elle consiste à observer le graphique de $\frac{1}{f}$ plutôt que celui de f (car "il est plus commode de repérer 0 que $+\infty$") ;
- une autre méthode consiste à considérer simultanément le graphe de f et celui de fonctions dont on sait qu'elles ont pour limite $+\infty$ (ce qui revient là aussi à repérer des écarts qui tendent vers 0).

D'autres formulations sont très elliptiques : "soit graphiquement, soit en calculant f(x) pour un x très grand".

Ainsi le mot de "combinaison" que nous avons utilisé dans le tableau et les graphiques ci-dessus est-il sans doute ambigü : pour certains élèves il s'agit de considérer soit la courbe soit un tableau de valeurs. Pour d'autres il s'agit de confronter les deux types d'information. Pour connaître plus précisément la nature des gestes réalisés, il faudra une observation "de proximité". Nous y viendrons en II.3.b.i..

iii) Une troisième information concerne l'effet de l'utilisation des calculatrices sur les objets manipulés : **il y a une sorte de réduction de l'infini au fini c'est à dire une réduction des objets mathématiques à l'image à travers lesquels ils sont représentés.**

Deux exemples :
"Je trace le graphe et je regarde ce qui se passe à l'infini" (Deug A);
"Je recherche les limites en $+\infty$ en posant $x=10^{10}$, puis $x = 10^{20}$. Si dans les deux cas je trouve une limite très grande, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ "(Deug A).

A noter une réponse originale en TS (c'est la seule de ce type) qui va à l'encotre de cette réduction de l'infini: "on ne peut pas repérer une limite infinie avec une calculatrice graphique (alors qu'on pourrait repérer une limite à distance finie)".
Ainsi l'infiniment grand échapperait à la calculatrice, mais pas l'infiniment petit.

iv) Enfin une quatrième information concerne le processus de conceptualisation lui-même : **de nombreuses phrases indiquant les "actions machine" expriment des conceptions.**

Ainsi les phrases suivantes :
"Je prends une échelle me permettant d'avoir des valeurs de x très grandes (≈ 100) et je **regarde l'allure de la courbe pour ces valeurs, si elle croît**" (Deug A) ;
"**Je l'observe lorsque pour x->+∞, la courbe représentative de f est constamment croissante**, en général je prends une échelle assez élevée".
Cette dernière information est importante, elle nous permettra de confronter la conception monotone exprimée ici avec les conceptions exprimées en Q1 et Q2.

2. Résultats relatifs aux conceptions.

Il s'agira pour le moment des questions **Q1, Q2, Q3, Q3'.**

i) Les réponses les plus simples à analyser sont celles relatives à Q3' : **les fonctions à limite infinie évoquées par les élèves sont les fonctions de référence** (fonctions rationnelles, logarithmes, exponentielles et composées en TS, auxquelles s'ajoutent les fonctions hyperboliques en Deug A).

ii) Sur le plan des graphiques (question Q3), **les courbes proposées sont celles de fonctions continues et croissantes sur** $\mathbb{R}+$ (la plupart du temps, il s'agit d'une fonction affine, d'une fonction convexe et d'une fonction concave) :
- seuls 3 élèves en Deug représentent des fonctions discontinues ;
- seuls 1 élève en TS et 2 élèves en Deug représentent des graphiques avec une oscillation, en précisant qu'il s'agit de l'ajout d'un sinus à une fonction à limite infinie.

Il n'y a pas un rapport direct entre courbes tracées et conceptions exprimées en Q1 et Q2 : parmi les trois élèves donnant des exemples de fonctions non monotones, un donne une définition de la limite monotone en Q1, l'autre ne donne aucune définition, le troisième donne en Q1 et Q2 des définitions correctes [32]. Il n'y a pas un rapport direct non plus entre l'utilisation de la calculatrice et la variété des courbes proposées : parmi les deux élèves de Deug qui proposent des fonctions non monotones, l'un utilise très souvent sa calculatrice, l'autre jamais. Mais ces résultats portent sur des effectifs beaucoup trop faibles pour être significatifs.

iii) Résultats relatifs à Q1 et Q2.

Les élèves de TS n'ont pas vu de définition de limite en cours. On leur demande pourtant une "définition mathématique". On doit préciser qu'aucun d'entre eux ne proteste, en déclarant une telle question illégitime au regard du programme étudié. Ils vont donc traduire, dans un langage qu'ils considèrent être un langage mathématique, ce qui définit, pour eux, la limite.
Les élèves de Deug A vont donner en Q1 une définition quantifiée de la limite, qu'ils ont vue en cours.
Pour les uns et les autres, notre travail a consisté à interpréter le plus fidèlement possible la définition donnée, pour la rapporter à telle ou telle conception. Bien entendu, cela ne signifie pas que, si un élève a donné une définition quantifiée experte de la limite, il est doté lui-même d'une conception experte.

---

[32] A. Robert a mis au contraire en évidence une relation entre "modèles dessinés", et "modèles exprimés" [Robert, 1982] : "Les dessins monotones sont largement majoritaires pour les modèles primitif et dynamique monotone (...). Au contraire, lorsque c'est un modèle mixte, préstatique ou statique qui est exprimé, les représentations graphiques associées sont plutôt non monotones".
Une explication de cette différence est peut-être que, s'agissant de la convergence de suites, on dispose de plus de choix de représentations graphiques que pour les limites infinies de fonction. Ainsi une discrimination entre modèles aurait été rendue davantage possible.

De sa conception, nous ne recueillons que des indices, comme nous l'avons déjà dit en 0.b.3.iii. Ainsi, chaque réponse est rangée dans une conception (conception primitive, monotone, non-majorée, experte) ou éventuellement dans "sans réponse", "tautologie", "ininterprétable".

Quelques exemples, pour illustrer notre classification (on donnera pour chaque élève sélectionné les deux réponses aux questions Q1 et Q2).

Niveau	Définition mathématique	Définition "élève de seconde".
TS	La fonction f est positive et n'est pas majorée. *Conception non majorée.*	Pour un x très grand, on a un f(x) très grand et augmentant. *Conception croissante.*
TS	Une fonction ayant une limite $+\infty$ est une fonction dont les valeurs sont proches de l'infini pour x très grand. *Conception primitive.*	Lorsque x est grand, les valeurs prises par la fonction sont grandes. *Conception primitive.*
TS	Lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction f(x) tend elle aussi vers $+\infty$. *Tautologie.*	Lorsque x prend des valeurs infiniment grandes, la fonction f(x) fait de même, c'est à dire que les valeurs prises par f(x) tendent vers $+\infty$. *Conception primitive.*
Deug A	$\forall A \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq c,\ f(x) \geq A$ *Conception experte.*	
Deug A	$\forall A \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq c \Rightarrow f(x) \geq A$ *Conception experte.*	Lorsqu'on prend des valeurs de x de plus en plus grandes, on peut obtenir des valeurs de f(x) aussi grandes qu'on le désire. *Conception non majorée.*
Deug A	$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}+$ tel que $f(x) \geq \varepsilon$ *Conception non majorée.*	Quand x est très grand, f(x) est aussi très grand. *Conception primitive.*
Deug A	$\forall x > 0, \exists A > 0$ tel que $f(x) > A$ *Ininterprétable.*	Pour x très grand, f(x) prend des valeurs très grandes. *Conception primitive.*
Deug A	$\forall A \in \mathbb{R}, \exists M > 0$ tel que $x \geq M \Rightarrow f(x) \geq A$ *Conception experte.*	Pour une valeur A donnée, on peut trouver une valeur M de telle sorte que pour tout x que l'on prend plus grand que M, c'est à dire pour x assez grand, alors f est minorée par A, cad f est grand devant A. *Conception experte.*

Quelques remarques sur cette classification :

- il y a en fait un rapport dialectique entre les deux définitions données par un même élève : en même temps on perçoit le glissement de sens, de la définition mathématique à la définition "élève de seconde" (et pour le marquer, il faut considérer les deux définitions séparément) et en même temps la deuxième définition permet de préciser le sens de la première (et donc, pour interpréter la première, il faut lire la seconde - ainsi, pour le deuxième élève, "proche de l'infini" signifie sans doute "qui prend de grandes valeurs") ;

- dans toute interprétation, il y a un effet d'extension/réduction, toujours délicat à mesurer. Quelques exemples :

- TS, définition mathématique : "La courbe n'a pas de limites finies quand x devient très grand. Elle est de plus continue et croissante" ; on a considéré ici que l'aspect dominant est l'aspect croissant, en cohérence avec la définition "élève de seconde" : "la courbe tend à s'échapper vers le haut et la droite du repère". Mais en classant la première définition dans la "conception monotone", on perd de vue l'aspect "fonction continue" et l'aspect "pas de limites finies".

- TS, définition mathématique : "La fonction f(x) est croissante et croît régulièrement sans pour autant être limitée par une asymptote, c'est à dire que sa vitesse de croissance ne diminue pas" ; il s'agit d'une fonction croissante non majorée dans la première partie de la définition et d'une fonction croissante convexe dans la deuxième partie. On a considéré ici que ce qui dominait, c'était l'idée de la monotonie "forte" de la fonction et donc rangé cette définition dans la "conception monotone".

- Deug A, définition mathématique : "$\forall B \in \mathbb{R}+$, tq $\forall x>B$ tq $f(x)>f(B)$" ; on a classé cette définition dans "conception monotone" (en cohérence avec la définition à un élève de seconde).

- on a classé dans "ininterprétable" des définitions basées en général (en Deug A) sur une utilisation insensée des quantificateurs et en TS des définitions qu'on ne peut pas rattacher facilement à telle ou telle conception, par exemple : "la limite est finie quand on peut dessiner la courbe dans son intégralité et infinie quand on ne peut pas la dessiner en entier".

Moyennant ces réserves relatives à l'interprétation des définitions données par les élèves, on peut ranger la plupart des réponses à partir des conceptions repérées.

Résultats globaux relatifs à la répartition des conceptions en TS et en Deug A

	TS		Deug A	
	Déf. math.	Déf. seconde	Déf. math.	Déf. seconde
Sans réponse	30	8	12	16
Tautologie	23	6	0	4
Ininterprétable	4	4	23	0
Conception primitive	**8**	**23**	**0**	**22**
Conception monotone	**32**	**58**	**8**	**37**
Conception non majorée	**3**	**1**	**20**	**14**
Conception experte	**0**	**0**	**37**	**8**

Tableau 2 (réponses en pourcentage de l'effectif total)
Répartition des conceptions repérées en TS et en Deug A

On a grisé les regroupements qui apparaissent significatifs (plus de 10% des réponses)

Les 4 conceptions repérées permettent de ranger 80% des réponses des élèves à la question Q2 (définition pour un élève de seconde), aussi bien en TS qu'en Deug A. Il y a moins de réponses exploitables pour la "définition mathématique", hors programme pour les élèves de TS (ce qui explique le fort taux de sans réponse ou de tautologie) et, du fait des quantificateurs "en pagaille", ininterprétable pour les élèves de Deug A.

On peut aussi repérer l'évocation de la courbe pour la définition donnée. On remarquera dans le tableau 3 ci-dessous qu'au passage en Deug il y a un détachement du registre graphique progressif (le 0% pour la définition mathématique n'indique pas une rupture radicale, mais le fait qu'une définition quantifiée se passe assez naturellement d'un dessin - ou plutôt le fait que l'illustration d'une définition quantifiée par un graphique nécessite un certain niveau de compréhension)

	Terminale S	Deug A
Définition mathématique	16	0
Déf. élève de seconde	23	14

Tableau 3 (réponses en pourcentage de l'effectif total)
Evocation du graphique dans les définitions en TS et en Deug A

L'évolution est attestée aussi par les réponses à la question Q6 (tableaux 4 à 7 ci-dessous).

	Terminale S	Deug A
Sans réponse	1	0
Vrai	38	31
Faux	57	69
Ne sait pas	4	0

Tableau 4 (réponses en pourcentage de l'effectif total)
Si f est positive non majorée, alors elle admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

	Terminale S	Deug A
Sans réponse	0	0
Vrai	21	18
Faux	79	82
Ne sait pas	0	0

Tableau 5 (réponses en pourcentage de l'effectif total)
Si f est strictement croissante, alors elle admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

	Terminale S	Deug A
Sans réponse	0	0
Vrai	78	96
Faux	18	2
Ne sait pas	4	2

Tableau 6 (réponses en pourcentage de l'effectif total)
Si f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, alors f n'est pas majorée.

	Terminale S	Deug A
Sans réponse	0	1
Vrai	82	67
Faux	17	28
Ne sait pas	1	4

Tableau 7 Si f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$,
alors f est nécessairement croissante à partir d'une certaine valeur de x.

Le tableau 7 indique une très forte résistance de l'idée d'une croissance nécessaire d'une fonction à limite infinie.

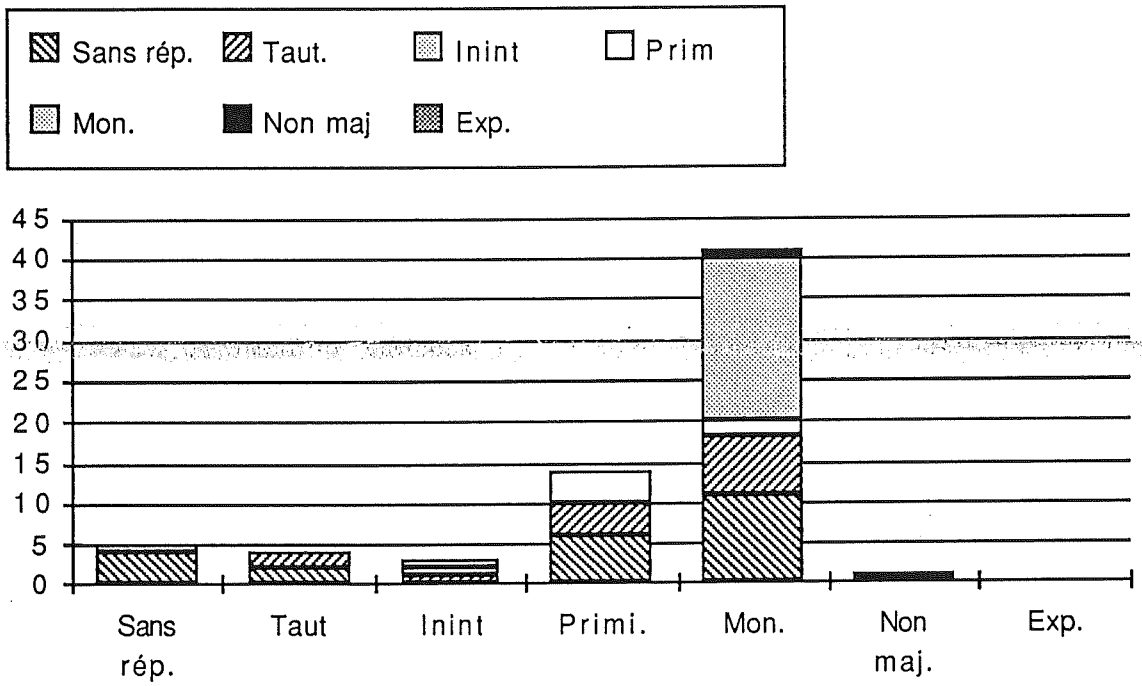
3. Etude spécifique des protocoles de Terminale Scientifique.

i) La conception monotone apparaît comme étant centrale.

D'abord à cause de son caractère **majoritaire** : la majorité des élèves (58%) donnent à un élève de seconde une explication se rattachant à cette conception. Ensuite à cause de son caractère **résistant** : 90% des élèves donnant une définition mathématique "monotone" confirment ce type de définition pour un élève de seconde (les 10% restant ne donnent aucune définition à un élève de seconde, ce qui peut laisser supposer qu'ils donneraient le même type de définition).

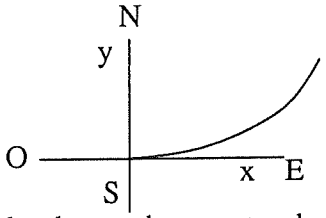
Parmi les 6 élèves ayant exprimé une définition mathématique "primitive", 2 élèves rejoignent la conception "monotone" pour un élève de seconde. Parmi les 2 élèves ayant exprimé une conception mathématique "non majorée", un rejoint la conception "monotone" pour un élève de seconde. Parmi les élèves ayant donné une définition "mathématique" en Q1, 84% vont se "rabattre", en Q2, sur une définition monotone.

Ceci est illustré par le graphique 4 ci-dessous :



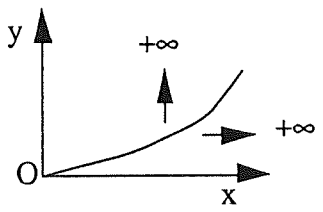
Graphique 6 (en effectif des réponses de TS)
Répartition des définitions mathématiques parmi les définitions "élève de seconde".

Le caractère attractif de la conception monotone semble lié aussi à son expression imagée comme en témoignent les définitions suivantes :



- "la courbe continue à l'infini dans la direction Nord-Est si l'on considère les positions magnétiques suivantes (dessin ci-contre)" ;
- "lorsque x est très à droite (vers l'infini), alors la fonction f(x) monte très haut sur le graphique ;
- "Avec un graphique, je montre que plus x est grand, plus la courbe monte, donc plus le résultat de la fonction est grand. Quand x atteint un grand nombre, $+\infty$, la fonction atteint un grand nombre, $+\infty$" ;
- "Quand x augmente, y=f(x) augmente également. De plus, l'amplitude de cette augmentation n'a pas tendance à diminer quand x augmente. Au contraire, elle reste constante ou elle augmente" ; **c'est l'idée de convexité qui est exprimée ici.**

- "Lorsque x augmente positivement sur l'axe des ordonnées dans un repère orthonormé, f(x) augmentera de la même façon dans le sens positif sur l'axe des ordonnées, c'est à dire vers l'infini positif" ;
- "Sur un graphique, pour une grande valeur de x, la courbe tendra vers +∞ (vers la droite et vers le haut)" ;
- "Pour 0 < x, lorsque x prend des valeurs de + en + grandes, f(x)=y prend des valeurs de plus en plus grandes. Donc f(x) est une fonction croissante (dessin ci-contre" ;
- "La fonction ne cesse de croître. Plus les valeurs de x sont grandes, plus f(x) est grand".



Dernier indice de la prégnance de la conception monotone, son caractère cohérent, comme en témoignent les réponses à la question Q6c : 82% des élèves de TS estiment que, si une fonction admet une limite infinie en +∞, alors elle est nécessairement croissante à partir d'une certaine valeur de x.

ii) La conception "non majorée" semble traduire une compréhension avancée

Un seul élève donne en Q1 et Q2 des définitions se rattachant à cette conception :

Définition mathématique : "Pour une valeur α choisie aussi grande que l'on veut, il existe toujours un nombre x tel que $f(x)>\alpha$" ;

Définition élève de seconde : "Il est impossible de trouver pour un x une valeur de f(x) supérieure à toutes les autres ! On ne peut pas majorer f(x)".

Ces définitions, on le voit, ne font pas appel au graphique ni à la monotonie de f. L'élève en question répond correctement à toutes les questions suivantes, sauf à la question Q6c : l'idée est encore présente que, à partir d'un certain moment, la fonction est nécessairement croissante. Pour cet élève, on peut estimer que le processus de conceptualisation est assez avancé mais qu'il conserve encore des traces de conceptions antérieures. On verra ce qu'il en est avec les élèves de Deug A.

iii) Il est par contre difficile de situer les conceptions "primitive" et "monotone" l'une par rapport à l'autre :

- les définitions relevant d'une conception "primitive" font moins appel au graphique, sont davantage statiques, ancrées dans un cadre numérique ;
- en même temps, elles apparaissent beaucoup plus frustres, liées à une approximation sans aucun contrôle ("quand x est grand, f(x) est grand").

Ce caractère contradictoire de la conception "primitive" (apparaissant parfois comme une première rupture avec le cadre géométrique, parfois comme une expression très frustre de la limite) apparaît dans les 4 copies qui affirment cette conception en Q1 et Q2 : pour l'une d'entre elles, les réponses ultérieures sont très bonnes (y compris la réponse à Q6d), pour les trois autres, les réponses sont très mauvaises. Mais les effectifs sont trop faibles pour que l'on puisse en tirer des conclusions trop sûres.

iv) Un mot pour finir sur les 5 élèves qui, à la fois en définition mathématique et en définition "élève de seconde" ne répondent rien, ou par une tautologie.

Ce groupe est composé de deux sous-groupes :

- 3 élèves utilisent **régulièrement** leur calculatrice pour déterminer des limites ; ce sont des élèves qui en Q4 (**méthodes de preuve**) indiquent l'utilisation de la calculatrice : "lire la courbe sur la calculatrice", "vérifier graphiquement", "je tape ma fonction pour obtenir le graphique, le graphique m'indique alors la limite". L'idée de limite est alors liée à l'image qu'en donne la calculatrice. **En savoir plus nécessiterait de connaître les critères de reconnaissance d'une limite à partir de la courbe** ;

- 2 élèves n'utilisent pas du tout la calculatrice, indiquent des méthodes d'étude convenable, ont une bonne réussite aux exercices de **calcul de limite** et une réussite plutôt mauvaise aux exercices sur les propriétés générales des limites. On peut y voir là des traces d'une conception "algébrique", difficilement repérable dans le cadre de ce seul questionnaire.

4. Etude spécifique des protocoles de Deug A.

Fait notable, il n'y a plus de dessin explicatif et les explications font beaucoup moins appel à la courbe. On remarque qu'il n'y a plus de conception dominant absolument. **De façon relative, la première conception en Q1 est la conception "experte", en Q2 c'est encore la conception "monotone".**

Personne en "définition mathématique" ne donne de définition "primitive", car celle-ci peut difficilement dériver d'une mauvaise utilisation des quantificateurs et des inégalités. Par contre, une déformation des expressions quantifiées peut déboucher sur :

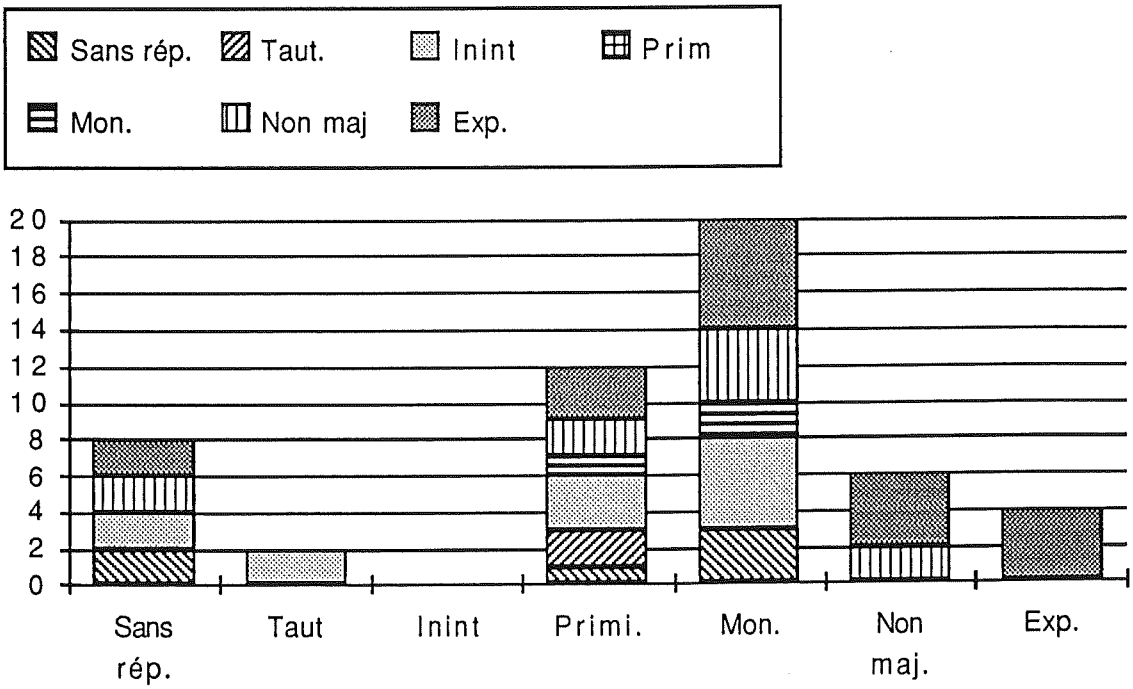
- une expression de la croissance de la fonction : $\forall B \in \mathbb{R}+$, tq $\forall\ x>B$, $f(x) > f(B)$";
- une expression de la non majoration de f : "$\forall M>0$, $\exists x \in \mathcal{D}_f$ / $f(x) > M$";
- une expression ininterprétable :

"$\forall \varepsilon > 0$, un certain rang A tel que $\forall a > A$, $| f(x)-a | < \varepsilon$".

On relève des "filiations" intéressantes :

i) Les élèves qui donnent en Q2 une définition "experte", traduction littérale de la définition quantifiée, ont tous donné une définition mathématique correcte (cf graphique 7 ci-dessous).

Ces 8% d'élèves ont par ailleurs les résultats à la question Q5 tous justes, mais ont les mêmes résultats que l'ensemble de l'amphi en ce qui concerne la question Q6, preuve que le processus de conceptualisation n'est pas arrivé à son terme.



Graphique 7 (en effectif des réponses de Deug A)
Répartition des "définitions mathématiques" parmi les définitions "élève de seconde".

On remarque par ailleurs que les élèves qui ont donné une définition "experte" en Q1 se répartissent en Q2 parmi presque toutes les réponses possibles : le fait de donner une définition quantifiée correcte ne signifie pas nécessairement une compréhension de la notion.

ii) Les élèves qui donnent en Q2 une définition "non majorée" sont pour la plupart des élèves qui ont donné une définition mathématique correcte.

Il y a entre Q1 et Q2 un effet de glissement de la "conception experte" à la "conception non majorée" et de la "conception non majorée" aux conceptions monotone ou primitive. Quant aux élèves qui ont donnée en Q1 une définition ininterprétable, ils se répartissent en Q2 sur "sans réponses", "tautologie", "primitive" et "monotone".

iii) Croisement entre Q2 et Q1 : trois "blocs" apparaissent.

- **un premier bloc regroupant les définitions non majorée et experte** exprimées en Q2 et qui proviennent de définitions expertes ou non majorées exprimées en Q1 : il semble s'agir là de premières ruptures avec les conceptions antérieures qui résistent au passage de la définition quantifiée à la définition en langage ordinaire ;

- **un deuxième bloc de définitions primitive ou monotone exprimées en Q2** et dont on remarquera la ressemblance des structures (issues de définitions données en Q1 monotone, ou experte, ou non majorée, ou tautologie/sans réponse) ; la définition mathématique avait entraîné un certain déplacement vers les conceptions experte ou non majorée, la définition à un élève de seconde ramène aux conceptions anciennes ;

- **un troisième bloc composé d'élèves qui ne donnent aucune définition en Q2.** On peut constater que ce bloc peut se décomposer en deux : un sous bloc d'élèves ayant donné une définition mathématique "experte" ou "non majorée" et qui ne donnent aucune réponse en Q2 (cela rejoint les élèves de TS qui ne donnaient aucune définition, mais savaient calculer des limites : on retrouve là les traces d'une conception "algébrique"), un deuxième sous bloc d'élève qui donnaient une définition ininterprétable ou pas de définition en Q1 et ne donnent toujours pas de définition en Q2. On constate aussi que, pour ces derniers élèves, la calculatrice est très souvent utilisée.

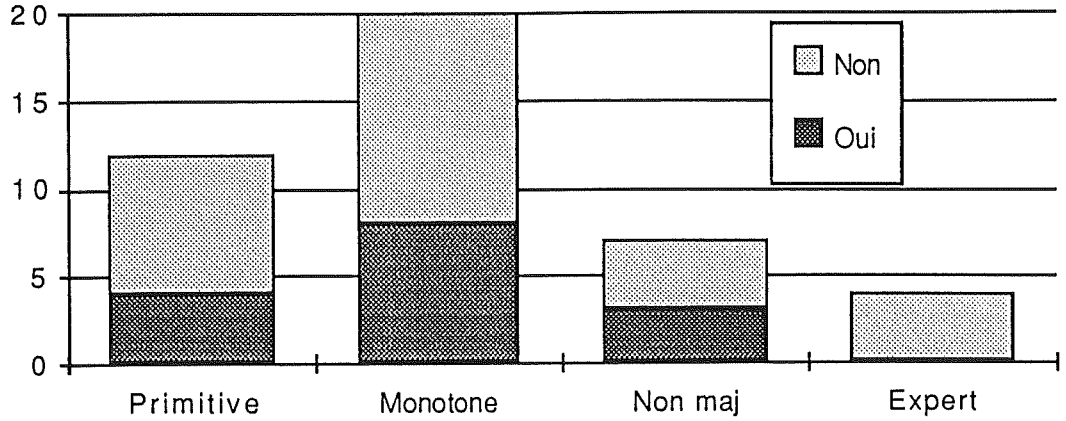
iv) Croisement entre les réponses à Q2 et les réponses à Q6.

En privilégiant maintenant la conception repérée dans la réponse à Q2 (définition élève de seconde), nous pouvons tester sa cohérence en la croisant avec les réponses aux questions de Q6 (ce qui n'avait pas pu être fait pour les élèves de TS à cause du trop fort regroupement des conceptions). On obtient les graphiques 8 à 10 ci-après.

Commentaires sur les graphiques 8 à 10 :

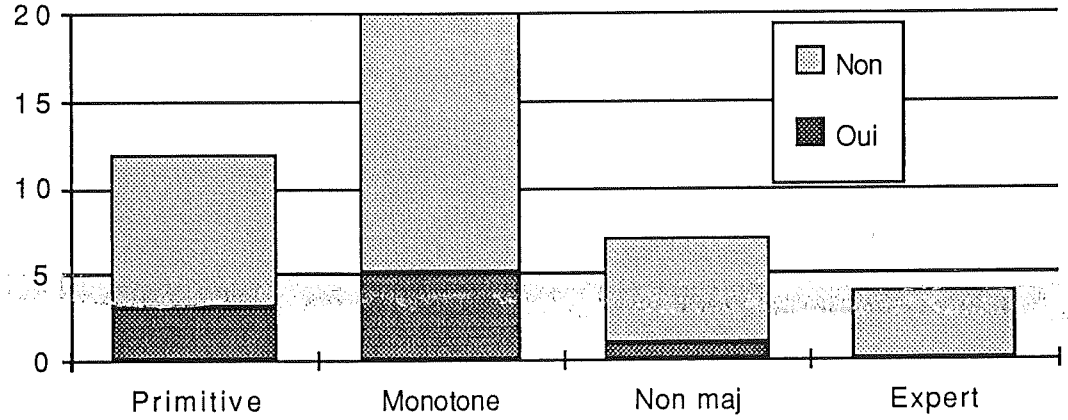
Les définitions "non majorées" présentent proportionnellement plus de "oui" dans le graphique 8 ; les conceptions monotones présentent aussi un taux de oui plus fort dans le graphique 10 (si on met à part les définitons expertes, en petit nombre). Il y a donc quelques effets de cohérence entre définitions et propriétés reconnues. Mais ces effets sont assez faibles.

Si on considère l'ensemble des définitions expertes et non majorées d'un côté et l'ensemble des définitions monotone et primitive de l'autre, on peut distinguer quelques avancées dans le processus de conceptualisation du premier par rapport au second : les réponses sont en moyenne meilleures.



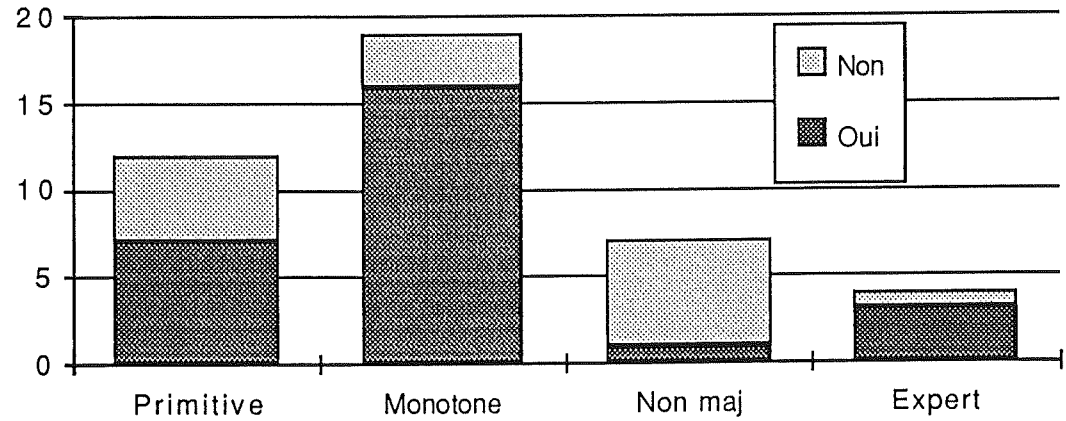
Graphique 8 (en effectif des réponses de Deug A)

Si f est positive non majorée, a-t-on $\lim_{+\infty} f = +\infty$?



Graphique 9 (en effectif des réponses de Deug A)

Si f est strictement croissante, a-t-on $\lim_{+\infty} f = +\infty$?



Graphique 10 (en effectif des réponses de Deug A)

Si $\lim_{+\infty} f = +\infty$, f est-elle nécessairement croissante à partir d'une certaine valeur de x ?

Conclusion de II.a.2.iii.

Repérage des conceptions.

Le questionnaire a permis de ranger 80% des définitions exprimées parmi les 4 conceptions mises en évidence :

- la distinction des réponses Q1/Q2 constitue un indice de la stabilité des conceptions. On peut constater ainsi le caractère central de la conception monotone en TS et une pression encore importante de cette conception en Deug A ;

- l'expression d'une définition "non majorée" ou "experte" apparait comme une certaine avancée du processus de conceptualisation ;

- la définition "primitive" apparait avec un double caractère : à la fois expression frustre d'une limite infinie ("quand x est grand, f(x) est grand") et expression d'une première rupture avec une conception monotone ;

- les "sans conception exprimée" semblent recouvrir deux réalités différentes : pour certains élèves, une incapacité de verbaliser une notion qu'ils ne savent pas manipuler, pour d'autres élèves une incapacité de décrire les ressorts de ce qui reste pour eux un simple mécanisme de calcul. Ce qui apparaîtrait alors comme absence de conception ne serait dû qu'à l'inadaptation du dispositif de recueil de conceptions.

Il nous faut examiner maintenant la résolution des exercices qui donnera d'autres indications sur la conceptualisation à l'oeuvre. C'est là qu'entre en scène la calculatrice ou l'absence de calculatrice.

II.a.2.iv Dépouillement : du côté des techniques.

Nous avons vu en I.a.2.ii. les tactiques générales d'étude des limites. Nous avons vu en I.b.2.i. les tactiques disponibles, à partir des programmes, **pour les élèves de TS : tactiques opératoires et tactiques d'encadrement. Les élèves de Deug A disposent des mêmes tactiques (dans les techniques opératoires s'ajoutent les développements limités) auxquelles s'ajoutent l'utilisation de la définition et une technique indirecte : le théorème des fonctions croissantes non majorées.**

Nous allons examiner maintenant les techniques annoncées que l'on confrontera en aval aux techniques effectivement mises en oeuvre dans les réponses à Q4. Pour le regroupement des techniques en "tactiques", on a repris dans le tableau 8 ci-dessous la classification établie en I.a.2.ii. et on a placé sur les deux dernières lignes les "tactiques incorrectes" (étude du sens de variation de la fonction ou évocation de la calculatrice).

Techniques	TS	Deug A
Aucune	7	8
Recours à la définition	0	6
Opérations	**77**	**70**
Encadrement	**20**	**53**
Croissance non majorée	0	4
Croissance	8	8
Calculatrice	16	10

Tableau 8 (en pourcentage des réponses à Q4)
Méthodes connues pour prouver que $\lim_{+\infty} f = +\infty$

1. Quelques commentaires sur les résultats se rapportant à ce tableau :

i) Les élèves qui n'indiquent aucune méthode de preuve en Q4 utilisent tous régulièrement leur calculatrice (d'ailleurs ils en précisent l'utilisation en Q4"). C'est aussi le cas des élèves qui évoquent comme méthode de preuve l'utilisation de la calculatrice ;

ii) Seuls 3 élèves seulement (6%) en Deug A évoquent un éventuel recours à la définition (l'un de façon synthétique : "on peut utiliser la définition", l'autre de façon ambigüe : "on peut utiliser des quantificateurs", le troisième de façon fausse : "on peut utiliser la définition, c'est à dire montrer que f n'est pas majorée") ;

iii) on constate l'importance du recours aux opérations, encore plus important que le tableau 8 ci-dessous ne le suggère. En effet on a noté dans ce tableau le pourcentage d'élèves qui ont évoqué des techniques opératoires. Mais ce qui l'ont fait en ont évoqué en moyenne deux, ce qui renforce encore le déséquilibre entre techniques opératoires et techniques d'encadrement. On retrouve là ce que nous disions à propos de la transposition didactique de la notion : c'est un point de vue algébrique qui domine. On peut détailler les techniques opératoires plus précisément : en TS 30% des élèves évoquent "la limite du terme de plus haut degré", 20% évoquent "le théorème des croissances comparées" ; en Deug A, 37% des élèves évoquent les développements limités, 25% des élèves évoquent "le terme de plus haut degré", 12% des élèves évoquent le "théorème des croissances comparées". **C'est une bonne indication de l'intégration et de la résistance des techniques issues de la transposition didactique, relatives au "plus haut degré" et "aux croissances comparées".**

iv) On constate l'essort des techniques d'encadrement en Deug ;

v) On remarque enfin le maintien d'un "noyau dur" qui, pour étudier les limites, étudie les variations de la fonction (les élèves qui évoquent cette technique relèvent tous de la conception "monotone") ; il est notable qu'en Deug, il y ait deux fois plus d'élèves évoquant improprement la croissance seule (8%) que d'élèves évoquant correctement la croissance non majorée (4%) : on peut émettre l'hypothèse que, pour certains élèves, le théorème de la croissance non majorée fait écho dans un premier temps à la définition monotone.

2. Etudions maintenant les techniques effectivement utilisées.

Cette étude n'est pas facile car les explications données par les élèves sont très sommaires, parfois inexistantes. C'est là qu'on touche aux limites de la méthode d'observation. L'essentiel des gestes des élèves nous échappe quand il nous reste pour seul matériel d'observation les traces écrites. Pour trouver des résultats, il faut donc choisir un filtre. Nous avons choisi d'observer les techniques mises en oeuvre lors des exercices "cruciaux" c'est à dire lors des exercices où l'influence de la calculatrice se fait sentir. Pour cela on va d'abord considérer les résultats aux différents exercices de Q5 et Q7.

	TS				Deug A			
	Oui	Non	?	Sans rép.	Oui	Non	?	Sans rép.
lnlnx	**95** 91	5 3	6		100 100			
x - 1000lnx	**84** 59	8 9	8 32		**83** 85	4 7	**13** 8	
x^2 - 10xsinx	**80** 65	**13** 15	7 17	3	**83** 100	4	**9**	**4**
xsinx	**21** 12	**64** 68	**15** 20		**8** 4	**88** 85	7	**4** 4
| xsinx |	**33** 44	**46** 29	**18** 27	3	**17** 26	**75** 63	**4** 4	**4** 7
lnx + 10sinx	**64** 71	**26** 0	**10** 26	3	**71** 89	**21** 0	**4** 0	**4** 11
x^2 + sinx	**95** 79	**0** 3	**5** 15	**0** 3	**100** 93			7
$\frac{100000x - 50}{x + 1000}$	**23** 20	**72** 80	**5**		**13** 11	**71** 85	**8** 4	**8**
$\frac{e^x}{x^{50}}$	**49** 53	**36** 32	**15** 12	3	**67** 78	**25** 11	**4**	**4** 11

Tableau 9 (en pourcentage des réponses à Q5)

A-t-on $\lim_{+\infty} f = +\infty$?

Dans chaque case, le premier pourcentage concerne le groupe composant avec calculatrice, le deuxième pourcentage concerne le groupe sans calculatrice.

Les cases grisées seront particulièrement étudiées.

	TS		Deug A	
	Avec calc	Sans calc	Avec calc	Sans calc
Sans réponse	5	15	25	22
Un nb fini	36	35	38	48
Un nb infini	44	26	25	22
Ne sait pas	15	24	12	8

Tableau 10 (en pourcentage des réponses à Q7)
Combien l'équation lnx = 250 sinx a-t-elle de solutions ?

Une lecture comparative rapide indique une influence certaine des images obtenues par la calculatrice qui prévalent par rapport aux résultats théoriques disponibles. Dans le tableau 10 ci-dessus, l'impression que la courbe de lnx recoupera "toujours" la courbe de 250 sinx est accréditée par l'image donnée par la calculatrice, d'où les différences manifestes (cases grisées).

Il en est de même pour les réponses à la question Q5 (tableau 9 plus haut). On pourra pour l'analyse se reporter au tableau des variables didactiques en II.a.2.i. :

- pour lnlnx, la différence est mince : malgré une représentation graphique "à pente très faible", la référence théorique permet en général de conclure correctement ;
- pour x - 1000lnx et x^2-10xsinx, les écarts jouent en sens contraire pour les élèves de TS et les élèves de Deug A. Cela peut s'expliquer ainsi :
  - les élèves de TS ne sont pas familiers des transformations d'écriture qui leur sont en général suggérées dans les problèmes. La calculatrice permet une investigation facile et l'émission de conjectures correctes ;
  - les élèves de Deug sont plus à l'aise pour factoriser ou encadrer. Le calcul ne pose pas de gros problèmes. L'image fournie par la calculatrice va alors jouer un rôle de déstabilisation -relative en ne montrant pas d'emblée la situation souhaitée ;
- xsinx est une fonction relativement connue des élèves. Les résultats avec et sans, calculatrice sont assez proches ;
- pour |xsinx|, il y a l'illusion que la valeur absolue supprime l'oscillation et donc assure la limite infinie. Ceux qui disposent d'une calculatrice observent l'oscillation ce qui explique leur léger avantage ;
- pour lnx+10sinx et x^2+sinx, l'influence de la calculatrice ne s'exerce pas dans le même sens : pour la première fonction, une oscillation forte induit l'idée que la fonction n'a pas de limite infinie, pour la deuxième fonction, la confusion visuelle avec la parabole standard accrédite l'idée que la limite est nécessairement infinie. Cette influence, dans les deux cas, se vérifie dans le tableau 9 ;
- pour les deux dernières fonctions, on assiste au même phénomène : celle qui tend vers $+\infty$ n'est pas celle que l'on croit (si l'on se réfère à l'image de l'écran).

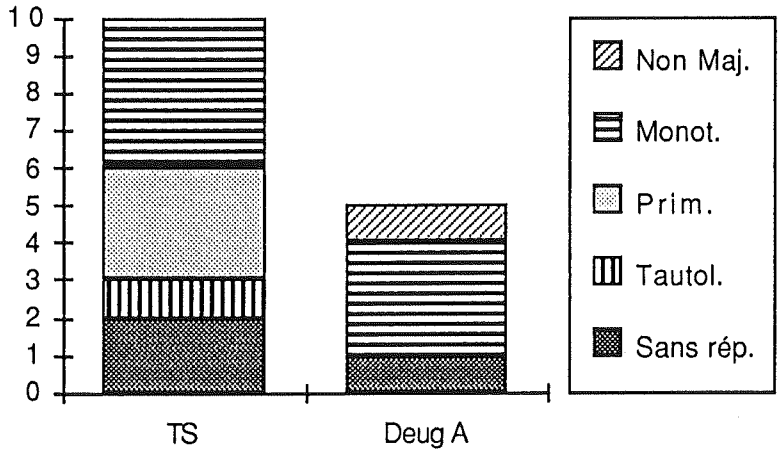
Mais constater cette distorsion dans les résultats avec, ou sans calculatrice, ne suffit pas. Pour comprendre les mécanismes profonds à l'oeuvre, il faut regarder plus en détail les réalisations des élèves. Ce que l'on va faire désormais, en s'attardant davantage sur la fonction lnx + 10sinx (qui cumule toutes les difficultés prévisibles, cf II.a.2.i.).

3. Etude de x → lnx+10sinx : une influence certaine de la calculatrice.

On a pu constater dans le tableau que les seuls élèves donnant une réponse fausse composaient avec une calculatrice et que l'erreur a été significative, puisqu'elle portait sur 21% des effectifs en Deug A et 26% des effectifs en TS.

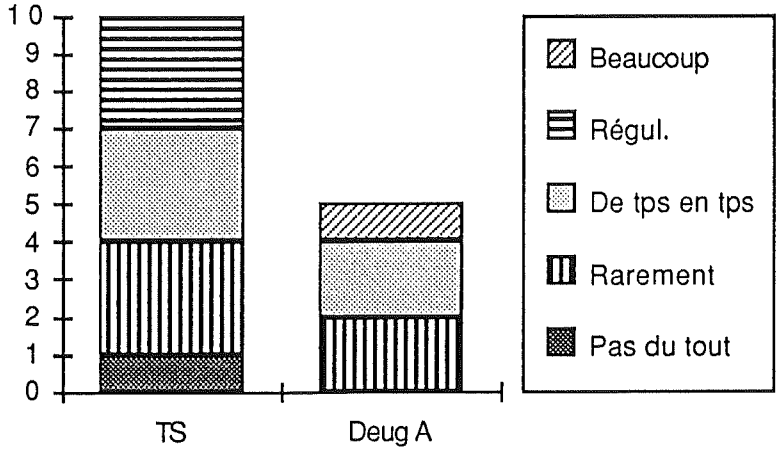
Nous allons croiser ces populations d'élèves qui se trompent sur cette fonction avec les conceptions repérées en Q2 et avec l'utilisation habituelle de la calculatrice pour étudier des limites. Si les élèves ayant exprimé en Q2 une conception experte ne tombent pas dans le "piège" de l'image trompeuse de cette fonction (ils ne tombent pas d'ailleurs dans les autres "pièges"), les différentes conceptions exprimées se retrouvent, aussi bien en TS qu'en Deug A (cf graphique 11 ci-dessous).

Ceci donne à penser que le fait d'exprimer telle ou telle conception ne prédispose pas particulièrement à subir l'influence de la calculatrice.



Graphique 11 (en effectif de la population)
Répartition des conceptions parmi les élèves qui se sont trompés pour lnx + 10sinx.

De la même façon, le graphique 12 ci-dessous indique l'indépendance entre l'erreur commise et la familiarité avec l'outil.



Graphique 12 (en effectif de la population)
Utilisation de la calculatrice parmi les élèves qui se sont trompés pour lnx + 10sinx.

La question "qui sont les élèves qui sont le plus influencés par la calculatrice ?" reste pour le moment ouverte. Elle sera à nouveau abordé en II.b. à partir d'une connaissance plus complète des élèves observés.

L'utilisation de la calculatrice a une influence certaine sur les calculs de limite réalisés par les élèves aussi bien en TS qu'en Deug.

II.a.2.v Des techniques aux théorèmes-en-actes.

A partir de l'analyse des protocoles, nous allons tenter ici un repérage des théorèmes-en-actes (0.b.3.i.) erronés utilisés par les élèves dans la résolution des exercices de Q5.

1. Commençons par l'étude de lnx+10sinx.

Pour justifier que la limite en $+\infty$ de la fonction lnx+10sinx n'est pas $+\infty$, les élèves emploient les phrases suivantes, toutes accompagnées d'une "semi-sinusoïde", copie approximative d'écran (on a reproduit les formulations des élèves eux-mêmes avec leur propre syntaxe) :

* "lnx+10sinx est une fonction périodique donc la limite en $+\infty$ dépend du x choisi, donc n'est pas déterminée" (TS) ;
* "lnx tend vers $+\infty$ et sin est une fonction périodique" (TS) ;
* "sinx est une fonction sinusoïdale" (TS) ;
* "pas de lim f(x) car il y a la fonction sinus" (TS) ;
* " lnx $\rightarrow +\infty$, sinx $\rightarrow \times$, donc lnx+10sinx $\rightarrow \times$ (pas de limite)" (TS) ;
* "il ne peut y avoir de limite (fonction périodique)" (TS) ;
* "car f(x) = sinx sinusoïdale" (TS) ;
* "-10 < 10sinx < 10, donc pas de limite" (Deug A) ;
* "-10 + lnx < f(x) < lnx + 10, donc pas de limite" (Deug A).

Il y a ici expression de deux théorèmes-en-acte que l'on pourrait exprimer ainsi :

- Si on ajoute à une fonction une fonction qui n'a pas de limite, alors la fonction somme n'a pas de limite (on notera ce théorème-en-acte **TA0**) ;
- Si une fonction oscille ostensiblement, alors elle n'a pas de limite (TA1).

En fait, on constate que, de tous les élèves appliquant **TA0** pour lnx+ 10 sinx, aucun ne se trompe pour x^2 + sinx alors que le même argument pourrait pourtant fonctionner aussi : "somme d'une fonction à limite infinie avec une fonction périodique".
On pourrait interpréter ce paradoxe en disant que l'utilisation d'une calculatrice favorise un travail cloisonné : un exercice, une image, une réponse, un théorème justificatif. Puis on passe à un autre exercice, une autre image. Ceci joue sans doute, mais ne permet pas de comprendre la similitude d'interprétation, pour les élèves qui se sont trompés, de xsinx, de |xsinx| et de lnx + 10sinx. Il y a bien eu transfert d'un exercice à l'autre d'un même "mécanisme" d'interprétation.

Ce qui laisse penser que **TA0** est complété par des conditions d'application : pour que **TA0** s'applique, il faut qu'il y ait une matérialisation de l'oscillation sur la courbe observée. Autrement dit, **TA0** et **TA1** sont très proches dans le cadre du travail avec calculatrice.

Pas de théorèmes-en-acte sans concept en acte (cf toujours 0.b.3.i.) : derrière **TA1**, il y a un concept en acte, celui de "fonction oscillant ostensiblement". On peut aller plus loin en repérant une règle d'action : "pour une fonction donnée, rechercher une éventuelle oscillation dans son expression ou son graphique" ; "si oscillation il y a, considérer son caractère ostensible". Et il y a aussi des inférences à l'oeuvre : "s'il y a oscillation ostensible, alors le théorème s'applique".
Il y a là l'amorce d'un schème d'étude d'une limite.

Mais pour pouvoir définir davantage un schème il nous manque les buts et sous buts, l'organisation même des gestes de l'élève. Nous le verrons en II.b.

Pour compléter ce "germe de schème", on va poursuivre l'inspection des copies d'élèves à la recherche d'autres théorèmes-en-acte perceptibles.

Considérons d'abord le protocole 6 en Annexe 2, page 388, extrait des réponses d'un élève composant avec calculatrice. On lira :

> * lnx est une fonction croissante qui tend vers $+\infty$. La fonction ln également ; donc le produit de ces deux fonctions donne une fonction croissante qui tend vers $+\infty$;
> * x-1000 lnx est croissante et tend vers $+\infty$; x est croissant et -1000lnx est décroissant, mais plus les valeurs de x sont grandes, plus 1000 lnx est inférieur à x ;
> * lnx est une fonction croissante mais 10sinx est une fonction périodique, donc lnx+10 sinx est une fonction croissante qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Il y a un germe de réponse convenable pour la première fonction, sauf qu'il ne s'agit pas de produit mais de composition et que la croissance n'est pas un élément indispensable du raisonnement. Mais on constate ensuite que la croissance de la fonction s'installe comme élément nécessaire de la preuve. C'est particulièrement significatif pour la fonction lnx+10sinx : l'élève a "réglé" sa calculatrice en degré ce qui fait que, sur des fenêtres raisonnables, les fonctions xsinx et lnx+10sinx apparaissent croissantes. Il est clair que c'est alors la seule considération du caractère apparemment croissant (sur l'écran) de la fonction qui permet de conclure.

Il y a là la manifestation d'un nouveau théorème-en-acte qui peut apparaître comme une réciproque de **TA1 : si une fonction apparaît croissante à partir d'une certaine valeur de x, alors elle a comme limite $+\infty$** (théorème-en-acte noté TA2).

Le caractère local de l'application des théorèmes-en-acte apparaît lorsque le même élève répond "non" en Q6 à la question : "une fonction strictement croissante admet-elle nécessairement comme limite $+\infty$?". Mais pour cette question la calculatrice n'était plus mobilisée. On y reviendra dans le paragraphe suivant (II.a.2.vi.).

Continuons la recherche des théorèmes-en-acte. Le concept en acte "fonction oscillant ostensiblement" permet d'évacuer du champ d'application la fonction $x^2+\sin x$, il faut donc disposer d'un nouvel outil pour traiter cette fonction.

Apparaissent alors deux nouveaux "théorèmes-en-acte" :

- le plus fort l'emporte sur le plus faible (TA3)
- ce qui croît plus vite l'emporte sur ce qui croit moins vite (TA4)

Considérons par exemple le protocole n°2. On y trouve :

> * lnx + 10sinx ne tend pas vers $+\infty$ car f(x) = sinx sinusoïdale ;
> * $x^2+\sin x$ tend vers $+\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ est négligeable ;
> * $\frac{100000x-50}{x+1000}$ tend vers $+\infty$ car $100000x-50 > x+1000$.
> * $\frac{e^x}{x^{50}}$ tend vers $+\infty$. Moyen mnémotechnique : "la fonction expo. l'emporte sur les fonctions puissances qui l'emportent sur la fonction ln".

On observe que **TA1** est appliqué pour régler la limite de lnx+10sinx.

C'est **TA3** qui intervient pour les trois autres fonctions. Il correspond à des concepts-en-acte : "fonction forte", "fonction négligeable" ; il correspond aussi à des règles de prépondérance qui n'ont pas de rapport direct avec les variations des fonctions mais plutôt avec les valeurs qu'elles prennent ou avec les nombres qui les composent.

Considérons maintenant le protocole n°1 :

* $\ln x + 10\sin x$: pas de réponse ;
* $x^2+\sin x$: pas de réponse ;
* $\frac{100000x-50}{x+1000}$ tend vers $+\infty$ car 100000x-50 croît plus vite que x+1000 donc rapport positif ne cessant d'augmenter ;
* $\frac{e^x}{x^{50}}$ tend vers $+\infty$. La fonction e^x croît plus vite (pour les valeurs infiniment grandes) que x^{50}. Rapport positif et croissant.

C'est **TA4** qui intervient ici. Il ne permet pas de traiter les fonctions lnx + 10sinx et $x^2+\sin x$ (pour lesquelles **TA3** était plus "efficace") mais permet de traiter les deux dernières fonctions.

On a repéré jusqu'ici 5 théorèmes-en-acte. Il est difficile de garantir l'exhaustivité de la collecte : certains résultats sont annoncés sans démonstration et font sans doute appel à des théorèmes-en-acte implicites. Les 5 théorèmes-en-acte qui suivent, que nous noterons **TAi**, sont les seuls que l'on a pu extraire des raisonnements faux mais cohérents des élèves.

TAi : Théorèmes-en-acte erronés évoqués par les élèves

TA0 : si on ajoute à une fonction une fonction qui n'a pas de limite, la somme n'a pas de limite ;

TA1 : si une fonction oscille ostensiblement, alors elle n'a pas de limite ;

TA2 : si une fonction est croissante à partir d'une certaine valeur de x, alors elle a une limite infinie ;

TA3 : si une fonction prend des valeurs beaucoup plus grandes qu'une autre, le résultat d'une opération (addition, multiplication, quotient) entre la première et la deuxième fonction est une fonction qui tend vers $+\infty$;

TA4 : si une fonction croît beaucoup plus vite qu'une autre, le résultat d'une opération (addition, multiplication, quotient) entre la première et la deuxième fonction est une fonction qui tend vers $+\infty$.

On peut se poser, à propos de ces théorèmes-en-acte, deux questions :
- la première relative au rapport avec les conceptions exprimées ;
- la deuxième relative au rapport avec l'utilisation de la calculatrice.

2. Rapports entre les conceptions exprimées en Q1/Q2 et les TAi.

Il est difficile d'établir des relations directes à partir des réponses des élèves :

- le classement des conceptions exprimées en Q1/Q2 repose sur une interprétation des réponses des élèves ;
- les théorèmes-en-acte sont souvent implicites.

On peut établir des correspondances à partir des éléments repérables, c'est à dire les erreurs des élèves. Le graphique 9 du chapitre précédent (II.a.2.iv.), relatif à la correspondance entre les conceptions exprimées en Q2 et l'erreur pour la fonction lnx+10sinx indique un résultat assez banal : les élèves qui arrivent à verbaliser une conception experte (conception experte en Q2) ne se trompent pas. Les autres conceptions sont représentées "équitablement" parmi ceux qui ont fait cette erreur (qui repose sur en général sur **TA1**).

Il apparaît alors plus intéressant d'utiliser le repérage des TAi comme autre méthode de recueil de conception. Cette utilisation des théorèmes-en-acte est cohérente avec le caractère local des conceptions : un élève peut très bien exprimer des conceptions différentes quand il répond à une demande de définition (qui fait plutôt référence au cours du professeur) et quand il traite un exercice. Dans le deuxième cas, on a sans doute accès à une conception plus profonde, moins contrôlée.

Cette méthode suppose que les associations entre **TAi** et conceptions ne soient pas faites à partir des protocoles des élèves, mais à partir du sens même des théorèmes-en-acte, à partir de ce qui'ils expriment intrinsèquement.

TA1 et **TA2** sont directement liés à une conception "monotone" de la limite infinie.

TA0 est lié à une conception "algébrique" de la limite : cela n'a pas de sens, si on se réfère aux opérations algébriques usuelles, d'ajouter à quelque chose qui existe un objet qui n'existe pas. Donc si f a une limite et si g n'en a pas, la somme f+g ne peut en avoir non plus.

TA3 est lié à une conception primitive : si on ajoute à un grand nombre un petit nombre, le résultat est nécessairement grand. Mais on peut estimer aussi qu'un tel théorème-en-acte peut "fonctionner" avec une conception "non majorée" et avec une conception "algébrique".

Enfin **TA4** est à la fois lié à une conception "monotone" (on compare les croissances) et à une conception "algébrique" (on considère le comportement de chaque terme et on applique une algèbre des limites).

Ces associations débouchent sur le tableau 1 ci-dessous.

	Primitive	Mono-tone	Non majorée	Algébri-que	Experte
TA0				■	
TA1		■			
TA2		■			
TA3	■		■	■	
TA4		■		■	

Tableau 1
Correspondance entre théorèmes-en-actes et conceptions
(ont été grisées les cases de correspondance)

On peut comprendre à la lecture du tableau 1 ci-dessus qu'une des raisons de l'enracinement des théorèmes-en-acte chez les élèves est leur rôle de pont, de "liant" entre plusieurs conceptions, des conceptions qui s'estompent et d'autres qui s'affirment. Ainsi TA3 assure une "continuité" entre des conceptions apparemment distinctes.

Les théorèmes-en-acte auraient ainsi un rôle charnière dans le processus de conceptualisation.

3. Rapports entre les théorèmes-en-acte et l'utilisation de la calculatrice.

Quand nous parlions de l'erreur sur lnx+10sinx, nous ne parlions que des élèves ayant composé avec calculatrice (ce sont les seuls à avoir fait cette erreur). En débordant sur les autres fonctions, nous trouvons des erreurs commises par des élèves ayant composé avec, mais aussi, sans calculatrice :

- certains élèves composant avec calculatrice n'utilisent aucun des théorèmes-en-acte repérés. Ils utilisent un langage fonctionnel et les théorèmes opératoires ou de minoration vus en classe;

- certains élèves composant sans calculatrice n'utilisent que les **TAi**. Il suffit de considérer le protocole n°1 que l'on a déjà évoqué. Mais il faut remarquer que cet élève accorde une grande importance à la calculatrice qui constitue ordinairement son seul moyen d'investigation et de preuve.

On peut imaginer alors que le travail habituel avec calculatrice a installé un certain nombre de schèmes qui sont activés aussi quand l'outil n'est pas là.

Mais on constate aussi que certains élèves composant habituellement avec calculatrice et qui en sont privés le jour du questionnaire n'ont pas conservé de telles traces. Il n'y a donc pas de rapport simple entre la fréquence d'utilisation de la calculatrice et l'utilisation des **TAi** (cf le graphique 10 en II.a.2.iv.).

Deux questions se posent alors :

- quels sont les "mécanismes producteurs d'obstacles" (II.a.1.i.) à l'oeuvre dans le travail avec une calculatrice qui pourraient expliquer la distorsion de certains résultats entre le travail avec et sans calculatrice et peuvent-ils expliquer la formation de certains "théorèmes-en-acte" ?

- quels sont les caractéristiques générales du comportement des élèves qui les rendent plus ou moins sensibles à l'influence de l'outil de calcul ?

La deuxième question ne pourra être traitée que dans la partie II.b. de cette thèse en disposant d'une connaissance plus profonde des élèves observés.

Nous allons clore cette partie II.a. par quelques observations relatives à la première question.

II.a.2.vi Calculatrices et processus producteurs d'obstacles.

1. Il y a de premiers effets de l'outil liés à sa présence même

C'est d'abord le "voir avant de calculer" (I.c.2.i) qui explique le poids des images vues sur l'écran. Cette pression est particulièrement forte pour la fonction lnx+10sinx, obstinément oscillante et dont l'oscillation est forte par rapport à la croissance.

L'obstacle de "l'observation première" (0.b.1.i) est ici très fort et aura des prolongements aussi dans le processus de conceptualisation, puisqu'il situe la recherche de limite dans un cadre géométrique. On constate l'importance des graphiques dans les 6 protocoles "avec calculatrice" relevés en Annexe 2 page 381 (de façon générale 75% des réponses des élèves composant avec calculatrice sont illustrées par un dessin, ce pourcentage tombe à 25% pour les élèves composant sans calculatrice).

C'est aussi un type de comportement qui peut se mettre en place dans un travail assisté par une calculatrice, *lent, cumulatif et tacite, qui genère des structures généralement automatisées* (0.b.3.iv). Il s'agit sans doute dans le travail avec calculatrice, pour certains élèves, d'un comportement moins contrôlé où les schèmes non pertinents ne sont pas inhibés. Nous y reviendrons en II.b.

2. D'autres effets de l'outil semblent avoir des effets plus profonds.

Le premier de ces effets concerne le langage.

On a vu que cet aspect était essentiel pour la conceptualisation (0.b.2.iv.). On peut constater une tendance à utiliser un langage familier plutôt qu'un langage fonctionnel (0.b.2.iii) pour décrire les images observées et produire une preuve à partir de l'utilisation de la calculatrice. Ce type de langage apparaît en effet davantage et sous des formes plus appuyées dans les copies d'élèves ayant composé avec calculatrice. On en voit un exemple dans le protocole 4 en Annexe 2, page 386 :

- "la croissance de y=x absorbe la décroissance de y = -1000.lnx" ;
- "à terme l'évolution de lnx absorbe celle de 10 sinx".

C'est ce type de langage qui, associé à d'autres processus producteurs d'obstacles (la régularisation, la généralisation abusive, cf II.a.1.i), va aboutir aux théorèmes-en-acte repérés. Ainsi les relations de "prépondérance" sont l'aboutissement d'un processus de fusion de plusieurs théorèmes ("dans un polynôme le terme de plus fort degré l'emporte", "l'exponentielle l'emporte sur les puissances") qui semble déboucher sur **TA3 ou TA4.** Ce phénomène n'est pas spécifique du travail avec calculatrice, mais il semble largement favorisé par lui.

Le deuxième effet concerne la conception des nombres et des distances.

On a vu, dans les réponses des élèves à la question Q4" (en II.a.2.iii.), qu'il y avait réduction de l'infini au fini dans le réglage des fenêtres de la calculatrice. Le mouvement inverse peut aussi être constaté. On le voit dans le protocole 5 à l'occasion de l'étude de la fonction rationnelle :

" $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 100000 \approx +\infty$."

Il y a là sans doute un effet profond sur le processus de conceptualisation qui va au delà même de la conception des nombres. Cette réduction de l'infini au fini a des effets aussi sur la recherche des limites : il est implicite que l'on juge de ce qui est le plus fort en considérant ce qui se passe à distance finie c'est-à-dire en pliant la réalité mathématique aux contraintes instrumentales.

Le troisième effet, lié au deuxième, concerne le passage du particulier au général.

On a évoqué en 0.c.1.ii. les caractères producteurs des représentations graphiques obtenues sur l'écran des calculatrices en particulier le fait que "ce qui est en dehors de l'écran se comporte comme prolongement de ce qui est vu". Dans le cadre des limites, c'est essentiel puisque l'existence d'une limite en $+\infty$ demande en principe des assurances sur "l'au delà" de l'écran. Même si l'on décide de la limite sur la simple considération d'un écran, il est utile d'avoir quelques garanties. Ces garanties de prolongement régulier hors écran dans le cadre d'une seule description des images ne peuvent que prendre la forme d'une monotonie de la fonction, en l'occurence d'une croissance de la fonction. D'où l'importance de **TA2** repéré pour lnlnx mais aussi, on l'a vu, pour d'autres fonctions. On a vu dans les tableaux 5 et 7 ci-dessus que la proposition "si f admet pour limite $+\infty$, alors elle est nécessairement croissante à partir d'un certain moment" est perçue comme vraie par la majorité des élèves mais que la propriété réciproque est perçue comme fausse par la majorité des élèves.

Dans l'action avec calculatrice cette propriété réciproque est pourtant utilisée par des élèves comme outil adapté à la description des images et au prolongement implicite des tracés hors écran.

Il y a ainsi un fonctionnement cohérent :

- les études locales (ici à l'infini) sont ramenées à des études globales (c'est à dire observables sur un intervalle donné) et ce qui est observé sur un tel intervalle est étendu aux intervalles infinis ;
- la croissance constatée de la fonction sur un intervalle donné (grand) est le signe de la limite infinie.

On vérifie bien ici que le point de vue favorisé par l'utilisation de la calculatrice graphique est un point de vue cinématique (I.c.2.i.) qui n'est pas en cohérence avec le point de vue algébrique développé par les programmes (I.b.5).

Dans cette situation, on peut considérer que l'expression des théorèmes-en-acte que nous avons rencontrés correspond à un besoin de cohérence ou de passerelle entre les deux points de vue : **TA0** comme **TA4** relèvent bien de cette conciliation de points de vue :

- **TA0** incorpore une idée d'opération et une idée de variation (si on ajoute à une fonction une fonction qui n'a pas de limite -par exemple qui oscille- le résultat n'a pas de limite) ;
- **TA4** incorpore aussi les mêmes idées d'opérations et de variations combinées.

Nous avons vu, avec le tableau 1 du chapitre précédent, une explication de la force des théorèmes-en-acte comme éléments charnières du processus de conceptualisation.

La viabilité de ces théorèmes-en-acte aussi bien dans le cadre de l'action instrumentée (point de vue cinématique) que dans le cadre des programmes (point de vue algébrique) est aussi sans doute une des explications de leur enracinement.

Conclusion de II.a.

A partir d'un ensemble de conceptions prétablies, nous avons examiné des productions écrites d'élèves de TS et de Deug A répondant (avec ou sans calculatrice) à un ensemble de questions portant sur la définition et la détermination de limites.

L'éventail des conceptions (primitive, monotone, non majorée, experte) a permis de situer l'essentiel des définitions données par les élèves [33].

Le passage entre Q1 et Q2, c'est à dire entre les définitions mathématiques et les définitions "élèves de seconde", a permis de repérer des fragilités ou des stabilités : en considérant les définitions traduites à un élève de seconde comme traduisant le mieux une conception donnée, on a pu repérer une première différentiation entre les élèves se rattachant à une conception experte ou non majorée d'un côté et aux conceptions primitive ou monotone de l'autre.

L'étude des méthodes de résolution des exercices a mis en évidence 5 théorèmes-en-acte erronés évoqués par les élèves :

TA0 : si on ajoute à une fonction une fonction qui n'a pas de limite, la somme n'a pas de limite ;

TA1 : si une fonction oscille ostensiblement, alors elle n'a pas de limite ;

TA2 : si une fonction est croissante à partir d'une certaine valeur de x, alors elle a une limite infinie ;

TA3 : si une fonction prend des valeurs beaucoup plus grandes qu'une autre, le résultat d'une opération (addition, multiplication, quotient) entre la première et la deuxième fonction est une fonction qui tend vers $+\infty$;

TA4 : si une fonction croît beaucoup plus vite qu'une autre, le résultat d'une opération (addition, multiplication, quotient) entre la première et la deuxième fonction est une fonction qui tend vers $+\infty$.

Ces théorèmes-en-acte jouent sans doute un rôle important dans le processus de conceptualisation en assurant une cohérence entre différentes conceptions et en conciliant les contraintes instrumentales et les contraintes didactiques.

Quant à l'influence de la calculatrice, deux premières conclusions :

- certaines erreurs ont un lien avec l'utilisation de la calculatrice (par exemple pour lnx+10sinx) : l'outil de calcul pèse sur certains résultats, par des indications qui peuvent induire en erreur. Il pèse plus lourdement encore par le type de langage et le type d'étude qu'il favorise.

Cependant, nous ne connaissons pas la succession des gestes des élèves dans son étude de limite. Du schème de calcul de limite, il ne nous reste qu'une trace écrite a posteriori. De la partie instrumentée de cette action, nous avons trop peu d'indications. Pour aller au delà, il faut une analyse plus détaillée des gestes des élèves dans la recherche des limites, à la fois dans la partie instrumentée (0.b.5.iv.) et dans la partie non instrumentée de cette recherche ;

- certains élèves semblent plus que d'autres sensibles à l'influence de la calculatrice, en semblent moins contrôler l'usage. Ceci ne semble pas directement lié aux conceptions exprimées sur les limites ou à l'intensité de l'utilisation de la calculatrice.

Comprendre l'origine de cette influence nécessite de disposer de plus d'informations sur le comportement général des élèves.

II.b. Un an d'observation "à la loupe".

Loupe, jumelles, longue-vue et périscope.

Mais aussi, si l'on rectifie
L'image de l'objet sur l'éloignement,
Sur le milieu qui l'environne,
Sur l'organe et l'instrument,
Les sens ne tromperont personne.

La Fontaine, Fables, VII, 18.

On l'a dit en 0. c., il s'agit ici d'un changement de méthodologie assez important. Dans les observations qui précèdent, on a considéré une population d'élèves assez large avec un recul qui pouvait permettre de revendiquer une certaine neutralité : l'observateur n'était impliqué ni dans les cours dispensés, ni dans l'évaluation des résultats des élèves. En revanche le recueil de données était assez mince : un seul questionnaire et peu d'informations concernant l'introduction dans la classe du concept étudié, les habitudes de travail des élèves.

Désormais le point de vue est tout autre. Nous allons étudier une classe dans laquelle nous avons contrôlé l'enseignement toute l'année, mieux, une classe dans laquelle nous avons contrôlé le processus d'introduction d'un nouvel outil, une TI-92, commun à tous les élèves. Les informations disponibles sont donc beaucoup plus importantes.

Pas d'avantage sans contreparties : du coup la neutralité de l'observation n'existe plus. L'auteur de ces lignes est à la fois juge et partie. Pour autant il existe un certain contrôle : c'est une équipe de 4 professeurs qui a suivi l'expérience et d'utiles confrontations ont eu lieu avec d'autres équipes engagées dans des expériences similaires.

Nos sources seront ici, outre les productions des élèves eux-mêmes, deux documents de compte-rendu de l'expérience ([Trouche, 1996 b]) intitulés *Enseigner les mathématiques en TS avec des calculatrices graphiques et symboliques, Volume 1 ("Côté cours") et Volume 2 ("Côté jardin")*. On trouvera aussi d'autres éléments dans le mémoire de Gaëtan Drezen qui a suivi le travail de l'année dans le cadre de son DEA [Drezen, 1996].
L'objectif des deux documents ([Trouche, 1996 b] était à la fois de retirer des éléments de bilan utiles à d'autres équipes et d'accumuler des matériaux pour cette thèse. Ils contiennent donc de nombreuses allusions à la notion de limite. Ils constituent d'une certaine façon la toile de fond de cette partie II.b. Ils seront ainsi très souvent cités ici. Les éléments dont il sera fait état ont été regroupés en Annexe 4 (Volume 2).

On suivra dans cette partie un double effet de zoom :
- zoom avant, de plus en plus près des élèves et de leurs comportements individuels;
- zoom arrière, en prenant du champ par rapport à la notion stricte de limite pour s'intéresser davantage à l'espace dans lequel elle se déploie : l'Analyse.

II.b.1 Le cadre expérimental.

Présentation du cadre d'un triple point de vue : du point de vue de l'intégration des instruments, du point de vue de l'activité mathématique générale, du point de vue de la "grille" d'observation des élèves.

II.b.1.i L'intégration des instruments.

1. Un cadre commun aux calculatrices graphiques et aux TI-92.

Dès la première heure de cours, il est proposé aux élèves une sorte de contrat : il s'agit d'accepter de s'engager dans un travail un peu nouveau, considérant une calculatrice comme un outil pour faire des mathématiques. Cela suppose un certain investissement personnel. "En échange" une calculatrice d'un type nouveau, prenant en charge un certain nombre de tâches ordinairement dévolues aux élèves, leur serait prêtée pendant l'année. Tous les élèves acceptent, ce qui n'est pas très surprenant (on ne refuse pas une proposition d'un professeur dès la première heure de cours de l'année). **L'intégration des outils se fait en deux temps : pendant le premier trimestre, ce sont les calculatrices graphiques "classiques" des élèves qui sont prises en compte, dans un deuxième temps (à partir de Noël), les TI-92 leur sont distribuées.**

2. L'intégration de la calculatrice en classe (graphique, puis "symbolique") se fait à trois niveaux :

i) une intégration "matérielle" :

Une calculatrice "rétroprojetable" permet de disposer d'une image commune à toute la classe, sur un écran à côté du "tableau noir". **Le maître combine dans son enseignement l'image de l'écran et l'écrit du tableau. Les élèves doivent faire de même sur leur table, en organisant un espace pour leur cahier et un espace pour leur calculatrice. La calculatrice est régulièrement utilisée (ce qui signifie très exactement que sa non-utilisation fait figure d'exception).** Un double lien est instauré entre le dispositif commun et le dispositif particulier à chaque élève : c'est un élève-sherpa[34] qui, à tour de rôle, manipule la calculatrice rétroprojetable visible par toute la classe.

Quatre types d'utilisation individuelle sont instaurés : le type 0 (les calculatrices sont fermées), le type 1 (les calculatrices sont ouvertes et chaque élève règle son pas sur la calculatrice rétroprojetée ; autrement dit, tout le monde fait la même chose au même moment), le type 2 (calculatrice momentanément d'usage libre ; on peut, ou non, l'utiliser et à sa manière) et le type 3 (calculatrice d'usage libre, pour toute une séance de travail). De plus, en type de travail 2 et 3, l'échange entre les élèves est encouragé, mais uniquement dans le cadre de binômes : pour des raisons de contrôle du bruit mais aussi pour des raisons tenant à la petitesse des écrans des calculatrices. La discussion sur ce qui apparaît à l'écran requiert une certaine "intimité" (cf [Drijvers, 1994]) ;

---

[34] Le mot sherpa est justifié par le fait que l'élève en question soulage le maître des tâches de manipulation de la calculatrice. Mais en fait, son utilité va au delà : il permet au professeur de contrôler partiellement les genèses instrumentales, de régler le rythme de manipulation de la calculatrice sur les rythmes des élèves, de favoriser le débat dans la classe (on critique plus facilement les choix d'un élève, que le choix du professeur)... Bref, le sherpa est aussi parfois le témoin ou le guide ou le déclencheur. Un tel éventail de fonctions trouve difficilement appelation satisfaisante...

ii) une intégration "didactique" :

Les cours sont organisés dans le sens d'un "débat scientifique". Les questions "problématiques" en sont le pivot ; elles sont posées par le maître, elles peuvent aussi être issues d'un résultat paradoxal mis en évidence par un élève (ce qui arrive assez souvent avec des outils "sophistiqués"). Temps de réflexion, prospections diverses utilisant ou non les calculatrices, mise en commun des observations, conjectures, discussion sur les validations possibles. La calculatrice est insérée ainsi dans un système de preuves et réfutations ([Lakatos, 1976]) dont elle n'est qu'un des éléments ;

iii) une intégration "mathématique" :

Il n'y a pas de séances particulières réservées à l'apprentissage de la manipulation de la calculatrice, mais chaque activité mathématique est l'occasion de poser le problème de l'utilisation de l'outil. La métaphore de la boîte à outils est assez éclairante de ce point de vue : cela aurait une utilité assez limitée d'organiser une séance d'apprentissage général sur le thème "comment utiliser une boîte à outils ?". Par contre, le sens se construit quand, pour chaque activité, on se demande :"quel(s) outil(s) prendre ? Pourquoi ? Pourquoi faire ?".

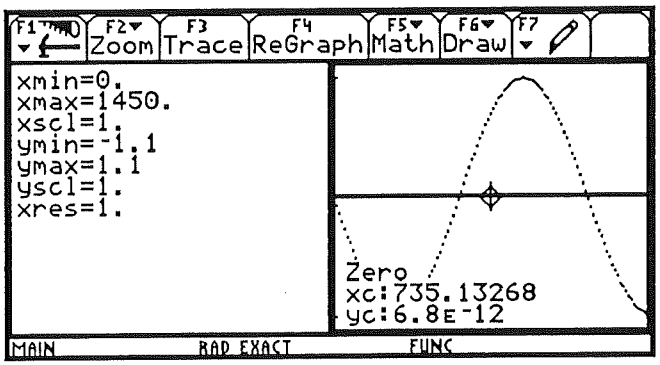
La calculatrice n'est donc pas prise en compte en soi, mais comme outil pour faire des mathématiques. C'est dans ce cadre que sont donnés des problèmes qui relèvent apparemment de la technique, mais dont le traitement nécessite en fait une technologie, c'est à dire un discours sur la technique, qui ne peut être que mathématique.

