



**HAL**  
open science

# Opérateurs et semi-groupes d'opérateurs sur des espaces de fonctions holomorphes : Applications à la théorie de l'universalité

Benjamin Célariès

► **To cite this version:**

Benjamin Célariès. Opérateurs et semi-groupes d'opérateurs sur des espaces de fonctions holomorphes : Applications à la théorie de l'universalité. Variables complexes [math.CV]. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSE1077 . tel-02395367

**HAL Id: tel-02395367**

**<https://theses.hal.science/tel-02395367>**

Submitted on 5 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2019LYSE1077

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON  
opérée au sein de  
l'université Claude Bernard Lyon 1

École Doctorale ED 512  
InfoMaths

Spécialité de doctorat : Mathématiques

Soutenu publiquement le 21 juin 2019 par  
**Benjamin CÉLARIÈS**

---

Opérateurs et semi-groupes d'opérateurs sur  
des espaces de fonctions holomorphes —  
Applications à la théorie de l'universalité

---

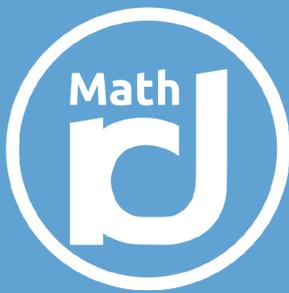
Devant le jury composé de :

Mme Isabelle CHALENDAR	Université Paris-Est Marne-la-Vallée	Directrice
M. Carl COWEN	Indiana University	Rapporteur
Mme Eva GALLARDO GUTIÉRREZ	Universidad Complutense de Madrid	Examinatrice
M. Ivan GENTIL	Université Claude Bernard Lyon 1	Examinateur
M. Pascal LEFÈVRE	Université d'Artois	Rapporteur
Mme Sylvie MONNIAUX	Aix-Marseille Université	Examinatrice

Après avis des rapporteurs :

M. Carl COWEN	Indiana University - Purdue University Indianapolis
M. Pascal LEFÈVRE	Université d'Artois

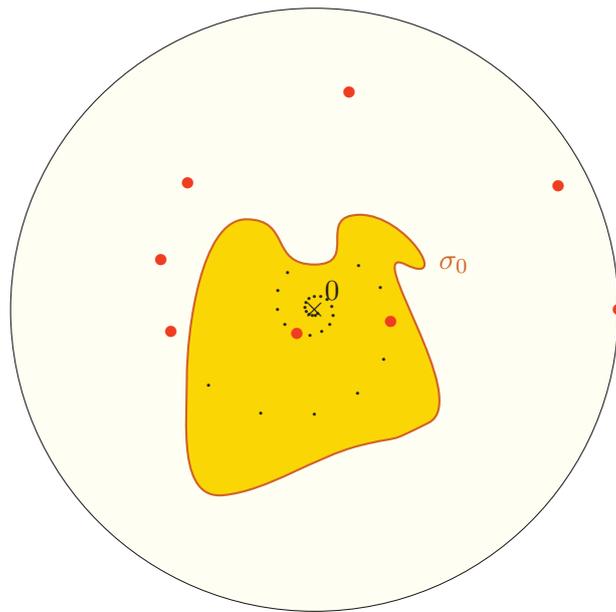




Institut  
Camille  
Jordan

Laboratoire de recherche en mathématiques Lyon/Saint-Étienne

# Opérateurs et semi-groupes d'opérateurs sur des espaces de fonctions holomorphes — Applications à la théorie de l'universalité



Benjamin Célariès

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard



Lyon 1



# Table des matières

Table des matières	vi
Remerciements	1
Introduction and abstract	3
Introduction et résumé	13
<b>I) Opérateurs sur des espaces de fonctions holomorphes</b>	<b>23</b>
<b>1 Fonctions holomorphes sur le disque unité</b>	<b>25</b>
A Théorèmes de Denjoy-Wolff et de Koenigs . . . . .	25
1 Homographies et automorphismes du disque unité . . . . .	25
2 Théorème de Denjoy-Wolff . . . . .	26
3 Théorème de Koenigs . . . . .	38
B Espaces de fonctions holomorphes . . . . .	45
1 Espaces de Fréchet et de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité . . . . .	45
2 Espaces de Dirichlet pondérés . . . . .	47
3 Autres exemples d'espaces de Hilbert de fonctions holomorphes . . . . .	54
4 Espace de Hardy du demi-plan supérieur — Théorème de Paley-Wiener . . . . .	61
5 Espaces de Hilbert de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles . . . . .	70
6 Multiplicateurs de $\mathcal{D}_w$ . . . . .	72
<b>2 Opérateurs de composition sur des espaces de fonctions holomorphes</b>	<b>77</b>
A Étude sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . . . . .	77
1 Continuité . . . . .	78
2 Caractérisation algébrique . . . . .	78
3 Compacité . . . . .	80

4	Étude spectrale sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . . . . .	83
B	Étude sur des espaces de Dirichlet pondérés . . . . .	112
1	Continuité . . . . .	112
2	Caractérisation algébrique des opérateurs de composition . . . . .	120
<b>3</b>	<b>Modélisation des opérateurs sur un espace de Hilbert</b>	<b>123</b>
A	Opérateurs universels . . . . .	123
B	Opérateurs similaires à un opérateur de décalage . . . . .	130
1	Opérateurs presque isométriques . . . . .	131
2	Décomposition de Wold . . . . .	141
3	Modélisation des opérateurs concaves ou de Shimorin . . . . .	154
4	Modélisation des contractions de classe $C_{0\bullet}$ . . . . .	158
<b>II)</b>	<b>Applications aux semi-groupes d'opérateurs</b>	<b>163</b>
<b>4</b>	<b>Universalité des semi-groupes d'opérateurs sur un espace de Hilbert</b>	<b>165</b>
A	Semi-groupes d'opérateurs . . . . .	165
1	Définitions et généralités . . . . .	166
2	Générateur . . . . .	172
3	Co-générateur d'un semi-groupe . . . . .	179
4	Exemples . . . . .	184
B	Universalité des semi-groupes d'opérateurs . . . . .	192
1	Définition des semi-groupes universels . . . . .	192
2	Cas des semi-groupes uniformément continus . . . . .	194
3	Cas des semi-groupes quasi-contractifs ou concaves . . . . .	195
4	Extension au cas des groupes . . . . .	201
<b>5</b>	<b>Semi-groupes d'opérateurs de composition sur des espaces de Dirichlet pondérés</b>	<b>203</b>
A	Semi-groupes d'opérateurs de composition . . . . .	203
1	Semi-flots de fonctions holomorphes . . . . .	204
2	Semi-groupes d'opérateurs de composition . . . . .	211
3	Exemple . . . . .	213
B	Vers une généralisation du théorème de Nordgren, Rosenthal et Wintrobe . . . . .	219
1	Un semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz . . . . .	219
2	Vers une extension de NRW . . . . .	223
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>229</b>
<b>A</b>	<b>Dérivation discrète des suites réelles</b>	<b>231</b>
<b>B</b>	<b>Calcul fonctionnel holomorphe et projections spectrales</b>	<b>233</b>
<b>C</b>	<b>Notations</b>	<b>235</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>237</b>

# Remerciements

À l'heure de terminer la rédaction de ce manuscrit et de conclure ces années de thèse, je souhaitais prendre un instant pour remercier celles et ceux qui ont contribué à cette aventure. Qu'il s'agisse d'un soutien scientifique ou personnel, ce manuscrit doit beaucoup à celles et ceux que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ces quatre années. J'ai tenté d'adresser une pensée à tous ceux qui m'ont accompagné dans cette aventure. Si, par malheur, vous méritez d'y être mais n'y figurez pas, sachez que l'oubli n'est absolument pas volontaire !

Je remercie Isabelle, pour avoir accepté de diriger mes travaux de thèse. Ta considération, ton enthousiasme, ta disponibilité et ton soutien m'ont été très précieux lors de toutes ces années de thèse. Nos discussions, aussi nombreuses que passionnantes, m'ont beaucoup apporté. Je te remercie aussi pour m'avoir fait découvrir le monde fascinant des espaces de fonctions holomorphes, et pour m'avoir proposé des sujets d'étude passionnants. J'ai beaucoup apprécié le fait d'avoir travaillé sur ces questions avec toi.

Je remercie les membres de mon jury pour avoir accepté d'y participer. Merci d'abord à mes rapporteurs, Carl Cowen et Pascal Lefèvre, pour avoir lu avec attention ce manuscrit ainsi que pour leurs commentaires, toujours précis et exacts, qui ont grandement contribué à la qualité de ce manuscrit de thèse. Je remercie également Eva Gallardo, Ivan Gentil et Sylvie Monniaux pour me faire l'honneur de prendre part à mon jury de thèse et pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mes travaux.

Je remercie celles qui, nonobstant leur occasionnelle incompréhension face aux équations et symboles, ont accepté de relire ce manuscrit. Estelle, la correction (aussi bien orthographique que syntaxique) de ce manuscrit te doit beaucoup. Layla, merci de m'avoir aidé à déjouer les difficultés de la langue anglaise.

Je remercie l'Institut Camille Jordan, l'école doctorale InfoMaths, l'université Claude Bernard Lyon 1 et l'École Centrale de Lyon pour m'avoir permis d'étudier et travailler dans des conditions optimales. Je remercie particulièrement Aurélie Reymond, Christine Le Sueur, Francis Chavanon, Isabelle Dominique, Isabelle Famechon, Laurent Azema, Lydia Barlerin, Naïma Fantoussi, Renée El Melhem, Vincent Farget et l'ensemble des équipes techniques ou administratives pour leur travail et leur soutien précieux.

Je remercie les habitants et habitantes du bureau 111B avec qui j'ai pu partager de si bons moments. Des vétérans diplômés depuis longtemps aux nouveaux arrivés dans le bureau, en passant par les stagiaires restés moins longtemps, vous avez su faire de ce bureau plus qu'un simple lieu de travail. Merci donc à Ariane, Cécilia, Colin, Eduard, Francesco, François, Godfred, Ivan, Jan, Khan, Seidon, Simon, Théo et Thomas. Puissent les affiches syndicales de 1995 et les ficus continuer à vous apporter l'ambiance unique du 111B.

Je remercie le département de Mathématiques et Informatique de l'École Centrale de Lyon, où j'ai eu la chance d'enseigner pendant ma dernière année de thèse. Merci à Céline, Christophette, Élisabeth, Francis, Grégory, Hélène, Isabelle, Julie, Laurent, Malek, Martine et Philippe pour leur accueil chaleureux. Merci également à mes co-bureaux écullois : grâce à Angèle, Antoine, Laura, Mona, Nicolas, Reda, Tanya et Thierry, le bureau des (post-)doctorants et (post-)doctorantes de Centrale est assurément un endroit incontournable (ne serait-ce que pour les parties de jeu postprandiales ou les « vendredis pâtisserie » du département).

Je remercie les doctorants et doctorantes lyonnais que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant ces années de thèse. Qu'ils aient déjà quitté Lyon ou qu'ils viennent d'arriver, qu'ils soient ou non parmi les commensaux de 11h30, qu'ils consacrent ou non leurs pauses méridiennes à l'étude des probabilités discrètes, ou qu'ils soient des visages amis que l'on apprécie de croiser dans les couloirs du laboratoire (voire ailleurs), leur présence a été un véritable atout lors de ces années de thèse. Merci (avec multiplicité éventuelle) donc à Alexandre, Anatole, Antoine, Arthur, Benjamin, Benoît, Caterina, Daniel, Félix, Hugo, Jiao, Jean-Cyrille, Jorge, Kévin, Léo, Lola, Marina, Maxime, Mélanie, Mickaël, Nils, Octave, Quentin, Rémy, Samuel, Shmuel, Simon, Tingxian, Thomas, Ulysse, Vincent et tous les autres.

Je remercie le chœur et les choristes de l'École Normale Supérieure de Lyon grâce à qui j'ai pu, le long de toutes mes années lyonnaises, oublier quelques instants les mathématiques, profiter de splendides moments musicaux et nouer des amitiés sincères. Je remercie aussi plus particulièrement Adrien, Alice, Anne-Sophie, Catherine, Clara, Colin, Estelle, François, Janelle, Jean-Claude, Jean-François, Layla, Marie, Marie-Madeleine, Monique, Pascal, Tibissaï, Simon, Sylvie et les autres qui, par leur engagement, font vivre le chœur de l'ENS et contribuent à lui donner cette atmosphère si conviviale.

Je remercie aussi celles et ceux que j'ai eu l'occasion de croiser dans des circonstances souvent musicales, et toujours amicales. Un grand merci à Cécile et au petit chœur de la Doua, notamment à Corentin, Morgane et Charles-Édouard. Un autre grand merci à Benjamin, Coline et Oriane avec qui le *Quadrilatuor* me permet de partager simultanément le plaisir du chant *a capella* et l'amour des calembours que l'on ose à peine qualifier de douteux.

Je remercie Coline et Yannick, mes colocos qui ont réussi l'exploit de me supporter au quotidien. Je remercie aussi Bruno et François, pour leur amitié sans faille qui signifie beaucoup pour moi.

Je remercie mes grands-parents, mes parents et ma sœur qui m'ont accompagné lors de ces quatre années avec beaucoup de patience et de bienveillance. Cette thèse doit beaucoup à votre présence et à votre soutien indéfectibles.

# Introduction and abstract

THE works presented in this thesis address several topics from functional analysis and operator theory. More precisely, it involves ideas and notions arising from the study of operators on spaces of holomorphic functions, the theory of operator semigroups on Banach spaces, and the theory of universal operators on Hilbert spaces. Before describing the interactions between these different domains, we introduce them specifically.

## Spaces of holomorphic functions

Let  $\mathbb{D}$  denote the open unit disk in the complex plane. The general framework for the study of spaces of holomorphic functions is the Fréchet space  $(\text{Hol}(\mathbb{D}), d)$ . The distance  $d$  is described by

$$\forall f, g \in \text{Hol}(\mathbb{D}), d(f, g) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \min\left(1, \|f - g\|_{\infty, \overline{D}_n}\right)$$

where, for all  $n \in \mathbb{N}^*$ , the set  $\overline{D}_n$  is the closed disk of radius  $r_n = 1 - \frac{1}{n}$  and centered at 0.

We also investigate Banach spaces  $\mathcal{X}$  of holomorphic functions for which the inclusion  $i : \mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  is continuous.

In some cases, we also work in the specific case of Hilbert spaces of holomorphic functions. We then study operators on weighted Dirichlet spaces, which are defined as follows. Let  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . The weighted Dirichlet space  $\mathcal{D}_\alpha$  of parameter  $\alpha$  is the space defined by

$$\mathcal{D}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \left| \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \stackrel{\text{def}}{=} |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} < +\infty \right. \right\}.$$

The spaces  $\mathcal{D}_\alpha$  are Hilbert spaces of holomorphic functions which are continuously embedded in  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . They are also endowed with a reproducing kernel structure. Note that for specific values of  $\alpha$ , we recognise some usual spaces of holomorphic functions : for  $\alpha = 0$ , the space  $\mathcal{D}_0$  is the Dirichlet space, whereas for  $\alpha = 1$ , the space  $\mathcal{D}_1$  is the classical Hardy space  $H^2(\mathbb{D})$ .

## Operators semigroups

We recall the definition of (strongly continuous) operator semigroups on Banach spaces.

**Definition 1** *Let  $\mathcal{X}$  be a Banach space. A strongly continuous operator semigroup on  $\mathcal{X}$  is a family  $(T_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})^{\mathbb{R}^+}$  such that*

- (i) *one has  $T_0 = \text{Id}_{\mathcal{X}}$ ;*
- (ii) *for all  $t, s \in \mathbb{R}^+$ ,  $T_{s+t} = T_s \circ T_t$ ;*
- (iii) *for every  $x \in \mathcal{X}$ , one has  $T_t x \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} x$ .*

## Universal operators

The notion of universal operator was first introduced by Rota in the 60's.

**Definition 2** *Let  $\mathcal{H}$  be a Hilbert space. The operator  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  is universal if, for every  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , there exists a closed  $U$ -invariant subspace  $\mathcal{M}$  of  $\mathcal{H}$ , a constant  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  and a continuous isomorphism  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  such that*

$$T = \lambda S U|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

Caradus has provided one of the most important results concerning universal operators.

**Theorem 3 (Caradus)** *Let  $\mathcal{H}$  be a Hilbert space. Let  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Assume that  $\text{Ker}(U)$  is infinite-dimensional, and that  $U$  is onto. Then,  $U$  is a universal operator.*

In this thesis, we combine concepts and results coming from the three theories above to address the following general questions:

**Problem 1** *What are the properties of (semigroups of) composition operators on spaces of holomorphic functions?*

**Problem 2** *Does there exist universal semigroups of operators? If so, what are their properties?*

These problem are obviously too large to find exhaustive answers in this thesis. However, the two main results that we prove in this work give significant answers to these questions. The first one relates to the spectral properties of composition operators whose symbol is a Koenigs's symbol.

**Theorem 4** *Let  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  be an holomorphic function such that  $\varphi(0) = 0$  and  $|\varphi'(0)| \in (0; 1)$ . Then,  $C_\varphi$  is a continuous operator on  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  whose point spectrum is:*

$$\sigma_p(C_\varphi) = \{(\varphi'(0))^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

*and whose spectrum is  $\sigma(C_\varphi) = \sigma_p(C_\varphi) \cup \{0\}$ .*

*Furthermore, if  $\mathcal{X} \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$  is an infinite dimensional Banach space such that the inclusion  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  is continuous and  $C_\varphi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ , then  $C_\varphi$  induces a continuous operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  and there exists  $J \subset \mathbb{N}$  such that the point spectrum of  $T$  is*

$$\sigma_p(T) = \{(\varphi'(0))^n \mid n \in J\}.$$

Moreover, let  $\sigma_0 \subset \sigma(T)$  be the connected component of  $0 \in \sigma(T)$ . Then, the set  $\sigma_0$  is also the essential spectrum of  $T$ . Furthermore, the spectrum of  $T$  is

$$\sigma(T) = \sigma_0 \cup \{(\varphi'(0))^n \mid n \in J\}.$$

The second principal result of this thesis concerns the existence of universal semigroups. Though we cannot state a theorem solving the problem for every semigroup, we can find examples of semigroups which modelise “large” classes of semigroups (we will define later in this introduction the notion of “model” for an operator semigroup).

**Theorem 5** *Let  $\mathcal{H}$  be an infinitely dimensional separable Hilbert space on  $\mathbb{C}$ . Then, the following assertions hold:*

1. *there exists a uniformly continuous semigroup on  $\mathcal{H}$  which modelises every uniformly continuous semigroup on  $\mathcal{H}$ ;*
2. *there exists a strongly continuous semigroup of isometries which modelises every quasicontractive strongly continuous semigroup on  $\mathcal{H}$ ;*
3. *every strongly continuous semigroup of concave operators can be modelled by a semigroup of multiplication operators on a space of vector-valued holomorphic functions.*

*Furthermore, each of these semigroups can be represented as a strongly continuous semigroup of multiplication operators on a space of holomorphic functions.*

We now give a more detailed presentation of the results and methods of proof presented in this thesis.

## Composition operators on spaces of holomorphic functions

First, we give a global overview of our results on composition operators and semigroups of composition operators. These results are mainly addressed in Chapters 2 and 5.

### General facts

Chapter 2 is dedicated to the study of composition operators in a general framework. On the Fréchet space  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , we get the following result.

**Theorem 6** *Let  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  be holomorphic, and  $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$  be the composition operator associated with  $\varphi$ . Then, the following results hold:*

1. *the operator  $C_\varphi$  is continuous on  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ ;*
2. *the operator  $C_\varphi$  is invertible in  $\mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  if and only if  $\varphi$  is an automorphism of  $\mathbb{D}$ ;*
3. *the operator  $C_\varphi$  is compact if and only if  $\sup_{z \in \mathbb{D}} |\varphi(z)| < 1$ .*

*Furthermore, for every  $T \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ , the operator  $T$  is a composition operator if and only if it is a multiplicative non-zero operator.*

We also detail the study of composition operators on weighted Dirichlet spaces  $\mathcal{D}_\alpha$  (for  $\alpha \geq 0$ ). We get an algebraic characterisation of composition operators which is similar to the one stated above on  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Furthermore, when the symbol  $\varphi$  is one-to-one, we also get an explicit upper bound of the norm of  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\alpha)$ .

**Proposition 7** *Let  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Let  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  be holomorphic and univalent. Then, the composition operator  $C_\varphi$  is bounded on  $\mathcal{D}_\alpha$ . Furthermore, there exist two constants  $K_\alpha$  and  $L_\alpha$  (which can be expressed as functions of  $\alpha$  and  $\varphi(0)$ ) such that:*

$$\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \leq \sup_{x \in [0;1]} 1 + K_\alpha x + 2\sqrt{L_\alpha x(1-x)}.$$

## Composition by a Koenigs's symbol

First, we define the notion of Koenigs's symbol.

**Definition 8** *Let  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  be holomorphic. We say that  $\varphi$  is a Koenigs's symbol if and only if  $\varphi$  has a fixed point  $\alpha \in \mathbb{D}$  and  $|\varphi'(\alpha)| \in (0; 1)$ .*

In order to simplify the following statements and without loss of generality, we can assume that  $\alpha = 0$ .

Unsurprisingly, the notion of Koenigs's symbol is related to a theorem proved by Koenigs in the 1880s.

**Theorem 9 (Koenigs)** *Let  $\varphi$  be a Koenigs's symbol (with  $\alpha = 0$ ). Then, the point spectrum of  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  is*

$$\sigma_p(C_\varphi) = \{(\varphi'(0))^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

*Furthermore, there exists a unique function  $\varsigma \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  such that  $\varsigma'(0) = 1$  and, for every  $\lambda = \varphi'(0)^n \in \sigma_p(C_\varphi)$ ,*

$$\text{Ker}(\lambda \text{Id} - C_\varphi) = \mathbb{C} \cdot \varsigma^n.$$

Using techniques from complex analysis, we are able to define “spectral projections” on  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ .

**Proposition 10** *Let  $\varphi$  be a Koenigs's symbol (with  $\alpha = 0$ ). Then, there exists a family  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of projections on  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  such that:*

- (i) *for all  $n \in \mathbb{N}$ , the application  $P_n$  is a projection on  $\mathbb{C} \cdot \varsigma^n$ ;*
- (ii) *for all  $m, n \in \mathbb{N}$ , if  $m \neq n$ , then  $P_m \circ P_n = 0$ ;*
- (iii) *for all  $n \in \mathbb{N}$ , we have  $P_n \circ C_\varphi = C_\varphi \circ P_n = \lambda_n P_n$ .*

*Moreover, for every  $n \in \mathbb{N}$ , the linear application defined by  $Q = P_0 + \dots + P_n$  is the projection on  $\text{Span}(\varsigma^k \mid 0 \leq k \leq n)$  with respect to  $z^{n+1} \text{Hol}(\mathbb{D})$ .*

We can then use these projections to get a description of the spectrum of a composition operator on  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , as well as on a general Banach space of holomorphic functions which is continuously embedded in  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ .

**Theorem 11** *Let  $\varphi$  be a Koenigs's symbol (with  $\alpha = 0$ ). Then, the spectrum of  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  is  $\sigma(C_\varphi) = \sigma_p(C_\varphi) \cup \{0\}$ .*

*Furthermore, if  $\mathcal{X} \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$  is an infinite dimensional Banach space such that the inclusion  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  is continuous and  $C_\varphi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ , then  $C_\varphi$  induces a continuous operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  and there exists  $J \subset \mathbb{N}$  such that the point spectrum of  $T$  is*

$$\sigma_p(T) = \{(\varphi'(0))^n \mid n \in J\}.$$

Moreover, let  $\sigma_0 \subset \sigma(T)$  be the connected component of  $0 \in \sigma(T)$ . Then, the set  $\sigma_0$  is also the essential spectrum of  $T$  and the spectrum of  $T$  is:

$$\sigma(T) = \sigma_0 \cup \{(\varphi'(0))^n \mid n \in J\}.$$

## Towards a generalisation of the Nordgren-Rosenthal-Wintrobe's theorem

In Chapter 5, we focus on the study of semigroups of composition operators on weighted Dirichlet spaces  $\mathcal{D}_\alpha$ . Using the upper bound on the norm of composition operators that we stated above, we get a result on the growth of such semigroups.

**Proposition 12** *Let  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  be a strongly continuous semigroup of composition operators. Then,  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  is a quasi-contractive semigroup: there exists  $\omega \in \mathbb{R}$  such that, for every  $t \in \mathbb{R}^+$ , we have  $\|T_t\| \leq e^{\omega t}$ .*

We then study a theorem proved by Nordgren, Rosenthal and Wintrobe which relates to the universality of composition operators whose symbol is a hyperbolic automorphism of  $\mathbb{D}$ .

**Theorem 13 (Nordgren-Rosenthal-Wintrobe)** *Let  $\varphi$  be a hyperbolic automorphism of  $\mathbb{D}$ . Then, for every  $\lambda \in \sigma_p(C_\varphi)$ , the operator  $C_\varphi - \lambda \text{Id}$  is universal on  $\mathcal{D}_1 = H^2(\mathbb{D})$ .*

In a recent article, Cowen and Gallardo gave a new proof of this theorem. This new proof relies on semigroup theory: more precisely, after remarking that each composition operator  $C_\varphi$  (where  $\varphi$  is a hyperbolic automorphism) can be embedded in a strongly continuous semigroup of composition operators  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$ , they show that the semi-group  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  is similar to a strongly continuous semigroup of Toeplitz operators  $(M_{\psi_t}^*)_{t \geq 0}$ , which is simpler to study.

The ideas introduced in the proof given by Cowen and Gallardo can be extended to  $\mathcal{D}_\alpha$  spaces with parameter  $\alpha \geq 1$ , except for one point: the isomorphism which appears in the proof is *a priori* unbounded when  $\alpha > 1$ . In other words, we get the following result.

**Proposition 14** *Let  $\alpha \geq 1$ . Let  $\varphi$  be a hyperbolic automorphism of  $\mathbb{D}$ . Then, for every  $\lambda \in \sigma_p(C_\varphi)$ , there exists a universal operator  $U \in \mathcal{D}_\alpha$  and two (possibly unbounded) operators  $S$  and  $T$  such that  $ST = TS = \text{Id}_{\mathcal{D}_\alpha}$  and  $C_\varphi - \lambda \text{Id} = SUT$ .*

## Universality for operator semigroups

We now come to our quest for universal semigroups. From now on, we note by  $\mathcal{H}$  an infinite-dimensional separable Hilbert space on  $\mathbb{C}$  and all the operators we consider are defined on  $\mathcal{H}$ .

First, we define precisely the notion of “model” for a semigroup.

**Definition 15** *Let  $(U_t)_{t \geq 0}$  and  $(T_t)_{t \geq 0}$  be two strongly continuous semigroups on  $\mathcal{H}$ . We say that  $(U_t)_{t \geq 0}$  is a model for  $(T_t)_{t \geq 0}$  if there exists a closed subspace  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  invariant by  $(U_t)_{t \geq 0}$ , two constants  $\lambda \in \mathbb{C}$  and  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$ , and a continuous isomorphism  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  such that*

$$\forall t \geq 0, T_t = e^{\lambda t} S U_{\mu t|_{\mathcal{M}}} S^{-1}.$$

Depending on the structure of the semigroup, we can state several results regarding its modelisation. The general idea is the same in each case: we identify an operator which characterises the semigroup (the generator or the cogenerator) and apply modelisation theorem to this operator.

### Universality of uniformly continuous semigroups

In the case of uniformly continuous semigroups, the operator we use to modelise the semigroup is the generator of the semigroup.

**Definition 16** *Let  $(T_t)_{t \geq 0}$  be a strongly continuous operator semigroup on  $\mathcal{H}$ . Then, the domain*

$$D(A) = \left\{ x \in \mathcal{H} \mid \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T_t x - x}{h} \text{ exists} \right\}$$

*is dense in  $\mathcal{H}$  and the operator*

$$A : \begin{cases} D(A) \subset \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ x & \longmapsto & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T_t x - x}{h} \end{cases}$$

*is a closed operator, called the generator of the semigroup.*

*We say that  $(T_t)_{t \geq 0}$  is a uniformly continuous semigroup when  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  is bounded.*

The result we use to modelise a uniformly continuous semigroup is a slight adaptation of Caradus's theorem (stated earlier). We deduce from it the following statement.

**Theorem 17** *Let  $(T_t)_{t \geq 0}$  be a uniformly continuous operator semigroup on  $\mathcal{H}$ , and  $A$  be the generator of  $(T_t)_{t \geq 0}$ . Then, the following assertions are equivalent:*

- (i) *the operator  $A$  is universal;*
- (ii) *the semigroup  $(T_t)_{t \geq 0}$  modelises (with  $\lambda = 0$ ) every uniformly continuous operator semigroup.*

Since the left shift operator on  $L^2(\mathbb{R}^+)$  is a universal operator (according to Caradus's theorem), the semigroup it generates is a "universal" semigroup for uniformly continuous semigroup. The semigroup in question can be explicitly computed thanks to Paley-Wiener's theorem.

**Theorem 18 (Paley-Wiener)** *Let  $\Pi^+ \subset \mathbb{C}$  be the open upper half-plane. Let*

$$H^2(\Pi^+) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ F \in \text{Hol}(\Pi^+) \mid \|F\|_{H^2(\Pi^+)}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

*Then,  $H^2(\Pi^+)$  is a Hilbert space of holomorphic functions and the Fourier transform  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^+) \rightarrow H^2(\Pi^+)$  is a unitary isomorphism of Hilbert spaces.*

**Corollary 19** *The semigroup  $(V_t)_{t \geq 0}$  described for all  $t \in \mathbb{R}^+$  by*

$$V_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & (Z \mapsto \exp(te^{iZ}) \times F(Z)) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+))$$

*is universal for uniformly continuous semigroups.*

## Universality of quasi-contractive semigroups

The case of quasi-contractive semi-groups can be treated similarly to the case of uniformly continuous semigroups, except we modelise the cogenerator rather than the generator of the semigroup.

**Definition 20** *Let  $(T_t)_{t \geq 0}$  be a strongly continuous operator semigroup on  $\mathcal{H}$ , and  $A$  be its generator. Assume that  $1 \notin \sigma(A)$ . The cogenerator of  $(T_t)_{t \geq 0}$  is the bounded operator*

$$V = (A + \text{Id})(A - \text{Id})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Note that, although the generator is not necessarily a bounded operator, the cogenerator — when it exists — is always bounded.

When the growth of the semi-group is “small enough”, the cogenerator exists, and one can read on the cogenerator the properties of the semigroup.

**Proposition 21** *Let  $(T_t)_{t \geq 0}$  be a strongly continuous semigroup of contractions. Then, it admits a cogenerator  $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , and  $V$  is a contraction. Moreover, the following assertions are equivalent:*

- (i) *for every  $x \in \mathcal{X}$  and for every  $t > 0$ , we have  $T_t^n x \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$  ;*
- (ii) *for every  $x \in \mathcal{X}$ , we have  $V^n x \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ .*

When the assertions above hold, we can modelise the cogenerator thanks to a theorem proved by Nagy and Foias.

**Theorem 22 (Nagy-Foias)** *Let  $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Assume that, for every  $x \in \mathcal{X}$ , we have  $V^n x \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ . Then, the right shift operator on  $L^2(\mathbb{R}^+)$  modelises  $V$ : there exists a closed subspace  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  invariant by  $V$ , and a continuous isomorphism  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  such that*

$$V = SD|_{\mathcal{M}}D^{-1},$$

where  $D : f \mapsto f(\bullet - 1) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))$  is the right shift operator.

We can use this result to modelise quasi-contractive semigroups. Once again, thanks to Paley-Wiener’s theorem, we can compute an explicit example of a universal semigroup in the quasi-contractive case.

**Theorem 23** *Let  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$  be the strongly continuous operators semigroup defined for every  $t \in \mathbb{R}^+$  by*

$$\Sigma_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & \left( Z \mapsto \exp\left(t \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1}\right) \times F(Z) \right) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+)).$$

*Then,  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$  is the semigroup whose cogenerator is  $D$ .*

*Furthermore,  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$  modelises (with  $\mu = 1$ ) every quasi-contractive strongly continuous semigroup: for every quasi-contractive semigroup  $(T_t)_{t \geq 0}$ , there exists a closed subspace  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  invariant by  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$ , a constant  $\lambda \in \mathbb{R}$ , and a continuous isomorphism  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  such that*

$$\forall t \geq 0, T_t = e^{\lambda t} S \Sigma_t|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

## Models for concave semigroups

The case of concave semigroups is close to the case of quasi-contractive semigroups, except we have to change the theorem which modelises the cogenerator. For the sake of clarity, we only study here semigroups which are concave and pure (we detail the study of general concave semigroups in the thesis). We start by defining concave operators.

**Definition 24** *Let  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . We say that  $T$  is concave if, for every  $x \in \mathcal{H}$ , the sequence  $(\|T^n x\|^2)_{n \in \mathbb{N}}$  is concave.*

*When we have  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n \mathcal{H} = \{0\}$ , we say that  $T$  is pure.*

The concavity and the purity of a semigroup can also be read on the cogenerator.

**Proposition 25** *Let  $(T_t)_{t \geq 0}$  be a strongly continuous semigroup such that, for every  $t > 0$ , the operator  $T_t$  is concave and pure. Then, the semigroup  $(T_t)_{t \geq 0}$  admits a cogenerator  $V$ , and  $V$  is concave and pure.*

We can now apply a theorem proved by Shimorin which states that every concave and pure operator can be modelised as a multiplication operator on a space of vector-valued holomorphic functions.

**Theorem 26 (Shimorin)** *Let  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  be concave and pure. Then, there exists a Hilbert space  $\mathcal{E}$ , a constant  $r > 0$ , a Hilbert space  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$  of holomorphic functions, and a unitary isomorphism  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  such that the operator*

$$\Delta : \begin{cases} \mathfrak{H} & \rightarrow \mathfrak{H} \\ f & \mapsto (z \mapsto z f(z)) \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$$

*is unitarily equivalent (via  $S$ ) to  $T$ .*

Once again, we can compute explicitly the semigroup whose cogenerator is  $\Delta$ .

**Proposition 27** *Let  $(T_t)_{t \geq 0}$  be a strongly continuous semigroup such that, for every  $t > 0$ , the operator  $T_t$  is concave and pure. Then, there exists a Hilbert space  $\mathcal{E}$ , a constant  $r > 0$ , a Hilbert space  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$  of holomorphic functions, and a unitary isomorphism  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  such that, for every  $t \in \mathbb{R}^+$ , the operator  $T_t$  is unitarily equivalent to the operator*

$$\Sigma_t : \begin{cases} \mathfrak{H} & \rightarrow \mathfrak{H} \\ f & \mapsto \left( z \mapsto \exp\left(t \frac{1+z}{1-z}\right) f(z) \right) \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}).$$

## Outline

To complete this introduction, we now detail the general outline of this thesis. The first part of this thesis is dedicated to the study of operators. The second part of the thesis applies the results of the first part to the study of operator semigroups.

The first chapter (Chapter 1) sets up the general framework of our study. The first part of this chapter addresses the theory of holomorphic functions on the open unit disk. We recall there the proofs of Denjoy-Wolff's and Koenigs's theorems. In a second part, we describe several spaces of holomorphic functions, ranging from general spaces (such as the Fréchet space  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ ) to more specific examples (such as the weighted Dirichlet or Hardy spaces). We also investigate the Hardy space of the upper half-plane, as well as reproducing kernel Hilbert spaces of vector-valued holomorphic functions.

In Chapter 2, we focus on the study of composition operators. We study those operators in two different settings. The first setting is the most general one: we study composition operators on the Fréchet space  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . We get characterisations for the continuity, invertibility or compactness of composition operators, as well as an algebraic characterisation of composition operators. We also investigate in detail the spectral properties of composition operators: when the symbol is a Koenigs's symbol, we can define on  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  "spectral projections", and use these projections to compute the spectrum of a composition operator. We also apply these results to Banach spaces of holomorphic functions which are continuously embedded in  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . The second part of the chapter stays in the setting of weighted Dirichlet spaces. In this context, we compute an upper bound for the norm of a composition operator whose symbol is univalent, and also determine an algebraic characterisation of composition operators.

In Chapter 3, we investigate in detail the different techniques available to modelise an operator. The first technique we study is universality theory: we present a classical theorem proved by Caradus and also investigate the notion of positive universality (which we prove to be equivalent to universality). We then investigate the modelisation of operators close to isometries. The main tool we develop in this context is what can be called a "Wold-type"-decomposition of operators close to an isometry. We study more explicitly the case of concave operators. The last technique presented in this chapter is developed by Nagy and Foias: it is a way to modelise  $C_{0\bullet}$  contractions with the left shift operator on  $L^2(\mathbb{R}^+)$ .

The second part of the thesis is oriented towards the study of operator semigroups. In Chapter 4, we address the question of the universality of semigroups. In a first part, we recall some notions (such as the generator or the cogenerator of a semigroup) from elementary semigroup theory. We also give examples of operator semigroups on spaces of holomorphic functions. In the second part of the chapter, we show how we can apply the results of Chapter 3 to get some results for the modelisation of semigroups. To do so, we study different classes of operators semigroups (namely, uniformly continuous semigroups, quasi-contractive semigroups, and concave semigroups). We also show briefly how we can extend these results to groups of operators.

The last chapter of this thesis (Chapter 5) concerns semigroups of composition operators on weighted Dirichlet spaces. In a first part, we give some elements of general theory: we introduce the notion of semiflow associated with a semigroup of composition operators, and give general properties of composition semigroups (for instance, we show that a semiflow always induces a quasicontractive composition semigroup on the spaces  $\mathcal{D}_\alpha$ ). We also study extensively an example of a composition semigroup whose symbols are hyperbolic automorphisms. In a second part, we try to generalise the proof given by Cowen and Gallardo for the Nordgren-Rosenthal-Wintrobe theorem to weighted Dirichlet spaces. In particular, we study in detail a strongly continuous semigroup of Toeplitz operators on  $\mathcal{D}_\alpha$ , and attempt to use these results to see what are the difficulties encountered when we want to generalise the Nordgren-Rosenthal-Wintrobe's theorem.



# Introduction et résumé

LES travaux de cette thèse portent sur plusieurs aspects de l'analyse fonctionnelle et de la théorie des opérateurs. Plus précisément, nous y développons des idées et concepts issus de l'étude des opérateurs sur des espaces de fonctions holomorphes, de la théorie des semi-groupes d'opérateurs sur des espaces de Banach ainsi que de la théorie de l'universalité des opérateurs sur des espaces de Hilbert. Avant de décrire les interactions entre ces différents domaines, nous les décrivons individuellement.

## Espaces de fonctions holomorphes

Soit  $\mathbb{D}$  le disque unité ouvert du plan complexe. Le cadre le plus général pour notre étude des espaces de fonctions holomorphes est celui de l'espace de Fréchet  $(\text{Hol}(\mathbb{D}), d)$  des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$ . La distance  $d$  peut être décrite par l'égalité

$$\forall f, g \in \text{Hol}(\mathbb{D}), d(f, g) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \min\left(1, \|f - g\|_{\infty, \overline{D}_n}\right)$$

où, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'ensemble  $\overline{D}_n$  est le disque fermé centré en 0 et de rayon  $r_n = 1 - \frac{1}{n}$ .

Nous étudions également des espaces de Banach  $\mathcal{X}$  de fonctions holomorphes tels que l'inclusion  $i : \mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est continue.

Dans certains cas particuliers, nous travaillons aussi sur des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes. C'est notamment le cas lorsque nous étudions les opérateurs sur des espaces de Dirichlet pondérés. Ces espaces sont définis de la façon suivante. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . L'espace de Dirichlet pondéré de paramètre  $\alpha$  est l'espace  $\mathcal{D}_\alpha$  défini par

$$\mathcal{D}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \left| \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \stackrel{\text{def}}{=} |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} < +\infty \right. \right\}.$$

Les espaces  $\mathcal{D}_\alpha$  sont des espaces de Hilbert de fonction holomorphes qui sont continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Nous pouvons par ailleurs les munir d'une structure de noyaux reproduisants.

Remarquons enfin que pour certaines valeurs spécifiques de  $\alpha$ , nous reconnaissons des espaces usuels de fonctions holomorphes : pour  $\alpha = 0$ , l'espace  $\mathcal{D}_0$  est l'espace de Dirichlet et pour  $\alpha = 1$ , l'espace  $\mathcal{D}_1$  est l'espace de Hardy classique  $H^2(\mathbb{D})$ .

## Semi-groupes d'opérateurs

Nous rappelons la définition des semi-groupes d'opérateurs sur un espace de Banach.

**Définition 1** Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach. Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur  $\mathcal{X}$  est une famille  $(T_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})^{\mathbb{R}^+}$  qui vérifie les conditions suivantes :

- (i) on a  $T_0 = \text{Id}_{\mathcal{X}}$  ;
- (ii) pour tous  $t, s \in \mathbb{R}^+$ , on a  $T_{s+t} = T_s \circ T_t$  ;
- (iii) pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , on a  $T_t x \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} x$ .

## Opérateurs universels

La notion d'universalité pour un opérateur a été introduite par Rota dans les années 1960.

**Définition 2** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. On dit que l'opérateur  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est universel lorsque pour tout  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  invariant par  $U$ , une constante  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$T = \lambda S U|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

Caradus a démontré un des résultats principaux sur les opérateurs universels.

**Théorème 3 (Caradus)** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. Soit  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On suppose que  $\text{Ker}(U)$  est de dimension infinie et que  $U$  est surjectif. Alors, l'opérateur  $U$  est universel.

Dans cette thèse, nous combinons des concepts et résultats issus des trois théories ci-dessus pour étudier les questions générales suivantes.

**Problème 1** Quelles sont les propriétés des (semi-groupes d') opérateurs de composition sur des espaces de fonctions holomorphes ?

**Problème 2** Existe-t-il des semi-groupes universels d'opérateurs ? Le cas échéant, quelles sont leurs propriétés ?

Ces problèmes sont de toute évidence trop larges pour être traités exhaustivement dans cette thèse. Les deux résultats principaux que nous établissons dans ces travaux leur donnent cependant des éléments de réponse consistants. Le premier de ces résultats porte sur les propriétés spectrales des opérateurs de composition dont le symbole est un symbole de Koenigs.

**Théorème 4** Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe telle que  $\varphi(0) = 0$  et  $|\varphi'(0)| \in ]0; 1[$ . Alors, l'opérateur  $C_\varphi$  est continu sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Son spectre ponctuel est

$$\sigma_p(C_\varphi) = \{(\varphi'(0))^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

et son spectre est  $\sigma(C_\varphi) = \sigma_p(C_\varphi) \cup \{0\}$ .

Soient  $\mathcal{X} \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$  un espace de Banach de dimension infinie tel que l'inclusion  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est continue et  $C_\varphi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ . Alors, l'opérateur  $C_\varphi$  induit un opérateur continu  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  et il existe  $J \subset \mathbb{N}$  tel que le spectre ponctuel de  $T$  est

$$\sigma_p(T) = \{(\varphi'(0))^n \mid n \in J\}.$$

De plus, en notant  $\sigma_0 \subset \sigma(T)$  la composante connexe de 0 dans  $\sigma(T)$ , l'ensemble  $\sigma_0$  est aussi le spectre essentiel de  $T$ . Enfin, le spectre de  $T$  est

$$\sigma(T) = \sigma_0 \cup \{(\varphi'(0))^n \mid n \in J\}.$$

Le second résultat principal de cette thèse porte sur l'existence de semi-groupes universels. Bien que nous ne puissions pas résoudre le problème en toute généralité, nous pouvons exhiber des exemples de semi-groupes qui modélisent de « larges » classes de semi-groupes (nous définirons ultérieurement dans cette introduction ce que nous entendons par « modélisation » pour un semi-groupe d'opérateurs).

**Théorème 5** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  qui est séparable et de dimension infinie. Alors,*

1. *il existe un semi-groupe d'opérateurs uniformément continu qui modélise tous les semi-groupes uniformément continus sur  $\mathcal{H}$  ;*
2. *il existe un semi-groupe d'isométries fortement continu qui modélise tous les semi-groupes d'opérateurs sur  $\mathcal{H}$  qui sont fortement continus et quasi-contractifs ;*
3. *tout semi-groupe fortement continu d'opérateurs concaves peut être modélisé par un semi-groupe d'opérateurs de multiplication sur un espace de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles.*

*De plus, chacun des semi-groupes ci-dessus peut être représenté par un semi-groupe d'opérateurs de multiplication sur un espace de fonctions holomorphes.*

Nous présentons maintenant de façon plus détaillée les résultats et méthode de preuve qui interviennent dans cette thèse.

## Opérateurs de composition sur des espaces de fonctions holomorphes

Nous commençons par donner un aperçu général de nos résultats portant sur les opérateurs de composition et les semi-groupes d'opérateurs de composition. Ces résultats sont développés dans les chapitres 2 et 5.

### Généralités

Le chapitre 2 est dédié à l'étude des opérateurs de composition dans un contexte général. Sur l'espace de Fréchet  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , nous y démontrons le résultat suivant.

**Théorème 6** *Soient  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe et  $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$  l'opérateur de composition de symbole  $\varphi$ . Alors,*

1. *l'opérateur  $C_\varphi$  est continu sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  ;*

2. l'opérateur  $C_\varphi$  est inversible dans  $\mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  si et seulement si  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$  ;
3. l'opérateur  $C_\varphi$  est compact si et seulement si  $\sup_{z \in \mathbb{D}} |\varphi(z)| < 1$ .

De plus, pour tout  $T \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ , l'opérateur  $T$  est un opérateur de composition si et seulement si c'est un opérateur multiplicatif non nul.

Nous étudions ensuite en détail les opérateurs de composition sur des espaces de Dirichlet pondérés (pour  $\alpha \geq 0$ ). Nous obtenons une caractérisation algébrique des opérateurs de composition qui est similaire à celle énoncée ci-dessus sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Lorsqu'en plus le symbole  $\varphi$  est injectif, nous obtenons une borne supérieure explicite sur la norme de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\alpha)$ .

**Proposition 7** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe univalente. Alors, l'opérateur de composition  $C_\varphi$  est borné sur  $\mathcal{D}_\alpha$ . De plus, il existe deux constantes  $K_\alpha$  et  $L_\alpha$  (que l'on peut explicitement exprimer en fonction de  $\alpha$  et  $\varphi(0)$ ) telles que l'on a

$$\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \leq \sup_{x \in [0;1]} 1 + K_\alpha x + 2\sqrt{L_\alpha x(1-x)}.$$

## Opérateurs de composition par un symbole de Koenigs

Avant tout, nous introduisons la notion de « symbole de Koenigs ».

**Définition 8** Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe. On dit que  $\varphi$  est un symbole de Koenigs si  $\varphi$  a un point fixe  $\alpha \in \mathbb{D}$  tel que  $|\varphi'(\alpha)| \in ]0; 1[$ .

Sans perte de généralité, et dans le but de simplifier les énoncés qui viennent, nous supposons par la suite que  $\alpha = 0$ .

Le nom du symbole de Koenigs vient d'un théorème établi par Koenigs dans les années 1880.

**Théorème 9 (Koenigs)** Soit  $\varphi$  un symbole de Koenigs (avec  $\alpha = 0$ ). Alors, le spectre ponctuel de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  est

$$\sigma_p(C_\varphi) = \{(\varphi'(0))^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

De plus, il existe une unique fonction  $\varsigma \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  telle que  $\varsigma'(0) = 1$  et, pour tout  $\lambda = (\varphi'(0))^n \in \sigma_p(C_\varphi)$ , on a

$$\text{Ker}(\lambda \text{Id} - C_\varphi) = \mathbb{C} \cdot \varsigma^n.$$

Grâce à des outils d'analyse complexe, nous pouvons définir des « projections spectrales » sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ .

**Proposition 10** Soit  $\varphi$  un symbole de Koenigs (avec  $\alpha = 0$ ). Alors, il existe une famille  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications linéaires sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  qui vérifie les conditions suivantes :

- (i) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application  $P_n$  est une projection d'image  $\text{Im}(P_n) = \mathbb{C} \cdot \varsigma^n$  ;
- (ii) pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ , si  $m \neq n$ , alors  $P_m \circ P_n = 0$  ;
- (iii) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $P_n \circ C_\varphi = C_\varphi \circ P_n = \lambda_n P_n$ .

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application linéaire définie par  $Q = P_0 + \dots + P_n$  est la projection sur  $\text{Span}(\varsigma^k \mid 0 \leq k \leq n)$  parallèlement à  $z^{n+1} \text{Hol}(\mathbb{D})$ .

Nous pouvons alors utiliser ces projections pour obtenir une description du spectre d'un opérateur de composition sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , ainsi que sur des espaces de Banach de fonctions holomorphes qui sont continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ .

**Théorème 11** *Soit  $\varphi$  un symbole de Koenigs (avec  $\alpha = 0$ ). Alors, le spectre de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  est  $\sigma(C_\varphi) = \sigma_p(C_\varphi) \cup \{0\}$ .*

*Par ailleurs, si  $\mathcal{X} \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$  est un espace de Banach de dimension infinie tel que l'inclusion  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est continue et tel que  $C_\varphi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ , alors  $C_\varphi$  induit sur  $\mathcal{X}$  un opérateur de composition continu  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  et il existe  $J \subset \mathbb{N}$  tel que le spectre ponctuel de  $T$  est*

$$\sigma_p(T) = \{(\varphi'(0))^n \mid n \in J\}.$$

*Notons alors  $\sigma_0 \subset \sigma(T)$  la composante connexe de 0 dans  $\sigma(T)$ . Alors, l'ensemble  $\sigma_0$  est également le spectre essentiel de  $T$ . Le spectre de  $T$  est*

$$\sigma(T) = \sigma_0 \cup \{(\varphi'(0))^n \mid n \in J\}.$$

## Vers une généralisation du théorème de Nordgren-Rosenthal-Wintrobe

Dans le chapitre 5, nous étudions les semi-groupes d'opérateurs de composition sur des espaces de Dirichlet pondérés  $\mathcal{D}_\alpha$ . En utilisant la borne supérieure sur la norme des opérateurs de composition que nous avons établie précédemment, nous pouvons contrôler la croissance des semi-groupes d'opérateurs de composition.

**Proposition 12** *Soit  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de composition. Alors, la famille  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe quasi-contractif : il existe  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a  $\|T_t\| \leq e^{\omega t}$ .*

Nous étudions ensuite un théorème prouvé par Nordgren, Rosenthal et Wintrobe qui traite de l'universalité des opérateurs de composition dont le symbole est un automorphisme hyperbolique de  $\mathbb{D}$ .

**Théorème 13 (Nordgren-Rosenthal-Wintrobe)** *Soit  $\varphi$  un automorphisme hyperbolique de  $\mathbb{D}$ . Alors, pour tout  $\lambda \in \sigma_p(C_\varphi)$ , l'opérateur  $C_\varphi - \lambda \text{Id}$  est universel sur  $\mathcal{D}_1 = H^2(\mathbb{D})$ .*

Dans un article récent, Cowen et Gallardo donnent une nouvelle preuve de ce résultat. Cette nouvelle preuve repose sur la théorie des semi-groupes : plus précisément, après avoir remarqué que chaque opérateur de composition  $C_\varphi$  par un automorphisme hyperbolique  $\varphi$  peut être plongé dans un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de composition  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$ , ils montrent que le semi-groupe  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  est similaire à un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de Toeplitz  $(M_{\psi_t}^*)_{t \geq 0}$ , qui est plus simple à étudier.

Les idées présentées dans cette preuve par Cowen et Gallardo peuvent s'étendre aux espaces de Dirichlet pondérés  $\mathcal{D}_\alpha$  avec  $\alpha \geq 1$ , à l'exception d'un point : l'isomorphisme qui réalise la similarité entre  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  et  $(M_{\psi_t}^*)_{t \geq 0}$  est *a priori* non continu pour  $\alpha > 1$ . Nous obtenons alors le résultat suivant.

**Proposition 14** *Soient  $\alpha \geq 1$  et  $\varphi$  un automorphisme hyperbolique de  $\mathbb{D}$ . Alors, pour tout  $\lambda \in \sigma_p(C_\varphi)$ , il existe un opérateur universel  $U \in \mathcal{D}_\alpha$  et deux opérateurs (non bornés a priori)  $S$  et  $T$  vérifiant  $ST = TS = \text{Id}_{\mathcal{D}_\alpha}$  et tels que  $C_\varphi - \lambda \text{Id} = SUT$ .*

## Universalité des semi-groupes d'opérateurs

Nous décrivons maintenant nos travaux portant sur l'universalité des semi-groupes d'opérateurs. Dans la suite,  $\mathcal{H}$  désigne un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  qui est séparable et de dimension infinie. Sauf mention explicite du contraire, les opérateurs que nous étudions sont tous définis sur  $\mathcal{H}$  (ou une partie dense de  $\mathcal{H}$  s'ils ne sont pas bornés).

Dans un premier temps, nous définissons la notion de « modélisation » pour des semi-groupes d'opérateurs.

**Définition 15** Soient  $(U_t)_{t \geq 0}$  et  $(T_t)_{t \geq 0}$  deux semi-groupes fortement continus d'opérateurs sur  $\mathcal{H}$ . On dit que  $(U_t)_{t \geq 0}$  modélise  $(T_t)_{t \geq 0}$  s'il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  invariant par  $(U_t)_{t \geq 0}$ , deux constantes  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$  ainsi qu'un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$\forall t \geq 0, T_t = e^{\lambda t} S U_{\mu t}|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

Les résultats de modélisation des semi-groupes que nous présentons ici dépendent fortement de la structure des semi-groupes en question. Le principe général reste en revanche similaire : dans chaque cas, nous déterminons un opérateur qui caractérise entièrement le semi-groupe (en l'occurrence, le générateur ou le co-générateur), et nous appliquons à cet opérateur des résultats de modélisation.

## Universalité des semi-groupes uniformément continus

Pour traiter le cas des semi-groupes uniformément continus d'opérateurs, nous modélisons leurs générateurs.

**Définition 16** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  une semi-groupe fortement continue d'opérateurs sur  $\mathcal{H}$ . Alors, le domaine

$$D(A) = \left\{ x \in \mathcal{H} \mid \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T_t x - x}{h} \text{ exists} \right\}$$

est dense dans  $\mathcal{H}$  et l'opérateur

$$A : \begin{cases} D(A) \subset \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ x & \longmapsto & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T_t x - x}{h} \end{cases}$$

est un opérateur fermé. On appelle  $A$  le générateur du semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$ .

On dit que le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  est uniformément continu lorsque l'opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est borné.

Pour modéliser les semi-groupes uniformément continus, nous utilisons une adaptation du théorème de Caradus. Nous pouvons alors montrer le résultat suivant.

**Théorème 17** Soient  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs sur  $\mathcal{H}$  de générateur  $A$ . Les assertions suivantes s'équivalent :

- (i) l'opérateur  $A$  est universel ;

(ii) le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  modélise (avec  $\lambda = 0$ ) tous les semi-groupes uniformément continus d'opérateurs.

D'après le théorème de Caradus, l'opérateur de décalage vers la gauche sur  $L^2(\mathbb{R}^+)$  est un opérateur universel. Le semi-groupe dont il est le générateur est donc « universel » pour les semi-groupes uniformément continus. Ce semi-groupe peut être calculé explicitement grâce au théorème de Paley-Wiener.

**Théorème 18 (Paley-Wiener)** Soit  $\Pi^+ \subset \mathbb{C}$  le demi-plan supérieur. Posons

$$H^2(\Pi^+) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ F \in \text{Hol}(\Pi^+) \mid \|F\|_{H^2(\Pi^+)}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Alors,  $H^2(\Pi^+)$  est un espace de Hilbert de fonctions holomorphes. De plus, la transformée de Fourier  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^+) \rightarrow H^2(\Pi^+)$  est un isomorphisme unitaire d'espaces de Hilbert.

**Corollaire 19** Le semi-groupe  $(V_t)_{t \geq 0}$  défini pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  par

$$V_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & (Z \mapsto \exp(te^{iZ}) \times F(Z)) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+))$$

est universel pour les semi-groupes uniformément continus.

## Universalité des semi-groupes quasi-contractifs

Le cas des semi-groupes quasi-contractifs est similaire à celui des semi-groupes uniformément continus, sauf que l'on modélise le co-générateur plutôt que le générateur du semi-groupe.

**Définition 20** Soient  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur  $\mathcal{H}$  et  $A$  son générateur. Supposons que  $1 \notin \sigma(A)$ . Le co-générateur de  $(T_t)_{t \geq 0}$  est l'opérateur borné

$$V = (A + \text{Id})(A - \text{Id})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Remarquons que, bien que le générateur ne soit pas nécessairement un opérateur borné, le co-générateur — quand il existe — est toujours continu.

Quand la croissance du semi-groupe est « suffisamment petite », le co-générateur existe toujours et l'on peut lire sur le co-générateur certaines propriétés du semi-groupe.

**Proposition 21** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu de contractions. Alors, il admet un co-générateur  $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $V$  est une contraction. En outre, les assertions suivantes s'équivalent :

- (i) pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et pour tout  $t > 0$ , on a  $T_t^n x \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  ;
- (ii) pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , on a  $V^n x \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Lorsque les conditions équivalentes ci-dessus échoient, on peut modéliser le co-générateur  $V$  grâce à un théorème de Nagy-Foias.

**Théorème 22 (Nagy-Foias)** Soit  $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Supposons que pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , on a  $V^n x \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Alors, l'opérateur de décalage vers la droite sur  $L^2(\mathbb{R}^+)$  modélise  $V$  : il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  invariant par  $V$ , et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$V = SD|_{\mathcal{M}}D^{-1},$$

où  $D : f \mapsto f(\bullet - 1) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))$  est l'opérateur de décalage vers la droite.

Nous pouvons utiliser ce résultat pour modéliser les semi-groupes quasi-contractifs. Une fois encore, grâce au théorème de Paley-Wiener, nous pouvons calculer explicitement un exemple de semi-groupe universel pour les semi-groupes quasi-contractifs.

**Théorème 23** Soit  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe fortement continu d'opérateurs défini pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  par

$$\Sigma_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & \left( Z \mapsto \exp\left(t \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1}\right) \times F(Z) \right) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+)).$$

Alors, le semi-groupe  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$  a pour co-générateur l'opérateur  $D$  de décalage vers la droite.

En outre, le semi-groupe  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$  modélise (avec  $\mu = 1$ ) tous les semi-groupes fortement continus et quasi-contractifs : pour tout semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  quasi-contractif, il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  invariant par  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$ , une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$\forall t \geq 0, T_t = e^{\lambda t} S \Sigma_t|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

## Modélisation des semi-groupes concaves

Le cas des semi-groupes d'opérateurs concaves ressemble au cas des semi-groupes quasi-contractifs, sauf qu'il nous faut changer le théorème qui permet de modéliser le cas du co-générateur. Par souci de clarté, nous nous restreignons dans cette introduction à étudier le cas des semi-groupes d'opérateurs concaves et purs (le cas général sera notamment détaillé au chapitre 4). Commençons par définir les opérateurs concaves et pur.

**Définition 24** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On dit que  $T$  est concave si, pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , la suite  $(\|T^n x\|^2)_{n \in \mathbb{N}}$  est concave.

Quand en plus on a  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n \mathcal{H} = \{0\}$ , on dit que  $T$  est pur.

La concavité et la pureté d'un semi-groupe d'opérateurs peuvent se lire sur le co-générateur.

**Proposition 25** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs tel que, pour tout  $t > 0$ , l'opérateur  $T_t$  est concave et pur. Alors, le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  admet un co-générateur  $V$  qui est concave et pur.

Nous pouvons alors appliquer un théorème de Shimorin selon lequel tout opérateur concave et pur peut être modélisé par un opérateur de multiplication sur un espace de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles.

**Théorème 26 (Shimorin)** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur concave et pur. Alors, il existe un espace de Hilbert  $\mathcal{E}$ , une constante  $r > 0$ , un espace de Hilbert de fonctions holomorphes  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$  et un isomorphisme unitaire  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  tels que l'opérateur*

$$\Delta : \begin{cases} \mathfrak{H} & \rightarrow \mathfrak{H} \\ f & \mapsto (z \mapsto z f(z)) \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$$

*est unitairement équivalent (via  $S$ ) à  $T$ .*

Là encore, nous pouvons calculer explicitement le semi-groupe d'opérateurs dont le co-générateur est  $\Delta$ .

**Proposition 27** *Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs tel que, pour tout  $t > 0$ , l'opérateur  $T_t$  est concave et pur. Alors, il existe un espace de Hilbert  $\mathcal{E}$ , une constante  $r > 0$ , un espace de Hilbert de fonctions holomorphes  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$  et un isomorphisme unitaire  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  tels que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , l'opérateur  $T_t$  est unitairement équivalent à l'opérateur*

$$\Sigma_t : \begin{cases} \mathfrak{H} & \rightarrow \mathfrak{H} \\ f & \mapsto \left( z \mapsto \exp\left(t \frac{1+z}{1-z}\right) f(z) \right) \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}).$$

## Plan

Pour achever ces prolégomènes, nous détaillons l'organisation générale de cette thèse. La première partie de ces travaux est consacrée à l'étude des opérateurs. La seconde partie applique ces résultats à l'étude des semi-groupes d'opérateurs.

Le premier chapitre (chapitre 1) met en place le cadre général de nos travaux. La première partie de ce chapitre traite de la théorie des fonctions holomorphes sur le disque unité. Nous y rappelons la preuve des théorèmes de Denjoy-Wolff et de Koenigs. Dans une seconde partie, nous décrivons plusieurs types d'espaces de fonctions holomorphes, d'un cadre général (comme celui de l'espace de Fréchet  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ ) à des cas plus spécifiques (comme les espaces de Dirichlet ou de Hardy pondérés). Nous mentionnons également l'espace de Hardy du demi-plan supérieur et les espaces de Hilbert de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles qui ont la propriété d'être à noyaux reproduisants.

Dans le chapitre 2, nous étudions les opérateurs de composition dans deux cadres différents. Le premier est le plus général : nous étudions les opérateurs de composition sur l'espace de Fréchet  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Nous énonçons des caractérisations pour la continuité, l'inversibilité ou la compacité des opérateurs de composition, ainsi qu'une caractérisation algébrique d'iceux. Nous étudions aussi en détail les propriétés spectrales des opérateurs de composition : lorsque le symbole est un symbole de Koenigs, nous définissons sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  des « projections spectrales », et utilisons ces projections pour déterminer le spectre d'un opérateur de composition. Nous appliquons ensuite ces résultats aux espaces de Banach de fonctions holomorphes qui sont continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Le deuxième cadre d'étude est celui des espaces de Dirichlet pondérés. Dans ce cas, nous établissons une borne supérieure pour la norme d'un opérateur de composition dont le symbole est univalent, et déterminons aussi une caractérisation algébrique des opérateurs de composition.

Dans le chapitre 3, nous détaillons plusieurs techniques de modélisation d'un opérateur. La première technique relève de la théorie de l'universalité : nous présentons un résultat classique de Caradus et étudions la notion d'opérateurs positivement universels (nous montrons qu'elle est équivalente à la notion d'universalité). Nous étudions ensuite la modélisation des opérateurs presque isométriques. Le principal outil que nous développons à cet effet est la décomposition de Wold des presque isométries. Nous détaillons en particulier la modélisation des opérateurs concaves. La dernière technique présentée dans ce chapitre est issue de travaux par Nagy et Foias. Il s'agit d'un résultat de modélisation des contractions de classe  $C_{0\bullet}$  par l'opérateur de décalage vers la gauche sur  $L^2(\mathbb{R}^+)$ .

La deuxième partie de cette thèse relève de l'étude des semi-groupes d'opérateurs. Dans le chapitre 4, nous discutons la question de l'universalité des semi-groupes. Dans une première partie, nous rappelons quelques notions de théorie élémentaire des semi-groupes (nous définissons notamment le générateur et le co-générateur). Nous illustrons ces notions par des exemples de semi-groupes sur des espaces de fonctions holomorphes. Dans la seconde partie du chapitre, nous montrons comment on peut appliquer les résultats du chapitre 3 pour obtenir des résultats de modélisation des semi-groupes. À cette fin, nous étudions plusieurs familles de semi-groupes d'opérateurs (en l'occurrence, les semi-groupes uniformément continus, les semi-groupes quasi-contractifs et les semi-groupes d'opérateurs concaves). Nous montrons ensuite que l'on peut étendre ces résultats à la modélisation des groupes d'opérateurs.

Le dernier chapitre de cette thèse (le chapitre 5) traite des semi-groupes d'opérateurs de composition sur des espaces de Dirichlet pondérés. Dans une première partie, nous nous consacrons à une étude générale : nous introduisons la notion de semi-flot associé à un semi-groupe d'opérateurs de composition et donnons des propriétés des semi-groupes d'opérateurs de composition (par exemple, nous montrons qu'un semi-flot de fonctions holomorphes permet toujours de définir un semi-groupe quasi-contractif d'opérateurs de composition sur les espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ ). Nous étudions en détail le cas des semi-groupes d'opérateurs de composition dont les symboles sont des automorphismes hyperboliques de  $\mathbb{D}$ . Dans une deuxième partie, nous tentons de généraliser la preuve par Cowen et Gallardo du théorème de Nordgren-Rosenthal-Wintrobe au cas des espaces de Dirichlet pondérés. En particulier, nous étudions en détail un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de Toeplitz sur  $\mathcal{D}_\alpha$ , et essayons d'utiliser cette étude pour voir quelles sont les difficultés qui apparaissent lorsque l'on veut généraliser le théorème de Nordgren-Rosenthal-Wintrobe.

Première partie

Opérateurs sur des espaces de fonctions  
holomorphes



## Chapitre 1er

# Fonctions holomorphes sur le disque unité

Ce chapitre a pour but de présenter quelques propriétés fondamentales des fonctions holomorphes ainsi que des espaces de fonctions holomorphes. La première partie se consacre à l'étude des fonctions holomorphes. Nous y détaillons les preuves du théorème de Denjoy-Wolff ainsi que du théorème de Koenigs, qui joueront un rôle important dans l'étude des opérateurs de composition. Dans une deuxième partie, nous présentons l'espace de Fréchet  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , ainsi que divers exemples d'espaces de Banach de fonctions holomorphes. Nous élargissons ensuite cette présentation en mentionnant l'espace de Hardy du demi-plan supérieur  $H^2(\Pi^+)$ , ainsi que l'étude des multiplicateurs sur des espaces de Dirichlet pondérés.

## A) Théorèmes de Denjoy-Wolff et de Koenigs

DANS cette section, nous présentons quelques propriétés des fonctions holomorphes sur le disque unité qui seront particulièrement utiles pour l'étude des opérateurs de composition. Nous commençons par décrire quelques propriétés générales des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$ . Nous présentons ensuite deux résultats d'analyse complexe relatifs à la composition des fonctions holomorphes de  $\mathbb{D}$  dans lui-même : le théorème de Denjoy-Wolff et le théorème de Koenigs.

### A.1 — Homographies et automorphismes du disque unité

L'objectif de cette partie n'est pas d'exposer une théorie générale des fonctions holomorphes sur le disque unité  $\mathbb{D}$ , bon nombre d'ouvrages étant déjà dédiés à cette entreprise (citons par exemple les livres de Rudin [57] ou Amar-Matheron [5]). Nous nous restreignons ici à présenter les biholomorphismes de  $\mathbb{D}$  vers le demi-plan de Poincaré, ainsi que les automorphismes de  $\mathbb{D}$ , en en profitant pour préciser des notions et notations qui interviendront dans le reste de ce chapitre.

En tant que surfaces de Riemann, le demi-plan de Poincaré  $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$  et le disque unité  $\mathbb{D}$  sont isomorphes. Cela signifie qu'il existe un biholomorphisme  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Pi^+$ . Un tel biholomorphisme induit une application de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Nous aurons besoin dans notre preuve du théorème de Denjoy-Wolff de trouver un tel biholomorphisme et de fixer son action sur des points de  $\mathbb{T}$ . Nous utiliserons alors le résultat suivant :

**Proposition 1.1** *Soient  $b, c \in \mathbb{T}$  deux points distincts. Alors, il existe une homographie  $h : \mathbb{D} \rightarrow \Pi^+$  telle que  $h(b) = 0$  et  $h(c) = \infty$ .*

Une telle homographie est naturellement un biholomorphisme.

Intéressons-nous maintenant aux automorphismes de  $\mathbb{D}$ . Nous pouvons vérifier le résultat suivant, que nous utiliserons ultérieurement dans la preuve du lemme de Schwarz-Pick (1.12) :

**Proposition 1.2** *Soient  $\lambda \in \mathbb{T}$  et  $\alpha \in \mathbb{D}$ . Alors,  $f_{\lambda, \alpha}(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$  définit un automorphisme de  $\mathbb{D}$  dans lui-même, d'inverse  $f_{\bar{\lambda}, -\alpha\lambda}$ .*

*Réciproquement, tout automorphisme de  $\mathbb{D}$  est de cette forme.*

Remarquons que cela veut dire que tout automorphisme de  $\mathbb{D}$  induit un automorphisme sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$ , qui stabilise le cercle unité  $\mathbb{T}$ . Par la suite, nous identifierons chaque automorphisme du disque avec l'automorphisme de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$  qu'il induit.

Ainsi, nous pouvons classifier les automorphismes du disque. En effet, si  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$  (autre que l'identité), un calcul montre que  $f$  a deux points fixes dans  $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$  (comptés avec multiplicité) et que le produit de leurs modules vaut 1. On distingue alors trois types d'automorphismes du disque unité.

**Définition 1.3** *Soit  $f$  un automorphisme de  $\mathbb{D}$  autre que l'identité. On dit que  $f$  est :*

- *elliptique si l'un des points fixes de  $f$  est dans  $\mathbb{D}$ , et l'autre est à l'extérieur de  $\bar{\mathbb{D}}$ ;*
- *hyperbolique si les deux points fixes de  $f$  sont de module 1 et distincts;*
- *parabolique si  $f$  n'a qu'un point fixe de module 1.*

*Par convention, l'identité de  $\mathbb{D}$  sera un automorphisme elliptique.*

Tout automorphisme elliptique  $\varphi$  est conjugué à une rotation centrée en 0 par l'automorphisme involutif de la forme  $f_{-1, \alpha}$ , où  $\alpha \in \mathbb{D}$  est le point fixe de  $\varphi$  dans  $\mathbb{D}$ .

## A.2 — Théorème de Denjoy-Wolff

### A.2.a) — Distance pseudo-hyperbolique

Nous définissons ici une distance sur  $\mathbb{D}$  qui sera utile pour notre démonstration : il s'agit de la distance pseudo-hyperbolique. Nous nous attachons également à la description des cercles pour cette distance et mettons en regard les cercles pseudo-hyperboliques avec les horocycles. Enfin, nous décrivons le comportement des cercles et horocycles sous l'action des automorphismes de  $\mathbb{D}$ .

**Définition et proposition 1.4** L'application  $\rho$  définie par :

$$\rho(u, v) = \left| \frac{u - v}{1 - \bar{u}v} \right|$$

définit sur  $\mathbb{D}$  une distance, appelée distance pseudo-hyperbolique

Comme  $v \mapsto \frac{u - v}{1 - \bar{u}v}$  est une homographie, nous pouvons remarquer que les cercles pour  $\rho$  sont des cercles euclidiens. Dans le cas particuliers des cercles passant par 0, nous avons la description explicite suivante :

**Proposition 1.5** Soit  $A \in \mathbb{D}$  d'affixe  $a e^{i\theta}$ . Soit  $\Delta$  le disque pseudo-hyperbolique de centre  $A$  et de rayon  $a$ . Alors,  $\Delta$  est le disque euclidien de centre  $\Omega = \frac{a}{1 + a^2} e^{i\theta}$  et de rayon  $|\Omega| = \omega = \frac{a}{1 + a^2}$ .

*Démonstration* : Par invariance par rotation, il suffit de traiter le cas où  $A$  est d'affixe réelle positive. Nous savons déjà que  $\Delta$  est aussi un cercle euclidien. Remarquons que, comme  $\rho(\bar{z}, a) = \rho(z, a)$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$  puisque  $a$  est réel, le centre euclidien de  $\Delta$  est bien réel. En notant  $B$  le point d'intersection entre  $\Delta$  et l'axe réel qui est compris entre  $a$  et 1, on a alors  $\omega = \frac{b}{2}$ . On peut ensuite calculer  $b$  explicitement en résolvant l'équation  $\rho(a, b) = a$ , ce qui fournit le résultat souhaité.  $\square$

**Définition 1.6** Soient  $\xi \in \mathbb{T}$  et  $k \in \mathbb{R}^{+*}$ . On appelle horocycle de base  $\xi$  et de paramètre  $k$  le lieu géométrique :

$$E(k, \xi) = \{z \in \mathbb{C}, |\xi - z|^2 \leq k(1 - |z|^2)\}$$

**Proposition 1.7** Soient  $\xi \in \mathbb{T}$  et  $k \in \mathbb{R}^{+*}$ . L'horocycle  $E(k, \xi)$  est le disque euclidien de centre  $\frac{\xi}{k+1}$  et de rayon  $\frac{k}{k+1}$ .

Remarquons en particulier que  $E(k, \xi)$  est inclus dans  $\overline{\mathbb{D}}$  et est tangent à  $\overline{\mathbb{D}}$  en  $\xi$ .

*Démonstration* : Quitte à effectuer une rotation ( $z \mapsto \bar{\xi}z$ ), nous pouvons supposer que  $\xi = 1$ . Notons alors  $D$  le disque euclidien de centre  $\frac{1}{k+1}$  et de rayon  $\frac{k}{k+1}$ . Alors,

$$\begin{aligned} z \in D &\Leftrightarrow \left| z - \frac{1}{k+1} \right|^2 \leq \frac{k^2}{(k+1)^2} \\ &\Leftrightarrow (k+1)^2 z \bar{z} - (k+1)(z + \bar{z}) + 1 - k^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (k+1)z \bar{z} - (z + \bar{z}) + 1 - k \leq 0. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} z \in E(k, 1) &\Leftrightarrow 1 - (z + \bar{z}) + z \bar{z} \leq k - k z \bar{z} \\ &\Leftrightarrow (1+k)z \bar{z} - (z + \bar{z}) + 1 - k \leq 0. \end{aligned}$$

Ceci prouve la proposition.  $\square$

**Corollaire 1.8** *Si  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , alors  $\varphi$  envoie un horocycle de base  $\xi$  sur un horocycle de base  $\varphi(\xi)$ .*

**Lemme 1.9** *Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$  deux points distincts. Alors, il existe  $k_\alpha$  et  $k_\beta \in \mathbb{R}^{+*}$  tels que les horocycles  $E(k_\alpha, \alpha)$  et  $E(k_\beta, \beta)$  sont tangents en un point  $\omega \in \mathbb{D}$ .*

*Démonstration* : Quitte à composer par un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , on peut se ramener au cas où  $\alpha = 1$  et  $\beta = -1$ . Il suffit alors de remarquer que les horocycles  $E(1, -1)$  et  $E(1, 1)$  sont tangents en 0.  $\square$

Nous montrons maintenant la complétude du disque unité ouvert pour la distance pseudo-hyperbolique.

**Proposition 1.10** *Le disque unité ouvert  $\mathbb{D}$  muni de la distance  $\rho$  est un espace métrique complet.*

*Démonstration* : Soit  $(u_n)_n$  une suite de Cauchy pour la distance  $\rho$ . Montrons que  $u$  converge pour la distance  $\rho$ . D'abord, remarquons que pour tous  $u, v \in \mathbb{D}$ ,  $\rho(u, v) \geq \frac{1}{2}|u - v|$ . Ainsi, la suite  $(u_n)_n$  est de Cauchy pour la norme euclidienne et donc converge vers un certain  $v \in \overline{\mathbb{D}}$ .

Montrons que  $v \in \mathbb{D}$ . Nous allons suivre un raisonnement par contraposée. Pour cela, supposons que  $v = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ . Montrons alors que la suite  $u$  n'est pas de Cauchy pour  $\rho$ . Soit  $n, m \in \mathbb{N}$ . En notant  $\varepsilon_n = v - u_n$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \rho(u_n, u_m) &= \left| \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{1 - (\overline{\varepsilon_n} - e^{-i\theta})(\varepsilon_m - e^{i\theta})} \right| \\ &= \left| \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{\varepsilon_m e^{-i\theta} + \overline{\varepsilon_n} e^{i\theta} - \varepsilon_m \overline{\varepsilon_n}} \right| \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $m$  fixé, on voit que  $\rho(u_n, u_m) \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . On prend alors  $\eta = \frac{1}{2}$ . On fixe  $N \in \mathbb{N}$ . D'après ce qui précède, il existe  $n \geq N$  tel que  $\rho(u_N, u_n) \geq \eta$ . Ceci valant pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , nous avons montré que la suite  $u$  n'est pas de Cauchy pour  $\rho$ .

En vertu de ce qui précède, nous pouvons maintenant supposer que  $v \in \mathbb{D}$ . Comme  $u_n \rightarrow v$  pour la norme euclidienne, il existe  $R \in ]0; 1[$  tel que  $|u_n| \leq R$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, il existe  $M \in \mathbb{R}^{+*}$  telle que  $\left| \frac{1}{1 - \overline{u_n}v} \right| \leq M$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\rho(u_n, v) \leq M|u_n - v|$ . Comme  $u$  converge pour la distance euclidienne, l'inégalité précédente montre que  $u$  converge vers  $v$  pour la distance  $\rho$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

## A.2.b) — Lemmes de Schwarz-Pick et de Julia

Nous nous attachons ici à décrire le comportement des fonctions holomorphes de  $\mathbb{D}$  dans lui-même. Sauf mention explicite du contraire, on notera  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une telle application par la suite. La première étape de cette description consiste en la description du comportement des cercles hyperboliques et des horocycles. Nous commençons par traiter le cas des cercles hyperboliques.

**Lemme 1.11 (Schwarz)** Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe telle que  $\varphi(0) = 0$ . Alors, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $|\varphi(z)| \leq |z|$ .

De plus, les assertions suivantes s'équivalent :

- (i) Il existe  $z_0 \in \mathbb{D}$  non nul tel que  $|\varphi(z_0)| = |z_0|$  ;
- (ii) Pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $|\varphi(z)| = |z|$  ;
- (iii)  $\varphi$  est une rotation de centre 0 ;
- (iv)  $|\varphi'(0)| = 1$ .

Une conséquence de ce théorème qui nous sera utile par la suite est la suivante : si  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est holomorphe, vérifie  $\varphi(0) = 0$  mais n'est pas une rotation, alors  $|\varphi'(0)| < 1$ .

L'argument clef qui intervient dans la preuve de ce lemme est le principe du maximum.

Le lemme qui suit est une sorte d'analogue du lemme de Schwarz, où on a remplacé la distance euclidienne par la distance hyperbolique. Vu le rôle primordial qu'il jouera dans la démonstration du théorème de Denjoy-Wolff, il sera démontré plus complètement.

**Lemme 1.12 (Schwarz-Pick)** Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe. Alors, pour tous  $w, z \in \mathbb{D}$ ,  $\rho(\varphi(w), \varphi(z)) \leq \rho(w, z)$ .

En outre, les assertions suivantes s'équivalent :

- (i) il existe  $w \neq z$  tel que  $\rho(\varphi(w), \varphi(z)) = \rho(w, z)$  ;
- (ii) pour tous  $w, z \in \mathbb{D}$ ,  $\rho(\varphi(w), \varphi(z)) = \rho(w, z)$  ;
- (iii)  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .

En particulier, les isométries pour la distance pseudo-hyperboliques sont exactement les automorphismes de  $\mathbb{D}$ .

Remarquons que pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $\rho(z, 0) = |z|$ . Nous pouvons ainsi voir le lemme de Schwarz-Pick comme une généralisation du lemme de Schwarz (1.11) à toute fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans lui-même (même si cette fonction n'a pas de point fixe dans  $\mathbb{D}$ ).

Ce lemme nous dit que toute fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$  est soit un automorphisme, soit une contraction pour la distance hyperbolique. Il dit aussi que l'image d'un disque hyperbolique est incluse dans un disque hyperbolique de rayon plus petit.

Dans le cas particulier où  $z_0 \in \mathbb{D}$  est un point fixe de  $\varphi$  et où  $\varphi$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , alors  $\varphi$  est une contraction autour de  $z_0$  : ce résultat constitue une partie du théorème de Denjoy-Wolff.

*Démonstration* : Soit  $w \in \mathbb{D}$ . Nous allons montrer que pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $\rho(\varphi(w), \varphi(z)) \leq \rho(w, z)$ . Soit  $u = \varphi(w)$ . Considérons alors les applications  $\psi_u$  et  $\psi_w$  définies sur  $\mathbb{D}$  par

$$\psi_u(z) = \frac{u - z}{1 - \bar{u}z}$$

et

$$\psi_w(z) = \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}.$$

On remarque que  $\psi_u$  (respectivement  $\psi_w$ ) est un automorphisme du disque unité qui échange  $u$  (resp.  $w$ ) avec 0. Remarquons en outre que  $\psi_w^{-1} = \psi_w$ . On considère alors l'application  $\Phi = \psi_u \circ \varphi \circ \psi_w$ . Cette application est bien définie, puisque  $\mathbb{D}$  est stable sous l'action des automorphismes

$\psi_u$  et  $\psi_w$ , mais aussi sous l'action de  $\varphi$ . Ainsi,  $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est une fonction holomorphe. De plus, on a  $\Phi(0) = 0$ . On peut donc appliquer le lemme de Schwarz à  $\Phi$  : pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $|\Phi(z)| \leq |z|$ . Or, comme  $\psi_w$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , on a aussi que pour tout  $Z \in \mathbb{D}$ ,  $|\psi_u \circ \varphi \circ \psi_w \circ \psi_w(Z)| \leq |\psi_w(Z)|$ . Or,  $\psi_w$  est son propre inverse, donc l'inégalité précédente devient  $|\psi_u \circ \varphi(Z)| \leq |\psi_w(Z)|$ . Par définition de la distance hyperbolique, nous avons finalement que pour tout  $Z \in \mathbb{D}$ ,  $\rho(u, \varphi(Z)) \leq \rho(w, Z)$ . Ceci prouve l'inégalité souhaitée.

Traisons le cas d'égalité. En supposant qu'il y a égalité pour  $w \neq z$ , alors la fonction  $\Phi$  étudiée ci-dessus vérifie le cas d'égalité du lemme de Schwarz. Alors,  $\Phi$  est une rotation de centre 0, et donc  $\varphi = \psi_u^{-1} \circ \Phi \circ \psi_w^{-1}$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Réciproquement, si  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , alors  $\varphi$  est une isométrie pour  $\rho$  et donc l'égalité échoit pour tous  $w, z \in \mathbb{D}$ .  $\square$

Nous allons maintenant démontrer un analogue du lemme de Schwarz-Pick, mais qui concerne les horocycles. Toute la difficulté de ce lemme réside dans le fait que  $\varphi$  n'est pas nécessairement définie sur le bord de  $\mathbb{D}$ . Soit  $\xi \in \mathbb{T}$ . Le comportement des horocycles ayant  $\xi$  pour point base va dépendre de la dérivée angulaire de  $\varphi$  en  $\xi$  :

**Définition 1.13** Soient  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe et  $\xi \in \mathbb{T}$ . On appelle dérivée angulaire de  $\varphi$  en  $\xi$  la quantité

$$d(\xi) = \liminf_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \mathbb{D}}} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|}.$$

L'objet des résultats suivants est de mieux comprendre cette quantité. En particulier, l'appellation de « dérivée angulaire » sera justifiée par le théorème de Julia-Wolff-Carathéodory (1.17).

**Lemme 1.14 (Julia)** Soit  $\xi \in \mathbb{T}$  tel que  $d(\xi)$  est fini. Soit  $(a_n)_n$  une suite de points de  $\mathbb{D}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - |\varphi(a_n)|}{1 - |a_n|} = d(\xi)$  et telle que la suite  $(\varphi(a_n))_n$  converge vers  $\eta \in \overline{\mathbb{D}}$ . Alors,  $\eta \in \mathbb{T}$  et pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{|\eta - \varphi(z)|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \leq d(\xi) \frac{|\xi - z|^2}{1 - |z|^2}.$$

De plus, l'égalité ci-dessus échoit si et seulement si  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .

Avec les notations du lemme, nous pouvons poser (abusivement)  $\varphi(\xi) = \eta$ . Le lemme de Julia dit alors que l'image de l'horocycle  $E(k, \xi)$  est incluse dans l'horocycle  $E(d(\xi)k, \varphi(\xi))$ . C'est en ce sens que l'on peut dire que le lemme de Julia est l'analogue du lemme de Schwarz-Pick pour les horocycles.

*Démonstration* : Commençons par quelques remarques éclairantes. D'abord, nous n'avons pas vraiment besoin de supposer que la suite  $(\varphi(a_n))_n$  converge, puisque nous pourrions en extraire une sous-suite convergente par compacité. Le fait que  $\eta$  soit de module 1 vient du fait que  $d(\xi)$  est fini.

Remarquons en outre que pour tous  $a, b \in \mathbb{D}$ , on a l'égalité suivante :

$$1 - \left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)}{|1 - \bar{a}b|^2}.$$

Prenons maintenant  $z \in \mathbb{D}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après le lemme de Schwarz-Pick et l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(z) - \varphi(a_n)}{1 - \overline{\varphi(a_n)}\varphi(z)} \right| &\leq \left| \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n}z} \right| \\ 1 - \left| \frac{\varphi(z) - \varphi(a_n)}{1 - \overline{\varphi(a_n)}\varphi(z)} \right|^2 &\geq 1 - \left| \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n}z} \right|^2 \\ \frac{(1 - |\varphi(z)|^2)(1 - |\varphi(a_n)|^2)}{|1 - \overline{\varphi(a_n)}\varphi(z)|^2} &\geq \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a_n|^2)}{|1 - \overline{a_n}z|^2} \\ \frac{(1 - |\varphi(z)|^2)}{|1 - \overline{\varphi(a_n)}\varphi(z)|^2} \left( \frac{1 - |\varphi(a_n)|}{1 - |a_n|} \frac{1 + |\varphi(a_n)|}{1 + |a_n|} \right) &\geq \frac{(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{a_n}z|^2} \end{aligned}$$

En faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$  et en utilisant le fait que  $|\eta| = |\xi| = 1$ , nous obtenons l'inégalité souhaitée.

Le cas d'égalité correspond au cas d'égalité dans le lemme de Schwarz-Pick, et le cas d'égalité du lemme de Schwarz-Pick (1.12) correspond au cas où  $\varphi$  est un automorphisme.  $\square$

Penchons-nous sur la quantité  $d(\xi) = \liminf_{z \rightarrow \xi, z \in \mathbb{D}} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|}$ . Nous l'avons appelée « dérivée angulaire ». Nous allons voir en quoi cette appellation est justifiée. Commençons d'abord par introduire la notion de convergence angulaire. Pour cela, nous commençons par poser une notation : pour  $\alpha \in \mathbb{T}$  et  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , nous noterons  $D_{\alpha, \theta}$  le lieu géométrique formé des points de  $\mathbb{D}$  qui sont dans le secteur angulaire centré en  $\alpha$ , de bissectrice le rayon joignant  $\alpha$  à 0 et d'angle total  $2\theta$ .

**Définition 1.15** Soient  $\alpha \in \mathbb{T}$  et  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe. On dit que  $\varphi$  converge angulairement vers  $L$  lorsque, pour tout  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , la limite

$$\lim_{\substack{z \in D_{\alpha, \theta} \\ z \rightarrow \alpha}} \varphi(z)$$

existe et que sa valeur ne dépend pas de  $\theta$ . On note alors

$$\varphi \xrightarrow{\geq} L \text{ ou encore } \varphi(z) \xrightarrow{z \xrightarrow{\geq} \alpha} L.$$

Dans l'étude qui suit, pour simplifier et sans perte de généralité, nous étudierons les limites angulaires en  $\alpha = 1$ .

