



**HAL**  
open science

# Contrôlabilité et problèmes inverses pour quelques équations aux dérivées partielles. Aspects théoriques et numériques

Nicolae Cindea

► **To cite this version:**

Nicolae Cindea. Contrôlabilité et problèmes inverses pour quelques équations aux dérivées partielles. Aspects théoriques et numériques. Optimisation et contrôle [math.OA]. Université Clermont Auvergne, 2019. tel-02399490

**HAL Id: tel-02399490**

**<https://theses.hal.science/tel-02399490>**

Submitted on 9 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches  
en Mathématiques

par

**NICOLAE CÎNDEA**

**Contrôlabilité et problèmes inverses  
pour quelques équations aux dérivées partielles.  
Aspects théoriques et numériques**

Soutenance publique le 21/10/2019

**Rapporteurs :**

FRANCK BOYER      Université Toulouse 3 - Paul Sabatier  
SERGE NICAISE     Université Polytechnique Hauts-de-France  
ENRIQUE ZUAZUA    Universidad Autónoma de Madrid

**Composition du jury :**

FRANCK BOYER      Université Toulouse 3 - Paul Sabatier  
ERIK BURMAN        University College London  
ARNAUD MÜNCH     Université Clermont Auvergne  
SERGE NICAISE     Université Polytechnique Hauts-de-France  
MARIUS TUCSNAK    Université de Bordeaux  
HASNAA ZIDANI      ENSTA ParisTech



Contrôlabilité et problèmes inverses  
pour quelques équations aux dérivées partielles.  
Aspects théoriques et numériques

Nicolae Cîrdea

21 octobre 2019



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>I Contrôle</b>	<b>1</b>
<b>1 Méthodes espace–temps pour la contrôlabilité des ondes</b>	<b>3</b>
1.1 Contrôlabilité frontière . . . . .	3
1.1.1 Une méthode <i>primale</i> . . . . .	5
1.1.2 Une formulation mixte pour l’approximation du contrôle de norme $L^2$ minimale . . . . .	11
1.2 Contrôlabilité distribuée . . . . .	17
1.2.1 Simulations numériques . . . . .	20
1.3 Conclusion et perspectives . . . . .	25
<b>2 Approximation des contrôles pour une équation des poutres</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	27
2.2 Quelques propriétés spectrales . . . . .	30
2.2.1 Propriétés algébriques . . . . .	30
2.2.2 Analyse de la partie haute du spectre . . . . .	31
2.2.3 Analyse asymptotique des vecteurs propres . . . . .	34
2.2.4 Estimations numériques pour la partie basse du spectre . . . . .	36
2.2.5 Une inégalité d’observabilité pour les basses fréquences . . . . .	37
2.3 Résultats d’observabilité et de contrôlabilité . . . . .	37
2.4 Simulations numériques . . . . .	39
2.5 Conclusion et perspectives . . . . .	41
<b>II Problèmes inverses</b>	<b>43</b>
<b>3 Problèmes inverses pour l’équation des ondes</b>	<b>45</b>

3.1	Observation distribuée . . . . .	45
3.1.1	Une reformulation mixte du problème inverse (3.5) . . . . .	46
3.1.2	Une reformulation mixte du problème inverse (3.6) . . . . .	49
3.1.3	Analyse numérique . . . . .	51
3.1.4	Quelques simulations numériques . . . . .	53
3.2	Observation frontière . . . . .	55
3.2.1	Une reformulation mixte du problème inverse (3.47) . . . . .	56
3.2.2	Une reformulation mixte du problème inverse (3.49) . . . . .	57
3.2.3	Quelques simulations numériques . . . . .	58
3.3	Conclusion et perspectives . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Assimilation des données et observateurs</b>	<b>61</b>
4.1	Améliorer la convergence à l'aide des observateurs . . . . .	61
4.1.1	Application à l'équation des ondes . . . . .	64
4.1.2	Application à l'équation des plaques . . . . .	65
4.2	Assimilation des données sous-échantillonnées en temps . . . . .	66
4.3	Conclusion et perspectives . . . . .	68
<b>III</b>	<b>Autres travaux, conclusion et perspectives</b>	<b>69</b>
<b>5</b>	<b>Autres travaux</b>	<b>71</b>
5.1	Solutions périodiques des systèmes dissipatifs . . . . .	71
5.2	Contrôlabilité d'un modèle fluide-structure simplifié . . . . .	72
5.3	Modélisation et applications . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>75</b>

## Remerciements

Je voudrais d'abord remercier Frank Boyer, Serge Nicaise et Enrique Zuazua pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de rapporter ce mémoire. Leur remarques et appréciations me sont précieuses.

Mes remerciements vont ensuite à Arnaud Münch pour avoir *parrainé* cette habilitation, pour son accueil à Clermont-Ferrand et pour toutes nos discussions mathématiques et pas seulement.

Je remercie chaleureusement Erik Burman, Marius Tucsnak et Hasnaa Zidani d'avoir accepté faire partie de mon jury. En particulier, je remercie Marius Tucsnak pour m'avoir encadré pendant la thèse de doctorat et pour avoir guidé et ensuite suivi de près mes travaux de recherche.

Les travaux présentés dans ce mémoire sont le fruit de nombreuses collaborations (voir Figure 1<sup>1</sup>). Je voudrais donc remercier les collègues avec lesquels j'ai eu la chance de travailler. J'ai énormément appris à leur cotés. Sans eux ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.



FIGURE 1 – Coauteurs par nombre des collaborations.

Ce mémoire présente mes travaux de recherche effectués après la thèse de doctorat et, donc, la plupart, réalisés après mon arrivée à Clermont-Ferrand. Je remercie donc sincèrement mes collègues du Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal pour cet excellent environnement de travail. Faire des mathématiques ensemble ou tout simplement discuter durant nos nombreuses *pauses café* fut un plaisir pour moi. Je voudrais également remercier Dominique Chapelle et Philippe Moireau pour m'avoir accueilli pendant mon année de postdoctorat au sein de leur équipe à INRIA Paris-Rocquencourt.

Je souhaite remercier mes parents et ma soeur pour leur soutien et leur confiance. Finalement, un grand merci, de tout mon coeur, à ma petite famille : Ioana, Ștefan et Anna.

1. Source : <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=882216>. Consulté le 10 octobre 2019.



## Introduction

Ce mémoire présente mes travaux de recherche effectués après la thèse. Ces travaux sont liés à la contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles et aux problèmes inverses, d'une certaine façon, duales aux problèmes de contrôle. Une caractéristique commune des travaux présentés est la démarche qui consiste à toujours suivre un chemin allant des résultats théoriques vers les applications numériques.

Pour donner une unité thématique à ce rapport, une partie de mes travaux ne sera pas discutée en détail. Notamment, je présenterai seulement très brièvement les travaux thématiquement isolés et les travaux qui ne traitent ni de contrôle ni de problèmes inverses. Ce rapport est structuré en trois parties.

La première partie de ce rapport traite de problèmes de contrôlabilité et d'approximation des contrôles pour des équations des ondes (Chapitre 1) et pour l'équation des poutres d'Euler-Bernoulli (Chapitre 2). Plus précisément, le Chapitre 1 résume les résultats obtenus dans les articles [CFM13 ; CCM14 ; CM15a]. Dans ces articles nous avons proposé une approche constructive pour caractériser les contrôles frontières et les contrôles distribués, minimisant certains critères, pour l'équation des ondes. Cette approche réduit le calcul numérique d'un contrôle à la résolution par la méthode des éléments finis des systèmes d'EDP dans un domaine espace-temps, et a l'avantage d'éviter les problèmes liés à l'apparition des fréquences purement numériques non-uniformément contrôlables observées, par exemple, dans [Zua05]. Le Chapitre 2 présente quelques résultats pour l'approximation du contrôle frontière de norme  $L^2$  minimale pour une équation modélisant les vibrations d'une poutre [Bug+14 ; CMR16 ; CMR17]. Plus précisément, nous avons démontré qu'en discrétisant en espace cette équation par un schéma à différences finies centrées, les systèmes ainsi obtenus ne sont pas uniformément observables par rapport au pas de discrétisation. De plus, nous proposons une stratégie de filtration optimale assurant la convergence des contrôles pour des données initiales filtrées.

La deuxième partie de ce mémoire présente des résultats liés aux problèmes inverses pour des équations des ondes et à leur approximation numérique. Ainsi, le Chapitre 3 traite les résultats publiés dans [CM15b ; CM16] concernant la résolution de quelques problèmes inverses liés à l'équation des ondes. De manière similaire aux problèmes de contrôle évoqués dans le Chapitre 1, on écrit les conditions d'optimalité associées aux problèmes inverses considérés sous la forme des formulations mixtes dans un domaine espace-temps. Le Chapitre 4 présente quelques résultats sur la convergence des observateurs pour des équations d'évolution aux dérivées partielles d'ordre deux en temps. Plus précisément, nous formulons les résultats dans un cadre abstrait qui couvre l'équation des ondes, le système de l'élasticité linéaire ou encore différents modèles de plaques. Les travaux présentés dans ce chapitre ont été commencés durant le stage post-doctoral que j'ai effectué pendant l'année 2010-2011 à INRIA Paris-Rocquencourt dans l'équipe MACS et ils ont fait l'objet de trois publications [CIM15 ; Cha+12 ; CCM12].

La troisième partie présente très brièvement mes résultats qui n'ont pas été inclus dans une des deux autres parties [CMP12 ; CMP13 ; Cîm+15 ; ACC18 ; CC19] et donne quelques perspectives pour mes recherches actuelles et futures.

## Publications dans des revues à comité de lecture

- [CC19] Laurent CHUPIN et Nicolae CÎNDEA. “Numerical method for inertial migration of particles in 3D channels”. In : *Comput. & Fluids* 192 (2019), p. 104246. ISSN : 0045-7930. DOI : [10.1016/j.compfluid.2019.104246](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.104246).
- [ACC18] Julien ANIORT, Laurent CHUPIN et Nicolae CÎNDEA. “Mathematical model of calcium exchange during haemodialysis using a citrate containing dialysate”. In : *Math. Med. Biol.* 35.suppl. (2018), p. 87-120. ISSN : 1477-8599. DOI : [10.1093/imammb/dqx013](https://doi.org/10.1093/imammb/dqx013).
- [CMR17] Nicolae CÎNDEA, Sorin MICU et Ionel ROVENȚA. “Boundary controllability for finite-differences semidiscretizations of a clamped beam equation”. In : *SIAM J. Control Optim.* 55.2 (2017), p. 785-817. ISSN : 0363-0129. DOI : [10.1137/16M1076976](https://doi.org/10.1137/16M1076976).
- [CM16] Nicolae CÎNDEA et Arnaud MÜNCH. “Simultaneous reconstruction of the solution and the source of hyperbolic equations from boundary measurements : a robust numerical approach”. In : *Inverse Problems* 32.11 (2016), p. 115020, 36. ISSN : 0266-5611. DOI : [10.1088/0266-5611/32/11/115020](https://doi.org/10.1088/0266-5611/32/11/115020).
- [CIM15] Nicolae CÎNDEA, Alexandre IMPERIALE et Philippe MOIREAU. “Data assimilation of time under-sampled measurements using observers, the wave-like equation example”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 21.3 (2015), p. 635-669. ISSN : 1292-8119. DOI : [10.1051/cocv/2014042](https://doi.org/10.1051/cocv/2014042).
- [CM15a] Nicolae CÎNDEA et Arnaud MÜNCH. “A mixed formulation for the direct approximation of the control of minimal  $L^2$ -norm for linear type wave equations”. In : *Calcolo* 52.3 (2015), p. 245-288. ISSN : 0008-0624. DOI : [10.1007/s10092-014-0116-x](https://doi.org/10.1007/s10092-014-0116-x).
- [CM15b] Nicolae CÎNDEA et Arnaud MÜNCH. “Inverse problems for linear hyperbolic equations using mixed formulations”. In : *Inverse Problems* 31.7 (2015), p. 075001, 38. ISSN : 0266-5611. DOI : [10.1088/0266-5611/31/7/075001](https://doi.org/10.1088/0266-5611/31/7/075001).
- [Cîn+15] Nicolae CÎNDEA et al. “Particle supported control of a fluid-particle system”. In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 104.2 (2015), p. 311-353. ISSN : 0021-7824. DOI : [10.1016/j.matpur.2015.02.009](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2015.02.009).
- [CCM14] Carlos CASTRO, Nicolae CÎNDEA et Arnaud MÜNCH. “Controllability of the linear one-dimensional wave equation with inner moving forces”. In : *SIAM J. Control Optim.* 52.6 (2014), p. 4027-4056. ISSN : 0363-0129. DOI : [10.1137/140956129](https://doi.org/10.1137/140956129).
- [CFM13] Nicolae CÎNDEA, Enrique FERNÁNDEZ-CARA et Arnaud MÜNCH. “Numerical controllability of the wave equation through primal methods and Carleman estimates”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 19.4 (2013), p. 1076-1108. ISSN : 1292-8119. DOI : [10.1051/cocv/2013046](https://doi.org/10.1051/cocv/2013046).
- [CMP13] Nicolae CÎNDEA, Sorin MICU et Jardel Morais PEREIRA. “Approximation of periodic solutions for a dissipative hyperbolic equation”. In : *Numer. Math.* 124.3 (2013), p. 559-601. ISSN : 0029-599X. DOI : [10.1007/s00211-013-0523-y](https://doi.org/10.1007/s00211-013-0523-y).
- [CCM12] D. CHAPELLE, N. CÎNDEA et P. MOIREAU. “Improving convergence in numerical analysis using observers—the wave-like equation case”. In : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 22.12 (2012), p. 1250040, 35. ISSN : 0218-2025. DOI : [10.1142/S0218202512500406](https://doi.org/10.1142/S0218202512500406).
- [Cha+12] Dominique CHAPELLE et al. “Exponential convergence of an observer based on partial field measurements for the wave equation”. In : *Math. Probl. Eng.* (2012), Art. ID 581053, 12. ISSN : 1024-123X. DOI : [10.1155/2012/581053](https://doi.org/10.1155/2012/581053).
- [CMP12] Nicolae CÎNDEA, Sorin MICU et Ademir F. PAZOTO. “Periodic solutions for a weakly dissipated hybrid system”. In : *J. Math. Anal. Appl.* 385.1 (2012), p. 399-413. ISSN : 0022-247X. DOI : [10.1016/j.jmaa.2011.06.049](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.06.049).
- [CMT11] Nicolae CÎNDEA, Sorin MICU et Marius TUCSNAK. “An approximation method for exact controls of vibrating systems”. In : *SIAM J. Control Optim.* 49.3 (2011), p. 1283-1305. ISSN : 0363-0129. DOI : [10.1137/09077641X](https://doi.org/10.1137/09077641X).
- [Cîn+11] Nicolae CÎNDEA et al. “Controllability of a nonlinear hybrid system”. In : *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.* 38.1 (2011), p. 35-48. ISSN : 1223-6934.
- [CT10] Nicolae CÎNDEA et Marius TUCSNAK. “Internal exact observability of a perturbed Euler-Bernoulli equation”. In : *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.* 2.2 (2010), p. 205-221. ISSN : 2066-5997.

- [CT09] Nicolae CÎNDEA et Marius TUCSNAK. “Local exact controllability for Berger plate equation”. In : *Math. Control Signals Systems* 21.2 (2009), p. 93-110. ISSN : 0932-4194. DOI : [10.1007/s00498-009-0042-7](https://doi.org/10.1007/s00498-009-0042-7).

## Actes de conférences

- [CMR16] Nicolae CÎNDEA, Sorin MICU et Ionel ROVENȚA. “Uniform observability for a finite differences discretization of a clamped beam equation”. In : *IFAC-PapersOnLine* 49.8 (2016), p. 315-320. ISSN : 2405-8963. DOI : [10.1016/j.ifacol.2016.07.460](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.460).
- [Bug+14] Ioan Florin BUGARIU et al. “Controllability of the space semi-discrete approximation for the beam equation”. In : *IFAC Proceedings Volumes* 47.3 (2014). 19th IFAC World Congress, p. 11369-11374. ISSN : 1474-6670. DOI : <https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.02286>.
- [Cîn+13] Nicolae CÎNDEA et al. “Numerical aspects and controllability of a one dimensional fluid-structure model”. In : *IFAC Proceedings Volumes* 46.26 (2013). 1st IFAC Workshop on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, p. 19-24. ISSN : 1474-6670. DOI : <https://doi.org/10.3182/20130925-3-FR-4043.00035>.
- [Cîn+10] Nicolae CÎNDEA et al. “Optimal placement of electrodes in an electroporation process”. In : *ESAIM : Proc.* 30 (2010), p. 34-43. DOI : [10.1051/proc/2010004](https://doi.org/10.1051/proc/2010004).
- [CT09] Nicolae CÎNDEA et Marius TUCSNAK. “Fast and strongly localized observation for a perturbed plate equation”. In : *Optimal control of coupled systems of partial differential equations*. T. 158. Internat. Ser. Numer. Math. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, p. 73-83. DOI : [10.1007/978-3-7643-8923-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8923-9_4).

## Prépublications

- [Cîn+19] Nicolae CÎNDEA et al. “Boundary optimal control for antiplane problems with power-law friction”. working paper or preprint. Juil. 2019.