De nombreux problèmes seront organisés autour des problèmes de fenêtrage (cf le Window Shopping en 0.b.5.ii.).

Il s'agit de contrôler la tendance évoquée en 1.c.2.i. "Voir avant de calculer" et de favoriser les changements de registres essentiels pour une différentiation entre les objets mathématiques et leur représentation (cf 0.b.4.iii.).

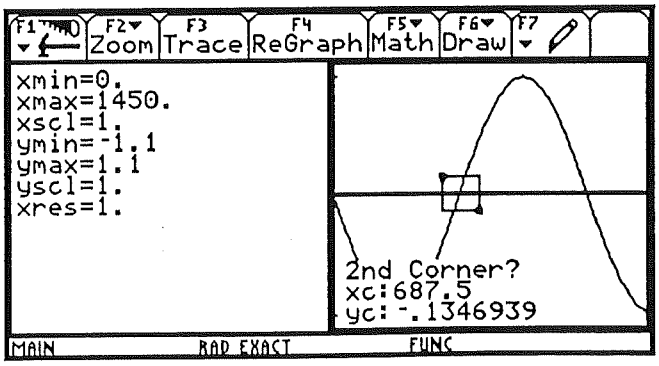
Un exemple extrait de [Trouche, 1996 b] (Annexe 4, volume 2, page 37) :

On observe une représentation de la fonction sinus sur [0, 1450]. Comment expliquer, alors que cette fonction a pour période 2π, qu'il n'apparaissent même pas une période entière à l'écran ? Comment expliquer que la calculatrice indique un "zéro" de la fonction qui n'est même pas sur la courbe ?



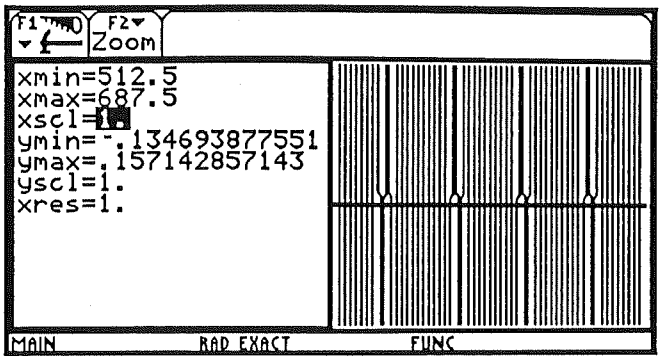
La fonction sinus, toujours sur le même intervalle.
On a sélectionné une partie de la "courbe" grâce à la commande zoom box.
Que va-t-on obtenir en aggrandissant cette portion ?

(Voir écran page suivante).



De l'ordre (apparent) naît le désordre ou plutôt une nouvelle apparence de l'ordre.

On comprend, à travers cet exemple que, si la calculatrice est en général un auxiliaire de résolution ([Bruillard, 1993]), elle peut être aussi un objet problématique.



C'est dans le traitement technologico-mathématique de ce type de problème qu'une prise de distance avec l'outil peut se faire. L'intégration s'est faite à partir de ce point de vue, pour sortir de l'ombre les contraintes propres à ce type d'outil (cf. I.c.2.).

3. Une coupure d'ordre épistémologique avec l'intégration des TI-92.

Avec l'introduction des TI-92, des choix ont été faits :

i) le choix de l'application de base et du mode de calcul "ambiant" :

Le travail avec des calculatrices graphiques permettait de multiplier les points de vue sur un objet (par exemple, pour une fonction, une formule, plusieurs représentations graphiques, plusieurs tableaux de valeurs). Aucun point de vue n'était alors privilégié.

Avec les TI-92, le choix (fait par le maître) est différent : une seule application permet de faire du calcul exact (l'application initiale, "Home", cf I.c.2.ii.). Elle est donc présentée comme l'application "de base" (comme on dit, dans une expédition exploratrice, un "camp de base"). Dans cette application initiale, on pouvait choisir de se placer en mode exact ou en mode approché, ou en mode "auto". Le choix est fait, pour bien marquer la coupure avec les calculatrices graphiques, de se placer systématiquement en mode exact. **Ainsi le mode de calcul "ambiant" est un mode exact.** Tout calcul "approché" nécessite alors un choix conscient (il faut alors appuyer sur une touche spécifique, "diamant", avant d'appuyer sur "Enter" qui donne alors un résultat approché).

Il s'agit là d'un bouleversement complet dans les habitudes des élèves. En effet, entrer dans la calculatrice "$\sqrt{2}$"et voir la réponse "$\sqrt{2}$" retournée par la calculatrice donne dans un premier temps l'impression que le travail de "calcul" n'a pas été fait par l'outil (cf I.c.2.ii).

ii) une importance particulière accordée au calcul symbolique :

Un travail important est fait, autour de la syntaxe des commandes, des reconnaissances d'écritures et du contrôle des résultats proposés par la calculatrice.

iii) pour le reste, le choix d'un cadre de travail dans le prolongement de celui fixé avec les calculatrices graphiques :

Rien n'a été dit sur la programmation, sur les possibilités de sauvegarde du travail réalisé. **On s'est d'une certaine façon "coulé" dans les commandes qui étaient communes aux calculatrices graphiques et aux nouvelles calculatrices (utilisation du fichier de fonctions plutôt que définition de f dans l'application initiale, utilisation du tableau de valeurs). Dans chacune de ces applications, on prend désormais soin de préciser à chaque fois le contexte du calcul (exact ou approché).**

II.b.1.ii L'activité mathématique organisée et le recueil d'observations.

On a évoqué en 0.b.3.i. le rôle de médiateur du professeur. C'est dans cet esprit que l'enseignement a été conçu cette année :

- la conception des séquences de cours se rattache à l'idée de tutelle ou d'étayage. C'est dans ce cadre que le cours est allé un peu plus loin que le "programme officiel" (en ce qui concerne les limites de fonction, voir en II.b.2.i.) ;
- la conception des TP et plus encore du problème long (terminologie tirée de G. Aldon ([Aldon, 1994]), empruntent à la théorie des situations a-didactiques de Brousseau (0.b.2.ii).

1. Les TP sont des séances d'une heure, institutionnalisées dans la semaine.

Une question problématique est soumise aux élèves, qui travaillent par groupe de deux et notent tous leurs résultats sur un cahier de recherche. "Résultat" signifie toute action entreprise, qu'elle se traduise par un succès ou un échec partiels ou par une indécision totale. Une semaine après, le TP est repris par le maître qui en donne une correction intégrant les résultats des élèves et d'autres pistes, en formes de "vues et changement de points de vue". Dix huit TP ont été traités pendant l'année, dont beaucoup font intervenir la notion de limite d'une fonction.

Exemple de TP (cf. Annexe 4, Volume 2, page 57) :
A. On se propose de résoudre l'équation $e^x = x^5$. Il s'agit donc d'établir avec rigueur le nombre de solutions de cette équation et de donner les valeurs exactes ou un encadrement de chacune d'entre elles.
En général, pour résoudre un tel problème, diverses méthodes d'approche sont possibles : étude directe de l'équation, transformation de l'équation, étude d'une fonction, ou de deux fonctions , transformation des fonctions, représentations graphiques, utilisation de la calculatrice...
A vous de voir ici ce qui convient le mieux. Comme d'habitude, on demande de noter dans le cahier de recherche, au fur et à mesure, toutes les méthodes utilisées. S'agissant de représentations graphiques, on reproduira précisément le dessin, en justifiant le choix du repère ou, pour un dessin issu de la calculatrice, le choix de la fenêtre.
B. Même question, avec l'équation $e^x = x^{50}$.

2. Le problème long est soumis aux élèves en Février (énoncé page suivante)

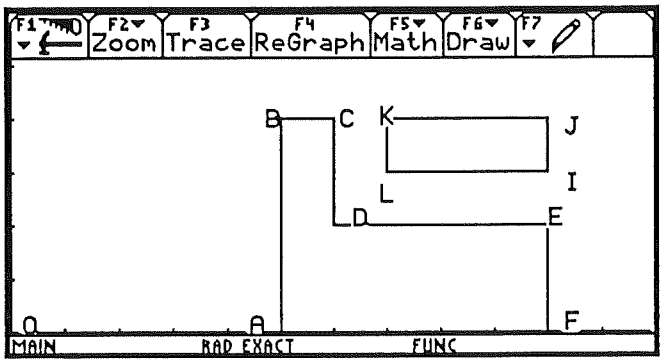
Il donnera matière à un travail personnel (ou d'équipe) jusqu'au mois de Mai. Des mises au point ont lieu régulièrement en classe. Comme on le voit, les questions de limite interviennent, autant pour les raccords d'éventuels "tronçons" de courbe que pour les optimisations finales.

3. Un ensemble multiforme de données sur les travaux des élèves.

On dispose ainsi avec cette organisation de classe de multiples "biais" d'observation :
- le travail des élèves en classe (en particulier quand ils jouent le rôle de "sherpa");
- le travail des élèves en TP et les traces qui en restent sur les cahiers de recherche ;
- les tâtonnements des élèves dans la réalisation du problème long.

On dispose ensuite des traces "habituelles" : résultat des interrogations écrites, des devoirs hebdomadaires et de traces liées au dispositif expérimental : cinq questionnaires à destination des élèves jalonnent l'année (Annexe 4, volume 2, page 159) et permettent d'avoir une idée de la représentation que se font les élèves du cadre de travail général et de leur propre intégration dans ce cadre.

Le texte du "problème long" donné aux élèves :

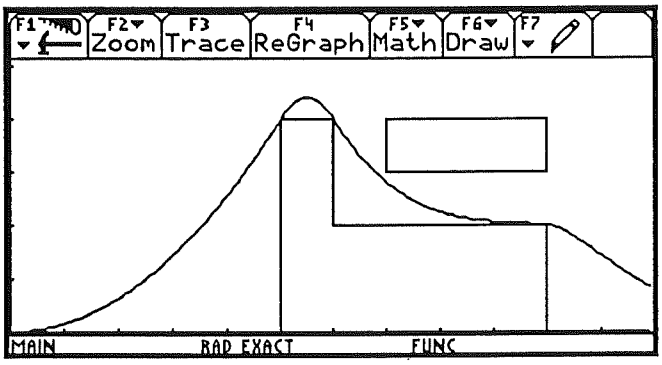


Le dessin ci-contre est une modélisation des contraintes s'exerçant sur la trajectoire d'un avion.

Il décolle en O, doit passer au dessus d'un relief qui culmine en B, puis passer au dessus du plateau [DE], mais sous la masse nuageuse (IJKL) et enfin atterrir sur une piste qui commence en F et de longueur infinie (pourquoi pas ?) : le contact entre l'avion et la piste, pour être le plus doux possible, devra se faire "à l'infini".
On considèrera que le dessin ci-dessus est une modélisation qui "enveloppe" les reliefs réels : donc l'avion peut passer par B, mais pas en dessous !

Question 1

Déterminer une fonction dont la représentation graphique satisfasse à toutes ces contraintes. On n'utilisera que des combinaisons de fonctions puissances et de l'exponentielle.
On trouvera les indications relatives aux fonctions dans le mode d'emploi de la TI-92, chapitre 23. On trouvera des indications relatives à la résolution des systèmes d'équation dans le même mode d'emploi, chapitre 22.



Pour montrer que tout ceci est possible, voici un exemple d'itinéraire.

Il resterait bien sûr à prouver que la fonction convient bien (contraintes d'atterrissage, de décollage, position par rapport aux points critiques B, C...). Mais la courbe a belle allure.

Question 2

On veut maintenant **optimiser** le trajet. L'idée est que l'avion monte "le moins possible". Cela peut se comprendre de deux façons (au moins) :
- l'avion transporte des voyageurs cardiaques. Aussi, le pilote doit s'arranger pour que, sur le trajet, la pente maximale de l'avion (en valeur absolue) soit la plus faible possible.
Pour deux fonctions données, f et g, on considèrera sup |f ' | et sup | g' |. La fonction qui aura le plus petit sup sera réputée la meilleure.
- l'avion est un avion espion. Il devra donc voler au plus près des reliefs. Il faudra ici minimiser l'intégrale de f. A vos compas !

II.b.1.iii Une typologie des comportements.

Nous allons utiliser ce qui a été dit en 0.b.3.iv. des métaconnaissances pour construire une typologie des comportements des élèves.

1. Problèmes de méthode.

Nous avons déjà dit que le relevé des observations tiendrait compte du profil des élèves de la classe. Comment décrire ce profil ? On pourrait partager la classe entre redoublants et non redoublants (14 redoublants dans la classe) ou partir d'une situation de la classe dans l'ensemble "lycée" à partir du passé des élèves. Cela nous amènerait en l'espèce à considérer que la classe n'est pas très bonne et regroupe une bonne majorité d'élèves en difficulté scolaire. Mais le "type de travail" n'est pas seulement lié aux résultats scolaires ou à l'historique de l'élève.

Comment aborder cette typologie? Plusieurs modes de constructions d'une typologie de comportements d'élèves sont envisageables. A propos de l'expérimentation dont il est question, deux tentatives - non contradictoires - ont eu lieu :

i) Un modèle "orienté objets"

G. Drezen [Drezen, 1996], qui a suivi la classe dans le cadre du DEA de didactique des disciplines scientifiques, est parti d'un "modèle orienté objets". Il distingue sept propriétés des objets (abstraction, encapsulation, modularité, hiérarchie, typage, simultanéité et persistance) et cinq opérations qu'un objet (ou un sujet) peut effectuer sur un objet (modification, sélection, itération, construction et destruction). A partir du codage des activités des élèves lors des TP, relatives à ces opérations, il réalise une étude statistique qui ne permet pas de déboucher sur une typologie. Ceci ne remet pas en cause la méthode dans son fondement mais dans ses modalités d'application :

> *"Toutes ces réserves ne pourraient être levées qu'après un volume de tests important qui auraient fait "jouer" le modèle en un nombre statistiquement représentatif de situations où seraient mis à l'épreuve de l'observation, énoncés, codages et codeurs"* [Drezen, 1996] ;

ii) Une typologie à partir des métaconnaissances.

Notre propre typologie s'est construite par référence aux métaconnaissances repérables dans l'action des élèves (cf 0.b.3.iii). Nous mettrons au centre du dispositif le contrôle, dont on a vu l'importance dans différentes approches disciplinaires (0.b.3.iii).

Dans le document "Côté Jardins" ([Trouche, 1996 b]), une présentation des "métaconnaissances globales" avait été faite sous la forme d'un tableau (schéma n°1, ci-dessous). Il s'agissait de décrire l'action d'élèves travaillant en binôme (d'où la présence du voisin), dans "un environnement calculatrice".

Nous avons appelé improprement "outils de niveau 1" ce que l'on pourrait plutôt appeler "**sources d'information**". Il s'agit des références construites par le sujet, du travail papier-crayon, de la calculatrice et du voisin.
Nous avons distingué comme "outils de niveau 2" **les métaconnaissances globales** : la coordination/comparaison, l'inférence, l'interprétation sémantique des données, l'investigation.
Enfin nous avons donné une place centrale au contrôle.

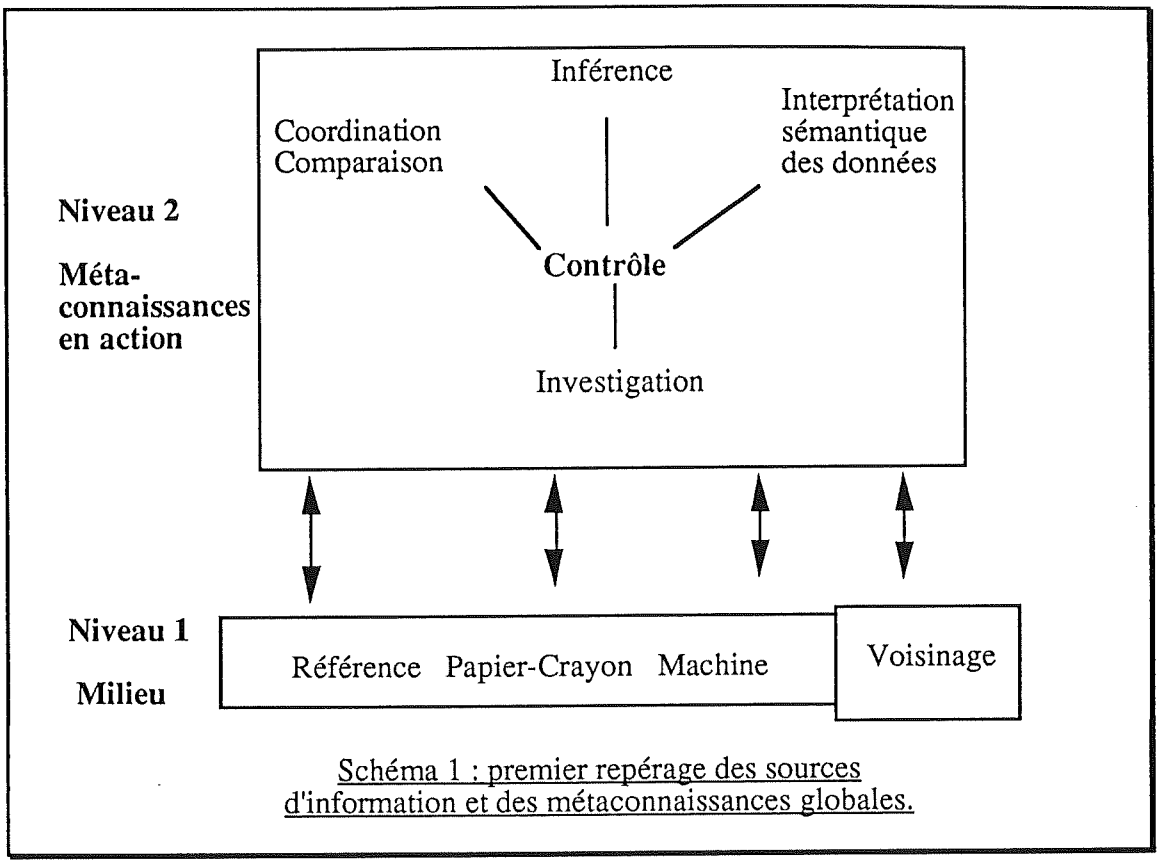


Schéma 1 : premier repérage des sources d'information et des métaconnaissances globales.

Une comparaison de ce tableau avec la classification de J. Pitrat [Pitrat, 1990] est utile (cf. 0.b.3.iv.):

- il évoque les *"connaissances pour rechercher les connaissances en mémoire"*. On parle ici de capacité d'investigation ;

- il évoque les*"connaissances pour découvrir, pour acquérir, pour utiliser, des connaissances"*. S'agissant de l'activité mathématique, on a ici mis en évidence l'aptitude à coordonner, interpréter, inférer ;

- il évoque les *"connaissances pour exprimer et pour stocker les connaissances"* ; c'est incontestablement un manque dans le tableau ci-dessous. On le complètera donc en ajoutant l'aptitude à stocker les connaissances (ce qui peut se faire dans ses propres références, ou dans la machine, ou sur papier) et l'aptitude à exprimer ses connaissances. L'aptitude à s'exprimer peut être dirigée vers le voisin, une tierce personne (oralement) ou par écrit.

Ceci débouche sur un tableau légèrement modifié (schéma 2 ci-dessous).

2. Des métaconnaissances à la typologie.

La typologie s'est construite par aller-retours entre l'observation des élèves et ces références théoriques. L' observation des élèves s'est faite "en direct", lors des TP ou du problème long et en différé, par l'analyse des cahiers de recherche. Une "observation minutée" des élèves (cf. plus loin, en II.b.1.iv.) a permis de relever, toutes les 15 secondes, les actions entreprises par certains élèves repérés. Tout ceci a permis de dégager 5 types d'élèves, que l'on a appelé "théorique", "rationnel", "scolaire", "bricoleur" et "expérimentateur".

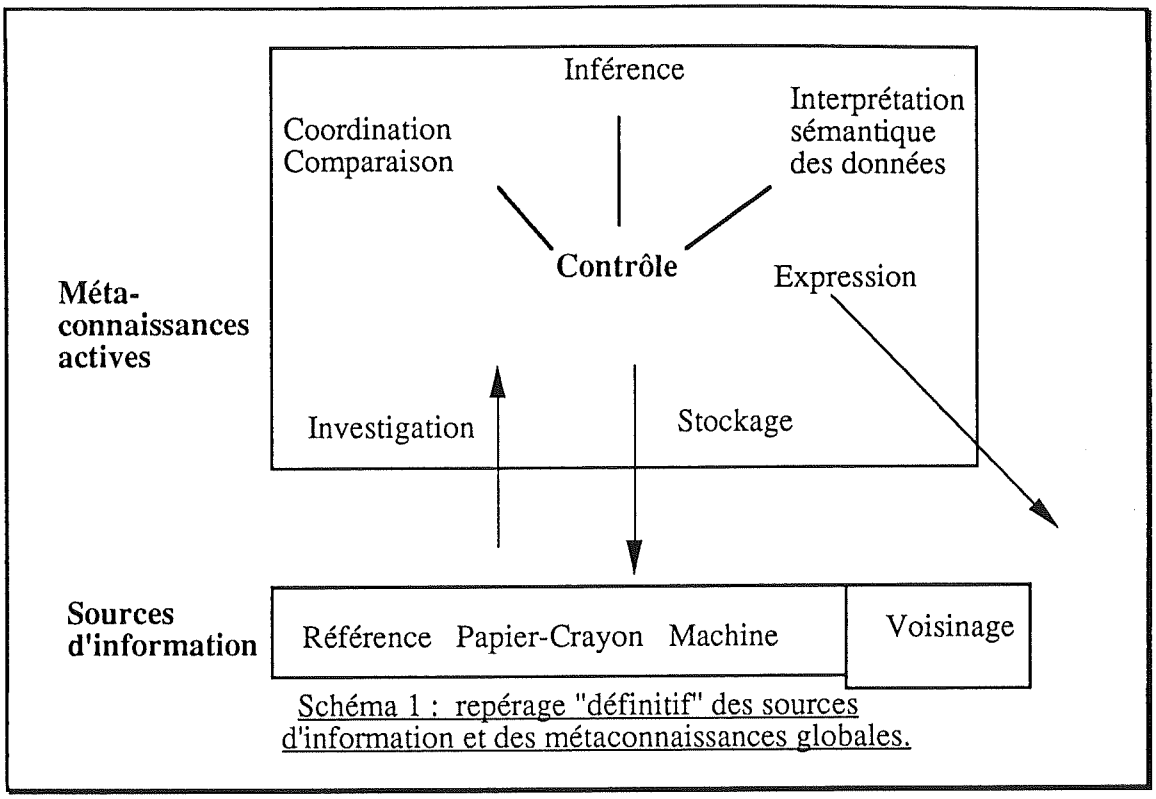


Schéma 1 : repérage "définitif" des sources d'information et des métaconnaissances globales.

Présentons les grandes lignes de cette typologie.

i) du point de vue des étiquettes :

Le choix d'un nom, pour désigner un objet, n'est jamais neutre [35]. On se souvient de la phrase de Vygotski, déja citée : *Chaque mot est un microcosme de la conscience humaine*. Disons, pour se disculper par avance, que chacune de ces étiquettes se justifie "d'une certaine façon" mais qu'aucune d'entre elles ne donne pleinement satisfaction. On a essayé de choisir des adjectifs qui n'incorporent pas trop de "jugements de valeurs". Et, faute de mieux, on a gardé les appellations qui ont fonctionné pendant l'année.

ii) sur le choix des élèves représentatifs :

Une fois repérées les régularités, on a choisi 5 élèves représentatifs des tendances extrêmes [36]. Cela ne veut pas dire que chaque élève de la classe et au delà, peut être rangé sous tel ou tel type. Mais ces cinq types sont des points de repère qui ont permis de situer (souvent dans des types intermédiaires) tous les élèves de la classe. Mieux l'observation de ces quelques individus renseigne sur l'évolution de la cohorte ou en tout cas sur ses grandes tendances.

---

[35] Il est probable d'ailleurs que, si tel élève apprenait qu'on lui avait attribué telle étiquette, il s'exclamerait, comme Arlety dans le film *Hotel du Nord* : "Atmosphère, atmosphère, est-ce que j'ai une gueule d'atmosphère ?"...

[36] Encore une référence cinématographique : dans la Traversée de Paris (1956), Claude Autant-Lara met en scène Gabin et Bourvil. Le critique cinématographique de Télérama (Télérama n°2428 du 24 Juillet 1996) décrit les rôles des deux acteurs *le seigneur et le valet, le gagneur et le perdant* :
Les caractères des deux hommes qui s'opposent sont à la fois marqués au coin du réalisme et du symbolisme. Ils sont vrais et parlent juste, ils sont représentatifs de deux types d'individus. C'est, toutes proportions gardées, ce que nous avons voulu faire dans notre typologie.

Ainsi la construction de cette typologie était le résultat du suivi de l'expérimentation et en même temps permettait d'orienter le suivi de cette expérimentation. Cela n'a rien d'un cercle vicieux : il n'y a pas auto-justification, autoréférence mais un aller-retour entre des conjectures des réfutations ou des adaptations. Ce n'est rien d'autre, dans le domaine de la didactique que l'application d'une méthode scientifique expérimentale très générale.

Bien entendu la nature des travaux réalisés a permis de repérer plus particulièrement certains "types d'élèves" : le travail avec instrument a mis en évidence certains élèves "bricoleurs", les TP ont mis en évidence certains élèves "expérimentateurs".

3. Présentation de la typologie.

Nous avons donc appelé "niveau 1" les sources d'information et niveau 2 "les métaconnaissances globales".

On présente ci-dessous les "cartes d'identité" de chacun des types avec un bref commentaire. Ont été grisées les cases correspondant aux outils opérationnels (deux niveaux de gris ont été choisis : le gris plus soutenu correspond à un outil plus sollicité).

Dans chaque tableau ont été représentés les outils de l'action elle-même. En amont du tableau, une évaluation de l'opérateur de contrôle, en aval une évaluation des métaconnaissances de stockage et d'expression.

Le type théorique **Opérateur de contrôle : moyen.**

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Il organise son travail par rapport à la recherche et à l'utilisation d'éléments de référence (d'où des phases longues de réflexion). Niveau 1 : les éléments de référence ; niveau 2 : l'investigation, l'interprétation sémantique et à un degré moindre la comparaison et l'inférence.

Le stockage des résultats de l'action, qui deviennent autant de nouvelles références, est très bien organisé. L'expression écrite est bonne.

Le type rationnel **Opérateur de contrôle : fort.**

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Il organise son travail autour de calculs (ce qui signifie sur papier dans un environnement papier/crayon, mais avec les calculatrices symboliques il y a une nouvelle répartition des outils) ; déroulement linéaire des productions écrites.

Outils niveau 1 : éléments de référence et calculs P/C. Niveau 2 : l'investigation, l'interprétation et l'inférence.

Là aussi, le stockage des nouvelles connaissances est bon, comme l'expression écrite.

On verra dans le cours de notre étude que, à la différence du type "théorique", le stockage de nouvelles connaissances n'entraîne pas nécessairement la réorganisation des anciennes.

Le type scolaire **Opérateur de contrôle : faible**

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Il n'organise pas son travail, ou plutôt procède par "copié-collé" de démarches décrites antérieurement. Outils niveau 1 : calculs P/C, machine, voisinage. Outils niveau 2 : même l'investigation et la comparaison sont faibles.

Le stockage est très faible, l'expression orale et écrite aussi.

Le type bricoleur **Opérateur de contrôle : faible**

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Il organise son travail autour de conjectures et validations issues de la calculatrice. Outil niveau 1 : surtout la machine, mais aussi des échanges avec le, ou les, voisins. Niveau 2 : surtout l'investigation et, plus faiblement, la comparaison.

L'opérateur de stockage fonctionne pour tout ce qui concerne la calculatrice. Pour le reste, il fonctionne très peu. L'expression est plus orale qu'écrite.

Le type expérimentateur **Opérateur de contrôle : moyen**

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Il organise son travail autour de conjectures et validations, issues de la calculatrice, de calculs partiels ou d'étude de cas particuliers. Outils niveau 1 : tous, mais les références sont assez faibles. Il y a un critère "d'actualité" pour ce type d'élève : sont mobilisables les données issues de l'observation, ou des calculs, du moment. Niveau 2 : l'investigation, la comparaison et, à un moindre degré, l'interprétation, l'inférence.

Le stockage est moyen. L'expression est plutôt bonne, aussi bien orale qu'écrite.

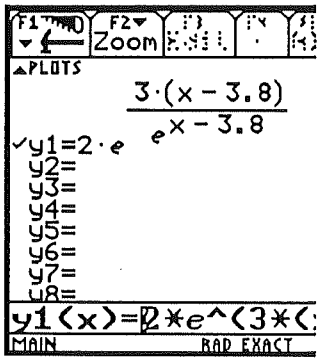
La construction d'une carte décrivant le comportement des élèves à partir des métaconnaissances globales et des sources d'information disponibles débouche sur un ensemble de cinq profils d'élèves : un type "théorique", un type "rationnel", un type "scolaire", un type "bricoleur" et un type "expérimentateur".

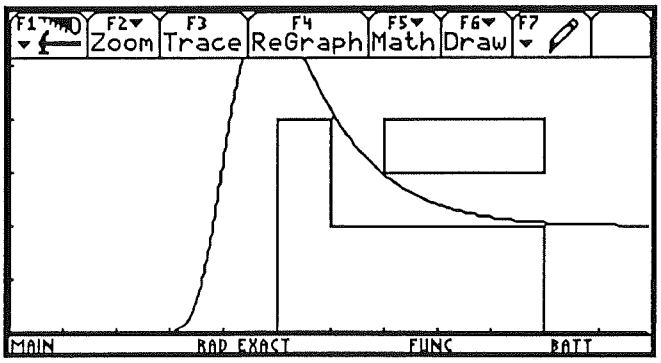
II.b.1.iv Typologie, défense et illustration.

Nous allons donner ici trois illustrations de la typologie proposée.

1. A partir du problème long (II.b.1.ii.). Présentation d'un travail par type.

i) Production d'un élève plutôt "théorique" :

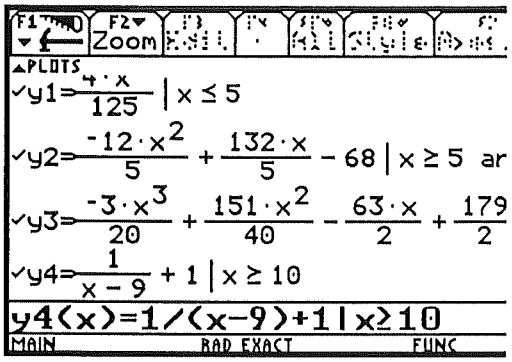


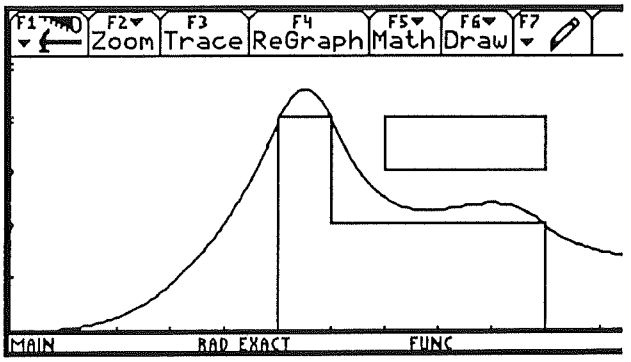


Il cherche dans l'herbier de fonctions à sa disposition une fonction qui réalise le maximum de conditions ; il trouve la fonction x^2e^{-x} qui réalise la contrainte de départ, la contrainte d'arrivée et a une forme "en cloche". Puis il essaie par composition, fonctions associées etc. d'ajuster la courbe pour éviter les reliefs.

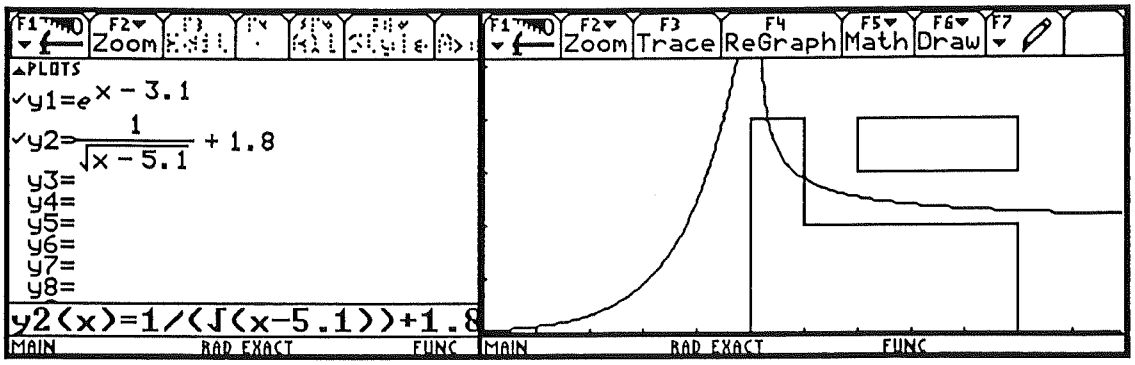
ii) Production d'un élève plutôt "rationnel" :

Les contraintes que doit vérifier la fonction sont exprimées et des "morceaux" de fonctions élémentaires sont raccordés convenablement par résolution de systèmes d'équations.



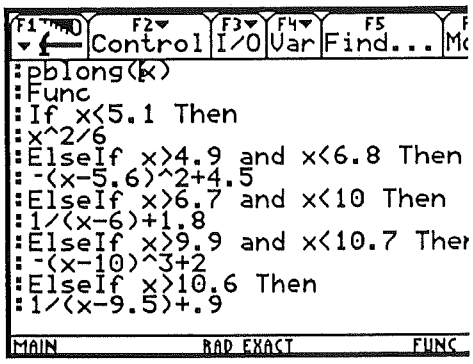


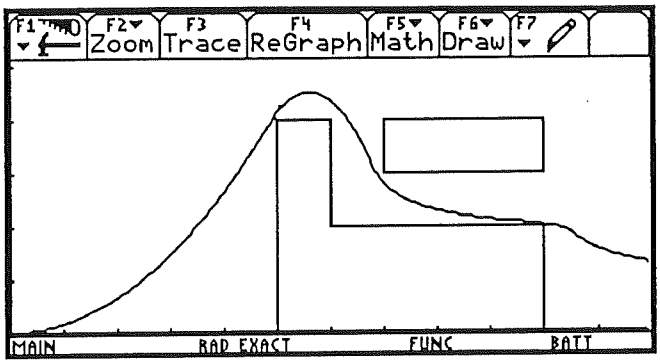
iii) Production d'un élève plutôt "scolaire" :



Là aussi des "bouts" de fonction sont définis mais aucun d'entre eux n'est convenable. Les maladresses, autant sur le plan mathématique que sur le plan de l'utilisation de la machine, apparaissent clairement.

iv) Production d'un élève plutôt "bricoleur" :



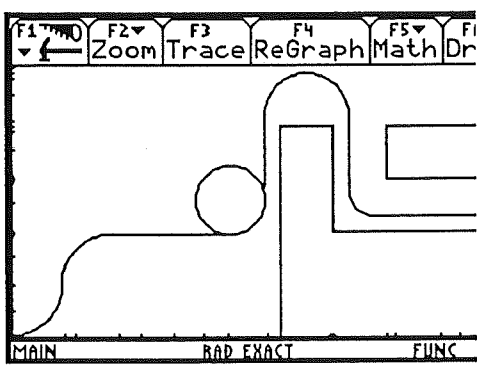


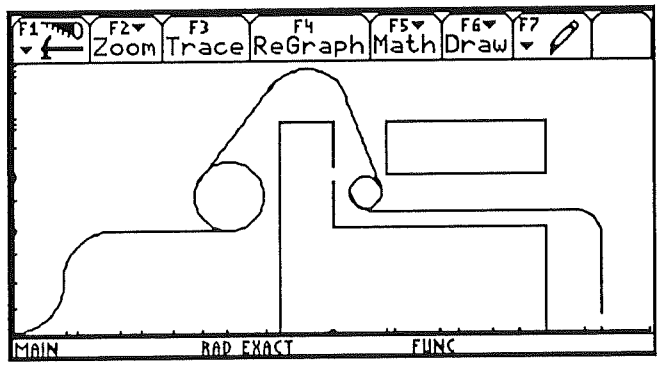
La courbe apparaît correcte. Cependant, si l'on y regarde de plus près, on voit que les raccords sont étranges : l'élève parle de raccords en "manchons". Une première expression est définie jusqu'à 5,1, une autre prend le relais à partir de 4,9. L'illusion est que ce contact assure la qualité de dérivabilité de la fonction.

Il y a là une grande habilité manoeuvrière qui permet de contourner la question théorique de la dérivabilité (et de la continuité).

v) Production d'un élève plutôt expérimentateur :

On remarque la mobilisation d'un autre cadre, le cadre géométrique, pour traiter le problème avec des ressources imaginatives certaintes (comme les "brins" parallèles à l'axe des ordonnées ne sont pas la représentation d'une fonction, l'élève imagine un système de looping - ce qui pose un autre problème, de sortie en marche arrière pour l'avion).





Ce ne sont là bien sûr qu'une illustration ponctuelle de comportements plus globaux observés en TP ou interrogations écrites. Mais cela donne un peu de chair aux différents types d'élèves présentés plus haut.

2. Une tentative de validation, à partir d'une "observation minutée".

Lors de deux TP, l'activité de 5 élèves "représentatifs" de chaque "type" a été minutée. Toutes les 15 secondes l'action entreprise a été repérée. On lira page suivante la feuille d'observation minutée utilisée lors du premier TP réalisé avec calculatrice graphique. La durée de 15 secondes a été choisie par référence à Card, Moran et Newell, cités par J.-P. Meinadier ([Meinadier, 1991]), qui donnent cet ordre de grandeur pour "l'unité de tâche".

Feuille d'observation minutée

Pour la machine, porter A pour action, R pour Regard

		15	30	45	13	15	30	45	14	15	30	45	15	15	30	45	16	15	30	45	17	15	30	45	18
Pap/Cray	Dessin																								
	Tableau de variation																								
	Calcul																								
	Ecriture rapport																								
	Regard travail fait																								
	Lecture énoncé																								
	Regard cours																								
	Regard feuille voisin																								
Machine	Etat																								
	Application initiale																								
	Window					A	A																		
	Y editor			A	A																				
	Graph							R	R			R	R		K	K	R	K	R	R	R	R			
	Table de valeur																								
	Machine voisin																								
Interact	Regard vague																								
	Avec le prof																								
	Avec le voisin	X	X							X	X			X									X	X	X
Divers																									

Zoom

23 gestes élémentaires ont été répertoriés. Cette distinction ne s'est pas faite in abstracto, mais relativement à la nature de la tâche (il s'agit d'un travail de recherche par équipe de 2) et au chapitre des mathématiques traité (il s'agit de l'étude des fonctions). 23 gestes donc :

- pour le travail papier/crayon, la réalisation d'un dessin, la construction d'un tableau de variation, un calcul, l'écriture du "rapport de recherche", le regard sur le travail fait, la lecture de l'énoncé, le regard sur le cours ;
- pour le travail machine, le travail sur un graphique, le "calibrage" d'une fenêtre (Range, ou Window), le travail sur un tableau de valeurs, un calcul, l'utilisation du mode d'emploi, l'utilisation de la machine du voisin ;
- enfin pour l'interaction, l'interaction avec soi-même ("regard vague"), l'interaction avec le prof (pour une demande de complément, un appel au secours, ou une demande de validation), l'interaction avec le voisin de binôme (comme émetteur, recepteur, correcteur ou corrigé).

Enfin, dans chacune des cases de la feuille d'observation, il était possible de porter une précision supplémentaire. Par exemple, sur la ligne Graph (action machine), on pouvait porter T (pour Trace, M pour Minimum) ce qui permettait de qualifier l'action entreprise à propos du graphique de la machine.

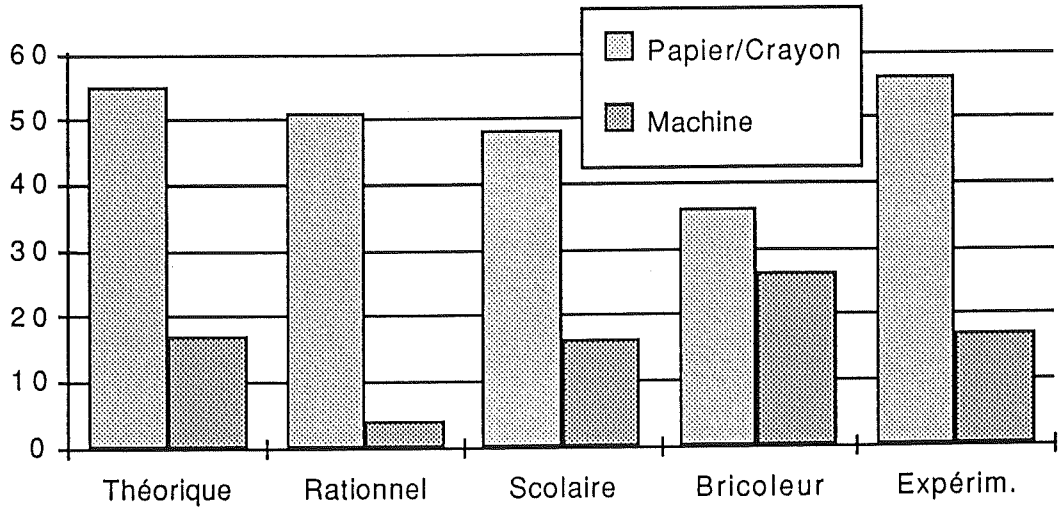
L'ensemble du dispositif semble cohérent mais sa mise en oeuvre s'est heurtée à quelques difficultés :
- il n'est pas facile de discerner ce que fait un élève sur une calculatrice (l'écran est plus petit que celui d'un ordinateur) ;
- il n'est pas facile d'analyser dans l'instant la nature exacte de l'action (s'agit-il de l'écriture du rapport ou d'un calcul ? S'agit-il d'un regard vague ou du regard sur le cahier de cours ?).

Les résultats sont donc entâchés d'une assez grande incertitude liée au point de vue de l'observateur. Cependant ils apportent quelques informations qui valident au moins partiellement la typologie proposée.

i) Première observation : le rapport entre le temps en travail sur machine et le temps passé en travail sur papier.

Le graphique 1 ci-dessous indique deux pôles opposés : l'élève de type bricoleur et l'élève de type rationnel.

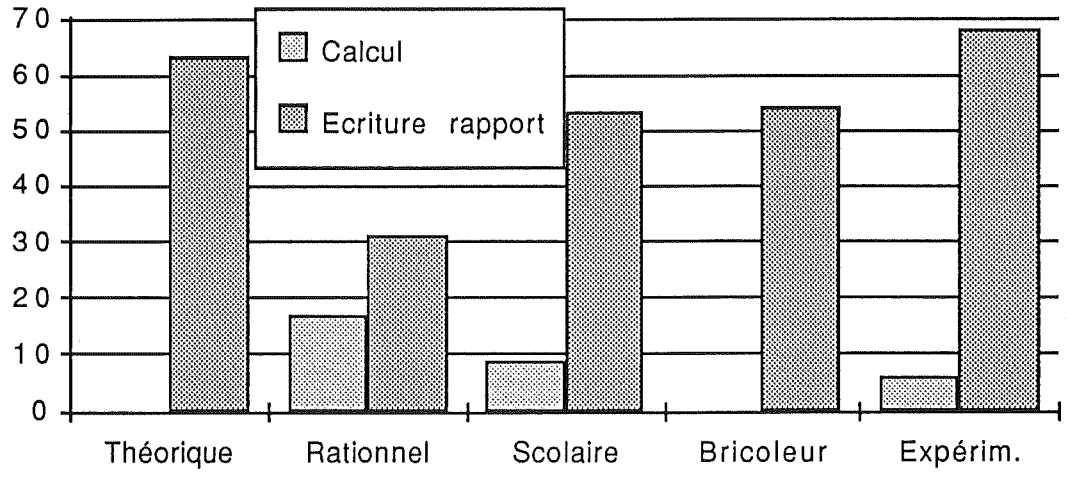
Si on fait le rapport $\frac{\text{temps sur papier}}{\text{temps sur machine}}$, on trouve 15 pour l'élève rationnel et 1,5 pour l'élève bricoleur. Les trois autres élèves apparaissent intermédiaires : on trouve 3,3 pour l'élève théorique, 3,1 pour l'élève scolaire et 3,4 pour l'élève expérimentateur.



Graphique 1 :
Temps passé sur machine et sur papier en pourcentage du temps global de travail.

ii) Deuxième observation : à l'intérieur du travail sur papier, relevé du temps de calcul et du temps d'écriture du rapport.

Le graphique 2 ci-dessous indique deux pôles opposés : d'un côté l'élève rationnel pour lequel le temps de calcul et le temps d'écriture du rapport sont à peu près équilibrés et, de l'autre côté, les élèves théorique et bricoleur pour lesquels aucun calcul n'a été repéré (pour des raisons différentes : l'élève théorique contourne les calculs en se ramenant à des problèmes proches connus, l'élève bricoleur remplace les calculs par la manipulation de la machine). Apparaissent ici comme intermédiaires les élèves de type scolaire, ou expérimentateur : les calculs "à la main" occupent une petite place, mais une place quand même.



Graphique 2

Temps de calcul sur papier et temps d'écriture du rapport, en pourcentage du temps global de travail sur papier.

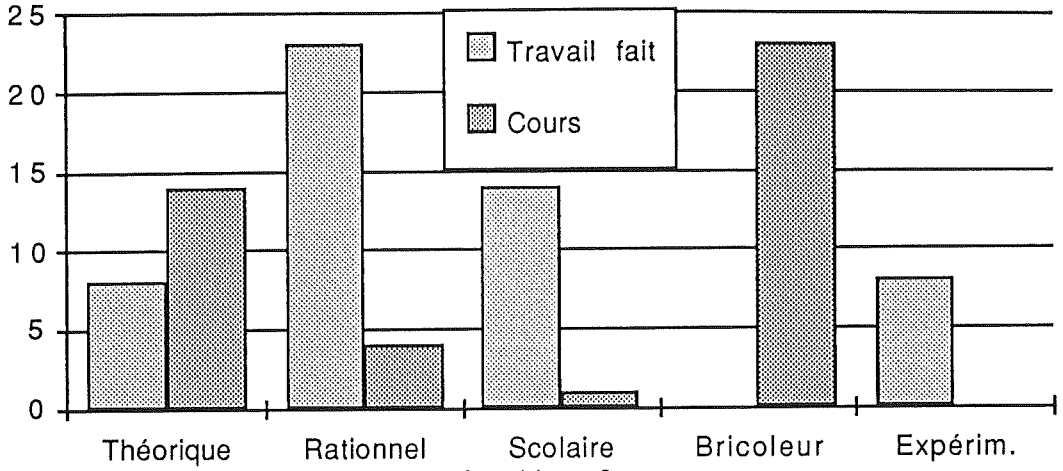
iii) Troisième observation : comparaison des temps passés à regarder le travail fait et à regarder le cahier de cours (voir graphique 3 ci-dessous).

Là aussi, les types rationnel et bricoleur s'opposent : le premier utilise beaucoup le travail déjà fait, signe d'un déroulement "linéaire", enchaîné, de l'activité. Le deuxième n'utilise pas du tout ce qui a été fait, signe d'un travail sans continuité.

Sur la lecture du cours, les profils théorique et bricoleur semblent s'opposer au profil expérimentateur. En fait, l'action "regarder le cours" est vague et nécessite quelques précisions : l'élève "bricoleur" observé a des références extrêmement faibles. Il regarde son cahier de cours pour retrouver des résultats élémentaires (quelle est la dérivée de l'exponentielle en l'occurence). Cette action est d'autant plus fréquente que les lacunes sont grandes. L'élève de type théorique va rechercher dans le cours des activités proches du problème traité pour retrouver des pistes de résolution.

L'élève de type expérimentateur a des références élémentaires qui le dispensent d'aller chercher des réponses dans le cours et il essaie de traiter le problème par confrontation des sources d'information locales et actuelles (celles qui découlent des calculs propres ou de l'utilisation de la calculatrice), sans référence à des problèmes antérieurs. Ce qui explique qu'aucune considération du cahier de cours n'ait été observée.

Les élèves rationnels et scolaires occupent des positions intermédiaires : l'élève rationnel n'a pas besoin du cours pour retrouver des résultats qu'il connaît bien ; il s'y réfèrera de temps en temps pour retrouver des problèmes du même type mais beaucoup moins fréquemment que l'élève théorique. L'élève scolaire ira chercher le cours pour retrouver des résultats oubliés, ou peu sûrs, mais moins systématiquement que l'élève bricoleur pour plusieurs raisons : il connaît en général un peu mieux les résultats de base, il mobilise moins facilement des capacités d'investigation et enfin il travaille de façon plus localisée (l'exercice traité n'appelle pas d'autres contextes que le sien propre).



Graphique 3
Temps de lecture du travail fait et du cours,
en pourcentage du temps global de travail sur papier.

Cette observation minutée apporte ainsi quelques informations concordantes avec la typologie construite.

3. Troisième validation de la typologie par croisement avec d'autres typologies.

On trouve peu de travaux relatifs à une telle typologie des comportements en mathématiques. Les résultats de N. Balacheff ([Balacheff, 1987]), relatifs aux "Processus de preuve et situations de validation" (0.b.2.iv.), permettent cependant quelques croisements, prudents. N. Balacheff distingue plusieurs "types de preuve" qui *"se différencient à la fois par le statut des connaissances engagées et par la nature de la rationalité sousjacente"*.

Associer un "type de preuve" à un "type d'individu" n'était pas dans les objectifs de l'article cité et doit se faire en effet avec prudence. Cependant, il y a bien un rapport fort entre le statut des connaissances engagées, la nature de la rationalité sousjacente et le comportement de l'individu observé. Tentons donc des rapprochements entre "type de preuve" et "type de comportement" à la lumière des travaux réalisés pendant l'année et des premières conclusions qui en ont été tirées.

Considérons d'abord les résultats du TP n°12 (Annexe 4, Volume 2, page 77) où il s'agissait de trouver la dérivée $n^{ième}$ de $e^x(x^2+x+1)$.

i) L'élève de type scolaire observé détermine les 3 premières dérivées et en déduit une partie de la loi générale. Cela correspond tout à fait à **l'empirisme naïf** de N. Balacheff.

ii) L'élève de type bricoleur calcule (avec la machine) de nombreuses dérivées et en déduit une loi générale comme aboutissement de tous les cas particuliers. Hakim déclare : "ça marche pour n'importe quel n... Donnez-moi le n que vous voulez et vous allez voir !". On retrouve ici un exemple de **l'expérience cruciale** de N. Balacheff.

iv) L'élève de type expérimentateur trouve par combinaison de calculs à la main et de calcul machine la loi de passage d'une dérivée à la dérivée suivante : "à chaque fois, on obtient une dérivée de la forme $e^x.(x^2+bx+c)$, le coefficient de x augmente de 2... Cela marche pour le passage de la dérivée 3ème à la dérivée 4ème etc.". Cela ressemble à **l'exemple générique** de N. Balacheff.

iv) L'élève de type théorique repère la même régularité de passage d'une dérivée à la suivante. Elle dresse un tableau pour indiquer la méthode : "il suffit de multiplier le coefficient du deuxième terme avec celui de la ligne précédente pour obtenir le coefficient du troisième terme". Et l'argument décisif vient d'une analogie avec un résultat du cours : "cela ressemble au triangle de Pascal". On est très proche ici de la preuve **expérience mentale** de N. Balacheff.

v) L'élève de type rationnel prouve sa conjecture à l'aide d'une récurrence. On est là au terme de l'évolution des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles : c'est la **démonstration.**

L'association type d'élève, type de preuve fonctionne assez bien dans le cadre du TP étudié. Voyons si une généralisation est possible, à partir des résultats de l'expérimentation. Dans le volume de bilan de cette expérimentation, on tentait une première synthèse concernant les types de preuve propres à chaque profil d'élève. On en trouvera les caractérisations dans le tableau ci-dessous, colonne de gauche. On peut tenter un croisement avec les 5 types de preuves données par N. Balacheff (colonne de droite ci-dessous) :

Profils d'élèves	Types de preuves
Type théorique : La méthode de preuve repose sur l'analogie ou l'évocation.	**Preuve expérience mentale :** Elle invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier.
Type rationnel : La méthode de preuve repose sur la démonstration.	**La démonstration.**
Type scolaire : La méthode de preuve repose sur la reproduction de preuves ou de morceaux de preuve mémorisés.	**L'empirisme naïf :** Il consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion.
Type bricoleur : La méthode de preuve repose sur la production d'indices, d'exemples.	**L'expérience cruciale :** C'est un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible.
Type expérimentateur : La méthode de preuve repose sur l'accumulation d'indices cohérents issus si possible de plusieurs cadres d'étude.	**L'exemple générique :** Il consiste en l'explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus.

5 types de preuve, 5 profils d'élèves, la tentation d'une association était forte. Cela aurait cependant relevé d'un "empirisme naïf" d'imaginer que la bonne coïncidence à partir d'un TP pouvait se prolonger naturellement à toute l'expérimentation !

S'il y avait une **proximité des types de preuves** entre les résultats de la classe expérimentale (lors du TP 12) et les résultats de N. Balacheff, c'est qu'ils se rapportaient au **même type de tâche**, la validation d'un énoncé universel :

- pour le TP 12, il s'agissait de déterminer la dérivée $n^{ième}$ de $e^x(x^2+x+1)$;
- pour N. Balacheff, il s'agissait de déterminer le nombre de diagonales d'un polygone.

Même si elle n'est relative qu'à la réalisation d'un certain type de tâche, la coïncidence entre la typologie "expérimentale" et des travaux extérieurs est un résultat intéressant. C'est d'ailleurs la prise en compte du type de tâche qui permet de comprendre l'écart, dans le tableau précédent, entre profil d'élève et type de preuve en ce qui concerne l'élève "scolaire" :

- dans le cadre d'un travail de recherche (le TP en étant l'illustration la meilleure), c'est bien de l'observation d'un petit nombre de cas que viendra souvent, pour l'élève "scolaire", la certitude de la vérité d'une assertion (d'où la bonne adéquation des deux types de preuve au niveau du TP 12);

- dans le cadre d'un travail plus scolaire ("l'interrogation écrite" en étant la meilleure illustration), la tendance naturelle sera davantage de reproduire des "morceaux de preuve mémorisés", même s'ils ne sont pas adaptés au contexte du problème (d'où la mauvaise adéquation dans le tableau général).

Conclusion de II.b.1.iv.

Nous avions basé notre typologie sur l'existence de cinq profils : théorique, rationnel, scolaire, bricoleur et expérimentateur.

Les réalisations des élèves lors du problème long, l'observation minutée des gestes réalisés lors d'un TP, l'analyse de certaines méthodes de preuve manifestent une certaine consistance de cette typologie.

On distingue des régularités dans les comportements, une certaine cohérence derrière des incohérences apparentes.

Il nous reste à vérifier la pertinence de cet "outil typologique" pour l'étude des processus de conceptualisation et d'instrumentation. Nous le verrons en II.b.

II.b.2. Limites, enseignement dispensé et conceptions exprimées.

Pour étudier les conceptions des élèves relatives aux limites, il faut d'abord situer l'enseignement qui a été dispensé dans la classe. Nous analyserons ensuite les réponses au questionnaire "limites", d'abord avec les calculatrices graphiques ordinaires puis avec les calculatrices "symboliques". On croisera enfin les réponses au questionnaire et la typologie mise en place.

II.b.2.i Définition et intervention de la notion (TP, exercices).

Il ne s'agira pas ici de faire un compte rendu exhaustif de tout ce qui a été dit en classe sur la notion de limite mais de situer le cadre dans lequel cet enseignement a été dispensé. Nous avons évoqué Bruner pour justifier un processus d'enseignement qui combine une construction autonome de l'élève et un processus de tutelle ou d'étayage dans lequel le maître anticipe sur le développement ultérieur de l'élève. En ce qui concerne l'enseignement des limites, on peut évoquer aussi M. Rogalski [Rogalski, 1994] :

> *"Pour faire apprendre le concept de convergence et son utilisation pour résoudre des problèmes, on ne peut se borner à travailler sur des exercices trop élémentaires, sous peine de laisser s'installer chez l'étudiant des modèles trop simples ou erronés qui vont faire obstacle à l'apprentissage".*

La première semaine de l'année est consacrée à la fois à une mise en place du dispositif d'enseignement (calculatrice rétroprojetable et tableau noir pour le professeur, calculatrices graphiques et cahiers de cours pour les élèves, observations et conjectures, vérifications ou contre-exemples, preuves variées) et à des rappels sur les fonctions du point de vue de leur étude globale (passage d'une formule à un graphique et réciproquement, opérations sur les fonctions, majoration, minoration, sens de variation - sans évoquer dans un premier temps la dérivation, différentes stratégies d'encadrement d'une fonction). Le 13 Septembre, le cours sur les limites commence.

En voici les principaux moments [37].

Mardi 12 Septembre, le matin. Le titre du chapitre "Etude locale des fonctions" est écrit. La réflexion s'organise autour de quatre situations :

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ $\lim_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}$ $\lim_{x\to 0} x^2.\sin\frac{1}{x}$

Pendant 30mn, les élèves réfléchissent, observent leurs calculatrices, discutent entre eux (par deux). Cela débouche sur une discussion collective et un rappel, ou une mise en évidence, de quelques outils.

---

[37] Pour être sûr de ne pas refaire de façon imaginaire le cours que j'aurais aimé faire - avec du recul-, ce qui va être donné ici résulte du croisement de trois sources d'information : les notes prises par deux élèves (cf. Annexe 4, document 4), et récupérées en fin d'année (pour le cours lui-même), et le cahier de bord du professeur, rempli au jour le jour, pour les discussions ouvertes en classe.

Pour chaque limite, la discussion porte d'abord sur des aspects (faussement) techniques : **y a-t-il une "meilleure fenêtre" pour représenter une fonction "localement" ?** Y a-t-il des éléments de "décor" important à faire figurer sur le graphique (pour manifester par exemple que la fonction sinus est bornée) ? C'est le même problème d'ailleurs que l'on retrouve en géométrie pour le choix d'une figure extraite et pour le choix d'éventuels compléments pertinents. Puis la discussion porte sur l'existence et la valeur de la limite au point donné. Enfin la discussion porte sur la preuve de la conjecture formulée.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

On le prouve avec utilisation de la dérivation.

$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas. Longue discussion sur ce point. On démontre que, aussi près de 0 que l'on se place, il y aura toujours des points où la fonction prendra comme valeur 0, 1, ou -1.

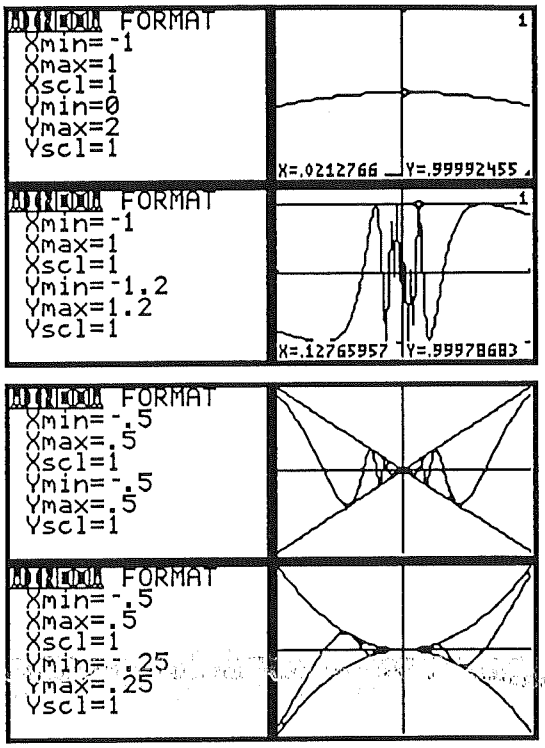
$\lim_{x\to 0} x.\sin \frac{1}{x} = 0.$

Rappel du théorème des gendarmes et "visualisation".

$\lim_{x\to 0} x^2.\sin \frac{1}{x} = 0$

Nouvel encadrement et conclusion.

Comparaison avec la situation précédente (évocation des questions de dérivation).



Fin de la séance (de deux heures) avec une discussion sur la verbalisation [38]: comment traduire le fait que $\lim_{x\to a} f(x) = L$?

La réponse la plus générale est : "quand x se rapproche de a, f(x) se rapproche de L". Réponse du maître : donc on pourrait dire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = -1$ puisque, quand x grandit, $\frac{1}{x}$ se rapproche de -1.

Nouvelle formulation proposée par les élèves : "quand x se rapproche de a, f(x) se rapproche aussi près que l'on veut de L". Nouvelle objection, à partir de $\lim_{x\to 0} x.\sin \frac{1}{x} = 0$: on montre que, si a est plus près de 0 que b, cela n'implique pas nécessairement que f(a) est plus près de 0 que f(b).

Le cours s'achève sur une proposition du professeur que l'on fait fonctionner sur les exemples étudiés :

> **f(x) est aussi proche de L que l'on veut, dès que x est suffisamment proche de a.**

---

[38] Sur les problèmes de verbalisation de définition, voir I.b.5.

Comme l'indique R. Bkouche [Bkouche, 1996] :

> *"La définition, loin d'être un préalable à l'activité mathématique, en est un premier aboutissement".*

Mardi 12 Septembre, l'après-midi. Travail en binômes sur le premier TP de l'année (cf. Annexe 4, Volume 2, page 5).

Soit P le polynôme qui, à tout x réel associe :
$P(x) = - 121011 - 14290{,}1989\,x + 5601{,}73023\,x^2 - 300{,}56003\,x^3 + 0{,}03\,x^4$

1. Déterminer les limites de P en $+\infty$ et $-\infty$.
2.On veut résoudre maintenant "expérimentalement" l'équation $P(x) = 0$.
Pour cela, vous utiliserez votre calculatrice graphique, les résultats de la première question et vos connaissances générales sur ce type de fonctions.
Vous reproduirez précisément sur feuille les graphiques apparus sur l'écran de votre machine et qui ont été utilisés dans la résolution (préciser à chaque fois la fenêtre d'affichage)
- Combien de solutions semble avoir cette équation ?
- Quel encadrement donne votre calculatrice pour chacune d'entre elles ?
3. Utilisez les résultats obtenus à la question 1 et 2 pour donner une estimation de l'allure générale de la courbe de P.
4. Prouver les résultats observés en revenant sur l'étude théorique de l'équation $P(x) = 0$.

Les coefficients de ce polynôme ont été choisis de telle façon qu'il ait quatre racines réelles : trois sont proches de 0, la quatrième est égale à 10000. Les graphiques obtenues sur des fenêtres "raisonnables" induisent donc l'idée que la fonction est décroissante sur un intervalle du type [a, $+\infty$[. Cette observation s'oppose au résultat trouvé pour $\lim_{x\to+\infty} P(x)$. La coordination entre les graphiques obtenus et la valeur des limites (déterminée à partir de l'application d'un théorème bien connu des élèves) présente ainsi des difficultés que les élèves vont aborder différemment :

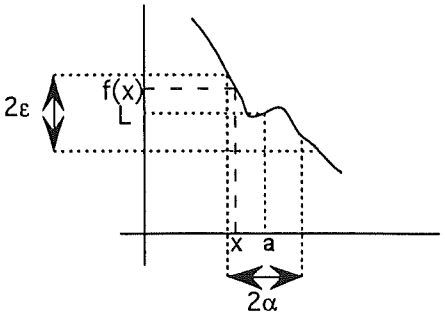
- Guilhem (de type "théorique") rappelle le résultat théorique sur les limites de polynômes, détermine une bonne fenêtre de "visualisation globale" de la fonction mais n'arrive pas à ajuster des zooms pour préciser le nombre de solutions ;
- Cyril (de type "rationnel") passe un grand moment à prouver, par factorisation et utilisation des théorèmes opératoires, que $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. La question du graphique ne semble pas l'intéresser ;
- Rachel (de type "scolaire") calcule quelques valeurs prises par le polynôme pour en déduire la limite (c'est encore l'empirisme naïf, cf. II.b.1.iv.). Elle trouve ainsi que la limite est $-\infty$, en cohérence avec les graphiques observés ;
- Laurent (de type "bricoleur") passe un grand moment à modifier le fenêtrage (le window shopping, 0.b.5.ii.) pour arriver à voir la courbe sous tous ses aspects. Il arrive ainsi à détecter la dernière racine et un graphique cohérent avec $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$;
- Christelle (de type expérimentateur) n'arrive pas à décider ce qui, du résultat théorique concernant la limite des polynômes et de l'observation graphique, doit primer.

Toutes les formulations des élèves pour décrire la situation témoignent clairement d'une confusion entre limite infinie et fonction croissante.

Mercredi 13 Septembre, le matin. Retour sur les problèmes de verbalisation, fixation des définitions. La définition finale de Mardi matin est reprise, illustrée par un dessin et par plusieurs exemples.

La définition théorique de la limite est donnée comme légende du graphique ci-contre, comme méthode élémentaire de preuve d'existence et de valeur d'une limite.

On la fait fonctionner sur tous les exemples vus ci-dessus, dans un cadre numérique particulier (ε prenant une valeur particulière) ou général.



Puis verbalisation, graphique, exemples, études numériques particulières et générales sont transposés pour les différentes configurations : limite infinie en x_0, limite finie en $+\infty$, limite à gauche et à droite. On insiste sur trois points :

- **sur la distinction entre comportement local et global : l'existence d'une limite ne donne aucune information a priori sur le sens de variation de la fonction (les différents exemples choisis usent et abusent donc des sinus et cosinus)** ;
- sur la distinction du cadre graphique et numérique : l'existence d'une asymptote se prouve par une étude de limite et non par des arguments de proximité graphique ou de "ressemblance" ;
- sur le caractère producteur d'une limite : si l'on sait par exemple qu'une fonction f est telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors on sait que f(x) est positive à partir d'une certaine valeur de x (en lien avec le TP n°1).

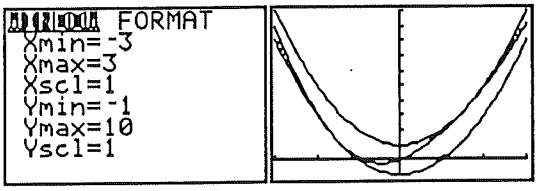
Jeudi 14 Septembre. Méthodes de recherche de limites.

Trois méthodes sont détaillées :

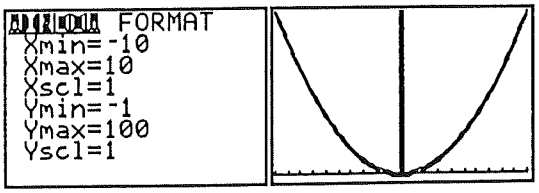
- **l'utilisation de la continuité**, avec le rappel des "fonctions de référence" ; on présente des fonctions discontinues avec des avertissements relatifs à l'utilisation d'outils graphiques : la continuité, comme la discontinuité, ne se voient pas nécessairement (évocation de la fonction "partie entière", de la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$) ;
- **les opérations sur les limites** ;
- **les théorèmes d'encadrement** (comme théorèmes d'existence et de détermination).

Exercices de recherche de limites.

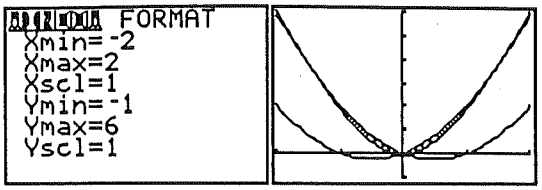
Le premier exemple, $x^2+\sin x$ en $+\infty$, nécessite l'application d'un théorème d'encadrement.
Observation graphique et réflexion sur le choix des fenêtres "pertinentes".



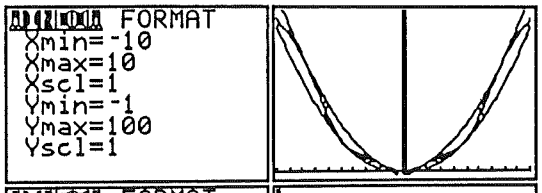
Sur une fenêtre plus vaste, il y a confusion apparente des courbes. Pourtant, elles ne sont pas asymptotes l'une à l'autre.



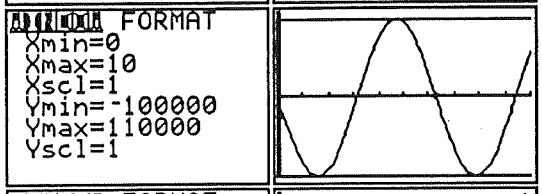
Pour l'exemple suivant, $x^2+x\sin x$, à nouveau application d'un théorème d'encadrement avec une particularité : l'encadrement n'est pas le même pour x positif et x négatif.

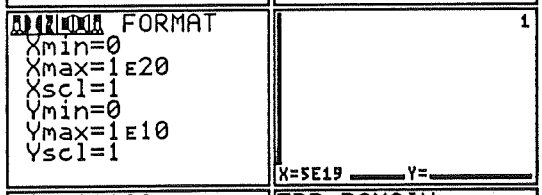


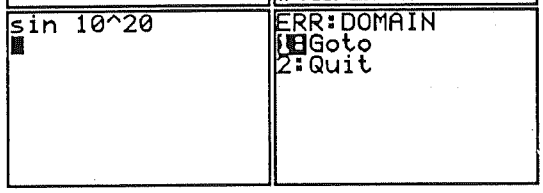
Mêmes fonctions, dont les graphiques sont observés sur une fenêtre plus vaste. Le phénomène de confusion apparaît aussi alors que l'écart entre les fonctions considérées n'est pas borné.



Pour la limite de $\sqrt{x}$ - 100.000.sinx en $+\infty$, un débat important a lieu en classe. Bien que cette fonction soit minorée par $\sqrt{x}$ - 100000 qui tend incontestablement vers $+\infty$, le graphique, que les élèves mettent un grand moment à obtenir, les fait douter.
Réflexion et calcul : pour x supérieur à 10^{10}, la fonction est nécessairement positive. Hélas, cela ne se "voit" pas sur une calculatrice : au delà de 10^{10}, la calculatrice (TI-82 en l'occurence) ne calcule plus les sinus.
C'est l'occasion d'une première prise de distance avec l'outil.







Mardi 19 Septembre. Retour sur l'utilisation des calculatrices graphiques.

Est abordée la recherche de la limite de $\frac{\sin x - x}{x^3}$ en 0 (cf 0.c.1.iii). Observations graphiques et calcul théorique sont confrontés.

Leçon à retenir concernant l'action instrumentée :

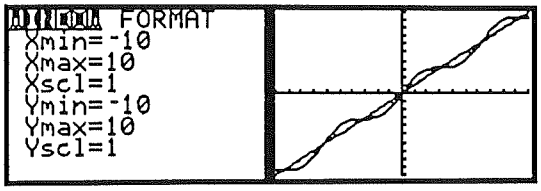
i) les limitations de tout outil de calcul (tenant à la représentation des nombres et à la représentation graphique) impliquent de prendre tout résultat comme une indication, à contrôler ;

ii) le jeu même de recherche d'une limite situe ce travail comme une <u>étude locale</u>. Aucune observation graphique, aussi fine soit-elle, ne donnera une certitude quant au résultat final. Celui-ci ne pourra être obtenu que par l'assurance d'un contrôle numérique général (f(x) pourra être aussi près que l'on veut de etc.) ou par l'application des théorèmes de détermination.

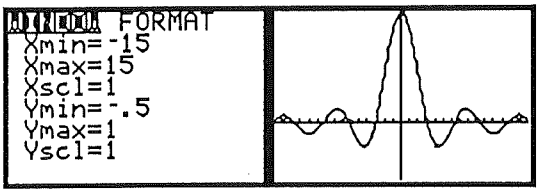
Mercredi 20 Septembre. Etude de comportements asymptotiques.

Dans le même esprit d'utilisation contrôlée de représentations graphiques sont étudiées plusieurs fonctions.

Est-ce que les courbes des fonctions qui à x associent x et x+sinx sont asymptotes ?

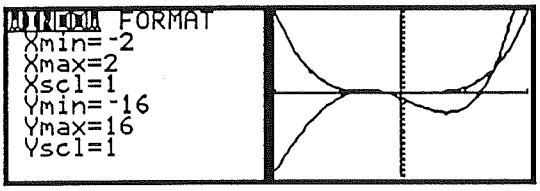


Est-ce que $\frac{\sin x}{x}$ a 0 pour asymptote en $+\infty$?

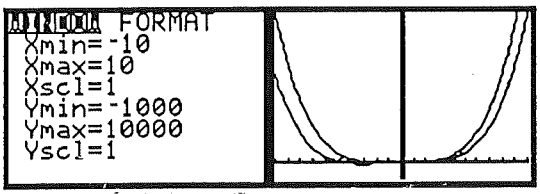


On note la préoccupation constante de dissocier phénomènes asymptotiques et régularité.

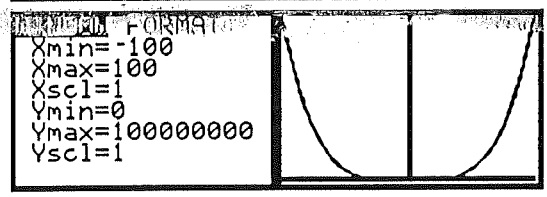
Et pour terminer, réflexion sur les comportements polynomiaux en illustration des théorèmes connus (tout polynôme a en $+\infty$ même limite que son terme de plus haut degré). Il s'agit ici de x^4 et de $x^4+4x^3-2x^2+5x-1$.



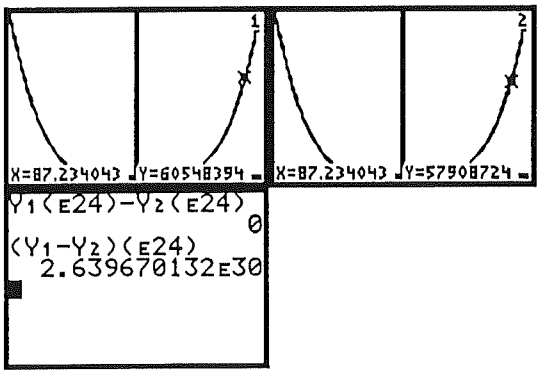
Au voisinage de 0, les deux courbes sont très proches. Le recul fait apparaître un rapprochement et même une quasi-confusion des deux représentations graphiques sur l'écran.



Entre -100 et 100, la ressemblance est troublante. Cependant, par utilisation de la commande Trace, on constate que, pour une même valeur de la variable (près de 87), les images par les deux fonctions sont très différentes.



Cependant, pour 10^{24}, les différences des images par les fonctions (Y1 et Y2 pour la calculatrice) sont égales à 0 (pour la calculatrice). Ou différentes de 0, suivant la formulation de la question.



Retour au calcul, évaluation de l'écart entre les deux fonctions, qui ne sont certainement pas asymptotes l'une à l'autre.

On en restera là pour la présentation du cours sur les limites. Bien d'autres activités ont contribué à construire cette notion en particulier dans le cadre de problèmes où son importance est centrale (cf. Annexe 4, Volume 2), par exemple :

- le TP n°3 (page II.17) : dénombrement des solutions de l'équation $\sqrt{\sqrt{x}} = 10 \sin x$;
- le TP n°5 (page II.31) : dénombrement des tangentes communes à la parabole x^2 et à la sinusoïde représentant la fonction sinus ;
- le TP n°7 (page II.43) : étude de la branche parabolique et de l'asymptote verticale de la fonction lnlnx ;

- les TP 9 et 10 (pages II.57 et II.63) : intersection des courbes de la fonction exponentielle et des fonctions puissances.

Il y eut aussi bien sûr quelques "batteries" d'exercices de calcul de limites et le traitement de problèmes de baccalauréat (un par semaine). On a vu en I.b.3. dans quel cadre y apparaît la recherche de limites (d'un point de vue annexe avec des outils algébriques et d'utilisation de la croissance comparée des fonctions de référence). L'étude des limites intervient aussi dans le travail autour du problème long, mais ceci sera postérieur au premier questionnaire dont nous allons voir maintenant les résultats.

Conclusion de II.b.2.i.

Le cours sur les limites a été organisé, dans la classe expérimentale, autour de quatre éléments :

1. Une verbalisation précise de la définition issue d'une réflexion sur une palette d'exemples non triviaux ;

2. La présentation des techniques d'étude en insistant plus particulièrement sur les techniques opératoires et les techniques d'encadrement ;

3. La référence aux outils de calcul est permanente, la confrontation entre l'observation et le calcul théorique, débouche à la fois sur une mise à distance de la calculatrice et sur une utilisation raisonnée de cet outil.

4. Une intervention des limites comme outil de résolution de problèmes.

Cet ensemble d'éléments consitue un enseignement qui ne correspond pas à la transposition didactique de la notion (I.b.) du point de vue de l'importance donnée à la définition, aux techniques d'encadrement, à l'utilisation des outils de calcul.

Il nous faut étudier maintenant l'impact de cet enseignement sur les élèves.

II.b.2.ii Questionnaire avec calculatrice graphique, comparaison externe.

Premier outil de repérage de ces traces, le questionnaire (cf Annexe 1, page 375) sur les limites va permettre une comparaison avec les élèves sondés l'année précédente (groupe témoin).