Nous allons maintenant démontrer un résultat utile concernant les limites angulaires : si l'on trouve une limite le long d'un chemin non tangentiel, alors la limite angulaire existe et vaut la limite le long du chemin en question. Pour les deux théorèmes à venir, nous suivrons les démonstrations présentées par Rudin dans [58].

**Théorème 1.16 (Lindelöf)** Soit  $f$  holomorphe et bornée sur  $\mathbb{D}$ . Soit  $\gamma : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{D}$  continue telle que  $\gamma(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1$ . On suppose que  $f(\gamma(t)) \xrightarrow{t \rightarrow 1} L$ . Alors,  $f(z) \xrightarrow{\geq} L$  lorsque  $z \xrightarrow{\geq} 1$ .

*Démonstration* : Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{D}$ , et que  $L = 0$ . Soit  $\Sigma$  la bande verticale  $\Sigma = \{-1 < \Re(z) < 1\}$ . Soit  $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \Sigma$  une représentation conforme telle que  $\Phi(0) = 0$  et

$$\Im(\Phi(\gamma(t))) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Soit  $\Gamma = \Phi \circ \gamma$  et  $F = f \circ \Phi^{-1}$ . La fonction  $F$  est holomorphe et bornée par 1 sur  $\Sigma$ . De plus,  $F(\Gamma(t)) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$ . Pour montrer que  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$ , il suffit de montrer que pour tout  $\delta \in ]0; 1[$ ,  $F(z) \rightarrow 0$  lorsque  $z \xrightarrow{z \in B_\delta} \infty$  où  $B_\delta$  est la bande  $B_\delta = \{-1 + \delta < \Re(z) < 1 - \delta\}$ . Soit  $\delta \in ]0; 1[$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $y_0 > \Im(\Gamma(0))$  tel que, pour tout  $t$  tel que  $\Im(\Gamma(t)) \leq y_0$ ,  $|F(\Gamma(t))| < \varepsilon$ . Il suffit de démontrer que pour tout  $x \in ]-1 + \delta; 1 - \delta[$  et pour tout  $y \in ]y_0; +\infty[$ ,

$$|F(x + iy)| \leq \varepsilon^{\frac{\delta}{4}}.$$

Soit  $t_0$  tel que  $\Im(\Gamma(t_0)) = y_0$  et, pour tout  $t > t_0$ ,  $\Im(\Gamma(t)) > y_0$ . Soit  $E = \{\Gamma(t) \mid t \geq t_0\}$  et  $\bar{E}$  son symétrique par rapport à l'axe d'équation  $\Im(z) = y_0$ . Soit  $x_0 = \Gamma(t_0)$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $x_0 < x \leq 1 - \delta$ . Soit  $\eta > 0$  et  $G_\eta$  la fonction définie sur  $\Sigma$  par

$$G_\eta(z) = \frac{F(z)\overline{F(\bar{z})}\varepsilon^{\left(\frac{1+z}{2}\right)}}{1 + \eta(1+z)}.$$

La fonction  $G_\eta$  est une fonction holomorphe bornée sur  $\Sigma$ . En outre, pour tout  $z \in E \cup \bar{E}$ ,  $|G_\eta(z)| \leq \varepsilon$  (puisque  $|F| \leq \varepsilon$  sur  $E$  et  $|\bar{F}| \leq \varepsilon$  sur  $\bar{E}$ ). Soit  $A > 0$  tel que, si  $|\Im(z)| \geq A$ , alors  $|G_\eta(z)| \leq \varepsilon$  (un tel  $A$  existe puisque  $G_\eta(z) \rightarrow 0$  lorsque  $\Im(z) \rightarrow \pm\infty$ ). En considérant alors un ouvert  $\Omega$  *ad hoc* contenant  $x$ , limité d'un côté par la courbe  $E \cup \bar{E}$ , de l'autre côté par le bord de la bande  $B_\delta$ , en haut par la ligne  $\{\Im(z) = A\}$  et en bas par la ligne  $\{\Im(z) = -A\}$ . D'après le principe du maximum, pour tout  $z \in \Omega$ ,  $|G_\eta(z)| \leq \varepsilon$ . En faisant tendre  $\eta \rightarrow 0$ , on obtient finalement que  $|F(x)|^2 \leq \varepsilon^{\frac{\delta}{2}}$ , ce qui constitue le résultat souhaité et achève la preuve du théorème.  $\square$

Nous énonçons maintenant un théorème qui justifiera notamment l'appellation de « dérivée angulaire » pour la quantité

$$d(\xi) = \liminf_{z \rightarrow \xi, z \in \mathbb{D}} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|}$$

que nous avons introduite précédemment. Pour simplifier, mais sans perte de généralité, nous traiterons le cas où  $\xi = 1$ . Nous supposons en outre que si  $(a_i)_i$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{D}$  telle que

$$\frac{1 - |\varphi(a_i)|}{1 - |a_i|} \rightarrow d(1) = L,$$

alors  $|\varphi(a_i)| \rightarrow 1$  (dans le cas qui nous intéresse, cette limite est finie, donc  $\varphi(a_i)$  converge (à extraction près) vers un nombre complexe de module 1).

**Théorème 1.17 (Julia, Wolff, Carathéodory)** *Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe telle que  $\varphi(0) = 0$  et qui vérifie les simplifications ci-dessus. On suppose que  $L < +\infty$ . Alors,  $\frac{1 - \varphi(z)}{1 - z} \xrightarrow{z \rightarrow 1} L$  et  $\varphi'(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} L$  lorsque  $z \xrightarrow{z \rightarrow 1} 1$ .*

*Démonstration* : Commençons par montrer que  $\frac{1 - \varphi(z)}{1 - z} \xrightarrow{>} L$ . D'après le lemme de Julia (1.14), pour  $x > 0$ ,  $1 - |\varphi(x)| \leq L(1 - x)$ . D'après le lemme de Schwarz (1.11),  $1 + |\varphi(x)| \leq 1 + x$ . Ainsi,

$$1 - |\varphi(x)|^2 \leq L(1 - x^2).$$

Ainsi,  $\frac{1 - |\varphi(x)|^2}{1 - x^2} \leq L$ . Vu que  $L$  est définie comme limite inférieure, nous avons bien que  $\frac{1 - |\varphi(x)|^2}{1 - x^2} \rightarrow L$ . D'après le lemme de Julia et le calcul ci-dessus,

$$\frac{|1 - \varphi(x)|^2}{(1 - x)^2} \leq L \frac{1 - |\varphi(x)|^2}{1 - x^2} \leq L^2.$$

Donc,  $\frac{|1 - \varphi(x)|}{1 - x} \leq L$ . On a donc :

$$L \geq \frac{|1 - \varphi(x)|}{1 - x} \geq \frac{1 - |\varphi(x)|}{1 - x} \geq \frac{1 - |\varphi(x)|^2}{1 - x^2} \rightarrow L.$$

Ainsi,  $\frac{|1 - \varphi(x)|}{1 - x} \rightarrow L$  et  $\frac{1 - |\varphi(x)|}{1 - x} \rightarrow L$ . On en déduit donc que

$$\frac{1 - |\varphi(x)|}{|1 - \varphi(x)|} \rightarrow 1.$$

Ainsi,  $\frac{1 - \varphi(x)}{1 - x} \sim \frac{1 - |\varphi(x)|}{1 - x} \rightarrow L$ .

Soit  $\alpha > 1$ . D'après le lemme de Julia, si  $z$  est « suffisamment proche » de 1,

$$|1 - \varphi(z)| < \alpha L |1 - z|.$$

Alors,  $\varphi$  est bornée sur chaque secteur angulaire de sommet 1. D'après le théorème de Lindelöf (1.16), nous obtenons le résultat souhaité.

Pour déterminer la limite angulaire de  $\varphi'$ , nous commençons par appliquer la formule de Cauchy. Pour  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , on note  $D_\theta = D_{1,\theta}$  le secteur angulaire de sommet 1, symétrique par rapport à l'axe réel et dont l'angle d'ouverture total vaut  $2\theta$ . Soit un secteur angulaire fixé  $D_\theta$ . Soit  $z \in D_\theta$  et  $r$  tel que  $D(z, r) \subset D_\theta$ . Alors,

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(z + re^{i\theta})}{-r^2 e^{2i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \varphi(z + re^{i\theta})}{r e^{i\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \varphi(z + re^{i\theta})}{1 - (z + re^{i\theta})} \frac{1 - (z + re^{i\theta})}{r e^{i\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \varphi(z + re^{i\theta})}{1 - (z + re^{i\theta})} \left( \frac{1 - z}{r e^{i\theta}} - 1 \right) d\theta. \end{aligned}$$

Remarquons qu'il existe  $\eta > 0$  et  $\delta > 0$  tels que, si l'on pose

$$r(z) = \delta |1 - z|,$$

alors, pour tout  $z \in D_\alpha$ ,  $D(z, r(z)) \subset D_{\alpha+\eta}$ . Ainsi, le second facteur du produit ci-dessus est de module majoré par  $1 + \frac{1}{\delta}$ . Le premier facteur est uniformément borné sur  $D_{\alpha+\eta}$ . Ainsi, nous avons montré que l'intégrande est borné, uniformément par rapport à  $z \in D_\alpha$ .

Concluons avec le théorème de Lindelöf (1.16). Pour  $x \in [0; 1]$ , nous avons

$$1 - \frac{1-x}{re^{i\theta}} = 1 - \frac{e^{-i\theta}}{\delta}.$$

De plus,

$$\frac{1 - \varphi(x + re^{i\theta}r(x))}{1 - (x + re^{i\theta}r(x))} \rightarrow L.$$

D'après le théorème de convergence dominée, nous obtenons finalement que  $\varphi'(x) \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} L$  lorsque  $x \rightarrow 1$ , ce qui permet d'achever la preuve du théorème.  $\square$

Remarquons que l'hypothèse  $\varphi(0) = 0$  que nous avons prise dans notre énoncé n'est pas essentielle : on peut toujours se ramener au cas où  $\varphi(0) = 0$  en composant par un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .

### A.2.c) — Théorème de Denjoy-Wolff

Dans cette partie, nous démontrons le résultat suivant, généralement attribué à Denjoy et Wolff. Précisons quelques notations : pour  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , nous noterons

$$\varphi^{[n]} = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$$

la  $n$ -ème itération de  $\varphi$ . Par ailleurs, étant donné une suite de fonctions  $(f_n)_n$  et une fonction  $f$  de  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , nous noterons

$$f_n \xrightarrow{\text{CVLU}} f$$

lorsque la suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge vers  $f$  uniformément sur tout compact.

**Théorème 1.18 (Denjoy-Wolff)** *Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe. On suppose que  $\varphi$  n'est pas un automorphisme elliptique. Alors, il existe un unique  $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$  tel que  $\varphi^{[n]} \xrightarrow{\text{CVLU}} \alpha$ .*

*On appelle alors  $\alpha$  le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi$ .*

Lorsque  $\varphi$  a un point fixe dans  $\mathbb{D}$ , ce résultat découle du lemme de Schwarz-Pick (1.12). Dans le cas où le point base  $\xi$  est un « point fixe » de  $\varphi$ , le lemme de Julia va être particulièrement utile : si on trouve un point fixe  $\xi \in \mathbb{T}$  tel que  $d(\xi) \leq 1$ , alors  $\varphi$  sera une contraction vers le point  $\xi$ , et  $\xi$  sera alors un « point attractif » (tout comme un point fixe dans  $\mathbb{D}$  est attractif d'après le lemme de Schwarz-Pick). Précisons d'abord ce que nous entendons par « point fixe » là où  $\varphi$  n'est pas nécessairement définie.

**Définition 1.19** *On dit que  $\xi \in \mathbb{T}$  est un point fixe de  $\varphi$  si  $r \mapsto \varphi(r\xi)$  admet une limite pour  $r \rightarrow 1^-$  et si*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \varphi(r\xi) = \xi.$$

Nous disposons du résultat suivant sur les points fixes de  $\varphi$  au bord du disque :

**Lemme 1.20 (Wolff)** *Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe qui n'admet pas de point fixe dans  $\mathbb{D}$ . Alors, il existe un unique point fixe  $\xi \in \mathbb{T}$  de  $\varphi$  tel que  $d(\xi) \leq 1$ .*

Dans ce cas, cet unique point fixe sera un point fixe attracteur (d'après le lemme de Julia 1.14), et sera le point de Denjoy-Wolff qui apparaîtra dans notre démonstration de ce théorème.

*Démonstration* : Dans un premier temps, nous allons montrer l'unicité d'un tel point. Pour cela, supposons par l'absurde qu'il y en a deux distincts : soient  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{T}$  deux points fixes de  $\varphi$  tels que  $d(\alpha) \leq 1$  et  $d(\beta) \leq 1$ . Alors, il existe  $k_1$  et  $k_2$  tels que les horocycles  $H_1 = E(k_1, \alpha)$  et  $H_2 = E(k_2, \beta)$  soient tangents en un point  $\omega \in \mathbb{D}$  (lemme 1.9). Comme  $\alpha$  est un point fixe et comme  $d(\alpha) \leq 1$ , le lemme de Julia (1.14) dit que l'image de  $H_1$  est incluse dans  $H_1$ . Ainsi,  $\varphi(\omega) \in H_1$ . D'autre part, on peut tenir le même raisonnement avec  $H_2$ , donc  $\varphi(\omega) \in H_2$ . Finalement,  $\varphi(\omega)$  est dans l'intersection de  $H_1$  et  $H_2$ , donc  $\varphi(\omega) = \omega$  avec  $\omega \in \mathbb{D}$ . Mais alors,  $\varphi$  a un point fixe dans  $\mathbb{D}$ . Ceci fournit la contradiction souhaitée.

Montrons maintenant l'existence. Commençons par trouver un bon candidat pour notre point fixe. Soit  $(r_n)_n \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$  une suite qui tend en croissant vers 1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , considérons  $\varphi_n : r_n \overline{\mathbb{D}} \rightarrow r_n \overline{\mathbb{D}}$  la fonction définie par  $\varphi_n = r_n \varphi$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $\varphi_n$  est continue sur un compact convexe de  $\mathbb{C}$ . D'après le théorème de Brouwer, il existe alors  $\alpha_n \in r_n \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D}$  tel que  $\varphi_n(\alpha_n) = \alpha_n$ . Quitte à extraire, nous pouvons supposer (par compacité de  $\overline{\mathbb{D}}$ ) que la suite  $(\alpha_n)_n$  converge vers un  $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ . Nous allons montrer que  $\alpha \in \mathbb{T}$ . Pour cela, supposons par l'absurde que  $\alpha \in \mathbb{D}$ . Alors, en faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$  dans l'égalité  $\varphi_n(\alpha_n) = \alpha_n$  et en utilisant la continuité de  $\varphi$  en  $\alpha$ , nous avons  $\varphi(\alpha) = \alpha$ . Donc  $\varphi$  a un point fixe dans  $\mathbb{D}$ . Ceci est absurde. Donc  $\alpha \in \mathbb{T}$ .

Montrons que  $d(\alpha) \leq 1$ . Ceci vient du fait que :

$$\begin{aligned} d(\alpha) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - |\varphi(\alpha_n)|}{1 - |\alpha_n|} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left| \frac{\alpha_n}{r_n} \right|}{1 - |\alpha_n|} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Il reste donc à prouver que  $\alpha$  est un point fixe de  $\varphi$ . Toute la difficulté vient du fait que notre définition (1.19) regarde la limite radiale de  $\varphi$  en  $\alpha$ , mais la suite  $(\alpha_n)_n$  ne tend pas nécessairement vers  $\alpha$  radialement. Fixons  $z \in \mathbb{D}$  et appliquons le lemme de Schwarz-Pick (1.12) à la fonction  $\varphi_n$  et aux points  $z$  et  $\alpha_n$  (où  $\alpha_n$  est un point fixe de  $\varphi_n$ ). On poursuit ensuite le calcul d'une façon similaire au lemme de Julia (1.14) et on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi_n(z) - \alpha_n}{1 - \overline{\alpha_n} \varphi_n(z)} \right| &\leq \left| \frac{z - \alpha_n}{1 - \overline{\alpha_n} z} \right| \\ \frac{(1 - |\varphi_n(z)|^2)(1 - |\alpha_n|^2)}{|1 - \overline{\alpha_n} \varphi_n(z)|^2} &\geq \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\alpha_n|^2)}{|1 - \overline{\alpha_n} z|^2} \end{aligned}$$

On fait ensuite tendre  $n \rightarrow +\infty$ , ce qui donne (car  $|\alpha| = 1$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{(1 - |\varphi(z)|^2)}{|1 - \bar{\alpha}\varphi(z)|^2} &\geq \frac{(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{\alpha}z|^2} \\ \frac{(1 - |\varphi(z)|^2)}{|\alpha - \varphi(z)|^2} &\geq \frac{(1 - |z|^2)}{|\alpha - z|^2} \end{aligned}$$

En appliquant ceci à  $z = r\alpha$  avec  $r \in [0; 1[$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |\alpha - \varphi(r\alpha)|^2 &\leq (1 - |\varphi(r\alpha)|^2) \frac{|\alpha - r\alpha|^2}{1 - |r\alpha|^2} \\ &\leq 1 \frac{1 - r}{1 + r} \end{aligned}$$

On fait alors tendre  $r \rightarrow 1^-$ , et on obtient que  $\lim_{r \rightarrow 1^-} \varphi(r\alpha) = \alpha$ , ce qui prouve que  $\alpha$  est un point fixe de  $\varphi$ . Ceci clôt la preuve du lemme de Wolff.  $\square$

Le lemme de Wolff traite le cas où  $\varphi$  n'a pas de point fixe dans  $\mathbb{D}$ . Dans le cas où  $\varphi$  a un point fixe dans  $\mathbb{D}$ , on peut facilement montrer le résultat suivant :

**Proposition 1.21** *Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  qui n'est pas l'identité. Alors,  $\varphi$  a au plus un point fixe dans  $\mathbb{D}$ .*

*Démonstration :* Supposons que  $\varphi$  a deux points fixes distincts  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{D}$ . Alors, on a égalité dans le lemme de Schwarz-Pick (1.12) puisque  $\rho(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = \rho(\alpha, \beta)$ . Donc,  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Mais  $\varphi$  a deux points fixes dans  $\mathbb{D}$ , donc  $\varphi$  est l'identité, ce qui est impossible.  $\square$

Nous allons maintenant prouver le théorème de Denjoy-Wolff. Pour cela, nous effectuons une disjonction de cas en traitant deux cas particuliers avant le cas général.

*Démonstration :* La technique générale de preuve repose sur une disjonction de cas :

- si  $\varphi$  est un automorphisme (hyperbolique ou parabolique) : en composant par une transformation de Möbius adéquate, on se place sur le demi-plan supérieur  $\Pi^+$ , et on peut alors montrer le résultat directement ;
- si  $\varphi$  n'est pas un automorphisme et a un point fixe  $\alpha \in \mathbb{D}$ , alors, d'après le lemme de Schwarz-Pick,  $\varphi$  est une contraction (stricte) pour la distance hyperbolique et  $\alpha$  est bien un point attractif ;
- si  $\varphi$  n'est pas un automorphisme et n'a pas de point fixe dans  $\mathbb{D}$ , alors il existe un unique  $\xi \in \mathbb{T}$  tel que  $d(\xi) \leq 1$  et alors  $\xi$  sera le point de Denjoy-Wolff.

**Cas d'un automorphisme hyperbolique** On suppose dans cette partie que  $\varphi$  est un automorphisme hyperbolique. On identifie  $\varphi$  avec son prolongement à  $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$ . Notons  $b$  et  $c \in \mathbb{T}$  les deux points fixes (distincts) de  $\varphi$ . On sait (proposition 1.1) qu'il existe une homographie  $h : \mathbb{D} \rightarrow \Pi^+$ , qui se prolonge en un automorphisme de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$  qui envoie  $\mathbb{T}$  sur  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  et tel que  $h(b) = 0$  et  $h(c) = \infty$ . On considère alors l'homographie  $\psi$  définie sur  $\Pi^+$  par  $\psi = h \circ \varphi \circ h^{-1}$ . On l'identifie

avec l'automorphisme de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$  qui la prolonge. Alors,  $\psi$  est une homographie qui va de  $\Pi^+$  dans lui-même, qui stabilise  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  et qui vérifie  $\psi(0) = 0$  et  $\psi(\infty) = \infty$  (puisque  $b$  et  $c$  sont des points fixes de  $\varphi$ ). Alors,  $\psi$  est une dilatation non triviale : il existe  $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que, pour tout  $z \in \mathbb{P}\mathbb{C}^1$ , on a  $\psi(z) = \eta z$ . En outre, comme  $\varphi$  n'est pas l'identité de  $\mathbb{D}$ ,  $\psi$  n'est pas l'identité de  $\Pi^+$  et donc  $\eta \neq 1$ . On distingue alors deux cas. Si  $\eta > 1$  (c'est-à-dire que  $\psi$  est une dilatation, donc une « contraction à l'infini »), alors la suite des itérés  $\psi^{[n]}$  converge uniformément vers  $\infty$  sur tout compact de  $\Pi^+$  (car si  $K$  est un compact de  $\Pi^+$ , il existe  $c > 0$  telle que  $|z| \geq c$  pour tout  $z \in K$ ); et alors la suite  $\varphi^{[n]} \xrightarrow{\text{CVLU}} c$ . Si en revanche  $\eta < 1$  (c'est-à-dire que  $\psi$  est une contraction vers 0), alors la suite  $\psi^{[n]}$  converge uniformément sur tout compact  $K$  de  $\Pi^+$  vers 0 (car tout compact de  $\Pi^+$  est borné); et alors la suite  $\varphi^{[n]} \xrightarrow{\text{CVLU}} b$ . Ceci prouve le résultat dans le cas d'un automorphisme hyperbolique.

**Cas d'un automorphisme parabolique** On suppose ici que  $\varphi$  est un automorphisme parabolique. La preuve est relativement similaire au cas d'un automorphisme hyperbolique. Soit  $c \in \mathbb{T}$  l'unique point fixe de  $\varphi$ . Il existe alors une homographie  $h : \mathbb{D} \rightarrow \Pi^+$  dont le prolongement à  $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$  qui envoie  $\mathbb{T}$  sur  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  et tel que  $h(c) = \infty$ . Comme précédemment, nous considérons  $\psi = h \circ \varphi \circ h^{-1}$  qui est une homographie qui va de  $\Pi^+$  dans lui-même, qui stabilise  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  et qui vérifie  $\psi(\infty) = \infty$  (puisque  $c$  est un point fixe de  $\varphi$ ). Alors, il existe  $a$  et  $b$  des constantes complexes telles que, pour tout  $z \in \mathbb{P}\mathbb{C}^1$ ,  $\psi(z) = az + b$ . Or comme  $\varphi$  est un automorphisme parabolique,  $\psi$  admet un unique point fixe dans  $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$ , qui est  $\infty$ . Donc  $a = 1$  (sinon,  $\frac{b}{a-1}$  serait un autre point fixe de  $\psi$ ). Donc  $\psi$  est une translation. Comme  $\varphi$  n'est pas l'identité,  $\psi$  n'est pas non plus l'identité. Donc  $\psi^{[n]}$  converge uniformément vers  $\infty$  sur tous les compacts de  $\Pi^+$ . Ceci prouve que  $\varphi^{[n]} \xrightarrow{\text{CVLU}} c$  et clôt la preuve de ce cas particulier.

**Cas général** Pour traiter le cas général, nous allons utiliser les remarques que nous avons faites dans la section précédente : les points fixes que nous avons mis en évidence sont des candidats naturels pour les points de Denjoy-Wolff.

Nous supposons dans cette partie que  $\varphi$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Alors, nous avons vu que l'un des deux cas ci-dessous échoit nécessairement :

- Cas (i) la fonction  $\varphi$  admet un unique point fixe dans  $\mathbb{D}$  ;  
 Cas (ii) la fonction  $\varphi$  n'admet pas de point fixe dans  $\mathbb{D}$  et admet un unique point fixe  $\alpha \in \mathbb{T}$  tel que  $d(\alpha) \leq 1$ .

Nous allons traiter les deux cas séparément.

**Cas (i)** Quitte à conjuguer  $\varphi$  par un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , nous pouvons supposer que le point fixe de  $\varphi$  est 0. Dans ce cas, nous allons montrer que  $\varphi^{[n]} \xrightarrow{\text{CVLU}} 0$  sur tout compact de  $\mathbb{D}$ .

Pour montrer la convergence sur tout compact de  $\mathbb{D}$ , il suffit de montrer qu'on a convergence uniforme sur tout disque fermé de centre 0 inclus dans  $\mathbb{D}$ . Soit  $r \in [0; 1[$  et  $K$  le disque fermé de centre 0 et de rayon  $r$ . Considérons la fonction  $\Phi : \begin{cases} K & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ z & \mapsto \begin{cases} \frac{|\varphi(z)|}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \\ |\varphi'(0)| & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ . La fonction  $\varphi$  est continue sur le compact  $K$ , donc elle est bornée et atteint ses bornes. Soit  $z_0 \in K$  tel que  $\Phi$  atteint son maximum en  $z_0$ . Alors, comme  $\varphi$  n'est pas une rotation (puisque, par hypothèse,  $\varphi$  n'est pas un automorphisme elliptique),  $\Phi(z_0) < 1$ . Ainsi, il existe une constante  $c < 1$  telle

que, pour tout  $z \in K$ ,  $|\varphi(z)| \leq c|z|$ . Par récurrence immédiate, nous avons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|\varphi^{[n]}\|_{\infty, K} \leq c^n r$ , donc  $\varphi^{[n]} \rightarrow 0$  uniformément sur  $K$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Cas (ii)** Notons  $\alpha$  l'unique point fixe de  $\varphi$  sur  $\mathbb{T}$  tel que  $d(\alpha) \leq 1$ .

D'abord, remarquons que la suite des itérés  $(\varphi^{[n]})_n$  admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{D}$  : comme  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{D}$ , la famille de fonctions  $\{\varphi^{[n]}\}$  est (localement) uniformément bornée et donc est normale d'après le théorème de Montel. Remarquons que nous pouvons tenir le même raisonnement pour toute sous-famille de  $\{\varphi^{[n]}\}$ .

Il suffit donc de montrer qu'une sous-suite de  $(\varphi^{[n]})_n$  qui converge localement uniformément ne peut converger que vers  $\alpha$ . Nous allons procéder en deux temps : d'abord, nous montrerons que cette sous-suite converge vers une fonction constante ; ensuite que cette fonction constante vaut  $\alpha$ .

Soit  $\lambda$  une extraction telle que la suite  $(\varphi^{[\lambda(k)]})_k$  converge localement uniformément vers une fonction  $\rho$ . Supposons que  $\rho$  n'est pas une fonction constante. Alors, nous allons montrer que  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$  en jouant sur des extractions successives. Soit  $\eta$  définie par  $\eta(k) = \lambda(k+1) - \lambda(k)$  (remarquons que  $\eta$  n'est pas nécessairement une extraction). Il existe une extraction  $\mu$  et une fonction holomorphe  $\varsigma$  telles que  $\varphi^{[\eta \circ \mu(j)]} \xrightarrow{\text{CVLU}} \varsigma$  pour  $j \rightarrow +\infty$ . Mais on a toujours  $\varphi^{[\lambda \circ \mu(j)]} \xrightarrow{\text{CVLU}} \rho$ . De plus, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on a  $\varphi^{[\eta \circ \mu(j)]} \circ \varphi^{[\lambda \circ \mu(j)]} = \varphi^{[\lambda \circ \mu(j+1)]}$ . En passant à la limite pour  $j \rightarrow +\infty$ , nous obtenons que  $\rho = \varsigma \circ \rho$ . Ainsi,  $\varsigma$  et Id coïncident sur l'image de  $\rho$ , qui contient au moins deux points distincts, puisque  $\rho$  n'est pas constante. Alors,  $\varsigma$  est une fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$  qui a au moins deux points fixes, donc  $\varsigma$  est l'identité de  $\mathbb{D}$  (d'après la proposition 1.21). Considérons alors une extraction  $\nu$  et une fonction  $\tau$  telles que, lorsque  $m \rightarrow +\infty$ ,  $\varphi^{[\eta \circ \mu \circ \nu(m)-1]} \rightarrow \tau$ . Mais alors, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi^{[\eta \circ \mu \circ \nu(m)]} = \varphi^{[\eta \circ \mu \circ \nu(m)-1]} \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^{[\eta \circ \mu \circ \nu(m)-1]}$ . En faisant tendre  $m \rightarrow +\infty$ , nous obtenons que  $\text{Id} = \tau \circ \varphi = \varphi \circ \tau$ . Ceci prouve que  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .

Soit  $\lambda$  une extraction et  $\rho : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe telles que  $\varphi^{[\lambda(k)]} \rightarrow \rho$  pour  $k \rightarrow +\infty$ . Comme  $\varphi$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , le point précédent nous montre que  $\rho$  est une fonction constante égale à  $\omega$ . Il suffit donc de montrer que  $\omega = \alpha$ . Soit  $k \in \mathbb{R}^{+*}$ . Soit  $H_k$  l'horocycle  $E(k, \alpha)$ . Comme  $\alpha$  est un point fixe de  $\mathbb{T}$  tel que  $d(\alpha) \leq 1$ , le lemme de Julia (1.14) nous dit que  $H_k$  est stable par  $\varphi$ . Soit  $z \in \mathbb{D} \cap H_k$ . Alors,  $\omega$  est la limite de la suite  $(\varphi^{[n]}(z))_n$ , qui est à valeurs dans  $H_k$ . Donc  $\omega \in H_k$ . Ceci valant pour tout  $k \in \mathbb{R}^{+*}$ , nous obtenons que  $\omega \in \bigcap_{k \in \mathbb{R}^{+*}} H_k = \{\alpha\}$ .

Donc,  $\omega = \alpha$ . Ceci achève la preuve du cas (ii) et donc la preuve du théorème de Denjoy-Wolff.  $\square$

### A.3 — Théorème de Koenigs

Nous présentons ici un théorème généralement attribué à Koenigs ([43]). Ce théorème concerne les solutions de l'équation de Schröder (appelée ainsi suite aux travaux de Schröder dans [60]). Plus précisément, pour un symbole  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe (implicitement fixé) et un paramètre  $\beta \in \mathbb{C}$ , l'équation de Schröder de paramètre  $\beta$  est l'équation fonctionnelle

$$\Sigma \circ \varphi = \beta \times \Sigma \tag{E_\beta}$$

d'inconnue la fonction holomorphe  $\Sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Dans la suite, et sauf mention explicite du contraire,  $\varphi$  désignera une fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans lui-même. Nous supposons en outre que  $\varphi$  admet un point fixe  $\alpha \in \mathbb{D}$  et que  $0 < |\varphi'(\alpha)| < 1$ . Dans un premier temps (pour simplifier la preuve), nous supposons en outre que  $\alpha = 0$ .

Commençons par préciser une convention.

**Définition 1.22** Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe qui admet un point fixe  $\alpha \in \mathbb{D}$ . On suppose que  $0 < |\varphi'(\alpha)| < 1$ . Soit  $\beta \in \mathbb{C}$ . On dit que l'équation de Schröder  $(E_\beta)$  de paramètre  $\beta$  admet une solution s'il existe une fonction  $\Sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe, non identiquement nulle et telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \Sigma \circ \varphi(z) = \beta \Sigma(z).$$

Par convention, la fonction identiquement nulle n'est pas une solution de l'équation de Schröder.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette partie : le théorème de Koenigs est un résultat portant sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation de Schröder. La démonstration de ce résultat, que nous reproduisons ici par souci d'exhaustivité, suit les démarches de preuve que l'on peut trouver dans la thèse de Schwartz ([62], pp. 72–76) ou dans le livre de Carleson et Gamelin ([19], pp. 31–32).

**Théorème 1.23 (Koenigs)** Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe. On suppose que  $\varphi(0) = 0$  et que  $0 < |\varphi'(0)| < 1$ . Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda_n = (\varphi'(0))^n.$$

Notons également  $\lambda = \lambda_1 = \varphi'(0)$ .

Alors,

- (i) l'équation  $(E_\beta)$  admet une solution si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\beta = \lambda_n$  ;
- (ii) si l'équation  $(E_\beta)$  admet une solution, celle-ci est unique à multiplication par une constante non nulle près ;
- (iii) la fonction  $\varsigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\varsigma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{[n]}(z)}{\lambda^n} \quad (\spadesuit)$$

est l'unique solution de  $(E_\lambda)$  telle que  $\varsigma'(0) = 1$  ;

- (iv) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varsigma^n$  est une solution de  $(E_{\lambda_n})$ .

Remarquons que si  $\varphi$  vérifie les hypothèses du théorème, alors 0 est le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi$  : en effet, 0 est un point fixe de  $\mathbb{D}$  et, comme  $|\varphi'(0)| < 1$ ,  $\varphi$  n'est pas une rotation (et donc  $\varphi$  n'est pas non plus un automorphisme elliptique).

*Démonstration* : Pour prouver ce théorème, nous procédons en plusieurs étapes. D'abord, nous montrons que l'équation  $(\spadesuit)$  définit bien une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D}$  telle que  $\varsigma'(0) = 1$ . Ensuite, nous raisonnons par analyse-synthèse pour déterminer toutes les solutions de l'équation de Schröder.

**Première étape :** Nous montrons que l'équation ( $\spadesuit$ ) définit une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D}$  telle que  $\zeta'(0) = 1$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $z \in \mathbb{D}$ , nous posons

$$\varsigma_k(z) = \frac{\varphi^{[k]}(z)}{\lambda^k}.$$

**Convergence uniforme sur un compact :** Nous commençons par montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que la suite  $(\varsigma_k)_k$  converge uniformément sur le compact  $K = \overline{D}(0; \delta)$ .

Soit  $\delta' \in ]0; 1[$ . Comme  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi'(0) = \lambda$ , il existe  $C > 0$  tel que,

$$\forall |z| \leq \delta', \quad |\varphi(z) - \lambda z| \leq C |z|^2.$$

Alors,

$$\forall |z| \leq \delta', \quad |\varphi(z)| \leq (|\lambda| + C\delta') |z|. \quad (\diamond)$$

Un raisonnement similaire à celui des lignes précédentes permet d'uniformiser la constante  $C$  par rapport au paramètre  $\delta'$  :

$$\forall 0 < \delta \leq \delta', \quad \forall |z| \leq \delta, \quad |\varphi(z)| \leq (|\lambda| + C\delta) |z|.$$

En effectuant un raisonnement par récurrence, on peut étendre ce contrôle aux itérés de  $\varphi$  :

$$\forall 0 < \delta \leq \delta', \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall |z| \leq \delta, \quad |\varphi^{[k]}(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)^k |z|. \quad (\heartsuit)$$

Fixons  $\delta \in ]0; \delta'[$ . Soit  $z \in \overline{D}(0; \delta)$ . Soit  $n \geq 1$ . D'après les inégalités précédentes

$$\begin{aligned} |\varsigma_{n+1}(z) - \varsigma_n(z)| &= \left| \frac{\varphi^{[n+1]}(z)}{\lambda_{n+1}} - \frac{\varphi^{[n]}(z)}{\lambda_n} \right| \\ &= \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \left| \varphi(\varphi^{[n]}(z)) - \lambda \varphi^{[n]}(z) \right| \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \times C}_{\text{d'après } (\diamond)} \left| \varphi^{[n]}(z) \right|^2 \\ &\leq \underbrace{\frac{C}{|\lambda|^{n+1}}}_{\text{d'après } (\heartsuit)} [ (|\lambda| + C\delta)^n |z| ]^2 \\ &\leq \frac{C \delta^2}{|\lambda|} \times \left( \frac{(|\lambda| + C\delta)^2}{|\lambda|} \right)^n. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(|\lambda| + C\delta)^2}{|\lambda|} = |\lambda| < 1$ , on peut supposer (quitte à diminuer  $\delta$ ) que  $\frac{(|\lambda| + C\delta)^2}{|\lambda|} < 1$ .

Considérons alors le compact  $K = \overline{D}(0; \delta)$  et notons  $\|\cdot\|_{\infty, K}$  la norme de la convergence uniforme sur  $K$ . Les calculs qui précèdent montrent que,

$$\forall n \geq 1, \quad \|\varsigma_{n+1} - \varsigma_n\|_{\infty, K} \leq \frac{C \delta^2}{|\lambda|} \times \left( \frac{(|\lambda| + C\delta)^2}{|\lambda|} \right)^n.$$

Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 0} (\varsigma_{n+1} - \varsigma_n)$  converge normalement dans l'espace de Banach  $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_{\infty, K})$ .

En particulier,  $(\varsigma_n)_n$  converge uniformément sur  $K$ .

**Extension au disque unité** Nous montrons maintenant que la suite  $(\varsigma_n)_n$  converge point par point.

Soit  $z \in \mathbb{D}$ . D'après le théorème de Denjoy-Wolff (1.18),  $\varphi^{[n]}(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (puisque 0 est le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi$ ). Ainsi, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\varphi^{[n_0]}(z) \in K$ . Alors,  $\varsigma(\varphi^{[n_0]}(z))$  est bien défini et

$$\frac{\varsigma(\varphi^{[n_0]}(z))}{\lambda^{n_0}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{[n]}(\varphi^{[n_0]}(z))}{\lambda^{n_0} \times \lambda^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{[n+n_0]}(z)}{\lambda^{n+n_0}}.$$

En particulier, la suite  $(\varsigma_k(z))_k$  converge, ce qui prouve que  $\varsigma(z)$  est bien définie. Le raisonnement ci-dessus permet en outre d'établir les égalités suivantes :

$$\forall z \in \mathbb{D}, \forall n, k \in \mathbb{N}, \varsigma_{n+k}(z) = \frac{\varsigma_k(\varphi^{[n]}(z))}{\lambda^n},$$

$$\forall z \in \mathbb{D}, \forall n \in \mathbb{N}, \varsigma(z) = \frac{\varsigma(\varphi^{[n]}(z))}{\lambda^n}.$$

**Convergence uniforme sur tout compact** Nous savons déjà qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $\varsigma_n \rightarrow \varsigma$  uniformément sur le compact  $K = \overline{D}(0; \delta)$ . Nous montrons maintenant que  $\varsigma_n \xrightarrow{\text{CVLU}} \varsigma$ .

Soit  $L$  un compact de  $\mathbb{D}$ . Nous montrons que  $\varsigma_n \rightarrow \varsigma$  uniformément sur  $L$ . D'après le théorème de Denjoy-Wolff (1.18),  $\varphi^{[n]} \rightarrow 0$  uniformément sur  $L$ . En particulier, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\varphi^{[n]}(L) \subset K$  (rappelons que  $K$  est un compact de  $\mathbb{D}$  tel que  $\varsigma_n \rightarrow \varsigma$  uniformément sur  $K$ ). Soit  $n \geq n_0$ . Soit  $z \in L$ .

$$\begin{aligned} |\varsigma_n(z) - \varsigma(z)| &= \left| \frac{\varsigma_{n-n_0}(\varphi^{[n_0]}(z))}{\lambda^{n_0}} - \frac{\varsigma(\varphi^{[n_0]}(z))}{\lambda^{n_0}} \right| \\ &= \frac{1}{\lambda^{n_0}} \left| \varsigma_{n-n_0}(\varphi^{[n_0]}(z)) - \varsigma(\varphi^{[n_0]}(z)) \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda^{n_0}} \|\varsigma_{n-n_0} - \varsigma\|_{\infty, K}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\|\varsigma_n - \varsigma\|_{\infty, L} \leq \frac{1}{\lambda^{n_0}} \|\varsigma_{n-n_0} - \varsigma\|_{\infty, K}.$$

Comme  $\varsigma_n \rightarrow \varsigma$  uniformément sur  $K$ , nous avons bien montré que  $\varsigma_n \rightarrow \varsigma$  uniformément sur  $L$ .

**Holomorphic et dérivée en 0** Nous terminons en montrant que  $\varsigma$  est holomorphe, et que  $\varsigma'(0) = 1$ .

D'après le théorème de Weierstrass (1.26), nous savons que  $\varsigma$  est holomorphe et que

$$\varsigma'(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varsigma'_n(0).$$

Comme  $\varphi$  est holomorphe et vérifie  $\varphi(0) = 0$ , nous pouvons vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\varphi^{[n]})'(0) = (\varphi'(0))^n$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varsigma'_n(0) = 1$ , et donc  $\varsigma'(0) = 1$ .

**Deuxième étape : Analyse** Soit  $\beta \in \mathbb{C}$  tel que l'équation  $(E_\beta)$  admette une solution. Soit  $\eta$  une solution de  $(E_\beta)$ . Nous effectuons une disjonction de cas portant sur le paramètre  $\beta$ .

**Premier cas** Supposons que  $\beta = 1$ . Nous montrons alors que  $\eta$  est une fonction constante. Pour  $\beta = 1$ , l'équation de Schröder devient

$$\forall z \in \mathbb{D}, \eta \circ \varphi(z) = \eta(z).$$

Fixons  $z \in \mathbb{D}$ . D'après ce qui précède, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\eta(\varphi^{[n]}(z)) = \eta(z)$ . D'après le théorème de Denjoy-Wolff (1.18),  $\varphi^{[n]}(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . En particulier, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta(\varphi^{[n]}(z)) = \eta(z) = \eta(0).$$

Ceci valant pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , nous avons montré que  $\eta$  est une fonction constante.

**Second cas** Supposons que  $\beta \neq 1$ . En évaluant en 0 l'équation de Schröder  $(E_\beta)$ , nous avons

$$\eta(\varphi(0)) = \beta\eta(0).$$

Comme  $\varphi(0) = 0$ , nous en déduisons que  $\eta(0) = 0$ . Notons  $m \in \mathbb{N}^*$  l'ordre de 0 comme zéro de  $\eta$ . Il existe une fonction holomorphe  $\theta : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{D}, \eta(z) = z^m \theta(z) \\ \theta(0) \neq 0. \end{cases}$$

On a alors, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\varphi(z)^m \theta(\varphi(z)) = \beta z^m \theta(z) \tag{\Delta}$$

En particulier, pour tout  $z \in \mathbb{D}$  tel que  $z \neq 0$ ,

$$\left[ \frac{\varphi(z)}{z} \right]^m \times \theta(\varphi(z)) = \beta \theta(z).$$

En faisant tendre  $z \rightarrow 0$ , nous obtenons

$$\lambda^m \theta(0) = \beta \theta(0).$$

Comme  $\theta(0) \neq 0$ , nous avons que  $\beta = \lambda^m$ . Il nous reste maintenant à prouver que  $\eta$  est égale à  $\zeta^m$ , à une constante multiplicative près. Nous utilisons pour cela le résultat suivant :

**Lemme 1.24** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\left( \varphi^{[k]}(z) \right)^m \times \theta \left( \varphi^{[k]}(z) \right) = \lambda^{km} \eta(z).$$

*Démonstration* : Nous prouvons ce lemme par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 1$ , comme nous savons que  $\beta = \lambda^m$ , le résultat est exactement l'équation  $(\Delta)$  ci-dessus.

Montrons maintenant l'hérédité. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\left(\varphi^{[k]}(z)\right)^m \times \theta\left(\varphi^{[k]}(z)\right) = \lambda^{km}\eta(z).$$

Soit  $z \in \mathbb{D}$ . En appliquant l'égalité précédente à  $\varphi(z)$ , il vient

$$\begin{aligned} \left(\varphi^{[k+1]}(z)\right)^m \times \theta\left(\varphi^{[k+1]}(z)\right) &= \lambda^{km}\eta(\varphi(z)) \\ &= \lambda^{km} \times \lambda^m \eta(z) \\ &= \lambda^{(k+1)m}\eta(z), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

Fixons  $z \in \mathbb{D}$ . D'après le lemme ci-dessus, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left[\frac{\varphi^{[k]}(z)}{\lambda^k}\right]^m \times \theta(\varphi^{[k]}(z)) = \eta(z).$$

On fait alors tendre  $k \rightarrow +\infty$ . D'après le théorème de Denjoy-Wolff (1.18),  $\varphi^{[k]}(z) \rightarrow 0$ . De plus, d'après la première étape de cette preuve,  $\frac{\varphi^{[k]}(z)}{\lambda^k} \rightarrow \varsigma(z)$ . Nous obtenons finalement

$$\varsigma(z)^m \times \theta(0) = \eta(z).$$

Ceci valant pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , nous avons bien que  $\eta = \theta(0) \times \varsigma^m$ , avec  $\theta(0) \neq 0$ .

**Troisième étape : Synthèse** D'après les étapes précédentes de la preuve, il suffit de vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varsigma^n$  est solution de l'équation de Schröder  $(E_{\lambda_n})$  pour le paramètre  $\lambda_n$ .

Nous vérifions d'abord que  $\varsigma$  est solution de  $(E_\lambda)$ . Nous savons déjà que  $\varsigma$  est une fonction holomorphe non identiquement nulle. Fixons  $z \in \mathbb{D}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \varsigma(\varphi(z)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{[n]}(\varphi(z))}{\lambda^n} \\ &= \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{[n+1]}(z)}{\lambda^{n+1}} \\ &= \lambda \varsigma(z). \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , nous avons bien vérifié que  $\varsigma$  est solution de  $(E_\lambda)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En élevant l'égalité ci-dessus à la puissance  $n$ -ème, nous vérifions directement que  $\varsigma^n$  est solution de l'équation de Schröder  $(E_{\lambda_n})$  pour le paramètre  $\lambda_n$ . Ceci achève la preuve du théorème de Koenigs. □

Le théorème de Koenigs peut s'étendre aux fonctions dont le point de Denjoy-Wolff est un point  $\alpha \in \mathbb{D}$  qui n'est pas nécessairement 0.

**Corollaire 1.25** Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe. On suppose qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{D}$  tel que  $\varphi(\alpha) = \alpha$ , et que  $0 < |\varphi'(\alpha)| < 1$ . Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda_n = (\varphi'(\alpha))^n.$$

Notons également  $\lambda = \lambda_1 = \varphi'(\alpha)$ .

Soit  $\psi$  l'automorphisme de  $\mathbb{D}$  défini par  $\psi(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$ .

Alors,

- (i) l'équation  $(E_\beta)$  admet une solution si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\beta = \lambda^n$  ;
- (ii) si l'équation  $(E_\beta)$  admet une solution, celle-ci est unique à multiplication par une constante non nulle près ;
- (iii) la fonction  $\varsigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\varsigma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\psi(\varphi^{[n]}(z))}{\lambda^n}$$

est l'unique solution de  $(E_\lambda)$  telle que  $\varsigma'(\alpha) = 1$  ;

- (iv) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varsigma^n$  est une solution de  $(E_{\lambda^n})$ .

*Démonstration* : La fonction  $\psi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$  qui est son propre inverse. Elle échange en outre 0 et  $\alpha$ . Elle vérifie en particulier que

$$\psi'(0) \times \psi'(\alpha) = 1.$$

Notons  $\tilde{\varphi} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction holomorphe définie par  $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi \circ \psi$ . On vérifie directement que  $\tilde{\varphi}(0) = 0$  et que  $\tilde{\varphi}'(0) = \varphi'(\alpha)$ . Pour  $\beta \in \mathbb{C}$ , on notera  $(E_\beta)$  l'équation de Schröder pour le symbole  $\varphi$  et  $(\tilde{E}_\beta)$  l'équation de Schröder pour le symbole  $\tilde{\varphi}$ . Enfin, pour une fonction  $\tau : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe, on note  $\hat{\tau} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction holomorphe définie par  $\hat{\tau} = \tau \circ \psi$ . On vérifie alors que, pour toute fonction  $\tau : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe,  $\tau$  est solution de  $(E_\beta)$  si et seulement si  $\hat{\tau}$  est solution de  $(\tilde{E}_\beta)$  :

$$\begin{aligned} \tau \circ \varphi = \lambda \tau &\iff \tau \circ \psi \circ \tilde{\varphi} \circ \psi = \lambda \tau \\ &\iff (\tau \circ \psi) \circ \tilde{\varphi} = \lambda (\tau \circ \psi) \\ &\iff \hat{\tau} \circ \tilde{\varphi} = \lambda \hat{\tau}. \end{aligned}$$

Or,  $\tilde{\varphi}$  vérifie bien les hypothèses du théorème de Koenigs 1.23. En appliquant ce théorème à  $\tilde{\varphi}$ , nous avons bien le résultat que nous souhaitons. Il reste juste à déterminer la fonction  $\varsigma$  (c'est-à-dire l'unique solution de  $(E_\beta)$  telle que  $\varsigma'(\alpha) = 0$ ). D'après ce qui précède,  $\hat{\varsigma}$  est l'unique solution de  $(\tilde{E}_\beta)$  telle que  $\hat{\varsigma}'(0) = 0$ . Alors, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\varsigma}(z) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\varphi}^{[n]}(z)}{\lambda^n} \\ \varsigma(\psi(z)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\psi \circ \varphi^{[n]} \circ \psi(z)}{\lambda^n} \end{aligned}$$

Comme  $\psi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , nous obtenons bien

$$\varsigma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\psi(\varphi^{[n]}(z))}{\lambda^n},$$

ce qui achève la preuve. □

## B) Espaces de fonctions holomorphes

DANS cette partie, nous décrivons différents types d'espaces de fonctions holomorphes sur le disque unité. Nous commençons à nous intéresser aux espaces généraux (à savoir, l'espace de Fréchet des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$ , ainsi que les espaces de Banach de fonctions holomorphes). Ensuite, nous détaillons l'étude d'autres familles d'espaces de Hilbert de fonctions holomorphes, en commençant d'abord par les espaces de Dirichlet pondérés (qui généralisent les espaces de Dirichlet, de Hardy et de Bergman par exemple). Nous décrivons ensuite rapidement les espaces de Bergman pondérés, ainsi que les espaces de Hardy pondérés. Enfin, nous finissons par une rapide présentation d'espaces de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles.

### B.1 — Espaces de Fréchet et de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité

Commençons par quelques observations sur l'espace des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$ . Nous noterons  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Nous munissons  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Pour  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  et  $K \subset \mathbb{D}$  compact, nous notons

$$\|f\|_{\infty, K} = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

On dit alors qu'une suite de fonctions  $(f_n)_n \in \text{Hol}(\mathbb{D})^{\mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout compact (ou converge localement uniformément) vers  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  lorsque, pour tout compact  $K \subset \mathbb{C}$ ,

$$\|f_n - f\|_{\infty, K} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On note alors  $f_n \xrightarrow{\text{CVLU}} f$ .

La topologie de la convergence uniforme sur tout compact est métrisable. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $D_n \subset \mathbb{D}$  le disque fermé de centre 0 et de rayon  $r_n = 1 - \frac{1}{n}$ . Alors, la distance  $d$  définie sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  par

$$d(f, g) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2^{-n} \min(1, \|f - g\|_{\infty, D_n})$$

induit sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Dans la suite, et sauf mention explicite du contraire, nous considérerons que  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  est muni de cette distance.

Rappelons également un résultat dû à Weierstrass. Une preuve de ce résultat peut par exemple être trouvée dans le livre de Rudin ([57], théorème 10.28).

**Théorème 1.26 (Weierstrass)** *Soit  $(f_n)_n \in \text{Hol}(\mathbb{D})^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  et  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  continue telle que  $f_n \xrightarrow{\text{CVLU}} f$ .*

*Alors  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_n^{(k)} \xrightarrow{\text{CVLU}} f^{(k)}$ .*

Une conséquence importante de ce théorème est le résultat suivant :

**Théorème 1.27** *La distance  $d$  sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  est complète. En particulier,  $(\text{Hol}(\mathbb{D}), d)$  est un espace de Fréchet.*

Rappelons que les espaces de Fréchet peuvent être vus comme des espaces généralisant les espaces de Banach. En particulier, la complétude permet d'étendre aux espaces de Fréchet les théorèmes de l'application ouverte, ou encore du graphe fermé. Une présentation plus générale des espaces de Fréchet peut par exemple être trouvée dans les chapitres 1 et 2 du livre de Rudin ([56]),

Nous nous intéressons maintenant aux espaces de Banach de fonctions holomorphes dont la norme est compatible avec la convergence uniforme sur tout compact. On peut obtenir une caractérisation de tels espaces en étudiant la continuité des évaluations en un point.

**Proposition et définition 1.28** *Soit  $\mathcal{X} \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$  un espace de Banach de fonctions holomorphes. Pour tout  $\omega \in \mathbb{D}$ , on note*

$$\delta_\omega : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{C} \\ f & \mapsto f(\omega) \end{cases}$$

*l'application linéaire qui correspond à l'évaluation en  $\omega$ .*

*Sont équivalentes :*

- (i) pour tout  $\omega \in \mathbb{D}$ ,  $\delta_\omega$  est continue ;*
- (ii) l'inclusion  $\iota : \mathcal{X} \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est continue.*

*Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que  $\mathcal{X}$  s'injecte continûment dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , et on note  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ .*

*Démonstration :* Le sens (ii)  $\Rightarrow$  (i) vient directement du fait que, quel que soit  $\omega \in \mathbb{D}$ , l'application linéaire  $\delta_\omega : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\delta_\omega(f) = f(\omega)$  est continue (car la convergence uniforme sur tout compact implique la convergence ponctuelle).

Montrons maintenant l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{D}$ . Considérons l'espace de Banach  $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_{\infty, K})$  des fonctions de  $K$  dans  $\mathbb{C}$  qui sont continues ainsi que l'application

$$R : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathcal{C}(K) \\ f & \mapsto f|_K \end{cases} .$$

Nous savons que, pour tout  $\omega \in \mathbb{D}$ , l'application  $f \mapsto f(\omega) \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(K); \mathbb{C})$  est continue. Pour prouver l'implication souhaitée, il suffit alors de montrer que  $R$  est un opérateur continu. Nous allons le montrer grâce au théorème du graphe fermé.

Soient  $(f_n)_n$  une suite de fonctions dans  $\mathcal{X}$ , et deux fonctions  $g \in \mathcal{X}$  et  $h \in \mathcal{C}(K)$  telles que  $f_n|_K \rightarrow g$  dans  $\mathcal{X}$  et  $f_n \rightarrow h$  dans  $\mathcal{C}(K)$ . Nous voulons montrer que  $h = g|_K$ . Soit  $\omega \in K$ . Comme l'évaluation en  $\omega$  est continue sur  $\mathcal{X}$ , nous savons que  $f_n(\omega) \rightarrow g(\omega)$ . D'autre part, la convergence uniforme implique la convergence ponctuelle, ce qui signifie que  $f_n(\omega) \rightarrow h(\omega)$ . Ainsi, pour tout  $\omega \in K$ ,  $g(\omega) = h(\omega)$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

### Cas des espaces de Hilbert : noyaux reproduisants

Dans le cas particulier où l'espace  $\mathcal{H} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est muni d'une structure hilbertienne, on peut en outre considérer la notion de noyaux reproduisants.

**Définition 1.29** Soit  $\mathcal{H} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  un espace de Hilbert de fonctions holomorphes pour le produit hilbertien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On dit que  $\mathcal{H}$  est à noyaux reproduisants s'il existe une famille  $(K_\omega)_{\omega \in \mathbb{D}}$  d'applications linéaires continues de  $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que

$$\forall \omega \in \mathbb{D}, \forall f \in \mathcal{H}, \langle f, K_\omega \rangle = f(\omega).$$

**Proposition 1.30** Si l'inclusion  $\mathcal{H} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ , alors  $\mathcal{H}$  est un espace à noyaux reproduisants.

*Démonstration* : Le résultat découle du fait que les évaluations ponctuelles sont continues (proposition 1.28) et du théorème de représentation de Riesz.  $\square$

## B.2 — Espaces de Dirichlet pondérés

Nous nous intéressons ici à un cas particulier d'espaces de Hilbert de fonctions holomorphes continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  : il s'agit des espaces de Dirichlet généralisés.

**Définition 1.31** Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction telle que  $r \mapsto r w(r) \in L^1([0; 1])$ . L'espace  $\mathcal{D}_w$  est l'ensemble des fonctions  $f$  holomorphes sur  $\mathbb{D}$  et telles que la quantité

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi}$$

est finie.

L'hypothèse portant sur la fonction  $w$  sera justifiée *a posteriori* par la proposition 1.35. Remarquons qu'elle est nécessairement satisfaite dans le cas où  $w$  est bornée.

Avant de détailler l'étude de ces espaces, mentionnons quelques exemples : pour  $w : r \mapsto 1$ ,  $\mathcal{D}_w$  est l'espace de Dirichlet ; pour  $w : r \mapsto 1 - r$  ou  $w : r \mapsto 1 - r^2$ , on retrouve (à norme équivalente près) l'espace de Hardy du disque  $H^2(\mathbb{D})$ . Ces espaces « usuels » seront décrits plus en détail et spécifiquement après l'étude générale des espaces  $\mathcal{D}_w$ .

Ces espaces peuvent être munis d'un produit hermitien.

**Définition et proposition 1.32** Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction telle que  $r \mapsto r w(r) \in L^1([0; 1])$ . On définit sur  $\mathcal{D}_w$  une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_w} : \begin{cases} \mathcal{D}_w \times \mathcal{D}_w & \rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) & \mapsto f(0)\overline{g(0)} + \int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)} w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \end{cases} .$$

Cette application munit  $\mathcal{D}_w$  d'une structure d'espace préhilbertien.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_w}$ .

Nous étudions maintenant les cas où un espace de Dirichlet pondéré peut être inclus dans un autre.

**Proposition 1.33** *Soient  $v, w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  telles que  $r \mapsto rv(r)$  et  $r \mapsto rw(r) \in L^1([0; 1])$ . On suppose qu'il existe  $M > 0$  tel que, pour presque tout  $r \in [0; 1[$ ,*

$$w(r) \leq Mv(r).$$

*Alors,  $\mathcal{D}_v \subset \mathcal{D}_w$  et l'inclusion  $\mathcal{D}_v \hookrightarrow \mathcal{D}_w$  est continue.*

*Démonstration :* Il suffit de montrer qu'il existe  $A > 0$  tel que, pour toute  $f \in \mathcal{D}_v$ , nous avons  $f \in \mathcal{D}_w$  et

$$\|f\|_{\mathcal{D}_w}^2 \leq A \|f\|_{\mathcal{D}_v}^2.$$

Fixons  $f \in \mathcal{D}_v$ . Pour presque tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$|f'(z)|^2 w(r) \leq M |f'(z)|^2 v(r).$$

Par croissance de l'intégrale, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 w(r) \, dr \leq M \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 v(r) \, dr$$

En ajoutant  $|f'(0)|^2$  de chaque côté, et en prenant une constante  $A > 0$  tel que  $A \geq 1$  et  $A \geq M$ , nous avons finalement

$$\|f\|_{\mathcal{D}_w}^2 \leq A \|f\|_{\mathcal{D}_v}^2,$$

ce qui termine la preuve. □

En particulier, nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire 1.34** *Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction telle que  $r \mapsto rw(r) \in L^1([0; 1])$ . Soit  $\alpha : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  telle qu'il existe  $m$  et  $M \in \mathbb{R}^{+*}$  vérifiant, pour presque-tout  $r \in [0; 1[$ ,  $0 < m \leq \alpha(r) \leq M < +\infty$ .*

*Alors, les espaces vectoriels  $\mathcal{D}_w$  et  $\mathcal{D}_{\alpha w}$  sont identiques, et les normes  $\|\cdot\|_w$  et  $\|\cdot\|_{\alpha w}$  sont équivalentes sur ces espaces.*

*Démonstration :* On raisonne par double inclusion, en appliquant deux fois la proposition 1.33 précédente. □

Une propriété remarquable du produit hermitien sur  $\mathcal{D}_w$  est de se décrire sous une autre façon qui fait intervenir les coefficients de Taylor des fonctions en question.

**Proposition 1.35** *Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction telle que  $r \mapsto rw(r) \in L^1([0; 1])$ . Soient  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $g = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$  deux fonctions de  $\mathcal{D}_w$ .*

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , définissons  $w_n = 2n^2 \int_0^1 r^{2n-1} w(r) dr$ . Posons également  $w_0 = 1$ .

Alors,

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}_w} = \sum_{n \geq 0} w_n a_n \bar{b}_n.$$

*Démonstration* : Commençons par remarquer que les théorèmes de Fubini et Fubini-Tonelli permettent de justifier rigoureusement la validité des calculs (formels) suivants. Soit  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathcal{D}_w$ . Alors,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{D}_w}^2 &= |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} \left( \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} \right) \left( \sum_{m \geq 1} m \bar{a}_m \bar{z}^{m-1} \right) w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \\ &= |f(0)|^2 + \sum_{m, n \geq 1} \int_{\mathbb{D}} n a_n z^{n-1} m \bar{a}_m \bar{z}^{m-1} w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \\ &= |f(0)|^2 + \sum_{m, n \geq 1} \int_0^1 n m a_n \bar{a}_m r^{n+m-2} w(r) \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \right) r dr \\ &= |f(0)|^2 + \sum_{n \geq 1} \int_0^1 n^2 |a_n|^2 r^{2n-2} w(r) 2r dr \\ &= |f(0)|^2 + \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 2n^2 \int_0^1 r^{2n-1} w(r) dr \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

Notons en particulier le corollaire suivant.

**Corollaire 1.36** Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction bornée. Soit  $(w_n)_n$  la suite de coefficients donnée par la proposition 1.35. Alors, il existe  $M \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|e_n\|_{\mathcal{D}_w}^2 = w_n \leq M n.$$

*Démonstration* : Soit  $A \in \mathbb{R}^{+*}$  un majorant de  $w$ . Il découle alors directement de la proposition précédente que  $w_n \leq 2n^2 A \int_0^1 r^{2n-1} dr = n A$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ceci fournit le résultat souhaité. □

**Corollaire 1.37** Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction telle que  $r \mapsto r w(r) \in L^1([0; 1])$ . On suppose que, pour tout  $q \in ]0; 1]$ , la suite  $\left( \frac{q^n}{w_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Alors, l'espace  $(\mathcal{D}_w, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_w})$  est un espace de Hilbert.

*Démonstration* : Soit  $(w_n)_n$  la suite de coefficients donnée par la proposition 1.35. D'après la proposition 1.35, l'application linéaire

$$U : \begin{cases} \mathcal{D}_w & \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}, w) \\ f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n & \mapsto (a_n)_n \end{cases}$$

est une isométrie.

Nous montrons maintenant que  $U$  est un isomorphisme. Comme nous savons déjà que  $U$  est une isométrie, il suffit de montrer que  $U$  est surjectif. Soit  $(a_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}, w)$ . Cela signifie que la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 w_n$  converge. Or, nous savons que  $w_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}}(n)$ . Pour tout  $q \in ]0; 1[$ , considérons la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n| q^n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|a_n| q^n \leq (1 + |a_n|^2) q^n \leq q^n + |a_n|^2 w_n \frac{q^n}{w_n},$$

et donc la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n| q^n$  converge. Ceci prouve que la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  a un rayon de convergence supérieur à 1. En notant alors  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , on vérifie directement que  $f \in \mathcal{D}_w$  et que  $U(f) = (a_n)_n$ .

Comme  $U$  est un isomorphisme isométrique, et comme  $\ell^2(\mathbb{N}, w)$  est un espace de Hilbert, nous avons bien montré que  $\mathcal{D}_w$  est un espace de Hilbert.  $\square$

La description du produit hermitien qui fait intervenir les coefficients de Taylor permet de démontrer un grand nombre de propriétés essentielles des espaces de Dirichlet pondérés.

**Proposition 1.38** *Soit  $w : ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction telle que  $r \mapsto r w(r) \in L^1([0; 1])$ . On suppose que, pour tout  $q \in ]0; 1[$ , la suite  $\left(\frac{q^n}{w_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Alors,  $\mathbb{C}[z]$  est dense dans l'espace  $\mathcal{D}_w$ .*

*Démonstration* : Soit  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathcal{D}_w$ . Pour  $N \in \mathbb{N}$ , on considère  $P_N(f) = \sum_{n=0}^N a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$ .

On a alors, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\|f - P_N(f)\|_{\mathcal{D}_w}^2 = \sum_{n \geq N+1} |a_n|^2 w_n$ , ce qui prouve que  $P_N(f) \rightarrow f$  dans  $\mathcal{D}_w$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$  et montre le résultat souhaité.  $\square$

Rappelons que pour  $\omega \in \mathbb{D}$ , nous notons  $\delta_\omega : \mathcal{D}_w \rightarrow \mathbb{C}$  la forme linéaire (non nécessairement continue) correspondant à l'évaluation en  $\omega$ . L'étude de ces formes linéaires (et, en particulier, de leur continuité) nous permettra d'établir la continuité de l'inclusion  $\mathcal{D}_w \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$ .

**Proposition 1.39** *Soit  $w : ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction telle que  $r \mapsto r w(r) \in L^1([0; 1])$ . On suppose que, pour tout  $q \in ]0; 1[$ , la suite  $\left(\frac{q^n}{w_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Alors, l'évaluation en 0 est continue et  $\|\delta_0\| = 1$ .*

*Démonstration* : Il découle directement de l'expression de la norme hilbertienne sur  $\mathcal{D}_w$  que  $\delta_0$  est continue et que  $\|\delta_0\| \leq 1$ . On montre ensuite aisément que  $\|\delta_0\| = 1$  grâce à la fonction constante et égale à 1.  $\square$

**Proposition 1.40** *Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction telle que  $r \mapsto r w(r) \in L^1([0; 1])$ . Soit  $(w_n)_n$  la suite de coefficients associée à  $w$  (elle est donnée par la proposition 1.35). On suppose que, pour tout  $q \in ]0; 1]$ , la suite  $\left(\frac{q^n}{w_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Soit  $\omega \in \mathbb{D}$ .*

*Alors, la forme linéaire  $\delta_\omega$  est continue et  $\|\delta_\omega\| = \sqrt{\sum_{n \geq 0} \frac{|\omega|^{2n}}{w_n}}$ .*

*Démonstration* : Comme la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{|\omega|^{2n}}{w_n}$  converge, nous avons  $K_\omega = \sum_{n \geq 0} \frac{\bar{\omega}^n}{w_n} z^n \in \mathcal{D}_w$ . Un calcul direct montre alors que, pour tout  $f \in \mathcal{D}_w$ ,  $f(\omega) = \langle f, K_\omega \rangle$ . Ainsi, l'évaluation en  $\omega$  est une forme linéaire continue et  $\|\delta_\omega\| = \|K_\omega\|$ .  $\square$

La preuve de ce résultat donne une caractérisation des noyaux reproduisants sur les espaces  $\mathcal{D}_w$ .

**Proposition 1.41** *Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction telle que  $r \mapsto r w(r) \in L^1([0; 1])$ . Soit  $(w_n)_n$  la suite de coefficients associée à  $w$  (elle est donnée par la proposition 1.35). On suppose que, pour tout  $q \in ]0; 1]$ , la suite  $\left(\frac{q^n}{w_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Pour  $\omega \in \mathbb{D}$ , on définit une fonction  $K_\omega : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  par*

$$\forall z \in \mathbb{D}, K_\omega(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\bar{\omega}^n}{w_n} z^n.$$

*Alors, pour tout  $\omega \in \mathbb{D}$ ,  $K_\omega \in \mathcal{D}_w$ . De plus,  $(K_\omega)_{\omega \in \mathbb{D}}$  est un noyau reproduisant sur  $\mathcal{D}_w$ .*

*En particulier, l'inclusion  $\mathcal{D}_w \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est alors continue.*

*Démonstration* : La preuve est similaire à celle de la proposition 1.40.  $\square$

Notons les cas particuliers suivants :

**Lemme 1.42** *Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $w : r \mapsto (1 - r^2)^\alpha$ . Alors, les coefficients  $(w_n)_n$  donnés par la proposition 1.35 qui décrivent le produit hermitien sur  $\mathcal{D}_w$  sont bien tels que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{|\omega|^{2n}}{w_n}$  converge pour tout  $\omega \in \mathbb{D}$ .*

*En particulier, l'inclusion  $\mathcal{D}_w \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est alors continue.*

Ce cas particulier est traité spécifiquement et avec plus de détail ci-après : il s'agit du cas des espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ . Pour l'instant, nous poursuivons notre étude des espaces  $\mathcal{D}_w$ .

**Corollaire 1.43** *On suppose que  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  est une fonction telle que  $r \mapsto rw(r) \in L^1([0; 1[)$  et qu'il existe  $r_0 \in [0; 1[$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $C \in \mathbb{R}^{+*}$  tels que, pour tout  $r \in [r_0; 1[$ ,  $w(r) \geq C(1-r)^\alpha$ .*

*Alors les coefficients  $(w_n)_n$  donnés par la proposition 1.35 sont bien tels que  $\sum_{n \geq 0} \frac{|\omega|^{2n}}{w_n}$  converge pour tout  $\omega \in \mathbb{D}$ .*

*En particulier, l'inclusion  $\mathcal{D}_w \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est alors continue.*

Terminons par un résultat sur les « évaluations en un point du bord ».

**Lemme 1.44** *Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction bornée. Soit  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ .*

*Il n'existe pas d'opérateur  $T$  continu sur  $\mathcal{D}_w$  et tel que, pour tout  $P \in \mathbb{C}[z]$ , on ait  $T(P) = P(e^{i\theta})$ .*

*Démonstration :* Comme  $w$  est bornée, il découle de la définition des coefficients  $(w_n)_n$  (voir le corollaire 1.36) que  $w_n = O(n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Pour  $n \geq 1$ , posons alors  $f_n = \frac{1}{n(1 + \ln n)^{\frac{3}{4}}} e^{-in\theta}$  et considérons la fonction  $f = \sum_{n \geq 1} f_n z^n$ . Remarquons que  $f \in \mathcal{D}_w$ . En effet,  $\sum_{n \geq 1} |f_n|^2 w_n = \sum_{n \geq 1} \frac{w_n}{n^2 (1 + \ln n)^{\frac{3}{2}}}$  et  $\frac{w_n}{n^2 (1 + \ln n)^{\frac{3}{2}}} = O\left(\frac{1}{n(1 + \ln n)^{\frac{3}{2}}}\right)$  pour  $n \rightarrow +\infty$ .

D'autre part, pour  $N \in \mathbb{N}$ , posons  $f_N = \sum_{n=0}^N f_n z^n$ . Alors, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $f_N \in \mathbb{C}[z]$  et  $f_N(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n(1 + \ln n)^{\frac{3}{4}}}$ . Ainsi la suite  $f_N(e^{i\theta}) \rightarrow +\infty$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , mais  $f_N \rightarrow f$  dans  $\mathcal{D}_w$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

### Cas particulier : espaces $\mathcal{D}_\alpha$

Nous étudions ici un cas particulier des espaces  $\mathcal{D}_w$ , qui généralise dans un même cadre les cas des espaces de Hardy, Dirichlet et Bergman : il s'agit des espaces  $\mathcal{D}_w$  dans le cas où le poids est de la forme  $w : r \mapsto (1-r^2)^\alpha$  pour un paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

**Définition 1.45** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . L'espace de Dirichlet pondéré  $\mathcal{D}_\alpha$  est l'espace vectoriel formé des fonctions  $f$  holomorphes définies sur  $\mathbb{D}$  et telles que la quantité  $\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi}$  est finie.*

*En d'autres termes,  $\mathcal{D}_\alpha$  est l'espace  $\mathcal{D}_w$  pour la fonction  $w : r \mapsto (1-r^2)^\alpha$ .*

Dans la suite, et sauf mention explicite du contraire,  $\alpha$  désignera toujours un réel positif.

Dans le cas des espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ , on peut calculer explicitement les coefficients qui interviennent dans la description du produit hilbertien en fonction des coefficients de Taylor (cf. la proposition 1.35).

**Proposition 1.46** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Les coefficients permettant de décrire le produit hermitien sur  $\mathcal{D}_\alpha$  (définis à la proposition 1.35) sont donnés par*

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = n \frac{n!}{(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n)} \end{cases} .$$

En particulier, si  $f \in \mathcal{D}_\alpha$  et si  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  est le développement en série entière de  $f$  au voisinage de 0, alors

$$\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 = |f(0)|^2 + \sum_{n \geq 1} n \frac{n!}{(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n)} |a_n|^2.$$

*Démonstration* : D'après la proposition 1.35, nous savons que  $w_0 = 1$  et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$w_n = 2n^2 \int_0^1 r^{2n-1} w(r) \, dr$$

où  $w : r \mapsto (1 - r^2)^\alpha$ . On montre alors par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  (grâce à des intégrations par parties successives) que

$$\int_0^1 u^n (1 - u)^\alpha \, du = \frac{n!}{(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n + 1)}.$$

Ceci clôt la preuve. □

Les résultats de la sous-partie précédente s'appliquent en particulier aux espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ . Mentionnons en particulier les corollaires suivants (ce sont respectivement des corollaires des propositions 1.38, 1.40, 1.28 et 1.33).

**Proposition 1.47** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Alors,  $\mathbb{C}[z]$  est dense dans l'espace  $\mathcal{D}_\alpha$ .*

**Proposition 1.48** *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , pour tout  $\omega \in \mathbb{D}$ ,  $\delta_\omega$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{D}_\alpha$ .*

**Proposition 1.49** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . La convergence dans  $\mathcal{D}_\alpha$  implique la convergence uniforme sur tout compact. En d'autres termes, l'inclusion  $\mathcal{D}_\alpha \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est continue.*

**Proposition 1.50** *Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ . Supposons que  $\alpha \leq \beta$ . Alors,  $\mathcal{D}_\alpha$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}_\beta$ .*

Le cas où  $\alpha = 0$  est assez spécifique et mérite d'être détaillé.

**Définition 1.51** *L'espace de Dirichlet  $\mathcal{D}$  est l'espace de Dirichlet pondéré pour  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire  $\mathcal{D}_0$ .*

L'espace de Dirichlet est un espace que l'on pourrait qualifier de plus « habituel » que les espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ . À ce titre, l'étude de  $\mathcal{D}$  et des opérateurs définis sur  $\mathcal{D}$  fait l'objet d'un nombre considérable de travaux. Le livre d'El-Fallah, Kellay, Mashregi et Ransford ([31]), ou encore l'article d'Arcozzi, Rochberg, Sawyer et Wick ([7]) permettent d'avoir un bon aperçu des résultats connus sur  $\mathcal{D}$ .

Sur cet espace particulier, nous pouvons par exemple expliciter les coefficients qui interviennent lorsque l'on décrit la norme à l'aide des coefficients du développement en série entière, ou encore calculer explicitement le noyau reproduisant sur cet espace.

**Proposition 1.52** *Les coefficients permettant de décrire le produit hermitien sur  $\mathcal{D}$  (définis à la proposition 1.35) sont donnés par*

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = n \end{cases} .$$

En particulier, si  $f \in \mathcal{D}$  et si  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  est le développement en série entière de  $f$  au voisinage de 0, alors

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |f(0)|^2 + \sum_{n \geq 1} n |a_n|^2.$$

Les noyaux reproduisants pour  $\mathcal{D}$  sont donc donnés par

$$\forall \omega \in \mathbb{D}, K_\omega : z \mapsto 1 + \log(1 - \bar{\omega}z).$$

### B.3 — Autres exemples d'espaces de Hilbert de fonctions holomorphes

Nous mentionnons ici deux autres types d'espaces de Hilbert de fonctions holomorphes sur le disque unité. Il s'agit d'une part des espaces de Bergman généralisés et d'autre part des espaces de Hardy pondérés. Nous décrivons également le lien qu'entretiennent ces espaces avec les espaces de Dirichlet pondérés décrits précédemment.

#### B.3.a) — Espaces de Bergman généralisés

Les espaces de Bergman se définissent de façon similaire aux espaces de Dirichlet, sauf que la dérivée est remplacée par la fonction de départ dans l'expression intégrale.

**Définition 1.53** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . L'espace de Bergman pondéré  $\mathcal{B}_\alpha$  est l'espace vectoriel formé des fonctions  $f$  holomorphes définies sur  $\mathbb{D}$  et telles que la quantité  $\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi}$  est finie.*

Lorsque  $\alpha = 0$ , l'espace  $\mathcal{B}_0$  est parfois noté simplement  $\mathcal{B}$  et est alors appelé l'espace de Bergman.

D'une façon similaire à celle des espaces de Dirichlet, on peut voir la quantité précédente comme découlant d'une norme hilbertienne.

**Définition et proposition 1.54** On définit sur  $\mathcal{B}_\alpha$  une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}_\alpha}$  (ou simplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) par

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{B}_\alpha} = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi}.$$

L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}_\alpha}$  définit sur  $\mathcal{B}_\alpha$  un produit scalaire et  $\mathcal{B}_\alpha$  est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire.

Pour la norme induite par ce produit scalaire, l'inclusion  $\mathcal{B}_\alpha \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est continue.

Les espaces de Bergman sont reliés aux espaces de Dirichlet de la façon suivante :

**Proposition 1.55** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Alors,

- (i) les espaces vectoriels  $\mathcal{D}_{\alpha+2}$  et  $\mathcal{B}_\alpha$  sont les mêmes ;
- (ii) les normes hilbertiennes sur  $\mathcal{D}_{\alpha+2}$  et  $\mathcal{B}_\alpha$  sont équivalentes.

### B.3.b) — Espaces de Hardy

Nous présentons ici une autre façon de définir des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  : il s'agit des espaces de Hardy pondérés, qui se définissent en faisant intervenir les coefficients de Taylor.

**Définition 1.56** Soit  $\beta = (\beta_n)_n \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$  une suite de poids. L'espace de Hardy pondéré par  $\beta$  est l'espace vectoriel  $H^2(\beta)$  des fonctions  $f$  holomorphes sur  $\mathbb{D}$  et telles que, si  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  est

le développement en série entière de  $f$  en 0, la somme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n |a_n|^2$  est finie.

Remarquons que pour  $\alpha = 1$ , nous retrouvons l'espace de Hardy « usuel » (c'est-à-dire non pondéré). On peut par exemple trouver une présentation détaillée de cet espace dans le livre de Martínez-Avendaño et Rosenthal ([45], principalement le premier chapitre).

Ces espaces peuvent également être munis d'une structure hilbertienne.

**Définition et proposition 1.57** Soit  $\beta$  un poids. On définit sur  $H^2(\beta)$  une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\beta)}$  (ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) par

$$\left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n, \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n \right\rangle_{H^2(\beta)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n a_n \overline{b_n}.$$

Cette application fait de  $H^2(\beta)$  un espace de Hilbert.

De plus, pour cette norme, l'inclusion  $H^2(\beta) \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est continue.

Nous étudions maintenant deux cas particuliers qui nous permettent de voir les espaces de Dirichlet pondérés  $\mathcal{D}_\alpha$  comme des espaces de Hardy pondérés. Nous présentons deux techniques permettant ceci : d'abord, nous le faisons au moyen d'un isomorphisme continu ; ensuite, au moyen d'un opérateur unitaire.

**Définition 1.58** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . On définit l'espace de Hardy pondéré  $H^2(\alpha)$  comme étant l'espace de Hardy pondéré pour les coefficients  $\beta_n = (n+1)^{1-\alpha}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**Théorème 1.59** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Alors,

- (i) les espaces vectoriels  $\mathcal{D}_\alpha$  et  $H^2(\alpha)$  sont égaux;
- (ii) les normes hilbertiennes sur ces espaces sont équivalentes.

*Démonstration* : Soit  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Comme

$$n \frac{n!}{(\alpha+1) \cdots (\alpha+n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1)^{1-\alpha},$$

il vient que la série  $\sum_{n \geq 1} n \frac{n!}{(\alpha+1) \cdots (\alpha+n)} |a_n|^2$  converge si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 1} (n+1)^{1-\alpha} |a_n|^2$  converge. La proposition 1.46 prouve alors le point (i) du théorème. Le point (ii) se montre d'une façon similaire.  $\square$

Si on souhaite voir les espaces de Dirichlet généralisés  $\mathcal{D}_\alpha$  comme des espaces de Hardy avec la même norme (et non seulement à norme équivalente près), il suffit de prendre la forme générale des coefficients donnée par la proposition 1.46.

**Théorème 1.60** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $\beta$  la suite définie par  $\beta_0 = 1$  et  $\beta_n = \sqrt{n \frac{n!}{(\alpha+1) \cdots (\alpha+n)}}$  pour  $n \geq 1$ . Alors, l'application  $I : \begin{cases} H^2(\beta) & \rightarrow \mathcal{D}_\alpha \\ f & \mapsto f \end{cases}$  est un isomorphisme unitaire d'espaces de Hilbert.

Dans le cas où  $\beta$  est la suite associée à un certain  $\alpha$  par le théorème ci-dessus, nous noterons  $H^2(\beta) = \mathcal{D}_\alpha$  (pour dire que les espaces sont égaux en tant qu'espaces hilbertiens (et non seulement égaux en tant qu'espaces vectoriels avec deux normes équivalentes)).

### B.3.c) — Espace $H^2(\mathbb{D})$

Nous prenons le temps d'étudier un cas très particulier des espaces précédents : il s'agit de l'espace de Hardy « standard », noté  $H^2(\mathbb{D})$ . Commençons par le définir.

**Définition 1.61** L'espace de Hardy du disque unité est l'espace  $H^2(\beta)$  pour la suite constante  $\beta \equiv 1$ . On le note  $H^2(\mathbb{D})$ .

L'objectif principal de ce passage est de montrer comment on peut voir  $H^2(\mathbb{D})$  comme un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{T})$  en passant aux limites radiales. Avant de montrer ce résultat, nous commençons par établir une nouvelle expression de la norme sur  $H^2(\mathbb{D})$ .

**Proposition 1.62** Soit  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Soit

$$\varphi : \begin{cases} ]0; 1[ & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ r & \longmapsto \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \end{cases} .$$

Alors, la fonction  $\varphi$  est bien définie, croissante et

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \varphi(r) = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

**Corollaire 1.63** *L'espace  $H^2(\mathbb{D})$  peut être décrit de la façon suivante :*

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty \right\}.$$

De plus, la norme hilbertienne sur  $H^2(\mathbb{D})$  est décrite, pour toute  $f \in H^2(\mathbb{D})$ , par

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2.$$

Nous prouvons la proposition 1.62.

*Démonstration :* Soit  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Remarquons que, pour tout  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ , nous avons

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})|^2 &= f(re^{i\theta}) \overline{f(re^{i\theta})} \\ &= \left( \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \times \left( \sum_{m \geq 0} \overline{a_m} \overline{z^m} \right) \\ &= \sum_{m, n \geq 0} a_n \overline{a_m} r^{2n} e^{i(n-m)\theta} \quad (\text{d'après le théorème de Fubini-Tonelli}) \end{aligned}$$

Soit  $r \in [0; 1[$ . Pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ , et pour tout  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ , la série  $\sum_{n \geq 0} r^{2n} |a_n|$  est convergente (car le rayon de convergence de  $f$  est supérieur ou égal à 1). Nous obtenons ainsi, d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \sum_{m, n \geq 0} |a_n \overline{a_m} r^{2n} e^{i(n-m)\theta}| &= \sum_{m, n \geq 0} r^{2n} |a_n| |a_m| \\ &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n} |a_n| \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} r^{2m} |a_m| \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Cette quantité étant indépendante de  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ , nous déduisons du théorème de Fubini-Tonelli que la fonction

$$\chi : \begin{cases} (\mathbb{N})^2 \times \mathbb{T} & \rightarrow \mathbb{C} \\ ((m, n), e^{i\theta}) & \mapsto r^{2n} a_n \overline{a_m} e^{i(n-m)\theta} \end{cases}$$

est intégrable sur  $(\mathbb{N})^2 \times \mathbb{T}$ . Nous pouvons alors appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} &= \sum_{m, n \geq 0} r^{2n} a_n \overline{a_m} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-m)\theta}}{2\pi} d\theta}_{\begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}} \\ &= \sum_{n \geq 0} r^{2n} |a_n|^2. \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout  $r \in [0; 1[$ , nous avons que la fonction  $\varphi$  est bien définie et croissante. Remarquons par ailleurs que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $r \mapsto r^{2n} |a_n|^2$  est croissante. Le résultat d'interversion de limite et somme découle alors du théorème de Beppo Levi. Ceci achève la preuve.  $\square$

Avant de poursuivre notre étude de  $H^2(\mathbb{D})$ , nous montrons que les fonctions holomorphes et bornées sont dans  $H^2(\mathbb{D})$ .

**Définition et proposition 1.64** *Soit*

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \|f\|_{\infty, \mathbb{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < +\infty \right\}.$$

Alors,  $(H^\infty(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{\infty, \mathbb{D}})$  est un espace de Banach de fonctions holomorphes continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . De plus,  $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$ .

*Démonstration* : Nous voyons directement que  $(H^\infty(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{\infty, \mathbb{D}})$  est un espace de Banach de fonctions holomorphes continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Nous nous restreignons donc à montrer l'inclusion  $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$ .

Soit  $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ . Alors, pour tout  $r \in ]0; 1[$ , nous avons

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} M^2 \frac{d\theta}{2\pi} = M^2.$$

Alors, d'après la description de la norme sur  $H^2(\mathbb{D})$  donnée par le corollaire 1.63, nous avons bien que  $f \in H^2(\mathbb{D})$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous montrons maintenant comment il est possible de voir l'espace  $H^2(\mathbb{D})$  comme un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{T})$ . Pour cela, nous aurons besoin de considérer le noyau de Poisson, que nous définissons de la façon suivante : pour tout  $r \in [0; 1[$ , posons

$$P_r : \begin{cases} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2} = \Re \left[ \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \right]. \end{cases}$$

Introduisons encore quelques notations : nous noterons  $\star$  le produit de convolution usuel (on pourra se rapporter au livre de Brezis [17], notamment la partie IV.4).

Pour  $f \in L^2(\mathbb{T})$  et  $r \in [0; 1[$ , nous noterons

$$f_r \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\theta} \mapsto f \star P_r(\theta) \in L^2(\mathbb{T}).$$

Nous noterons  $\mathcal{P}[f] : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie pour tout  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$  par

$$P[f](re^{i\theta}) = f_r(e^{i\theta}) = (f \star P_r)(e^{i\theta}).$$

Par ailleurs, si  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  est bien définie, nous noterons  $f_{(r)}$  la restriction de  $f$  au cercle de centre 0 et de rayon  $r$ .

Enfin, rappelons que si  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , nous noterons  $\widehat{f}$  la transformée de Fourier de  $f$ , et  $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  les coefficients de Fourier.

Nous commençons par énoncer un lemme technique qui rappelle les propriétés du noyau de Poisson. Nous ne prouvons pas le résultat en question, mais renvoyons au livre de Rudin ([57], chapitre 11, théorèmes 11.7, 11.16 et 11.24) pour plus de détails.

**Lemme 1.65 (admis)** *Soit  $f \in L^2(\mathbb{T})$ .*

*Alors,  $f_r \xrightarrow{r \rightarrow 1} f$  dans  $L^2(\mathbb{T})$ . De plus, la convergence radiale échoit presque sûrement : pour presque tout  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ ,  $f_r(e^{i\theta}) \rightarrow f(e^{i\theta})$ .*

*D'autre part, pour tout  $r \in [0; 1[$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\widehat{f}_r(n) = r^n \widehat{f}(n)$ .*

*Enfin, la fonction  $P[f]$  est harmonique sur  $\mathbb{D}$  et, pour tout  $r \in [0; 1[$ ,  $(P[g])_{(r)} = g_r$ .*

Nous allons maintenant utiliser le noyau de Poisson pour montrer que l'on peut voir  $H^2(\mathbb{D})$  comme un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{T})$ . Nous suivons ici une approche classique, présentée par exemple par Nikolski dans [46] (partie A, chapitre 3). Nous commençons par définir l'espace de Hardy du cercle unité, qui sera l'analogue dans  $L^2(\mathbb{T})$  de  $H^2(\mathbb{D})$ .

**Définition et proposition 1.66** *L'espace de Hardy du cercle unité est l'espace*

$$H^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) \mid \forall n < 0, \widehat{f}(n) = 0 \right\}.$$

*L'espace  $H^2(\mathbb{T})$  est un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{T})$ .*

Remarquons que, pour toute  $f \in H^2(\mathbb{T})$ , l'écriture de  $f$  comme somme de sa série de Fourier nous donne que  $f = \sum_{n \geq 0} \widehat{f}(n)(e^{i\theta})^n$ , avec  $\sum_{n \geq 0} |\widehat{f}(n)|^2 < +\infty$ .