PREMIÈRE PARTIE

CONTRÔLE



## Méthodes espace-temps pour la contrôlabilité de l'équation des ondes

Ce chapitre présente les résultats obtenus dans les articles [CFM13; CCM14; CM15a] sur la contrôlabilité et l'approximation des contrôles pour l'équation des ondes. Dans ces papiers nous étudions l'approximation des contrôles pour l'équation des ondes, soit dans le cas frontière, soit dans le cas distribué, agissant dans un domaine fixe par rapport au temps, ou dans un domaine variant avec le temps. L'idée principale de ces travaux est de proposer des méthodes constructives pour le calcul du contrôle minimisant un certain critère, en reformulant la condition d'optimalité comme une équation aux dérivées partielles, ou comme un système d'ordre élevé, dans un domaine espace-temps.

### 1.1 Contrôlabilité frontière

Considérons l'équation des ondes unidimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} y_{tt} - (a(x)y_x)_x + b(x,t)y = 0, & (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ y(0,t) = 0, \quad y(1,t) = v(t), & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = y_1(x), & x \in (0,1). \end{cases} \quad (1.1)$$

On suppose  $T > 0$ ,  $a \in C^3([0,1])$  avec  $a(x) \geq a_0 > 0$  pour tout  $x \in [0,1]$ ,  $b \in L^\infty(Q_T)$ ,  $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ . Par  $v = v(t)$  on dénote un contrôle (une fonction de  $L^2(0,T)$ ) et  $y = y(x,t)$  est l'état de l'équation des ondes. Ici, et partout dans ce chapitre, on note  $\Omega = (0,1)$ ,  $Q_T = (0,1) \times (0,T)$  et  $\Sigma_T = \{0,1\} \times (0,T)$ . On utilisera également la notation

$$Ly = y_{tt} - (a(x)y_x)_x + b(x,t)y. \quad (1.2)$$

Il est bien connu (voir, par exemple, la monographie [Lio88]) que pour toute donnée initiale  $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  et pour tout  $v \in L^2(0,T)$  il existe une unique solution  $y$  de (1.1) telle que

$$y \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega)). \quad (1.3)$$

Pour tout  $T > 0$ , on dit que l'équation des ondes (1.1) est contrôlable à zéro en temps  $T > 0$  si pour toute donnée initiale  $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  il existe un contrôle  $v \in L^2(0,T)$  tel que la solution  $y$  de (1.1) vérifie

$$y(\cdot, T) = 0, \quad y_t(\cdot, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

La contrôlabilité de l'équation des ondes est maintenant un des résultats classiques de la théorie du contrôle : si le temps  $T$  est supérieur à un temps critique  $T^*$ , alors l'équation des ondes est contrôlable à zéro au temps  $T$ . Si pour le cas  $a \equiv 1$  et  $b \equiv 0$  le temps  $T^*$  est égal à deux (voir [Lio88]), pour le cas général une condition géométrique liant le temps  $T^*$ , les fonctions  $a$  et  $b$ , le domaine  $\Omega$  ainsi que le domaine où le contrôle agit doit être vérifiée (voir [BLR92]). Il

est également bien connu, que la contrôlabilité à zéro de l'équation (1.1) est équivalente à une inégalité d'observabilité pour le problème adjoint associé : il existe une constante  $k^* > 0$  telle que toute solution  $\phi$  du problème suivant :

$$\begin{cases} L\phi = 0 & \text{dans } Q_T \\ \phi = 0 & \text{sur } \Sigma_T \\ (\phi(\cdot, T), \phi_t(\cdot, T)) = (\phi_0, \phi_1) & \text{dans } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \end{cases} \quad (1.4)$$

vérifie

$$\|\phi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq k^* \int_0^T |\phi_x(1, t)|^2 dt \quad \forall (\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \quad (1.5)$$

La dualité contrôlabilité / observabilité a été mise en évidence en utilisant la méthode des multiplicateurs en [Lio88] par ce qu'on appelle la « méthode d'unicité de Hilbert » (*HUM*). Ainsi, l'inégalité d'observabilité (1.5) assure la coercitivité de la fonctionnelle strictement convexe suivante :

$$\mathcal{I}(\phi_0, \phi_1) = \frac{1}{2} \int_0^T |\phi_x(1, t)|^2 dt + \int_0^1 y_0(x) \phi_t(x, 0) dx - \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1} \quad (1.6)$$

définie pour toute  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  et  $\phi$  solution de (1.4). On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1,1}$  le produit de dualité de  $H^{-1}(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$ .

L'approximation des contrôles pour l'équation des ondes a été initialement focalisée sur la minimisation de la fonctionnelle duale  $\mathcal{I}$  donnée par (1.6). Une des premières contributions est due à Glowinski, Li et Lions [GLL90] (voir [GLH08] pour une mise à jour). Néanmoins, cette approche subit certaines difficultés numériques liées au fait que la constante d'observabilité  $k^*$  n'est pas indépendante du pas de discrétisation [GLL90; Zua05; Mün05]. Plusieurs remèdes pour ces problèmes ont été proposés : l'utilisation des éléments finis mixtes [CMM08], utilisation d'une viscosité numérique [Mic07], l'utilisation du principe de Russell [Rus78] « stabilisabilité implique contrôlabilité » [CMT11], ou encore la filtration des hautes fréquences numériques [Erv09; EZ13], etc.

Dans [CFM13] nous proposons une approche différente, consistant à minimiser directement la fonctionnelle « *primale* », c'est-à-dire, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } J(y, v) = \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \rho^2 |y|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \rho_0^2 |v|^2 dt \\ \text{sujet à } (y, v) \in \mathcal{C}(y_0, y_1; T) \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $\mathcal{C}(y_0, y_1; T) = \{(y, v) : v \in L^2(0, T), y \text{ solution contrôlée de (1.1)}\}$ . Ici on suppose que  $\rho$  et  $\rho_0$  sont des fonctions poids à choisir plus tard. Par dualité au sens de Fenchel et Rockafellar [Roc70; ET99], si  $\rho$  et  $\rho_0$  sont strictement positives, continues, uniformément minorées, on peut remplacer le problème de minimisation sous contraintes (1.7) par le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } J^*(\mu, \phi_0, \phi_1) = \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \rho^{-2} |\mu|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \rho_0^{-2} |a(1) \phi_x(1, t)|^2 dt \\ \quad + \int_0^1 y_0(x) \phi_t(x, 0) dx - \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1} \\ \text{sujet à } (\mu, \phi_0, \phi_1) \in L^2(Q_T) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \end{cases} \quad (1.8)$$

Cependant, comme la variable  $y$  apparaît dans la fonctionnelle  $J$ , il est possible d'éviter la méthode duale. On peut donc écrire directement les conditions d'optimalité pour la fonctionnelle  $J$ , ce qui nous permettra d'exprimer son minimum  $(y, v)$  en termes d'une nouvelle variable, solution d'une équation aux dérivées partielles d'ordre quatre dans le domaine  $Q_T$ .

Une deuxième possibilité, proposée dans [CM15a], est de réécrire le problème de minimisation duale (1.8) de manière que la condition d'optimalité puisse être vue comme une formulation mixte. des contrôles de norme  $L^2$  minimale.

Les deux situations sont intéressantes de point de vue numérique : en introduisant des espaces de dimension finie adéquats on peut approcher numériquement les solutions des systèmes d'optimalité et donc les contrôles exacts correspondants.

### 1.1.1 Une méthode *primale*

La proposition suivante donne facilement, sous l'hypothèse que l'inégalité d'observabilité (1.5) soit satisfaite, l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.7) :

**Proposition 1.1.** *Soit  $T > 0$  suffisamment grand. Supposons que  $\rho$  et  $\rho_0$  sont strictement positives et vérifient  $\rho \in C(Q_T)$ ,  $\rho_0 \in C([0, T])$  et  $\rho, \rho_0 \geq \underline{\rho} > 0$ . Alors, pour toute donnée initiale  $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  le problème (1.7) admet une unique solution.*

Il est convenable d'introduire la classe de fonctions suivante :

$$\mathcal{A}(x_0, a_0) = \left\{ a \in C^3([0, 1]) : a(x) \geq a_0 > 0, \right. \\ \left. - \min_{x \in [0, 1]} (a(x) + (x - x_0)a'(x)) < \min_{x \in [0, 1]} (a(x) + \frac{1}{2}(x - x_0)a'(x)) \right\}. \quad (1.9)$$

Si  $a \in \mathcal{A}(x_0, a_0)$  pour un  $x_0 < 0$  et  $a_0 > 0$ , on peut choisir  $\beta$  tel que

$$- \min_{x \in [0, 1]} (a(x) + (x - x_0)a'(x)) < \beta < \min_{x \in [0, 1]} (a(x) + \frac{1}{2}(x - x_0)a'(x))$$

et définir les poids  $\psi$  et  $\varphi$  ci-dessus :

- $\psi(x, t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2 + M_0$ , où  $M_0$  est choisi tel que  $\psi(x, t) \geq 1$  pour tout  $(x, t) \in Q_T$  ;
- $\varphi(x, t) = e^{\lambda \psi(x, t)}$  où  $\lambda > 0$ .

Avec ces notations, nous pouvons démontrer l'estimation de Carleman suivante :

**Théorème 1.2.** *Sous les hypothèses précédentes et en supposant de plus que*

$$T \geq \frac{1}{\beta} \max_{x \in [0, 1]} \sqrt{a(x)}(x - x_0),$$

*il existe des constantes strictement positives  $s_0$  et  $M$  (dépendant seulement de  $x_0, a_0, \|a\|, \|b\|_{L^\infty(Q_T)}$  et  $T$ ), telles que pour tout  $s \leq s_0$  on a*

$$s \int_{-T}^T \int_0^1 e^{2s\varphi} (|w_t|^2 + |w_x|^2) dx dt + s^3 \int_{-T}^T \int_0^1 e^{2s\varphi} |w|^2 dx dt \leq \\ M \int_{-T}^T \int_0^1 e^{2s\varphi} |Lw|^2 dx dt + Ms \int_{-T}^T e^{2s\varphi} |w_x(1, t)|^2 dt. \quad (1.10)$$

Il existe une littérature importante au sujet des inégalités de Carleman pour l'équation des ondes. La plupart de références considère le cas  $a \equiv 1$  (voir par exemple [BDE13 ; Ima02 ; Tat96]). Nous démontrons donc ce résultat dans l'annexe de l'article [CFM13]. Cette inégalité est utilisée pour démontrer qu'un certain espace  $P$  est un espace de Hilbert. Plus précisément, soit

$$P_0 = \{q \in C^2(Q_T) : q = 0 \text{ on } \Sigma_T\}.$$

Il est facile à voir que la forme bilinéaire

$$\langle p, q \rangle_P = \iint_{Q_T} \rho^{-2} LpLq dx dt + \int_0^T \rho_0^{-2} a(1)^2 p_x(1, t) q_x(1, t) dt$$

est un produit scalaire sur  $P_0$ . Soit  $P$  l'espace obtenu en prenant l'adhérence de l'espace  $P_0$  par rapport à ce produit scalaire et à la norme induite. Alors  $P$  est un espace de Hilbert et de plus on peut démontrer le résultat suivant :

**Lemme 1.3.** Soit  $T \geq \frac{2}{\beta} \max_{x \in [0,1]} \sqrt{a(x)}(x - x_0)$  et  $s > s_0$ . On considère les poids  $\rho$  et  $\rho_0$  définies par

$$\rho(x, t) = e^{-s\varphi(x, 2t-T)} \text{ et } \rho_0(t) = \rho(1, t).$$

Soit  $P$  l'espace associé à ces poids, la fonction  $\varphi$  étant comme dans l'inégalité de Carleman (1.10). Alors, il existe une constante  $C_0$  (dépendant seulement de  $x_0, a_0, \|a\|, \|b\|_{L^\infty(Q_T)}, \lambda, s$  et  $T$ ) telle que

$$\|p(\cdot, 0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|p_t(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0 \langle p, p \rangle_P \quad \forall p \in P. \quad (1.11)$$

La preuve de cette lemme est une conséquence directe de l'inégalité de Carleman (1.10).

**Remarque 1.4.** L'inégalité (1.11) peut être vue comme une inégalité d'observabilité généralisée.

Les poids  $\rho^{-1}$  and  $\rho_0^{-1}$  explosent de manière exponentielle avec  $s$ . Cela crée de difficultés au niveau numérique, donc de point de vue pratique peut être souhaitable un changement de variable  $z = \rho p$  dans (1.13). Une analyse similaire pourra être faite pour toutes les poids  $\rho$  et  $\rho_0$  pour lesquelles une inégalité d'observabilité (1.11) aura lieu. Notamment, si l'inégalité d'observabilité est satisfaite, l'inégalité (1.11) peut être démontrée pour  $\rho = \rho_0 = 1$ .

Du Lemme 1.3 on en déduit le résultat suivant donnant une caractérisation variationnelle de la paire  $(y, v) \in \mathcal{C}(y_0, y_1; T)$  minimisant la fonctionnelle  $J$ .

**Proposition 1.5.** Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, il existe  $p \in P$  telle que la solution  $(y, v) \in \mathcal{C}(y_0, y_1; T)$  de (1.7) est donnée par

$$y = -\rho^{-2} Lp, \quad v = -(a(x)\rho_0^{-2} p_x)|_{x=1}. \quad (1.12)$$

De plus,  $p \in P$  est l'unique solution de la formulation variationnelle suivante :

$$\iint_{Q_T} \rho^{-2} Lp Lq dx dt + \int_0^T \rho_0^{-2} a^2(1) p_x(1, t) q_x(1, t) dt = \langle y_0, q_t(\cdot, 0) \rangle_{L^2} - \langle y_1, q(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}, \quad (1.13)$$

pour tout  $q \in P$ .

L'idée de la preuve est d'utiliser donc la formule de représentation de Riesz dans l'espace de Hilbert  $P$  pour montrer que (1.13) admet une unique solution  $p$ . Ensuite, il faut observer qu'en remplaçant (1.12) dans (1.13) on obtient la condition d'optimalité caractérisant la paire  $(y, v)$ .

La formulation variationnelle (1.13) permet donc de construire une suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  convergeant fortement vers le contrôle  $v$  solution de (1.7). Nous présentons dans ce qui suit la démarche pour mettre en place cette approche numérique.

## Analyse numérique de l'approche variationnelle

### Une approximation conforme

Introduisons d'abord la forme linéaire  $\ell : P \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\ell(q) = \int_0^1 y_0(x) q_t(x, 0) dx - \langle y_1, q(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}.$$

Alors, (1.13) s'écrit : trouver  $p \in P$  telle que

$$\langle p, q \rangle_P = \ell(q) \quad \forall q \in P. \quad (1.14)$$

Supposons maintenant que pour tout  $h > 0$ ,  $P_h \subset P$  est un sous-espace de dimension finie de  $P$ . Alors, le problème (1.14) peut être approché de manière conforme par

$$\langle p_h, q_h \rangle_P = \ell(q_h) \quad \forall q_h \in P_h. \quad (1.15)$$

Bien évidemment, le problème (1.15) est bien posé et, de plus, nous avons le résultat classique suivant :

**Lemme 1.6.** Soit  $p \in P$  l'unique solution de (1.14) et soit  $p_h \in P_h$  l'unique solution de (1.15). Alors,

$$\|p - p_h\|_P \leq \inf_{q_h \in P_h} \|p - q_h\|_P.$$

Ce résultat peut être donc utilisé pour démontrer que  $p_h$  converge vers  $p$  si les espaces  $P_h$  sont bien choisis. Supposons donc que nous disposons d'un opérateur d'interpolation  $\Pi_h : P_0 \rightarrow P_h$  tel que

$$\|p - \Pi_h p\|_P \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0 \text{ pour tout } p \in P_0.$$

Le résultat de convergence suivant est obtenu rapidement :

**Proposition 1.7.** Soit  $p \in P$  l'unique solution de (1.14) et soit  $p_h \in P_h$  l'unique solution de (1.15). Alors,

$$\|p_h - p\|_P \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $P_0$  est dense dans  $P$ , il existe  $p_\varepsilon \in P_0$  tel que  $\|p - p_\varepsilon\|_P < \varepsilon$ . Alors, en appliquant le Lemme 1.6,

$$\begin{aligned} \|p - p_\varepsilon\|_P &\leq \|p - \Pi_h p_\varepsilon\|_P \leq \|p - p_\varepsilon\|_P + \|p_\varepsilon - \Pi_h p_\varepsilon\|_P \\ &\leq \varepsilon + \|p_\varepsilon - \Pi_h p_\varepsilon\|_P \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

### Construction des espaces $P_h$

Les espaces  $P_h$  doivent être choisis de manière que  $\rho^{-1} L p_h$  appartienne à  $L^2(Q_T)$  pour tout  $p_h \in P_h$ . Cela impose que les dérivées secondes des fonctions  $p_h$  soient dans  $L^2(Q_T)$ .

Soit  $N_x$  et  $N_t$  deux entiers et  $\Delta x = 1/N_x$ ,  $\Delta t = T/N_t$ . Soit  $h = \max\{\Delta t, \Delta x\}$ . On définit  $\mathcal{Q}_h$  un maillage formé d'éléments rectangulaires tel que  $\overline{Q_T} = \bigcup_{K \in \mathcal{Q}_h} K$ . Alors, l'espace  $P_h$  est défini par

$$P_h = \{z_h \in C^1(Q_T) : z_k|_K \in \mathbb{P}(K) \quad \forall K \in \mathcal{Q}_h, z_h = 0 \text{ sur } \Sigma_T\}, \quad (1.16)$$

où par  $\mathbb{P}(K)$  on dénote l'espace de fonctions polynomiales en  $x$  et  $t$

$$\mathbb{P}(K) = (\mathbb{P}_{3,x} \otimes \mathbb{P}_{3,t})(K).$$

L'espace  $\mathbb{P}_{3,\xi}$  est par définition l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus 3 de variable  $\xi$ .