1. Le contexte.

Début Janvier, soit 4 mois après le cours sur les limites et après que cette notion ait été utilisée dans de nombreux exercices, TP, problèmes, ce "questionnaire limite" est proposé à la classe (17 Janvier). Du fait des grèves de Décembre 95, il n'a pas été possible de donner le questionnaire avant l'arrivée des TI-92. Ces nouvelles calculatrices sont arrivées juste avant les vacances de Noël. Mais les élèves n'en ont pas encore vraiment pris possession. Pour pouvoir passer le questionnaire dans les conditions prévues, les TI-92 sont ramassées pendant une semaine (raison évoquée : pour des raisons de sécurité, elles doivent être gravées).

Le jour du questionnaire, il est demandé aux élèves d'apporter leur calculatrice graphique habituelle. Comme pour la passation de l'année précédente, le travail est présenté comme ne "rentrant pas dans la moyenne" mais devant être pris en compte pour l'appréciation générale (ceci pour s'assurer du sérieux de la composition).

La classe est partagée en deux modalités : des élèves composeront avec et d'autres sans calculatrice. **A la différence de l'année précédente, le partage n'est pas aléatoire mais prend en compte la typologie : les élèves au type repéré sont répartis équitablement dans les deux groupes. A l'inverse de l'année dernière, les protestations - nombreuses - viennent des élèves qui sont privés de calculatrice. Ceci peut sans doute être considéré comme un indice de l'intégration de l'outil dans la classe.**

2. Comparaison entre la classe expérimentale et le groupe témoin.

	Groupe tém	Groupe exp	Total
Avec calculatrice	38	**17**	55
Sans calculatrice	35	**14**	49
Total	73	**31**	104

Tableau 0. Effectif des deux groupes.

Deux indications et un rappel utiles :

- première indication : la classe expérimentale est plutôt plus "faible" que les classes "normales" : 14 élèves redoublants dans cette classe contre 3 en moyenne dans chacune des autres classes ;
- deuxième indication : le questionnaire est proposé en Janvier pour pouvoir permettre un deuxième travail en Mai. Dans le groupe témoin, le questionnaire avait été passé en Mars. Il y aura donc un écart dans la familiarisation avec les limites "usuelles" ;
- le rappel : la classe expérimentale a suivi pendant quatre mois un enseignement intégrant en cours et TP les calculatrices graphiques (ce qui n'était pas le cas pour les

autres classes) et allant un peu plus loin que le programme officiel sur les questions de limite (sur ce point, la comparaison est plus difficile avec le groupe témoin).

Ces éléments incitent à une certaine prudence dans la comparaison des résultats des deux groupes.

3. Utilisation de la calculatrice.

Q0 Utilisez-vous votre calculatrice en mathématiques :

	Beaucoup		Régulièrement		De temps en temps		Rarement		Pas du tout	
En cours	**42**	4	**48**	16	**10**	42	**0**	27	**0**	11
Chez vous ?	**16**	9	**52**	4	**32**	40	**0**	11	**0**	0

Tableau 1 (résultats en pourcentage)

Q4' Utilisez-vous votre calculatrice quand vous recherchez des limites de fonction?

Beaucoup		Régulièrement		De temps en temps		Rarement		Pas du tout	
10	14	**29**	30	**39**	31	**22**	14	**0**	11

Tableau 2 (résultats en pourcentage)

La confrontation des différents résultats est instructive. L'utilisation beaucoup plus importante de la calculatrice en classe dans le groupe exp n'est pas une surprise. Elle a aussi un effet d'entraînement à la maison. Cependant cet écart entre les deux populations ne se retrouve pas pour l'utilisation de la calculatrice dans la recherche de limites : dans les deux cas, elle est à peu près autant sollicitée. Preuve d'un certain discernement des élèves de la classe expérimentale : ce n'est pas dans la recherche de limites qu'une calculatrice graphique est le plus performante.

La question Q4" ("comment utilisez-vous votre calculatrice pour conjecturer que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?") suscite des réponses que l'on peut aussi comparer avec celles du groupe témoin (cf. tableau 3 ci-dessous)..

	Groupe témoin	Groupe exp.
Je regarde le graphique, en réglant la fenêtre	57	**81**
Je regarde le graphique et j'utilise le zoom	1	**0**
Je combine graphique et calcul de valeurs	22	**16**
Je calcule quelques valeurs	7	**3**
J'utilise des fonctions auxiliaires	0	**0**
On ne peut pas	1	**0**
Sans réponse	12	**0**

Tableau 3 (résultats en pourcentage)
Utilisation de la calculatrice pour conjecturer la limite de f.

On observe dans la classe expérimentale un resserrement des méthodes d'étude qui correspond au type d'intégration de la machine dans la classe (c'est surtout le réglage des fenêtres qui a été traité en TP). Autre indice de l'intégration de l'outil : tous les élèves du groupe expérimental répondent à cette question.

La mise en relation des méthodes et du type comportement général des élèves confirme ce que nous avions dit en I.a.2.iii : le calcul de quelques valeurs est révélateur d'une maîtrise très faible de l'outil, la combinaison de deux méthodes caractérise au contraire une meilleure maîtrise. Nous en reparlerons en II.b.3.i.

3. Comparaison relative aux définitions proposées.

Une première indication est fournie par les réponses à la question Q3 ("Donner 4 exemples de graphiques de fonctions admettant comme limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$") et à la question Q3' ("Donner 5 exemples de fonctions admettant comme limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$").

Nous avons vu que, dans le groupe témoin, un seul élève avait évoqué une fonction "avec oscillation". Dans la classe expérimentale, les seuls exemples donnés sont relatifs à des fonctions de référence monotones croissantes (aussi bien pour les graphiques, que pour les formules). On retrouve, en bonne place, les fonctions logarithme, exponentielle et puissances. Pourtant ont été présentées, dans le cours sur les limites, des fonctions oscillantes (x+sinx) et même fortement oscillantes ($\sqrt{\sqrt{x}}$ - 10 sinx) mais il y a des effets de "régularisation" ou de "lissage" qui installent comme référence les objets les plus simples (ce sont d'ailleurs les objets les plus fréquemment manipulés dans la pratique).

Plus précisément, sur les définitions proposées, considérons les réponses aux questions Q1 et Q2.

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}+$ et vérifiant : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Q1 Donner une définition mathématique de cette situation.
Q2 Comment expliqueriez-vous cela plus simplement à un élève de seconde ?

	Groupe tém.		Groupe exp	
	Déf. math.	Déf. seconde	Déf. math.	Déf. seconde
Sans réponse	30	8	**10**	**16**
Tautologie	23	6	**35**	**10**
Ininterprétable	4	4	**3**	**0**
Conception primitive	8	23	**3**	**19**
Conception monotone	32	58	**26**	**55**
Conception non majorée	3	1	**3**	**0**
Conception experte	0	0	**20**	**0**

Tableau 4 (en pourcentage des réponses)
Relevé des conceptions exprimées en Q1 et Q2.

On constate dans le groupe expérimental un progrès assez net en ce qui concerne la définition mathématique, résultat d'un travail assez suivi sur cette question (de plus, on est plus proche du cours sur les limites en Janvier qu'en Mars).

On ne donnera pas ici d'exemples de définitions primitives ou monotones, qui sont du même type que celles que l'on a rencontrées dans le groupe témoin (cf. II.a.2.iii.). Il est par contre utile de donner les définitions "expertes" qui ont été proposées :

- "f(x) peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut à condition de prendre x assez grand" ;
- "la fonction f est telle que f(x) = L ; L peut être aussi grand que l'on veut à condition de prendre x assez grand" ;
- "la fonction f(x) prend des valeurs aussi grandes que l'on veut si x est choisi assez grand" ;
- "f(x) peut être aussi grand que l'on veut pour x très grand" ;
- "f(x) peut être aussi grand que l'on veut pour x aussi grand que l'on veut" ;
- "la fonction peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut à condition que x soit suffisamment grand".

On a noté en "définition experte" des définitions qui témoignent d'une évolution certaine par rapport aux conceptions primitives ou monotones et disent plus que le caractère non majoré de la fonction : la définition commence par le contrôle de la fonction (et pas de la variable), le contrôle de la variable est "soumis" au contrôle de la fonction. Pour autant il ne s'agit pas de définitons parfaites. Mais il y a là sans doute la marque d'une première rupture.

Par contre, en ce qui concerne l'explication à un élève de seconde, les réponses des deux groupes sont très proches, regroupées autour de la conception monotone. Une explication possible est que, quand on explique avec des mots plus "simples", accessibles, on sort d'un contexte de cours et on est ramené à des conceptions beaucoup plus profondes, plus anciennes, qui n'ont pas pu être modifiées en quatre mois de cours (sur les cinq élèves de la classe expérimentale ayant donné une définition "acceptable" de la limite infinie, tous donnent la définition d'une fonction croissante à un élève de seconde).

Le travail spécifique sur la définition dans la classe expérimentale produit ses effets par rapport à l'évocation du graphique. On le voit dans le tableau 5 ci-dessous, quand il s'agit de la "définition mathématique", un seul élève (3%) seulement du groupe expérimental évoque la courbe. Tous les autres élèves (qui évoquent en Q1 une définition) restent ancrés dans le cadre numérique. Par contre, quand il s'agit d'expliquer à un élève de seconde, on retrouve des résultats du même ordre entre les deux groupes.

	Groupe tém	Groupe exp
Définition mathématique	16	**3**
Déf. élève de seconde	23	**29**

Tableau 5 (réponses en pourcentage de l'effectif total)
Evocation du graphique dans les définitions des groupes tém et exp.

Comparons enfin les réponses aux questions relatives aux propriétés des fonctions (4 questions de Q6), à travers les tableaux 6 à 9 ci-dessous.

	Groupe tém	Groupe exp
Sans réponse	1	**16**
Vrai	38	**35**
Faux	57	**39**
Ne sait pas	4	**10**

Tableau 6 (réponses en pourcentage de l'effectif total)
Si f est positive non majorée, alors $\lim_{+\infty} f = +\infty$

	Groupe tém	Groupe exp
Sans réponse	0	**10**
Vrai	21	**51**
Faux	79	**39**
Ne sait pas	0	**0**

Tableau 7. Si f est strictement croissante, alors $\lim_{+\infty} f = +\infty$

	Groupe tém	Groupe exp
Sans réponse	0	**10**
Vrai	78	**71**
Faux	18	**16**
Ne sait pas	4	**3**

Tableau 8. Si $\lim_{+\infty} f = +\infty$, alors f n'est pas majorée.

	Groupe tém	Groupe exp
Sans réponse	0	**16**
Vrai	82	**68**
Faux	17	**10**
Ne sait pas	1	**6**

Tableau 9. Si $\lim_{+\infty} f = +\infty$, alors f est nécessairement croissante à partir d'une certaine valeur de x.

Globalement, on peut constater que les résultats ne traduisent pas un progrès particulier pour le groupe expérimental. Si l'on y regarde de plus près, on peut remarquer des correspondances entre les résultats et les activités réalisées en classe :

- il n'y a eu aucun travail sur des fonctions strictement croissantes à limite finie (type homographique) : on constate que les résultats sur ce point (cf tableau 7 ci-dessus) sont plus mauvais dans la classe expérimentale que dans le groupe témoin ;
- a contrario, de nombreuses fonctions oscillantes à limite infinie ont été vues, ce qui explique peut-être le meilleur résultat (relatif !) du groupe expérimental à la dernière question (tableau 9 ci-dessus).

4. Techniques de calcul annoncées.

Techniques	Groupe tém	Groupe exp
Aucune	7	**16**
Recours à la définition	0	**0**
Opérations	77	**68**
Encadrement	20	**23**
Croissance non majorée	0	**0**
Croissance	8	**6**
Calculatrice	16	**13**

Tableau 10. Méthodes connues pour prouver que $\lim_{+\infty} f = +\infty$

On a classé comme en II.a.2.iv. d'abord les techniques correctes puis les techniques incorrectes. On trouve dans ces réponses des éléments intéressants :

- **les réponses meilleures sur la définition "officielle" d'une limite ne se traduisent pas nécessairement par une meilleure connaissance des techniques de recherche.** On retrouve ici la différence connue entre les niveaux déclaratif et procédural (0.b.3.iii). Aucun élève d'ailleurs n'évoque l'utilisation de la définition comme technique possible ; mais cette méthode n'avait été vue qu'une fois en classe ;
- les techniques évoquées dans les deux groupes sont relativement proches ;
- 13% (contre 16% dans le groupe témoin) des élèves évoquent l'utilisation de la calculatrice pour prouver l'existence d'une limite. On peut juger ce résultat de deux façons :
  - une première façon plutôt négative : alors que l'intégration de la calculatrice est réalisée dans la classe depuis 4 mois, il y a encore 13% des élèves qui prennent un graphique pour preuve dans un calcul de limite.
  - une deuxième façon plutôt positive : alors que les élèves utilisent dans la classe et chez eux beaucoup plus la calculatrice que les élèves du groupe témoin, ils sont moins nombreux que les élèves de ce groupe à prendre "l'image machine" pour preuve.

On peut constater aussi que, sur les cinq élèves de la classe exp ayant donné une définition quasi-convenable, quatre indiquent comme technique les encadrements ou minorations, confirmant l'hypothèse que cette technique est davantage liée à des conceptions plus avancées (cf la comparaison des résultats TS/Deug A en II.a.2.iv.).

5. Résultats des questions Q5 et Q7.

Uniquement dans le tableau qui suit, on a distingué en gras les réponses des élèves ayant composé avec calculatrice.

	Groupe témoin								Groupe expérimental							
	Oui		Non		?		Sans rép.		Oui		Non		?		Sans rép.	
lnlnx	**95**	91	**5**	3		6			**94**	93	**6**				**0**	7
x - 1000lnx	**84**	59	**8**	9	**8**	32			**40**	43	**30**	16	**24**	29	**6**	14
x^2 - 10xsinx	**80**	65	**13**	15	**7**	17		3	**70**	34	**24**	16	**0**	36	**6**	14
xsinx	**21**	12	**64**	68	**15**	20			**35**	8	**59**	72	**6**	7	**0**	13
| xsinx |	**33**	44	**46**	29	**18**	27	**3**		**47**	8	**41**	63	**12**	15	**0**	14
lnx + 10sinx	**64**	71	**26**	0	**10**	26		3	**35**	42	**35**	8	**18**	29	**12**	21
x^2 + sinx	**95**	79	**0**	3	**5**	15	**0**	3	**88**	50	**12**	8	**0**	21	**0**	21
$\frac{100000x - 50}{x + 1000}$	**23**	20	**72**	80	**5**				**59**	50	**29**	21	**0**	8	**12**	21
$\frac{e^x}{x^{50}}$	**49**	53	**36**	32	**15**	12		3	**47**	72	**18**	8	**23**	7	**12**	13

Tableau 11. Les fonctions vérifient-elles $\lim_{+\infty} f = +\infty$?

Les résultats des deux groupes ne sont pas sensiblement différents (si l'on prend en compte le niveau plus faible de la classe expérimentale et la date plus avancée à laquelle le questionnaire a été traité). **En particulier, malgré l'intégration de la calculatrice graphique pendant trois moins, on ne remarque pas une diminution de l'influence des images observées.** La fonction lnx+10sinx, étudiée en II.a.2.iv., est particulièrement significative de ce point de vue : l'utilisation de la calculatrice fait passer les réponses justes de 71% à 64% dans le groupe témoin et de 42% à 35% dans la classe expérimentale.

6. Effets de l'utilisation de la calculatrice.

i) "dépendance" vis à vis de l'outil :

On a repéré dans le tableau 12 ci-dessous le pourcentage moyen de "non décision" par question posée (en ajoutant, pour chaque question, le pourcentage des "je ne sais pas" et des "sans réponse").

	Groupe tém	Groupe exp
Avec calc	10	**15**
Sans calc	21	**36**
Var. relative	+110%	**+140%**

Tableau 12. Pourcentage moyen d'indécision par question posée.

On peut considérer que l'augmentation de l'indécision, du fait de la suppression de l'outil, est comparable dans les deux groupes.

ii) influence de la calculatrice sur les réponses :

Parfois la calculatrice induit une réponse correcte (pour $x^2+\sin x$ par exemple), parfois elle induit une réponse fausse (pour $\ln x+10\sin x$ par exemple). On peut réaliser alors une étude comparative en se limitant aux cas les plus "critiques" (cf. II.a.2.i.), c'est à dire pour les fonctions : $x-1000\ln x$, $\ln x+10\sin x$, $\frac{100000x - 50}{x + 1000}$ et $\frac{e^x}{x^{50}}$.

	Groupe tém	Groupe exp
Avec calc	55	**38**
Sans calc	66	**44**
Var. relative	+20%	**+16%**

Tableau 13 : Pourcentage moyen de réponses justes pour les fonctions "problématiques".

On retrouve là aussi des résultats comparables.

iii) influence de la calculatrice sur les techniques utilisées :

On a repéré dans le tableau 14 ci-dessous, pour la fonction $\ln x+10\sin x$ qui a déjà fait l'objet d'une étude particulière (II.a.2.iv.), la fréquence d'évocation des théorèmes-en-acte **TA0** et **TA1** (cf. II.a.2.v.). Quelques formulations des élèves de la classe expérimentale :

- "lnx est croissante, 10sinx est une sinusoïde, leur somme n'est pas strictement croissante" ;
- "graphique" suivi de la représentation sommaire d'une "sinusoïde" ;
- "toujours le problème de l'oscillation, $-1 \leq \sin x \leq 1$" ;
- "comme sinx est une fonction périodique, pas de limite en $+\infty$" ;

- "car c'est une fonction périodique" ;
- "car elle oscille tout le temps".

On trouve dans la classe expérimentale, comme dans le groupe témoin, une pression de l'image apparue à l'écran qui pèse sur les méthodes utilisées qui deviennent ainsi des méthodes ad hoc,"justificatives" de cette image.

	Groupe tém	Groupe exp
Avec calc	30	**41**
Sans calc	10	**14**

Tableau 14 : Evocation des théorèmes-en-acte **TA0** et **TA1** pour en déduire que lnx+10.sinx n'a pas une limite égale à $+\infty$

Le tableau 14 ci-dessus indique que la "pression" exercée par la calculatrice est de même nature dans le groupe témoin où la calculatrice n'était pas intégrée et dans la classe expérimentale. Plusieurs éléments d'explication peuvent être avancés :

- on a dit que la classe expérimentale était plus faible que le groupe témoin. La similitude des résultats entre les deux groupes traduit peut-être un progrès du groupe expérimental ;

- il y a sans doute un temps important, une maturation nécessaire entre un enseignement et les effets tangibles de celui-ci.

De ce point de vue, le deuxième questionnaire, en Mai, sera important : il permettra de comparer deux réalisations de la même classe (ce qui supprimera les considérations de différence de niveau entre les groupes témoin et expérimental) et sur un temps plus long (ce qui devrait permettre un meilleur contrôle des outils).

Un autre élément d'explication concerne le type de recueil d'activité qui a été choisi : l'intégration de la calculatrice en classe s'est faite dans un processus de recherche (en cours et en TP). L'activité "interrogation écrite" réintroduit d'autres routines, plus profondément ancrées, où le contrat est différent : il s'agit avant tout de répondre par "oui" ou "non" à une question posée. La question de la preuve passe en second plan. Les phases de doute sont écartées, le principe du "plus court chemin à la vérité" s'applique. La calculatrice donne une indication de réponse, la preuve consiste alors souvent à décrire l'image observée.

Ceci apparaît bien pour la question Q7 dont on donne les résultats dans le tableau 15 ci-dessous.

	Groupe témoin		Groupe expérimental	
	Avec calc	Sans calc	**Avec calc**	**Sans calc**
Sans réponse	5	15	**76**	**36**
Un nb fini	36	35	**6**	**36**
Un nb infini	44	26	**18**	**14**
Ne sait pas	15	24	**0**	**14**

Tableau 15 (en pourcentage des réponses à Q7)
Combien l'équation lnx = 250 sinx a-t-elle de solutions ?

7. Quelques observations sur les résultats de Q7.

i) Il semble bien que l'utilisation de la calculatrice ait ralenti les élèves de la classe expérimentale (au contraire des élèves du groupe témoin).

- dans le groupe témoin, les élèves sans calculatrice sont arrivés plus lentement à la fin de l'épreuve (5% des élèves avec calculatrice n'ont pas abordé la dernière question contre 15% des élèves sans calculatrice) ;
- dans la classe expérimentale, la situation est inversée (76% des élèves avec calculatrice n'ont pas abordé la dernière question contre 36% des élèves avec calculatrice).

On peut émettre l'hypothèse que les élèves du groupe expérimental, davantage habitués à l'utilisation intégrée de la calculatrice, l'ont manipulée sans remords alors que les élèves du groupe témoin l'ont utilisée beaucoup plus modérément. Mais quels ont été les gestes des uns et des autres dans l'utilisation de l'outil ? Cela, on ne le sait pas. Ceci plaide pour une autre approche, plus profonde : il s'agira, au delà du questionnaire, d'observer l'ensemble de l'activité mathématique des élèves. On perdra alors le point de vue sur le groupe témoin pour étudier plus complètement la classe expérimentale.

ii) Nous pouvons constater un lien entre la typologie mise en place et l'influence de l'outil.

Ainsi les seuls élèves qui répondent correctement à la question Q7 avec une calculatrice sont des élèves de type "rationnel" dont on a souligné le "contrôle fort" (cf II.b.1.iii.). La moitié des élèves qui répondent correctement à la question Q7 sans calculatrice sont des élèves de type "théorique" qui manipulent facilement les objets de référence et qui concluent sans problème : "la fonction logarithme finira par dépasser la fonction 250.sinx". Deux élèves de type "expérimentateur", Christelle et Fabienne, fournissent un travail semblable d'ordinaire. Leurs définitions "mathématique" se rattachent à une conception "experte", leurs définitions "élève de seconde" se rattachent à une conception monotone. Lors de la passation du questionnaire, l'une travaille avec, l'autre sans, calculatrice. La première répondra "un nombre infini de solutions", la deuxième "un nombre fini". **A une même conception exprimée correspondent des travaux différents suivant la présence ou non de l'instrument.** Ceci plaide pour une approche qui prenne en compte les comportements des élèves pour l'analyse de leurs réalisations et du processus de conceptualisation sousjacent.

Un autre élément plaide pour cette approche : **le caractère très subjectif d'un certain nombre de réponses.** Ainsi, à la question "utilisez-vous beaucoup, régulièrement... votre calculatrice ?", les réponses des élèves ne correspondent pas toujours à ce que l'on sait de leur activité. Ainsi des élèves qui utilisent tout le temps leur calculatrice (élèves de type "bricoleur") ont tendance à minorer cette utilisation dont ils pensent qu'elle est excessive. Ils répondent donc qu'ils utilisent leur calculatrice "régulièrement". A l'inverse, des élèves de type "théorique", qui utilisent leur calculatrice beaucoup plus rarement, ont la conviction qu'ils l'utilisent "à propos". Ils qualifient aussi leur utilisation de "régulière". Ainsi le croisement des réponses entre l'utilisation de la calculatrice (estimée par les élèves) et les résultats sur les limites est-il sujet à caution.

Le croisement des réponses de la classe témoin (en Mars) et de la classe expérimentale (en Janvier) fait apparaître quelques différences quant à la définition des limites" (résultats de l'insistance sur les questions de verbalisation). Par contre l'influence de la calculatrice sur les résultats et sur les techniques semble comparable dans les deux classes.

L'influence de la calculatrice semble par contre avoir un rapport avec la typologie construite, ce qui nécessite une étude plus approfondie.

II.b.2.iii Questionnaire avec calculatrice graphique, comparaison interne.

On va s'intéresser ici aux réponses comparées de deux élèves pour chaque profil, l'un ayant composé avec et l'autre sans calculatrice. Les critères de choix, pour chaque paire d'élève, ont été les suivants :

- avoir été présents lors des questionnaires de Janvier et de Mai pour permettre une comparaison interne ;
- être représentatif du type considéré bien sûr, mais aussi être ressemblant du point de vue des résultats scolaires.

On ne s'intéresse ici qu'au travail "papier/crayon" : les schèmes d'action instrumentée seront étudiés en II.b.3. Les variables considérées ici sont le fait de travailler avec, ou sans calculatrice et la place dans la typologie.

1. Type théorique (Jérôme, protocole 1 et Damien, protocole 3, Annexe 3, pp 390 et 392)

Damien, caractérisé au début de l'année comme bricoleur, a évolué considérablement, s'insérant dans le processus expérimental avec beaucoup de constance et d'efficacité. Il a un profil désormais intermédiaire entre "expérimentateur" et "théorique". Il semble que le type de travail qu'il a fourni ici le rattache plutôt au deuxième type. Jérôme a depuis le début de l'année "l'étiquette" théorique.

	Jérôme (avec calc)	Damien (sans calc)
Q1 Définition mathématique	La fonction peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut à condition que x soit suffisamment grand.	Quand x prend des valeurs aussi grandes que l'on veut, f(x) prend des très grandes valeurs.
Q2 Définition pour un élève de seconde	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ veut dire que plus le x est grand, plus l'application f(x) prend une valeur élevée et ceci quelque soit le x ou la valeur de f(x) voulue.	Lorsqu'on prend de grandes valeurs pour x, f(x) prend aussi de grandes valeurs.
Q4 Méthodes connues pour prouver que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.	- Avec la dérivée, on fait le tableau de variations ; - l'encadrement de la fonction par deux fonctions connues ; - si elle est croissante et monotone à partir d'un certain x.	- rapport des termes de plus haut degré ; - formules du cours ; - factorisation lorqu'on a une forme indéterminée.

Tableau 1: réponses de Jérôme et Damien à Q1, Q2 et Q4.

i) Définitions.

La définition "mathématique" donnée par Jérôme est très proche d'une définition "experte". La définition donnée par Damien conserve encore quelques traces de la définition vue en cours.

Mais en ce qui concerne la définition pour un élève de seconde, la verbalisation de Jérôme, comme une des méthodes annoncées (f monotone), fait clairement référence à une conception monotone. La première technique évoquée (qui consiste à étudier les

variations de la fonction) traduit cette conception monotone mais aussi une propension de ce type d'élèves à envisager un objet dans sa globalité. Damien évoque une conception primitive (quand x est grand, f(x) est grand). Les techniques évoquées font appel aussi à une idée de transformation des fonctions.

ii) Techniques mises en oeuvre .

- **Jerôme (avec calculatrice)** étudie les variations de la fonction pour en déduire ensuite les limites : ce qui donne bien sûr des résultats assez médiocres. Il s'agit clairement des techniques annoncées. Les théorèmes-en-acte apparaissent clairement :
- **TA2** : si une fonction est strictement croissante, alors elle a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (cela fonctionne pour $x^2+\sin x$ et pour la fonction rationnelle) ;
- **TA1** : dès qu'une fonction oscille, elle n'a pas de limite ;

Pour le rapport exponentielle/puissance, le "bon" théorème est évoqué (on notera que cette évocation fait encore appel au langage des variations : "les fonctions exponentielles sont celles qui croissent le plus vite").

Il y a ainsi une cohérence très forte entre les conceptions repérées, les techniques annoncées et les techniques effectivement utilisées. On peut voir dans l'étude systématique des variations de la fonction une double préoccupation : prouver ce qui est vu sur l'écran et connaître le comportement global de la fonction, condition de la connaissance de son comportement local.

- **Damien (sans calculatrice)** essaie de découvrir le comportement des fonctions en présence à partir des fonctions de référence : pour la fonction $x\sin x$, il trace une courbe oscillant entre les deux droites x et -x ; pour la fonction $|x\sin x|$, il trace la fonction oscillant entre x (pour x positif) et l'axe des abscisses (avec des points anguleux sur cet axe).

On remarquera pour la fonction rationnelle un dessin tout à fait instructif : Damien trace les représentations graphiques des deux fonctions affines (numérateur et dénominateur) et déduit de leur éloignement croissant la conclusion que le rapport tend vers $+\infty$. C'est encore par la relation étroite avec les objets de référence que l'étude est traitée. L'évocation du théorème sur la limite des fonctions rationnelles lui fait récupérer le résultat exact en fin d'épreuve.

Il y a chez ces deux élèves comme une sorte d'équilibre "naturel" qui se produit : si on voit la courbe, on essaie d'en comprendre le comportement par le calcul, si on ne peut pas la voir, on l'imagine à l'aide des objets de référence. Les deux démarches convergent dans l'idée qu'avant de traiter un problème ponctuel il faut s'intéresser à son environnement. Dans ces conditions, l'utilisation de la calculatrice graphique constitue à la fois une aide pour fixer ces images de référence et un obstacle en faisant de la connaissance globale de la fonction une condition nécessaire de l'étude des comportements locaux.

2. Type rationnel (Elsa, protocole 5 et Patrice, protocole 7, Annexe 3 pp 394 et 396).

i) Définitions

Pour Elsa, on devine dans la définition mathématique qu'elle propose des traces de la définition théorique. Mais la définition proposée à un élève de seconde se rapporte assez clairement à un modèle monotone.

Patrice fournit une définition et une verbalisation cohérentes : elles se rattachent toutes deux à une conception monotone.

	Elsa (avec calc)	Patrice (sans calc)
Q1 Définition mathématique	f(x) peut être aussi grand que l'on veut, pour x aussi grand que l'on veut.	Pour tout $x > x_1$, on a $f(x) > f(x_1)$.
Q2 Définition pour un élève de seconde	Plus on s'éloigne sur l'axe des abscisses, plus la courbe remonte.	Plus la valeur de x augmente, plus la valeur de f(x) est grande.
Q4 Méthodes connues pour prouver que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.	-théorème des gendarmes (encadrements) ; - modifier l'écriture de la fonction pour qu'elle ne soit plus une forme indéterminée.	Les théorèmes sur les limites et si il y a indétermination on peut factoriser f.

Tableau 2: réponses d'Elsa et Patrice à Q1, Q2 et Q4.

ii) Techniques annoncées et mises en oeuvre.

Les techniques de détermination de limites évoquées font appel à des théorèmes du cours et à opérations sur les fonctions étudiées qui seront effectivement mises en oeuvre en Q5. Les réussites aux questions Q5 sont à peu près identiques pour les deux élèves (cf annexe 2). Les techniques opératoires et d'encadrement sont utilisées convenablement. Rien n'apparaît (au contraire de la rédaction de Jérôme par exemple) de la "nécessaire croissance" de la fonction :

- pour le théorème de "croissance comparée" exponentielle/puissance, Elsa note "la fonction exponentielle est plus forte que toutes les fonctions puissances" (verbalisation proche de **TA3**) ;
- pour la limite de la fonction rationnelle, Patrice se trompe. Il trouve comme limite au numérateur et au dénominateur $+\infty$ et fait le rapport "des deux infinis". Il reproduit la même technique pour le rapport exponentielle/puissance. On peut y voir là des traces de **TA3.**

Il s'agit toujours de techniques opératoires ou d'encadrement, c'est à dire de l'application de règles de calcul. Dans ces conditions, les techniques mises en oeuvre sont relativement indépendantes des conceptions évoquées dans le cadre des définitions.

Les techniques utilisées sont les mêmes, que l'on travaille avec ou sans calculatrice. On sent cependant pour Elsa une tension entre les graphiques observés et reproduits et les démonstrations réalisées. On peut penser ainsi que le résultat donné pour x^2-10xsinx a été influencé par le graphique obtenu : alors qu'une technique correcte d'encadrement est mise en oeuvre, elle annonce "pas de limites", sans doute à cause du graphique reproduit. La même hésitation transparaît d'ailleurs pour lnx+10sinx : elle annonce "pas de limite", mais note tout de même que la fonction admet pour limite $+\infty$ en application d'un encadrement correctement mis en oeuvre.

On peut traduire cette situation en disant que les élèves relevant de ce "type", subissent aussi une certaine influence de la calculatrice relativement aux résultats annoncés mais que cette influence ne s'étend pas aux techniques mises en oeuvre. Le travail est en général contrôlé (cf typologie, en II.b.1.iii.) par le recul théorique et l'application des résultats vus en cours.

3. Type scolaire (protocoles 9 et 11, pp 398 et 400 en Annexe 3).

Stéphanie et Rachel ont été "cataloguées" depuis le début de l'année comme élèves "scolaires". Stéphanie travaille ce jour là avec calculatrice et Rachel sans.

	Stéphanie (avec calc)	Rachel (sans calc)
Q1 Définition mathématique	La fonction f, lorsque x tend vers $+\infty$, tend vers $+\infty$ c'est à dire que la fonction est croissante en tendant vers $+\infty$	La limite f(x) tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Q2 Définition pour un élève de seconde	La fonction f, définie sur $\mathbb{R}+$, tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (aux bornes de son domaine de définition)	Lorsque x tend vers $+\infty$, c'est à dire lorsque sa valeur tend vers $+\infty$, la limite de la fonction f(x) tendra aussi vers $+\infty$.
Q4 Méthodes connues pour prouver que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.		Il faut d'abord chercher la dérivée de la fonction, puis le sens de variation et enfin les limites.

Tableau 3 : réponses de Stéphanie et Rachel à Q1, Q2 et Q4

i) Définitions . Il est notable que la verbalisation est assez pauvre :

- **Stéphanie**, pour la définition mathématique, commence par une tautologie et finit par l'expression claire d'une croissance "qui tend vers $+\infty$" ; alors que pour les autres élèves, la verbalisation pour un élève de seconde est plus limpide, on constate ici qu'elle est beaucoup plus confuse, signe d'une confusion intérieure certaine.
- **Rachel** fournit des tautologies qui donnent des informations sur l'idée de limite : l'objet même a un statut incertain : "la limite tend vers".

Le recueil de ces données ne nous renseigne qu'assez peu sur les conceptions exprimées.

ii) Techniques annoncées et mises en oeuvre.

Aucune méthode n'est annoncée par Stéphanie. Rachel donne pour méthode de recherche de limite la succession stéréotypée des gestes habituels d'étude de fonction : dérivée-variations-limites (on reconnaît là les procédures de coupé / collé significatives de ce type d'élèves "scolaires", cf II.b.1.iii.).

Pour Rachel.

On note l'absence totale de traces de calcul ou de raisonnement sur sa feuille (sauf pour lnlnx). Cependant des réponses sont proposées pour la plupart des fonctions (effet de contrat sans doute, il faut répondre oui ou non). Il est difficile de trouver une cohérence dans les réponses. Les explications orales donnent quelques lueurs sur les "théorèmes-en-acte" :

- si le résultat est un grand nombre, on a une limite infinie (cela donne le résultat pour la fonction rationnelle du fait du 100.000 au numérateur) ;
- si on **ajoute** à une fonction qui tend vers $+\infty$ "quelque chose", on a aussi pour limite $+\infty$ (cela donne le résultat pour $x^2+\sin x$ et pour $\ln x+10\sin x$) ;

- si on **retranche** quelque chose à une fonction qui tend vers $+\infty$, cela pose un problème (cela donne la réponse, ou l'absence de réponse, pour x-1000.lnx et pour x^2-10x.sinx) ;
- si on **multiplie** un grand nombre par un petit nombre, cela ne peut pas tendre vers $+\infty$ (cela donne la réponse pour xsinx).

Il y a, derrière ces justifications, des théorèmes-en-acte que nous n'avions pas encore rencontrés (car non explicités dans les copies). Ils reposent sur des concepts-en-acte particuliers : une fonction est assimilée à un nombre, le signe d'une expression est assimilée au signe qui la précède (ainsi pour lnx+10sinx : on ajoute quelque chose à lnx). Le premier théorème-en-acte a un caractère assez général et se réfère directement à une conception "primitive" : **si une fonction prend de grandes valeurs, alors elle tend vers $+\infty$**. Nous le noterons désormais **TA5**.

Les théorèmes-en-acte suivants n'ont pas le même caractère général que **TA3** qui assurait du résultat dès lors qu'une fonction prenant de "grandes" valeurs était en compétition avec une fonction prenant de "petites" valeurs. Ils ne se rapportent même pas aux mêmes objets (**TA3** concerne des fonctions, ici il s'agit de "nombres") :
- on notera **TA6a** le théorème-en-acte : **si on ajoute à une fonction qui tend vers $+\infty$ (ou à une "grande" fonction) une fonction précédée d'un signe +, le résultat tend vers $+\infty$.**
- on notera **TA6b** le théorème-en-acte : **si on multiplie une fonction qui tend vers $+\infty$ (ou une "grande" fonction) par une "petite" fonction, le résultat ne tend pas vers $+\infty$.**

On s'engage là, avec les TAii, dans un processus d'éclatement des théorèmes-en-acte : l'impression est que, moins les élèves sont avancés dans le processus de conceptualisation, moins les objets sont définis (ce qui est une tautologie), plus la verbalisation est difficile, plus le répertoire des théorèmes-en-acte est grand. Ceci donne la mesure de l'effort intellectuel que doivent faire ces élèves : une nouvelle situation nécessite une nouvelle analyse des objets en présence et une création, ou une re-création, d'outils adaptés à leur traitement.

Pour Stéphanie, qui dispose d'une calculatrice, les seules "preuves" avancées sont les reproductions des graphiques observés sur l'écran de la calculatrice.
Le théorème-en-acte correspondant est : pour qu'une fonction ait pour limite $+\infty$, il faut que son augmentation l'emporte sur son oscillation. D'où les résultats annoncés : une limite infinie pour x^2-10x.sinx, pour la fonction rationnelle. Pas de limite infinie pour lnx+10.sinx. Pour x-1000lnx, il n'y a aucune réponse parce que Stéphanie n'a pas pu faire apparaître la moindre courbe avec les fenêtres choisies. Il s'agit en fait d'une combinaison de **TA1** (si une fonction oscille ostensiblement, elle n'a pas de limite), de **TA2** (si une fonction est croissante, alors elle a une limite infinie) et de **TA5** (si une fonction prend de grandes valeurs, alors elle tend vers $+\infty$).

On remarque une différence importante avec la composition de l'élève sans calculatrice : ici ce sont des fonctions qui sont étudiées (concrétisées par des graphiques), il n'y a pas éclatement des procédures de résolution, mais au contraire unification-fusion des théorèmes-en-acte qui sont pertinents pour traiter une classe de situations.

La calculatrice joue pour les élèves "scolaires" un rôle de tuteur. Les représentations fonctionnent en référence exclusive avec les allures de graphiques observés. Sans calculatrice, il n'y a plus de références possibles. On en revient alors à une algèbre très primitive des limites.

4. Type bricoleur (protocoles 13 et 15, pp 402 et 404 Annexe 3)

i) Définitons et techniques évoquées.

Sébastien (cf tableau 4 ci-dessous) exprime une tautologie en guise de "définition mathématique" et une définition se rattachant à une conception primitive "pour un élève de seconde" (on dispose ainsi d'un exemple de "nombre important" : 3000). On voit le caractère résistant de cette conception, puisqu'elle apparaît aussi dans les méthodes de preuve en Q4 (calculer l'image d'un très grand nombre et voir si on trouve aussi un grand nombre). On remarquera l'évocation des deux théorèmes (pour les fonctions rationnelles et pour les polynômes) : il a fallu attendre la fin de l'année pour apprendre que ces théorèmes avaient été enregistrés dans la calculatrice (cf II.b.3.i.). On constatera que le théorème sur la comparaison exponentielle/puissances n'a pas été enregistré, d'où l'erreur en Q5.

	Sébastien (avec calc)	Laurent (sans calc)
Q1 Définition mathématique	La limite de la fonction f(x) quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$	Lorsqu'une fonction f(x) est strictement croissante (non majorée), sa limite lorsque x tend vers $+\infty$ est $+\infty$
Q2 Définition pour un élève de seconde	Quand la fonction atteint un nombre important de x (3000), ses ordonnées est aussi un grand nombre.	Lorsque l'on a une droite strictement croissante (vers le haut!) alors elle va vers l'infini dont le symbole est $+\infty$
Q4 Méthodes connues pour prouver que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.	- on peut avoir recours aux lim de référence ; - lorsque c'est un polynome de plusieurs degrés, on regarde le + fort ; - quand c'est un rapport de polynôme, on fait le rapport des termes de + haut degré ; - calculer l'image d'un très gd nombre et voir si on trouve aussi un gd nbre.	Nous savons que les fonctions ayant une puissance paire positive sont toujours croissantes. Nous connaissons aussi quelques fonctions types.

Tableau 4 : réponses de Sébastien et Laurent à Q1, Q2 et Q4.

Laurent fait référence à une conception monotone à travers toutes ses réponses. Il y a une cohérence d'autant plus forte que les phrases évoquées recouvrent plusieurs niveaux (le graphique pour la définition "élève de seconde", les fonctions puissances pour les méthodes, un théorème pour la "définition mathématique"[39]). On remarquera qu'aucune définition n'est donnée mais que Laurent décrit la propriété (avoir une limite infinie) à partir de certaines des fonctions qui la possèdent : les fonctions croissantes

[39] On peut s'interroger à propos de l'origine du théorème cité relatif aux "fonctions croissantes non majorées" : le théorème n'est pas au programme de cette section, et n'a pas été présenté en classe. Laurent explique : "un copain d'une autre classe m'a dit que c'était un théorème qui pouvait servir"...

non majorées, les "droites strictement croissantes", les fonctions avec une puissance paire positive.

ii) Techniques utilisées.

Pour les deux élèves, l'objet fonction est perçu à partir du registre graphique :

- il est mobilisé plus facilement avec une calculatrice graphique. La facilité explique sans doute que Sébastien en reste à une analyse très frustre des courbes observées ; ainsi il reproduit à peu près les mêmes dessins pour lnx+10sinx, x.sinx, |x.sinx| (pour en conclure que les trois fonctions n'ont pas de limite en $+\infty$) ;

- sans calculatrice graphique, le tracé d'une représentation graphique exigera un effort d'imagination : les références étant assez faibles pour ce type d'élèves (cf.II.b.1.iii.), les éléments caractérisant le graphique sont ténus. Ainsi Laurent, sans calculatrice, ne repère des fonctions que leur caractère oscillant : il imagine toutes les fonctions contenant un sinus comme des fonctions périodiques (il reproduit à chaque fois la même sinusoïde, même pour x^2+sinx). L'aspect oscillant du graphique est le seul caractère pertinent retenu (aucune des courbes ne passe par 0).

La verbalisation est beaucoup plus importante que chez les élèves "scolaires". Cela permet de repérer plus facilement les "théorèmes-en-acte" :

- **TA3** : Laurent écrit "la fonction x-1000.lnx ne tendra pas vers $+\infty$ car 1000.lnx deviendra plus grand que x" ; il écrit aussi que x^2+sinx tend vers $+\infty$ car "elle prend les valeurs du x^2" ; Sébastien écrit que la fonction rationnelle tend vers $+\infty$ car "on fait le rapport des termes de plus haut degré" (il exprime aussi que 100.000 est une "image de l'infini" en cohérence avec ce qui était annoncé en Q4) ;

- **TA1** : pour Sébastien lnx+10sinx, x.sinx et |x.sinx| n'ont pas de limite "car ce sont des fonctions périodiques" ; pour Sébastien encore "la courbe de x-1000lnx sera décroissante, elle tendra vers $-\infty$".

On avait signalé en II.a.2.v. que **TA3** se rattachait aussi bien à une conception "primitive" qu'à une conception "algébrique". on peut considérer ici que l'expression de ce théorème-en-acte se rattache plus à une conception "primitive" (ce sont les grands nombres -1000 ou 100.000 qui font foi) qu'à une conception "algébrique". Les copies ne portent d'ailleurs aucune trace de calcul.

TA1 fait référence bien sûr à une conception "monotone".

Les réponses des deux élèves diffèrent pour la fonction x^2+sinx : l'influence de la calculatrice est déterminante. On constate d'ailleurs que l'élève avec calculatrice ne répond jamais "je ne sais pas", alors que l'élève sans calculatrice choisit 3 fois cette réponse : la calculatrice fait preuve.

Les élèves du type "bricoleur" semblent disposer d'une conception des fonctions se déployant dans le registre graphique et d'une conception des limites, intermédiaire entre une conception primitive et une conception monotone. L'utilisation de la calculatrice graphique semble être en cohérence avec ces conceptions : elle donne accès au graphique de la fonction et les théorèmes-en-acte erronés permettent la description des images obtenues, qui vaut preuve.
Avec ou sans calculatrice, les mêmes ressorts fonctionnent dans l'action.

5. Type expérimentateur (protocoles 17 et 19, pp 406 et 408 Annexe 3).

Fabienne et Christelle ont été cataloguées comme "expérimentatrices". Elles sont dans le même binôme de TP, elles ont des résultats scolaires comparables. Fabienne travaille ce jour là sans calculatrice et Christelle travaille avec calculatrice.

	Christelle (avec calc)	Fabienne (sans calc)
Q1 Définition mathématique	f(x) peut être aussi grand que l'on veut pour x très grand.	La fonction f(x) prend des valeurs aussi grandes que l'on veut si x est choisi assez grand.
Q2 Définition pour un élève de seconde	Plus on prend un x grand, plus f(x) augmente, la courbe s'éloigne des axes et de O.	Plus x est grand, plus f(x) = y est grand.
Q4 Méthodes connues pour prouver que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.	- théorème des opérations - théorème d'encadrement.	si $g(x) < f(x)$ et que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Tableau 5 : réponses de Christelle et Fabienne à Q1, Q2 et Q4.

i) Définitions et techniques annoncées.

On constate pour les deux élèves en Q1 des résultats assez proches que l'on peut rattacher à la conception "experte". On constate aussi le glissement vers la conception "monotone" dès que la définition est "traduite" à un élève de seconde. On notera aussi que l'utilisation de la calculatrice n'apparaît pas dans les techniques de démonstration annoncées (à la différence des élèves de type "bricoleur").

Les théorèmes d'encadrement sont évoqués dans les deux cas. On remarquera que Christelle indique aussi les techniques opératoires. Il y a bien une proximité assez grande dans les profils de ces deux élèves (en général et relativement à ce questionnaire).

ii) Techniques utilisées.

Pour les deux élèves, les justifications sont plus fournies que pour les élèves de type "bricoleur"; on s'éloigne d'un langage familier, pour se rapprocher d'un langage plus fonctionnel (cf. 0.b.2.iv.).

Quant aux réponses elles-mêmes, elles diffèrent profondément suivant l'utilisation ou non de la calculatrice :

- **Fabienne** répond " juste" à chaque question (sauf pour $|x \sin x|$ et $\frac{e^x}{x^{50}}$, où elle répond "je ne sais pas").

On constatera que les résultats annoncés sont démontrés avec des techniques convenables (les encadrements, qui étaient annoncés en Q4 et les opérations, qui n'y étaient pas mentionnées). Aucun dessin n'est fait.

- Christelle au contraire reproduit un dessin par fonction et tombe dans à peu près tous les "pièges".

Elle établit une relation directe entre les graphiques que la calculatrice lui présente et les résultats. Les **TAi** sont évoqués comme preuve des réponses :

- TA3 :
x - 1000lnx tend vers +∞ (quand x tend vers 0, erreur de localisation) car **1000lnx > x** ; même raisonnement pour x^2 + sinx ;
pour $\frac{100000x-50}{x+1000}$: **100000x > x**, donc le quotient tend vers +∞.

- TA1 :
-1 < sinx < +1 donc -∞ < xsinx < +∞. Donc xsinx n'a pas de limite en +∞. Elle annonce pour lnx + 10 sinx : " **toujours le même problème**" : pas de limite (à cause de l'oscillation du sinus).

Il est clair ici qu'il y a une bonne coordination entre chaque exercice et le graphique qui l'illustre. Des techniques qui ont donné de bons résultats dans un exercice (c'est à dire permettant une interprétation du graphique observé) sont réinvesties dans un autre exercice. Il est tout aussi clair que les procédures de contrôle théorique ne fonctionnent plus du tout. Le cours est court-circuité. Les techniques annoncées au départ ne sont pas utilisées.

Pour les élèves de type "expérimentateur", la calculatrice semble jouer un rôle très important : alors que de premières ruptures avec les conceptions monotone et primitive apparaissent (à partir des définitions annoncées), l'utilisation d'une calculatrice graphique semble tirer en arrière le processus de conceptualisation engagé.

Le travail de coordination, essentiel pour ces élèves (II.b.1.iii.), ne fonctionne pas du tout dans les mêmes conditions dans un environnement calculatrice et dans un environnement sans calculatrice :

- sans calculatrice, le travail de coordination se fait sous un contrôle relatif, les techniques annoncées a priori sont effectivement utilisées ;

- avec calculatrice, la coordination se fait entre les différents renseignements obtenus sur le moment, c'est à dire ceux issus de l'observation graphique. Il n'y a pas alors inhibition des schèmes non pertinents (cf 0.b.3.iv.) : la coordination se fait entre les différentes images observées et les conceptions anciennes, ancrées plus profondément. Des théorèmes-en-acte erronés permettent alors de "prouver" les réponses.

La conception exprimée par Christelle ici emprunte à la fois à une conception monotone ("si une fonction oscille, alors elle ne peut pas tendre vers +∞") et à une conception primitive ("1000lnx écrase x, parce que 1000 est grand").

Conclusion sur le questionnaire de Janvier

Pour les élèves de type théorique, on a repéré des conceptions primitive ou monotone, clairement exprimées, avec de premières traces de rupture. Il y a une cohérence forte entre ces conceptions et le travail effectivement réalisé.
L'écart entre la réalisation avec calculatrice et la réalisation sans calculatrice est faible. Le contrôle se fait à partir des objets de référence.

Pour les élèves de type rationnel, on a distingué l'expression d'une conception monotone clairement exprimée sans trace de rupture. Mais les exercices sont traités indépendamment de cette conception, par application de techniques d'opérations ou de minoration.
L'écart entre la réalisation avec et sans calculatrice est faible. Le contrôle se fait à partir des théorèmes vus en cours.

Pour les élèves de type scolaire, la définition, confusément exprimée, ne se rapporte à aucune conception ou à une conception monotone sans trace de rupture.
L'écart entre la réalisation avec et la réalisation sans calculatrice est fort :
- sans calculatrice, les fonctions ont un statut de nombre. Les exercices sont traités par multiplication de théorèmes-en-acte implicites, témoignant de la faiblesse de la conceptualisation ;
- avec calculatrice, la fonction est confondue avec sa représentation graphique. Les exercices sont traités à partir des TAi. Le contrôle se fait à partir de l'observation des graphiques.

Pour les élèves de type bricoleur, la définition exprimée à partir d'exemples, fait référence aux conceptions primitive ou monotone, sans trace de rupture. Les exercices sont traités en relation avec cette conception par utilisation des TAi.
L'écart entre la réalisation avec et sans calculatrice est faible [40]. Le contrôle se fait à partir de graphiques immédiatement observés (c'est à dire sous des formes assez frustres) ou imaginés.

Pour les élèves de type expérimentateur, la définition fait référence à une conception monotone avec des traces de rupture (comme en témoigne la définition proposée en Q1).
Les exercices sont traités, sans calculatrice, sans référence à cette conception mais par application des théorèmes du cours.
Avec calculatrice, les exercices sont traités en référence à la conception exprimée à partir des TAi.
L'écart entre la réalisation avec et sans calculatrice est dont fort. Le contrôle se fait à partir de la coordination des registres facilement accessibles : si la calculatrice est là, le registre graphique est mobilisé, sinon il est fait appel au cadre algébrique.

---

40 Le fait que cet écart soit faible n'implique pas que la calculatrice n'a pas d'influence. Comme l'outil est constamment mobilisé, on peut imaginer aussi que, même momentanément supprimé, il "agit" encore dans l'esprit de l'élève. On y reviendra en II.b.2.iv..

II.b.2.iv Questionnaire avec TI-92, double comparaison interne.

Nous allons nous intéresser maintenant à l'évolution du processus de conceptualisation.

Quatre mois plus tard, le même questionnaire était proposé aux mêmes élèves, pourvus alors d'une calculatrice TI-92.

Le contexte était différent :

- le cours sur les limites était plus lointain, mais davantage d'exercices avaient été faits en classe autour de cette notion ;

- l'intégration de la nouvelle calculatrice TI-92 avait été contrôlée en classe. Ainsi, chaque élève avait vécu à peu près la même histoire scolaire autour de cet instrument (à la différence de ce qui avait été le cas pour les calculatrices graphiques).

La commande "Limit" permettant la détermination des limites a été utilisée en classe, la syntaxe particulière (limite à gauche, limite à droite) a été présentée et des cas d'indétermination de calcul de limite (pour la machine) ont été exhibés.

On pourrait penser que les élèves avaient mémorisé les résultats de la précédente passation du questionnaire. Il n'en a rien été. Après cette première passation, quelques remarques orales avaient été faites mais pas de correction systématique. Les élèves n'en ont gardé aucun souvenir précis, ce qui en dit long sur "la mémoire scolaire" ou plus exactement sur la mémoire relative aux objets à caractère "hybride".

La calculatrice est en effet intégrée, reconnue comme "objet scolaire" à part entière dans le cours de mathématiques de cette classe et pendant cette année particulière. Mais les élèves ont distingué ce qui relevait du statut purement scolaire de l'outil (utilisation pour traiter les problèmes "type bac"), ce qui relevait d'une activité de recherche mathématique (les TP, le problème long) et ce qui relevait d'un travail d'analyse de l'expérimentation elle-même.

Il est clair que ce questionnaire, comme les cinq questionnaires d'évaluation du "rapport à l'outil" (Annexe 4, Volume 2, page 159) donnés pendant l'année, relevait de ce dernier statut. Ainsi ce questionnaire avait été rangé dans la rubrique du matériel-pour-l'expérimentation-du-professeur, non noté et donc non susceptible de re-examen.

Nous allons donner le bilan de ce "nouveau" questionnaire sous deux formes : d'abord un bilan interne à la classe, comparé avec le précédent questionnaire passé par la même classe mais avec des calculatrices graphiques (**les résultats nouveaux en gras, les résultats anciens en fonte normale**), puis un bilan restreint aux 10 élèves représentant les différents "types" que nous avons déjà distingués.

NB : entre les deux questionnaires, la formulation d'une seule question a changé : en Q4", au lieu de la formulation "Comment utilisez-vous votre calculatrice pour conjecturer que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?", on a choisi :

"Que faites vous avec votre calculatrice quand vous recherchez des limites de fonction ?".

En effet, il fallait bien tenir compte de l'existence du calcul formel sur le nouvel outil et donc de la disponibilité d'une commande spécifique qui donne la limite cherchée.

Bilan comparatif collectif.

Rappel : en gras, les résultats de ce questionnaire passé en Mai avec TI-92, en fonte normale les résultats du même questionnaire pour les mêmes élèves passé en Janvier avec calculatrices graphiques.

Pour ce bilan comparatif, on va suivre le même plan qu'en II.b.2.ii..

1. D'abord les questions relatives à la mobilisation de l'outil.

On remarquera, dans le tableau 1 ci-dessous, un petit décalage vers la droite qui peut s'expliquer par une certaine lassitude chez quelques élèves (très peu en fait : 7% représentent ici 2 élèves). Le fait essentiel qui ressort de ce tableau est une certaine stabilité dans l'utilisation des outils au cours de l'année entre les calculatrices graphiques (objet du premier questionnaire) et les TI-92, objet du présent questionnaire.

	Beaucoup		Régulièrement		De temps en temps		Rarement		Pas du tout	
En cours	**43**	42	**40**	48	**10**	10	**7**	0	**0**	0
Chez vous	**13**	16	**50**	52	**30**	32	**7**	0	**0**	0

Tableau 1. Utilisez-vous votre calculatrice en mathématiques ?

S'agissant de l'utilisation de la calculatrice pour rechercher des limites de fonction, on constatera (tableau 2 ci-dessous) une augmentation spectaculaire avec l'arrivée des TI-92. L'outil est désormais très sollicité (sauf par 3 élèves réticents, 10% de l'effectif), ce qui semble naturel puisque, en principe, il donne la réponse.

Beaucoup		Régulièrement		De temps en temps		Rarement		Pas du tout	
27	10	**50**	29	**13**	39	**7**	22	**3**	0

Tableau 2. Utilisez-vous votre calculatrice quand vous recherchez des limites de fonction?

La comparaison des réponses à la question Q4", relative à la nature de l'action instrumentée, entre les deux questionnaires est plus délicate : on ne dispose pas là des mêmes commandes entre les calculatrices graphiques et les TI-92. On verra les résultats "TI-92" dans le tableau 3 ci-dessous : on a noté "commande" pour la commande spécifique "limit(f(x), x, ...)", "graph et commande" quand sont évoqués l'examen du graphique et l'action sur la commande spécifique.

Sans réponse	Commande	Graph, et commande	Graph seul
7	**50**	**37**	**6**

Tableau 3. Que faites vous avec votre calculatrice quand vous recherchez des limites de fonction (Q4") ?

La commande "limite" est ainsi utilisée par la très grande majorité de la classe. On remarquera que 43% des élèves utilisent le graphique (dont 6% qui n'utilisent que le graphique) alors qu'en classe, s'agissant de recherche de limite avec la calculatrice, la

commande spécifique a toujours été sollicitée par le maître. **Le graphique garde une fonction de concrétisation très importante** (0.b.1.ii.).

Si l'on compare avec l'utilisation de la calculatrice graphique pour la recherche de limites (Tableau 3 en II.b.2.ii.), on observera une différence très importante : alors qu'avec une calculatrice graphique seulement 16% des élèves avaient recours à deux actions (graphique et tableau de valeurs), ici, avec des TI-92, ils sont 37% à réaliser deux actions (graphique et commande spécifique). Cela semble confirmer ce qui était dit en II.c.2.ii. à propos de la diversification des conduites possibles avec une calculatrice symbolique. On en reparlera en II.b.3.i. quand on examinera les schèmes d'action instrumentée.

2. Les conceptions exprimées.

Soit une fonction f, définie sur R+ et vérifiant : $\lim_{+\infty} f = +\infty$

Q1 Donner une définition mathématique de cette situation
Q2 Comment expliqueriez vous cela plus simplement à un élève de seconde ?

	Questionnaire en Janvier		Questionnaire en Mai	
	Déf. math.	Déf. seconde	Déf. math.	Déf. seconde
Sans réponse	10	16	**15**	**12**
Tautologie	35	10	**30**	**6**
Ininterprétable	3	0	**6**	**0**
Conception primitive	3	19	**0**	**9**
Conception monotone	26	55	**33**	**70**
Conception non majorée	3	0	**10**	**3**
Conception experte	20	0	**6**	**0**

Tableau 4. Relevé des conceptions exprimées en Q1 et Q2.

On constate un affaissement des définitions expertes : certaines bonnes réponses en Janvier étaient dues à la proximité du cours et ne correspondaient pas à des acquisitions profondes. Il y a un décalage, parmi ceux qui évoquaient une conception "experte", vers une conception non majorée. On peut estimer cependant que plusieurs définitions en Q1 présentent des traces de "définition experte" : des élèves expliquent que f doit être minorée ou est une fonction à valeur dans [a, + ∞[.

La conception "f croissante" apparaît toujours largement majoritaire dès lors qu'il s'agit d'expliquer à un élève de seconde.

On peut repérer aussi l'évocation de la courbe, c'est à dire du registre graphique, dans les définitions données (tableau 5 ci-dessous).

	Questionnaire de Janvier	Questionnaire de Mai
Définition mathématique	3	**6**
Déf. élève de seconde	29	**26**

Tableau 5. Evocation du graphique dans les définitions en Janvier et en Mai.

On vérifie une fois encore le rôle de concrétisation très fort du graphique qui intervient dans la définition "élève de seconde" et les efforts faits pour exprimer la "définition mathématique" hors du registre graphique.

Considérons maintenant les réponses à la question Q6 relative aux conditions nécessaires ou suffisantes d'existence d'une limite infinie.

	Quest. Janvier	Quest. Mai.
Sans réponse	16	**0**
Vrai	35	**12**
Faux	39	**85**
Ne sait pas	10	**3**

Tableau 6. Si f est positive non majorée, alors $\lim_{+\infty} f = +\infty$

On distingue un net progrès dans le tableau 6 ci-dessus, qui est à mettre en relation avec le tassement des conceptions "primitive" (cf tableau 4 ci-dessus). De nombreux élèves évoquent les fonctions du type x.sinx à l'appui de leur affirmation : il ne suffit pas qu'une fonction puisse prendre "de très grandes valeurs" pour qu'elle tende vers $+\infty$. La réciproque (tableau 8 ci-dessous) correspond à une idée stabilisée : si f tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.

Autre idée stabilisée, traduite par les tableaux 7 et 9 ci-dessous : il y a coïncidence entre les fonctions à limite infinie et les fonctions croissantes. La stabilité des réponses témoigne bien de la résistance de cette conception dont on a pu voir une illustration à travers les **TAi** révélés par l'action des élèves et en Deug (cf. II.a.2.iii.).

	Quest. Janvier	Quest. Mai.
Sans réponse	10	**6**
Vrai	51	**47**
Faux	39	**47**
Ne sait pas	0	**0**

Tableau 7. Si f est strictement croissante, alors $\lim_{+\infty} f = +\infty$

	Quest. Janvier	Quest. Mai.
Sans réponse	10	**12**
Vrai	71	**73**
Faux	16	**12**
Ne sait pas	3	**3**

Tableau 8. Si $\lim_{+\infty} f = +\infty$, alors f n'est pas majorée.

	Quest. Janvier	Quest. Mai.
Sans réponse	16	**12**
Vrai	68	**75**
Faux	10	**13**
Ne sait pas	6	**0**

Tableau 9. Si $\lim_{+\infty} f = +\infty$, alors f est nécessairement croissante à partir d'une certaine valeur de x.

3. Techniques d'étude évoquées.

Techniques	Quest. Janvier	Quest. Mai
Aucune	16	**3**
Recours à la définition	0	**0**
Opérations	68	**97**
Encadrement	23	**53**
Croissance non majorée	0	**0**
Croissance	6	**3**
Calculatrice	13	**9**

Tableau 10. Méthodes connues pour prouver que $\lim_{+\infty} f = +\infty$

On constate ici un net progrès :
- un seul élève (3%) n'évoque aucune technique ;
- les élèves évoquent en moyenne deux techniques (deux techniques opératoires ou une technique opératoire avec une technique d'encadrement) ;
- la technique de minoration (ou d'encadrement, ou "des gendarmes") est majoritairement évoquée.

Nous avons observé aussi, ce qui n'apparaît pas dans le tableau ci-dessus :
- une nette augmentation des techniques indiquant une action sur les fonctions en présence (transformations, opérations) ;
- si l'on compte le nombre total de techniques opératoires évoquées, on voit que ce nombre a été multiplié par 4 entre les questionnaires de Janvier et Mai ;
- une nette augmentation des théorèmes de comparaison logarithme/exponentielle/puissance qui sont au centre du cours d'analyse en Terminale ;

Trois élèves (9%) évoquent l'utilisation de l'application graphique de la TI-92 comme méthode de preuve. Ce fait est tout à fait remarquable, alors qu'aucun élève n'évoque l'utilisation de la commande spécifique "limite". Une nouvelle "preuve" de l'importance de la courbe d'une fonction comme présentation de toutes ses propriétés (cf 0.c.1.ii.).

Il y a donc deux éléments repérables dans le processus de conceptualisation à l'oeuvre :
- un regroupement encore plus important des conceptions exprimées autour de la conception monotone (avec une diminution des "conceptions expertes") ;
- une diversification des techniques d'études proposées.

Cette contradiction apparente peut cacher des phénomènes de nature très diverse que nous verrons de plus près dans l'étude des trajectoires individuelles :

- pour certains élèves, il peut s'agir d'un désintérêt pour la définition des objets manipulés. Il y aurait coexistence entre une définition très frustre et une habileté opératoire, nécessaire et suffisante pour traiter des problèmes "type bac" ;
- pour d'autres élèves, la stabilisation d'une conception monotone peut correspondre à un progrès conceptuel ("la variable tire la fonction aussi loin que je veux" étant un point de vue cinématique correspondant à une première perception "intuitive" du concept de limite (cf I.a.1.iii.) ;
- pour d'autres élèves, il peut s'agir enfin d'un repli provisoire sur une conception ancienne : une nouvelle acquisition formelle est souvent suivie de périodes de recul pendant lesquelles il y a maturation des nouveaux outils. Une sorte de "travail de deuil" des anciens objets. C'est une dialectique entre outils et objets que R. Douady ([Douady, 1986]) a bien mis en évidence.

4. Examen des réponses à Q5 (tableau 11 ci-dessous)

	Questionnaire de Janvier				Questionnaire de Mai			
	Oui	Non	?	Sans rép.	Oui	Non	?	Sans rép.
lnlnx	**94** 93	**6**		**0** 7	**100** 100			
x - 1000lnx	**40** 43	**30** 16	**24** 29	**6** 14	**85** 59	**8** 6	**7** 6	**0** 23
x^2 - 10xsinx	**70** 34	**24** 16	**0** 36	**6** 14	**70** 65	**15** 0	**15** 12	**0** 23
x.sinx	**35** 8	**59** 72	**6** 7	**0** 13	**0** 18	**70** 53	**30** 24	**0** 5
| x.sinx |	**47** 8	**41** 63	**12** 15	**0** 14	**23** 35	**54** 35	**15** 18	**8** 12
lnx + 10sinx	**35** 42	**35** 8	**18** 29	**12** 21	**77** 53	**0** 12	**15** 12	**8** 23
x^2 + sinx	**88** 50	**12** 8	**0** 21	**0** 21	**85** 71	**8** 6	**0** 0	**7** 23
$\frac{100000x - 50}{x + 1000}$	**59** 50	**29** 21	**0** 8	**12** 21	**15** 18	**85** 58	**0** 6	**0** 18
$\frac{e^x}{x^{50}}$	**47** 72	**18** 8	**23** 7	**12** 13	**77** 82	**7** 12	**8** 6	**8** 6

Tableau 11. Les fonctions f vérifient-elles $\lim_{+\infty} f = +\infty$

Dans chaque case, le premier pourcentage (en gras) concerne le groupe composant avec calculatrice, le deuxième pourcentage concerne le groupe sans calculatrice.

On remarquera que les réponses sans calculatrice sont en général meilleures qu'en Janvier, résultat normal du processus d'apprentissage (il suffit pour s'en convaincre de considérer les progrès dans les résultats sans calculatrice).

Il n'y a pas 100% de réussite avec la TI-92 et ce pour plusieurs raisons :

- pour les deux fonctions qui n'admettaient pas de limites, la calculatrice renvoyait "undef". Il fallait alors décider si la calculatrice ne connaissait pas la réponse ou s'il n'y avait pas de limite.

- il y a eu de nombreuses erreurs de syntaxe (oubli du signe "multiplié entre x et sinx, oubli des parenthèses pour ln(x) ou pour sin(x)... ;

- certains élèves, assurés du résultat sur la simple vision du graphique, ou sur le souvenir d'un théorème faux, n'ont pas pris le temps d'actionner la commande "limite" qui peut être assez coûteuse en temps (par exemple pour la fonction rationnelle) ; d'où sans doute, les erreurs pour les deux dernières fonctions ;

- et on a vu enfin que 37% des élèves utilisaient à la fois la commande "limite" et l'application graphique. En cas d'incompatibilité, il fallait bien faire un choix.

Analysons plus en détail ce tableau, en gardant le point de vue comparatif avec les résultats obtenus avec les calculatrices graphiques.

5. Influence de la calculatrice.

i) Influence sur "l'indécision". On a ci-dessous relevé "l'indécision", somme des "sans réponses" et des "non réponses".

	Quest. Janvier.	Quest. Mai.
Avec calc	15	13
Sans calc	36	23
Var. relative	+140%	+77%

Tableau 12. Pourcentage moyen d'indécision par question posée.

On voit que la disposition d'une calculatrice symbolique ne diminue pas sensiblement l'indécision dans le calcul des limites (on passe de 15% à 13%). Par contre, on peut considérer qu'il y a un progrès général de la classe dans l'assurance des calculs (si l'on considère la diminution des indécis dans le travail sans calculatrice, de 36% à 23%).

Pour avoir un résultat plus fin, on peut déterminer le coefficient d'indécision en ne considérant que les fonctions ayant une limite en $+\infty$ et une limite que la TI-92 donnait bien[41]. On exclut donc xsinx et | xsinx |, pour lesquelles la calculatrice répond "undef".

	Quest. Janvier.	Quest. Mai.
Avec calc	16	10
Sans calc	34	22
Var. relative	+112%	+120%

Tableau 13 : Pourcentage moyen d'indécision par question dont la calculatrice donnait la réponse

Il reste bien un "matelas" d'indécision de 10%, alors même que la calculatrice donne la réponse à la question. La disposition d'un outil puissant ne suffit pas, encore faut-il savoir s'en servir.

---

41 On a peut-être remarqué qu'il n'y a dans l'herbier de fonctions proposées en Q5 aucune fonction du type $\ln(e^x-1)-x$, dont la limite n'est pas connue par la TI-92 (cf I.c.2.ii.). Il aurait été pourtant intéressant d'observer les réactions des élèves quand la calculatrice renvoie seulement la question posée.

La raison de cette omission est simple : quand le questionnaire a été élaboré (en 1994), l'existence de la TI-92 ne m'était pas connue. Il a été choisi de conserver le même questionnaire avec les TI-92, pour permettre tous les croisements possibles avec les questionnaires antérieurs. Ce choix est peut-être contestable.

ii) Influence sur les résultats.

On vérifie aussi que la TI-92 ne résout pas tout en regardant cette fois-ci le pourcentage de réponses justes (en ne considérant que les questions pour lesquelles la calculatrice donnait la limite, ce qui revient à exclure encore xsinx et | xsinx |). On constate dans le tableau 14 ci-dessous qu'il existe un pourcentage de 17% de réponses fausses parmi les élèves disposant de la TI-92.

	Quest. Janvier.	Quest. Mai.
Avec calc	58	**83**
Sans calc	51	**70**
Var. relative	-12%	**-16%**

Tableau 14. Pourcentage de réponses justes pour les fonctions "problématiques".

iii) Influence sur les techniques.

Par ailleurs, les progrès constatés dans l'évocation des techniques sont confirmés par les réponses données aux questions de Q5 sans calculatrice. Ce progrès est manifeste aussi sur la fonction lnx+10sinx comme en témoigne le tableau 15 ci-dessous.

	Quest. Janvier.	Quest. Mai.
Avec calc	41	**20**
Sans calc	14	**6**

Tableau 15. Evocation de **TA0** et **TA1** pour l'étude de lnx+10.sinx

Nous avons considéré que c'est l'oscillation de la courbe qui justifiait qu'il n'y avait pas de limite quand la réponse "non" était accompagnée d'un seul dessin de type "sinusoïdal". Un seul élève travaillant sans calculatrice évoque l'oscillation de la fonction (cependant 34% ne se prononcent pas, ce qui traduit une perplexité dont on ne peut pas déterminer ici l'origine).

On remarquera que des élèves disposant d'une calculatrice symbolique évoquent la périodicité du sinus (ou l'oscillation de la courbe) pour en déduire que la fonction n'a pas de limite, alors même que celle-ci leur est fournie par la machine. A la recherche de la preuve du résultat annoncé, ils regardent la représentation graphique dont "l'allure générale" vaut résultat général.

6. Etude de Q7

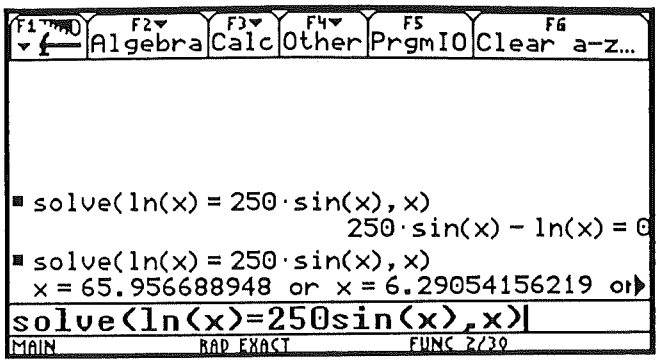
Il s'agissait, on s'en souvient, de déterminer le nombre de solutions, fini ou infini, de l'équation lnx=250.sinx. Les problèmes graphiques posés sont les mêmes avec une calculatrice graphique ordinaire, ou avec une TI-92 (cf II.a.2.i.).

Il y a une nouveauté avec la TI-92, c'est que cette équation peut être traitée sur le plan formel

- soit en calcul exact (et le logiciel se contente de renvoyer la question) ;
- soit en mode approché : dans ce dernier cas, on obtient les valeurs approchées de 3 solutions, comme l'indique la copie d'écran ci-dessous :

La valeur approchée de la première solution, cachée en bout de ligne, est 3, 13701... ; les deux autres valeurs approchées fournies sont 6,29054... et 65,95668...

La raison pour laquelle le logiciel fournit ces trois valeurs relève du fonctionnement d'algorithmes à base de dichotomie, sur un domaine fini.



L'existence de cette commande, qui fournit un nombre fini (3 !) de solutions, modifie évidemment les conditions de résolution avec instrument.

Il apparaît cependant qu'aucun élève disposant d'une TI-92 n'a utilisé cette commande (en tous cas, il n'en reste aucune trace sur les feuilles). C'est-à-dire que tous ceux qui ont traité la question avec TI-92 **semblent** l'avoir traité à nouveau graphiquement. Sur ce point, on mesure aussi le caractère incomplet du recueil d'informations par voie de questionnaire. Les gestes successifs nous échappent. On y reviendra en II.b.3.ii.

Terminons cette étude globale par la considération des résultats à la question Q7, résumés dans le tableau 16 ci-dessous.

	Questionnaire Janvier		Questionnaire Mai	
	Avec calc	Sans calc	Avec calc	Sans calc
Sans réponse	76	36	53	58
Un nb fini	6	36	20	24
Un nb infini	18	14	27	12
Ne sait pas	0	14	0	6

Tableau 16 (en pourcentage des réponses à Q7)
Combien l'équation lnx = 250 sinx a-t-elle de solutions ?

On constate là un certain nombre d'évolutions croisées :

- ceux qui utilisent une calculatrice vont plus vite maintenant et donc sont plus nombreux à atteindre la fin du questionaire (le nombre de sans réponses passe de 76% à 53%). C'est le mouvement inverse pour les élèves composant sans calculatrice, qui passent plus de temps à réfléchir sur chaque fonction ; d'ailleurs ce sont les élèves qui rédigent avec le plus de soin qui n'arrivent pas à la fin, ce qui explique sans doute la diminution des réponses "un nombre fini" pour les sans calculatrice ;

- le nombre des réponses correctes pour les élèves composant avec calculatrice passe de 6% à 20%. Ce n'est pas l'effet de la puissance de l'outil, puisque c'est la même application graphique qui a été mobilisée, mais un certain recul sur les objets en présence.

Pour conclure cet examen global des résultats du questionnaire, on peut constater un progrès global de la classe qui l'amène "au niveau" du groupe témoin ; pour s'en convaincre, il suffit de comparer les résultats à la question Q5 du groupe témoin (II.a.2.iv.) et ceux de la classe expérimentale en Mai.

Bilan général du questionnaire de Mai.

(bilan comparatif collectif)

La comparaison des questionnaires de Janvier et de Mai fait apparaître un double phénomène :

- un affaiblissement des "définitions expertes" ;
- une meilleure maîtrise des techniques.

L'introduction d'un nouvel outil (TI-92) doté d'une commande spécifique n'entraîne pas une conduite unique : l'application graphique est encore sollicitée, seule ou combinée avec la commande "limite".

L'introduction de la TI-92 ne règle donc pas tous les problèmes :

- certains résultats sont encore faux ;
- des théorèmes-en-acte erronés, appuyés sur des considérations graphiques, apparaissent encore.

Pour comprendre l'origine de la persistance de certaines conduites et de certaines erreurs, nous allons croiser ces résultats avec notre typologie.

Questionnaire de Mai et typologie.

Les mêmes élèves qu'en II.b.2.iii. sont étudiés, à fin de comparaison (pour faciliter les comparaisons, on a placé pour chaque élève, en Annexe 3, sa réalisation lors du questionnaire de Janvier, suivie de celle de Mai).

Type "théorique" (protocoles 2 et 4, Annexe 3, pp 391 et 393).

	Jérôme (avec calc)	Damien (sans calc)
Q1 Définition mathématique	f(x) peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut ; il suffit que x prenne une valeur suffisamment grande.	Pour de très grandes valeurs de x, f(x) prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.
Q2 Définition pour un élève de seconde	Plus x est grand, plus les solutions de f(x) prennent une valeur grande.	Au plus on prend de grandes valeurs de x, f(x) prendra des valeurs de plus en plus grandes.
Q4 Méthodes connues pour prouver que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.	- théorème des gendarmes ; - fonctions de référence et comparaison de ces fonctions ; - elles permettent de trouver des limites des fonctions qui les combinent	- rapport des termes de plus haut degré (polynômes) ; - formules cours ($\frac{e^x}{x}$ ...) ; - théorème des gendarmes.

Tableau 1. Réponses de Jérôme et Damien aux questions Q1, Q2 et Q4.

1. Du point de vue des définitions.

i) Définition mathématique.

- Jérôme a mémorisé la définition déjà donnée en Janvier, qu'on peut rattacher à une définition experte ;
- Damien donne une définition qui traduit une avancée certaine par rapport à la définition donnée en Janvier ("quand x prend des valeurs aussi grandes que l'on veut, f(x) prend des très grandes valeurs"). Cette fois-ci, c'est la fonction qui peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut.

ii) Définition à un élève de seconde.

On en revient à une définition rattachée à une "conception monotone".