L'objectif du théorème suivant est de préciser les liens entre les espaces  $H^2(\mathbb{D})$  et  $H^2(\mathbb{T})$ , notamment en montrant que l'on peut passer de l'un à l'autre en considérant des limites radiales.

**Théorème 1.67** *Soit  $f \in H^2(\mathbb{D})$ . Alors,  $f$  admet une limite radiale  $f^*$  dans presque toutes les directions : pour presque tout  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ ,  $r \mapsto f(re^{i\theta})$  admet une limite  $f^*(e^{i\theta})$  lorsque  $r \rightarrow 1$ .*

*De plus,  $f^* \in H^2(\mathbb{T})$ . Enfin,  $\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|_{H^2(\mathbb{T})}$ .*

*Réciproquement, si  $g \in H^2(\mathbb{T})$ , alors  $P[g] \in H^2(\mathbb{D})$  et  $g = (P[g])^*$ .*

*En résumé,*

$$U : \begin{cases} H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & f^* = e^{i\theta} \mapsto \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) \text{ presque partout} \\ P[g] & \longleftarrow & g \end{cases}$$

*est un isomorphisme unitaire d'espaces de Hilbert.*

**Remarque** Remarquons en particulier que, si  $f \in H^2(\mathbb{D})$ , alors  $f_{(r)} \rightarrow f^*$  dans  $L^2(\mathbb{T})$  lorsque  $r \rightarrow 1$ .

*Démonstration* : Commençons par esquisser le plan de la preuve :

1. Nous commençons par montrer que, si  $f \in H^2(\mathbb{D})$ , alors il existe  $g \in L^2(\mathbb{T})$  tel que  $f_{(r)} \rightharpoonup g$  faiblement dans  $L^2(\mathbb{T})$  et  $g \in H^2(\mathbb{T})$
2. Nous utilisons ensuite les propriétés du noyau de Poisson pour montrer que la convergence est en fait une convergence dans  $L^2$  et radialement dans presque toutes les directions.
3. Nous terminons en vérifiant le sens réciproque.

**Première étape** Soit  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in H^2(\mathbb{D})$ . Nous savons que, pour tout  $r \in [0; 1[$ , nous avons  $\|f_{(r)}\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$  (d'après la description de la norme sur  $H^2(\mathbb{D})$  donnée par le corollaire 1.63). Alors, d'après le théorème de Banach-Alaoglu (voir par exemple [17], théorème III.27), il existe une suite  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}} \in [0; 1[^\mathbb{N}$  telle que  $r_k \rightarrow 1$  et il existe  $g \in L^2(\mathbb{T})$  telle que  $f_{r_k} \rightharpoonup g$  faiblement dans  $L^2(\mathbb{T})$ . Commençons par caractériser  $g$  par ses coefficients de Fourier. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Comme  $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}(n)$  est une fonctionnelle continue sur  $L^2(\mathbb{T})$ , nous avons bien que  $\widehat{f_{r_k}}(n) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \widehat{g}(n)$ . Or, pour tout  $r \in [0; 1[$ , nous avons que  $\widehat{f_{r_k}}(n) = r^n a_n$  si  $n \geq 0$  et  $\widehat{f_{r_k}}(n) = 0$  si  $n < 0$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\widehat{g}(n) = \begin{cases} a_n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

En particulier, nous avons bien que  $g \in H^2(\mathbb{T})$ .

**Deuxième étape** Nous montrons maintenant que  $f_r \rightarrow g$  dans  $L^2(\mathbb{T})$  et radialement dans toutes les directions. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout  $r \in [0; 1[$ , nous avons  $f_{(r)} = g_r = g \star P_r$ . Fixons  $r \in [0; 1[$  et calculons les coefficients de Fourier de  $f_{(r)}$  et  $g_r$ . D'une part, comme nous l'avons vu précédemment

$$\widehat{f_{(r)}}(n) = \begin{cases} r^n a_n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

D'autre part, vu les propriétés du noyau de Poisson (lemme 1.65), nous avons que

$$\widehat{g_r}(n) = r^n \widehat{g}(n) = \begin{cases} r^n a_n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Ainsi, nous avons bien que  $f_{(r)} = g_r$  dans  $L^2(\mathbb{T})$ . Comme nous savons que  $g_r \rightarrow g$  dans  $L^2$  et radialement dans presque toutes les directions, nous pouvons dire que  $f_r \rightarrow g$  des mêmes façons.

Comme  $f_r \rightarrow g$  dans  $L^2(\mathbb{T})$ , nous avons bien que  $\|g\|_{L^2(\mathbb{T})} = \lim_{r \rightarrow 1} \|f_{(r)}\|$ . Or, d'après le corollaire 1.63, nous savons que  $\lim_{r \rightarrow 1} \|f_{(r)}\| = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$ . Ainsi, nous avons bien que  $\|g\|_{H^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$ .

**Troisième étape** Au vu des étapes précédentes, il nous suffit de prouver que, si  $g \in H^2(\mathbb{T})$ , alors  $P[g] \in H^2(\mathbb{D})$ . Nous savons que, pour tout  $r \in [0; 1[$  et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\widehat{g_r}(n) = r^{|n|} \widehat{g}(n)$ . En d'autres termes, pour tout  $r \in [0; 1[$  et pour presque tout  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ , nous avons bien

$$P[g](re^{i\theta}) = g_r(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g_r}(n) e^{in\theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) r^{|n|} e^{in\theta} .$$

Or, comme  $g \in H^2(\mathbb{T})$ , pour tout  $n < 0$ , nous avons  $\widehat{g}(n) = 0$  et  $\sum_{n \geq 0} |g_n|^2 = \|g\|^2 < +\infty$ . Ainsi,

$$P[g](re^{i\theta}) = \sum_{n \geq 0} \widehat{g}(n) r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Ceci prouve que  $P[g] \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  et que  $P[g] = \sum_{n \geq 0} \widehat{g}(n) z^n$  est le développement en série entière de  $P[g]$  en 0. Comme  $\sum_{n \geq 0} |g_n|^2 < +\infty$ , nous avons bien que  $P[g] \in H^2(\mathbb{D})$ . Nous pouvons alors appliquer à  $P[g]$  les résultats des étapes précédentes pour conclure la preuve.  $\square$

## B.4 — Espace de Hardy du demi-plan supérieur — Théorème de Paley-Wiener

Nous quittons momentanément le disque unité pour nous aventurer sur le demi-plan supérieur : dans cette partie, nous présentons l'espace de Hardy du demi-plan supérieur  $H^2(\Pi^+)$ . Plus précisément, après l'avoir défini, nous montrons des propriétés analogues à celles que nous avons montrées sur  $H^2(\mathbb{D})$ , notamment en montrant que  $H^2(\Pi^+)$  s'injecte isométriquement dans  $L^2(\mathbb{R})$  en passant à la limite non tangentielle. Un des éléments clefs de cette présentation sera le théorème de Paley-Wiener qui établit un isomorphisme unitaire entre  $H^2(\Pi^+)$  et  $L^2(\mathbb{R}^+)$  via la transformation de Fourier.

Commençons par une définition. Rappelons que l'on note  $\Pi^+$  le demi-plan supérieur ouvert.

**Définition 1.68** *On définit l'espace de Hardy du demi-plan supérieur de la façon suivante :*

$$H^2(\Pi^+) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ F \in \text{Hol}(\Pi^+) \mid \|F\|_{H^2(\Pi^+)}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

L'espace  $H^2(\Pi^+)$  est un espace vectoriel, et  $\|\cdot\|_{H^2(\Pi^+)}$  est une norme sur cet espace

Nous commençons par montrer un théorème attribué à Paley et Wiener ([49]). La preuve que nous détaillons ici est inspirée de celle présentée par Rudin dans [57] (chap. 19, thm 19.2).

**Théorème 1.69 (Paley-Wiener)** *Soit  $F \in H^2(\Pi^+)$ . Alors, il existe une unique  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$  telle que, pour tout  $Z \in \Pi^+$ ,*

$$F(Z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{itZ} dt,$$

et  $\|F\|_{H^2(\Pi^+)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ .

Réciproquement, si  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , alors la relation précédente définit une fonction  $F \in H^2(\Pi^+)$  telle que  $\|F\|_{H^2(\Pi^+)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ .

En résumé, on dispose d'un isomorphisme isométrique

$$\text{PW} : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ f & \longmapsto & \left( Z \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{itZ} dt \right) \end{cases}.$$

**Remarque** Le théorème de Paley-Wiener est fortement lié à la transformation de Fourier : en effet, si  $y > 0$  est fixé, alors la fonction  $x \mapsto F(x+iy)$  est la transformée de Fourier inverse de la fonction  $\varphi_y : t \mapsto f(t) e^{-ty} \in L^2(\mathbb{R})$ . Le fait que  $f$  soit à support dans  $\mathbb{R}^+$  peut être vu comme une propriété découlant de l'holomorphicité : l'analogue sur le disque unité serait de dire que la transformée de Fourier de  $f \in H^2(\mathbb{D})$  est à support dans  $\mathbb{N}$  car  $f$  est holomorphe.

Nous prouvons maintenant le théorème 1.69.

*Démonstration :* Nous commençons par montrer le sens direct. Soit  $F \in H^2(\Pi^+)$ . Commençons par donner une intuition de ce que l'on va faire. La relation que nous voulons montrer étant intimement liée à la transformation de Fourier : nous pouvons voir  $F$  comme le prolongement analytique de la transformée de Fourier inverse de  $f$ . Nous allons donc définir  $f$  à partir de la transformée de Fourier de  $F$ . Pour cela, nous montrons que la transformée de Fourier de la fonction  $f_y : x \mapsto F(x + iy) \in L^2(\mathbb{R})$  ne dépend « pas trop » de  $y$ , ce qui nous permettra de définir la fonction  $f$ .

Pour  $y > 0$ , notons  $f_y : x \mapsto F(x + iy) \in L^2(\mathbb{R})$ . Nous montrons que

$$\text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}, e^{ty} \widehat{f}_y(t) = e^t \widehat{f}_1(t).$$

Rappelons que, d'après le théorème de Plancherel, lorsque  $\alpha \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} F(x + iy) e^{-itx} \frac{dx}{2\pi} \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} \mathcal{F}(F_y),$$

et donc

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} F(x + iy) e^{-it(x+iy)} \frac{dx}{2\pi} \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} (t \mapsto e^{ty} \mathcal{F}(F_y)(t)).$$

Pour  $\alpha$  et  $y \in \mathbb{R}^{+*}$ , nous considérons le contour d'intégration rectangulaire suivant :

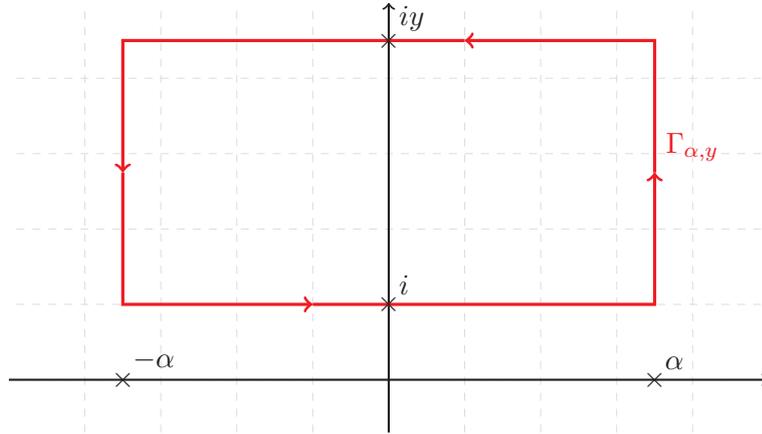


FIGURE 1.1 – Contour d'intégration  $\Gamma_\alpha$

Comme la fonction  $z \mapsto F(Z)e^{-itZ}$  est holomorphe sur  $\Pi^+$ , le théorème des résidus nous donne que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\int_{\Gamma_\alpha} F(Z)e^{-itZ} dZ = 0$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\int_{-\alpha}^{\alpha} F(x+i)e^{-it(x+i)} dx}_{=(1)} + \underbrace{\int_y^1 F(\alpha+is)e^{-it(\alpha+is)} ds}_{=(2)} + \dots & (\otimes) \\ &\dots - \underbrace{\int_{-\alpha}^{\alpha} F(x+iy)e^{-it(x+iy)} dx}_{=(3)} - \underbrace{\int_y^1 F(-\alpha+is)e^{-it(-\alpha+is)} ds}_{=(4)}. \end{aligned}$$

Fixons maintenant un  $t \in \mathbb{R}$ . Nous étudions le comportement des termes (2) et (4) lorsque  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Pour cela, remarquons que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , nous avons d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \int_y^1 F(\alpha + is) e^{-it(\alpha + is)} ds \right|^2 &\leq \left( \int_y^1 |F(\alpha + is) e^{-it(\alpha + is)}| ds \right)^2 \\ &\leq \int_y^1 |F(\alpha + is)|^2 ds \times \int_y^1 e^{2ts} dt. \end{aligned}$$

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , posons  $\Lambda(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_y^1 |F(\alpha + is)|^2 ds$ . Nous montrons que  $\Lambda \in L^1(\mathbb{R})$ . Ceci est une conséquence du théorème de Fubini-Tonelli. En effet,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\alpha) d\alpha &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_y^1 |F(\alpha + is)|^2 ds d\alpha \\ &= \int_y^1 \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\alpha + is)|^2 d\alpha ds \\ &\leq |1 - y| \times \|F\|_{H^2(\Pi^+)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\Lambda \in L^1(\mathbb{R})$ . En particulier, il existe une suite  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\alpha_j \rightarrow +\infty$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$ , et

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \Lambda(\alpha_j) + \Lambda(-\alpha_j) = 0.$$

Notons bien que, comme  $\Lambda$  ne dépend pas de  $t$ , la suite  $(\alpha_j)_j$  ne dépend pas de  $t$  non plus. En particulier, nous avons montré que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_y^1 F(\alpha_j + is) e^{-it(\alpha_j + is)} ds = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_y^1 F(\alpha_j + is) e^{-it(\alpha_j + is)} ds = 0.$$

De plus, comme nous avons, d'après le théorème de Plancherel,

$$\left( t \mapsto \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} F(x + i) e^{-it(x+i)} dx \right) \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} (t \mapsto e^t \mathcal{F}(F_1)(t))$$

et

$$\left( t \mapsto \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} F(x + iy) e^{-it(x+iy)} dx \right) \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} (t \mapsto e^{ty} \mathcal{F}(F_y)(t)),$$

il existe une extraction  $\varphi$  telle que

$$\text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}, \int_{-\alpha_{\varphi(j)}}^{\alpha_{\varphi(j)}} F(x + i) e^{-it(x+i)} dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} e^t \mathcal{F}(F_1)(t)$$

et

$$\text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}, \int_{-\alpha_{\varphi(j)}}^{\alpha_{\varphi(j)}} F(x + iy) e^{-it(x+iy)} dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} e^{ty} \mathcal{F}(F_y)(t).$$

Finalement, en passant à la limite dans l'égalité  $(\otimes)$  obtenue avec le théorème des résidus, nous avons bien obtenu que

$$e^{ty}\mathcal{F}(F_y)(t) = e^t\mathcal{F}(F_1)(t).$$

Posons alors

$$\text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}, f(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^t\mathcal{F}(F_1)(t).$$

Nous montrons que  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ . Nous commençons par montrer que, pour presque tout  $t < 0$ ,  $f(t) = 0$ . Pour cela, nous calculons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(F_y)(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dx \text{ d'après la formule de Plancherel} \\ &\leq \|F\|_{H^2(\Pi^+)}^2. \end{aligned}$$

La majoration ci-dessus étant uniforme en  $y$ , nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-ty} |f(t)|^2 dt = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty} |f(t)|^2 dt \leq \|F\|_{H^2(\Pi^+)}^2.$$

Ainsi, pour presque tout  $t < 0$ ,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-ty} |f(t)|^2 < +\infty.$$

Comme  $t < 0$ , nous avons finalement que  $f(t) = 0$ . Ainsi, pour presque tout  $t < 0$ ,  $f(t) = 0$ . Nous pouvons alors en déduire que, pour tout  $y > 0$ ,  $\mathcal{F}(F_y) \in L^2(\mathbb{R}^+)$ .

Pour montrer que  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , nous appliquons le théorème de convergence dominée dans le même cadre que ci-dessus, mais en prenant la limite pour  $y \rightarrow 0$ .

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-ty} |f(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt \leq \|F\|_{H^2(\Pi^+)}^2.$$

Ainsi, nous avons bien que  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ . De plus, nous avons montré que  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|F\|_{H^2(\Pi^+)}$ .

Nous montrons maintenant que, pour tout  $Z \in \Pi^+$ ,  $F(Z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{itZ} dt$ . Ceci découle de la formule d'inversion de Fourier. Soit  $Z = x+iy \in \Pi^+$ . Pour appliquer la formule d'inversion de Fourier, il nous faut vérifier que  $\mathcal{F}(F_y) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ . Ceci vient du fait que,

$$\text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}^+, \mathcal{F}(F_y)(t) = e^{-ty}f(y).$$

Or  $t \mapsto e^{-ty} \in L^2(\mathbb{R}^+)$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ . D'après l'inégalité de Hölder, nous avons bien montré que  $\mathcal{F}(F_y) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ . Nous avons donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f_y(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_y(t)e^{itx} dt \\ F(x+iy) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty}f(t)e^{itx} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it(x+iy)} dt. \end{aligned}$$

Ceci prouve le résultat souhaité, et termine la preuve du sens direct. Nous montrons maintenant le sens réciproque. Fixons  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ . Pour tout  $Z \in \Pi^+$ ,  $t \mapsto e^{itZ} \in L^2(\mathbb{R}^+)$ . On définit donc une fonction

$$F : \begin{cases} \Pi^+ & \rightarrow \mathbb{C} \\ Z & \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{itZ} dt \end{cases} .$$

Il nous reste à montrer que  $F \in H^2(\Pi^+)$  et que  $\|F\|_{H^2(\Pi^+)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ . Commençons par montrer que  $F \in \text{Hol}(\Pi^+)$ . Pour cela, nous montrons que, pour tout  $y_0 > 0$ ,  $F$  est holomorphe sur le demi-plan supérieur  $\Pi_{y_0}^+ = \{Z \in \mathbb{C} \mid \Im(Z) > y_0\}$ . Soit  $y_0 > 0$ . Alors :

- la fonction  $(t, Z) \mapsto f(t)e^{itZ}$  est mesurable sur  $\mathbb{R}^+ \times \Pi_{y_0}^+$  ;
- pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , la fonction  $Z \mapsto f(t)e^{itZ}$  est holomorphe sur  $\Pi_{y_0}^+$  ;
- pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , pour tout  $Z \in \Pi_{y_0}^+$ ,

$$|f(t)e^{itZ}| \leq |f(t)|e^{-ty_0},$$

et  $t \mapsto |f(t)|e^{-ty_0}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

D'après le théorème d'holomorphicité sous l'intégrale, nous avons que  $F$  est holomorphe sur  $\Pi_{y_0}^+$ . Ceci valant pour tout  $y_0 > 0$ , nous avons bien que  $F$  est holomorphe sur  $\Pi^+$ .

Montrons maintenant que  $F \in H^2(\Pi^+)$ . Soit  $y > 0$ . Notons  $\varphi_y : t \mapsto f(t)e^{-ty}$ . Alors, comme  $\varphi_y$  est un produit de deux fonctions dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$ ,  $\varphi_y \in L^1(\mathbb{R}^+)$ . Par ailleurs, comme  $\varphi_y$  est le produit d'une fonction dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$  par une fonction dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ ,  $\varphi_y \in L^2(\mathbb{R}^+)$ . Alors, d'après le théorème de Plancherel,  $\mathcal{F}(\varphi_y) \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\|\mathcal{F}(\varphi_y)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\varphi_y\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ . Par ailleurs, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi_y)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(t)e^{itx} dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ty}e^{itx} dx \\ &= F(x + iy). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_y(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2ty} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2. \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout  $y > 0$ , nous avons bien montré que  $F \in H^2(\Pi^+)$ . Ce faisant, nous avons également prouvé que  $\|F\|_{H^2(\Pi^+)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ . Ceci achève la preuve du théorème.  $\square$

L'objectif des résultats qui suivent est de montrer que l'on peut voir  $H^2(\Pi^+)$  comme un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$ . Ce résultat peut-être vu comme l'analogie sur le demi-plan supérieur du résultat dont nous disposons sur le disque unité (proposition 1.67).

Nous commençons par montrer (proposition 1.70) que toute fonction  $F \in H^2(\Pi^+)$  admet des limites verticales en presque tout point  $x \in \mathbb{R}$ . Le théorème de Paley-Wiener jouera un rôle clef dans cette preuve. À partir de ce résultat et grâce à un changement de variable adéquat, nous pourrons montrer le résultat que nous cherchons sur  $H^2(\Pi^+)$  en « transportant » le résultat que nous connaissons sur  $H^2(\mathbb{D})$  (proposition 1.72). Commençons par étudier l'existence des limites verticales. Le résultat suivant est l'analogie sur le demi-plan supérieur du lemme 1.65.

**Proposition et définition 1.70 (admis)** *Soit  $F \in H^2(\Pi^+)$ . Pour tout  $y \in \mathbb{R}^{+*}$ , considérons la fonction  $F_y : x \mapsto F(x + iy) \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors, la limite*

$$F^* \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} F_y \in L^2(\mathbb{R})$$

*existe et l'application*

$$L : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ F & \longmapsto F^* \end{cases}$$

*est une isométrie.*

*De plus, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , la limite  $\lim_{y \rightarrow 0} F(x + iy)$  existe et*

$$\lim_{y \rightarrow 0} F(x + iy) = F^*(x).$$

*On pose  $H^2(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} L(H^2(\Pi^+))$ .*

*Alors,  $L : H^2(\Pi^+) \rightarrow H^2(\mathbb{R})$  est un isomorphisme isométrique. En particulier, la norme sur  $H^2(\Pi^+)$  est hilbertienne.*

Nous énonçons maintenant un lemme technique qui décrit précisément le changement de variable que nous utiliserons pour passer de  $L^2(\mathbb{R})$  à  $L^2(\mathbb{T})$ , puis de  $H^2(\Pi^+)$  à  $H^2(\mathbb{D})$ .

**Lemme 1.71** *L'application*

$$U : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \rightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ F & \mapsto \left( e^{i\theta} \mapsto F\left(i \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) \times \frac{2\sqrt{\pi}}{1 - e^{i\theta}} \right) \end{cases}$$

*est un isomorphisme unitaire d'espaces de Hilbert. Son inverse est l'opérateur*

$$U^* : \begin{cases} L^2(\mathbb{T}) & \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto \left( x \mapsto f\left(\frac{x - i}{x + i}\right) \times \frac{1}{\sqrt{\pi}(x + i)} \right) . \end{cases}$$

*Démonstration :* On considère la transformation de Möbius

$$\omega : \begin{cases} \mathbb{T} & \rightarrow \mathbb{R} \\ e^{i\theta} & \mapsto i \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} , \end{cases}$$

dont l'inverse est décrit par

$$\omega^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{T} \\ x & \mapsto \frac{x - i}{x + i} . \end{cases}$$

Remarquons par ailleurs que  $\omega(D) = \Pi^+$ .

Les changements de variable associés s'écrivent  $x = i \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$  et  $e^{i\theta} = \frac{x - i}{x + i}$ . En particulier,

$$i e^{i\theta} d\theta = \frac{2i}{(x + i)^2} dx,$$

d'où l'on tire

$$d\theta = \frac{2}{x^2 + 1} dx = \frac{2}{|x + i|^2} dx \text{ et } dx = \frac{-2e^{i\theta}}{(1 - e^{i\theta})^2} d\theta.$$

Par ailleurs, on remarque que  $(1 - e^{i\theta})^2 = -e^{i\theta}(1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})$  et on obtient finalement

$$dx = \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|^2} d\theta$$

Il suffit alors d'appliquer les changements de variable précédents : si  $F \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 dx &= \int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\theta}) \frac{\sqrt{2}}{1 - e^{i\theta}} \right|^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\theta}) \frac{2\sqrt{\pi}}{1 - e^{i\theta}} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}, \end{aligned}$$

où on a posé  $f(e^{i\theta}) = F\left(i \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$ . Réciproquement, si  $f \in L^2(\mathbb{T})$ ,

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}(x + i)} \right|^2 dx,$$

où on a posé  $F(x) = f\left(i \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous montrons maintenant que  $U : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$  induit un isomorphisme unitaire de  $H^2(\mathbb{R})$  dans  $H^2(\mathbb{T})$ .

**Proposition 1.72** *Soit  $U : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$  l'isomorphisme unitaire défini dans la proposition 1.71. Alors,*

1. *pour toute  $F^* \in H^2(\mathbb{R})$ , on a  $U(F^*) \in H^2(\mathbb{T})$ , et  $\|U(F^*)\|_{H^2(\mathbb{T})} = \|F^*\|_{H^2(\mathbb{R})}$  ;*
2. *réciproquement, si  $f^* \in H^2(\mathbb{T})$ , alors  $U^{-1}(f^*) \in H^2(\mathbb{R})$  et  $\|U^{-1}(f^*)\|_{H^2(\mathbb{R})} = \|f^*\|_{H^2(\mathbb{T})}$ .*

*En d'autres termes, l'opérateur  $\tilde{U} : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow H^2(\mathbb{T})$  induit par  $U$  est un isomorphisme unitaire.*

*Démonstration* : La preuve du point 1 découle des résultats précédents : soit  $F^* \in H^2(\mathbb{R})$ . Rappelons que l'on dispose, d'après la proposition 1.70, d'un opérateur unitaire  $L : H^2(\Pi^+) \rightarrow H^2(\mathbb{R})$ . Alors,  $\|U(F^*)\|_{H^2(\mathbb{T})} = \|L^{-1}(F^*)\|_{H^2(\Pi^+)} = \|F^*\|_{H^2(\mathbb{R})}$ .

Montrons maintenant le point 2. Soit  $f^* \in H^2(\mathbb{T})$ . Posons  $F^* = U^{-1}(f^*) \in L^2(\mathbb{R})$ . Rappelons que l'on dispose d'un isomorphisme unitaire  $K : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(\mathbb{T})$  tel que, pour toute  $f \in H^2(\mathbb{D})$ ,  $K(f)$  est la limite radiale non-tangentielle de  $f$  dans presque toutes les directions (cf. le théorème 1.67). Soit  $f = K^{-1}(f^*) \in H^2(\mathbb{D})$ . On définit alors

$$F : \begin{cases} \Pi^+ & \longrightarrow \mathbb{C} \\ Z & \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}(Z+i)} \times f\left(\frac{Z-i}{Z+i}\right) \end{cases} \in \text{Hol}(\Pi^+).$$

Admettons que l'on a prouvé que  $F \in H^2(\Pi^+)$ . Alors, par le changement de variable détaillé dans le lemme 1.71, nous aurons que  $U(L(F)) = f$  (car les limites non tangentielles passent aux changements de variable conforme, d'après le théorème de Julia-Wolff-Carathéodory 1.17). Comme  $U$  et  $L$  sont des isométries, nous aurons bien le résultat souhaité.

Nous montrons alors que  $F \in H^2(\Pi^+)$ . L'argument clef est de montrer que, comme  $f$  peut être décrite comme la convolution par le noyau de Poisson sur le disque unité (lemme 1.65), un résultat similaire est vrai pour  $F$ . Nous utiliserons alors cette expression pour montrer que  $F \in H^2(\Pi^+)$ .

Soit  $z = re^{i\theta_0} \in \mathbb{D}$ . D'après les propriétés du noyau de Poisson (lemme 1.65), nous avons

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{i\theta}) \Re \left[ \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right] d\theta.$$

On fait alors le même changement de variable que dans le lemme 1.71. Soit

$$Z = x + iy = i \frac{1+z}{1-z} \in \Pi^+,$$

et  $z = \frac{Z-i}{Z+i} \in \mathbb{D}$ . Alors,

$$f\left(\frac{Z-i}{Z+i}\right) = f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t-i}{t+i}\right) \Re \left[ \frac{\frac{t-i}{t+i} + \frac{Z-i}{Z+i}}{\frac{t-i}{t+i} - \frac{Z-i}{Z+i}} \right] \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \Re \left[ \frac{\frac{t-i}{t+i} + \frac{Z-i}{Z+i}}{\frac{t-i}{t+i} - \frac{Z-i}{Z+i}} \right] &= \Re \left[ \frac{(t-i)(Z+i) + (Z-i)(t+i)}{(t-i)(Z+i) + (Z-i)(t+i)} \right] \\ &= \Re \left[ \frac{Zt+1}{i(t-Z)} \right] \\ &= \Re \left[ \frac{xt+1+ity}{y+i(t-x)} \right] \\ &= \Re \left[ \frac{y(1+t^2)}{(t-x)^2+y^2} \right] = \frac{y(1+t^2)}{(t-x)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{Z-i}{Z+i}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t-i}{t+i}\right) \frac{y(1+t^2)}{(t-x)^2+y^2} \frac{2 dt}{1+t^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t-i}{t+i}\right) \frac{y dt}{\pi((x-t)^2+y^2)}. \end{aligned}$$

On définit alors le noyau de Poisson du demi-plan supérieur par

$$P_y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Pour  $y > 0$ , notons  $F_y : x \mapsto F(x+iy)$  et  $\Phi_y : x \mapsto F(x+iy) \times \sqrt{\pi}(x+i(y+1)) = f\left(\frac{Z-i}{Z+i}\right)$ . Nous voulons montrer que, pour tout  $y > 0$ ,  $F_y \in L^2(\mathbb{R})$ . Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|F_y(x)| \leq |\Phi_y(x)|$ , il suffit de montrer que, pour tout  $y > 0$ ,  $\Phi_y \in L^2(\mathbb{R})$ .

Remarquons que, pour tout  $y > 0$ ,  $P_y \in L^1(\mathbb{R})$  et

$$\|P_y\|_{L^1(\mathbb{R})} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y dx}{x^2+y^2} = 1.$$

Fixons maintenant  $y > 0$ . Nous montrons que  $\Phi_y \in L^2(\mathbb{R})$ . D'après ce qui précède, nous avons  $\Phi_y = F^* \star P_y$ . Comme  $F^* \in L^2(\mathbb{R})$  et  $P_y \in L^1(\mathbb{R})$ , les propriétés du produit de convolution nous disent que  $\Phi_y \in L^2(\mathbb{R})$  et

$$\|\Phi_y\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|F^*\|_{L^2(\mathbb{R})} \times 1.$$

En particulier, pour tout  $y > 0$ ,  $\|F_y\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \pi \|f^*\|_{H^2(\mathbb{T})}$ . La majoration étant uniforme en  $y$ , nous avons bien prouvé que  $F \in H^2(\Pi^+)$ . Ceci conclut la preuve.  $\square$

Nous pouvons combiner les résultats précédents pour obtenir le théorème suivant.

**Théorème 1.73** *L'application*

$$I : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \\ F & \longmapsto \left( x \mapsto \lim_{y \rightarrow 0} F(x+iy) \right) \\ (Z = x+iy \mapsto g \star P_y(x)) & \longleftarrow g \end{cases}$$

*est un isomorphisme unitaire d'espaces de Hilbert, qui permet de voir  $H^2(\Pi^+)$  comme un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$*

**Résumé :** Le diagramme suivant commute et toutes les flèches sont isométriques.

Notons bien que  $U$  est un changement de variable pondéré (*cf.* le lemme 1.71).

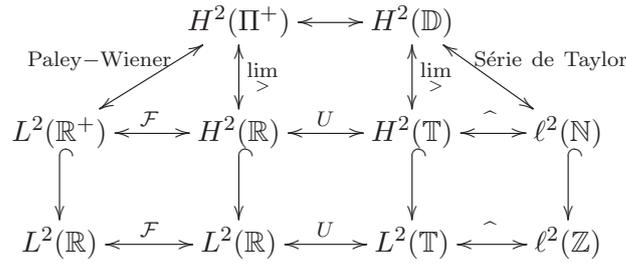


FIGURE 1.2 – Différentes versions de  $H^2(\Pi^+)$

### B.5 — Espaces de Hilbert de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles

Nous terminons cette partie de présentation des espaces de fonctions holomorphes par quelques notions sur les espaces de Hilbert de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles. Plus précisément, pour la suite de nos travaux, nous avons besoin de préciser ce que l'on entend par « noyaux reproduisants » dans le cadre de tels espaces.

Une présentation générale des fonctions holomorphes à valeurs vectorielles peut par exemple être trouvée dans [38] (notamment la section 2 du chapitre III). Nous ne présentons ici qu'un résumé de cette théorie.

Dans toute cette section, nous noterons  $\mathcal{E}$  un espace de Hilbert. Pour simplifier notre étude, nous nous restreignons à considérer les fonctions holomorphes de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathcal{E}$  (c'est uniquement dans ce cadre que nous les utiliserons ultérieurement dans ces travaux, notamment pour le théorème de Shimorin 3.54 et son application aux semi-groupes 4.40). Notons en particulier que l'on peut sans peine remplacer le disque unité ouvert  $\mathbb{D}$  par n'importe quel disque ouvert centré en 0 pour obtenir des définitions analogues.

**Définition et proposition 1.74** *Soient  $\mathcal{E}$  un espace de Hilbert et  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{E}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *la fonction  $f$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable en tout point de  $\mathbb{D}$  ;*
- (ii) *pour tout  $e \in \mathcal{E}$ ,  $z \mapsto \langle f(z), e \rangle_{\mathcal{E}}$  est holomorphe ;*
- (iii) *la fonction  $f$  est développable en série entière en tout point de  $\mathbb{D}$ .*

*Lorsque ces conditions équivalentes sont vérifiées, on dit alors que  $f$  est une fonction holomorphe définie sur  $\mathbb{D}$  est à valeurs dans  $\mathcal{E}$ . On notera  $\text{Hol}(\mathbb{D}; \mathcal{E})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions holomorphes de  $\mathbb{D} \rightarrow \mathcal{E}$ .*

Remarquons qu'on peut généraliser au cas des fonctions holomorphes à valeurs vectorielles la plupart des résultats connus sur les fonctions holomorphes. On dispose ainsi, par exemple, d'un analogue de la formule de Cauchy pour  $f$  et ses dérivées, ou encore d'un analogue du principe des zéros isolés.

Nous nous intéressons maintenant aux sous-espaces de  $\text{Hol}(\mathbb{D}; \mathcal{E})$  qui sont des espaces de Hilbert. Plus précisément, nous pouvons généraliser dans ce contexte la notion de noyaux reproduisants.

**Définition 1.75** Soit  $\mathcal{E}$  un espace de Hilbert. Soit  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(\mathbb{D}; \mathcal{E})$  un espace de Hilbert pour le produit hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}}$ . On dit que  $\mathfrak{H}$  est à noyaux reproduisants s'il existe une application

$$k : \begin{cases} \mathbb{D} \times \mathbb{D} & \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}) \\ (\omega, z) & \longmapsto k(\omega, z) \end{cases}$$

telle que

- (i) pour tout  $\omega \in \mathbb{D}$ , pour tout  $e \in \mathcal{E}$ ,  $z \mapsto k(\omega, z) \cdot e \in \mathfrak{H}$ ;
- (ii) pour tout  $\omega \in \mathbb{D}$ , pour toute  $f \in \mathfrak{H}$ , pour tout  $e \in \mathcal{E}$ ,

$$\langle f, k(\omega, \cdot) \cdot e \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle f(\omega), e \rangle_{\mathcal{E}}.$$

**Exemple** Donnons un exemple qui généralise le cas de l'espace de Hardy. Considérons  $H^2(\mathbb{D}; \mathcal{E})$  l'espace des fonctions  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  telles que  $\sum_{n \geq 0} \|a_n\|_{\mathcal{E}}^2 < +\infty$ . Alors,  $H^2(\mathbb{D}; \mathcal{E})$  est un espace de Hilbert pour le produit hermitien décrit par

$$\left\langle \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \sum_{m \geq 0} b_m z^m \right\rangle_{H^2} = \sum_{n \geq 0} \langle a_n, b_n \rangle_{\mathcal{E}}.$$

On peut le munir de noyaux reproduisants en posant

$$k : \begin{cases} \mathbb{D} \times \mathbb{D} & \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}) \\ (\omega, z) & \longmapsto \left( e \mapsto \frac{1}{1 - \bar{\omega}z} e \right) \end{cases}.$$

Vérifions que  $H^2(\mathbb{D}; \mathcal{E})$  est bien à noyaux reproduisants. Soit  $\omega \in \mathbb{D}$  et  $e \in \mathcal{E}$ . Alors,

$$k(\omega, \cdot) \cdot e : z \mapsto \frac{1}{1 - \bar{\omega}z} e = \sum_{n \geq 0} \bar{\omega}^n z^n e,$$

et  $\sum_{n \geq 0} |\bar{\omega}^n| \|e\|_{\mathcal{E}}^2 < +\infty$ , donc la condition (i) de la définition précédente est vérifiée. D'autre part,

pour toute fonction  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in H^2(\mathbb{D}; \mathcal{E})$ ,

$$\begin{aligned} \langle f, k(\omega, \cdot) \cdot e \rangle_{H^2} &= \left\langle \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \sum_{m \geq 0} \bar{\omega}^m z^m e \right\rangle_{H^2} \\ &= \sum_{n \geq 0} \langle a_n, \bar{\omega}^n e \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \omega^n \langle a_n, e \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \left\langle \sum_{n \geq 0} a_n \omega^n, e \right\rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle f(\omega), e \rangle_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Ceci montre la condition (ii) de la définition ci-dessus.

Remarquons également que, lorsque  $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ , nous retrouvons bien la définition de l'espace de Hardy  $H^2(\mathbb{D})$ .

## B.6 — Multiplicateurs de $\mathcal{D}_w$

Nous consacrons quelques pages de ce manuscrit à l'étude des multiplicateurs pour des espaces de Dirichlet pondérés  $\mathcal{D}_w$ . Nous suivons dans cette partie les travaux de [31] (notamment ceux du chapitre 5) en les généralisant aux espaces  $\mathcal{D}_w$ . Une étude générale des opérateurs de multiplication peut aussi être trouvée dans [33] (voir notamment le théorème 6). Commençons par fixer une notation.

Dans cette partie, et sauf mention explicite du contraire, nous supposons que  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  vérifie les conditions suivantes :

- (i) la fonction  $w$  est continue et bornée ;
- (ii) pour tout  $\omega \in \mathbb{D}$ , l'application  $E_\omega : \begin{cases} \mathcal{D}_w & \rightarrow \mathbb{C} \\ f & \mapsto f(\omega) \end{cases}$  est une application linéaire continue.

Pour une fonction  $f \in \mathcal{D}_w$ , nous noterons  $\mathcal{D}_w(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi}$ .

Nous pouvons maintenant définir les multiplicateurs de l'espace  $\mathcal{D}_w$ .

**Définition 1.76** Soit  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. On dit que  $h$  est un multiplicateur de  $\mathcal{D}_w$  si, pour toute  $f \in \mathcal{D}_w$ ,  $h \times f \in \mathcal{D}_w$ .

On note  $\text{Mult}_w$  l'ensemble des des multiplicateurs de  $\mathcal{D}_w$ .

Nous nous intéressons maintenant à la caractérisation des multiplicateurs de  $\mathcal{D}_w$ . Nous donnons des conditions suffisantes plutôt explicites, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante mais moins directe. Enfin, nous étudions le cas particulier des espaces  $\mathcal{D}_\alpha$  pour  $\alpha \geq 1$ .

**Proposition 1.77**  $\mathbb{C}[z] \subset \text{Mult}_w$ .

*Démonstration* : Cela vient du fait que, pour tout  $f \in \mathcal{D}_w$ ,  $\mathcal{D}_w(f) = \sum_{n \geq 1} w_n |a_n|^2$ . Par linéarité, il suffit de montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $e_k \in \text{Mult}_w$ . Alors, pour toute  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathcal{D}_w$ , nous avons

$$\mathcal{D}_w(z^k \times f) = \sum_{n \geq 0} w_{n+k} |a_n|^2.$$

Comme  $w_{n+k} = O(w_n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , nous avons bien que  $e_k \times f \in \mathcal{D}_w$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

**Proposition 1.78** Soit  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. On suppose que  $h' \in H^\infty$ . Alors,  $h \in \text{Mult}_w$ .

*Démonstration* : Remarquons d'abord que, comme  $h' \in H^\infty$ , on a également  $h \in H^\infty$ . Montrons maintenant que  $h \in \text{Mult}_w$ . Soit  $f \in \mathcal{D}_w$ . Remarquons que  $(hf)' = h'(zf)' - f'(h'z - h)$ . Comme  $f \in \mathcal{D}_w$ , et comme  $\mathbb{C}[z] \subset \text{Mult}_w$ , on sait que  $(zf) \in \mathcal{D}_w$ . Ainsi,

$$\mathcal{D}_w(hf) \leq 2\|h\|_{H^\infty}^2 \mathcal{D}_w(zf) + 2\|h'z - h\|_{H^\infty}^2 \mathcal{D}_w(f) < +\infty.$$

Alors,  $hf \in \mathcal{D}_w$ . Ceci valant pour tout  $f$ , nous avons bien démontré que  $h \in \text{Mult}_w$ .  $\square$

Nous allons maintenant étudier la structure de l'ensemble  $\text{Mult}_w$ . Nous savons déjà que  $(\text{Mult}_w, +, \times)$  est une algèbre. Nous allons la munir d'une structure d'algèbre de Banach.

**Proposition 1.79** *Soit  $h \in \text{Mult}_w$ . L'opérateur  $M_h : \begin{cases} \mathcal{D}_w & \rightarrow \mathcal{D}_w \\ f & \mapsto hf \end{cases}$  est continu.*

*Démonstration* : Utilisons le théorème du graphe fermé. Soit  $(f_n)_n \in \mathcal{D}_w^{\mathbb{N}}$ ,  $f$  et  $g \in \mathcal{D}_w$  telles que  $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}_w} f$  et  $M_h f_n \xrightarrow{\mathcal{D}_w} g$ . Nous voulons montrer que  $g = hf$ . Soit  $z \in \mathbb{D}$ . Comme l'évaluation en  $z$  est un opérateur continu, nous savons que  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  et que  $h(z)f_n(z) \rightarrow g(z)$ . Or,  $h(z)f_n(z) \rightarrow h(z)f(z)$ . Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $g(z) = h(z)f(z)$ . Alors,  $g = hf$ . Le résultat découle alors d'une application directe du théorème du graphe fermé.  $\square$

**Définition et proposition 1.80** *On définit une application*

$$\|\cdot\|_{\text{Mult}_w} : \begin{cases} \text{Mult}_w & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ h & \mapsto |M_h|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}_w)} \end{cases}.$$

$\|\cdot\|_{\text{Mult}_w}$  est une norme qui fait de  $(\text{Mult}_w, \|\cdot\|_{\text{Mult}_w})$  une algèbre de Banach.

*Démonstration* : Nous vérifions aisément que  $\|\cdot\|_{\text{Mult}_w}$  est une norme sur  $\text{Mult}_w$ .

Nous montrons maintenant que toute suite de Cauchy dans  $\text{Mult}_w$  converge. Soit  $(h_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $\text{Mult}_w$ .

La suite  $(M_{h_n})_n$  est une suite de Cauchy dans l'algèbre de Banach  $\mathcal{L}(\mathcal{D}_w)$ . En particulier, il existe  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_w)$  tel que  $M_{h_n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathcal{D}_w)} T$ . Posons  $g = T(e_0)$ . Remarquons en particulier que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $h_n(z) = M_{h_n}(e_0)(z) \rightarrow T(e_0)(z) = g(z)$ .

Montrons que  $g \in \text{Mult}_w$ . Soit  $f \in \mathcal{D}_w$ . On sait déjà que  $M_{h_n}(f) \xrightarrow{\mathcal{D}_w} T(f) \in \mathcal{D}_w$ . Or, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $M_{h_n}(f)(z) = h_n(z)f(z) \rightarrow g(z)f(z)$ . On en déduit donc que  $gf = T(f) \in \mathcal{D}_w$ . Ceci valant pour toute  $f \in \mathcal{D}_w$ , nous avons que  $g \in \text{Mult}_w$ .

Montrons enfin que  $h_n \xrightarrow{\text{Mult}_w} g$ . Cela vient du fait que  $\|h_n - g\|_{\text{Mult}_w} = |M_{h_n - g}|_{\mathcal{D}_w} = |M_{h_n} - M_g|_{\mathcal{D}_w}$ . Or,  $M_{h_n} \xrightarrow{\mathcal{B}(\mathcal{D}_w)} M_g$ . Ceci conclut la preuve.  $\square$

Nous donnons maintenant une condition nécessaire pour qu'une fonction soit un multiplicateur de  $\mathcal{D}_w$ . Rappelons que l'on note  $(K_z)_{z \in \mathbb{D}}$  les noyaux reproduisants pour l'espace  $\mathcal{D}_w$ .

**Proposition 1.81** 1. *Soit  $h \in \text{Mult}_w$ . Pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $K_z$  est un vecteur propre de  $M_h^*$  pour la valeur propre  $\overline{h(z)}$ .*

2. *Soit  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_w)$ . On suppose que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $K_z$  est un vecteur propre de  $T^*$ . Alors, il existe  $h \in \text{Mult}_w$  telle que  $T = M_h$ .*

*Démonstration :*

1. Soit  $z \in \mathbb{D}$ . Nous voulons montrer que  $M_h^*(K_z) = \overline{h(z)}K_z$ . Pour cela, nous montrons que, pour toute  $f \in \mathcal{D}_w$ , nous avons  $\langle f, M_h^*(K_z) \rangle = \langle f, \overline{h(z)}K_z \rangle$ . Soit  $f \in \mathcal{D}_w$ . Alors,

$$\langle f, M_h^*(K_z) \rangle = \langle M_h(f), K_z \rangle = h(z)f(z) = h(z) \langle f, K_z \rangle = \langle f, \overline{h(z)}K_z \rangle.$$

Ceci étant vrai pour toute  $f \in \mathcal{D}_w$ , nous avons l'égalité souhaitée.

2. Pour  $z \in \mathbb{D}$ , soit  $h(z) \in \mathbb{C}$  tel que  $T^*(K_z) = \overline{h(z)}K_z$ . Nous montrons que  $T = M_h$ . Soient  $f \in \mathcal{D}_w$  et  $z \in \mathbb{D}$ . Alors,

$$T(f)(z) = \langle T(f), K_z \rangle = \langle f, T^*(K_z) \rangle = \langle f, \overline{h(z)}K_z \rangle = h(z) \langle f, K_z \rangle = h(z)f(z).$$

Ceci valant pour tout  $\omega \in \mathbb{D}$ , nous avons que  $T(f) = hf$ . En particulier,  $hf \in \mathcal{D}_w$ . Ceci valant pour toute  $f \in \mathcal{D}_w$ , nous avons que  $h \in \text{Mult}_w$  et que  $T = M_h$ .

Ceci termine la preuve.  $\square$

Nous pouvons déduire de la proposition ci-dessus des conditions nécessaires pour qu'une fonction soit un multiplicateur de  $\mathcal{D}_w$ .

**Corollaire 1.82** *Si  $h \in \text{Mult}_w$ , alors  $h \in H^\infty$  et  $\|h\|_{H^\infty} \leq \|h\|_{\text{Mult}_w}$ .*

*Démonstration :* Soit  $h \in \text{Mult}_w$ . L'opérateur  $M_h^*$  est borné et  $|M_h^*| = |M_h| = \|h\|_{\text{Mult}_w}$ . En particulier, les valeurs propres de  $M_h^*$  sont bornées par  $|M_h^*|$ . Il en suit que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $|h(z)| = |\overline{h(z)}| \leq |M_h^*|$ . Ceci termine la preuve.  $\square$

Nous avons en particulier le résultat suivant.

**Corollaire 1.83**  $\text{Mult}_w \subset H^\infty \cap \mathcal{D}_w$ .

Donnons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour caractériser les multiplicateurs.

**Proposition 1.84** *Soit  $h \in \mathcal{D}_w$  et  $\mu$  la mesure sur  $\mathbb{D}$  définie par  $d\mu(z) = |h'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi}$ .*

*Sont équivalentes :*

(i)  $h \in \text{Mult}_w$  ;

(ii)  $h \in H^\infty$  et il existe  $C \in \mathbb{R}^{+*}$  telle que, pour toute  $f \in \mathcal{D}_w$ ,  $\int_{\mathbb{D}} |f|^2 d\mu \leq C \|f\|_{\mathcal{D}_w}^2$ .

*Démonstration :* Commençons par prouver (i)  $\Rightarrow$  (ii). D'après les propositions précédentes, nous savons déjà que  $h \in \mathcal{D}_w \cap H^\infty$ . Soit  $f \in \mathcal{D}_w$ . Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f|^2 d\mu &= \int_{\mathbb{D}} |fh'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \\ &\leq 2 \left[ \int_{\mathbb{D}} |(fh)'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} + \int_{\mathbb{D}} |hf'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \right] \\ &\leq 2(\|hf\|_{\mathcal{D}_w}^2 + \|h\|_{H^\infty}^2 \|f\|_{\mathcal{D}_w}^2) \\ &\leq 2(\|h\|_{\text{Mult}_w}^2 + \|h\|_{H^\infty}^2) \|f\|_{\mathcal{D}_w}^2. \end{aligned}$$

En posant  $C = 2(\|h\|_{\text{Mult}_w}^2 + \|h\|_{H^\infty}^2)$ , nous avons bien le résultat souhaité.

Montrons maintenant (ii)  $\Rightarrow$  (i). Pour cela, nous montrons que, pour toute  $f \in \mathcal{D}_w$ , nous avons  $hf \in \mathcal{D}_w$ . Soit  $f \in \mathcal{D}_w$ . Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |(hf)'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} &\leq 2 \left[ \int_{\mathbb{D}} |(hf')(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} + \int_{\mathbb{D}} |(h'f)(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \right] \\ &\leq 2 [\|h\|_{H^\infty}^2 \|f\|_{\mathcal{D}_w}^2 + C \|f\|_{\mathcal{D}_w}^2] \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi,  $hf \in \mathcal{D}_w$ . Ceci valant pour toute  $f \in \mathcal{D}_w$ , nous avons bien que  $h \in \text{Mult}_w$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous détaillons maintenant le cas spécifique des espaces de la forme  $\mathcal{D}_\alpha$  avec  $\alpha \geq 1$ . Dans ce cas, nous notons  $\text{Mult}_\alpha$  l'espace des multiplicateurs sur  $\mathcal{D}_\alpha$ .

**Proposition 1.85** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Alors,  $\text{Mult}_\alpha = H^\infty(\mathbb{D})$ . De plus, pour toute  $f \in \text{Mult}_\alpha$ ,*

$$\|f\|_{\text{Mult}_\alpha} = \|f\|_{H^\infty}.$$

*Démonstration* : Nous commençons par montrer l'inclusion  $H^\infty(\mathbb{D}) \subset \text{Mult}_\alpha$ . Soit  $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ . D'après la proposition 1.64, nous savons que  $g \in H^2(\mathbb{D})$ , et donc que  $f \in \mathcal{D}_\alpha$ .

Nous commençons par montrer que  $g \in \text{Mult}_1$ . Pour cela, il suffit de remarquer qu'en notant  $U : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$  l'isomorphisme isométrique décrit au théorème 1.67, nous avons que  $U(g) \in H^2(\mathbb{T}) \cap L^\infty(\mathbb{T})$ . En particulier, l'opérateur

$$\widetilde{M}_g : \begin{cases} L^2(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & f \times U(g) \end{cases}$$

est un opérateur continu tel que  $\|\widetilde{M}_g\| = \|U(g)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ .

De plus,  $H^2(\mathbb{T})$  est invariant par  $\widetilde{M}_g$ . En notant  $M_g \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))$  l'opérateur continu induit par  $\widetilde{M}_g$  sur  $H^2(\mathbb{T})$ , nous avons que  $\|M_g\|_{\mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))} \leq \|U(g)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ .

Comme les fonction constantes sont dans  $H^2(\mathbb{T})$ , nous avons aussi  $\|M_g\|_{\mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))} \geq \|U(g)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ . Finalement, nous avons

$$\|M_g\|_{\mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))} = \|U(g)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})}.$$

Ceci montre que  $g \in \text{Mult}_1$ .

Nous supposons maintenant que  $\alpha > 1$ . Comme  $g$  est holomorphe, nous savons que la matrice de  $M_g \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{D}))$  est triangulaire supérieure. D'après le théorème 2.41 que nous énonçons ultérieurement<sup>1</sup>, nous avons que  $M_g$  induit un opérateur continu sur  $\mathcal{D}_\alpha$  tel que

$$\|M_g\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \|M_g\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})}.$$

1. Notons que la démonstration de ce théorème (que nous détaillons plus loin) n'utilise pas le résultat que nous démontrons ici.

Ceci prouve que  $g \in \text{Mult}_\alpha$ , et que  $\|g\|_{\text{Mult}_\alpha} \leq \|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})}$ .

L'inclusion  $\text{Mult}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$  et l'inégalité  $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq \|g\|_{\text{Mult}_\alpha}$  découlent du corollaire 1.82. Ceci achève la preuve.  $\square$

Notons en particulier le résultat suivant, qui nous servira ultérieurement. Pour  $\mu \in \mathbb{C}$ , nous notons

$$g_\mu : \begin{cases} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\mu \end{cases} \in \text{Hol}(\mathbb{D}).$$

**Proposition 1.86** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Alors,  $g_{is} \in \text{Mult}_\alpha$ .

De plus,

$$\|g_{is}\|_{\text{Mult}_\alpha} \leq e^{\frac{|s|\pi}{2}}.$$

*Démonstration* : Soit  $z \in \mathbb{D}$ . Alors, on a  $\Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) > 0$ . Ainsi, en posant  $x = \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| \in \mathbb{R}$  et  $y = \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ , on a

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = x + iy.$$

Alors,

$$\left|\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{is}\right| \leq e^{\frac{|s|\pi}{2}}.$$

Il suffit d'appliquer la proposition 1.85 pour conclure la preuve.  $\square$

## Chapitre 2

# Opérateurs de composition sur des espaces de fonctions holomorphes

CE chapitre est consacré à l'étude des opérateurs de composition sur des espaces de fonctions holomorphes. Dans un premier temps, nous étudions ces opérateurs sur l'espace de Fréchet  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , et déduisons des résultats obtenus des informations sur le spectre des opérateurs de composition sur des espaces de Banach continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Dans un second temps, nous étudions les opérateurs de composition dans le cadre des espaces de Dirichlet  $\mathcal{D}_\alpha$ .

### A) Étude sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$

NOUS allons dans cette section étudier les opérateurs de composition sur l'espace de Fréchet  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Nous commençons par étudier la continuité de ces opérateurs. Ensuite, nous donnons une caractérisation algébrique des opérateurs de composition. Nous caractérisons ensuite la compacité des opérateurs de composition en donnant une condition nécessaire et suffisante sur le symbole. Après cela, nous focalisons notre étude sur les opérateurs de composition dont le symbole est un symbole de Koenigs. Dans ce cas, nous donnons une description complète du spectre et du spectre ponctuel d'un opérateur de composition. Ces preuves reposent sur la description de « projections spectrales » associées sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Si  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , nous déduisons de l'étude spectrale sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  des résultats sur la forme générale du spectre de l'opérateur de composition sur  $\mathcal{X}$ . Ces résultats font l'objet d'une pré-publication ([8]).

Nous commençons par introduire quelques notations : dans cette partie, et sauf mention explicite du contraire, nous désignerons par  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe telle que  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  (dans l'étude spectrale, nous ferons des hypothèses supplémentaires sur  $\varphi$ , qui seront explicitées le moment venu). Nous noterons alors

$$C_\varphi : \begin{cases} \text{Hol}(\mathbb{D}) & \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}) \\ f & \mapsto f \circ \varphi \end{cases}$$

l'opérateur de composition par  $\varphi$ .

Par ailleurs, si  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est un espace de Banach continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  (voir la définition 1.28) tel que  $C_\varphi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ , nous noterons  $T|_{\mathcal{X}}$  (ou  $T$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'espace considéré) l'application linéaire induite par  $C_\varphi$  sur  $\mathcal{X}$ .

## A.1 — Continuité

La première question à se poser lorsque l'on étudie une application linéaire sur un espace de Fréchet est naturellement celle de la continuité. Dans le cadre des opérateurs de composition sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , la continuité est automatique : ce fait est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 2.1** *Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe. Alors, l'application linéaire*

$$C_\varphi : \begin{cases} \text{Hol}(\mathbb{D}) & \longrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto f \circ \varphi \end{cases}$$

*est continue pour la structure d'espace de Fréchet sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ .*

*Démonstration* : Soit  $(f_n)_n \in \text{Hol}(\mathbb{D})^{\mathbb{N}}$  et  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  tels que  $f_n \xrightarrow{\text{CVLU}} f$ . On montre que  $f_n \circ \varphi \xrightarrow{\text{CVLU}} f \circ \varphi$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{D}$ . Comme  $\varphi$  est continue,  $\varphi(K)$  est un compact de  $K$ . Comme  $f_n \xrightarrow{\text{CVLU}} f$ , nous avons que  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur  $\varphi(K)$ . Ceci revient à dire que  $f_n \circ \varphi \rightarrow f \circ \varphi$  uniformément sur  $K$ . Ainsi,  $f_n \circ \varphi \rightarrow f \circ \varphi$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{D}$ , ce qui prouve le résultat souhaité.  $\square$

## A.2 — Caractérisation algébrique

Commençons par expliciter la propriété élémentaire suivante :

$$\ll \forall f, g \in \text{Hol}(\mathbb{D}), (f \times g) \circ \varphi = (f \circ \varphi) \times (g \circ \varphi) \gg.$$

Nous allons montrer que cette propriété caractérise les opérateurs de composition. Nous en déduirons ensuite une caractérisation des opérateurs de composition inversibles. Le théorème suivant donne une caractérisation algébrique des opérateurs de composition.

**Théorème 2.2** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) *l'opérateur  $T$  est un opérateur de composition : il existe  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe telle que, pour toute  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ ,  $T(f) = f \circ \varphi$  ;*
- (ii) *l'opérateur  $T$  est un morphisme d'algèbres unifères : on a  $T(e_0) = e_0$  et, pour toutes  $f, g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ ,  $T(fg) = T(f)T(g)$  ;*
- (iii) *pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T(e_n) = (T(e_1))^n$ .*

*Démonstration* : La chaîne d'implications  $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$  est vraie. Nous détaillons la preuve de l'implication  $(iii) \Rightarrow (i)$ . Soit  $T \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  vérifiant l'hypothèse  $(iii)$ . Soit  $\varphi = T(e_1)$ . Nous montrons que  $T$  est l'opérateur de composition de symbole  $\varphi$ .

Nous commençons par montrer que  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $z_0 \in \mathbb{D}$  tel que  $|\varphi(z_0)| \geq 1$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|T(e_n)(z_0)| = |(T(e_1))^n(z_0)| = |\varphi(z_0)|^n \geq 1.$$

Par ailleurs, dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ ,  $e_n \xrightarrow{\text{CVLU}} 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Ainsi, comme  $T$  est continu,  $T(e_n) \xrightarrow{\text{CVLU}} 0$ . En particulier,  $T(e_n)(z_0) \rightarrow 0$ , ce qui fournit la contradiction recherchée.

Comme  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ , nous pouvons considérer l'opérateur de composition  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ . Nous montrons maintenant que  $T = C_\varphi$ . Remarquons que la condition  $(iii)$  se réécrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, T(e_n) = \varphi^n = e_n \circ \varphi.$$

Comme  $T$  est linéaire, il découle directement de cette condition que, pour tout  $P \in \mathbb{C}[z]$ ,  $T(P) = P \circ \varphi$ . Ainsi,  $T$  et  $C_\varphi$  coïncident sur  $\mathbb{C}[z]$ . Or,  $\mathbb{C}[z]$  est dense dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Comme  $T$  et  $C_\varphi$  sont continus sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , nous avons bien que  $T = C_\varphi$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous pouvons déduire du résultat précédent une caractérisation des opérateurs de composition inversibles : il s'agit exactement de ceux dont le symbole est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .

**Corollaire 2.3** *Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe, de sorte que  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) *l'opérateur  $C_\varphi$  est inversible dans  $\mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  ;*
- (ii) *la fonction  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .*

*Démonstration* : Commençons par prouver l'implication  $(ii) \Rightarrow (i)$ . Supposons que  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Alors, l'inverse  $\psi$  de  $\varphi$  est aussi un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . L'opérateur  $C_\psi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  est donc bien défini. On a alors que  $C_\psi$  est l'inverse de  $C_\varphi$  dans  $\mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ .

Montrons maintenant l'implication réciproque. Supposons que  $C_\varphi$  est inversible dans  $\mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ . Soit  $T \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  son inverse. Nous commençons par montrer que  $T$  est un opérateur de composition, en nous ramenant à leur caractérisation algébrique (théorème 2.2). Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} C_\varphi \circ T(e_n) &= e_n \\ &= (e_1)^n \\ &= (C_\varphi \circ T(e_1))^n \\ &= C_\varphi [(T(e_1))^n] \end{aligned}$$

(nous avons utilisé le fait que tout opérateur de composition est multiplicatif). Comme  $C_\varphi$  est inversible, nous avons finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, T(e_n) = (T(e_1))^n,$$

ce qui prouve (d'après le théorème 2.2) que  $T$  est un opérateur de composition.  $\square$

### A.3 — Compacité

Nous étudions maintenant la compacité des opérateurs de composition sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . La compacité des opérateurs sur des espaces de Fréchet a notamment été étudiée par Randtke [51] et Bonet-Lindstöm [16]. Notre résultat principal est une condition nécessaire et suffisante portant sur  $\varphi$  pour que l'opérateur  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  soit compact. Avant d'énoncer ce résultat, nous rappelons la définition d'« opérateur compact » sur un espace de Fréchet.

**Définition et proposition 2.4** *Soit  $\mathcal{F}$  un espace de Fréchet. Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) *il existe  $r > 0$  tel que  $T(B(0, r))$  est relativement compact ;*
- (ii) *il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que  $T\mathcal{V}$  est compact.*

*Si de plus  $\mathcal{F}$  est un espace de Banach, les assertions ci-dessus sont également équivalentes à la condition*

- (iii) *pour tout  $r > 0$ , l'ensemble  $T(B(0, r))$  est relativement compact*

*Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que  $T$  est un opérateur compact.*

Nous allons préciser cette définition dans le cas particulier de l'espace  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Pour cela, nous allons décrire les voisinages de zéro. Introduisons une notation pour le reste de cette section. Pour  $r \in [0; 1[$  et pour  $\varepsilon > 0$ , nous noterons

$$\mathcal{V}_{r,\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \sup_{|z| \leq r} |f(z)| < \varepsilon \right\}.$$

**Proposition 2.5** *La famille  $(\mathcal{V}_{r,\varepsilon})_{r \in [0; 1[, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}}$  est une base de voisinages de 0 dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Plus précisément :*

- (i) *pour toute boule ouverte  $B$  centrée en 0, il existe  $r \in [0; 1[$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$  tels que  $\mathcal{V}_{r,\varepsilon} \subset B$  ;*
- (ii) *pour tous  $r \in [0; 1[$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ , il existe une boule ouverte  $B$  centrée en 0 telle que  $B \subset \mathcal{V}_{r,\varepsilon}$ .*

*Démonstration :* Rappelons que la distance sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  est décrite pour toute  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  par

$$d(f, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min \left( 1, \sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{n}} |f(z)| \right).$$

Nous commençons par montrer le point (i). Pour cela, soient  $\rho > 0$  et  $B = B(0, \rho)$  la boule ouverte de centre 0 et de rayon  $\rho$ . Si  $\rho \geq 1$ , alors  $B = \text{Hol}(\mathbb{D})$  et tous les ensembles  $\mathcal{V}_{r,\varepsilon}$  conviennent. Supposons maintenant que  $\rho < 1$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{2^N} \leq \frac{\rho}{2}$ . Soit  $r = 1 - \frac{1}{N}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < 1$  et  $\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^N}\right) \leq \frac{\rho}{2}$ .

Nous montrons que  $\mathcal{V}_{r,\varepsilon} \subset B$ . Soit  $f \in \mathcal{V}_{r,\varepsilon}$ . Nous avons

$$d(f, 0) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \min \left( 1, \sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{n}} |f(z)| \right) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Soit  $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$ . Comme  $f \in \mathcal{V}_{r,\varepsilon}$ ,

$$\sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{n}} |f(z)| \leq \sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{N}} |f(z)| \leq \varepsilon < 1.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,

$$\min \left( 1, \sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{n}} |f(z)| \right) \leq \varepsilon.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} d(f, 0) &\leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \varepsilon + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &\leq \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{2^N} \right) + \frac{1}{2^N} \\ &\leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho. \end{aligned}$$

Ainsi,  $f \in B$ . Ceci valant pour toute  $f \in \mathcal{V}_{r,\varepsilon}$ , nous avons bien montré que  $\mathcal{V}_{r,\varepsilon} \subset B$ .

Nous montrons maintenant le point (ii). Soient  $r \in [0; 1[$  et  $\varepsilon > 0$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $\varepsilon < 1$ . Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $1 - \frac{1}{N} > r$ . Soient  $\rho = \frac{\varepsilon}{2^N}$  et  $B = B(0, \rho)$  la boule ouverte de centre 0 et de rayon  $\rho$ . Nous montrons que  $B \subset \mathcal{V}_{r,\varepsilon}$ . Soit  $f \in B$ . Nous avons

$$\min \left( 1, \sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{N}} |f(z)| \right) \leq 2^N d(f, 0) \leq 2^N \rho = \varepsilon.$$

En particulier, comme  $\varepsilon < 1$ , nous avons  $\sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{N}} |f(z)| \leq 1$  et donc

$$\min \left( 1, \sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{N}} |f(z)| \right) = \sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{N}} |f(z)| \leq \varepsilon.$$

Alors,

$$\sup_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{N}} |f(z)| \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve que  $f \in \mathcal{V}_{r,\varepsilon}$  et donc que  $B \subset \mathcal{V}_{r,\varepsilon}$ . La preuve est ainsi terminée.  $\square$

Nous énonçons ici une version spécifique d'un théorème attribué à Runge. Ce théorème montre comment on peut approximer une fonction holomorphe par une fonction rationnelle (ou, dans notre cas spécifique, une fonction polynomiale). Pour la preuve de ce résultat (dans un cadre plus général), nous renvoyons au livre de Rudin ([57], théorèmes 13.6, 13.9 et surtout 13.7).

**Théorème 2.6 (Runge)** *Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{D}$  tel que  $\mathbb{C} - K$  est connexe. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{D}$  contenant  $K$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour toute  $f \in \text{Hol}(\Omega)$ , il existe une fonction polynomiale  $P \in \mathbb{C}[z]$  telle que*

$$\sup_{z \in K} |f(z) - P(z)| \leq \varepsilon.$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal.

**Théorème 2.7** Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe et  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  l'opérateur de composition associé. Les assertions suivantes s'équivalent :

(i) on a  $\sup_{z \in \mathbb{D}} |\varphi(z)| < 1$  ;

(ii) l'opérateur  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  est compact.

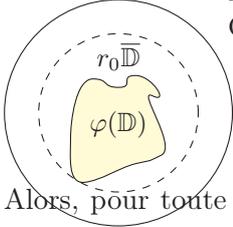
**Remarque** Sur certains espaces de Banach, la même caractérisation reste vraie : par exemple, pour  $\mathcal{X} = H^\infty(\mathbb{D})$ , le résultat est attribué à Schwartz ([62]). Une étude plus détaillée du spectre essentiel peut être trouvée dans l'article de Zheng ([67]). En revanche, sur d'autres espaces de Banach, la situation est différente : par exemple, sur  $H^2(\mathbb{D})$ , on obtient une condition nécessaire et suffisante pour la compacité des opérateurs de composition en étudiant la fonction de comptage de Nevanlinna (voir par exemple [26], théorème 3.20).

Nous prouvons maintenant le théorème 2.7.

*Démonstration : (i)  $\Rightarrow$  (ii) :* commençons par prouver l'inclusion directe. Soit  $r_0 = \sup_{z \in \mathbb{D}} |\varphi(z)|$ .

On suppose que  $r_0 < 1$ .

Remarquons que  $r_0\overline{\mathbb{D}}$  est un compact de  $\mathbb{D}$  tel que  $\varphi(\mathbb{D}) \subset r_0\overline{\mathbb{D}}$ .  
Considérons alors le voisinage de 0 (cf. la proposition 2.5)



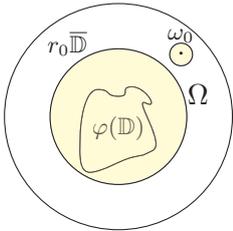
$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{r_0,1} = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \sup_{|z| \leq r_0} |f(z)| < 1 \right\}.$$

Alors, pour toute  $f \in \mathcal{V}$ ,  $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f \circ \varphi(z)| \leq 1$ . En d'autres termes, la famille de fonctions  $C_\varphi(\mathcal{V})$  est uniformément bornée. D'après le théorème de Montel (voir par exemple [57], théorème 14.6), l'ensemble  $C_\varphi(\mathcal{V})$  est relativement compact.

*(ii)  $\Rightarrow$  (i) :* nous prouvons maintenant l'inclusion réciproque. Pour ce faire, nous allons raisonner par contraposée : supposons que  $\sup_{z \in \mathbb{D}} |\varphi(z)| = 1$ . Nous allons montrer que  $C_\varphi$  n'est pas un opérateur compact. Pour ce faire, nous allons montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $r_0 \in [0; 1[$ , l'image du voisinage

$$\mathcal{V}_{r_0,\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \sup_{|z| \leq r_0} |f(z)| < \varepsilon \right\}$$

n'est pas relativement compacte.



Soit  $\varepsilon > 0$  Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $\varepsilon < 1$ . Soit  $r_0 \in [0; 1[$ . Comme  $r_0 < 1$ , il existe  $z_0 \in \mathbb{D}$  tel que  $|\varphi(z_0)| > r_0$ . Posons  $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(z_0)$ . Soit  $K = r_0\overline{\mathbb{D}} \cup \{\omega_0\}$ . Notons que  $K$  est un compact de  $\mathbb{D}$ . Soient  $\rho = \min\left(\frac{|\omega_0| - r_0}{3}, \frac{1 - |\omega_0|}{2}\right)$  et  $\Omega = B(0, r_0 + \rho) \cup B(\omega_0, \rho)$ . Remarquons que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{D}$  contenant  $K$ .

Fixons maintenant  $n \in \mathbb{N}$ . Nous définissons une fonction holomorphe sur  $\Omega$  en posant, pour tout  $z \in \Omega$ ,

$$h_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in B(0, r_0 + \rho) \\ n & \text{sinon} \end{cases}.$$

D'après le théorème de Runge (2.6), il existe une fonction polynomiale  $P_n \in \mathbb{C}[z]$  telle que

$$\|h_n - P_n\|_{\infty, K} < 1.$$

Comme  $P_n$  est polynomiale,  $P_n \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . De plus, on vérifie bien que  $P_n \in \mathcal{V}_{r_0, \varepsilon}$ .

Nous montrons maintenant que  $C_\varphi(\mathcal{V}_{r_0, \varepsilon})$  n'est pas relativement compact. Nous savons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n \circ \varphi \in C_\varphi(\mathcal{V}_{r_0, \varepsilon})$ . De plus, comme  $h_n(\omega_0) \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , nous avons aussi  $|P_n \circ \varphi(z_0)| \rightarrow +\infty$ . Comme l'évaluation en  $z_0$  est une application continue sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , nous avons montré qu'aucune suite extraite de  $(P_n \circ \varphi)_n$  ne converge dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

#### A.4 — Étude spectrale sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$

Pour étudier le spectre des opérateurs de composition sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , nous allons faire quelques hypothèses sur le symbole  $\varphi$  : plus précisément, nous supposons que  $\varphi$  n'est pas un automorphisme et que le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi$  (cf. le théorème 1.18) est dans  $\mathbb{D}$ .

**Définition 2.8** Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe. Nous dirons que  $\varphi$  est un symbole de Koenigs si elle vérifie les conditions suivantes :

- (a) il existe  $\alpha \in \mathbb{D}$  tel que  $\varphi(\alpha) = \alpha$  ;
- (b) on a  $0 < |\varphi'(\alpha)| < 1$ .

Cette définition doit être appréciée à l'aune du théorème de Koenigs (théorèmes 1.25 ou 2.10).

Dans la suite, et sauf mention explicite du contraire, nous désignerons par  $\varphi$  un symbole de Koenigs. Nous supposons également dans un premier temps que le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi$  est 0 (nous verrons ensuite que cette hypothèse n'est cependant que peu restrictive — cf. le théorème 2.37).

L'objectif de cette section est de décrire le spectre et le spectre ponctuel de l'opérateur  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ . L'outil clef qui interviendra dans notre preuve sera la définition de « projections spectrales » sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  (cf. le théorème 2.14). Ces projections sont étudiées dans la première sous-partie. La deuxième sous-partie est consacrée à l'utilisation de ces projections pour déterminer le spectre de  $C_\varphi$ . Par ailleurs, si  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est stable par  $C_\varphi$ , alors nous pouvons déduire de la forme du spectre de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  des informations sur la forme générale du spectre de  $C_{\varphi|_{\mathcal{X}}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  : ce point fait l'objet de la troisième sous-partie. Nous terminons enfin notre étude spectrale en discutant des cas plus généraux que ceux considérés ci-dessus (par exemple, des symboles tels que  $\varphi'(0) = 0$ , ou dont le point de Denjoy-Wolff n'est pas dans  $\mathbb{D}$ ).

Avant de nous lancer dans la définition des projections spectrales sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ , nous énonçons un lemme technique relatif aux dérivées d'ordre supérieur d'une fonction composée : il s'agit de la formule attribuée à Faà di Bruno. Dans le cas particulier de la composition par  $\varphi$ , cette formule nous fournit le résultat exposé dans le lemme ci-dessous.

**Lemme 2.9 (Faà di Bruno)** Soit  $\varphi$  un symbole de Koenigs dont le point de Denjoy-Wolff est 0. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons

$$J_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \mid m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n\}$$

et  $K_n \stackrel{\text{def}}{=} J_n \setminus \{(n, 0, \dots, 0)\}$ .

Pour  $\mathbf{m} \in J_n$ , notons  $|\mathbf{m}| = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ . Remarquons que  $\mathbf{m} \in K_n$  si et seulement si  $|\mathbf{m}| \leq n - 1$ .

Pour  $\mathbf{m} \in J_n$ , posons

$$C_{\mathbf{m}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_n!} \prod_{j=1}^n \left( \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \right)^{m_j} \in \mathbb{C}.$$

Alors, pour toute  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ ,

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)^{(n)}(0) &= \sum_{\mathbf{m} \in J_n} C_{\mathbf{m}}^n f^{(|\mathbf{m}|)}(0) \\ &= (\varphi'(0))^n \times f^{(n)}(0) + \sum_{n \in K_n} C_{\mathbf{m}}^n f^{(|\mathbf{m}|)}(0). \end{aligned}$$

*Esquisse de démonstration* : La preuve repose sur l'utilisation d'une formule de Faà di Bruno. Cette formule a été originellement publiée en italien dans [30] et en français dans [29] (on peut trouver une retranscription de ces articles dans [6]). On peut trouver des preuves de cette formule dans [53] (avec des techniques d'analyse dite ombrale) ou dans [23] (pp. 137-139, avec des techniques combinatoires). La formule de Faà di Bruno dit que, comme  $f$  et  $\varphi$  sont holomorphes, nous avons, pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha \in \mathbb{D}$ ,

$$(f \circ \varphi)^{(n)}(\alpha) = \sum_{\mathbf{m} \in J_n} \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_n!} \prod_{j=1}^n \left( \frac{\varphi^{(j)}(\alpha)}{j!} \right)^{m_j} f^{(|\mathbf{m}|)}(\varphi(\alpha)).$$

Le résultat recherché s'obtient alors directement, en remarquant que 0 est un point fixe de  $\varphi$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

#### A.4.a) — Éléments propres et projections spectrales

Nous commençons notre étude spectrale de  $C_\varphi$  par l'étude des éléments propres. Le théorème de Koenigs (théorème 1.25), que nous avons déjà rencontré, peut s'interpréter en termes d'étude spectrale : il fournit une description exhaustive des éléments propres de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ .

**Théorème 2.10 (rappel)** *Soit  $\varphi$  un symbole de Koenigs dont le point de Denjoy-Wolff est zéro. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\lambda_n = (\varphi'(0))^n$ . Alors, le spectre ponctuel de  $C_\varphi$  est*

$$\sigma_p(C_\varphi) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

De plus, il existe une unique fonction  $\varsigma \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  telle que

$$\begin{cases} \varsigma'(0) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, E_{\lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(C_\varphi - \lambda_n \text{Id}) = \mathbb{C} \cdot \varsigma^n \end{cases}.$$

L'objectif de cette sous-partie est de définir l'analogie sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  des projections spectrales. Avant de le faire, nous commençons par rappeler ce que l'on entend par « projection spectrale » sur un espace de Banach. Grâce à des résultats de calcul fonctionnel holomorphe (détaillés par exemple dans l'annexe B), nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 2.11 (décomposition spectrale sur un espace de Banach)** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach. Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . Supposons qu'il existe deux sous-ensembles  $\sigma_0$  et  $\sigma_1 \subset \sigma(T)$  qui sont non vides, ouverts et fermés dans  $\sigma(T)$ .*

*Alors, il existe deux sous-espaces fermés  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{X}_1$  tels que*

- (a) *on a la décomposition  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$  ;*
- (b) *les espaces  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{X}_1$  sont invariants par  $T$  ;*
- (c) *si  $T_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_0)$  est l'opérateur induit par  $T$  sur  $\mathcal{X}_0$ , alors son spectre est  $\sigma(T_0) = \sigma_0$  ;*
- (d) *si  $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1)$  est l'opérateur induit par  $T$  sur  $\mathcal{X}_1$ , alors son spectre est  $\sigma(T_1) = \sigma_1$ .*

*De plus, l'application résolvante  $R : \mu \mapsto (\mu \text{Id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} - \sigma(T)$ .*

*Enfin, on peut calculer la projection  $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  sur  $\mathcal{X}_0$  parallèlement à  $\mathcal{X}_1$  par calcul holomorphe : si  $\Gamma$  est une courbe de Jordan telle que  $\Gamma \cap \sigma(T) = \emptyset$  et  $\overline{\text{Int}(\Gamma)} \cap \sigma(T) = \sigma_0$ , alors*

$$P = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (\mu \text{Id} - T)^{-1} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

Dans le cas particulier où  $\lambda \in \sigma(T)$  est un point isolé, nous pouvons avec le résultat ci-dessus définir la projection spectrale associée à  $\lambda$ .

**Définition 2.12** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach. Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . Supposons qu'il existe un point  $\lambda \in \sigma(T)$  qui est isolé dans  $\sigma(T)$ .*

*Alors, il existe deux sous-espaces fermés  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{X}_1$  tels que*

- (a) *on a la décomposition  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$  ;*
- (b) *les espaces  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{X}_1$  sont invariants par  $T$  ;*
- (c) *si  $T_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_0)$  est l'opérateur induit par  $T$  sur  $\mathcal{X}_0$ , alors son spectre est  $\sigma(T_0) = \{\lambda\}$  ;*
- (d) *si  $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1)$  est l'opérateur induit par  $T$  sur  $\mathcal{X}_1$ , alors son spectre est  $\sigma(T_1) = \sigma(T) - \{\lambda\}$ .*

*La projection  $P$  sur  $\mathcal{X}_0$  parallèlement à  $\mathcal{X}_1$  est la projection spectrale associée à  $\lambda$ .*

*On dit que  $\lambda$  est un pôle simple de la résolvante si la fonction  $\mu \rightarrow (\mu \text{Id} - T)^{-1}$  a un pôle simple en  $\lambda$ . Ceci est équivalent à dire que  $\dim \mathcal{X}_0 = 1$ .*

L'objectif des résultats qui suivent est de définir sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  des applications qui seront l'analogue des projections spectrales (c'est l'objet du théorème 2.14). Nous commençons par démontrer un petit lemme technique.

**Lemme 2.13** *Soit  $\varphi$  un symbole de Koenigs dont le point de Denjoy-Wolff est 0. Soit  $\varsigma$  la fonction de Koenigs associée à  $\varphi$  (cf. théorème 2.10). Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,*

$$(\varsigma^n)^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n \end{cases} .$$

*Démonstration* : Si  $k < n$ , le résultat vient directement du fait que  $\zeta(0) = 0$ . Pour  $k = n$ , il suffit de remarquer que l'on a le développement limité suivant :

$$(\zeta^n)^{(n)}(x) = (\zeta^n)^{(n)}(0) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(1),$$

qui donne, en intégrant  $n$  fois successivement,

$$\zeta^n(x) = \frac{(\zeta^n)^{(n)}(0)}{n!} x^n + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n).$$

Or,  $\zeta(0) = 0$  et  $\zeta'(0) = 1$ . On obtient ainsi

$$\zeta^n(x) = \left( x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x) \right)^n = x^n + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n).$$

L'unicité du développement limité nous donne alors le résultat souhaité et conclut la preuve.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette sous-partie.

**Théorème 2.14** *Soit  $\varphi$  un symbole de Koenigs dont le point de Denjoy-Wolff est 0. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\lambda_n = (\varphi'(0))^n$ . Soit  $\zeta$  la fonction de Koenigs associée à  $\varphi$  (cf. théorème 2.10).*

*On définit récursivement une famille d'applications  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))^{\mathbb{N}}$  en posant, pour toute  $f \in \mathbb{D}$ ,*

$$\begin{cases} P_0(f) = f(0) \zeta^0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(f) = \frac{1}{n!} \times \left[ f - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(f) \right]^{(n)}(0) \times \zeta^n \end{cases} .$$

*De plus, les applications  $(P_n)_n$  vérifient les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour toute  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ , pour tout  $l \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,*

$$f^{(l)}(0) = \left( \sum_{k=0}^n P_k(f) \right)^{(l)}(0);$$

(ii) *pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n \circ C_\varphi = C_\varphi \circ P_n = \lambda_n P_n$  ;*

(iii) *il existe des coefficients  $(c_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour toute  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ ,*

$$P_n(f) = \left( \sum_{m=0}^n c_{n,m} f^{(m)}(0) \right) \zeta^n;$$

(iv) *pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n \circ P_m = P_m \circ P_n = \delta_{n,m} P_n$ .*

*En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  est une projection sur  $\mathbb{C} \cdot \zeta^n$ .*

Avant de prouver ce théorème, notons un résultat utile.

**Corollaire 2.15** *La famille  $(\zeta^n)_n$  est libre dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ .*

*Démonstration* : Soit  $n \in \mathbb{N}$  Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  tels que

$$\lambda_0 \zeta^0 + \lambda_1 \zeta^1 + \dots + \lambda_n \zeta^n = 0.$$

Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . En composant l'égalité ci-dessus par  $P_k$  et en remarquant que  $P_k(\zeta^j) = \delta_{j,k} \zeta^k$ , nous obtenons que  $\lambda_k \zeta^k = 0$ . Comme  $\zeta^k \neq 0$ , nous avons que  $\lambda_k = 0$ .

Ceci valant pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons bien montré que la famille  $(\zeta^n)_n$  est libre. Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous prouvons maintenant le théorème 2.14.

*Démonstration* : Commençons par remarquer que la définition de l'énoncé donne bien une famille d'opérateurs continus sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  : ceci découle du fait que la dérivation définit un opérateur continu sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  (d'après le théorème de Weierstrass 1.26).

**Preuve de (i)** Commençons par montrer le point (i). Nous allons montrer par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \ll \forall f \in \text{Hol}(\mathbb{D}), \forall l \in \llbracket 0; n \rrbracket, f^{(l)}(0) = \left( \sum_{k=0}^n P_k(f) \right)^{(l)}(0) \gg.$$

Initialisation : Soit  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Alors,  $f^{(0)}(0) = f(0)$ . De plus,

$$\left( \sum_{k=0}^0 P_k(f) \right)^{(0)}(0) = f(0)e_0(0) = f(0).$$

Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. Soit  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Soit  $l \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket$ . Nous distinguons deux cas.

**Premier cas** : Supposons que  $l \neq n+1$ .

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^{n+1} P_k(f) \right)^{(l)}(0) &= \underbrace{\left( \sum_{k=0}^n P_k(f) \right)^{(l)}(0)}_{=f^{(l)}(0) \text{ d'après } \mathcal{P}(n)} + [P_{n+1}(f)]^{(l)}(0) \\ &= f^{(l)}(0) + c \times \underbrace{(\zeta^{n+1})^{(l)}(0)}_{=0 \text{ d'après le lemme 2.13}} \\ &= f^{(l)}(0). \end{aligned}$$

**Second cas** : Traitons le cas où  $l = n+1$ .

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n+1} P_k(f)\right)^{(n+1)}(0) &= \left(\sum_{k=0}^n P_k(f)\right)^{(n+1)}(0) + [P_{n+1}(f)]^{(n+1)}(0) \\
&= \left(\sum_{k=0}^n P_k(f)\right)^{(n+1)}(0) + \dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{(n+1)!} \times \left[f - \sum_{k=0}^n P_k(f)\right]^{(n+1)}(0) \times \underbrace{(\zeta^{n+1})^{(n+1)}(0)}_{=(n+1)! \text{ d'après le lemme 2.13}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n P_k(f)\right)^{(n+1)}(0) + \left[f - \sum_{k=0}^n P_k(f)\right]^{(n+1)}(0) \\
&= f^{(n+1)}(0)
\end{aligned}$$

Ceci prouve l'hérédité et termine la preuve du premier point.

**Preuve de (ii)** Nous commençons par montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_\varphi \circ P_n = \lambda_n P_n$ . Soit  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Si  $n = 0$ , nous avons  $C_\varphi \circ P_0(f) = f(0) \times e_0 \circ \varphi = f(0)e_0 = \lambda_0 P_0(f)$ . Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous avons, par définition de  $P_n$ ,

$$\begin{aligned}
C_\varphi \circ P_n(f) &= \frac{1}{n!} \times \left[f - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(f)\right]^{(n)}(0) \times \underbrace{(\zeta^n \circ \varphi)}_{=\lambda_n \zeta^n} \\
&= \lambda_n P_n(f).
\end{aligned}$$

Ceci montre que  $C_\varphi P_n = \lambda_n P_n$ . Nous montrons maintenant par récurrence forte sur  $n \in \mathbb{N}$  la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \ll P_n \circ C_\varphi = \lambda_n P_n \gg.$$

Initialisation : soit  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Alors,

$$P_0 \circ C_\varphi(f) = f(\varphi(0))e_0 = f(0)e_0 = P_0(f) = \lambda_0 P_0(f).$$

Ceci prouve l'initialisation.

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $P_k \circ C_\varphi = \lambda_k P_k$ . Soit  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Alors,

$$P_{n+1}(f \circ \varphi) = \frac{1}{(n+1)!} (\tilde{g})^{(n+1)}(0) \zeta^{n+1}, \quad (\Upsilon)$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{g} &= f \circ \varphi - \sum_{k=0}^n P_k(f \circ \varphi) \\
&= f \circ \varphi - \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(f) \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(k)) \\
&= f \circ \varphi - \sum_{k=0}^n P_k(f) \circ \varphi \text{ (car pour tout } k, P_k \circ C_\varphi = \lambda_k P_k) \\
&= \underbrace{\left( f - \sum_{k=0}^n P_k(f) \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} g} \circ \varphi
\end{aligned}$$

où  $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  est une fonction telle que

$$P_{n+1}(f) = \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0) \times \zeta^{n+1}.$$

Alors, d'après la formule de Faà di Bruno (lemme 2.9), nous avons

$$\tilde{g}^{(n+1)}(0) = (g \circ \varphi)^{(n+1)}(0) = (\varphi'(0))^{n+1} g^{(n+1)}(0) + \sum_{\mathbf{m} \in K_{n+1}} C_{\mathbf{m}}^{n+1} g^{(|\mathbf{m}|)}(0).$$

Or, d'après le point (i) de ce théorème, nous avons que pour tout  $l \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $g^{(l)}(0) = 0$ . Il vient alors que

$$\tilde{g}^{(n+1)}(0) = \lambda_{n+1} g^{(n+1)}(0).$$

En utilisant cette expression dans l'équation ( $\Upsilon$ ), nous avons

$$P_{n+1}(f \circ \varphi) = \lambda_{n+1} \times \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0) \zeta^{n+1} = \lambda_{n+1} P_{n+1}(f).$$

Ceci prouve l'hérédité et termine la preuve du point (ii).