On construit de manière précise une base de cet espace ainsi qu'un opérateur de projection  $\Pi_h$ . La construction est assez classique et nous omettons les détails dans le présent mémoire.

La Proposition 1.7 donne le résultat suivant pour la convergence des contrôles et des solutions contrôlées correspondantes :

**Proposition 1.8.** Soit  $p_h \in P_h$  l'unique solution du problème (1.14) pour l'espace  $P_h$  donné par (1.16). Posons

$$y_h = \rho^{-2} L p_h, \quad v_h = -\rho_0^2 a(x) p_{h,x}.$$

Alors on a

$$\|y - y_h\|_{L^2(Q_T)} \rightarrow 0 \text{ et } \|v - v_h\|_{L^2(0,T)} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0,$$

où  $(y, v)$  est l'unique solution de (1.7).

**Remarque 1.9.** Le résultat de la Proposition 1.8 reste valable si on approche les poids  $\rho$  et  $\rho_0$  par leur interpolation sur l'espace de dimension finie  $P_h$ . Cela reviendra à remplacer dans (1.15) le produit scalaire de  $P$  par une forme bilinéaire  $m_h$  et la forme linéaire  $\ell$  par une forme linéaire  $\ell_h$ . Néanmoins, ces nouvelles formes restent proches des formes initiales et on peut quantifier de manière précise la différence entre la solution de (1.15) et la solution  $\tilde{p}_h \in P$  du problème suivant :

$$m_h(\tilde{p}_h, q_h) = \ell_h(q_h) \quad \forall q_h \in P_h. \quad (1.17)$$

## Simulations numériques

Nous présentons maintenant quelques résultats numériques liées au problème (1.17). Ce problème peut être vu comme un système linéaire de matrice creuse, symétrique, définie positive  $\mathcal{M}_h$  de  $\mathcal{M}_{4N_x N_t}(\mathbb{R})$ .

Nous avons utilisé une méthode d'intégration exacte pour calculer la matrice  $\mathcal{M}_h$  et la méthode de Cholesky pour la résolution du système linéaire. Une fois la forme bilinéaire  $m_h$  calculée, le contrôle  $v_h$  est donné par (1.12), donc, comme la dérivée par rapport à  $x$  est un degré de liberté du problème, cela ne requiert aucun calcul supplémentaire.

Sauf si précisé autrement, nous allons considérer  $a(x) \equiv 1$  et  $b(x) \equiv 0$ . Le temps de contrôle sera  $T = 2.2$ ,  $x_0 = -1/20$ ,  $\beta = 0.99$  et  $M_0 = 1 - x_0 + \beta T^2$ . Nous choisissons les paramètres apparaissant dans les poids  $\rho$  et  $\rho_0$  comme suit :  $\lambda = 0.1$  et  $s = 1$ .

## Estimation de la constante d'observabilité

Avant de tester la méthode proposée pour une condition initiale donnée, on étudie le comportement de la constante d'observabilité par rapport à la discrétisation. Plus précisément, l'équivalent discret de l'inégalité d'observabilité généralisée (1.11) est le suivant

$$(A_h\{p_h\}, \{p_h\}) \leq C_{0,h}(\mathcal{M}_h\{p_h\}, \{p_h\}) \quad \forall p_h \in P_h,$$

où  $A_h$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{4N_x N_t}(\mathbb{R})$  définie par

$$(A_h\{p_h\}, \{q_h\}) = \int_0^1 (p_{h,x}(x,0)q_{h,x}(x,0) + p_{h,t}(x,0)q_{h,t}(x,0)) dx.$$

Avec ces notations, la constante  $C_{0,h}$  est la solution du problème de valeurs propres généralisé suivant :

$$C_{0,h} = \max\{\lambda : \exists p_h \in P_h, p_h \neq 0 \text{ tel que } A_h\{p_h\} = \lambda \mathcal{M}_h\{p_h\}\}$$

et peut donc être calculée par la méthode de la puissance itérée. Dans le Table 1.1 nous recueillons les valeurs ainsi obtenues de la constante  $C_{0,h}$  pour plusieurs valeurs de  $h = \Delta x = \Delta t$  et pour deux temps  $T = 2.2$  et  $T = 1.5$ . Remarquons que la constante d'observabilité reste bornée dans le cas  $T \geq 2$  et explose si  $T < 2$ .

$h$	1/10	1/20	1/40	1/80
$T = 2.2$	$6.60 \times 10^{-2}$	$7.61 \times 10^{-2}$	$8.56 \times 10^{-2}$	$9.05 \times 10^{-2}$
$T = 1.5$	0.565	2.672	17.02	96.02

TABLE 1.1 – Comportement de la constante  $C_{0,h}$  par rapport à  $h$ .

## Donnée initiale régulière et vitesse de propagation constante

Pour un premier exemple numérique nous considérons une donnée initiale très régulière :

$$(y_0, y_1) = (\sin(\pi x), 0) \text{ et } a = b \equiv 1.$$

Dans la Figure 1.1 on représente l'évolution des normes  $\|\hat{p} - p_h\|_P$  et  $\|\hat{v} - v_h\|_{L^2(0,T)}$  par rapport à  $h$ . Nous avons noté  $\hat{p}$  et  $\hat{v}$  la solution de référence de (1.17) obtenue en prenant  $h = \frac{1}{160}$  et le contrôle correspondant, respectivement.

Dans la Figure 1.2 nous représentons le contrôle ainsi que la solution contrôlée correspondante associées à la donnée initiale  $(y_0, y_1)$ . Ces résultats sont obtenus en résolvant numériquement (1.17) pour  $h = \frac{1}{80}$ .

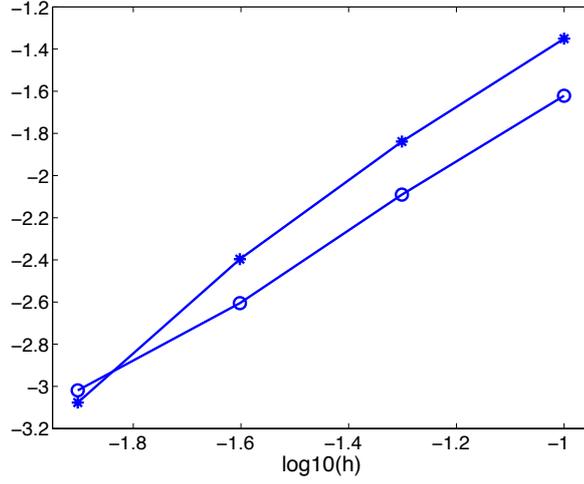


FIGURE 1.1 –  $\log_{10} \|\hat{p} - p_h\|_P$  ( $\star$ ) et  $\log_{10} \|\hat{v} - v_h\|_{L^2(0,T)}$  ( $\circ$ ) vs.  $\log_{10}(h)$ .

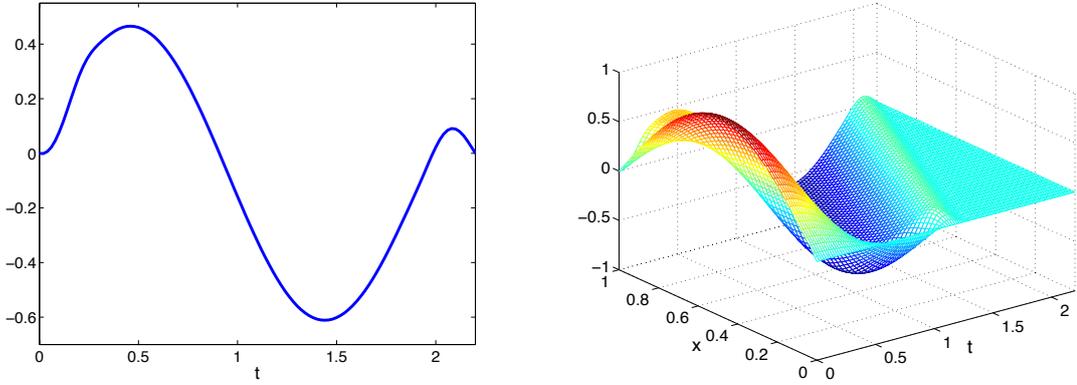


FIGURE 1.2 – Contrôle (gauche) et solution contrôlée (droite) associée à la donnée initiale  $(y_0(x), y_1(x)) \equiv (\sin(\pi x), 0)$ . Le pas de discrétisation est  $h = (1/80, 1/80)$ .

### Donnée initiale irrégulière et vitesse de propagation constante

On considère une donnée initiale dans  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  en gardant une vitesse de propagation constante  $a \equiv 1$ . Plus précisément, soit  $y_0(x) = \mathbb{1}_{[0.5, 0.7]}(x)$  et  $y_1(x) = 0$ . Cette donnée initiale, excitant toutes les fréquences du Laplacien, donne des comportements pathologiques quand on approche le contrôle HUM associé, par exemple, en minimisant la fonctionnelle duale. Comme pour le cas des données régulières, la méthode proposée donne une suite convergente de contrôles. Le contrôle ainsi obtenu pour un pas de discrétisation  $h = \frac{1}{80}$  ainsi que la solution contrôlée associée sont représentés graphiquement dans la Figure 1.3.

### Donnée initiale régulière et vitesse de propagation non-constante

Le dernier exemple de cette section concerne la contrôlabilité de la donnée initiale localisée suivante  $(y_0, y_1) = (e^{-500(x-0.2)^2}, 0)$ , pour une équation des ondes avec une vitesse de propagation variable  $a \in C^3([0, 1])$  avec  $a'(x) \geq 0$  telle que

$$a \in C^3([0, 1]), \quad a'(x) \geq 0, \quad a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 0.45] \\ 5, & \text{si } x \in [0.55, 1]. \end{cases} \quad (1.18)$$

La condition sur le temps  $T$  de contrôlabilité du Lemme 1.3 se traduit pour ce choix de  $a$  comme suit :  $T > 2(1 + 1/20)\sqrt{T} \approx 4.69$  (en prenant à nouveau  $x_0 = -1/20$ ). Malgré cela, on observe

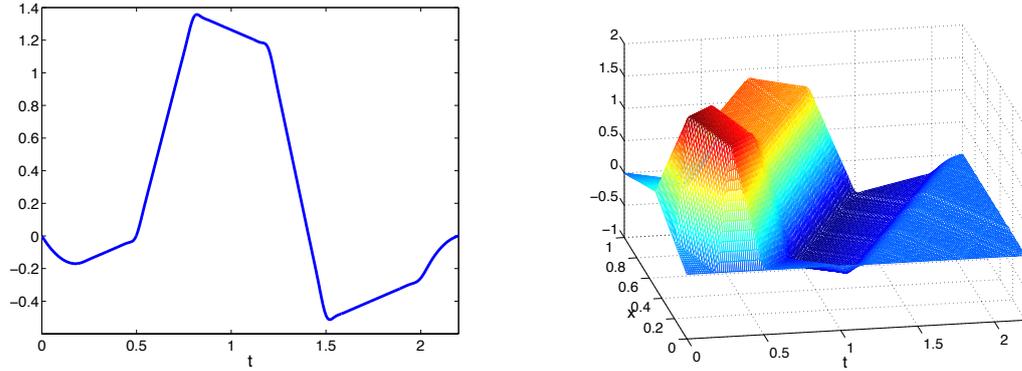


FIGURE 1.3 – Contrôle (gauche) et solution contrôlée (droite) associée à la donnée initiale  $(y_0(x), y_1(x)) \equiv (\mathbb{1}_{[0.5,0.7]}(x), 0)$ . Le pas de discrétisation est  $h = (1/80, 1/80)$ .

que la constante numérique d’observabilité reste bornée pour des temps plus courts. On prend donc  $T = 2.2$ . Les résultats obtenus sont affichés dans la Figure 1.4.

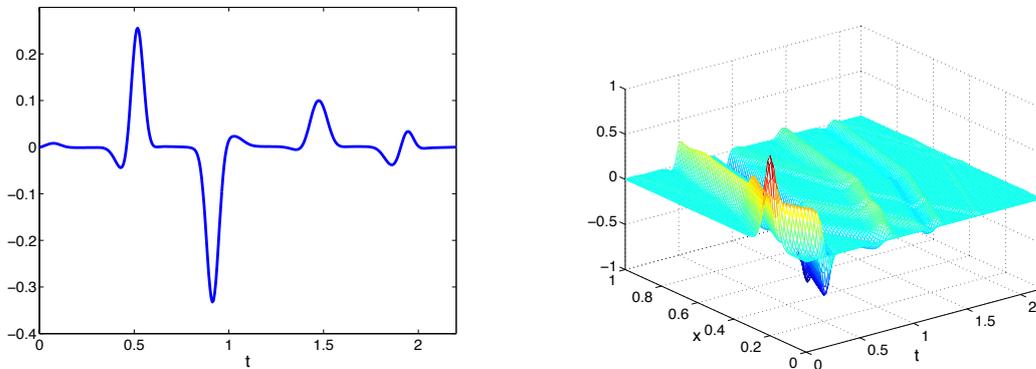


FIGURE 1.4 – Contrôle (gauche) et solution contrôlée (droite) associée à la donnée initiale  $(y_0(x), y_1(x)) \equiv (e^{-500(x-0.2)^2}, 0)$  et une vitesse de propagation  $a$  donnée par (1.18). Le pas de discrétisation est  $h = (1/80, 1/80)$ .

### Quelques commentaires

La recherche d’un contrôle minimisant  $J$  dans (1.7), où l’état contrôlé apparaît de manière explicite, est très bien adaptée de point de vue numérique. En fait, cela se réduit à la résolution d’une équation aux dérivées partielles qui est facile à analyser et à résoudre. Remarquer que l’approche que nous proposons ne demande pas la discrétisation d’un opérateur des ondes, donc ne génère pas des oscillations numériques parasites. Cela est une caractéristique importante de la méthode et pourrait justifier son utilisation par rapport aux méthodes habituelles minimisant la fonctionnelle duale par un algorithme de type gradient.

Une difficulté de cette méthode est liée à la présence des poids  $\rho^{-2}$  et  $\rho_0^{-2}$ , explosant de manière exponentielle par rapport aux paramètres  $s$  et  $\lambda$ , dans le problème variationnel à résoudre. En fait, dans tous les expériences numériques que nous avons réalisé nous avons observé une très faible dépendance des résultats par rapport aux valeurs de  $s$  et de  $\lambda$ . Cela est en parfait accord avec la Remarque 1.4. La présence des poids est seulement une conséquence technique de l’utilisation de l’inégalité de Carleman.

Remarquer que la solution de la formulation variationnelle (1.13) peut être vue aussi comme le minimum d’une fonctionnelle

$$I(p) = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle_P - \ell(p)$$

qui est similaire à la fonctionnelle conjuguée  $J^*$  de (1.8).

La démarche proposée dans un cadre unidimensionnel peut être étendue à une dimension quelconque de l'espace. Néanmoins, de point de vue numérique, cela est plus compliqué, en nécessitant l'utilisation d'éléments finis de classe  $C^1$  en dimension supérieure.

### 1.1.2 Une formulation mixte pour l'approximation du contrôle de norme $L^2$ minimale

Cette section présente brièvement les résultats obtenus dans [CM15a] dans le cas de la contrôlabilité frontière. Les mêmes résultats peuvent être écrits pour les contrôles distribués et seront discutés et utilisés dans la Section 1.2. Plus précisément, nous adaptons les résultats de [CFM13], décrits aussi dans la section précédente, pour approcher les contrôles de norme  $L^2$  minimale. L'idée principale sera de reformuler les conditions d'optimalité du contrôle sous la forme d'une formulation mixte faisant apparaître le contrôle et l'état du système adjoint. Le résultat principal démontre le caractère bien posé de cette formulation mixte et, en particulier, une condition *inf-sup*. Cette méthode est une méthode constructive. Nous présenterons donc sa mise en oeuvre et nous discuterons plusieurs résultats numériques.