2. Techniques annoncées.

Un éventail de technique plus riche est donné en Q4. On note une évocation des fonctions de référence importante, liée au profil de ces élèves. Ce recours aux fonctions de référence a une utilité forte pour le tracé des représentations graphiques. Il est d'ailleurs assez remarquable de constater que, en Q5, les copies des deux élèves sont semblables : il serait difficile de deviner, si on ne le savait pas, qui a composé et qui n'a pas composé avec une calculatrice "graphique". Dans les deux cas, les courbes sont "globalement" convenables.

3. Techniques mises en oeuvre.

Ce recours à des images fortes peut être une aide (ainsi Damien dit -oralement- "lnx+10sinx, c'est la fonction log et une petite vibration" et dessine un schéma en rapport ; donc "limite infinie"). Mais cela peut être aussi un obstacle : ainsi le même Damien dit que la fonction rationnelle, pour raison de "croissance comparée", est équivalente à la fonction affine du numérateur. Ce qui implique une limite infinie (il rectifie l'erreur au moment de rendre sa copie).

On retrouve ainsi le même équilibre que pour le questionnaire de Janvier :
- pour Damien, sans calculatrice, l'évocation des fonctions de référence vaut preuve ;
- pour Jérôme, les graphiques étant obtenus avec calculatrice, l'effort porte sur la justification théorique des résultats avancés.

Cependant, si l'on compare les productions de Janvier et de Mai, on constate des évolutions qui ne sont pas de même nature :
- en Janvier, Jérôme avait déterminé les limites à partir de l'étude des variations des fonctions (utilisation de **TA2**). En Mai, il applique les techniques annoncées en Q4 : encadrements, opérations et recours aux fonctions de référence. L'évolution est donc considérable (tous les résultats, sauf |x.sinx|, sont justes) ;
- les résultats de Damien sont aussi bien meilleurs en Mai (toutes les limites -sauf une- sont justes), mais la justification de ceux-ci reste aussi sommaire qu'en Janvier.

Il y a sans doute eu des effets de contrat différents que la typologie seule ne permet pas d'expliquer :
- Damien veut aller vite pour finir le questionnaire (il traite d'ailleurs correctement la question Q7, avec un dessin montrant bien que la fonction logarithme finira par s'achapper de "la bande des 250"). Et il rend ses feuilles avant la fin de l'heure ;
- Jérôme préfère aller lentement mais traiter soigneusement toutes les questions.

Type rationnel (protocoles 6 et 8, Annexe 3, pp 395 et 397).

	Elsa (avec calc)	Patrice (sans calc)
Q1 Définition mathématique	Pour tout x aussi grand que l'on veut, f(x) tend vers l'infini.	Plus la valeur de x augmente, plus la valeur de f(x) augmente aussi.
Q2 Définition pour un élève de seconde	Plus on choisit un x grand, plus f(x) sera grand.	
Q4 Méthodes connues pour prouver que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.	- opérations ; - encadrement ; - transformation de l'écriture d'une forme indéterminée	Théorèmes sur les limites, encadrement (théorème des gendarmes), on peut factoriser l'équation.

Tableau 2. Réponses d'Elsa et de Patrice aux questions Q1, Q2 et Q4.

1. Définition.

L'évolution quant à la "définition mathématique" pour Elsa et Patrice n'est pas la même que pour les deux élèves "théoriques" : il y a pour Elsa une régression (en

Janvier, la définition commençait par "f(x) peut être aussi grand que l'on veut") et pour Patrice une stagnation (c'est une définition du même type qu'en Janvier qui est annoncée).

2. Techniques annoncées et mises en oeuvre.

En Q4, les techniques annoncées sont plus nombreuses ; elles font toujours appel aux opérations et sont utilisées dans la résolution des exercices de Q5 :

- toutes les réponses d'Elsa sont justes et correctement justifiées. Une seule ambiguïté : sans doute influencée par le graphique, elle écrit "pas de limite" pour lnx+10sinx mais coche cependant la case "oui".
- pour Patrice aussi les techniques annoncées sont utilisées correctement, sauf pour lnx+10sinx et pour x^2+sinx. Sans doute influencé par les deux exercices qui précèdent (xsinx et |xsinx|), il déclare sans justification que ces deux fonctions n'ont pas de limite infinie en $+\infty$.

Il n'y a qu'une différence entre les copies d'Elsa et de Patrice : celle de Patrice (sans calculatrice) ne comporte aucun graphique, celle d'Elsa, avec calculatrice, contient les graphiques demandés. Mais à la différence des élèves "théoriques" que l'on vient de voir, les graphiques donnés ne suggèrent pas l'existence d'une limite infinie : ainsi, celui de lnx+10sinx est une sinusoïde assez ample, qui ne présente aucun signe de "décollage" : **Elsa fournit les graphiques car ils sont demandés par l'énoncé et que la calculatrice permet de les obtenir à peu de frais. Mais ceux-ci n'interviennent pas du tout dans la résolution ni dans la compréhension des phénomènes.**

Il y a ainsi pour ces élèves une coordination assez faible entre le registre algébrique et le registre graphique. On en retrouve une illustration à la question Q7 : Patrice n'a pas le temps de l'aborder ; Elsa estime que l'équation a une infinité de solutions. Elle commence par transformer l'équation de différentes manières (lnx-250sinx=0 puis en factorisant), elle essaie de dériver et n'arrive à aucun résultat. Elle jette alors un coup d'oeil au graphique proposé par la calculatrice : d'où le résultat, annoncé avec un statut de conjecture.

Type scolaire (protocoles 10 et 12, Annexe 3, pp 399 et 401)

Les premières réponses de Stéphanie et Rachel sont récapitulées dans le tableau 3 ci-après.

1. On constate d'abord la faiblesse des définitions :

- alors qu'en Janvier Stéphanie donnait la définition d'une fonction explicitement croissante, ici elle se contente d'une tautologie et d'un dessin.
- Rachel se contente comme en Janvier d'une tautologie. On distinguera une différence importante sur laquelle on reviendra plus loin : en Janvier, elle écrivait "la limite tend vers", exprimant par là que l'objet même de limite n'était pas fixé. On ne retrouve pas ces expressions en Mai.

2. On constate ensuite l'insigne faiblesse des techniques annoncées.

Il y a un effet de croisement des réponses entre les deux questionnaires :

- en Janvier, Rachel indiquait comme techniques : "il faut chercher la dérivée de la fonction, puis le sens de variation et enfin les limites" ; en Mai, elle ne donne plus aucune technique ;
- en Janvier, Stéphanie ne donnait aucune technique ; en Mai elle annonce le tableau de variation, la recherche de limites et le graphique.

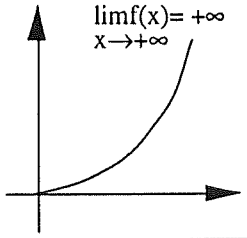
	Stéphanie (avec calc)	Rachel (sans calc)
Q1 Définition mathématique	Lorsque x tend vers +∞, f(x) tend vers +∞. Pour x appartenant à ℝ, f(x) est définie sur ℝ+.	La fonction f est comprise dans l'intervalle [0,+∞[. Lorsque x tend vers +∞, f tend, elle aussi, vers +∞.
Q2 Définition pour un élève de seconde		La valeur de la fonction f(x) peut varier de 0 à +∞, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que lorsque x tend vers +∞, la fonction tendra à son tour vers +∞.
Q4 Méthodes connues pour prouver que f tend vers +∞ quand x tend vers +∞.	Avec le tableau de variations ; la recherche de limites ; le graphique.	

Tableau 3. Réponses de Stéphanie et de Rachel aux questions Q1, Q2 et Q4.

3. Quant aux réponses à Q5, l'écart entre les deux copies est considérable :

- les réponses de Rachel à Q5 sont du même type qu'en Janvier : aucune ébauche de dessin, aucune justification sauf pour lnlnx. On trouve quatre "je ne sais pas" (deux fois plus qu'en Janvier), en particulier pour deux fonctions de référence : la fonction rationnelle et le rapport exponentielle/puissance. Il semble que ce soit le même théorème-en-acte qu'en Janvier qui aboutit (**TA6a**) aux réponses positives pour lnx+10sinx et pour x^2+sinx ("on ajoute à une fonction qui tend vers +∞ un petit nombre"). Mais mêmes les explications orales sont assez confuses : la fin de l'année est proche et le sentiment d'échec ne prédispose pas à de longues explications.

Par contre, les réponses de Stéphanie sont toutes exactes, preuve d'une bonne utilisation de la calculatrice. La dépendance de la calculatrice se constate aussi pour la fonction xsinx (on a vu que la calculatrice répondait "undef") : Stéphanie coche alors les cases "non" et "je ne sais pas". On trouve aussi deux fois moins de dessins qu'en Janvier, indice d'une moins grande utilisation de l'application graphique. Ce qui sert, c'est désormais le calcul formel des limites. Deux techniques correctes sont produites (pour lnlnx et la fonction rationnelle). Pour le reste, on ne trouve que des embryons de démonstration, souvent incohérents.

Ainsi, pour x^2-10xsinx, Stéphanie écrit :

$x \to +\infty$, sinx → ? , xsinx → +∞, $x^2 \to +\infty$ et enfin x^2 -10xsinx→ +∞.

Et à la ligne juste en dessous, elle écrit, pour l'exercice suivant, que xsinx n'admet pas de limite en +∞. Ici la production de résultats corrects n'est pas le signe d'une compréhension des phénomènes.

Les théorèmes-en-acte qui permettaient une interprétation des graphiques en Janvier ne sont plus pertinents ici pour l'interprétation des résultats "formels" de la TI-92. Aucune nouvelle règle ne vient combler ce vide.

Type bricoleur (protocoles 14 et 16, Annexe 3, pp 403 et 405).

1. Définitions.

Les définitions annoncées (tableau 4 ci-dessous) sont du même type qu'en Janvier. Le langage est de type familier et la référence est clairement les fonctions croissantes.

	Sébastien (avec calc)	Laurent (sans calc)
Q1 Définition mathématique	Limite de la fonction f(x) quand x tend vers $+\infty$, y tend alors vers $+\infty$.	C'est la limite de la fonction f(x) lorsque x tend vers $+\infty$. Nous remarquons que la fonction croît en $+\infty$.
Q2 Définition pour un élève de seconde	Quand la fonction s'éloigne de plus en plus, elle va de plus en plus haut.	Si x reste grand sur une fonction f(x) alors le résultat est que la fonction croît (dans cet exemple).
Q4 Méthodes connues pour prouver que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.	- Le double produit ; - lorsque la fonction est de la forme $\frac{x^2+2}{x}$, on prend le rapport des termes de plus haut degré ; - on se ramène aux fonctions de référence.	Nous connaissons pour les polynômes la loi du terme de plus haut degré. L'on peut aussi factoriser pour annuler certaines valeurs qui rendent cette fonction indéterminable.

Tableau 4. Réponses de Sébastien et de Laurent aux questions Q1, Q2 et Q4.

2. On peut distinguer un léger progrès dans les techniques annoncées :

- on a vu que en II.b.2.iii. que Sébastien avait enregistré dans sa calculatrice un certain nombre de résultats de référence qu'il redonne ici. Par contre, il signalait en Janvier comme méthode "calculer l'image d'un très grand nombre et voir si on trouve aussi un grand nombre". Cette "méthode" disparaît ici, ce qui est sans doute le résultat de "l'action instrumentée" : avec une TI-92, le calcul de "l'image d'un grand nombre" n'est pas particulièrement pertinent.
- Laurent, en Janvier, n'évoquait que les "fonctions ayant une puissance paire positive". Ici les techniques sont un peu plus développées.

Mais on constatera qu'aucun des deux élèves n'évoque des techniques de minoration.

3. Considérons les résultats de Q5.

La comparaison des résultats de Sébastien en Janvier et Mai est instructive : en Janvier, la moitié des réponses étaient fausses, en Mai tout est juste, preuve d'une bonne utilisation de la TI-92. Mais les arguments évoqués sont les mêmes :

- pour la fonction rationnelle, en Janvier comme en Mai, il annonce "rapport des termes de plus haut degré ; il conclut en Janvier "la limite est $+\infty$" et en Mai "la limite est 100.000" ;
- en Janvier, il avait utilisé **TA1**. Il y a adaptation de ce théorème-en-acte pour prouver les résultats formels fournis par la calculatrice :

Ainsi, pour pour x^2-10x.sinx : "sur un intervalle, elle va être périodique mais après les x vont prendre une plus grande valeur".

Laurent (sans calculatrice) répond oui à toutes les questions de Q5 avec deux théorèmes-en-acte utilisés :

- **TA3** : "la limite du numérateur est plus grande que la limite du dénominateur donc le quotient tend vers l'infini". De même, pour "x^2 - 10x.sinx, x^2 est supérieur à 10x.sinx donc l'affirmation est justifiée" ;

- **TA2** : "au début $\frac{e^x}{x^{50}}$ sera décroissante mais, lorsque x prend une plus grande valeur, alors $e^x > x^{50}$ et donc la fonction sera croissante. Sa limite en $+\infty$ sera donc $+\infty$".

Il peut aussi y avoir combinaison de **TA2** et **TA3**. Ainsi pour justifier la limite de x-1000.lnx, Laurent fournit une justification du même type qu'en Janvier (mais avec une conclusion inverse) : "x en augmentant fera diminuer la valeur 1000.lnx et donc sera supérieure à celle-ci".

Les deux élèves raisonnent toujours avec une référence forte aux graphiques observés ou imaginés. Ainsi Sébastien, en Janvier, déclarait que lnx+sinx ne tendait pas vers $+\infty$. La sinusoïde reproduite donnait bien l'impression d'une fonction périodique. En Mai, assisté par le calcul formel de la TI-92, il sait que la limite est $+\infty$. La courbe reproduite traduit alors une certaine "aspiration" vers le haut.

De même, Laurent avait répondu en Janvier que la fonction x.sinx n'avait pas de limite infinie. A l'appui de cette affirmation, il proposait aussi une sinusoïde tout à fait régulière. En Mai, il répond que cette fonction a comme limite $+\infty$. Il produit alors une courbe comprise entre deux demi-droites de pente positive, justifiant sa réponse.

Ainsi, pour les deux élèves, le graphique reste l'explication suprême. Si l'on dispose de la limite cherchée, via la TI-92, on cherche dans les graphiques la justification de ce résultat ; si l'on ne dispose pas de calculatrice, on essaie d'imaginer l'allure générale des représentations graphiques (mais les références étant faibles, la tâche est difficile). Dans les deux cas, ce sont les TAi qui interviennent, liés à une conception intermédiaire entre une conception primitive et monotone.

Type expérimentateur (protocoles 18 et 20, Annexe 3, pp 407 et 409).

On trouvera les premières réponses de Fabienne et Christelle dans le tableau 5 ci-après.

1. Définitions de la limite.

On constate que Fabienne donne une définition proche de celle de Janvier. A la place de "f(x) prend des valeurs aussi grandes que l'on veut" (formulation de Janvier), elle note ici : "f(x) prend des valeurs très grandes (proche de l'infini)". C'est à dire que la traduction de "aussi grand que l'on veut" est devenue "proche de l'infini". Mais la définition donnée témoigne d'un maintien de quelques acquis (la définition commence bien par le "contrôle" de la fonction). La définition donnée à un élève de seconde n'est plus une définition de type monotone. On retrouve là une manifestation de ce que nous disions en II.a.2.iii. : une conception "primitive" peut constituer une première rupture avec une conception monotone.

Pour Christelle, la "définition mathématique" n'a pas été mémorisée.La définition "élève de seconde" est du même type que celle donnée en Janvier, elle se rattache à une conception monotone.

	Christelle (avec calc)	Fabienne (sans calc)
Q1 Définition mathématique		Cela signifie que f(x) prend des valeurs très grandes (proches de l'infini) pour x assez grand.
Q2 Définition pour un élève de seconde	Plus x est grand, plus la valeur de y augmente.	Si on prend un point dont l'abscisse est très grande, son ordonnée donnée par la fonction f(x) sera elle-même très grande.
Q4 Méthodes connues pour prouver que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.	- théorème des gendarmes ; - opérations sur les limites ; - différence de fonctions.	- le théorème des gendarmes : si $g(x) < f(x)$ et que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; - pour un polynôme, on prend la limite du terme de plus haut degré ; - on prend des fonctions de référence.

Tableau 5. Réponses de Christelle et de Fabienne aux questions Q1, Q2 et Q4.

2. Techniques annoncées.

Les techniques de détermination de limite annoncées sont les mêmes qu'en Janvier pour Christelle ; pour Fabienne, elles sont plus développées (elle n'avait évoqué en Janvier que le théorème de minoration).

3. Techniques mises en oeuvre.

Fabienne, sans calculatrice, traite toutes les questions. Les réponses sont justes et correctement justifiées (théorèmes opératoires et minorations).

On relève un fait non interprétable pour le moment : Christelle, qui dispose pourtant des réponses "formelles" données par la TI-92, ne donne que 3 réponses justes sur 9. Quant aux preuves, différentes méthodes d'approche sont esquissées : étude de variations, évocation d'oscillations, "x^2 domine sur sinx". On retrouve les mêmes théorèmes-en-acte qu'en Janvier.

Il faut signaler aussi que Fabienne et Christelle n'ont pas évolué de la même façon pendant l'année. Christelle a conservé un comportement "expérimentateur" type alors que Fabienne a rationalisé ses démarches et a un comportement qui emprunte à la fois à un type "rationnel" et à un type "expérimentateur", suivant le contexte : dans un contexte "d'interrogations", c'est à dire ici, c'est le "type rationnel" qui domine.

C'est là que la comparaison "travail avec et travail sans" calculatrice atteint ses limites : ce ne sont pas exactement les mêmes élèves que l'on observe ici.

Questionnaire de Mai et typologie

- pour les élèves rationnels ou théoriques

Il y a une prise de distance assez grande avec l'outil de calcul. Les résultats, les techniques annoncés sont effectivement utilisés et sont donc relativement indépendants de la possession ou non d'un outil de calcul, qu'il soit graphique ou formel. On a constaté cependant une différence significative entre ces deux types d'élèves en ce qui concerne la construction des connaissances :

- pour les élèves de type "théorique", la rupture -exprimée- avec la conception "monotone" est confirmée. En même temps, il y a modification des techniques utilisées pour le calcul des limites. Ainsi il y a quasi-simultanéité entre les progrès dans la compréhension de la nature d'un objet (ici la limite infinie) et les progrès dans la manipulation de celui-ci. Tout se passe comme si l'émergence d'une nouvelle conception était une condition de mise en oeuvre de nouvelles techniques ;

- pour les élèves rationnels, il y a mise en oeuvre de techniques correctes. La définition mathématique, approchée en début d'année, s'est estompée mais les techniques de calcul se sont stabilisées. Ce qui fait qu'au détour d'une image trompeuse (lnx+10sinx par exemple), la plume glisse. Il y a ainsi une sorte de déconnection entre la définition de l'objet limite et son fonctionnement "pratique".On assiste ainsi à l'émergence d'une conception "algébrique" sur les limites (II.a.1.iii.).

- pour les élèves bricoleurs ou scolaires.

On a pu constater une différence profonde entre les réalisations avec et sans calculatrice (ceux qui disposent de la TI-92 ont des résultats justes, ceux qui n'en disposent pas ont des résultats faux).

Ce qui semble dominer dans l'utilisation de la machine est l'aspect formel qui donne "directement" le résultat. La machine joue ici le rôle de pilote automatique. C'est apparemment le même fonctionnement qu'avec les calculatrices graphiques : on regarde la machine et on donne le résultat sauf qu'ici l'effort (parfois bref) d'interprétation des images pour en déduire le résultat s'estompe. Il ne reste plus que l'effort de justification du résultat donné par la machine. Mais cet effort est beaucoup plus modéré car sa finalité ne représente pas le même caractère "incontournable".

- les élèves bricoleurs vont continuer à utiliser les théorèmes-en-acte liés à leurs conceptions toujours actives. Les justifications sont données par un détour au graphique. La nécessité de cohérence étant seulement locale, réduite au seul exercice traité, l'adaptation de techniques à géométrie variable n'est pas un problème pour ces élèves ;

- pour les élèves scolaires, on a noté que l'aspect graphique s'estompait (moins de graphiques reproduits). On a le sentiment à la fois que la calculatrice, en donnant la limite cherchée, crée l'objet "limite", certifie son existence et en même temps en délite les contours ; les définitions exprimées se réduisent à des tautologies. Les théorèmes-en-acte s'estompent.

- pour les élèves expérimentateurs

L'influence de la machine est ici encore forte. Sans machine, la coordination se fait avec les fonctions de référence et les techniques indiquées en cours.

Avec machine, ce sont d'autres ressorts qui fonctionnent, se rapportant toujours à des conceptions où la monotonie joue un grand rôle. Les TAi interviennent toujours. L'utilisation de la TI-92 n'entraîne pas une amélioration des résultats dans le calcul de limite.

Récapitulation des résultats relatifs aux deux questionnaires

On a noté dans les tableaux de la page suivante, pour chaque questionnaire et chaque type d'élève (avec ou sans calculatrice), la conception exprimée, les techniques évoquées, les résultats de l'exercice Q5 et les techniques de résolution effectivement utilisées. Sur chacun de ces points des précisions s'imposent :

- **pour la conception exprimée**, on a gardé la "définition mathématique" comme signe de premières ruptures ou avancées conceptuelles ;

- **pour les techniques a priori**, on a noté les résultats à la question Q4 (techniques opératoires ou de minoration). On a noté aussi une fois "exemples", pour Laurent (bricoleur) qui donnait pour seule technique : "je sais que les fonctions puissances à exposant pair ont telle limite". Et on a noté la technique "référence" pour les élèves théoriques : il ne s'agit pas pour eux d'évoquer tel ou tel résultat de référence, mais de se rapporter, graphiquement, à des encadrements à partir de fonctions de référence. Ce n'est donc ni tout à fait une résolution graphique, ni tout à fait une résolution par encadrement.
On a noté les **TAi**, théorèmes-en-actes erronés que l'on a définis en II.a.2.v.. Enfin, quand un graphique était avancé pour seule preuve d'un résultat, on a noté "graphique".

- **pour les techniques a posteriori**, on a noté les techniques évoquées pour justifier les résultats en Q5 avec les mêmes conventions que les techniques a priori. Pour l'élève scolaire on a noté **TAii** pour indiquer l'éclatement des théorèmes-en-acte avec calculatrice graphique. Avec TI-92, on a noté (TAii) entre parenthèses pour suggérer l'effacement de l'effort justificatif.

- **enfin, pour les résultats**, on a relevé le nombre de résultats justes en ne conservant que les fonctions pour lesquelles la TI-92 donnait la limite (c'est à dire en l'occurence les seules fonctions ayant une limite). On a donc enlevé les fonctions x.sinx et |x.sinx|.
Il reste alors 7 fonctions. On a mis entre parenthèse le résultat de Laurent (bricoleur, sans calculatrice, avec TI-92) : il a répondu que toutes les fonctions avaient pour limite $+\infty$, ce qui lui donne une bonne "note" (6/7) mais ne correspond pas nécessairement à une bonne performance (c'était plutôt en l'occurence une sorte de pari).

Remarques générales sur ces deux tableaux.

On y distingue quant au processus de conceptualisation des groupes stabilisés :

Premier groupe, les élèves "rationnels".

Les techniques d'étude se sont enrichies pendant l'année. Elles sont désormais stabilisées (ce sont les mêmes a priori et a posteriori, avec et sans calculatrice). Les résultats sont "bons", avec ou sans calculatrice. La définition, après une petite évolution, en est revenue à son expression ancienne.

Deuxième groupe, les élèves "scolaires" et "bricoleurs".

On ne distingue aucun progrès ni dans l'expression d'une définition, ni dans les techniques de résolution des exercices :
- pour les élèves "scolaires" les définitions et les techniques s'estompent ;

- pour les élèves "bricoleurs", la conception exprimée est monotone, les techniques annoncées seulement opératoires. Dans la pratique, des théorèmes-en-acte en relation avec les conceptions monotone et primitive sont utilisés. Là aussi, seuls les résultats assistés par TI-92 sont "justes".

Questionnaire de Janvier, avec calc. graph.

		Conception exprimée	Techniques évoquées	Résul-tats	Techniques utilisées
Théorique	Avec calc.	Experte	**TA2** Minoration	3/7	**TA2**
	Sans calc.	Primitive	Opératoires	2/7	Référence
Rationnel	**Avec calc.**	**Experte**	**Opératoires Minoration**	**6/6**	**Opératoires Minoration**
	Sans calc.	**Monotone**	**Opératoires**	**6/7**	**Opératoires Minoration**
Scolaire	Avec calc.	Monotone	Aucune	3/7	Graphiques
	Sans calc.	Aucune	**TA2**	3/7	**TAii**
Bricoleur	**Avec calc.**	**Primitive**	**Opératoires TA2**	**3/7**	**Graphiques TAi**
	Sans calc.	**Monotone**	**Exemples**	**2/7**	**Graphiques TAi**
Expérimen-tateur	Avec calc.	Experte	Opératoires Minoration	3/7	**TA1 TA3**
	Sans calc.	Experte	Minoration	6/7	Opératoires Minoration

Questionnaire de Mai, avec TI-92.

		Conception exprimée	Techniques évoquées	Résul-tats	Techniques utilisées
Théorique	Avec calc.	Experte	Opératoires Minoration Référence	7/7	Opératoires Minoration
	Sans calc.	Non majorée	Opératoires Minoration Référence	7/7.	Opératoires Référence
Rationnel	**Avec calc.**	**Monotone**	**Opératoires Minoration**	**7/6**	**Opératoires Minoration**
	Sans calc.	**Monotone**	**Opératoires Minoration**	**5/7**	**Opératoires Minoration**
Scolaire	Avec calc.	Aucune	**Graphique TAi**	6/7	Graphiques
	Sans calc.	Aucune	Aucune	3/7	(TAii)
Bricoleur	**Avec calc.**	**Monotone**	**Opératoires**	**7/7**	**Graphiques TAi**
	Sans calc.	**Monotone**	**Opératoires**	**(6/7)**	**Graphiques TAi**
Expérimen-tateur	Avec calc.	Monotone	Opératoires Minoration	3/7	Opératoires **TAi**
	Sans calc.	Proche de l'experte	Opératoires Minoration	7/7	Opératoires Minoration

D'abord à propos des recherches de limites, dans un environnement calculatrice graphique .

1. Utilisation générale par les élèves de leur calculatrice graphique.

Nous allons nous appuyer dans ce qui suit (Tableaux 1 à 3) sur les résultats d'un questionnaire d'usage passé dans la classe expérimentale en Décembre (après trois mois d'intégration des calculatrices graphiques et 15 jours avant le passage du questionnaire sur les limites de Janvier). On trouvera le questionnaire et ses résultats complets en Annexe 4, Volume 2, page 161.

Utilisez vous votre calc graph	Jamais	Parfois	Souvent
Pour faire des calculs numériques ?	0	29	71
Pour tracer des graphiques ?	0	3	97
Pour programmer ?	32	58	10

Tableau 1. Utilisation de la calculatrice graphique dans la classe exp. en pourcentage de l'effectif total.

Sur votre calc. graph., utilisez-vous...	Jamais	Parfois	Souvent
Le zoom	16	48	36
La commande Trace	6	29	65
La commande Range (ou Window)	0	0	100

Tableau 2. Utilisation des commandes de la calculatrice graphique dans la classe exp. en pourcentage de l'effectif total.

Le premier tableau confirme ce que nous disions en I.2.c.i. : une calculatrice graphique sert surtout à faire des graphiques.

Le deuxième tableau donne une indication d'usage liée pour partie à des considérations intrinsèques de plus ou moins grande facilité (il est plus simple de déplacer un point sur une courbe avec un curseur - commande Trace- que d'adapter un zoom) et pour partie sans doute à la nature de l'intégration de l'outil en classe : une grande place a été donné au "fenêtrage" (Range ou Window, suivant les calculatrices), c'est-à-dire au choix de l'espace de visualisation des fonctions (cf. II.b.1.i.).

	Oui	Non	Pas de réponse
Pensez-vous bien connaître les possibilités de votre calculatrice ?	26	74	0
Est-ce que votre calculatrice a parfois affiché des résultats surprenants pour vous ?	65	35	0
Est-ce que votre calculatrice vous a parfois entraîné à commettre des erreurs ?	61	34	5

Tableau 3. Appropriation de la calculatrice graphique dans la classe exp. en pourcentage de l'effectif total.

Ces résultats sont très différents de ceux obtenus dans les classes où la calculatrice n'est pas intégrée. Dans une enquête menée auprès d'élèves de 1ère S ([Trouche, 1992]), il ressortait que la majorité des élèves possédant une calculatrice graphique :

- estimait bien s'en servir ;
- estimait qu'elle n'induisait pas d'erreurs (et quand erreur il y avait, elle était attribuée à une mauvaise manipulation de la machine).

II.b.3. Genèse instrumentale et conceptions

Ce qui suit correspond, d'un certain point de vue, à un changement de méthode. Jusqu'à présent, nous avons comparé les résultats mathématiques (c'est à dire les réponses aux questions et les preuves de celles-ci) des élèves, suivant qu'ils travaillaient avec ou sans calculatrice. Nous avons pu observer à cette occasion l'influence plus ou moins grande de l'outil.

Nous allons maintenant essayer de comprendre l'origine de cette influence en analysant de près l'action des élèves avec calculatrice : il s'agit de dégager les schèmes d'action instrumentée et au delà les invariants opératoires qu'ils contiennent, c'est à dire les éléments qui pilotent :
- la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents de la situation ;
- la prise d'information sur la situation à traiter (cf 0.b.5.iv).

On utilisera à cette occasion les questionnaires déjà présentés mais aussi les travaux des élèves avec les appréciations qu'ils ont pu donner sur l'aide ou les obstacles que constituait pour eux "l'action instrumentée".

II.b.3.i Le prévu et l'observé : contraintes et schèmes.

Nous avions présenté en I.c.2. la préstructuration de l'action de l'utilisateur liée aux contraintes (internes, de commande, d'organisation) de l'outil. Cette préstructuration était qualifiée de relative. Il faut la confronter à l'utilisation effective des élèves.

Celle-ci peut être appréhendée à partir de la question Q4" des questionnaires de Janvier et de Mai, mais aussi à partir d'autres sources d'information :

- les travaux des élèves pendant l'année ;
- des questionnaires spécifiques portant sur leur familiarisation avec les outils de calcul.

Nous aborderons dans un premier temps l'étude des limites dans un environnement calculatrices graphiques, dans un deuxième temps l'étude des limites dans un environnement TI-92. On s'intéressera ici à l'ensemble de la classe expérimentale.

Dans le chapitre suivant (II.b.3.ii.), on restreindra l'étude aux élèves "représentatifs" déjà distingués.

D'abord à propos des recherches de limites, dans un environnement calculatrice graphique .

1. Utilisation générale par les élèves de leur calculatrice graphique.

Nous allons nous appuyer dans ce qui suit (Tableaux 1 à 3) sur les résultats d'un questionnaire d'usage passé dans la classe expérimentale en Décembre (après trois mois d'intégration des calculatrices graphiques et 15 jours avant le passage du questionnaire sur les limites de Janvier). On trouvera le questionnaire et ses résultats complets en Annexe 4, Volume 2, page 161.

Utilisez vous votre calc graph	Jamais	Parfois	Souvent
Pour faire des calculs numériques ?	0	29	71
Pour tracer des graphiques ?	0	3	97
Pour programmer ?	32	58	10

Tableau 1. Utilisation de la calculatrice graphique dans la classe exp. en pourcentage de l'effectif total.

Sur votre calc. graph., utilisez-vous...	Jamais	Parfois	Souvent
Le zoom	16	48	36
La commande Trace	6	29	65
La commande Range (ou Window)	0	0	100

Tableau 2. Utilisation des commandes de la calculatrice graphique dans la classe exp. en pourcentage de l'effectif total.

Le premier tableau confirme ce que nous disions en I.2.c.i. : une calculatrice graphique sert surtout à faire des graphiques.

Le deuxième tableau donne une indication d'usage liée pour partie à des considérations intrinsèques de plus ou moins grande facilité (il est plus simple de déplacer un point sur une courbe avec un curseur - commande Trace- que d'adapter un zoom) et pour partie sans doute à la nature de l'intégration de l'outil en classe : une grande place a été donné au "fenêtrage" (Range ou Window, suivant les calculatrices), c'est-à-dire au choix de l'espace de visualisation des fonctions (cf. II.b.1.i.).

	Oui	Non	Pas de réponse
Pensez-vous bien connaître les possibilités de votre calculatrice ?	26	74	0
Est-ce que votre calculatrice a parfois affiché des résultats surprenants pour vous ?	65	35	0
Est-ce que votre calculatrice vous a parfois entraîné à commettre des erreurs ?	61	34	5

Tableau 3. Appropriation de la calculatrice graphique dans la classe exp. en pourcentage de l'effectif total.

Ces résultats sont très différents de ceux obtenus dans les classes où la calculatrice n'est pas intégrée. Dans une enquête menée auprès d'élèves de 1ère S ([Trouche, 1992]), il ressortait que la majorité des élèves possédant une calculatrice graphique :

- estimait bien s'en servir ;
- estimait qu'elle n'induisait pas d'erreurs (et quand erreur il y avait, elle était attribuée à une mauvaise manipulation de la machine).

Dans la classe expérimentale, viennent en tête au contraire les erreurs d'interprétation de l'image (29%) suivies par les erreurs dues à une mauvaise manipulation (19%) et enfin les erreurs dues à l'imprécision de la machine (6%). C'est sans doute le résultat de l'intégration de l'outil lors des TP et la révélation d'images parfois paradoxales, qui ont développé ce sens critique [42].

C'est sans doute parce qu'ils ont découvert en peu de temps [43] de nombreux aspects inconnus de leur calculatrice que les élèves estiment ne pas encore bien connaître ses possibilités. La genèse instrumentale (cf. 0.b.5.iv.) est à l'oeuvre.

Ainsi dans la classe expérimentale :
- l'utilisation des calculatrices est surtout graphique ;
- dans le cadre de cette utilisation, c'est la commande de fenêtrage qui est la plus sollicitée ;
- la grande majorité des élèves estime ne pas encore bien connaître les possibilités de la machine ;
- la majorité des élèves sait que certains tracés peuvent être surprenants et même trompeurs.

2. Utilisation particulière de la calculatrice pour la recherche de limites.

On a vu en II.b.2.ii. (tableau 2) la fréquence de cette utilisation pour la classe expérimentale. On a pu constater qu'elle était comparable à celle du groupe témoin.

On annonçait en I.c.2 deux conduites "globales" possibles pour "l'observation" d'une limite :
- soit la considération d'un graphique ;
- soit l'utilisation d'un tableau de valeurs.

Si l'on récapitule les réponses des élèves sur ce point (groupe Deug A, groupe témoin, classe expérimentale cf II.a.2.iii. et II.b.2.ii.), on obtient les résultats du tableau 4 :

	Deug A	Groupe témoin	Groupe exp.
Je regarde le graphique, en réglant la fenêtre	53	57	**81**
Je regarde le graphique et j'utilise le zoom	4	1	**0**
Je combine graphique et calcul de valeurs	16	22	**16**
Je calcule quelques valeurs	8	7	**3**
J'utilise des fonctions auxiliaires	4	0	**0**
On ne peut pas	0	1	**0**
Sans réponse	15	12	**0**

Tableau 4. Nature de l'utilisation de la calculatrice pour rechercher des limites de fonction, en pourcentage de l'effectif de chaque groupe

---

[42] Cela n'implique pas nécessairement une utilisation contrôlée des images. Le bilan des réponses à Q5 montre que l'influence des images est encore grande : il y a loin de la conscience d'une distance nécessaire à une distance effectivement prise !

[43] 98% des élèves estiment qu'ils ont appris à se servir de leur calculatrice avec le professeur de mathématique cette année (contre 19% avec leur professeur de mathématique de l'année dernière). Sur ce point, voir aussi en Annexe 4, Document 7.

Ainsi pour cette évocation de deux techniques de calcul de limites avec calculatrice graphique:

- un élève évoque ces deux techniques, mais seulement dans le cadre d'une observation très sommaire ;
- pour 3 autres élèves, la recherche de valeurs prises par la fonction n'est évoquée que comme technique suppléant éventuellement la recherche graphique ;
- un seul élève évoque une coordination des applications graphiques et numériques.

Malgré le travail d'intégration réalisé dans la classe, la coordination de différentes applications (graphique, tableau de valeurs) avec une calculatrice graphique apparaît exceptionnelle.
Ce qui domine est l'abord graphique de la recherche de limites.

Remarques donc sur les 97% d'élèves utilisant l'application graphique de la calculatrice pour étudier des limites.

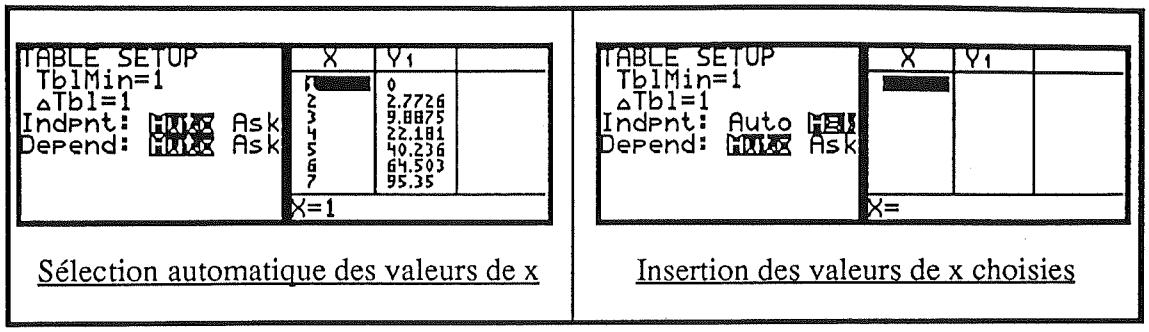
Nous signalions en I.c.2.i trois possibilités :
- l'utilisation de la commande Zoom-in, ou Zoom-out ;
- l'utilisation de la commande Zoom Box (pertinente seulement pour les études à distance finie) ;
- le réglage de la fenêtre (Range ou Window).

Dans les réponses à la question Q4", relative à l'étude des limites infinies, tous les élèves évoquent l'utilisation de la commande de fenêtrage et aucun n'évoque le Zoom :

- Vincent : *"Je trace la fonction et j'ajuste la fenêtre de façon à voir ce qu'il se produit quand x tend vers $+\infty$"* ;
- Aurélie :*"Je change la fenêtre"* ;
- Karen : *"Je regarde l'allure de la courbe et je modifie la fenêtre (Xmax grand en général"* ;
- Damien : *"Je me place sur Xmin 0, Xmax 50, Ymin 0, Ymax 50 (les valeurs maximales sont, bien sûr, en fonction de f donnée) et j'observe l'allure générale de la courbe et s'il le faut j'augmente la fenêtre".*

Trois explications possibles pour ce choix :
- la première de nature didactique : c'est le fenêtrage qui a été privilégié en classe (cf.II.b.1.i.) ;
- la deuxième de nature technique : les élèves utilisent systématiquement (dans le cadre de l'étude des limites à distance finie) le "Zoom box" qui permet un aggrandissement d'une portion de la courbe par la sélection du rectangle que l'on veut observer. Mais ils ont beaucoup plus de difficulté à utiliser un zoom en définissant un centre et des facteurs d'agrandissement. Il s'agit en effet d'un changement de registre (d'une conversion, cf 0.b.4.iii.) entre registre graphique et numérique qui demande un réel apprentissage (qui n'a pas eu lieu dans la classe expérimentale) ;
- la troisième de nature psychologique, liée au rapport à l'instrument et à l'objet (la représentation graphique) que celui-ci propose. L'idée implicite est simple : **pour voir mieux, il faut voir de plus près.**

Il y a une difficulté à prendre du recul sur l'objet et l'instrument. D'où une plus grande facilité constatée à opérer des manoeuvres techniques de rapprochement (le "zoom-in") que des manoeuvres d'éloignement ("le zoom-out"), l'illusion étant que l'éloignement fait perdre de l'information.



Sélection automatique des valeurs de x | Insertion des valeurs de x choisies

Sur les deux copies d'écran de gauche (il s'agit d'une TI-82), une fois le "pas" choisi, les valeurs de x défilent automatiquement. Sur les deux copies d'écran de droite, la sélection des valeurs de x est au choix de l'utilisateur. Une telle technique permet de combiner la rapidité liée à l'automaticité des calculs (on donne x et on obtient imédiatement f(x)) et l'initiative liée au libre choix des valeurs de x.

Son utilisation manifeste une bonne appropriation de l'outil, un bon investissement dans la recherche expérimentale [46]. Elle ne traduit pas nécessairement une coordination des registres.

- Jérôme M. ("scolaire") déclare utiliser rarement la calculatrice pour des recherches de limite. Il décrit ainsi cette utilisation :

" - par le calcul d'un grand nombre ;

- par l'observation du graphique".

Il n'y a pas trace de combinaison des techniques. D'ailleurs la description assez sommaire des méthodes montre qu'on est plus près du travail de Rachel (qui ne calcule que quelques valeurs de la fonction -voir ci-dessus) que du travail de Pierre ;

- Michaël ("rationnel") déclare utiliser régulièrement la calculatrice pour des recherches de limite. Il explicite cette utilisation :

"- utilisation du graphe de f avec une fenêtre adaptée ;

- TI-92 : calcul grâce à limit (;

- tableau de valeurs."

Ce qui est dit là ne peut pas permettre de conclure à une combinaison des différentes actions. Notons l'évocation des TI-92, surprenante ici. Le questionnaire, pour des raisons pratiques (cf II.b.2.ii.), a été réalisé juste après l'arrivée des TI-92 dans la classe. Mais lors de la passation ces machines avaient été reprises et il avait été clairement précisé aux élèves que les questions concernaient les calculatrices graphiques. Dans ces conditions, l'évocation de la TI-92 pour le calcul de limite témoigne de l'intérêt pour la commande (dont la syntaxe a été mémorisée). On verra en II.b.3.iv. qu'il en est de même pour les autres élèves de type "rationnel".

- Enfin Patrice (qualifié de "bricoleur" en début d'année et qui a évolué vers un profil "rationnel") déclare utiliser régulièrement la calculatrice pour des recherches de limite. C'est le seul à parler de combinaison : *"Combinaison de graphiques et de tableaux de valeurs"*. L'observation de son travail en classe a permis de repérer en effet ce type d'action.

---

[46] On retrouvera cette même attitude dans la recherche du problème long (cf. II.b.1.iv.) : Pierre a été le promoteurs des "manchons" permettant de contourner l'exigence de dérivabilité des fonctions.

Ainsi pour cette évocation de deux techniques de calcul de limites avec calculatrice graphique:

- un élève évoque ces deux techniques, mais seulement dans le cadre d'une observation très sommaire ;
- pour 3 autres élèves, la recherche de valeurs prises par la fonction n'est évoquée que comme technique suppléant éventuellement la recherche graphique ;
- un seul élève évoque une coordination des applications graphiques et numériques.

Malgré le travail d'intégration réalisé dans la classe, la coordination de différentes applications (graphique, tableau de valeurs) avec une calculatrice graphique apparaît exceptionnelle.
Ce qui domine est l'abord graphique de la recherche de limites.

Remarques donc sur les 97% d'élèves utilisant l'application graphique de la calculatrice pour étudier des limites.

Nous signalions en I.c.2.i trois possibilités :
- l'utilisation de la commande Zoom-in, ou Zoom-out ;
- l'utilisation de la commande Zoom Box (pertinente seulement pour les études à distance finie) ;
- le réglage de la fenêtre (Range ou Window).

Dans les réponses à la question Q4", relative à l'étude des limites infinies, tous les élèves évoquent l'utilisation de la commande de fenêtrage et aucun n'évoque le Zoom :

- Vincent : *"Je trace la fonction et j'ajuste la fenêtre de façon à voir ce qu'il se produit quand x tend vers $+\infty$"* ;
- Aurélie :*"Je change la fenêtre"* ;
- Karen : *"Je regarde l'allure de la courbe et je modifie la fenêtre (Xmax grand en général"* ;
- Damien : *"Je me place sur Xmin 0, Xmax 50, Ymin 0, Ymax 50 (les valeurs maximales sont, bien sûr, en fonction de f donnée) et j'observe l'allure générale de la courbe et s'il le faut j'augmente la fenêtre".*

Trois explications possibles pour ce choix :
- la première de nature didactique : c'est le fenêtrage qui a été privilégié en classe (cf.II.b.1.i.) ;
- la deuxième de nature technique : les élèves utilisent systématiquement (dans le cadre de l'étude des limites à distance finie) le "Zoom box" qui permet un aggrandissement d'une portion de la courbe par la sélection du rectangle que l'on veut observer. Mais ils ont beaucoup plus de difficulté à utiliser un zoom en définissant un centre et des facteurs d'agrandissement. Il s'agit en effet d'un changement de registre (d'une conversion, cf 0.b.4.iii.) entre registre graphique et numérique qui demande un réel apprentissage (qui n'a pas eu lieu dans la classe expérimentale) ;
- la troisième de nature psychologique, liée au rapport à l'instrument et à l'objet (la représentation graphique) que celui-ci propose. L'idée implicite est simple : **pour voir mieux, il faut voir de plus près.**

Il y a une difficulté à prendre du recul sur l'objet et l'instrument. D'où une plus grande facilité constatée à opérer des manoeuvres techniques de rapprochement (le "zoom-in") que des manoeuvres d'éloignement ("le zoom-out"), l'illusion étant que l'éloignement fait perdre de l'information.

Calculatrices graphiques et schèmes d'action instrumentée relatifs aux calculs de limites

La méthode d'action instrumentée évoquée par la grande majorité des élèves est conforme aux hypothèses que les contraintes internes, de commande et d'organisation avaient permis de formuler (cf.I.c.2.i.) : c'est l'application graphique, par le biais de l'observation de "l'allure générale" de la courbe, qui fournit le cadre de l'étude de limite.

Cette méthode est aussi en cohérence avec la forme d'intégration de l'outil dans la classe qui privilégiait le "fenêtrage" (cf.II.b.1.i.).

Les réponses données par les élèves permettent de définir un schème d'action instrumentée (cf 0.b.5.iv.) que l'on appelera L2 :

- le premier geste accompli se situe dans le registre numérique (il faut choisir des plages pour x "grand" puis pour y "grand") ;

- il y a ensuite un aller-retour entre registre numérique (dans lequel se situe l'adaptation de la fenêtre) et le registre graphique (dans lequel se situe l'évaluation de la courbe) ;

- le dénouement se joue dans le seul registre graphique : c'est de "l'allure de la courbe" que sera extraite l'information pertinente relative à la limite de la fonction.

Nous avons repéré aussi dans ce chapitre deux conduites marginales :

- un schème L1 qui consiste à inférer la limite à partir de la recherche de quelques valeurs prises par la fonction au voisinage étudié ;

- un schème qui apparaît comme une combinaison de L1 et L2.

Mais ces schèmes sont encore mal définis :

- il faudrait préciser les gestes effectués (pour L2 par exemple : beaucoup ou peu de changement de fenêtre ? Calculés ou aléatoires ?) ;

- il faudrait préciser les rapports de ces gestes instrumentés avec les autres gestes de l'élève (L2 est-il mis en oeuvre comme conjecture ? Preuve ? Vérification ?).

C'est ce que nous ferons plus tard en rapprochant l'étude des schèmes de l'étude typologique des élèves.

Examinons maintenant les recherches de limites dans un environnement TI-92.

On suivra le même plan que pour les calculatrices graphiques.

1. Utilisation générale par les élèves de la TI-92.

Cette utilisation sera évaluée en particulier à partir de questionnaires donnés à la classe en Février et en Avril : les "baromètres TI-92" (Annexe 4, Volume 2, page 185).

On observe d'abord une familiarisation rapide avec les nouveaux outils. Les éléments de ressemblance des commandes graphiques entre calculatrices graphiques et TI-92 (cf I.c.2.ii.) font que les habitudes de travail acquises avec les unes sont réinvesties avec les autres. Ainsi peuvent se comprendre les résultats ci-dessous (Tableau 1) :

Comment estimes-tu te débrouiller avec la TI-92 ?	Très bien	Plutôt bien	Plutôt mal	Très mal
Février	8	64	20	8
Avril	8	76	16	

Tableau 1. Familiarisation avec la TI-92 (en pourcentage)

La comparaison avec les calculatrices graphiques apporte des renseignements intéressants (Tableau 2 ci-dessous) :

Par rapport aux calc. graph., comment jugez-vous les TI-92 :..		Bien mieux	Plutôt mieux	Moins bien	Bien pire
Quant à l'utilité :	Février	68	28	4	
	Avril	88	12		
Quant à la convivialité :	Février	36	40	20	4
	Avril	44	44	12	

Tableau 2. Comparaison calculatrice graphique/TI-92 (en pourcentage)

Nous remarquons dans le tableau ci-dessus que tous les indicateurs témoignent d'un progrès entre Février et Avril. **L'appréciation de l'utilité de l'outil ne fait pas de doute. Quant à la convivialité, on perçoit quelques réserves.**

Les commentaires des élèves (toujours dans les "baromètres TI-92", Annexe 4, Volume 2, page 185) permettent de donner un contenu aux notions d'utilité et de convivialité :

- l'utilité : à la question "Qu'est-ce qui te plaît le plus sur cette machine ?", la réponse qui vient en tête en Février est le calcul de dérivées (35% des élèves) suivi du calcul de limites (23% des élèves). En Avril, on trouve en tête des réponses le calcul d'intégrales (25%) suivi ex-aequo du calcul exact, du calcul de limites et du calcul de dérivées (20% chacun).

Ainsi l'outil est fortement sollicité en ce qui concerne le calcul formel, en particulier le calcul de limites. Les élèves sont "impressionnés" par le fait que la machine réalise des tâches qui constituaient des difficultés importantes pour eux :

"on a l'impression que cette machine n'a aucune limite, on peut faire tout ce que l'on veut", "machine très pratique et très impressionnante", "la machine semble idéale".

- la convivialité : certaines difficultés d'utilisation de cette machine ressortent avec force dans les réponses à la question "Qu'est-ce qui te plaît le moins sur cette machine ?".

Après la trop grande taille de la machine (45% des réponses), **les critiques concernent la trop grande complexité des commandes (16%) et les problèmes de syntaxe (16%)** :

"la moindre faute de syntaxe est prise en compte par la machine !", "elle me répond toujours syntax error!"

Nous identifions ici la dualité de l'outil -qui aide et qui est difficile d'accès- dans les commentaires portés par les élèves en fin des deux "bacs blancs" (Annexe 4, Volume 2, page 119). On demandait aux élèves de répondre "à chaud", en fin d'épreuve, aux trois questions : "en quoi la calculatrice m'a-t-elle aidé, en quoi m'a-t-elle gêné, en quoi m'a-t-elle surpris ?" (lors du bac blanc en question bien sûr).

Lors du bac blanc, la calculatrice m'a..	Mars	Avril
Aidé	100%	100%
Gêné	54%	30%
Surpris	70%	15%

Tableau 3. Pourcentage d'élèves signalant avoir été aidé, gêné ou surpris par la calculatrice lors du bac blanc.

Tous les élèves signalent une aide de la calculatrice, la plupart du temps pour le "calcul formel" (calcul de dérivées, de limites, d'intégrales). La plupart des élèves qui signalent une gêne ou une surprise la situent dans les problèmes d'écriture ou de syntaxe d'entrée dans la TI-92. On observe une diminution des "gênés" ou "surpris" en un mois. Il reste tout de même un nombre important d'élèves qui ont des difficultés d'utilisation de l'outil [47].

La notion d'instrumentation (0.b.5.iv.) nous permet de décrire cette situation :

L'introduction des TI-92 entraîne des changements profonds dans l'action instrumentée :

- en ce qui concerne le travail dans l'application graphique, il y a transfert des compétences construites avec les calculatrices graphiques ;

- mais ce qui relève de l'application initiale, plus précisément le calcul formel, prend désormais une grande place.

On peut considérer que le processus d'instrumentation, modifiant l'action du sujet, est rapide.

Cela ne signifie pas que la maîtrise de l'outil est rapide : cette maîtrise est beaucoup plus lente du fait des exigences de syntaxe et de la complexité même de l'outil.

[47] La comparaison avec les résultats concernant les calculatrices graphiques (Tableau 3 du chapitre précédent) doit être faite avec prudence : 65% des élèves reconnaissaient avoir été surpris par des résultats affichés par la calculatrice graphique. Mais la question était **globale** : "est-il arrivé que vous soyez surpris ?". Alors que la question relative aux TI-92 est **locale**, elle se rapporte au bac blanc qui vient d'être traité.

2. Utilisation particulière de la calculatrice pour la recherche de limites.

La rapidité du processus d'instrumentation se manifeste par l'utilisation importante de la TI-92 pour le calcul de limite. On a vu (Tableau 2 en II.b.2.iv.) que 77% des élèves de la classe utilisaient beaucoup ou régulièrement la TI-92 pour ce type de calcul (contre 39% avec calculatrice graphique).

Sans réponse	Je vérifie...	Commande	Graph. et commande	Graph seul
7	7	43	37	6

Tableau 4. Utilisation de la TI-92 pour la recherche de limite
(en pourcentage de la classe expérimentale)

Remarques générales sur le tableau 4.

Le tableau confirme ce que nous disions en I.c.2.ii. : l'existence d'une commande spécifique ne se traduit pas nécessairement par une action unique :

- deux élèves (6%) déclarent n'utiliser que l'application graphique. Il s'agit manifestement d'un refus de l'outil. Ainsi Jérôme M. répond à la question Q4" : *"quelque fois le graphe et encore!"* ;

- plus de 50% des élèves n'utilisent que la commande spécifique. Les élèves "sans réponse", interrogés oralement, indiquent qu'ils n'ont rien mis en Q4" parce qu'il leur semblait évident que pour chercher une "limite" on utilisait la commande "limite". Les élèves "je vérifie" indiquent plus vaguement qu'en général ils utilisent la commande spécifique. Ceci nous permet de définir un nouveau schème :

La majorité des élèves met en oeuvre un schème d'action instrumentée qui consiste à utiliser la commande spécifique "limite".
Nous appellerons ce schème L3.

- restent 37% d'élèves qui indiquent deux actions, ce qui est notablement plus qu'avec une calculatrice graphique (16%, cf tableau 4 du chapitre précédent).
Nous allons analyser les gestes qu'ils indiquent de plus près.

Remarques sur les 37% (12 élèves) évoquant l'application graphique et la commande spécifique.

Nous avions constaté avec les calculatrices graphiques que les élèves indiquant deux actions utilisaient davantage leurs calculatrices que les autres. On retrouve le même phénomène avec les TI-92 mais moins "visible" du fait de l'augmentation générale de la fréquence d'utilisation : 90% des élèves indiquant deux actions utilisent leur calculatrice beaucoup ou régulièrement pour le calcul de limite, ce pourcentage tombe à 70% pour les élèves n'indiquant qu'une action.

On relève ci-dessous la description par les élèves de leurs propres actions :

Erwan : *"Tracer la courbe, vérifier la limite trouvée."*
Christelle : *" - aspect de la courbe (graphique)*
- limit(...,x,+∞).
Sébastien : *"- je tape la fonction puis je regarde le graphe,*
- ou sinon je regarde directement ce que je cherche".

Jérôme L. : *"je vérifie tout d'abord l'allure de la courbe sur le graphique en ayant fait auparavant son sens de variation. Ceci donne un premier aperçu. Je calcule ensuite à la main la limite et je vérifie sur la machine avec la fonction "limite" pour voir si mon résultat concorde".*

Tristan : *"observation de la représentation graphique et calcul de la limite".*

Caroline : *"en général je regarde le graphe pour connaître l'allure de la fonction et je cherche la limite dans l'application Home".*

Nikola : *"d'abord je regarde le graphe pour voir l'allure puis je vérifie si la calculette me donne bien cette allure".*

On notera que la description des actions évoque la plupart du temps une **combinaison** de celles-ci (à la différence des calculatrices graphiques pour lesquelles il s'agissait la plupart du temps de **choix** entre deux actions).

Nous identifions une combinaison des schèmes L2 et L3 pour le calcul de limite.

Cette combinaison peut s'interpréter de deux façons :

- en terme de persistance du schème L2 qui constituerait ainsi une sorte de "transition instrumentale" entre les calculatrices graphiques et les TI-92 ;

- en terme de "genèse instrumentale collective" (cf 0.b.5.iv.) : à la différence de ce qui s'est passé pour les calculatrices graphiques (la genèse instrumentale avait précédé l'intégration en classe), la genèse instrumentale de la TI-92 a été largement socialisée.

La problématique de coordination entre les différentes applications a eu ainsi davantage d'effet sur les élèves.

3. En dehors du schème L3 et de la combinaison L2/L3.

Utilisation des mémoires de la TI-92.

L'analyse des mémoires des TI-92 rendues en fin d'année a donné des informations intéressantes. Certains élèves se rattachant au type bricoleur ont enregistré dans leur calculatrice des résultats sur les limites dont la plupart étaient pourtant donnés directement par la TI-92. Ainsi la calculatrice de Sébastien contenait-elle les informations retranscrites dans le tableau ci-dessous (on a souligné en gras les résultats faux ou partiellement faux). Sébastien "avoue" avoir enregistré des résultats de même nature sur sa calculatrice graphique [48], ce qui nous avait échappé : dans la mesure où les calculatrices graphiques étaient propriété privée des élèves, elles n'avaient pas bénéficié d'une autopsie.

En fait ce fichier de résultats a joué le rôle de **transition instrumentale** : Sébastien explique qu'il avait recopié ses fichiers en prenant possession de la TI-92 et que désormais il utilisait la commande limite pour ce type de calcul. Ces fichiers sont consultés uniquement pour la recherche des théorèmes.

---

[48] Faudrait-il ajouter aux schèmes d'action instrumentée d'une calculatrice graphique : "consultation de mémoires" ? Ce serait peu utile, dans la mesure où la calculatrice sert seulement là de **formulaire**.

: Limites:

: **limit ((e^(x-1))/x, x→0) =1**
: limit (e^(x)/x, x→+∞) =+∞
: limit (x(e^(x)), x→−∞) = 0
: limit (sin(x)/x, x→0) = 1
: limit (sin(ax)/x, x→0) = a
: **limit (cos(x-1)/x, x→0) = 0**
: limit (ln(x)/x, x→+∞) = 0
: limit (xln(x), x→0) = 0
: limit (ln(x)/x^a, x→+∞) = 0
: **limit (x^a*ln(x), x→0) = 0**
: limit (ln(1+x)/x, x→0) = 1
: limit (ln(x)/(x-1), x→1) = 1

: Inégalité des accroissements finis
: dans I et une fct derivable sur I, si |f.| est majoré sur I par le réel M, alors pour tous reels X et Y de I on a
: |f(x)-f(y)|≤ M*|x-y|

Tableau 5. Contenu de la mémoire de la TI-92 de Sébastien, relatif au calcul de limites.

Plus profondément la possession de données redondantes est conçue comme une sécurité supplémentaire ou un confort d'usage ; cependant, le principe de l'accumulation du maximum d'informations ne sera pas forcément d'une utilité maximale le jour où celles-ci seront exploitées (le seul résultat de cours que ne fournit pas naturellement la calculatrice, l'inégalité des accroissements finis, est noté de façon très ambigüe, f. au lieu de f ').

Conduites de secours.

Ce sont les conduites qui se mettent en place quand la commande spécifique ne marche pas (soit parce que le logiciel "ne connaît pas" la réponse, soit parce que la question a été mal formulée). Il y a alors la plupart du temps le retour à une utilisation de TI-92 comme une calculatrice graphique : observation de la courbe dans l'application graphique.

Il y a aussi d'autres démarches qui, isolées, peuvent paraître "bizarres" mais qui prendront sens en les situant comme élément de schèmes d'usages plus généraux :

- le contournement du refus de réponse de la machine grâce à un prolongement par continuité "automatique". Ainsi pour déterminer la limite en $\frac{\pi}{2}$ de $(\cos x)^x$, la commande "limite" ne donnant pas de réponse, une élève a tenté le calcul de $f(\frac{\pi}{2})$. Avec succès, puisque la machine répond 0 (Annexe 4, Volume 2, page 121) ;

- le recours au calcul approché, en actionnant la commande limit (f(x), x, x_0) en mode approché (Annexe 4, Volume 2, page 121). Nous en reparlerons en II.b.3.v. à propos du **schème du détour approximatif**.

Banalisation de l'infini

Comme prévu en I.c.2.ii., cette banalisation semble liée à l'existence d'une touche spécifique. Un groupe d'élèves (Annexe 4, Volume 2, page 83) considère ainsi que le point $(\frac{5}{2};\infty)$ est commun à toutes les courbes d'équation $y = \frac{mx^2 - (m+2).x + 2}{2x - 5}$.

TI-92
et schèmes d'action instrumentée relatifs aux calculs de limite.

Cette étude des déclarations et de certaines actions des élèves confirme ce que nous disions en I.c.2.ii. : la marge de manoeuvre sur TI-92 est sans commune mesure avec la marge de manoeuvre sur une calculatrice graphique.

La nature du schème mis en oeuvre (schème "simple" ou combinaison de schèmes) dépendra sans doute de la genèse instrumentale.

La méthode d'action instrumentée évoquée par la majorité des élèves définit un schème L3

- il consiste à utiliser la commande spécifique de la calculatrice ;

- l'importance de ce schème est liée à l'importance reconnue par les élèves du calcul formel sur la nouvelle calculatrice ;

- il se joue dans le seul registre de l'écriture algébrique des fonctions.

Un groupe important d'élèves évoque aussi un schème défini par la combinaison des schèmes L2 et L3 qui met en jeu les registres numériques (pour le fenêtrage), graphique (pour la courbe) et algébrique (pour la commande spécifique).

Comme pour les calculatrices graphiques, on doit constater que ces schèmes sont encore mal définis :

- pour L3 (quel est sa place par rapport au calcul "à la main" ? S'y substitue-t-il ? Sinon intervient-il avant ou après ?) ;

- pour la combinaison L2 et L3 (quelle est l'articulation des deux schèmes ?).

Avant d'étudier cette articulation, nous allons situer ces schèmes dans le processus de conceptualisation.

II.b.3.ii Schèmes d'action instrumentée théorèmes-en-acte et obstacles.

Revenons un instant à la définition des schèmes. G. Vergnaud (cf 0.b.3.i.) évoque ce qu'il appelle "un bon exemple" de "construction d'un schème remarquable" :

> *"L'analyse du décours temporel extrêmement serré de l'action, de la prise d'information et du contrôle, dans le mouvement d'un athlète comme Bubka, le champion ukrainien du saut à la perche, est une leçon."*

Il y a une petite différence entre le statut d'outil de la perche dans le saut à la perche et le statut d'outil de la calculatrice dans le calcul de limite :

- dans le premier cas, l'outil est une composante indispensable de l'activité (on pourrait dire qu'il est consubstantiel à l'action) ;

- dans le deuxième cas, il en est un auxiliaire éventuel.

C'est à dire que les schèmes d'action instrumentée que nous allons étudier (L1, L2 et L3) ne sont que la partie instrumentée d'un schème plus général : le schème de calcul de limite que nous définirons en II.b.3.vi.

Mais nous allons d'abord considérer ces schèmes d'action instrumentée pour eux-mêmes et étudier leurs relations avec :

- les théorèmes-en-acte (cf. II.a.2.5.) qui leur permettent de fonctionner ;

- les images et les mots qui en sont les supports.

- les obstacles (cf. II.a.1.i.) qu'ils traduisent, installent ou renforcent ;

1. Les schèmes et les théorèmes-en-acte.

L'association entre les schèmes **Li** et les théorèmes-en-acte **TAi** n'est pas automatique :

- si un élève, à la recherche d'une limite, met en oeuvre le schème **L1** cela n'implique pas ipso facto qu'il va appliquer le théorème-en-acte **TA5** ("si f prend de grandes valeurs quand x prend de grandes valeurs, alors f tend vers $+\infty$") ;
- cela signifie cependant qu'il estime que la recherche des valeurs que prend f pour de "grandes valeurs" de x renseigne sur l'existence et la valeur de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;
- ainsi la mise en oeuvre de ce schème contribuera à installer, renforcer, ou réactiver la conception associée à ce théorème-en-acte : la conception "primitive". Beaucoup dépendra ensuite du contrôle exercé, c'est à dire de la nature du schème plus général de calcul de limite dans lequel L1 sera intégré.

Il y a donc un caractère objectif à la mise en relation entre les schèmes d'action instrumentée et les théorèmes-en-acte.

Mais l'association entre les Li et les TAi relève aussi de l'observation. Il suffit de noter dans les réalisations des élèves les Li mis en oeuvre et les TAi évoqués.

Ces principes généraux amènent aux associations suivantes :

	L1	L2	L3
TA0 : si l'on ajoute à une fonction une fonction qui n'a pas de limite, alors la somme n'a pas de limite.			
TA1 : si une fonction oscille ostensiblement, alors elle n'a pas de limite.			
TA2 : si une fonction est croissante à partir d'une certaine valeur de x, alors elle a une limite infinie.			
TA3 : si f prend des valeurs beaucoup plus grandes que g, le résultat d'une opération entre f et g a pour limite $+\infty$.			
TA4 : si f croît beaucoup plus vite que g, le résultat d'une opération entre f et g a pour limite $+\infty$.			
TA5 : si une fonction prend de grandes valeurs quand x est grand, alors elle admet comme limite $+\infty$.			

Tableau 1. Schèmes **Li** et théorèmes-en-acte **TAi**
(les cases indiquant des relations ont été grisées)

L1 est lié surtout à **TA5** comme nous l'avons déjà relevé. Il est aussi lié à tous les TAi dans lesquels intervient la "grandeur" des valeurs prises par la fonction. Par contre le relevé de quelques valeurs de la fonction ne permet pas de distinguer les oscillations éventuelles de la fonction (donc TA1 n'est pas en relation avec L1).

L2 est en relation avec les TAi liés à la croissance des fonctions. Il est aussi en relation avec **TA5** : on a remarqué que le registre graphique, via le fenêtrage, était articulé avec le registre numérique (cf. II.b.3.i.).

Enfin **L3** est en relation avec les TAi en rapport avec les opérations algébriques.

Nous avions constaté en II.a.2.v. que les théorèmes-en-acte assuraient un rôle charnière entre différentes conceptions.

Nous remarquons ici que certains TAi constituent également des ponts entre les différents schèmes d'action instrumentée (on retrouve le rôle particulier de TA4 sur les "croissances comparées").

Mais chaque schème a des outils qui lui sont plus spécifiques :
- pour L1, les théorèmes-en-acte liés à des valeurs isolées prises par la fonction ;
- pour L2, les théorèmes-en-acte liés aux variations des fonctions ;
- pour L3, les théorèmes-en-acte liés aux opérations sur les fonctions.

2. Les schèmes, les images et les mots.

L'utilisation d'une machine n'est pas neutre. Nous avons mentionné deux "agents d'influence", les images (0.b.1.i. et I.c.2.i) et le langage (0.b.2.v.):

- le poids des images (cf 0.b.1.ii.)

Le fait que **L2** soit immergé dans le registre graphique prend une importance particulière du point de vue des idées de rapprochement, de "confusion des formes" courbe/asymptote (l'existence d'une limite est liée au rapprochement, ou à l'éloignement dans le cas de la limite, infinie de courbes). Il s'agit du point de vue cinématique.

Le nom des commandes lui-même traduit ces idées de mouvement (Trace, Zoom). On peut d'ailleurs penser que le fait que le Zoom soit davantage utilisé pour les manoeuvres de rapprochement que pour les manoeuvres d'éloignement (cf II.b.3.i.) est lié au sens courant de ce mot : le "zoom" est censé rapprocher ce qui est loin. Cela nous emmène au poids des mots.

- le poids des mots

Toute manipulation d'un outil, même silencieuse, a des effets sur le langage intérieur (cf 0.b.2.v.). Ici le schème L3, via la lecture de la commande "limit (f(x), x, x_0) = " a un triple effet :

- la limite désormais est et ne devient plus ;
- le premier argument est désormais l'image f(x) et non plus la variable ;
- la limite devient une fonction a trois arguments : l'image, la variable et un point.

Créer une expression entraîne que l'on crée, ou recrée une signification. La limite ainsi constituée n'a plus rien à voir avec les variations de la fonction. Elle se détache aussi bien du point de vue cinématique que du point de vue de l'approximation.

Il y a bien sûr un lien entre "le poids des images" et "le poids des mots". Le type de langage (de la familiarité, ou fonctionnel, cf 0.b.2.iv.), lié au type de preuve, est plus ou moins bien adapté à la description des phénomènes observés :

- le langage de la familiarité est plus adapté à la description phénomènes numériques (L1) ou des images (L2) ;
- le langage fonctionnel est plus adapté à la description des phénomènes algébriques (L3).

3. Schèmes d'action instrumentée et obstacles.

On peut établir une dernière correspondance entre les schèmes et les obstacles (cf II.a.1.i.), en utilisant ce qui a été dit de la transposition informatique (I.b.5.) et des contraintes propres aux instruments (I.c.2.). **A la différence des théorèmes-en-acte qui peuvent être repérés dans l'action des élèves, les obstacles ne sont que des constructions théoriques et les associations qui suivent, des hypothèses.**

Les schèmes L1 et L2 peuvent renforcer les obstacles (cf II.a.1.i.) :
- obstacle logique : on détermine x, puis y ;
- obstacle atomiste : tout réel a un successeur, de qui il est éloigné d'une distance infiniment petite. C'est l'effet de la commande Trace (un point se déplace sur la courbe de pixel en pixel) ou du réglage du "pas" d'une table de valeurs numériques ;
- obstacle cinématico-monotone : l'idée de limite infinie est liée à des valeurs de plus en plus grandes prises par la fonction.

Le schème L2 peut renforcer l'obstacle géométrique (la fonction est identifiée à sa courbe).

Le schème L3 peut renforcer l'obstacle algébrique qui consiste à étendre les propriétés des opérations algébriques aux opérations sur les limites.

II.b.3.iii Recherche de limites : articulation des schèmes d'action instrumentée et typologie.

Nous souhaitons dans ce paragraphe articuler entre eux les différents schèmes repérés. Dans ce but, nous allons observer l'action des élèves "représentatifs" que nous avions déjà considérés en II.b.2.iii. et II.b.2.iv. Il est naturel en effet de penser que l'articulation des schèmes est liée à notre typologie..

Nous avons choisi de suivre pour chaque "catégorie" celui des deux élèves observés auparavant qui apparaissait le plus représentatif du type de comportement.
On a choisi ainsi Rachel plutôt que Stéphanie car le schème L1 apparaissait significatif d'une rationalité liée au type "scolaire" (cf. II.b.1.iii.).
Il ne s'agit pas d'une représentativité par rapport à la classe, mais d'une représentativité par rapport au modèle mis en place.

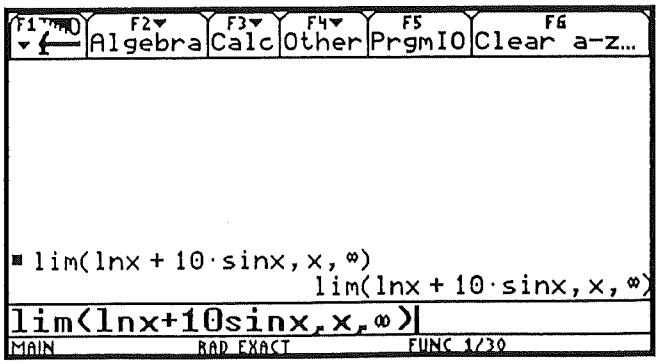
Nous utiliserons les réponses aux questions Q4" des deux questionnaires, des explicitations orales des élèves et des actions effectives repérées pendant l'année. Nous obtiendrons ainsi des explications sur certains points : pourquoi certains élèves se trompent-ils en Q5 alors qu'ils disposent d'une TI-92 qui donne toutes les réponses ? Les résultats des questions Q4" sont récapitulés dans le tableau 1 page suivante.

Notons que les observations sont faites en Janvier (après 4 mois d'intégration des calculatrices graphiques), puis en Mai (après 4 mois d'intégration des TI-92).
On peut estimer que l'on observe là des formes relativement stabilisées de comportement. Notre objectif ici est double :
- préciser les schèmes d'action instrumentée L1, L2 et L3 mis en évidence dans le chapitre précédent du point de vue de leur articulation ;
- mettre en rapport la mise en forme de ces schèmes et notre typologie.

1. Pour Jérôme (type "théorique", voir tableau 1 ci-contre).

Avec calculatrice graphique, comme avec la TI-92, c'est le schème L2 qui est mis en oeuvre. Dans un deuxième temps, avec la TI-92, il y aura mise en oeuvre du schème L3 comme vérification.
C'est ici le principe du "détour global" qui fonctionne : pour avoir un renseignement sur les limites d'une fonction, il faut d'abord avoir la connaissance la plus large de l'objet étudié, la fonction elle-même. Cela suppose d'étudier le comportement global dont on tirera des éléments utiles pour le comportement local. La validation reste le calcul et plus généralement la théorie.

C'est si vrai que, lors du questionnaire de Mai, Jérôme ne retrouve pas la syntaxe "limit" : il écrit obstinément "lim", c'est à dire la transposition sur la machine de l'écriture mathématique.
Le logiciel retourne alors la question.
(cf I.c.2.ii.)



Ainsi le fait que les réponses à la question Q5 (cf tableau récapitulatif en II.b.2.iv., ou protocole 2, Annexe 3) soient toutes justes n'est pas dû à la TI-92, mais bien à des progrès dans les apprentissages. Ce n'est qu'après avoir été établi "à la main" que le résultat en général est vérifié via L3 (quand il n'y a pas d'erreur dans la syntaxe). Ceci peut d'ailleurs être constaté dans les différents travaux de l'année (TP, interrogations écrites).

L'instrumentalisation assez faible ici de la partie formelle de la TI-92 n'est pas nécessairement liée à un désintérêt pour l'outil : il y a en effet pour cet élève une très bonne intégration de l'outil en particulier dans la réalisation du problème long. Dans ce domaine, Jérôme est d'ailleurs capable de réaliser des travaux assez complexes (c'est son travail qui est présenté en II.b.1.iv. en guise d'illustration de la typologie). S'il y a prépondérance de L2, c'est sans doute que ce schème est en osmose avec des habitudes de pensée fortes, articulant toute connaissance locale à une connaissance globale de l'objet.

Type	Avec Calc Graph	Avec TI-92
Jérôme (Théorique)	On peut regarder l'allure de la courbe à certains x et y très élevés, mais ce n'est pas une méthode sûre : cela peut juste donner une impression qui peut faciliter les calculs.	Je vérifie tout d'abord l'allure de la courbe sur le graphique en ayant fait auparavant son sens de variation. Ceci donne un premier aperçu. Je calcule ensuite à la main la limite et je vérifie sur la machine avec la fonction "limite" si mon résultat concorde.
Elsa (Rationnel)	Je trace la fonction, regarde l'allure de la courbe sur une petite fenêtre et j'essaie de voir si, quand x est plus grand, elle a toujours la même allure.	Rentrer la fonction et demander la limite. Demander la limite d'une partie de la fonction.
Rachel (Scolaire)	Je remplace x par des valeurs assez élevées.	Je vérifie mes résultats.
Sébastien (Bricoleur)	J'utilise le graphique et si je m'aperçois que quand x atteint de grandes valeurs, la courbe est très haute, alors la limite tendra vers $+\infty$.	Je tape la fonction, puis je regarde le graphe. Ou sinon, je tape directement ce que je cherche.
Christelle (Expériment.)	On prend x très grand et on trace la courbe pour voir son allure. On peut éventuellement se servir de la machine pour certaines opérations pour les différents théorèmes.	- aspect de la courbe (graphique) ; - limit(..., x, ∞)

Tableau 1. Question Q4" (Comment utilisez-vous votre calculatrice pour étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$?)

2. Pour Elsa (de type "rationnel", cf. tableau 1 ci-dessus).

Avec calculatrice graphique, il s'agissait de regarder l'allure de la courbe sur des fenêtres de plus en plus grandes : schème L2.

Avec les TI-92, il y a abandon de ce schème et adoption de L3. On passe d'une considération du graphique à la seule mobilisation de la commande "limite".

L'utilisation de cette commande est aussi liée aux techniques de calcul de limites annoncées par ailleurs : "s'il y a des formes indéterminées, je transforme l'écriture de la fonction et je cherche les limites de chacune des parties" (cf tableau 2 en II.b.2.iv.). On peut considérer que la technique décrite ici ("demander la limite d'une partie de la fonction") est la traduction "instrumentée" de cette stratégie.

Il y a là une instrumentation forte liée à des habitudes de travail profondément ancrées : les calculs sont réalisés pour eux-mêmes, les uns après les autres, sans référence à des objets plus généraux. La commande spécifique de la TI-92 s'inscrit parfaitement dans ce type de travail et dispense d'une considération globale de la courbe (on peut remarquer d'ailleurs qu'Elsa n'est pas arrivée au bout du "problème long" du fait sans doute de cette difficulté à considérer les fonctions "globalement").

3. Pour Rachel (de type "scolaire", cf. tableau 1 ci-dessus), il y a aussi changement complet de schème :

- avec les calculatrices graphiques, le schème L1 est mis en oeuvre.
Il y a seulement considération de quelques valeurs de la fonction. On peut le vérifier lors du TP 1 (Annexe 4, Volume 2, page 5) : pour déterminer la limite d'un polynôme en $+\infty$, Rachel calcule P(1), P(2), P(3) et conclut.