**Preuve de (iii)** Nous allons montrer par récurrence forte que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \ll \exists (c_{n,m})_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tels que, } \forall f \in \text{Hol}(\mathbb{D}), P_n(f) = \left( \sum_{m=0}^n c_{n,m} f^{(m)}(0) \right) \zeta^n \gg$$

est vraie.

Initialisation : Pour  $c_{0,0} = 1$ , le résultat est vrai.

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , la propriété  $\mathcal{P}(k)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. Soit  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ .

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(f) &= \frac{1}{(n+1)!} \left[ f - \sum_{k=0}^n P_k(f) \right]^{(n+1)} (0) \zeta^{n+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left[ f^{(n+1)}(0) - \sum_{k=0}^n (P_k(f))^{(n+1)}(0) \right] \zeta^{n+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left[ f^{(n+1)}(0) - \sum_{k=0}^n \left( \left( \sum_{m=0}^k c_{k,m} f^{(m)}(0) \right) \zeta^k \right)^{(n+1)} (0) \right] \zeta^{n+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left[ f^{(n+1)}(0) - \sum_{m=0}^n \underbrace{\left( \sum_{k=m}^n c_{k,m} (\zeta^k)^{(n+1)}(0) \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} c_{n+1,m}} f^{(m)}(0) \right] \zeta^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ceci prouve l'hérédité et achève la preuve du point (iii).

**Preuve de (iv)** Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ . Nous distinguons deux cas.

Premier cas : si  $m \neq n$ . Alors, comme  $P_n C_\varphi = \lambda_n P_n$ , nous avons que

$$\lambda_m P_n(\zeta^m) = P_n(\lambda_m \zeta^m) = P_n(\zeta^m \circ \varphi) = \lambda_n P_n(\zeta^m).$$

Or,  $\lambda_m \neq \lambda_n$ . Nous avons donc que  $P_n(\zeta^m) = 0$ . Comme  $\text{Im}(P_m) = \mathbb{C} \cdot \zeta^m$ , nous avons bien  $P_n \circ P_m = 0$ .

Second cas : Supposons que  $m = n$ . Comme  $\text{Im}(P_n) = \mathbb{C} \cdot \zeta^n$ , il nous suffit de montrer que  $P_n(\zeta^n) = \zeta^n$ . Si  $n = 0$ , le résultat est direct. Si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned}
P_n(\zeta^n) &= \frac{1}{n!} \left[ \zeta^n - \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{P_k(\zeta^n)}_{=0} \right]^{(n)} (0) \times \zeta^n \\
&= \frac{1}{n!} \underbrace{[\zeta^n]^{(n)}(0)}_{=n! \text{ d'après le lemme 2.13}} \times \zeta^n \\
&= \zeta^n
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du point (iv) et aussi la preuve du théorème.  $\square$

Les coefficients  $c_{n,m}$  apparaissant dans le théorème précédent (théorème 2.14) peuvent être calculés récursivement. La preuve ci-dessus montre que ces coefficients peuvent être calculés récursivement en fonctions des valeurs  $[\zeta^n]^{(k)}(0)$ . Or, la fonction de Koenigs  $\zeta$  dépend uniquement du symbole  $\varphi$ . Plus précisément, les dérivées  $[\zeta^n]^{(k)}(0)$  peuvent être calculées en fonction des dérivées de  $\varphi$  en 0. Le lemme ci-dessus détaille ce point.

**Lemme 2.16** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Les dérivées successives de  $\zeta^n$  peuvent être déterminées explicitement au moyen de la récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (\zeta^n)^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n \\ \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} \sum_{\mathbf{m} \in K_k} C_{\mathbf{m}}^k (\zeta^n)^{(|\mathbf{m}|)}(0) & \text{sinon} \end{cases}.$$

*Démonstration* : Si  $k \leq n$ , nous retrouvons le résultat du lemme 2.13. Supposons que  $k > n$ . Nous savons que  $\zeta^n \circ \varphi = \lambda_n \zeta^n$ . Nous dérivons cette identité  $k$  fois grâce à la formule de Faà di Bruno (lemme 2.9) et nous obtenons

$$\lambda_n (\zeta^n)^{(k)}(0) = \lambda_k (\zeta^n)^{(k)}(0) + \sum_{\mathbf{m} \in K_k} C_{\mathbf{m}}^k (\zeta^n)^{(|\mathbf{m}|)}(0).$$

Ceci achève la preuve.  $\square$

Le lemme ci-dessus nous permet de calculer récursivement les expressions des projections spectrales uniquement en fonction des dérivées successives de  $\varphi$  en 0. À titre d'exemple, nous détaillons dans la proposition suivante le calcul des projections  $P_0$  à  $P_3$ .

**Proposition 2.17** *Pour toute  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ , nous avons*

$$\begin{aligned} P_0(f) &= f(0) \times \zeta^0 \\ P_1(f) &= f'(0) \times \zeta \\ P_2(f) &= \frac{1}{2} \left[ f''(0) + \frac{\varphi''(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} f'(0) \right] \times \zeta^2 \\ P_3(f) &= \frac{1}{6} \left[ f^{(3)}(0) + \frac{3\varphi''(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} f''(0) + \left\{ \frac{\varphi^{(3)}(0)}{\lambda_3 - \lambda_1} + \frac{3(\varphi''(0))^2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right\} f'(0) \right] \times \zeta^3 \end{aligned}$$

*Démonstration* : Soit  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Le calcul de  $P_0(f)$  est immédiat. Nous commençons par calculer  $P_1(f)$ . Pour cela, nous remarquons que

$$\begin{aligned} P_1(f) &= \frac{1}{1!} [f - P_0(f)]'(0) \times \zeta \\ &= f'(0) \times \zeta. \end{aligned}$$

Nous passons maintenant au calcul de  $P_2(f)$ .

$$\begin{aligned} P_2(f) &= \frac{1}{2} [f - P_0(f) - P_1(f)]''(0) \times \zeta^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ f''(0) - f(0) \times (\zeta^0)''(0) - f'(0) \times \zeta''(0) \right] \times \zeta^2 \\ &= \frac{1}{2} [f''(0) - 0 - f'(0) \times \zeta''(0)] \times \zeta^2 \end{aligned}$$

Nous déterminons maintenant  $\zeta''(0)$  en fonction des dérivées de  $\varphi$  en 0. Pour cela, nous suivons la méthode du lemme 2.16. Nous savons que  $\zeta \circ \varphi = \lambda \zeta$ . Grâce à la formule de Faà di Bruno (proposition 2.9), nous avons

$$\begin{aligned} \lambda \zeta''(0) &= (\zeta \circ \varphi)''(0) \\ &= \varphi''(0) \times \zeta' \circ \varphi(0) + (\varphi'(0)) \times \zeta''(\varphi(0)). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\zeta''(0) = \varphi''(0) \times \zeta'(0) = \varphi''(0).$$

Et nous obtenons finalement que

$$P_2(f) = \frac{1}{2} \left[ f''(0) + \frac{\varphi''(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} f'(0) \right] \times \zeta^2.$$

Passons maintenant au calcul de  $P_3(f)$ . Commençons par revenir à la définition de  $P_3$  :

$$\begin{aligned} P_3(f) &= \frac{1}{6} [f - P_0(f) - P_1(f) - P_2(f)]^{(3)}(0) \times \zeta^3 \\ &= \frac{1}{6} \left[ f - f(0) \times (\zeta^0)^{(3)}(0) - f'(0) \times \zeta^{(3)}(0) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \frac{1}{2} \left( f''(0) + \frac{\varphi''(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} f'(0) \right) \times (\zeta^2)^{(3)}(0) \right] \times \zeta^3 \end{aligned}$$

Il nous reste donc à déterminer  $\zeta^{(3)}(0)$  et  $(\zeta^2)^{(3)}(0)$ , encore une fois en suivant la méthode du lemme 2.16. Commençons par calculer  $\zeta^{(3)}(0)$ . D'après la formule de Faà di Bruno, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda \zeta^{(3)} &= \varphi^{(3)} \times \zeta' \circ \varphi + 3 \varphi' \varphi'' \times \zeta'' \circ \varphi + (\varphi')^3 \times \zeta^{(3)} \circ \varphi \\ \lambda \zeta^{(3)}(0) &= \varphi^{(3)}(0) \times \zeta'(0) + 3 \varphi'(0) \varphi''(0) \times \zeta''(0) + (\varphi'(0))^3 \times \zeta^{(3)}(0) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(\lambda_1 - \lambda_3)\zeta^{(3)}(0) = \varphi^{(3)}(0) + 3 \varphi'(0) \varphi''(0) \times \frac{\varphi''(0)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

et donc

$$\zeta^{(3)}(0) = \frac{\varphi^{(3)}(0)}{\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{3 \varphi'(0) (\varphi''(0))^2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Calculons maintenant  $(\zeta^2)^{(3)}(0)$ . D'abord, souvenons-nous que, d'après le lemme 2.13, nous avons que  $\zeta^2(0) = 0$ ,  $(\zeta^2)'(0) = 0$  et  $(\zeta^2)''(0) = 2$ . De plus, d'après la formule de Faà di Bruno, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_2 (\zeta^2)^{(3)} &= (\zeta^2 \circ \varphi)^{(3)} \\ &= \varphi^{(3)} \times (\zeta^2)' \circ \varphi + 3 \varphi' \varphi'' \times (\zeta^2)'' \circ \varphi + (\varphi')^3 \times (\zeta^2)^{(3)} \circ \varphi \\ \lambda_2 (\zeta^2)^{(3)}(0) &= \varphi^{(3)}(0) \times (\zeta^2)'(0) + 3 \varphi'(0) \varphi''(0) \times (\zeta^2)''(0) + (\varphi'(0))^3 \times (\zeta^2)^{(3)}(0). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$(\zeta^2)^{(3)}(0) = \frac{6 \varphi'(0) \varphi''(0)}{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

Il vient finalement

$$\begin{aligned}
P_3(f) &= \frac{1}{6} \left[ f - f(0) \times (\zeta^0)^{(3)}(0) - f'(0) \times \left( \frac{\varphi^{(3)}(0)}{\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{3\varphi'(0)(\varphi''(0))^2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)} \right) + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots - \frac{1}{2} \left( f''(0) + \frac{\varphi''(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} f'(0) \right) \times \frac{6\varphi'(0)\varphi''(0)}{\lambda_2 - \lambda_3} \right] \times \zeta^3 \\
&= \frac{1}{6} \left[ f^{(3)}(0) + \frac{3\varphi'(0)\varphi''(0)}{\lambda_3 - \lambda_2} f''(0) + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + \left( \frac{\varphi^{(3)}(0)}{\lambda_3 - \lambda_1} + \frac{3\varphi'(0)(\varphi''(0))^2}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} - \frac{3\varphi'(0)(\varphi''(0))^2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) f'(0) \right] \times \zeta^3 \\
&= \frac{1}{6} \left[ f^{(3)}(0) + \frac{3\varphi'(0)\varphi''(0)}{\lambda_3 - \lambda_2} f''(0) + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + \left( \frac{\varphi^{(3)}(0)}{\lambda_3 - \lambda_1} + \frac{3\varphi'(0)(\varphi''(0))^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \right\} \right) f'(0) \right] \times \zeta^3.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} &= \frac{\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} \\
&= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} = \frac{1}{\varphi'(0)(\lambda_3 - \lambda_1)}.
\end{aligned}$$

Nous retrouvons alors le résultat recherché pour l'expression de  $P_3(f)$ . Ceci achève la preuve.

□

Nous étudions le comportement des applications  $Q_n = P_0 + P_1 + \dots + P_n$ . Commençons par un rappel d'algèbre linéaire élémentaire.

**Lemme 2.18 (admis)** *Soient  $E$  un espace vectoriel,  $n \in \mathbb{N}$ , et  $P_0, P_1, \dots, P_n$  des projections telles que, pour tous  $i, j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $P_i \circ P_j = \delta_{i,j}$ . Soit  $Q_n = P_0 + P_1 + \dots + P_n$ .*

*L'application  $Q_n$  est la projection sur  $\text{Im}(Q_n) = \bigoplus_{k=0}^n \text{Im}(P_k)$  parallèlement à  $\text{Ker}(Q_n) = \bigcap_{k=0}^n \text{Ker}(P_k)$ .*

Introduisons une notation utile pour les démonstrations à venir : pour  $n \in \mathbb{N}$ , nous considérerons

$$\text{Hol}_n(\mathbb{D}) \stackrel{\text{def}}{=} z^{n+1} \times \text{Hol}(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0 \right\}.$$

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme précédent aux projections spectrales sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ .

**Proposition 2.19** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit*

$$Q_n = P_0 + P_1 + \dots + P_n \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D})).$$

*Alors,  $Q_n$  est la projection sur  $\text{Vect}(1, \zeta, \dots, \zeta^n)$  parallèlement à  $\text{Hol}_n(\mathbb{D})$ . En particulier,*

$$\text{Hol}(\mathbb{D}) = \text{Vect}(1, \zeta, \dots, \zeta^n) \oplus \text{Hol}_n(\mathbb{D}).$$

*De plus, ces deux espaces sont des sous-espaces fermés de  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  qui sont stables par  $C_\varphi$ .*

*Démonstration* : D'après la théorème 2.14, nous savons que, pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $P_m \circ P_n = \delta_{n,m} P_n$ . Alors, d'après le lemme 2.18, l'image de  $Q_n$  est

$$\operatorname{Im}(Q_n) = \bigoplus_{k=0}^n \operatorname{Im}(P_k) = \operatorname{Vect} \left( \zeta^k \mid k \in \llbracket 0; n \rrbracket \right).$$

En particulier,  $\operatorname{Im}(Q_n)$  est de dimension finie et donc fermé.

Par ailleurs, le noyau de  $Q_n$  est également fermé. Comme nous savons par ailleurs que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C_\varphi \circ P_k = P_k \circ C_\varphi$ , il vient que  $C_\varphi$  commute avec  $Q_n$ . En particulier,  $\operatorname{Im}(Q_n)$  et  $\operatorname{Ker}(Q_n)$  sont des espaces invariants par  $C_\varphi$ .

Il nous reste à montrer que  $\operatorname{Ker}(Q_n) = \operatorname{Hol}_n(\mathbb{D})$ .

Commençons par montrer que  $\operatorname{Ker}(Q_n) \subset \operatorname{Hol}_n(\mathbb{D})$ . Soit  $f \in \operatorname{Ker}(Q_n)$ . Alors, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $P_k(f) = 0$ . Soit  $l \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . D'après le point (i) du théorème 2.14,

$$f^{(l)}(0) = \left( \sum_{k=0}^n P_k(f) \right)^{(l)}(0) = 0.$$

Ceci valant pour tout  $l \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , nous avons bien que  $f \in \operatorname{Hol}_n(\mathbb{D})$ .

Montrons maintenant que  $\operatorname{Hol}_n(\mathbb{D}) \subset \operatorname{Ker}(Q_n)$ . Soit  $f \in \operatorname{Hol}_n(\mathbb{D})$ . Alors, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $f^{(k)}(0) = 0$ . Soit  $l \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . D'après le point (iii), nous avons

$$P_l(f) = \left( \sum_{k=0}^l c_{l,k} f^{(k)}(0) \right) \times \zeta^k = 0.$$

Donc  $f \in \operatorname{Ker}(P_l)$ . Ceci valant pour tout  $l \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , nous avons bien montré le résultat souhaité.  $\square$

#### A.4.b) — Étude spectrale sur $\operatorname{Hol}(\mathbb{D})$

Nous allons maintenant appliquer les résultats précédents (et notamment la propriété 2.19) pour déterminer le spectre de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\operatorname{Hol}(\mathbb{D}))$ . Avant d'énoncer notre résultat principal, nous énonçons un résultat auxiliaire.

**Lemme 2.20** *Soient  $g \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$  et  $\mu \neq 0$ . On suppose qu'il existe  $\varepsilon \in ]0; 1[$  et  $f \in \operatorname{Hol}(\varepsilon\mathbb{D})$  tels que, pour tout  $z \in \varepsilon\mathbb{D}$ ,*

$$\mu f(z) - f(\varphi(z)) = g(z).$$

*Alors, il existe une fonction  $\tilde{f} \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$  telle que  $\tilde{f}|_{\varepsilon\mathbb{D}} = f$  et, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,*

$$\mu \tilde{f}(z) - \tilde{f}(\varphi(z)) = g(z).$$

*Démonstration* : Considérons

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ r \in [\varepsilon; 1] \mid f \text{ admet une extension } \tilde{f}_r \text{ holomorphe sur } r\mathbb{D} \right\}.$$

Remarquons que  $E$  est non vide (car  $\varepsilon \in E$ ). Par ailleurs,  $E$  est naturellement un intervalle. Enfin, l'unicité du prolongement holomorphe nous dit que, pour tous  $r < r' \in E$ , nous avons que

$(\widetilde{f_{r'}})_{|r\mathbb{D}} = \widetilde{f_r} \in \text{Hol}(r\mathbb{D})$ . De plus, le même principe du prolongement holomorphe nous permet d'affirmer que

$$\forall r \in E, \forall z \in r\mathbb{D}, \mu \widetilde{f_r}(z) - \widetilde{f_r}(\varphi(z)) = g(z).$$

Notons  $\rho = \sup E$ . Comme  $E$  est un intervalle, nous avons que  $E = [\varepsilon, \rho]$  ou  $E = [\varepsilon, \rho[$ . Nous montrons que  $\rho \in E$  et que  $\rho = 1$ .

Commençons par montrer que  $\rho \in E$ . Considérons une suite croissante  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  telle que  $r_n \rightarrow \rho$ . Soit  $z \in \rho\mathbb{D}$ . Par unicité du prolongement holomorphe, nous savons que, pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$  tel que  $r_n > |z|$  et  $r_m > |z|$ , nous avons  $\widetilde{f_{r_n}}(z) = \widetilde{f_{r_m}}(z)$ . On définit alors une fonction

$$\widetilde{f} : \begin{cases} \rho\mathbb{D} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \widetilde{f_{r_n}}(z) \text{ avec } n \text{ tel que } z \in r_n\mathbb{D} \end{cases}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $\widetilde{f}|_{r_n\mathbb{D}}$  est holomorphe sur  $r_n\mathbb{D}$ . Nous avons donc que  $\widetilde{f}$  est une fonction holomorphe sur  $\rho\mathbb{D}$ . C'est de plus un prolongement analytique de  $f$ . Ainsi  $\rho \in E$ .

Nous montrons maintenant que  $\rho = 1$ . Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Nous commençons par montrer qu'il existe  $\rho' \in ]\rho; 1]$  tel que  $\varphi(\rho'\mathbb{D}) \subset \rho\mathbb{D}$ .

Supposons par l'absurde que, pour tout  $\rho' > \rho$ , nous avons  $\varphi(\rho'\mathbb{D}) \not\subset \rho\mathbb{D}$  : il existe alors une suite  $(z_n)_n \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$  telle que  $|z_n| \rightarrow \rho$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\varphi(z_n)| \geq \rho$ . De plus, d'après le lemme de Schwarz, nous avons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\varphi(z_n)| \leq |z_n|$ . Ainsi,  $|\varphi(z_n)| \rightarrow \rho$ . De plus, il existe une extraction  $\alpha$  et  $Z \in \mathbb{D}$  tels que  $z_{\alpha(n)} \rightarrow Z$ . Ainsi, nous avons  $|Z| = \rho = |\varphi(Z)|$ . D'après le lemme de Schwarz, nous avons que  $\varphi$  est une rotation. Ceci contredit le fait que  $\varphi$  est un symbole de Koenigs. Ainsi, il existe bien  $\rho' \in ]\rho; 1]$  tel que  $\varphi(\rho'\mathbb{D}) \subset \rho\mathbb{D}$ .

Nous définissons alors une fonction

$$\widetilde{f_{\rho'}} : \begin{cases} \rho'\mathbb{D} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{\widetilde{f_{\rho}}(\varphi(z)) - g(z)}{\mu} \end{cases}.$$

Comme  $\varphi(\rho'\mathbb{D}) \subset \rho\mathbb{D}$ , nous avons bien  $\widetilde{f_{\rho'}} \in \text{Hol}(\rho'\mathbb{D})$ . De plus, comme  $\rho \in E$ , pour tout  $z \in \rho\mathbb{D}$ , nous avons  $\widetilde{f_{\rho'}}(z) = \frac{\widetilde{f_{\rho}}(\varphi(z)) - g(z)}{\mu} = f(z)$ . Ainsi,  $\widetilde{f_{\rho'}}$  est un prolongement analytique de  $f$ . On a donc  $\rho' \in E$  avec  $\rho' > \rho$ . Ceci contredit la maximalité de  $\rho$ . Nous avons donc  $\rho = 1 \in E$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette partie.

**Théorème 2.21** *Le spectre ponctuel de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  est*

$$\sigma_p(C_\varphi) = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

*et le spectre de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  est*

$$\sigma(C_\varphi) = \{0\} \cup \sigma_p(C_\varphi).$$

Pour montrer le théorème 2.21, nous voulons déterminer quand  $(\mu \text{Id} - C_\varphi) \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  est inversible. Pour cela, nous commençons par remarquer que, *formellement*, si  $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ ,

$$(\mu \text{Id} - C_\varphi)^{-1} g \approx \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g \circ \varphi^{[n]}}{\mu^n}.$$

Le lemme suivant précise des conditions sous lesquelles on peut assurer la convergence de la série ci-dessus.

**Lemme 2.22** *Pour tout  $\mu_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ , il existe  $\varepsilon \in ]0; 1[$ , et  $N_0 \in \mathbb{N}$  tels que, pour tout  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $|\mu| > \mu_0$  et pour toute  $g \in \text{Hol}_{N_0}(\mathbb{D})$ , la série de terme général  $\sum_{n \geq 0} \frac{g \circ \varphi^{[n]}}{\mu^n}$  converge uniformément sur  $\varepsilon\overline{\mathbb{D}}$ .*

*Démonstration* : Soit  $\zeta \in \mathbb{R}^+$  tel que  $|\lambda| < \zeta < 1$ . Il existe  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\zeta^{N_0+1} < \mu_0$ .

Remarquons que  $\frac{|\varphi(z)|}{|z|} \xrightarrow{z \rightarrow 0} |\lambda|$ . Il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall z \in \varepsilon\overline{\mathbb{D}}, |\varphi(z)| \leq \zeta |z| \leq \varepsilon.$$

En particulier,  $\varphi(\varepsilon\overline{\mathbb{D}}) \subset \varphi(\varepsilon\overline{\mathbb{D}}) \subset \varepsilon\overline{\mathbb{D}}$ . De plus, par récurrence sur  $n$ , nous avons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \varepsilon\overline{\mathbb{D}}, |\varphi^{[n]}(z)| \leq \zeta^n |z| \leq \varepsilon.$$

Soit  $g \in \text{Hol}_{N_0}(\mathbb{D})$ . Il existe donc  $B > 0$  tel que,

$$\forall Z \in \varepsilon\overline{\mathbb{D}}, |g(Z)| \leq B |Z|^{N_0+1}.$$

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $z \in \varepsilon\overline{\mathbb{D}}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \left| \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n} \right| &\leq \frac{B}{|\mu|^n} |\varphi^{[n]}(z)|^{N_0+1} \\ &\leq \frac{B}{|\mu|^n} \times (|\zeta|^n \varepsilon)^{N_0+1} \\ &\leq B \varepsilon^{N_0+1} \left( \frac{|\zeta|^{N_0+1}}{|\mu|} \right)^n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sup_{z \in \varepsilon\overline{\mathbb{D}}} \left| \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n} \right| \leq B \varepsilon^{N_0+1} \left( \frac{|\zeta|^{N_0+1}}{|\mu|} \right)^n \leq B \varepsilon^{N_0+1} \left( \frac{|\zeta|^{N_0+1}}{\mu_0} \right)^n.$$

Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{g \circ \varphi^{[n]}}{\mu^n}$  est normalement convergente dans  $(\mathcal{C}^0(\varepsilon\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty, \varepsilon\overline{\mathbb{D}})$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorème 2.21.

*Démonstration* : Commençons par remarquer que  $\sigma_p(C_\varphi) \subset \sigma(C_\varphi)$ . Ainsi, nous avons bien que

$$\sigma_p(C_\varphi) = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(C_\varphi).$$

D'autre part, comme  $\varphi$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , nous savons que  $C_\varphi$  n'est pas inversible (corollaire 2.3). En particulier,  $0 \in \sigma(C_\varphi)$ .

Nous prenons maintenant  $\mu \in \mathbb{C} - (\{0\} \cup \sigma(C_\varphi))$ . Nous montrons que  $\mu \notin \sigma(C_\varphi)$ , c'est-à-dire que  $(\mu \text{Id} - C_\varphi)$  est inversible.

D'après le lemme 2.22, il existe  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $g \in \text{Hol}_{N_0}(\mathbb{D})$ , la série de terme général  $\sum_{n \geq 0} \frac{g \circ \varphi^{[n]}}{\mu^n}$  converge uniformément sur  $\varepsilon \overline{\mathbb{D}}$ . De plus, d'après la proposition 2.19, nous avons la décomposition suivante

$$\text{Hol}(\mathbb{D}) = \text{Vect}(1, \varsigma, \dots, \varsigma^{N_0}) \oplus \text{Hol}_{N_0}(\mathbb{D})$$

et il existe  $S \in \mathcal{L}(\text{Vect}(1, \varsigma, \dots, \varsigma^{N_0}))$  et  $T \in \mathcal{L}(\text{Hol}_{N_0}(\mathbb{D}))$  tels que

$$C_\varphi = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \text{ sur } \begin{bmatrix} \text{Vect}(1, \varsigma, \dots, \varsigma^{N_0}) \\ \text{Hol}_{N_0}(\mathbb{D}) \end{bmatrix}.$$

Il nous suffit donc de montrer que les opérateurs  $\mu \text{Id} - S \in \mathcal{L}(\text{Vect}(1, \varsigma, \dots, \varsigma^{N_0}))$  et  $\mu \text{Id} - T \in \mathcal{L}(\text{Hol}_{N_0}(\mathbb{D}))$  sont inversibles.

Nous commençons par montrer que  $\mu \text{Id} - S$  est inversible. Pour cela, rappelons que la famille  $(\varsigma^k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\text{Vect}(1, \varsigma, \dots, \varsigma^{N_0})$  et que  $S$  est diagonal dans cette base :

$$\text{Mat}_{(1, \varsigma, \dots, \varsigma^{N_0})}(S) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{N_0-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{N_0} \end{pmatrix}.$$

Comme  $\mu \notin \sigma_p(C_\varphi)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu \neq \lambda_n$ . Ceci prouve que  $\mu \text{Id} - S$  est inversible.

Nous prouvons maintenant que  $\mu \text{Id} - T$  est inversible. D'après le théorème du graphe fermé, il nous suffit de vérifier que  $T - \mu \text{Id}$  est bijectif. Comme  $\mu \notin \sigma_p(C_\varphi)$ , nous savons que  $\mu \text{Id} - T$  est injectif. Nous montrons alors que  $\mu \text{Id} - T \in \mathcal{L}(\text{Hol}_{N_0}(\mathbb{D}))$  est surjectif.

Soit  $g \in \text{Hol}_{N_0}(\mathbb{D})$ . D'après le lemme 2.22, la fonction

$$f = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g \circ \varphi^{[n]}}{\mu^n} \in \text{Hol}(\varepsilon \mathbb{D})$$

est bien définie. De plus, pour tout  $z \in \varepsilon \mathbb{D}$ , nous avons

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(z) - \mu f(z) &= \frac{-1}{\mu} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^{n-1}} + \mu \times \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n} \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n} \\ &= g(z). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 2.20, il existe une fonction  $\tilde{f} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \tilde{f} \circ \varphi(z) - \mu \tilde{f}(z) = g(z).$$

En d'autres termes,  $(\mu \text{Id} - T)f = g$ . Ceci prouve que  $\mu \text{Id} - T$  est surjectif et achève la preuve.  $\square$

Remarquons que la preuve du théorème 2.21 permet également de montrer le résultat suivant.

**Corollaire 2.23** *Pour tout  $\mu_0 > 0$ , il existe  $\varepsilon \in ]0; 1]$  et  $N_0 \in \mathbb{N}$  tels que, pour toute  $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ , il existe  $B' > 0$  et  $\zeta \in B(0, \mu_0)$  tels que, pour tout  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $|\mu| > \mu_0$ , on a*

$$\left| \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n} \right| \leq B' \left( \frac{|\zeta|^{N+1}}{|\mu|} \right)^n.$$

*En particulier, sous les hypothèses ci-dessus,*

$$(\mu \text{Id} - C_\varphi)^{-1}(g)(z) = \frac{1}{\mu} \sum_{n \geq 0} \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n}.$$

*Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\mu \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\mu \neq \lambda_n$ ,*

$$(\mu \text{Id} - C_\varphi)^{-1}(\zeta^k) = \frac{1}{\mu - \lambda_k} \zeta^k.$$

Les estimations établies dans le corollaire jouent un rôle crucial dans la preuve du résultat qui vient. Nous savons déjà que les applications  $(P_n)_n$  jouent bien le rôle de projections spectrales, dans la mesure où ce sont des projections sur des vecteurs propres et qu'elles commutent entre elles. L'objectif du résultat qui suit est de montrer sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  un analogue de la dernière partie de la propriété 2.11, en montrant que l'on peut obtenir les projections  $(P_n)_n$  grâce à un calcul de résidu.

**Théorème 2.24** *Soient  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ ,  $z \in \mathbb{D}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, les fonctions*

$$R_{f,z} : \begin{cases} \mathbb{C} - \sigma(C_\varphi) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mu & \longmapsto ((\mu \text{Id} - C_\varphi)^{-1}(f))(z) \end{cases}$$

*et*

$$\widetilde{R}_{f,z,n} : \begin{cases} (\mathbb{C} - \sigma(C_\varphi)) \cup \{\lambda_n\} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mu & \longmapsto ((\mu \text{Id} - C_\varphi)^{-1}(f - P_n(f)))(z) \end{cases}$$

*sont holomorphes.*

*De plus, si  $\Gamma$  est une courbe de Jordan choisie telle que  $\lambda_n \in \text{Int}(\Gamma)$  et  $\overline{\text{Int}(\Gamma)} \cap \sigma(C_\varphi) = \{\lambda_n\}$ , alors*

$$\int_{\Gamma} ((\mu \text{Id} - C_\varphi)^{-1}(f))(z) \, d\mu = \frac{1}{2i\pi} P_n(f)(z).$$

*Démonstration :* Nous commençons par montrer que la fonction  $R_{f,z}$  est holomorphe. Pour cela, nous montrons que, pour tout  $\eta > 0$ , la fonction  $R_{f,z}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} - (\sigma(C_\varphi) \cup \overline{B}(0, \eta))$ . Soit  $\eta > 0$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $\eta < 1$ . Soient alors  $\varepsilon > 0$  et  $N_0 \in \mathbb{N}$  donnés par le corollaire technique 2.23. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n > N_0$ , alors  $|\lambda_n| < \eta$ .

Comme  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ , d'après la proposition 2.19, il existe une unique fonction  $g \in \text{Hol}_{N_0}(\mathbb{D})$  telle que

$$f = \sum_{k=0}^{N_0} C_k(f) \zeta^k + g.$$

Nous distinguons maintenant deux cas, selon la valeur de  $z$ .

**Premier cas :** Supposons que  $z \in \varepsilon\mathbb{D}$ . Alors, d'après le corollaire 2.23, nous avons que, pour tout  $\mu \in \mathbb{C} - \sigma(C_\varphi)$  tel que  $|\mu| > \eta$ ,

$$(\mu \text{Id} - C_\varphi)^{-1}(f)(z) = \sum_{k=0}^{N_0} \frac{C_k(f)}{\mu - \lambda_k} \zeta^k(z) + \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n}.$$

D'autre part, le même corollaire nous dit qu'il existe  $B'$  et  $\zeta \in \mathbb{C}$  tel que  $|\zeta| < \eta$  tels que, pour tout  $\mu \in \mathbb{C} - \sigma(C_\varphi)$  tel que  $|\mu| > \eta$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n} \right| \leq B' \left( \frac{|\zeta|}{|\mu|} \right)^n \leq B' \left( \frac{|\zeta|}{|\eta|} \right)^n.$$

Or, la série  $\sum_{n \geq 0} B' \left( \frac{|\zeta|}{|\eta|} \right)^n$  converge. On déduit donc du théorème d'holomorphic sous l'intégrale que la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{C} - \bar{B}(0, \eta) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mu & \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n} \end{cases}$$

est holomorphe. De plus, la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{C} - \sigma(C_\varphi) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mu & \longmapsto \sum_{k=0}^{N_0} \frac{C_k(f)}{\mu - \lambda_k} \zeta^k(z) \end{cases}$$

est également holomorphe. Ceci prouve le premier cas.

**Second cas :** Supposons que  $z \notin \varepsilon\bar{\mathbb{D}}$ . Comme  $\varphi$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , il découle du lemme de Schwarz qu'il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\varphi^{[m]}(z) \in \varepsilon\mathbb{D}$  (nous avons détaillé cet argument dans la preuve du lemme 2.20). Nous allons maintenant utiliser l'équation fonctionnelle caractérisant les valeurs propres de  $C_\varphi$  pour montrer le résultat que nous cherchons. Pour  $\mu \in \mathbb{C} - \sigma(C_\varphi)$ , notons  $g_\mu = (\mu \text{Id} - C_\varphi)^{-1}(f) \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Commençons par fixer  $\mu \in \mathbb{C} - \sigma(C_\varphi)$  tel que  $|\mu| > \eta$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , considérons

$$g_n(\mu) : z \longmapsto \frac{g_\mu \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f \circ \varphi^{[k]}(z)}{\mu^{k+1}} \in \text{Hol}(\mathbb{D}).$$

Rappelons que, pour tout  $Z \in \mathbb{D}$ ,

$$\mu g_\mu(Z) - g_\mu \circ \varphi(Z) = f(Z).$$

On peut donc montrer par une récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  non détaillée ici que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n(\mu) = g_\mu(z)$ .

Or, comme  $\varphi^{[m]}(z) \in \varepsilon\mathbb{D}$ , nous savons par le premier cas que la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{C} - (\sigma(C_\varphi) \cup \bar{B}(0, \eta)) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mu & \longmapsto \frac{g_\mu \circ \varphi^{[m]}(z)}{\mu^m} \end{cases}$$

est holomorphe. De plus, la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mu & \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f \circ \varphi^{[k]}(z)}{\mu^{k+1}} \end{cases}$$

est bien holomorphe. Ceci achève la preuve du deuxième cas.

Nous nous intéressons maintenant aux calculs des résidus. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\Gamma$  une courbe de Jordan telle que  $\lambda_n \in \text{Int}(\Gamma)$  et  $\overline{\text{Int}(\Gamma)} \cap \sigma(C_\varphi) = \{\lambda_n\}$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $\overline{\text{Int}(\Gamma)} \cap \overline{B}(0, \eta) = \emptyset$ . Nous reprenons la même disjonction de cas que précédemment.

**Premier cas :** Supposons que  $z \in \varepsilon\mathbb{D}$ . Alors, d'après les résultats d'holomorphic établis dans la première partie de la preuve,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} ((\mu \text{Id} - C_\varphi)^{-1}(f))(z) \, d\mu &= \int_{\Gamma} \left[ \sum_{k=0}^{N_0} \frac{C_k(f)}{\mu - \lambda_k} \zeta^k(z) + \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n} \right] \, d\mu \\ &= \sum_{k=0}^{N_0} \int_{\Gamma} \frac{C_k(f)}{\mu - \lambda_k} \zeta^k(z) \, d\mu + \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g \circ \varphi^{[n]}(z)}{\mu^n} \, d\mu}_{=0} \\ &= \int_{\Gamma} \frac{C_n(f)}{\mu - \lambda_n} \zeta^n(z) \, d\mu + \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{N_0} \int_{\Gamma} \frac{C_k(f)}{\mu - \lambda_k} \zeta^k(z) \, d\mu}_{=0} \\ &= \frac{1}{2i\pi} C_n(f) \zeta^n(z) \\ &= \frac{1}{2i\pi} P_n(f)(z). \end{aligned}$$

**Second cas :** Supposons que  $z \notin \varepsilon\mathbb{D}$ . Notons  $g_\mu = (\mu \text{Id} - C_\varphi)^{-1}(f) \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Alors, nous avons vu dans cette preuve qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\varphi^{[m]}(z) \in \varepsilon\mathbb{D}$  et

$$g_m(\mu) = g_\mu(z) = \frac{g_\mu \circ \varphi^{[m]}(z)}{\mu^m} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f \circ \varphi^{[k]}(z)}{\mu^{k+1}}.$$

Comme  $\mu \mapsto \frac{1}{\mu^m}$  est holomorphe sur  $\text{Int}(\Gamma)$ , nous avons

$$\int_{\Gamma} \frac{g_\mu \circ \varphi^{[m]}(z)}{\mu^m} g_\mu(z) \, d\mu = \left( \frac{1}{\lambda_n} \right)^m \times \int_{\Gamma} g_\mu \circ \varphi^{[m]}(z) \, d\mu.$$

En utilisant les résultats d'holomorphic démontrés dans la première partie de la preuve, et en utilisant le premier cas (car  $\varphi^{[m]}(z) \in \varepsilon\mathbb{D}$ ), nous avons finalement

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} g_{\mu}(z) \, d\mu &= \int_{\Gamma} g_m(\mu) \, d\mu \\
&= \int_{\Gamma} \frac{g_{\mu} \circ \varphi^{[m]}(z)}{\mu^m} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f \circ \varphi^{[k]}(z)}{\mu^{k+1}} \, d\mu \\
&= \int_{\Gamma} \frac{g_{\mu} \circ \varphi^{[m]}(z)}{\mu^m} \, d\mu + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \int_{\Gamma} \frac{f \circ \varphi^{[k]}(z)}{\mu^{k+1}} \, d\mu}_{=0} \\
&= \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^m \times \int_{\Gamma} g_{\mu} \circ \varphi^{[m]}(z) \, d\mu \\
&= \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^m \times \frac{1}{2i\pi} P_n(g \circ \varphi^{[m]})(z) \\
&= \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^m \times \frac{1}{2i\pi} P_n \circ C_{\varphi}^m(g)(z)
\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.14, nous avons  $P_n \circ C_{\varphi} = \lambda_n P_n$ . Nous obtenons finalement

$$\int_{\Gamma} g_{\mu}(z) \, d\mu = \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^m \times (\lambda_n)^m \frac{1}{2i\pi} P_n(g)(z) = \frac{1}{2i\pi} P_n(g)(z).$$

Pour terminer la preuve, il nous reste à vérifier que la fonction  $\widetilde{R}_{f,z,n}$  est holomorphe sur  $(\mathbb{C} - \sigma(C_{\varphi})) \cup \{\lambda_n\}$ . Nous savons déjà qu'elle est holomorphe sur  $C - \sigma(C_{\varphi})$  (car  $R_{f-P_n(f),z}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} - \sigma(C_{\varphi})$ ), et que l'ordre de  $\lambda_n$  en tant que pôle est nécessairement plus petit que 1. Or, en calculant le résidu au point  $\lambda_n$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (\mu \text{Id} - C_{\varphi})^{-1}(f - P_n(f))(z) \, d\mu &= \int_{\Gamma} (\mu \text{Id} - C_{\varphi})^{-1}(f)(z) \, d\mu - \int_{\Gamma} (\mu \text{Id} - C_{\varphi})^{-1}(P_n(f))(z) \, d\mu \\
&= \frac{1}{2i\pi} P_n(f)(z) - \frac{1}{2i\pi} P_n(P_n(f))(z) \\
&= \frac{1}{2i\pi} P_n(f)(z) - \frac{1}{2i\pi} P_n(f)(z) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci montre que  $\widetilde{R}_{f,z,n}$  est prolongeable par continuité en  $\lambda_n$  et achève donc la preuve.  $\square$

#### A.4.c) — Application : étude spectrale sur des espaces de Banach

Nous allons utiliser les résultats précédents pour étudier la forme générale du spectre d'un opérateur de composition sur un espace de Banach. Commençons par rappeler ou fixer quelques notations.

Sauf mention explicite du contraire,  $\varphi$  est un symbole de Koenigs dont le point de Denjoy-Wolff est 0. L'espace  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est un espace de Banach de fonctions holomorphes qui est continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  (voir la définition 1.28). On suppose que  $C_{\varphi}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$  et on note  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  l'opérateur induit par  $C_{\varphi}$  sur  $\mathcal{X}$ . D'après le théorème du graphe fermé,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ .

L'objectif des résultats qui suivent est de caractériser la forme générale du spectre de  $T$ . Nous commençons par étudier le spectre ponctuel. Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème de Koenigs (théorème 2.10).

**Lemme 2.25** *On a  $\sigma_p(T) \subset \sigma_p(C_\varphi)$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n \in \sigma_p(T)$  si et seulement si  $\zeta^n \in \mathcal{X}$ .*

Introduisons une notation qui nous servira par la suite. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit

$$C_n : \begin{cases} \text{Hol}(\mathbb{D}) & \rightarrow \mathbb{C} \\ f & \mapsto \frac{1}{n!} \left( f - \sum_{k=0}^n P_k(f) \right)^{(n)}(0) \end{cases} \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}), \mathbb{C}).$$

Remarquons que, par définition de  $C_n$ ,

$$\forall f \in \text{Hol}(\mathbb{D}), P_n(f) = C_n(f) \times \zeta^n.$$

On notera  $D_n = C_n|_{\mathcal{X}} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{C}) = \mathcal{X}'$  la restriction de  $C_n$  à  $\mathcal{X}$ .

En étudiant les applications  $D_n$ , nous pouvons obtenir des informations sur le spectre de  $T$ .

**Proposition 2.26** *Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $D_n \neq 0$ . Alors,  $\lambda_n \in \sigma(T)$ .*

*Démonstration* : Considérons l'opérateur dual de  $T$ , qui est l'opérateur

$$T' : \begin{cases} \mathcal{X}' & \rightarrow \mathcal{X}' \\ \xi & \mapsto [f \mapsto \xi(T(f))] \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}').$$

Nous montrons maintenant que  $\lambda_n \in \sigma_p(T')$ . Pour cela, nous montrons que  $D_n$  est un vecteur propre de  $T'$  pour la valeur propre  $\lambda_n$ . Soit  $f \in \mathcal{X}$ . Comme  $P_n \circ C_\varphi = \lambda_n P_n$ , nous avons aussi que  $C_n \circ C_\varphi = \lambda_n C_n$ .

$$T'(D_n)(f) = D_n(T(f)) = D_n(f \circ \varphi) = C_n \circ C_\varphi(f) = \lambda_n C_n(f) = \lambda_n D_n(f).$$

Ainsi,  $\lambda_n \in \sigma_p(T') \subset \sigma(T)$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Dans le cas où les polynômes sont dans  $\mathcal{X}$ , nous déduisons de la proposition 2.26 le résultat ci-après.

**Corollaire 2.27** *On suppose que  $\mathbb{C}[z] \subset \mathcal{X}$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n \in \sigma(T)$ .*

*Démonstration* : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la proposition 2.26, pour montrer que  $\lambda_n \in \sigma(T)$ , il suffit de montrer que  $D_n \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$ .

Supposons par l'absurde que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on ait  $C_n(e_k) = 0$ . Alors, pour toute  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ , on a  $C_n(f) = 0$  (car  $C_n$  est continu et l'espace des fonctions polynomiales est dense dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ ). Comme  $C_n \neq 0$ , nous aboutissons à une contradiction. Ceci montre qu'il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $C_n(e_{k_0}) \neq 0$ .

Comme  $e_{k_0} \in \mathcal{X}$ , nous avons alors  $D_n(e_{k_0}) = C_n(e_{k_0}) \neq 0$  et donc que  $D_n \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous énonçons maintenant un résultat énonçant des conditions nécessaires et suffisantes portant sur  $\sigma(T)$  pour que  $\mathcal{X}$  soit de dimension finie.

**Théorème 2.28** *Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) on a  $0 \notin \sigma(T)$  ;
- (ii) l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} \mid D_n \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\}$  est fini ;
- (iii) il existe un ensemble  $J \subset \mathbb{N}$  fini tel que  $\mathcal{X} = \text{Vect} \left( \varsigma^k \mid k \in J \right)$  ;
- (iv) l'espace  $\mathcal{X}$  est de dimension finie.

Avant de prouver le théorème 2.28, prouvons un petit lemme utile.

**Lemme 2.29** *Soit  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n(f) = 0$ . Alors  $f = 0$ .*

*Démonstration* : D'après le point (i) du théorème 2.14, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$f^{(n)}(0) = \left( \sum_{k=0}^n P_k(f) \right)^{(n)}(0) = 0.$$

Ainsi,  $f = 0$ . Ceci achève la preuve. □

Nous prouvons maintenant le théorème 2.28.

*Démonstration* : Nous prouvons la chaîne d'implications  $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$ .

$(i) \Rightarrow (ii)$  : Nous prouvons l'implication contraposée. Supposons que l'ensemble

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid D_n \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\}$$

est infini. D'après la proposition 2.26, nous savons que pour tout  $n \in J$ ,  $\lambda_n \in \sigma(T)$ . Or,  $\lambda_n \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow +\infty$  et  $\sigma(T)$  est fermé. Ainsi,  $0 \in \sigma(T)$ . Ceci prouve le premier point.

$(ii) \Rightarrow (iii)$  : Soient  $J \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid D_n \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\}$  et  $d \in \mathbb{N}$  le nombre d'éléments de  $J$ . Nous commençons par montrer que  $\dim \mathcal{X} \leq d$ . Soit

$$\Gamma : \begin{cases} \mathcal{X} & \rightarrow \mathbb{C}^d \\ f & \mapsto (D_n(f))_{n \in J} \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{C}^d).$$

Nous montrons que  $\Gamma$  est injective. Soit  $f \in \text{Ker}(\Gamma)$ . Comme  $f \in \text{Ker}(\Gamma)$ , pour tout  $n \in J$ ,  $D_n(f) = C_n(f) = 0$ .

Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N} - J$ ,  $D_n = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N} - J$ ,  $C_n(f) = 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons donc  $C_n(f) = 0$ . D'après le lemme 2.29, nous avons  $f = 0$ . Ainsi,  $\Gamma$  est injective.

Comme  $\mathcal{X}$  est de dimension finie, nous savons que  $\sigma(T) = \sigma_p(T)$  est fini et a au plus  $\dim \mathcal{X} \leq d$  éléments. Or, d'après le lemme 2.26, nous savons que, pour tout  $n \in J$ , nous avons  $\lambda_n \in \sigma(T)$ . Alors, comme les  $(\lambda_n)_{n \in J}$  sont deux à deux distincts,  $\sigma(T)$  a au moins  $d$  éléments. Ceci prouve finalement que  $\sharp \sigma(T) = d$  et donc que

$$\sigma(T) = \{\lambda_n \mid n \in J\}.$$

Ceci achève la preuve du deuxième point.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) : Cette implication est immédiate.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) : Comme  $\mathcal{X}$  est de dimension finie, le spectre et le spectre ponctuel de  $T$  sont confondus. Alors,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \subset \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C} - \{0\}.$$

Ainsi,  $0 \notin \sigma(T)$ . Ceci prouve le dernier point et achève la preuve.  $\square$

De la caractérisation des espaces de dimension finie (théorème 2.28), nous pouvons déduire immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 2.30** *Si la dimension de  $\mathcal{X}$  est infinie, alors l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n \in \sigma(T)\}$  est infini.*

Nous supposons maintenant que  $\mathcal{X}$  est de dimension finie.

Nous voulons montrer que le spectre de  $T$  se décompose en deux parties : une partie discrète, nécessairement composée de valeurs propres, et une partie continue (que l'on peut voir à la fois comme le spectre essentiel de  $T$  ou la composante connexe de 0 dans  $\sigma(T)$ ). Commençons par énoncer un résultat précis. Pour cela, nous avons besoin d'introduire quelques notations. Considérons les ensembles

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid D_n \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\}$$

et

$$J_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n \text{ est un point isolé de } \sigma(T)\}.$$

Rappelons également la notion de spectre essentiel d'un opérateur. La preuve de l'énoncé qui vient peut être trouvée dans le livre [27] de Dunford et Schwartz (on peut obtenir les projections que l'on recherche par des techniques de calcul fonctionnel holomorphe, présenté notamment au chapitre VII.3 de [27]).

**Définition et proposition 2.31** *Soient  $\mathcal{X}$  un espace de Banach et  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . Soit  $\lambda \in \sigma(T)$  un point isolé dans  $\sigma(T)$ . Soit  $P_\lambda$  la projection spectrale associée à  $\lambda$  (voir la définition 2.12).*

*On dit que  $\lambda$  est un point de Riesz de  $T$  si les propriétés suivantes échoient :*

- (i) *la projection  $P_\lambda$  est de rang fini ;*
- (ii) *l'opérateur  $(\lambda \text{Id} - P_\lambda)|_{\text{Ker } P_\lambda}$  est inversible dans  $\mathcal{L}(\text{Ker } P_\lambda)$ .*

*Le spectre essentiel de  $T$  est l'ensemble*

$$\sigma_e(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \sigma(T) \mid \lambda \text{ n'est pas isolé dans } \sigma(T) \text{ ou } \lambda \text{ n'est pas un point de Riesz}\}.$$

*Si  $\lambda \in \sigma(T)$ , alors  $\lambda \in \sigma_e(T)$  si et seulement si  $\lambda$  est isolé dans  $\sigma(T)$  et l'ordre de  $\lambda$  comme pôle de la fonction  $\mu \mapsto (\mu \text{Id} - T)^{-1}$  est fini.*

Le résultat principal de cette sous-partie est le suivant.

**Théorème 2.32** *Soit  $\sigma_0(T)$  la composante connexe de 0 dans  $\sigma(T)$ . Alors,*

$$\sigma(T) = \sigma_0(T) \cup \{\lambda_n \mid n \in J_0\}.$$

*De plus, pour tout  $n \in J_0$ ,  $\lambda_n \in \sigma_p(T)$ .*

*Enfin, le spectre essentiel de  $T$  est  $\sigma_e(T) = \sigma_0(T)$ .*

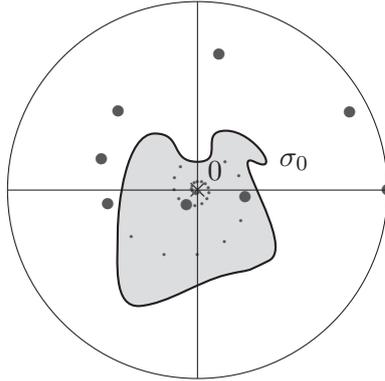


FIGURE 2.1 – Forme générale du spectre d'un opérateur de composition

Pour prouver ce résultat, nous allons procéder en deux temps. D'abord, nous allons montrer (lemme 2.33) que les points isolés de  $\sigma(T)$  sont des valeurs propres de  $T$  (ce sont même des pôles simples de la résolvante). Ensuite, nous montrerons (lemme 2.34) que l'ensemble des points non isolés consiste exactement en la composante connexe de 0 dans  $\sigma(T)$ . Commençons par la première de ces étapes.

**Lemme 2.33** *Soit  $\mu$  un point isolé de  $\sigma(T)$ . Alors,  $\mu$  est un pôle simple de  $T$ . De plus, il existe  $n \in J$  tel que  $\mu = \lambda_n$ . La projection spectrale associée à  $\mu$  est alors la restriction  $P_n|_{\mathcal{X}} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  de  $P_n$  à  $\mathcal{X}$ .*

*Démonstration :* Nous commençons par montrer qu'il existe  $n \in J$  tel que  $\mu = \lambda_n$ . Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Comme  $\mu \neq 0$  (car 0 n'est pas un point isolé de  $\sigma(T)$  puisque  $J$  est infini (d'après le corollaire 2.30)), il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$B(\mu, 2\varepsilon) \cap \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

Soit

$$P_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda-\mu|=\varepsilon} (T - \lambda \text{Id})^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$$

la projection spectrale associée à  $\mu$  (voir la définition 2.11). Nous montrons que  $P_\mu = 0$ .

Soit  $f \in \mathcal{X}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\lambda - \mu| = \varepsilon$ . Soit  $z \in \mathbb{D}$ . Alors,  $\lambda \notin \sigma(C_\varphi)$ . Donc,

$$(T - \lambda \text{Id})^{-1}(f)(z) = (C_\varphi - \lambda \text{Id})^{-1}(f)(z).$$

De plus,  $\sigma(C_\varphi) \cap \overline{B}(\mu, \varepsilon) = \emptyset$ . Comme  $\lambda \mapsto (C_\varphi - \lambda \text{Id})^{-1}(f)(z)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} - \sigma(C_\varphi)$  (d'après le théorème 2.24), nous avons

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda-\mu|=\varepsilon} (C_\varphi - \lambda \text{Id})^{-1}(z) d\lambda = 0.$$

Ainsi,  $P_\mu(f)(z) = 0$ , et ce pour tout  $z \in \mathbb{D}$  et pour toute  $f \in \mathcal{X}$ . Ceci fournit la contradiction recherchée et montre qu'il existe  $n \in J$  tel que  $\mu = \lambda_n$ .

Il nous reste à vérifier que la projection spectrale  $P_\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  associée à  $\mu$  sur  $\mathcal{X}$  est la restriction à  $\mathcal{X}$  de  $P_n$  : ceci se prouve par un raisonnement similaire à celui détaillé ci-dessus : d'après le théorème 2.24, pour toute  $f \in \mathcal{X}$  et pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda-\mu|=\varepsilon} (T - \lambda \text{Id})^{-1}(z) d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda-\mu|=\varepsilon} (C_\varphi - \lambda \text{Id})^{-1}(z) d\lambda = P_n(f)(z).$$

Nous avons donc bien  $P_\mu = P_n|_{\mathcal{X}}$ . En particulier,  $P_\mu$  est de rang 1. Ceci montre que  $\mu$  est un pôle simple et achève la preuve.  $\square$

**Lemme 2.34** Soit  $\sigma_1 \subset \sigma(T)$  un ensemble ouvert et fermé dans  $\sigma(T)$ . Supposons que  $0 \notin \sigma_1$ . Alors, il existe un ensemble fini  $J_1 \subset J_0$  tel que

$$\sigma_1 = \{\lambda_n \mid n \in J_1\}.$$

*Démonstration* : Remarquons que  $0 \notin \sigma_1$  est le seul point d'accumulation de  $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Ainsi, il existe une courbe de Jordan  $\Gamma$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) on a  $\sigma_1 \subset \text{Int}(\Gamma)$  ;
- (b) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n \notin \Gamma$  ;
- (c) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n \in \text{Int}(\Gamma)$  si et seulement si  $\lambda_n \in \sigma_1$ .

Soit  $P_{\sigma_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  la projection spectrale associée à  $\sigma_1$ . Soit  $\mathcal{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}(P_{\sigma_1})$ . D'après la proposition 2.11, nous savons que  $\mathcal{Y}$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{X}$  stable par  $T$ . De plus, en notant  $D = T|_{\mathcal{Y}} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ , nous avons que  $\sigma_1 = \sigma(D)$ .

Comme  $0 \notin \sigma_1$ ,  $0 \notin \sigma(D)$ . D'après le théorème 2.28,  $\mathcal{Y}$  est de dimension finie et il existe un ensemble fini  $J_1 \subset \mathbb{N}$  tel que

$$\mathcal{Y} = \text{Vect}(\zeta^n \mid n \in J_1)$$

et

$$\sigma(D) = \{\lambda_n \mid n \in J_1\}.$$

On a donc que  $\sigma_1 = \sigma(D) = \{\lambda_n \mid n \in J_1\}$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorème 2.32.

*Démonstration* : D'après le lemme 2.33, nous avons

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(T) - \{\lambda \in \sigma(T) \mid \lambda \text{ n'est pas un point isolé dans } \sigma(T)\} = \sigma(T) - \{\lambda_n \mid n \in J_0\}.$$

Comme  $\sigma(T)$  est un compact de  $\mathbb{C}$ , nous avons que  $K$  est également compact. De plus,  $0 \in K$ .

Rappelons que, par définition,  $\lambda \in \sigma_e(T)$  si et seulement si  $\lambda$  n'est pas un point isolé de  $\sigma(T)$  tel que le résidu de la résolvante en  $\lambda$  est de rang fini. Or, tout point isolé de  $\sigma(T)$  est un pôle simple de la résolvante (c'est l'objet du lemme 2.33). Pour prouver le théorème, il nous suffit donc de montrer que  $K$  est connexe.

Soient  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  deux ensembles ouverts et fermés dans  $K$  tels que  $K = \sigma_0 \sqcup \sigma_1$ , et  $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $0 \in \sigma_0$ . Nous montrons alors que  $\sigma_1 = \emptyset$ .

Nous montrons que  $\sigma_1$  vérifie les hypothèses du lemme 2.34, c'est-à-dire que  $\sigma_1$  est ouvert et fermé dans  $K$  et que  $0 \notin \sigma_1$ . Comme  $0 \in \sigma_0$  et comme  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  sont connexes, nous savons que  $0 \notin \sigma_1$ . De plus,  $\sigma_1$  est fermé dans  $K$  et  $K$  est fermé dans  $\sigma(T)$ . Ceci prouve que  $\sigma_1$  est un sous-ensemble fermé de  $\sigma(T)$ .

Nous montrons maintenant que  $\sigma_1$  est ouvert dans  $\sigma(T)$ . Si  $\sigma_1 = \emptyset$ , alors  $\sigma_1$  est bien un ouvert de  $\sigma(T)$ . Supposons que  $\sigma_1 \neq \emptyset$ . Soit  $z_0 \in \sigma_1$ . Alors,  $z_0 \neq 0$  et  $z_0 \in K$ , donc  $z_0$  n'est pas un point isolé de  $\sigma(T)$ . Il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $z \in B(z_0, \varepsilon)$ ,  $z \neq 0$  et  $z \notin \{\lambda_n \mid n \in J_0\}$ . En particulier,  $\mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(T) \cap B(z_0, \varepsilon)$  est un ouvert de  $\sigma(T)$  tel que

$$z_0 \in \sigma(T) \cap \mathcal{U} \subset \sigma_1.$$

Ceci valant pour tout  $z_0 \in \sigma_1$ , nous en déduisons que  $\sigma_1$  est ouvert dans  $\sigma(T)$ .

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme 2.34 : il existe un ensemble fini  $J_1 \subset J_0$  tel que  $\sigma_1 = \{\lambda_n \mid n \in J_1\}$ . Or,  $\sigma_1 \cap \{\lambda_n \mid n \in J_0\} = \emptyset$ . Ceci prouve que  $\sigma_1 = \emptyset$ .

Nous avons donc bien montré que  $K$  est connexe. Ceci achève la preuve.  $\square$

Notons en particulier l'estimation suivante du rayon spectral essentiel de  $T$ .

**Corollaire 2.35** *Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda_{n_0} \in \sigma(T)$  mais  $\zeta^{n_0} \notin \mathcal{X}$ .*

*Alors,  $\lambda_{n_0} \in \sigma_e(T)$ . En particulier,  $r_e(T) \geq |\lambda_{n_0}|$ .*

*Démonstration* : D'après le lemme 2.33, nous savons que si  $m \in J_0$ , alors  $\lambda_m$  est un pôle simple de la résolvante. En particulier,  $\zeta^m \in \mathcal{X}$ . Comme  $\zeta^{n_0} \notin \mathcal{X}$ , nous en déduisons que  $n_0 \notin J_0$ . D'après le théorème 2.32, nous avons alors que  $\lambda_{n_0} \in \sigma_e(T)$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

#### A.4.d) — Comparaison avec d'autres cas

Dans cette section, nous montrons dans quelle mesure il est possible de généraliser les résultats précédents (par exemple, au cas où  $\varphi'(0) = 0$ , ou encore au cas où  $0$  n'est pas le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi$ ). Nous présentons également quelques exemples et contre-exemples pour illustrer les différentes propriétés que peut avoir le spectre d'un opérateur de composition sur  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ .

**Cas où  $\varphi'(0) = 0$**  Le premier résultat que nous énonçons est l'étude du cas où  $0$  reste le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi$ , mais où l'on a  $\varphi'(0) = 0$ .

**Proposition 2.36** Soit  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  telle que  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . On suppose que  $\varphi(0) = 0$  et que  $\varphi'(0) = 0$ . Alors, sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ ,

$$\sigma_p(C_\varphi) = \{1\}$$

et

$$\sigma(C_\varphi) = \{0; 1\}.$$

*Démonstration* : Commençons par déterminer  $\sigma_p(C_\varphi)$ . Nous nous inspirons grandement de notre preuve du théorème de Koenigs (théorème 1.25). En particulier de la deuxième partie de cette preuve (où l'on prouve l'unicité — à constante multiplicative près — des solutions à l'équation de Schröder). Nous commençons par montrer que  $1 \in \sigma_p(C_\varphi)$  : ceci est immédiat, car la fonction constante  $z \mapsto 1$  est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

Fixons maintenant  $\lambda \in \mathbb{C} - \{1\}$ . Nous montrons que  $\lambda \notin \sigma_p(C_\varphi)$ . Supposons par l'absurde que  $\lambda$  est une valeur propre de  $C_\varphi$  : il existe une fonction non nulle  $\eta$  telle que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\eta \circ \varphi(z) = \lambda \eta(z).$$

Alors, en suivant le même raisonnement que dans le second cas de la deuxième partie de la preuve du théorème 1.25, nous avons  $\beta = 0$ . Ainsi,  $\eta$  s'annule sur  $\varphi(\mathbb{D})$ . Si  $\varphi$  n'est pas constante, alors le théorème de l'application ouverte (voir par exemple [57], théorème 10.32) nous dit que  $\varphi(\mathbb{D})$  est ouvert. Par unicité du prolongement analytique, nous avons alors que  $\eta \equiv 0$ , ce qui est impossible. Par ailleurs, si  $\varphi$  est constante, comme  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi$  est l'application nulle et l'opérateur  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  peut être décrit de la façon suivante :

$$\forall f \in \text{Hol}(\mathbb{D}), C_\varphi(f) = f(0) e_0.$$

Comme  $\eta$  est un vecteur propre de  $C_\varphi$ , c'est donc nécessairement une fonction constante. Alors,  $\lambda = 1$ , ce qui est impossible.

Nous arrivons donc bien à la contradiction souhaitée et avons prouvé que  $\sigma_p(C_\varphi) = \{1\}$ .

Nous déterminons maintenant  $\sigma(C_\varphi)$ . Comme  $\sigma_p(C_\varphi) \subset C_\varphi$ , nous avons que  $1 \in \sigma(C_\varphi)$ . Par ailleurs, comme  $\varphi$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , l'opérateur  $C_\varphi$  n'est pas inversible (corollaire 2.3). Nous avons que  $0 \in \sigma(C_\varphi)$ .

Nous montrons maintenant l'inclusion  $\sigma(C_\varphi) \subset \{0; 1\}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0; 1\}$ . Nous montrons que  $\lambda \text{Id} - C_\varphi$  est surjectif, c'est-à-dire que, pour toute  $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ , il existe  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  telle que  $(\lambda \text{Id} - C_\varphi)(f) = g$ . Nous suivons pour cela une démarche très similaire à celle suivie dans la preuve du théorème 2.21. Soient  $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  et  $h = g - g(0) \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ .

Soient  $\mu_0 = \left| \frac{\lambda}{2} \right|$  et  $N_0 = 0$ . Une adaptation directe de la preuve du lemme 2.22 nous permet de montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $|\mu| > 0$  et pour tout  $h \in \text{Hol}_{N_0}(\mathbb{D})$ , la série de terme général  $\sum_{n \geq 0} \frac{h \circ \varphi^{[n]}}{\mu^n}$  converge normalement dans  $\mathcal{C}(\varepsilon \overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ . Nous définissons alors la fonction

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g(0)}{\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h \circ \varphi^{[n]}}{\lambda^n} \in \text{Hol}(\varepsilon \mathbb{D}).$$

En adaptant légèrement la preuve du théorème 2.21, nous obtenons

$$\forall z \in \varepsilon \mathbb{D}, f \circ \varphi(z) - \lambda f(z) = g(z).$$

En remarquant que la preuve du lemme 2.20 reste vraie si  $\varphi'(0) = 0$ , nous savons qu'il existe une fonction  $\tilde{f} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \tilde{f} \circ \varphi(z) - \lambda \tilde{f}(z) = g(z).$$

Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous venons de voir que, dans le cas où  $\varphi'(0) = 0$ , l'étude spectrale sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  reste similaire à celle du cas où  $\varphi$  est un symbole de Koenigs. L'étude spectrale sur des espaces de Banach peut en revanche être significativement différente, comme en témoignent l'exemple qui suit.

**Exemple** Soit  $\mathcal{X} = zH^2(\mathbb{D}) = \{f \in H^2(\mathbb{D}) \mid f(0) = 0\}$  et  $\varphi : z \mapsto z^2 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Remarquons que  $\varphi$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . De plus, 0 est le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi$ , et  $\varphi'(0) = 0$ . Alors,  $T = C_{\varphi|_{H^2(\mathbb{D})}}$  est une isométrie non inversible, et donc (voir par exemple [10]) on a  $\sigma(C_\varphi) = \overline{\mathbb{D}}$ . Par ailleurs, il découle de la propriété 2.36 que  $\sigma_p(T) = \emptyset$ .

**Cas où le point de Denjoy-Wolff est  $\alpha \in \mathbb{D}$ .** Nous étudions maintenant le cas où  $\varphi$  est un symbole de Koenigs dont le point de Denjoy-Wolff est dans  $\mathbb{D}$  (mais non nécessairement 0). Rappelons (proposition 1.2) qu'il existe un unique automorphisme  $\psi_\alpha$  de  $D$  qui est involutif et échange 0 et  $\alpha$ . Nous pouvons utiliser l'automorphisme  $\psi$  pour « transporter » les résultats de la section précédente au cas plus général énoncé ci-dessous.

**Théorème 2.37** *Soit  $\varphi$  un symbole de Koenigs et  $\alpha \in \mathbb{D}$  son point de Denjoy-Wolff. On suppose que  $\varphi'(\alpha) \neq 0$ . Alors, le spectre ponctuel de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  est*

$$\sigma_p(C_\varphi) = \{\varphi'(\alpha)^n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

et le spectre de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  est

$$\sigma(C_\varphi) = \{0\} \cup \sigma_p(C_\varphi).$$

Si de plus  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est un espace de Banach de dimension infinie tel que  $\varphi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$  et  $\psi_\alpha(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ , en notant  $T = C_{\varphi|_{\mathcal{X}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  et  $\sigma_0$  la composante connexe de 0 dans  $\sigma(T)$  et en reprenant les notations du théorème 2.32,

$$\sigma(T) = \sigma_0(T) \cup \{\varphi'(\alpha)^n \mid n \in J_0\}.$$

De plus, pour tout  $n \in J_0$ ,  $\varphi'(\alpha)^n \in \sigma_p(T)$ .

Enfin, le spectre essentiel de  $T$  est  $\sigma_e(T) = \sigma_0(T)$ .

*Démonstration :* Comme l'opérateur de composition  $C_{\psi_\alpha} \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  est inversible d'après le corollaire 2.3, le résultat que nous cherchons découle des théorèmes 2.21 et 2.32, en composant par  $\psi_\alpha$ . Plus précisément, notons  $\tilde{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_\alpha \circ \varphi \circ \psi_\alpha$ . Alors,  $\tilde{\varphi}$  est un symbole de Koenigs dont le point de Denjoy-Wolff est 0 et on peut donc appliquer à  $\tilde{\varphi}$  les théorèmes 2.21 et 2.32. Comme

$$C_\varphi = C_{\psi_\alpha} \circ C_{\tilde{\varphi}} \circ C_{\psi_\alpha},$$

les opérateurs  $C_\varphi$  et  $C_{\tilde{\varphi}}$  sont similaires et nous pouvons obtenir le résultat souhaité. Le même raisonnement est valable pour l'opérateur  $T$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

**Cas où le point de Denjoy-Wolff est  $\alpha \in \mathbb{T}$ .** Nous montrons ici, à travers un exemple simple, que l'étude spectrale peut être radicalement différente dans le cas où le symbole  $\varphi$  a un point de Denjoy-Wolff dans  $\mathbb{T}$ . Pour bien comprendre le résultat qui vient, rappelons que l'on a défini la notion d' « automorphisme hyperbolique » à la définition 1.3.

**Proposition 2.38** *Soit  $\varphi$  un automorphisme hyperbolique de  $\mathbb{D}$ . Supposons que 1 est le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi$  et que  $-1$  est l'autre point fixe de  $\varphi$ . Alors, le spectre et le spectre ponctuel de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$  sont*

$$\sigma_p(C_\varphi) = \sigma(C_\varphi) = \mathbb{C}^*.$$

*En outre, toute valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  est de multiplicité infinie.*

*Démonstration :* Comme  $\varphi$  est un automorphisme hyperbolique de  $\mathbb{D}$  dont 1 est le point de Denjoy-Wolff et 0 est l'autre point fixe, il existe  $r \in ]0; 1[$  tel que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\varphi(z) = \frac{z+r}{1+rz}.$$

Comme  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , nous savons grâce au corollaire 2.3 que  $0 \notin \sigma(C_\varphi)$  et donc que  $0 \notin \sigma_p(C_\varphi)$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$ . Nous montrons que  $\lambda$  est une valeur propre de  $C_\varphi$  de multiplicité infinie. Commençons par un petit calcul. Pour  $\mu \in \mathbb{C}^*$ , soit

$$g_\mu : z \mapsto \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^\mu \in \text{Hol}(\mathbb{D}).$$

Soit  $z \in \mathbb{D}$ . Alors,

$$\begin{aligned} g_\mu \circ \varphi(z) &= \left( \frac{1 + \frac{z+r}{1+rz}}{1 - \frac{z+r}{1+rz}} \right)^\mu \\ &= \left( \frac{1 + rz + r + z}{1 + rz - r - z} \right)^\mu \\ &= \left( \frac{(1+r)(1+z)}{(1-r)(1-z)} \right)^\mu \\ &= \left( \frac{1+r}{1-r} \right)^\mu g_\mu(z). \end{aligned}$$

En d'autres termes,  $g_\mu$  est un vecteur propre de  $C_\varphi$  pour la valeur propre  $\lambda_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{1+r}{1-r} \right)^\mu$ .

Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , posons

$$\mu_k = \frac{1}{\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)} [\ln(|\lambda|) + i(\theta + 2k\pi)].$$

Alors, la famille  $(g_{\mu_k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est libre dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . De plus, si  $k \in \mathbb{Z}$ , alors,

$$\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \mu_k = \ln(|\lambda|) + i(\theta + 2k\pi),$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\mu_k} &= \exp((|\lambda|) + i(\theta + 2k\pi)) \\
&= |\lambda| e^{i(\theta+2k\pi)} \\
&= |\lambda| e^{i\theta} = \lambda.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $g_{\mu_k}$  est une valeur propre de  $C_\varphi$  associée à la valeur propre  $\lambda$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

**Existence de valeurs propres « cachées ».** Dans cette partie, nous étudions l'existence ou non de valeurs propres « cachées » : si  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  est un opérateur de composition sur  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ , et  $\lambda \in \sigma(C_\varphi)$ , nous dirons que  $\lambda$  est une valeur propre cachée de  $T$  lorsque  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$  telle que  $\lambda \in \sigma_e(T)$ . L'existence (ou non) de valeurs propres cachées dépend fortement du choix de l'espace  $\mathcal{X}$ .

**Premier exemple** Soit  $\mathcal{X} = H^2(\mathbb{D})$ . Une présentation générale du spectre des opérateurs de composition sur  $\mathcal{X}$  peut être trouvée au chapitre 7 du livre de Cowen et Maccluer ([26]). Nous mentionnons ici quelques résultats pertinents au regard de la description générale du spectre des opérateurs de composition (théorème 2.32). Plus précisément, si  $\varphi$  est un symbole de Koenigs injectif, nous avons les résultats suivants :

- le spectre essentiel de  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  est un disque fermé centré en 0, éventuellement réduit à un point (c'est le théorème 7.30 de [26]) ;
- la valeur propre 1 peut être une valeur propre cachée : si  $\varphi : z \mapsto z \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z}$ , alors  $T = C_{\varphi|_{\mathcal{X}}}$  est une isométrie non inversible (voir par exemple [10]), et donc  $\sigma(T) = \sigma_e(T) = \overline{\mathbb{D}}$ , et  $1 \in \sigma_p(T)$  ;
- si  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\lambda_n$  ne peut pas être une valeur propre cachée : plus précisément, si  $\lambda_n \in \sigma_p(T)$ , alors  $r_e(T) < |\lambda_n|$  (une preuve de ce fait peut être trouvée dans [8]).

Remarquons d'autre part que le rayon spectral n'est pas nécessairement l'un des  $(|\lambda_n|)_n$ .

**Second exemple** Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathcal{X} = \mathcal{D}_\alpha = H^2(\alpha)$  l'espace de Dirichlet pondéré étudié précédemment.

Soit  $\lambda \in ]0; 1[$ . Nous considérons le symbole

$$\varphi : z \mapsto \frac{\lambda z}{(\lambda - 1)z + 1}.$$

Remarquons que  $\varphi$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , que  $\varphi(0) = 0$  et que  $\varphi'(0) = \lambda$ . Ainsi,  $\varphi$  est un symbole de Koenigs dont le point de Denjoy-Wolff est zéro. D'autre part,  $T = C_{\varphi|_{\mathcal{D}_\alpha}} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\alpha)$  (nous prouverons ce résultat en détail dans la partie suivante, notamment au théorème 2.46). Par ailleurs, l'article de Hurst [39] décrit explicitement le spectre de  $T$ . La proposition suivante résume les théorèmes 9 et 10 de [39].

**Proposition 2.39** *Le spectre de  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\alpha)$  est*

$$\sigma(T) = \begin{cases} \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| \leq |\lambda|^{\frac{2-\alpha}{2}} \right\} \cup \{1\} & \text{si } 0 < \alpha \leq 1; \\ \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| \leq |\lambda|^{\frac{\alpha}{2}} \right\} \cup \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, la fonction de Koenigs associée à  $\varphi$  est la fonction  $\varsigma : z \mapsto \frac{-z}{z-1}$ . En effet, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\varsigma(\varphi(z)) = \frac{-\frac{\lambda z}{(\lambda-1)z+1}}{\frac{\lambda z}{(\lambda-1)z+1} - 1} = \frac{-\lambda z}{\lambda z - (\lambda z - z - 1)} = \lambda \varsigma(z).$$

De plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous avons le développement en série entière de la série géométrique dérivée nous donne :

$$\varsigma^k(z) = - \sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2) \cdots (n+k) z^n.$$

En particulier, nous en déduisons que  $\varsigma^k \in \mathcal{D}_\alpha$  si et seulement si  $2k < \alpha$ . En d'autres termes, le spectre ponctuel de  $T$  est

$$\sigma_p(T) = \left\{ \lambda^n \mid n < \frac{\alpha}{2} \right\} \cup \{1\}.$$

Signalons en particulier les cas suivants :

- Si  $\alpha = 2$  : alors,  $\mathcal{D}_2 = \mathcal{B}$  est l'espace de Bergman. Le rayon spectral essentiel de  $T$  est alors  $r_e(T) = |\lambda|$ . Cependant, comme pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varsigma^k \notin \mathcal{D}_2$ , il n'y a pas de valeur propre cachée.
- Plus généralement, s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\alpha = 2k$ , alors le rayon spectral essentiel de  $T$  est  $r_e(T) = |\lambda_k|$ .
- En revanche, s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $2k < \alpha < 2k + 2$ , alors le rayon spectral essentiel de  $T$  vérifie

$$\lambda_{k+1} < r_e(T) < \lambda_k.$$

## B) Étude sur des espaces de Dirichlet pondérés

DANS cette partie, nous présentons quelques éléments d'étude des opérateurs de composition sur des espaces de type  $\mathcal{D}_\alpha$ . La majeure partie de notre étude est dédiée à l'étude de la continuité et, le cas échéant, de la norme des opérateurs de composition. Dans un second temps, nous montrons également que le résultat de caractérisation algébrique que nous avons obtenu au théorème 2.2 possède un analogue sur les espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ .

### B.1 — Continuité

Dans cette section, nous étudions la continuité des opérateurs de composition sur les espaces de Dirichlet pondérés. Nous procéderons en deux temps : d'abord, nous traiterons le cas particulier où le symbole  $\varphi$  vérifie  $\varphi(0) = 0$ ; ensuite, nous traiterons le cas où le symbole est un automorphisme. Nous pourrions alors déduire le cas général de ces deux cas particuliers.

**B.1.a) — Cas d'un symbole fixant zéro**

Commençons par remarquer que, dans ce cas, le comportement des opérateurs de composition dont le symbole est injectif est connu sur l'espace de Dirichlet. Une preuve de ce résultat peut par exemple être trouvée dans le livre d'El-Fallah, Kelley, Mashregi et Ransford ([31], sections 1.4 et 6.2).

**Proposition 2.40** *Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe et injective. Alors l'opérateur de composition  $C_\varphi$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{D}$  et en notant  $L = \ln \left( \frac{1}{1 - |\varphi(0)|^2} \right)$ , on a*

$$\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}} \leq \sqrt{\frac{L + 2 + \sqrt{L(L + 4)}}{2}}.$$

En particulier, si en outre  $\varphi(0) = 0$ , alors  $\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}} \leq 1$ .

*Esquisse de démonstration* : Il suffit d'effectuer le changement de variable  $u = \varphi(z)$  dans le calcul de la norme de  $C_\varphi(f)$ .  $\square$

L'idée est alors de « propager » le résultat sur  $\mathcal{D}_0$  aux  $\mathcal{D}_w$ . En effet, nous disposons du résultat suivant, présenté par Chalendar et Partington dans [22].

**Théorème 2.41 (Chalendar, Partington)** *Soit  $T$  un opérateur borné sur l'espace de Hardy  $H^2(1)$  dont la matrice dans la base  $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est triangulaire inférieure. Soit  $\beta$  une suite strictement décroissante de réels strictement positifs.*

Alors,  $T$  définit un opérateur borné sur  $H^2(\beta)$  et

$$\|T\|_{H^2(\beta)} \leq \|T\|_{H^2(1)}.$$

Ce résultat permet de « propager » des résultats de continuité d'opérateurs, mais uniquement à partir de l'espace  $\mathcal{D}_1$ . Nous allons maintenant légèrement adapter sa preuve afin de pouvoir propager ces résultats à partir de l'espace de Dirichlet  $\mathcal{D}_0$ .

**Proposition 2.42** *Soient  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction telle que  $r \mapsto rw(r) \in L^1([0; 1[)$  et  $(w_n)_n$  la suite de coefficients associée au poids  $w$  (voir la proposition 1.35). Soit  $\delta \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$  une suite strictement décroissante. Soit  $T$  un opérateur borné sur  $\mathcal{D}_w = H^2(w)$  dont la matrice dans la base  $(z^n)_n$  est triangulaire inférieure.*

Alors,  $T$  définit un opérateur borné sur  $H^2(w\delta)$  et sa norme vérifie

$$\|T\|_{H^2(w\delta)} \leq \|T\|_{H^2(w)}.$$

Remarquons que ce résultat est presque une généralisation du théorème 2.41, dans la mesure où on retrouverait le théorème 2.41 en considérant la suite constante  $w_n = 1$  pour tout  $n$ . La preuve que nous présentons est une adaptation directe de la preuve présentée dans [22].

La preuve repose sur le résultat suivant.

**Lemme 2.43** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach (complexe) ayant pour base 1-inconditionnelle  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ . Soit  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  un opérateur borné dont la matrice dans la base  $(x_j)_j$  est triangulaire inférieure. Soit  $D$  un opérateur (non nécessairement borné) diagonal dans la base  $(x_j)_j$  : pour  $j \geq 0$ , notons*

$d_j \in \mathbb{C}$  tel que  $Dx_j = d_j x_j$ . On suppose que  $(d_j)_j$  est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.

Alors, l'opérateur  $D^{-1}AD$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{X}$  et sa norme vérifie

$$\|D^{-1}AD\| \leq \|A\|.$$

Ce résultat peut être attribué à Katsnelson (dans [42]). Une preuve de ce lemme peut également être trouvée dans [22]. Nous en reproduisons ici la trame principale.

*Esquisse de démonstration* : Pour  $z \in \mathbb{C}$ , nous posons  $\Omega(z) = D^z A D^{-z} = (\omega_{i,j})_{i,j \geq 0}$ . Pour  $N \in \mathbb{N}$ , nous considérons  $\Omega_N = (\omega_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$ . L'hypothèse de décroissance de la suite  $(d_j)_j$  dit que  $\Omega_N$  est bornée sur le demi-plan droit. Alors, en appliquant une généralisation du principe du maximum, nous avons

$$\sup_{\Re(z) > 0} \|\Omega_N(z)\| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} \|\Omega(iy)\| = \|A\|.$$

On spécifie alors en  $z = 1$  et on laisse tendre  $N \rightarrow +\infty$ . □

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 2.42.

*Démonstration* : Plaçons-nous dans l'espace de Banach  $\mathcal{X} = H^2(w\delta)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $e_n$  la fonction  $z \mapsto z^n$ , de sorte que  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit une base 1-inconditionnelle de  $\mathcal{X}$ . Considérons la suite  $d$  définie par  $d_n = \frac{1}{\delta_n}$ , qui est strictement positive et strictement croissante. Définissons sur  $\mathcal{X}$  un opérateur diagonal  $D$  par  $D(e_n) = d_n e_n$ . Soit  $A$  l'opérateur (non borné *a priori*) défini sur  $\mathcal{X}$  par  $A = DTD^{-1}$ .

Comme  $\delta$  est décroissante, l'espace  $H^2(w)$  est un sous espace de  $H^2(w\delta)$ . Considérons l'opérateur  $\tilde{D}$ , qui est la restriction à  $H^2(w)$  de l'opérateur  $D$ . Alors,  $\tilde{D} : H^2(w) \rightarrow H^2(\delta w)$  est un opérateur continu de norme 1. Nous allons montrer que c'est un opérateur unitaire en étudiant son adjoint  $(\tilde{D})^*$ . Soit  $x = \sum_n x_n e_n \in \text{Dom}(\tilde{D})^*$ . Notons  $(\tilde{D})^*x = \sum_n y_n e_n$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{D}(e_n), x \rangle_{H^2(\delta w)} &= \langle e_n, (\tilde{D})^*(x) \rangle_{H^2(w)} \\ \overline{\langle (\tilde{D})^*(x), e_n \rangle_{H^2(w)}} &= \overline{\langle x, d_n e_n \rangle_{H^2(\delta w)}} \\ \langle (\tilde{D})^*(x), e_n \rangle_{H^2(w)} &= d_n \langle x, e_n \rangle_{H^2(\delta w)} \\ w_n y_n &= d_n \delta_n^2 w_n x_n \\ y_n &= \frac{1}{d_n} x_n. \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $(\tilde{D})^* : H^2(\delta w) \rightarrow H^2(w)$  est un opérateur diagonal, donné par  $(\tilde{D})^*(e_n) = \frac{1}{d_n} e_n$ . En particulier,  $\tilde{D}$  est inversible et  $(\tilde{D})^{-1} = (\tilde{D})^*$ . Donc,  $\tilde{D}$  est un opérateur unitaire. En particulier, nous en déduisons que  $A$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{X} = H^2(\delta w)$  et que  $\|A\|_{H^2(\delta w)} = \|T\|_{H^2(w)}$ .

Nous pouvons donc alors appliquer le lemme 2.43, qui nous permet de dire que  $D^{-1}AD$  est un opérateur borné de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}$  et que

$$\|D^{-1}AD\|_{H^2(\delta w)} \leq \|A\|_{H^2(\delta w)}.$$

Or,  $D^{-1}AD$  n'est rien d'autre que le prolongement (continu) à  $H^2(\delta w)$  de l'opérateur  $T$  (il est continu vu ce qui précède et coïncide avec  $T$  sur  $H^2(w)$ ). Vu l'estimation que l'on a obtenue pour la norme de l'opérateur  $A$ , nous avons finalement

$$\|T\|_{H^2(\delta w)} \leq \|T\|_{H^2(w)},$$

ce qui achève la preuve. □

Nous pouvons appliquer ce résultat aux espaces de Dirichlet généralisés en choisissant une suite  $\delta$  adéquate.

**Corollaire 2.44** *Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction telle que  $r \mapsto rw(r) \in L^1([0; 1])$  et  $(w_n)_n$  la suite de coefficients associée au poids  $w$  (voir la proposition 1.35). On suppose que la suite  $\left(\frac{w_n}{n}\right)_n$  est strictement décroissante. Soit  $T$  un opérateur borné sur  $\mathcal{D}$  dont la matrice dans la base  $(z^n)_n$  est triangulaire inférieure.*

*Alors,  $T$  définit un opérateur borné sur  $\mathcal{D}_w$  et on a en outre*

$$\|T\|_{\mathcal{D}_w} \leq \|T\|_{\mathcal{D}}.$$

*Démonstration :* Vu la description du produit scalaire sur  $\mathcal{D}$ , il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite  $\delta$  définie par

$$\begin{cases} \delta_0 = 1 \\ \delta_n = \frac{w_n}{n} \text{ si } n \neq 0 \end{cases}.$$

Le résultat découle alors de l'application de la proposition 2.42. □

Le résultat précédent est très utile pour étudier la continuité d'opérateurs sur les espaces de Dirichlet pondérés, mais le prix à payer est que les opérateurs doivent être triangulaires inférieurs dans la base  $(z^n)_n$ . C'est en particulier le cas des opérateurs de composition dont le symbole fixe 0.

**Proposition 2.45** *Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction telle que  $r \mapsto rw(r) \in L^1([0; 1])$  et  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe et telle que  $\varphi(0) = 0$ .*

*Alors, la matrice de l'opérateur de composition  $C_\varphi$  (sur  $\mathcal{D}_w$ ) dans la base  $(z^n)_n$  est triangulaire inférieure.*

*Démonstration* : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Il suffit de montrer que  $C_\varphi(z^n)$  est de la forme  $z^n \Phi(z)$  où  $\Phi$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D}$ . Remarquons que  $C_\varphi(z^n)$  est la fonction  $z \mapsto (\varphi(z))^n$ . Comme  $\varphi(0) = 0$ , il existe une fonction  $\psi$  holomorphe sur  $\mathbb{D}$  telle que  $\varphi(z) = z\psi(z)$ . Alors,  $(\varphi(z))^n = z^n (\psi(z))^n$ . Ceci conclut la preuve.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette sous-partie.

**Théorème 2.46** *Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe et injective telle que  $\varphi(0) = 0$ . Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction telle que  $r \mapsto rw(r) \in L^1([0; 1[)$  et  $(w_n)_n$  la suite de coefficients associée au poids  $w$  (voir la proposition 1.35). On suppose que la suite  $\left(\frac{w_n}{n}\right)_n$  est strictement décroissante.*

*Alors, l'opérateur de composition  $C_\varphi$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{D}_w$  et on a en outre*

$$\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}_w} \leq 1.$$

*Démonstration* : Ce théorème se déduit facilement des résultats présentés précédemment, en particulier du fait que le résultat soit vrai sur  $\mathcal{D}_0$  (proposition 2.40) et du fait que l'on puisse propager le résultat de  $\mathcal{D}_0$  à  $\mathcal{D}_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  : la matrice de  $C_\varphi$  dans la base  $(z^n)_n$  est triangulaire inférieure (proposition 2.45) et on peut alors appliquer le théorème 2.44 pour propager le résultat.  $\square$

Ce résultat est en particulier vrai pour les espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ .

**Corollaire 2.47** *Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe et injective telle que  $\varphi(0) = 0$ .*

*Alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , l'opérateur de composition  $C_\varphi$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{D}_\alpha$  et on a en outre*

$$\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq 1.$$

### B.1.b) — Cas d'un automorphisme

Nous nous intéressons maintenant aux opérateurs de composition dont le symbole est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Avec le cas particulier des opérateurs de composition dont le symbole fixe 0, nous pourrions étudier le comportement d'opérateurs dont le symbole est plus général.

Rappelons la forme générale d'un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .

**Proposition 2.48** *Soit  $\psi$  un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Alors, il existe  $u \in \mathbb{D}$  et  $\lambda \in \mathbb{T}$  tels que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $\psi(z) = \lambda \frac{z + u}{1 + \bar{u}z}$ .*

Commençons par un lemme technique.

**Lemme 2.49** *Pour tout  $x \in \mathbb{D}$ ,  $\frac{1 - |\psi^{-1}(x)|^2}{1 - |x|^2} \leq \frac{1 + |u|}{1 - |u|}$ .*

*Démonstration* : Commençons par remarquer que, pour  $x \in \mathbb{D}$ ,  $\psi^{-1}(x) = \bar{\lambda} \frac{x - \lambda u}{1 - \lambda u x}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1 - |\psi^{-1}(x)|^2}{1 - |x|^2} &= \frac{1}{1 - |x|^2} \left( \frac{(1 - |x|^2)(1 - |\lambda u|^2)}{|1 - \lambda u x|^2} \right) \\ &= \frac{1 - |u|^2}{|1 - \lambda u x|^2}. \end{aligned}$$

Mais,  $\sup_{x \in \mathbb{D}} \frac{1}{|1 - \lambda u x|^2} = \frac{1}{(1 - |u|)^2}$  (le maximum serait atteint pour  $x = \frac{|u|}{\lambda u}$ ). Ainsi, on a bien l'inégalité souhaitée.  $\square$

Les automorphismes de  $\mathbb{D}$  étant bien connus, l'étude des opérateurs de composition dont le symbole est un automorphisme peut se faire dans un cadre assez général : la démonstration présentée ici est une adaptation au cas des espaces de Dirichlet pondérés d'une démonstration plus générale que l'on peut trouver dans le livre de Cowen et Maccluer ([26], théorème 3.5).

**Théorème 2.50** *Soit  $\psi$  un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  un poids tel que la fonction  $r \mapsto rw(r) \in L^1([0; 1[)$ . On suppose que, pour tout  $q > 1$ , il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que, pour tous  $s, t \in [0; 1[$  tels que  $s \leq qt$ ,  $w(1 - s) \leq \kappa w(1 - t)$ . Soit  $(w_n)_n$  la suite de coefficients décrivant la norme sur l'espace  $\mathcal{D}_w$  (elle est donnée par la proposition 1.35).*

*Alors, l'opérateur de composition  $C_\psi$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{D}_w$ .*

*Démonstration* : Soient  $u \in \mathbb{D}$  et  $\lambda \in \mathbb{T}$  tels que  $\psi(z) = \lambda \frac{z + u}{1 + \bar{u}z}$ . Remarquons que  $\omega = \lambda u$ , de sorte que  $|u| = |\omega|$ .

Commençons par montrer que l'espace  $\mathcal{D}_w$  est stable par composition par un automorphisme.

Soit  $f \in \mathcal{D}_w$ . Montrons que  $f \circ \psi \in \mathcal{D}_w$ . En effectuant le changement de variable  $x = \psi(z)$  dans l'intégrale ci-dessous, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |(f \circ \psi)'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} &= \int_{\mathbb{D}} |f'(\psi(z))|^2 w(|z|) \frac{|\psi'(z)|^2 dA(z)}{\pi} \\ &= \int_{\psi(\mathbb{D})} |f'(x)|^2 w(|\psi^{-1}(x)|) \frac{dA(x)}{\pi} \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.49 et l'hypothèse sur la fonction  $w$ , nous savons qu'il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{D}$ ,  $w(|\psi^{-1}(x)|) \leq \gamma w(|x|)$ . Nous obtenons alors

$$\int_{\mathbb{D}} |(f \circ \psi)'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \leq \gamma \int_{\mathbb{D}} |f'(x)|^2 w(|x|) \frac{dA(x)}{\pi}.$$

Comme  $f \in \mathcal{D}_w$ , l'intégrale dans le dernier membre de droite est finie. L'intégrale du membre de gauche est donc également finie. Donc  $f \circ \psi \in \mathcal{D}_w$ .

Il reste maintenant à montrer que l'opérateur  $C_\psi$  est continu. Soit  $f = \sum_{n \geq 0} f_n z^n \in \mathcal{D}_w$  de norme 1. Posons  $x = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} = 1 - |f(0)|^2$  (d'après le théorème de Pythagore).

$$\begin{aligned} \|f \circ \psi\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 &= |f(\omega)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |(f \circ \psi)'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \\ &\leq |f(\omega)|^2 + \gamma \int_{\mathbb{D}} |f'(x)|^2 w(|x|) \frac{dA(x)}{\pi} \\ &\leq \gamma x + \left| f(0) + \sum_{n \geq 1} f_n \omega^n \right|^2 \\ &\leq \gamma x + \left[ |f(0)| + \left| \sum_{n \geq 1} f_n \omega^n \right| \right]^2 \\ &\leq \gamma x + \left[ \sqrt{1-x} + \sqrt{\sum_{n \geq 1} w_n |f_n|^2} \sqrt{\sum_{n \geq 1} \frac{|\omega|^{2n}}{w_n}} \right]^2 \end{aligned}$$

Il existe donc des constantes  $K, L > 0$  qui ne dépendent pas de  $f$  ni de  $x$  et telles que :

$$\begin{aligned} \|f \circ \psi\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 &\leq \gamma x + \left[ \sqrt{1-x} + \sqrt{x} \sqrt{L} \right]^2 \\ &\leq 1 + Kx + 2\sqrt{Lx(1-x)} \end{aligned}$$

Comme  $x \in [0; 1]$ , nous avons bien que

$$\|f \circ \psi\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \leq \sup_{x \in [0; 1]} 1 + Kx + 2\sqrt{Lx(1-x)}.$$

Cette inégalité étant valable pour toute  $f \in \mathcal{D}_w$  de norme 1, nous en déduisons que l'opérateur de composition  $C_\psi$  est borné sur  $\mathcal{D}_w$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

Dans le cas particulier des espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ , nous pouvons affiner les estimations dans la preuve précédente et obtenir une estimation plus précise pour la norme de l'opérateur de composition.

**Théorème 2.51** *Soit  $\psi$  un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Soit  $\omega = \psi(0)$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $\beta$  la suite de coefficients telle que  $\mathcal{D}_\alpha = H^2(\beta)$  ( $\beta$  est donnée par le théorème 1.35).*

$$\text{Soit } L = \sum_{n \geq 1} \frac{|\omega|^{2n}}{\beta_n}. \text{ Soit } K = L + \left( \frac{1 + |\omega|}{1 - |\omega|} \right)^\alpha - 1.$$

*Alors, l'opérateur de composition  $C_\psi$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{D}_\alpha$  et sa norme vérifie*

$$\|C_\psi\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \sup_{x \in [0; 1]} 1 + Kx + 2\sqrt{Lx(1-x)}.$$

Faisons quelques remarques :

— L'espace  $\mathcal{D}_\alpha = H^2(\beta)$  est un espace à noyaux reproduisants (ce fait découle du théorème 1.35). On remarque alors que  $L = \|\text{ev}_\omega\|^2 - 1$ .

- À  $\psi$  fixé, on peut déterminer un majorant grâce à une petite étude de fonction résumée dans le lemme suivant.

**Lemme 2.52** *Soit  $L \in \mathbb{R}^+$  et  $K \in \mathbb{R}$ .*

$$\sup_{x \in [0;1]} 1 + Kx + 2\sqrt{Lx(1-x)} = \begin{cases} 1 + \frac{K}{2} + \frac{K}{2} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{4}{K^2}}} + 2\sqrt{L} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{4L}{K^2}}} & \text{si } K > 0 \\ 1 + \frac{K}{2} - \frac{K}{2} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{4L}{K^2}}} + 2\sqrt{L} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{4L}{K^2}}} & \text{si } K < 0 \\ 1 & \text{si } K = 0 \end{cases}$$

- Pour  $\alpha = 0$ ,  $K = L = \ln\left(\frac{1}{1 - |\varphi(0)|^2}\right)$ , on retrouve bien la majoration établie par Martín et Vukotić dans [44] (cette majoration est dans cet article démontrée pour tous les opérateurs de composition dont le symbole est injectif, mais uniquement pour l'espace de Dirichlet  $\mathcal{D}$ ).

La preuve du théorème 2.51 est une adaptation directe de la preuve du théorème 2.50 précédent.

*Démonstration* : Il suffit de suivre la preuve du théorème 2.50 précédent, en explicitant les constantes qui apparaissent dans la majoration.  $\square$

### B.1.c) — Cas général

Pour obtenir un résultat le plus général possible, il suffit de combiner les résultats précédents.

**Théorème 2.53** *Soit  $w : [0;1[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction telle que  $r \mapsto rw(r) \in L^1([0;1])$  et  $(w_n)_n$  la suite de coefficients associée au poids  $w$  (voir la proposition 1.35). On suppose que la suite  $\left(\frac{w_n}{n}\right)_n$  est strictement décroissante. On suppose que, pour tout  $q > 1$ , il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que, pour tous  $s, t \in [0;1[$  tels que  $s \leq qt$ ,  $w(1-s) \leq \kappa w(1-t)$ . Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe et injective.*

*Alors, l'opérateur de composition par  $\varphi$  est un opérateur continu sur l'espace  $\mathcal{D}_w$ .*

*Démonstration* : Notons  $\omega = \varphi(0)$ . Soit  $\psi$  l'automorphisme involutif de  $\mathbb{D}$  qui échange 0 et  $\omega$  : il est donné par  $\psi(z) = \frac{\omega - z}{1 - \bar{\omega}z}$ . Comme  $\psi \circ \psi = \text{Id}$ , on a  $\psi \circ (\psi \circ \varphi) = \varphi$ . Alors, en tant qu'opérateurs de composition sur  $\mathcal{D}_\alpha$  (non bornés *a priori*),  $C_\varphi = C_\psi \cdot C_{\psi \circ \varphi}$ . On conclut ainsi grâce aux théorèmes de composition par un symbole fixant 0 (théorème 2.46) et par un automorphisme (théorème 2.50).  $\square$

Le résultat précédent s'applique naturellement aux espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ .

**Théorème 2.54** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $\beta \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$  la suite telle que  $\mathcal{D}_\alpha = H^2(\beta)$ . Soit  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe et injective.*

Alors, l'opérateur  $C_\varphi$  de composition par  $\varphi$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{D}_\alpha$ .

En outre, en notant  $L = \sum_{n \geq 1} \frac{|\varphi(0)|^{2n}}{\beta_n^2}$  et  $K = L + \left( \frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|} \right)^\alpha - 1$ , on a la majoration :

$$\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \leq \sup_{x \in [0;1]} 1 + Kx + 2\sqrt{Lx(1-x)}.$$

*Démonstration* : Notons  $\omega = \varphi(0)$ . Soit  $\psi$  l'automorphisme involutif de  $\mathbb{D}$  qui échange 0 et  $\omega$  : il est donné par  $\psi(z) = \frac{\omega - z}{1 - \bar{\omega}z}$ . Comme  $\psi \circ \psi = \text{Id}$ , on a  $\psi \circ (\psi \circ \varphi) = \varphi$ . Alors, en tant qu'opérateurs de composition sur  $\mathcal{D}_\alpha$  (non bornés *a priori*),  $C_\varphi = C_\psi \cdot C_{\psi \circ \varphi}$ .

Or, comme  $\psi$  est un automorphisme, nous savons (théorème 2.51) que  $C_\psi$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{D}_\alpha$  et que  $\|C_\psi\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \leq \sup_{x \in [0;1]} 1 + Kx + 2\sqrt{Lx(1-x)}$ .

De plus, comme  $\varphi$  est injective,  $\psi \circ \varphi$  est une fonction holomorphe injective de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$ . On a en outre que  $\psi \circ \varphi(0) = \psi(\omega) = 0$ . On peut donc appliquer à  $\psi \circ \varphi$  le théorème 2.46. On obtient alors que l'opérateur  $C_{\psi \circ \varphi}$  est borné sur  $\mathcal{D}_\alpha$  et que  $\|C_{\psi \circ \varphi}\| \leq 1$ .

Ainsi,  $C_\varphi$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{D}_\alpha$  et, en utilisant le fait que  $\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \leq \|C_\psi\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \|C_{\psi \circ \varphi}\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2$ , on obtient le résultat souhaité.  $\square$

## B.2 — Caractérisation algébrique des opérateurs de composition

Nous déterminons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur sur  $\mathcal{D}_w$  soit un opérateur de composition. Nous nous inspirons naturellement de la caractérisation algébrique des opérateurs de composition sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  (théorème 2.2). Commençons par le résultat suivant.

**Proposition 2.55** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach de fonctions holomorphes tel que l'inclusion  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est continue. Soit  $C_\varphi$  l'opérateur de composition de symbole  $\varphi$  sur  $\mathcal{X}$ . L'opérateur (non nécessairement continu ni défini partout)  $C_\varphi$  est fermé sur son domaine maximal.*

*Démonstration* : Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions dans  $\mathcal{X}$  et  $g \in \mathcal{X}$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in \text{dom}(C_\varphi)$ ,  $f_n \xrightarrow{\mathcal{X}} 0$  et  $C_\varphi(f_n) \rightarrow g$ . Nous voulons montrer que  $g = 0$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{D}$ . Comme  $f_n \rightarrow 0$  sur tout compact de  $\mathbb{D}$  (car l'inclusion  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est continue),  $f_n \circ \varphi \rightarrow 0$  uniformément sur  $K$ , ce qui signifie que  $g = 0$  sur  $K$ . Ceci valant pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{D}$ ,  $g = 0$  sur  $\mathbb{D}$ . Ceci clôt la preuve.  $\square$

Nous énonçons maintenant des résultats permettant de caractériser un opérateur de composition au moyen d'une caractérisation algébrique. Commençons par un résultat général.

**Théorème 2.56** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$ . Supposons que l'inclusion  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est continue et que l'algèbre  $\mathbb{C}[z]$  est dense dans  $\mathcal{X}$ . Soit  $T$  un opérateur continu sur  $\mathcal{X}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) l'opérateur  $T$  est un opérateur de composition ;

(ii)  $T(e_1)(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T(e_n) = (T(e_1))^n$ .

Faisons quelques remarques sur les hypothèses du théorème avant de passer à la preuve.

1. L'hypothèse de densité des polynômes est nécessaire : l'assertion (ii) décrit le comportement de  $T$  sur  $\mathbb{C}[z]$ . Pour en déduire le comportement de  $T$  partout, il est nécessaire d'utiliser un argument de densité.
2. L'hypothèse concernant la continuité de l'inclusion  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est également nécessaire : elle permet de dire que connaître un opérateur de composition sur une partie dense permet de connaître l'opérateur de composition sur son domaine maximal : ce fait est l'objet de la proposition 2.55 .

*Démonstration* : Nous supposons que l'espace  $\mathcal{X}$  vérifie les hypothèses de l'énoncé. L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) étant immédiate, nous prouvons uniquement l'implication réciproque. Soit  $T$  un opérateur continu sur  $\mathbb{D}$  tel que  $T(e_1)(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T(e_n) = (T(e_1))^n$ . Soit  $\varphi = T(e_1) \in \mathcal{X}$ . Nous considérons maintenant l'opérateur (non défini partout *a priori*) de composition  $C_\varphi$  de symbole  $\varphi$ . On sait déjà que  $C_\varphi$  est défini sur  $\mathbb{C}[z]$  et qu'il y coïncide avec  $T$ . De plus, l'opérateur  $T$  est continu et  $C_\varphi$  est fermé sur son domaine maximal (proposition 2.55). Ainsi,  $C_\varphi$  est défini partout et  $T = C_\varphi$ .  $\square$

Dans le cas où la norme sur l'espace  $\mathcal{X}$  peut s'écrire sous forme intégrale, il est possible de modifier l'assertion (ii) de l'équivalence. Par exemple, dans le cas où  $\mathcal{X}$  est un espace de Hardy  $H^p(\mathbb{D})$ , Schwartz a montré ([62]) que l'on peut remplacer l'hypothèse (ii) par l'hypothèse

(ii)' Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T(e_n) = (T(e_1))^n$ .

Nous allons montrer qu'en suivant une démarche similaire, nous pouvons obtenir le même résultat sur les espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ .

**Théorème 2.57** Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction telle que  $r \mapsto r w(r) \in L^1([0; 1])$ . On suppose que  $w$  est continue et bornée. Soit  $T$  un opérateur continu sur  $\mathcal{D}_w$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T(e_n) = (T(e_1))^n$ . Alors,  $T(e_1)(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ .

La preuve du théorème repose en partie sur le lemme 1.44, déjà rencontré précédemment.

*Démonstration* : Soit  $\varphi = T(e_1) \in \mathcal{D}_w$ . Remarquons d'abord que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi^n \in \mathcal{D}_w$  puisque  $\varphi^n = T(e_n)$  et que  $T$  est un opérateur continu de  $\mathcal{D}_w$  dans lui-même. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|\varphi(0)|^n \leq \|\varphi^n\| \leq \|T\| \|e_n\|$ . Or, d'après le corollaire 1.36,  $\|e_n\| = O(n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Nous en déduisons donc que  $|\varphi(0)| \leq 1$ .

Supposons que  $\varphi$  est une fonction constante. D'après le lemme 1.44, nous avons nécessairement  $|\varphi(0)| < 1$ . Alors,  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ .

Supposons maintenant que  $\varphi$  n'est pas une fonction constante. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int_{\mathbb{D}} |(\varphi^n)'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \leq \|(T(e_1))^n\|$$

$$\int_{\mathbb{D}} n^2 |\varphi'(z)|^2 |\varphi(z)|^{2(n-1)} w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \leq M n.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe  $z_0 \in \mathbb{D}$  tel que  $|\varphi(z_0)| > 1$ . En remarquant que  $w$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*}$  et que les zéros de  $\varphi'$  sont isolés, un argument de continuité nous permet de dire qu'il existe  $\eta > 0$ ,  $c > 0$ ,  $r > 0$  et  $z_1 \in \mathbb{D}$  tels que  $D(z_1; r) \subset \mathbb{D}$  et, pour tout  $z \in D(z_1; r)$ ,  $|\varphi(z)| \geq 1 + \eta$  et  $|\varphi'(z)|^2 w(|z|) \geq c$ . Alors, 
$$\int_{D(z_1; r)} |\varphi'(z)|^2 |\varphi(z)|^{2(n-1)} w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \geq n^2 c (1 + \eta)^{2(n-1)} r^2.$$

En remarquant que 
$$\int_{D(z_1; r)} n^2 |\varphi'(z)|^2 |\varphi(z)|^{2(n-1)} w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} \leq \int_{\mathbb{D}} n^2 |\varphi'(z)|^2 |\varphi(z)|^{2(n-1)} w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi},$$

nous obtenons que  $n^2 c (1 + \eta)^{2(n-1)} r^2 \leq M n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . On obtient alors la contradiction recherchée en faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$ .

Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $|\varphi(z)| \leq 1$ . Comme  $\varphi$  n'est pas une fonction constante, le principe du maximum nous permet d'affirmer que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $|\varphi(z)| < 1$ , ce qui clôt la preuve.  $\square$

Les théorèmes précédents (2.56 et 2.57) peuvent être résumés par le résultat suivant.

**Théorème 2.58** *Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction continue, bornée et telle qu'il existe  $r_0 \in [0; 1[$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $C \in \mathbb{R}^{+*}$  tels que, pour tout  $r \in [r_0; 1[$ ,  $w(r) \geq C(1 - r)^\alpha$ .*

*Soit  $T$  un opérateur continu sur  $\mathcal{D}_w$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) *l'opérateur  $T$  est un opérateur de composition ;*
- (ii) *pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T(e_n) = (T(e_1))^n$ .*

Ce résultat s'applique au cas des espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ .

**Corollaire 2.59** *Soit  $\alpha \geq 0$ . Soit  $T$  un opérateur continu sur  $\mathcal{D}_\alpha$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) *l'opérateur  $T$  est un opérateur de composition ;*
- (ii) *pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T(e_n) = (T(e_1))^n$ .*

De la caractérisation algébrique précédente, nous pouvons déduire (de la même façon que Schwartz dans [62]) une nouvelle caractérisation algébrique.

**Définition 2.60** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  et  $T$  un opérateur non nécessairement borné sur  $\mathcal{X}$ . On dit que  $T$  est quasi-multiplicatif si, pour tous  $f$  et  $g$  dans  $\text{dom}(T)$  tels que  $fg \in \text{dom}(T)$ ,  $T(fg) = T(f)T(g)$ .*

**Théorème 2.61** *Soit  $w : [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  une fonction continue, bornée et telle qu'il existe  $r_0 \in [0; 1[$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $C \in \mathbb{R}^{+*}$  tels que, pour tout  $r \in [r_0; 1[$ ,  $w(r) \geq C(1 - r)^\alpha$ .*

*Soit  $T$  un opérateur continu sur  $\mathcal{D}_w$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) *l'opérateur  $T$  est un opérateur de composition ;*
- (ii) *l'opérateur  $T$  est quasi-multiplicatif.*

*Démonstration :* Si  $T$  est un opérateur de composition, il est quasi-multiplicatif. Il faut donc prouver la réciproque. Supposons que  $T$  est un opérateur quasi-multiplicatif et continu sur  $\mathcal{D}_w$ . Soit  $\varphi = T(e_1)$ . Une récurrence immédiate sur  $n$  permet alors de montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T(e_n) = (T(e_1))^n$ . On peut alors conclure grâce à la proposition 2.58.  $\square$

## Chapitre 3

# Modélisation des opérateurs sur un espace de Hilbert

L'OBJECTIF du chapitre est d'établir à quel point un opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  peut être vu comme un opérateur de décalage. Pour cela, nous présentons deux techniques de modélisation. En premier lieu, nous présentons la théorie de l'universalité. Ensuite, nous présentons des techniques liées à l'analyse des opérateurs presque isométriques (notamment autour de la décomposition de Wold). Nous illustrons ces différentes techniques au moyen d'opérateurs de multiplication ou de Toeplitz sur des espaces de fonctions holomorphes.

Rappelons avant tout une convention de notation : sauf mention explicite du contraire,  $\mathcal{H}$  désigne dans cette partie un  $\mathbb{C}$ -espace de Hilbert séparable et de dimension infinie et  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{C}$ -espace de Hilbert séparable (mais non nécessairement de dimension finie).

### A) Opérateurs universels

NOUS commençons par étudier les opérateurs universels. Intuitivement, un opérateur est dit universel s'il modélise tous les autres opérateurs. Commençons par préciser ce que l'on entend par « modéliser ».

**Définition 3.1** Soient  $U, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On dit que  $U$  modélise (resp. modélise positivement) l'opérateur  $T$  s'il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $T$ , une constante  $\lambda \in \mathbb{C}$  (resp.  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ) et un isomorphisme  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$T = \lambda S U|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

Nous allons dans un premier temps étudier les opérateurs universels proprement dits, c'est-à-dire ceux qui modélisent tous les autres. Ensuite, nous chercherons à préciser la constante  $\lambda$

intervenant dans la définition ci-dessus. Nous nous demanderons notamment sous quelles hypothèses (portant sur l'opérateur modèle ou sur les opérateurs modélisés) on peut assurer  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  ou  $\lambda = 1$ .

**Définition 3.2** Soit  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On dit que l'opérateur  $U$  est universel si  $U$  modélise tous les opérateurs sur  $\mathcal{H}$  : pour tout  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $T$ , une constante  $\lambda \in \mathbb{C}$  et un isomorphisme  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$T = \lambda S U|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

Cette notion fut introduite par Rota dans son article [54]. Nous énonçons maintenant un théorème permettant de caractériser « facilement » l'universalité d'un opérateur. Ce théorème est dû à Caradus (dans [18]).

**Théorème 3.3 (Caradus, 1969)** Soit  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Supposons que  $U$  vérifie les conditions suivantes :

- (i) le noyau  $\text{Ker}(U)$  est de dimension infinie ;
- (ii) l'opérateur  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est surjectif.

Alors,  $U$  est un opérateur universel.

**Exemple** Nous étudions une famille d'exemples particuliers : il s'agit des opérateurs de décalage vers la gauche sur  $L^2(\mathbb{R}^+)$ .

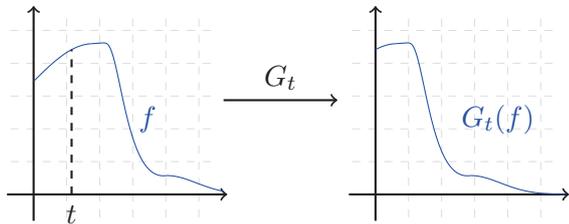


FIGURE 3.1 – Opérateur de décalage vers la gauche.

Rappelons que  $L^2(\mathbb{R}^+)$  désigne l'espace de Hilbert des fonctions mesurables et de carré intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . Pour  $t > 0$ , considérons l'opérateur de translation vers la gauche

$$G_t : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \longmapsto f(\bullet + t) \end{cases} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))$$

où, pour toute  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , on définit la fonction  $f(\bullet + t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$  en posant, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $f(\bullet + t)(x) = f(x + t)$ .

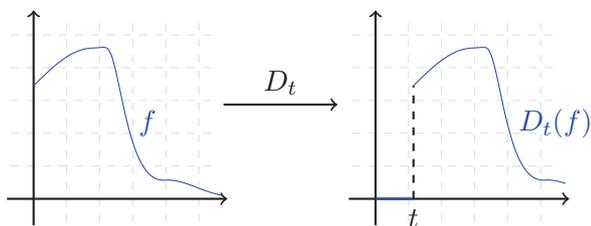


FIGURE 3.2 – Opérateur de décalage vers la droite.

Nous définissons également les opérateurs de décalage vers la droite. Pour  $t > 0$ , nous considérons l'opérateur

$$D_t : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \longmapsto f(\bullet - t) \end{cases} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))$$

où, pour toute  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , on définit la fonction  $f(\bullet - t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$  en posant, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ,

$$f(\bullet - t)(x) = \begin{cases} f(x - t) & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Nous énonçons maintenant un résultat qui résume les principales propriétés des opérateurs de décalage sur  $L^2(\mathbb{R}^+)$ .

**Lemme 3.4** *Soit  $t > 0$ . Alors,*

1. *pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a  $G_t^* = D_t$  ;*
2. *l'opérateur  $D_t$  est une isométrie ;*
3. *le noyau de  $G_t$  est  $\text{Ker } G_t = L^2([0; t])$  ;*
4. *l'opérateur  $G_t$  est surjectif.*

Le théorème de Caradus permet alors de montrer que, pour tout  $t > 0$ ,  $G_t$  est un opérateur universel.

Nous prouvons maintenant le lemme précédent.

*Démonstration :*

1. Pour toutes  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , le changement de variable  $u = x - t$  donne

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x-t)g(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^+} f(u)g(u+t) \, du,$$

ce qui prouve le premier point.

2. Pour toute  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , on a bien que  $D_t^* D_t(f) = G_t D_t(f) = f$ , ce qui prouve le deuxième point.
3. Pour toute  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , nous avons

$$\begin{aligned} f \in \text{Ker}(G_t) &\Leftrightarrow \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^+, f(x+t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{pour presque tout } u \in [t; +\infty[, f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow f \in L^2([0; t]). \end{aligned}$$

Ceci prouve le troisième point.

4. D'après le second point,  $G_t$  est inversible à gauche. En particulier,  $G_t$  est surjectif. Ceci achève la preuve.

□

Avant la preuve du théorème de Caradus, mentionnons un corollaire qui nous sera utile dans la suite (notamment pour étudier le cas des opérateurs « positivement universels » — voir par exemple la proposition 3.8).

**Corollaire 3.5** *Soit  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  vérifiant les conditions suivantes :*

- (i) *le noyau  $\text{Ker}(U)$  est de dimension infinie ;*
- (ii) *l'opérateur  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est surjectif.*

*Alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ,  $\alpha U$  est un opérateur universel.*

*Démonstration* : Il suffit de remarquer que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , on peut appliquer le théorème de Caradus 3.3 à l'opérateur  $\alpha U$ .  $\square$

Nous prouvons maintenant le théorème de Caradus (3.3).

*Démonstration* : Soit  $U$  vérifiant les hypothèses du théorème. Notons  $\mathcal{K} = \text{Ker}(U)$ .

**Première étape : contexte général** Nous montrons d'abord le résultat suivant :

*Il existe  $V, W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tels que  $UV = \text{Id}$ ,  $UW = 0$ ,  $\text{Ker}(W) = \{0\}$ ,  $\text{Im}(W) = \mathcal{K}$  et  $\text{Im}(V) = \mathcal{K}^\perp$ .*

Soit  $\tilde{U} = U|_{\mathcal{K}^\perp} : \mathcal{K}^\perp \mapsto \mathcal{H}$ . D'après les hypothèses portant sur  $U$ , l'opérateur  $\tilde{U}$  est inversible. Ainsi, il existe un opérateur continu

$$V = \tilde{U}^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}^\perp.$$

Notons que l'on peut voir  $V$  comme un opérateur continu sur  $\mathcal{H}$  : on a bien  $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

D'autre part, comme  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  sont deux espaces de Hilbert de dimension infinie et séparables, il existe un isomorphisme isométrique  $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ .

On peut alors vérifier les différentes relations que nous souhaitons avoir. Comme  $V = \tilde{U}^{-1}$ , nous avons bien que  $UV = \text{Id}$ . Comme  $\text{Im } W = \mathcal{K} = \text{Ker}(U)$ , on a bien  $UW = 0$ . Comme  $W$  est une isométrie,  $W$  est injectif et donc  $\text{Ker}(W) = \{0\}$ . En outre, comme  $W$  est un isomorphisme,  $\text{Im}(W) = \mathcal{K}$ . Enfin, il vient directement de la définition de  $V$  que  $\text{Im}(V) = \mathcal{K}^\perp$ .

Fixons maintenant  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Nous allons montrer que  $U$  modélise  $T$ .

**Deuxième étape : construction de l'isomorphisme** Nous construisons ici un isomorphisme  $J : \mathcal{H} \rightarrow \text{Im}(J)$  qui jouera le rôle de  $S^{-1}$ .

Commençons par fixer un paramètre  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que

$$|\lambda| \|T\| \|V\| < 1. \quad (\clubsuit)$$

On peut alors définir (comme limite d'une série normalement convergente dans l'espace complet  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ) l'opérateur

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k V^k W T^k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Notons que

$$W + \lambda V J T = W + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k+1} V^{k+1} W T^{k+1} = J.$$

Alors, on a

$$W + \lambda V J T = J. \quad (\heartsuit)$$

Ensuite, en composant à gauche par  $U$ , nous obtenons l'égalité

$$UJ = \lambda JT. \quad (\clubsuit)$$

**Troisième étape : fin de la preuve** Nous posons maintenant  $\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}(J)$ . Comme nous avons la relation  $(\clubsuit)$ , nous savons que  $\mathcal{M}$  est un sous-espace invariant par  $U$  et il suffit alors de montrer que  $\mathcal{M}$  est fermé et que  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}$  est un isomorphisme.

Commençons par montrer que  $J$  est injectif. Soit  $x \in \text{Ker}(J)$ . En appliquant la relation  $(\clubsuit)$ , nous avons  $Wx + \lambda VJT x = 0$ . Alors, d'une part,  $Wx \in \text{Im}(W) = \mathcal{K}$ . D'autre part,

$$Wx = -\lambda VJT x \in \text{Im}(V) = \mathcal{K}^\perp.$$

Ainsi,  $Wx = 0$ . Comme  $W$  est un isomorphisme, nous avons  $x = 0$ . Ceci prouve que  $J$  est injectif.

Nous avons donc que  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}$  est un isomorphisme bijectif. D'autre part,  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}$  est continu. Pour montrer que  $J^{-1}$  est continu, il suffit de montrer que  $\mathcal{M}$  est un espace de Banach, c'est-à-dire que  $\mathcal{M}$  est fermé dans  $\mathcal{H}$ . Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$  telle que  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \in \mathcal{H}$ . Nous montrons que  $y \in \mathcal{M}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_n \in \mathcal{M} = \text{Im}(J)$ , donc il existe  $x_n \in \mathcal{H}$  tel que  $y_n = Jx_n$ . Nous voulons montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Pour cela, comme  $W$  est un isomorphisme isométrique, il suffit de montrer que la suite  $(Wx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{K}$ . Notons maintenant  $P_{\mathcal{K}}$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{K}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P_{\mathcal{K}}(y_n) = P_{\mathcal{K}}(Wx_n + \lambda VJT x_n).$$

Or,  $Wx_n \in \text{Im}(W) = \mathcal{K}$  et  $\lambda VJT x_n \in \text{Im} V = \mathcal{K}^\perp$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P_{\mathcal{K}}(y_n) = Wx_n.$$

Or, comme  $y_n \rightarrow y$  et comme  $P_{\mathcal{K}}$  est continue,  $P_{\mathcal{K}}(y_n) \rightarrow P_{\mathcal{K}}(y)$ . Ainsi, la suite  $(Wx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Il en va donc de même de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  : il existe  $x \in \mathcal{H}$  tel que  $x_n \rightarrow x$ . Comme  $J$  est continu,  $Jx_n \rightarrow Jx$ . On a donc  $y_n \rightarrow Jx = y$ , et donc  $y \in \text{Im} J = \mathcal{M}$ . Ceci prouve que  $\mathcal{M}$  est fermé et conclut donc la preuve du théorème.  $\square$

Nous cherchons maintenant à préciser la constante  $\lambda$  qui apparaît dans la définition de la modélisation. Plus précisément, nous cherchons à trouver des conditions suffisantes pourtant sur  $U$  ou sur  $T$  pour que l'opérateur  $U$  modélise une large classe d'opérateurs  $T$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  ou  $\lambda = 1$ .

Nous commençons par étudier le cas où  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . L'objectif principal des résultats suivants est de montrer qu'il n'y a pas de différence essentielle avec le cas où  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Commençons par préciser ce que l'on entend par « opérateur positivement universel ».

**Définition 3.6** Soit  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On dit que l'opérateur  $U$  est positivement universel si  $U$  modélise positivement tous les opérateurs sur  $\mathcal{H}$  : pour tout  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $T$ , une constante  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  et un isomorphisme  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$T = \lambda S U|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

Commençons par remarquer que l'on peut facilement obtenir des exemples d'opérateurs positivement universels en adaptant légèrement les preuves du théorème de Caradus (3.3) et du corollaire qui en découle (3.5).

**Proposition 3.7** *Soit  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Supposons que  $U$  vérifie les conditions suivantes :*

- (i) *le noyau  $\text{Ker}(U)$  est de dimension infinie ;*
- (ii) *l'opérateur  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est surjectif.*

*Alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ,  $\alpha U$  est un opérateur positivement universel.*

*Démonstration :* Dans le cas où  $\alpha = 1$ , la preuve est essentiellement la même que celle du théorème de Caradus : il suffit de prendre un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  qui vérifie la condition (♣). La multiplication par une constante non nulle  $\alpha$  se gère par le même raisonnement que dans la preuve du corollaire 3.5.  $\square$

**Exemple** Pour  $t > 0$ , considérons l'opérateur (déjà rencontré) de translation vers la gauche

$$G_t : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \longmapsto f(\bullet + t) \end{cases} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+)).$$

Alors, pour tout  $t > 0$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , l'opérateur  $\alpha G_t$  est positivement universel.

Nous étudions maintenant le lien entre les opérateurs universels et les opérateurs positivement universels. Au vu de nos définitions, nous savons que tout opérateur positivement universel est universel. Dans le résultat énoncé ci-dessous, nous montrons que la réciproque est vraie.

**Proposition 3.8** *Soit  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) *l'opérateur  $U$  est universel ;*
- (ii) *l'opérateur  $U$  est positivement universel.*

*Démonstration :* L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) découle directement des définitions. Nous montrons donc l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii). Comme  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert de dimension finie séparable, nous pouvons sans perte de généralité supposer que  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^+)$ . Notons  $R = G_1$  l'opérateur de translation vers la gauche défini dans les exemples précédents. Comme  $U$  est universel, il modélise  $R$  : soient  $\mathcal{M}$  un sous-espace fermé invariant par  $U$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  un isomorphisme tels que  $R = \lambda S U|_{\mathcal{M}} S^{-1}$ . Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . D'après la proposition 3.7, l'opérateur  $\frac{1}{\lambda} R$  est positivement universel : il existe  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , un sous-espace fermé  $\mathcal{N}$  invariant par  $R$  et un isomorphisme continu  $\tilde{S} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H}$  tel que

$$T = \alpha \tilde{S} \left( \frac{1}{\lambda} R \right) |_{\mathcal{N}} \tilde{S}^{-1}.$$

Alors, l'espace  $S^{-1}(\mathcal{N})$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$  invariant par  $U$ , et on a

$$\begin{aligned} T &= \alpha \tilde{S} \left( \frac{1}{\lambda} \lambda S U|_{\mathcal{M}} S^{-1} \right) |_{\mathcal{N}} \tilde{S}^{-1} \\ &= \alpha \tilde{S} S U|_{S^{-1}(\mathcal{N})} S^{-1} \tilde{S}^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $U$  modélise  $T$  avec un paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Ceci valant pour tout  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , nous avons bien montré que  $U$  est positivement universel. Ceci termine la preuve.  $\square$

Nous passons maintenant à l'étude du cas où  $\lambda = 1$ . Nous énonçons ici un raffinement du théorème de Caradus, dont la première mention peut être trouvée dans un article de Rota (dans [55]). L'idée générale est de suivre à chaque étape la preuve du théorème de Caradus en prenant un opérateur  $U$  spécifique (choisi pour ressembler aux opérateurs  $G_t \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))$ ). On peut alors suivre la preuve du théorème de Caradus en remarquant que si l'on veut assurer la convergence de la série (en vérifiant la condition  $(\clubsuit)$ ) avec  $\lambda = 1$ , il suffit que le rayon spectral de  $T$  soit suffisamment petit. Nous obtenons alors le résultat suivant.

**Théorème 3.9** *Soit  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On suppose que  $U^*$  est une isométrie telle que  $(\text{Im } U^*)^\perp = \text{Ker}(U)$  est de dimension infinie.*

*Alors, pour tout  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tel que  $r(T) < 1$ , l'opérateur  $U$  modélise  $T$  avec  $\lambda = 1$  : il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $T$  et un isomorphisme  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que*

$$T = SU|_{\mathcal{M}}S^{-1}.$$

**Exemple** Pour  $t > 0$ , considérons encore l'opérateur de translation vers la gauche

$$G_t : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \longmapsto f(\bullet + t) \end{cases} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+)).$$

Pour tout  $t > 0$ , l'opérateur  $G_t^* : f \mapsto f(\bullet - t)$  est un opérateur de translation vers la droite et donc une isométrie surjective. De plus,  $\text{Ker}(U) = L^2([0; t])$  est bien de dimension infinie. On peut donc appliquer le résultat ci-dessus à  $G_t$ . Nous verrons ultérieurement que l'opérateur  $G_t$  modélise en réalité (avec  $\lambda = 1$ ) une classe plus large d'opérateurs (il s'agit en l'occurrence des contractions de classe  $C_{0\bullet}$ , cf. le théorème 3.59.)

Nous prouvons maintenant le théorème 3.9.

*Démonstration* : Nous reprenons la démonstration du théorème de Caradus (théorème 3.3) en l'adaptant à notre cas particulier. Nous notons toujours  $\mathcal{K} = \text{Ker}(U)$ .

Montrons que  $\tilde{U} : \mathcal{K}^\perp \rightarrow \mathcal{H}$  est un opérateur unitaire. Comme dans la preuve du théorème de Caradus, nous savons que  $\tilde{U}$  est un isomorphisme. Nous montrons donc que c'est une isométrie. D'abord, remarquons que  $\mathcal{K}^\perp = \text{Im}(U^*)$  (car  $\text{Im } U^*$  est fermée puisque  $U^*$  est une isométrie). Ainsi, il suffit de montrer que, pour tout  $x \in \text{Im } U^*$ ,  $\|\tilde{U}x\| = \|x\|$ . Fixons donc  $x \in \text{Im } U^*$ , puis  $y \in \mathcal{H}$  tel que  $x = U^*y$ . Alors,  $\tilde{U}x = Ux = UU^*y = y$  puisque  $UU^* = \text{Id}$ . De plus, comme  $U^*$  est une isométrie,  $\|y\| = \|U^*y\| = \|x\|$ . Nous avons donc bien montré que  $\|\tilde{U}x\| = \|x\|$ .

Alors,  $\tilde{U} : \mathcal{K}^\perp \rightarrow \mathcal{H}$  est un opérateur unitaire (c'est-à-dire un isomorphisme isométrique). Ainsi, son inverse  $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}^\perp$  est également unitaire. En particulier, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\|V^k\| = 1$ . Nous pouvons affiner la condition  $(\clubsuit)$  qui apparaissait dans la preuve du théorème de Caradus : en effet, comme  $\|T^k\|^{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r(T) < 1$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et  $K > 0$  tels que

$$\forall k \geq K, \|T^k\| \leq (1 - \varepsilon)^k.$$

Alors, la série  $\sum_{k \geq 0} V^k W T^k$  converge normalement dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On termine alors la preuve comme dans le cas du théorème de Caradus (3.3). □

## B) Opérateurs similaires à un opérateur de décalage

La théorie de l'universalité que nous venons de détailler nous permet, *grosso modo*, de voir tout opérateur continu sur  $\mathcal{H}$  comme la restriction d'un opérateur de décalage unilatéral vers la gauche (à isomorphisme et constante multiplicative près). Dans cette section, nous cherchons à déterminer quels opérateurs peuvent être modélisés par un opérateur de décalage unilatéral vers la droite.

Afin d'alléger les énoncés suivants, et sauf mention explicite du contraire, nous sous-entendons systématiquement « unilatéral vers la droite » lorsque nous parlerons d'opérateurs de décalage.

Afin de ne pas figer l'expression dans un cadre trop rigide, nous nous garderons de définir précisément ce que nous entendons par « opérateur de décalage » dans cette section. L'énoncé suivant n'est donc pas la définition d'un opérateur de décalage, mais plutôt une tentative visant à donner une approche heuristique de ce que recouvre cette expression.

**Définition heuristique 3.10** *Les opérateurs suivants sont des opérateurs de décalage :*

(I) *l'opérateur de décalage sur  $\ell^2(\mathbb{N})$  décrit par*

$$D : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x = (x_0, x_1, \dots) & \longmapsto (0, x_0, x_1, \dots) \end{cases} ;$$

(II) *un opérateur de décalage sur un espace de suites pondéré*

$$D : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}, w) & \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}, w) \\ x = (x_0, x_1, \dots) & \longmapsto (0, x_0, x_1, \dots) \end{cases} ;$$

(III) *un opérateur de décalage sur un espace pondéré de suites à valeurs vectorielles : si  $\mathcal{E}$  est un espace de Hilbert, alors cet opérateur est décrit par*

$$D : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}, w, \mathcal{E}) & \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}, w, \mathcal{E}) \\ x = (x_0, x_1, \dots) & \longmapsto (0, x_0, x_1, \dots) \end{cases} ;$$

(IV) *un opérateur de multiplication par  $e_1 = z \mapsto z$  sur un espace de Hilbert de fonctions holomorphes ;*

(V) *un opérateur ayant la propriété du sous-espace ambulant (voir la définition 3.30) ;*

(VI) *etc.*

L'objectif de cette partie est d'étudier les liens entre les différentes possibilités détaillées ci-dessus. Pour cela, nous commençons par étudier les opérateurs presque isométriques (dans la sous-partie 1). Après les avoir définis et avoir étudié leurs propriétés générales, nous présentons quelques cas particuliers (notamment les opérateurs concaves ou les opérateurs de Shimorin), que nous illustrons par des exemples sur des espaces de fonction holomorphes. Dans un deuxième temps, nous présentons la décomposition de Wold d'opérateurs presque isométriques (dans la sous-partie 2), ainsi que des notions associées (comme la partie complètement impure d'un opérateur ou la propriété du sous-espace ambulant). Nous combinons ensuite ces résultats pour modéliser les opérateurs concaves ainsi que les opérateurs de type Shimorin (notamment dans la sous-partie 3).

Nous terminons cette partie en présentant des résultats de modélisation pour une classe spécifique d'opérateurs de contractions (il s'agit des contractions de classe  $C_{0\bullet}$ , que nous étudions dans la sous-partie 4). Les résultats obtenus sont similaires à ceux des sous-parties précédentes, mais les techniques de preuve impliquées ressemblent plus à celles utilisées lors de l'étude des opérateurs universels.

## B.1 — Opérateurs presque isométriques

Dans cette sous-partie, nous nous intéressons à une classe d'opérateur qui généralise la classe des isométries : il s'agit de la classe des opérateurs presque isométriques. Nous commençons par définir ce qu'est une « presque isométrie ». Ensuite, nous présentons des familles d'opérateurs (par exemple, les opérateurs 2-isométriques, concaves ou de Shimorin) qui sont des presque isométries et nous étudions les liens qu'entretiennent ces différentes classes. Dans un second temps, nous illustrons ces notions en étudiant les opérateurs de multiplication sur des espaces de fonctions holomorphes de la forme  $H^2(\beta)$ .

### B.1.a) — Généralités

Commençons par rappeler un résultat général de théorie des opérateurs. Ce résultat sera implicitement et répétitivement utilisé dans cette partie.

**Lemme 3.11 (admis)** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . L'opérateur  $T^*$  est inversible si et seulement si  $T$  est inversible. Dans ce cas,  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .*

Nous entrons maintenant dans le vif du sujet : le résultat ci-dessous énonce des conditions équivalentes qui caractérisent les presque isométries.

**Définition et proposition 3.12** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) *l'opérateur  $T$  est inversible à gauche ;*
- (ii) *l'opérateur  $T$  est borné inférieurement : il existe  $m > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\|Tx\| \geq m \|x\|$  ;*
- (iii) *l'opérateur  $T$  est injectif et son image est fermée ;*
- (iv) *l'opérateur  $T^*T$  est inversible.*

*Lorsque ces conditions échoient, on dit que  $T$  est presque isométrique, ou que  $T$  est une presque isométrie.*

*Démonstration :* Nous allons montrer la chaîne d'implications  $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$ .

$(i) \Rightarrow (ii)$  : Supposons que  $T$  est inversible à gauche et soit  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  l'inverse à gauche de  $T$ . Posons  $m = \frac{1}{\|S\|}$  (on peut le faire car  $S \neq 0$  puisque  $S$  est inversible à droite). Soit  $x \in \mathcal{H}$ . On a

$$\|x\| = \|STx\| \leq m \|Tx\|.$$

Ceci valant pour tout  $x$ , nous avons bien montré l'inégalité souhaitée.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : Supposons que  $T$  est borné inférieurement.

Nous commençons par vérifier que  $T$  est injectif. Pour cela, nous montrons que  $\text{Ker } T = \{0\}$ . Soit  $x \in \text{Ker } T$ . Alors,  $\|x\| \leq \frac{1}{m} \|Tx\| = 0$ . Ainsi,  $x = 0$ . Ceci prouve que  $T$  est injectif.

Montrons maintenant que l'image de  $T$  est fermée. Soient  $(x_n)_{n \geq 0} \in (\text{Im } T)^{\mathbb{N}}$  et  $x \in \mathcal{H}$  tels que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ . Montrons que  $x \in \text{Im } T$ . Comme  $T$  est injectif, c'est une bijection sur son image : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique antécédent  $y_n$  de  $x_n$  par  $T$ . Nous montrons que la suite  $(y_n)_n$  converge. Pour cela, remarquons que, pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|y_n - y_m\| \leq \frac{1}{m} \|T y_n - T y_m\| = \frac{1}{m} \|x_n - x_m\|.$$

Comme la suite  $(x_n)_n$  converge, elle est de Cauchy. La suite  $(y_n)_n$  est donc également de Cauchy : il existe  $y \in \mathcal{H}$  tel que  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$ . Alors, comme  $T$  est continu,  $T y_n \rightarrow T y$ . Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T y_n = x_n$  et  $x_n \rightarrow x$ . Par unicité de la limite, il vient que  $x = T y \in \text{Im } T$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) : Supposons que  $T$  est injectif et que  $\mathcal{M} = \text{Im } T$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$ .

Alors, l'opérateur  $\tilde{T} : \begin{cases} \mathcal{H} & \rightarrow \mathcal{M} \\ x & \mapsto T x \end{cases}$  est inversible et son inverse  $\tilde{T}^{-1} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  est continu.

Notons que les opérateurs  $\tilde{T}^* : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  et  $(\tilde{T}^*)^{-1} = (\tilde{T}^{-1})^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}$  sont bien définis et continus. Par ailleurs, pour tout  $m \in \mathcal{M}$ , nous avons  $\tilde{T}^* m = T^* m$ . Nous allons montrer que  $\tilde{T}^{-1}(\tilde{T}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est l'inverse de  $T^* T$ .

Commençons par vérifier que  $(T^* T) \left( \tilde{T}^{-1}(\tilde{T}^*)^{-1} \right) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$ . Soit  $x \in \mathcal{H}$ .

$$\begin{aligned} T^* T \tilde{T}^{-1}(\tilde{T}^*)^{-1} x &= T^* \left[ \tilde{T} \tilde{T}^{-1} \right] (\tilde{T}^*)^{-1} x \\ &= T^* \underbrace{(\tilde{T}^*)^{-1} x}_{\in \mathcal{M}} \\ &= \tilde{T}^* (\tilde{T}^*)^{-1} x \\ &= x. \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , nous avons bien montré que  $(T^* T) \left( \tilde{T}^{-1}(\tilde{T}^*)^{-1} \right) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$ .

Nous montrons maintenant que  $\left( \tilde{T}^{-1}(\tilde{T}^*)^{-1} \right) (T^* T) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$ . La preuve est similaire au cas précédent. Soit  $x \in \mathcal{H}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{-1}(\tilde{T}^*)^{-1} T^* \underbrace{T x}_{\in \mathcal{M}} &= \tilde{T}^{-1}(\tilde{T}^*)^{-1} \tilde{T}^* T x \\ &= \tilde{T}^{-1} \tilde{T} x \\ &= x \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , nous avons bien montré que  $\left( \tilde{T}^{-1}(\tilde{T}^*)^{-1} \right) (T^* T) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$ . Ainsi,  $T^* T$  est bien inversible.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) : Supposons que  $T^* T$  est inversible. Alors,  $(T^* T)^{-1} T^*$  est l'inverse à gauche de  $T$ . En particulier,  $T$  est bien inversible à gauche. Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous allons maintenant détailler l'étude de quelques cas particuliers d'opérateurs presque isométriques. Pour un opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et un vecteur  $x \in \mathcal{H}$ , la suite  $\left( \|T^n x\|^2 \right)_n$  et ses

dérivées discrètes vont jouer un rôle clef dans notre étude. Nous ne nous appesantissons pas ici sur les propriétés générales de la dérivation discrète, icelles étant détaillées dans un vademecum en annexe (voir l'annexe A). Nous commençons cependant par expliciter le résultat technique suivant.

**Lemme 3.13** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Soit  $m \in \mathbb{N}$ . La dérivée discrète d'ordre  $m$  de la suite  $(\|T^n x\|^2)_n$  est la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général*

$$u_n = \left\langle \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \binom{n}{k} T^{*n+k} T^{n+k} x, x \right\rangle.$$

*Démonstration* : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons  $\|T^n x\|^2 = \langle T^{*n} T^n x, x \rangle$ . Le résultat découle alors de propriétés élémentaires de la dérivée  $m$ -ème détaillées en annexe (proposition A.1).  $\square$

Nous définissons maintenant différentes familles d'opérateurs presque isométriques. Commençons pour cela par rappeler la définition d'une isométrie.

**Définition et proposition 3.14** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\|Tx\| = \|x\|$  ;
- (ii) pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , la suite  $(\|T^n x\|^2)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante ;
- (iii) on a  $T^*T - \text{Id}_{\mathcal{H}} = 0$ .

*Lorsque ces conditions échoient, on dit que  $T$  est une isométrie.*

*Démonstration* : L'équivalence entre les points (i) et (ii) est immédiate. L'équivalence entre les points (ii) et (iii), relativement directe, sera par ailleurs établie dans un cadre plus général ultérieurement (cf. la définition 3.15 ci-dessus d'une  $m$ -isométrie).  $\square$

Nous allons maintenant changer légèrement les conditions de la définition précédente pour obtenir de nouvelles familles d'opérateurs.

**Définition et proposition 3.15** *Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , la suite  $(\|T^n x\|^2)_{n \in \mathbb{N}}$  est  $(m-1)$ -polynomiale ;
- (ii) on a  $\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (T^*)^k T^k = 0$ .

*Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que  $T$  est une  $m$ -isométrie.*

*Démonstration* : Rappelons qu'une suite est  $(m-1)$ -polynomiale si et seulement si sa dérivée discrète d'ordre  $m$  est nulle (cf. la définition A.2 en annexe). L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) découle alors de l'expression explicite de la dérivée discrète d'ordre  $m$  établie au lemme 3.13. Pour prouver l'implication réciproque, il suffit d'utiliser le fait que la condition (i) soit équivalente à la condition

$$(i)' \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ la suite } \left( \|T^{n+k} x\|^2 \right)_{n \geq 0} \text{ est } m\text{-polynomiale.}$$

Ceci achève la preuve.  $\square$

**Remarque** Les isométries sont exactement les 1-isométries.

La série des trois articles d'Agler et Stankus ([2], [3] et [4]) est une très bonne présentation des opérateurs  $m$ -isométriques.

Dans le cas particulier où  $m = 2$ , nous obtenons une famille d'opérateurs introduite par Agler dans les années 1980 (par exemple dans [1]). L'article de Patel ([50]) fournit une bonne présentation des 2-isométries.

Nous passons maintenant à l'étude des opérateurs concaves.

**Définition et proposition 3.16** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Les assertions suivantes s'équivalent :

- (i) pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , la suite  $(\|T^n x\|^2)_{n \in \mathbb{N}}$  est  $m$ -concave ;
- (ii) on a  $\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (T^*)^k T^k \leq 0$ .

Lorsque ces conditions échoient, on dit que  $T$  est  $m$ -concave.

Dans le cas où  $m = 2$ , on dira simplement que  $T$  est concave.

On peut trouver dans [41] une présentation des opérateurs concaves. La terminologie «  $m$ -concave » est reprise de l'article de Shimorin [63].

*Démonstration* : La preuve est largement similaire à celle concernant la définition des  $m$ -isométries. Rappelons qu'une suite est  $m$ -concave si et seulement si sa dérivée discrète d'ordre  $m$  est négative ou nulle (cf. la définition A.4 en annexe). L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) découle alors de l'expression explicite de la dérivée discrète d'ordre  $m$  établie au lemme 3.13. Pour prouver l'implication réciproque, il suffit d'utiliser le fait que la condition (i) soit équivalente à la condition

$$(i)' \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ la suite } \left( \|T^{n+k} x\|^2 \right)_{n \geq 0} \text{ est } m\text{-concave.}$$

Ceci achève la preuve. □

Nous pouvons finalement résumer les définitions précédentes dans le tableau ci-dessous.

Remarquons que, pour un opérateur concave, la croissance de la suite  $(\|T^n x\|^2)_n$  est au plus linéaire. Ce résultat fait l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 3.17** Soit  $T$  un opérateur concave. Alors, pour tout  $x \in \mathcal{H}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|x\|^2 \leq \|T^n x\|^2 \leq \|x\|^2 + n \left( \|Tx\|^2 - \|x\|^2 \right).$$

(A) \ (B)	$\dots = 0$	$\dots \leq 0$
0e ordre	$0_{\mathcal{H}}$	$0_{\mathcal{H}}$
1er ordre	isométrique	contractif
2e ordre	2-isométrique	concave
$m$ -ème ordre	$m$ -isométrique	$m$ -concave

TABLE 3.1 – Si  $T$  est tel que, pour tout  $x$ , la dérivée d'ordre (A) de la suite  $(\|T^n x\|^2)_n$  a la propriété (B), alors  $T$  est ...

*Démonstration* : Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Comme la suite  $(\|T^n x\|^2)_n$  est concave, nous avons (d'après un calcul détaillé en annexe à la proposition A.5) que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|T^n x\|^2 \leq \|x\|^2 + n \left( \|Tx\|^2 - \|x\|^2 \right).$$

Pour prouver l'autre égalité, nous raisonnons par l'absurde : s'il existe  $x \in \mathcal{H}$  tel que  $\|Tx\| < \|x\|$  alors, d'après le raisonnement ci-dessus, nous avons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n x\|^2 = -\infty$ , ce qui est manifestement absurde. Ainsi, pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , nous avons bien  $\|Tx\|^2 \geq \|x\|^2$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Mentionnons le corollaire suivant.

**Corollaire 3.18** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur concave. Alors,  $T$  est une presque isométrie.*

*Démonstration* : D'après la proposition précédente,  $T$  est borné inférieurement. En particulier, c'est bien une presque isométrie.  $\square$

Nous définissons maintenant une nouvelle famille d'opérateurs que nous appelons opérateurs de Shimorin suite à leur étude par Shimorin dans [63].

**Définition et proposition 3.19** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) pour tous  $x, y \in \mathcal{H}$ ,  $\|Tx + y\|^2 \leq 2 \left( \|x\|^2 + \|Ty\|^2 \right)$ ;
- (ii) l'opérateur  $T$  est presque isométrique et on a  $TT^* + (T^*T)^{-1} \leq 2\text{Id}$ .

Lorsque ces conditions échoient, on dit que  $T$  est un opérateur de Shimorin.

*Démonstration : (i)  $\Rightarrow$  (ii) :* Supposons que  $T$  vérifie la condition (i). Nous commençons par remarquer que, pour tout  $y \in \mathcal{H}$ ,  $\|Ty\| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \|y\|$  (en prenant  $x = 0$  dans l'écriture de (i)). Comme  $T$  est borné inférieurement, c'est bien une presque isométrie.

L'opérateur  $T^*T$  étant auto-adjoint et inversible, son inverse l'est également. En particulier, l'opérateur auto-adjoint  $(T^*T)^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est bien défini.

Soit  $V = T(T^*T)^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Nous commençons par montrer que  $V$  est une isométrie. Pour cela, il suffit de remarquer que  $V^* = (T^*T)^{-\frac{1}{2}}T^*$ . On a alors

$$V^*V = (T^*T)^{-\frac{1}{2}}T^*T(T^*T)^{-\frac{1}{2}} = (T^*T)^{-\frac{1}{2}}(T^*T)^{\frac{1}{2}}(T^*T)^{\frac{1}{2}}(T^*T)^{-\frac{1}{2}} = \text{Id}.$$

Ainsi,  $V$  est bien une isométrie.

On considère maintenant l'opérateur

$$L : \begin{cases} \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} & \rightarrow \mathcal{H} \\ (x, z) & \mapsto Tx + (T^*T)^{-\frac{1}{2}}z \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \mathcal{H}).$$

Son adjoint est l'opérateur

$$L^* : \begin{cases} \mathcal{H} & \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \\ x & \mapsto (T^*x, (T^*T)^{-\frac{1}{2}}x) \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}).$$

Remarquons que  $LL^* = TT^* + (T^*T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . En particulier, la condition (ii) est équivalente à la condition

$$(ii)' : \text{on a } LL^* \leq 2\text{Id}.$$

Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Soit  $y = (T^*T)^{-\frac{1}{2}}x$ , de sorte que  $Ty = Vx$ . Ainsi,  $\|Ty\| = \|x\|$ . De plus,

$$\begin{aligned} \|Tx + y\|^2 &\leq 2 \left( \|x\|^2 + \|Ty\|^2 \right) \\ \left\| Tx + (T^*T)^{-\frac{1}{2}}x \right\|^2 &\leq 2 \left( \|x\|^2 + \|Ty\|^2 \right) \\ \|L(x, x)\|^2 &\leq 2 \left\| (x, x)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} \right\|^2. \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit que  $\|L\|^2 \leq 2$ . Comme  $\|L^*\| = \|L\|$ , nous avons bien que  $LL^* \leq 2\text{Id}$ . Ceci achève la preuve du sens direct.

*(i)  $\Rightarrow$  (ii) :* Montrons l'implication réciproque. Supposons que  $T$  vérifie la condition (ii), c'est-à-dire que  $LL^* \leq 2\text{Id}$ . Soient  $x, y \in \mathcal{H}$ . Soit  $z = (T^*T)^{\frac{1}{2}}y$ .

$$\begin{aligned} \|Tx + y\|^2 - 2 \left( \|x\|^2 + \|Ty\|^2 \right) &= \left\| Tx + (T^*T)^{-\frac{1}{2}}z \right\|^2 - 2 \left( \|x\|^2 + \left\| T(T^*T)^{-\frac{1}{2}}z \right\|^2 \right) \\ &= \|L(x, z)\|^2 - 2 \left( \|x\|^2 + \|Vz\|^2 \right) \\ &= \|L(x, z)\|^2 - 2 \left( \|x\|^2 + \|z\|^2 \right) \\ &= \|L(x, z)\|^2 - 2 \left\| (x, z)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} \right\|^2 \\ &= \left( \|L\|^2 - 2 \right) \left\| (x, z)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} \right\|^2 \end{aligned}$$

Or, comme  $L^*L \leq 2\text{Id}$ , nous avons que  $(\|L\|^2 - 2) \leq 0$ . Ainsi, la condition (i) est bien vérifiée pour tous  $x, y \in \mathcal{H}$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Les opérateurs de Shimorin appartiennent à la famille des opérateurs presque-isométriques.

**Proposition 3.20** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur de Shimorin. Alors,  $T$  est presque isométrique.*

*Démonstration :* Il découle de la définition d'un opérateur de Shimorin que  $T$  est borné inférieurement. Ainsi,  $T$  est une presque isométrie.  $\square$

Nous explicitons maintenant les liens qu'il existe entre les isométries, les 2-isométries, les opérateurs concaves et les opérateurs de Shimorin.

**Proposition 3.21** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .*

1. *Si  $T$  est une isométrie, alors  $T$  est une 2-isométrie.*
2. *Si  $T$  est une 2-isométrie, alors  $T$  est concave.*
3. *Si  $T$  est une isométrie, alors  $T$  est un opérateur de Shimorin.*

### Remarques

- (a) Il existe des opérateurs de Shimorin qui ne sont pas concaves
- (b) Il existe des opérateurs concaves qui ne sont pas de type Shimorin
- (c) Il existe des 2-isométries qui ne sont pas des opérateurs de Shimorin

Des exemples de tels opérateurs seront décrits ci-après, lors de l'étude des exemples sur des espaces de fonctions holomorphes (voir la proposition 3.28).

Nous prouvons maintenant la proposition 3.21.

*Démonstration :*

1. Supposons que  $T$  est une isométrie. Alors, pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , la suite  $(\|T^n x\|^2)_n$  est constante. En particulier, elle est affine, donc  $T$  est une 2-isométrie.
2. Supposons que  $T$  est une 2-isométrie. Alors, pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , la suite  $(\|T^n x\|^2)_n$  est affine. En particulier, elle est concave, donc  $T$  est concave.
3. Supposons que  $T$  est une isométrie. Alors,  $T^*T = \text{Id}$ . En particulier,  $(T^*T)^{-1} + T^*T = 2\text{Id} \leq 2\text{Id}$ . Ainsi,  $T$  est un opérateur de Shimorin.

$\square$

### B.1.b) — Exemples sur des espaces de fonctions holomorphes

Dans cette partie, nous considérons une suite  $\beta = (\beta_n)_n \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  et nous nous plaçons (sauf mention explicite du contraire) sur l'espace  $H^2(\beta)$ . Nous considérons l'opérateur de multiplication

$$D : \begin{cases} H^2(\beta) & \rightarrow H^2(\beta) \\ f & \mapsto z \times f \end{cases} .$$

L'objectif est de déterminer les propriétés de  $D$  en fonction de celles de  $\beta$ .

**Proposition 3.22** *On suppose que*

1. *on a*  $\sup_{n \geq 0} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} < +\infty$  ;

2. *on a*  $\inf_{n \geq 0} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} > 0$ .

*Alors, l'opérateur  $D$  est presque isométrique.*

*Démonstration* : Pour  $n \in \mathbb{N}$ , considérons le vecteur  $f_n = \frac{e_n}{\|e_n\|} \in H^2(\beta)$ , de sorte que la famille  $(f_n)_n$  soit une base hilbertienne de  $H^2(\beta)$ . L'opérateur  $D$  peut alors être décrit par son action sur les vecteurs de la base :

$$\forall n \in \mathbb{N}, D(f_n) = \frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|} f_{n+1}.$$

Or, nous savons que  $\|e_n\| = \sqrt{\beta_n}$ . Alors, comme  $\sup_{n \geq 0} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} < +\infty$ , nous avons bien que  $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Par ailleurs, comme  $\inf_{n \geq 0} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} > 0$ , nous avons que  $D$  est borné inférieurement. En particulier,  $D$  est injectif et  $D$  est une presque isométrie.  $\square$

Pour étudier d'autres propriétés de  $D$  (comme le fait d'être un opérateur concave ou de Shimorin), nous avons besoin de calculer son adjoint.

**Proposition 3.23** *L'opérateur adjoint de  $D$  est l'opérateur  $D^*$  caractérisé par*

$$D^* : \begin{cases} H^2(\beta) & \rightarrow H^2(\beta) \\ e_0 & \mapsto 0 \\ e_n & \mapsto \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} e_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}.$$

*Démonstration* : Pour  $n \in \mathbb{N}$ , considérons le vecteur  $f_n = \frac{e_n}{\|e_n\|} \in H^2(\beta)$ , de sorte que la famille  $(f_n)_n$  soit une base hilbertienne de  $H^2(\beta)$ . Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \langle D^* f_n, f_m \rangle &= \langle f_n, D f_m \rangle \\ &= \frac{\|e_{m+1}\|}{\|e_m\|} \langle f_n, f_{m+1} \rangle \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}} & \text{si } m = n - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme  $(f_n)_n$  est une base hilbertienne, les équations ci-dessus permettent de montrer que  $D^* e_0 = 0$  et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $D^* f_n = \frac{\|e_n\|}{\|e_{n-1}\|} f_{n-1}$ . On obtient alors le résultat souhaité en remarquant que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$D^*(e_n) = \frac{\|e_n\|^2}{\|e_{n-1}\|^2} e_{n-1} = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} e_{n-1}.$$

Ceci achève la preuve.  $\square$

Étudions d'abord la concavité (et le caractère 2-isométrique) des opérateurs  $D$ .

**Proposition 3.24** *L'opérateur  $D$  est concave si et seulement si  $\beta$  est une suite concave.*

*Démonstration* : Comme  $(e_n)_{n \geq 0}$  est une famille orthogonale qui engendre un sous-espace dense, pour montrer que  $D$  est concave, il suffit de montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $\left(\|T^m e_n\|^2\right)_{m \in \mathbb{N}}$  est concave. Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons  $e_n = T^n e_0$ , il suffit donc de montrer que la suite  $\left(\|T^m e_0\|^2\right)_{m \in \mathbb{N}} = \left(\|e_m\|^2\right)_{m \in \mathbb{N}}$  est concave. Or, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\|e_m\| = \sqrt{\beta_m}$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

En suivant une preuve similaire, nous pouvons montrer le résultat suivant.

**Corollaire 3.25** *L'opérateur  $D$  est une 2-isométrie si et seulement si  $\beta$  est une suite affine.*

Nous déterminons maintenant si les opérateurs  $D$  sont ou non des opérateurs de Shimorin.

**Proposition 3.26** *L'opérateur  $D$  est de Shimorin si et seulement si  $\frac{1}{\beta_1} \leq 2$  et la suite  $\left(\frac{1}{\beta_n}\right)_n$  est concave.*

*Démonstration* : Comme nous connaissons les opérateurs  $D$  et  $D^*$ , nous pouvons calculer les opérateurs

$$DD^* : \begin{cases} H^2(\beta) & \longrightarrow & H^2(\beta) \\ e_0 & \longmapsto & 0 \\ e_n & \longmapsto & \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} e_n \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

et

$$D^*D : \begin{cases} H^2(\beta) & \longrightarrow & H^2(\beta) \\ e_n & \longmapsto & \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} e_n \end{cases} .$$

Nous en déduisons alors que l'inverse de  $D^*D$  peut être décrit par

$$(D^*D)^{-1} : \begin{cases} H^2(\beta) & \longrightarrow & H^2(\beta) \\ e_n & \longmapsto & \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} e_n \end{cases} .$$

Comme  $(e_n)_{n \geq 0}$  est une famille orthogonale qui engendre un sous-espace dense, pour montrer que  $D$  est un opérateur de Shimorin, il suffit de montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\langle (DD^* + (D^*D)^{-1} - 2\text{Id}) e_n, e_n \rangle \leq 0.$$

Commençons par traiter le cas où  $n = 0$ . Nous avons

$$(DD^* + (D^*D)^{-1} - 2\text{Id}) e_0 = \left(\frac{1}{\beta_1} - 2\right) e_0.$$

Ainsi,  $\langle (DD^* + (D^*D)^{-1} - 2\text{Id})e_0, e_0 \rangle \leq 0$  si et seulement si  $\frac{1}{\beta_1} \leq 2$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors,

$$(DD^* + (D^*D)^{-1} - 2\text{Id})e_n = \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^{1-\alpha} + \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{1-\alpha} - 2 \right) e_n.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \langle (DD^* + (D^*D)^{-1} - 2\text{Id})e_n, e_n \rangle \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} + \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\beta_{n-1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} - \frac{2}{\beta_{n-1}} \leq 0 \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

Nous pouvons en particulier appliquer ces résultats aux espaces de la forme  $H^2(\alpha)$  où  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

**Proposition 3.27** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $\beta = ((n+1)^{1-\alpha})_n$ , de sorte que  $H^2(\alpha) = H^2(\beta)$ . Alors,*

1. *l'opérateur  $D \in \mathcal{L}(H^2(\alpha))$  est presque isométrique ;*
2. *l'opérateur  $D \in \mathcal{L}(H^2(\alpha))$  est concave si et seulement si  $\alpha \in [0; 1]$  ;*
3. *l'opérateur  $D \in \mathcal{L}(H^2(\alpha))$  est de type Shimorin si et seulement si  $\alpha \in [1; 2]$  ;*
4. *si  $\alpha = 0$ ,  $D \in \mathcal{L}(H^2(0))$  est une 2-isométrie ;*
5. *si  $\alpha = 1$ ,  $D \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{D}))$  est une isométrie.*

*Démonstration* : Comme la suite  $(m^\beta)_m$  est concave si et seulement si  $0 \leq \beta \leq 1$ , il suffit d'appliquer le résultat des propositions précédentes pour obtenir les quatre premiers résultats. Le cinquième point est immédiat. □

En particulier, nous disposons des exemples suivants :

**Proposition 3.28** (a) *Il existe des opérateurs de Shimorin qui ne sont pas concaves.*

(b) *Il existe des opérateurs concaves qui ne sont pas de type Shimorin.*

(c) *Il existe des 2-isométries qui ne sont pas des opérateurs de Shimorin.*

*Démonstration* :

(a) Prendre  $D \in \mathcal{L}\left(H^2\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ .

(b) Prendre  $D \in \mathcal{L}\left(H^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ .

(c) Prendre  $D \in \mathcal{L}(H^2(0))$ . □

Nous pouvons résumer ce résultat au moyen du schéma suivant :

Notons par ailleurs que ces exemples ne sont pas nécessairement conservés par changement de norme, même si l'on considère une norme équivalente. Par exemple, avec notre convention,

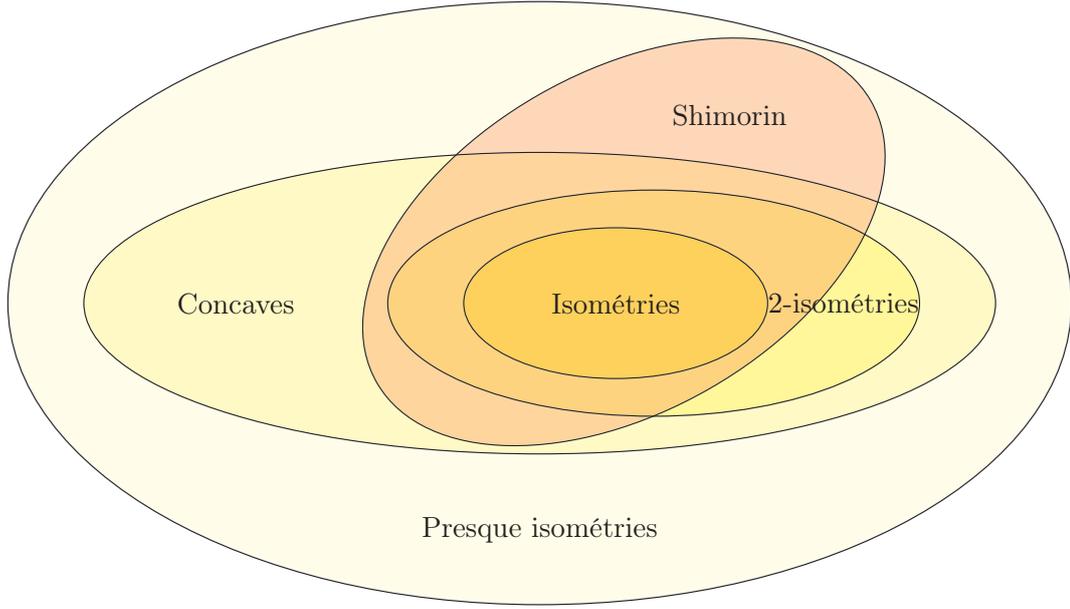


FIGURE 3.3 – Diagramme de Venn des opérateurs presque isométriques.

$D \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\alpha)$  n'est concave pour aucun  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . En effet, soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Alors,  $\|e_0\|_{\mathcal{D}_\alpha} = 1$  et  $\|e_1\|_{\mathcal{D}_\alpha} = \sqrt{\int_0^1 (1-r^2)^\alpha dr}$ . En particulier, si  $\alpha > 0$ , alors  $\|e_1\| = \|De_0\| < \|e_0\|$ . Donc  $D \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\alpha)$  n'est pas concave. Si  $\alpha = 0$ , alors  $\|e_0\| = 1$ ,  $\|De_0\| = \|e_1\| = 1$  et  $\|D^2e_0\| = \|e_2\| = 2$ . Donc  $D \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$  n'est pas concave.

## B.2 — Décomposition de Wold

Nous étudions maintenant la décomposition de Wold des opérateurs presque isométriques. Intuitivement, nous dirons qu'un opérateur admet une décomposition de Wold s'il peut s'écrire comme la somme directe orthogonale d'un opérateur unitaire et d'un opérateur de décalage. Le premier résultat de ce type (sur la décomposition de Wold des opérateurs isométriques) a été prouvé par Wold dans sa thèse [66], où l'auteur présente le résultat dans un contexte de mathématiques statistiques. Une des premières versions du point de vue de la théorie des opérateurs a été formulée par Halmos dans [37]. Un certain nombre d'articles ont depuis été dédiés (au moins partiellement) à l'étude de la décomposition de Wold des opérateurs proches d'une isométrie. Mentionnons ici particulièrement ceux de Richter [52] ou Olofsson [48] pour les 2-isométries, ou encore l'article de Shimorin [63] et la pré-publication de Găvruta [36] pour une étude plus générale.

Pour étudier la décomposition de Wold, nous commençons dans un premier temps par préciser le contexte général : ce moment est l'occasion de définir ce qu'est un opérateur qui a la propriété du sous-espace ambulant, ou encore une presque isométrie complètement impure. Nous terminons cette étude préliminaire en définissant ce qu'est une décomposition de Wold, et nous re-montrons le théorème de Wold selon lequel une isométrie se décompose en une partie unitaire et une partie de décalage unilatéral vers la droite. Dans un deuxième temps, nous introduisons la notion de dual de Cauchy d'une presque isométrie et nous détaillons les liens entre la dualité de Cauchy

et les décompositions de Wold. Nous terminons enfin en appliquant les résultats précédents à l'étude des opérateurs concaves ou de Shimorin.

### B.2.a) — Sous-espaces ambulants et opérateurs purs — Décomposition de Wold

Nous commençons ici par définir ce qu'est un sous-espace ambulant, puis un opérateur qui a la propriété du sous-espace ambulant. Après avoir détaillé quelques propriétés élémentaires, nous montrons que tout opérateur presque isométrique se décompose comme la somme orthogonale d'une partie complètement impure et d'une partie ayant la propriété du sous-espace ambulant. Nous terminons en appliquant ce résultat aux isométries, pour retrouver le théorème de Wold.

Commençons par définir ce que l'on entend par « sous-espace ambulant ».

**Définition 3.29** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Soit  $\mathcal{E}$  un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$ . On note

$$[\mathcal{E}]_T = \overline{\text{Vect} \{T^n \mathcal{E} \mid n \in \mathbb{N}\}}.$$

On dit que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace ambulant pour  $T$  lorsque les  $T^n \mathcal{E}$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) sont en somme directe. En d'autres termes,  $\mathcal{E}$  est ambulant pour  $T$  si et seulement si

$$[\mathcal{E}]_T = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T^n \mathcal{E}.$$

**Définition 3.30** Soient  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{M}$  un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$ . On dit que  $(T, \mathcal{M})$  a la propriété du sous-espace ambulant s'il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{E}$  ambulant tel que  $[\mathcal{E}]_T = \mathcal{M}$ . En d'autres termes,

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T^n \mathcal{E}.$$

Si  $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ , on dit simplement que  $T$  a la propriété du sous-espace ambulant.

**Exemples** Les opérateurs de décalage que nous avons déjà rencontrés fournissent des exemples naturels d'opérateurs possédant la propriété du sous-espace ambulant.

1. Soit  $\beta \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$  une suite et  $D \in \mathcal{L}(H^2(\beta))$  l'opérateur de multiplication par  $e_1$ . Alors, pour  $\mathcal{E} = \mathbb{C} \cdot e_0$ , nous avons bien que  $D$  a la propriété du sous-espace ambulant.
2. Soit  $D_1 : f \mapsto f(\bullet - 1) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))$  l'opérateur de translation vers la droite. Alors, en posant  $\mathcal{E} = L^2([0; 1])$ , nous avons bien que  $D_1$  a la propriété du sous-espace ambulant.

Nous énonçons maintenant une condition suffisante pour qu'un sous-espace soit ambulant.

**Lemme 3.31** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  inversible à gauche. On suppose qu'il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{H}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{E} \perp T^n \mathcal{E}$ .

Alors, l'espace  $\mathcal{E}$  est un espace ambulant pour  $T$ .

*Démonstration* : Nous voulons montrer que les espaces  $(T^n \mathcal{E})_{n \in \mathbb{N}}$  sont en somme directe. Pour cela, il nous suffit de montrer que, pour tout  $N \geq 2$ , la propriété

$\mathcal{P}(N)$  : «  $\forall (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$  tel que  $n_1 < n_2 < \dots < n_N$ , la somme  $\sum_{k=1}^N T^{n_k} \mathcal{E}$  est directe »

est vraie. Nous la montrons par récurrence sur  $N$ .

**Initialisation** Soit  $n_1 < n_2$ . Nous montrons que la somme  $T^{n_1} \mathcal{E} + T^{n_2} \mathcal{E}$  est directe. Pour cela, il suffit de montrer que  $T^{n_1} \mathcal{E} \cap T^{n_2} \mathcal{E} = \{0\}$ . Soit  $x \in T^{n_1} \mathcal{E} \cap T^{n_2} \mathcal{E}$ . Alors, il existe  $y_1$  et  $y_2 \in \mathcal{E}$  tels que

$$x = T^{n_1} y_1 = T^{n_2} y_2 = T^{n_1} T^{n_2 - n_1} y_2.$$

Comme  $T$  est inversible à gauche,  $T^{n_1}$  l'est également et nous avons

$$y_1 = T^{n_2 - n_1} y_2.$$

Donc  $y_1 \in \mathcal{E} \cap T^{n_2 - n_1} \mathcal{E} = \{0\}$  (car  $\mathcal{E}$  et  $T^{n_2 - n_1} \mathcal{E}$  sont orthogonaux). Ainsi,  $y_1 = 0$  et donc  $x = 0$ . Ceci prouve que  $\mathcal{P}(2)$  est vraie.

**Hérédité** Soit  $N \geq 2$  tel que  $\mathcal{P}(N)$  est vraie. Nous montrons que  $\mathcal{P}(N+1)$  est vraie.

Soit  $(n_1, \dots, n_{N+1}) \in \mathbb{N}^{N+1}$  tel que  $n_1 < n_2 < \dots < n_{N+1}$ . Nous montrons que la somme  $\sum_{k=1}^{N+1} T^{n_k} \mathcal{E}$  est directe. Pour cela, nous prenons  $(x_1, \dots, x_{N+1}) \in \mathcal{H}^{N+1}$  tels que, pour tout  $k \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket$ ,  $x_k \in T^{n_k} \mathcal{E}$  et

$$x_1 + \dots + x_{N+1} = 0. \quad (\star)$$

Nous voulons montrer que, pour tout  $k \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket$ ,  $x_k = 0$ . En utilisant l'invertibilité à gauche de  $T^{n_1}$ , nous allons montrer que  $x_1 = 0$ . Pour montrer que  $x_2 = x_3 = \dots = x_{N+1} = 0$ , nous utiliserons alors l'hypothèse de récurrence.

Soit  $k \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket$ . Comme  $x_k \in T^{n_k} \mathcal{E}$ , il existe  $y_k \in \mathcal{E}$  tel que  $x_k = T^{n_k} y_k$ . L'équation  $(\star)$  devient alors

$$T^{n_1} y_1 + \dots + T^{n_{N+1}} y_{N+1} = 0.$$

Comme  $T^{n_1}$  est inversible à gauche, il vient que

$$y_1 = -T^{n_2 - n_1} y_2 - \dots - T^{n_{N+1} - n_1} y_{N+1}.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \|y_1\|^2 &= \langle y_1, y_1 \rangle \\ &= \left\langle y_1, - \sum_{k=2}^{N+1} T^{n_k - n_1} y_k \right\rangle \\ &= - \sum_{k=2}^{N+1} \underbrace{\langle y_1, T^{n_k - n_1} y_k \rangle}_{= 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

En effet, pour tout  $k \in \llbracket 2; N+1 \rrbracket$ ,  $\mathcal{E}$  et  $T^{n_k-n_1} \mathcal{E}$  sont orthogonaux. Ainsi,  $\|y_1\|^2 = 0$ . Donc  $y_1 = 0$ . Ceci prouve que  $x_1 = 0$ .

Nous avons alors

$$x_2 + \cdots + x_{N+1} = 0,$$

où, pour tout  $k \in \llbracket 2; N+1 \rrbracket$ ,  $x_k \in T^{n_k} \mathcal{E}$ . Or, d'après l'hypothèse de récurrence  $\mathcal{P}(N)$ , nous savons que la somme  $\bigoplus_{k=2}^{N+1} T^{n_k} \mathcal{E}$  est directe. Ainsi, pour tout  $k \in \llbracket 2; N+1 \rrbracket$ ,  $x_k = 0$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Le résultat suivant montre l'unicité (sous réserve d'existence) du sous-espace ambulant maximal.

**Proposition 3.32** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Soit  $\mathcal{M}$  un sous-espace fermé de  $T$ . On suppose que  $(T, \mathcal{M})$  a la propriété du sous-espace ambulant, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{E}$  ambulant tel que  $[\mathcal{E}]_T = \mathcal{M}$ .*

*Alors,  $\mathcal{E} = \mathcal{M} \ominus T\mathcal{M} = (T\mathcal{M})^{\perp \mathcal{M}}$ .*

*Démonstration :* Commençons par rappeler le résultat suivant d'analyse hilbertienne :

**Lemme 3.33 (admis)** *Soient  $\mathcal{M}$  un espace de Hilbert,  $\mathcal{E}$  un sous-espace fermé de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{F}$  un sous-espace (non nécessairement fermé) de  $\mathcal{M}$  tel que  $\mathcal{M} = \mathcal{E} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{F}$ .*

*Alors,  $\mathcal{E}$  et  $\overline{\mathcal{F}}$  sont en somme directe orthogonale et  $\mathcal{M} = \mathcal{E} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathcal{F}}$ .*

Prenons  $\mathcal{F} = \bigoplus_{n \geq 1} T^n \mathcal{E}$ . Comme, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les espaces  $\mathcal{E}$  et  $T^n \mathcal{E}$  sont orthogonaux, nous avons bien que  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont en somme directe orthogonale. De plus, comme  $(T, \mathcal{M})$  a la propriété du sous-espace ambulant, nous savons que

$$\mathcal{M} = \overline{\mathcal{E} \overset{\perp}{\oplus} \bigoplus_{n \geq 1} T^n \mathcal{E}} = \overline{\mathcal{E} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{F}}.$$

D'après le lemme précédent, nous avons alors

$$\mathcal{M} = \mathcal{E} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathcal{F}}. \quad (\odot)$$

Nous montrons maintenant que  $\overline{T\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{F}}$ . Par définition, nous avons

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n \geq 1} T^n \mathcal{E} = T \bigoplus_{n \geq 0} T^n \mathcal{E}$$

Montrons d'abord que  $\overline{\mathcal{F}} \subset \overline{T\mathcal{M}}$ . Soit  $x \in \overline{\mathcal{F}}$ . Alors, il existe une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$  telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \in T \left( \bigoplus_{n \geq 0} T^n \mathcal{E} \right)$  et  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$ . De plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \in T \left( \bigoplus_{n \geq 0} T^n \mathcal{E} \right) \subset T\mathcal{M}$ . Alors,  $x \in \overline{T\mathcal{M}}$ .

Montrons maintenant l'inclusion réciproque. Soit  $x \in \overline{T\mathcal{M}}$ . Il existe une suite  $(x_k)_k \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$  telle que  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \in T\mathcal{M}$ . Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $y_k \in \mathcal{M}$  tel que  $x_k = T y_k$ . Or,  $(T, \mathcal{M})$  a la propriété du sous-espace ambulant, que l'on peut reformuler ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists z_k \in \bigoplus_{n \geq 0} T^n \mathcal{E} \text{ tel que } \|y_k - z_k\| \leq 2^{-k}.$$

Nous montrons maintenant que  $T z_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $x_k \rightarrow x$ , il existe  $K_1 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $k \geq K_1$ ,  $\|x_k - x\| \leq \varepsilon$ . Par ailleurs, comme  $2^{-k} \rightarrow 0$ , il existe  $K_2 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $k \geq K_2$ ,  $\|y_k - z_k\| \leq \varepsilon$ . Soit  $K_0 = \max(K_1, K_2)$ . Soit  $k \geq K_0$ .

$$\begin{aligned} \|T z_k - x\| &\leq \|T z_k - T y_k\| + \|T y_k - x\| \\ &\leq \|T\| \|z_k - y_k\| + \|x_k - x\| \\ &\leq (\|T\| + 1) \varepsilon \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $T z_k \rightarrow x$ . Or, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $z_k \in \bigoplus_{n \geq 0} T^n \mathcal{E}$ . Ainsi,  $x \in \overline{\bigoplus_{n \geq 0} T^n \mathcal{E}}$ . Ceci achève la preuve de l'inclusion réciproque.