Pour considérer donc les contrôles de norme  $L^2$  minimale, les poids  $\rho$  et  $\rho_0$  introduites en début de la Section 1.1 sont choisis pour le reste du chapitre comme suit :

$$\rho \equiv 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 \equiv 1.$$

L'idée de la méthode qu'on propose est d'éviter la minimisation de la fonctionnelle conjuguée  $J^*$  par rapport aux données initiales  $(\phi_0, \phi_1)$ . Comme la solution du système adjoint (1.4) est uniquement déterminée par les données initiales  $(\phi_0, \phi_1)$ , nous proposons de reformuler la minimisation de  $J^*$  en gardant la solution  $\phi$  de (1.4) comme variable principale. Plus précisément, on considère le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\phi \in W} \hat{J}^*(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^T |a(1)\phi_x(1, t)|^2 + \int_0^1 y_0(x)\phi_t(x, 0)dx - \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}, \quad (1.19)$$

avec l'espace  $W$  défini par :

$$W = \{ \phi \in L^2(Q_T), \phi = 0 \text{ sur } \Sigma_T \text{ telle que } L\phi = 0 \in L^2(Q_T), \phi_x(1, \cdot) \in L^2(0, T) \}. \quad (1.20)$$

Il est facile à voir que l'espace  $W$  est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire

$$\langle \phi, \bar{\phi} \rangle_W = \int_0^T a(1)^2 \phi_x(1, t) \bar{\phi}_x(1, t) dt, \quad \forall \phi, \bar{\phi} \in W.$$

Pour tout  $\phi \in W$  on note  $\|\phi\|_W^2 = \langle \phi, \phi \rangle_W$  la norme associée. Remarquons, que si  $\varphi \in W$ , l'inégalité d'observabilité (1.5) donne  $(\phi(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0)) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , donc la fonctionnelle  $\hat{J}^*$  est bien définie sur  $W$ . Alors, la minimisation de la fonctionnelle  $\hat{J}^*$  sur  $W$  est équivalente à la minimisation de la fonctionnelle  $J^*$  sur  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

La variable par rapport à laquelle on minimise la fonctionnelle  $\hat{J}^*$  est soumise maintenant à la contrainte  $L\phi = 0$ . Pour s'affranchir de cette contrainte on considère une formulation mixte. Soit  $\Phi$  l'espace suivant contenant  $W$  :

$$\Phi = \{ \phi \in L^2(Q_T), \phi = 0 \text{ sur } \Sigma_T \text{ telle que } L\phi \in L^2(Q_T), \phi_x(1, \cdot) \in L^2(0, T) \}, \quad (1.21)$$

équipé du produit scalaire

$$\langle \phi, \bar{\phi} \rangle_\Phi = \int_0^T a(1)^2 \phi_x(1, t) \bar{\phi}_x(1, t) dt + \eta \iint_{Q_T} L\phi L\bar{\phi} dx dt, \quad \forall \phi, \bar{\phi} \in \Phi, \quad (1.22)$$

pour un réel fixé  $\eta > 0$ . Considérons la formulation mixte suivante : trouver  $(\phi, \lambda) \in \Phi \times L^2(Q_T)$  solution de

$$\begin{cases} \mathfrak{a}(\phi, \bar{\phi}) + \mathfrak{b}(\bar{\phi}, \lambda) = \ell(\bar{\phi}), & \forall \phi \in \Phi \\ \mathfrak{b}(\phi, \bar{\lambda}) = 0, & \forall \bar{\lambda} \in L^2(Q_T), \end{cases} \quad (1.23)$$

où

$$\mathfrak{a} : \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{a}(\phi, \bar{\phi}) = \langle \phi, \bar{\phi} \rangle_W \quad (1.24)$$

$$\mathfrak{b} : \Phi \times L^2(Q_T) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{b}(\phi, \lambda) = \iint_{Q_T} L\phi(x, t)\lambda(x, t)dxdt \quad (1.25)$$

$$\ell : \Phi \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell(\phi) = - \int_0^1 y_0(x)\phi_t(x, 0)dx + \langle y_1, \phi(\cdot, 0) \rangle_{-1,1}. \quad (1.26)$$

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

**Théorème 1.10.** *Soit  $x_0 < 0$ ,  $a_0 > 0$  et  $a \in \mathcal{A}(x_0, a_0)$ . Pour tout  $T > T^*(a)$  les affirmations suivantes sont vérifiées :*

1. La formulation mixte (1.23) est bien posée.
2. L'unique solution  $(\phi, \lambda) \in \Phi \times L^2(Q_T)$  de (1.23) est l'unique point selle du Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} : \Phi \times L^2(Q_T) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(\phi, \lambda) = \frac{1}{2}\mathfrak{a}(\phi, \phi) + \mathfrak{b}(\phi, \lambda) - \ell(\phi). \quad (1.27)$$

3. La fonction  $\phi$  donnée par 2. satisfait  $\phi \in W$  et est l'unique minimiseur de la fonctionnelle  $\hat{J}^*$  sur  $W$ . Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  est l'état de l'équation des ondes contrôlée correspondante, vérifiée au sens faible.

*Idée de la preuve.* Il est facile à voir que la forme bilinéaire  $\mathfrak{a}$  est continue sur  $\Phi \times \Phi$ , symétrique et positive et la forme bilinéaire  $\mathfrak{b}$  est continue sur  $\Phi \times L^2(Q_T)$ . De plus, la continuité de la forme linéaire  $\ell$  sur  $\Phi$  est une conséquence directe de l'inégalité de Carleman (1.10). Alors, le fait que la formulation mixte est bien posée s'obtient des deux propriétés suivantes (voir [BBF13]) :

—  $\mathfrak{a}$  est coercive sur  $\mathcal{N}(\mathfrak{b})$ , où par  $\mathcal{N}(\mathfrak{b})$  on dénote le noyau de  $\mathfrak{b}$  :

$$\mathcal{N}(\mathfrak{b}) = \{\phi \in \Phi \text{ telle que } \mathfrak{b}(\phi, \lambda) = 0 \text{ pour tout } \lambda \in L^2(Q_T)\}.$$

—  $\mathfrak{b}$  satisfait l'inégalité *inf-sup* habituelle sur  $\Phi \times L^2(Q_T)$  : il existe  $\delta > 0$  telle que

$$\inf_{\lambda \in L^2(Q_T)} \sup_{\phi \in \Phi} \frac{\mathfrak{b}(\phi, \lambda)}{\|\phi\|_{\Phi} \|\lambda\|_{L^2(Q_T)}} \geq \delta. \quad (1.28)$$

Le premier point suit facilement de la définition de  $\mathfrak{a}$ . Vérifions la condition *inf-sup*. Pour tout terme source  $\lambda_0 \in L^2(Q_T)$  on considère  $\phi_0$  l'unique solution de l'équation des ondes  $L\phi_0 = \lambda_0$  avec conditions initiales nulles dans l'espace  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Autrement dit,  $\phi_0$  est la solution d'une équation des ondes avec conditions initiales nulles, conditions frontière de type Dirichlet homogènes et un terme source  $\lambda_0 \in L^2(Q_T)$ . Alors, il existe une constante  $C_{\Omega, T} > 0$  (voir par exemple [Lio88]) telle que  $\phi_0$  vérifie

$$\int_0^T |a(1)\phi_{0,x}(1, t)|^2 dt \leq C_{\Omega, T} a^2(1) \|\lambda_0\|_{L^2(Q_T)}^2. \quad (1.29)$$

Donc,  $\phi_0 \in \Phi$  et  $\mathfrak{b}(\phi_0, \lambda_0) = \|\lambda_0\|_{L^2(Q_T)}^2$ . Alors,

$$\begin{aligned} \sup_{\phi \in \Phi} \frac{\mathfrak{b}(\phi, \lambda_0)}{\|\phi\|_{\Phi} \|\lambda_0\|_{L^2(Q_T)}} &\geq \frac{\mathfrak{b}(\phi_0, \lambda_0)}{\|\phi_0\|_{\Phi} \|\lambda_0\|_{L^2(Q_T)}} \\ &= \frac{\|\lambda_0\|_{L^2(Q_T)}}{\left( \int_0^T |a(1)\phi_x(1, t)|^2 dt + \eta \|\lambda_0\|_{L^2(Q_T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\lambda_0\|_{L^2(Q_T)}}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

De (1.29) et (1.30) on déduit facilement l'inégalité suivante :

$$\sup_{\phi_0 \in \Phi} \frac{\mathbb{b}(\phi_0, \lambda_0)}{\|\phi_0\|_{\Phi} \|\lambda_0\|_{L^2(Q_T)}} \geq \frac{1}{\sqrt{c_{\Omega, T} a(1)^2 + \eta}}$$

et, donc, l'inégalité (1.28) a lieu avec  $\delta = (c_{\Omega, T} a(1)^2 + \eta)^{-\frac{1}{2}}$ .

La deuxième partie du théorème suit en prenant en compte la symétrie et la positivité de la forme bilinéaire  $\mathfrak{a}$ . L'équation  $\mathbb{b}(\phi, \bar{\lambda}) = 0$  peut être vue comme  $L\phi = 0$  dans  $L^2(Q_T)$ , donc si  $(\phi, \lambda)$  est la solution de la formulation mixte (1.23) alors  $\phi \in W$  et  $\mathcal{L}(\phi, \lambda) = \hat{J}^*(\phi)$ . Finalement, la première équation de la formulation mixte peut être interprétée comme suit :  $\lambda$  est la solution de l'équation des ondes contrôlée (avec le contrôle  $v(t) = a(1)\phi_x(1, t)$ ) au sens de la transposition.  $\square$

**Remarque 1.11.** *Le Théorème 1.10 réduit la recherche du contrôle HUM à la résolution de la formulation mixte (1.23). En général, il est indispensable du point de vue numérique d'augmenter le Lagrangien : pour tout  $r > 0$  on considère le Lagrangien augmenté  $\mathcal{L}_r$  défini par*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_r(\phi, \lambda) = \frac{1}{2} \mathfrak{a}_r(\phi, \phi) + \mathbb{b}(\phi, \lambda) - \ell(\phi), \\ \mathfrak{a}_r(\phi, \bar{\phi}) = \mathfrak{a}(\phi, \bar{\phi}) + r \iint_{Q_T} L\phi L\bar{\phi} dx dt. \end{cases}$$

Effectivement, comme  $\mathfrak{a}(\phi, \phi) = \mathfrak{a}_r(\phi, \phi)$  pour tout  $\phi \in W$  les points selle des Lagrangiens  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}_r$  coïncident.

**Remarque 1.12.** *En considérant le problème dual au problème de minimisation (1.19), on peut réduire la résolution de la formulation mixte (1.23), ou équivalent, le problème de point selle pour le Lagrangien  $\mathcal{L}_r$ , à la minimisation d'une fonctionnelle  $J^{**} : L^2(Q_T) \rightarrow L^2(Q_T)$ . Cela rend possible l'utilisation de la très efficace méthode du gradient conjugué pour le calcul de la solution contrôlée  $\lambda$ .*

## Simulations numériques

Dans cette section nous décrivons la stratégie employée pour l'approximation numérique de la solution de la formulation mixte (1.23). Nous illustrons cette stratégie en considérant plusieurs exemples.

### Discrétisation

Considérons la formulation mixte augmentée (1.23) (on suppose donc  $r > 0$ ). Soit  $\Phi_h$  et  $M_h$  deux espaces de dimension finie paramétrés par la variable strictement positive  $h$  :

$$\Phi_h \subset \Phi, \quad M_h \subset L^2(Q_T).$$

Alors, nous considérons les problèmes suivants : trouver  $(\phi_h, \lambda_h) \in \Phi_h \times M_h$  solution de

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_r(\phi_h, \bar{\phi}_h) + \mathbb{b}(\bar{\phi}_h, \lambda) = \ell(\bar{\phi}_h), & \forall \bar{\phi}_h \in \Phi_h \\ \mathbb{b}(\phi_h, \bar{\lambda}_h) = 0, & \forall \bar{\lambda}_h \in M_h. \end{cases} \quad (1.31)$$

Comme dans le cas continu, le fait que la formulation mixte (1.31) est bien posée est la conséquence de deux propriétés : la coercivité de la forme bilinéaire  $\mathfrak{a}_r$  sur le noyau  $\mathcal{N}_h(\mathbb{b})$  et une inégalité *inf-sup* discrète. La première relation découle directement de la coercivité de  $\mathfrak{a}_r$  sur  $\Phi$ . La condition *inf-sup* discrète suivante

$$\inf_{\lambda_h \in M_h} \sup_{\phi_h \in \Phi_h} \frac{\mathbb{b}(\phi_h, \lambda_h)}{\|\phi_h\|_{\Phi_h} \|\lambda_h\|_{M_h}} \geq \delta_h > 0. \quad (1.32)$$

est, en général, difficile à démontrer et dépend fortement du choix des espaces  $M_h$  et  $\Phi_h$ .

**Remarque 1.13.** Si  $r = 0$  la formulation mixte (1.31) n'est pas bien posée. En fait,  $\mathfrak{a}$  n'est pas coercive sur le noyau  $\mathcal{N}_h(\mathfrak{b})$ . Le terme d'augmentation peut être donc vu comme un terme de stabilisation : pour tout  $h > 0$  il assure la coercivité de la forme bilinéaire  $\mathfrak{a}$  et tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

Considérons une approximation conforme du problème (1.23). Pour cela, soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage uniforme tel que  $\overline{Q_T} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ . L'espace  $\Phi_h$  est défini par :

$$\Phi_h = \{ \phi_h \in C^1(\overline{Q_T}) : \phi_h|_K \in \mathbb{P}(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ et } \phi_h = 0 \text{ sur } \Sigma_T \},$$

où  $\mathbb{P}(K)$  est un espace bien choisi de fonctions des variables  $x$  et  $t$ . Nous proposons deux choix pour ces espaces :

- l'espace *Bogner-Fox-Schmit* (BFS) est un espace d'éléments finis  $C^1$  sur des maillages rectangulaires. Pour cet élément fini on utilisera donc des maillage rectangulaires. Chaque élément du maillage sera un rectangle de cotés  $\Delta x$  et  $\Delta t$ . Dans les simulations numériques on considère cinq niveaux de maillages :  $h = \Delta x = \Delta t = 1/N$  pour  $N \in \{10, 20, 40, 80, 160\}$ .
- l'espace *Hsieh-Clough-Tocher* réduit (HCT) est un espace d'éléments finis triangulaires.

Dans ce cas on utilise cinq niveaux de maillages triangulaires réguliers et ou pas.

On définit également l'espace de dimension fini  $M_h = \{ \lambda_h \in C(\overline{Q_T}) : \lambda_h|_K \in \mathbb{Q}(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \}$ , où  $\mathbb{Q}(K)$  est l'espace des fonctions affines par rapport à  $x$  et à  $t$ . Soit  $n_h = \dim(\Phi_h)$  et  $m_h = \dim(M_h)$ . Il est facile à voir que  $\Phi_h \in \Phi$  et  $M_h \in L^2(Q_T)$  et que la formulation mixte (1.31) s'écrit comme un système linéaire de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A_{r,h} & B_h^T \\ B_h & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{M}_{n_h+m_h}} \begin{pmatrix} \{\phi_h\} \\ \{\lambda_h\} \end{pmatrix}_{\mathbb{R}^{n_h+m_h}} = \begin{pmatrix} L_h \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbb{R}^{n_h+m_h}} \quad (1.33)$$

où

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_{r,h}(\phi_h, \bar{\phi}_h) = \langle A_{r,h}\{\phi_h\}, \{\bar{\phi}_h\} \rangle_{\mathbb{R}^{n_h}}, & \forall \phi_h, \bar{\phi}_h \in \Phi_h \\ \mathfrak{b}_h(\phi_h, \lambda_h) = \langle B_h\{\phi_h\}, \{\lambda_h\} \rangle_{\mathbb{R}^{m_h}, \mathbb{R}^{n_h}}, & \forall \phi_h \in \Phi_h, \lambda_h \in M_h \\ \ell(\phi_h) = \langle L_h, \{\phi_h\} \rangle_{\mathbb{R}^{n_h}}, & \forall \phi_h \in \Phi_h. \end{cases}$$

### Comportement de la constante $\delta_h$

La constante *inf-sup* discrète  $\delta_h$  vérifie

$$\delta_h = \inf \left\{ \sqrt{\delta} : B_h A_{r,h}^{-1} B_h^T \{\lambda_h\} = \delta J_h \{\lambda_h\} \text{ avec } \{\lambda_h\} \in \mathbb{R}^{m_h} \setminus \{0\} \right\},$$

où  $J_h \in \mathcal{M}_{m_h}(\mathbb{R})$  est la matrice définie par :

$$\iint_{Q_T} \lambda_h \bar{\lambda}_h dx dt = \langle J_h \{\lambda_h\}, \{\lambda_h\} \rangle_{\mathbb{R}^{m_h}}, \quad \forall \lambda_h, \bar{\lambda}_h \in M_h.$$

On pourra donc approcher  $\delta_h$  en utilisant la méthode de la puissance. Comme attendu,  $\delta_h$  décroît quand  $h \rightarrow 0$  et augmente quand  $r \rightarrow 0$ . En prenant l'exemple de l'approximation utilisant l'espace *BFS*, on observe que la constante  $\delta_h$  a le comportement asymptotique suivant (voir la Figure 1.5) :

$$\delta_h \approx C_r \frac{h}{\sqrt{r}} \text{ quand } h \rightarrow 0^+,$$

avec  $C_r$  une constante positive.

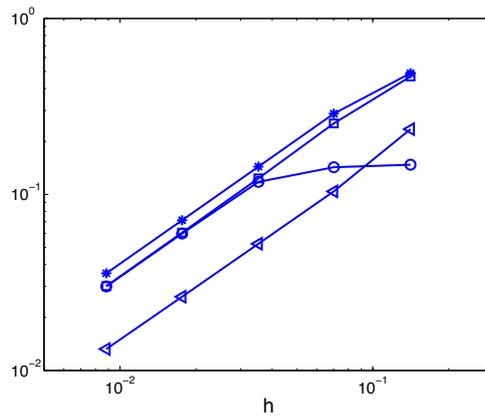


FIGURE 1.5 – Évolution de la quantité  $\sqrt{r}\delta_{h,r}$  par rapport à  $h$  pour  $r = 1$  (carrés),  $r = 10^{-2}$  (cercles),  $r = h$  (étoiles) et  $r = h^2$  (triangle) pour des éléments finis BFS.

### Résultats numériques

Dans cette section nous présentons et discutons quelques résultats numériques obtenus en résolvant la formulation mixte (1.31) pour deux jeux de données initiales pour lesquelles l'expression explicite du contrôle de norme  $L^2$ -minimale est facile à obtenir.