- avec la TI-92, L1 est remplacé par L3.
Il faut "traduire" ce que Rachel entend par "je vérifie mes résultats" : l'utilisation de la machine s'avère être en fait antérieure au calcul "à la main". On constate la plupart du temps que cette démarche dispense même du calcul. L'étude de limite se résume à L3. C'est donc une instrumentation forte liée à la présence d'un tuteur.

4. Pour Sébastien (de type "bricoleur", cf tableau 1 ci-dessus).

Avec les calculatrices graphiques, c'est le schème L2 qui est activé.
Ce schème semble résister à l'arrivée des TI-92. En effet au début de l'introduction des TI-92, Sébastien continue à déterminer les limites par considération préalable du graphique de la fonction. Mais il y a peu à peu glissement vers une utilisation plus grande de la seule commande spécifique. Pour des raisons d'économie d'action et d'efficacité, cette commande sera seule activée, en général, en fin d'année. Le recours au graphique interviendra cependant à chaque fois qu'une justification sera demandée ou apparaîtra nécessaire.

Avec les TI-92, le schème L3 intervient pour déterminer les limites cherchées. Le schème L2 intervient éventuellement pour trouver une justification du résultat annoncé.

Pour ces élèves, l'utilisation systématique de la calculatrice s'accompagne de l'idée que la légitimité mathématique du travail réalisé avec machine est parfois douteuse. Les réponses aux questionnaires sont ainsi parfois biaisées. Ici l'évocation quasi anecdotique de la commande "limite" ("ou alors, je tape directement ce que je cherche") traduit cette préoccupation : l'évocation dans un premier temps du graphique est censée traduire la volonté de comprendre et donc de prouver la réponse avancée.

5. Pour Christelle (de type "expérimentateur", cf. tableau 1 ci-dessus).

On notera la description de l'activité avec les calculatrices graphiques : le schème L2 est décrit mais aussi l'utilisation de la calculatrice pour "certaines opérations pour les différents théorèmes".

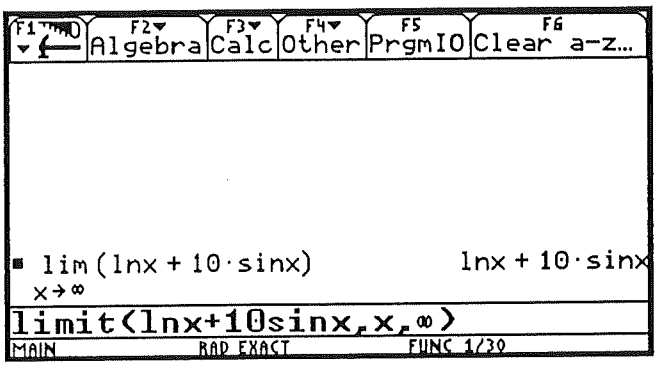
C'est-à-dire, explique Christelle, "pour vérifier les conditions d'application de certains théorèmes" : par exemple que "f est bien comprise entre g et h". On reconnaît là l'aptitude de ces élèves à coordonner/comparer les résultats issus de différents registres de représentation (cf II.b.1.iii.).

Il y a, avec la TI-92, mobilisation conjointe de l'application graphique (L2) et de la commande "limite" (L3). A la différence de Jérôme, il n'y a pas de hiérarchisation. C'est à dire qu'il ne s'agit pas d'envisager un objet (la fonction) dans sa globalité, mais de multiplier les points de vue sur un même objet.

En cas de blocage d'ailleurs, donc d'impossible confrontation, il y aura utilisation par défaut d'un seul cadre d'étude.

C'est ce qui explique les résultats assez piteux lors du deuxième questionnaire, avec TI-92 (cf protocole 18, Annexe 3) : Christelle oublie les parenthèses dans l'écriture de ln(x) et de sin(x). Le logiciel renvoie alors la question posée (cf copie d'écran ci-contre).

Dans ces conditions, le retour à l'application graphique était la seule issue !



Les schèmes L1, L2 et L3 rentrent donc, sous des formes particulières, dans la composition des schèmes d'action instrumentés mis en oeuvre par les élèves des différents types.

	Calc. graph.	TI-92
Type "théorique"	L2	L2/L3
Type "rationnel"	L2	L3
Type "scolaire"	L1	L3
Type "bricoleur"	L2	L3/L2
Type "expérimentateur"	L2	L2-L3

Tableau 2 : typologie et instrumentation.

Le processus d'instrumentation découlant de l'intégration de la TI-92 fait apparaître une combinaison des schèmes L2 et L3 avec plusieurs modalités : L2 avant L3 (on notera L2/L3) ou L2 et L3 au même niveau (on notera L2-L3).

Le schème L3, qui intervient pour les 5 élèves, a des fonctions très différentes : pour l'élève "théorique", c'est un auxiliaire de vérification ; pour l'élève "rationnel", c'est un auxiliaire de calcul ; pour l'élève "scolaire", c'est un substitut au calcul et à la preuve ; pour l'élève "bricoleur", c'est un substitut au calcul ; pour l'élève expérimentateur, c'est un auxiliaire de confrontation. Nous y reviendrons en II.b.3.iv..

II.b.3.iv Place des schèmes d'action instrumenté et typologie.

Les schèmes d'action instrumentée, comme gestes d'action, ont un rapport dialectique à la pensée, c'est-à dire au processus de conceptualisation (cf 0.b.3.i.) :

- d'une part un geste peut exprimer une pensée. La mise en oeuvre de L2 par exemple peut exprimer le théorème-en-acte TA2 : "si je repère de fortes oscillations, alors la fonction n'a pas de limites" ;

- d'autre part un geste peut produire de la pensée ; il enracine des conceptions, il peut renforcer des obstacles. Par exemple la mise en oeuvre régulière, fréquente, de L2 peut ancrer la recherche de limite dans le cadre géométrique.

C'est pour préciser ce rapport complexe que nous allons nous intéresser ici à deux questions pour chacun des 5 élèves distingués :

1. Quelle est l'importance des schèmes d'action instrumentée ?

Il s'agira ici d'estimer l'importance "quantitative" des Li dans l'action de chaque élève, d'abord avec calculatrice graphique puis avec TI-92 ;

2. Quelle est l'adéquation entre le schème d'action instrumentée et le comportement général de l'élève ?

Il s'agira là de situer les Li dans l'ensemble de l'action de l'élève. En est-il un prolongement naturel ou manifeste-t-il un infléchissement de celle-ci ?

Un point de vue quantitatif : mobilisation des schèmes et typologie.

On veut évaluer ici la fréquence de mise en oeuvre des Li pour chacun des élèves. Nous pouvons pour cela utiliser la description que les élèves font de leur propre action. Mais nous devons pondérer cette description à partir de ce que l'on sait de chacun des élèves et donc de ce que l'on sait qu'il sait de lui, ou qu'il veut que l'on sache.

Nous disposons pour cette étude de plusieurs sources :

- la réponse à la question Q4' : "à quelle fréquence utilisez-vous votre calculatrice quand vous recherchez des limites de fonction ?" ;
- la comparaison des deux observations minutées (cf II.b.1.iv), la première avec calculatrice graphique, la deuxième avec TI-92, du point de vue du temps de travail avec instrument ;
- et les autres sources, plus diffuses (les interrogations écrites, l'observation des élèves en TP, les entretiens informels avec les élèves).

Les deux premières sources sont complémentaires :

- la réponse à la question Q4' donne le point de vue des élèves (donc empreint d'une certaine subjectivité), à une question qu'ils ont pu interpréter de différentes façons (s'agissait-il de n'importe quelle limite - du type $\lim_{x \to +\infty} e^x$ ou de limites "problématiques" qui requièrent une étude particulière ?) ;

- les informations issues des feuilles d'observation minutée sont plus objectives mais ne concernent pas seulement l'étude des limites.

Observations et commentaires, d'abord sur le point de vue des élèves eux-mêmes.

Type	Avec Calc Graph	Avec TI-92
Jérôme (Théorique)	De temps en temps	Régulièrement
Elsa (Rationnel)	De temps en temps	Régulièrement
Rachel (Scolaire)	Rarement	Beaucoup
Sébastien (Bricoleur)	Régulièrement	Régulièrement
Christelle (Expériment.)	De temps en temps	Régulièrement.

Tableau 3. Question Q4'
Fréquence de l'utilisation de la calculatrice dans la recherche des limites de fonction

Il est souhaitable de s'interroger sur l'écart entre ce que l'élève dit de lui et ce qu'il fait vraiment. L'observation des élèves dans l'action et des questions orales complémentaires confirment toutefois leurs déclarations (sauf pour Sébastien) : ils mobilisent plus la TI-92 que les calculatrices graphiques antérieures pour le calcul de limite, ce qui semble bien naturel, puisque celle-ci comporte une commande spécifique.

Sébastien est le seul élève à déclarer mobiliser au même niveau, "régulièrement", les deux types de calculatrice. Le désaccord du professeur avec son affirmation ne vient pas de cette stabilité mais du niveau d'utilisation déclaré : en fait Sébastien mobilise beaucoup (et même énormément) sa calculatrice aussi bien la calculatrice graphique que la TI-92. Mais c'est une des caractéristiques de ce type d'élève "bricoleur" que d'avoir le sentiment de l'illégitimité d'une utilisation exclusive de la calculatrice pour tout calculer et tout prouver. Il y a donc une minoration de l'utilisation déclarée de l'outil ce qui, en soi, est assez significatif du rapport à l'outil.

On notera l'écart important pour Rachel entre rarement et beaucoup : en cohérence avec cette utilisation beaucoup plus grande, elle ne note plus aucune méthode de calcul à la question Q4, "Quelles méthodes connaissez-vous pour prouver que f tend vers $+\infty$?" (cf II.b.2.iv.). La calculatrice a pris toute la place.

Observations et commentaires, sur les mesures des temps de travail instrumenté, lors des deux observations minutées (cf II.b.1.iv.) :

	Théo-rique	Ration-nel	Sco-laire	Brico-leur	Expéri men.
TP n°9 (avec calc. graph.).	17%	4%	16%	26%	17%
TP n°17 (avec TI-92)	29%	24%	39%	32%	35%

Tableau 4 : Temps de travail avec instrument et typologie (en pourcentage du temps global de travail).

Le passage d'une calculatrice graphique à une calculatrice symbolique entraîne un temps de "travail avec instrument" six fois plus important pour le type rationnel, deux fois plus important pour les types théorique, expérimentateur et scolaire, à peu près équivalent pour le type bricoleur. Ces mesures, relatives à seulement cinq élèves, signalent tout de même des grandes tendances significatives.

Le croisement des deux tableaux et l'observation des élèves conduisent à une estimation de l'importance de la mobilisation de la calculatrice à propos de recherche de limites, pour les différents élèves, résumée dans le tableau 6 ci-dessous. On a appuyé en gras les estimations qui ont été corrigées par rapport aux réponses des élèves.

Type	Avec Calc Graph	Avec TI-92
Jérôme (Théorique)	De temps en temps	Régulièrement
Elsa (Rationnel)	**Rarement**	Régulièrement
Rachel (Scolaire)	**De temps en temps**	Beaucoup
Sébastien (Bricoleur)	**Beaucoup**	**Beaucoup**
Christelle (Expériment.)	De temps en temps	Régulièrement.

Tableau 5 : Estimation de la fréquence de l'utilisation de la calculatrice dans la recherche des limites de fonction

Commentaires et justifications.

Il faut préciser d'abord les adverbes. En conformité avec l'interprétation des élèves eux-mêmes, on retiendra les significations suivantes :

- "Beaucoup" signifie : *"en général, quand il y a un calcul de limite, j'utilise la calculatrice (pour vérifier ou anticiper)"* ;
- à l'inverse, "Rarement" signifie le contraire : *"en général, quand il y a un calcul de limite, je n'utilise pas la calculatrice"* ;
- les expressions intermédiaires "De temps en temps" et "Régulièrement" sont plus difficiles à distinguer. On le fera de la façon suivante :
  - le mot "Régulièrement" incorpore une notion de discernement. On pourrait le traduire par : *"s'il y a un calcul de limite problématique, j'utilise la calculatrice"* ;
  - le mot "De temps en temps" incorpore une notion d'opportunité : *"s'il y a un calcul de limite problématique, si j'ai le temps, si j'estime que la calculatrice me donnera une réponse exploitable"*. Cette notion d'opportunité n'existe plus avec la TI-92 puisqu'en principe elle donne le résultat souhaité.

Avec ces conventions, la colonne TI-92 du tableau 5 ci-dessus est la plus facile à commenter. Il n'y a pas de doute, les élèves "scolaire" et "bricoleur" utilisent beaucoup la TI-92 pour des calculs de limite, les autres régulièrement.

Quant à la colonne "calculatrice graphique", la réponse "beaucoup" pour les élèves bricoleurs s'impose pour les mêmes raisons qu'avec la TI-92. En cohérence avec l'observation minutée et l'observation des travaux d'Elsa, c'est bien "rarement" qu'est utilisée par elle une calculatrice graphique pour la recherche de limites. Pour les élèves de type théorique et expérimentateur, l'adverbe "de temps en temps" convient bien et permet de traduire l'écart d'utilisation avec les TI-92. Quant à l'élève de type scolaire, la maladresse d'utilisation de la calculatrice graphique pour la recherche de limite en restreint l'usage. Celui-ci n'est pas exceptionnel, contrairement à ce que dit Rachel, "De temps en temps" convient bien.

Cette estimation pondérée de la mobilisation de l'outil aboutit à une reprise du tableau 2 qui croisait la typologie et les types d'outils pour dresser une carte des schèmes. On a repris dans le tableau 6 ci-dessous la carte des schèmes en réglant la taille des caractères sur l'importance de la mobilisation de l'outil :

	Calc. graph.	TI-92
Type "théorique"	L2	**L2 / L3**
Type "rationnel"	L2	**L3**
Type "scolaire"	L1	L3
Type "bricoleur"	L2	L3/L2
Type "expérimentateur"	L2	**L2 - L3**

Tableau 6 : typologie et instrumentation "pondérée".
Légende du point de vue des caractères : Taille 9 pour "Rarement", 12 pour "De temps en temps", 12 gras pour "Régulièrement", 18 pour "Beaucoup".

L'importance de ces schèmes est d'abord liée à la fréquence de leur mise en oeuvre. Ce tableau donne ainsi une première indication.

Un point de vue qualitatif : cohérence entre type d'action instrumentée et type d'élève.

La fréquence d'activation d'un schème n'est pas le seul indicateur. Un autre élément est à prendre en considération, fondamental, ce sont les habitudes de travail des élèves : y a-t-il cohérence entre l'action avec instrument et l'action générale de l'élève ? La question peut sembler naïve : on peut en effet penser que l'utilisation de l'instrument par l'élève dépend de ses habitudes de travail. Il n'y aurait alors qu'un processus d'instrumentalisation dans lequel l'élève mettrait l'outil "à sa main".

Le processus inverse existe aussi, l'instrumentation, par lequel l'instrument modifie les schèmes mis en oeuvre par le sujet. On l'a bien vu dans le passage de la calculatrice graphique à la TI-92.

Les nouveaux schèmes peuvent être en cohérence avec le comportement général de l'individu : dans ce cas, cette cohérence produit un effet de synergie, ou de résonance.

L'utilisation de l'outil est alors "naturelle" et l'opérateur de contrôle (cf. 0.b.3.iv.) a tendance à être en sommeil. C'est à dire que les théorèmes-en-acte erronés, liés aux schèmes, peuvent devenir des automatismes.

Ce schème peut aussi ne pas être en cohérence avec le comportement général de l'individu [49]. Auquel cas, il aura une portée différente, restant d'une certaine façon étranger à l'action générale de l'individu : sa mise en oeuvre sera ressentie comme une contrainte.

Examinons à cette lumière les schèmes d'action instrumentée des 5 élèves observés.

Pour l'élève de type "théorique".

- La méthode de preuve permet de comprendre pourquoi le schème L2 résiste au changement de calculatrice.

On a dit (en II.b.1.iv.) que la méthode de preuve reposait pour ces élèves sur l'analogie ou l'évocation. Le schème L2 permet de se forger une idée de la fonction comme objet "global". Le schème L3 ne permet que d'avoir un renseignement local, "aveugle". Le schème L2 perdure donc avec le schème L3 comme "schème d'accompagnement" à fin de vérification.

- Le type de travail réalisé, en relation avec les éléments de référence, permet de comprendre le "détail des schèmes".

Le schème L2 prend la forme d'un coup d'oeil sur la courbe pour en avoir une idée ou vérifier l'idée qu'on s'en fait. Le schème n'est pas systématiquement activé (quand la fonction est connue, son image l'est aussi - cf les réponses aux questionnaire de Damien, sans calculatrice) et, quand il est activé, il y a peu de travail d'adaptation de la fenêtre (ou de manipulation de Zoom, ou Trace). Il y a un travail préalable de réglage a priori de la fenêtre par référence aux propriétés connues des fonctions en présence. Pour ce type d'élèves, le schème L2 se compose ainsi de peu d'actions et celles-ci sont relativement courtes.

On retrouve cela dans les choix faits pour la mise en oeuvre du schème L3. On avait vu en I.c.2.ii. un arbre des choix pour la commande "limit". Le choix de Jérôme : il écrit directement "limit" dans la ligne d'entrée (sans avoir recours au menu ad hoc) puis

---

[49] Un exemple élémentaire, que comprendront tous les gauchers, ayant eu affaire avec un couteau à poisson (ou une casserole à bec verseur...) ordinaire, c'est à dire pour droitiers. Il peut y avoir accomodation d'un schème d'utilisation, mais le dit couteau restera toujours extérieur à soi et l'utilisation toujours contrôlée - nécessairement.

utilise la référence de la fonction [50] (ce qui le dispense d'écrire l'expression de la fonction "in extenso").

- Le type de langage qui accompagne la réalisation ou la description des schèmes. est un langage fonctionnel ([Balacheff, 1987]) [51].

Tous les éléments décrivant la mise en oeuvre des schèmes (peu d'actions, actions courtes, action pilotée par les références théoriques, langage fonctionnel) font que l'influence générale de l'action instrumentée (c'est à dire des "théorèmes-en-actes" qui lui sont associés), si l'outil est intégré dans la classe, est assez mince (on a pu le constater en comparant les réalisations des élèves avec et sans calculatrice - mais ceci n'en est qu'un indice). Une exception notable : l'idée que "l'étude globale pilote l'étude locale", pivot de l'articulation entre le schème L2 et le comportement général de l'élève, est sans doute renforcée par l'utilisation de la calculatrice.

La précision "intégré dans la classe" est importante : en effet ce qui est dit suppose que des références théoriques soient disponibles. Dans ce cas, les problèmes généraux sur les limites peuvent être pilotés par un cours construit sur ce thème. Mais en l'absence d'un cadre théorique (c'est à dire d'un ensemble structuré de définitions, exemples, contre-exemples), ce sont des images "primitives" qui peuvent faire référence.

Pour l'élève de type "rationnel".

L'affaire est encore plus vite entendue.

La méthode de preuve repose sur la démonstration.

Ce qui explique que le schème L2 soit rarement mis en oeuvre. Quand il l'est, il s'agit aussi de quelques actions courtes. Mais il est perçu comme non pertinent pour la recherche de limites. On a pu vérifier qu'il avait peu d'influence sur ces élèves.

Dès qu'il y a changement d'outil, il y a changement de schème. Le schème L3 est alors mis en oeuvre, il s'inscrit dans une logique de démonstration (on pourrait plutôt dire de "calcul démonstratif"). On a vu d'ailleurs que le schème L3 était composé de plusieurs gestes ("recherche de la limite de la fonction et en cas d'indétermination, de plusieurs bouts de la fonction") associés à des transformations mathématiques de l'objet (factorisations par exemple).

Le langage est un langage fonctionnel.

On peut constater aussi que l'adaptation à la syntaxe de la machine se fait sans problème (à la différence des élèves de type théorique). C'est qu'ici l'utilisation d'un langage est une question de convention, liée à une question d'efficacité et aux exigences de l'action en cours. Le langage d'une démonstration mathématique est lié aux exigences de l'exercice, le langage machine est lié aux exigences de la machine. C'est une différence essentielle avec les élèves de type théorique, pour qui le langage est lié à la description d'objets de référence (ce qui rend difficile pour eux le fait que le mot "limite " s'écrive différemment pour la machine et pour les mathématiques).

Le schème L3 est en cohérence avec le travail général de l'élève : on peut estimer que le point de vue algébrique qui l'accompagne s'incrustera avec d'autant plus de force.

---

[50] On a déjà dit que le jour du deuxième questionnaire (avec TI-92), cette propension à utiliser directement les objets de référence induit Jérôme en erreur : il écrit "lim" (écriture mathématique au lieu de "limit" (écriture de la commande).

[51] Dans le texte cité, N. Balacheff précise d'ailleurs que *"c'est là, quelque part entre l'expérience générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. Une marque de ce passage est une évolution des moyens langagiers mis en oeuvre"*. Pour en revenir à notre classification, ce serait entre les élèves de type "expérimentateur" et les élèves de type "théorique", que s'effectuerait le passage du "langage de la familiarité" au "langage fonctionnel".

Pour l'élève de type "scolaire".

On a associé (en II.b.1.iv) la méthode de preuve de ces élèves à l'empirisme naïf [Balacheff, 1987] : *"il consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion"*.

C'est parfaitement cohérent avec le schème L1, qui consiste à déterminer quelques valeurs de la fonction et à en déduire la limite supposée. La calculatrice n'est mobilisée que de temps en temps : la mise en oeuvre du schème prend en effet du temps, pas du fait du nombre d'actions entreprises, mais du fait de la longueur de chacune d'entre elles. La maladresse dans l'utilisation de la calculatrice rend assez coûteuse ce type de manoeuvre. La cohérence entre ce schème et le comportement général de l'élève entraîne une influence certaine de L1. Malgré cette cohérence, ce schème est abandonné lors du changement de calculatrice, du fait du mauvais rapport efficacité/coût.

Le schème L3 est alors mis en oeuvre, comme simple recours à un formulaire : alors que la mise en oeuvre du schème L1 était associée à un effort cognitif ("quelle est la limite dont les quelques images de la fonction me donnent une indication ?"), la mise en oeuvre de L3 s'accompagne en général d'un "abandon démonstratif" (Il y a cependant un effort important dans la mise en oeuvre de L3 qui tient à la commande elle-même : il ne faut pas se tromper dans la syntaxe, ce qui n'est pas "évident" pour ce type d'élève). La réalisation du schème L3 (toujours dans l'arbre des possibles donné en I.c.2.ii.) est très différente de celle de Jérôme : Rachel va chercher la commande "limit" dans le fichier "calc" de l'application initiale, elle descend jusqu'à la troisème ligne à l'aide du curseur et écrit la fonction in extenso. Comme pour le schème L1, la manipulation de la machine prend du temps, mais, avec L3, on a (en principe) un résultat fiable.

La production du résultat se suffit en effet à elle même. Il y a une forme de transfert d'autorité, du maître à la machine. On donnait (toujours en II.b.1.iv) comme description du fonctionnement de ce type d'élève : "il y a reproduction de preuves, ou de morceaux de preuves mémorisées". L'utilisation de L3 s'inscrit dans cette perspective : la reproduction du résultat vaut preuve.

La question du langage est aussi importante ici.

De deux points de vue :

- d'abord du point de vue de l'adaptation à un nouveau langage. Le langage de ces élèves est du type "familier". Il y a en général une difficulté d'accès à un nouveau type de langage, du type fonctionnel. Cette difficulté est renforcée, pour acquérir le langage de la TI-92, par des problèmes généraux d'accès aux outils. Ce sont ces élèves qui ont le plus de mal à acquérir ce langage. Stéphanie déclare ainsi (Annexe 4, Volume 2, page 140) : *"la calculatrice m'a montré des erreurs que je n'ai pas su retrouver. Donc elle m'a gêné par le fait que je me suis énervée, donc déconcentrée, elle m'a surprise par des messages bizarres, mais parce que, la plupart du temps, c'était dû à des erreurs de manipulation" ;*

- ensuite du point de vue de l'influence de ce nouveau langage : celui-ci est un langage familier, qui procède souvent par description des phénomènes observés. L'influence du changement de schème (de L1 à L3) se traduit clairement à ce niveau : . avec la mise en oeuvre du schème L1, on pouvait lire "la limite se rapproche de", "la limite arrive presque jusqu'à", "la limite tend vers". Avec L3, on trouve désormais "la limite est".

Mais à la différence des élèves de type "rationnel", la mise en oeuvre de ce schème ne s'accompagne pas d'un processus de calcul et de contrôle.

Pour l'élève de type "bricoleur",

Le type de preuve relevé en II.b.1.iv. est la production d'indices, d'exemples.

Cette caractéristique, associée à une bonne technique de manipulation de la calculatrice graphique, va donner une très grande importance au schème L2. Dans sa mise en oeuvre, on observe beaucoup d'actions de courte durée : le faible coût (en temps, en effort cognitif) d'une commande permettra de nombreux changements (Fenêtrage, Trace, Zoom).

On retrouve là l'idée de "l'expérience cruciale" : il faut arriver à trouver une fenêtre qui donne de la courbe la vision la plus convaincante possible (du point de vue de la limite suggérée)[52]. Pour ces élèves, comme pour les élèves de type scolaire, on peut parler de comportement de"pêche" (cf. 0.b.5.ii.), avec cependant quelques différences : les élèves de type scolaire ne sont pas des pêcheurs très habiles, ils lancent deux ou tois fois l'hameçon et concluent. Les élèves de type bricoleur sont des pêcheurs acharnés.

On peut parler d'ailleurs ici "**d'acharnement localisé**" : sans changer de cadre, on veut tirer de la calculatrice par répétition d'actions le renseignement cherché (on a pu l'observer dans la recherche du "problème long", en II.b.1.iv., avec la stratégie des "manchons" ; on a pu l'observer aussi dans la résolution d'équations par zooms successifs sur le point d'intersection des courbes, sans recours à des stratégies de calcul). Tout ceci concourt à donner au schème L2 une grande influence sur le processus de conceptualisation.

Le changement de calculatrice entraîne un glissement de schème. L'enjeu étant de donner une réponse, c'est la commande spécifique, vite maîtrisée, qui est désormais utilisée. Il y a alors deux possibilités :

- soit la mise en oeuvre d'une preuve apparaît inutile et le schème L3 se suffit à lui-même ;

- soit il apparaît nécessaire de fournir une preuve et il y a recours au schème L2 (c'est la différence avec les élèves de type "scolaire" : ici le coût de manipulation de la machine n'est pas le même).

C'est un langage familier qui est utilisé ici, qui procède par description des phénomènes observés.

Du point de vue de l'influence du langage, on assiste au même phénomène que pour les élèves de type "scolaire" : on passe d'une limite "qui tend vers" (avec les calculatrices graphiques), à une limite "qui est égale à" (avec les TI-92).

La situation est toute différente en ce qui concerne l'adaptation à une nouvelle syntaxe : alors que ces élèves ont un "langage familier", leur facilité d'accès aux outils se traduit aussi au niveau de l'accès à son langage.

Après certains problèmes d'accès (lors du premier bac blanc, Sébastien déclare - Annexe 4, Volume 2, page 140 : *"la machine m'a embrouillé lors des résultats des dérivées et des primitives"*), **les règles d'écriture sont mémorisées, mais comme autant de "règles du jeu".**

---

52 On pense au photographe de Blow up (un film d'Antonioni) qui agrandit de plus en plus une photo pour y repérer un indice...

Pour l'élève de type "expérimentateur",

Leur méthode de preuve repose sur l'accumulation d'indices cohérents, issus si possible de plusieurs cadres d'étude (II.b.1.iv.).

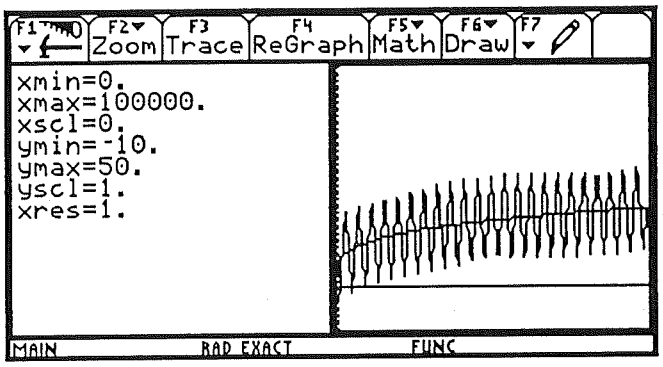
L'application de cette méthode se traduit avec le schème L2 par des actions qui ressemblent à celles des élèves de type "bricoleur" (beaucoup d'actions entreprises), mais avec deux différences :

- il y a un certain recul sur chaque image obtenue et une confrontation entre ces images elles-mêmes ;
- les élèves de type "bricoleur" entrent un objet dans leur machine et l'observent spar répétition d'actions semblables, alors que les élèves de type "expérimentateur" peuvent aussi changer de point de vue sur cet objet.

Un exemple : il s'agit de la résolution de l'équation $\sqrt{\sqrt{x}} = 10\sin x$

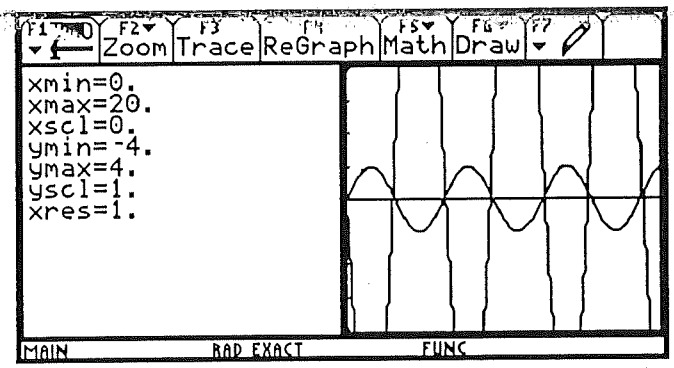
Alors que les élèves de type "bricoleur" vont simplement considérer les courbes des deux fonctions en présence "sous toutes les coutures", les élèves de type "expérimentateur" vont aller plus loin en modifiant les fonctions observées elles-mêmes.
D'abord, ci-contre, avec

$\sqrt{\sqrt{x}} - 10\sin x$,



ou, comme ci-contre, en comparant

$\sqrt{\sqrt{x}} - 10\sin x$ et $\sin x$.



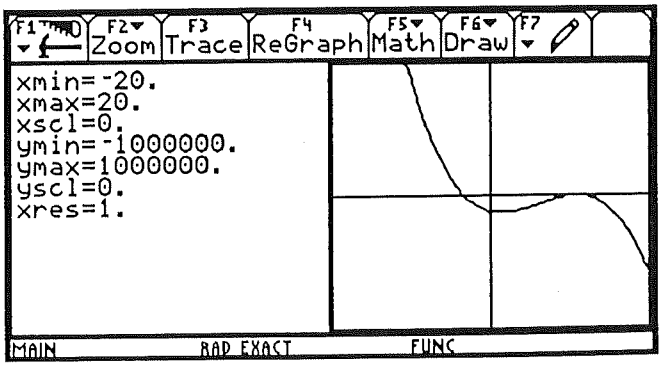
Il y a aussi confrontation entre les graphiques et les calculs réalisés.

Exemple, dans le TP1 (Annexe 4, page II.5), il s'agit de l'étude de la limite en $+\infty$ de $P(x) = - 121011 - 14290{,}1989\,x + 5601{,}73023\,x^2 - 300{,}56003\,x^3 + 0{,}03\,x^4$.

Fabienne et Christelle cherchent une cohérence entre la courbe obtenue et le calcul de limite :

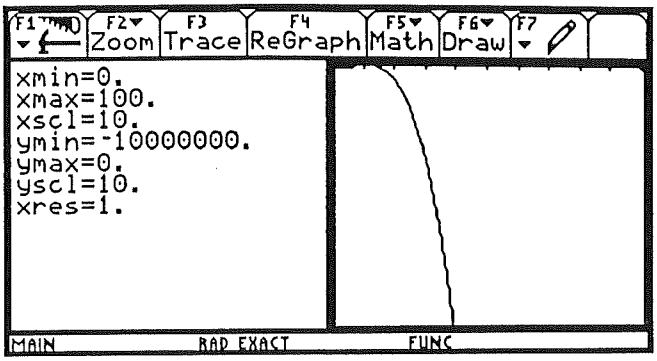
"On a là un aspect de la courbe axé sur l'origine du repère."

Puis elles décident un changement de fenêtre, à cause de la contradiction apparente avec la limite en $+\infty$.



"On a changé les échelles par rapport au graphique, pour voir si la courbe continue de décroître quand x tend vers $+\infty$.

Remarque : on observe sur le graphique que, lorsque x tend vers $+\infty$, f(x) tend vers $-\infty$. C'est donc différent du calcul théorique de la question 1.



On tiendra compte du graphique pour déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$. On prend donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. On choisit ce choix car il semble le plus correct."

Il y a bien confrontation organisée et choix (mauvais) conscient. C'est la différence avec les élèves de type "théorique" dont les références construites "font loi". Ici, il y a réévaluation, à la lumière des observations, des résultats possibles. Cette recherche des différents points de vue possible sur un objet ne se traduira pas par l'adoption immédiate du schème L3 lors de l'intégration des TI-92. Il y a un principe d'économie qui fonctionne dans l'organisation des confrontations de points de vue : chaque point de vue doit pouvoir être obtenu assez facilement. C'est ce qui explique que dans un premier temps le calcul formel soit abordé avec réserve.

Ce n'est que dans un deuxième temps qu'un équilibre se crée entre les schèmes L2 et L3. Mais l'accomodation du schème L3 nécessitera de dépasser les problèmes de langage.

Des problèmes de langage se posent en effet.

Nous avons signalé que le langage de ce type d'élèves se situait entre le langage familier et le langage fonctionnel. Le langage est en fait ici un langage descriptif de l'activité engagée : s'il s'agit d'un graphique, il s'agira plutôt d'un langage familier, s'il s'agit d'un tableau de variation, il s'agira plutôt d'un langage fonctionnel.
Cela traduit une certaine absence de contrôle sur le langage utilisé. Ce qui explique sans doute les difficultés d'accès à une nouvelle syntaxe exigeante. Deux réactions significatives de ce type d'élèves, citées en II.b.3.i. :

- *"la machine me répond toujours syntax error !"*
- *"la moindre faute de syntaxe est prise en compte par la machine !".*

Ce n'est qu'après avoir apprivoisé le nouveau langage que Christelle intègre le nouveau schème L3, aux côtés de L2, dans le jeu de confrontation qui lui est familier.

Bilan de ce qui précède relatif aux différents types d'élèves.

Ceci débouche sur un nouveau tableau, présentant en parallèle les schèmes effectivement mis en oeuvre avec les différents outils et les schèmes en cohérence avec les différents profils d'élèves (Tableau 7). Il apparaît ainsi que le processus d'intrumentation, avec les TI-92, est en parfaite cohérence avec les habitudes de travail pour les élèves de type rationnel et de type expérimentateur.
Pour les élèves de type théorique apparaît un léger décalage (avec l'apparition de L3), mais le schème "de première ligne" reste le même.
Pour les élèves de type bricoleur, c'est d'un retournement de situation qu'il s'agit : le schème "naturel" passe en second plan. L'activité est contrainte par l'obligation de résultat.
C'est encore plus flagrant pour les élèves de type "scolaire". L'action instrumentée ne correspond plus au travail habituel.

	Schèmes effectivement mis en oeuvre		Schème "théorique".
	Calc.graph	TI-92	Schème en cohérence.
Type "théorique"	L2	L2 / L3	L2
Type "rationnel"	L2	L3	L3
Type "scolaire"	L1	L3	L1
Type "bricoleur"	L2	L3/L2	L2
Type "expérimentateur"	L2	L2 - L3	L2 - L3

Tableau 7 : typologie, instrumentation et schèmes en cohérence.

Ces considérations débouchent sur deux conséquences, en terme de portée des schèmes :

- quand il y a cohérence entre le schème "naturel" et le schème activé, l'action instrumentée s'inscrit dans l'action générale de l'élève. Mieux, elle en est partie prenante. L'opérateur de contrôle est alors moins actif.

- quand il n'y a pas cohérence, il y a alors une tension dans le travail avec instrument entre l'activité menée et l'activité habituelle ;

Cette tension peut avoir différentes conséquences :

- si elle est assumée, elle peut déboucher sur de nouveaux apprentissages (relatifs à l'action instrumentée elle-même et aux objets mathématiques étudiés). On verra que c'est le cas pour les élèves de type théorique ;

- si elle n'est pas assumée, elle peut déboucher soit sur des retours épisodiques à des schèmes anciens et familiers qui donnent sens à l'action (c'est le cas pour les élèves de type "bricoleur"), soit sur une rupture de sens (l'action est alors purement automatique : c'est le cas des élèves de type "scolaire").

Nous avons examiné jusqu'à présent la portée des schèmes d'action instrumentée en les confrontant aux différents "profils d'élèves". D'une certaine façon, on a considéré un geste "instrumenté" d'un côté et de l'autre des élèves regroupés selon des critères de "ressemblance". Mais on peut tenter la démarche inverse, en tentant un regroupement des gestes "instrumentés" selon des critères de ressemblance.

En effet, quand un élève réalise une action avec un outil, cette action prend un sens qui dépend de la "famille de gestes" auquel ce geste particulier se rattache. C'est ce que nous allons examiner maintenant.

Les schèmes du tir au but

Ils consistent à chercher d'abord sur la calculatrice le résultat demandé avant de l'établir soi-même. Cette conduite peut exister avec les calculatrices graphiques ("je regarde la courbe avant d'établir les variations de la fonction") mais se généralise avec les calculatrices symboliques (pour le calcul des limites, des dérivées, des intégrales).

On objectera peut-être qu'une activité mathématique scolaire consiste, en général, à atteindre des buts préfixés. Certes, mais ici c'est différent, c'est l'élève lui-même qui détermine ces buts qui sont intermédiaires. Cela recouvre plusieurs schèmes très différents : le "tir dans une impasse", le "tir au but aléatoire", le "tir au but réfléchi" et le "tir au but magique".

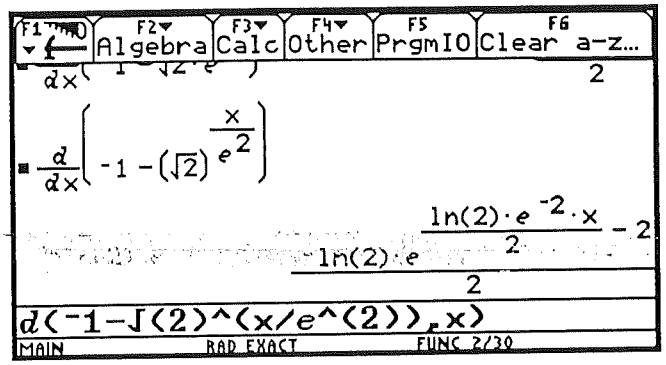
Le tir perplexe

L'élève évalue l'écart entre le résultat "but" et son résultat propre et en conclut que l'écart est impossible à combler. Ce n'est pas une non-action mais bien une action : décider de rechercher le résultat sur la machine, poser la question à l'outil, lire la réponse, évaluer l'écart entre l'étape actuelle des calculs et le but à l'aune de ses propres capacités (estimées) et décider alors de ne pas se lancer dans l'aventure.

Exemple :
Rachel n'a pas rentré convenablement la fonction

$f(x) = -1 - \sqrt{2}\exp(\frac{x}{2})$.

Résultat : la calculatrice renvoie pour la dérivée de f une expression que Rachel est incapable d'analyser. Elle renonce donc à faire le calcul.



Ce type de tir a été souvent constaté dans les travaux des élèves de type "scolaire". La plupart du temps il n'en reste pas de trace écrite. Il ne peut être repéré que par des observateurs "en direct".

Le tir aléatoire

Cette démarche consiste à atteindre le résultat donné par la machine un peu "au hasard" c'est à dire sans plan de travail, par une conduite que l'on ne peut pas expliciter.

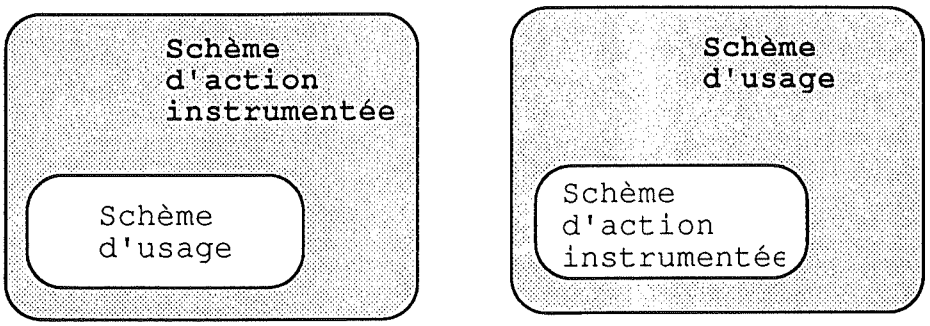
Exemple (Annexe 4, page II.83) :

Il s'agit de déterminer les points communs aux courbes des fonctions $f_m : x \rightarrow f_m(x) = \frac{mx^2 - (m+2).x + 2}{2x - 5}$. Laurent, sur la foi du tracé de quelques courbes, estime qu'il y a deux points d'intersection communs à toutes les courbes. Plusieurs démarches sont alors entreprises pour s'assurer de l'exactitude du résultat : utilisation du zoom dans l'application graphique, utilisation d'un tableau de valeurs, résolution de l'équation à la main, utilisation de l'application initiale et de la commande "Solve", en calcul exact ou approché. Aucune des démarches n'est conduite à son terme, elles se superposent sans bilan d'aucune d'entre elles.

II.b.3.v. Les schèmes d'action instrumentée parties prenantes de schèmes d'usage.

Nous avons considéré jusqu'à présent (cf 0.b.5.iii) qu'un schème d'action instrumenté (par exemple un calcul de limite) était composé d'un certain nombre de schèmes d'usage (considérer le graphique d'une fonction, sélectionner une fenêtre, utiliser la commande Trace ou Zoom). Cela donnait le schéma de gauche ci-dessous.

Nous allons tenter ici la démarche inverse en considérant de grandes familles de schèmes d'usage dont on peut alors considérer les schèmes d'action instrumentée comme des particularisations. On obtiendra alors le schéma de droite ci-dessous.



Deux points de vue sur contenu et contenant.

Notre objectif est de montrer qu'un geste instrumenté est lié à une famille de gestes qui contribuent à lui donner un sens.

Nous allons nous attacher ici à rechercher les schèmes d'usage mis en oeuvre cette année dans le travail avec calculatrice (aussi bien graphique que symbolique). Il ne s'agit pas de mettre en évidence tous les schèmes mais seulement ceux qui peuvent avoir un rapport avec la détermination d'une limite.

La prospection a consisté à reprendre toutes les sources disponibles ("Côté jardins", cahiers de TP des élèves, cahier de bord du maître) et à relever les organisations élémentaires de la conduite des élèves relativement à l'utilisation de la machine, puis à opérer une classification de ces schèmes en essayant d'opérer des regroupements par proximité de but ou de méthode.

Dans un premier temps nous dresserons la liste organisée obtenue, dans un deuxième temps nous essaierons de récapituler les résultats dans un tableau en mettant en rapport ces schèmes d'usage, les schèmes spécifiques de calcul de limite (L1, L2 et L3) et les "types" d'élèves.

De même que pour les "types d'élèves", nous avons été conduits ici à choisir des noms pour les schèmes repérés. Nous avons choisi ces mots pour leur caractère évocateur. Il y a probablement mieux. L'usage se chargera des rectifications indispensables.

Pour illustrer chaque schème, plusieurs exemples seront donnés.

Les schèmes du tir au but

Ils consistent à chercher d'abord sur la calculatrice le résultat demandé avant de l'établir soi-même. Cette conduite peut exister avec les calculatrices graphiques ("je regarde la courbe avant d'établir les variations de la fonction") mais se généralise avec les calculatrices symboliques (pour le calcul des limites, des dérivées, des intégrales).

On objectera peut-être qu'une activité mathématique scolaire consiste, en général, à atteindre des buts préfixés. Certes, mais ici c'est différent, c'est l'élève lui-même qui détermine ces buts qui sont intermédiaires. Cela recouvre plusieurs schèmes très différents : le "tir dans une impasse", le "tir au but aléatoire", le "tir au but réfléchi" et le "tir au but magique".

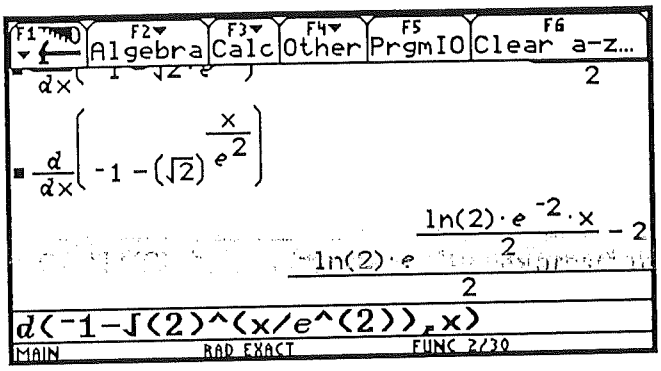
Le tir perplexe

L'élève évalue l'écart entre le résultat "but" et son résultat propre et en conclut que l'écart est impossible à combler. Ce n'est pas une non-action mais bien une action : décider de rechercher le résultat sur la machine, poser la question à l'outil, lire la réponse, évaluer l'écart entre l'étape actuelle des calculs et le but à l'aune de ses propres capacités (estimées) et décider alors de ne pas se lancer dans l'aventure.

Exemple :
Rachel n'a pas rentré convenablement la fonction

$f(x) = -1 - \sqrt{2}\exp(\frac{x}{2})$.

Résultat : la calculatrice renvoie pour la dérivée de f une expression que Rachel est incapable d'analyser. Elle renonce donc à faire le calcul.



Ce type de tir a été souvent constaté dans les travaux des élèves de type "scolaire". La plupart du temps il n'en reste pas de trace écrite. Il ne peut être repéré que par des observateurs "en direct".

Le tir aléatoire

Cette démarche consiste à atteindre le résultat donné par la machine un peu "au hasard" c'est à dire sans plan de travail, par une conduite que l'on ne peut pas expliciter.

Exemple (Annexe 4, page II.83) :

Il s'agit de déterminer les points communs aux courbes des fonctions $f_m : x \rightarrow f_m(x) = \frac{mx^2 - (m+2).x + 2}{2x - 5}$. Laurent, sur la foi du tracé de quelques courbes, estime qu'il y a deux points d'intersection communs à toutes les courbes. Plusieurs démarches sont alors entreprises pour s'assurer de l'exactitude du résultat : utilisation du zoom dans l'application graphique, utilisation d'un tableau de valeurs, résolution de l'équation à la main, utilisation de l'application initiale et de la commande "Solve", en calcul exact ou approché. Aucune des démarches n'est conduite à son terme, elles se superposent sans bilan d'aucune d'entre elles.

Le tir réfléchi

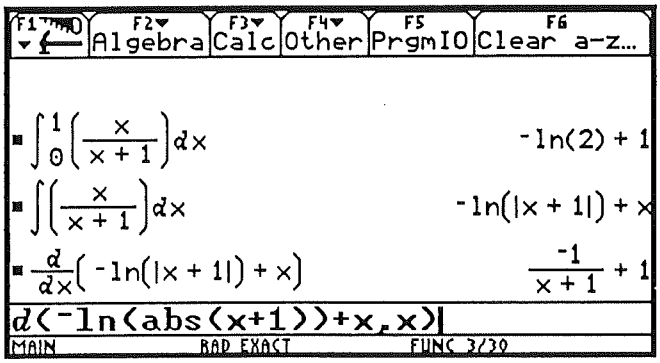
La démarche consiste à établir avant le départ un plan de route pour atteindre l'objectif connu.

On a constaté souvent la mise en oeuvre de ce schème lors du calcul d'intégrale. Ainsi, pour le calcul de $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$, on peut :

- obtenir le résultat de l'intégrale ;

- obtenir une primitive ;

- en dérivant la primitive obtenue, obtenir une autre forme de la fonction de départ qui donne des indications sur les transformations à effectuer (cf. ci-contre).



Ces schèmes ont été repérés en particulier chez les élèves théoriques ou rationnels. Evidemment cette stratégie ne permet pas toujours d'aboutir et les conduites de remplacement ne sont pas immédiates (cf Annexe 4, page II.141).

Le tir magique

La démarche consiste à "s'arranger" pour que, en un nombre fini (et même "raisonnable") de pas, on arrive au résultat donné par la machine (quitte à prendre de grandes libertés avec les règles mathématiques).

On a constaté la mise en oeuvre de ce schème à de nombreuses reprises pour des élèves de type "bricoleur". Sébastien, pour les calculs de dérivée ou d'intégrale est coutumier du fait : il "trafique" une expression algébrique et arrive à obtenir après un nombre raisonnable de déformations (non raisonnables) l'expression "cible" (cf. Annexe 4, page II.138).

Les 4 tirs au but que nous venons d'évoquer ne sont pas dans des compartiments "étanches". On passe par exemple insensiblement du "tir aléatoire" au "tir réfléchi" dès lors que les ajustements sont plus raisonnés. Comme toute typologie, cette classification des "tirs au but" consiste à repérer des modalités extrêmes.

Ces schèmes, sous leurs différentes formes, interviennent comme gestes élémentaires dans de nombreuses actions des élèves. On pourrait penser que les élèves de type "rationnel", déroulant de façon linéaire leur travail, n'ont pas recours à des anticipations avec la calculatrice.

Cependant, dès lors qu'ils vérifient leur résultat avec cette calculatrice, ils peuvent être amenés à mettre en oeuvre ce schème du "tir au but" pour rectifier leur premier résultat.

- une question classique des problèmes de bac : montrer qu'une équation a une solution et une seule (partie théorique), comprise dans un intervalle donné [a, b] (détour approximatif). Il s'agit alors de déterminer f(a), f(b) et de constater, la plupart du temps sur la foi de la machine, que f(a).f(b) < 0.

On conclut alors à partir du "théorèmes des valeurs intermédiaires" mais le résultat numérique qui permet de conclure repose sur l'utilisation de valeurs approchées ;

- une deuxième question classique: à partir de quel rang aura-t-on u_n inférieur à 10^{-n}, une majoration de u_n étant établie (du type $u_n < a^n$). La méthode attendue passe par l'utilisation du logarithme puis l'utilisation du calcul approché. Mais des élèves pourront utiliser tout de suite le calcul approché.

Ainsi Caroline (Annexe 4, page 94) utilise-t-elle un tableau de valeurs pour déterminer à partir de quel rang on aura $u_n < 10^{-5}$.

- dernier exemple, issu du TP 9 (Annexe 4, page 61). Il s'agit de la résolution de l'équation $e^x = x^5$. Les élèves "bricoleurs" vont déduire le nombre des solutions par simple lecture graphique ou utilisation de la commande "Solve" en valeur approchée.

On le voit, la légitimité de ce détour est variable ; il peut aboutir au résultat exact recherché (surtout quand il s'agit de déterminer un nombre entier à partir d'un encadrement comme dans le dernier exemple ci-dessus). Mais la partie théorique qui prouve l'existence des objets recherchés fait souvent défaut.

Le détour approximatif substitut

Il consiste à prendre une valeur approchée, éventuellement "arrondie", comme résultat exact.

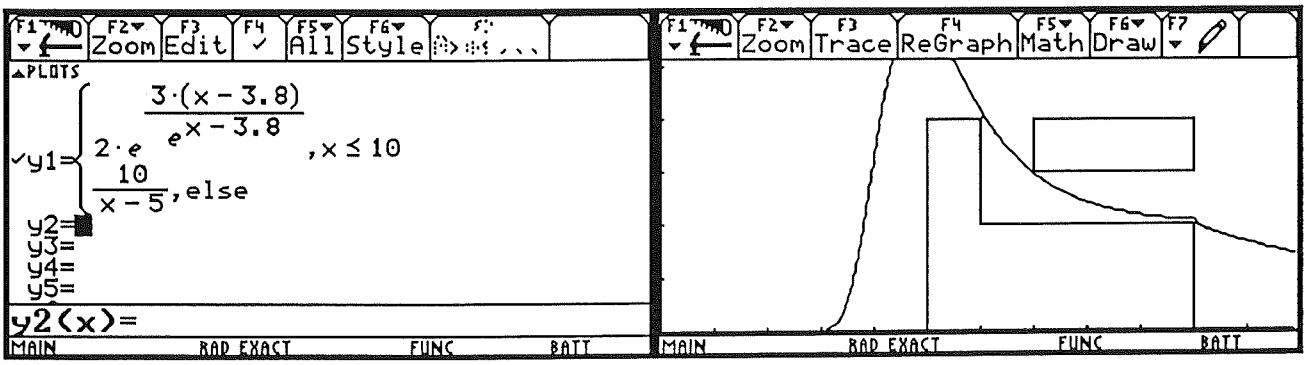
Quatre exemples :

- un premier exemple fondamental dans le contexte TI-92 : l'utilisation de la combinaison de touches "Diamant-Enter" (cf. II.b.1.i.) permet de "résoudre" des équations dont on ne dispose pas de solutions exactes (par exemple $e^x = x^5$) ;

- dans le TP 15 (Annexe 4, page 95), il s'agit de calculer $I_n = \int_0^{\pi} |\sin(nt)|\, dt$. Des élèves "bricoleurs" observent que l'intégrale, pour différentes valeurs de n, est égale "presque" à 2 (la calculatrice ne fait pas le calcul exact de cette intégrale). Ils en concluent que la suite est stationnaire ;

- dans le TP 11 (Annexe 4, page 69), Damien détermine l'équation d'une tangente dans l'application graphique : il trouve y =14, 999 994x + 30, 999 989 (au lieu de 15x + 31). Il propose le résultat approché comme solution du problème ;

- dans le "problème long" (cf II.b.1.iv.), Jérôme met en place une courbe qui est "presque" continue" en 10, à dérivée "presque nulle" en zéro :



On verra ci-dessous le contrôle qui prouve que la courbe obtenue est "presque" solution, mais que les contraintes ne sont pas respectées :

Les schèmes du détour approximatif

On en a déjà parlé à propos de contraintes de l'outil et à propos de certaines réalisations d'élèves (cf. II.b.3.i.).

Ils consistent à rechercher avec l'outil une valeur approchée d'un nombre pour en déduire sa valeur exacte. Ces détours sont systématiques dans l'action avec une calculatrice graphique. Sur une calculatrice symbolique (et dans le contexte décidé par le professeur - la calculatrice étant "normalement" en mode exact, cf II.b.1.i.), ils découlent d'un choix de l'élève.

On distinguera ici le "détour approximatif indicatif", le "détour approximatif justificatif" et le "détour approximatif substitut".

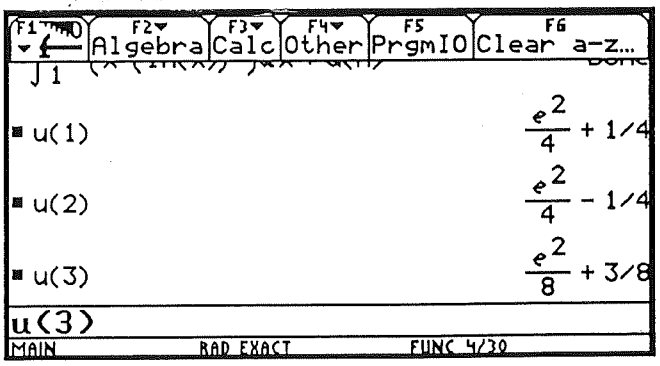
Le détour approximatif indicatif

La recherche d'une valeur approchée s'inscrit là dans un processus de "recherche d'indices" ou de vérification.

Il peut se combiner alors avec un schème de "tir au but". Ainsi Cécile, lors d'un TP d'étude de suite (Annexe 4, page II.91) : "l'intégration par parties ne permet pas d'avancer ; autre méthode, l'observation graphique dans le fichier suite : la suite semble décroissante". Et elle aborde ensuite un calcul théorique.

Le non recours à ce détour est aussi significatif pour certains élèves de type "rationnel". Ainsi Michaël (Annexe 4, page II.103) calcule la valeur des premiers termes d'une suite. Il n'émet aucune conjecture sur la variation de cette suite, qui reste "opaque" en valeur exacte (cf. ci-dessous).

Ni conjectures, ni résultats partiels, Michaël étudie directement le sens de variation de la suite..



Une telle stratégie a son efficacité (en particulier dans un contrôle type bac) ; elle a aussi ses faiblesses : ainsi, lors de la résolution de l'équation $e^x = x^{50}$, le même Michaël oublie la racine négative (Annexe 4, page 59), du fait d'un passage "aveugle" au logarithme. S'il avait tenté la résolution en valeur approchée de l'équation ou considéré les courbes en présence, il aurait plus difficilement oublié la "partie négative" du problème.

Le détour approximatif producteur

Le calcul d'une ou de plusieurs valeurs approchées permet là d'inférer la valeur exacte cherchée.

Quelques exemples :

- une question classique des problèmes de bac : montrer qu'une équation a une solution et une seule (partie théorique), comprise dans un intervalle donné [a, b] (détour approximatif). Il s'agit alors de déterminer f(a), f(b) et de constater, la plupart du temps sur la foi de la machine, que f(a).f(b) < 0.

On conclut alors à partir du "théorèmes des valeurs intermédiaires" mais le résultat numérique qui permet de conclure repose sur l'utilisation de valeurs approchées ;

- une deuxième question classique: à partir de quel rang aura-t-on u_n inférieur à 10^{-n}, une majoration de u_n étant établie (du type $u_n < a^n$). La méthode attendue passe par l'utilisation du logarithme puis l'utilisation du calcul approché. Mais des élèves pourront utiliser tout de suite le calcul approché.

Ainsi Caroline (Annexe 4, page 94) utilise-t-elle un tableau de valeurs pour déterminer à partir de quel rang on aura $u_n < 10^{-5}$.

- dernier exemple, issu du TP 9 (Annexe 4, page 61). Il s'agit de la résolution de l'équation $e^x = x^5$. Les élèves "bricoleurs" vont déduire le nombre des solutions par simple lecture graphique ou utilisation de la commande "Solve" en valeur approchée.

On le voit, la légitimité de ce détour est variable ; il peut aboutir au résultat exact recherché (surtout quand il s'agit de déterminer un nombre entier à partir d'un encadrement comme dans le dernier exemple ci-dessus). Mais la partie théorique qui prouve l'existence des objets recherchés fait souvent défaut.

Le détour approximatif substitut

Il consiste à prendre une valeur approchée, éventuellement "arrondie", comme résultat exact.

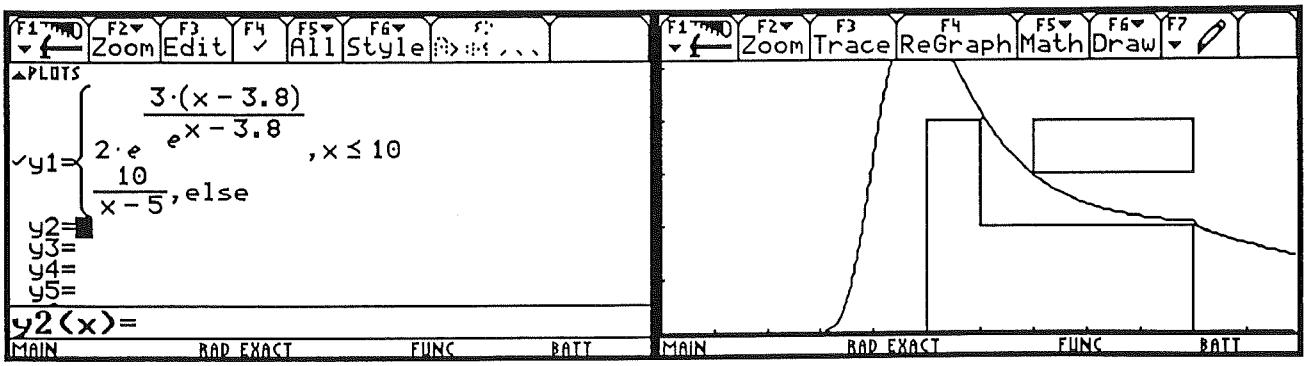
Quatre exemples :

- un premier exemple fondamental dans le contexte TI-92 : l'utilisation de la combinaison de touches "Diamant-Enter" (cf. II.b.1.i.) permet de "résoudre" des équations dont on ne dispose pas de solutions exactes (par exemple $e^x = x^5$).

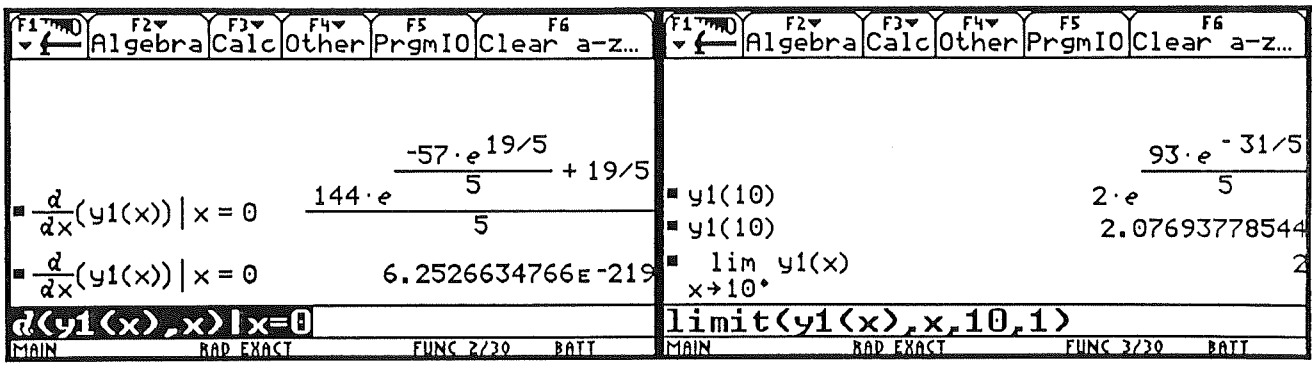
- dans le TP 15 (Annexe 4, page 95), il s'agit de calculer $I_n = \int_0^{\pi} |\sin(nt)|\, dt$. Des élèves "bricoleurs" observent que l'intégrale, pour différentes valeurs de n, est égale "presque" à 2 (la calculatrice ne fait pas le calcul exact de cette intégrale). Ils en concluent que la suite est stationnaire ;

- dans le TP 11 (Annexe 4, page 69), Damien détermine l'équation d'une tangente dans l'application graphique : il trouve y =14, 999 994x + 30, 999 989 (au lieu de 15x + 31). Il propose le résultat approché comme solution du problème ;

- dans le "problème long" (cf II.b.1.iv.), Jérôme met en place une courbe qui est "presque" continue en 10, à dérivée "presque nulle" en zéro :



On verra ci-dessous le contrôle qui prouve que la courbe obtenue est "presque" solution, mais que les contraintes ne sont pas respectées :



On voit les différences entre les deux derniers schèmes relevés :

- le détour approximatif producteur permet (en général) d'arriver au résultat recherché. En fait il s'agit d'un calcul approché qui débouche sur un résultat exact (dans les problèmes de dénombrement mentionnés par exemple) ;
- le détour approximatif substitut, par les méthodes de calcul approché, ne permet pas d'arriver au résultat voulu.

Ces schèmes du détour approximatif interviennent clairement dans la mise en oeuvre des schèmes d'action instrumentée L1 et L2.

Ces observations débouchent sur un nouveau croisement typologique situant L1 et L2 par rapport aux différents types d'élèves et aux différents schèmes (Tableau 9 ci-dessous).

Type	Théorique	Rationnel	Scolaire	Bricoleur	Expérimen-tateur
DA indicatif	L2	L2			L2
DA producteur					
DA substitut			L1/L2	L2	L2

Tableau 9. Les schèmes L1/L2 par rapport aux détours approximatifs et à la typologie.

Cette classification permet de situer les schèmes L1 et L2 sur le plan de la rationalité et du sens des objets manipulés :

1. S'ils s'inscrivent dans le schème d'usage du "détour approximatif indicatif", ils appellent une confirmation (on n'est pas sûr du résultat suggéré) et une démonstration : pour l'élève de type "théorique"(appel des fonctions de référence), pour l'élève de type "rationnel"(mise en oeuvre de techniques de calcul), pour l'élève de type "expérimentateur"(recherche d'autres informations, de validations partielles) ;

2. S'ils s'inscrivent dans le schème du "détour approximatif substitut", ils contiennent en eux-mêmes leur propre confirmation. La validation consiste alors en une description des caractères pertinents de la situation qui ont permis de conclure. Le détour approximatif substitut est un bon stimulant pour exprimer des théorèmes-en-acte erronés.

3. Aucune recherche de limite via L2 ne peut être considérée comme un "détour approximatif producteur". C'est pourtant ce que certains élèves bricoleurs ou expérimentateurs imaginent en mettant en oeuvre ce schème. Ils croient y voir la reproduction de techniques licites pratiquées par le professeur. C'est sans doute une des raisons de la force du schème.

D'autres schèmes d'usage ont un rapport avec le calcul de limites. Mais ils sont moins généraux au sens où ils sont significatifs d'un type de comportement.

Nous en distinguerons trois :

1. Le schème du transport automatique

Les données du problème sont confiées immédiatement à la machine pour "résolution". A l'envers, les résultats de la machine sont recopiés tels quels. Le transport peut avoir lieu aussi de la machine à la machine. Il n'y a ainsi ni traitement ni transformation

Quelques exemples :

- Alexandre et Alice, dans une interrogation écrite, calculent des probabilité égales à $\frac{5}{2}$, $\frac{4\,5}{16}$ (Annexe 4, page II.134). Le jour de la correction, je leur demande : des probabilités peuvent-elles être supérieures à 1 ?". Réponse offusquée : "sûrement pas!". Je leur fais remarquer alors : "pourtant, vous avez noté dans votre copie des probabilités supérieures à 1" ;"Impossible!". Ils relisent leur production et ne repèrent pas l'erreur mentionnée. Il faut que je mette le doigt dessus, pour qu'ils repèrent que $\frac{5}{2}$ est effectivement supérieur à 1.
- Etienne (Annexe 4, page II.94), veut déterminer le rang à partir duquel les termes d'une suite sont inférieurs à 10^{-10}. Il prend sa calculatrice, y "rentre" la suite et les données du problème : 10^{-10} est rentré en "nmax" ;
- Laurent (Annexe 4, page II.88) résout via la calculatrice une équation avec paramètre. La calculatrice donne comme réponse "x=1 or x=0 or m-n=0", qui est recopiée (anglais compris), sans interprétation, en guise de résultat ;
- Rachel (Annexe 4, page II.40) reproduit deux graphiques contradictoires de la fonction sinus sur l'intervalle [0, 610], sans que cela semble poser problèmes ;
- pour terminer, un exemple de "transport automatique" intra-registre (Annexe 4, page II.21) : il s'agit de déterminer la 1000ème solution d'une équation. Laurent détermine la 10ème solution et dit que la 1000ème solution est 100 fois plus grande que la 10ème.

Appliqué comme schème d'usage de L3 (surtout par les élèves scolaires ou expérimentateurs), ce schème pourra consister tout simplement à recopier la réponse de la machine, sans interprétation ni justification.

2. Le schème de l'acharnement localisé.

Nous en avons parlé déjà à propos des élèves bricoleurs (dont c'est une spécialité) en II.b.3.iv. On l'a observé par exemple lors d'un TP où il s'agissait de déterminer une fonction puissance dont la courbe soit tangente à la courbe de la fonction exponentielle (Annexe 4, page II.64). Un "binôme" passe une heure en zooms successifs :

"On veut que x^a soit tangente à e^x.

On a trouvé que a était compris entre 2 et 3. On essaie 2,1, puis 2,3 ..."

A la fin de l'heure, le groupe a trouvé que l'exposant était compris entre 2,71 et 2,72.

A aucun moment une autre approche a été tentée. On n'est pas loin du tonneau des Danaïdes ou du mythe de Sysiphe que nous évoquions en I.a.3.i. !

Appliqué comme schème d'usage de L1 ou L2 (surtout par les élèves bricoleurs), ce schème pourra, par l'effort technique qu'il suppose, constituer pour l'élève à la fois la méthode d'approximation et la méthode de preuve de la limite.

3. Le schème de la confrontation.

Il consiste à multiplier les points de vue sur un objet ou une situation et à inférer de la cohérence des différentes vues la vérité d'une affirmation.

Nous l'avons évoqué aussi en II.b.3.iv. à propos des élèves de type expérimentateur, dont c'est une "spécialité".

Appliqué comme schème d'usage de L2 ou L3, il pourra avoir un double effet :
- accorder aux deux résultats (formel et graphique) la même légitimité ;
- faire de chaque résultat la preuve de l'autre, en supprimant la nécessité d'une validation extérieure à l'outil de calcul.

Comprendre le sens que revêt un schème d'action instrumentée suppose une analyse de chacun des gestes élémentaires, les schèmes d'usage, qui le composent.

Comprendre chacun de ces gestes élémentaires peut passer par le repérage des différentes actions où il entre en jeu.

Inséré dans une nouvelle action, ce geste élémentaire garde en effet la marque des différentes actions où il est déjà intervenu.

En conséquence un même geste (en apparence) peut avoir un sens très différent si on le rapporte à sa propre histoire.

Ainsi en est-il du schème du tir au but qui entre nécessairement dans la mise en oeuvre de L3. Les différentes versions (réfléchi, aléatoire, magique, perplexe) de ce schème permettent de comprendre le sens différent de L3 pour les différents types d'élèves.

Ainsi en est-il du schème du "détour approximatif" qui entre nécessairement dans la mise en oeuvre de L1 et L2. Les différentes versions de ce schème permettent aussi de comprendre le sens différent de L1 et L2 pour les différents types d'élèves.

D'autres schèmes, plus spécifiques de tel ou tel type d'élèves, donnent des éclairages utiles sur L1, L2 ou L3 :

- le schème du transport automatique (élèves bricoleurs ou scolaires) ;
- le schème de l'acharnement localisé (élèves bricoleurs) ;
- le schème de la confrontation (élèves expérimentateurs).

Il ne s'agit pas de dresser une carte exhaustive des schèmes d'usage mais bien d'indiquer une méthode de repérage et d'analyse du sens des actions entreprises.

II.b.3.vi Instrumentation et conceptualisation.

Dans ce qui précède, nous avons inséré les schèmes d'action instrumentée à l'intérieur de l'ensemble de l'action instrumentée de chaque élève. On va désormais considérer comme centrale l'action autonome de l'élève (qui peut ou non décider d'utiliser l'outil de calcul, à la différence du sauteur à la perche évoqué par G. Vergnaud en II.b.3.ii.).

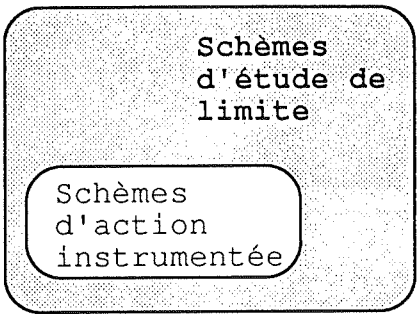


Schéma 1. **Le schème d'action instrumentée, partie instrumentée du schème d'étude de limite.**

Nous allons donc réinsérer les schèmes d'action instrumentée à l'intérieur de l'action de l'élève (cf schéma 1 ci-dessus) pour mettre en évidence les schèmes de calcul de limite (dans leur dimension instrumentée et non instrumentée), l'évolution de ces schèmes et plus généralement les liens entre les processus d'instrumentation et de conceptualisation. Ce sera l'occasion de récapituler ce qui a été dit des liens entre ces deux processus. On présentera dans ce qui suit pour chaque élève :

1. La carte des schèmes de calcul de limite (cf. schéma 2 ci-dessous).

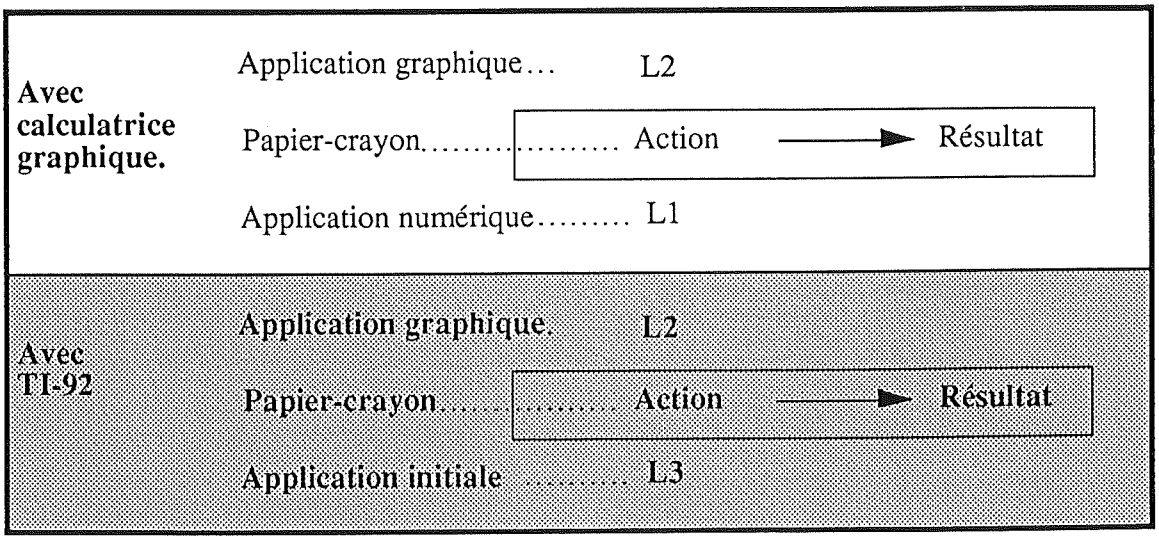


Schéma 2. **Carte des schèmes** (en haut en clair dans un environnement calculatrice graphique, en bas en grisé dans un environnement TI-92).

Le schéma 2 décrit la mise en oeuvre du schème de calcul de limite dans le cadre d'un travail écrit. On a donc présenté comme centrale l'action papier/crayon. La flèche, de gauche à droite, indique le déroulement chronologique de l'action. Autour de ce travail se disposent les schèmes d'action instrumentée relatifs à l'application numérique

pour L1, à l'application graphique pour L2 et à l'application initiale pour la TI-92. La localisation de ces schèmes par rapport à la flèche du temps indiquera le moment où ceux-ci sont mis en oeuvre. A côté de chaque schème, nous indiquerons la nature du geste réalisé (interprétation, extrapolation, lecture de résultat) et le statut de la réponse instrumentée (information, preuve ou vérification). Nous utiliserons ce qui a été dit en II.b.3.iv. et II.b.3.v. pour analyser le rôle des différents schèmes. On analysera enfin l'évolution des schèmes, d'un environnement calculatrice graphique à l'environnement TI-92.

2. L'évolution du processus de conceptualisation.

Nous synthétiserons ici les différents éléments de bilan (en particulier II.b.2.iii. et II.b.2.iv.) en les mettant en relation avec l'évolution des schèmes :
- qu'en est-il des techniques utilisées ?
- qu'en est-il des conceptions exprimées ?

3. L'évolution du rapport à l'instrument.

Nous analyserons cette évolution de deux points de vue : celui du contrôle de l'action instrumentée et celui de l'indépendance vis à vis de l'outil.

On a vu dans l'étude des questionnaires que ces deux "qualités" n'étaient pas confondues : un élève peut très bien recopier les résultats proposés par l'outil de façon automatique (donc sans aucun contrôle) et en même temps pouvoir agir en l'absence de l'instrument (signe d'une certaine indépendance).

4. L'évolution des profils (Schéma 3 ci-dessous).

Nous reprendrons les cartes d'identité des 5 types d'élèves (cf. II.b.1.iii.). On notera avec un symbole facilement identifiable ( ) les progrès réalisés (cf illustration ci-dessous). Il est difficile de quantifier les progrès : la présence du symbole dans une case indiquera simplement que des changements significatifs sont apparus en cours d'année.

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Schéma 3. **Evolution d'un profil**
(Rappel : foncé, outil très sollicité ; clair, outil peu sollicité)

5. Des perspectives d'amélioration du dispositif d'enseignement.

L'observation des évolutions des élèves dans un contexte d'enseignement déterminé nous permettra d'**émettre quelques hypothèses d'amélioration relatives à chaque "profil"** : l'enseignement, dans la classe expérimentale, a été le même pour tous les élèves.
- le dispositif mis en place n'a-t-il pas favorisé certains élèves ?
- n'aurait-il pas fallu un dispositif particulier pour d'autres élèves ? Et si oui, de quelle nature ?

Nous nous situerons ici dans la perspective tracée par A. Robert et J. Robinet :

> *"(...) une partie du travail du chercheur en didactique est de trouver, pour des élèves précis, les méthodes à transmettre, les contrôles à encourager, les automatismes à mettre en place rapidement"* [A. Robert et J. Robinet, 1996].

Nous terminerons ce chapitre sur ces perspectives liées à la typologie.

Jérôme, type "théorique".