Notons maintenant  $\mathcal{G} = \mathcal{M} \ominus T\mathcal{M} = (T\mathcal{M})^{\perp \mathcal{M}}$ . Par définition de  $\mathcal{G}$ , nous avons

$$\mathcal{M} = \mathcal{G} \oplus \overline{T\mathcal{M}}.$$

Or,  $\overline{T\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{F}}$ . Nous avons donc

$$\mathcal{M} = \mathcal{G} \oplus \overline{\mathcal{F}}.$$

Or, d'après l'équation  $(\odot)$ , nous avons par ailleurs

$$\mathcal{M} = \mathcal{E} \oplus \overline{\mathcal{F}}$$

Ainsi,  $(\overline{\mathcal{F}})^{\perp \mathcal{M}} = \mathcal{E} = \mathcal{G}$ . Donc,  $\mathcal{E} = \mathcal{G}$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Nous montrons maintenant un résultat de décomposition des opérateurs presque isométriques, qui nous permettra de définir la partie complètement impure d'une presque isométrie.

**Théorème et définition 3.34** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  presque isométrique. Notons  $\mathcal{E} = \mathcal{H} \ominus T\mathcal{H}$ . Alors,  $\mathcal{E}$  est un sous-espace ambulant pour  $T$ . Notons*

$$\mathcal{H}_{\infty}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n \geq 0} T^n \mathcal{H}.$$

*Alors,  $\mathcal{H}_{\infty}(T)$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}_{\infty}(T)^{\perp} = [\mathcal{E}]_T$ . De plus,  $\mathcal{H}_{\infty}(T)$  est un espace réduisant pour  $T$ . En outre, il existe un opérateur  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\infty}(T))$  tel que  $\bigcap_{n \geq 0} U^n \mathcal{H}_{\infty}(T) =$*

*$\mathcal{H}_{\infty}(T)$ , et un opérateur  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\infty}(T)^{\perp})$  possédant la propriété du sous-espace ambulant tels que l'on a la décomposition orthogonale suivante :*

$$T = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \text{ sur } \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{\infty}(T) \\ [\mathcal{E}]_T \end{bmatrix}.$$

On appelle partie pure de  $T$  l'opérateur  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{N}^\perp)$ . On appelle partie complètement impure de  $T$  l'opérateur  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$ .

On étend de façon naturelle ces définitions aux opérateurs presque isométriques : on dit que  $T$  est pur s'il est égal à sa partie pure et que  $T$  est complètement impur s'il est égal à sa partie complètement impure. On dit enfin que  $T$  est impur si  $T$  n'est pas pur.

On peut reformuler le résultat précédent sous la forme suivante.

**Corollaire 3.35** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur presque isométrique. Alors, l'opérateur  $T$  est pur si et seulement s'il a la propriété du sous-espace ambulant.

Nous prouvons maintenant l'énoncé 3.34.

*Démonstration* : Commençons par poser  $\mathcal{E} = \mathcal{H} \ominus T\mathcal{H}$  (nous connaissons la forme que doit avoir le sous-espace ambulant d'un opérateur ayant la propriété homonyme d'après la proposition 3.32).

Nous commençons par montrer que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace ambulant. D'après le lemme 3.31, il suffit de vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{E} \perp T^n \mathcal{E}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nous savons que  $T^n \mathcal{E} \subset T\mathcal{H} = \mathcal{E}^\perp$ . Ainsi,  $T^n \mathcal{E} \perp \mathcal{E}$ . Ceci valant pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous avons bien montré que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace ambulant.

Détaillons maintenant un résultat intermédiaire.

**Lemme 3.36** pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a la décomposition orthogonale

$$\mathcal{H} = \left( \bigoplus_{0 \leq k \leq n} T^k \mathcal{E} \right) \oplus T^{n+1} \mathcal{H}. \quad (\ominus)$$

*Démonstration* : Ce résultat se prouve en sacrifiant à une récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 0$ , le résultat découle de la définition de  $\mathcal{E}$ . Nous montrons donc l'hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$\mathcal{H} = \left( \bigoplus_{0 \leq k \leq n} T^k \mathcal{E} \right) \oplus T^{n+1} \mathcal{H}.$$

Alors, comme  $T^{n+1}$  est inversible à gauche, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left( \bigoplus_{0 \leq k \leq n} T^k \mathcal{E} \right) \oplus T^{n+1} \left( \mathcal{E} \oplus T\mathcal{H} \right) \\ &= \left( \bigoplus_{0 \leq k \leq n} T^k \mathcal{E} \right) \oplus T^{n+1} \mathcal{E} \oplus T^{n+2} \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Ceci prouve l'hérédité et achève la preuve du lemme. □

Posons maintenant  $\mathcal{M} = [\mathcal{E}]_T = \overline{\text{Vect} \{T^n \mathcal{E} \mid n \in \mathbb{N}\}}$ . Rappelons que  $\mathcal{H}_\infty(T) = \bigcap_{n \geq 0} T^n \mathcal{H}$ .

Nous montrons que  $\mathcal{M}^\perp = \mathcal{H}_\infty(T)$ .

Commençons par prouver que  $\mathcal{M}^\perp \subset \mathcal{H}_\infty(T)$ . Soit  $x \in \mathcal{M}^\perp$ . Nous avons donc que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in (T^n \mathcal{E})^\perp$ . Montrons que  $x \in \mathcal{H}_\infty(T)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Nous savons que, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on a  $x \in (T^k \mathcal{E})^\perp$ . D'après la décomposition orthogonale (⊕) ci-dessus, nous déduisons que  $x \in T^{n+1} \mathcal{H}$ , et ce pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par ailleurs,  $x \in T^0 \mathcal{H} = \mathcal{H}$ . Ainsi, nous avons bien montré que  $x \in \bigcap_{n \geq 0} T^n \mathcal{H} = \mathcal{H}_\infty(T)$ .

En suivant un raisonnement similaire, nous pouvons établir l'inclusion réciproque. Soit  $x \in \mathcal{H}_\infty(T)$ . Pour montrer que  $x \in \mathcal{M}^\perp$ , il suffit de montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in (T^n \mathcal{E})^\perp$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $x \in T^{n+1} \mathcal{H}$ , la décomposition orthogonale (⊕) ci-dessus montre que

$$x \in \left( \bigoplus_{0 \leq k \leq n} T^k \mathcal{E} \right)^\perp = \bigcap_{0 \leq k \leq n} (T^k \mathcal{E})^\perp.$$

En particulier,  $x \in (T^n \mathcal{E})^\perp$ . Ceci valant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons bien que  $x \in \mathcal{M}^\perp$ .

Nous avons donc finalement la décomposition orthogonale  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\infty(T) \oplus \mathcal{M}$ . De plus, les espaces  $\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_\infty(T)$  et  $\mathcal{N}^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}$  sont stables par  $T$ . Ils sont donc tous deux réduisants. Soient  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$  l'opérateur induit par  $T$  sur  $\mathcal{N}$  et  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{N}^\perp)$  l'opérateur induit par  $T$  sur  $\mathcal{N}^\perp$ . Pour achever la preuve du théorème, il reste à prouver que  $S$  a la propriété du sous-espace invariant et que  $U$  est tel que  $\bigcap_{n \geq 0} U^n \mathcal{N} = \mathcal{N}$ .

Comme  $\mathcal{E}$  est un espace ambulant pour  $S$  et comme on a bien  $\mathcal{N}^\perp = [\mathcal{E}]_S$ , nous avons que  $S$  a bien la propriété du sous-espace invariant.

Comme  $T$  est inversible à gauche, nous avons que

$$\begin{aligned} U(\mathcal{N}) &= T(\mathcal{N}) \\ &= T\left(\bigcap_{n \geq 0} T^n \mathcal{H}\right) \\ &= \bigcap_{n \geq 0} T T^n \mathcal{H} \\ &= \bigcap_{n \geq 0} T^{n+1} \mathcal{H} \\ &= \bigcap_{n \geq 0} T^n \mathcal{H} \\ &= \mathcal{N} \end{aligned}$$

Ainsi,  $U\mathcal{N} = \mathcal{N}$ . Par le truchement d'une récurrence immédiate, nous avons que  $U^n \mathcal{N} = \mathcal{N}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi, il vient que  $\bigcap_{n \geq 0} U^n \mathcal{N} = \mathcal{N}$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous pouvons maintenant définir la notion de décomposition de Wold.

**Définition 3.37** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur presque isométrique. Soit  $\mathcal{E} = \mathcal{H} \ominus T\mathcal{H}$ . On dit que  $T$  admet une décomposition de Wold si la partie complètement impure de  $T$  est unitaire : cela signifie qu'il existe un opérateur unitaire  $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\infty(T))$  et un opérateur  $S \in \mathcal{L}([\mathcal{E}]_T)$  possédant la propriété du sous-espace invariant tels que l'on a la décomposition orthogonale suivante :

$$T = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \text{ sur } \begin{bmatrix} \mathcal{H}_\infty(T) \\ [\mathcal{E}]_T \end{bmatrix}.$$

Le résultat originel de Wold ([66]) est que toute isométrie admet une décomposition de Wold. Ce résultat peut se déduire aisément des résultats précédents. Le point clef de la preuve est le résultat suivant.

**Proposition 3.38** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  une isométrie complètement impure. Alors,  $T$  est unitaire.*

*Démonstration* : Nous avons vu dans la preuve du théorème 3.34 que la partie totalement impure d'une presque isométrie est surjective. Ainsi,  $T$  est surjectif. Comme  $T$  est une isométrie, c'est nécessairement un opérateur unitaire.  $\square$

Nous pouvons terminer cette partie sur ce résultat de décomposition des isométries.

**Théorème 3.39 (Décomposition de Wold d'une isométrie)** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  une isométrie. Alors,  $T$  admet une décomposition de Wold.*

*Démonstration* : D'après le théorème 3.34, nous savons déjà que  $T$  est la somme orthogonale de sa partie pure — qui a la propriété du sous-espace ambulant — et de sa partie complètement impure. Or, la proposition précédente (proposition 3.38) montre que la partie complètement impure de  $T$  est unitaire. Ceci achève la preuve.  $\square$

### B.2.b) — Dual de Cauchy

Nous introduisons et étudions à présent le dual de Cauchy d'un opérateur presque isométrique. Après avoir défini et étudié les premières propriétés du dual de Cauchy, nous étudions le comportement des opérateurs purs sous la dualité de Cauchy. Commençons par une définition.

**Définition 3.40** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  presque isométrique. Le dual de Cauchy de  $T$  est l'opérateur*

$$T' = T(T^*T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

**Exemples** Donnons quelques exemples.

1. Si  $T$  est une isométrie, alors  $T^*T = \text{Id}$ . En particulier,  $T' = T$ .
2. Soit  $\beta \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$  et  $D \in \mathcal{L}(H^2(\beta))$  l'opérateur de multiplication par  $e_1$ . Alors, en reprenant les calculs effectués précédemment (dans le paragraphe b)), nous obtenons que le dual de Cauchy de  $D$  est l'opérateur décrit par

$$D' : \begin{cases} H^2(\beta) & \rightarrow H^2(\beta) \\ e_n & \mapsto \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} e_{n+1} \end{cases} .$$

Remarquons par ailleurs que  $T'^*$  est l'inverse à gauche de  $T$ .

**Lemme 3.41** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  presque isométrique. Alors, l'inverse à gauche de  $T$  est  $T'^*$ .*

*Démonstration* : Nous avons  $T'^* = (T^*T)^{-1}T^*$  et donc  $T^*T = \text{Id}$ . Ceci termine la courte preuve.  $\square$

Nous étudions les propriétés élémentaires de la dualité de Cauchy.

**Proposition 3.42** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  une presque isométrie. Alors, l'opérateur  $T'$  est presque isométrique et  $T'' = T$ .*

**Remarque** Il existe un opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  presque isométrique tel que  $T^*$  ne soit pas presque isométrique : c'est le cas de l'opérateur de multiplication

$$M_z : \begin{cases} H^2(\mathbb{D}) & \rightarrow H^2(\mathbb{D}) \\ f & \mapsto (z \mapsto z f(z)) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(1)).$$

En effet,  $M_z$  est une isométrie, donc il est bien presque isométrique. Or,  $M_z^*$  est la projection orthogonale sur  $(\mathbb{C} \cdot e_0)^\perp$ . En particulier,  $M_z^*$  n'est pas injectif. Donc  $M_z^*$  n'est pas une presque isométrie.

Nous prouvons maintenant la proposition 3.42 ci-dessus.

*Démonstration* : Commençons par montrer que  $(T')^* T'$  est inversible. Comme  $T^*T$  est auto-adjoint et inversible, nous savons que  $((T^*T)^{-1})^* = (T^*T)^{-1}$ . Alors,  $(T')^* = (T^*T)^{-1}T^*$ . Il vient alors

$$(T')^* T' = (T^*T)^{-1} T^* T (T^*T)^{-1} = (T^*T)^{-1}.$$

Ainsi,  $(T')^* T'$  est inversible et donc  $T'$  est une presque isométrie. Nous pouvons alors calculer son dual de Cauchy :

$$\begin{aligned} T'' &= T' [(T')^* T']^{-1} \\ &= T (T^*T)^{-1} T^* T \\ &= T. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve.  $\square$

**Lemme 3.43** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  presque isométrique. Soit  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  l'inverse à gauche de  $T$ . Alors,  $P = \text{Id} - TL$  est la projection orthogonale sur  $\mathcal{E} = (\text{Im}(T))^\perp$ .*

*Démonstration* : D'abord, nous vérifions que  $P$  est une projection. Nous avons

$$P^2 = (\text{Id} - TL)^2 = \text{Id} - 2TL + T \underbrace{LT}_{=\text{Id}} L = \text{Id} - TL = P.$$

Ainsi,  $P$  est bien une projection.

L'opérateur adjoint  $P^*$  est alors décrit par

$$P^* = (\text{Id} - TL)^* = \text{Id} - L^* T^* = \text{Id} - T(T^*T)^{-1} T^* = \text{Id} - TL = P.$$

Ainsi,  $P$  est un opérateur auto-adjoint qui est aussi une projection. En d'autres termes,  $P$  est une projection orthogonale. Nous montrons maintenant que  $\text{Ker } P = \text{Im } T$ . Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \text{Ker } P &\Leftrightarrow x = TLx \\
&\Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{H}, x = Ty \\
&\Leftrightarrow x \in \text{Im } T.
\end{aligned}$$

En effet : pour tous  $x, y \in \mathcal{H}$ , si  $x = Ty$ , alors  $Lx = LTy = y$ .

Nous avons donc bien établi que  $\text{Ker } P = \text{Im } T$ . Comme  $P$  est une projection orthogonale,  $P$  est bien la projection orthogonale sur  $(\text{Im } P)^\perp$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

L'objectif des propriétés suivantes et d'étudier les liens entre la décomposition de Wold d'un opérateur et celle de son dual de Cauchy. Les résultats principaux que nous démontrons sont les suivants.

**Proposition 3.44** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  presque isométrique. Alors,*

1. *l'opérateur  $T$  est pur si et seulement si  $T'$  est pur ;*
2. *l'opérateur  $T$  est complètement impur si et seulement si  $T'$  est complètement impur.*

**Corollaire 3.45** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  presque isométrique. L'opérateur  $T$  admet une décomposition de Wold si et seulement si l'opérateur  $T'$  admet une décomposition de Wold.*

Introduisons quelques notations : dans les pages suivantes (jusqu'à la fin de la preuve de la proposition 3.44), et sauf mention explicite du contraire, nous désignerons par  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur presque isométrique. Nous noterons  $T'$  le dual de Cauchy de  $T$ . Nous noterons  $\mathcal{E} = (\text{Im } T)^\perp$  et  $\mathcal{E}' = (\text{Im}(T'))^\perp$ . Nous noterons  $L$  l'inverse à gauche de  $T$  (comme dans le lemme 3.43). Bien que  $T$  ou  $T'$  n'aient pas nécessairement de partie impure non triviale, nous considérons encore les sous-espaces  $\mathcal{H}_\infty(T)$  et  $\mathcal{H}_\infty(T')$ , définis comme dans la définition 3.34.

Avant de prouver ces résultats, nous commençons par énoncer une série de lemmes plutôt techniques.

**Lemme 3.46** *On a  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ .*

*Démonstration* : Nous commençons par montrer que  $\text{Im } T \subset \text{Im } T'$ . Soit  $x \in \text{Im } T$ . Alors, il existe  $y \in \mathcal{H}$  tel que  $x = Ty$ . Comme  $L = (T^*T)^{-1}T^*$  est un inverse à gauche de  $T$ , nous avons  $Lx = LTy = y$ . Ainsi,  $x = TLx$ . Or,  $TL = T'T^*$ . Ainsi,  $x \in \text{Im } T'$ . Comme  $T'' = T$ , la démonstration précédente montre que  $\text{Im } T' \subset \text{Im } T$ . On a donc  $\text{Im } T = \text{Im } T'$ . Comme  $\mathcal{E} = (\text{Im } T)^\perp$  et  $\mathcal{E}' = (\text{Im } T')^\perp$ , nous avons bien  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

**Lemme 3.47** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\text{Ker}(L^{n+1}) = \text{Vect} \left( T^k \mathcal{E} \mid 0 \leq k \leq n \right).$$

*Démonstration* : Nous commençons par montrer que  $\text{Ker } L = \mathcal{E}$ . Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Nous avons les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } L &\Leftrightarrow Lx = 0 \Leftrightarrow TLx = 0 \\ &\Leftrightarrow Px = x \Leftrightarrow x \in \text{Im } P = \mathcal{E} \end{aligned}$$

puisque  $P$  est la projection orthogonale sur  $\mathcal{E}$  (d'après le lemme 3.43). Ceci montre bien que  $\text{Ker } L = \mathcal{E}$ .

Nous fixons maintenant  $n \in \mathbb{N}$ . Nous commençons par montrer que

$$\text{Vect} \left( T^k \mathcal{E} \mid 0 \leq k \leq n \right) \subset \text{Ker } L^{n+1}.$$

Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Soit  $x \in T^k \mathcal{E}$ . Soit  $e \in \mathcal{E}$  tel que  $x = T^k e$ . Alors,

$$L^{n+1}x = L^{n+1-k} L^k T^k e = L^{n-k} L e.$$

Or,  $e \in \mathcal{E} = \text{Ker } L$ . Alors,  $L^{n+1}x = 0$ . Ceci valant pour tout  $x$  et pour tout  $k$ , nous avons bien démontré l'inclusion souhaitée.

Montrons maintenant l'inclusion réciproque. Soit  $x \in \text{ker } L^{n+1}$ . Alors,

$$\begin{aligned} x &= x - T^{n+1} L^{n+1} x \\ &= \sum_{k=0}^n T^k L^k x - T^{k+1} L^{k+1} x \\ &= \sum_{k=0}^n T^k \underbrace{(\text{Id} - TL) L^k x}_{\in \mathcal{E}} \in \text{Vect} \left( T^k \mathcal{E} \mid 0 \leq k \leq n \right) \end{aligned}$$

car  $P = (\text{Id} - TL)$  est la projection orthogonale sur  $\mathcal{E}$ . Ceci montre l'inclusion réciproque et achève la preuve.  $\square$

**Lemme 3.48** On a  $\mathcal{H}_\infty(T')^\perp = [\mathcal{E}]_T$ .

*Démonstration* : Rappelons que  $L = (T')^*$  est l'inverse à gauche de  $T$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\infty(T')^\perp &= \left[ \bigcap_{n \geq 0} T'^n \mathcal{H} \right]^\perp \\ &= \overline{\text{Vect} \left( [T'^n \mathcal{H}]^\perp \mid n \geq 0 \right)} \\ &= \overline{\text{Vect} \left( [T'^n \mathcal{H}]^\perp \mid n \geq 1 \right)} \quad \left( \text{car } T'^0 \mathcal{H} = \mathcal{H} \right) \\ &= \overline{\text{Vect} \left( \text{Ker} (T'^n)^* \mid n \geq 1 \right)} \\ &= \overline{\text{Vect} \left( \text{Ker } L^n \mid n \geq 1 \right)} \\ &= \overline{\bigoplus_{k \geq 0} T^k \mathcal{E}} = [\mathcal{E}]_T. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le lemme 3.47 ci-dessus pour la dernière égalité. Ceci achève la preuve.  $\square$

**Lemme 3.49** On a  $\mathcal{H}_\infty(T)^\perp = [\mathcal{E}]_{T'}$ .

*Démonstration* : Ce résultat découle directement du résultat précédent, en utilisant la dualité de Cauchy. Rappelons que, comme  $T$  est presque isométrique,  $T'$  l'est aussi. De plus, nous avons que  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ . Le lemme précédent donne alors

$$\mathcal{H}_\infty(T)^\perp = \mathcal{H}_\infty(T'')^\perp = [\mathcal{E}']_{T'} = [\mathcal{E}]_{T'}.$$

Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 3.44.

*Démonstration* : Nous commençons par prouver le premier point. Supposons que  $T$  est pur, c'est-à-dire que  $\mathcal{H}_\infty(T) = \{0\}$ . Alors,  $[\mathcal{E}]_{T'} = \mathcal{H}_\infty(T)^\perp = \mathcal{H}$ . Comme  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$  est un sous-espace ambulant pour  $T'$ , nous en déduisons bien que  $T'$  a la propriété du sous-espace ambulant. Ainsi, d'après le théorème 3.34, nous en déduisons que  $T'$  est pur. Comme  $T'' = T$ , nous avons également l'implication réciproque. Ceci prouve le premier point. Pour le second point, il suffit de remarquer que  $T$  est complètement impur si et seulement si  $\mathcal{E} = \{0\}$  (d'après le théorème 3.34). Alors, comme  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ , nous avons bien l'équivalence souhaitée. Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous pouvons maintenant prouver le corollaire 3.45.

*Démonstration* : Comme  $T'' = T$ , il suffit de montrer que, si  $T$  admet une décomposition de Wold, alors  $T'$  en admet une aussi. Posons  $\mathcal{N} = [\mathcal{E}]_T$  et  $\mathcal{N}' = [\mathcal{E}]_{T'}$ . D'après le théorème 3.34, nous disposons des décompositions orthogonales suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \text{ sur } \begin{bmatrix} \mathcal{H}_\infty(T) \\ \mathcal{N} \end{bmatrix}$$

et

$$T' = \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \text{ sur } \begin{bmatrix} \mathcal{H}_\infty(T') \\ \mathcal{N}' \end{bmatrix}$$

où  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\infty)$  est unitaire (car  $U$  admet une décomposition de Wold),  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$  est pur,  $U'$  est le dual de Cauchy de  $U$  et  $S'$  est le dual de Cauchy de  $S$ . Comme  $U$  est unitaire,  $U' = U$  est aussi unitaire. Ceci prouve que  $T'$  admet une décomposition de Wold et achève la preuve.  $\square$

### B.2.c) — Décomposition de Wold des opérateurs concaves ou de Shimorin

Nous appliquons maintenant les résultats précédents aux cas particuliers des opérateurs concaves ou de Shimorin. Remarquons d'abord que ces deux types d'opérateurs sont liés par la dualité de Cauchy de la façon suivante.

**Proposition 3.50** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur de Shimorin. Alors,  $T'$  est concave.*

**Remarque** *A priori, la réciproque n'est pas vraie : il peut exister des opérateurs de Shimorin qui ne sont pas le dual de Cauchy d'un opérateur concave.*

Prouvons la proposition 3.50.

*Démonstration* : Montrons que  $T'$  est concave. Commençons par rappeler que  $(T')^* = (T^*T)^{-1}T^*$ . Alors, nous avons que  $(T')^{*2}T'^2 = (T')^*(T^*T)^{-1}T'$ . Rappelons par ailleurs que  $(T')^*T = T^*T' = \text{Id}$ . Comme  $T$  est un opérateur de Shimorin, nous avons

$$TT^* + (T^*T)^{-1} \leq 2\text{Id}.$$

En multipliant à gauche par  $(T')^*$  et à droite par  $T'$ , nous obtenons

$$(T')^*TT^*T' + (T')^*(T^*T)^{-1}T' \leq 2(T')^*T' \Leftrightarrow \text{Id} + (T')^{*2}T'^2 \leq 2(T')^*T'.$$

Ceci prouve que  $T'$  est concave et achève la preuve.  $\square$

La proposition 3.50 précédente nous fournit une stratégie de preuve : pour montrer que les opérateurs de Shimorin ont une décomposition de Wold, il suffit de montrer que les opérateurs concaves en ont une.

Nous commençons donc par montrer que les opérateurs concaves ont une décomposition de Wold. Ceci découle du résultat ci-dessous.

**Proposition 3.51** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur concave complètement impur. Alors,  $T$  est unitaire.*

*Démonstration* : D'après la proposition 3.38 (selon laquelle toute isométrie complètement impure est unitaire), il suffit de montrer que  $T$  est une isométrie. Comme  $T$  est complètement impur, nous avons que  $\mathcal{H} = \bigcap_{n \geq 0} T^n \mathcal{H}$ . En particulier,  $T$  est surjectif. Comme  $T$  est une isométrie,  $T$  est par ailleurs injectif. Alors, l'inverse à gauche  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  de  $T$  est aussi un inverse à droite de  $T$ . De plus,  $T$  est une isométrie si et seulement si  $L$  est une isométrie. Nous montrons donc que  $L$  est une isométrie.

Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Considérons la suite  $\alpha$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \|L^n x\|^2.$$

La suite  $\alpha$  est positive : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n \geq 0$ .

Montrons que la suite  $\alpha$  est décroissante. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, comme pour tout  $y \in \mathcal{H}$ ,  $\|Ty\| \geq \|y\|$  (prop 3.17), nous avons

$$\alpha_n = \|L^n x\|^2 = \|TL^{n+1}\|^2 \geq \|L^{n+1}x\|^2 = \alpha_{n+1}.$$

Ceci prouve que la suite  $\alpha$  est décroissante.

Nous montrons maintenant que la suite  $\alpha$  est concave. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $T$  est un opérateur concave, on a

$$\begin{aligned} \|L^{n+2}x\|^2 + \|T^2L^{n+2}x\|^2 - 2\|TL^{n+2}x\|^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \|L^{n+2}x\|^2 + \|L^n x\|^2 - 2\|L^{n+1}x\|^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_{n+2} + \alpha_n - 2\alpha_{n+1} \leq 0. \end{aligned}$$

Ceci prouve que la suite  $\alpha$  est concave.

Résumons : la suite  $\alpha$  est positive, décroissante et concave. Elle est donc nécessairement constante (voir la proposition A.6 détaillée en annexe). En particulier,  $\|Lx\|^2 = \|x\|^2$ . Ceci valant pour tout  $x$ , nous avons bien montré le résultat souhaité.  $\square$

Le résultat suivant découle naturellement de la proposition ci-dessus.

**Théorème 3.52** *Si  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est concave, alors  $T$  admet une décomposition de Wold.*

*Démonstration* : D'après le théorème 3.34, il suffit de montrer que la partie complètement impure de  $T$  est unitaire. C'est chose faite, grâce à la proposition 3.51 ci-dessus.  $\square$

Grâce à la dualité de Cauchy, nous pouvons obtenir un résultat de décomposition pour les opérateurs de Shimorin.

**Théorème 3.53** *Si  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est un opérateur de Shimorin, alors  $T$  admet une décomposition de Wold.*

*Démonstration* : Comme  $T$  est un opérateur de Shimorin, son dual de Cauchy  $T'$  est un opérateur concave (d'après la proposition 3.50). Alors, d'après le théorème ci-dessus, l'opérateur  $T'$  admet une décomposition de Wold. Ceci implique en particulier que  $T$  admet une décomposition de Wold (d'après le corollaire 3.45) et conclut la preuve.  $\square$

### B.3 — Modélisation des opérateurs concaves ou de Shimorin

Nous savons (grâce aux résultats de la partie précédente) que les opérateurs concaves et de Shimorin admettent une décomposition de Wold. L'objectif de cette sous-partie est de montrer que la partie pure de tels opérateurs peut être vue comme un opérateur de multiplication sur des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes. Ces résultats peuvent être vus comme généralisant ceux sur les 2-isométries établis par Richter (dans [52]) ou Olofsson (dans [48]).

Nous commençons par énoncer un résultat de Shimorin (qui, bien que non explicitement formulé, est démontré dans [63]) portant sur la modélisation des opérateurs presque isométriques purs. Dans un second temps, nous appliquons ce résultat aux cas particuliers des opérateurs concaves ou de Shimorin.

#### B.3.a) — Modélisation des opérateurs presque isométriques purs

Commençons par un résultat de Shimorin : selon le théorème suivant, tout opérateur presque isométrique pur est un opérateur de multiplication sur un espace de Hilbert de fonctions holomorphes à noyaux reproduisants. Rappelons que de tels espaces ont été présentés antérieurement (voir par exemple la définition 1.75).

**Théorème 3.54 (Shimorin)** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  presque isométrique. On suppose que  $T$  est pur. Soit  $\mathcal{E} = \mathcal{H} \ominus T\mathcal{H} = (\text{Im } T)^\perp$ . Soit  $r = r(T') \in \mathbb{R}^{+*}$  le rayon spectral de  $T'$ . Alors il existe un espace de Hilbert  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$  de fonctions holomorphes à noyaux reproduisants (au sens de la définition 1.75) et un opérateur unitaire  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  tels que l'opérateur*

$$\Delta : \begin{cases} \mathfrak{H} & \rightarrow \mathfrak{H} \\ f & \mapsto (z \mapsto z f(z)) \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$$

est unitairement équivalent à  $T$  :

$$T = S^{-1} \Delta S.$$

De plus, les noyaux reproduisants vérifient

$$k(0, \bullet) = (z \mapsto \text{Id}_{\mathcal{E}}).$$

**Remarque** La condition supplémentaire portant sur les noyaux reproduisants signifie que l'on peut voir  $\mathcal{E}$  comme l'ensemble des fonctions constantes de  $\mathfrak{H}$ .

Attaquons maintenant la preuve du théorème 3.54.

*Démonstration* : Nous procédons en plusieurs étapes : d'abord, nous construisons l'application  $S$ . Nous définissons ensuite la structure hilbertienne sur  $\mathfrak{H}$  et montrons qu'elle vérifie les propriétés que nous cherchons.

**Première étape : définition de  $S$**  Rappelons que nous notons  $T'$  le dual de Cauchy de  $T$ ,  $L = (T')^*$  l'inverse à gauche de  $T$  et  $P = \text{Id} - TL$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{E}$ . Nous définissons une application linéaire en posant

$$S : \begin{cases} \mathcal{H} & \longrightarrow \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E}) \\ x & \longmapsto \left( z \mapsto \sum_{k \geq 0} (PL^k x) z^k \right) \end{cases} .$$

Notons que  $S$  est bien défini, car  $r$  est le rayon spectral de l'opérateur  $L$  (un argument similaire a été utilisé dans la preuve du théorème 3.9).

**Deuxième étape : injectivité de  $S$**  Nous montrons que  $S$  est injectif. Soit  $x \in \text{Ker } S$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $PL^k x = 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrons que  $x \in \text{Im}(T^n)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} x &= x - T^n L^n x + T^n L^n x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (T^k L^k x - T^{k+1} L^{k+1} x) + T^n L^n x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} T^k (\text{Id} - TL) L^k x + T^n L^n x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} T^k \underbrace{PL^k x}_{=0} + T^n L^n x \\ &= T^n L^n x \in \text{Im}(T^n). \end{aligned}$$

Ainsi,  $x \in \text{Im}(T^n)$ . Ceci valant pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous avons bien que  $x \in \bigcap_{n \geq 0} T^n \mathcal{H} = \{0\}$  (puisque  $T$  est pur). Ainsi,  $x = 0$ . On a donc bien montré que  $S$  est injectif.

**Troisième étape : définition de la structure hilbertienne** Notons  $\mathfrak{H} = \text{Im}(S) \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$ . Comme  $S$  est injectif, nous avons que  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Nous définissons alors un produit hilbertien sur  $\mathfrak{H}$  de la façon suivante :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}} : \begin{cases} \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) & \longmapsto \langle f, g \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle S^{-1} f, S^{-1} g \rangle_{\mathcal{H}} \end{cases} .$$

Ainsi,  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  est un isomorphisme unitaire d'espaces de Hilbert. Nous montrons maintenant que  $(\mathfrak{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}})$  est un espace de Hilbert à noyaux reproduisants au sens de la définition 1.75. Commençons par calculer l'expression des noyaux reproduisants. Soient  $\lambda \in D(0; r)$ ,  $f \in \mathfrak{H}$  et  $e \in \mathcal{E}$ . Alors,

$$\begin{aligned}
\langle f(\lambda), e \rangle_{\mathcal{E}} &= \langle (SS^{-1}f)(\lambda), e \rangle_{\mathcal{E}} \\
&= \left\langle \sum_{n \geq 0} (PL^n S^{-1}(f)) \lambda^n, e \right\rangle_{\mathcal{E}} \\
&= \left\langle \sum_{n \geq 0} (\lambda L)^n S^{-1}(f), e \right\rangle_{\mathcal{E}} \text{ car } P \text{ est la projection orthogonale sur } \mathcal{E} \\
&= \left\langle (\text{Id} - \lambda L)^{-1} S^{-1}(f), e \right\rangle_{\mathcal{E}} \text{ car } \rho(\lambda L) < 1 \\
&= \left\langle S^{-1}(f), (\text{Id} - \lambda L)^{-1*} e \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \left\langle S^{-1}(f), (\text{Id} - \bar{\lambda} L^*)^{-1} e \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \left\langle f, S (\text{Id} - \bar{\lambda} L^*)^{-1} e \right\rangle_{\mathfrak{H}} \text{ car } S \text{ est unitaire.}
\end{aligned}$$

Nous nous attelons maintenant à calculer le membre de droite dans le produit hermitien ci-dessus. Pour cela, considérons  $z \in D(0; r)$ . Rappelons que  $S (\text{Id} - \bar{\lambda} L^*)^{-1} e \in \mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$ . Alors, on peut calculer le vecteur de  $\mathcal{E}$  suivant :

$$\begin{aligned}
\left( S (\text{Id} - \bar{\lambda} L^*)^{-1} e \right) (z) &= \sum_{n \geq 0} PL^n \left[ (\text{Id} - \bar{\lambda} L^*)^{-1} e \right] z^n \\
&= P \left( \sum_{n \geq 0} (zL)^n \left[ (\text{Id} - \bar{\lambda} L^*)^{-1} e \right] \right) \\
&= P (\text{Id} - zL)^{-1} (\text{Id} - \bar{\lambda} L^*)^{-1} e.
\end{aligned}$$

On définit alors une application

$$k : \begin{cases} D(0; r) \times D(0; r) & \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}) \\ (\omega, z) & \longmapsto k(\omega, z) = P (\text{Id} - zL)^{-1} (\text{Id} - \bar{\lambda} L^*)^{-1} \cdot \end{cases}$$

Nous montrons maintenant que  $k$  est bien l'application décrivant les noyaux reproduisants sur  $\mathfrak{H}$ .

(i) Soient  $\omega \in D(0; r)$  et  $e \in \mathcal{E}$ . Soit  $\varphi : D(0; r) \rightarrow \mathcal{E}$  définie pour tout  $z \in D(0; r)$  par

$$\varphi(z) = k(\omega, z) \cdot e.$$

Les calculs précédents montrent que  $\varphi = S (\text{Id} - \bar{\lambda} L^*)^{-1} e \in \mathfrak{H}$ .

(ii) Soient  $\omega \in D(0; r)$ ,  $f \in \mathfrak{H}$  et  $e \in \mathcal{E}$ . Alors, les calculs précédents et la définition de  $k$  nous montrent que

$$\langle f, k(\omega, \bullet) \cdot e \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle f(\omega), e \rangle_{\mathcal{E}}.$$

Ceci prouve bien que  $\mathfrak{H}$  est un espace de Hilbert de fonctions holomorphes à noyaux reproduisants, et que  $k$  est l'application décrivant lesdits noyaux.

**Quatrième étape : conjugaison unitaire entre  $T$  et  $\Delta$**  Nous montrons dans cette dernière étape que les opérateurs  $T$  et  $\Delta$  sont unitairement équivalents *via* l'opérateur  $S$ . Comme nous savons que  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  est unitaire, il suffit de montrer que  $ST = \Delta S$ . Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Alors,  $STx \in \mathfrak{H}$ . Soit  $z \in D(0; r)$ . Alors,

$$\begin{aligned} (STx)(z) &= \sum_{n \geq 0} (PL^n Tx) z^n \\ &= \sum_{n \geq 1} (PL^n Tx) z^n \text{ car } Tx \in \text{Im}(T) = \mathcal{E}^\perp \text{ et } P \text{ est la projection orthogonale sur } \mathcal{E} \\ &= z \sum_{n \geq 1} PL^{n-1} LTx z^{n-1} \\ &= z \sum_{n \geq 1} PL^{n-1} x z^{n-1} \\ &= z (Sx)(z). \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout  $z \in D(0, r)$ , nous avons bien  $STx = \Delta Sx$ . Ceci valant pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , nous avons bien montré la relation recherchée. Ceci achève la preuve du théorème.  $\square$

Donnons maintenant quelques exemples pour illustrer le théorème de Shimorin 3.54.

**Premier exemple** Considérons l'opérateur

$$T : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) & \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x = (x_0, x_1, x_2, \dots) & \mapsto (0, x_0, x_1, \dots) \end{cases} .$$

L'opérateur  $T$  est une isométrie, donc en particulier une presque isométrie. Nous pouvons donc lui appliquer le théorème de Shimorin (théorème 3.54). Dans ce cas, nous obtenons  $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ ,  $r = 1$  et  $\mathfrak{H} = H^2(\mathbb{D})$ . De plus, si on note  $f_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  — où le 1 est en  $n$ -ième position —, alors l'opérateur unitaire  $S : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow H^2(\mathbb{D})$  est décrit par  $S(f_n) = e_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Second exemple** Considérons les opérateurs de décalage  $G$  vers la gauche et  $D$  vers la droite tels que

$$D = G^* : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \longmapsto f(\bullet - 1) \end{cases} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+)).$$

L'opérateur  $D$  est une isométrie, donc une presque isométrie. On peut y appliquer le théorème de Shimorin. Nous avons alors  $\text{Im}(D) = L^2([1; +\infty[)$  et donc  $\mathcal{E} = L^2([0; 1])$ . L'espace  $\mathfrak{H}$  peut alors être décrit ainsi :

$$\mathfrak{H} = \left\{ f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \text{Hol}(\mathbb{D}, L^2([0; 1])) \text{ où } (a_n)_n \in (L^2([0; 1]))^{\mathbb{N}} \text{ avec } \sum_{n \geq 0} \|a_n\|_{L^2([0; 1])}^2 < +\infty \right\} .$$

Notons que  $\mathfrak{H} = H^2(\mathbb{D}; \mathcal{E})$  est l'espace de Hardy généralisé que nous avons déjà étudié dans ce manuscrit (juste après la définition 1.75 des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles, qui sont des espaces à noyaux reproduisants).

**B.3.b) — Bilan**

Nous pouvons maintenant combiner plusieurs des résultats précédents pour obtenir un résultat général de modélisation des opérateurs concaves ou de Shimorin.

**Théorème 3.55** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  un opérateur concave ou de Shimorin. Soit  $\mathcal{E} = \mathcal{H} \ominus T\mathcal{H}$ . Il existe un opérateur unitaire  $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\infty(T))$  et un opérateur  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\infty(T)^\perp)$  tels que l'on a la décomposition orthogonale suivante :*

$$T = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \text{ sur } \begin{bmatrix} \mathcal{H}_\infty(T) \\ \mathcal{H}_\infty(T)^\perp \end{bmatrix}.$$

*Par ailleurs, il existe un espace de Hilbert à noyaux reproduisants  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0, r); \mathcal{E})$  tel que  $S$  est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication*

$$\Delta : \begin{cases} \mathfrak{H} & \longrightarrow \mathfrak{H} \\ f & \longmapsto (z \mapsto z \times f(z)) \end{cases}.$$

*Démonstration :* Comme  $T$  est concave ou de Shimorin, il admet une décomposition de Wold (ce fait est l'objet des théorèmes 3.52 et 3.53). Alors,  $S$  est un opérateur concave pur et est donc unitairement équivalent à  $\Delta$  d'après le théorème de Shimorin (théorème 3.54).  $\square$

**B.4 — Modélisation des contractions de classe  $C_{0\bullet}$ .**

Nous étudions dans cette sous-partie une nouvelle famille d'opérateurs : il s'agit des contractions de classe  $C_{0\bullet}$ . Nous montrons que ces opérateurs sont unitairement équivalents à la restriction à un sous-espace invariant d'un opérateur de décalage vers la gauche adéquat. Commençons par décrire les contractions de classe  $C_{0\bullet}$ .

**Définition 3.56** *Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On dit que  $T$  est une contraction de classe  $C_{0\bullet}$  si  $T$  est une contraction telle que, pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , on a  $\|T^n x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .*

Les propositions suivantes donnent des exemples de contractions de classe  $C_{0\bullet}$ .

**Proposition 3.57** *Soit  $\beta = (\beta_n) \in \mathbb{R}^{+*}$  une suite et  $H^2(\beta)$  l'espace de Hardy pondéré qui y est associé. On suppose que  $\beta$  est décroissante et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0$ . Alors, l'opérateur de multiplication*

$$D : \begin{cases} H^2(\beta) & \longrightarrow H^2(\beta) \\ f & \longmapsto z \times f \end{cases}$$

*est une contraction de classe  $C_{0\bullet}$ .*

*Démonstration* : Nous commençons par vérifier que  $D$  est bien une contraction. Ceci vient du fait que la suite  $\beta$  est décroissante. Soit  $x = \sum_{n \geq 0} x_n e_n \in H^2(\beta)$ . Alors, comme la famille  $(e_n)_n$  est orthogonale,

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \left\| \sum_{n \geq 0} x_n e_{n+1} \right\|^2 \\ &= \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 \underbrace{\|e_{n+1}\|^2}_{\leq \|e_n\|^2} \\ &\leq \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 \|e_n\|^2 = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi,  $D$  est bien une contraction. Nous montrons maintenant que  $D$  est de classe  $C_{0\bullet}$ . Soient  $x \in \mathcal{H}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$\|T^n x\|^2 = \left\| \sum_{k \geq 0} x_k e_{k+n} \right\|^2 = \sum_{k \geq 0} |x_k|^2 \|e_{k+n}\|^2.$$

Comme pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(|x_k|^2 \|e_{k+n}\|^2)_n$  est décroissante, le théorème de convergence dominée nous dit que la suite  $(\|T^n x\|^2)_n$  converge et que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n x\|^2 = \sum_{k \geq 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_k|^2 \beta_n = 0.$$

Ceci achève la preuve. □

En particulier, mentionnons les exemples suivants.

**Corollaire 3.58** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $D \in \mathcal{L}(H^2(\alpha))$  l'opérateur de multiplication par  $e_1$ . Alors,  $D$  est une contraction de classe  $C_{0\bullet}$  si et seulement si  $\alpha > 1$ .*

Nous énonçons maintenant un résultat de modélisation des contractions de classe  $C_{0\bullet}$ .

**Théorème 3.59** *Soit  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On suppose que  $U^*$  est une isométrie telle que  $(\text{Im } U^*)^\perp = \text{Ker}(U)$  est de dimension infinie.*

*Alors,  $U$  modélise unitairement (avec  $\lambda = 1$ ) toutes les contractions complètement non-unitaires : quel que soit l'opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  de classe  $C_{0\bullet}$ , il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $U$  et un isomorphisme unitaire  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que*

$$T = S U|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

**Remarque** Ce résultat peut être vu comme une généralisation du corollaire du théorème de Caradus que nous avons vu précédemment (théorème 3.9). En effet, tout opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tel que  $r(T) < 1$  est une contraction complètement non-unitaire.

**Exemple** Considérons encore l'opérateur de translation vers la gauche

$$G : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \longmapsto f(\bullet + 1) \end{cases} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+)).$$

Nous avons vu précédemment que  $G$  vérifie les hypothèses du théorème précédent et modélise ainsi unitairement toutes les contractions de classe  $C_{0\bullet}$ .

Nous prouvons le théorème 3.59. Pour ce faire, nous suivons la preuve présentée dans [21].

*Démonstration* : Comme  $U^*$  est une isométrie,  $U^*$  admet une décomposition de Wold (voir le théorème 3.39). Quitte à remplacer  $U^*$  par sa partie pure, nous pouvons supposer que  $U$  est une isométrie pure. Alors, l'opérateur  $U^*$  a la propriété du sous-espace ambulant : en notant  $\mathcal{K} = \text{Ker}(U) = \mathcal{H} \ominus U^*\mathcal{H}$ , nous avons

$$\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{n \geq 0} U^{*n} \mathcal{K}}.$$

Par ailleurs, comme  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{H}$  sont des espaces de Hilbert séparables de dimension infinie, il existe un isomorphisme unitaire  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ .

Enfin, comme  $T$  est une contraction, l'opérateur  $\text{Id} - T^*T$  est un opérateur auto-adjoint défini positif. En particulier, sa racine carrée  $R = (\text{Id} - T^*T)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est bien définie.

Nous considérons maintenant l'opérateur (*a priori* non défini partout)

$$W : \begin{cases} \mathcal{H} & \longrightarrow \mathcal{H} \\ x & \longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n U^{*k} J R T^k x \end{cases} .$$

Commençons par montrer que  $W$  est bien défini. Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Nous allons montrer que la suite  $\left( \sum_{k=0}^n U^{*k} J R T^k x \right)_n$  est de Cauchy. Soient  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que  $m \geq n$ .

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=0}^m U^{*k} JRT^k x - \sum_{k=0}^n U^{*k} JRT^k x \right\| &= \sqrt{\left\| \sum_{k=n+1}^m U^{*k} \underbrace{JRT^k x}_{\in \mathcal{K}} \right\|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=n+1}^m \|U^{*k} JRT^k x\|^2} \text{ (d'après le théorème de Pythagore)} \\
&= \sqrt{\sum_{k=n+1}^m \|RT^k x\|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=n+1}^m \langle T^{*k} R^* RT^k x, x \rangle} \\
&= \sqrt{\sum_{k=n+1}^m \langle T^{*k} (\text{Id} - T^* T) T^k x, x \rangle} \\
&= \sqrt{\sum_{k=n+1}^m \langle T^{*k} T^k x, x \rangle - \langle T^{*(k+1)} T^{k-1} x, x \rangle} \\
&= \sqrt{\|T^{n+1} x\|^2 - \|T^{m+1} x\|^2} \\
&\leq \|T^{n+1} x\|.
\end{aligned}$$

Or, comme  $T$  est complètement non-unitaire, nous avons  $\|T^{n+1} x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (et ce indépendamment de  $m$ ). Ceci montre bien que la suite étudiée est de Cauchy. Elle est donc convergente et  $W$  est bien défini sur  $\mathcal{H}$  tout entier.

Nous montrons maintenant que  $W$  est une isométrie. Soit  $x \in \mathcal{H}$ . En reprenant le calcul qui précède, nous avons que

$$\begin{aligned}
\|Wx\|^2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=0}^n U^{*k} JRT^k x \right\|^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x\|^2 - \|T^{n+1} x\|^2 \\
&= \|x\|^2
\end{aligned}$$

Ainsi,  $W$  est une isométrie.

Nous montrons maintenant que  $UW = WT$ . Rappelons que  $UU^* = \text{Id}$  (puisque  $U^*$  est une isométrie) et que  $U^*J = 0$  (puisque  $\text{Im}(J) = \text{Ker } U$ ). Soit  $x \in \mathcal{H}$ .

$$\begin{aligned}
UWx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n UU^{*k} JRT^k x \\
&= UJRx + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n UU^{*k} JRT^k x \\
&= 0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n U^{*(k-1)} JRT^{k-1}(Tx) \\
&= WTx.
\end{aligned}$$

Posons alors  $\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}(W)$ . Comme  $W$  est une isométrie, le sous-espace  $\mathcal{M}$  est bien un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$ , et  $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}$  est unitaire. Notons alors  $S = W^* = W^{-1} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  son inverse. Alors,  $S$  est un opérateur unitaire tel que

$$U|_{\mathcal{M}} S^{-1} = S^{-1}T.$$

Ceci achève la preuve. □

Deuxième partie

Applications aux semi-groupes  
d'opérateurs



## Chapitre 4

# Universalité des semi-groupes d'opérateurs sur un espace de Hilbert

LA question qui sous-tend ce chapitre est celle de l'universalité des semi-groupes d'opérateurs sur un espace de Hilbert : nous y étudions comment élargir au cas des semi-groupes la théorie de l'universalité que nous avons déjà mentionnée pour un opérateur.

La première partie de ce chapitre est consacrée à une description rapide de la théorie des semi-groupes fortement continus d'opérateurs sur un espace de Banach. Nous y décrivons en particulier les notions de générateur et de co-générateur et étudions les liens entre ces opérateurs et le semi-groupe d'opérateur qu'ils caractérisent. Dans un second temps, nous nous consacrons à l'étude proprement dite de l'universalité des opérateurs de composition. Nous montrons en particulier comment construire des semi-groupes universels pour les semi-groupes uniformément continus, les semi-groupes quasi-contractifs ou les semi-groupes concaves.

La plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont extraits de l'article [20] (accepté pour publication).

## A) Semi-groupes d'opérateurs

CETTE partie est consacrée à une description générale des semi-groupes d'opérateurs sur un espace de Banach. Cette présentation est largement inspirée de celles que l'on peut trouver dans [38], [32], [64] (surtout pour l'étude du générateur et du type) ou encore [65] (surtout pour la notion de co-générateur et l'étude des semi-groupes de contractions).

Dans un premier temps, nous définissons les notions de semi-groupe d'opérateurs (algébrique, fortement continu ou uniformément continu). Nous montrons en particulier des estimations de norme qui permettent de définir les semi-groupes quasi-contractifs. Dans un deuxième temps,

nous présentons et étudions le générateur d'un semi-groupe fortement continu. Nous nous penchons ensuite sur le co-générateur d'un semi-groupe (lorsqu'il est défini) et montrons dans quelle mesure nous pouvons lire sur le co-générateur des propriétés sur le semi-groupe qu'il détermine. Enfin, nous détaillons plusieurs exemples de semi-groupes liés aux opérateurs de décalage.

Dans toute cette partie, sauf mention explicite du contraire,  $\mathcal{X}$  désignera un espace de Banach sur  $\mathbb{C}$ .

## A.1 — Définitions et généralités

Commençons par définir les semi-groupes algébriques d'opérateurs

**Définition 4.1** *On appelle semi-groupe algébrique (d'opérateurs) sur  $\mathcal{X}$  tout morphisme de monoïdes  $T : (\mathbb{R}^+, +) \rightarrow (\mathcal{L}(\mathcal{X}), \circ)$  ou, plus pragmatiquement, toute famille d'opérateurs  $(T_t)_{t \geq 0} \in (\mathcal{L}(\mathcal{X}))^{\mathbb{R}^+}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- (a) on a  $T_0 = \text{Id}_{\mathcal{X}}$  ;
- (b) pour tous  $t, s \in \mathbb{R}^+$ , on a  $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ .

Il est possible de rajouter des conditions de continuité dans la définition précédente.

**Définition 4.2** *Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs est un semi-groupe algébrique d'opérateurs qui est continu pour la topologie forte d'opérateurs sur  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ , c'est-à-dire une famille d'opérateurs  $(T_t)_{t \geq 0} \in (\mathcal{L}(\mathcal{X}))^{\mathbb{R}^+}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- (a) on a  $T_0 = \text{Id}_{\mathcal{X}}$  ;
- (b) pour tous  $t, s \in \mathbb{R}^+$ , on a  $T_{t+s} = T_t \circ T_s$  ;
- (c) pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , l'application  $\varphi_x : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathcal{X} \\ t & \mapsto T_t x \end{cases}$  est continue.

**Remarque** Les semi-groupes fortement continus d'opérateurs constituent le cadre naturel de notre étude. Dans la suite de cette thèse, sauf mention explicite du contraire, nous utiliserons les expressions « semi-groupe fortement continu », « semi-groupe continu », ou « semi-groupe » pour désigner un semi-groupe fortement continu d'opérateurs lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Nous mentionnons maintenant un cas particulier de semi-groupes fortement continus : il s'agit des semi-groupes uniformément continus.

**Définition 4.3** *Un semi-groupe uniformément continu (d'opérateurs) est un semi-groupe algébrique d'opérateurs qui est continu pour la topologie de la norme sur  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ , c'est-à-dire une famille d'opérateurs  $(T_t)_{t \geq 0} \in (\mathcal{L}(\mathcal{X}))^{\mathbb{R}^+}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- (a) on a  $T_0 = \text{Id}_{\mathcal{X}}$  ;
- (b) pour tous  $t, s \in \mathbb{R}^+$ , on a  $T_{t+s} = T_t \circ T_s$  ;
- (c) pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , l'application  $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}) \\ t & \mapsto T_t \end{cases}$  est continue.

**Remarque** Tout semi-groupe uniformément continu d'opérateurs est nécessairement un semi-groupe fortement continu d'opérateurs.

**Exemple** Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . Rappelons que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , nous pouvons définir

$$e^{tA} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

La famille  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe uniformément continu (d'après un résultat de calcul fonctionnel holomorphe, détaillé par exemple dans l'annexe B).

Nous verrons ultérieurement (par exemple à la proposition 4.26) des exemples de semi-groupes fortement continus qui ne sont pas uniformément continus.

Énonçons un lemme technique qui nous sera utile pour l'étude des semi-groupes.

**Lemme 4.4** Soient  $\mathcal{X}$  un espace de Banach et  $K \subset \mathbb{R}^+$  un ensemble compact. Soit  $F : K \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . Les assertions suivantes s'équivalent :

- (i) la fonction  $F$  est continue pour la topologie forte d'opérateurs : pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , la fonction  $f_x : \begin{cases} K & \rightarrow \mathcal{X} \\ t & \mapsto F(t)x \end{cases}$  est continue ;
- (ii) la fonction  $F$  est bornée et il existe un domaine  $D \subset \mathcal{X}$  dense dans  $\mathcal{X}$  tel que, pour tout  $x \in D$ , la fonction  $f_x : t \mapsto F(t)x$  est continue ;
- (iii) la fonction  $F$  est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $\mathcal{X}$  : ceci veut dire que pour tout  $C \subset \mathcal{X}$  compact, la fonction  $\Psi_C : \begin{cases} K & \rightarrow (\mathcal{C}(C; \mathcal{X}), \|\cdot\|_\infty) \\ t & \mapsto (x \mapsto F(t)x) \end{cases}$  est continue, ou encore que pour tout  $C \subset \mathcal{X}$  compact, la fonction  $\Phi_C : \begin{cases} K \times C & \rightarrow \mathcal{X} \\ (t, x) & \mapsto F(t)x \end{cases}$  est uniformément continue.

*Démonstration* : Nous montrons la chaîne d'implications  $(iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ .

$(ii) \Rightarrow (i)$  : L'implication est directe, en considérant  $C = \{x\}$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ .

$(i) \Rightarrow (ii)$  : Soit  $x \in \mathcal{X}$ . Alors, comme la fonction  $f_x$  est continue et comme  $K$  est compact,

$$\sup_{t \in K} \|F(t)x\| < +\infty.$$

Ceci valant pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , le principe de la borne uniforme (voir par exemple [57], théorème 5.8 p. 127) nous dit qu'il existe  $M > 0$  tel que

$$\sup_{t \in K} \|F(t)\| < M.$$

En particulier,  $F$  est bornée. En prenant  $D = \mathcal{X}$ , nous obtenons finalement le résultat souhaité.

$(ii) \Rightarrow (iii)$  : Soit  $M > 0$  tel que, pour tout  $t \in K$ ,  $\|F(t)\| \leq M$ . Soit  $C \subset \mathcal{X}$  compact. Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $D$  est dense dans  $\mathcal{X}$ ,

$$C \subset \bigcup_{x \in D \cap C} B(x, \varepsilon).$$

Comme  $C$  est compact, il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_N \in D \cap C$  tels que

$$C \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon).$$

Soient  $t, t' \in K$ . On a

$$\|\Psi_C(t) - \Psi_C(t')\|_{\infty, C} = \sup_{x \in C} \|(F(t) - F(t')) x\|.$$

Soit  $x \in C$ . Il existe  $i_0 \in \llbracket 1; N \rrbracket$  tel que  $x \in B(x_{i_0}, \varepsilon)$ . Alors,

$$\begin{aligned} \|F(t)x - F(t')x\| &= \|(F(t) - F(t'))(x - x_{i_0} + x_{i_0})\| \\ &\leq \|F(t) - F(t')\| \|x - x_{i_0}\| + \|(F(t) - F(t'))(x_{i_0})\| \\ &\leq 2M\varepsilon + \|(F(t) - F(t'))x_{i_0}\|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|\Psi_C(t) - \Psi_C(t')\|_{\infty, C} \leq 2M\varepsilon + \sup_{i \in \llbracket 1; N \rrbracket} \|(F(t) - F(t'))x_i\|.$$

Soit  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ . La fonction  $\varphi_{x_i} : t \mapsto F(t)x_i$  est continue car  $x \in D$ . Comme  $K$  est compact, elle est uniformément continue d'après le théorème de Heine (voir par exemple [59], chap. 4, théorème 4.19). Il existe donc  $\eta_i > 0$  tel que,

$$\forall t, t' \in K, (|t - t'| < \eta_i) \Rightarrow (\|(F(t) - F(t'))x_i\| < \varepsilon).$$

Soit  $\eta = \min \{\eta_i \mid i \in \llbracket 1; N \rrbracket\} > 0$ . Soient  $t, t' \in K$  tels que  $|t - t'| < \eta$ . Alors,

$$\|\Psi_C(t) - \Psi_C(t')\|_{\infty, C} \leq 2M\varepsilon + \varepsilon.$$

Ceci prouve que  $\Psi_C$  est uniformément continue et achève la preuve du lemme.  $\square$

Nous énonçons maintenant un critère qui permet de déterminer si un semi-groupe algébrique est un semi-groupe fortement continu.

**Lemme 4.5** *Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe algébrique d'opérateurs. Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) *la famille  $(T_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu ;*
- (ii) *pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,  $T_t x \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} x$  ;*
- (iii) *les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
  - a) *il existe  $\delta > 0$  et  $M > 0$  tels que  $\sup_{0 \leq t \leq \delta} \|T_t\| \leq M$  ;*
  - b) *il existe  $D \subset \mathcal{X}$  dense tel que pour tout  $x \in D$ , on a  $T_t x \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} x$ .*

*Démonstration :* Nous montrons la chaîne d'implications (i)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (i).

(i)  $\Rightarrow$  (iii) : pour  $D = \mathcal{X}$ , le point b) est vérifié. Le point a) est une conséquence directe du lemme précédent (lemme 4.4).

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) : supposons que  $(T_t)_{t \geq 0}$  vérifie le point (iii). Soit  $x \in \mathcal{X}$ . Si  $x \in D$ , le résultat est direct. Sinon, soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $y \in D$  tel que  $\|x - y\| < \varepsilon$ . Soit  $t \in [0; \delta]$ .

$$\|T_t x - x\| \leq \|T_t x - T_t y\| + \|T_t y - y\| + \|y - x\|.$$

Comme  $y \in D$ , il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $t \in [0; \eta]$ ,  $\|T_t y - y\| < \varepsilon$ . Soit  $t \in [0; \eta]$ . Alors,

$$\begin{aligned} \|T_t x - x\| &\leq \varepsilon + (1 + \|T_t\|) \|y - x\| \\ &\leq \varepsilon + (1 + M) \varepsilon \end{aligned}$$

Ceci montre que  $T_t x \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} x$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Supposons que  $(T_t)_{t \geq 0}$  vérifie la condition (ii). Soit  $x \in \mathcal{X}$ . Nous voulons montrer que, pour tout  $s \in \mathbb{R}^+$ , la fonction  $\varphi_x : t \mapsto T_t x$  est continue en  $s$ . Pour  $s = 0$ , c'est le cas d'après la condition (ii). Supposons que  $s \in \mathbb{R}^{+*}$ . Nous allons montrer que  $T_{s+t} x \rightarrow T_s x$  pour  $t \rightarrow 0^+$  et  $t \rightarrow 0^-$ .

Pour  $t \rightarrow 0^+$ , c'est une conséquence directe de la condition (ii) et du fait que  $T_s \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ .

Supposons maintenant que  $t \rightarrow 0^-$ . Nous pouvons supposer que  $\tau = -t \in [0; s]$ . Alors,

$$\|T_{s+\tau} x - T_s x\| \leq \|T_{s+\tau}\| \times \|x - T_\tau x\|.$$

Or, d'après le lemme 4.4, il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $\tilde{t} \in [0; s]$ ,  $\|T_{\tilde{t}}\| \leq M$ . Par ailleurs, d'après le point (ii),  $T_\tau x \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} x$ . Ceci montre que  $T_{s+t} x \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} T_s x$  et achève la preuve.  $\square$

Nous déduisons du lemme précédent un résultat important sur la vitesse de croissance des semi-groupes.

**Corollaire 4.6** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu. Alors, il existe  $M > 0$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall t \geq 0, \|T_t\| \leq M e^{\omega t}. \quad (\heartsuit)$$

*Démonstration* : D'après le lemme 4.4, il existe  $M \geq 1$  tel que  $\sup_{0 \leq \tau \leq 1} \|T_\tau\| \leq M$ . Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ . Alors, en notant  $[t]$  la partie entière de  $t$ , nous avons

$$\|T_t\| \leq \|T_{[t]}\| \|T_{t-[t]}\| \leq M \|T_1\|^{[t]}.$$

Or,

$$\|T_1\|^{[t]} \leq M^{[t] \ln(M)} = e^{[t] \ln(M)} \leq e^{t \ln(M)}.$$

Finalement, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , nous avons

$$\|T_t\| \leq M e^{t \ln(M)}.$$

Ceci achève la preuve.  $\square$

Les constantes telles que l'inégalité  $(\heartsuit)$  jouent un rôle clef dans l'étude des semi-groupes fortement continus. Commençons par traiter le cas où l'on peut prendre  $M = 1$ .

**Définition 4.7** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur  $\mathcal{X}$ .

On dit que  $(T_t)_{t \geq 0}$  est contractif si l'inégalité (♣) échoit pour  $M = 1$  et  $\omega = 0$ , c'est-à-dire si pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , l'opérateur  $T_t$  est une contraction.

On dit que  $(T_t)_{t \geq 0}$  est quasi-contractif si l'inégalité (♣) échoit pour  $M = 1$ , c'est-à-dire s'il existe  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\|T_t\| \leq e^{\omega t}$ .

**Remarque** On peut ramener un semi-groupe fortement continu quasi-contractif à un semi-groupe contractif par changement d'échelle. Plus précisément, soient  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu quasi-contractif et  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\|T_t\| \leq e^{\omega t}$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}^+$ , définissons  $\tilde{T}_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\omega t} T_t \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . Remarquons que pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , l'opérateur  $\tilde{T}_t$  est une contraction. Par ailleurs, comme  $(T_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu, nous avons que  $(\tilde{T}_t)_{t \geq 0}$  est également un semi-groupe fortement continu. Ainsi, le semi-groupe  $(\tilde{T}_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe contractif défini par changement d'échelle appliqué au semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$ .

Nous étudions maintenant le choix optimal de constante  $\omega$  vérifiant l'inégalité (♣).

**Définition 4.8** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur  $\mathcal{X}$ . Le type du semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  est l'infimum  $\omega_0$  des valeurs  $\omega$  qui vérifient l'inégalité (♣), c'est-à-dire

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \omega \in \mathbb{R} \mid \exists M > 0, \forall t \geq 0, \|T_t\| \leq M e^{\omega t} \}.$$

L'objet du résultat suivant est d'établir un lien entre les propriétés spectrales d'un semi-groupe et son type. Rappelons que pour tout opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , le rayon spectral de  $T$  est la quantité

$$r(T) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A) \}.$$

**Proposition 4.9** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de type  $\omega_0$ . Alors, pour tout  $t_0 > 0$ ,

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \ln (\|T_t\|) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln (\|T_t\|) = \frac{1}{t_0} \ln (r(T_{t_0})).$$

Avant de prouver ce résultat, nous abordons un lemme technique.

**Lemme 4.10** Soit  $\chi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée sur tout compact et sous-additive. Alors, la limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\chi(t)}{t}$  existe et

$$\inf_{t > 0} \frac{\chi(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\chi(t)}{t}.$$

*Démonstration* : Soit  $t_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ . Considérons les fonctions

$$k : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{N} \\ t & \mapsto & \left\lfloor \frac{t}{t_0} \right\rfloor \end{cases} \quad \text{et} \quad s : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & [0; t_0] \\ t & \mapsto & t - t_0 k(t) \end{cases},$$

de sorte que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a  $t = k(t) t_0 + s(t)$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $t \geq t_0$ . Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\chi(t)}{t} &\leq \frac{\chi(t)}{k(t) t_0} \leq \frac{k(t) \chi(t_0) + \chi(s(t))}{k(t) t_0} \\ &\leq \frac{\chi(t_0)}{t_0} + \frac{\chi(s(t))}{k(t) t_0}. \end{aligned}$$

Comme  $s(\mathbb{R}^+) \subset [0; t_0]$ , la fonction  $t \mapsto \chi(s(t))$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ . De plus,  $k(t) \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Alors, en passant au supremum puis à la limite lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , nous obtenons

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\chi(t)}{t} \leq \frac{\chi(t_0)}{t_0}.$$

Ceci valant pour tout  $t_0 > 0$ , nous en déduisons

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\chi(t)}{t} \leq \inf_{t > 0} \frac{\chi(t)}{t}.$$

Comme par ailleurs

$$\inf_{t > 0} \frac{\chi(t)}{t} \leq \liminf_{t > 0} \frac{\chi(t)}{t},$$

nous obtenons

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\chi(t)}{t} \leq \inf_{t > 0} \frac{\chi(t)}{t} \leq \liminf_{t > 0} \frac{\chi(t)}{t},$$

ce qui achève la preuve. □

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 4.9.

*Démonstration* : Considérons la fonction  $\chi : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(\|T_t\|) \end{cases}$ . Comme  $(T_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs, nous pouvons déduire du corollaire 4.6 que  $\chi$  vérifie les hypothèses du lemme 4.10 précédent. Considérons alors

$$v \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{t > 0} \frac{\ln(\|T_t\|)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\|T_t\|)}{t}.$$

Par définition, pour tout  $t > 0$ ,  $e^{vt} \leq \|T_t\|$ . En particulier,  $v \leq \omega_0$ .

Nous montrons maintenant que  $\omega_0 \leq v$ . Soit  $\omega > v$ . Nous montrons que  $\omega \geq \omega_0$ . Comme  $\omega > v$ , il existe  $t_0 > 0$  tel que

$$\frac{\ln(\|T_{t_0}\|)}{t_0} \leq \omega.$$

D'après le corollaire 4.6, il existe  $M \geq 1$  tel que pour tout  $t \in [0; t_0]$ , on a  $\|T_t\| \leq M$ . En reprenant les notations du lemme précédent (lemme 4.10) pour les fonctions  $k$  et  $s$ , nous avons que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{\ln(\|T_t\|)}{t} &\leq \frac{\ln(\|T_{t_0}\|)}{t_0} + \frac{\ln(\|T_{s(t)}\|)}{k(t) t_0} \\ &\leq \omega + \frac{M}{t}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ , nous avons  $\|T_t\| \leq e^M e^{\omega t}$ , donc  $\omega \geq \omega_0$ . Nous avons alors

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln(\|T_t\|) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(\|T_t\|).$$

Pour prouver la dernière inégalité, fixons  $t_0 > 0$ . Remarquons que

$$r(T_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T_n t_0\|}{n t_0} \times t_0\right).$$

D'après ce qui précède,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T_n t_0\|}{n t_0} = \omega_0$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

## A.2 — Générateur

Commençons par quelques remarques préliminaires. Nous avons vu précédemment (définition 4.3) que si  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , alors la famille  $(T_t)_{t \geq 0} \stackrel{\text{def}}{=} (e^{tA})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe uniformément continu.

La réciproque de ce résultat est vraie (nous n'en détaillons pas la preuve ici et nous contentons de renvoyer à la proposition 4.15) : si  $(T_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe uniformément continu, alors il existe  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a  $T_t = e^{tA}$ . Remarquons en particulier que le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  est alors quasi-contractif et que son type  $\omega_0$  vérifie  $\omega_0 \leq \|A\|$ .

Remarquons par ailleurs que pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , la fonction  $\varphi_x : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathcal{X} \\ t & \mapsto T_t x \end{cases}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\varphi'(t) = \frac{d}{ds} [T_s x]_{s=t} = A T_t x.$$

En particulier, pour  $t = 0$ ,

$$A x = \frac{d}{ds} [T_s x]_{s=0}.$$

L'objectif des paragraphes qui suivent est d'étudier une notion analogue mais pour les semi-groupes fortement continus : nous allons montrer que, dans ce cas, il est possible de définir un opérateur *a priori non continu*  $A$  qui vérifie des propriétés similaires. L'étude qui suit ne nécessite pas de concepts ou résultats particulièrement avancés sur les opérateurs non bornés ; aussi, nous ne détaillons pas ici une théorie générale d'iceux, mais nous nous contentons de renvoyer à [27] (Partie I, chap. I, section C.11) ou à [38] (Partie I, chapitre II).

Dans le cas où  $A$  n'est pas borné, on ne pourra pas utiliser un résultat de calcul fonctionnel pour dire que «  $T_t = e^{tA}$  ». En revanche, la relation de dérivation décrite ci-dessus va nous permettre de caractériser l'opérateur  $A$ .

**Définition 4.11** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu. Posons

$$D(A) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathcal{X} \mid \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [T_h x - x] \text{ existe} \right\}.$$

On définit un opérateur (a priori non borné)

$$A : \begin{cases} D(A) \subset \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ x & \longmapsto & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [T_h x - x] \end{cases} .$$

L'opérateur  $A$  est appelé le générateur du semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$ .

Nous énonçons dans le résultat qui vient les propriétés élémentaires du générateur d'un semi-groupe. Nous y montrons notamment que le générateur caractérise le semi-groupe de façon unique.

Avant d'énoncer le résultat, rappelons que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le domaine de définition de l'opérateur (non borné *a priori*)  $A^n$  est

$$D(A^n) = \{x \in \mathcal{X} \mid x \in D(A^{n-1}) \text{ et } A^{n-1}x \in D(A)\}$$

(où  $D(A^0) = \mathcal{X}$  par convention). Notons que la suite d'ensembles  $(D(A^n))_n$  est décroissante pour l'inclusion. Nous noterons

$$D(A^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D(A^n).$$

**Proposition 4.12** Soient  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur  $\mathcal{X}$  et  $A$  son générateur. Alors,

(i) pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_\tau x \, d\tau = T_t x ;$$

(ii) pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , pour tous  $s, t \in \mathbb{R}^+$  tels que  $s < t$ , on a  $\int_s^t T_\tau x \in D(A)$  et

$$A \int_s^t T_\tau x \, d\tau = T_t x - T_s x ;$$

(iii) pour tout  $x \in D(A)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $T_t x \in D(A)$ ; de plus, la fonction  $\varphi_x : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathcal{X} \\ t & \mapsto & T_t x \end{cases}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \varphi'_x(t) = \frac{d}{dt} [T_\tau x]_{|\tau=t} = A T_t x = T_t A x ;$$

(iv) pour tout  $x \in D(A)$ , pour tous  $s, t \in \mathbb{R}^+$  tels que  $s \leq t$ ,

$$T_t x - T_s x = A \int_s^t T_\tau x \, d\tau = \int_s^t A T_\tau x \, d\tau ;$$

(v) pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in D(A^n)$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , la fonction  $\varphi_x$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \varphi_x^{(n)}(t) = A^k T_t A^{n-k} x ;$$

(vi) l'opérateur  $A$  est fermé et  $D(A^\infty)$  est dense dans  $\mathcal{X}$ ; de plus, pour tout  $x \in D(A^\infty)$ , la fonction  $\varphi_x$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ;

(vii) le générateur  $A$  caractérise uniquement le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$ : si  $(S_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu de générateur  $A$ , alors  $(S_t)_{t \geq 0} = (T_t)_{t \geq 0}$ .

*Démonstration* : Nous allons prouver les points ci-dessus dans l'ordre croissant.

(i) : Soit  $x \in \mathcal{X}$ . Comme le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  est fortement continu, la fonction  $\varphi_x : \tau \mapsto T_\tau x$  est continue. Ceci prouve le résultat souhaité.

(ii) : Soient  $x \in \mathcal{X}$  et  $s, t \in \mathbb{R}^+$  tels que  $s < t$ . Soit

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^t T_\tau x \, d\tau.$$

Nous montrons que  $y \in D(A)$ . Soit  $h > 0$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $h < \frac{s-t}{2}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [T_h y - y] &= \frac{1}{h} \left[ T_h \int_s^t T_\tau x \, d\tau - \int_s^t T_\tau x \, d\tau \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \int_s^t T_{\tau+h} x \, d\tau - \int_s^t T_\tau x \, d\tau \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \int_{s+h}^{t+h} T_\tau x \, d\tau - \int_s^t T_\tau x \, d\tau \right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_\tau x \, d\tau}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0^+} T_t x \text{ d'après (i)}} - \underbrace{\frac{1}{h} \int_s^{s+h} T_\tau x \, d\tau}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0^+} T_s x \text{ d'après (i)}}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [T_h y - y]$  existe, donc  $y \in D(A)$ . De plus, le calcul précédent montre

$$Ay = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [T_h y - y] = T_t x - T_s x.$$

Ceci prouve le point (ii).

(iii) : Soient  $x \in D(A)$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ . Montrons que  $T_t x \in D(A)$ . Soit  $h > 0$ . Alors,

$$\frac{1}{h} [T_h T_t x - T_t x] = T_t \underbrace{\left[ \frac{1}{h} (T_h x - x) \right]}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0^+} Ax \text{ car } x \in D(A)}.$$

Comme  $T_t \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , nous avons bien que  $T_t x \in D(A)$  et  $AT_t x = T_t Ax$ .

De plus, le calcul ci-dessus montre que la dérivée à droite de  $\varphi_x$  en  $t$  est  $AT_t x$ .

Nous supposons maintenant que  $t > 0$  et nous déterminons la dérivée à gauche de  $\varphi_x$  en  $t$ . Soit  $h < 0$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $h \in [-t; 0[$ . Alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [T_{t+h} x - T_t x] &= T_{t+h} \left[ \frac{1}{h} (x - T_{-h} x) \right] \\ &= T_{t+h} \left[ \frac{1}{h} (x - T_{-h} x) - Ax \right] + T_{t+h} Ax \end{aligned}$$

Or, d'après le corollaire 4.6, il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $h \in [-t; 0[$ ,  $\|T_{t+h}\| \leq M$ . Alors, pour tout  $h \in [-t; 0[$ ,

$$\left\| T_{t+h} \left[ \frac{1}{h} (x - T_{-h} x) - Ax \right] \right\| \leq M \times \underbrace{\left\| \frac{1}{h} (x - T_{-h} x) - Ax \right\|}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0 \text{ car } x \in D(A)}.$$

Donc  $T_{t+h} \left[ \frac{1}{h} (x - T_{-h} x) - Ax \right] \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0$ .

De plus, comme  $\varphi_{Ax}$  est continue, nous avons que  $T_{t+h} Ax \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} T_t Ax$ .

Ceci prouve que  $\varphi_x$  est dérivable à gauche en  $t$  et que la dérivée à gauche de  $\varphi_x$  en  $t$  est  $T_t Ax$ . Comme les dérivées à gauche et à droite de  $\varphi_x$  coïncident et que  $\varphi_x$  est continue en  $t$ , nous avons bien que  $\varphi_x$  est dérivable et que  $\varphi'_x = \varphi_{Ax}$ . Comme  $\varphi_{Ax}$  est continue, nous également montré que  $\varphi_x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

(iv) : Ce point est une conséquence directe du fait que, pour tout  $x \in D(A)$ , la fonction  $\varphi_x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  d'après le point (iii).

(v) : Ce point se prouve par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 1$ , le résultat est exactement le point (iii). Soit  $n \geq 1$  tel que pour tout  $x \in D(A^n)$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , la fonction  $\varphi_x$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et, pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \varphi_x^{(n)}(t) = A^k T_t A^{n-k} x.$$

Soient  $x \in D(A^{n+1})$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ . Comme  $x \in D(A^n)$ , nous avons  $T_t x \in D(A^n)$ . D'après le point (iii), comme  $A^n x \in D(A)$ , nous avons  $T_t A^n x = A^n T_t x \in D(A)$ . Ainsi,  $T_t x \in D(A^{n+1})$ .

Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . D'après l'hypothèse de récurrence et le point (iii), nous avons que  $\varphi_x$  est  $(n+1)$ -fois dérivable et, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_x^{(n+1)}(t) &= A^k \times \frac{d}{d\tau} \left[ T_\tau A^{n-k} x \right]_{|\tau=t} \\ &= A^k \times A \times T_t A^{n-k} x \\ &= A^k \times T_t \times A \times A^{n-k} x. \end{aligned}$$

Ceci prouve le point (v).

(vi) : Commençons par montrer que  $A$  est fermé. Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (D(A))^{\mathbb{N}}$  et  $x, y \in \mathcal{X}$  tels que, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , nous avons  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \stackrel{\text{def}}{=} Ax_n \rightarrow y$ . Nous montrons que  $y \in D(A)$  et que  $Ax = y$ . Soit  $h > 0$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $h < 1$ . D'après le point (iv), pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T_h x_n - x_n = \int_0^h T_\tau y_n \, d\tau. \quad (\text{E}^*)$$

Comme  $T_h \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , nous avons  $T_h x_n - x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T_h x - x$ .

De plus, d'après le corollaire 4.6, il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $\tau \in [0; 1]$ , on a  $\|T_\tau\| \leq M$ . Par ailleurs, comme la suite  $(y_n)_n$  converge, elle est bornée : il existe  $M' > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\|y_n\| \leq M'$ . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \tau \in [0; 1], \|T_\tau y_n\| \leq MM'.$$

D'après le théorème de convergence dominée, nous avons  $\int_0^h T_t y_n \, d\tau \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^h T_\tau y \, d\tau$ .

En passant à la limite dans l'équation (18), il vient

$$T_h x - x = \int_0^h T_\tau y \, d\tau.$$

En d'autres termes,

$$\forall h \in ]0; 1[, \quad \frac{1}{h} [T_h x - x] = \frac{1}{h} \int_0^h T_\tau y \, d\tau.$$

D'après le point (i) de cette preuve, en passant à la limite pour  $h \rightarrow 0^+$ , nous avons que  $x \in D(A)$  et  $Ax = y$ . Ceci montre que  $A$  est fermé.

Nous montrons maintenant que  $D(A^\infty)$  est dense dans  $\mathcal{X}$ . Soit  $x \in \mathcal{X}$ . Soit  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $]0; 1[$  et telle que  $\int_0^1 \eta(s) \, ds = 1$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous définissons

$$x_k \stackrel{\text{def}}{=} k \int_0^1 \eta(ks) T_s x \, ds.$$

Nous commençons par montrer que  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . En effectuant le changement de variable  $\tau = ks$ , nous obtenons

$$x_k = \int_0^k \eta(\tau) T_{\frac{\tau}{k}} x \, d\tau = \int_0^1 \eta(\tau) T_{\frac{\tau}{k}} x \, d\tau.$$

D'après le corollaire 4.6, il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $\tau \in [0; 1]$ , on a  $\|T_\tau\| \leq M$ .

Alors, pour tout  $\tau \in [0; 1]$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left\| \eta(\tau) T_{\frac{\tau}{k}} x \right\| \leq \eta(\tau) M \|x\|.$$

Cette majoration étant indépendante de  $k$ , nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée et nous obtenons

$$\begin{aligned} x_k &\rightarrow \int_0^1 \eta(\tau) \times \lim_{k \rightarrow +\infty} T_{\frac{\tau}{k}} x \, d\tau \\ &= \int_0^1 \eta(\tau) x \, d\tau = x. \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $x_k \in D(A^\infty)$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Nous commençons par montrer que  $x_k \in D(A)$ . Soit  $h > 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [T_h x_k - x_k] &= \frac{k}{h} \int_0^1 \eta(ks) [T_{s+h} x - T_s x] \, ds \\ &= \frac{k}{h} \left[ \int_h^{1+h} \eta(k(s-h)) T_s x \, ds - \int_0^1 \eta(ks) T_s x \, ds \right] \\ &= \frac{k}{h} \left[ \int_0^{1+h} \eta(k(s-h)) T_s x \, ds - \int_0^{1+h} \eta(ks) T_s x \, ds \right] \\ &= k \int_0^{1+h} \frac{1}{h} [\eta(k(s-h)) - \eta(ks)] T_s x \, ds. \end{aligned}$$

Comme  $\eta$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $]0; 1[$ , nous avons finalement que la limite  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [T_h x_k - x_k]$  existe et

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [T_h x_k - x_k] = -k^2 \int_0^1 \eta'(ks) T_s x \, ds.$$

Ainsi,  $x_k \in D(A)$  et  $Ax_k = -k^2 \int_0^1 \eta'(ks) T_s x \, ds$ .

En répétant ce même raisonnement pour les dérivées successives de  $\eta$ , nous pouvons montrer par récurrence sur  $m$  que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, A^m x_k = (-1)^{m+1} k^{m+1} \int_0^1 \eta^{(m)}(ks) T_s x \, ds.$$

Alors, il vient bien que  $x_k \in D(A^\infty)$ . La dernière partie de la preuve est alors une application directe du point (v).

(vii) : Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ . Si  $t = 0$ , alors  $T_0 = \text{Id}_{\mathcal{X}} = S_0$ . Supposons maintenant que  $t > 0$ . Nous montrons que  $T_t = S_t$ .

Soit  $x \in D(A^\infty)$ . Soit  $s \in ]0; t[$ . Définissons une fonction

$$\psi_x : \begin{cases} [0; t] & \rightarrow & \mathcal{X} \\ s & \mapsto & T_{t-s} S_s x \end{cases}.$$

Remarquons que  $\psi_x(0) = T_t x$  et  $\psi_x(t) = S_t x$ . Nous montrons maintenant que  $\psi_x$  est une fonction constante en calculant sa dérivée première.

Soit  $s \in [0; t]$ . Nous allons déterminer le développement limité au premier ordre de  $\psi_x$  en  $s$ . Dans tout ce qui suit,  $h$  est un réel « suffisamment petit ». D'après le point (iii) de cette preuve, nous avons les développements limités suivants : pour tout  $\tau \in \mathbb{R}^{+*}$  et pour tout  $y \in \mathcal{X}$ ,

$$S_{s+h} x = S_s x + h \times AS_s x + o(h)$$

et

$$T_{\tau-h} y = T_\tau y - h \times AT_\tau y + o(h).$$

En combinant ces deux estimations, nous obtenons

$$\begin{aligned} \psi_x(s+h) &= T_{t-s-h} S_{s+h} x \\ &= T_{t-s-h} S_s x + h \times T_{t-s-h} AS_s x + o(h) \\ &= T_{t-s} S_s x - h \times AT_{t-s} S_s x + o(h) + h \times T_{t-s} AS_s x - h^2 \times AT_{t-s} AS_s x + o(h^2) + o(h) \\ &= \psi_x(s) + h [T_{t-s} AS_s x - AT_{t-s} S_s x] + o(h). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\psi_x$  est dérivable en  $s$  et

$$\psi'_x(s) = T_{t-s} AS_s x - AT_{t-s} S_s x.$$

D'après le point (iii) de cette preuve, nous avons  $\psi'_x(s) = 0$ . Ceci valant pour tout  $s \in [0; t]$ , nous avons que la fonction  $\psi_x$  est constante, et donc  $T_t x = S_t x$ .

Les opérateurs  $T_t$  et  $S_t$  sont continus et coïncident sur  $D(A^\infty)$ , qui est dense dans  $\mathcal{X}$ . Ceci prouve que  $T_t = S_t$ . Ceci valant pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , nous avons montré le point (vii). Ceci achève

la preuve de la proposition.  $\square$

Le résultat suivant décrit les effets d'un « changement d'échelle » pour le générateur d'un semi-groupe.

**Lemme 4.13** *Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de générateur  $A$ . Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , soit  $S_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{\lambda t} T_{\mu t}$ .*

*Alors, la famille  $(S_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs dont le générateur est  $B \stackrel{\text{def}}{=} \mu A + \lambda \text{Id}$ .*

*Démonstration :* Comme  $(T_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu, la famille  $(S_t)_{t \geq 0}$  est aussi un semi-groupe fortement continu. Soit  $B$  son générateur. Soient  $x \in D(A)$  et  $\psi_x : x \mapsto S_t x$ . Comme  $x \in D(A)$ , la fonction  $\psi_x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\psi'_x(t) = \lambda e^{\lambda t} T_{\mu t} x + \mu e^{\lambda t} A T_{\mu t} x.$$

En évaluant en  $t = 0$ , nous avons que  $x \in D(B)$  et

$$Bx = \psi'_x(0) = \lambda x + \mu Ax.$$

Ceci achève la preuve.  $\square$

Pour un semi-groupe fortement continu, le type du semi-groupe (défini à la définition 4.8) est lié aux propriétés spectrales du générateur. Ce fait est l'objet du résultat suivant.

**Proposition 4.14** *Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de générateur  $A$  et de type  $\omega_0$ . Soit*

$$s(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \Re(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A) \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

*Alors, on a*

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0.$$

*Démonstration :* Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(\lambda) > \omega_0$ . Nous montrons que  $\lambda \notin \sigma(A)$ . Pour  $t \in \mathbb{R}^+$ , considérons l'opérateur  $S_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\lambda t} T_t$ . D'après le lemme 4.13, la famille  $(S_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateur dont le générateur est  $B = A - \lambda \text{Id}$ . Nous voulons montrer que  $\lambda \notin \sigma(A)$ . Nous allons donc montrer que  $0 \notin \sigma(B)$ , c'est-à-dire que  $B$  est inversible et admet un inverse continu.

Remarquons que le type du semi-groupe  $(S_t)_{t \geq 0}$  est  $\omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 - \lambda < 0$ . En particulier, il existe  $\omega > 0$  et  $M \in \mathbb{R}^+$  tels que

$$\forall t \geq 0, \|S_t\| \leq M e^{-\omega t}.$$

Notons en particulier que, pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , on a  $S_t x \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , et  $\|S_t x\| = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-\omega t})$ .

Considérons alors l'application

$$C : \begin{cases} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ x & \longmapsto & - \int_0^{+\infty} S_\tau x \, d\tau \end{cases} .$$

Remarquons que, pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , l'intégrale définissant  $Cx$  converge normalement. En particulier,  $Cx$  est bien défini et

$$\|Cx\| \leq \int_0^{+\infty} \|S_\tau\| \|x\| \leq \frac{M}{\omega} \|x\|.$$

Ainsi,  $C$  est une application linéaire continue définie sur  $\mathcal{X}$  tout entier. Nous allons montrer que  $C$  est l'inverse de  $B$ .

Soit  $x \in \mathcal{X}$ . D'après la proposition 4.12-(ii), nous avons, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\underbrace{S_t x - x}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -x} = B \underbrace{\int_0^t S_\tau x \, d\tau}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -Cx}.$$

Comme  $B$  est un opérateur fermé (d'après la proposition 4.12-(vi)), les limites ci-dessus nous disent que  $Cx \in D(B)$  et  $BCx = x$ .

Soit maintenant  $x \in D(B)$ . Alors, par définition de  $C$   $Bx$ ,

$$- \int_0^t S_\tau Bx \, d\tau \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} CBx.$$

Or, d'après la proposition 4.12-(iv), pour tout  $t \geq 0$ ,

$$- \int_0^t S_\tau Bx \, d\tau = x - S_t x \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x.$$

Ainsi, nous avons bien  $CBx = x$ .

Finalement, les opérateurs  $CB$  et  $BC$  coïncident avec  $\text{Id}$  sur  $D(B)$ , qui est dense dans  $\mathcal{X}$  (d'après la proposition 4.12-(vi)). Ainsi,  $BC = CB = \text{Id}_{\mathcal{X}} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . En particulier,  $B$  est inversible. Ceci achève la preuve.  $\square$

Rappelons pour terminer un résultat sur le générateur des semi-groupes uniformément continus, que nous avons déjà croisé dans notre étude sans le mentionner explicitement. Nous ne le prouvons pas dans ce document, et nous nous contentons de renvoyer à [28], théorème I.3.7, pour une preuve complète.

**Proposition 4.15** *Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de générateur  $A$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  est uniformément continu ;
- (ii) le générateur  $A$  est un opérateur borné.