Un premier exemple est le calcul numérique du contrôle frontière de norme  $L^2$  minimale associé aux données initiales  $(y_0, y_1) = (\sin(3\pi x), 0)$  et au temps de contrôle  $T = 2$ . Pour ces données initiales on peut calculer de manière explicite le contrôle de norme  $L^2$  minimale :  $v(t) = \frac{1}{2} \sin(3\pi t)$ . Ainsi, nous pouvons estimer et comparer les erreurs numériques faites en résolvant la formulation mixte (1.31). Dans tous les simulations on observe la convergence des contrôles discrets  $v_h$  vers le contrôle  $v$  et, dès que  $h$  est suffisamment petit, l'influence du paramètre d'augmentation  $r$  diminue. Les détails des résultats numériques sont disponibles dans le papier [CM15a]. Dans ce mémoire on se contente de montrer les courbes des erreurs d'approximation dans la Figure 1.6.

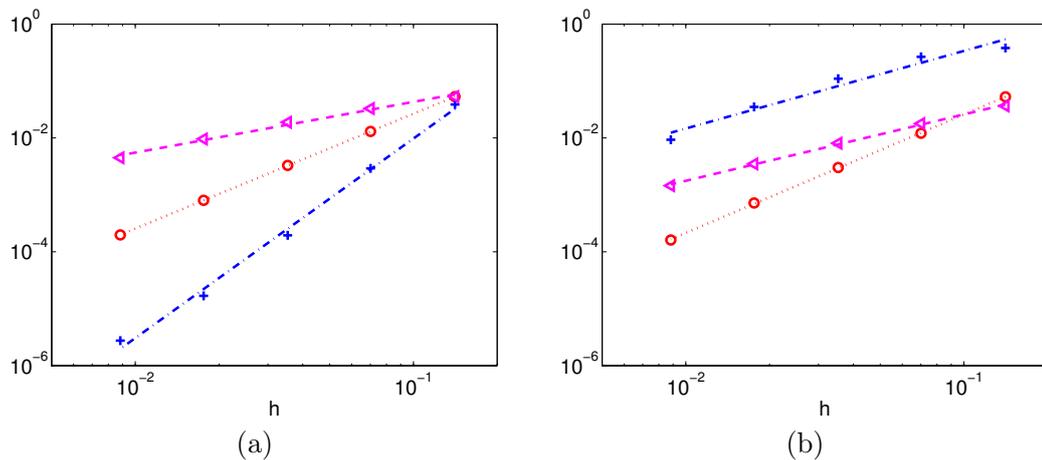


FIGURE 1.6 – Donnée initiale  $(y_0, y_1) = (\sin(3\pi x), 0)$  – Évolution de la norme  $\|v - v_h\|_{L^2(0,T)}$  par rapport à  $h$ . (a) Éléments finis BFS. (b) Éléments finis HCT sur un maillage uniforme.  $r = 1$  (+),  $r = 10^{-2}$  (o),  $r = h^2$  (◁).

On considère un deuxième exemple, un peu moins régulier, dans le sens que la position est seulement dans  $L^2(\Omega)$  mais elle n'est pas continue :  $(y_0, y_1) = (4x\mathbb{1}_{(0,1/2)}(x), 0)$  et  $T = 2.4$ . Dans ce cas on connaît également la forme explicite du contrôle :  $v(t) = 2(1-t)\mathbb{1}_{(1/2,3/2)}(t)$ . En général, ce contrôle est mal approché en minimisant la fonctionnelle duale  $J^*$ , des schémas non-triviaux étant nécessaires pour une approximation satisfaisante. Dans la Figure 1.7 on représente le contrôle exact  $v$  et le contrôle approché  $v_h$  ainsi que l'évolution de l'erreur d'approximation

du contrôle en fonction du paramètre de discrétisation.

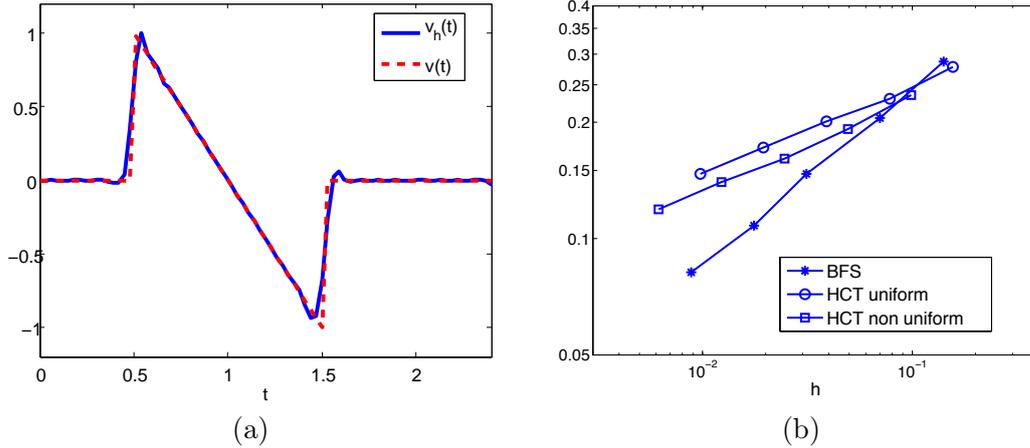


FIGURE 1.7 – Donnée initiale  $(y_0, y_1) = (4x\mathbb{1}_{(0,1/2)}(x), 0)$ . (a) Contrôle de norme  $L^2$  minimale  $v$  et contrôle approché  $v_h$ . (b) Évolution de la norme  $\|v - v_h\|_{L^2(0,T)}$  par rapport à  $h$ .

Remarquer que la méthode variationnelle que nous proposons est très bien adaptée pour l’optimisation du maillage. Toujours pour le deuxième exemple, on montre dans la Figure 1.8 cinq maillages distincts de  $Q_T$ . La séquence est initialisée par un maillage grossier. Les quatre autres maillages sont obtenus en raffinant localement le maillage précédent en fonction de la norme du gradient de  $\lambda_h$  sur chaque triangle de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Comme attendu, le raffinement du maillage est localisé autour des caractéristiques associées à l’équation des ondes contrôlée. Dans la Figure 1.9 on représente les deux composantes  $\phi_h$  et  $\lambda_h$  de la solution de la formulation mixte (1.31) associée à la donnée initiale  $(y_0, y_1) = (4x\mathbb{1}_{(0,1/2)}(x), 0)$  sur le cinquième maillage affiché dans la Figure 1.8.

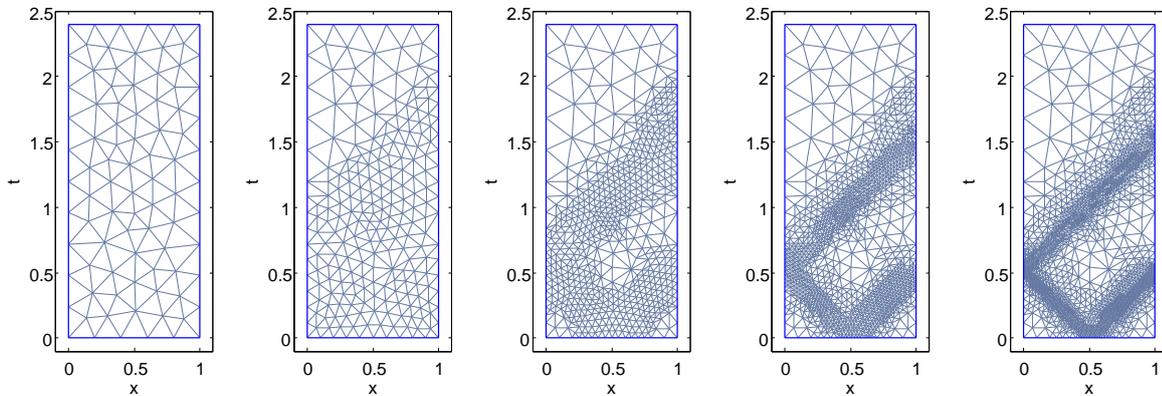


FIGURE 1.8 – Cinq raffinements successifs du maillage adaptés pour le calcul du contrôle associé à la donnée initiale  $(y_0, y_1) = (4x\mathbb{1}_{(0,1/2)}(x), 0)$ .

En conclusion, cette méthode directe donne de très bonnes approximations du contrôle de norme  $L^2$  minimale, même dans des situations singulières pour lesquelles les méthodes classiques, en général, ne fonctionnent pas. Pour tout  $r > 0$  la méthode converge quand  $h \rightarrow 0$ , le choix de  $r$  ne jouant pas un rôle très important. Une valeur intermédiaire de  $r$ , par exemple  $r = 10^{-2}$ , offre un bon compromis entre la convergence de la variable  $\lambda_h$  et la convergence de la variable duale  $\phi_h$ . Le fait de choisir  $r$  ne dépendant pas de  $h$  renforce la contrainte  $L\phi_h \in L^2(Q_T)$  par rapport à  $h$ . Cela suggère que la contrainte  $L\phi \in L^2(Q_T)$  que nous imposons dans la définition de l’espace  $W$  peut être relaxée à  $L\phi \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  qui sera plus appropriée pour le cas de la contrôlabilité distribuée.

Des résultats similaires sont obtenus en minimisant par la méthode du gradient conjugué la

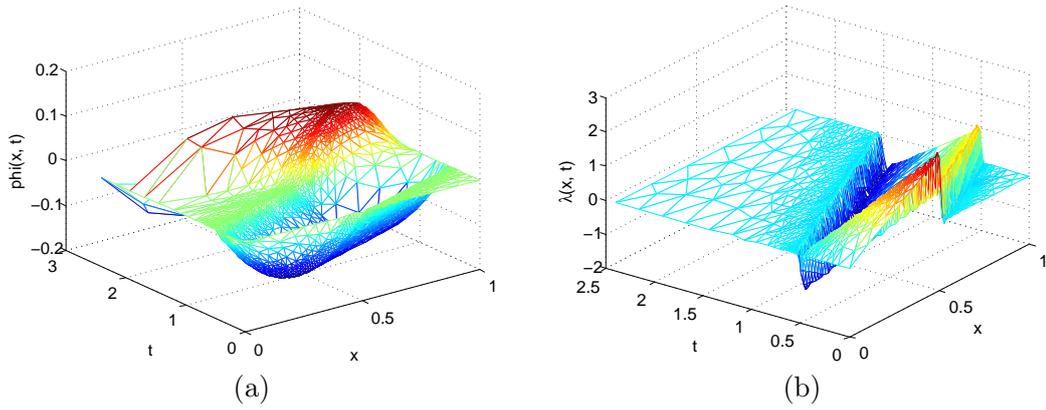


FIGURE 1.9 – Donnée initiale  $(y_0, y_1) = (4x\mathbb{1}_{(0,1/2)}(x), 0)$  – (a) la variable duale  $\phi_h$  et (b) la variable *primale*  $\lambda_h$  sur le maillage le plus fin de la Figure 1.8.

fonctionnelle  $J^{**}$  évoquée dans la Remarque 1.12. Le lecteur intéressé pourra consulter la Section 4.4 du [CM15a] où sont données les détails concernant la mise en oeuvre de la méthode. Notons seulement que le principal avantage de cette démarche itérative est que nous n’avons plus à résoudre des systèmes linéaires d’une taille éventuellement importante. En contrepartie, pour des données initiales non-régulières et pour des valeurs petites du paramètre  $r$ , le nombre d’itérations nécessaires à la convergence de la méthode du gradient conjugué augmente.

## 1.2 Contrôlabilité distribuée

La méthode d’approximation des contrôles de norme  $L^2$  minimale présentée dans la Section 1.1.2 pour la contrôlabilité frontière peut être facilement adaptée pour traiter la contrôlabilité distribuée de l’équation des ondes. Cette approche a été d’abord introduite dans [CM15a, Section 3] et ensuite généralisée pour les contrôles distribués à support variable en temps dans l’article [CCM14].

Soit  $q_T \subset Q_T$  un sous-domaine du domaine espace-temps  $Q_T$  et soit  $\mathbb{1}_{q_T}$  sa fonction caractéristique. Nous allons considérer l’équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} Ly = \mathbb{1}_{q_T}v, & \text{dans } Q_T \\ y = 0, & \text{sur } \Sigma_T \\ (y(\cdot, 0), y_t(\cdot, 0)) = (y_0, y_1), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.34)$$

On rappelle que  $L$  est l’opérateur des ondes donné par (1.2),  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  et  $\Sigma_T = \{0, 1\} \times (0, T)$ . Il est standard de montrer que l’équation (1.34) est bien posée et  $y \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ . Comme dans le cas frontière, le problème de la contrôlabilité de l’équation (1.34) est le suivant : trouver un contrôle  $v \in L^2(q_T)$  tel que la solution  $y$  vérifie  $y(\cdot, T) = y_t(\cdot, T) = 0$ .

Le problème dual de minimisation associé au contrôle de norme  $L^2$  minimale pour l’équation (1.34) est le suivant : minimiser la fonctionnelle  $J^*$  définie par

$$J^*(\phi_0, \phi_1) = \frac{1}{2} \iint_{q_T} |\phi|^2 dxdt + \langle \phi_1, y_0 \rangle_{-1,1} - \int_{\Omega} \phi_0 y_1 dx \quad (1.35)$$

par rapport à  $(\phi_0, \phi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  avec  $\phi$  la solution de (1.4) correspondant à cette donnée initiale. Ce problème de minimisation est bien posé dès que l’inégalité d’observabilité suivante a lieu : il existe une constante  $k^* > 0$  telle que pour tout  $(\phi_0, \phi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  la solution  $\phi$  de (1.4) vérifie

$$\|\phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_t(\cdot, 0)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq k^* \iint_{q_T} |\phi|^2 dxdt. \quad (1.36)$$

Il est bien connu que si le domaine  $q_T$  est de la forme  $\omega \times (0, T)$ , avec  $\omega \subset \Omega$  un ouvert non-vide, l'inégalité d'observabilité est vraie si le temps de contrôle  $T$  est suffisamment grand (voir [Lio88]). Dans le cas où le domaine  $q_T$  n'est pas rectangulaire nous démontrons l'inégalité d'observabilité dans le cas de l'équation des ondes à coefficients constants et à potentiel nul :  $a \equiv 1$  et  $b \equiv 0$  (pour une preuve détaillée, voir [CCM14]).

En suivant les idées du cas frontière, nous remplaçons le problème de minimisation par rapport aux données initiales par un problème de minimisation par rapport à  $\phi \in W$  :

$$\min_{\phi \in W} \hat{J}^*(\phi) = \frac{1}{2} \iint_{q_T} |\phi|^2 dx dt + \langle \phi_t(\cdot, 0), y_0 \rangle_{-1,1} - \int_{\Omega} \phi(\cdot, 0) y_1 dx, \quad (1.37)$$

où

$$W = \{ \phi \in L^2(Q_T), L\phi = 0 \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) \text{ telle que } \phi = 0 \text{ sur } \Sigma_T \}. \quad (1.38)$$

Il est facile à vérifier que  $W$  est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire

$$\langle \phi, \bar{\phi} \rangle_W = \iint_{q_T} \phi \bar{\phi} dx dt + \eta \int_0^T \langle L\phi, L\bar{\phi} \rangle_{-1} dt,$$

pour  $\eta > 0$  fixé. Ensuite, on définit

$$\Phi = \{ \phi \in L^2(Q_T), L\phi \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) \text{ telle que } \phi = 0 \text{ sur } \Sigma_T \}$$

et on considère la formulation mixte suivante : trouver  $(\phi, \lambda) \in \Phi \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  solution de

$$\begin{cases} \mathfrak{a}(\phi, \bar{\phi}) + \mathfrak{b}(\bar{\phi}, \lambda) = \ell(\bar{\phi}), & \forall \phi \in \Phi \\ \mathfrak{b}(\phi, \bar{\lambda}) = 0, & \forall \bar{\lambda} \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)), \end{cases} \quad (1.39)$$

où

$$\mathfrak{a} : \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{a}(\phi, \bar{\phi}) = \iint_{q_T} \phi \bar{\phi} dx dt \quad (1.40)$$

$$\mathfrak{b} : \Phi \times L^2(Q_T) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{b}(\phi, \lambda) = \int_0^T \langle L\phi\lambda \rangle_{-1,1} dt \quad (1.41)$$

$$\ell : \Phi \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell(\phi) = -\langle \phi_t(\cdot, 0), y_0 \rangle_{-1,1} + \int_{\Omega} \phi(\cdot, 0) y_1 dx. \quad (1.42)$$

Pour le reste du chapitre on suppose qu'il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que l'inégalité suivante est vraie :

$$\|(\phi(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0))\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C_0 \left( \|L\phi\|_{L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))}^2 + \|\phi\|_{L^2(q_T)}^2 \right), \quad \forall \phi \in \Phi. \quad (1.43)$$

Si  $T$  est suffisamment grand, l'inégalité (1.43) peut être démontrée à l'aide des inégalités de Carleman [Zha00]. Dans le cas de l'équation des ondes à coefficients constants et sans potentiel on démontre cette inégalité en utilisant les formules de D'Alembert. Plus précisément, dans [CCM14] nous avons démontré le résultat suivant :

**Proposition 1.14.** *Soit  $q_T \subset Q_T$  une réunion finie d'ensembles ouverts et connexes qui satisfait la condition d'optique géométrique suivante : toute ligne caractéristique partant d'un point  $x \in [0, 1]$  et suivant les lois de l'optique géométrique quand se reflète sur  $\Sigma_T$  doit intersecter  $q_T$ . Alors il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que l'estimation (1.43) est vraie.*

*Idée de la preuve.* La preuve est présentée en détail dans [CCM14]. Nous donnons ici seulement les étapes principales.