1. La carte des schèmes de calcul de limite.

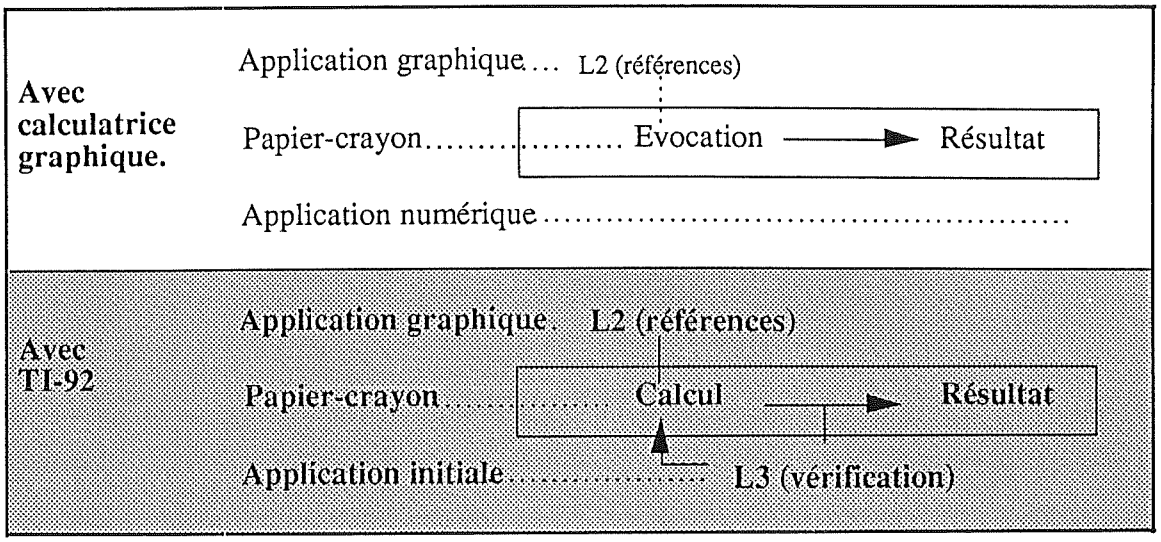


Schéma 4. Jérôme : **évolution des schèmes.**
De gauche à droite le décours temporel de l'action.

Avec calculatrice graphique : la détermination des limites se fait par recours aux fonctions de référence ou par étude des variations de la fonction. Le recours à l'outil de calcul est assez réduit. Le schème L2 est activé (pas systématiquement) comme "détour approximatif indicatif" dans le cadre d'une étude globale de la fonction. Il y a là un schème qui fonctionne en cohérence avec le comportement général de l'élève.

L'introduction de la TI-92 produit un déséquilibre dans le travail : l'outil permet d'obtenir plus que des graphiques. Intégré dans un processus général de recherche, il est davantage sollicité dans son application graphique comme dans son application initiale. **Lorsque l'étude passe d'un environnement calculatrice graphique à un environnement TI-92, le schème se complexifie.** L2 est davantage mis en oeuvre en parallèle avec **une recherche papier/crayon qui s'organise autour des techniques vues en cours.** Ce nouveau type de calcul est lié pour partie au fonctionnement du schème : en effet, après détermination théorique de la limite, il y a mise en oeuvre du schème L3 qui a ici un rôle de vérification. En cas de non concordance des résultats, il faut bien trouver une nouvelle justification (L3 est alors lié aux schèmes du "tir au but réfléchi") : une technique ayant fait faillite, il faut trouver une nouvelle technique de référence.

2. L'évolution du processus de conceptualisation.

On a vu à travers les questionnaires que les techniques avaient profondément évolué : les théorèmes-en-acte erronés sur lesquels reposaient la résolution des premiers exercices se sont estompés au profit **des techniques opératoires et d'encadrement vues en cours.** Simultanément on a constaté un début de mémorisation des définitions des limites : **la verbalisation, dans le cadre de la "définition mathématique" donnée (questionnaire de Janvier et questionnaire de Mai) est correcte.** La définition donnée à un élève de seconde fait cependant encore référence à une conception monotone et la mise en oeuvre de L2 traduit une étude locale en référence à une étude globale. **Ces élements contradictoires laissent penser qu'une nouvelle conception se construit sur les ruines de l'ancienne.**

Un double mouvement contribue à expliquer cette évolution positive :

- **l'évolution de l'action instrumentée, plus complexe, qui contraint à trouver de nouveaux équilibres entre l'observation, l'évocation et les calculs.** C'est sans doute une manifestation d'un processus d'assimilation-accomodation (cf Piaget en 0.b.2.i.) ;
- l'intérêt de ce type d'élève pour les problèmes de définition d'objets. **Toute nouvelle connaissance entraîne pour lui une réorganisation partielle des anciennes.** C'est un type de stockage d'informations (cf. II.b.1.iii.) évidemment très important dans le processus de conceptualisation. Cela ne veut pas dire bien sûr que cette réorganisation soit définitive.

3. L'évolution du rapport à l'instrument.

i) le contrôle : en début d'expérimentation, on avait noté un "contrôle moyen" de cet élève sur son travail en général et dans l'action instrumentée en particulier. **Avec la TI-92 on constate un contrôle beaucoup plus fort lié aux vérifications possibles mais aussi au changement du type de preuves** : l'évocation de résultats de référence et l'analogie peuvent être des atouts, elles peuvent aussi diminuer le contrôle des résultats, rendre plus sensible aux apparences trompeuses. Le passage à une meilleure organisation des preuves renforce le contrôle mathématique de ce qui est fait.

ii) la dépendance : il y a une indépendance certaine vis à vis de l'outil. Il suffit de considérer la carte des schèmes (schéma 4 ci-dessus) pour constater que la détermination de limite peut se faire aussi bien avec, que sans, l'outil de calcul.

4. L'évolution du profil.

Nous avons inséré dans la carte initiale les symboles manifestant des progrès.

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Schéma 5. Jérôme : **évolution du profil.**

On a pu constater à travers ce qui précède que l'outil de calcul est davantage sollicité. Le complexification du schème induit des **comparaisons** des résultats obtenus dans différents registres. Les vérifications, le schème du "tir au but réfléchi" nécessitent le développement d'**inférences**, un travail **Papier/Crayon** mieux organisé. L'évolution positive constatée est ainsi due pour partie à la genèse instrumentale (cf. 0.b.5.iv.), mais celle-ci est liée aux situations de classe dans laquelle elle a pris forme.

Quant au développement d'une collaboration de travail avec le **voisin**, c'est une conséquence de l'investissement dans le travail de recherche de l'année.

On obtient ainsi en fin d'année une équilibration du profil. Cela ne veut pas dire bien sûr que toutes les "métaconnaissances globales" fonctionnent de la même façon ! Plus encore que l'évolution des conceptions, l'évolution de la "pensée logico-mathématique" (cf. 0.b.3.iv.) est sans doute un long processus.

5. Des perspectives d'amélioration de l'enseignement.

De façon générale, l'enseignement organisé dans la classe expérimentale convenait parfaitement à ce type d'élève : intéressé par la recherche, adhérant donc au projet défini en début d'année, il ne pouvait que s'investir dans le cadre proposé. D'où les progrès constatés. Quant à la conceptualisation des limites, **il aurait été possible d'aller plus loin** : la distinction des études locales et globales peut passer par l'étude de fonctions particulières, des rapports entre monotonie et existence de limite. **Cela suppose un dispositif particulier d'approfondissement.**.

Elsa, type "rationnel".

1. La carte des schèmes de calcul de limite.

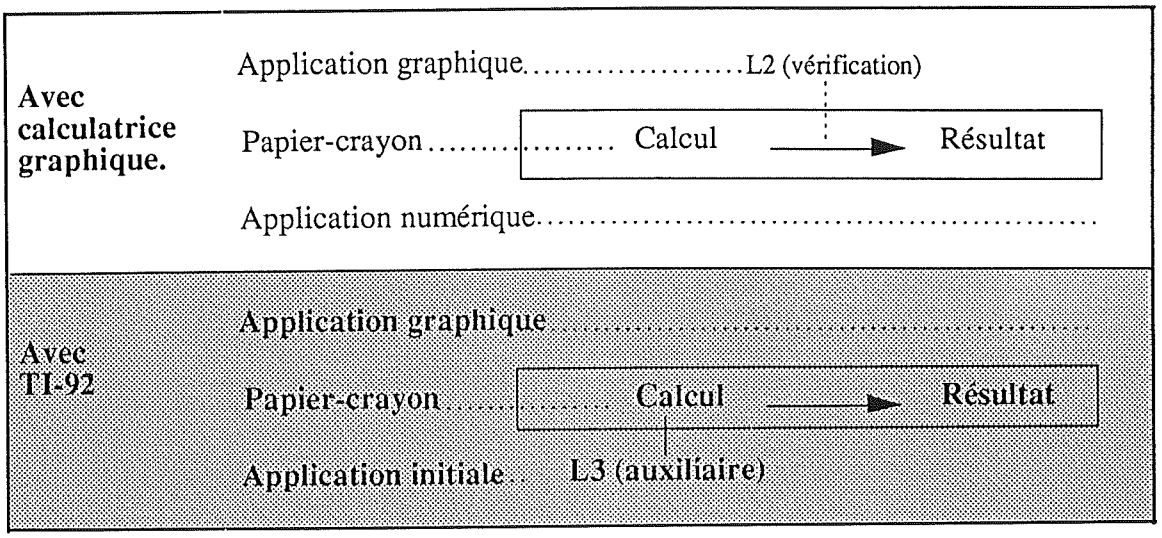


Schéma 6. Elsa : **évolution des schèmes.**
De gauche à droite, le décours temporel de l'action.

Avec calculatrice graphique : le calcul de limite est réalisé dans le cadre "papier-crayon". Ensuite, éventuellement, le schème L2 est activé en guise de vérification (comme "détour approximatif indicatif"). Mais ce schème ne correspond pas à une action habituelle de ce type d'élève : celle-ci est linéaire et procède rarement par changement de registre et comparaison.

L'introduction de la TI-92 produit un changement complet dans l'action instrumentée. Il y a à la fois **simplification** de cette action (c'est désormais le seul registre des écritures algébriques qui fonctionne, l'application graphique n'est plus sollicitée) et **complexification** de cette action : le schème L3, régulièrement activé, n'a pas simplement le rôle de vérification, il est intégré dans des allers et retours entre les résultats souhaités (fournis par la calculatrice) et les résultats obtenus. A la différence de Jérôme, pour lequel il s'agit d'une simple vérification, ici il y a imbrication de l'action instrumentée et de l'action papier/crayon. L3, manifestant ainsi un travail moins linéaire, est clairement un schème de "tir au but réfléchi".

2. L'évolution du processus de conceptualisation.

Nous avons pu observer à travers les deux questionnaires deux phénomènes :
- les techniques utilisées sont en général correctes ;
- la définition "experte", mémorisée lors du questionnaire de Janvier, a été oubliée en Mai au profit d'une définition "monotone". Cet oubli n'est pas fortuit : il semble correspondre à un phénomène plus profond. Ainsi Elsa n'arrive pas à traiter l'équation $\ln x = 250 \sin x$: la confrontation d'une fonction à limite infinie et d'une fonction bornée n'est pas vue.

La définition de Mai, qui fait référence à une conception monotone, n'a cependant pas de conséquence pour la résolution des exercices de calcul. Les techniques opératoires ou de comparaison sont convenablement utilisées. Elsa manipule ainsi un objet - la limite d'une fonction - en lui appliquant des règles de calcul correctes, mais sans s'intéresser à sa définition. On a là l'expression d'une **conception algébrique des limites** qui perdure tout au long de l'année.

Un double mouvement contribue à expliquer cette situation :

- un comportement habituel de ce type d'élèves déroulant de façon linéaire un travail donné. Tout pas de côté, tout recul sur la tâche ne correspondent pas à une attitude naturelle. Il n'y a donc pas de réflexion particulière sur les objets manipulés. **Cela traduit aussi un certain type de stockage des connaissances nouvelles qui n'entraîne pas une réorganisation des connaissances anciennes.** Ainsi la nouvelle définition des limites a été provisoirement stockée comme nouvelle connaissance, mais en laissant intacte la définition ancienne. Ce qui fait que, si en Janvier la nouvelle définition, plus "fraîche", est disponible, trois mois plus tard, c'est la définition ancienne qui reprend ses droits ;
- l'évolution de l'action instrumentée va dans le même sens : l'utilisation d'une calculatrice graphique contraignait à une coordination de plusieurs registres (et donc à se poser nécessairement des questions relatives au sens des concepts de limites utilisés). **Le passage à la TI-92 restreint la réflexion au seul calcul de limites dans l'application initiale.**

3. L'évolution du rapport à l'instrument.

i) le contrôle : en début d'expérimentation, on avait indiqué un "contrôle fort" de ce type d'élève sur son travail en général et sur l'action instrumentée en particulier. L'arrivée des TI-92 se traduit par une sollicitation beaucoup plus forte de l'outil (on l'a constaté en particulier à travers le tableau 4 en II.b.3.iv.) ; **le contrôle sur l'outil reste cependant aussi fort.** La démonstration des résultats proposés reste toujours aussi nécessaire.

ii) la dépendance : comme pour l'élève de type théorique, on constate une indépendance certaine vis à vis de l'outil. Les études de limite peuvent se faire avec ou sans instrument.

4. L'évolution du profil.

Nous avons repris la carte initiale en repérant les éléments de progrès.

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Schéma 7. Elsa : **évolution du profil.**

La calculatrice, on l'a dit, est beaucoup plus sollicitée, comme auxiliaire de calcul. Les interactions avec le voisin dans le cadre des TP sont beaucoup plus nombreuses : ce changement est lié à l'évolution de la "comparaison", c'est à dire à l'intégration des TI-92. En effet, tant que le travail était uniquement linéaire, il était nécessairement individuel. Dès lors que des allers et retours s'organisent entre des conjectures et des réfutations, même partielles, il y a place pour des échanges inter-personnels.

Une faiblesse demeure, relative à la coordination de différents registres : on a remarqué que le travail était réduit à l'application initiale et aux calculs algébriques.

5. Des perspectives d'amélioration de l'enseignement.

Cette dernière faiblesse nécessite de proposer à ce type d'élèves des situations de changement de cadres et de registres aussi bien dans le travail papier/crayon que dans l'action avec instrument.

Quant au concept de "limite", sa construction nécessite d'insister sur les questions de définition (et donc de ne pas en rester au "langage des limites") et de **mettre cette définition en rapport avec des situations où les limites interviennent comme outils de résolution.**

Rachel, type "scolaire".

1. La carte des schèmes de calcul de limite.

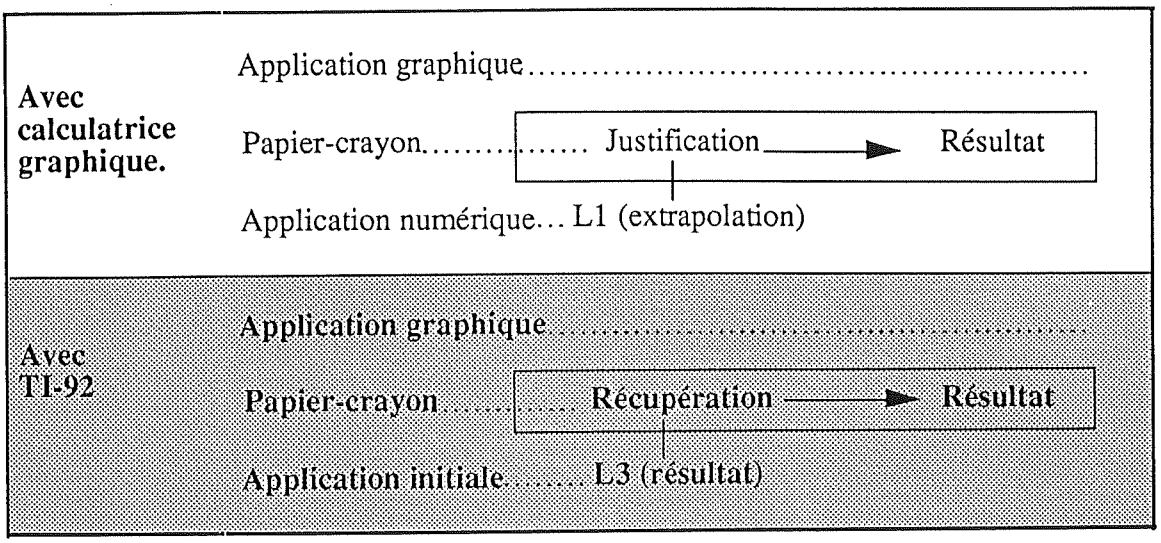


Schéma 8. Rachel : **évolution des schèmes.**
De gauche à droite, le décours temporel de l'action.

Avec une calculatrice graphique, le "calcul" de limite, dans le cadre du schème L1, est opéré par extrapolation. Cela donne l'occasion d'un certain effort cognitif : d'abord pour manipuler l'outil de calcul, ensuite pour interpréter le résultat. C'est le "détour approximatif substitut". Le travail papier/crayon consiste alors à justifier le résultat proposé, ce qui se fait par explicitation (quand c'est possible) des critères qui ont permis l'extrapolation. On retrouve là les "théorèmes-en-acte" déjà évoqués.

Le passage à la TI-92 se traduit par des changements importants : le schème L3 dispense d'un travail d'extrapolation et de justification (ce qui ne veut pas dire que ce travail de justification n'est jamais tenté, cf le "schème de "tir au but perplexe" en II.b.3.v.). L'effort fourni avec une TI-92 est en général moins important qu'avec une calculatrice graphique (seul demeure l'effort de syntaxe). **Il y a une simplification du schème.**

2. L'évolution du processus de conceptualisation.

On a noté lors du premier questionnaire une absence de définition de la limite. Mais si l'on considérait les techniques annoncées ou mises en oeuvre, ou le schème L1 d'action instrumentée, **la conception qui émergeait était intermédiaire entre une conception primitive et une conception monotone. Plus exactement, il semblait s'agir d'une conception en formation** : la limite elle-même était en "devenir" ("la limite tend vers"...). On a aussi constaté un éclatement des théorèmes-en-acte erronés : on pourrait dire que cette création de théorèmes correspondait à un besoin de cohérence. Il s'agissait de faire correspondre une situation donnée à une conception encore floue.

Le deuxième questionnaire donne une autre image de l'état de la conceptualisation. Plus aucune technique annoncée, ni mise en oeuvre. Il semble que l'utilisation de la TI-92 a un double effet : **en même temps, il y a création d'un objet mathématique, "la limite d'une fonction" (on ne dit plus "la limite tend vers...", mais "la limite est..."). Et en même temps il y a évanouissement de sa "réalité"**. La "limite" est le résultat de la commande correspondante de la calculatrice.

Il n'y a plus d'effort d'interprétation du résultat : celui-ci a l'autorité de la calculatrice. On peut décrire cette situation (absence de techniques, de définitions et d'effort de compréhension) en parlant **de délitement de conception.**

Un double mouvement contribue à expliquer cette situation :

- l'évolution de l'action instrumentée : **la calculatrice est davantage sollicitée mais pour une action plus frustre** (action de la commande et lecture du résultat) ;
- les habitudes de travail de ce type d'élèves : **on a parlé de stratégie de "copié-collé" qui s'adapte parfaitement ici. Le résultat est repéré sur l'écran de la calculatrice et recopié.** Les capacités de stockage très faibles de ces élèves sont aussi à prendre en compte. Dès qu'il n'y a plus de travail régulier sur une notion donnée, celle-ci s'estompe. La présence de la calculatrice dispense justement de ce travail régulier de justification.

3. L'évolution du rapport à l'instrument.

On avait noté en début d'année un contrôle assez faible sur l'action instrumentée. L'obtention automatique des résultats avec la TI-92 a des conséquences importantes pour les rapports à l'instrument : à la différence de Jérôme et Elsa, **Rachel est désormais complètement dépendante de sa "prothèse". Sans machine, elle ne peut plus rien faire. Avec machine, elle perd tout contrôle sur le résultat proposé.**

4. L'évolution du profil.

Nous avons noté dans la carte initiale ci-dessous un progrès dans la mobilisation de la calculatrice et dans l'investigation. Celui-ci doit être relativisé :

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Schéma 9. Rachel : **évolution du profil.**

- la TI-92 est en effet beaucoup plus sollicitée. Mais on a vu en II.b.3.v. que les schèmes d'usage qui étaient mis en oeuvre (le "tir au but aléatoire ou perplexe", le "détour approximatif substitut", le "transport automatique") ne témoignaient pas d'un progrès de "l'esprit scientifique", c'est à dire de la comparaison, de l'interprétation, de l'inférence ;
- les progrès dans l'investigation vont entraîner comme pour l'élève de type "rationnel" un travail moins linéaire ; mais à la différence de celui-ci, cela ne se traduira pas par des allers et retours entre conjectures, preuves et réfutations, mais tout au contraire par **un émiettement de la réflexion** ;
- l'utilisation plus importante de la calculatrice est "équilibrée" par un travail papier/crayon beaucoup plus réduit.

5. Des perspectives d'amélioration de l'enseignement.

C'est probablement pour ce type d'élèves que le tutorat est le plus nécessaire (il l'est déjà dans les situations "ordinaires" de classe ; il l'est sans doute encore plus dans l'action instrumentée). On peut distinguer trois directions de travail spécifique :

- **un travail particulier sur le langage** : à la fois sur le langage particulier de la calculatrice et sur une verbalisation claire et précise qui permette de décrire (et de commencer à fixer) les objets mathématiques manipulés ;
- **un travail sur le contrôle de l'outil**, ce qui suppose (en particulier) d'alterner des phases de travail avec et sans calculatrice ;
- **un travail sur le contrôle de "la chaîne de production" mathématique.** Lutter contre l'émiettement des tâches et les stratégies de copié-collé suppose de donner des exercices particuliers : assez complexes pour nécessiter l'utilisation de différents cadres de travail, assez simples pour pouvoir en contrôler de bout en bout la cohérence.

Sébastien, type "bricoleur".

1. La carte des schèmes de calcul de limite.

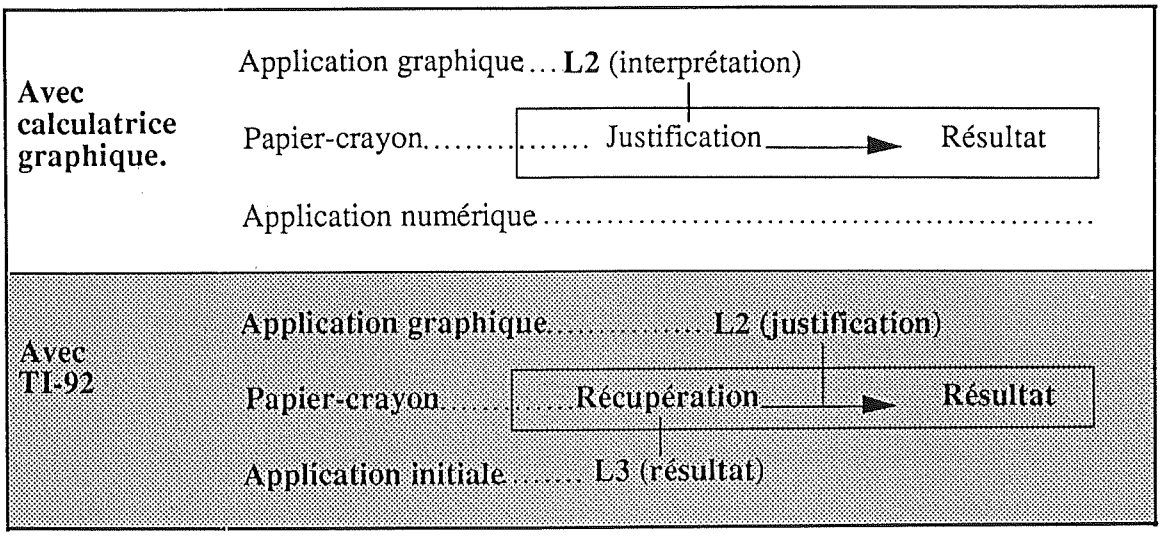


Schéma 10. Sébastien : **évolution des schèmes.**
De gauche à droite, le décours temporel de l'action.

Avec calculatrice graphique, le schème semble être du même type que pour Rachel (voir pages précédentes). Mais ici c'est l'application graphique qui est mobilisée et la calculatrice est utilisée avec beaucoup plus "d'adresse" (cf II.b.3.iv.). C'est ici aussi un schème de "détour approximatif substitut".

Avec une TI-92, le travail commence par l'activation du schème L3. Le mot "récupération" utilisé dans le schéma 5 ci-dessous peut avoir des sens différents :

- il peut indiquer l'inscription de L3 dans un schème plus général de "tir au but aléatoire" ou de "tir au but magique". Il s'agit alors de tenter une série de manoeuvres algébriques pour établir le résultat donné par le logiciel ;
- il peut s'agir aussi d'une manifestation d'un schème de "transport automatique". Le résultat vu sur l'écran est alors simplement "transporté" sur la feuille ;

La plupart du temps, c'est le schème L2 qui permettra, en retrouvant les théorèmes-en-actes habituels, d'assurer la justification a posteriori du résultat.

Il y a donc une **complexification du schème** avec une TI-92 et un **déplacement de l'effort cognitif** :

- avec une calculatrice graphique, l'effort portait sur l'interprétation des courbes ("de quelle limite portent-elles la trace ?") ;
- avec une TI-92, l'effort porte sur l'établissement de rapports entre des résultats sur les limites connus (grâce à L3) et des représentations graphiques partiellement connues (grâce à L2).

2. L'évolution du processus de conceptualisation.

Comme pour l'élève de type scolaire, on constate la simultanéité entre l'intégration de la TI-92 et l'identification d'un objet constitué : Sébastien ne dit plus : "la limite tend vers", mais "la limite est".

Il y a en même temps création d'un objet, la limite et dédoublement du point de vue sur celui-ci. On constate en effet :

- la mobilisation d'un point de vue algébrique à travers L3 comme "tir au but aléatoire" (mise en oeuvre d'opérations sur les limites connues pour retrouver le résultat proposé par la TI-92) ;

- la mobilisation, en tant que de besoin, des théorèmes-en-acte liés aux lectures graphiques de L2 (expression d'une conception monotone).

Mais dédoublement sans confrontation. C'est une sorte d'ubiquité du concept. On a souvent constaté pour ces élèves une conceptualisation en compartiments étanches. L'instrumentation va ici dans le sens de cette **superposition.**

3. L'évolution du rapport à l'instrument.

Il faut distinguer ici soigneusement le contrôle et l'indépendance.

i) le contrôle : nous avions signalé en début d'expérimentation un contrôle assez faible de ce type d'élève sur son travail. **Il semble bien que ce contrôle soit inversement proportionnel à la puissance de l'outil.** La fréquence d'apparition du schème du "transport automatique" avec la TI-92 traduit bien cette faiblesse du contrôle.

ii) la dépendance : nous notions dans la mise en place de notre typologie (cf II.b.1.iii.) que le "stockage" fonctionnait bien pour tout ce qui concernait la calculatrice. On constate en effet que les habitudes de travail acquises dans le fonctionnement avec instrument se maintiennent en l'absence de celui-ci. A la différence de l'élève de type scolaire qui ne peut plus rien faire en l'absence de l'outil, les élèves de type bricoleur agissent sur le même modèle en présence ou en absence de l'outil (évidemment dans un cas les réponses seront justes -du fait de la TI-92-, dans l'autre cas les réponses seront fausses) : il suffit de considérer les protocoles 13 à 16 pour constater la proximité des réalisations. Cet état de fait ne doit pas être considéré comme la marque d'une indépendance, mais au contraire comme le signe d'une grande dépendance vis à vis de l'outil : **la main et l'esprit ont une telle habitude de l'outil qu'ils en gardent la mémoire en l'absence de celui-ci.**

4. L'évolution du profil.

On ne constate aucun progrès dans le travail papier/crayon : il semble même que, comme le contrôle, celui-ci soit inversement proportionnel à la puissance de l'outil.

Deux progrès notables : la complexité de la TI-92 a entraîné une collaboration plus importante dans les groupes de TP associant des élèves de type "bricoleur", ainsi qu'un travail d'interprétation plus développé (le "zapping" est moins rapide). Ceci découle du passage du "détour approximatif" au "tir au but" : quand Sébastien recherche une limite avec une calculatrice graphique par exemple, il multiplie les fenêtrages (le" window shopping") pour se rapprocher "le plus près possible" du point considéré ; ceci devient inutile avec une TI-92 qui donne la limite cherchée. Il faut alors justifier ce résultat et pour cela il n'est pas utile de multiplier les points de vue. Il faut au contraire interpréter le résultat lui-même ou la courbe pour trouver des arguments pertinents.

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Schéma 11. Sébastien : **évolution du profil.**

5. Des perspectives d'amélioration de l'enseignement.

L'essentiel est ici de contrôler l'utilisation de l'outil : il faut donc multiplier les exercices qui ne peuvent être traités qu'en partie par la calculatrice. L'outil permet d'initialiser la réflexion, de faire apparaître d'éventuelles contradictions. Le travail papier/crayon, la recherche des références, la comparaison et l'inférence sont alors les seuls outils pertinents.

Christelle, type "expérimentateur".

1. La carte des schèmes de calcul de limite.

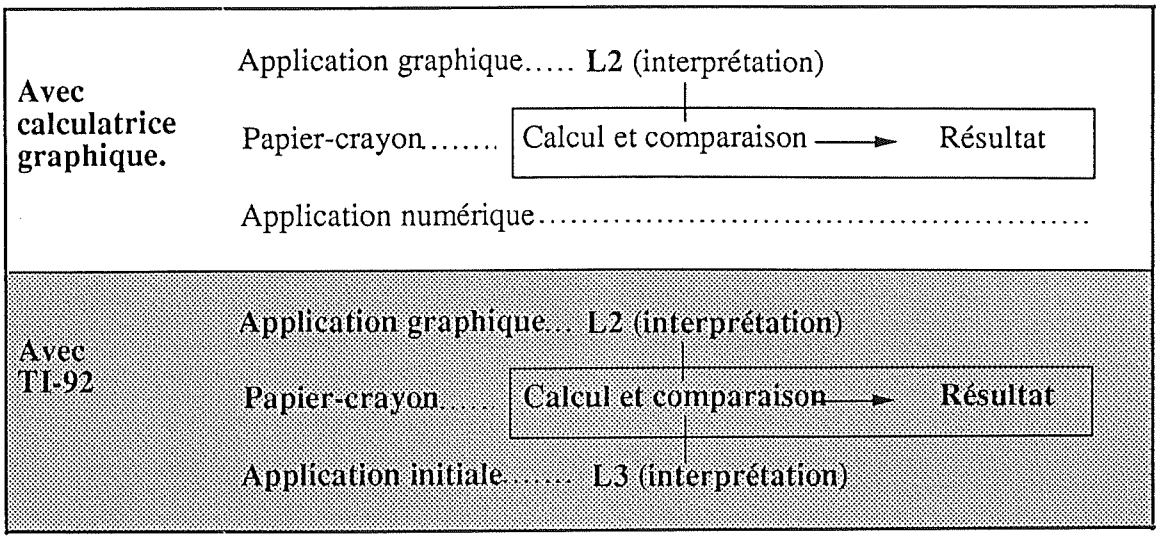


Schéma 6. Christelle : **évolution des schèmes.**
De gauche à droite, le décours temporel de l'action.

Avec calculatrice graphique, le schème L2 est mis en oeuvre, mais dans un autre contexte que pour Sébastien (voir pages précédentes) : Christelle mène en parallèle une observation/interprétation graphique et un calcul papier/crayon. Le résultat sera issu du croisement des deux sources d'information. Le travail papier/crayon comportera à la fois le calcul et la comparaison de celui-ci avec les résultats de l'action instrumentée. On a vu que le calcul ("à la main") n'avait pas nécessairement une autorité supérieure à celle de l'observation graphique (cf. II.b.3.iv.). On pourra ainsi ranger le schème L2 soit parmi les schèmes du "détour approximatif substitut", soit parmi les schèmes du "détour approximatif indicatif".

Le passage à la TI-92 n'entraînera pas une rupture avec ce type de travail. Il en constituera un enrichissement avec l'interprétation coordonnée des résultats de L2 et de L3. **Il y a donc une complexification du schème du calcul de limite qui constitue ici une bonne illustration du schème de la confrontation** (cf. II.b.3.v.) avec une conséquence possible : la suppression de la nécessité d'une validation extérieure à l'outil de calcul, en faisant de chacun des résultats (obtenus dans les applications graphique et initiale) la preuve de l'autre.

2. L'évolution du processus de conceptualisation.

Nous avons noté lors du questionnaire de Janvier la mémorisation de la définiiton "experte" de limite pour les deux élèves de ce type. En Mai Fabienne se souvient de cette définition, Christelle en est revenu à une définition "monotone". C'est une situation intermédiaire entre celle que nous avons notée pour les élèves "théoriques" et celle que nous avons notée pour les élèves "rationnels" : pour les élèves "expérimentateurs", **le bon fonctionnement de la comparaison permet une réorganisation des connaissances lors de l'apprentissage d'une nouvelle notion. Mais les références étant mal stabilisées, cette réorganisation peut être éphémère.** On peut même dire que cette réorganisation est permanente, très sensible au contexte, à l'environnement. C'est ainsi que l'on peut interpréter la différence considérable des réalisations des deux élèves qui composent avec ou sans calculatrice :

- l'élève qui compose sans calculatrice utilise des techniques correctes pour traiter les exercices ;
- Christelle évoque des théorèmes-en-actes erronés qui font référence à une conception "monotone" ou "primitive" des limites et lui permettent d'interpréter les résultats obtenus avec la calculatrice.

On parlera pour décrire ce processus de **reconstruction permanente.**

3. L'évolution du rapport à l'instrument.

Nous distinguerons aussi le contrôle et l'indépendance.

i) le contrôle : nous avions signalé en début d'année pour ce type d'élève un contrôle moyen sur son travail. Il y a un affaiblissement de ce contrôle avec les TI-92. Ceci ne se manifeste pas comme pour les élèves bricoleurs par des schèmes de "transport automatique", mais par **une stratégie de confrontation non hiérarchisée** : la TI-92 donne accès à plus d'informations. L'activité tend alors à se réduire à un croisement de celles-ci, avec une diminution du recours aux références construites.

ii) la dépendance : la suppression de l'outil n'entraîne pas la paralysie (comme pour Rachel ou Sébastien), mais modifie considérablement le type de travail. Celui-ci devient beaucoup plus linéaire, fait davantage appel aux apprentissages scolaires.

4. L'évolution du profil.

Nous avons relevé dans la carte initiale les éléments de progrès.

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Schéma 13. Christelle : **évolution du profil.**

Le travail avec une calculatrice graphique favorisait la recherche de nombreuses informations sans changement de registre (par exemple via le "window shopping"). Il s'agissait alors de comparer les différents résultats. Avec la TI-92, certaines informations sont plus difficiles d'accès (on a signalé quelques difficultés d'adaptation à cette calculatrice pour ce type d'élèves en II.b.3.iv.), les informations sont issues de différents registres. **La mise en oeuvre du schème de confrontation demande donc une interprétation des données beaucoup plus importante.**

On a signalé aussi un progrès dans la construction des références, en notant toutefois le caractère fragile des nouvelles acquisitions. Il reste une faiblesse en ce qui concerne l'inférence : l'impression est que celle-ci n'est mise fortement à contribution que dans des circonstances exceptionnelles (dans le travail sans instrument par exemple).

5. Des perspectives d'amélioration de l'enseignement.

Il paraît décisif pour ce type d'élèves d'apprendre à hiérarchiser les différentes informations. Cela peut passer par une **mise en évidence de certaines faiblesses des outils de calcul**, une **construction continue des notions mathématiques essentielles** (ce qui signifie rappeler régulièrement définitions et théorèmes) et la dévolution de problèmes dont la résolution passe nécessairement par l'utilisation des références construites. **Cela peut passer aussi par la succession de travaux avec et de travaux sans calculatrice.** La différence profonde entre les deux types de réalisations peut être un sujet de réflexion profitable : ce serait une mise en oeuvre particulière du schème de la confrontation !

Instrumentation et conceptualisation.
(en guise de conclusion de II.b.3.vi.)

1. Un bilan des différents types.

Nous avons résumé dans le tableau 1 ci-dessous ce que nous venons de dire des différents types.

Type	Conceptualisation	Instrumentation
Théorique	**Construction d'une conception "experte".**	**Complexification : L2 → L2 / L3**
Rationnel	**Construction d'un système de règles (conception algébrique).**	**Complexification/ simplification : L2 → L3**
Scolaire	**Délitement des conceptions.**	**Simplification : L1 → L3**
Bricoleur	**Superposition des conceptions primitive, monotone et algébrique.**	**Complexification : L2 → L3 / L2**
Expérimentateur	**Construction ouverte par confrontation des différents conceptions.**	**Complexification : L2 → L2 - L3**

Tableau 1 : conceptualisation et instrumentation.

2. Une certaine confirmation de nos hypothèses.

Nous avancions en 0.c.3.ii. trois hypothèses :

H' 1. L'utilisation de la TI-92 a un effet important sur les processus de conceptualisation ;
H' 2. Cet effet est lié aux processus d'instrumentation, eux-mêmes liés aux contraintes de l'outil et aux actions qu'il favorise ;
H' 3. Les processus d'instrumentation sont liés aux "profils" des élèves.

Ce que nous venons de voir confirme la troisième hypothèse : alors que l'enseignement et l'intégration de la TI-92 ont été les mêmes pour tous les élèves, les processus d'instrumentation sont clairement liés aux différents profils. **On ne peut comprendre les différentes instrumentations qu'en relation avec les schèmes d'usage mis en évidence,** liés aux différents profils d'élèves.

Quant aux deux premières hypothèses, ce que nous avons vu nous conduit à une reformulation. Il est en effet unilatéral de dire que le processus d'instrumentation a une influence sur le processus de conceptualisation. Le processus inverse est sans doute aussi réel. **On ne peut comprendre les processus d'instrumentation et de conceptualisation que dans les rapports profonds qui se nouent entre eux.**

Ainsi, pour l'élève de type "rationnel", le travail habituel prend la forme d'un déroulement linéaire de calculs. Nous avons repéré pour cet élève une conception algébrique des limites, vues comme un ensemble de règles de calcul. C'est donc "naturellement" que l'intégration des TI-92 se traduit par l'abandon du schème L2 ("imposé" par les calculatrices graphiques) et le recours au schème L3. **C'est là une manifestation de l'influence du processus de conceptualisation sur le processus d'instrumentation.**

Mais en retour la mise en oeuvre régulière du schème L3 va produire une **amplification de cette conception algébrique** : l'étude des limites, dans le cadre du schème du "tir au but", se fait par référence à des règles de calcul et par référence à un résultat donné par la calculatrice. **C'est là une manifestation de l'influence du processus d'instrumentation sur le processus de conceptualisation.**

Notre conclusion est ainsi double :

- les processus d'instrumentation et les processus de conceptualisation sont liés ;
- la nature de ces liens dépend du concept étudié, de l'instrument utilisé et du profil des élèves.

Cependant, dans des situations d'enseignement, il s'agit, à un moment donné, du même concept à construire et du même instrument (aujourd'hui les calculatrices graphiques, demain les calculatrices symboliques) pour toute la classe. C'est donc la prise en compte des profils d'élèves par l'enseignant qui est essentielle pour le contrôle de l'influence des instruments dans le processus d'apprentissage.

3. Les conséquences de la complexité de l'outil.

Cette prise en compte est d'autant plus importante que l'outil est complexe. On l'aura constaté, **le passage des calculatrices graphiques aux calculatrices symboliques s'est traduit dans la classe expérimentale par une dispersion beaucoup plus grande des comportements** :

- pour certains élèves, l'intégration d'un outil plus complexe s'est traduite par une complexification (c'est à dire un enrichissement), pour d'autres, il s'est traduit par une simplification (c'est à dire par un appauvrissement) de l'action instrumentée ;
- pour certains élèves, l'intégration d'un outil plus complexe s'est traduite par un contrôle plus grand sur son action, pour d'autres élèves elle s'est traduit par un contrôle moins grand ;
- pour certains élèves, l'intégration d'un outil plus complexe s'est traduite par une diversification des cadres et registres d'étude, pour d'autres, il s'est traduit par un appauvrissement de ceux-ci ;

- pour certains élèves, l'intégration d'un outil plus complexe s'est traduite par un développement du travail papier-crayon, pour d'autres il s'est traduit par une réduction de ce travail.

On pourrait multiplier les points de vue comparatif : plus l'outil est complexe, plus il révèle les forces et faiblesses des élèves. Ce résultat est d'autant plus important que les élèves utilisent souvent cet outil :

- dans un environnement "classique", le maître produit des mathématiques au tableau, les élèves les reproduisent sur leur cahier et produisent à leur tour des mathématiques (devoirs, interrogations écrites) que le maître contrôle. C'est-à-dire que l'essentiel des mathématiques de la classe est produit par le maître et la partie la plus importante des mathématiques produites par les élèves est contrôlée par le maître ;

- la situation est totalement inversée dans un "environnement calculatrice". L'essentiel des résultats mathématiques provient de la calculatrice et la plus grande partie de l'action instrumentée des élèves échappe au maître.

Les pistes "d'amélioration de l'enseignement" que nous avons données pour chaque type sont sans doute essentielles pour éviter que ne se creusent les écarts entre les élèves de différents profils.

4. Comprendre la typologie comme un outil.

La typologie que nous avons mise en place a permis de mettre en évidence cette dispersion des comportements. Il ne faudrait pas en conclure mécaniquement que tous les élèves de même "type" auraient suivi la même évolution. Il faut rappeler qu'ont été choisis, pour suivre chaque type, des cas de figure extrêmes. Si l'on avait considéré d'autres élèves de la classe, on aurait sans doute obtenu des profils atténués qui seraient peut-être plus "représentatifs", mais ne permettraient pas de déterminer les tâches spécifiques de l'enseignant dans toute leur diversité : à s'adapter aux individus "moyens", on ne s'adapte en fait à personne. Par contre, la prise en compte des profils extrêmes permet de déterminer l'amplitude des adaptations nécessaires.

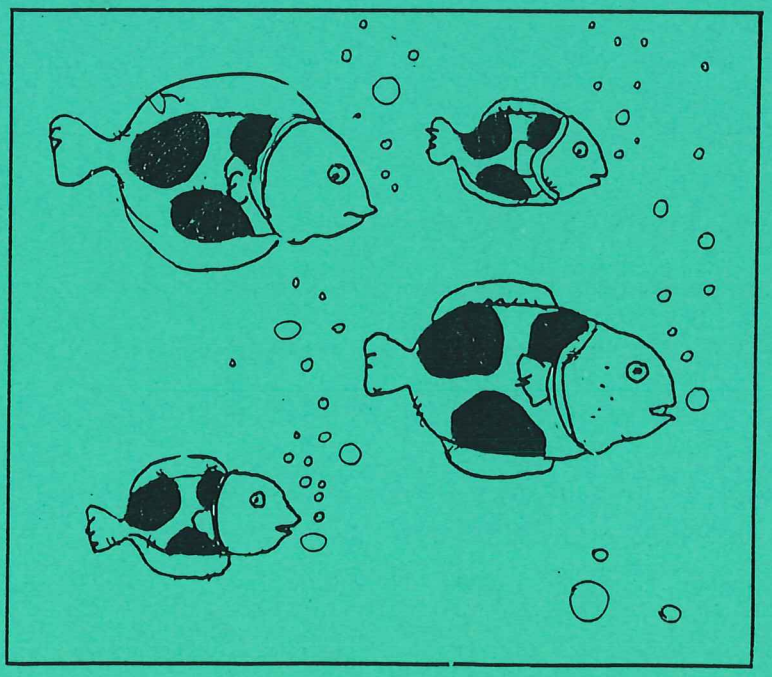
A la lumière de ces résultats, nous allons examiner maintenant quelques propositions de rénovation de l'enseignement de l'analyse (III.a.) et quelques propositions plus spécifiques relatives à l'enseignement des limites.

Enfin cette étude débouchera sur des propositions pour le contrôle de l'intégration des instruments dans la classe (III.c.1.), sur des propositions institutionnelles (III.c.2.) et sur de nouvelles pistes de recherches (III.c.3.).

III Perspectives

Peut-on dire, comme le croient certains partis,
que les limites d'une nation sont écrites sur la carte,
et que cette nation a le droit de s'adjuger
ce qui est nécessaire
pour arrondir certains contours,
pour atteindre telle montagne, telle rivière,
à laquelle on prête
une sorte de faculté limitante a priori ?

Renan, discours et conférences



Sommaire de la partie III. Discussion des remèdes.

III.a Critique des approches hagiographiques p.329

III.a.1. Apologie du graphique (Gasquet). p.329

III.a.2. Apologie des calculatrices graphiques (Ferrand). p.330

III.a.3. Apologie des logiciels de calcul formel (Kutzler). p.332

III.b. Critique de quelques perspectives générales p.337

III.b.1. Une méthode progressive (Antibi). p.337

III.b.2. La recherche des racines (Tall). p.339

III.b.3. Le changement de l'analyse à enseigner (Deledicq). p.342

III.c Quelques propositions p.347

III.c.1. Pour la classe, une intégration contrôlée. p.347

III.c.2. Des nécessités institutionnelles. p.354

III.c.3. De nouvelles pistes de recherche. p.357

(Tisanes, poisons, placebos, remèdes tranquillisants, euphorisants...).

Pour délimiter le "champ opératoire", nous avons évoqué dans le cadre théorique (partie 0 de cette thèse) et tout au long des travaux d'approche des travaux qui nous ont servi de références.

Ont été évoquées au passage des approches hagiographiques des outils de calcul dont on a signalé le danger.

Dans cette dernière partie, nous voudrions insister, à la lumière des résultats que nous avons dégagés, sur trois points :

- sur les approches simplificatrices de l'analyse (en général) ;

- sur le danger des raccourcis didactiques en matière de "limites" ;

- sur la nécessité d'un système didactique d'exploitation des outils.

Bref, en guise de perspectives, c'est bien de nouvelles pistes de recherche qu'il s'agit.

III.a Critique des approches hagiographiques.

Bien que la volonté soit bonne, son esprit, toutefois et ses prophéties paraissent être d'évidentes illusions du démon...
Elles sont en mesure de tromper nombre de personnes curieuses et de causer grand dommage et scandales à l'Eglise de Dieu Notre Seigneur.

Avis sur Guillaume Postel envoyé à Ignace de Loyola par des pères jésuites.
Cité par Umberto Eco [Le Pendule de Foucault].

Nous avons déjà évoqué ces approches hagiographiques en 0.b.5.i. de façon générale (à propos de l'approche instrumentale) et en I.c.3. de façon plus particulière (à propos de l'étude des limites). Il n'est pas inutile d'y revenir ici après avoir analysé les difficultés d'intégration des instruments dans une classe "expérimentale". Nous le ferons de trois points de vue : du point de vue du graphique, du point de vue des calculatrices graphiques et du point de vue du calcul formel.

III.a.1. Apologie du graphique (Gasquet).

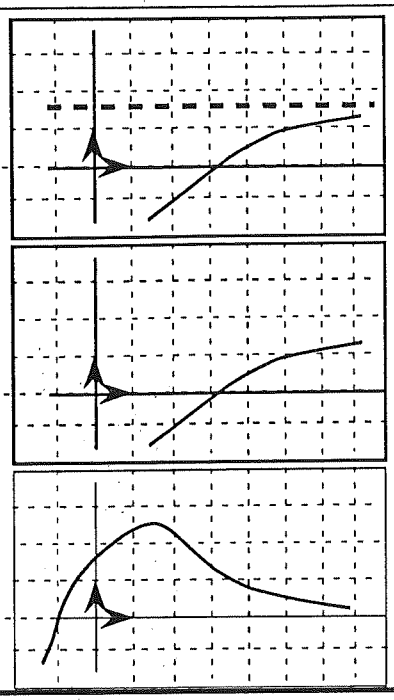
Dans un ouvrage au titre évocateur, "Fenêtres sur courbes", S. Gasquet propose "une approche graphique de l'analyse mathématique" [Gasquet, 1994 a]. Elle évoque la nécessaire prise en compte des calculatrices graphiques, mais insiste surtout sur les dessins "à la main".

S. Gasquet propose de nombreuses activités reposant sur les graphiques mais ne semble pas prendre en considération deux difficultés majeures :
- **les problèmes spécifiques que posent les problèmes de conversion d'un registre graphique à un autre registre** et de façon plus générale les problèmes de construction des concepts de l'analyse à partir des graphiques [53] (cf. par exemple le concept de limite) ;
- **les problèmes des effets induits par les images, en particulier celles issues de la transposition informatique.**

Elle propose par exemple (illustration n°1 ci-dessous), dans le cadre d'une "grammaire du langage graphique", des conventions lourdes de confusion pour la représentation de situations asymptotiques.

---

[53] Il semble qu'il y ait un refus d'une analyse des conditions mêmes de l'intégration des outils et des graphiques dans le cours de mathématiques. B. Malgrange, mathématicien, écrit, dans la préface de "Fenêtres sur courbes" : *"une docte discussion* abstraite *sur le statut du graphique"* est un *"écueil majeur à éviter"*. S. Gasquet reste très réservée aussi sur l'intérêt des études didactiques : *"les discours des didacticiens, les résultats de leurs recherches, leurs écrits restent encore trop abscons (...). Je reste donc perplexe sur l'intérêt de la didactique pour un enseignant du secondaire"*[Gasquet, 1994 b].



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1{,}5$.
Alors on convient de dessiner la droite y = 1 (en pointillés réguliers. Cette droite est asymptote à la courbe.

Si aucune droite asymptote parallèle à Ox n'est dessinée alors que f croît, on convient que cela signifie que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
On fera remarquer que les calculatrices ne font pas cette distinction.

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Alors l'axe étant déjà dessiné... difficile de le mettre en pointillé ! Mais alors s'il y avait une autre limite (par exemple 0,25) on devrait dessiner y = 0,25. Et donc l'absence d'asymptote dessinée et l'allure de la courbe énoncent que 0x est asymptote.

Illustration n°1. [Gasquet, 1994 a]

On peut considérer qu'il s'agit là d'une mise en forme des théorèmes-en-acte erronés que nous avons repérés (en particulier TA2, cf. page 199) et d'une institutionnalisation d'un processus producteur d'obstacles (cf. page 198) : le prolongement hors écran des tracés observés.
On peut estimer que cele ne constitue pas une aide pour l'apprentissage.

III.a.2. Apologie des calculatrices graphiques (Ferrand).

M. Ferrand, dans "3'33", revue éditée par Casio à destination des lycées, se propose de *"redéfinir les rapports entre le professeur et la calculatrice"* [Ferrand, 1995]. En guise de redéfinition, il propose une séparation illustrée par le schéma 1 ci-dessous :

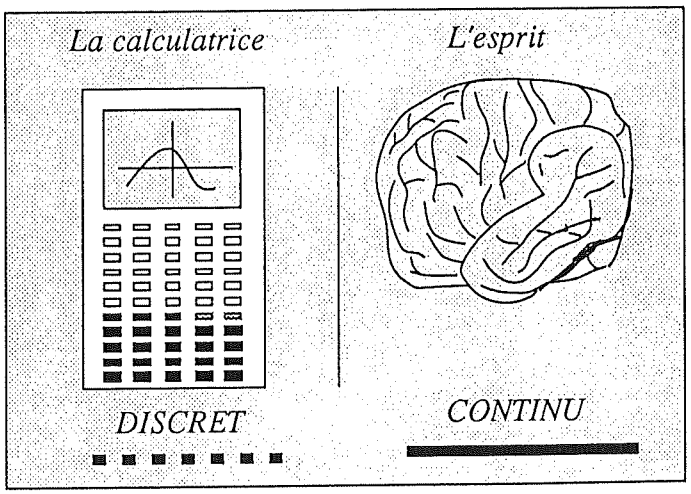


Schéma 1 (dans [Ferrand, 1995])

Cette modélisation permet alors une double distinction :

- entre l'activité "spontanée" et l'activité construite par le maître :
  "- Selon Kant, le discret est prédominant dans les systèmes de rapports mis en place par l'entendement ; c'est le trait typique des structures représentatives développées par la "spontanéité". La compréhension des élèves passe inexorablement par le discret.
  - mais il faut qu'ils franchissent la "frontière" du continu. Le seul qui puisse leur indiquer le passage est le professeur de mathématiques."
- entre la calculatrice et l'esprit :
  "- la calculatrice, dont c'est la vocation, se voit confier l'approche "spontanée" discontinue. Les résultats numériques qu'elle donnera ne seront jamais que des informations ;
  - l'esprit s'appuie sur ces informations pour forcer "l'intuition" et accéder au concept."

Une telle distinction des fonctions de la calculatrice et de l'esprit est critiquable. On ne peut pas opposer discret/fini/intuition/calculatrice d'une part et d'autre part continu/infini/rigueur/esprit [54] : il n'est pas certain qu'il y ait antériorité onthologique du discret sur le continu (cf I.a.3.ii.) ; il est par contre tout à fait certain que le discret n'est pas automatiquement lié au fini (et à l'intuition !).

La répartition des tâches décrite ici induit l'idée **d'un passage naturel** des *"explorations numériques et graphiques sur des champs discontinus"* (correspondant à une première approche *"spontanée"*), à une construction formelle du continue et de l'infini (correspondant à un deuxième stade de l'apprentissage, assisté par le professeur).

Cette idée d'une répartition claire entre les fonctions de l'esprit et celles de la calculatrice, d'un passage naturel des observations à une construction formelle, a des conséquences pratiques. On peut en voir la marque dans la nature des activités proposées [55]. On a évoqué (cf. I.c.3.i., exemple 4) une activité inspirée de cette conception. On y trouve, à propos des limites, l'expression suivante :

"quand h est suffisament petit, la limite est atteinte"

Comprendre le sens de cette phrase et de l'activité qui l'accompagne suppose un contrôle mathématique très important. **Cela suppose une connaissance claire de ce que fait la calculatrice et de ce qu'est une limite**. On peut alors traduire la phrase en question par "quand h est suffisamment petit, la valeur approchée de f(h) donnée par la calculatrice est égale à la limite de f quand h tend vers 0". Mais pour un élève en phase d'apprentissage, cela induira une conception "primitive" (cf. II.a.1.iii.) de la limite avec les théorèmes-en-acte erronés qui peuvent s'y rapporter. Nous avons vu en effet, à travers les schèmes L1 et L2, que tel était bien l'effet de l'exploration des limites avec des calculatrices graphiques. **Il ne suffit pas de rappeler aux élèves que les calculatrices ne donnent pas accès au continu pour régler une fois pour toutes le problème** : comme on le notait en 0.a.3., les élèves se trompent et se trompent encore.

Pour comprendre ces erreurs renouvelées, il faut admettre que *"la perception apparemment la plus immédiate fait intervenir de façon décisive des actes et des processus que l'on ne peut qualifier autrement que de psychiques"* (H. Von Helmholtz, cf 0.b.4.ii.).

---

[54] La distinction de M. Ferrand est d'ailleurs complètement caduque pour une calculatrice type TI-92 qui prend en charge aussi la manipulation de langage symbolique et donc la formalisation (qui n'est ainsi plus l'apanage de l'esprit). Une telle description de la répartition des rôles entre l'esprit et l'outil ne prépare pas dans de bonnes conditions la "transition instrumentale" entre calculatrices graphiques et formelles.

[55] M. Ferrand est l'éditorialiste de la revue "3'33" des calculatrices Casio.

Ainsi les rapports entre l'esprit et la calculatrice, comme entre le professeur et la calculatrice[56], ne sont jamais *"définis"* une fois pour toutes. Ils sont à redéfinir en permanence.

Le rôle du professeur n'est d'ailleurs pas seulement de distinguer les tâches respectives de l'esprit et de la calculatrice mais de contribuer à la formation et au contrôle permanent des schèmes d'action instrumentée en rapport avec les notions étudiées.

III.a.3. Apologie des systèmes de mathématiques symboliques (Kutzler).

B. Kutzler présente les potentialités du logiciel Derive pour l'enseignement des mathématiques [Kutzler, 1994 a]. Il se défend de faire une apologie de ce système de mathématiques symboliques. Il cite d'ailleurs Shakespeare :

> ***"Les choses ne sont jamais intrinsèquement bonnes ou mauvaises. C'est la pensée qui les rend soit bonnes, soit mauvaises."***

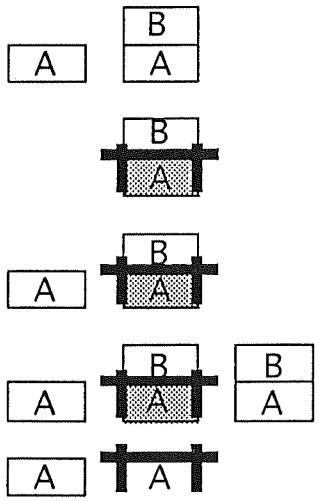
Il ne présente cependant que les avantages du logiciel de calcul formel, de deux points de vue :

- du point de vue de l'enseignement traditionnel des mathématiques, avec la "didactique de l'échafaudage" (schéma 2 ci-après) ;

- du point de vue des "mathématiques de demain".

1. Pour l'enseignement traditionnel.

Il présente la "didactique de l'échafaudage" (schéma 2 cidessous) :



1. Si les élèves sont brillants (B est construite sur A) ;

2. Si la compétence A n'est pas importante, elle n'est pas enseignée et l'échafaudage est mis en place à chaque fois qu'elle intervient (ex : la racine carrée) ;

3. Si A a une importance limitée, ses bases sont enseignées, mais dès qu'elle intervient, l'échafaudage est utilisé ;
4. Si A est importante, on commence comme ci-dessus et on poursuit par une phase de consolidation où A intervient sans échafaudage ;
5. Si A est très importante, on enseigne ses bases et on laisse les élèves construire l'échafaudage.

Schéma 2. La didactique de l'échafaudage [Kutzler, 1994 a].

---

56 On pourrait évidemment évoquer les conceptions de l'élève et du maître sousjacentes à ces distinctions/associations : d'un côté le professeur, l'esprit, l'infini, la rigueur, de l'autre côté la machine, l'élève, la spontanéité, le fini.

Cette *"didactique de l'échafaudage"* permet, grâce au logiciel, d'apprendre une nouvelle technique B, même si la technique A qui est nécessaire pour le nouvel apprentissage n'est pas encore maîtrisée. B. Kutzler distingue plusieurs stratégies d'échafaudage (schéma 2 ci-dessus).

Cette approche en terme "d'échafaudage" permet à B. Kutzler de décrire deux méthodes d'utilisation de Derive comme outil d'enseignement [Kutzler, 1994 b] :

- **la méthode "boîte blanche"/"boîte noire"** : traitant un problème dans un environnement papier/crayon (la "boîte blanche"), les élèves délèguent à l'environnement informatique (la "boîte noire") les tâches techniques et peuvent ainsi se concentrer sur la réflexion stratégique ;

- **la méthode "boîte noire"/"boîte blanche"** : *"elle propose d'introduire un nouveau sujet en laissant les apprenants expérimenter avec Derive puis de commencer l'enseignement traditionnel du sujet".*

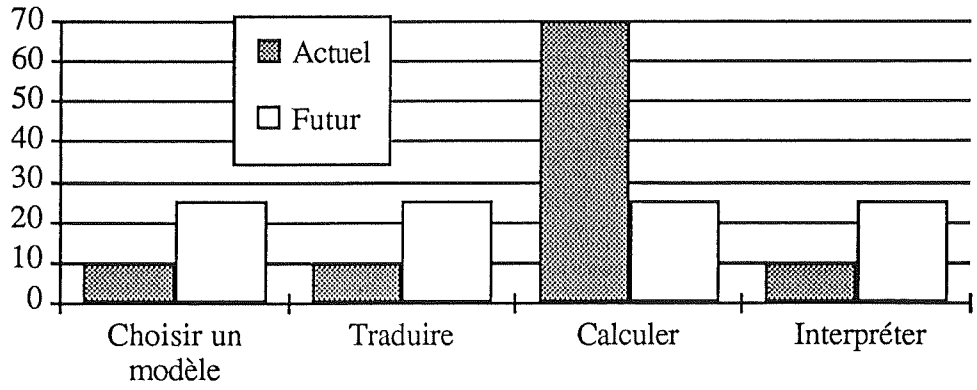
Nous avons déjà indiqué le caractère problématique de ces méthodes :
- pour la première : M. Artigue a mis en évidence les comportements de "**pêche**" (cf. 0.b.5.ii.), nous avons défini en II.b.3.v. les schèmes du "**transport automatique**", "d'**acharnement localisé**", du "**tir au but aléatoire**" ou "**magique**" indiquant clairement que le traitement par l'ordinateur des tâches techniques ne libère pas nécessairement un espace pour la réflexion stratégique ;

- pour la deuxième : nous avons montré dans cette thèse que la construction d'une notion, celle de limite, par l'action instrumentée sans contrôle n'engageait pas toujours le processus de conceptualisation sur une bonne voie.

La didactique de l'échafaudage s'oppose ainsi à ce qui a été dit du processus de conceptualisation (0.b.3.i.). Les connaissances ne se construisent ni indépendamment les unes des autres ni par empilement. **B. Kutzler précise certes qu'il parle *"des techniques calculatoires et pas de la compréhension des concepts"* [Kutzler, 1994 a]. Mais peut-on parler d'apprentissage des techniques sans évoquer la compréhension des concepts qui leur donnent un sens** (cf[Artigue, 1995 a]) ?

2. Pour l'enseignement de demain.

A l'envers de ces situations d'apprentissage (centrées autour des "techniques"), Kutzler imagine les mathématiques "de demain". Il indique alors (cf graphique 1 ci-dessous) que la disposition d'un logiciel de calcul formel permettra d'envisager un équilibre tout autre dans l'étude d'un problème.



Graphique 1. Les quatre composantes de la résolution d'un problème [Kutzler, 1994 a].

Le graphique 1 traduit une conception des mathématiques que B. Kutzler décrit clairement. Après avoir évoqué B. Russel *("Les mathématiques peuvent être définies comme le sujet dans lequel nous ne savons jamais de quoi nous parlons, ni si ce que nous disons est vrai")* et D. Hilbert *("On doit pouvoir dire à tout moment , à la place de points droites et plans, tables, chaises et chopes de bière")*, B. Kutzler écrit :

> *"Ces deux citations décrivent ce que nous appelons maintenant "mathématiques pures". Faire des mathématiques pures consiste à faire des mathématiques pour elles-mêmes, c'est un exercice d'entraînement intellectuel.*
>
> *On peut opposer à cela le désir de résoudre des problèmes. La résolution d'un problème concret P nécessite quatre étapes :*
>
> *- la première étape consiste à choisir un modèle adapté M ;*
>
> *- la seconde consiste à traduire le problème concret P en un problème modélisé PM ;*
>
> *- la troisième consiste à calculer la solution SM du modèle en appliquant les méthodes connues dans M ;*
>
> *- la quatrième consiste à interpréter la solution SM trouvée dans le modèle sous la forme d'une solution concrète S.*
>
> *En pratique ces quatre étapes nécessitent d'être répétées. Si S se révèle ne pas être la solution du problème concret, on peut avoir choisi un modèle inadapté, on peut avoir commis une erreur lors de la traduction etc. Nous appellerons "mathématiques appliquées" cette méthode pour résoudre des problèmes du monde réel"* [Kutzler, 1994 a].

On retrouve ici une opposition de même nature qu'entre *"techniques"* et *"concepts"* pour *"les mathématiques d'aujourd'hui"*. Il semble peu pertinent d'opposer ainsi *"les mathématiques pour elles-mêmes"* et *"les mathématiques des problèmes concrets"*.

D'ailleurs, le premier acte posé dans la résolution d'un "problème concret", le choix d'un modèle, suppose précisément une certaine avancée dans le processus de conceptualisation et un niveau de rationalité qui supposent que l'on sait déjà "faire des mathématiques". Nous retrouvons là un indice du "glissement métacognitif" que critique G. Brousseau (cf. 0. b.3.iv.).

B. Kutzler pose en conclusion de son article la question :

"Quel impact Derive a-t-il sur la compréhension des mathématiques ?" [Kutzler, 1994 a].

La position qu'il développe appelle une autre question : "Quel impact Derive a-t-il sur la conception des mathématiques ?".

B. Kutzler défend une conception claire :
- Derive, en prenant en charge une partie des tâches techniques et en anticipant certaines acquisitions (didactique de l'échafaudage) est une aide pour l'apprentissage ;
- les mathématiques n'ont pas pour vocation d'être un exercice "d'entraînement intellectuel", elles servent à "résoudre des problèmes".

Nous avons tenté au contraire de montrer dans cette thèse que :
- un outil en lui-même n'est pas une aide pour l'apprentissage ;
- la résolution de problèmes est liée à la construction des concepts et à "l'entraînement intellectuel" dans toutes ses dimensions (ce que nous avons appelé les "métaconnaissances globales").

Conclusion de III.a.

C'est une même conception des apprentissages qui soustend les trois points de vue que nous venons d'examiner sur les graphiques, les calculatrices et les logiciels [57] :

- une conception qui repose sur l'idée de la "neutralité" des objets manipulés (les objets mathématiques - les graphiques - ou les objets techniques) ;

- une conception qui repose sur le caractère naturel des transferts d'un cadre dans un autre ;

- une conception enfin qui envisage l'apprentissage comme une suite de sauts d'un niveau à l'autre (du discret au continu pour M. Ferrand, d'un niveau technique à l'autre pour B. Kutzler).

Les résultats que nous avons mis en évidence indiquent que, sur ces trois points, la réalité est plus complexes :

- les outils ont une influence dans le processus de conceptualisation qui n'est pas unilatéralement positive ;

- le transfert d'un résultat d'un cadre à l'autre et la conversion d'une expression d'un registre sémiotique à un autre sont problématiques ;

- le processus de conceptualisation lui-même ne procède pas par saut. C'est un processus de maturation souvent lent, avec des moments de rupture, des phases d'avancée et de recul.

---

[57] B. Kutzler met en évidence lui-même les similitudes d'approches entre les différents outils. Il écrit, toujours à propos de la *"didactique de l'échafaudage"* : *"Le processus se poursuit et Derive peut être utilisé comme échafaudage à tous les niveaux suivants. En fait Derive apparaît comme le successeur logique de la calculatrice scientifique, permettant de manipuler les formules comme la calculatrice permet de manipuler les nombres"* [Kutzler, 1994 b].

III.b. Critique de quelques perspectives générales

La nature est la limite du mouvement de décroissance de l'habitude.

Ravaisson, .

Nous allons évoquer ici trois types de propositions relatives à l'enseignement des limites :

- une méthode d'adaptation aux élèves, partant de leurs "conceptions spontanées" ;

- une méthode d'adaptation au concept, partant de la racine identifiée de celui-ci ;

- une méthode de déplacement du problème.

III.b.1. Une méthode progressive (Antibi).

Dans une thèse consacrée à l'enseignement de la démonstration et de la notion de limite, A. Antibi propose une méthode diamétralement opposée à celle que nous avons présentée en II.b.2.i. [Antibi, 1988].

A. Antibi présente son objectif :

> *"Présenter la notion de limite en restant le plus près possible du langage courant et en contrariant le moins possible les conceptions spontanées des élèves, c'est à dire les idées qu'ils ont a priori sur le sujet".*

Son hypothèse est triple :

- les "conceptions spontanées" des élèves sont des "conceptions monotones" ;
- la compréhension des suites est plus simple que celle des fonctions ;
- pour être efficace, l'enseignement doit s'appuyer sur les conceptions spontanées des élèves, *"en restant le plus près possible du langage courant"*.

Il va donc introduire la notion de limite à partir de la convergence des suites croissantes majorées. Il décrit une expérience d'enseignement qui s'appuie sur ses hypothèses :

- il présente à une classe de 1ère S (en 1h40) successivement les majorants d'une suite croissante, le théorème des suites croissantes majorées, le théorème des suites croissantes non majorées, le théorème des suites décroissantes minorées, le théorème des suites décroissantes non minorées et la convergence des suites stationnaires ;

- il s'attache à rester près du langage courant des élèves :

> *"Intuitivement, sans savoir exactement ce que signifie le mot "limite", qu'avez-vous envie de dire de chacune de ces suites ?(...) Parmi les suites monotones convergentes, quelles sont celles qui vous sont le plus "sympathiques", celles qui n'atteignent jamais leur limite, ou bien les suites stationnaires ?"*

- il tire un bilan positif de l'expérience :

> *"Dans le cas des suites croissantes majorées, la définition de la limite comme le plus petit des majorants semble tout à fait correspondre à l'idée intuitive des élèves et à la visualisation qu'ils ont de cette notion (...) ; la définition du concept de limite d'une suite, dans le cas monotone, semble pouvoir être comprise et assimilée aisément".*

Cette expérience, sur le plan de la méthode, peut être critiquée :

- une durée aussi courte (1h40) pour enseigner un volume aussi important à une classe de 1ère S peut sembler excessif ;
- l'absence de bilan des traces laissées par cet enseignement empêche de se prononcer sur ses effets profonds.

L'expérience peut être aussi discutée quant à ses hypothèses, à partir des résultats de nos travaux :

- la première hypothèse est conforme à ce que nous avons pu constater, la conception "monotone" est en effet très présente au niveau du lycée ;

- nous ne discuterons pas la deuxième hypothèse, même si elle ne nous paraît pas avoir été confirmée (cf. I.a.3.ii.) ;

- c'est la troisième hypothèse qui nous paraît la plus contestable. Il n'est certes surprenant de constater que, si la "conception spontanée" des élèves est une conception monotone, *"la définition du concept de limite d'une suite, dans le cas monotone, semble pouvoir être comprise et assimilée aisément"*. Mais le problème n'est pas là :

La question décisive est bien celle-ci : si l'on présente aux élèves une notion sous une forme et un langage qui correspondent à leurs conceptions erronées, ne risque-t-on pas d'ancrer encore davantage ces conceptions ?

Les résultats que nous avons présentés dans cette thèse nous incitent à répondre oui. C'est bien dans l'affrontement avec des "conceptions spontanées" qu'avance le processus de conceptualisation.

C'est vrai pour les limites :

***"Pour faire apprendre le concept de convergence et son utilisation pour résoudre des problèmes, on ne peut se borner à travailler sur des exercices trop élémentaires, sous peine de laisser s'installer chez l'étudiant des modèles trop simples ou erronés qui vont faire obstacle à l'apprentissage"* [Rogalski, 1994].**

C'est vrai de façon générale pour tout apprentissage qui avance par rupture, déséquilibre, assimilation et accomodation (cf. 0.b.2.i.).

III.b.2. La recherche des racines (Tall).

D. Tall est l'auteur de nombreux travaux plaidant pour un renouvellement de l'enseignement des mathématiques intégrant les possibilités nouvelles des environnements informatiques [Tall, 1981, 1985, 1991, 1992a, 1992b, 1994].
Dans une conférence à la CIEAEM [58] ([Tall, 1994]), il présente un cadre théorique pour un tel renouvellement.

1. Une réflexion à partir des travaux de J. Bruner.

J. Bruner (cf 0.b.2.i.) décrit la construction des connaissances par l'interaction entre trois modes de représentation : la représentation à travers l'action, la représentation à travers les images et la représentation à travers les symboles.

Pour D. Tall, la représentation symbolique est en fait symbolico-visuelle ("visuo-symbolic"), dans la mesure où les symboles peuvent être dessinés et vus. Ce qui l'amène à s'interroger sur la double signification de certains symboles mathématiques comme processus et comme concept. Ainsi, $\lim_{x \to 0} f(x)$ représenterait à la fois un processus (tend vers) et un concept (l'objet de limite). D. Tall propose le terme de **procept** pour représenter cet "amalgame" d'un **pro**cessus et d'un con**cept** [59]. Tous les symboles en mathématiques ne sont pas des procepts : ainsi les symboles logiques et les symboles issus de la géométrie.

Ceci amène D. Tall à la constitution d'un nouveau modèle de construction des connaissances (cf schéma 3 ci-après), dans lequel les objets, les actions et les preuves sont situés à trois niveaux :

- le niveau sensori-moteur, lié à l'action. On **perçoit** les objets, on agit physiquement sur eux ;
- le niveau iconique, lié à la vue et à l'espace. Les objets sont **représentés**, dessinés. C'est le niveau des représentations graphiques ;
- le niveau symbolique, dans lequel les objets sont **décrits** (niveau verbal), **symbolisés** (niveau proceptuel) et enfin **définis** (niveau logique).

La considération de ce schéma descriptif peut susciter un certain nombre de remarques : D. Tall présente un processus de conceptualisation linéaire (les objets sont perçus, puis représentés, décrits, symbolisés et enfin définis), sans trace d'obstacles (0.b.1.i.), d'aller-retours (0.b.3.i.), de dialectique outil-objet ou de problèmes de conversion (0.b.4.iii.). Cette analyse va avoir des conséquences sur les propositions de renouvellement de l'enseignement que l'on va aborder maintenant.

2. L'organisateur générique ("generic organiser").

Le modèle décrit par le schéma 3 ci-dessous s'adapte parfaitement à une calculatrice graphique (ou symbolique) ou à un ordinateur doté d'un logiciel de calcul formel. Le clavier permet l'action de l'utilisateur, l'écran donne accès au domaine visuo-spacial et proceptuel (pour les logiciels de calcul formel). Le langage permet la description des actions réalisées et tout cela débouche sur le niveau logique.

---

[58] Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.

[59] Ce terme peut sembler inutile, dans la mesure où le concept lui-même englobe différents points de vue issus de son émergence même (cf I.a.1.). Il n'a d'intérêt que pour insister sur cette "ubiquité" du concept et donc sur les difficultés spécifiques d'apprentissage.

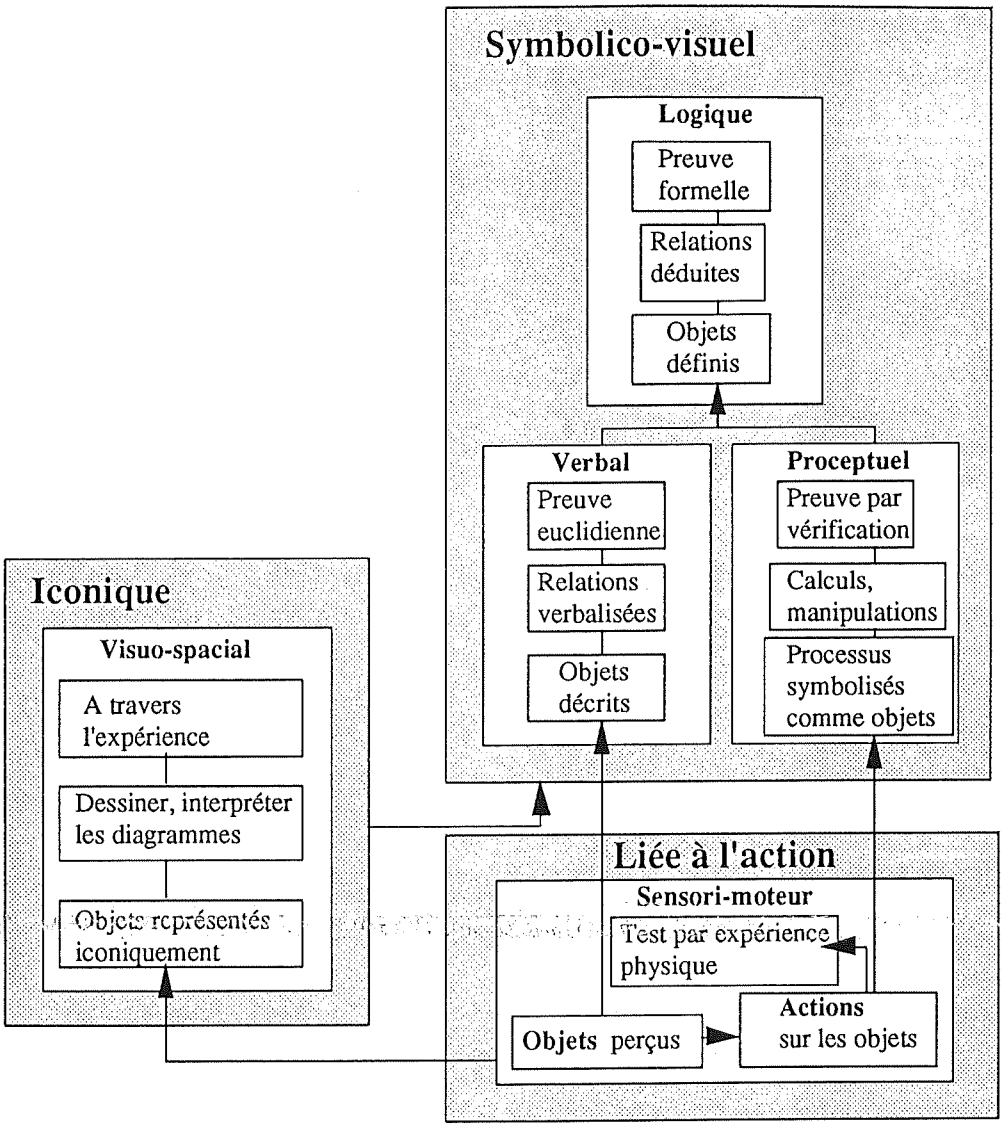


Schéma 3, traduit de [Tall, 1994] :
Objets, actions et preuves dans les différents modes de représentation.

Ce schéma permet en effet d'introduire ce que D. Tall appelle un *"generic organiser"*, c'est à dire un environnement informatique permettant l'introduction d'un concept à partir de nombreux exemples génériques. Il décrit ainsi dans un tel environnement l'introduction de la tangente à une courbe, c'est à dire du nombre dérivé, comme "tangente pratique" *("practical tangent")* :

- ce peut être alors la droite passant par deux points très proches de la courbe (Tall in [Cornu, 1991]) ;
- ce peut être aussi le segment de droite obtenu à partir de zooms successifs, faisant apparaître une courbe comme "localement plate" ("local straightness") [Tall, 1992 a].