### A.3 — Co-générateur d'un semi-groupe

Le générateur d'un semi-groupe présente l'inconvénient non négligeable d'être un opérateur *a priori* non borné. Nous allons définir un nouvel opérateur qui caractérise le semi-groupe et qui est continu : il s'agit du co-générateur. Le prix à payer est une hypothèse spectrale sur le générateur du semi-groupe. Commençons par définir le co-générateur.

**Définition et proposition 4.16** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de générateur  $A$ . On suppose que  $1 \notin \sigma(A)$ .

Le cogénérateur de  $(T_t)_{t \geq 0}$  est alors l'opérateur

$$V = (A + \text{Id})(A - \text{Id})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

Remarquons que dans ce cas, on a  $1 \notin \sigma_p(V)$  et  $A = (V + \text{Id})(V - \text{Id})^{-1}$ .

*Démonstration* : Il suffit de vérifier que

$$V = (A + \text{Id})(A - \text{Id})^{-1} = \text{Id} + 2(A - \text{Id})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

Comme  $(A - \text{Id})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , l'égalité précédente montre bien que  $1 \notin \sigma_p(V)$  et que

$$(V - \text{Id})^{-1} = \frac{1}{2}(A - \text{Id}).$$

Alors,

$$(V + \text{Id})(V - \text{Id})^{-1} = \text{Id} + 2(V - \text{Id})^{-1} = A.$$

Ceci achève la preuve. □

Nous commençons par prouver que, lorsqu'il existe, le co-générateur caractérise le semi-groupe.

**Proposition 4.17** Le co-générateur caractérise uniquement le semi-groupe : soient  $(T_t)_{t \geq 0}$  et  $(S_t)_{t \geq 0}$  deux semi-groupes fortement continus qui admettent un co-générateur. Supposons que le co-générateur de  $(T_t)_{t \geq 0}$  est le co-générateur de  $(S_t)$ .

Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $T_t = S_t$ .

*Démonstration* : Soient  $A$  le générateur de  $(T_t)_{t \geq 0}$  et  $B$  le générateur de  $(S_t)_{t \geq 0}$ . Alors, en reprenant la preuve de la définition et proposition précédente, nous avons que

$$A = (V + \text{Id})(V - \text{Id})^{-1} = B.$$

Ainsi,  $A = B$ . Comme le générateur détermine uniquement le semi-groupe (proposition 4.12-(vii)), nous avons bien que  $(T_t)_{t \geq 0} = (S_t)_{t \geq 0}$ . Ceci achève la preuve. □

La proposition suivante montre que si le semi-groupe est « assez petit », il admet nécessairement un co-générateur.

**Proposition 4.18** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe d'opérateurs fortement continu de générateur  $A$  et de type  $\omega_0$ . On suppose que  $\omega_0 < 1$ .

Alors, le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  admet un co-générateur.

*Démonstration* : Comme  $\omega_0 < 1$ , nous déduisons de la proposition 4.14 que, pour tout  $\lambda \in \sigma(A)$ , on a  $\Re(\lambda) < 1$ . En particulier,  $1 \notin \sigma(A)$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Cette proposition s'applique naturellement aux semi-groupes de contractions.

**Corollaire 4.19** *Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu de contractions : pour tout  $t \geq 0$ ,  $T_t$  est une contraction.*

*Alors,  $(T_t)_{t \geq 0}$  admet un co-générateur.*

*Démonstration* : Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|T_t\| \leq 1$ . En particulier, en notant  $\omega_0$  le type de  $(T_t)_{t \geq 0}$ , nous avons  $\omega_0 \leq 0$ . Le résultat est alors une conséquence directe de la proposition 4.18.  $\square$

Une étude complète des semi-groupes de contractions peut être trouvée dans le livre de Nagy et Foias ([65], chapitre III, sections 8 et 9). Le résultat suivant est une sélection des résultats les plus importants dans le cadre de notre étude.

**Théorème 4.20 (Nagy-Foias, admis)** 1. *Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe de contractions, et  $V$  son co-générateur. L'opérateur  $V$  est une contraction telle que  $1 \notin \sigma_p(V)$ .*

2. *Soit  $V$  une contraction telle que  $1 \notin \sigma_p(V)$ . Alors, il existe un semi-groupe d'opérateurs fortement continu dont le co-générateur est  $V$ .*

3. *Soient  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu de contractions et  $V$  son co-générateur. Alors,*

- (i) *l'opérateur  $V$  est normal si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , l'opérateur  $T_t$  est normal ;*
- (ii) *l'opérateur  $V$  est auto-adjoint si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , l'opérateur  $T_t$  est auto-adjoint ;*
- (iii) *l'opérateur  $V$  est unitaire si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , l'opérateur  $T_t$  est unitaire ;*
- (iv) *l'opérateur  $V$  est une contraction de classe  $C_{0\bullet}$  si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ , l'opérateur  $T_t$  est une contraction de classe  $C_{0\bullet}$ .*

L'objectif des résultats qui viennent est de démontrer un résultat analogue pour les semi-groupes d'opérateurs concaves. Remarquons avant tout que ce résultat est vrai pour les semi-groupes d'opérateurs 2-isométriques (voir par exemple [34]), ou pour les  $m$ -isométries (voir [15]). La preuve que nous suivons ici est une légère adaptation du cas des 2-hyper-contractions (ou, avec la terminologie de ce manuscrit, des « contractions convexes ») que l'on peut trouver dans [40].

À partir de maintenant, sauf mention explicite du contraire, les (semi-groupes d')opérateurs sont définis sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  sur  $\mathbb{C}$ , de dimension infinie et séparable.

Nous commençons par établir l'existence d'un co-générateur pour les semi-groupes concaves.

**Lemme 4.21** *Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs tel que  $T_1$  est concave. Alors, le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  admet un co-générateur.*

*Démonstration* : Le type de  $(T_t)_{t \geq 0}$  est  $\omega_0 = \ln(r(T_1))$  d'après la proposition 4.9. Or, comme  $T$  est concave, d'après la proposition 3.17,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{X}, \|T^n x\| \leq \sqrt{\|x\|^2 + n(\|Tx\|^2 - \|x\|^2)}.$$

Alors,

$$\|T_1^n\| \leq \sqrt{1 + n(\|T_1\|^2 + 1)}.$$

Alors,  $r(T_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_1^n\|^{\frac{1}{n}} \leq 1$ . Nous en déduisons que  $\omega_0 \leq 0$ . Ainsi,  $(T_t)_{t \geq 0}$  admet un co-générateur d'après la proposition 4.18. Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer l'analogie du théorème 4.20 pour les semi-groupes concaves.

**Proposition 4.22** *Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe d'opérateur fortement continu qui admet un co-générateur  $V$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ , l'opérateur  $T_t$  est concave ;
- (ii) pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , la fonction  $\psi_x : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \|T_t x\|^2 \end{cases}$  est concave ;
- (iii) pour tout  $y \in D(A^2)$ ,  $\Re(\langle A^2 y, y \rangle) + \|Ay\|^2 \leq 0$  ;
- (iv) l'opérateur  $V$  est concave.

*Démonstration* : Nous montrons successivement les équivalences suivantes : (i)  $\Leftrightarrow$  (ii), (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii), et (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv).

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Montrons que la fonction  $\psi_x$  est concave. Pour cela, comme  $\varphi_x : t \mapsto T_t x$  est continue, la fonction  $\psi_x$  est aussi continue et il suffit de montrer que

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } t \leq t', \frac{1}{2}(\psi_x(t) + \psi_x(t')) \leq \psi_x\left(\frac{t+t'}{2}\right).$$

Soient  $t, t' \in \mathbb{R}^+$  tels que  $t \leq t'$ , et  $\tau = \frac{t' - t}{2}$ . Comme l'opérateur  $T_\tau$  est concave, nous avons

$$\|T_\tau^2 T_t x\|^2 + \|T_t x\|^2 \leq 2\|T_\tau T_t x\|^2,$$

c'est-à-dire

$$\psi_x(t + 2\tau) + \psi_x(t) \leq 2\psi_x(t + \tau).$$

Ceci prouve le résultat recherché.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Soient  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $x \in \mathcal{H}$ . Comme la fonction  $\psi_x$  est concave, nous avons

$$\psi_x(2t) + \psi_x(0) \leq 2\psi_x(t),$$

c'est-à-dire que

$$\|T_t^2 x\|^2 + \|x\|^2 \leq 2\|T_t x\|^2.$$

Ceci valant pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , nous avons bien montré que  $T_t$  est concave.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : Soit  $y \in D(A^2)$ . Nous savons que la fonction  $\varphi_y : t \mapsto T_t y$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  (d'après la proposition 4.12). Ainsi, la fonction  $\psi_y$  est également de classe  $\mathcal{C}^2$  et, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}\psi_y''(t) &= \langle A^2 T_t y, T_t y \rangle + 2 \langle A T_t y, A T_t y \rangle + \langle T_t y, A^2 T_t y \rangle \\ &= 2 \left( \Re(\langle A^2 T_t y, T_t y \rangle) + \|A T_t y\|^2 \right).\end{aligned}$$

En évaluant en  $t = 0$ , nous obtenons

$$\psi_y''(0) = 2 \left( \Re(\langle A^2 y, y \rangle) + \|A y\|^2 \right).$$

Comme  $\psi_y$  est concave, nous avons  $\psi_y''(0) \leq 0$ . Ceci prouve l'implication.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) : Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Nous commençons par supposer que  $x \in D(A^2)$ . Alors, pour tout  $t \geq 0$ , on a  $T_t x \in D(A^2)$  (d'après la proposition 4.12). Le même calcul que pour l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (iii) montre alors que, pour tout  $t \geq 0$ , la fonction  $\psi_{T_t x}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et

$$\psi_x''(t) = 2 \left( \Re(\langle A^2 T_t x, T_t x \rangle) + \|A T_t x\|^2 \right) \leq 0.$$

Ainsi,  $\psi_x$  est concave.

Supposons maintenant que  $x \notin D(A^2)$ . Comme  $D(A^2)$  est dense dans  $\mathcal{H}$  (d'après la proposition 4.12), il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (D(A))^{\mathbb{N}}$  telle que  $x_n \rightarrow x$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Soient  $t, t' \in \mathbb{R}^+$  et  $\tau \in [0; 1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $\psi_{x_n}$  est concave donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1 - \tau) \|T_t x_n\|^2 + \tau \|T_s x_n\|^2 \leq \|T_{(1-\tau)t + \tau s} x_n\|^2.$$

Comme  $T_t, T_s$  et  $T_{(1-\tau)t + \tau s}$  sont continus, nous pouvons passer à la limite (pour  $n \rightarrow +\infty$ ) dans l'inégalité précédente et nous obtenons

$$(1 - \tau) \|T_t x\|^2 + \tau \|T_{t'} x\|^2 \leq \|T_{(1-\tau)t + \tau t'} x\|^2.$$

Ceci prouve que  $\psi_x$  est concave.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) : Nous avons déjà montré que (iii)  $\Rightarrow$  (i). En particulier, si  $A$  désigne le générateur de  $(T_t)_{t \geq 0}$ , le lemme 4.21 nous dit que  $1 \notin \sigma(A)$ .

Soit  $x \in \mathcal{H}$ . Soit  $y \stackrel{\text{def}}{=} (A - \text{Id})^{-2} x$ . Remarquons que  $y \in D(A^2)$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\|V^2 x\|^2 + \|x\|^2 - 2 \|V x\|^2 &= \|(A + I)^2 y\|^2 + \|(A - I)^2 y\|^2 - 2 \|(A^2 - I)y\|^2 \\ &= 4 \langle A^2 y, y \rangle + 8 \langle A y, A y \rangle + 4 \langle y, A^2 y \rangle \\ &= 8 \left( \Re \langle A^2 y, y \rangle + \|A y\|^2 \right) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur  $V$  est concave.

(iv)  $\Rightarrow$  (iii) : Soit  $y \in D(A^2)$ . Soit  $x = A^2y - 2Ay + y \in \mathcal{H}$ , de sorte que  $y = (A - \text{Id})^{-2}x$ . Alors, comme  $V$  est concave, le calcul détaillé dans la preuve de (iii)  $\Rightarrow$  (iv) fournit le résultat souhaité.

Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous énonçons maintenant un résultat qui porte sur les sous-espaces « invariants par un semi-groupe ». Pour le prouver, nous suivons une méthode inspirée de [32] (chapitre II, section 10, théorème 10-9).

**Proposition et définition 4.23** *Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu de générateur  $A$  dont le type vérifie  $\omega_0 < 1$ . Soient  $V$  le co-générateur de  $(T_t)_{t \geq 0}$  et  $\mathcal{M}$  un sous-espace fermé de  $\mathcal{X}$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i) pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , le sous-espace  $\mathcal{M}$  est invariant par  $T_t$  ;
- (ii) le sous-espace  $\mathcal{M}$  est invariant par  $V$ .

Lorsque ces assertions équivalentes sont vérifiées, on dit que  $\mathcal{M}$  est un sous-espace invariant pour le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$ .

*Démonstration* : Montrons les implications successivement.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : En reprenant la preuve de la proposition 4.9 avec  $\lambda = 1$ , nous avons

$$\forall x \in \mathcal{X}, (A - \text{Id})^{-1}x = - \int_0^{+\infty} e^{-\tau} T_\tau x \, d\tau.$$

En particulier, le sous-espace  $\mathcal{M}$  est un sous-espace invariant pour  $(A - \text{Id})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . Comme  $V = \text{Id} + 2(A - \text{Id})^{-1}$  (d'après la proposition 4.16), nous avons bien que  $\mathcal{M}$  est un sous-espace invariant pour  $V$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Comme  $\omega_0 < 1$ , un argument de calcul fonctionnel holomorphe (détaillé par exemple dans l'annexe B) nous donne que,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, T_t = \exp\left(t \frac{V + \text{Id}}{V - \text{Id}}\right).$$

En particulier, comme  $\mathcal{M}$  est un sous-espace fermé invariant pour  $V$ , nous avons bien que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , le sous-espace  $\mathcal{M}$  est invariant pour  $T_t$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

## A.4 — Exemples

Nous allons maintenant illustrer les différentes notions présentées précédemment par des exemples rattachés aux opérateurs de décalage. Notons que ces exemples présentent aussi l'avantage de jouer un rôle important dans notre étude de l'universalité des semi-groupes. Avant d'étudier ces exemples particuliers, précisons quelques points.

**Rappels** Nous rappelons ici le théorème de Paley-Wiener (théorème 1.69), à savoir que l'application

$$\text{PW} : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ f & \longmapsto & \left( Z \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{itZ} dt \right) \end{cases}$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert.

Rappelons encore que pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , nous considérons, comme au lemme 3.4, les opérateurs de décalage vers la droite

$$D_t : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \longmapsto & f(\bullet - t) \end{cases} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))$$

et vers la gauche

$$G_t : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \longmapsto & f(\bullet + t) \end{cases} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+)).$$

Les deux lemmes qui viennent sont dédiés à l'étude des opérateurs  $\Delta_t$ , définis comme les images par l'isomorphisme de Paley-Wiener des opérateurs  $D_t$ .

**Lemme 4.24** Soient  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $\Delta_t \stackrel{\text{def}}{=} \text{PW} D_t \text{PW}^* \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+))$ . L'opérateur  $\Delta_t$  est l'opérateur de multiplication décrit par

$$\Delta_t = M_{e^{itZ}} : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & (Z \mapsto e^{itZ} F(Z)) \end{cases} .$$

*Démonstration* : Commençons par remarquer que comme  $D_t$  est une isométrie et PW est unitaire, l'opérateur  $\Delta_t \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+))$  est bien défini. Par ailleurs, comme  $L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$ , pour montrer le lemme il suffit de montrer que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+), \Delta_t \text{PW}(f) = \text{PW} D_t(f).$$

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$ . Soit  $Z \in \Pi^+$ . Alors,

$$\begin{aligned} \text{PW} D_t(f)(Z) &= \int_0^{+\infty} f(\tau - t) e^{i\tau Z} d\tau \\ &= \int_t^{+\infty} f(\tau - t) e^{i\tau Z} d\tau \\ &= e^{itZ} \int_0^{+\infty} f(s) e^{isZ} ds \text{ (en effectuant le changement de variable } s = \tau - t) \\ &= e^{itZ} \times (\text{PW}(F)(Z)) \\ &= \Delta_t \text{PW}(F)(Z). \end{aligned}$$

Ceci vaut pour tout  $Z \in \Pi^+$  et achève donc la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme 4.25** Soit  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ . Soit  $\Gamma_t$  l'opérateur non borné sur  $H^2(\Pi^+)$  décrit par

$$\Gamma_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow \\ F & \longmapsto \left( Z \mapsto \left( \frac{e^{itZ} + 1}{e^{itZ} - 1} \right) \times F(Z) \right) \end{cases} .$$

Alors,  $\Gamma_t = (\Delta_t + \text{Id})(\Delta_t - \text{Id})^{-1}$ .

Rappelons qu'avec les notations précédentes, pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ , nous avons  $1 \in \sigma(D_t)$ , mais  $1 \notin \sigma_p(D_t)$ . Comme  $D_t$  et  $\Delta_t$  sont unitairement équivalents, il en va de même pour  $\Delta_t$ . En particulier,  $(\Delta_t - \text{Id})$  est injectif. L'opérateur  $(\Delta_t - \text{Id})^{-1}$  doit alors être compris comme étant l'opérateur défini sur  $\text{Im}(D_t - \text{Id})$  qui est l'inverse à gauche de  $D_t$ .

*Démonstration* : Pour prouver le lemme, il suffit de montrer que, pour toute  $F \in H^2(\Pi^+)$ ,

$$(\Delta_t - \text{Id})\Gamma_t(F) = (\Delta_t + \text{Id})F(Z).$$

Soit  $Z \in \Pi^+$ . On a

$$\begin{aligned} (\Delta_t - \text{Id})\Gamma_t(F)(Z) &= e^{itZ} \Gamma_t(F)(Z) - \Gamma_t(F)(Z) \\ &= (e^{itZ} - 1) \times \left( \frac{e^{itZ} + 1}{e^{itZ} - 1} \right) \times F(Z) \\ &= (e^{itZ} + 1) \times F(Z) \\ &= (\Delta_t + \text{Id})(F)(Z). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

Nous détaillons maintenant l'étude de trois semi-groupes, tous liés aux opérateurs de décalage. Il s'agit

- des semi-groupes d'opérateurs de décalage  $(D_t)_{t \geq 0}$  et  $(G_t)_{t \geq 0}$  ;
- du semi-groupe dont le générateur est  $D_1$  ;
- du semi-groupe dont le co-générateur est  $D_1$ .

#### A.4.a) — Semi-groupe d'opérateurs de décalage

Nous commençons par étudier le semi-groupe d'opérateurs de décalage vers la droite  $(D_t)_{t \geq 0}$ .

**Proposition 4.26** La famille  $(D_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'isométries sur  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . Le générateur de ce semi-groupe est l'opérateur

$$A : \begin{cases} D(A) \subset L^2(\mathbb{R}^+) & \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \mapsto -f' \end{cases} .$$

Le co-générateur est unitairement équivalent (grâce à l'isomorphisme de théorème de Paley-Wiener) à l'opérateur

$$V : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow \\ F & \longmapsto \left( Z \mapsto \left( \frac{iZ + 1}{iZ - 1} \right) \times F(Z) \right) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+)).$$

**Remarque** Comme l'opérateur  $A$  n'est pas un opérateur continu sur  $L^2(\mathbb{R}^+)$ , le semi-groupe  $(D_t)_{t \geq 0}$  est un exemple de semi-groupe fortement continu qui n'est pas un semi-groupe uniformément continu (d'après la proposition 4.15).

Nous prouvons maintenant la proposition 4.26.

*Démonstration* : Commençons par remarquer que la famille  $(D_t)_{t \geq 0}$  est bien un semi-groupe algébrique d'opérateurs sur  $\mathcal{X} = L^2(\mathbb{R}^+)$ . En effet,

(i) nous avons  $T_0 = \text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^+)}$  ;

(ii) pour tous  $t, s \in \mathbb{R}^+$  et pour toute  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ ,  $D_{t+s}(f) = D_t \circ D_s(f)$ .

Grâce au lemme 4.5, nous pouvons vérifier que  $(D_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu.

a) Remarquons que pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , l'opérateur  $D_t$  est une isométrie. Alors, pour  $\delta = 42$  et pour  $M = 1$ , nous avons bien  $\sup_{0 \leq t \leq \delta} \|D_t\| \leq M$ .

b) Soit  $D = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{+*})$  l'ensemble des fonctions lisses à support compact dans  $\mathbb{R}^{+*}$ . Nous savons que  $D$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$  (voir par exemple [17], corollaire IV.23). Nous montrons que, pour toute  $\varphi \in D$ , on a  $D_t(\varphi) \rightarrow \varphi$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ . Soit  $A > 0$  tel que  $\text{supp}(\varphi) \subset [0; A]$ . Remarquons que  $\varphi' \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+)$  et que  $\text{supp}(\varphi') \subset [0; A]$ . Par ailleurs, il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a  $|\varphi'(x)| \leq M$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $t \in [0; 1]$ .

$$\begin{aligned} \|D_t(\varphi) - \varphi\|^2 &= \int_0^{+\infty} |\varphi(x) - \varphi(x-t)|^2 dx \\ &= \int_0^{A+1} \left| \int_{x-t}^x \varphi'(s) ds \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^{A+1} \left( \int_{x-t}^x |\varphi'(s)| ds \right)^2 dx \quad (\text{par croissance de l'intégrale}). \end{aligned}$$

Or, pour tout  $t \in [0; 1]$ ,

$$\int_{x-t}^x |\varphi'(s)| ds \leq t \times M,$$

donc

$$0 \leq \|D_t(f) - f\|^2 \leq \int_0^{A+1} t^2 M^2 dx = t^2 M^2 (A+1) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Ceci montre le résultat souhaité.

Ainsi, d'après le lemme 4.5, le semi-groupe  $(D_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs.

**Calcul du générateur** Pour montrer que  $A$  est le générateur de  $(D_t)_{t \geq 0}$ , il suffit de montrer que, pour toute  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ , nous avons  $\varphi \in D(A)$  et  $A\varphi = -\varphi'$ . Fixons donc  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ . Comme la fonction  $\varphi$  est dérivable en  $x$ , nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [T_h \varphi - \varphi](x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [\varphi(x-h) - \varphi(x)] = -\varphi'(x).$$

Ceci valant pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , puis pour toute  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ , nous avons bien montré que  $A$  est le générateur de  $(D_t)_{t \geq 0}$ .

**Calcul du co-générateur** Pour calculer le co-générateur, nous allons transporter le problème dans  $H^2(\Pi^+)$  grâce à l'isomorphisme unitaire PW. Pour cela, commençons par remarquer que, d'après le lemme 4.24, les semi-groupes  $(D_t)_{t \geq 0}$  et  $(\Delta_t)_{t \geq 0}$  sont unitairement équivalents :

$$\forall t \geq 0, \Delta_t = \text{PW } D_t \text{ PW}.$$

Alors, le générateur  $\mathcal{A}$  de  $(\Delta_t)_{t \geq 0}$  est l'opérateur  $\mathcal{A} = \text{PW } A \text{ PW}$ . Remarquons que nous pouvons par ailleurs calculer directement l'opérateur  $\mathcal{A}$  : en effet, soient  $F \in D(\mathcal{A})$  et  $Z \in \Pi^+$ . Alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [\Delta_h(F) - F](Z) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[ (e^{ihZ} - 1) F(Z) \right] = iZ F(Z).$$

Ainsi, le générateur de  $(\Delta_t)_{t \geq 0}$  est l'opérateur

$$\mathcal{A} : \begin{cases} D(\mathcal{A}) \subset H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & (Z \mapsto iZ F(Z)) \end{cases}.$$

Soit  $V$  l'opérateur introduit dans l'énoncé de la proposition. Nous montrons que  $V$  est le co-générateur de  $(\Delta_t)_{t \geq 0}$ , c'est-à-dire que  $V = (\mathcal{A} + \text{Id})(\mathcal{A} - \text{Id})^{-1}$ . Soient  $F \in H^2(\Pi^+)$  et  $Z \in \Pi^+$ . Nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \text{Id})V(F)(Z) &= (iZ - 1) \times V(F)(Z) \\ &= (iZ - 1) \times \left[ \frac{iZ + 1}{iZ - 1} F(Z) \right] \\ &= (iZ + 1) \times F(Z) \\ &= (\mathcal{A} + \text{Id})(F)(Z). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Nous pouvons étudier d'une façon similaire le semi-groupe d'opérateurs de décalage vers la gauche.

**Corollaire 4.27** *La famille  $(G_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe d'opérateurs fortement continu. Le générateur de ce semi-groupe est l'opérateur*

$$A : \begin{cases} D(A) \subset L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}.$$

*Le co-générateur est unitairement équivalent (grâce à l'isomorphisme de théorème de Paley-Wiener) à l'opérateur*

$$V : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & \left( Z \mapsto \begin{pmatrix} -iZ + 1 \\ -iZ - 1 \end{pmatrix} \times F(Z) \right) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+)).$$

*Esquisse de démonstration* : Il suffit de reprendre la première partie de la preuve de la proposition 4.26 en l'adaptant au cas du décalage à gauche et non à droite.  $\square$

#### A.4.b) — Semi-groupe engendré par un opérateur de décalage

Nous étudions maintenant le semi-groupe dont le générateur est l'opérateur de décalage vers la droite  $D = D_1 \in L^2(\mathbb{R}^+)$ . Comme  $D_1$  est continu, nous savons qu'il engendre un semi-groupe uniformément continu (proposition 4.15).

**Proposition 4.28** *Soit  $(U_t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe uniformément continu dont le générateur est  $D_1$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , l'opérateur  $U_t$  est unitairement équivalent (par l'isomorphisme du théorème de Paley-Wiener) à l'opérateur*

$$V_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & (Z \mapsto \exp(te^{-iZ}) \times F(Z)) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+)).$$

**Remarque** Reprenons les notations de la proposition ci-dessus. Comme  $1 \in \sigma(D_1)$ , nous ne pouvons pas définir le co-générateur du semi-groupe  $(U_t)_{t \geq 0}$ .

*Démonstration* : Avant d'attaquer la démonstration, rappelons que l'on peut voir  $H^2(\Pi^+)$  comme un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$  (par passage à la limite non-tangentielle d'après la proposition 1.70), et que la convergence dans  $L^2(\mathbb{R})$  d'une suite d'éléments de  $H^2(\Pi^+)$  entraîne la convergence de la suite dans  $H^2(\Pi^+)$ . Ainsi, dans toute cette preuve, nous assimilerons par abus de langage les éléments  $F \in H^2(\Pi^+)$  et la limite non-tangentielle  $F^* \in L^2(\mathbb{R})$ . Nous commettrons un abus de langage similaire pour les opérateurs continus sur  $H^2(\Pi^+)$ .

Nous montrons que  $(V_t)_{t \geq 0}$  défini comme dans l'énoncé est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs dont le générateur est  $\Delta_1$ . Alors, comme tout semi-groupe dont le générateur est continu est un semi-groupe uniformément continu (proposition 4.15) et comme  $\Delta_1$  et  $D_1$  sont unitairement équivalents (lemme 4.24), nous avons montré le résultat souhaité.

Commençons par vérifier que  $(V_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs. Il découle directement de la définition de  $(V_t)_{t \geq 0}$  que cette famille est un semi-groupe algébrique d'opérateur.

Soit  $F \in H^2(\Pi^+) \subset L^2(\mathbb{R})$ . Nous montrons que  $V_t F \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} F$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $t \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \|V_t F - F\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |(V_t F - F)(z)|^2 dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} |(\exp(te^{-iz}) - 1) F(z)|^2 dz \end{aligned}$$

Or, pour tout  $t \in [0; 1]$  et pour tout  $z \in \mathbb{R}$ ,

$$|\exp(te^{-iz})| \leq \exp(t) \leq e.$$

Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{R}, \forall t \in [0; 1], |(\exp(te^{-iz}) - 1) F(z)|^2 \leq e^2 |F(z)|^2.$$

Comme  $F \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée et nous obtenons

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|V_t F - F\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, dz = 0.$$

Ceci valant pour tout  $F \in H^2(\Pi^+)$ , nous avons bien que  $(V_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe continu d'opérateurs (d'après le lemme 4.5).

Nous montrons maintenant que  $\Delta_1$  est le générateur de  $(V_t)_{t \geq 0}$ . Soit  $F \in H^2(\Pi^+)$ . Commençons par établir une majoration technique.

Soient  $z \in \mathbb{R}$  et la fonction auxiliaire  $\alpha_z : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \exp(te^{-iz}) \end{cases}$ . La fonction  $\alpha_z$  est dérivable et, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\alpha'_z(t) = e^{-iz} \exp(te^{-iz}).$$

Remarquons en particulier que l'on a

$$\forall z \in \mathbb{R}, \forall t \in [0; 1], |\alpha'_z(t)| \leq \exp(t) \leq e.$$

Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, nous avons

$$\forall z \in \mathbb{R}, \forall t \in ]0; 1], \left| \frac{\exp(te^{-iz}) - 1}{t} \right| \leq e.$$

Nous en déduisons en particulier que l'on a

$$\forall z \in \mathbb{R}, \forall t \in ]0; 1], \left| \left( \frac{\exp(te^{-iz}) - 1}{t} - e^{-iz} \right) F(z) \right|^2 \leq (1 + e)^2 |F(z)|^2.$$

Nous pouvons maintenant utiliser cette majoration pour déterminer le générateur de  $(V_t)_{t \geq 0}$ . En effet, pour tout  $t \in ]0; 1]$ ,

$$\left\| \frac{V_t F - F}{t} - \Delta_1 F \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \left( \frac{\exp(te^{-iz}) - 1}{t} - e^{-iz} \right) F(z) \right|^2 dz.$$

Alors, d'après le théorème de convergence dominée, nous avons bien

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{V_t F - F}{t} - \Delta_1 F \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{\exp(te^{-iz}) - 1}{t} - e^{-iz} \right|^2 \times |F(z)|^2 dz = \int_{\mathbb{R}} 0 dz = 0.$$

Ainsi, la fonction  $\varphi_F : t \mapsto V_t F$  est dérivable en  $0^+$ , donc  $F \in D(A)$  et

$$AF = (Z \mapsto e^{-iz} F(Z)) = \Delta_1 F.$$

Ceci achève la preuve. □

Les mêmes arguments et techniques de preuve s'appliquent au cas du semi-groupe dont le générateur est  $G_1$ .

**Corollaire 4.29 (admis)** Soit  $(V_t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe dont les membres sont définis par

$$V_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & (Z \mapsto \exp(te^{iZ}) \times F(Z)) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+)).$$

Alors,  $(V_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe continu d'opérateurs dont le générateur est unitairement équivalent à  $G_1$ .

#### A.4.c) — Semi-groupes co-engendrés par un opérateur de décalage

Nous terminons notre série d'exemples en étudiant le semi-groupe dont le co-générateur est  $D_1$ .

**Proposition 4.30** Pour  $t \in \mathbb{R}^+$ , soit

$$\Sigma_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & \left( Z \mapsto \exp\left(t \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1}\right) \times F(Z) \right) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+)).$$

La famille  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs dont le générateur est

$$A : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & \left( Z \mapsto \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1} \times F(Z) \right) \end{cases}.$$

et le co-générateur  $V = \Delta_1$  est unitairement équivalent à  $D_1$ .

*Démonstration* : Comme  $\Delta_1 \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+))$  est une contraction telle que  $1 \notin \sigma_p(\Delta_1)$ , d'après le théorème 4.20, il existe un semi-groupe fortement continu de contractions  $(\widetilde{\Sigma}_t)_{t \geq 0}$  dont le co-générateur est  $\Delta_1$ . De plus, d'après le lemme 4.25, nous savons que le générateur de  $(\widetilde{\Sigma}_t)_{t \geq 0}$  est l'opérateur non continu sur  $H^2(\Pi^+)$  décrit par

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_1 : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & \left( Z \mapsto \left( \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1} \right) \times F(Z) \right) \end{cases}.$$

Nous montrons maintenant que pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\Sigma_t = \widetilde{\Sigma}_t$ .

Soit  $F \in D(A)$ . Soit  $Z \in \Pi^+$ . Nous considérons la fonction

$$\varphi_{F,Z} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \widetilde{\Sigma}_t(F)(Z) \end{cases}.$$

Comme  $F \in D(A)$ , d'après la proposition 4.12 et vu que l'évaluation  $e_Z : F \mapsto F(Z)$  est continue, la fonction  $\varphi_{F,Z}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned}
\varphi'_{F,Z}(t) &= e_Z \left[ \left( \frac{d}{d\tau} \left( \tau \mapsto \widetilde{\Sigma}_t(F) \right) \right) \Big|_{\tau=t} \right] \\
&= e_Z \left[ A \widetilde{\Sigma}_t(F) \right] \\
&= \left( \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1} \right) \widetilde{\Sigma}_t(F) (Z) \\
&= \left( \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1} \right) \varphi_{F,Z}(t).
\end{aligned}$$

En d'autres termes, la fonction  $\varphi_{F,Z}$  est une solution du problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(t) = \left( \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1} \right) y(t) \\ y(0) = F(Z) \end{cases} .$$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy ci-dessus, nous avons finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi_{F,Z} = \exp \left( t \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1} \right) \times F(Z).$$

En d'autres termes, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  et pour toute  $F \in D(A)$ , nous avons

$$\forall Z \in \Pi^+, \quad \widetilde{\Sigma}_t(F) (Z) = \Sigma_t(F) (Z).$$

Ainsi, les opérateurs  $\widetilde{\Sigma}_t$  et  $\Sigma_t$  coïncident sur  $D(A)$ . Comme  $\widetilde{\Sigma}_t$  est continu et comme  $D(A)$  est dense dans  $H^2(\Pi^+)$  (d'après la proposition 4.12), nous avons que  $\Sigma_t$  est bien un opérateur continu sur  $H^2(\Pi^+)$  et  $\Sigma_t = \widetilde{\Sigma}_t$ . Ceci vaut pour tout  $t \geq 0$  et achève donc la preuve.  $\square$

## B) Universalité des semi-groupes d'opérateurs

NOUS allons maintenant aborder la question de l'universalité des semi-groupes d'opérateurs. Plus précisément, nous commençons par préciser ce que l'on entend par « modélisation » ou universalité pour des semi-groupes d'opérateurs. Nous montrons ensuite deux résultats d'universalité partiels : le premier permet de modéliser les semi-groupes uniformément continus grâce au semi-groupe dont le générateur est  $D_1$  ; le second permet de modéliser les semi-groupes quasi-contractifs ou concaves grâce à un semi-groupe d'opérateurs dont le co-générateur est un opérateur de décalage vers la droite de multiplicité infinie. Enfin, nous étendons rapidement les résultats de cette section à la modélisation des groupes d'opérateurs.

Dans toute cette partie, sauf mention explicite du contraire, nous considérerons que les opérateurs agissent sur un espace de Hilbert complexe  $\mathcal{H}$ , de dimension infinie et séparable.

### B.1 — Définition des semi-groupes universels

Commençons par préciser ce que l'on entend par « modélisation » pour les semi-groupes. La définition est analogue à celle des opérateurs (définition 3.1), à ceci près que la multiplication par une constante multiplicative devient un « changement d'échelle » (au sens du lemme 4.13).

**Définition 4.31** Soient  $(T_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_t)_{t \geq 0}$  deux semi-groupes d'opérateurs fortement continus sur  $\mathcal{H}$ . On dit que le semi-groupe  $(U_t)_{t \geq 0}$  modélise le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  s'il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $(U_t)_{t \geq 0}$ , des constantes  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$  ainsi qu'un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$\forall t \geq 0, T_t = S \left( e^{\lambda t} U_{\mu t} \right) \Big|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

Nous allons chercher à étudier des semi-groupes universels : intuitivement, il s'agit de semi-groupes qui modélisent de « larges » familles d'opérateurs.

Commençons par une remarque qui peut paraître contre-intuitive : ce n'est pas parce que tous les opérateurs  $T_t$  pour  $t > 0$  sont universels que le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  est universel. Le contre-exemple ci-dessous détaille ce point.

**Contre-exemple** Considérons le semi-groupe  $(G_t)_{t \geq 0}$  d'opérateurs de décalage vers la gauche sur  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . Rappelons que pour tout  $t \geq 0$ , l'opérateur  $G_t$  est décrit par

$$G_t : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \longmapsto f(\bullet + t) \end{cases} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+)).$$

Nous avons déjà vu que la famille  $(G_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs (corollaire 4.27). Par ailleurs, nous avons vu que, pour tout  $t > 0$  l'opérateur  $G_t$  est universel (d'après le théorème de Caradus, cf. le lemme 3.4).

**Proposition 4.32** Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace vectoriel fermé de  $L^2(\mathbb{R}^+)$  de dimension supérieure à 2. Considérons le semi-groupe d'opérateurs  $(T_t)_{t \geq 0}$  défini pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  par

$$T_t = \begin{pmatrix} e^{-t} \text{Id}_{\mathcal{F}} & 0 \\ 0 & \text{Id}_{\mathcal{F}^\perp} \end{pmatrix} \text{ sur } \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ \mathcal{F}^\perp \end{bmatrix}.$$

Alors, le semi-groupe  $(G_t)_{t \geq 0}$  ne modélise pas le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$ .

*Démonstration* : La famille  $(T_t)_{t \geq 0}$  définit un semi-groupe uniformément continu de contractions sur  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . Nous montrons que quels que soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$ , il n'existe ni un sous-espace  $\mathcal{M}$  invariant par  $(G_t)_{t \geq 0}$ , ni un isomorphisme  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$\forall t \geq 0, T_t = S \left( e^{\lambda t} G_{\mu t} \right) \Big|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$ . Supposons par l'absurde qu'il existe un sous-espace  $\mathcal{M}$  invariant par  $(G_t)_{t \geq 0}$  et un isomorphisme  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  vérifiant l'égalité ci-dessus. Soit  $\mathcal{N} = S^{-1}(\mathcal{F})$ . Comme  $S$  est un isomorphisme continu, le sous-espace  $\mathcal{N}$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$ , invariant par  $(G_t)_{t \geq 0}$  et de dimension  $\dim(\mathcal{N}) = \dim(\mathcal{F}) \geq 2$ .

Le générateur du semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  est  $-\text{Id}_{\mathcal{F}}$ . Rappelons que (d'après le corollaire 4.27) le générateur du semi-groupe  $(G_t)_{t \geq 0}$  est l'opérateur

$$A : \begin{cases} D(A) \subset L^2(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+) \\ f & \longmapsto f' \end{cases}.$$

Soit  $B$  le générateur du semi-groupe  $(e^{\lambda t} G_{\mu t})_{t \geq 0}$ . D'après le lemme 4.13, nous avons

$$B = \mu A + \lambda \text{Id}.$$

Il existe donc un sous-espace fermé  $\mathcal{N}$  de dimension supérieure à 2 tel que

$$B|_{\mathcal{N}} = (\mu A + \lambda \text{Id})|_{\mathcal{N}} = -\text{Id}_{\mathcal{N}}.$$

Alors,

$$A|_{\mathcal{N}} = \frac{-\lambda - 1}{\mu} \text{Id}_{\mathcal{N}}.$$

En particulier, l'opérateur  $A$  a un sous-espace propre de dimension supérieure à deux. Ceci fournit la contradiction souhaitée et achève la preuve.  $\square$

## B.2 — Cas des semi-groupes uniformément continus

Nous traitons dans cette partie la question de l'universalité des semi-groupes uniformément continus. L'idée générale est d'appliquer le théorème de Caradus et la théorie des opérateurs positivement universels (proposition 3.7) pour modéliser le générateur du semi-groupe.

**Définition 4.33** Soit  $(U_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe d'opérateurs uniformément continu sur  $\mathcal{H}$ . On dit que  $(U_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe uniformément continu universel s'il modélise tous les semi-groupes uniformément continus sur  $\mathcal{H}$  avec  $\lambda = 1$  dans la définition 4.31, c'est-à-dire :

pour tout semi-groupe uniformément continu  $(T_t)_{t \geq 0}$ , il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $(U_t)_{t \geq 0}$ , une constante  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$\forall t \geq 0, T_t = S (U_{\mu t})|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

Rappelons qu'un opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est universel s'il modélise tous les opérateurs sur  $\mathcal{H}$  (voir la définition 3.2). Rappelons aussi que tout opérateur est universel si et seulement s'il est positivement universel (proposition 3.8). Le résultat suivant énonce une condition nécessaire et suffisante portant sur le générateur pour qu'un semi-groupe soit universel pour les semi-groupes uniformément continus.

**Théorème 4.34** Soient  $(U_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs sur  $\mathcal{H}$  et  $A$  son générateur. Les assertions suivantes s'équivalent :

- (i) le semi-groupe  $(U_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe uniformément continu universel : il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $(U_t)_{t \geq 0}$ , une constante  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$\forall t \geq 0, T_t = S (U_{\mu t})|_{\mathcal{M}} S^{-1} ;$$

- (ii) l'opérateur  $A$  est universel.

*Démonstration* : (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Montrons que  $A$  est universel. Soit  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Soit  $(T_t)_{t \geq 0} = (e^{tB})_{t \geq 0}$  le semi-groupe (uniformément continu) engendré par  $B$ . Comme  $(U_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe uniformément continu universel, il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $(U_t)_{t \geq 0}$ , une constante  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$\forall t \geq 0, T_t = S (U_{\mu t})|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

Soit  $x \in \mathcal{H}$ . D'après la proposition 4.12, les fonctions

$$\varphi_x : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathcal{X} \\ t & \mapsto T_t x \end{cases}$$

et

$$\psi_x : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathcal{X} \\ t & \mapsto S_t S^{-1} x \end{cases}$$

sont dérivables sur  $\mathbb{R}^+$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a

$$\varphi'_x(t) = S(\mu\psi'_x(t)),$$

c'est-à-dire que  $Bx = \mu SAS^{-1}x$ . Ceci valant pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , nous avons bien  $B = \mu SA|_{\mathcal{M}}S^{-1}$ . Nous avons donc montré que  $A$  est universel.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe uniformément continu. D'après la proposition 4.15, le générateur  $\overline{B}$  de  $(T_t)_{t \geq 0}$  est continu. Comme  $A$  est positivement universel, il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $A$ , une constante  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que  $B = \mu SA|_{\mathcal{M}}S^{-1}$ . Par calcul fonctionnel holomorphe (détaillé par exemple dans l'annexe B), il vient alors que

$$\forall t \geq 0, e^{tB} = S(e^{\mu t A})|_{\mathcal{M}}S^{-1}.$$

Ceci achève la preuve. □

Grâce aux exemples de semi-groupes que nous avons déjà décrits, nous pouvons donner un exemple explicite de semi-groupe universel pour les semi-groupes uniformément continus.

**Proposition 4.35** *Soit  $(V_t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe dont les membres sont définis par*

$$V_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto (Z \mapsto \exp(te^{iZ}) \times F(Z)) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+)).$$

Alors,  $(V_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe uniformément continu universel : pour tout semi-groupe uniformément continu  $(T_t)_{t \geq 0}$ , il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $H^2(\Pi^+)$  invariant par  $(V_t)_{t \geq 0}$ , une constante  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$\forall t \geq 0, T_t = S(V_{\mu t})|_{\mathcal{M}}S^{-1}.$$

*Démonstration* : D'après le théorème de Caradus (3.3), l'opérateur  $G_1 \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))$  est universel. Alors, d'après le théorème 4.34, le semi-groupe  $(U_t)_{t \geq 0}$  engendré par  $G_1$  est un semi-groupe uniformément continu universel. On conclut alors avec le corollaire 4.29. □

### B.3 — Cas des semi-groupes quasi-contractifs ou concaves

Nous traitons dans cette partie la question de l'universalité des semi-groupes quasi-contractifs ou concaves. Comme rien ne garantit que le générateur soit un opérateur non borné, nous allons plutôt tenter de modéliser le co-générateur de ces semi-groupes. En revanche, la modélisation du co-générateur ne peut plus faire intervenir de constante multiplicative. C'est pourquoi nous

utiliserons les théorèmes de Shimorin (théorème 3.54) ou de modélisation des contractions de classe  $C_{0\bullet}$  (théorème 3.59) pour modéliser le co-générateur. Comme précédemment, nous donnons également des exemples explicites sur des espaces de fonctions holomorphes.

### B.3.a) — Cas des semi-groupes quasi-contractifs

Nous traitons d'abord le cas des semi-groupes quasi-contractifs.

**Théorème 4.36** *Soit  $(\widetilde{\Sigma}_t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe fortement continu dont le co-générateur est  $D_1$ . Alors, le semi-groupe  $(\widetilde{\Sigma}_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe d'isométries qui est universel pour les semi-groupes quasi-contractifs :*

*pour tout semi-groupe fortement continu quasi-contractif  $(T_t)_{t \geq 0}$ , il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $(\widetilde{\Sigma}_t)_{t \geq 0}$ , une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que*

$$\forall t \geq 0, T_t = S \left( e^{\lambda t} \widetilde{\Sigma}_t \right)_{|\mathcal{M}} S^{-1}.$$

*Démonstration :* Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe quasi-contractif. Soit  $\omega_0$  le type de  $(T_t)_{t \geq 0}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $-\lambda < \omega_0$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ , l'opérateur  $e^{-\lambda t} T_t$  est une contraction de classe  $C_{0\bullet}$ . Par ailleurs, d'après le lemme 4.13, la famille  $(e^{-\lambda t} T_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs. D'après le théorème 4.20, le semi-groupe  $(e^{-\lambda t} T_t)_{t \geq 0}$  admet un co-générateur  $V$ , qui est une contraction de classe  $C_{0\bullet}$ . Alors, d'après le théorème 3.59, il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}$  invariant par  $D_1$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$V = S D_{1|\mathcal{M}} S^{-1}.$$

D'après la proposition 4.23, le sous-espace  $\mathcal{M}$  est invariant pour le semi-groupe  $(\widetilde{\Sigma}_t)_{t \geq 0}$  et

$$\forall t \geq 0, e^{-\lambda t} T_t = S \widetilde{\Sigma}_t S^{-1}.$$

Ceci achève la preuve. □

Nous pouvons exhiber un exemple de semi-groupe universel pour les semi-groupes quasi-contractifs grâce à l'espace  $H^2(\Pi^+)$ .

**Corollaire 4.37** *Pour  $t \in \mathbb{R}^+$ , soit*

$$\Sigma_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & \left( Z \mapsto \exp \left( t \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1} \right) \times F(Z) \right) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+)).$$

*La famille  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs qui est universel pour les semi-groupes quasi-contractifs :*

*pour tout semi-groupe fortement continu quasi-contractif  $(T_t)_{t \geq 0}$ , il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $H^2(\Pi^+)$  invariant par  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$ , une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que*

$$\forall t \geq 0, T_t = S \left( e^{\lambda t} \Sigma_t \right)_{|\mathcal{M}} S^{-1}.$$

*Démonstration* : Ce résultat découle directement de la combinaison du théorème 4.36 et de la proposition 4.30.  $\square$

### B.3.b) — Cas des semi-groupes concaves

Nous traitons maintenant le cas des semi-groupes concaves. Les arguments et techniques que nous employons sont très similaires à ceux utilisés dans l'étude du cas quasi-contractif, sauf que l'on remplace l'espace  $H^2(\Pi^+)$  par un espace de Hilbert de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles à noyaux reproduisants (conformément à la définition 1.75). Les résultats principaux auxquels nous ferons appel sont la décomposition de Wold des opérateurs concaves (théorème 3.55) et le théorème de Shimorin (théorème 3.54).

Nous commençons par décrire les semi-groupes engendrés par un opérateur de décalage sur un espace de Hilbert de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles.

**Proposition 4.38** *Soient  $r > 0$ ,  $\mathcal{E}$  un espace de Hilbert et  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$  un espace de Hilbert de fonctions holomorphes à noyaux reproduisants (au sens de la définition 1.75). Supposons que l'opérateur*

$$\mathfrak{D} : \begin{cases} \mathfrak{H} & \longrightarrow & \mathfrak{H} \\ f & \longmapsto & (z \mapsto z \times f(z)) \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$$

*est le co-générateur d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , l'opérateur  $\Sigma_t$  est décrit par*

$$\Sigma_t : \begin{cases} \mathfrak{H} & \longrightarrow & \mathfrak{H} \\ f & \longmapsto & \left( z \mapsto \exp\left(t \frac{1+z}{1-z}\right) f(z) \right) \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}).$$

*Démonstration* : Nous commençons par déterminer le générateur (non nécessairement borné) du semi-groupe  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$ . Plus précisément, nous montrons que ce générateur est l'opérateur

$$\mathfrak{A} : \begin{cases} D(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{H} & \longrightarrow & \mathfrak{H} \\ f & \longmapsto & \left( z \mapsto \frac{z+1}{z-1} \times f(z) \right) \end{cases} .$$

Soient  $f \in D(\mathfrak{A})$  et  $z \in D(0; r)$ . Alors,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{D} - \text{Id})\mathfrak{A} f(z) &= (z-1) \times \mathfrak{A}(f)(z) \\ &= (z-1) \times \left( \frac{z+1}{z-1} \right) \times f(z) \\ &= (z+1) f(z) \\ &= (\Delta + \text{Id})(f)(z). \end{aligned}$$

Ceci valant pour tous  $z \in D(0; r)$  et pour toute  $f \in D(\mathfrak{A})$ , nous avons bien que  $(\mathfrak{D} - \text{Id})\mathfrak{A} = (\mathfrak{D} + \text{Id})$ , c'est-à-dire que  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{D} + \text{Id})(\mathfrak{D} - \text{Id})^{-1}$ . Ainsi,  $\mathfrak{A}$  est bien le générateur de  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$ .

Nous déterminons maintenant les opérateurs  $\Sigma_t$ . Soient  $f \in D(\mathfrak{A})$ . Considérons la fonction

$$\varphi_f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathfrak{H} \\ t & \mapsto & \Sigma_t(f) \end{cases} .$$

Comme  $f \in D(\mathfrak{A})$ , d'après la proposition 4.12, la fonction  $\varphi_f$  est différentiable et, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi'_f(t) = \mathfrak{A}T_t f$ .

Soit  $z \in \mathcal{E}$ . Nous voulons déterminer la valeur de  $\varphi_f(t)(z)$ . Pour cela, nous allons montrer que

$$\forall e \in \mathcal{E}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \langle \Sigma_t(f)(z), e \rangle_{\mathcal{E}} = \left\langle e^{t \frac{z+1}{z-1}} f(z), e \right\rangle_{\mathcal{E}}.$$

Soit  $e \in \mathcal{E}$ . Considérons alors la fonction

$$\psi = \psi_{f,z,e} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \langle \Sigma_t(f)(z), e \rangle_{\mathcal{E}} \end{cases}.$$

Rappelons que l'on note  $k$  les noyaux reproduisants sur  $\mathfrak{H}$  (voir la définition 1.75). Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \langle \Sigma_t f, k(z, \cdot) e \rangle_{\mathfrak{H}} \\ &= \langle \varphi_f(t), k(z, \cdot) e \rangle_{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

Comme  $\varphi_f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , la fonction  $\psi$  l'est aussi et, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \langle \varphi'_f(t), k(z, \cdot) e \rangle_{\mathfrak{H}} \\ &= \langle A\varphi_f(t), k(z, \cdot) e \rangle_{\mathfrak{H}} \\ &= \langle A\varphi_f(t)(z), e \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \left\langle \frac{z+1}{z-1} \varphi_f(t)(z), e \right\rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \frac{z+1}{z-1} \langle \varphi_f(t)(z), e \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \frac{z+1}{z-1} \psi(t). \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\psi(0) = \langle f(0)(z), e \rangle_{\mathcal{E}}$ . Ainsi, la fonction  $\varphi$  est solution du problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'(t) = \frac{z+1}{z-1} y(t) \\ y(0) = \langle f(0)(z), e \rangle_{\mathcal{E}} \end{cases}.$$

Par unicité des solutions, nous obtenons alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \psi(t) = \langle f(0)(z), e \rangle_{\mathcal{E}} \exp\left(t \frac{z+1}{z-1}\right),$$

ce qui fournit le résultat recherché.

Ainsi, nous avons montré que pour toute  $f \in D(\mathfrak{A})$ ,

$$\Sigma_t(f) = \left( z \mapsto \exp\left(t \frac{1+z}{1-z}\right) f(z) \right).$$

Comme  $D(\mathfrak{A})$  est dense (d'après la proposition 4.12) et comme  $\Sigma_t$  est continu, l'égalité ci-dessus échoit pour toute  $f \in \mathfrak{H}$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Les semi-groupes décrits à la proposition précédente 4.38 modélisent les semi-groupes concaves et purs.

**Théorème 4.39** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ , l'opérateur  $T_t$  est concave et pur.

Alors, il existe  $r > 0$ , un espace de Hilbert  $\mathcal{E}$  et un espace de Hilbert de fonctions holomorphes à noyaux reproduisants  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$  tels que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , l'opérateur  $T_t$  est unitairement équivalent à l'opérateur

$$\Sigma_t : \begin{cases} \mathfrak{H} & \longrightarrow \\ f & \longmapsto \end{cases} \left( z \mapsto \exp\left(t \frac{1+z}{1-z}\right) f(z) \right) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}).$$

*Démonstration* : Comme  $(T_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe constitué d'opérateurs concaves, il admet un co-générateur  $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  d'après le lemme 4.21. Alors, l'opérateur  $V$  est concave d'après la proposition 4.22. Nous montrons maintenant que l'opérateur  $V$  est pur. Comme  $V$  est concave, il admet une décomposition de Wold : il existe un opérateur unitaire  $V_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\infty(V))$  et un opérateur  $V_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\infty(T)^\perp)$  tels que l'on ait la décomposition orthogonale suivante :

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \text{ sur } \begin{bmatrix} \mathcal{H}_\infty(T) \\ \mathcal{H}_\infty(T)^\perp \end{bmatrix}.$$

Alors, d'après la proposition 4.23 et le théorème 4.20, le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  admet la même décomposition : soient  $(T_{1,t})_{t \geq 0}$  le semi-groupe fortement continu d'opérateurs unitaires sur  $\mathcal{H}_\infty(T)$  dont le co-générateur est  $V_1$ , et  $(T_{2,t})_{t \geq 0}$  le semi-groupe fortement continu sur  $\mathcal{H}_\infty(T)^\perp$  dont le co-générateur est  $V_2$ . Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, T_t = \begin{pmatrix} T_{1,t} & 0 \\ 0 & T_{2,t} \end{pmatrix} \text{ sur } \begin{bmatrix} \mathcal{H}_\infty(V) \\ \mathcal{H}_\infty(V)^\perp \end{bmatrix}.$$

Or, pour tout  $t > 0$ ,  $T_t$  est pur. Cela signifie en particulier que  $T_{1,t} = 0$ , et donc que  $\mathcal{H}_\infty(V) = \{0\}$ . En d'autres termes, l'opérateur  $V$  est pur.

Ainsi, on peut modéliser  $V$  grâce au théorème 3.54 : Soit  $\mathcal{E} = \mathcal{H} \ominus T\mathcal{H} = (\text{Im } T)^\perp$ . Soit  $r = r(T')$  le rayon spectral de  $T'$ . Alors il existe un espace de Hilbert  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$  de fonctions holomorphes à noyaux reproduisants tel que l'opérateur

$$\mathfrak{D} : \begin{cases} \mathfrak{H} & \longrightarrow \\ f & \longmapsto \end{cases} \left( z \mapsto z f(z) \right) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$$

est unitairement équivalent à  $T$ . On peut alors appliquer la proposition 4.38, ce qui achève la preuve.  $\square$

Dans le théorème qui suit, nous noterons

$$\widetilde{\Sigma}_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow \\ F & \longmapsto \end{cases} \left( Z \mapsto \exp\left(t \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1}\right) \times F(Z) \right) \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+))$$

les opérateurs qui interviennent dans le corollaire 4.37.

Le théorème 4.39 ci-dessus permet de décrire les semi-groupes d'opérateurs concaves et purs. Nous pouvons en déduire une modélisation des semi-groupes d'opérateurs concaves.

**Théorème 4.40** Soit  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ , l'opérateur  $T_t$  est concave.

Alors, il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{H}$  stable par  $(T_t)_{t \geq 0}$ , un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $H^2(\Pi^+)$  stable par  $(\widetilde{\Sigma}_t)_{t \geq 0}$ , une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ , un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ; ainsi qu'un réel  $r > 0$ , un espace de Hilbert  $\mathcal{E}$  et un espace de Hilbert de fonctions holomorphes à noyaux reproduisants  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$  tels que l'on a la décomposition

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, T_t = \begin{pmatrix} T_{1,t} & 0 \\ 0 & T_{2,t} \end{pmatrix} \text{ sur } \begin{bmatrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{N}^\perp \end{bmatrix}$$

où, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a

$$T_{1,t} = S \left( e^{\lambda t} \widetilde{\Sigma}_t \right)_{|\mathcal{M}} S^{-1}$$

et l'opérateur  $T_{2,t}$  est unitairement équivalent à l'opérateur

$$\Sigma_t : \begin{cases} \mathfrak{H} & \longrightarrow \\ f & \longmapsto \end{cases} \left( z \mapsto \exp \left( t \frac{1+z}{1-z} \right) f(z) \right) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}).$$

*Démonstration* : Comme  $(T_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe constitué d'opérateurs concaves, il admet un co-générateur  $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  d'après le lemme 4.21. Alors, l'opérateur  $V$  est concave d'après la proposition 4.22. D'après le théorème 3.55, l'opérateur  $V$  admet une décomposition de Wold : il existe un opérateur unitaire  $V_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\infty(V))$  et un opérateur  $V_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\infty(T)^\perp)$  tels que l'on a la décomposition orthogonale suivante :

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \text{ sur } \begin{bmatrix} \mathcal{H}_\infty(T) \\ \mathcal{H}_\infty(T)^\perp \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, il existe  $r > 0$ , un espace de Hilbert  $\mathcal{E}$  et un espace de Hilbert à noyaux reproduisants  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0, r); \mathcal{E})$  tel que  $V_2$  est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication

$$\mathfrak{D} : \begin{cases} \mathfrak{H} & \longrightarrow \mathfrak{H} \\ f & \longmapsto \end{cases} (z \mapsto z \times f(z)) .$$

Alors, d'après la proposition 4.23 et le théorème 4.20, le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  admet la même décomposition : soient  $(T_{1,t})_{t \geq 0}$  le semi-groupe fortement continu d'opérateurs unitaires sur  $\mathcal{H}_\infty(T)$  dont le co-générateur est  $V_1$  et  $(T_{2,t})_{t \geq 0}$  le semi-groupe fortement continu sur  $\mathcal{H}_\infty(T)^\perp$  dont le co-générateur est  $V_2$ .

Le semi-groupe  $(T_{1,t})$  étant borné, il peut être modélisé par un semi-groupe de multiplication sur  $H^2(\Pi^+)$  d'après le corollaire 4.37 : il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}_\infty(T)$  invariant par  $(\widetilde{\Sigma}_t)_{t \geq 0}$ , une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}_\infty(T)$  tels que

$$\forall t \geq 0, T_{1,t} = S \left( e^{\lambda t} \widetilde{\Sigma}_t \right)_{|\mathcal{M}} S^{-1}.$$

Par ailleurs, comme  $(T_{2,t})_{t \geq 0}$  a pour co-générateur l'opérateur  $\mathfrak{D}$ , le théorème 4.39 nous dit que le semi-groupe  $(T_{2,t})_{t \geq 0}$  est unitairement équivalent au semi-groupe  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$  où, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\Sigma_t : \begin{cases} \mathfrak{H} & \longrightarrow \\ f & \longmapsto \end{cases} \left( z \mapsto \exp \left( t \frac{1+z}{1-z} \right) f(z) \right) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}).$$

Ceci achève la preuve.  $\square$

## B.4 — Extension au cas des groupes

Dans cette partie, nous montrons que les résultats de modélisation que nous avons présenté ci-dessus s'étendent naturellement aux cas des groupes d'opérateurs. Ceci vient du fait que les modèles que nous considérons (qu'ils soient uniformément continus, quasi-contractifs ou concaves) sont la restriction à  $\mathbb{R}^+$  de groupes d'opérateurs. Nous pouvons donc déduire des énoncés 4.35, 4.37 et 4.39 les propositions suivantes.

**Proposition 4.41** *Soit  $(V_t)_t$  le groupe dont les membres sont définis pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par*

$$V_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & (Z \mapsto \exp(te^{iZ}) \times F(Z)) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+)).$$

*Alors,  $(V_t)_t$  est un groupe uniformément continu universel : pour tout groupe uniformément continu  $(T_t)_t$ , il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $H^2(\Pi^+)$  invariant par  $(V_t)_t$ , une constante  $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, T_t = S(V_{\mu t})|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

**Proposition 4.42** *Pour  $t \in \mathbb{R}$ , soit*

$$\Sigma_t : \begin{cases} H^2(\Pi^+) & \longrightarrow & H^2(\Pi^+) \\ F & \longmapsto & \left( Z \mapsto \exp\left(t \frac{e^{iZ} + 1}{e^{iZ} - 1}\right) \times F(Z) \right) \end{cases} \in \mathcal{L}(H^2(\Pi^+)).$$

*La famille  $(\Sigma_t)_{t \geq 0}$  est un groupe fortement continu d'opérateurs qui est universel pour les groupes quasi-contractifs :*

*pour tout groupe fortement continu quasi-contractif  $(T_t)_t$ , il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $H^2(\Pi^+)$  invariant par  $(\Sigma_t)_t$ , une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  et un isomorphisme continu  $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  tels que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, T_t = S\left(e^{\lambda t} \Sigma_t\right)|_{\mathcal{M}} S^{-1}.$$

**Proposition 4.43** *Soit  $(T_t)_t$  un groupe fortement continu d'opérateurs tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ , l'opérateur  $T_t$  est concave et pur.*

*Alors, il existe  $r > 0$ , un espace de Hilbert  $\mathcal{E}$  et un espace de Hilbert de fonctions holomorphes à noyaux reproduisants  $\mathfrak{H} \subset \text{Hol}(D(0; r); \mathcal{E})$  tels que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $T_t$  est unitairement équivalent à l'opérateur*

$$\Sigma_t : \begin{cases} \mathfrak{H} & \longrightarrow & \mathfrak{H} \\ f & \longmapsto & \left( z \mapsto \exp\left(t \frac{1+z}{1-z}\right) f(z) \right) \end{cases} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}).$$



## Chapitre 5

# Semi-groupes d'opérateurs de composition sur des espaces de Dirichlet pondérés

DANS ce chapitre, nous étudions les semi-groupes d'opérateurs de composition sur des espaces de Dirichlet pondérés  $\mathcal{D}_\alpha$ . Dans la première partie de ce chapitre, nous étudions ces semi-groupes en toute généralité. Le résultat principal que nous prouvons est que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , tout semi-flot  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  induit un semi-groupe fortement continu d'opérateurs  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{D}_\alpha$ .

Dans un second temps, nous utilisons la théorie des semi-groupes d'opérateurs de composition pour obtenir des résultats d'universalité. Plus précisément, dans [47], Nordgren, Rosenthal et Wintrobe ont montré que si  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  est un automorphisme hyperbolique de  $\mathbb{D}$  et si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est dans le spectre ponctuel de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(H^2)$ , alors l'opérateur  $C_\varphi - \lambda \text{Id}$  est universel. Dans [24], Cowen et Gallardo donnent une nouvelle preuve de ce résultat en utilisant la théorie des semi-groupes d'opérateurs de composition. Dans cette partie, nous verrons dans quelle mesure cette technique de preuve se généralise aux espaces  $\mathcal{D}_\alpha$  pour  $\alpha \geq 1$ .

## A) Semi-groupes d'opérateurs de composition

CETTE partie est dédiée à l'étude des semi-groupes (fortement continus) d'opérateurs de composition sur des espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ . Commençons par remarquer que si la famille  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de composition, alors la famille de symboles  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  a des propriétés remarquables : l'étude de telles familles (appelées semi-flots) constitue le premier temps de notre étude.

Nous montrons ensuite un résultat général sur les semi-groupes d'opérateurs de composition : pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , tout semi-flot  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  induit un semi-groupe fortement continu d'opérateurs  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{D}_\alpha$ . La seconde sous-partie de cette section est dédiée à la preuve de ce résultat.

Enfin, nous illustrons par un exemple les notions ci-dessus. Nous étudions ainsi en détail un semi-groupe de composition par des automorphismes hyperboliques de  $\mathbb{D}$ . En particulier,

nous déterminons explicitement le générateur de ce semi-groupe, ainsi que le spectre, le spectre ponctuel et les sous-espaces propres du générateur. Cet exemple jouera un rôle important dans l'étude du théorème de Nordgren-Rosenthal-Wintrobe sur les espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ .

### A.1 — Semi-flots de fonctions holomorphes

Nous commençons par étudier les semi-flots de fonctions holomorphes sur le disque unité. Ceux-ci sont définis dans l'énoncé suivant.

**Définition 5.1** *On appelle semi-flot continu toute famille  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  d'applications holomorphes de  $\mathbb{D}$  dans lui-même vérifiant les conditions suivantes :*

- (i) on a  $\varphi_0 = \text{Id}$  ;
- (ii) pour tous  $t, s \in \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$  ;
- (iii) pour  $t \rightarrow 0$ ,  $\varphi_t \xrightarrow{CVLU} 0$ .

Remarquons que si  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est un semi-flot et si  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\varphi_n$  est bien l'itéré  $n$  fois de la fonction  $\varphi_1$ .

Si  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  est un semi-flot continu, nous notons

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (t, z) & \longmapsto & \varphi_t(z) \end{cases} .$$

Commençons par noter une propriété intéressante des semi-flots.

**Proposition 5.2** *Soit  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  un semi-flot continu de fonctions holomorphes. Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , la fonction  $\varphi_t$  est injective.*

Nous pouvons étendre aux semi-flots la notion de point de Denjoy-Wolff que nous avons introduite pour une fonction au théorème 1.18.

**Proposition et définition 5.3** *Soit  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  un semi-flot holomorphe tel que  $\varphi$  n'est pas un automorphisme elliptique de  $\mathbb{D}$ . Soit  $\alpha$  le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi_1$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha$  est le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi_t$ .*

*On dit alors que  $\alpha$  est le point de Denjoy-Wolff du semi-flot  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ .*

En s'inspirant de la théorie des semi-groupes d'opérateurs, nous pouvons définir le générateur d'un semi-flot.

**Proposition et définition 5.4** *Soit  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  un semi-flot continu de fonctions holomorphes. Alors, il existe une unique application  $G \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  telle que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , la fonction  $\varphi_z : t \mapsto \varphi_t(z)$  est dérivable à gauche en 0 et*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0^+} (\varphi_t(z)) \stackrel{\text{def}}{=} G(z).$$

*De plus, la fonction  $\varphi_z$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et, pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ ,*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} (\varphi_t(z)) = G(\varphi_{t_0}(z)).$$

*Esquisse de démonstration* : Soit  $z \in \mathbb{D}$ . Le fait que  $\varphi_z$  soit dérivable en  $0^+$  est le théorème 1.1 de [14]. Dans le cas où  $t_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ , on peut conclure par des arguments similaires, ou encore en « transportant » le résultat par la fonction  $\varphi_{t_0}$ .  $\square$

Nous allons maintenant énoncer un résultat présenté par Berkson et Porta ([14]) qui caractérise les fonctions qui peuvent générer un semi-flot de fonction holomorphes.

Notons  $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$  (c'est le demi-plan à droite de l'axe des ordonnées). Nous énonçons et démontrons le résultat sur  $\mathcal{P}$ , puis nous le transportons sur  $\mathbb{D}$  au moyen d'une homographie. Remarquons qu'on peut adapter au cas de  $\mathcal{P}$  la définition de semi-flot de fonctions holomorphes et l'existence du générateur d'un semi-flot.

**Théorème 5.5 (Berkson, Porta)** *Soit  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  un semi-flot continu de fonctions holomorphes sur  $\mathcal{P}$  de générateur  $G \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ . Alors, l'un des trois cas mutuellement exclusifs suivants échoit nécessairement :*

(i) on a  $\Re(G) \geq 0$  ;

(ii) il existe  $b \in \mathbb{R}$  et une fonction  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe telle que  $\Re(F) \geq 0$  et, pour tout  $z \in \mathcal{P}$ ,

$$G(z) = -F(z)(z - ib)^2;$$

(iii) Il existe  $\zeta \in \mathcal{P}$  et une fonction  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe telle que  $\Re(F) \geq 0$  et, pour tout  $z \in \mathcal{P}$ ,

$$G(z) = F(z)(\bar{\zeta} + z)(\zeta - z).$$

Réciproquement, si  $G$  est une fonction vérifiant l'un des trois cas précédents, alors il existe un semi-flot de fonctions holomorphes dont  $G$  est le générateur.

En outre, lorsque l'équivalence ci-dessus échoit, on dispose selon les cas des propriétés supplémentaires suivantes :

Cas (i) pour tout  $z \in \mathcal{P}$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(z) = \infty$  ;

Cas (ii) pour tout  $z \in \mathcal{P}$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(z) = ib$  ;

Cas (iii) pour tout  $z \in \mathcal{P}$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(z) = \zeta$ .

Nous pouvons alors « transporter » le résultat précédent sur  $\mathbb{D}$ .

**Corollaire 5.6** *Soient  $g$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D}$  et  $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$  le point de Denjoy-Wolff. Les assertions suivantes s'équivalent :*

(i) la fonction  $g$  est le générateur d'un semi-flot holomorphe de point de Denjoy-Wolff  $\alpha$  ;

(ii) il existe une fonction  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{D}$  telle que  $\Re(f) \geq 0$  et, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$g(z) = (\alpha - z)(1 - \bar{\alpha}z)f(z).$$

Nous prouvons maintenant le théorème 5.5.

*Démonstration* : Commençons par supposer que  $G$  vérifie l'un des trois cas (i), (ii) ou (iii).

Supposons que  $G$  vérifie la condition (iii). Grâce à une homographie, nous allons nous ramener au cas du disque unité et montrer que  $G$  engendre un semi-flot sur le disque unité. Soit

$$L : \begin{cases} \mathcal{P} & \rightarrow \mathbb{D} \\ Z & \mapsto \frac{Z - \zeta}{Z + \bar{\zeta}} \end{cases} .$$

Remarquons que  $L(\zeta) = 0$  et  $L(\infty) = 1$ . De plus, l'homographie réciproque de la fonction  $L$  est donnée par  $L^{-1}(z) = \frac{\zeta z + \bar{\zeta}}{1 - z}$  et la dérivée est donnée par  $L'(Z) = \frac{2\Re(\zeta)}{(Z + \bar{\zeta})^2}$ .

Pour montrer que  $G$  engendre un semi-flot, on cherche une solution  $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = G(\varphi) \\ \varphi(0, Z) = Z \end{cases} .$$

Notons  $\psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  l'application définie par  $\psi(t, z) \stackrel{\text{def}}{=} L(\varphi(t, L^{-1}(z)))$ . Déterminons alors l'équation vérifiée par  $\psi$ . Commençons par calculer :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(t, L^{-1}(z))] L'[\varphi(t, L^{-1}(z))] \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, L^{-1}(z)) \frac{2\Re \zeta}{(\varphi(t, L^{-1}(z)) + \zeta)^2} \\ &= G(\varphi(t, L^{-1}(z))) \frac{2\Re \zeta}{(\varphi(t, L^{-1}(z)) + \zeta)^2} \\ &= F(\varphi(t, L^{-1}(z))) (\bar{\zeta} + L^{-1}(\psi(t, z))) (\zeta - L^{-1}(\psi(t, z))) \frac{2\Re \zeta}{(\varphi(t, L^{-1}(z)) + \zeta)^2} \\ &= F(\varphi(t, L^{-1}(z))) 2\Re \zeta \frac{(\zeta - L^{-1}(\psi(t, z)))}{\varphi(t, L^{-1}(z)) + \zeta} \\ &= -F(\varphi(t, L^{-1}(z))) 2\Re \zeta L(L^{-1}(\psi(t, z))) \\ &= -\psi(t, z) \times A(\psi(t, z)) \end{aligned}$$

où  $A$  est définie par  $A(w) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re \zeta \times F(L^{-1}(w))$ . Il suffit maintenant de dire que, pour chaque  $z \in \mathbb{D}$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -yA(y) \\ y(0) = z \end{cases}$$

admet une unique solution. Comme de plus  $\Re(A) \geq 0$ , pour chaque  $z \in \mathbb{D}$ , l'unique solution du problème ci-dessus est strictement décroissante en module. Alors,  $w(t) = \psi(t, z) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ . En particulier, la solution est définie sur  $\mathbb{R}^+$  tout entier. En considérant la famille de ces solutions pour  $z$  parcourant  $\mathbb{D}$ , on construit un semi-flot holomorphe  $\psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ . Remarquons en outre que 0 est alors le point de Denjoy-Wolff de ce semi-flot. En revenant à  $\mathcal{P}$ , nous avons bien un semi-flot  $(\varphi(t, \cdot))_t$  dont le point de Denjoy-Wolff est  $\zeta$ .

Supposons maintenant que  $G$  la condition (ii). Pour cette preuve, nous allons approcher le point de Denjoy-Wolff  $i\bar{b}$  par une suite d'éléments  $\zeta_n \in \mathcal{P}$ . Nous obtenons alors le semi-flot engendré par  $G$  comme limite des semi-flots associés aux  $\zeta_n$ .

Soit une suite d'éléments  $\zeta_n \in \mathcal{P}$  telle que  $\zeta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ib$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous définissons une fonction  $G_n$  holomorphe sur  $\mathcal{P}$  en posant  $G_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} F(z)(\overline{\zeta_n} + z)(\zeta_n - z)$  pour tout  $z \in \mathcal{P}$ . Alors, pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $G_n$  est holomorphe et vérifie la condition (iii). Elle engendre donc un semi-flot  $(\varphi_n(t, \cdot))_t$ . D'après un argument de compacité, et vu que  $\zeta_n \rightarrow ib$ , il existe une constante  $M \in \mathbb{R}^+$  telle que, dès lors que  $|z - 1| \leq \frac{1}{2}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous avons  $|G_n(z)| \leq M$ . Par le théorème des accroissements finis, nous avons alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $t \in \left[0; \frac{1}{2M}\right]$  la majoration :

$$|\varphi_n(t, 1) - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

Heuristiquement, elle signifie que quel que soit  $n$ , la trajectoire partant de 1 sous l'action du semi-flot  $\varphi_n$ , reste proche de 1 pendant une durée  $\frac{1}{2M}$ .

Chaque  $\varphi_n(t, \cdot)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \left[0; \frac{1}{2M}\right]$  laisse  $\mathcal{P}$  invariant. Ainsi, la famille

$$\left\{ \varphi_n(t, \cdot) \mid n \in \mathbb{N}^*, t \in \left[0; \frac{1}{2M}\right] \right\}$$

est normale (d'après le théorème de Montel). De plus, d'après l'équation ci-dessus et le théorème de Hurwitz, toute fonction limite de fonctions de cette famille laisse  $\mathcal{P}$  invariant.

Soit  $K$  un compact de  $\mathcal{P}$ . La famille de fonctions  $\{\varphi(n, \cdot) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  est équicontinue sur l'ensemble compact  $\left[0; \frac{1}{2M}\right] \times K$ . D'après le théorème d'Ascoli, on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction holomorphe  $\varphi$ . On vérifie alors (par passage à la limite) que  $\varphi$  est un semi-flot restreint à  $\left[0; \frac{1}{2M}\right] \times K$ .

Quitte à prendre une exhaustion de  $\mathcal{P}$  par des compacts (et à effectuer un procédé diagonal), on dispose d'une fonction  $\varphi : \left[0; \frac{1}{2M}\right] \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  qui est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, z) = G(\varphi(t, z)) \\ \varphi(0, z) = z \end{cases}.$$

Enfin, remarquons que si l'on dispose d'une solution  $\varphi$  du problème ci-dessus définie sur  $[0; t_0] \times \mathcal{P}$ , alors on définit une solution du même problème sur  $[0; 2t_0] \times \mathcal{P}$  en posant pour  $t \in [t_0; 2t_0]$ ,

$$\varphi(t, z) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t - t_0, \varphi(t_0, z)).$$

En itérant ce procédé, on construit finalement une solution du problème sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{P}$ , c'est-à-dire un semi-flot sur  $\mathcal{P}$  dont le générateur est  $G$ .

Montrons maintenant que  $ib$  est le point de Denjoy-Wolff du semi-flot ainsi créé. Il suffit de montrer que, pour tout  $z \in \mathcal{P}$ , on a  $\varphi(t, z) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} ib$ . Soit  $z_0 \in \mathcal{P}$ .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \Re \frac{1}{\varphi(t, z_0) - ib} \right] &= \Re \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\varphi(t, z_0) - ib} \right) \right] \\
&= \Re \left[ \frac{\frac{d}{dt} \varphi(t, z_0)}{(\varphi(t, z_0) - ib)^2} \right] \\
&= \Re \left[ \frac{G(\varphi(t, z_0))}{(\varphi(t, z_0) - ib)^2} \right] \\
&= \Re [F(\varphi(t, z_0))] \\
&> 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $t \mapsto \Re \frac{1}{\varphi(t, z_0) - ib}$  est croissante et, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\Re \frac{1}{\varphi(t, z_0) - ib} \geq \Re \frac{1}{z_0 - ib} > 0.$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
\Re \varphi(t, z_0) &= \Re (\varphi(t, z_0) - ib) \\
&= \Re (\varphi(t, z_0) - ib) \\
&= \Re \left( \frac{|\varphi(t, z_0) - ib|^2}{\varphi(t, z_0) - ib} \right) \\
&\geq |\varphi(t, z_0) - ib|^2 \Re \left( \frac{1}{z_0 - ib} \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour montrer que  $\varphi(t, z_0) \rightarrow ib$ , il suffit de montrer que  $\Re [\varphi(t, z_0)] \rightarrow 0$ . Soit  $\tilde{G}$  une primitive de  $\frac{1}{G}$  sur  $\mathcal{P}$  (une telle primitive existe puisque  $|F| > 0$  sur  $\mathcal{P}$ ). Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \tilde{G}(\varphi(t, z_0)) \right) &= \frac{d}{dt} \varphi(t, z_0) \times (\tilde{G})'(\varphi(t, z_0)) \\
&= G(\varphi(t, z_0)) \frac{1}{G(\varphi(t, z_0))} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que  $\tilde{G}(\varphi(t, z_0)) = t + \tilde{G}(z_0)$ .

Supposons maintenant par l'absurde que  $\Re \varphi(t, z_0) \not\rightarrow 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $t_n$  une suite de réels strictement croissante telle que  $t_n \rightarrow +\infty$  et  $\Re(\varphi(t_n, z_0)) \geq \varepsilon$ . D'après le théorème de Denjoy-Wolff, l'ensemble  $\{\varphi(t_n, z_0) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  est relativement compact. Soit  $K$  un compact contenant cet ensemble. Alors,  $G$  est bornée sur  $K$ . Or, comme  $t_n \rightarrow +\infty$ ,  $\tilde{G}(\varphi(t_n, z_0)) = t_n + \tilde{G}(z_0) \rightarrow \infty$ . Ceci fournit la contradiction souhaitée.

Supposons maintenant que  $G$  vérifie la condition (i). Remarquons qu'on peut voir le cas (i) comme le cas (ii) où l'on aurait pris  $b = \infty$ . On va effectuer le changement de variable  $z \mapsto \frac{1}{z}$  pour se ramener au cas (ii) avec  $b = 0$ .

Définissons sur  $\mathcal{P}$  une fonction holomorphe  $H$  par  $H(z) = -z^2 G\left(\frac{1}{z}\right)$ . Comme  $H$  vérifie la condition (ii), elle engendre un semi-flot  $\psi$  tel que  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\psi^2(t, z) G\left(\frac{1}{\psi(t, z)}\right)$ . On pose alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  et pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\varphi(t, z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\psi(t, \frac{1}{z})}.$$

Remarquons que  $\varphi$  est un semi-flot. On a en outre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \frac{1}{z})}{\psi^2(t, \frac{1}{z})} \\ &= G\left(\frac{1}{\psi(t, \frac{1}{z})}\right) \\ &= G(\varphi(t, z)). \end{aligned}$$

Donc  $G$  est bien le générateur du semi-flot  $\varphi$ .

Il reste maintenant à montrer que les générateurs d'un semi-flot vérifient nécessairement l'une des trois conditions de l'énoncé. Soit une fonction  $G$  qui engendre un semi-flot  $\varphi$ . Nous allons distinguer différents cas selon le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi$ .

**Premier cas** Supposons que  $\zeta \in \mathcal{P}$  est le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi$ . Nous allons montrer que  $G$  vérifie alors la condition (iii). Comme dans la preuve du sens réciproque (traité précédemment), nous conjugurons par une homographie pour nous ramener au cas d'un semi-flot  $\psi$  sur le disque dont le point de Denjoy-Wolff est 0. Le lemme de Schwarz (1.11) permet alors de montrer que pour tout  $Z \in \mathbb{D}$ , la fonction  $t \mapsto |\psi(t, Z)|$  est décroissante. Alors, pour tout  $z \in \mathcal{P}$ , la fonction  $t \mapsto |L(\varphi(t, z))|^2$  est également décroissante. Ainsi, pour tout  $z \in \mathcal{P}$ , on a  $\frac{\partial}{\partial t} [|L(\varphi(t, z))|^2] \leq 0$ . En utilisant le fait que  $\frac{\partial}{\partial t} |f(t, z)|^2 = 2\Re(f'(t)\overline{f(t)})$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [|L(\varphi(t, z))|^2] &= 2\Re \left[ \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, z) (\varphi(t, z) + \bar{\zeta}) - (\varphi(t, z) - \zeta) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, z) \overline{\frac{\varphi(t, z) - \zeta}{\varphi(t, z) + \bar{\zeta}}}}{(\varphi(t, z) + \bar{\zeta})^2} \right] \\ &= 4\Re(\zeta) \Re \left[ \frac{G(\varphi(t, z)) \overline{\frac{\varphi(t, z) - \zeta}{\varphi(t, z) + \bar{\zeta}}}}{(\varphi(t, z) + \bar{\zeta})^2} \right]. \end{aligned}$$

En évaluant en  $t = 0$  et vu que  $\zeta \in \mathcal{P}$ , nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \Re \left[ \frac{G(z)\overline{(z - \zeta)}}{(z + \bar{\zeta})} \frac{1}{(z + \bar{\zeta})(\bar{z} + \zeta)} \right] &\leq 0 \\ \Re \left[ \frac{G(z)\overline{(z - \zeta)}}{(z + \bar{\zeta})} \right] &\leq 0. \end{aligned}$$

Soit  $F$  la fonction holomorphe sur  $\mathcal{P}$  définie par  $F(z) = \frac{G(z)}{(z + \bar{\zeta})(\zeta - z)}$ . Nous voulons montrer que  $\Re F \geq 0$ . Or,  $\Re \left[ \frac{G(z)\overline{(z - \zeta)}}{z + \bar{\zeta}} \right] = \Re \left[ F(z)(\zeta - z)\overline{(z - \zeta)} \right] \leq 0$ . Comme  $(\zeta - z)\overline{(z - \zeta)} \in \mathbb{R}^{-*}$ , nous obtenons  $\Re(F(z)) \geq 0$ , ce qui prouve que  $G$  vérifie la condition (iii).

**Second cas** Nous supposons maintenant que le point de Denjoy-Wolff  $\zeta$  du semi-flot se trouve  $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Considérons l'homographie  $\tilde{L} : z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ . Remarquons que  $\tilde{L} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{D}$  est un biholomorphisme. On note  $\psi$  le semi-flot sur  $\mathbb{D}$  obtenu en conjuguant par  $\tilde{L}$  le semi-flot  $\varphi$ . Comme  $\zeta \in i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , le point de Denjoy-Wolff  $\alpha$  de  $\psi$  est sur  $\mathbb{T}$ . Remarquons que pour  $Z \in \mathbb{D}$ , on a  $\Re\left(\frac{\alpha+Z}{\alpha-Z}\right) = \frac{|\alpha|^2 - |Z|^2}{|\alpha-Z|^2}$ .

Soit  $Z \in \mathbb{D}$  et  $t > 0$ . Le lemme de Julia (1.14) appliqué à la fonction  $\psi(t, \cdot)$ , au point base  $\alpha$  et à  $Z$  nous donne :

$$\Re\left[\frac{\alpha + \psi(t, Z)}{\alpha - \psi(t, Z)}\right] \geq \Re\left[\frac{\alpha + Z}{\alpha - Z}\right].$$

En d'autres termes, pour tout  $Z \in \mathbb{D}$ ,  $t \mapsto \Re\left[\frac{\alpha + \psi(t, Z)}{\alpha - \psi(t, Z)}\right]$  est une fonction croissante. Nous distinguons maintenant deux sous-cas :  $\zeta \in i\mathbb{R}$  (c'est-à-dire  $\alpha \neq 1$ ) et  $\zeta = \infty$  (c'est-à-dire  $\alpha = 1$ ).

**Premier sous cas :  $\zeta \in i\mathbb{R}$**  Rappelons que l'homographie inverse de  $\tilde{L}$  est  $\tilde{L}^{-1} : Z \mapsto \frac{Z+1}{Z-1}$ . Soit  $z \in \mathcal{P}$  et  $Z = \tilde{L}(z)$ . Un calcul direct permet de montrer que  $\frac{\alpha + \psi(t, Z)}{\alpha - \psi(t, Z)} = \frac{ib\varphi(t, z) - 1}{\varphi(t, z) - ib}$ . Il découle alors des calculs précédents que la fonction  $t \mapsto \Re\left[\frac{ib\varphi(t, z) - 1}{\varphi(t, z) - ib}\right]$ . En dérivant par rapport à  $t$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \Re\left[\frac{ib\varphi(t, z) - 1}{\varphi(t, z) - ib}\right] \right) &\geq 0 \\ \Re\left(\frac{ibG(\varphi(t, z))(\varphi(t, z) - ib) - (ib\varphi(t, z) - 1)G(\varphi(t, z))}{(\varphi(t, z) - ib)^2}\right) &\geq 0. \end{aligned}$$

En évaluant en  $t = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Re\left(\frac{ibG(z)(z - ib) - (ibz - 1)G(z)}{(z - ib)^2}\right) &\geq 0 \\ \Re\left(\frac{G(z)(b^2 + 1)}{(z - ib)^2}\right) &\geq 0 \\ \Re\left(\frac{G(z)}{(z - ib)^2}\right) &\geq 0. \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $G$  vérifie la condition (ii).

**Second sous-cas** Supposons que  $\zeta = \infty$ . En appliquant (comme dans le sous-cas précédent) le lemme de Julia, nous montrons que la fonction  $t \mapsto \left[\frac{1 + \psi(t, Z)}{1 - \psi(t, Z)}\right]$  est croissante. Or, pour tout  $z \in \mathcal{P}$ , en posant  $Z = \tilde{L}(z)$ , nous avons  $\frac{1 + \psi(t, Z)}{1 - \psi(t, Z)} = \tilde{L}(\psi(t, Z)) = \varphi(t, z)$ . Donc, pour tout  $z \in \mathcal{P}$ ,  $t \mapsto \Re(\varphi(t, z))$  est une fonction croissante. En dérivant par rapport à  $t$ , nous obtenons que pour tout  $z \in \mathcal{P}$ ,  $\Re(G(\varphi(t, z))) \geq 0$ . En évaluant enfin en  $t = 0$ , nous avons  $\Re(G(z)) \geq 0$  pour tout  $z \in \mathcal{P}$ . La fonction  $G$  vérifie bien la condition (i). Ceci achève la preuve du théorème.  $\square$

## A.2 — Semi-groupes d'opérateurs de composition

Nous étudions maintenant les semi-groupes d'opérateurs de composition sur des espaces de fonctions holomorphes. Avant de commencer notre étude, nous présentons une application d'un résultat déjà vu (le lemme 4.5) au contexte spécifique des espaces de Banach de fonctions holomorphes.