La première étape est de montrer que, en prolongeant en temps sur  $\mathbb{R}$  une solution de l'équation des ondes (1.4) de manière que les conditions Dirichlet homogènes restent vérifiées, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in (0, 1)$  et  $\delta > 0$  on a

$$\int_{t-\delta}^{t+\delta} |\varphi_x(0, s)|^2 ds \leq \frac{1}{\delta} \iint_{\mathcal{U}_{(x, t+x)}^\delta} (|\varphi_x(y, s)|^2 + |\varphi_t(y, s)|^2) dy ds, \quad (1.44)$$

$$\int_{t-\delta}^{t+\delta} |\varphi_x(0, s)|^2 ds \leq \frac{1}{\delta} \iint_{\mathcal{U}_{(x, t-x)}^\delta} (|\varphi_x(y, s)|^2 + |\varphi_t(y, s)|^2) dy ds, \quad (1.45)$$

où  $\mathcal{U}_{(x, t)}^\delta$  est un voisinage  $(x, t)$  de la forme  $\mathcal{U}_{(x, t)}^\delta = \{(y, s) \text{ tel que } |x - y| + |t - s| < \delta\}$  (voir Figure 1.10). L'idée pour démontrer les inégalités (1.44)-(1.45) repose sur l'utilisation de la formule de D'Alembert.

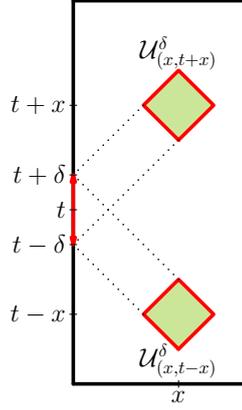


FIGURE 1.10 – Les ensembles ouverts  $\mathcal{U}_{(x, t+x)}^\delta$  et  $\mathcal{U}_{(x, t-x)}^\delta$ .

Dans une deuxième étape, on montre qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|(\phi(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \|\phi_t\|_{L^2(q_T)}^2 + \|\phi_x\|_{L^2(q_T)}^2 \right)$$

pour tout  $\phi \in W$  avec données initiales dans  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Pour cela, on combine l'inégalité d'observabilité frontière et les inégalités (1.44)-(1.45).

La troisième étape consiste à montrer que nous pouvons substituer  $\phi_x$  par  $\phi_t$  dans le membre droit de l'inégalité précédente :

$$\|(\phi(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \|\phi_t\|_{L^2(q_T)}^2 + \|\phi\|_{L^2(q_T)}^2 \right). \quad (1.46)$$

Pour le quatrième pas nous employons un raisonnement par absurde pour démontrer que nous pouvons supprimer le dernier terme de l'inégalité (1.46) :

$$\|(\phi(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\phi_t\|_{L^2(q_T)}^2.$$

Finalement, on affaiblit les normes apparaissant dans la dernière inégalité :

$$\|(\phi(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0))\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \|\phi\|_{L^2(q_T)}^2 \quad (1.47)$$

pour tout  $\phi \in W$  avec données initiales dans  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

Pour conclure, il suffit de décomposer toute fonction de  $\phi \in \Phi$  comme la somme de deux fonctions  $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$  telles que

$$\begin{cases} L\phi_1 = L\phi \\ (\phi_1(\cdot, 0), \phi_{1,t}(\cdot, 0)) = (0, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} L\phi_2 = 0 \\ (\phi_2(\cdot, 0), \phi_{2,t}(\cdot, 0)) = (\phi(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0)). \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|(\phi(\cdot, 0), \phi_t(\cdot, 0))\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 &= \|(\phi_2(\cdot, 0), \phi_{2,t}(\cdot, 0))\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \|\phi_2\|_{L^2(Q_T)} \\ &\leq C \left( \|\phi\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\phi_1\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) \\ &\leq C \left( \|\phi\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|L\phi\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))}^2 \right), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité d'observabilité (1.47) pour  $\phi_2$  et la formule de Duhamel combinée avec une estimation de l'énergie pour majorer  $\|\phi_1\|_{L^2(Q_T)}$ .  $\square$

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

**Théorème 1.15.** *Sous les hypothèses de la Proposition 1.14 les affirmations suivantes sont vérifiées :*

1. La formulation mixte (1.39) est bien posée.
2. L'unique solution  $(\phi, \lambda) \in \Phi \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  de (1.39) est l'unique point selle du Lagrangien  $\mathcal{L} : \Phi \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$\mathcal{L}(\phi, \lambda) = \frac{1}{2} \mathfrak{a}(\phi, \phi) + \mathfrak{b}(\phi, \lambda) - \ell(\phi).$$

3. La fonction optimale  $\phi$  est l'unique minimiseur de la fonctionnelle  $\hat{J}^*$  donnée par (1.35). La fonction optimale  $\lambda$  est la solution au sens faible de l'équation des ondes contrôlée associée au contrôle  $v = -\mathbb{1}_{Q_T} \phi$ .

La preuve du Théorème 1.15 est très similaire à la preuve du Théorème 1.10 est on ne le reproduit pas ici. Comme dans le cas de la contrôlabilité frontière il est convenable d'augmenter le Lagrangien, donc de remplacer dans la formulation mixte (1.39) la forme bilinéaire  $\mathfrak{a}$  par une forme bilinéaire  $\mathfrak{a}_r : \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\mathfrak{a}_r(\phi, \phi) = \mathfrak{a}(\phi, \phi) + r \|L\phi\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))}^2,$$

pour un paramètre  $r > 0$ . Il est également possible à remplacer la formulation mixte par un problème de minimisation de la fonctionnelle duale de  $\hat{J}^*$ .

## 1.2.1 Simulations numériques

### Quelques domaines admissibles

Nous allons premièrement décrire plusieurs domaines de contrôle  $q_T \subset Q_T$  que nous considérons pour la suite. Soit  $\gamma_i : (0, T) \rightarrow (0, 1)$  quatre fonctions  $C^\infty$  définies par :

$$\gamma_T^0(t) = \frac{3}{10}, \quad t \in (0, T), \quad (1.48)$$

$$\gamma_T^1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right), \quad t \in (0, T), \quad (1.49)$$

$$\gamma_T^2(t) = \frac{3}{5} \frac{t}{T} + \frac{1}{5}, \quad t \in (0, T), \quad (1.50)$$

$$\gamma_T^3(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{8\pi t}{T}\right), \quad t \in (0, T). \quad (1.51)$$

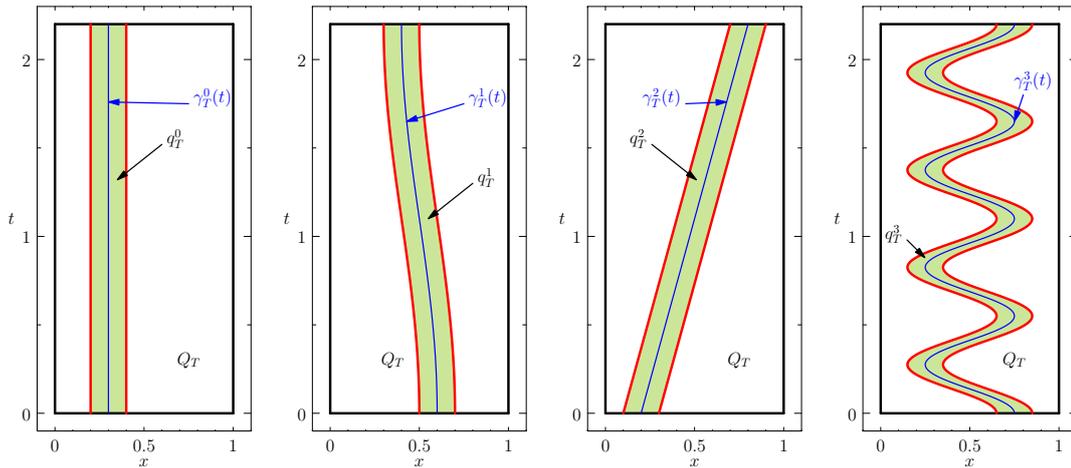
Pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , soit  $a_T^i, b_T^i : (0, T) \rightarrow (0, 1)$  deux fonctions définies par

$$a_T^i(t) = \gamma_T^i(t) - \delta_0, \quad b_T^i(t) = \gamma_T^i(t) + \delta_0, \quad t \in (0, T)$$

pour un  $\delta_0 > 0$ . On définit alors les domaines  $q_T^i$  comme suit

$$q_T^i = \{(x, t) \in Q_T; a_T^i(t) \leq x \leq b_T^i(t), t \in (0, T)\}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (1.52)$$

Dans la Figure 1.11 nous affichons ces domaines pour  $T = 2.2$  et  $\delta_0 = 10^{-1}$ . On vérifie facilement que tous ces domaines satisfont la condition d'optique géométrique de la Proposition 1.14.

FIGURE 1.11 – Les domaines  $q_T^i$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  définis par (1.52).

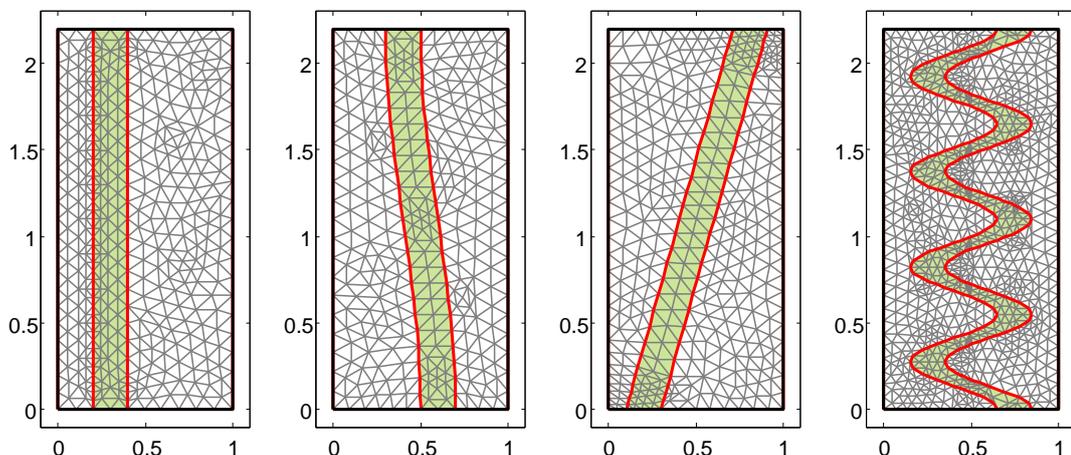
### Discrétisation

Comme pour le cas de la contrôlabilité frontière, nous considérons deux espaces finis dimensionnels  $\Phi_h \in \Phi$  et  $M_h \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$  pour tout  $h > 0$ . Alors, on cherche à résoudre la formulation mixte (1.31), avec cette fois les espaces et les formes linéaires et bilinéaires introduites au début de la Section 1.2. Le fait que cette formulation mixte est bien posée est encore la conséquence de deux propriétés : la coercivité de la forme  $\mathfrak{a}$  sur le noyau  $\mathcal{N}_h(\mathfrak{b})$  de la forme  $\mathfrak{b}$ , et une condition *inf-sup* discrète :

$$\inf_{\lambda_h \in M_h} \sup_{\phi_h \in \Phi_h} \frac{\mathfrak{b}(\phi_h, \lambda_h)}{\|\phi_h\|_{\Phi_h} \|\lambda_h\|_{M_h}} \geq \delta_h. \quad (1.53)$$

Si ces deux propriétés sont vérifiées pour chaque  $h$ , la formulation mixte discrète admet une solution pour chaque  $h$ . Pour avoir la convergence des solutions  $(\phi_h, \lambda_h)$  vers la solution  $(\phi, \lambda)$  du problème initial il faudra que la constante  $\delta_h$  soit uniformément minorée par une valeur  $\delta_0 > 0$ . Cela n'est pas facile à démontrer et dépend du choix des espaces de dimension finie  $\Phi_h$  et  $M_h$ .

Pour la suite, soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation régulière du domaine  $Q_T$ . On note  $h$  le plus grand diamètre des triangles format la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Pour chaque couple  $(Q_T, q_T)$  proposé dans la Figure 1.11 on considère six niveaux de maillage. Dans la Figure 1.12 on représente graphiquement les maillages numéro 1 correspondant au domaines  $(Q_T, q_T)$  décrits dans la Figure 1.11.

FIGURE 1.12 – Maillages numéro 1 associés au domaines  $q_T^i$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  (de gauche à droite).

On définit  $\Phi_h$  par

$$\Phi_h = \{\phi_h \in \Phi \subset C^1(\overline{Q_T}) : \phi_h|_K \in \mathbb{P}(K) \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h, \phi_h = 0 \text{ sur } \Sigma_T\},$$

où pour  $\mathbb{P}(K)$  on prend l'espace d'éléments finis de Hsieh-Clough-Tocher réduit (*HCT réduit*). Pour la définition de cet espace on envoie vers [Cia78, p. 356] et vers [BH81; Mey12] pour l'implémentation pratique de cet élément fini. L'espace  $M_h$  est l'espace des fonctions continues sur  $\overline{Q_T}$  dont la restriction à chaque triangle  $K \in \mathcal{T}_h$  est une fonction affine par rapport aux variables  $x$  et  $t$ .

### Changement de la norme $\|\cdot\|_{L^2(H^{-1})}$

Par rapport au cas frontière, dans le cas de la contrôlabilité distribuée on a une difficulté supplémentaire : la contrainte  $L\phi = 0$  présente dans la définition de l'espace  $\Phi$  est vérifiée en un sens plus faible, notamment cette égalité a lieu dans l'espace  $L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))$ . Il n'est pas évident de travailler avec cette contrainte au niveau discret. Néanmoins, il existe une astuce assez classique qui exploite le fait que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie. On peut donc remplacer, pour tout  $h$  fixé la norme  $\|L\phi_h\|_{L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))}$  par la norme  $\|L\phi_h\|_{L^2(Q_T)}$  (voir, par exemple, [BG09; BP96]). Plus précisément, s'il existe deux constantes  $C_0 > 0$  et  $\alpha > 0$  telles que

$$\|\psi_h\|_{L^2(Q_T)}^2 \geq C_0 h^\alpha \|\psi_h\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \quad \forall \psi_h \in \Phi_h$$

alors une inégalité similaire est vérifiée pour des normes plus faibles :

$$\|\psi_h\|_{L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))}^2 \geq C_0 h^\alpha \|\psi_h\|_{L^2(Q_T)} \quad \forall \psi_h \in \Phi_h.$$

Pour chaque  $h > 0$  on peut estimer les constantes  $C_0$  et  $\alpha$  en passant par un problème de valeurs propres. Ainsi, pour le domaine  $q_T^0$ , on trouve que  $C_0 \approx 1.48 \times 10^{-2}$  et  $\alpha \approx 2.1993$ .

Pour tout  $h > 0$  on considère les formes bilinéaires  $\mathfrak{a}_{r,h}$  et  $\mathfrak{b}_h$  définies sur les espaces de dimension finie  $\Phi_h \times \Phi_h$  et  $\Phi_h \times M_h$  respectivement :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{r,h}(\phi_h, \bar{\phi}_h) &= \mathfrak{a}(\phi_h, \bar{\phi}_h) + r C_0 h^\alpha \iint_{Q_T} L\phi_h L\bar{\phi}_h dx dt \\ \mathfrak{b}_h(\phi_h, \lambda_h) &= \iint_{Q_T} L\phi_h \lambda_h dx dt. \end{aligned}$$

A l'aide de ces formes bilinéaires on approche la formulation mixte (1.39) par sa version finie dimensionnelle, donc par un système linéaire de la forme (1.33).

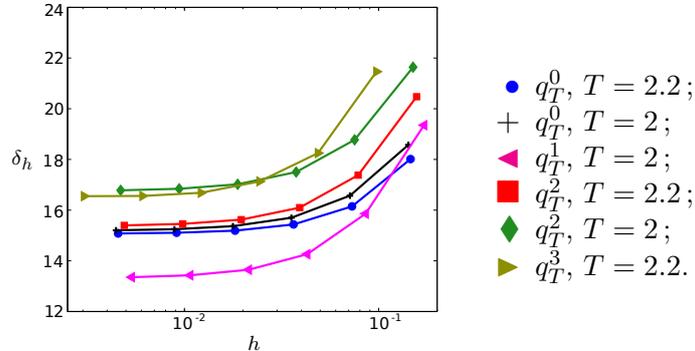
### Condition *inf-sup* discrète

Avant de résoudre numériquement la formulation mixte discrète, on estime le comportement de la constante  $\delta_h$  apparaissant dans la condition *inf-sup* (1.53). Comme dans le cas de la contrôlabilité frontière discuté dans Section 1.1.2, la constante  $\delta_h$  peut être vue comme la plus petite valeur propre d'un certain problème aux valeurs propres généralisé et donc on peut l'approcher par la méthode de la puissance itérée. Dans le Table 1.2 on donne les valeurs de la constante  $\delta_h$  obtenues pour différentes valeurs de  $h$ , pour  $r = 10^{-1}$  et  $r = 10^3$ , et pour le domaine de contrôle  $q_T^2$ . Comme attendu,  $\delta_h$  décroît quand  $h \rightarrow 0$  et augmente quand  $r \rightarrow 0$ . Ces propriétés restent vraies pour les autres domaines de contrôle (voir la Figure 1.13).