D. Tall justifie cette démarche par la nécessité de combler l'écart entre *"une définition mathématique subtile et générale"* et l'expérience des étudiants, *"évidente et particulière"*. Il s'agit alors simplement d'introduire un concept à partir de sa *"racine cognitive" ("cognitive root")*, qui s'appuie sur l'expérience des étudiants, en préparant la formalisation ultérieure. Cette démarche est tout à fait cohérente avec le schéma 3 à propos duquel nous avons émis des réserves.

D. Tall (in [Cornu, 1991]) émet lui-même une réserve à propos des erreurs dues à "l'arithmétique de l'ordinateur" :

> *"l'élève, recherchant une dérivée par l'observation des valeurs prises par* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *quand h est "petit", risque du fait des limitations de l'ordinateur de s'éloigner de la limite avant de l'avoir approchée d'assez près".*

On retrouve ici un problème lié aux contraintes de l'instrument, que nous avons déjà évoqué (cf. 0.c.1.iii.). Curieusement, D. Tall émet l'hypothèse que *"de tels dysfonctionnements peuvent développer chez les élèves une phobie de l'analyse"*, alors que, plus profondément, ils peuvent entraîner le renforcement d'obstacles :

- l'obstacle "atomiste", lié à la conception de $\mathbb{R}$ comme une succession de points voisins ;
- l'obstacle géométrique, lié à l'idée que l'on manipule des grandeurs géométriques et pas des nombres ;
- l'obstacle monotone, qui associe l'idée de limite à l'idée de rapprochement (sur les obstacles, cf II.a.1.i.).

L'idée même de "cognitive root" évoque en fait une homogénéité entre le concept à découvrir et les conceptions des élèves. Nous avons montré que la situation était plus complexe, en général (cf. 0.b.3.i.) et en particulier à propos des limites (cf. I.a.1.i.).

D. Tall prend certes un certain nombre de précautions, en évoquant une phase nécessaire de discussion après le travail autonome assisté par le "generic organiser" : il s'agit alors de s'assurer que le "concept image" (cf 0.b.3.iii.) construit par l'élève est compatible avec celui de la communauté des mathématiciens. On retrouve dans cette affirmation une conception générale de construction linéaire des connaissances [60] que nous avions déjà rencontrée avec la méthode progressive d'A. Antibi (cf. III.a.2.) ou la méthode "boîte noire-boîte blanche" de B. Kutzler [61] (cf. II.a.3.). M. Artigue pose la question que soulève de type d'enseignement :

> *"Est-ce que le développement de conceptions fortes (ici la "tangente pratique") ne constituera pas un obstacle pour les formalisations ultérieures ?"*
> [Artigue, 1991]

D. Tall propose un fonctionnement autonome du "generic organiser" puis une discussion avec le maître pour "test de conformité" entre le "concept image" et le concept des mathématiciens.

La partie II de cette thèse montre cependant la difficulté de "décoller" des conceptions anciennes. Tout se passe comme si les élèves revenaient, tels des ludions, à leur position initiale (après quelques oscillations). Ceci plaide pour une fonction de "médiation" du maître plus complexe (cf 0.b.3.i.).

---

[60] On peut remarquer que dans un de ses textes plus anciens qui fait référence, [Tall, 1981] est beaucoup plus nuancé sur les rapports entre expérimentation et apport théorique. Il souligne qu'*"une approche intuitive précédant la définition est souvent si forte que la conception des étudiants reste une conception dynamique*, même après l'apport formel : *"les étudiants sont dans une situation où ils ont une forte image mentale, et un "concept définition" très faible"*. Il conclut en évoquant Bruner : *"le processus iconique limite les idées et rend urgent un mouvement vers le niveau symbolique"*. 10 ans plus tard, le point de vue n'est plus tout à fait le même : le développement des outils de calcul pèse aussi sur les conceptions... des réformateurs.

[61] La conception du "generic organiser" est d'ailleurs assez proche de celle de la méthode "boîte noire-boîte blanche" : un premier temps d'explorations libres, suivi d'un deuxième temps de cadrage mathématique.

III.b.3. Le changement de l'analyse à enseigner (Deledicq).

A. Deledicq a écrit de nombreux ouvrages sur l'Analyse Non Standard. Dans un article récent, il aborde les difficultés de l'enseignement de l'analyse et formule quelques propositions [Deledicq, 1996].

A. Deledicq évoque une situation de crise de l'enseignement de l'Analyse en décrivant un fossé profond entre ce qu'il estime souhaitable et ce qu'il estime possible :

- le souhaitable :

> *"**initier les élèves à la manipulation de modèles, concurrents ou complémentaires**, selon les problèmes ou situations rencontrées (...) ; on devrait faire vivre l'idée que la valeur de vérité d'un énoncé dépend de la théorie au sein de laquelle il est émis (le jeu des géométries non euclidiennes serait certainement lui aussi utile dans cet apprentissage)" ;*

- le possible :

> *"dans l'état actuel des choses, toute action volontaire générale concernant l'enseignement de l'analyse pour les élèves me paraît dangereuse : l'introduction de l'Analyse non Standard serait sûrement aussi génératrice de problèmes que le retour à un formalisme classique "dur" (c'est à dire fondé sur les définitions complètes et des démonstrations). **Il ne me semble pas y avoir d'autre choix que de laisser se développer la multiplicité des actions individuelles jusqu'à ce qu'une tendance réfléchie apparaissent".***

Les deux points de vue nous paraissent excessifs :

- le souhaitable n'est pas de même nature pour un élève de quatrième découvrant la démonstration géométrique et pour un étudiant de deuxième cycle universitaire. Pour le premier, l'objectif est de faire fonctionner des règles d'inférence **à l'intérieur d'un modèle** présenté comme pertinent pour interpréter l'espace. Pour le deuxième, la comparaison des modèles prend son sens dès lors que l'un d'entre eux au moins est familier ;

- si le possible consiste à *"laisser se développer la multiplicité des actions individuelles"*, il est probable qu'une tendance générale apparaîtra mais bien peu probable que celle-ci soit *"réfléchie"*. On l'a vu d'ailleurs à travers l'analyse des programmes et des exercices proposés, la tendance générale qui apparaît est double. En ce qui concerne exercices et problèmes, il s'agit d'une pratique algébrique de l'analyse (cf I.b.) ; en ce qui concerne les travaux pratiques, comme le note A. Deledicq, *"on semble se satisfaire d'une étude zoologique des espèces de fonctions, aidée par les calculatrices"*, ce qui confirme ce que nous disions (cf I.c.2 et 3). De cette double tendance générale, nous avons montré que le point de vue essentiel pour l'Analyse, le point de vue approximation, était absent.

A. Deledicq estime que tout renouvellement doit passer par la formation des maîtres. Dans ce cadre, l'Analyse Non Standard lui paraît être une perspective d'avenir.

Il n'est pas question dans le cadre de cette thèse de définir de façon exhaustive l'ANS. Donnons juste, pour les nécessités de la discussion, quelques points de repère, indiqués avec beaucoup de clarté par A. Deledicq :

"- la différentiation des ordres de grandeur : il y a des nombres mesurant des choses "petites", des nombres mesurant des choses "grandes" et des nombres mesurant des choses ni petites ni grandes (appelées "appréciables") ;

- la répétition (en grand nombre) des étapes (petites) : pour changer d'ordre de grandeurs par étapes petites, il faut un nombre d'étapes grand ;

- le mécanisme des inverses : si x est petit non nul, alors $\frac{1}{x}$ *est grand (et réciproquement) ;*

- les frontières absentes : il n'existe pas de "frontière" définissable entre les petits et les non-petits, entre les non-grands et les grands ;

- le sol "algébrique" des propriétés de base sur lequel se fondent les règles de calcul (...) ne fait que traduire les intuitions que l'on peut prétendre avoir dans sa tête, comme petit + petit = petit" [Deledicq, 1996].

Deledicq montre bien comment l'ANS permet :
- un abord simplifié de situations complexes (les études locales avec deux variables simultanées par exemple) ;
- une remise en question de l'unicité du concept de limite lui-même ;
- des interrogations sur les notions de proximité (des nombres) et de formes (des objets géométriques).

Cet enseignement s'avère ainsi sans doute *"nécessaire pour comprendre à la fois l'histoire de l'analyse depuis quatre siècles et l'articulation des concepts, dans ce domaine si difficile à enseigner dans sa formulation classique"*.

Dans le cadre de la formation des maîtres, il semble pertinent d'envisager un tel enseignement comme moyen de prendre du recul sur un objet d'enseignement problématique. Mais la pertinence dans le cadre de la formation des maîtres n'implique pas nécessairement la pertinence dans le cadre de l'enseignement.

Les arguments d'A. Deledicq pour l'organisation de l'enseignement de l'Analyse autour de l'ANS tiennent en deux points complémentaires :

1 : le modèle non standard formaliserait les intuitions des élèves.
2 : il serait, moins que le modèle classique, "producteur d'obstacle".

1. Pour illustrer le premier point, A. Deledicq propose une analogie :

"on se trouve (avec l'ANS) devant une idée que l'on sent profondément juste (..) c'est l'idée qu'une goutte d'eau est certainement négligeable devant l'océan mais que, cependant, un nombre fini de gouttes suffit à le former".

On peut discuter la métaphore : quelle propriété intuitive l'analogie est-elle censée traduire ? Que veut dire un nombre "fini" de gouttes ? Est-ce un nombre "appréciable" (auquel cas cela contredirait une des règles du "sol algébrique" : "petit" multiplié par "appréciable" = "petit") ? Et si c'est un "grand" nombre, pourquoi le définir à partir du "fini" ? Si un modèle permet de donner du sens à une métaphore, l'inverse n'est pas toujours le cas : c'est la difficulté du *"choix des bonnes métaphores, des métaphores véritablement fécondes et de leur contrôle"* (Y. Chevallard cf. 0.b.1.iii.).

Mais, plus profondément, c'est l'idée même d'un modèle qui formaliserait les intuitions des élèves qui peut être remis en question. S'il y a correspondance entre les intuitions des élèves et la théorie, ce n'est qu'entre des **"conceptions primitives"** des élèves (au sens où nous les avons décrites et rencontrées, cf II.a.1.iii. et II.a.2.iii.) et **une première approche du modèle. Mais dans ce cas, on peut penser que le modèle peut agir justement comme renfort de ces conceptions.**

2. Pour illustrer le deuxième point, A. Deledicq présente un argument inverse.

Le modèle non standard est aussi en rupture avec les premières intuitions (la théorie postule l'hétérogénéïté de $\mathbb{R}$, l'absence de frontières identifiables entre les nombres "petits" et les nombres "appréciables"). On dispose ainsi d'un modèle qui permet d'interpréter le fait que :

> *"la plupart des choses changent radicalement de forme lorsqu'on change d'ordre de grandeur et cela sans que l'on puisse observer "continuement" le passage de l'une à l'autre (...).*
>
> *Tout se passe comme si, à la lisière des ordres de grandeur, il existait une zone inaccessible à nos regards et à nos instruments* [62]*. Or cette zone est non seulement postulée mais constitutive du modèle non standard. La manipulation de ce modèle non standard et des phénomènes associés à cette zone, sans jamais rencontrer de contradictions, nous familiarise à son existence nécessaire ; en précisant et en confortant les images associées aux ordres de grandeur,* ***elle nous fait "absorber" l'obstacle du changement de forme"***.

La conception de l'apprentissage supposée par ce passage n'est pas tout à fait celle sur laquelle les didacticiens s'appuient : il ne s'agit pas de mettre en place des théories qui "absorbent" les obstacles mais bien d'organiser des situations qui permettent aux élèves d'affronter dans de bonnes conditions ces obstacles. La construction des connaissances est justement rendue possible par ce processus de déséquilibre et d'assimilation/accomodation (cf en particulier 0.b.2.i. et 0.b.3.i.).

Toutefois il serait utile de disposer d'une évaluation plus précise des avantages et des désavantages de l'ANS à la lumière des expériences d'enseignement. Les études comparées sont encore trop peu nombreuses. M. Artigue évoque l'une d'entre elles :

> *"Le questionnaire d'évaluation comparée de deux groupes d'étudiants ayant suivi un enseignement classique et un enseignement d'ANS ne révèle pas de différence significative entre "standardistes" et "non-standardistes" en ce qui concerne les performances techniques, mais montre que ceux qui ont suivi le cours d'ANS sont plus capables d'interpréter le formalisme mathématique de l'analyse et de lui donner un sens (...).*
>
> *Le faible nombre de bilans de l'approche ANS sont souvent en forme de pladoyer passionné et ne dépasse que rarement le niveau de la conviction personnelle (...).*
>
> *Pour le moment, nous ne connaissons pas les difficultés qui seraient introduites par une approche non standard de l'analyse, pas plus que nous ne savons comment les concepts de l'analyse standard et non standard peuvent être coordonnés dans l'esprit des étudiants ni quels problèmes cette coordination pose".*
>
> [Artigue, 1991].

---

62 On trouve parfois l'idée que l'ANS propose un modèle compatible avec les mathématiques de l'ordinateur. R. Cuppens remarque justement qu'*"il existe une différence fondamentale entre l'ensemble des nombres réels non standards et l'ensemble des nombres manipulés dans une machine : l'un est un corps totalement ordonné (on peut toujours comparer deux nombres) tandis que dans une machine, en raison des problèmes d'arrondis, les résultats de deux calculs différents ne sont pas toujours comparables. On peut penser qu'il suffit d'augmenter la précision pour pouvoir les séparer. Mais il n'en est rien. En effet, si on veut comparer deux nombres par une méthode algorithmique de plus en plus précise, deux cas peuvent se présenter :*
- ou bien les deux nombres sont différents et au bout d'un certain temps (peut-être très grand), on pourra les comparer ;
- ou bien les deux nombres sont égaux et, après un temps fini, on n'aura pas trouvé de différence et on ne saura jamais si une précision supérieure permettrait de conclure." [Cuppens, 1995]

Il faut sans doute attendre des bilans plus complets pour déterminer les possibilités de renouvellement de l'Analyse à partir de l'ANS.

Mais le fait de réfléchir à l'Analyse à enseigner demain ne doit pas dispenser de réfléchir à la manière d'enseigner l'Analyse d'aujourd'hui :

> *"Il faut éviter une évolution mathématique coexistant avec une stagnation didactique : on a trop tendance à voir la nouveauté et à délaisser les permanences du système (...) On se pencherait alors plus sur l'analyse à enseigner que sur la manière d'enseigner l'analyse".* [Chevallard, 1992]

Dans l'article cité, Y. Chevallard précise que les nouveaux outils de calcul, en donnant accès à de nouveaux aspects numériques et graphiques, permettent un bouleversement de l'enseignement. C'est peut-être dans ce domaine que certaines pistes ouvertes par l'ANS peuvent être explorées. Il n'y a pas contradiction d'ailleurs entre la critique du modèle lui-même et un intérêt pour certaines perspectives ouvertes. A. Deledicq le souligne lui-même :

> *"Le type de discours précédent (à propos de la "forme" des objets) peut certainement se tenir en analyse classique comme en analyse non standard".*

L'étude de l'évolution, de la conservation ou de la transformation de la "forme" des objets est ainsi un terrain propice au "changement de cadre" (cf 0.b.4.iii.) graphique/numérique. Les ruptures brutales (ou non) de forme ne sont pas alors des obstacles inutiles mais constituent une stimulation nécessaire pour aller chercher au delà du graphique lui-même, c'est-à-dire du côté du contrôle numérique et de la définition même des objets, une explication aux évolutions brutales constatées. Nous y reviendrons en conclusion.

Conclusion de III.b.

Plusieurs modèles d'enseignement des limites sont justifiés par leur adéquation avec les intuitions des élèves :

- une méthode progressive d'introduction de la notion à partir des objets mathématiques qui seraient les plus accessibles aux élèves : les suites monotones (A. Antibi, cf. III.b.1.) ;

- une méthode prenant appui sur une manipulation des objets mathématiques (via le "generic organiser") préalable à la formalisation (D. Tall, cf. III.b.2.) ;

- une méthode basée sur le choix d'un modèle (l'ANS) permettant "d'absorber les obstacles" (A. Deledicq, cf. III.b.3).

L'écart entre les conceptions des élèves et le concept mathématique, comme les résultats de notre étude, incitent plutôt à penser l'enseignement en terme d'affrontement à des obstacles. Cela nécessite de ne pas réduire le concept à une classe d'objets trop élémentaires. Cela suppose aussi de ne pas concevoir un enseignement par étapes (manipulation d'objets, puis formalisation) mais d'intégrer "l'action instrumentée" dans le dispositif d'enseignement lui-même.

III.c. Quelques perspectives.

Lorsque l'on sait, par le bulletin du greffier, le jour où l'affaire doit venir devant le tribunal, il faut prévenir l'autre partie. On le fait au moyen d'un "avenir". C'est un acte d'avoué à avoué prévu par le code de procédure, article 80..

P. Cuche, Précis de procédure civile.

Nous essaierons de ne pas adopter ici l'attitude naïve, justement dénoncée par M. Legrand, de ceux qui espèrent :

> *"avoir découvert la pierre philosophale (de l'enseignement de l'Analyse) en optant radicalement à chaque réforme pour une réforme ou pour une autre"* [Legrand, 1996].

Nous avons, après d'autres [Léonard et Sackur, 1991], mis en évidence la nécessité d'une "triple approche" pour l'enseignement des mathématiques : une approche épistémologique, une approche psychologique et une approche didactique (qui englobe naturellement la prise en compte des instruments). De cette étude on peut tirer trois ensembles de propositions : pour le professeur de mathématiques, pour l'institution elle-même, pour d'autres recherches.

III.c.1. Pour la classe, une intégration contrôlée des outils de calcul.

L'institution scolaire a des responsabilités, nous en parlerons en III.c.2.. Cependant il nous semble que, dès maintenant, des changements significatifs peuvent intervenir dans la classe pour peu que de petits pas soient faits dans le bon sens. Les petits pas, ce sont les gestes d'intégration des outils de calcul dans la classe ; le bon sens, c'est le contrôle collectif organisé sur leur utilisation. Les cinq propositions qui suivent ont rapport avec cette intégration en général et relative à l'enseignement du calcul infinitésimal en particulier.

III.c.1.i. Un contrôle permanent et collectif.

Les résultats que nous avons mis en évidence indiquent la nécessité de prendre en compte dans l'enseignement les outils de calcul à la disposition des élèves. Ce que nous avons présenté en II.b. de la classe expérimentale repose sur des conditions de travail exceptionnelles : toute une classe équipée du même type de matériel, une équipe de plusieurs professeurs suivant l'expérience. **Nous pensons cependant que, même dans un cadre "ordinaire", une intégration contrôlée des outils est possible** [63].

---

63 Cette conviction découle aussi d'une expérience personnelle : mise à part l'année expérimentale évoquée en II.b., c'est dans un cadre ordinaire que ces propositions ont été appliquées.

Quelques conditions nous semblent nécessaires pour une intégration réussie.

1. L'intégration doit être permanente.

Si l'on intègre les outils de calcul uniquement dans des plages spécifiques, on mettra alors en place des attitudes spécifiques : dans le travail papier/crayon, un certain type d'habitudes de travail ; dans le travail instrumenté, un autre type d'habitudes.

L'objectif est au contraire de contribuer à installer des schèmes qui reposent sur une combinaison de l'action instrumentée et de l'action non instrumentée. **Ceci suppose une banalisation de l'outil et une réflexion permanente sur la pertinence de son utilisation.**

Le caractère permanent de l'intégration n'exclut pas des phases de travail sans calculatrice. Au contraire, ce type de travail peut mettre en évidence des phénomènes de dépendance (cf. II.b.2.ii.) qui exigent un nouveau contrôle. Mais la démarche habituelle est ici inversée : c'est l'exclusion de l'outil qui est exceptionnelle, non son intégration.

2. L'intégration doit être collective.

Nous avons vu (cf. II.b.1.i.) l'importance d'une calculatrice rétroprojetable, permettant une référence commune et d'un élève-sherpa la manipulant, permettant le suivi du travail individuel des élèves. C'était important dans le contexte de la classe expérimentale, ça l'est encore plus dans une classe où l'hétérogénéité des matériels est la règle.

Cette calculatrice rétroprojetable peut être une calculatrice graphique (c'est à dire correspondre à ce que la majorité des élèves possède aujourd'hui) ou une calculatrice symbolique type TI-92 : le fait que cette dernière possède toutes les fonctionnalités d'une calculatrice graphique, avec un accès du même type, permet une adaptation simple.

L'intérêt de ce dispositif est triple :

- **il impose pour le maître, sur le plan de l'espace et du temps, de combiner l'utilisation de l'écran et l'utilisation du tableau** (c'est ainsi une référence pour le travail des élèves qui ont la responsabilité de la même combinaison sur leur table : calculatrice et cahier de cours) ;
- **il permet, à tour de rôle, de donner un statut particulier à un élève de la classe qui va être un assistant pour le professeur pendant toute l'heure.** Cela permet de voir "en direct" ses difficultés. Cela permet de guider son pas sur celui des élèves. Le fait que ce soit le travail d'un élève qui soit en permanence projeté peut enfin faciliter la discussion avec l'ensemble de la classe sur ce qu'il faut faire et ne pas faire ;
- **il permet au maître d'être plus disponible pour circuler dans la classe,** contrôler ce qui est fait par chaque élève.

3. L'intégration appelle des dispositifs de travail particuliers.

La calculatrice rétroprojetable a aussi un effet pervers : elle organise un type de débat très centré sur "l'écran collectif". Il est nécessaire ainsi de décider de plages de travail sans rétroprojecteur, pendant lesquelles la discussion va s'établir au sein d'un binôme (ce que nous avons appelé en II.b.1.ii. des TP).

Cela permet une meilleure mise à contribution des différentes "sources d'information" (cf. II.b.1.iii.) : l'outil de calcul, le voisin, le travail papier-crayon et aussi les références construites.

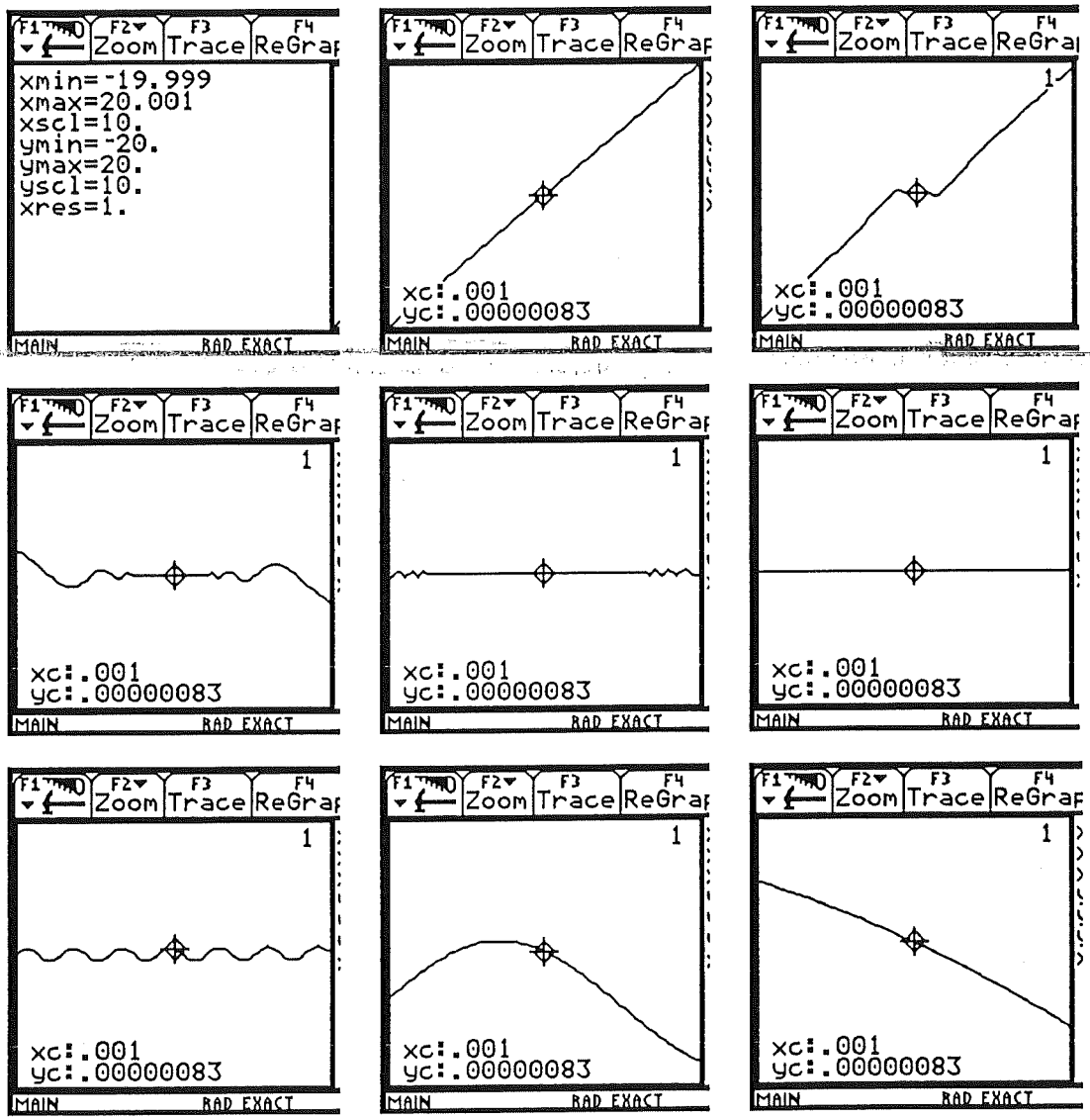
Comme tout nouveau dispositif, il requiert un certain investissement personnel du professeur pour sa mise en place. Mais celle-ci peut être progressive. L'important est d'enclencher sur le plan de la pratique professionnelle un processus.

III.c.1.ii. Un contrôle des images.

L'intégration des outils de calcul suppose le contrôle des représentations graphiques. On a souligné le caractère problématique de ce type de contrôle : "c'est vrai, on le voit" (cf. II.b.1.i.). Aller à l'encontre de cette tendance "naturelle" suppose le développement de trois types d'exercices :

1. Des exercices mettant en évidence l'importance des ordres de grandeur.

Cette idée est à la base de l'Analyse non Standard. A. Deledicq propose l'exemple illustré par les graphiques ci-dessous pour appuyer sa thèse (cf. III.b.3.) : il s'agit d'une représentation graphique de la fonction $x \rightarrow x^2 \sin\frac{1}{x}$ centrée au point d'abscisse .001. Le premier graphique correspond à la fenêtre indiquée, les suivants correspondent à des zooms (facteur 10). La première fenêtre induit l'idée que la fonction est croissante au voisinage du point .001. Après plusieurs changements de forme, la dernière fenêtre indique l'exact contraire. Ce changement de forme est évidemment assez étonnant.



Pour A. Deledicq, l'ANS est le cadre naturel d'interprétation et de compréhension de tels phénomènes :

"L'habitude de manipuler les ordres de grandeur et l'existence d'une théorie non contradictoire qui les assume élimine l'impression de paradoxe apparaissant lors des changements de forme et évite l'apparition d'obstacles du type de l'exemple donné (...) : comment comprendre (...) les fantastiques changements de forme constatés sur le graphe de $x \to x^2 \sin\frac{1}{x}$ *?"* [Deledicq, 1996]

On défendra ici l'idée qu'un tel exercice a tout à fait sa place dans l'Analyse classique et plus encore dans l'Analyse avec un "environnement calculatrice". Il permet d'ancrer deux idées essentielles :

- ce que l'on voit dépend de la distance à laquelle on le voit : l'importance du fenêtrage, le "window shooping" (cf. 0.b.5.ii.), est essentielle ;
- la calculatrice ne donne à voir que ce que les contraintes instrumentales lui permettent de dévoiler ; ainsi on ne dispose pas de la courbe, mais de la représentation d'une suite de points isolés. De l'allure de cette suite, on ne peut bien sûr pas inférer l'allure de la fonction.

2. Des exercices mettant "en évidence" que l'infiniment petit (ou grand) ne se voient pas.

* Les fonctions $x \to |x|^{1.0001}$, $x \to |x|^{1.0001} \sin\frac{1}{x}$ sont-elles dérivables en 0 ? Est-ce que cette dérivabilité "se voit" à partir de la *"locale platitude"* de la courbe en zéro (cf. II.b.2.) ? Les fonctions ont été choisies pour que cette locale platitude ne se voit pas : un point anguleux persistant pour la première, une oscillation forte pour la deuxième donnent **l'impression** d'une non dérivabilité en zéro. Et pourtant le contrôle théorique assure la dérivabilité.

* Les courbes des fonctions $x \to x^{0.0001}$ et $x \to \ln x$ se coupent combien de fois ? Le deuxième point d'intersection ne se "voit" pas directement. On le déduit de l'étude des limites de la fonction différence.

On trouvera dans les TP donnés à la classe expérimentale de nombreux exemples de ce type (cf. Annexe 4). **Le contrôle des images est nécessairement ici un contrôle théorique.** Cela suppose un changement de registre (de la représentation de la fonction par une courbe à la représentation par une formule) mais aussi un changement de cadre (de l'étude des équations à l'étude des fonctions).

3. Des exercices d'apprentissage du contrôle des images par d'autres images.

Il s'agit là de développer l'aptitude à construire, organiser, rechercher, utiliser des références, aptitude dont on a vu l'importance (cf. le processus de conceptualisation des élèves de type "théorique", attentifs aux contours des objets, en II.b.3.vi.). Un exemple pour illustrer cette proposition :

* Il s'agit de l'étude des variations de $x \to 5x + \sqrt{|x^2 - 1|}$. L'étude complète de cette fonction présente quelques difficultés. Si l'on observe la courbe sur une fenêtre standard, l'essentiel risque de nous échapper : les points de rebroussements en -1 et 1, les extremums locaux au voisinage de ces points. On peut avoir cependant une idée de l'allure de la représentation graphique et de ses singularités en envisageant successivement les courbes représentant $x \to x^2$, $x \to x^2 - 1$, $x \to |x^2 - 1|$, $x \to \sqrt{|x^2 - 1|}$ et enfin la fonction proposée.

On peut ainsi promouvoir trois types de contrôle des images :
- un contrôle théorique ;
- un contrôle à partir d'actions sur l'image elle-même ;
- un contrôle à partir d'autres images.
Ce qui est essentiel ici, c'est de prendre l'habitude de regarder au delà du miroir.

III.c.1.iii. Un contrôle des nombres.

Que les calculatrices soient graphiques ou symboliques, nous avons vu que la distinction calcul exact/calcul approché était essentiellement problématique. Le retour à un travail régulier sur les nombres est ici décisif.

Quelques pistes pour le contrôle des nombres.

1. Introduire une réflexion sur "les nombres de la calculatrice".

Combien une calculatrice peut-elle représenter de nombres différents ? L'écart entre deux nombres successifs est-il constant ? Ce type d'exercices (cf. I.c.2.i.) permet de mettre en évidence la différence fondamentale entre "les nombres de la calculatrice" et les nombres réels.

2. Mettre en évidence la portée de la différence valeur exacte/valeur approchée.

On pourra montrer qu'une "petite" différence peut avoir de grandes conséquences . Ainsi, le remplacement d'un réel par une valeur approchée peut modifier la nature (convergente ou divergente) d'une suite (cf. Annexe 4, page II.91). Ce qui a une traduction immédiate pour des outils de calcul qui ne manipulent que des valeurs approchées.

3. Contrôler les schèmes du "détour approximatif" (cf II.b.3.v.).

Cela suppose de travailler sur des situations différentes :
- des situations où les résultats numériques de la calculatrice donnent une indication du résultat et des situations inverses où les résultats numériques obtenus induisent une réponse fausse ;
- des situations de "détour approximatif indicatif" et des situations de "détour approximatif producteur".

4. Insister sur la différence entre inégalités strictes et larges.

Les programmes incitent à travailler avec des inégalités larges. Il peut paraître au contraire utile, dans un environnement calculatrice, de privilégier les inégalités strictes. Une application immédiate : si l'on prouve qu'une suite est strictement croissante, alors le caractère stationnaire apparent de celle-ci, dans une table de valeurs fournie par la calculatrice, n'est qu'apparence.

5. Réintroduire quelques éléments théoriques sur le calcul.

Cela ne veut pas dire d'en revenir nécessairement à la définition des ensembles de nombres, mais de rendre habituel le contrôle numérique des résultats proposés :
- lors de tout calcul approché, présenter comme habituel la majoration de l'erreur ;
- présenter les résultats approchés sous forme d'encadrements ;
- présenter des calculs d'erreurs sur des sommes, des produits, des quotients ;
- introduire enfin les encadrements de fonctions dans le travail des limites, en passant des contraintes sur la fonction aux contraintes sur la variable.

Au delà du contrôle des "nombres de la calculatrice", c'est d'une nouvelle approche des objets de base des mathématiques -les nombres- qu'il s'agit.

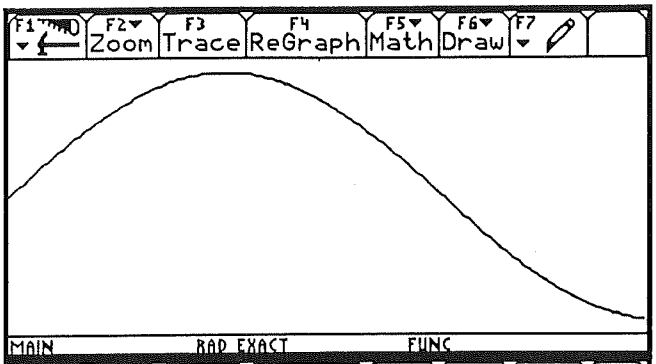
III.c.1.iv. Un contrôle du langage.

Nous avons vu à plusieurs reprises l'importance du langage dans un environnement calculatrice. Celui-ci favorise des expressions imagées, un langage familier souvent source de confusions. Deux pistes nous semblent importantes.

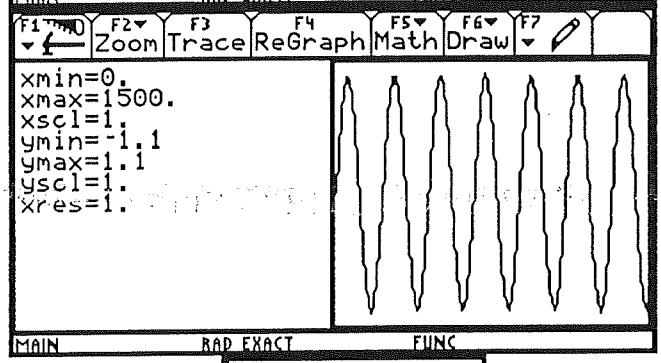
1. Contrôler la désignation des objets liés à l'outil.

Nous avons évoqué en I.c.2.i. la nécessité de distinguer par une expression spécifique la représentation graphique proposée par une calculatrice graphique. Il en est de même pour les valeurs approchées des nombres. Ces désignations nécessaires ne sont pas simples puisqu'il faut trouver une étiquette pour chaque calculatrice.

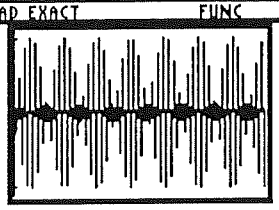
Ici la **TI-92-représentation** de la fonction sinus sur l'intervalle [0, 1500] dans un écran plein.



Ici la **TI-92-représentation** de la fonction sinus sur le même intervalle, mais dans un écran partagé.



Enfin la **TI-82-représentation** de la même courbe sur le même intervalle.



On le voit, la distinction entre les objets mathématiques et les objets liés à l'outil est tout à fait indispensable. Cette distinction procède aussi du recul nécessaire par rapport à l'outil.

2. Contrôler la verbalisation des concepts.

Nous avons vu que l'utilisation d'un outil influait sur le processus de conceptualisation. Contrôler cette influence suppose une grande vigilance sur la verbalisation utilisée. L'exemple des limites est clair de ce point de vue : l'utilisation d'une calculatrice favorise l'expression d'un point de vue cinématique. La définition suggérée en cours peut alors aller dans le même sens ("quand x se rapproche de a, f(x) se rapproche de L") ou rompre avec ce point de vue en se rattachant à un point de vue d'approximation (cf. I.b.5.).

Le contrôle de la verbalisation dans le cadre de l'action instrumentée nécessite l'application d'un principe de "vigilance épistémologique" (cf. 0.b.3.ii.).

III.c.1.v. Un contrôle des gestes.

Ce travail a mis en évidence les rapports entre les processus d'instrumentation et de conceptualisation. **S'il est habituel pour le professeur de suivre avec attention les étapes du processus de conceptualisation, il lui est plus difficile de suivre la genèse instrumentale pour chacun des élèves. Il est pourtant nécessaire d'en repérer des indices (ou des symptômes).**

Ce repérage est possible quand l'élève joue le rôle de sherpa avec la calculatrice rétroprojetable. Il est aussi possible de demander aux élèves, lors des travaux écrits, de réserver une colonne pour indiquer les actions instrumentées entreprises. Enfin on peut noter un certain nombre de gestes lors des activités de type TP (mais les écrans comme les claviers sont petits : il faut regarder de près).

Ce repérage doit se faire en référence avec des schèmes d'usage identifiés. Nous en avons déjà repéré un certain nombre (cf.II.b.3.v.) : le schème d'acharnement localisé, le schème de la confrontation, le schème du transport automatique. On peut alors noter des régularités dans les comportements (cf. II.b.1.iv.) et agir dans une logique de compensation : à un pratiquant de l'"acharnement localisé", proposer des exercices nécessitant l'utilisation de plusieurs applications de l'outil ou de plusieurs registres de représentation sémiotique.

Il doit se faire aussi en liaison avec les schèmes d'action instrumentée. **Pour chaque nouvelle notion, on peut poser la question des gestes adaptés à son étude : l'objectif est une constitution collectivement réfléchie de la carte des schèmes** (cf. II.b.3.vi.). Cela ne veut pas dire nécessairement que le schème va être le même pour tous. Mais sa mise en place socialement réfléchie influera pour une construction individuelle mieux articulée.

Conclusion de III.c.1.

L'intégration nécessaire des outils de calcul dans le cours de mathématiques est dès maintenant possible.

Une condition de la réussite de cette intégration est son caractère continu et collectif. Le caractère collectif peut être assuré par l'utilisation d'une calculatrice rétroprojetable.

Cette intégration requiert un contrôle collectif sur les images, les nombres, le langage, les schèmes d'usage. A travers ces différents contrôles, c'est bien une triple approche (mathématique, didactique, psychologique) du processus d'apprentissage qui est prise en compte.

III.c.2. Des nécessités institutionnelles .

Les propositions que nous avons faites pour le travail dans la classe indiquent, en creux, les responsabilités de l'institution.

III.c.2.i. Une exigence liée à la complexité.

Y. Chevallard évoque *"l'intégration et la viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques"* [Chevallard, in Cornu, 1992]. Il distingue trois niveaux : le "hardware didactique" (ordinateurs et logiciels), le "software didactique" (les séquences d'enseignement) et enfin **un système d'exploitation didactique**, assurant la coordination et l'intégration des deux premiers niveaux. **Il évoque la combinaison nécessaire de compétences diverses pour construire un tel système** :

> *"L'ère du bricoleur de génie est achevée. La conception de matériels intégrables sera issue du travail d'équipes associant informaticiens, ingénieurs didacticiens, enseignants. L'enseignant verra ainsi son statut archaïque de petit producteur indépendant peut-être justement remis en cause."*

Il signale l'intérêt pour le professeur d'une telle organisation :

> *"L'enseignant, renonçant à ses ambitions d'homme orchestre, se libère de tâches qu'il n'a guère les moyens d'accomplir, accueille avec intérêt mais vigilance les matériels didactiques que d'autres auront produit à leur intention et, se situant comme la fine pointe d'une chaîne de solidarités techniques, se reconnaît pour ce qu'il n'a jamais été pleinement, le spécialiste de l'enseignement. Plus loin des machines ; plus près des hommes. On passerait alors d'une évolution de l'enseignement à une révolution dans l'enseignement"*
> [Chevallard, in Cornu 1992].

L'intégration des outils de calcul dans l'enseignement demande un appui institutionnel fort du point de vue de la proposition de séquences d'enseignement et d'un "système d'exploitation didactique". G. Brousseau le signale aussi :

> ***"l'usage de l'informatique dans l'enseignement va produire de la demande d'informations didactiques"*** **[Brousseau, 1992].**

III.c.2.ii. Un retard historique.

Qu'en est-il de cette prise en compte institutionnelle ? Dès 1992, on pouvait lire le point de vue suivant :

> *"Le législateur a été, à chaque fois, rapidement dépassé par le progrès technologique ou plutôt n'a pas su prévoir les comportements et les possibilités qu'allait induire celui-ci (...). Nous devons aller vers une civilisation scolaire de l'outil informatique raisonnablement intégré (...). Il faudrait donc une politique offensive du Ministère :*
> *- fourniture gratuite d'une calculette à tous les élèves de l'école primaire ;*
> *- fourniture d'un outil informatique individuel à tous les étudiants entrant à l'IUFM ;*
> *- coordination entre les décideurs d'investissement technologique et les concepteurs des programmes ;*
> *- homogénéisation des choix au niveau d'une collectivité scolaire locale ;*
> *- intégration des outils dans l'évaluation (au besoin en différenciant les épreuves avec et sans)"* [MEN, 1992].

On peut être étonné du caractère audacieux de ce rapport émanant du "groupe calculatrices" du Ministère de l'Education Nationale. Il y a en effet un contraste saisissant entre ces propositions révolutionnaires et la politique de l'institution scolaire. Quatre années après la rédaction du rapport que nous venons d'évoquer, il faut bien constater qu'aucune de ses propositions n'ont connu un début d'application.

On a vu d'ailleurs dans les programmes (cf. I.b.2.i.) la prise en compte très timide des matériels. La calculatrice autorisée le jour du baccalauréat est toujours définie par ses dimensions maximales [64]. Dans un grand nombre d'universités, les outils de calcul ne sont pris en compte que sous forme d'interdiction lors des examens.

Les seules innovations ont été expérimentales.

Les expériences à caractère général n'ont pas été couronnées de succès, du fait des mauvaises conditions dans lesquelles elles se sont déroulées. E. Bruillard a réalisé une recherche sur l'expérience du Val de Marne [Bruillard, 1995 b] : le Conseil Général de ce département a offert une calculatrice à tous les élèves à l'entrée en sixième. Cela a été fait sans consultation des enseignants (la calculatrice ne leur était d'ailleurs pas offerte), sans dispositif d'accompagnement matériel (les calculatrices endommagées n'étaient pas réparées), ni pédagogique (ni formation, ni information). Le résultat était prévisible : la majorité des professeurs s'est révélée hostile à l'utilisation de ces outils. **L'attribution automatique de calculatrices à des élèves ne résout pas le problème de l'intégration de celles-ci à l'enseignement.**

Une expérience est en cours : elle concerne l'intégration des TI-92 dans une dizaine de classes. Assise sur une collaboration entre des équipes universitaires, des IREM et le Ministère de l'Education Nationale, elle devrait déboucher sur des résultats intéressants, à la fois sur l'effet des outils de calcul sur la conceptualisation et sur les conditions de leur intégration [Artigue et alii, 1996], [Guin et alii, 1996].

On est encore loin d'une prise en compte par le système éducatif de la nécessaire intégration des outils de calcul. Des pistes sont ouvertes, issues de travaux universitaires [Artigue et alii, 1996], [Guin et alii, 1996], du Bureau des Innovations Pédagogiques du Ministère de l'Education Nationale [Hirlimann et alii, 1993 et 1994]) ou du CNDP [Bruillard, 1995]. Mais il n'y a pas de prise en compte par le système lui-même des changements nécessaires.

III.c.2.iii. Un changement nécessaire.

Il ne s'agit pas ici de dessiner un programme de réforme de l'enseignement des mathématiques bien sûr, mais d'indiquer quelques pistes pour une intégration des outils de calcul.

1. Des conditions matérielles.

- au niveau de la formation : l'équipement en calculatrices symboliques des stagiaires à l'IUFM ;
- au niveau des établissements : le choix d'un type de calculatrice au même titre que pour les manuels scolaires, la constitution de salles équipées pour les mathématiques (avec rétroprojecteur et calculatrice adaptée) ;
- .au niveau des moyens : une diminution importante des effectifs de classe.

---

[64] Le rapport du "groupe calculatrices" [MEN, 1992] signale que ces dimensions maximales ont été décidées en 1980 à partir du format du plus gros calculateur disponible dans les rayons de la FNAC. Ce qui donnait déjà la possibilité d'utiliser le jour du bac un micro ordinateur : le Canon X07.

2. Des conditions de programme.

Les programmes de mathématiques devraient intégrer :
- un nécessaire apprentissage de l'interprétation des "calculatrices-graphiques" (c'est à dire des graphiques proposés par les calculatrices) ;
- une nécessaire introduction d'éléments de calcul numérique ;
- une "revalorisation" de la **définition** des objets (qui dépasse donc par exemple une simple évocation du "langage des limites" ;
- une attention plus grande portée aux processus de validation.

Ces perspectives pourraient déboucher sur une réintroduction de l'arithmétique, d'éléments de logique et d'éléments de programmation.

3. Une ingénierie didactique consistante.

L'enseignement dans un environnement calculatrice demande la prise en compte d'une double transposition (didactique et informatique), il demande aussi de décider d'un grand nombre de variables didactiques. Cela nécessite, comme on l'a vu en II.c.2.i. des séquences d'enseignement et un système d'exploitation spécifique.

On a tracé quelques pistes à propos de l'enseignement des limites dans un tel environnement (cf. II.b.2.i.). En extraire un cours exploitable par des enseignants supposerait d'abord de mettre en forme ces différents éléments :
- ordonner les différentes situations présentées, mettre en évidence les variables didactiques de ces situations, situer l'influence de leur variabilité, présenter différents itinéraires possibles dans le réseau d'exercices, de définitions.

Il faudrait ensuite tester le dispositif dans plusieurs classes ; enfin sur la base du bilan de l'enseignement dispensé, mettre au point un système didactique d'exploitation du cours.

Un tel dispositif suppose des équipes "d'ingénieurs didacticiens" et d'enseignants. Elles n'existent pas à ce jour.

4. Une formation ambitieuse.

A certains moments, des moyens matériels importants ont été mobilisés pour la formation des maîtres. Ce fut le cas avec la réforme des "mathématiques modernes", plus récemment avec le plan "Informatique pour tous". Dans les deux cas, cela n'a pas débouché sur des résultats positifs pour l'enseignement des mathématiques : les raisons ne sont pas exactement les mêmes, mais on peut constater dans les deux cas que l'illusion de départ était que la réforme en elle-même portait des progrès pour l'enseignement. Par ailleurs "les mathématiques modernes", comme les ordinateurs, étaient d'une certaine façon "importés" à l'intérieur de l'Education Nationale :
- pour les "mathématiques modernes", il s'agissait de l'influence du mouvement de formalisme développé à l'intérieur des mathématiques depuis le début du siècle, relayé par les associations professionnelles des enseignants de mathématiques ;
- pour le plan "Informatique pour tous", il s'agissait de pressions sociales (et industrielles) pour "moderniser" les processus d'apprentissage.

La situation est relativement nouvelle : les outils sont déjà dans les mains de ceux à qui ils sont destinés. Leur utilisation concerne aujourd'hui les mathématiques, mais la transformation des calculatrices de poche en ordinateurs portables est déjà bien avancée. De fait, le travail dans un environnement informatique concernera toutes les disciplines.

Développer les expérimentations d'enseignement dans un environnement calculatrices, constituer des équipes pour mettre au point séquences d'enseignement et système d'exploitation correspondant, envisager un plan de formation d'ampleur : l'Education Nationale ne devrait pas attendre davantage.

III.c.3. De nouvelles pistes de recherche .

Toute recherche en appelle d'autres. Nous avons étudié les rapports entre processus d'instrumentation et processus de conceptualisation en nous appuyant plus particulièrement sur des élèves au "profil" connu. Trois nouvelles pistes de recherche nous semblent utiles pour prolonger ce travail. Il s'agit, en environnement calculatrice, d'étudier :

- **les effets de l'interaction entre des élèves de profils différents ;**
- **l'adaptation de dispositifs particuliers de tutelle pour chacun des types ;**
- **l'évolution des profils sur le "long" terme.**

III.c.3.i. Interaction didactique et typologie.

Une contradiction apparaît dans notre travail : alors que nous avons insisté sur l'importance de *"l'interaction sociale comme moteur des processus de preuve"* (cf. 0.b.2.iv.), alors que nous avons mis en place des dispositifs stables de travail en collaboration (les binômes de TP), nous n'avons pas exploité les effets possibles d'association d'élèves de types différents.

Cette contradiction tient à nos objectifs de recherche : voulant étudier les rapports entre instrumentation et conceptualisation pour chacun des types, il nous fallait choisir des "systèmes bi-didactiques", les binômes, relativement stables. Aussi les cinq élèves que nous avons suivis travaillaient-ils en équipe avec des élèves de même type.

Nous n'avons assez peu suivi les systèmes "déséquilibrés". Nous notions seulement, dans le bilan sur l'évolution des notes et du type de travail [Trouche, 1996 b] :

> *"La plupart des élèves ont changé de comportement de façon significative pendant l'année. Pour certains, on peut même repérer un changement qualitatif :*
> *- soit par un investissement personnel dans la recherche et un travail très approfondi (...) ;*
> *- soit par un effet d'entraînement, dans un groupe qui est tiré par un élément moteur (...). L'élément moteur influence aussi le travail réalisé ;*
> *- soit enfin par une coopération déséquilibrée entre deux élèves travaillant de la même façon et avec un même investissement régulier au sein d'un groupe."*

Nous avons aussi noté à plusieurs occasions, dans le bilan de l'expérimentation, l'effet positif de la collaboration d'élèves de types différents, par exemple d'un élève de type théorique et d'un élève de type rationnel (Annexe 4, page II.40) :

> *"(Deux binômes sont réduits à une unité, du fait de certaines absences) A noter : Michaël (rationnel) s'est installé en face de Guilhem (théorique) et la communication entre les deux élèves est bonne. Il y a une sorte de synergie, de contagion qui s'opère. Le type de travail de Guilhem est ainsi modifié, indiquant l'influence du voisinage sur les attitudes de recherche et plus généralement sur le travail réalisé."*

Il nous semble qu'il y a là des pistes de recherche tout à fait fructueuses, en particulier dans un environnement calculatrice (ou informatique) : les situations bi-didactiques sont fréquentes ou peuvent être favorisées. Il ne s'agira pas alors tout à fait (cf 0.b.2.i.) d'un processus autorégulé (il y a deux élèves), ni d'une interaction dissymétrique entre un adulte et un enfant (ce sont justement deux élèves qui sont en présence). Mais les comportements différents au sein des binômes devraient créer des déséquilibres nécessitant des adaptations productrices sur le plan des comportements.

III.c.3.ii. Dispositifs de tutelle et typologie.

Il s'agirait là de partir des "propositions d'amélioration de l'enseignement" définies en fin de II.b.3.vi. On a constaté qu'il s'agissait souvent de propositions relatives aux "métaconnaissances globales". Cela pose une question qui était déjà posée par A. Robert [Robert et alii, 1993] : peut-on enseigner les métaconnaissances ? G. Brousseau évoque la nécessité d'un **discours didactique :**

> *"Si l'on veut développer chez l'élève un rapport à ses connaissances qui soit un rapport de savoir, il faut prévoir un deuxième assujetissement dans lequel va s'installer un discours sur l'activité d'apprentissage, un discours de reconnaissance de ce que l'on appris, de ce que l'on sait, de ce que l'on veut apprendre, de ce que l'on va savoir etc. : un discours didactique. (...). **On peut jouer aux échecs sans savoir ce que l'on fait comme ouverture mais il est certain qu'il va y avoir un moment où le jeu va faire entrer le sujet dans un discours sur le jeu"*** [Brousseau, 1992].

G. Brousseau note la spécificité de l'environnement informatique :

> *"(...) il y a plusieurs formes de fonctionnement des connaissances : des connaissances qui fonctionnement comme élément de décision, des connaissances qui fonctionnent comme éléments d'information, des connaissances qui fonctionnent comme éléments de preuve, de validation. Pour chacune, le type d'environnement et de modèle est différent. L'élève ne se sentant pas à égalité avec l'ordinateur, il sera très difficile de faire en sorte qu'un élève utilise une notion mathématique non pas comme un savoir mais comme un élément de preuve, de conviction. **Il sera très difficile d'installer un élève dans une position de proposant ou d'opposant à égalité avec un ordinateur. Or c'est une des parties la plus importante du savoir, celle qui n'entre pas dans une gestion individuelle.**"* [Brousseau, 1992].

Sur ces éléments décisifs (l'inférence, l'interprétation, la coordination, le contrôle), la recherche de dispositifs adaptés à chaque type d'élèves est essentielle.

III.c.3.iii. Travailler sur le long terme.

En II.c.3.i. nous avons évoqué l'étude nécessaire de la viabilité de systèmes bi-didactiques, associant deux élèves de types différents ;
- en II.c.3.ii., nous venons d'évoquer l'étude de dispositifs adaptés à un type particulier d'élèves.

Il est aussi possible que ce soit l'articulation des dispositifs des deux types qui permettent des évolutions significatives. Mais étudier de telles évolutions requiert de se placer sur le long terme. **Les processus de conceptualisation et d'instrumentation se déploient sur des temps beaucoup plus longs que l'année scolaire.** Il serait ainsi utile de suivre une cohorte d'élèves sur plusieurs années (6ème/Terminale ou Seconde/1er cycle Universitaire).

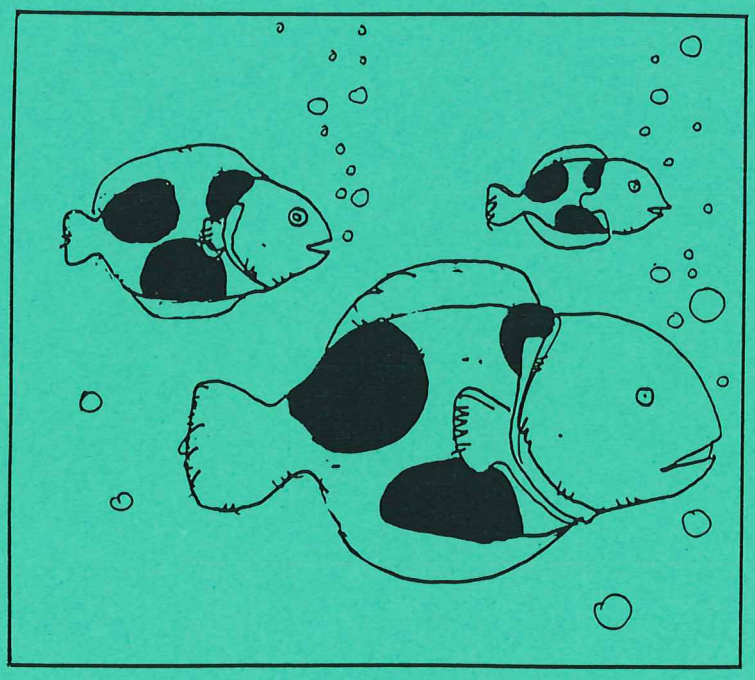
Ceci permettrait de mesurer l'effet des dispositifs que nous avons évoqués dans les deux paragraphes précédents. Un tel type de recherche demande évidemment un dispositif de suivi assez important. On retrouve ici les nécessités institutionnelles évoquées en III.c.2.

Les pistes de recherche sont nombreuses. Leur exploration nécessite une coordination étroite des travaux des équipes travaillant sur ce thème.

Conclusion

Et nous allons, suivant le rythme de la lame,
Berçant notre infini sur le fini des mers.

Beaudelaire, Les Fleurs du Mal.



Conclusion

L'éternité, c'est long,
surtout vers la fin.

Robert Beauvais, cité par [Fischetti, 1996]

L'analyse didactique procède par repérage d'évolutions et de régularités. Or, pendant les quatre ans qu'a duré notre étude, nous avons eu l'impression que tout changeait : les programmes ont évolué ; les outils de calcul eux-mêmes ont subi une petite révolution (en passant du "graphique" au "symbolique") au moment même où s'achevait cette thèse. Nous avons donc avancé sur des sables mouvants. **L'objet même de notre étude a évolué : d'une étude épistémologique, on est passé à une étude didactique, pour en arriver, avec l'étude des "profils d'élèves", à une approche anthropologique.**

Une triple approche [Léonard et Sackur, 1991]

A partir de l'étude du concept mathématique de "limite" dans un environnement calculatrice, nous avons relevé les liens profonds entre les processus de conceptualisation et les processus d'instrumentation :

- l'étude du processus de conceptualisation s'est faite à partir de la verbalisation (les définitions données par les élèves) et des techniques (repérées à partir des théorèmes-en-actes dans la résolution des exercices). **Le relevé des conceptions est alors apparu plus comme une méthode de repérage du caractère hétérogène de la conceptualisation que comme le relevé de stades stabilisés de la pensée.**
- l'étude du processus d'instrumentation s'est faite à partir des schèmes d'action instrumentée, compris dans leur rapport avec les schèmes d'usage. **Nous avons montré la variété des genèses instrumentales à l'oeuvre** (alors même que l'outil était intégré dans la classe et que, pour la TI-92, son "dévoilement" a été socialisé).

Nous avons montré que la compréhension des processus d'instrumentation, de conceptualisation et de leurs liens supposait la prise en compte des "profils" d'élèves établis à partir d'une carte des métaconnaissances. Nous avons repéré ainsi cinq profils : "théorique", "rationnel", "scolaire", "bricoleur" et "expérimentateur".

Cette interdépendance des processus impose une triple prise en compte par l'enseignant :

- une prise en compte de la connaissance à enseigner (la transposition didactique) ;
- une prise en compte de l'instrument (la transposition informatique) ;
- une prise en compte de la diversité de ses élèves (les profils).

Ces prises en compte débouchent sur la nécessité de dispositifs généraux qui permettent à l'activité des élèves de se déployer (les TP) et de dispositifs particuliers à chaque "profil" repéré.

Une même méthode : l'étude de l'activité.

Nous n'avons fait ici que mettre en oeuvre une méthode générale décrite par G. Vergnaud :

> *"La plupart de nos connaissances sont des compétences. La gageure est d'aller dénicher les conceptualisations sous-jacentes aux compétences, même si le sujet n'est pas capable de les expliciter lui-même. Nous avons besoin pour cela de nous intéresser non seulement au résultat de l'activité, mais à l'activité elle-même"* [Vergnaud, 1996].

Nous avons montré alors que nous ne pouvions comprendre un geste qu'en le replaçant dans un contexte, de deux points de vue :
- un geste est inscrit dans un ensemble de gestes activés dans un but précis : il s'agit alors d'un schème ;
- un geste est lié à d'autres gestes par des relations parfois lointaines et pourtant profondes : quand un élève manipule une calculatrice, il peut retrouver les gestes qu'il réalise en zappant avec la télécommande de sa télévision ou alors les gestes qu'il réalise en faisant une partie d'échecs sur son ordinateur. On peut estimer que les deux références n'auront pas le même effet.

Ainsi l'étude des répertoires de gestes est-elle essentielle :

> *"Ce qui se développe chez l'enfant et l'adulte,* ***c'est un répertoire de formes d'organisation de l'activité*** *qui concernent des registres aussi différents que le mouvement et le geste, l'affectivité et l'émotion, l'activité intellectuelle, l'interaction avec autrui, le langage."* [Vergnaud, 1996]

Dans ce sens, la présence d'un outil est précieuse. Elle démultiplie les "biais d'observation" pour le professeur : quels rapports entre le travail "papier-crayon" et le travail "clavier-écran" (au sens de la coordination, de l'investigation, du contrôle) ? Quelle est la succession des gestes réalisés ? Il y a là une sorte d'extériorisation de la pensée très utile pour le professeur-médiateur.

Cette thèse s'achève ainsi par un mouvement inverse de celui qui l'a porté pendant quatre ans : **nous avons mis en évidence tout au long de notre travail l'influence de l'utilisation des outils de calcul sur les processus de conceptualisation, donc sur un mouvement d'intériorisation de la pensée** ; et **nous concluons par la possible observation des gestes instrumentés comme expression de la pensée.**

Il y a derrière ce renversement apparent une manifestation des rapports dialectiques entre le geste et la pensée (du même type qu'entre la pensée et le langage, cf. 0.b.2.v.).

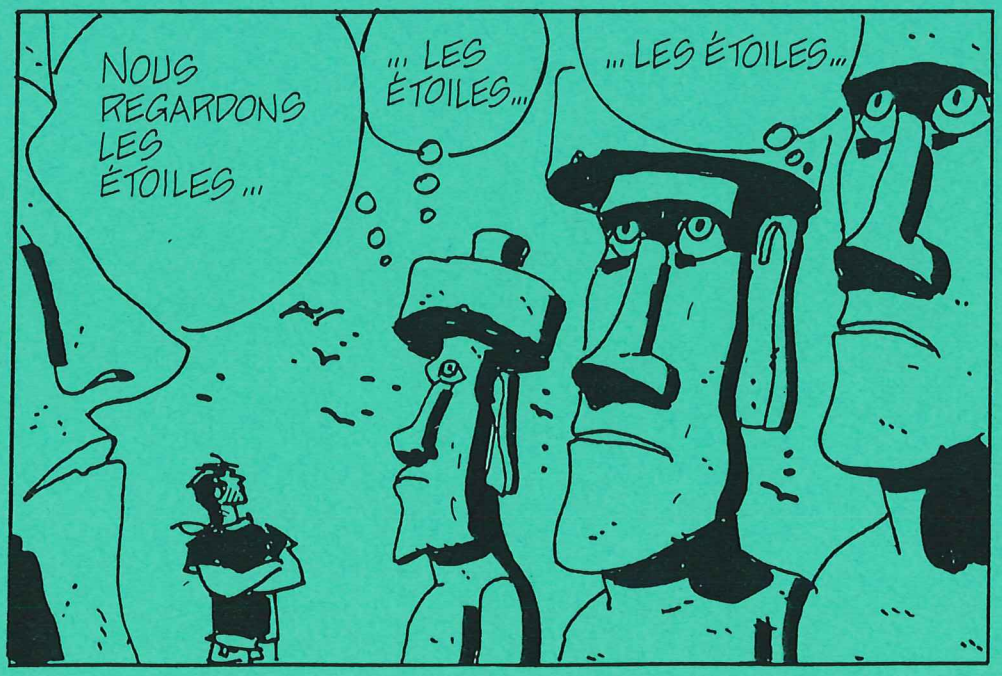
En concluant ainsi, nous indiquons un souhait : celui que les outils de calcul ne soient plus conçus comme **intrus** dans la classe (ou comme **"potion magique"**) mais comme **auxiliaires** du professeur pour son enseignement. **Cela suppose, on l'a vu, un contrôle de leur intégration (c'est une contrainte). Cela permet en retour une meilleure compréhension des processus de conceptualisation (c'est un gain).**

Laissons le dernier mot à John Dewey, cité par G. Vergnaud [Vergnaud, 1996]

"Il n'y a rien de plus pratique qu'une bonne théorie".

Bibliographie

Derrière chaque image révélée
se cache une autre image,
plus proche de la vérité.
Et derrière celle-ci s'en cache encore une autre.
Et derrière encore, l'image de cette réalité
absolue, mystérieuse,
que personne ne verra jamais.
Antonioni, 1996. Par delà les nuages.



Repères bibliographiques relatifs à :

La construction des connaissances.

Artigue, Michèle. 1990. *Epistémologie et didactique.* RDM, Vol. 10, n°2.3, pp 241-286. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Bachelard, Gaston. 1938. *La formation de l'esprit scientifique.* Paris : Librairie philosophique Vrin.

Balacheff, Nicolas. 1987. *Processus de preuve et situations de validation.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 18, pp 147-176. Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, Nicolas. 1994 a. *Didactique et Intelligence Artificielle.* RDM, Vol 14, n°1-2, pp 9-42. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions..

Balacheff, Nicolas. 1995. *Conception, connaissance et concept.* Séminaires de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, Année 1994-1995, pp 219-244. Grenoble : CNRS-IMAG, Université Joseph Fourier.

Boschet, F. 1988. *Un aperçu des travaux de Vygotski. Leontiev et Bruner, disciples de Vygotski.* Cahier de didactique des mathématiques n°52. Paris : IREM, Université Paris VII.

Bourdieu, Pierre. 1980. *Le sens pratique.* Paris : Editions de Minuit.

Bruner J., 1983. Le développement de l'enfant. Savoir faire, savoir dire. Paris : PUF.

Brousseau, Guy. 1986. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.* RDM, Vol.7, n°2, pp 33-115. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Brousseau, Guy. 1988. *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques.* Communication au Colloque International : construction des savoirs-Obstacles et conflits. Montréal.

Castella, Corine. 1995. *Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures : un exemple concret, celui de tangente.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 15, n°1, pp 7-47. Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Yves. 1985. *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Chevallard, Yves. 1989. *Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, institutionnel, officiel.* Séminaires de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, Année 1988-1989 , pp 211-236. Grenoble : CNRS-IMAG, Université Joseph Fourier.

Chevallard, Yves. 1992. *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique.* RDM, Vol 12, n°1, pp 73-112. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Comiti et alii. 1995. *Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques,* in Différents types de savoir et leur articulation. Grenoble : La Pensée sauvage Editions.

Coppé, Sylvie. 1995. *Types de connaissances mises en oeuvre par l'élève dans la détermination de la composante publique de son travail,* in Différents types de savoir et leur articulation. Grenoble : La Pensée sauvage Editions.

Douady, Régine. 1986. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet,* RDM, Vol. 7, n°2, pp 5-31. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Douady, Régine. 1993. *L'ingénierie didactique, un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage.* Cahier de DIDIREM 19-1. Paris : IREM, Université Paris VII.

Evans J. St.B.T.. 1989. *Biases in Human Reasoning.* Hove and London : Lawrence Erlbaum.

Fischer, Jean-Paul. 1993. *Trois grands théoriciens des apprentissages scolaires.* Strasbourg : IREM, Université Louis Pasteur.

Houdé, O. et D. Miéville. 1993. *La pensée logico-mathématique.* Paris : PUF.

Houdé, O. 1995. *Rationalité, développement et inhibition, Un nouveau cadre d'analyse.* Paris : PUF.

Lakatos, Imre. 1976. *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique.* Paris 1985 : Hermann. (Edition originale en anglais sous le titre *Proofs and Refutations,* C.U.P., 1976).

Lecourt, Dominique. 1996. *Prométhée, Faust, Frankenstein, Fondements imaginaires de l'éthique.* Paris : Synthélabo.

Léonard, F et C. Sackur. 1991. *Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche.* RDM, Vol.10, n° 2.3, pp 205-240. Grenoble : La pensée sauvage Editions.

Meinadier, Jean Pierre. 1991. *L'interface utilisateur.* Paris : Dunod.

Piaget, Jean et Garcia. 1983. *Psychogénèse et histoire des Sciences.* Paris : Flammarion.

Pitrat, J.. 1990. *Métaconnaissance, Futur de l'Intelligence Artificielle.* Paris : Hermès.

Polya, G. 1967. *La découverte des mathématiques : les modèles, une méthode générale.* Paris : Dunod.

Robert, Aline et Monique Baron. 1993. *Métaconnaissances en I.A., en E.I.A.O. et en didactique des mathématiques.* Numéro spécial des Cahiers de Didirem. Paris : IREM, Université Paris VII.

Robert, Aline et Jacqueline Robinet. 1996. *Prise en compte du méta en didactique des mathématiques.* RDM, Vol. 16, n°2, pp 145-176. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Ricco, G. 1996. *Psychologie cognitive et didactique des mathématiques, perspectives critiques de différentes approches concernant la cognition scolaire.* in Actes de L'Ecole d'Eté de didactique des Mathématiques. Clermont-Ferrand : IREM.

Sarrazy, Bernard. 1994. *Peut-on formaliser les procédures de résolution des problèmes d'arithmétique à l'école élémentaire ?* in Les Sciences de l'Education pour l'Ere nouvelle.

Serres, M. 1992. *Eclaircissements.* Paris : Editions F. Bourin.

Tall, David, coordonné par. 1991. *Advanced Mathematical Thinking.* Cambridge (U.K.) : Kluwer Academic Publishers.

Vergnaud, Gérard. 1990. *La théorie des champs conceptuels.* RDM, Vol. 10, n°2.3, pp 133-170. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Vergnaud, Gérard. 1996. *Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation.* in Actes de L'Ecole d'Eté de didactique des Mathématiques. Clermont-Ferrand : IREM.

Vygotski. 1985. *Pensée et langage.* Paris : Editions Sociales.

L'infini et l'analyse.

Antibi, André. 1988. *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite / réflexions, propositions.* Thèse de doctorat. Toulouse : IREM, Université Paul Sabatier.

Artigue, Michèle. 1993. *Enseignement de l'analyse et fonctions de référence,* Repères-Irem n°11, pp 115-139. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Artigue, Michèle. 1995. *Réformes et contre réformes dans l'enseignement secondaire de l'analyse au cours du XX° siècle.* Colloque Inter-IREM Analyse de Jussieu.

Azcarate, Carmen et Lorena Espinoza. 1995. *A Study on the Secondary Teaching System about the Concept of Limit.* PME IXX, Vol. II, pp11-17. Recife, Brésil.

Bkouche, Rudolph. 1996. *Point de vue sur l'enseignement de l'analyse : des limites et de la continuité dans l'enseignement.* Repères-Irem n°24, pp 67-76. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Bolzano, Bernhard. 1851. *Les paradoxes de l'infini.* 1993, Paris : Le Seuil.

Boyer, Carl B. 1949. *The History of the Calculus and its Conceptual Developpement.* USA : Dover Publications Inc.

Cornu, Bernard. 1980. *Interférence des modèles spontanés dans l'apprentissage de la notion de limite.* Cahier du Séminaire de l'équipe de recherche en didactique et pédagogie des mathématiques, n°8, pp 57-83. Grenoble.

Cornu, Bernard. 1981. *Grandes lignes de l'évolution historique de la notion de limite.* Cahier du Séminaire de l'équipe de recherche en didactique et pédagogie des mathématiques n °13, pp 245-262. Grenoble : IMAG, Université Joseph Fourier.

Cornu, Bernard. 1983. *Apprentissage de la notion de limite, conceptions et obstacles.* Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Cornu, Bernard. 1992. *L'évolution des mathématiques et de leur enseignement,* in L'ordinateur pour enseigner les mathématiques. Paris : PUF.

Cuppens, Roger. 1995. *L'introduction des moyens de calcul modernes dans l'enseignement des mathématiques.* In Des outils pour le calcul et le traçage de courbes. Les dossiers de l'ingénierie éducative n°19. Paris : CNDP.

Dahan-Dalmédico, Amy et Jeanne Peiffer. 1982. *Routes et dédales.* Paris : Etudes Vivantes.

Deledicq, André. 1994. *Les conceptions relatives aux limites,* in Vingt ans de didactique des mathématiques en France, pp 321-327. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Deledicq, André. 1996. *Est-il possible d'enseigner l'analyse aujourd'hui ?* Repères-Irem n°24, pp 79-99. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Dhombres, Jean. 1978. *Nombre, mesure et continu, épistémologie et histoire.* Paris : Cedic/Fernand Nathan.

Fischetti, Antonio et Laurent Mayet, coordonné par. 1996. *Comprendre l'infini.* Sciences et Avenir, Hors série, Mars 1996. Paris : Michel Friess.

Gardiner, A. 1982. *Infinite Processes.* New York : Springer.

Hauchart, C et N Rouche. 1987. *Apprivoiser l'infini.* Louvain La Neuve : CIACO Editeur.

Houzel, Ovaert, Raymond, Sansuc. 1976. *Philosophie et calcul de l'infini.* Paris : Maspero.

Legrand, Marc. 1996. *A la recherche de la pierre philosophale pour enseigner l'analyse.* Repères-Irem n°24, pp 9-10. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Monnoyeur, Françoise, coordonné par. 1993. *Infini des Mathématiciens, infini des Philosophes.* Paris : Belin.

Moreno, Luis et Guillermina Waldegg. 1991. *The conceptual evolution of actual mathematical infinity.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, pp 211-231. Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Ovaert, Jean-Louis et Jean-Luc Verley. 1983. *Analyse 1,* Léonard Epistemon. Paris : CEDIC Nathan.

Robert, Aline. 1982. *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur.* RDM, Vol. 3, n°3, pp .307-341. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Robinet, Jaqueline. 1983. *Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction.* RDM, Vol. 4, n°3, pp 223- 292. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Salanskis, J.-M.et Houria Sinaceur, coordonné par. 1992. *Le labyrinthe du continu.* Paris : Springer-Verlag.

Schneider, Maggy. 1991. *Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente.* Repères-Irem n°5, pp 65-81. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Schneider, Maggy. 1992. *A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 23, pp 317-350. Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, Anna. 1985. *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite.* RDM, Vol. 6, n°1, pp 5-67. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Tall, David et Shlomo Vinner. 1981. *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.* Educational Studies in Mathematics, Vol 12, p 151-169. Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Tall, David. 1992a. *The Transition to advanced Mathematical Thinking : Functions, Limits, Infinity, and Proof,* in Handbook of Reaserch on Mathematics Teaching and Learning, pp 495-511. New York : Mac Millan Publishing Company.

Thiénard, J.-C.1991. *Pour une approche de l'enseignement de l'analyse par le calcul infinitésimal.* Poitiers : IREM, Université de Poitiers.

Youschkevitch, A. 1981. *Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX° siècle,* Fragment d'histoire des mathématiques. Brochure APMEP n°41, pp 7-68. Paris : APMEP.

Les programmes d'enseignement des limites, et les manuels scolaires.

Bulletin Officiel de l'Education Nationale :
n°26 du 30 Juin 1966
n°3 du 14 Mai 1971
n°31 du 11 Septembre 1986
n°spécial 2 du 2 Mai 1991
n°7 du 7 Juillet 1994.

Antibi, André et alii. 1994. Math, Terminale S, obligatoire. Collection Nouveau Transmath. Paris : Nathan.

Artigues, C., Y. Bellecave et P.-H. Terracher. 1991. *Analyse, 1ère S et E.* Collection Terracher. Paris : Hachette Education.

Bontemps, Guy et alii. 1994. *Mathématiques, Terminale S.* Collection Fractale. Paris : Bordas.

Bouvier, Jean-Pierre et alii. 1996. *Math, TS, enseignement obligatoire.* Paris : Belin.

Ferachoglou, R et P.-H. Terracher. 1994. *Math, Seconde.* Collection Terracher. Paris : Hachette Education.

Ferachoglou, R et P.-H. Terracher. 1994. *Math, Terminale S, Enseignement obligatoire.* Collection Terracher. Paris : Hachette Education.

Lehman, Eric. *Mathématiques pour l'étudiant de 1ère année.* Paris : Belin.

Nassier, Francis et alii. *Mathématiques, Terminale S.* Collection Dimathème. Paris : Didier.

Sol, Jean-Louis. 1993. *Mathématiques, Deug de Sciences Economiques.* Paris : Dunod.

Le graphisme : problèmes de congruence.

Baillé, Jacques et Sylvette Maury, sous la dir. de. 1993. *Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation* . Les Sciences de l'Education pour l'ère nouvelle Vol. 1-3. Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Bertin, Jacques. 1984. *Graphique (représentation).* Encyclopaedia Universalis, Tome 8, pp 853-862. Paris : Encyclopaedia Universalis.

Bouveresse, Jacques. 1995. *Langage, perception et réalité.* Paris : Jacqueline Chambon.

Debray, Régis. 1992. *Vie et mort de l'image, une histoire du regard en Occident.* Paris : Gallimard.

Drouin, Anne-Marie. 1987. *Des images et des sciences,* in *Communiquer les sciences,* Aster n°4, pp 1-31. Paris : INRP.

Duval, Raymond. 1988 a. *Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence.* Annales de Didactique et de Sciences cognitives , Vol. 1, pp 7-25. Strasbourg : IREM, Université Louis Pasteur.

Duval, Raymond. 1988 b. *Graphiques et équations : l'articulation de deux registres,* Annales de Didactique et de Sciences cognitives, Vol. 1, pp 235-253. Strasbourg : IREM, Université Louis Pasteur.

Duval, Raymond. 1994. *Les représentations graphiques : fonctionnement et conditions de leur apprentissage.* Actes de la 46ème rencontre de la CIEAEM. Toulouse : IREM.

Duval, Raymond. 1996. *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?.* in Actes de L'Ecole d'Eté de didactique des Mathématiques. Clermont-Ferrand : IREM.

Eco, Umberto. 1976. *La production des signes.* Paris (1992) : Librairie Générale Française.

Gasquet, Sylviane. 1994 a. *Fenêtres sur courbes.* Grenoble : CRDP.

Gasquet, Sylviane. 1994 b. *Donner du sens aux mathématiques.* In Animation et Education, n°123. Paris : 0CCE.

Gil, Fernando. 1992. *Spacialisation et intelligibilité.* La Science au Présent, pp 124-125. Paris : Encyclopaedia Universalis.

Lerouge, Alain. 1992. *Représentation cartésienne, rationalité mathématique et rationalité du quotidien chez des élèves de collège.* Thèse. Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Quéau, Philippe. 1993. *Le Virtuel, vertus et vertiges.* Paris : Champ Vallon/INA.

Rogalski, Janine. 1982. *Les représentations graphiques dans l'enseignement : contribution à la seconde école d'été de Didactique des Mathématiques.* Orléans (1983) : IREM, Université d'Orléans.

Verley, Jean-Luc. 1992. *Représentations graphiques.* La Science au Présent, pp 126 -129. Paris : Encyclopaedia Universalis.

L'utilisation de machines graphiques, ou dotées d'un système de mathématiques symboliques.