**Proposition 5.7** *Soit  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  un espace de Banach de fonctions holomorphes continûment inclus dans  $\text{Hol}(D)$  et  $(T_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe algébrique sur  $\mathcal{X}$ . Supposons que :*

- (i) *l'espace des polynômes  $\mathbb{C}[z]$  est dense dans  $\mathcal{X}$  ;*
- (ii) *il existe  $\delta > 0$  tel que  $\sup_{0 < t < \delta} \|T_t\| < +\infty$  ;*
- (iii) *pour tout  $P \in \mathbb{C}[z]$ ,  $\|T_t(P) - P\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$  for  $t \rightarrow 0$ .*

*Alors,  $(T_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs.*

*Démonstration :* C'est une application directe du lemme 4.5. □

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette partie.

**Théorème 5.8** *Soit  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  un semi-flot continu de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  de générateur  $G$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Alors, la famille  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur  $\mathcal{D}_\alpha$  dont le générateur est l'opérateur non borné*

$$A : \begin{cases} D(A) \subset \mathcal{D}_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{D}_\alpha \\ f & \longmapsto & G \times f'. \end{cases} .$$

*De plus, le semi-groupe  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  est quasi-contractif.*

*Démonstration :* Comme  $(\varphi_t)_t$  est un semi-flot, pour chaque  $t \geq 0$ , la fonction  $\varphi_t$  est une fonction holomorphe et injective de  $\mathbb{D}$  dans lui-même. Alors, pour tout  $t \geq 0$ , l'opérateur  $C_{\varphi_t}$  est borné sur  $\mathcal{D}_\alpha$  (d'après le théorème 2.54). De plus, la famille  $(C_{\varphi_t})_t$  vérifie bien  $C_0 = \text{Id}$  et  $C_{\varphi_t} \circ C_{\varphi_s} = C_{\varphi_{t+s}}$ . C'est donc un semi-groupe algébrique sur  $\mathcal{D}_\alpha$ .

Il nous suffit de montrer que l'on peut appliquer la proposition 5.7. Commençons par prendre pour espace  $\mathcal{X} = \mathcal{D}_\alpha$ , qui est bien un espace de Hilbert constitué de fonctions holomorphes. Les polynômes sont denses dans  $\mathcal{D}_\alpha$ . De plus, si  $\alpha > 0$ , le développement limité effectué durant la preuve du théorème 2.54 nous montre qu'il existe  $M > 0$  et  $\delta > 0$  tels que, pour tout  $t \in [0; \delta[$ , on a  $\|C_{\varphi_t}\| \leq M$ .

Il suffit donc de montrer que, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[z]$ , on a  $\|C_{\varphi_t} \circ P - P\| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ . Par linéarité de la composition à gauche par un polynôme, il suffit de le montrer dans le cas où  $P$  est de la forme  $P(z) = z^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $n = 0$ , le résultat est clairement vrai. Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on remarque que  $(\varphi_t(z))^n - z^n = (\varphi_t - z) \times \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_t(z)^k z^{n-k-1}$ . Ainsi, pour montrer par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  que  $\varphi_t^n \rightarrow z^n$  dans  $\mathcal{D}_\alpha$ , il suffit de montrer que  $\varphi_t \xrightarrow{t \rightarrow 0} \text{Id}$  dans  $\mathcal{D}_\alpha$ . Rappelons que

$$\|\varphi_t - \text{Id}\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 = |\varphi_t(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |\varphi_t'(z) - 1|^2 (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi}.$$

Comme  $\varphi_t \xrightarrow{\text{CVLU}} \text{Id}$ , nous avons  $\varphi_t(0) \rightarrow 0$ . De plus, le théorème de Hurwitz permet d'affirmer que nous avons  $\varphi'(t) \rightarrow 1$ . Ainsi, le théorème de convergence dominée peut suffire pour conclure ; il faut juste vérifier qu'il s'applique bien dans notre situation. Le paramètre  $\alpha$  étant positif, il suffit de montrer que l'intégrale  $\int_{\mathbb{D}} |\varphi'_t(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi}$  est uniformément majorée lorsque

$t \rightarrow 0$ . Fixons donc  $t \in \mathbb{R}^+$ . Comme  $\varphi_t$  est injective (proposition 5.2) et comme  $\varphi_t(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ , on peut effectuer le changement de variable  $\omega = \varphi_t(z)$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |\varphi'_t(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} &= \int_{\varphi_t(\mathbb{D})} (1 - |\varphi_t^{-1}(\omega)|^2)^\alpha \frac{dA(\omega)}{\pi} \\ &\leq \int_{\varphi_t(\mathbb{D})} \frac{dA(\omega)}{\pi} \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{dA(\omega)}{\pi} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient que  $\varphi_t \rightarrow \text{Id}$  dans  $\mathcal{D}_\alpha$ . On a donc finalement montré l'hypothèse (iii). La démonstration du théorème est alors une application directe du lemme intermédiaire.

**Le semi-groupe est quasi-contractif** Le cas  $\alpha = 0$  étant connu (voir [11]), nous nous restreignons au cas où  $\alpha > 0$ . Notons que la preuve que nous présentons pour  $\alpha > 0$  est très similaire à celle du cas où  $\alpha = 0$ .

Il nous faut prouver que le semi-groupe  $(C_{\varphi_t})_t$  est quasi-contractif. Pour cela, il suffit de prouver qu'il existe une constante  $M$  telle que, pour  $t$  « petit », on a  $\|C_{\varphi_t}\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq 1 + M t$ . Soit  $\beta \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$  la suite telle que  $\mathcal{D}_\alpha = H^2(\beta)$ . Pour  $t \in \mathbb{R}^+$ , notons  $L_t = \sum_{n \geq 1} \frac{(|\varphi_t(0)|^2)^n}{\beta_n^2}$  et

$K_t = L_t + \left( \frac{1 + |\varphi_t(0)|}{1 - |\varphi_t(0)|} \right)^\alpha - 1$ . Nous allons faire un développement limité sur le majorant de  $\|C_{\varphi_t}\|_{\mathcal{D}_\alpha}$  pour en déduire le résultat souhaité.

Nous commençons par faire un développement limité de  $\sup_{x \in [0;1]} 1 + K_\omega x + 2\sqrt{L_\omega x(1-x)}$  lorsque  $|\omega| \rightarrow 0$ , avec  $L_\omega = \sum_{n \geq 1} \frac{|\omega|^{2n}}{\beta_n^2}$  et  $K_\omega = L_\omega + \left( \frac{1 + |\omega|}{1 - |\omega|} \right)^\alpha - 1$ .

D'abord,

$$L_\omega = (\alpha + 1)^2 |\omega|^2 + O(|\omega|^4)$$

et

$$K_\omega = 2\alpha |\omega| + O(|\omega|^2).$$

Comme  $\alpha > 0$ , il vient que  $K_\omega \geq 0$  dès lors que  $|\omega|$  est « petit ». Supposons donc que c'est le cas. Alors,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0;1]} 1 + K_\omega x + 2\sqrt{L_\omega x(1-x)} &= 1 + \frac{K_\omega}{2} + \frac{K_\omega}{2} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{4L_\omega}{K_\omega^2}}} + 2\sqrt{L_\omega} \sqrt{1 + \frac{4L_\omega}{K_\omega^2}} \\ &= 1 + O(|\omega|). \end{aligned}$$

De plus, si  $G$  est le générateur du semi-flot  $(\varphi_t)_t$ , nous savons que  $|\varphi_t(0)| = |G(0)|t + O(t)$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . Ainsi, il existe une constante  $M$  telle que

$$\|C_{\varphi_t}\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \sqrt{\sup_{x \in [0;1]} 1 + K_t x + 2\sqrt{L_t x(1-x)}} = 1 + O(t).$$

Ceci permet donc d'affirmer qu'il existe une constante  $M'$  telle que  $\|C_{\varphi_t}\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq 1 + M't$  pour  $t$  « suffisamment petit » et achève donc la preuve.  $\square$

Sur l'espace de Hardy du disque unité, nous disposons d'une condition nécessaire et suffisante caractérisant les générateurs des semi-groupes d'opérateurs de composition. Le résultat qui suit est dû à Avicou, Chalendar et Partington (il s'agit des théorèmes 3.9 et 4.3 de [12], et du théorème 2.8 de [13]).

**Théorème 5.9** *Soit  $\mathcal{X} = H^2(\mathbb{D})$  ou  $\mathcal{D}$ . Soit  $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Soit  $A$  l'opérateur (non nécessairement borné) sur  $\mathcal{X}$  défini par  $A(f) = G \times f'$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i)  $G$  engendre un semi-flot de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  ;
- (ii)  $\forall z \in \mathbb{D}$ ,  $2\Re(\bar{z}G(z)) + (1 - |z|^2)\Re(G'(z)) \leq 0$  ;
- (iii)  $A$  engendre un semi-groupe quasi-contractif ;
- (iv)  $A$  engendre un semi-groupe d'opérateurs de composition.

En outre, si les conditions ci-dessus sont vérifiées, alors le semi-groupe engendré par  $A$  est analytique.

Remarquons par ailleurs que Gallardo et Yakubovich d'une part (dans [35]) et Arendt et Chalendar d'autre part (dans [9]) ont montré que l'hypothèse de quasi-contractivité dans (iii) n'est pas nécessaire.

**Théorème 5.10** *Soit  $\mathcal{X} = H^2(\mathbb{D})$  ou  $\mathcal{D}$ . Soit  $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Soit  $A$  l'opérateur (non nécessairement borné) sur  $\mathcal{X}$  défini par  $A(f) = G \times f'$ . Les assertions suivantes s'équivalent :*

- (i)  $G$  engendre un semi-flot  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  ;
- (ii)  $A$  engendre un semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  fortement continu.

En outre, si les conditions ci-dessus sont vérifiées, alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a  $T_t = C_{\varphi_t} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . De plus, le semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  est analytique et quasi-contractif.

### A.3 — Exemple

Dans cette sous-partie, nous étudions en détail un exemple particulier de semi-groupe d'opérateurs de composition qui jouera un rôle clef dans notre étude de la preuve du théorème de Nordgren-Rosenthal-Wintrobe. Pour  $t \in \mathbb{R}^+$ , nous considérons l'application

$$\varphi_t : \begin{cases} \mathbb{D} & \rightarrow & \mathbb{D} \\ z & \mapsto & \frac{z + \frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}}}{1 + z\frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}}} = \frac{(1+e^{-t})z + (1-e^{-t})}{(1+e^{-t}) + z(1-e^{-t})} \end{cases} .$$

Remarquons que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ , la fonction  $\varphi_t$  est un automorphisme hyperbolique de  $\mathbb{D}$  dont le point de Denjoy-Wolff est 1 et l'autre point fixe est  $-1$ . Par ailleurs, si  $\psi$  est un automorphisme hyperbolique de  $\mathbb{D}$  ayant 1 pour point de Denjoy-Wolff et  $-1$  pour autre point fixe, alors il existe  $t \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\psi = \varphi_t$ .

Nous pouvons appliquer à la famille  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  les résultats de la sous-partie qui précède.

**Proposition 5.11** *La famille  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  est un semi-flot sur  $\mathbb{D}$  de générateur  $G : z \mapsto \frac{1 - z^2}{2}$ .*

*En particulier, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , la famille  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur  $\mathcal{D}_\alpha$ . Le générateur de  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  est l'opérateur non borné*

$$H : \begin{cases} \mathcal{D}_\alpha & \longrightarrow \mathcal{D}_\alpha \\ f & \longmapsto z \mapsto \left( \frac{1 - z^2}{2} \times f'(z) \right) \end{cases} .$$

*Démonstration* : Nous montrons d'abord que la famille  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  est un semi-flot de fonctions holomorphes. Soient  $t, s \in \mathbb{R}^+$  et  $z \in \mathbb{D}$ . On a

$$\begin{aligned} \varphi_s \circ \varphi_t(z) &= \frac{(1 + e^{-s}) \frac{(1+e^{-t})z + (1-e^{-t})}{(1+e^{-t}) + z(1-e^{-t})} + (1 - e^{-s})}{(1 + e^{-s}) + \frac{(1+e^{-t})z + (1-e^{-t})}{(1+e^{-t}) + z(1-e^{-t})} (1 - e^{-s})} \\ &= \frac{(1 + e^{-s}) [(1 + e^{-t})z + (1 - e^{-t})] + (1 - e^{-s}) [(1 + e^{-t}) + z(1 - e^{-t})]}{(1 + e^{-s}) [(1 + e^{-t}) + z(1 - e^{-t})] + (1 - e^{-s}) [(1 + e^{-t})z + (1 - e^{-t})]} \\ &= \frac{(1 + e^{-t-s})z + (1 - e^{-t-s})}{(1 + e^{-t-s}) + z(1 - e^{-t-s})} \\ &= \varphi_{t+s}(z). \end{aligned}$$

La famille  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  est donc un semi-flot d'opérateurs. Alors, d'après le théorème 5.8, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , la famille  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur  $\mathcal{D}_\alpha$ .

Nous calculons le générateur  $G$  du semi-flot  $(\varphi_t)$ . Pour cela, il nous suffit de voir que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{d}{dt} [\varphi_t(z)] = \frac{\frac{2e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \left( 1 + z \frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}} \right) - \left( z + \frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}} \right) \times z \frac{2e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}}{\left( 1 + z \frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}} \right)^2}.$$

En évaluant en  $t = 0$ , nous obtenons

$$G(z) = \frac{\frac{1}{2} - z \times z \frac{1}{2}}{1^2} = \frac{1 - z^2}{2}.$$

Ceci achève la preuve. □

Nous étudions maintenant le spectre et le spectre ponctuel du semi-groupe  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$ . Les résultats qui suivent peuvent être trouvés par exemple dans [26] (notamment au lemme 7.3 et au théorème 7.4). Pour  $\mu \in \mathbb{C}^*$ , rappelons que si nous notons

$$g_\mu : \begin{cases} \mathbb{D} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^\mu \in \text{Hol}(\mathbb{D}), \end{cases}$$

alors, d'après la proposition 2.38, nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall \mu \in \mathbb{C}^*, g_\mu \circ \varphi_t = \left( \frac{1 + \varphi_t(0)}{1 - \varphi_t(0)} \right) g_\mu.$$

De la description du spectre ponctuel de  $f \mapsto f \circ \varphi_t \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ , nous pouvons déduire le spectre ponctuel de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\alpha)$ . Commençons par établir un lemme intermédiaire.

**Lemme 5.12** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Alors, pour tout  $\mu \in \mathbb{C}$ , la fonction  $g_\mu \in \mathcal{D}_\alpha$  si et seulement si  $|\Re(\mu)| < \frac{\alpha}{2}$ .*

*Démonstration* : Soit  $\mu \in \mathbb{C}$ . D'après la proposition 1.86, les fonctions  $g_{i\Im(\mu)}$  et  $g_{-i\Im(\mu)}$  sont des multiplicateurs sur  $\mathcal{D}_\alpha$ , donc  $g_\mu \in \mathcal{D}_\alpha$  si et seulement si  $g_{\Re(\mu)} \in \mathcal{D}_\alpha$ . Sans perte de généralité, nous pouvons donc supposer que  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Supposons que  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . Alors, la fonction  $z \mapsto (1+z)^\mu$  est un multiplicateur de  $\mathcal{D}_\alpha$ . Il nous suffit donc d'étudier la fonction

$$\varphi_\mu : z \mapsto \left( \frac{1}{1-z} \right)^\mu = \sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\mu)} z^n.$$

Ainsi,  $\psi_\mu \in \text{Mult}_\alpha$  si et seulement si la série de terme général

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \times \left( \frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\mu)} \right)^2$$

converge. Une application de la formule de Stirling montre que c'est le cas si et seulement si  $2\mu < 1$ .

Supposons maintenant que  $\mu \in \mathbb{R}^-$ . Le raisonnement est similaire au cas précédent. Soit  $\nu = -\mu$ . Alors, la fonction  $z \mapsto (1-z)^\nu$  est un multiplicateur de  $\mathcal{D}_\alpha$ . Il nous suffit donc d'étudier la fonction

$$\psi_\mu : z \mapsto (1+z)^\mu = \left( \frac{1}{1+z} \right)^\nu = \sum_{n \geq 0} \frac{\Gamma(n+\nu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu)} (-z)^n.$$

Alors,  $\psi_\mu \in \mathcal{D}_\alpha$  si et seulement si  $2\nu < 1$ , c'est-à-dire si  $0 \geq 2\mu > -1$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous déduisons du lemme 5.12 deux corollaires techniques.

**Corollaire 5.13** *Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ . Alors, l'intégrale*

$$\int_{\{z \in \mathbb{D} \mid |1+z| < 1\}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1+z|^{1-2\varepsilon} |1-z|^2} dA(z) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

*est finie.*

*Démonstration* : La preuve repose sur le fait que  $g_{\frac{1}{2}-\varepsilon} \in \mathcal{D}_\alpha$  d'après le lemme 5.12. Rappelons que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$g'_{\frac{1}{2}-\varepsilon}(z) = \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{2}{1-z^2} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{\varepsilon-\frac{1}{2}}.$$

Considérons l'ensemble  $D_1 = \{z \in \mathbb{D} \mid |1+z| < 1\}$ . Alors, il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $z \in D_1$ ,  $|1-z| \geq \eta$ . Ainsi, pour tout  $z \in D_1$ ,

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{1}{1-z^2} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{\varepsilon - \frac{1}{2}} \right|^2 (1-|z|^2)^\alpha &= \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2 \frac{1}{|1-z^2|^2} \frac{|1-z|^{1-2\varepsilon}}{|1+z|^{1-2\varepsilon}} (1-|z|^2)^\alpha \\ &\geq \eta^{1-2\varepsilon} \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2 \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-z^2|^2 |1+z|^{1-2\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{D_1} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1+z|^{1-2\varepsilon} |1-z^2|^2} dA(z) &\leq \frac{1}{\eta^{1-2\varepsilon} \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2} \int_{D_1} \left| \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{1}{1-z^2} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{\varepsilon - \frac{1}{2}} \right|^2 (1-|z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} \\ &= \frac{1}{4\eta^{1-2\varepsilon} \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2} \int_{D_1} \left| g'_{\frac{1}{2}-\varepsilon}(z) \right|^2 (1-|z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} \\ &\leq \frac{1}{4\eta^{1-2\varepsilon} \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2} \int_{\mathbb{D}} \left| g'_{\frac{1}{2}-\varepsilon}(z) \right|^2 (1-|z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} \\ &\leq \frac{1}{4\eta^{1-2\varepsilon} \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2} \left\| g_{\frac{1}{2}-\varepsilon} \right\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Comme  $g_{\frac{1}{2}-\varepsilon} \in \mathcal{D}_\alpha$  d'après le lemme 5.12, toutes les intégrales ci-dessus sont finies. Ceci achève la preuve.  $\square$

**Corollaire 5.14** Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ . Alors, l'intégrale

$$\int_{\{|1-z|<1\} \cap \mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-z^2|^2 |1-z|^{1-2\varepsilon}} dA(z) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

est finie.

*Démonstration* : La preuve est naturellement similaire à celle du corollaire 5.13, sauf qu'elle repose sur le fait que  $g_{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \in \mathcal{D}_\alpha$ . Rappelons que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$g'_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z) = \left( -\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{2}{1-z^2} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Considérons l'ensemble  $D_2 = \{z \in \mathbb{D} \mid |1-z| < 1\}$ . Alors, il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $z \in D_2$ ,  $|1+z| \geq \eta$ . Ainsi, pour tout  $z \in D_2$ ,

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{1}{1-z^2} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \right|^2 (1-|z|^2)^\alpha &= \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2 \frac{1}{|1-z^2|^2} \frac{|1+z|^{1-2\varepsilon}}{|1-z|^{1-2\varepsilon}} (1-|z|^2)^\alpha \\ &\geq \eta^{1-2\varepsilon} \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2 \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-z^2|^2 |1-z|^{1-2\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{D_2} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-z^2|^2 |1-z|^{1-2\varepsilon}} dA(z) &\leq \frac{1}{\eta^{1-2\varepsilon} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2} \int_{D_1} \left| \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \frac{1}{1-z^2} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\varepsilon-\frac{1}{2}} \right|^2 (1-|z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} \\
&= \frac{1}{\eta^{1-2\varepsilon} \left(4\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2} \int_{D_1} \left| g'_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z) \right|^2 (1-|z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} \\
&\leq \frac{1}{4\eta^{1-2\varepsilon} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2} \int_{\mathbb{D}} \left| g'_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(z) \right|^2 (1-|z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} \\
&\leq \frac{1}{4\eta^{1-2\varepsilon} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2} \left\| g_{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \right\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 < +\infty.
\end{aligned}$$

Comme  $g_{\varepsilon-\frac{1}{2}} \in \mathcal{D}_\alpha$  d'après le lemme 5.12, toutes les intégrales ci-dessus sont finies. Ceci achève la preuve.  $\square$

Le résultat suivant est le lemme 7.2 de [26].

**Lemme 5.15** *Soit  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  un automorphisme hyperbolique dont le point de Denjoy-Wolff est  $\omega \in \mathbb{T}$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Alors, le rayon spectral de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\alpha)$  vérifie*

$$r(C_\varphi) \leq \varphi'(\omega)^{\frac{-\alpha}{2}}.$$

Nous en déduisons une caractérisation spectrale des opérateurs de composition par un automorphisme hyperbolique.

**Corollaire 5.16** *Soit  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  un automorphisme hyperbolique dont le point de Denjoy-Wolff est 1. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Alors, en tant qu'opérateur sur  $\mathcal{D}_\alpha$ , l'opérateur  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\alpha)$  a pour spectre*

$$\sigma(C_\varphi) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi'(1)^{\frac{\alpha}{2}} \leq |\lambda| \leq \varphi'(1)^{\frac{-\alpha}{2}} \right\}$$

et pour spectre ponctuel

$$\sigma_p(C_\varphi) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid \varphi'(1)^{\frac{\alpha}{2}} < |\mu| < \varphi'(1)^{\frac{-\alpha}{2}} \right\}.$$

De plus, pour tout  $\mu \in \sigma_p(C_\varphi)$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\mu = e^\lambda$ , le sous-espace propre associé à  $\mu$  est  $E_\mu = \text{Vect} \left[ g_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mu = \left( \frac{1+\varphi(0)}{1-\varphi(0)} \right)^\lambda \right]$ .

*Démonstration* : La description du spectre ponctuel et des sous-espaces propres découle directement des calculs effectués à la proposition 2.38 et du résultat du lemme 5.12. En particulier, comme le spectre de  $C_\varphi$  est fermé et qu'il contient le spectre ponctuel, nous avons bien

$$\sigma(C_\varphi) \supset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi'(1)^{\frac{\alpha}{2}} \leq |\lambda| \leq \varphi'(1)^{\frac{-\alpha}{2}} \right\}$$

D'après le lemme 5.15, nous avons par ailleurs  $\sigma(C_\varphi) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \varphi'(1)^{\frac{-\alpha}{2}} \right\}$ . Nous établissons maintenant la borne inférieure sur le spectre de  $C_\varphi$ .

Pour cela, remarquons que comme  $\varphi$  est un automorphisme hyperbolique, alors  $\varphi^{-1}$  est également un automorphisme hyperbolique et en notant  $\omega$  le point de Denjoy-Wolff de  $\varphi^{-1}$ , nous avons  $\varphi'(\omega) = \frac{1}{\varphi'(1)}$ . Alors, d'après le lemme 5.15,

$$\sigma(C_{\varphi^{-1}}) \subset \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| \leq \left( \frac{1}{\varphi'(1)} \right)^{\frac{-\alpha}{2}} \right\}.$$

Or, comme  $C_{\varphi}$  est inversible, nous avons

$$\sigma(C_{\varphi}) = \left\{ \frac{1}{\mu} \mid \mu \in \sigma(C_{\varphi^{-1}}) \right\}.$$

Ceci montre que  $\sigma(C_{\varphi}) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq \varphi'(1)^{\frac{\alpha}{2}} \right\}$  et achève la preuve.  $\square$

Nous étudions maintenant le générateur du semi-groupe  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{D}_{\alpha}$ .

**Proposition 5.17** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Alors, le générateur du semi-groupe  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  est l'opérateur non borné*

$$H : \begin{cases} \mathcal{D}_{\alpha} & \rightarrow \mathcal{D}_{\alpha} \\ f & \mapsto z \mapsto \left( \frac{1-z^2}{2} \times f'(z) \right) \end{cases}.$$

Son spectre ponctuel est

$$\sigma_p(H) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\Re(\lambda)| < \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

De plus, pour tout  $\lambda \in \sigma_p(H)$ , le sous-espace propre associé à  $\lambda$  est  $E_{\lambda}(H) = \mathbb{C} \cdot g_{\lambda}$ .

*Démonstration :* Le fait que  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  soit un semi-groupe de générateur  $H$  découle directement de la proposition 5.11.

Soit  $\lambda \in \sigma_p(H)$  une valeur propre et  $g \in E_{\lambda}(H)$  un vecteur propre non nul associé. Alors, comme  $E_{\lambda}(H)$  est un sous-espace invariant de  $H$ , c'est aussi un sous-espace invariant pour le semi-groupe  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , nous avons

$$C_{\varphi_t}(f) = e^{\lambda t} g.$$

En particulier,  $e^{\lambda t}$  est une valeur propre de  $C_{\varphi_t}$ , et  $g$  est un vecteur propre de  $C_{\varphi_t}$ . Il existe donc  $\lambda \in \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\Re(\lambda)| < \frac{\alpha}{2} \right\}$  tel que  $g = g_{\lambda}$ .

Il nous suffit donc de vérifier que, pour tout  $\lambda \in \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\Re(\lambda)| < \frac{\alpha}{2} \right\}$ , la fonction  $g_{\lambda}$  est un vecteur propre de  $H$ . Fixons un tel  $\lambda$ . Alors, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$g'_{\lambda}(z) = \lambda \times \frac{2}{1-z^2} g_{\lambda}(z).$$

Ceci prouve que  $g_{\lambda} \in E_{\lambda}(H)$  et achève donc la preuve.  $\square$

## B) Vers une généralisation du théorème de Nordgren, Rosenthal et Wintrobe

DANS l'article [47], Nordgren, Rosenthal et Wintrobe démontrent un résultat sur l'universalité des opérateurs de composition dont le symbole est un automorphisme hyperbolique.

**Théorème 5.18 (NRW, Nordgren-Rosenthal-Wintrobe)** *Soient  $\varphi$  un automorphisme hyperbolique de  $\mathbb{D}$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $C_\varphi \in \mathcal{L}(H^2)$ . Alors, l'opérateur  $C_\varphi - \lambda \text{Id}$  est universel.*

Récemment, dans [24], Cowen et Gallardo ont donné une nouvelle preuve de ce résultat en utilisant la théorie des semi-groupes. L'idée générale de leur approche est la suivante : d'abord, sans perte de généralité, on peut se rapporter au cas où  $\varphi = \varphi_t$  pour un certain  $t \in \mathbb{R}^+$ . Alors, un résultat de [25] permet de construire un isomorphisme continu  $S \in \mathcal{L}(H^2)$  tel que le semi-groupe  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  est équivalent *via* l'isomorphisme  $S$  à un semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz (ce fait repose sur l'observation selon laquelle les générateurs des semi-groupes en question ont des propriétés spectrales similaires). On conclut alors en appliquant le théorème de Caradus (théorème 3.3) aux opérateurs de Toeplitz (ce qui est plus simple que d'appliquer le théorème de Caradus directement aux opérateurs de composition).

Dans cette partie, nous allons tenter de généraliser cette preuve aux espaces  $\mathcal{D}_\alpha$  pour  $\alpha \geq 1$ . Nous montrons que l'approche de Cowen et Gallardo fonctionne presque complètement, sauf pour établir la continuité de l'isomorphisme  $S$ .

### B.1 — Un semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz

Dans cette sous-partie, nous commençons par étudier le semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz qui servira de modèle au semi-groupe  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$ . Commençons par une définition.

**Définition 5.19** *On appelle semi-groupe (continu multiplicatif de fonctions holomorphes) sur  $\mathbb{D}$  toute famille  $(\psi_t)_{t \geq 0} \in \text{Hol}(\mathbb{D})^{\mathbb{R}^+}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i) on a  $\psi_0 = (z \mapsto 1)$  ;
- (ii) pour tous  $s, t \in \mathbb{R}^+$  et pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $\psi_{s+t}(z) = \psi_s(t) \times \psi_t(z)$  ;
- (iii) pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , la fonction  $\Psi_z : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \mapsto \mathbb{C} \\ t & \mapsto \psi_t(z) \end{cases}$  est continue.

**Exemple** Pour  $t \in \mathbb{R}^+$ , nous définissons

$$\psi_t : \begin{cases} \mathbb{D} & \rightarrow \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid e^{-\frac{\alpha t}{2}} < |\mu| < e^{\frac{\alpha t}{2}} \right\} \\ z & \mapsto \left( \frac{1-z}{1+z} \right)^{\frac{\alpha t i}{\pi}} \end{cases} \in \text{Hol}(\mathbb{D}).$$

**Proposition 5.20** *La famille  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe multiplicatif de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$ .*

À partir de la famille  $(\psi_t)_{t \geq 0}$ , nous pouvons construire un semi-groupe d'opérateurs de multiplication.

Introduisons une notation. Pour  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $\alpha \geq 1$ , nous considérons l'opérateur (*a priori* non borné) sur  $\mathcal{D}_\alpha$  défini par

$$M_{\psi_t} : \begin{cases} D(M_{\psi_t}) \subset \mathcal{D}_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{D}_\alpha \\ f & \longmapsto & (z \mapsto \psi_t(z) \times f(z)) \end{cases} .$$

Nous commençons par montrer que les opérateurs  $M_{\psi_t}$  sont continus.

**Proposition 5.21** *Soient  $\alpha \geq 1$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ . Alors,  $M_{\psi_t}$  est un opérateur borné sur  $\mathcal{D}_\alpha$ . De plus, il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,*

$$\|M_{\psi_t}\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \|\psi_t\|_{H^\infty(D)} = e^{\frac{\alpha t}{2}}.$$

*Démonstration* : Il s'agit d'une application directe de la proposition 1.86. □

Nous pouvons maintenant montrer que la famille  $(M_{\psi_t})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe.

**Corollaire 5.22** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Alors, la famille  $(M_{\psi_t})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe d'opérateurs fortement continu sur  $\mathcal{D}_\alpha$ .*

*Démonstration* : Pour prouver ce résultat, nous allons appliquer le théorème 5.7. La famille  $(M_{\psi_t})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe algébrique d'opérateurs. D'après la proposition 5.21, il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $t \in [0; 42]$ , on a

$$\|M_{\psi_t}\| \leq e^{\frac{\alpha t}{2}} \leq M.$$

D'après la proposition 1.47, l'espace  $\mathbb{C}[z]$  est dense dans  $\mathcal{D}_\alpha$ . Nous montrons maintenant que pour tout  $P \in \mathbb{C}[z]$ , nous avons  $M_{\psi_t}(P) \rightarrow P$  dans  $\mathcal{D}_\alpha$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . Comme la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthonormale dans  $\mathcal{D}_\alpha$ , il nous suffit de montrer le résultat sur les monômes. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \|M_{\psi_t}(e_n) - e_n\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 &= |\psi_t(0) - 1|^2 \mathbf{1}_{n=0} + \int_{\mathbb{D}} |(\psi_t \times e_n)'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi} \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} (|1 - \psi_t(z)|^2 n^2 |z^{n-1}|^2 + |\psi_t'(z)|^2 |z^n|^2) (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $t \in [0; 42]$  et pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\psi_t'(z) = \frac{\alpha t i}{\pi} \frac{-2}{1 - z^2} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{\frac{\alpha t i}{\pi}}.$$

Alors,

$$\left( |1 - \psi_t(z)|^2 n^2 |z^{n-1}|^2 + |\psi_t'(z)|^2 |z^n|^2 \right) (1 - |z|^2)^\alpha \leq n^2 (M+1)^2 + \frac{\alpha^2 \times 42^2}{\pi^2} M^2 \times \frac{(1 - |z|^2)^\alpha}{1 - z^2}.$$

Remarquons que pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , nous avons  $|1 - z| \geq 1 - |z|$ . Il existe donc une constante  $C_1 > 0$  telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \Re(z) \geq 0 \Rightarrow \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - z|^2} \leq C_1.$$

Avec un argument similaire, nous pouvons montrer qu'il existe une constante  $C_2$  telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \Re(z) \leq 0 \Rightarrow \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - z|^2} \leq C_2.$$

Ainsi, la fonction  $z \mapsto \frac{(1 - |z|^2)^\alpha}{1 - z^2}$  est bornée donc intégrable sur  $\mathbb{D}$ . De plus, comme  $\psi_t \rightarrow 1$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{D}$ , le théorème de Weierstrass (théorème 1.26) nous dit que, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $\psi'_t(z) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Finalement, d'après le théorème de convergence dominée, nous avons

$$\|M_{\psi_t}(e_n) - e_n\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{D}} 0 \, dA(z) = 0.$$

Ceci prouve que  $M_{\psi_t}(e_n) \rightarrow e_n$  dans  $\mathcal{D}_\alpha$ . Nous pouvons alors conclure la preuve en appliquant le théorème 5.7.  $\square$

Nous déterminons maintenant le générateur du semi-groupe  $(M_{\psi_t})_{t \geq 0}$ .

**Proposition 5.23** *Le générateur du semi-groupe  $(M_{\psi_t})_{t \geq 0}$  est l'opérateur non borné*

$$G : \begin{cases} \mathcal{D}_\alpha & \longrightarrow \mathcal{D}_\alpha \\ f & \longmapsto \left( z \mapsto \frac{\alpha i}{\pi} \log \left( \frac{1 - z}{1 + z} \right) \times f(z) \right) \end{cases} .$$

*Démonstration* : Soit  $G$  le générateur de  $(M_{\psi_t})_{t \geq 0}$ . Soient  $f \in D(G)$  et  $z \in \mathbb{D}$ . D'après la proposition 4.12 et comme l'évaluation en  $z$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{D}_\alpha$  d'après la proposition 1.48, la fonction  $\varphi_{f,z} : t \mapsto M_{\psi_t}(f)(z)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\varphi'_{f,z}(t) = AM_{\psi_t}(f)(z).$$

Or, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\varphi_{f,z}(t) = \left( \frac{1 - z}{1 + z} \right)^{\frac{\alpha t i}{\pi}} \times f(z),$$

et donc

$$\varphi'_{f,z}(t) = \frac{\alpha i}{\pi} \log \left( \frac{1 - z}{1 + z} \right) \left( \frac{1 - z}{1 + z} \right)^{\frac{\alpha t i}{\pi}} \times f(z).$$

En évaluant en  $t = 0$ , il vient

$$\varphi_{f,z}(0) = A(f)(z) = \frac{\alpha i}{\pi} \log \left( \frac{1 - z}{1 + z} \right) \times f(z).$$

Ceci achève la preuve.  $\square$

Avant de poursuivre notre étude, nous énonçons un lemme utile. Considérons la fonction

$$\gamma : \begin{cases} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\Re(\lambda)| < \frac{\alpha}{2} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ \lambda & \longmapsto & \overline{-i \tan\left(\frac{\lambda\pi}{2\alpha}\right)} = \frac{1 - e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}}{1 + e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}} \end{cases}.$$

**Lemme 5.24** *La fonction  $\gamma$  est holomorphe et bijective. De plus, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\Re(\lambda)| < \frac{\alpha}{2}$ , on a*

$$\lambda = \frac{\alpha i}{\pi} \log\left(\frac{1 - \gamma(\lambda)}{1 + \gamma(\lambda)}\right).$$

*Démonstration* : Il suffit de calculer. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\Re(\lambda)| < \frac{\alpha}{2}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \gamma(\lambda)}{1 + \gamma(\lambda)} &= \frac{1 - \frac{1 - e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}}{1 + e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}}}{1 + \frac{1 - e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}}{1 + e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}}} = \left( \frac{1 - \frac{1 - e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}}{1 + e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}}}{1 + \frac{1 - e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}}{1 + e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}}} \right) \\ &= \left( \frac{1 + e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}} - (1 - e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}})}{1 + e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}} + (1 - e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}})} \right) \\ &= \frac{e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}}{e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}} = e^{\frac{i\lambda\pi}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \frac{\alpha i}{\pi} \log\left(\frac{1 - \gamma(\lambda)}{1 + \gamma(\lambda)}\right) &= \frac{\alpha i}{\pi} \frac{i\lambda\pi}{\alpha} \\ &= i\lambda = \lambda. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

Nous pouvons maintenant passer à l'étude du semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz  $(M_{\psi_t}^*)_{t \geq 0}$ . Rappelons que nous notons  $(K_z)_{z \in \mathbb{D}}$  les noyaux reproduisants sur  $\mathcal{D}_\alpha$ . Nous introduisons une nouvelle notation : pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\Re(\lambda)| < \frac{\alpha}{2}$ , nous notons

$$\widetilde{K}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} K_{\gamma(\lambda)}.$$

**Proposition 5.25** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . La famille  $(M_{\psi_t}^*)$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur  $\mathcal{D}_\alpha$  dont le générateur  $G^*$  est l'adjoint de l'opérateur non borné*

$$G^{**} = G : \begin{cases} \mathcal{D}_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{D}_\alpha \\ f & \longmapsto & \left( z \mapsto \frac{\alpha i}{\pi} \log\left(\frac{1 - z}{1 + z}\right) \times f(z) \right) \end{cases}.$$

*De plus, le spectre ponctuel de  $G^*$  est*

$$\sigma_p(G^*) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\Re(\lambda)| < \frac{\alpha}{2} \right\}$$

*et, pour tout  $\lambda \in \sigma_p(G^*)$ , le sous-espace propre associé à  $\lambda$  est  $E_\lambda(G^*) = \mathbb{C} \cdot \widetilde{K}_\lambda$ .*

*Démonstration* : Le fait que  $(M_{\psi_t}^*)$  est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur  $\mathcal{D}_\alpha$  vient du corollaire 5.22. Le fait que le générateur de ce semi-groupe est l'opérateur  $G^*$  vient de la proposition 5.23.

Soit  $\mu \in \sigma_p(G^*)$ . Soit  $g \in \mathcal{D}_\alpha$  un vecteur propre non nul de  $G^*$  associé à la valeur propre  $\mu$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , la fonction  $g$  est un vecteur propre de  $M_{\psi_t}^*$  associé à la valeur propre  $e^{\mu t}$ . Ainsi, d'après la proposition 1.81, il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\Re(\mu)| < \frac{\alpha}{2}$  tel que  $g = \widetilde{K}_\lambda$ .

Réciproquement, soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\Re(\lambda)| < \frac{\alpha}{2}$ . D'après le théorème 1.81 et le lemme 5.24, nous avons alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned} M_{\psi_t}^* \widetilde{K}_\lambda &= \overline{\psi_t(\gamma(\lambda))} g \\ &= \exp\left(\frac{\alpha i}{\pi} \log\left(\frac{1 - \gamma(\lambda)}{1 + \gamma(\lambda)}\right)\right) \widetilde{K}_\lambda \\ &= \exp(\lambda t) \widetilde{K}_\lambda. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à  $t$ , puis en évaluant en  $t = 0$ , nous avons bien que  $\widetilde{K}_\lambda$  est un vecteur propre (non nul) pour la valeur propre  $\lambda$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

## B.2 — Vers une extension de NRW

Nous passons maintenant à l'étude de la preuve du théorème 5.18 proprement dite. Nous commençons par un résultat sur l'universalité des opérateurs de Toeplitz que nous avons étudiés dans la section précédente.

**Théorème 5.26** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que*

$$\left(\frac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq |\lambda| \leq \left(\frac{1 + e^{-t}}{1 - e^{-t}}\right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

*l'opérateur  $M_{\psi_t}^* - \lambda \text{Id}$  est un opérateur universel.*

*Démonstration* : Soient  $t$  et  $\lambda$  vérifiant les hypothèses du théorème. Nous montrons que  $M_{\psi_t}^* - \lambda \text{Id}$  est universel en appliquant le théorème de Caradus (théorème 3.3).

Nous commençons par montrer que  $\text{Ker}(M_{\psi_t}^* - \lambda \text{Id}) = E_\lambda(M_{\psi_t}^*)$  est de dimension infinie. Pour cela rappelons que d'après le théorème 1.81, nous avons

$$\dim E_\lambda(M_{\psi_t}^*) = \text{Card} \left\{ z \in \mathbb{D} \mid \overline{\psi_t(z)} = \lambda \right\}.$$

Remarquons que l'application

$$\eta : \left\{ \begin{array}{ccc} \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\Re(\mu)| < \frac{\alpha}{2} \ln\left(\frac{1 + e^{-t}}{1 - e^{-t}}\right) \right\} & \longrightarrow & \left\{ \ell \in \mathbb{C} \mid \left(\frac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq |\ell| \leq \left(\frac{1 + e^{-t}}{1 - e^{-t}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \right\} \\ \mu & \longmapsto & \exp(\mu) \end{array} \right. .$$

est surjective et que, pour tout  $\ell \in \text{Im}(\eta)$ , la pré-image  $\eta^{-1}(\{\ell\})$  est infinie.

Alors, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\begin{aligned} \overline{\psi_t(z)} = \lambda &\Leftrightarrow \exp \left[ \frac{\alpha t i}{\pi} \log \left( \frac{1-z}{1+z} \right) \right] = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \mu \in \eta^{-1}(\{\lambda\}) \text{ tel que } \frac{\alpha t i}{\pi} \log \left( \frac{1-z}{1+z} \right) = \mu \\ &\Leftrightarrow \exists \mu \in \eta^{-1}(\{\lambda\}) \text{ tel que } z = \frac{\mu\pi - i\alpha t}{\mu\pi + i\alpha t}. \end{aligned}$$

Comme  $\eta^{-1}(\{\lambda\})$  est infini, nous avons bien montré que  $\left\{ z \in \mathbb{D} \mid \overline{\psi_t(z)} = \lambda \right\}$  est infini.

Nous montrons maintenant que  $M_{\psi_t}^* - \lambda \text{Id}$  est surjectif. Pour cela, il suffit de montrer qu'il admet un inverse à droite (même si cet inverse n'est pas un opérateur borné). En passant à l'adjoint, il nous suffit de montrer que l'opérateur  $M_{\psi_t} - \bar{\lambda} \text{Id}$  admet un inverse à gauche. Considérons alors l'opérateur non borné

$$N : \begin{cases} D(N) \subset \mathcal{D}_\alpha & \longrightarrow \\ f & \longmapsto \left( z \mapsto \frac{1}{\psi_t(z) - \bar{\lambda}} f(z) \right) \end{cases} \cdot$$

Comme  $(M_{\psi_t}^* - \lambda \text{Id})^* = M_{\psi_t} - \bar{\lambda} \text{Id}$  est l'opérateur de multiplication

$$M_{\psi_t} - \bar{\lambda} \text{Id} : \begin{cases} D(N) \subset \mathcal{D}_\alpha & \longrightarrow \\ f & \longmapsto (z \mapsto (\psi_t(z) - \bar{\lambda}) f(z)) \end{cases},$$

nous avons  $\text{Im}(M_{\psi_t} - \bar{\lambda} \text{Id}) \subset D(N)$  et, pour toute  $f \in \mathcal{D}_\alpha$ ,

$$N(M_{\psi_t} - \bar{\lambda} \text{Id})(f) = f.$$

Alors, l'opérateur non borné  $N^*$  est un inverse à droite de  $M_{\psi_t}^*$ , ce qui prouve que  $M_{\psi_t}^*$  est surjectif. Le résultat découle alors du théorème de Caradus (théorème 3.3).  $\square$

Nous énonçons maintenant une série de lemmes intermédiaires, dont l'objet est de définir l'isomorphisme  $S$  qui va réaliser l'équivalence entre les semi-groupes  $(C_{\varphi_t})_{t \geq 0}$  et  $(M_{\psi_t}^*)_{t \geq 0}$ .

**Lemme 5.27** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Il existe des constantes  $c, C \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $a, b \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$  telles que, pour tous  $\lambda, \mu \in [a; b]$ ,*

$$0 < c \left| \left\langle \widetilde{K}_\lambda, \widetilde{K}_\mu \right\rangle_{\mathcal{D}_\alpha} \right| \leq \left| \langle g_\lambda, g_\mu \rangle_{\mathcal{D}_\alpha} \right| \leq C \left| \left\langle \widetilde{K}_\lambda, \widetilde{K}_\mu \right\rangle_{\mathcal{D}_\alpha} \right| < +\infty.$$

*Démonstration* : Remarquons que la fonction

$$K : \begin{cases} \left[ \frac{-\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2} \right]^2 & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda, \mu) & \longmapsto \left\langle \widetilde{K}_\lambda, \widetilde{K}_\mu \right\rangle_{\mathcal{D}_\alpha} \end{cases}$$

est continue car pour tout  $\mu \in \left[ \frac{-\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2} \right]$ , la fonction  $\widetilde{K}_\mu$  est un noyau reproduisant pour  $\mathcal{D}_\alpha$ .

Soit  $\varepsilon = \frac{1}{100}$ . Nous montrons maintenant que la fonction

$$G : \begin{cases} \left[ \frac{-\alpha}{2} + \varepsilon; \frac{\alpha}{2} - \varepsilon \right]^2 & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda, \mu) & \longmapsto \langle g_\lambda, g_\mu \rangle_{\mathcal{D}_\alpha} \end{cases}$$

est continue. Considérons la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \left[ \frac{-\alpha}{2} + \varepsilon; \frac{\alpha}{2} - \varepsilon \right]^2 \times \mathbb{D} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda, \mu, z) & \longmapsto \frac{1}{\pi} \frac{4\lambda\bar{\mu}}{(1-z^2)^2} \left( \frac{1-z}{1+z} \right)^\lambda \overline{\left( \frac{1-z}{1+z} \right)^\mu} (1-|z|^2)^\alpha \end{cases},$$

de sorte que, pour tout  $(\lambda, \mu) \in \left[ \frac{-\alpha}{2} + \varepsilon; \frac{\alpha}{2} - \varepsilon \right]^2$ , on a

$$G(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(\lambda, \mu, z) \, dA(z).$$

Considérons les ensembles

$$D_1 = \{z \in \mathbb{D} \mid |1+z| < 1\},$$

$$D_2 = \{z \in \mathbb{D} \mid |1-z| < 1\},$$

et  $D_3 = \mathbb{D} - (D_1 \cup D_2)$ . Alors, il existe  $c_1, c_2$  et  $c_3 \in \mathbb{R}^{+*}$  telles que, pour tous  $\lambda, \mu \in \left[ \frac{-\alpha}{2} + \varepsilon; \frac{\alpha}{2} - \varepsilon \right]$  et pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$|\varphi(\lambda, \mu, z)| \leq \frac{c_1 (1-|z|^2)^\alpha}{|1+z|^{1-2\varepsilon} |1-z^2|^2} \mathbf{1}_{\{z \in D_1\}} + \frac{c_2 (1-|z|^2)^\alpha |1-z|^{-1+2\varepsilon}}{|1-z^2|^2} \mathbf{1}_{\{z \in D_2\}} + c_3 \mathbf{1}_{\{z \in D_3\}} \stackrel{\text{def}}{=} \psi(z).$$

D'après les corollaires 5.13 et 5.14, la fonction  $\psi$  est intégrable sur  $\mathbb{D}$ . De plus, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , la fonction  $(\lambda, \mu) \mapsto \varphi(\lambda, \mu, z)$  est continue. D'après le théorème de convergence dominée, la fonction  $G$  est donc bien continue.

Remarquons par ailleurs que  $K\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left\| \widetilde{K}_{\frac{1}{4}} \right\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \neq 0$  et que  $G\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left\| g_{\frac{1}{4}} \right\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \neq 0$ . Ainsi, il existe  $\eta > 0$  tel que la fonction

$$H : \begin{cases} \left[ \frac{1}{4} - \eta; \frac{1}{4} + \eta \right]^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\lambda, \mu) & \longmapsto \left| \frac{\langle \widetilde{K}_\lambda, \widetilde{K}_\mu \rangle_{\mathcal{D}_\alpha}}{\langle g_\lambda, g_\mu \rangle_{\mathcal{D}_\alpha}} \right| \end{cases}$$

est bien définie. De plus, il existe  $c$  et  $C \in \mathbb{R}^{+*}$  tels que  $H$  est bornée inférieurement par  $c$  et supérieurement par  $C$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Dans la suite, et sauf mention explicite du contraire, nous supposons implicitement que les constantes  $c, C, a$  et  $b$  vérifient la conclusion du lemme 5.27.

**Lemme 5.28** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Soient  $c, C, a$  et  $b$  des constantes vérifiant les conclusions du lemme 5.27. Alors, les familles  $\left( \widetilde{K}_\lambda \right)_{\lambda \in [a; b]}$  et  $(g_\lambda)_{\lambda \in [a; b]}$  sont libres dans  $\mathcal{D}_\alpha$ .*

*Démonstration* : D'après la proposition 5.25, pour tout  $\lambda \in [a, b]$ , la fonction  $\widetilde{K}_\lambda$  est un vecteur propre de  $G^*$  pour la valeur propre  $\lambda$ . En particulier, la famille  $\left(\widetilde{K}_\lambda\right)_{\lambda \in [a; b]}$  est libre dans  $\mathcal{D}_\alpha$ .

De même, d'après la proposition 5.17, pour tout  $\lambda \in [a, b]$ , la fonction  $g_\lambda$  est un vecteur propre de  $H$  pour la valeur propre  $\lambda$ . En particulier, la famille  $(g_\lambda)_{\lambda \in [a; b]}$  est libre dans  $\mathcal{D}_\alpha$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

**Lemme 5.29** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Soient  $a$  et  $b$  des constantes vérifiant les conclusions du lemme 5.27. Alors, le sous-espace  $\text{Vect}\left(\widetilde{K}_\lambda \mid \lambda \in [a; b]\right)$  est dense dans  $\mathcal{D}_\alpha$ .*

*Démonstration* : Nous montrons que

$$\text{Vect}\left(\widetilde{K}_\lambda \mid \lambda \in [a; b]\right)^\perp = \{0\}.$$

Soit  $f \in \text{Vect}\left(\widetilde{K}_\lambda \mid \lambda \in [a; b]\right)^\perp$ . Alors, en considérant la fonction  $\gamma$  étudiée au lemme 5.24, nous avons

$$\forall \lambda \in [a, b], f(\gamma(\lambda)) = \left\langle f, \widetilde{K}_\lambda \right\rangle_{\mathcal{D}_\alpha} = 0.$$

D'après le théorème des zéros isolés, nous avons  $f = 0$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

**Lemme 5.30** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Soient  $a$  et  $b$  des constantes vérifiant les conclusions du lemme 5.27. Alors, le sous-espace  $\text{Vect}(g_\lambda \mid \lambda \in [a; b])$  est dense dans  $\mathcal{D}_\alpha$ .*

*Démonstration* : Pour  $\alpha = 1$ , le résultat est le lemme 1 de [25].

Nous supposons maintenant que  $\alpha > 1$ . Commençons par rappeler que d'après la proposition 5.12, nous avons l'inclusion

$$\text{Vect}(g_\lambda \mid \lambda \in [a; b]) \subset \mathcal{D}_\alpha.$$

En outre, d'après le théorème du graphe fermé, l'inclusion

$$I_{1, \alpha} : \begin{cases} \mathcal{D}_1 & \longrightarrow & \mathcal{D}_\alpha \\ f & \longmapsto & f \end{cases}$$

est continue : il existe  $M > 0$  telle que, pour toute  $f \in \mathcal{D}_1$ , on a  $\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq M \|f\|_{\mathcal{D}_1}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $f \in \mathcal{D}_\alpha$ . Comme  $\mathbb{C}[z]$  est dense dans  $\mathcal{D}_\alpha$  (d'après la proposition 1.47), il existe  $P \in \mathbb{C}[z]$  tel que  $\|f - P\|_{\mathcal{D}_\alpha} < \varepsilon$ . Par ailleurs, comme le sous-espace  $\text{Vect}(g_\lambda \mid \lambda \in [a; b])$  est dense dans  $\mathcal{D}_1$ , il existe  $g \in \text{Vect}(g_\lambda \mid \lambda \in [a; b])$  tel que  $\|P - g\|_{\mathcal{D}_1} < \varepsilon$ . Alors,  $g \in \mathcal{D}_\alpha$  et

$$\|f - g\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \|f - P\|_{\mathcal{D}_\alpha} + \|P - g\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq \varepsilon + M \|P - g\|_{\mathcal{D}_1} \leq (M + 1)\varepsilon.$$

Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous pouvons combiner les lemmes qui précèdent pour obtenir le résultat suivant.

**Théorème 5.31** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Alors, il existe deux opérateurs  $S$  et  $T$  (a priori non bornés) densément définis sur  $\mathcal{D}_\alpha$  et qui vérifient les propriétés suivantes :*

- (i) l'espace  $\text{Im}(S)$  est dense et  $\text{Im}(S) \subset D(T)$  ;  
(ii) l'espace  $\text{Im}(T)$  est dense et  $\text{Im}(T) \subset D(S)$  ;  
(iii) il existe  $a, b \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$  tels que la famille  $(g_\lambda)_{\lambda \in [a; b]} \subset D(T)$  engendre un sous-espace dense dans  $\mathcal{D}_\alpha$  et il existe  $c, C \in \mathbb{R}^{+*}$  tels que, pour tous  $\lambda, \mu \in [a; b]$ ,

$$c \left| \langle T(g_\lambda), T(g_\mu) \rangle_{\mathcal{D}_\alpha} \right| \leq \left| \langle g_\lambda, g_\mu \rangle_{\mathcal{D}_\alpha} \right| \leq \left| \langle T(g_\lambda), T(g_\mu) \rangle_{\mathcal{D}_\alpha} \right| ;$$

- (iv) il existe  $a, b \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$  tels que la famille  $(\widetilde{K}_\lambda)_{\lambda \in [a; b]} \subset D(S)$  engendre un sous-espace dense dans  $\mathcal{D}_\alpha$  et il existe  $c, C \in \mathbb{R}^{+*}$  tels que, pour tous  $\lambda, \mu \in [a; b]$ ,

$$c \left| \langle S(\widetilde{K}_\lambda), S(\widetilde{K}_\mu) \rangle_{\mathcal{D}_\alpha} \right| \leq \left| \langle \widetilde{K}_\lambda, \widetilde{K}_\mu \rangle_{\mathcal{D}_\alpha} \right| \leq \left| \langle S(\widetilde{K}_\lambda), S(\widetilde{K}_\mu) \rangle_{\mathcal{D}_\alpha} \right| ;$$

- (v) pour toute  $f \in D(T)$ ,  $ST(f) = f$  ;  
(vi) pour toute  $f \in D(S)$ ,  $TS(f) = f$ .

*Démonstration* : Soient  $c, C, a$  et  $b$  des constantes vérifiant les conclusions du lemme 5.27. D'après le lemme 5.28, nous pouvons définir deux applications linéaires en posant

$$S : \begin{cases} \text{Vect} \left( \widetilde{K}_\lambda \mid \lambda \in [a; b] \right) & \longrightarrow & \text{Vect} (g_\lambda \mid \lambda \in [a; b]) \\ \widetilde{K}_\lambda & \longmapsto & g_\lambda \end{cases}$$

et

$$T : \begin{cases} \text{Vect} (g_\lambda \mid \lambda \in [a; b]) & \longrightarrow & \text{Vect} \left( \widetilde{K}_\lambda \mid \lambda \in [a; b] \right) \\ g_\lambda & \longmapsto & \widetilde{K}_\lambda \end{cases}$$

Le résultat découle alors des lemmes 5.27, 5.29 et 5.30.  $\square$

Nous pouvons maintenant utiliser le théorème ci-dessus pour étudier l'universalité de  $C_{\varphi_t} - \lambda \text{Id}$ .

**Théorème 5.32** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que*

$$\left( \frac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq |\lambda| \leq \left( \frac{1 + e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

*il existe deux opérateurs a priori non bornés  $S$  et  $T$  tels que  $ST = TS = \text{Id}_{\mathcal{D}_\alpha}$  et  $T(C_{\varphi_t} - \lambda \text{Id})S$  est un opérateur universel sur  $\mathcal{D}_\alpha$ .*

*Démonstration* : Soient  $S$  et  $T$  les applications données par le théorème 5.31. Soient  $a$  et  $b$  deux constantes vérifiant les conclusions du même théorème. Alors, d'après les propositions 5.17 et 5.25, on a pour tout  $\lambda \in [a; b]$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$TC_{\varphi_t} S \widetilde{K}_\lambda = TC_{\varphi_t} g_\lambda = e^{\lambda t} T g_\lambda = e^{\lambda t} \widetilde{K}_\lambda = M_{\psi_t}^* \widetilde{K}_\lambda$$

et

$$SM_{\psi_t}^* T g_\lambda = SM_{\psi_t}^* \widetilde{K}_\lambda = e^{\lambda t} S \widetilde{K}_\lambda = e^{\lambda t} g_\lambda = C_{\varphi_t} g_\lambda.$$

Or, pour tous  $t$  et  $\lambda$  vérifiant les hypothèses de l'énoncé, l'opérateur  $M_{\psi_t}^* - \lambda \text{Id}$  est universel (théorème 5.26). Ceci achève la preuve.  $\square$

Le résultat précédent s'étend naturellement à tous les automorphismes hyperboliques de  $\mathbb{D}$ .

**Théorème 5.33** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\alpha \geq 1$ . Soit  $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  un automorphisme hyperbolique de  $\mathbb{D}$ . Alors, pour tout  $\lambda \in \sigma_p(C_\varphi)$ , il existe un opérateur universel  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\alpha)$  et deux opérateurs  $S$  et  $T$  densément définis (mais non bornés a priori) tels que  $ST = TS = \text{Id}_{\mathcal{D}_\alpha}$  et  $C_\varphi - \lambda \text{Id} = SUT$ .*

*Démonstration* : Comme  $\varphi$  est un automorphisme hyperbolique, nous savons qu'il existe un automorphisme  $\psi$  de  $\mathbb{D}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\varphi = \psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$ . Or, d'après le théorème 2.51, nous savons que  $C_\psi$  et  $C_{\psi^{-1}}$  sont des opérateurs continus sur  $\mathcal{D}_\alpha$  avec  $C_{\psi^{-1}}^{-1} = C_\psi$ . Comme l'opérateur  $C_{\varphi_t}$  vérifie le résultat que l'on cherche à montrer (d'après le théorème 5.32), il en va de même pour l'opérateur  $C_\varphi$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

Remarquons que d'après les travaux de Cowen et Gallardo ([25] et [24]), si  $\alpha = 1$  (c'est-à-dire, si  $\mathcal{D}_\alpha = H^2$  est l'espace de Hardy), alors les opérateurs  $S$  et  $T$  étudiés ci-dessus sont continus.

## Conclusion et perspectives

LES travaux présentés dans cette thèse laissent ouvertes un certain nombre de questions. En guise de conclusion à ces travaux, nous présentons ici quelques pistes de réflexion (à court ou moyen terme) qui pourraient permettre de prolonger notre étude.

La première piste de réflexion s'inscrit dans le prolongement de nos travaux autour du théorème de Nordgren-Rosenthal-Wintrobe. Plus précisément, nous aimerions montrer que les opérateurs *a priori* non bornés  $S$  et  $T$  qui interviennent dans les théorèmes 5.32 ou 5.33 sont continus. Si c'était le cas, alors nous pourrions généraliser le théorème de Nordgren-Rosenthal-Wintrobe aux espaces de Dirichlet pondérés  $\mathcal{D}_\alpha$  (pour  $\alpha \geq 1$ ). En utilisant des arguments « de réflexion » développés par Schroderus et Tylli (dans [61] notamment), nous pourrions également obtenir l'universalité d'opérateurs de la forme  $C_{\varphi_t}^* - \bar{\lambda} \text{Id}$  sur des espace de Dirichlet pondérés (qui correspondent aux espaces  $\mathcal{D}_\alpha$  pour  $\alpha \leq 0$ ).

Sur  $H^2(\mathbb{D})$ , Cowen et Gallardo prouvent la continuité de  $S$  et  $T$  en exhibant une relation entre les quantités  $\langle g_\lambda, g_\mu \rangle$  et  $\langle \widetilde{K}_\lambda, \widetilde{K}_\mu \rangle$ . C'est cette relation qui n'est plus valide sur  $\mathcal{D}_\alpha$  pour  $\alpha > 1$ , et qui fait que leur preuve ne se généralise *a priori* pas totalement aux espaces  $\mathcal{D}_\alpha$ .

Une autre piste de réflexion serait de prolonger notre travail de modélisation des semi-groupes. Par exemple, les techniques que nous utilisons pour modéliser les semi-groupes d'opérateurs concaves semblent pouvoir s'étendre à d'autres familles de semi-groupes d'opérateurs presque isométriques. Nous pouvons en particulier dans ce contexte penser au cas des  $m$ -isométries. D'après [15], un semi-groupe fortement continu  $(T_t)_{t \geq 0}$  est constitué de  $m$ -isométries si et seulement si son co-générateur est une  $m$ -isométrie. De plus, d'après [2], on peut modéliser les  $m$ -isométries par des opérateurs de multiplication par  $e^{i\theta}$  sur des espaces de distributions sur  $\mathbb{T}$ . Dans ce contexte, nous pouvons nous attendre à obtenir des résultats de modélisation des semi-groupes de  $m$ -isométries pures similaires aux résultats obtenus au théorème 4.39 pour les semi-groupes d'opérateurs concaves purs.

Sur la modélisation des opérateurs et des semi-groupes, une autre piste de réflexion (peut-être plus diffuse que la précédente) découle de la remarque suivante : nous avons vu que l'on peut munir l'espace de Dirichlet  $\mathcal{D}$  de deux normes équivalentes définies par

$$\|f\|_{\mathcal{D}_0}^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \frac{dA(z)}{\pi} \quad \text{et} \quad \|f\|_{H^2(0)}^2 = \sum_{n \geq 0} (n+1) |a_n|^2.$$

Nous avons également vu que l'opérateur  $M : f \mapsto z \times f \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$  est concave pour la norme  $\|\cdot\|_{H^2(0)}$  mais pas pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_0}$ . En d'autres termes, l'opérateur  $M \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_0)$  n'est pas concave mais il est bien modélisé par l'opérateur  $M \in \mathcal{L}(H^2(0))$  qui l'est (et il en va de même pour les semi-groupes dont ils sont les co-générateurs). Il semble alors naturel de se demander si la notion de concavité d'un opérateur — qui joue un rôle important dans notre étude — ne pourrait pas être remplacée par une notion légèrement plus générale, mais qui serait invariante par changement de norme équivalente.

À moyen terme, il pourrait être intéressant de poursuivre l'étude de la forme générale du spectre des opérateurs de composition sur des espaces de Banach qui sont continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$ . Un exemple de problème que l'on pourrait étudier est celui de l'existence de valeurs propres « cachées » : si  $\varphi$  est un symbole de Koenigs et si  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  est un sous-espace de Banach tel que l'opérateur de composition  $C_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  est continue, existe-t-il des valeurs propres de  $C_\varphi$  qui sont dans la composante connexe de 0 (ou dans l'intérieur de celle-ci) ?

D'une façon plus générale, si  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$  n'est pas un symbole de Koenigs, l'étude des propriétés spectrales de  $C_\varphi$  (sur  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  ou sur des espaces de Banach généraux) est un problème encore ouvert particulièrement digne d'intérêt.

## Annexe A

# Dérivation discrète des suites réelles

DANS cette annexe, nous précisons quelques propriétés de la dérivation discrète. Ces propriétés sont utilisées dans ce manuscrit pour la description des opérateurs  $m$ -isométriques et  $m$ -concaves (voir la sous-partie 1 de la partie B du chapitre 3).

L'opérateur de dérivation discrète sur l'espace des suites réelles est l'application linéaire

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases} .$$

Nous commençons par décrire le comportement de la dérivée discrète d'ordre  $m$ .

**Proposition A.1** *Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Alors, l'application  $\Delta^m$  de dérivation discrète d'ordre  $m$  est l'application linéaire*

$$\Delta^m : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{m-k} \binom{n}{k} u_{m+n+k} \right)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases} .$$

*Démonstration* : En notant

$$S : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_0, u_1, u_2, \dots) & \longmapsto & (u_1, u_2, u_3, \dots) \end{cases}$$

l'opérateur de décalage vers la gauche, nous avons  $\Delta = S - \text{Id}$ . Comme les applications  $S$  et  $\text{Id}$  commutent, le résultat souhaité découle directement de la formule du binôme de Newton.  $\square$

Nous étudions maintenant le cas particulier des suites polynomiales.

**Définition A.2** *Soit  $m \in \mathbb{N}$ . On dit que la suite  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est  $m$ -polynomiale s'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $m$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = P(n)$ .*

Nous pouvons caractériser les suites  $m$ -polynomiales par leur dérivée discrète.

**Proposition A.3** Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Les assertions suivantes s'équivalent :

- (i) la suite  $u$  est  $m$ -polynomiale ;
- (ii) la dérivée discrète  $(m + 1)$ -ème de  $u$  est la suite nulle.

*Esquisse de démonstration* : Le résultat se prouve par récurrence sur  $m$ . L'observation clef à utiliser pour l'hérédité est la suivante : pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , la suite  $u$  est  $m$ -polynomiale si et seulement si la suite dérivée  $\Delta(u)$  est  $(m - 1)$ -polynomiale.  $\square$

Nous pouvons également étudier le cas particulier des suites  $m$ -concaves.

**Définition A.4** Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On dit que la suite  $u$  est  $m$ -concave lorsque sa dérivée  $m$ -ème est négative : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $(\Delta(u))_n \leq 0$ .

Dans le cas où  $m = 2$ , on dit également que la suite est concave.

Remarquons qu'une suite est 0-concave si et seulement si tous ses termes sont négatifs. Par ailleurs, une suite est 1-concave si et seulement si elle est décroissante.

Le cas particulier des suites concaves mérite d'être détaillé.

**Proposition A.5** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite concave. Alors, la suite  $v = \Delta(u)$  est décroissante.

En particulier, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_k \leq u_0 + k(u_1 - u_0)$ .

Nous pouvons en déduire le corollaire suivant, que nous utilisons lors de notre étude des opérateurs concaves.

**Proposition A.6** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite positive, décroissante et concave. Alors, la suite  $u$  est constante.

*Démonstration* : Nous montrons que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , nous avons  $u_{k+1} = u_k$ . Remarquons d'abord que, quitte à « enlever » les  $k$  premiers termes de la suite  $u$ , nous pouvons supposer que  $k = 0$ . Comme la suite  $u$  est décroissante, nous avons que  $u_1 - u_0 \leq 0$ . Supposons par l'absurde que  $u_1 < u_0$ . Alors, d'après la proposition A.5, nous avons que  $u_k \rightarrow -\infty$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Comme la suite  $u$  est positive, ceci fournit la contradiction souhaitée. Ainsi, nous avons bien  $u_0 = u_1$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

## Annexe B

# Calcul fonctionnel holomorphe et projections spectrales

L'OBJECTIF de cette annexe est double : d'abord, nous énonçons explicitement un résultat « classique » de calcul fonctionnel holomorphe (qui est utilisé à plusieurs reprises dans ce manuscrit). Ensuite, nous montrons comment il est possible d'appliquer ce résultat pour définir des projections spectrales associées à un opérateur sur un espace de Banach (par exemple, dans le cadre de la proposition 2.11 ou de la définition 2.12). Nous suivons ici l'approche de Dunford et Schwartz (voir [27], chapitre VII, section 3).

Commençons par énoncer un résultat de calcul fonctionnel holomorphe.

**Proposition B.1 (Calcul fonctionnel holomorphe)** *Soient  $\mathcal{X}$  un espace de Banach et  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . Alors la fonction résolvante*

$$R : \begin{cases} \mathbb{C} - \sigma(T) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{X}) \\ \lambda & \longmapsto & (\lambda \text{Id} - T)^{-1} \end{cases}$$

*est holomorphe. Considérons alors*

$$\text{Hol}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \text{ ouvert, } \exists g \in \text{Hol}(\mathcal{U}) \text{ tels que } f = g|_{\sigma(T)}\}.$$

*L'application*

$$\Phi : \begin{cases} (\text{Hol}(T), +, \times) & \longrightarrow & (\mathcal{L}(\mathcal{X}), +, \circ) \\ f & \longmapsto & f(T) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda \text{Id} - T)^{-1} d\lambda \end{cases}$$

*est bien définie et est un morphisme d'algèbres :*

(i) *l'application  $\Phi$  est une application  $\mathbb{C}$ -linéaire ;*

(ii) pour toutes  $f, g \in \text{Hol}(T)$ , on a  $f \times g \in \text{Hol}(T)$  et  $\Phi(f \times g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$ .

De plus,  $\Phi$  vérifie les propriétés suivantes :

(iii) pour toute  $f \in \text{Hol}(T)$ , on a  $f \in \text{Hol}(T^*)$  et  $f(T)^* = f(T^*)$  ;

(iv) pour toute  $f \in \text{Hol}(T)$ , on a  $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ .

Nous pouvons en particulier déduire de ce résultat une façon de définir des projections spectrales. Le résultat qui suit est exactement la proposition 2.11.

**Proposition B.2 (décomposition spectrale sur un espace de Banach)** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach. Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . Supposons qu'il existe deux sous-ensembles  $\sigma_0$  et  $\sigma_1 \subset \sigma(T)$  qui sont non vides, ouverts et fermés dans  $\sigma(T)$ .*

*Alors, il existe deux sous-espaces fermés  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{X}_1$  tels que*

(a) *on a la décomposition  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$  ;*

(b) *les espaces  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{X}_1$  sont invariants par  $T$  ;*

(c) *si  $T_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_0)$  est l'opérateur induit par  $T$  sur  $\mathcal{X}_0$ , alors son spectre est  $\sigma(T_0) = \sigma_0$  ;*

(d) *si  $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1)$  est l'opérateur induit par  $T$  sur  $\mathcal{X}_1$ , alors son spectre est  $\sigma(T_1) = \sigma_1$ .*

*De plus, l'application résolvante  $R : \mu \mapsto (\mu \text{Id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} - \sigma(T)$ .*

*Enfin, on peut calculer la projection  $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  sur  $\mathcal{X}_0$  parallèlement à  $\mathcal{X}_1$  par calcul holomorphe : si  $\Gamma$  est une courbe de Jordan telle que  $\Gamma \cap \sigma(T) = \emptyset$  et  $\overline{\text{Int}(\Gamma)} \cap \sigma(T) = \sigma_0$ , alors*

$$P = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (\mu \text{Id} - T)^{-1} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

*Démonstration :* En utilisant la proposition B.1, nous pouvons définir la projection  $P$  par calcul fonctionnel holomorphe : en effet, on a

$$f : \begin{cases} \sigma(T) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \sigma_0 \\ 0 & \text{si } z \in \sigma_1 \end{cases} \end{cases} \in \text{Hol}(T).$$

On pose alors  $P \stackrel{\text{def}}{=} f(T)$ . Il découle alors des propriétés du calcul fonctionnel holomorphe (propriété (ii)) que  $P$  est une projection. On pose alors  $\mathcal{X}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}(P)$  et  $\mathcal{X}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(P)$ . Le point (a) de la proposition est donc démontré. Le point (b) se montre en remarquant que  $f \times 1 = 1 \times f$ , et en appliquant de nouveau les propriétés du calcul fonctionnel holomorphe (notamment la propriété (ii)). Le point (c) découle directement de la propriété (iv) du calcul fonctionnel holomorphe. Le point (d) se prouve en remarquant que  $T_1 = (1 - f)(T)|_{\mathcal{X}_1}$ , et en appliquant la propriété (iv) du calcul fonctionnel holomorphe. □

NOUS précisons ci-dessous quelques notations utilisées régulièrement dans ce manuscrit. Ces notations sont ici classées par ordre alphabétique.

- ▷  $\mathbb{C}[z]$  est l'espace des fonctions polynomiales à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .
- ▷  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  est le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$ . On note  $\bar{\mathbb{D}}$  le disque unité fermé. Plus généralement, pour  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ , on note  $D(z_0, r)$  le disque ouvert de  $\mathbb{C}$  centré en  $z_0$  et de rayon  $r$ .
- ▷  $\mathcal{D}_w$  est l'espace de Dirichlet pondéré pour la fonction de poids  $w$ . Il est défini ainsi :

$$\mathcal{D}_w = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \left| |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi} < +\infty \right. \right\}.$$

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $w : r \mapsto (1 - r^2)^\alpha$ , on obtient l'espace de Dirichlet pondéré  $\mathcal{D}_\alpha$ .

- ▷  $e_n$  est la fonction polynomiale  $e_n : z \mapsto z^n$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ).
- ▷  $f(\bullet + t)$  et  $f(\bullet - t)$  : pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ , on a  $f(\bullet + t) : x \mapsto f(x + t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$  et  $f(\bullet - t) : x \mapsto f(x - t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$ .
- ▷  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert séparable sur  $\mathbb{C}$ . Sauf mention explicite du contraire, il est en général de dimension infinie.
- ▷  $H^2(\beta)$  est l'espace de Hardy du disque unité pondéré par la suite  $\beta \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ . Il est défini ainsi :

$$H^2(\beta) = \left\{ f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n |a_n|^2 < +\infty \right. \right\}.$$

Dans le cas où  $\beta = (1)_n$ , on note cet espace  $H^2(\mathbb{D})$  ou  $H^2$ .

- ▷  $H^\infty(T)$  : pour  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , on note  $H^\infty(T) = \bigcap_{n \geq 0} T^n \mathcal{X}$ .
- ▷  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$ . Plus généralement, si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ , on note  $\text{Hol}(\Omega)$  l'espace des fonctions holomorphes sur  $\Omega$ . Si de plus  $\mathcal{E}$  est un espace de Hilbert, on note  $\text{Hol}(\Omega, \mathcal{E})$  l'espace des fonctions holomorphes sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\mathcal{E}$ .

- ▷  $\ell^2(\mathbb{N}, w)$  est l'espace de suites pondéré par la suite de poids  $w = (w_n)_n \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ . Il est défini ainsi :

$$H^2(\beta) = \left\{ (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} w_n |a_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Dans le cas où  $w = (1)_n$ , on note cet espace  $\ell^2(\mathbb{N})$ .

- ▷  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  désigne l'ensemble des applications linéaires continues de  $\mathcal{X}$  vers  $\mathcal{Y}$ . Lorsque  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ , on note simplement  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ .
- ▷  $r(T)$  est le rayon spectral de  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ . On note  $r_e(T)$  le rayon spectral essentiel.
- ▷  $\sigma(T)$  est le spectre de l'opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ .
- ▷  $\sigma_p(T)$  est le spectre ponctuel de l'opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ .
- ▷  $\mathbb{T}$  est le cercle unité dans  $\mathbb{C}$ .
- ▷  $\mathcal{X}$  est un espace de Banach sur  $\mathbb{C}$ .
- ▷  $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  signifie que  $\mathcal{X}$  est un espace de Banach de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  qui est continûment inclus dans  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  par la structure d'espace de Fréchet.

## Bibliographie

- [1] Jim AGLER. “Hypercontractions and subnormality”. In : *Journal of Operator Theory* 13.2 (spring 1985), p. 203-217.
- [2] Jim AGLER et Mark STANKUS. “ $m$ -isometric transformations of Hilbert space, I”. In : *Integral Equations and Operator Theory* 21.4 (1995), p. 383-429.
- [3] Jim AGLER et Mark STANKUS. “ $m$ -isometric transformations of Hilbert space, II”. In : *Integral Equations and Operator Theory* 23.1 (1995), p. 1-48.
- [4] Jim AGLER et Mark STANKUS. “ $m$ -isometric transformations of Hilbert space, III”. In : *Integral Equations and Operator Theory* 24.4 (1996), p. 379-421.
- [5] Éric AMAR et Étienne MATHERON. *Analyse complexe*. Enseignement des mathématiques. Éditions Cassini, 2004.
- [6] Julyan ARBEL. “Faà di Bruno’s note on eponymous formula, trilingual version”. Pré-publication. décembre 2016.
- [7] Nicola ARCOZZI et al. “The Dirichlet space : a survey”. In : *New York J. Math. A* 17 (2011), p. 45-86.
- [8] Wolfgang ARENDT, Benjamin CÉLARIÈS et Isabelle CHALENDAR. “In Koenigs’ footsteps : diagonalization of composition operators”. (soumis, disponible sur arXiv). Mar. 2019.
- [9] Wolfgang ARENDT et Isabelle CHALENDAR. “Generators of semigroups on Banach spaces inducing holomorphic semiflows”. In : *Israel Journal of Mathematics* 229.1 (2019), p. 165-179.
- [10] Wolfgang ARENDT et al. “Powers of composition operators : asymptotic behaviour on Bergman, Dirichlet, and Bloch spaces”. Pré-publication. 2019.
- [11] Corentin AVICOU. “Semigroupes d’opérateurs de composition sur des espaces de Hardy pondérés”. Thèse de doct. Université de Lyon, 2015.
- [12] Corentin AVICOU, Isabelle CHALENDAR et Jonathan R. PARTINGTON. “A class of quasi-contractive semigroups acting on Hardy and Dirichlet space”. In : *Journal of Evolution Equations* 15.3 (2015), p. 647-675.

- [13] Corentin AVICOU, Isabelle CHALENDAR et Jonathan R. PARTINGTON. “Analyticity and compactness of semigroups of composition operators”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2016).
- [14] Earl BERKSON et Horacio PORTA. “Semigroups of Analytic Functions and Composition Operators”. In : *Michigan Math. J.* 25 (1978).
- [15] T. BERMÚDEZ, A. BONILLA et H. ZAWAY. “ $C_0$ -semigroups of  $m$ -isometries on Hilbert spaces”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 472.1 (2019), p. 879-893.
- [16] José BONET et Mikael LINDSTRÖM. “Spaces of operators between Fréchet spaces”. In : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. T. 115. 1. Cambridge University Press. 1994.
- [17] Haïm BREZIS. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 2005.
- [18] S. R. CARADUS. “Universal operators and invariant subspaces”. In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 23 (1969), p. 526-527.
- [19] Lennart CARLESON et Theodore W. GAMELIN. *Complex Dynamics*. Universitext (1979). Springer-Verlag, 1993.
- [20] Benjamin CÉLARIÈS, Isabelle CHALENDAR et Jonathan R. PARTINGTON. “Universal and models for semigroups of operators on a Hilbert space”. In : *Journal of Operator Theory* (2019). (à paraître).
- [21] Isabelle CHALENDAR et Jonathan R. PARTINGTON. *Modern approaches to the invariant-subspace problem*. Cambridge University Press, 2011.
- [22] Isabelle CHALENDAR et Jonathan R. PARTINGTON. “Norm Estimates for Weighted Composition Operators on Spaces of Analytic Functions”. In : *Complex Analysis and Operator Theory* (2014).
- [23] Louis COMTET. *Advanced Combinatorics — The Art of Finite and Infinite Expansions*. Reidel, 1974.
- [24] Carl C. COWEN et Eva A. GALLARDO-GUTIÉRREZ. “A new proof of a Nordgren, Rosenthal and Wintrobe Theorem on universal operators.” In : *Contemporary Mathematics* 687 (2017).
- [25] Carl C. COWEN et Eva A. GALLARDO-GUTIÉRREZ. “Unitary equivalence of one-parameter groups of Toeplitz and composition operators”. In : *Journal of Functional Analysis* 261.9 (nov. 2011), p. 2641-2655.
- [26] Carl C. COWEN et Barbara MACCLUER. *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1995.
- [27] Nelson DUNFORD et Jacob T. SCHWARTZ. *Linear Operators. Part 1 : General Theory*. New York Interscience, 1957.
- [28] Klaus-Jochen ENGEL et Rainer NAGEL. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer, 1999.
- [29] Francesco FAÀ DI BRUNO. “Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel”. In : *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 1 (1857), p. 359-360.
- [30] Francesco FAÀ DI BRUNO. “Sullo sviluppo delle funzioni”. In : *Annali di scienze matematiche e fisiche* 6 (1855), p. 479-480.
- [31] Omar EL-FALLAH et al. *A Primer on the Dirichlet Space*. T. 203. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2014.

- [32] Paul A. FUHRMANN. *Linear systems and operators in Hilbert space*. Courier Corporation, 2014.
- [33] Petros GALANOPOULOS, Daniel GIRELA et José Ángel PELÁEZ. “Multipliers and integration operators on Dirichlet spaces”. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 363.4 (avr. 2011), p. 1855-1886.
- [34] Eva A. GALLARDO-GUTIÉRREZ et Jonathan R. PARTINGTON. “ $C_0$ -semigroups of 2-isometries and Dirichlet spaces”. In : *Revista Matemática Iberoamericana* 34.3 (2018), p. 1415-1425.
- [35] Eva A. GALLARDO-GUTIÉRREZ et Dmitry V. YAKUBOVICH. “On generators of  $C_0$ -semigroups of composition operators”. In : *Israel Journal of Mathematics* 229.1 (2019), p. 487-500.
- [36] Laura GĂVRUȚA. “Wold decompositions for operators close to isometries”. Pré-publication sur arXiv. Avril 2017.
- [37] Paul R. HALMOS. “Shifts on Hilbert spaces”. In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 208 (1961), p. 102-112.
- [38] Einar HILLE et Ralph S. PHILLIPS. *Functional Analysis and semi-groups*. American Mathematical Society : Colloquium publications. American Mathematical Society, 1957.
- [39] Paul R. HURST. “Relating composition operators on different weighted Hardy spaces”. In : *Archiv der Mathematik* 68.6 (1997), p. 503-513.
- [40] Birgit JACOB, Jonathan PARTINGTON et Sandra POTT. “ $\beta$ -admissibility of observation and control operators for hypercontractive semigroups”. In : *Journal of Evolution Equations* (déc. 2015).
- [41] Lotfollah KARIMI, Masoumeh Faghih AHMADI et Karim HADAYATIAN. “Some properties of concave operators”. In : *Turkish Journal of Mathematics* 40.6 (2016), p. 1211-1220.
- [42] Victor Èmmanuilovitch KATZSELSON. “A remark on canonical factorization in certain spaces of analytic functions”. In : *Zap. Nauchn. Sem. LOMI Investigations on linear operators and function theory.III* (1972).
- [43] Gabriel KOENIGS. “Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles”. In : *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 3.1 (1884), p. 3-41.
- [44] Maria J. MARTÍN et Dragan VUKOTIĆ. “Norm and spectral radii of composition operators acting on the Dirichlet space”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2004).
- [45] Rubén A. MARTÍNEZ AVENDAÑO et Peter ROSENTHAL. *An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space*. T. 237. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2007.
- [46] Nikolai K. NIKOLSKI. *Operators, Functions, and Systems : An Easy Reading — Volume I : Hardy, Haenkel and Toeplitz*. American Mathematical Society, 2002.
- [47] Eric NORDGREN, Peter ROSENTHAL et F.S. WINTROBE. “Invertible Composition Operators on  $H^p$ ”. In : *Journal of Functional Analysis* 73 (1987), p. 324-344.
- [48] Anders OLOFSSON. “A von Neumann-Wold decomposition of two-isometries”. In : *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 70 (2004), p. 715-726.
- [49] Raymond Edward Alan Christopher PALEY et Norbert WIENER. “Notes on the Theory and Application of Fourier Transforms. I-II”. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 35.2 (avril 1933), p. 348-355.
- [50] S. M. PATEL. “2-isometric operators”. In : *Glasnik matematički* 37.1 (2002), p. 141-145.

- [51] Daniel J. RANDTKE. “Representation theorems for compact operators”. In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 37.2 (1973), p. 481-485.
- [52] Stefan RICHTER. “A representation theorem for cyclic analytic two-isometries”. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 328.1 (1991), p. 325-349.
- [53] Steven ROMAN. “The formula of Faà di Bruno”. In : *The American Mathematical Monthly* 87.10 (décembre 1980), p. 805-809.
- [54] Gian-Carlo ROTA. “Note on the invariant subspaces of linear operators”. In : *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 8.2 (1959), p. 182-184.
- [55] Gian-Carlo ROTA. “On Models for Linear Operators”. In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13.3 (1960), p. 469-472.
- [56] Walter RUDIN. *Analyse fonctionnelle*. Traduction d’Abdellatif Abouhazim. Ediscience international, 1995.
- [57] Walter RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. 3e édition. Traduction de Jean Dhombres. Dunod, 2009.
- [58] Walter RUDIN. *Function Theory in the Unit Ball of  $\mathbb{C}^n$* . T. 241. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1980.
- [59] Walter RUDIN. *Principes d’analyse mathématique*. 3e édition. Trad. de Guy Auliac. Dunod, 2006.
- [60] Ernst SCHRÖDER. “Über iterirte Functionen”. In : *Mathematische Annalen* 3.2 (juin 1870), p. 296-322.
- [61] Riikka SCHRODERUS et Hans-Olav TYLLI. “On universal operators and universal pairs”. In : *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 61.3 (2018), p. 891-908.
- [62] Howard SCHWARTZ. “Composition Operators on  $H^p$ ”. Thèse de doct. University of Toledo, 1969.
- [63] Serguei SHIMORIN. “Wold-type decompositions and wandering subspaces for operators close to isometries”. In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 531 (2001), p. 147-189.
- [64] Olof STAFFANS. *Well-posed linear systems*. T. 103. Cambridge University Press, 2005.
- [65] Béla SZ.-NAGY et al. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*. 2nd edition. Springer, 2009.
- [66] Herman WOLD. “A study in the analysis of stationary time series”. Thèse de doct. Université d’Uppsala, 1938.
- [67] Lixin ZHENG. “The essential norms and spectra of composition operators on  $H^\infty$ ”. In : *Pacific journal of mathematics* 203.2 (2002), p. 503-510.



# Opérateurs et semi-groupes d'opérateurs sur des espaces de fonctions holomorphes — Applications à la théorie de l'universalité

**Résumé :** Les travaux de cette thèse relèvent du domaine de la théorie des opérateurs, et se situent à l'interface de l'analyse complexe, de la théorie des semi-groupes et de la théorie de l'universalité.

Le premier résultat principal de cette thèse relève de l'étude des opérateurs de composition sur des espaces de fonctions holomorphes : nous déterminons le spectre d'un opérateur de composition par un symbole de Koenigs sur l'espace des fonctions holomorphes sur le disque unité, et en déduisons des informations sur la forme générale du spectre des opérateurs de composition par un symbole de Koenigs sur des espaces de Banach de fonctions holomorphes. L'outil principal que nous développons pour notre étude est une description des projections spectrales associées à ces opérateurs.

Le second résultat principal de cette thèse relève de la théorie de l'universalité : nous étendons aux semi-groupes d'opérateurs la notion d'opérateur universel, et établissons l'existence d'un semi-groupe universel pour les semi-groupes quasi-contractifs en exhibant un semi-groupe sur un espace de fonctions holomorphes. Nous élargissons ensuite ce résultats aux semi-groupes d'opérateurs concaves.

**Mots clefs :** analyse complexe, espaces de fonctions holomorphes, semi-groupes d'opérateurs, semi-groupes universels, opérateurs de composition, opérateurs universels.

## Operators and operator semigroups on spaces of holomorphic functions — Applications to the theory of universality

**Abstract :** The works in this thesis address topics from operator theory and involves ideas and notions arising from complex analysis, the theory of operator semigroups and the theory of universality.

The first main result of this thesis relates to the study of composition operators on spaces of holomorphic functions: we compute the spectrum of an operator of composition by a Koenigs's symbol acting on the space of holomorphic functions on the open unit disk, and derive from it the general description of the spectrum of composition operators on Banach spaces of holomorphic functions. The key tool we develop in this study is a description of spectral projections associated with such operators.

The second main result of this thesis relates to the theory of universality: we extend to operator semigroups the notion of universality. Then, we prove the existence of a universal semigroup for quasi-contractive operators semigroups. We then show a similar result for concave semigroups.

**Keywords:** complex analysis, composition operators, operators semigroups, universal semigroups, universal operators, spaces of holomorphic functions.

**Image en couverture :** Forme générale du spectre d'un opérateur de composition par un symbole de Koenigs.