### Résultats numériques pour $q_T^2$ et comparaison avec la solution explicite

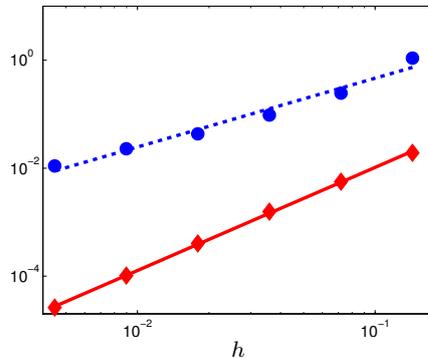
On considère seulement l'exemple du domaine de contrôle  $q_T^2$  correspondant à une bande oblique de largeur  $2\delta_0 = 1/5$  et  $T = 2$ . Même pour des données initiales très régulières, on ne connaît

# Maillage	1	2	3	4	5
$h$	$7.18 \times 10^{-2}$	$3.59 \times 10^{-2}$	$1.79 \times 10^{-2}$	$8.97 \times 10^{-3}$	$4.49 \times 10^{-3}$
$r = 10^{-1}$	18.8171	17.5466	17.0642	16.8880	16.8254
$r = 10^3$	0.6981	0.8374	0.9246	0.9964	1.0826

TABLE 1.2 – Évolution de  $\delta_h$  en fonction de  $h$  pour  $q_T = q_2^2$ ,  $r = 10^{-1}$  et  $r = 10^3$ .FIGURE 1.13 – Valeurs de  $\delta_h$  en fonction de  $h$  pour différents domaines de contrôle  $q_T^i$  et  $r = 10^{-1}$ .

pas l'expression explicite du contrôle distribué agissant dans un domaine qui varie avec le temps. Néanmoins, on peut déterminer une représentation semi-explicite du minimum de la fonctionnelle  $J^*$ , et donc du contrôle  $v$  de norme  $L^2$  minimale, en utilisant une décomposition Fourier des solutions. Cela nous permet d'évaluer précisément l'erreur  $\|v - v_h\|_{L^2(Q_T)}$  ainsi que l'erreur  $\|y - \lambda_h\|_{L^2(Q_T)}$ , où  $y$  est la solution de l'équation des ondes contrôlée par  $v$ .

La Figure 1.14 affiche les courbes d'erreur pour l'approximation du contrôle  $v$  de norme  $L^2$  minimale associé à la donnée initiale  $y_0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $y_1(x) = 0$  pour tout  $x \in (0, 1)$  pour  $r = 10^{-1}$ . On observe les taux de convergence suivants :  $\|v - v_h\|_{L^2(Q_T)} = \mathcal{O}(h^{1.3})$  et  $\|y - \lambda_h\|_{L^2(Q_T)} = \mathcal{O}(h^{1.94})$ . Des résultats similaires ont été obtenus pour des données initiales moins régulières. Par

FIGURE 1.14 – Normes  $\|v - v_h\|_{L(Q_T)}$  ((•)) et  $\|y - \lambda_h\|_{L^2(Q_T)}$  (♦) pour la donnée initiale  $y_0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $y_1(x) = 0$ , le domaine de contrôle  $q_T^2$  et  $r = 10^{-1}$ .

exemple, dans le Table 1.3 on reporte les résultats obtenus pour le calcul du contrôle optimal associé à la donnée initiale  $y_0(x) = 3x\mathbb{1}_{(0,1/3)}(x) + 3(1-x)/2\mathbb{1}_{1/3,1}(x)$ ,  $y_1(x) = 0$ . Ces résultats, correspondant au domaine de contrôle  $q_T^2$  et à un paramètre d'augmentation  $r = 10^{-1}$ , sont illustrés graphiquement dans la Figure 1.15.

Pour toutes les données initiales considérées, nous avons constaté la convergence des contrôles et des solutions contrôlées. Nous avons analysé la dépendance du contrôle par rapport aux domaines de contrôle ayant la même mesure. En fait aucun des quatre domaines considérés ne minimise la norme des contrôles pour toutes les données initiales. La question du support optimal du contrôle associé à une donnée initiale est étudié dans un travail en cours faisant partie de la thèse de doctorat d'Arthur Bottois. Les résultats numériques préliminaires confirment notre intuition

‡ Maillage	1	2	3	4	5
$h$	$7.18 \times 10^{-2}$	$3.59 \times 10^{-2}$	$1.79 \times 10^{-2}$	$8.97 \times 10^{-3}$	$4.49 \times 10^{-3}$
$\ v_h\ _{L^2(q_T)}$	5.350	5.263	5.195	5.172	5.165
$\ v - v_h\ _{L^2(q_T)}$	1.3571	$9.78 \times 10^{-1}$	$6.91 \times 10^{-1}$	$5.13 \times 10^{-1}$	$3.69 \times 10^{-1}$
$\ y - \lambda_h\ _{L^2(Q_T)}$	$7.12 \times 10^{-3}$	$3.23 \times 10^{-3}$	$1.19 \times 10^{-3}$	$4.82 \times 10^{-4}$	$2.12 \times 10^{-4}$

TABLE 1.3 – Résultats obtenus pour l’approximation du contrôle associé à la donnée initiale  $y_0(x) = 3x\mathbb{1}_{(0,1/3)}(x) + 3(1-x)/2\mathbb{1}_{1/3,1}(x)$ ,  $y_1(x) = 0$  pour  $r = 10^{-1}$  et  $q_T = q_2^2$ .

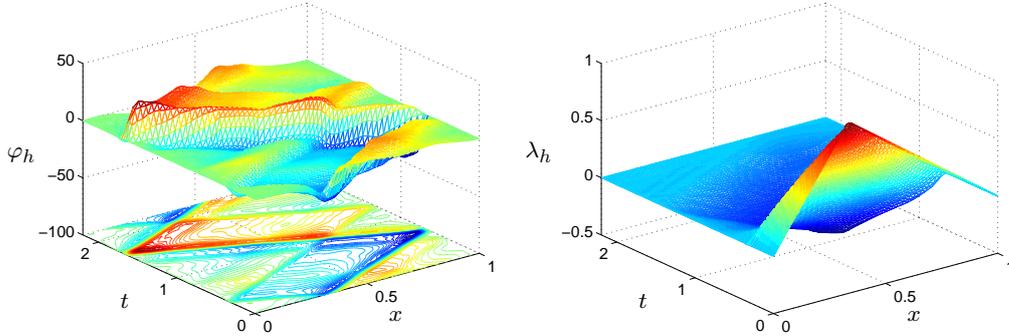


FIGURE 1.15 – Fonctions  $\phi_h$  (gauche) et  $\lambda_h$  (droite) associées à la donnée initiale  $y_0(x) = 3x\mathbb{1}_{(0,1/3)}(x) + 3(1-x)/2\mathbb{1}_{1/3,1}(x)$ ,  $y_1(x) = 0$  pour  $r = 10^{-1}$  et  $q_T = q_2^2$ .

que la norme  $L^2$  du contrôle est minimale si le support du contrôle suit les caractéristiques concentrant l’énergie de la solution de l’équation des ondes à contrôler.

### Comportement des contrôles quand le support dégénère

Nous avons également étudié le comportement des contrôles quand la taille du support des contrôles tend vers 0. Plus précisément, nous avons fait tendre vers 0 le paramètre  $\delta_0$  décrivant la *largeur* du support du contrôle  $q_T^i$ . Dans le Table 1.4 nous donnons les normes  $L^2$  et  $L^2(H^{-1})$  des contrôles de norme  $L^2$  minimale obtenues pour la donnée initiale  $y_0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $y_1(x) = 0$  et pour des domaines de contrôle  $q_T^i$  de différentes *largeurs*  $\delta_0$ . Ces valeurs numériques suggèrent que les contrôles convergent vers un contrôle ponctuel seulement pour la norme plus faible  $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ . Cela est en concordance avec le résultat de contrôlabilité à l’aide d’un contrôle ponctuel supporté sur une courbe [Cas13].

$\delta_0$	$10^{-1}$	$10^{-1}/2$	$10^{-1}/2^2$	$10^{-1}/2^3$	$10^{-1}/2^4$	$10^{-1}/2^5$	$10^{-1}/2^6$
‡ triangles	68 740	68 464	68 402	68 728	68 422	68 966	68 368
$\ v_h\ _{L^2(q_T)}$	4.830	7.330	11.574	18.805	29.735	47.315	123.970
$\ v_h\ _{L^2(H^{-1})}$	0.0035	0.0042	0.0066	0.0107	0.0170	0.0270	0.0704

TABLE 1.4 – Normes du contrôle  $v_h$  associée à la donnée initiale  $y_0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $y_1(x) = 0$  et au domaine  $q_2^2$  pour différentes valeurs de  $\delta_0$ .

Remarquons que nous pouvons appliquer la même stratégie pour approcher le contrôle distribué de norme  $L^2$  minimale pour des équations des ondes à coefficients variables. La seule difficulté est l’obtention d’une inégalité d’observabilité du style (1.43). Nous pouvons choisir également de minimiser la fonctionnelle duale de  $\hat{J}^*$  au lieu de résoudre la formulation mixte (1.39) en utilisant une méthode directe.

En conclusion, nous avons proposée une méthode constructive pour le calcul des contrôles distribués de norme  $L^2$ -minimale à support variable pour l’équation des ondes. L’approximation numérique est basée sur la résolution directe du problème de contrôle à l’aide d’une formulation mixte impliquant la variable duale et un multiplicateur de Lagrange qui coïncide avec la

solution contrôlée. Le caractère bien posé de cette formulation mixte est la conséquence d'une inégalité d'observabilité généralisée. De point de vue pratique, la formulation mixte est résolue de manière systématique en utilisant la théorie des éléments finis : en contraste avec les approches classiques, pour cette méthode n'est pas nécessaire de discrétiser séparément en temps, on évite donc une grande partie des problèmes liées à la stabilité des schémas et aux fréquences numériques parasites.

### 1.3 Conclusion et perspectives

Que ce soit dans le cas de la contrôlabilité frontière ou dans le cas de la contrôlabilité distribuée, dans ce chapitre nous avons présenté des méthodes constructives pour la contrôlabilité de l'équation des ondes. Le point commun de ces méthodes est le fait de réécrire le problème de contrôlabilité comme une équation aux dérivées partielles d'ordre quatre ou comme une formulation mixte sur le domaine espace-temps  $Q_T$ . Nous avons démontré le caractère bien posé de ces problèmes et nous avons proposé des méthodes numériques de résolution. Un point commun des méthodes numériques employées est l'utilisation des éléments finis de classe  $C^1$ . En fait, cette régularité élevée des éléments finis a été nécessaire pour une approximation conforme du système d'optimalité. Un développement futur de ces méthodes sera de proposer et d'étudier la convergence des approximations non-conformes. Cela lèvera les difficultés dues à l'utilisation des éléments finis  $C^1$  et permettra de calculer les contrôles pour l'équation des ondes en dimension supérieure et d'adresser la contrôlabilité d'équations faisant apparaître des opérateurs d'ordre élevé comme l'équation des plaques. Une autre possibilité, exploitée dans [MM18], est de réécrire l'équation des ondes comme un système hyperbolique d'ordre 1 et d'appliquer la même méthodologie.

De manière similaire, on peut étudier le problème inverse de la reconstruction de la solution d'une équation des ondes à partir d'une observation de la solution sur une partie de la frontière ou à partir d'une observation distribuée. Nos résultats sur cette approche pour les problèmes inverses sont discutés en détails au Chapitre 3.



# 2

## Approximation des contrôles pour une équation des poutres

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques résultats concernant l'approximation des contrôles frontière de l'équation des poutres. Cette équation modélise les vibrations d'une poutre élastique encastrée à une extrémité et contrôlée à l'autre. Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de deux publications : d'abord une courte communication démontrant une inégalité d'observabilité pour les modes propres du système semi-discrétisé en espace par différences finies centrées [CMR16] et ensuite d'un article détaillé où on démontre l'observabilité uniforme du système discret dans une classe de solutions filtrées avec un seuil optimal de filtration [CMR17]. Contrairement à la méthode décrite au chapitre précédent, l'approximation proposée maintenant met en évidence l'existence de modes propres numériques qui ne sont pas uniformément observables ou contrôlables. Nous démontrons que les solutions filtrées (à un seuil optimal de filtration) sont uniformément observables.

### 2.1 Introduction

Considérons l'équation modélisant les vibrations d'une poutre élastique encastrée à sa extrémité gauche et contrôlée à droite :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans l'équation (2.1) on note  $u = u(x, t)$  la position de la barre au temps  $t \geq 0$  et au point  $x \in [0, 1]$  et  $v$  représente le contrôle. Le problème de la contrôlabilité de (2.1) est le suivant : étant donné  $T > 0$ , pour chaque donnée initiale  $(u_0, u_1) \in L^2(0, 1) \times H^{-2}(0, 1)$  on se demande s'il existe un contrôle  $v \in L^2(0, T)$  tel que la solution de (2.1) vérifie :

$$u(x, T) = u_t(x, T) = 0 \quad (x \in (0, 1)). \quad (2.2)$$

Il est bien connu maintenant que pour tout temps  $T > 0$  l'équation (2.1) vérifie la propriété de contrôlabilité précédente (voir [TW09, Section 6.10] pour une solution utilisant la théorie des semi-groupes ou [Kom94, Section 4.2] pour une solution utilisant la méthode des multiplicateurs). De plus, la contrôlabilité de (2.1) est équivalente à l'inégalité d'observabilité suivante : il existe une constante  $K > 0$  telle que

$$\|(y_0, y_1)\|_{H_0^2(0,1) \times L^2(0,1)}^2 \leq K \int_0^T |y_{xx}(1, t)|^2 dt, \quad (2.3)$$

pour tout  $(y_0, y_1) \in H_0^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , où  $y$  est la solution de l'équation adjointe homogène

suivante :

$$\begin{cases} y_{tt}(x, t) + y_{xxxx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ y_x(0, t) = y_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (2.4)$$

L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier la contrôlabilité d'une semi-discrétisation en espace de l'équation (2.1). Plus précisément, soit  $N \in \mathbb{N}^*$  le nombre de points de discrétisation équi-distribués dans l'intervalle  $(0, 1)$  et soit  $h = \frac{1}{N+1}$ . La sémi-discrétisation de (2.1) qu'on considère est la suivante :

$$\begin{cases} u_{j,tt}(t) + \frac{u_{j+2}(t) - 4u_{j+1}(t) + 6u_j(t) - 4u_{j-1}(t) + u_{j-2}(t)}{h^4} = 0, & 1 \leq j \leq N \\ & t \in (0, T) \\ u_0(t) = 0, \quad u_{N+1}(t) = 0, & t \in (0, T) \\ u_{-1}(t) = u_1(t), \quad u_{N+2}(t) = u_N(t) + hv_h(t), & t \in (0, T) \\ u_j(0) = u_j^0, \quad u_{j,t}(0) = u_j^1, & 1 \leq j \leq N, \end{cases} \quad (2.5)$$

où, pour tout  $1 \leq j \leq N$ ,  $u_j(t)$  approche la solution  $u(jh, t)$  de (2.1) et  $(u_j^0, u_j^1)$  est une approximation de la donnée initiale  $(u_0, u_1)$ . Pour gérer les conditions frontière, nous avons introduits deux fonctions supplémentaires  $u_{-1}(t)$  et  $u_{N+2}(t)$ . Le problème de la contrôlabilité de (2.5) s'écrit : pour tout  $(u_j^0, u_j^1)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{C}^{2N}$  il existe un contrôle  $v_h \in L^2(0, T)$  tel que la solution de (2.5) vérifie :

$$u_j(T) = u_{j,t}(T) = 0 \quad (1 \leq j \leq N).$$

Remarquons que le système (2.5) peut être écrit de manière équivalente sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{cases} U_{h,tt}(t) + A_h U_h(t) = F_h(t), & t \in (0, T) \\ U_h(0) = U_h^0, \quad U_{h,t}(0) = U_h^1, \end{cases} \quad (2.6)$$

où

$$U_h^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ \vdots \\ u_N^0 \end{pmatrix}, \quad U_h^1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_N^1 \end{pmatrix}, \quad U_h(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix}, \quad F_h(t) = -\frac{1}{h^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v_h \end{pmatrix},$$

et  $A_h = \frac{1}{h^4} A$ , avec  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

On considère dans  $\mathbb{C}^N$  le produit scalaire suivant :

$$\langle F, G \rangle_0 = h \sum_{i=1}^N f_i \bar{g}_i \quad (F = (f_i)_{1 \leq i \leq N}, G = (g_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{C}^N), \quad (2.8)$$

et soit  $\|\cdot\|_0$  la norme correspondante. Toujours dans  $\mathbb{C}^N$ , on définit un autre produit scalaire :

$$\langle F, G \rangle_2 = \langle A_h F, G \rangle_0 \quad (F, G \in \mathbb{C}^N), \quad (2.9)$$

et soit  $\|\cdot\|_2$  la norme associée. On remarque que  $\|\cdot\|_0$  est une version discrétisée de la norme de  $L^2(0, 1)$ , tandis que  $\|\cdot\|_2$  discrétise la norme habituelle de  $H_0^2(0, 1)$ . Finalement, on définit sur  $\mathbb{C}^{2N}$  le produit scalaire suivant :

$$\left\langle \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G^1 \\ G^2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle F^1, G^1 \rangle_2 + \langle F^2, G^2 \rangle_0 \quad \left( \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G^1 \\ G^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N} \right) \quad (2.10)$$

avec la norme associée  $\|\cdot\|$ .