Aldon, Gilles. 1994. *Derive à disposition* , in Actes de l'Université d'été, Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques, pp 91-98. Caen : IREM et IUFM.

Artigue, Michèle. 1991. *Analysis*, in Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht (Netherland) : Kluwer Acadelic Publishing.

Artigue, Michèle. 1995 a. *Une approche didactique de l'intégration des EIAO à l'enseignement* , in Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur. Guin, Nicaud et Py, Eyrolles.

Artigue, Michèle. 1995 b. *Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques.* Repères-IREM n°19, pp 77-108. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Artigue, Michèle, Jean-Philippe Drouhard et Jean-Baptiste Lagrange. 1996. *Impact de l'intégration de logiciels de calcul symbolique dans l'enseignement sur les représentations et pratiques mathématiques des élèves de l'enseignement secondaire.* Paris : Irem, Paris VII.

Artigue, Michèle. 1996. *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée.* Paris : IREM, Université Paris VII.

Balacheff, Nicolas. 1991. *Contribution de la didactique et de l'épistémologie aux recherches en E.I.A.O..* in Bellissant C. (Ed.) : *Actes des XIIIe journées francophones sur l'informatique.* Grenoble : IMAG.

Balacheff, Nicolas. 1994 b. *La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique.* In Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bernard, René, Christian Faure, Maryse Noguès, Yvon Nouazé et Luc Trouche. 1995a. *Arithmétique, le retour.* Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Bernard, René, Christian Faure, Maryse Noguès, Yvon Nouazé et Luc Trouche. 1995b. *Des fonctions et des graphes.* Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Bellemain, F. et B. Caponi. 1992. *Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur.* Educational Studies in Mathematics Vol. 23, pp 59-97. Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Boileau, André, Maurice Garançon et Carolyn Kieran. 1993. *Using a Computer Graphing Environment in Algebra Problem Solving : Notions of Infinity/Continuity.* PME XVII, Vol II, pp 25-32. Japan.

Brousseau, Guy. 1992. *Modélisation informatique dans la gestion des processus didactiques.* Séminaires de didactique des Mathématiques et de l'Informatique, 1991-1992, pp 99-115. Didatech. Grenoble : CNRS-IMAG, Université Joseph Fourier.

Bruillard, Eric. 1993. *Étude sur quelques obstacles d'usage des calculettes à l'école élémentaire.* Grand N. Grenoble : IREM, Université Joseph Fourier.

Bruillard, Eric. 1995a. *Usage des calculatrices à l'école élémentaire et au début du collège*, Rapport de recherche. Créteil : IUFM.

Bruillard, Eric, coordonné par. 1995b. *Des outils pour le calcul et le traçage de courbes.* Les dossiers de l'ingénierie éducative n°19. Paris : CNDP.

Canet, Jean-François. 1994. *Exemple d'utilisation d'un Système Mathématique Symbolique.* Mémoire de DEA. Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Canet, Jean-François, Jacques Delgoulet, Dominique Guin et Luc Trouche. 1996. *Un outil personnel puissant, qui nécessite un apprentissage et ne dispense toujours pas de réfléchir.* Repères-Irem n°24. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Chevallard, Yves. 1992. *Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques,* in L'ordinateur pour enseigner les mathématiques. Paris : PUF.

Cornu, Bernard. 1992. *L'évolution des mathématiques et de leur enseignement,* in L'ordinateur pour enseigner les mathématiques. Paris : PUF.

Cuppens, Roger. 1995. *L'introduction des moyens de calcul modernes dans l'enseignement des mathématiques,* in *Des outils pour le calcul et le traçage de courbes.* Les dossiers de l'ingénierie éducative n°19. Paris : CNDP.

Dagher, A.. *Apprentissage en environnement informatique des relations entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions* , in in Vingt ans de didactique des mathématiques en France, pp 379-387. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Delapierre, M. et alii. 1985. *Système éducatif et révolution informatique.* Collection Recherches. Paris : FEN.

Demana, Franklin, Bert K. Waits et Stanley R. Clemens. 1992. *College Algebra et Trigonometry, a Graphing Approach.* USA : Addison-Wesley Publishing Company.

Dreyfus, Tommy. 1991. *On the status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education.* Proceedings of PME 15, Italy.

Dreyfus, Tommy et Baruch Schwarz. 1995. *New Actions upon old Objects : a new Ontological Perspective on Functions.* Educational Studies in Mathematics Vol.29, pp 259-291. Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Drezen, Gaëtan. 1996. *Recherche statistique orientée objets d'une typologie d'élèves utilisateurs de calculatrices graphiques et à système formel.* Mémoire de DEA. Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Drijvers, P.. 1994. *The Use of Graphics Calculators and Computer Algebra Systems : Difference and Similarities,* in The International Derive Journal, Number 1, April 1994, pp 71-82. Plymouth (England) : John Berry Editor.

Faure, Christian, Maryse Nogués, Yvon Nouazé et Luc Trouche. 1993. *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée.* Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Ferrand, M. 1995. *Le discret et le continu* , éditorial de la revue 3'33 n°16. Paris : Casio.

Goldenberg, E. 1987. *Believing is seing : how preconceptions influence the perception of graphs.* Proceedings of PME XI, pp 197-203. Montréal.

Guin, Dominique. 1996. *Etude des modes d'appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de seconde.* Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Hillel, Joël. 1993. *Computer Algebraic Systems as Cognitive Technologies : Implication for the Practice of Mathematics Education,* in C. Keitel & K. Ruthven

(Eds), Learning from Computers : Mathematics and Technology, pp 18-47, NATO Series F, vol. 121. Berlin : Springer-Verlag..

Hirlimann, Anne, coord. par. 1993. *Faire des Mathématiques au Lycée avec l'Ordinateur.* Paris : Ministère de l'Education Nationale (D.L.C.).

Hirlimann, Anne, coordonné par. 1994. *Enseignement des Mathématiques et logiciels de calcul formel, Derive, un outil à intégrer.* Paris : Ministère de l'Education Nationale (D.L.C.).

ICME Study Series. 1986. *The influence of Computer and Informatics on Mathematics and its Teaching.* Cambridge University Press.

Keitel, C et K. Ruthven, coordonné par. 1993. *Learning from computers : Mathematics Education and Technologie.* Nato series F, vol. 121. Berlin : Springer-Verlag.

Kuntz, Gérard. 1993. *L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a,* Repères-Irem n°11, pp 5-32. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Kutzler, B. 1994 a. *DERIV(E)ons vers le futur des Mathématiques* , in Actes de l'Université d'été, Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques, pp 67-78. Caen : IREM et IUFM.

Kutzler, B. 1994 b. DERIVE - The Futur of Teaching Mathematics. in The International Derive Journal, pp. 37-48. Plymouth (U.K.) : J. Berry Editor.

Laborde, Colette. 1994. *Les rapports entre visuel et géométrique dans un E.I.A.O.* In Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Ministère de l'Education Nationale. 1992. *Rapport du groupe "Calculatrices".*

Maxwell, Marie E. et Antonio R. Quesada. 1994. *The effect of using graphing calculators to enhance college students'performance in precalculus.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 27, pp 205-215. Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Monaghan, J, S. Shyashiow et D. Tall. 1994. *Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System* . PME XXVIII, Vol. III, pp 279-286. Lisbon.

Monnet, Françoise et Yves Paquelier. 1992. *Imagiciels, approche expérimentale en Mathématiques.* Aster n°14, pp 181-214. Paris : INRP.

Rabardel, Pierre. 1995. *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

Rauzy, G.. 1992. *L'informatique conduit-elle à des mathématiques nouvelles ?,* in L'ordinateur pour enseigner les mathématiques. Paris : PUF.

Robert, Aline. 1993. *Eléments de réflexion sur l'utilisation des calculatrices en 1ère S et Terminale C et E,* Repères-Irem n°11, pp 77-96. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Rogalski, Marc. 1994. *Les concepts de l'EIAO sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en Analyse.* RDM, Vol. 14, n°1.2, pp 43-66. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Ruthven, Kenneth. 1990. *The influence of Graphic Calculator Use on Translation from Graphic to Symbolic Form.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 21, pp 431-450. Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Tall, David. 1985. *Using Computer Graphics Programs as Generic Organisers for the Concept Image of Differenciation.* Proceedings of PME 9, Utrecht.

Tall, David. 1992b. *L'enseignement de l'analyse à l'age de l'informatique,* in L'ordinateur pour enseigner les mathématiques. Paris : PUF.

Tall, David. 1994. *A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics.* Actes de la 46ème rencontre de la CIEAEM. Toulouse : IREM.

Trouche, Luc. 1992. *Calculatrices graphiques, statut pour l'élève, statut pour le maître,* Mémoire de DEA de Didactique des disciplines scientifiques. Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Trouche, Luc. 1994 a. *Calculatrices graphiques, la grande illusion,* Repères-Irem n°14, pp 39-55. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Trouche, Luc. 1994 b. *Analyse et outil graphique au lycée,* in Actes de l'Université d'été, Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques, pp 99-112. Caen : IREM et IUFM.

Trouche, Luc. 1994 c. *Généralisation des calculatrices graphiques en lycée, Révélation, ou mystification ?* in Animation et Education, revue de l'OCCE, n°123. Paris : OCCE.

Trouche, Luc. 1995 a. *E pur si muove.* Repères-Irem n°20, pp 16-28. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Trouche, Luc. 1995 b. *Anatomie d'une dérèglementation*, in Des outils pour le calcul et le traçage des courbes, Les dossiers de l'ingénierie éducative n°19, pp 36-42. Paris : CNDP.

Trouche, Luc et Dominique Guin,. 1996. *Seeing is reality : how graphic calculators influence the conceptualization of limits.* Proceedings of PME XX. Valencia, Espagne.

Trouche, Luc. 1996 a. *Masques.* Repères-Irem n°23, pp 43-64. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Trouche, Luc. 1996 b. *Enseigner en Terminale S avec des calculatrices graphiques et symboliques. Tome 1 : "Côté cours", Tome 2 : "Côté jardins".* Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Trouche, Luc. 1996 c. *Par delà les nuages*, in Médialog, Revue des nouvelles technologies dans l'Education, pp. 41-46. Créteil : CRDP/MAFPEN.

Les manuels d'accompagnement des outils.

Baudrant, Gilles et Daniel Vagost. 1991. *Mathématiques et Physique avec un calculateur graphique programmable.* Paris : Texas Instrumentss.

Casio. 1995. *3'33, Spécial lycée*, n°15. Paris : Casio Education.

Ferrand, M.. 1995. *Le discret et le continu* , éditorial de la revue 3'33 n°16. Paris : Casio.

Hypothèses. 1996. *Bulletin Scientifique de Texas Instruments*, Numéro 10. Paris : Texas Instrumentss.

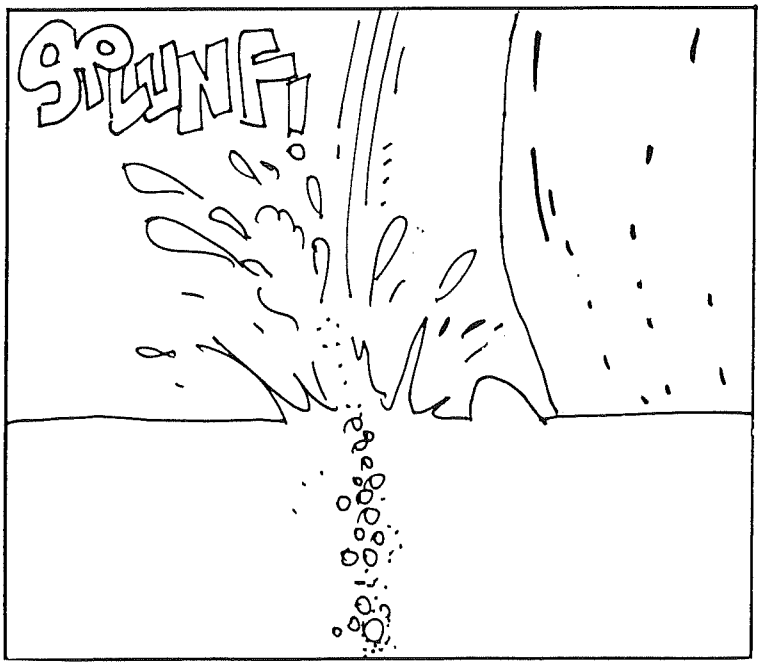
Lemberg, Henri. 1996. *TI-92, du lycée à la prépa.* Paris : Texas Instrumentss, Dunod.

Texas Instrumentss. 1995. *Analyse, Calculatrices graphiques TI-80, TI-81, TI-82.* Paris : Texas Instrumentss.

Vagost, Daniel et Jacques Verdier. 1993.*TI-82, Mathématiques au lycée.* Paris : Texas Instrumentss, Dunod.

Illustrations

Elles sont extraites de **Pratt, Hugo.** 1992. Corto Maltese, MU. Paris : Casterman.



Annexes.

Les oiseaux donnent l'exemple
l'exemple comme il faut
exemple des oiseaux
exemple des oiseaux
exemple les plumes les ailes le vol des oiseaux
exemple le nid les voyages et les chants des oiseaux
exemple la beauté des oiseaux
exemple le coeur des oiseaux
Prévert, Paroles.

Annexe 1

Le texte du questionnaire.

Annexe 1.

Questionnaire proposé aux élèves de la classe expérimentale et du groupe témoin.

Q0 **Utilisez-vous votre calculatrice en mathématique :**

- En cours ?

Beaucoup ❑ Régulièrement ❑ De temps en temps ❑ Rarement ❑ Pas du tout ❑

- Chez vous ?

Beaucoup ❑ Régulièrement ❑ De temps en temps ❑ Rarement ❑ Pas du tout ❑

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}+$ et vérifiant : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Q1 Donnez une définition mathématique de cette situation.

Q2 Comment expliqueriez vous cela plus simplement à un élève de seconde ?

Q3 Donner 4 exemples de graphiques de fonctions admettant comme limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (on donnera seulement l'allure générale de ces graphiques)

Q3' Donner 5 exemples de fonctions admettant comme limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

f(x) =	f(x) =	f(x) =	f(x) =	f(x) =

Q4 Quelles méthodes connaissez-vous pour prouver que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$?

Q4' Utilisez-vous votre calculatrice quand vous recherchez des limites de fonction ?

Beaucoup ❑ Régulièrement ❑ De temps en temps ❑ Rarement ❑ Pas du tout ❑

Q4" Que faites-vous avec votre calculatrice quand vous recherchez des limites de fonction ?

NOM :	Classe

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) $\ln\ln x$ Oui ❐ Non ❐ Je ne sais pas ❐

b) $x - 1000.\ln x$ Oui ❐ Non ❐ Je ne sais pas ❐

c) $x^2 - 10\, x\sin x$ Oui ❐ Non ❐ Je ne sais pas ❐

d) $x\sin x$ Oui ❐ Non ❐ Je ne sais pas ❐

e) $|x\sin x|$ Oui ❐ Non ❐ Je ne sais pas ❐

f) $\ln x + 10\sin x$ Oui ❐ Non ❐ Je ne sais pas ❐

g) $x^2 + \sin x$ Oui ❐ Non ❐ Je ne sais pas ❐

h) $\dfrac{100000x - 50}{x + 1000}$ Oui ❐ Non ❐ Je ne sais pas ❐

i) $\dfrac{e^x}{x^{50}}$ Oui ❐ Non ❐ Je ne sais pas ❐

Q6 Soit f définie sur $\mathbb{R}+$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?
Justifiez votre réponse et faites un schéma pour l'illustrer.

a) si f est positive non majorée, alors elle admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$
Vrai ❐ Faux ❐ Je ne sais pas ❐

b) si f est strictement croissante, alors elle admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$
Vrai ❐ Faux ❐ Je ne sais pas ❐

c) si f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, alors f n'est pas majorée.
Vrai ❐ Faux ❐ Je ne sais pas ❐

d) si f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$, alors f est nécessairement croissante à partir d'une certaine valeur de x.
Vrai ❐ Faux ❐ Je ne sais pas ❐

Q7 On considère l'équation $\ln x = 250 \sin x$, pour $x > 0$.

a) Combien de solutions a-t-elle ? **(on justifiera la réponse fournie)**

Un nombre fini ❐ Un nombre infini ❐ Je ne sais pas ❐

b) Donner une valeur approchée à 10^{-5} de la $1000^{ème}$ solution, en précisant le raisonnement que vous avez suivi et en indiquant l'utilisation faite de la calculatrice.

Annexe 2

Protocoles relatifs à la partie II.a.

Protocole 1
Elève de TS ayant choisi de composer sans calculatrice.

Q0 **Utilisez-vous votre calculatrice en mathématique :**

- En cours ?

Beaucoup ☐ Régulièrement ☐ De temps en temps ☐ Rarement ☒ Pas du tout ☐

- Chez vous ?

Beaucoup ☐ Régulièrement ☐ De temps en temps ☒ Rarement ☐ Pas du tout ☐

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}+$, et vérifiant : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

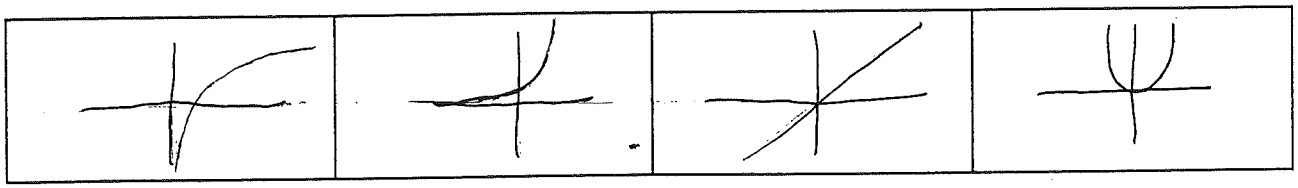
Q1 Donnez une définition mathématique de cette situation.

La courbe n'a pas de limites finies quand x devient très grand
Elle est de plus continue et croissante.

Q2 Comment expliqueriez vous cela plus simplement à un élève de seconde ?

La fonction ne cesse de croitre.
Plus la valeur de x sont grand, plus f(x) est grand.

Q3 Donner 4 exemples de graphiques de fonctions admettant comme limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (on donnera seulement l'allure générale de ces graphiques)



Q3' Donner 5 exemples de fonctions admettant comme limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

f(x) = $\ln x$	f(x) = e^x	f(x) = x^2	f(x) = x	f(x) = $\sqrt{x}$

Q4 Quelles méthodes connaissez-vous pour prouver que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?

La Calculatrice

Q4' Utilisez-vous votre calculatrice quand vous recherchez des limites de fonction ?

Beaucoup ☐ Régulièrement ☐ De temps en temps ☒ Rarement ☐ Pas du tout ☐

Q4" Comment utilisez-vous votre calculatrice pour conjecturer que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?

Le fait apparaitre la courbe graphiquement et je visualise.

Protocole 1 (suite)

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{\ln x \to +\infty} \ln(\ln x) = +\infty$

b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

la fonction x croît plus vite que lnx) donc en $+\infty$, x sera plus grand que $-1000 \ln x$.

c) x^2-10 xsinx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

d) xsinx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

e) |xsinx| Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

f) lnx + 10sinx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

g) x^2 + sinx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

100 000x - 50 croît plus vite que x + 1000
donc rapport positif ne cessant d'augmenter

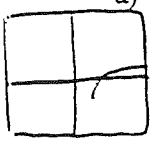
i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

La fct° e^x croît plus vite (dans le voisin infiniment grand) que x^{50}
rapport positif et croissant

Protocole 2
Elève de TS ayant composé avec calculatrice.

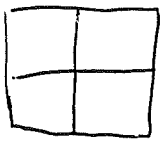
Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) lnlnx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐



Car $\ln x < x$ donc $\ln \ln x << x$ et $f(x)$ ne peut être $> x$

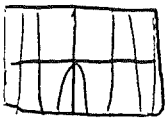
b) x-1000.lnx Oui Non ☒ Je ne sais pas ☐



$\ln x < x \iff -1000 \ln x < -1000 x \iff x - 1000 \ln x < -999x$

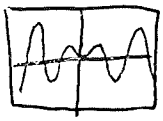
Donc $f(x)$ ne peut être beaucoup plus grand que x

c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐



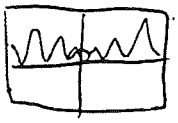
$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ n'existe pas

d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐



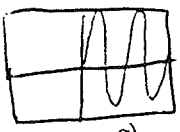
Car $-1 \leq \sin x \leq 1 \rightarrow f(x)$ ne peut être beaucoup plus grand que x

e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐



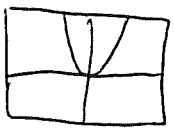
Car $|\sin x| \leq 1$

f) lnx + 10sinx Oui Non ☒ Je ne sais pas ☐



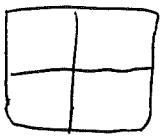
Car $f(x) = \sin x$ sinusoïdale

g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐



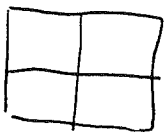
Car $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ est négligeable

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐



Car $100000x - 50 > x + 1000$

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐



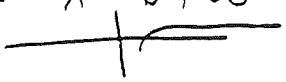
Moyen même technique : " la fonction expo. l'emporte sur les fonctions puissances qui l'emportent sur la fonction ln "

Protocole 3
Elève de TS ayant composé avec calculatrice.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

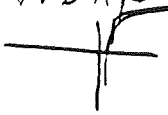
a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

lorsque $x \to +\infty$ $\ln x \to +\infty$ soit $X = \ln x$ $X \to +\infty$
donc $\ln X \to +\infty$



b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x \to +\infty$ de façon plus rapide que $\ln x$ sur la calculatrice on ne le voit pas car on multiplie $\ln x$ par 1000 mais si on pouvait continuer le graph on verrait ceci

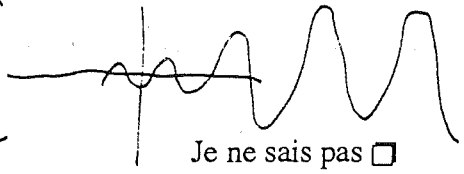


c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

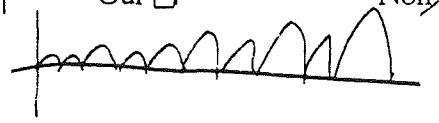
$x^2 \to +\infty$
$10x \sin x$ fonction sinusoïdale

d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$x \to +\infty$
$\sin x$ donc sinusoïdale



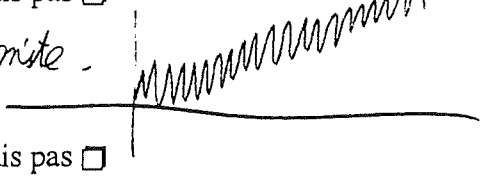
e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐



toujours égal à zéro de façon périodique

f) lnx + 10sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

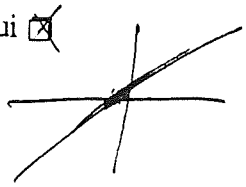
lnx finit par devenir prépondérante pour la limite.



g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

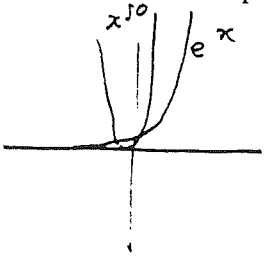
en raison.

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐



i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

x^{50} croît bien plus vite que e^x

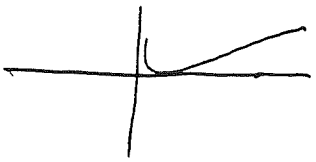


Protocole 4
Elève de TS ayant composé avec calculatrice.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) $\ln\ln x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

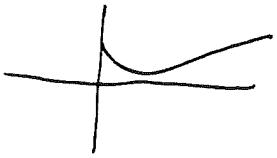
$x \to +\infty$
$\ln x \to +\infty$
$\ln x . \ln x \to +\infty$



b) $x - 1000.\ln x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x \to +\infty$
$-1000 \ln x \to +\infty$

ici: la fonction $y = x$ croît régulièrement
alors que $y = \ln x$ croît plus lentement
à terme: la croissance de $y = x$ "absorbe" la décroissance de $y = -1000 \ln x$

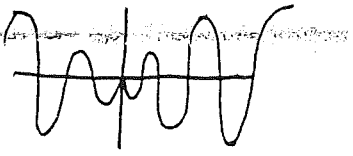


c) $x^2 - 10\, x \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\sin x$ périodique va osciller
et ne va pas amplifier l'évolution de x
on peut donc considérer que la limite de $x^2 - 10 x \sin x$ est la même que la limite de $x^2 - 10x$ c.a.d. : $+\infty$

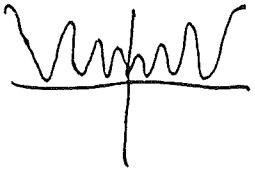
d) $x \sin x$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$x \to +\infty$
$\sin x$ périodique alternativement positive et négative ($-1 \leq \sin x \leq 1$ $\forall x$)



e) $|x \sin x|$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

car cette fois: $\sin x$ périodique toujours positive ($0 \leq \sin x \leq 1$ $\forall x$)
ne va pas empêcher la fonction de tendre vers $+\infty$
mais va seulement faire en sorte que cette évolution soit périodique.

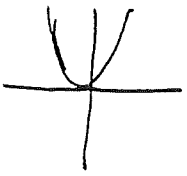


f) $\ln x + 10 \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$10 \sin x$ évolution périodique ($-10 \leq 10 \sin x \leq +10$ $\forall x$)
$\ln x$ évolution constante
donc: à terme l'évolution de $\ln x$ absorbe celle de $10 \sin x$

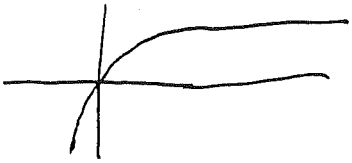
g) $x^2 + \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

même raisonnement



h) $\dfrac{100000x - 50}{x + 1000}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{100\,000x - 50}{x + 1000} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{100\,000x}{x} = 100\,000$



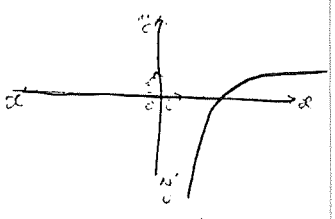
i) $\dfrac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

Protocole 5
Elève de TS ayant composé avec calculatrice.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

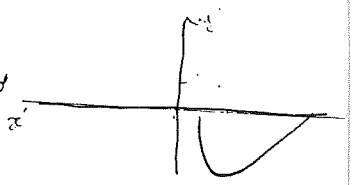
a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = +\infty$ ($\ln x \to +\infty$, $\ln(\ln x) \to +\infty$)



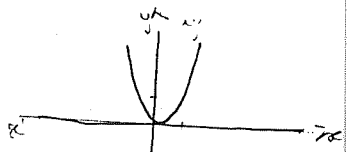
b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} 1000.\ln x = +\infty$
Si $f(x) = x\left(1 - \frac{1000\ln x}{x}\right)$ donc $\lim_{x\to+\infty} x - 1000\ln x = +\infty$



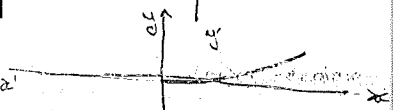
c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$f(x) = x^2\left(1 - \frac{10\sin x}{x}\right)$ $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 10x\sin x = +\infty$



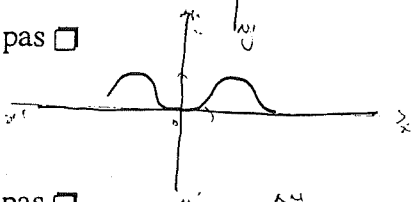
d) xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$f(x) = x\cdot\sin x$ =



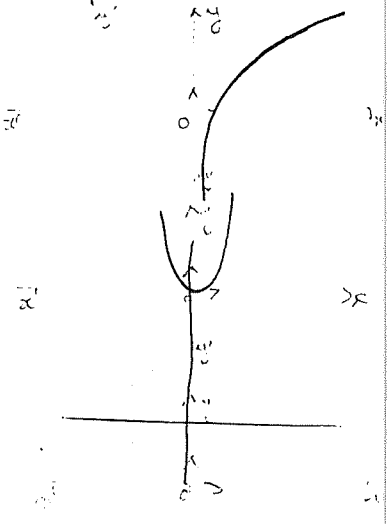
e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

Il s'agit ici d'une fonction périodique



f) lnx + 10sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x>0$ $\ln x > 10\sin x \to \lim_{x\to+\infty} \ln x + 10\sin x = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$



g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

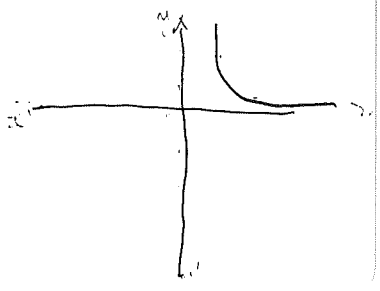
"la puissance l'emporte sur le ln"
$x^2 > \sin x$
$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\Big\} \to \lim_{x\to+\infty} x^2 + \sin x = +\infty$

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$f(x) = \frac{x(100000 - 50/x)}{x(1 + 1000/x)} \to \lim_{x\to+\infty} f(x) = 100000 \simeq +\infty$

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} x^{50} = +\infty$
Si $f(x) = e^x \times x^{-50} \to \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

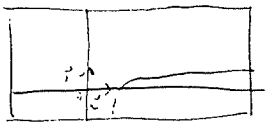


Protocole 6
Elève de TS ayant composé avec calculatrice.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

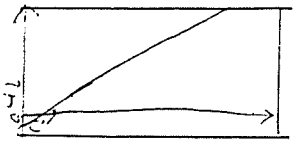
a) $\ln\ln x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

. $\ln x$ est une fonction croissante qui tend vers $+\infty$
. La fonction $\ln$ également. Donc le produit de ces 2 fonctions donne une fonction croissante qui tend vers $+\infty$



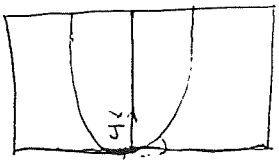
b) $x - 1000.\ln x$ Oui ☒ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$x - 1000 \ln x$ est croissante et tend vers $+\infty$
x est croissant et $-1000 \ln x$ est décroissant mais plus les valeurs de x sont grandes plus $1000 \ln x$ est ~~négligeable~~ inférieur à x



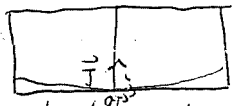
c) $x^2 - 10\, x \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

cette fonction est une fonction parabolique donc elle tend vers $+\infty$



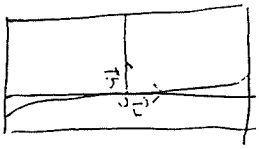
d) $x \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x \to x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et $\sin x$ est une fonction périodique donc le produit de ces 2 fonctions donne une fonction composée qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$



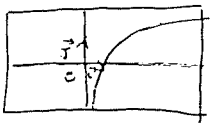
e) $|x \sin x|$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

cette fonction va également tendre vers $+\infty$ car comme ~~cette~~ $x \sin x$ est positive sur $[0, +\infty[$ ~~elle~~ $|x \sin x|$ aura la même allure sur cet intervalle.



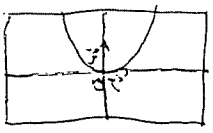
f) $\ln x + 10 \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x \to \ln x$ est une fonction ~~périodique~~ croissante mais $10 \sin x$ est une fonction périodique donc $\ln x + 10 \sin x$ est une fonction croissante qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$



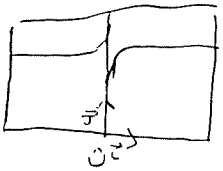
g) $x^2 + \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

cette fonction composée est une fonction parabolique donc $x \to x^2 + \sin x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$



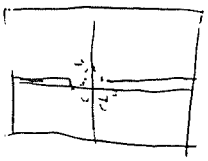
h) $\dfrac{100000x - 50}{x + 1000}$ Oui ☒ Non ☒ Je ne sais pas ☐

Cette fonction va tendre vers ~~+∞~~ quand les valeurs de x seront très grandes



i) $\dfrac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

cette fonction tend vers la valeur 1 pour les grandes valeurs de x.



Annexe 3

Protocoles relatifs à la partie II.b.

Réponses de Jérôme. Type "théorique". Janvier 1996. Avec calculatrice graphique. Protocole 1

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{+\infty} \ln\ln x = \lim \ln\ln(+\infty) = \ln(+\infty) = +\infty$

b) $f(x) = x - 1000.\ln x$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$f'(x) = 1 - \frac{1000}{x}$

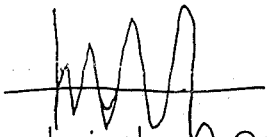
x	0		1000		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖	↗		↘	

c) $x^2 - 10\,x\sin x$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

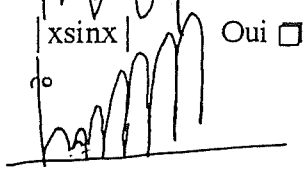
$f'(x) = 2x - 10\cos x$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$			

d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐



e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐



f) lnx + 10sinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$f(x) = \lim_{+\infty} \ln x + 10\sin x = +\infty + 10\sin x$

comme $\sin x$ est une fonction periodique pas de limite en $+\infty$.

g) $x^2 + \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$f'(x) = x + \cos x$

x		$+\infty$
f'		+
f		↗

h) $\frac{100000x - 50}{x + 1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$f'(x) = \frac{10^8 + 10^5 x - 10^5 x + 50}{(x+1000)^2} = \frac{10^8 + 50}{(x+1000)^2}$

x	0		$+\infty$
f'		+	
f		↗	

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

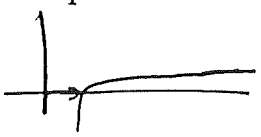
elle tend vers$+\infty$ car x^{50} car les fonctions exponentiel sont celles qui croit le + vite et de plus on sait que $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Réponses de Jérôme. Type "théorique". Mai 1996. Avec TI-92. Protocole 2

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

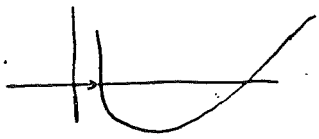
a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$D_f =]0, +\infty[$
$\lim_{+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{+\infty} \ln \ln x = +\infty$.



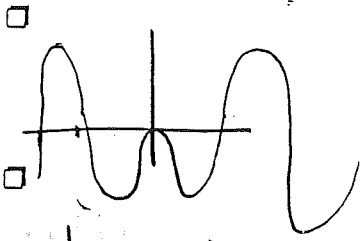
b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{+\infty} (x - 1000 \ln x) = \lim_{+\infty} x\left(1 - 1000 \frac{\ln x}{x}\right)$
or $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{+\infty} x - 1000 \ln x = +\infty$.



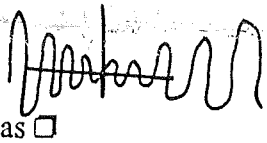
c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{+\infty} x^2 - 10x\sin x = \lim_{+\infty} x^2\left(1 - 10\frac{\sin x}{x}\right)$
or $\lim_{+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ donc $\lim_{+\infty} x^2 - 10x\sin x = +\infty$.



d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$-1 \leq \sin x \leq 1$
$-x \leq x \sin x \leq x$

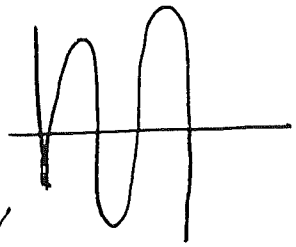


e) |xsinx| Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$|\sin x| \leq 1$.
$|x \sin x| \leq |x|$
donc $\lim_{+\infty} |x \sin x| = +\infty$

f) lnx + 10sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$-10 \leq 10\sin x \leq 10$
$\ln x - 10 \leq \ln x + 10\sin x \leq \ln x + 10$
or $\lim_{+\infty} \ln x - 10 = +\infty$ et $\lim_{+\infty} \ln x + 10 = +\infty$ $\Rightarrow \lim_{+\infty} \ln x + 10\sin x = +\infty$



g) $x^2 + \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{+\infty} x^2\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = +\infty$

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

dans ce cas, c'est le rapport des termes de + haut degré qui donnent la limite :
$\lim_{x \to +\infty} \frac{100000x-50}{x+1000} = \lim_{+\infty} \frac{100\,000\,x}{x} = 100\,000$!

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

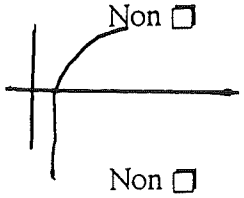
d'après le théorème, $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
donc $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^{50}} = +\infty$.

Réponses de Damien. Type "théorique". Janvier 1996. Sans calculatrice graphique. Protocole 3

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (~~issu, ou non, de votre calculatrice~~)

a) $\ln\ln x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\ln x \to +\infty$
$\ln \ln x \to +\infty$

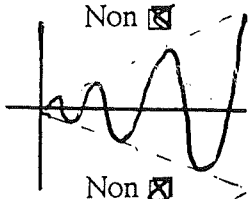


b) $x - 1000.\ln x$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

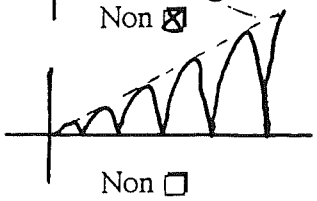
c) $x^2 - 10\, x\sin x$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

d) $x\sin x$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

elle est bornée par
$y = x$, $y = -x$
elle n'a pas de limite en $+\infty$



e) $|x\sin x|$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐



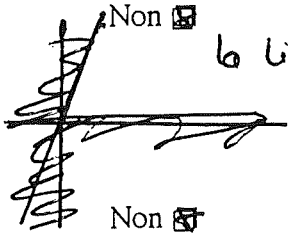
f) $\ln x + 10\sin x$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

g) $x^2 + \sin x$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

h) $\dfrac{100000x - 50}{x + 1000}$ Oui ☒ Non ☒ Je ne sais pas ☐

~~rapport des termes au plus haut degré~~
$\frac{100000x}{x} = 100000$

la limite est 100 000



i) $\dfrac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☒ Je ne sais pas ☐

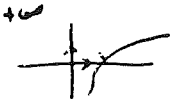
la fonction puissance est plus forte que la fonction exponentielle

Réponses de Damien. Type "théorique". Mai 1996. Sans calculatrice. Protocole 4

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

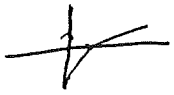
a) $\ln\ln x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

combinaison de 2 fonction ayant $\lim_{+\infty} f = +\infty$



b) $x - 1000.\ln x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

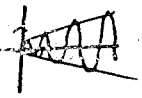
$= \frac{x}{\ln x} - 1000$ et $\frac{x}{\ln x} \to +\infty$



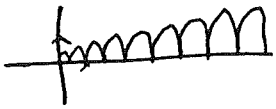
c) $x^2 - 10\, x\sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☒

d) $x\sin x$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

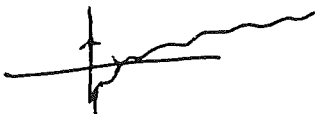
elle oscille autour de 0
et elle est bornée par
$y = x$ $y = -x$



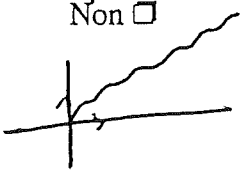
e) $|x\sin x|$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐



f) $\ln x + 10\sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

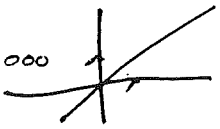


g) $x^2 + \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐



h) $\frac{100000x - 50}{x + 1000}$ Oui ☒ Non ☒ Je ne sais pas ☐

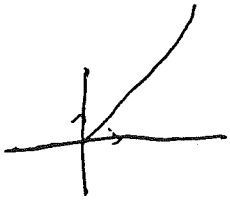
$\lim_{+\infty} f = 100000$



rapport des termes au plus haut degré

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\frac{e^x}{x^n} \to +\infty$ th cours

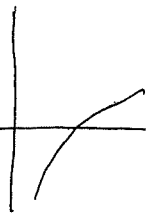


Réponses d'Elsa. Type "rationnel". Janvier 1996. Avec calculatrice graphique. Protocole 5

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

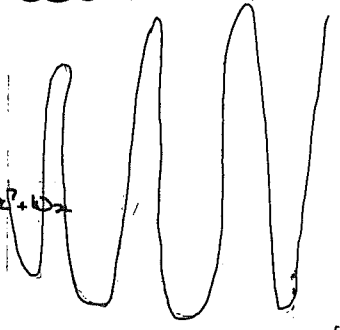
a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \rightarrow \lim_{x \to +\infty} \ln(\ln x) = +\infty$



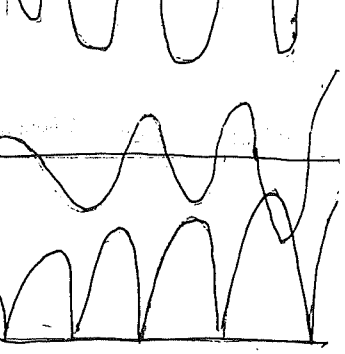
b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$fx = \ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1000\right)$ $\lim \ln x = +\infty$ $\lim \frac{x}{\ln x} = +\infty$ $\lim x - 1000 \ln x = +\infty$



c) x^2-10 xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

pas de limites $-1 < \sin x < 1$ $-x < x \sin x < x$ $-10x < 10x \sin x < 10x$ $x^2 - 10x < x^2 + 10x \sin x < x^2 + 10x$



d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

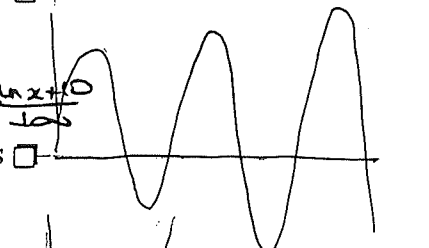
pas de limites $-1 < \sin x < 1$ $-\infty < x \sin x < +\infty$

e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

pas de limites $-x < x \sin x < x$ $x < |x \sin x| < x$

f) lnx + 10sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

pas de limites $-10 < 10 \sin x < 10$ $\ln x - 10 < \ln x + 10 \sin x$ ($\ln x \to +\infty$) $< \ln x + 10$ ($\to +\infty$)



g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

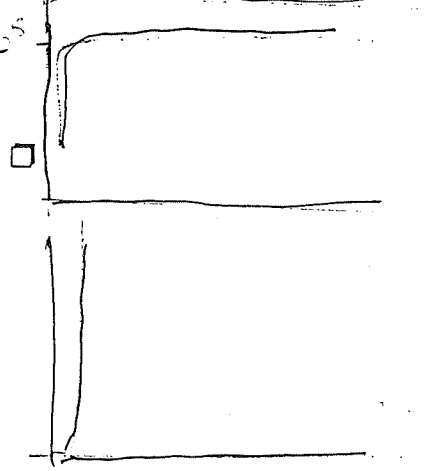
$-1 < \sin x < 1$ $\rightarrow \lim fx = +\infty$

$x^2 - 1 < x^2 + \sin x < x^2 + 1$ ($x^2 - 1 \to +\infty$, $x^2 + 1 \to +\infty$)

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

rapport de deux fonction polynôme

$\lim f(x) = \lim \frac{100000x}{x} = 100000$



i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

la fonction exponentielle est plus forte que la fonction puissance

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{50}} = +\infty$

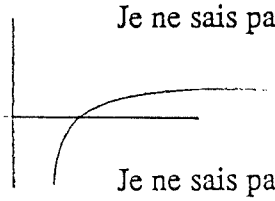
Réponses d'Elsa. Type "rationnel". Mai 1996. Avec TI-92. Protocole n° 6

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

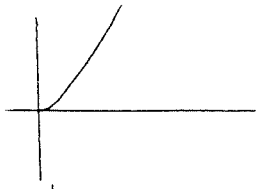
$\ln(\ln x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$



b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$= x\left(1 - 1000\,\frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - 1000\,\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$



c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$-1 < \sin x < 1$ $x^2 - 10x < x^2 - 10x\sin x < x^2 + 10x$

$-x < x\sin x < x$

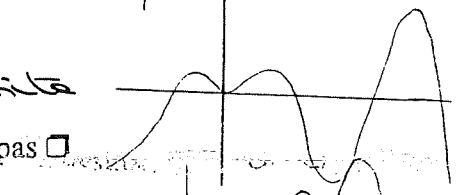
$-10x < -10\sin x < 10x$

$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 10x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2 + 10x) = +\infty$

d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

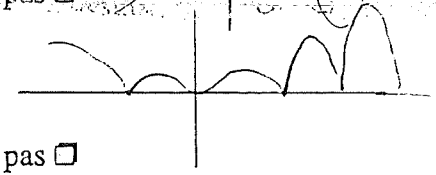
$-1 < \sin x < 1$

$-x < x\sin x < x$ → pas de limite



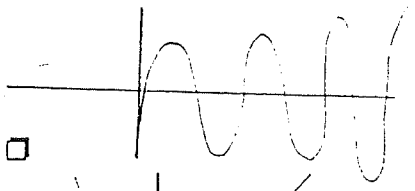
e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

pas de limite



f) lnx + 10sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

pas de limites

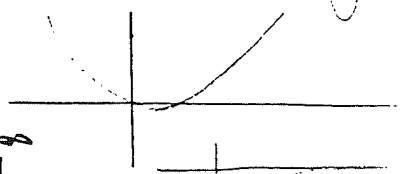


g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$-1 < \sin x < 1$

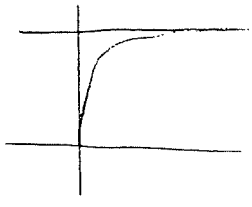
$x^2 - 1 < x^2 + \sin x < x^2 + 1$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} x^2 + \sin x = +\infty$



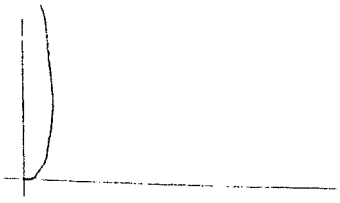
h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x\to+\infty} \frac{100000x-50}{x+1000} = \lim_{x\to+\infty} \frac{100\,000x}{x} = 100\,000$



i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{50}} = +\infty$



La fonction exponentielle est plus forte que les fonction puissance

Réponses de Patrice. Type "rationnel". Janvier 1996. Sans calculatrice. Protocole 7.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (~~issu, ou non, de votre calculatrice~~)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = +\infty$

b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} 1000 \ln x = +\infty$

c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$-1 < \sin x < 1$
$-x < x \sin x < x$
$10x < -10 x \sin x < -10x$
$x^2+10x < x^2 - 10x \sin x < x^2 - 10x$

$\lim_{x\to+\infty} x^2+10x = \lim_{x\to+\infty} x^2 - 10x = +\infty$

donc $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 10x \sin x = +\infty$

d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$-1 < \sin x < 1$ donc $x \sin x$ n'a pas de limite $+\infty$
$-x < x \sin x < x$

e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$0 < |\sin x| < 1$
$0 < |x \sin x| < x$

f) lnx + 10sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$-1 < \sin x < 1$
$-10 < 10 \sin x < 10$
$\ln x - 10 < \ln x + 10 \sin x < \ln x + 10$

$\lim_{x\to+\infty} |\ln x| - 10 = \lim_{x\to+\infty} (\ln x) + 10 = +\infty$

donc $\lim_{x\to+\infty} (\ln x) + 10 \sin x = +\infty$

g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$-1 < \sin x < 1$
$x^2 - 1 < x^2 + \sin x < x^2 + 1$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 - 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 + \sin x = +\infty$

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x\to+\infty} 100000x - 50 = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} x+1000 = +\infty$

donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{100000x-50}{x+1000} = +\infty$

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

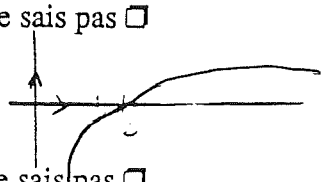
$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^{50} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{50}} = +\infty$

Réponses de Patrice. Type "rationnel". Mai 1996. Sans calculatrice. Protocole 8.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \ln(\ln x) = +\infty$



b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

car $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} -1000 \ln x = -\infty$ on a ce forme indéterminée on met x en facteur : $x\left(1 - 1000 \frac{\ln x}{x}\right)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ la parenthèse tend vers 1 et donc $\lim_{x \to +\infty} x - 1000 \ln x = +\infty$

c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x^2\left(1 - 10 \frac{\sin x}{x}\right)$ on $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ donc la parenthèse tend vers 1

et $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 10 x \sin x = +\infty$

d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$-x \leq x \sin x \leq x$

$\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

donc $\lim_{x \to +\infty} x \sin x$ n'existe pas

e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$0 \leq |\sin x| \leq 1$

$0 \leq |x \sin x| \leq x$

donc $\lim_{x \to +\infty} x \sin x$ n'existe pas

f) lnx + 10sinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

g) x^2 + sinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

la limite d'une fracto rationnelle est égale au quotient des termes de plus haut degrés $\frac{100\,000\,x}{x}$ donc $\lim \frac{100\,000\,x - 50}{x + 1000} = 100\,000$

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

$x \to +\infty$

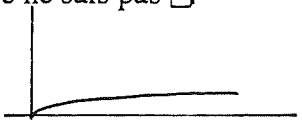
$\alpha > 0$

Réponses de Stéphanie. Type "scolaire". Janvier 1996. Avec calculatrice graphique. Protocole 9.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

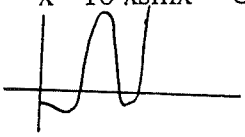
a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \ln \ln x = +\infty$



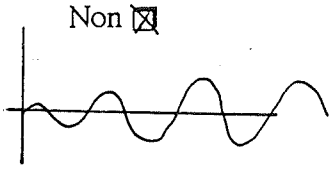
b) x-1000.lnx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

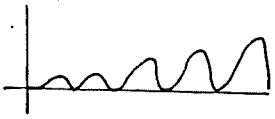


d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} x \sin x = ?$

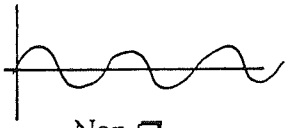


e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐



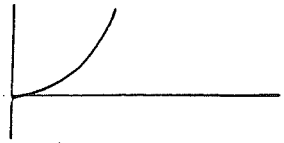
f) lnx + 10sinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$



g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$



h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} \frac{100000x}{x} = +\infty$

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☐

Réponses de Stéphanie. Type "scolaire". Mai 1996. Avec TI-92. Protocole 10.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x \to +\infty$
$\ln x \to +\infty$
$\ln(\ln x) \to +\infty$

b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x \to +\infty$
$\ln x \to +\infty$
$1000 \ln x \to +\infty$

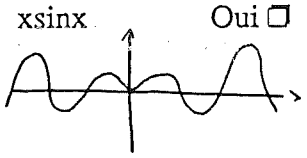
c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x \to +\infty$
$\sin x \to ?$
$x \sin x \to +\infty$

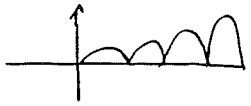
$x^2 \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sin x = ?$ car

d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☒



e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

car  ....

f) lnx + 10sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x \to +\infty$
$10 \sin x \to ?$
$\ln x \to +\infty$

g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x \to +\infty$
$\sin x \to ?$
$x^2 \to +\infty$

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$\Rightarrow \lim \frac{100000x}{x} = 100000$

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☐

Réponses de Rachel. Type "scolaire". Janvier 1996. Sans calculatrice. Protocole 11.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (~~issu, ou non, de votre calculatrice~~)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

on sait que $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \ln\ln x = +\infty$

b) x-1000.lnx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

c) x^2-10 xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

e) $|x\sin x|$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

f) lnx + 10sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

g) $x^2 + \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

Réponses de Rachel. Type "scolaire". Mai 1996. Sans calculatrice. Protocole 12.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) $\ln\ln x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

car $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\ln \ln x = +\infty$ $x \to +\infty$

b) $x - 1000.\ln x$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

c) $x^2 - 10\, x \sin x$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

d) $x \sin x$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

sin x ne tend pas vers $+\infty$ qd x tend vers $+\infty$

e) $|x \sin x|$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

f) $\ln x + 10 \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

g) $x^2 + \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

h) $\frac{100000x - 50}{x + 1000}$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

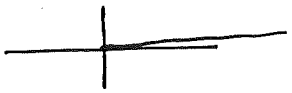
i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

Réponses de Sébastien. Type "bricoleur". Janvier 1996. Avec calculatrice graphique. Protocole 13.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers$+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

On connait sa fct de référence.



b) x-1000.lnx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

La courbe sera décroissante elle tendra vers $-\infty$

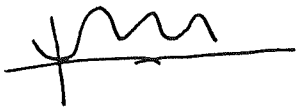
c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

car c'est une fct périodique

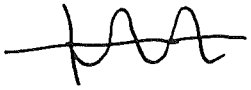
e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

car c'est une fct périodique



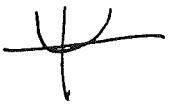
f) lnx + 10sinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

car c'est une fct périodique

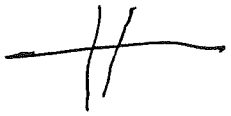


g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

car elle prend les valeurs du x^2



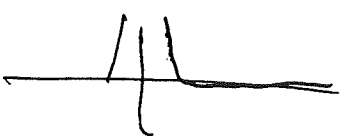
h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐



on fait le rapport de termes du + haut degré.

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

Si on fait ce rapport il tendra vers 0.

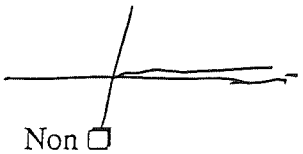


Réponses de Sébastien. Type "bricoleur". Mai 1996. Avec TI-92. Protocole 14.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\ln \ln(x) = +\infty$
$\uparrow +\infty \quad \uparrow +\infty$

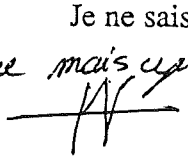


b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

car $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

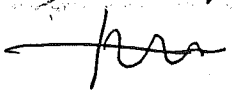
c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

Sur un intervalle elle va être périodique mais après le x^2 vont prendre une plus grde valeur.



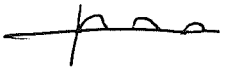
d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

car la fct sin x est[illegible] sur ∞, elle est périodique



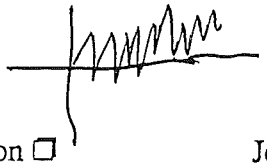
e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

de même elle est périodique



f) lnx + 10sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

car ln x tend vers $+\infty$



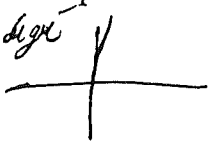
g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

car $x^2 \to +\infty$

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

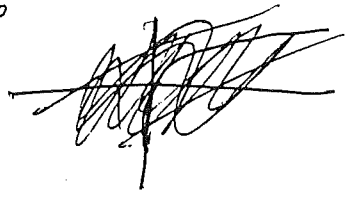
en fait le rapport des termes les + haut degré

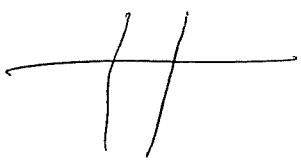
$\lim = 100\,000$



i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

car $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$





Réponses de Laurent. Type "bricoleur". Janvier 1996. Sans calculatrice. Protocole 15.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (~~issu, ou non, de votre calculatrice~~)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

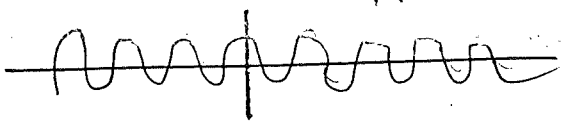
Nous savons que $\ln x \underset{+\infty}{=} +\infty$ donc la fonction tend vers $+\infty$.

b) x-1000.lnx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

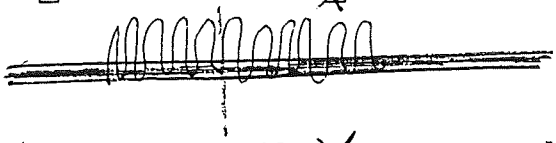
la fonction ne tendra pas vers $+\infty$ car 1000 lnx deviendra plus grand que x

c) x^2-10 xsinx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

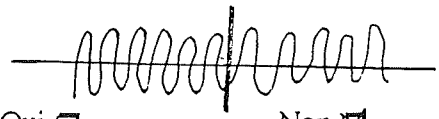
d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas



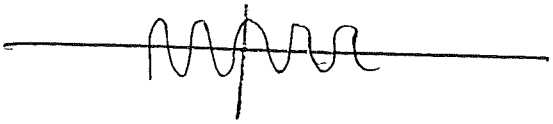
e) |xsinx| Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas



f) lnx + 10sinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas



g) x^2 + sinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas



h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☒

$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ car ~~[illegible]~~ l'infini. e^x deviendra plus grand que x^{50}.

Réponses de Laurent. Type "bricoleur".
Mai 1996. Sans calculatrice. PROTOCOLE 16

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) $\ln\ln x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

nous savons que $\ln x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ (théorème) donc $\ln\ln x$ sera plus petite mais toujours croissante vers $+\infty$.

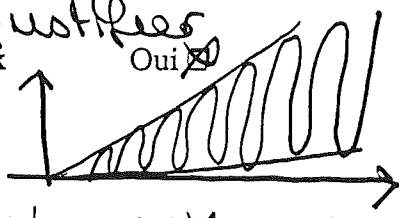
b) $x - 1000.\ln x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

x en augmentant fera diminuer la valeur $1000\ln x$ est donc sera supérieur à celle-ci.

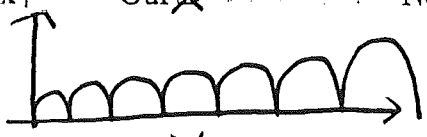
c) $x^2 - 10\,x\sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

x^2 est supérieur à $10x$ si x donc l'affirmation est justifiée

d) $x\sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐



e) $|x\sin x|$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐



f) $\ln x + 10\sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

g) $x^2 + \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

nous savons que $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sin x = \ldots$
donc la somme tend vers $+\infty$ $+\infty$

h) $\dfrac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

Car nous savons que $\lim_{x\to+\infty} 100000x-50 > \lim_{x\to+\infty} x+1000$

i) $\dfrac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

au début cette fonction sera décroissante, mais lorsque x prend une plus grande valeur alors $e^x > x^{50}$ et donc la fonct° sera croissante. Sa limite en $+\infty$ est donc $+\infty$

Réponses de Christelle. Type "expérimentateur". Janvier 1996. Avec calculatrice graphique. Protocole 17.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

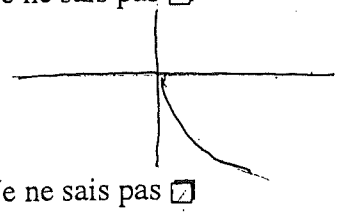
a) $\ln\ln x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

Car $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\Big\}$ $\lim_{x \to +\infty} \ln(\ln x) = +\infty$

b) $x - 1000.\ln x$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

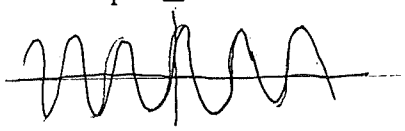
Car $1000 \ln x > x$

$\lim_{x \to 0} x - 1000 \ln x = +\infty$



c) $x^2 - 10\, x\sin x$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

Car $-1 < \sin x < 1$

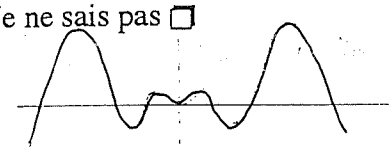


d) $x\sin x$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

la limite n'existe pas

$-1 < \sin x < 1$

$-\infty < x \sin x < +\infty$

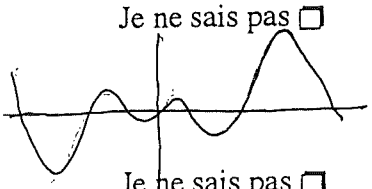


e) $|x\sin x|$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$-\infty \leq x \sin x \leq +\infty$

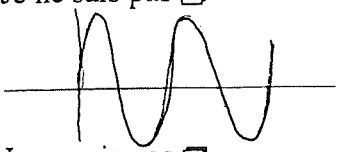
$|-\infty| \leq |x \sin x| \leq +\infty$



f) $\ln x + 10\sin x$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

toujours le même problème

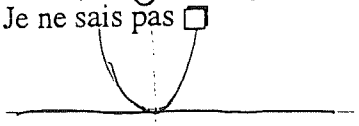
$-1 \leq \sin x \leq 1$



g) $x^2 + \sin x$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

Car $x^2 > \sin x$

$x \to +\infty$

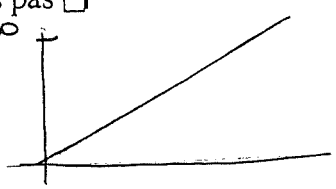


h) $\dfrac{100000x - 50}{x + 1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

Oui car $100000x > x$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{100000x - 50}{x + 1000} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{100000x}{x} = +\infty$

1000



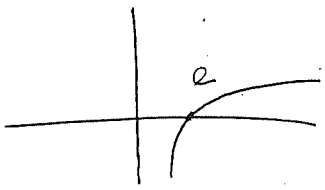
i) $\dfrac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

Réponses de Christelle. Type "expérimentateur". Mai 1996. Avec TI-92. Protocole 18.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

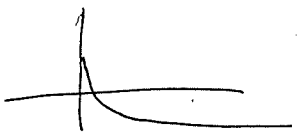
$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$



b) x-1000.lnx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

$f'(x) = 1 - \frac{1000}{x}$ pour $x \in]0, +\infty[$ $f'(x) < 0$

$\Rightarrow$ f est décroissante. $\lim_{x \to 0} f(x) =$ f. indéterminée.



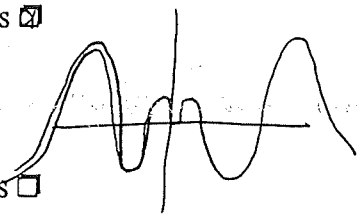
c) x^2-10 xsinx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

Car pour $x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \sin x \leq 1$

d) xsinx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

$x \in \mathbb{R}$

$-1 \leq \sin x \leq 1$



e) |xsinx| Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

Car si $-1 \leq \sin x \leq 1$

$-\infty \leq x \sin x \leq +\infty$ $+\infty \leq |x \sin x| \leq +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} |x \sin x| = +\infty$

f) lnx + 10sinx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

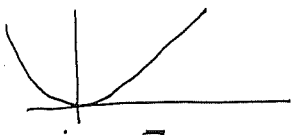
Résultat machine $\rightarrow$ on ne sait pas.

~~comme~~ le problème est ici $-1 \leq \sin x \leq 1$, on aura toujours une sinusoïdale avec des extr. ⊖ et ⊕

g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

Car x^2 domine sur sin x

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x^2 > \sin x$



h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} f = \lim_{x \to +\infty} \frac{100000x}{x} = 100\,000$

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Réponses de Fabienne. Type "expérimentateur". Janvier 1996. Sans calculatrice. Protocole 19.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (~~issu, ou non, de votre calculatrice~~)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim x - 1000 \ln x = \lim x\left(1 - \frac{1000 \ln x}{x}\right)$; or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc $\lim_{x \to +\infty} 1 - 1000 \frac{\ln x}{x} = 1$; donc $\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - 1000 \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim (x^2 - 10x \sin x) = \lim \left(x^2\left(1 - 10 \frac{\sin x}{x}\right)\right)$; $-\frac{1}{x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x}$

$\lim \frac{1}{x} = \lim -\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim \frac{\sin x}{x} = 0$ théorème des gendarmes ⇒ $\lim_{x \to +\infty} (1 - 10 \frac{\sin x}{x})$

d) xsinx Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$-1 < \sin x < 1$; $-x < x \sin x < x$ $= 0$ la fonction n'a pas de limite

e) |xsinx| Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

$0 < |x \sin x| < x$

f) lnx + 10sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim \ln x = +\infty$ et $-10 < 10 \sin x < 10$

c'est une somme : quelque soit la valeur

g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐ ; $10 \sin x < +\infty$

$\lim x^2 = +\infty$ $-1 < \sin x < 1$

h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$\lim f(x) = \lim \frac{x\left(100000 - \frac{50}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{1000}{x}\right)}$ $\lim -\frac{50}{x} = \lim \frac{1000}{x} = 0$

donc $\lim f(x) = 100000$

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

Réponses de Fabienne. Type "expérimentateur". Mai 1996. Sans calculatrice. Protocole 20.

Q5 Les fonctions suivantes ont-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
Illustrer cette réponse par un graphique adapté (issu, ou non, de votre calculatrice)

a) lnlnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ si on pose $X = \ln(x)$ la fonc° devient $\ln(X)$
or $\lim_{x \to +\infty} X = \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ → $\lim \ln(x) = \lim \ln(\ln(x)) = +$

b) x-1000.lnx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x\left(1 - \frac{1000 \ln x}{x}\right)$ car $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ → $\lim \left(1 - \frac{1000 \ln x}{x}\right) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) x^2-10 xsinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$x^2\left(1 - \frac{10 \sin x}{x}\right)$ $-10 \leq 10(\sin x) \leq 10$ → $\frac{-10}{x} < \frac{-10 \sin x}{x} < \frac{10}{x}$ or $\lim_{x \to +\infty} \frac{10}{x} = 0$

→ $\lim_{+\infty} \left(1 - 10 \frac{\sin x}{x}\right) = 1$ → $\lim f(x) = +\infty$

d) xsinx Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

$-1 < \sin x < 1$ $-x < x \sin x < x$

$\lim_{+\infty} -x = -\infty$ $\lim_{+\infty} x = +\infty$ → Indéterminé°

e) |xsinx| Oui ☐ Non ☐ Je ne sais pas ☒

$-x < x \sin x < x$ → $|x \sin x| < x$ $\lim_{+\infty} x = +\infty$

f) lnx + 10sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$-10 < 10 \sin x < 10$

$\ln x - 10 < 10 \sin x + \ln(x) < 10 + \ln x$

$\lim_{x \to +\infty} 10 + \ln(x) = +\infty$

→ $\lim f(x) = +\infty$

g) x^2 + sinx Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

$-1 < \sin x < 1$ → $x^2 - 1 < x^2 + \sin x < x^2 + 1$ $\lim_{+\infty} x^2 - 1 = +\infty$

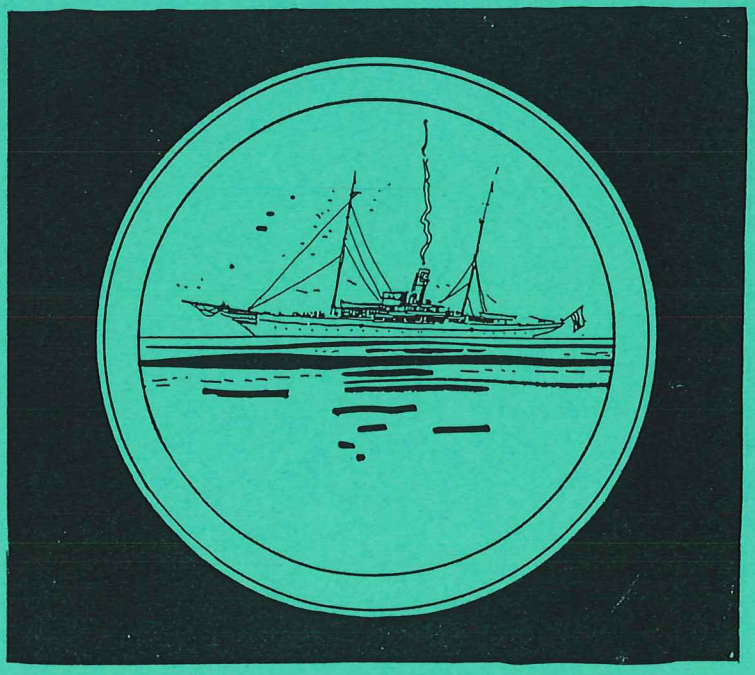
h) $\frac{100000x-50}{x+1000}$ Oui ☐ Non ☒ Je ne sais pas ☐

$\lim \frac{x\left(100000 - \frac{50}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{1000}{x}\right)} = 100000$ car $\lim_{+\infty} \frac{-50}{x} = \lim_{+\infty} \frac{1000}{x} = 0$

i) $\frac{e^x}{x^{50}}$ Oui ☒ Non ☐ Je ne sais pas ☐

Table des matières

Cette île était plus grande que la Libye et l'Asie ensemble ; de là le passage vers les autres îles était possible aux navigateurs d'alors, et de ces îles, sur tout le continent situé en face et qui entoure cette mer lointaine, la mer véritable...
Platon, cité par [Pratt, 1992]



N.B. page I.45 signifie volume I, page 45.

Introduction p I.3

0. Prologue.

0.a Voir (genèse d'une thèse) : une histoire personnelle p I.9
0.a.1 Jeune professeur, la difficulté du métier.
0.a.2. Vieil étudiant, l'intérêt pour l'apprentissage.
0.a.3. Chercheur en herbe, la complexité des choses.
0.a.3.i. L'image a l'autorité de la chose jugée.
0.a.3.ii. Conciliation de résultats contradictoires.
0.a.3.iii. Un puzzle improbable.
0.a.3.iv Une forte contextualisation.
0.a.3.v. Contagion du signifiant sur le signifié.

0.b. Comprendre. (cadre théorique) : une histoire universelle p I.15
0.b.1. Magie et image ont mêmes lettres et c'est justice. p I.17
0.b.1.i. Une perspective épistémologique : les obstacles (Bachelard).
0.b.1.ii. Une perspective historique : la vidéosphère (Debray).
0.b.1.iii Une perspective philosophique : le sur-rationalisme (Bachelard).
0.b.2. Images du sujet, de la société, de l'apprentissage. p I.21
0.b.2.i. Processus auto-régulés ou interactions dyssymétriques.
0.b.2.ii. Situations didactiques, situations a-didactiques (Brousseau).
0.b.2.iii. Un point de vue anthropologique : Chevallard..
0.b.2.iv. L'interaction sociale, moteur des processus de preuve (Balacheff).
0.b.2.v Chaque mot est un microcosme de la pensée humaine (Vygotski).
0.b.3. Concepts, conceptions et comportements. p I.27
0.b.3.i. La conceptualisation : un processus (Vergnaud).
0.b.3.ii. La transposition didactique (Chevallard).
0.b.3.iii. Conceptions locales et globales (Artigue).
0.b.3.iv. Métaconnaissances, processus de contrôle (Pitrat, Robert, Houdé).
0.b.4. Les images, entre icônes, indices et symboles. p I.38
0.b.4.i. Du texte aux images, une coordination à géométrie variable.
0.b.4.ii. D'une traduction au texte original : tradutore, traditore ?
0.b.4.iii. Registre, cadre... Changer, mais de quoi ?(Douady, Duval)
0.b.5. Images que l'on a de l'instrument, images produites par l'instrument. p I.44
0.b.5.i. Une hagiographie fondée sur les métaphores.
0.b.5.ii. Points de vue de didacticiens (Artigue).
0.b.5.iii. La transposition informatique (Balacheff).
0.b.5.iv. Un point de vue de la psychologie du travail (Rabardel).

0.c. Chercher (méthodologie) : une histoire... sans fin. p I.51
0.c.1. Sur la lancée d'un DEA. p I.51
0.c.1.i. Le statut des objets techniques.
0.c.1.ii. L'influence sur la conceptualisation.
0.c.1.iii. L'influence sur les comportements.
0.c.2. Mesurer l'influence de la calculatrice sur les conceptions. Orientation. p I.59
0.c.2.i. Les critères pour le choix d'un sujet.
0.c.2.ii. Les critères pour le choix d'un terrain.
0.c.2.iii. Une nouvelle remise en question, théorique et pratique.
0.c.3. Contrôler la genèse instrumentale. Réorientation. p I.63
0.c.3.i. Une meilleure connaissance d'ensemble.
0.c.3.ii. Un recueil d'information multiformes.

Chapitre 1.
Les limites, côté objet.

I.a Un point de vue épistémologique : le concept de limite. p I.71

I.a.1. Trois points de vue sur les points de vues. p I.73
- I.a.1. i. Une révolution "par étapes" .
- I.a.1.ii. Un jeu autour de trois cadres .
- I.a.1.iii. Un balancement autour de deux points de vue.

I.a.2. Limites et invariants. p I.81
- I.a.2. i. Tactiques et techniques, problèmes de vocabulaire.
- I.a.2.ii. Problème de repérage des tactiques.

I.a.3. Limites et langages. p I.83
- I.a.3. i. Infini privatif, infini positif, infini opératoire.
- I.a.3.ii. Le temps et le mouvement, figures de l'infini.
- I.a.3.iii. Le révélateur du "langage courant".

I.b. Un point de vue institutionnel : la transposition didactique. p I.89

I.b.1. Une histoire de ce siècle p I.90

I.b.2. Une première histoire verticale, ce que disent les programmes. p I.91
- I.b.2.i. A propos des limites de fonctions
- I.b.2.ii. A propos du calcul numérique, des graphiques et des outils.

I.b.3. Une deuxième histoire verticale, ce que disent les sujets du bac. p I.101
- I.b.3.i. Le baccalauréat de 1969.
- I.b.3.ii. Le baccalauréat de 1972.
- I.b.3.iii. Le baccalauréat de 1984.
- I.b.3.iv. Le baccalauréat de 1988.
- I.b.3.v. Le baccalauréat de 1993.
- I.b.3.vi. Le baccalauréat de 1995.

I.b.4. Une histoire horizontale, ce que disent les manuels scolaires. p I.109
- I.b.4.i. Les limites dans les manuels de TS.
- I.b.4.ii. Le baccalauréat de 1972.
- I.b.4.iii. Le baccalauréat de 1984.

I.b.5. Définition des limites en aval et en amont de la TS. p I.119

I.c. Un point de vue "artefactuel" : la transposition informatique. p I.125

I.c.1. Inventaire des contraintes. p I.126

I.c.2. Artefacts et contraintes. p I.127
- I.c.2.i. Voyage à l'intérieur des calculatrices graphiques.
- I.c.2.ii Brève visite des calculatrices symboliques.

I.c.3. Le point de vue des promoteurs et thuriféraires. p I.141
- I.c.3.i. Revue de presse sur les calculatrices graphiques.
- I.c.3.ii Notes sur les TI-92.

Chapitre 2.
Les limites, côté sujet.

II.a Les conceptions, arrêt sur image. p I.153

II.a.1. Repérage des conceptions. p I.155

II.a.1.i	Obstacles et processus producteur d'obstacles.	p I.155
II.a.1.ii	Points de vue épistémologiques et repérages didactiques.	p I.160
II.a.1.iii	Un choix de conceptions a posteriori et a priori.	p I.162

II.a.2. Bilan d'une première expérimentation. p I.165

II.a.2.i.	Présentation du questionnaire.	p I.165
II.a.2.ii.	Présentation du dispositif.	p I.173
II.a.2.iii.	Dépouillement, côté conceptions.	p I.174
II.a.2.iv.	Dépouillement, côté techniques.	p I.188
II.a.2.v.	Des techniques aux théorèmes-en-actes.	p I.192
II.a.2.vi.	Calculatrices et processus producteurs d'obstacles.	p I.197

II.b. Un an d'observations à la loupe. p I.201

II.b.1. Présentation du dispositif. p I.203

II.b.1.i.	L'intégration des instruments (calculatrices graphiques, puis symboliques).	p I.203
II.b.1.ii.	L'activité mathématique organisée et le recueil d'observations.	p I.206
II.b.1.iii.	Une typologie des comportements.	p I.208
II.b.1.iv.	Typologie, défense et illustration.	p I.213

II.b.2. Limites, enseignement dispensé, conceptions exprimées. p I.221

II.b.2.i.	Définition, intervention de la notion.	p I.221
II.b.2.ii.	Questionnaire avec calculatrice graphique, comparaison externe.	p I.229
II.b.2.iii.	Questionnaire avec calculatrice graphique, comparaison interne.	p I.238
II.b.2.iv.	Questionnaire avec TI-92, double comparaison interne.	p I.248

II.b.3. Genèse instrumentale et conceptualisation. p I.269

II.b.3.i.	Le prévu et l'observé, contraintes et schèmes	p I.269
II.b.3.ii.	Schèmes d'action et théorèmes-en-acte.	p I.282
II.b.3.iii.	Articulation des schèmes d'action instrumentée et typologie	p I.285
II.b.3.iv.	Portée des schèmes d'action et typologie.	p I.289
II.b.3.v.	Les schèmes d'action, liés à des schèmes d'usage.	p I.301
II.b.3.vi.	Instrumentation et conceptualisation.	p I.310

Chapitre 3.
Discussion des remèdes.

III.a Critique des approches hagiographiques p I.329

III.a.1. Apologie du graphique (Gasquet). p I.329

III.a.2. Apologie des calculatrices graphiques (Ferrand). p I.330

III.a.3. Apologie des logiciels de calcul formel (Kutzler). p I.332

III.b. Critique de quelques perspectives générales p I.337

III.b.1. Une méthode progressive (Antibi). p I.337

III.b.2. La recherche des racines (Tall). p I.339

III.b.3. Le changement de l'analyse à enseigner (Deledicq). p I.342

III.c Quelques propositions p I.347

III.c.1. Pour la classe, une intégration contrôlée. p I.347

III.c.2. Des nécessités institutionnelles. p I.354

III.c.3. De nouvelles pistes de recherche. p I.357

Conclusion **p I.361**

Bibliographie **p I.363**

Annexes **p I.373**

Annexe 1 Le questionnaire p I.375

Annexe 2 Protocoles TS/Deug A p I.381

Annexe 3 Protocoles classe expérimentale. p I.389

Annexe 4 Documents relatifs à la classe expérimentale. p II 1

Bilan des TP p II.3
Bilan des interrogations écrites p II.119
Bilan des questionnaires p II.159

Table des matières **p I.411** et **p II.193**