En approchant l'équation (2.1) par (2.5) on veut que les contrôles  $v_h$  convergent vers le contrôle  $v$  quand  $h \rightarrow 0$ . On sait maintenant que cela n'est pas vrai en général, par exemple pour l'équation des ondes approchée par différences finies [IZ99], pour l'équation de la barre avec d'autres conditions frontière et approchée par différences finies [LZ02 ; BMR16], ou, encore dans [Zua05]. Comme remarqué dans ces références, et déjà mentionné au Chapitre 1, les résultats de non-convergences sont dues à la mauvaise approximation des plus grandes valeurs propres de la matrice décrivant le système semi-discrétisé et des vecteurs propres associés. Ce phénomène est visible au niveau de l'inégalité d'observabilité associée au système de dimension finie : la constante d'observabilité diverge quand  $h \rightarrow 0$ . Réciproquement, si la constante d'observabilité est bornée par rapport  $h$ , la convergence des contrôles discrets vers le contrôle continu a lieu. En fait, l'étude de la constante d'observabilité discrète donne des idées pour remédier ce problème : soit on filtre les hautes fréquences, soit on ajoute un deuxième contrôle [LZ02]. Un autre remède possible est d'ajouter un terme de viscosité numérique au schéma d'approximation [BMR16 ; Bug+14].

Dans ce chapitre, on se propose donc d'étudier l'inégalité d'observabilité duale au problème de la contrôlabilité de l'équation (2.6) : existe-t-il une constante  $K_h > 0$  telle que

$$\|Y_h^0\|_2^2 + \|Y_h^1\|_0^2 \leq K_h \int_0^T \left| \frac{Y_{hN}(t)}{h^2} \right|^2 dt, \quad (2.11)$$

pour toute donnée initiale  $\begin{pmatrix} Y_h^0 \\ Y_h^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}$ , où  $Y_h$  est la solution du système homogène

$$\begin{cases} Y_{h,tt}(t) + A_h Y_h(t) = 0, & t \in (0, T) \\ Y_h(0) = Y_h^0, \quad Y_{h,t}(0) = Y_h^1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Si  $\sup_{h>0} K_h < +\infty$  on dit que (2.12) est *uniformément observable*. L'étude du comportement de la constante  $K_h$  est l'objectif principal de ce chapitre : si  $K_h$  est bornée les contrôles discrets convergent vers le contrôle continu, sinon, il sera nécessaire de filtrer les hautes fréquences de  $Y_h$  pour avoir la convergence. Ces résultats sont similaires aux résultats obtenus pour l'équation des poutres avec les conditions frontières correspondant à une barre *posée* [LZ02 ; BMR16 ; Bug+14]. La différence principale, est que pour les conditions frontière que nous considérons l'opérateur  $A_h$  n'est plus le carré de l'opérateur obtenu en discrétisant par différences finies le Laplacien avec des conditions frontière de type Dirichlet. Cela rend l'analyse de Fourier des solutions, et donc les preuves des résultats concernant l'observabilité, plus techniques. Néanmoins, à l'aide de certains calculs algébriques, des estimations asymptotiques et du théorème de Rouché, nous arrivons à localiser les valeurs propres de la matrice  $A_h$ .

On mentionne également, que notre analyse montre quand et comment les propriétés d'observabilité commencent se détériorer. Notamment, on obtient des bornes de filtration plus précises que celles obtenues pour les systèmes hyperboliques abstraits [Erv11 ; Erv09].

Après cette introduction détaillée, dans la suite de ce chapitre nous présentons les résultats obtenus dans [CMR16 ; CMR17] en omettant, en général, les détails des preuves.

## 2.2 Quelques propriétés spectrales

Nous étudions l'inégalité d'observabilité (2.11) à l'aide d'une décomposition spectrale de l'opérateur  $A_h$  et de la décomposition Fourier de la solution  $Y_h$  de (2.12). Le but de cette section est donc d'étudier les propriétés spectrales de l'opérateur  $A_h$ . Dans une première étape nous allons caractériser les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice  $A$  donnée par (2.7). Ensuite, nous obtenons des estimations pour la partie haute du spectre de  $A$  à l'aide du théorème de Rouché et d'estimations asymptotiques. La partie basse du spectre est analysée à l'aide d'un résultat de convergence numérique et d'une méthode discrète des multiplicateurs.

### 2.2.1 Propriétés algébriques

Énonçons d'abord le résultat suivant qui est une conséquence des propriétés élémentaires de la matrice  $A$ .

**Proposition 2.1.** *La matrice  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  donnée par (2.7) admet seulement des valeurs propres réelles  $(\lambda_n)_{1 \leq n \leq N} \subset (0, 16)$  et il existe une base orthonormale de  $\mathbb{C}^N$  (par rapport au produit scalaire (2.8)) formée par les vecteurs propres  $(\phi^n)_{1 \leq n \leq N}$  de  $A$ .*

La démonstration de cette proposition est élémentaire. En effet,  $A$  est symétrique définie positive, donc les valeurs propres sont réelles et strictement positives. Le théorème de Gershgorin (voir [HJ85, Corollary 6.1.5]) donne la borne supérieure du spectre. Le reste de la preuve suit en utilisant des résultats classiques sur les matrices symétriques.

La proposition suivante donne une caractérisation des valeurs et des vecteurs propres de  $A$ .

**Proposition 2.2.** *Avec les notations précédentes,  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A$  si et seulement si une des relations suivantes est vérifiée :*

$$\cos((N+1)\arg(X_4)) = \frac{8X_1^{N+1} - \sqrt{\lambda}X_1^{2(N+1)} - \sqrt{\lambda}}{2(2X_1^{2(N+1)} - \sqrt{\lambda}X_1^{N+1} + 2)}, \quad \sin((N+1)\arg(X_4)) > 0, \quad (2.13)$$

ou

$$\cos((N+1)\arg(X_4)) = \frac{8X_1^{N+1} + \sqrt{\lambda}X_1^{2(N+1)} + \sqrt{\lambda}}{2(2X_1^{2(N+1)} + \sqrt{\lambda}X_1^{N+1} + 2)}, \quad \sin((N+1)\arg(X_4)) < 0, \quad (2.14)$$

où pour tout  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  les nombres  $X_j$  sont donnés par

$$X_{1,2} = \frac{2 + \sqrt{\lambda} \pm \sqrt{(2 + \sqrt{\lambda})^2 - 4}}{2}, \quad (2.15)$$

$$X_{3,4} = \frac{2 - \sqrt{\lambda} \pm i\sqrt{4 - (2 - \sqrt{\lambda})^2}}{2}. \quad (2.16)$$

De plus, chaque valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A$  est associée à un vecteur propre unitaire

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)^T$$

dont les composantes sont données par

$$\phi_k = C_1 X_1^k + C_2 X_2^k + C_3 X_3^k + C_4 X_4^k \quad (k \in \{1, 2, \dots, N\}), \quad (2.17)$$

avec

$$C_1 = \frac{\mathfrak{e}}{X_1^{N+1} r_N^1}, \quad (2.18)$$

$$C_2 = -\frac{\mathfrak{C}}{X_2^{N+1} r_N^2}, \quad (2.19)$$

$$C_3 = -\alpha C_1 \left(\frac{X_1}{X_3}\right)^{N+1} - \beta C_2 \left(\frac{X_2}{X_3}\right)^{N+1}, \quad (2.20)$$

$$C_4 = -\beta C_1 \left(\frac{X_1}{X_4}\right)^{N+1} - \alpha C_2 \left(\frac{X_2}{X_4}\right)^{N+1}, \quad (2.21)$$

$$r_N^1 = \sqrt{\left(\left(\frac{X_4}{X_1}\right)^{N+1} - 1\right) \left(\left(\frac{X_3}{X_1}\right)^{N+1} - 1\right)}, \quad (2.22)$$

$$r_N^2 = \sqrt{\left(\left(\frac{X_4}{X_2}\right)^{N+1} - 1\right) \left(\left(\frac{X_3}{X_2}\right)^{N+1} - 1\right)}, \quad (2.23)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{R_+}{R_-}\right), \quad \beta = \frac{1}{2} \left(1 + i \frac{R_+}{R_-}\right), \quad (2.24)$$

$$R_+ = \sqrt{(2 + \sqrt{\lambda})^2 - 4}, \quad R_- = \sqrt{4 - (2 - \sqrt{\lambda})^2}. \quad (2.25)$$

La constante positive  $\mathfrak{C}$  qui apparaît dans (2.18)-(2.19) est choisi de manière que  $\|\phi\|_0 = 1$ .

Malgré le fait que la preuve est technique, les méthodes qu'elle emploie restent complètement élémentaires. Pour les détails de la démonstration on envoie vers l'article [CMR17].

## 2.2.2 Analyse de la partie haute du spectre

Dans cette section on localise asymptotiquement les valeurs propres de la matrice  $A$ , en sachant que, par la Proposition 2.1, ces valeurs propres vérifient (2.13) ou (2.14). Pour pouvoir exploiter ces relations nous devons les réécrire de manière plus simple. Remarquons d'abord que tout nombre  $\lambda \in (0, 16)$  s'écrit sous la forme

$$\lambda = 16 \sin^4 \left(\frac{hz}{2}\right) \quad (2.26)$$

avec  $z \in (0, \frac{\pi}{h})$ . Avec cette notation, on obtient de (2.15)-(2.16) que  $\arg(X_4) = 2\pi - zh$  et

$$\frac{8X_1^{N+1} \pm \sqrt{\lambda} X_1^{2(N+1)} \pm \sqrt{\lambda}}{2 \left(2X_1^{2(N+1)} \pm \sqrt{\lambda} X_1^{N+1} + 2\right)} = \pm \sin^2 \left(\frac{hz}{2}\right) + \frac{2 \left(1 - \sin^4 \left(\frac{hz}{2}\right)\right) r^{N+1}(z)}{r^{2(N+1)}(z) \pm 2 \sin^2 \left(\frac{hz}{2}\right) r^{N+1}(z) + 1}.$$

On définit les fonctions complexes suivantes :

$$g^\pm(z) = \cos z \pm \sin^2 \left(\frac{zh}{2}\right) \text{ et } f^\pm(z) = g^\pm(z) - \frac{2 \left(1 - \sin^4 \left(\frac{hz}{2}\right)\right) r^{N+1}(z)}{r^{2(N+1)}(z) \mp 2 \sin^2 \left(\frac{hz}{2}\right) r^{N+1}(z) + 1}, \quad (2.27)$$

où  $r(z)$  est une notation pour  $X_1$  :

$$r(z) = 1 + 2 \sin^2 \left(\frac{zh}{2}\right) + 2 \sqrt{\sin^2 \left(\frac{zh}{2}\right) \left(1 + \sin^2 \left(\frac{zh}{2}\right)\right)}. \quad (2.28)$$

En conséquence, les relations (2.13)-(2.14) sont équivalentes à  $f^+(z) = 0$  et  $f^-(z) = 0$  respectivement. Dans ce qui suit nous donnerons des informations sur les zéros des fonctions  $f^\pm$  en les comparant aux fonctions plus simples  $g^\pm$  à l'aide du théorème de Rouché.

On énonce d'abord le résultat suivant :

**Lemme 2.3.** *Les fonctions  $g^\pm$  ont chacune exactement un seul zéro  $z_n^\pm$  dans chaque intervalle  $(n\pi, (n+1)\pi]$  pour  $0 \leq n \leq N$ . De plus,*

$$\begin{cases} z_n^+ \in \left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right] & \text{si } n \text{ est impair,} \\ z_n^- \in \left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right] & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \quad (2.29)$$

**Remarque 2.4.** *On est intéressé seulement par les valeurs de  $z$  dans l'intervalle  $(0, \frac{\pi}{h})$ . Le lemme précédent affirme donc que chaque équation  $g^\pm(z) = 0$  a exactement  $N+1$  solutions réelles dans l'intervalle  $(0, \frac{\pi}{h})$ . De plus, on peut montrer que  $z \geq \pi$ , il faudra donc chercher les solutions de ces deux équations se trouvant dans les intervalles  $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$  avec  $n \geq 1$ .*

Pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  on définit les courbes  $\Gamma_n^\pm(\delta) = \partial D_n^\pm(\delta)$  avec

$$D_n^\pm(\delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_n^\pm| < \delta\}.$$

De plus, pour tout  $L \in (0, N + \frac{1}{2})$ , on considère le domaine

$$D(L) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z)| \leq 1, L\pi \leq \Re(z) \leq N\pi + \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Dans ce qui suit, on analyse les zéros des fonctions  $f^\pm$ . Les zéros de  $f^-$  peuvent être localisés de manière similaires aux zéros de  $f^+$ , on considère ici, donc, seulement la fonction  $f^+$ . Pour appliquer le théorème de Rouché, les deux lemmes suivants donnent des estimations de  $|g^+|$  sur les cercles  $\Gamma_n^+(\delta)$  et de la différence  $|f^+ - g^+|$  dans le rectangle  $D(L)$ .

**Lemme 2.5.** *Il existe des constantes  $\delta_1 > 0$  et  $C_1 > 0$  telles que pour tout  $\delta \in (0, \delta_1)$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  les estimations suivantes sont vérifiées :*

$$|g^+(z)| \geq C_1 h \delta \quad (z \in \Gamma_n^+(\delta), \quad 1 \leq n \leq N, \quad n \text{ impair}). \quad (2.30)$$

La démonstration de ce lemme utilise quelques éléments d'analyse complexe, des développements limités par rapport à  $\delta$ , et est laissée au lecteur. Pour une preuve détaillée voir [CMR17]. De manière similaire, on démontre le deuxième lemme :

**Lemme 2.6.** *Il existent  $L_0 > 0$ ,  $N_1 \in \mathbb{N}^*$  et  $C_2 > 0$  telles que, pour tout  $L > L_0$  et  $N \geq N_1$ , l'inégalité suivante est vraie :*

$$|f^+(z) - g^+(z)| \leq C_2 \exp(-L) \quad (z \in D(L)). \quad (2.31)$$

Les deux théorèmes suivants fournissent quelques informations sur le placement des zéros des fonctions  $f^\pm$ .

**Théorème 2.7.** *Soit  $\varrho > 1$ . Il existe  $\delta_0 > 0$  tel que, pour tout  $\delta \in (0, \delta_0)$ , il existe  $N_0(\delta) \in \mathbb{N}^*$  avec la propriété que pour tout  $N \geq N_0(\delta)$  et pour tout  $n$  impair vérifiant  $\varrho \ln N \leq n \leq N$ , la fonction  $f^+$  a un unique zéro  $y_n^+$  dans  $D_n^+(\delta)$ .*

*Démonstration.* On applique le théorème de Rouché aux fonctions  $f^+$  et  $g^+$  données par (2.27). Par le Lemme 2.5 il existe  $\delta_1 > 0$  et  $C_1 > 0$  tels que pour tout  $\delta \in (0, \delta_1)$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$|g^+(z)| > C_1 h \delta \quad (z \in \Gamma_n^+(\delta), \quad 1 \leq n \leq N).$$

De plus, par le Lemme 2.6, il existe  $L_0 > 0$ ,  $N_1 \in \mathbb{N}^*$  et  $C_2 > 0$  tels que pour tout  $L \in (L_0, N + \frac{1}{2})$  et  $N \geq N_1$  on a

$$|f^+(z) - g^+(z)| \leq C_2 \exp(-L) \quad (z \in D(L)).$$

Soit  $\delta_0 = \min\{\delta_1, 1\}$ . Pour tout  $\delta \in (0, \delta_0)$ , il existe  $N_2(\delta) \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $N \geq N_1$  on peut trouver un nombre  $L' \in (L_0, N + \frac{1}{2})$  vérifiant

$$L' \leq \ln \left( \frac{2C_2}{C_1 h \delta} \right) < \rho \ln N - 1.$$

En prenant  $L = L'$ , on déduit que

$$|f^+(z) - g^+(z)| \leq \frac{C_1 h \delta}{2} \quad (z \in D(L')).$$

De plus,  $D_n^+(\delta) \subset D(L')$  pour tout  $N > N_2(\delta)$  et  $n$  tel que  $\rho \ln N \leq n \leq N$ . En conséquence, pour tout  $\delta \in (0, \delta_0)$  et  $N \geq N_0 = \max\{N_2(\delta), N_1\}$  on a

$$|g^+(z)| \geq |f^+(z) - g^+(z)| \quad (z \in \Gamma_n^+(\delta), \rho \ln N \leq n \leq N).$$

Finalement, en appliquant le théorème de Rouché, on obtient que  $f^+$  a un unique zéro dans l'intérieur du disque  $D_n^+(\delta)$  pour tout  $n$  impair vérifiant  $\rho \ln N \leq n \leq N$ .  $\square$

**Théorème 2.8.** *Soit  $\rho > 1$ . Il existe  $\delta_0 > 0$  tel que, pour tout  $\delta \in (0, \delta_0)$ , il existe  $N_0(\delta) \in \mathbb{N}^*$  avec la propriété que pour tout  $N \geq N_0(\delta)$  et pour tout  $n$  pair vérifiant  $\rho \ln N \leq n \leq N$ , la fonction  $f^-$  a un unique zéro  $y_n^-$  dans  $D_n^-(\delta)$ .*

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

**Théorème 2.9.** *Soit  $\rho > 1$ . Il existe  $\delta_0 > 0$  tel que, pour tout  $\delta \in (0, \delta_0)$ , il existe  $N_0(\delta) \in \mathbb{N}^*$  ayant la propriété que les valeurs propres  $(\lambda_n)_{\rho \ln N \leq n \leq N}$  de la matrice  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  donnée par (2.7) avec  $N \geq N_0(\delta)$  sont données par*

$$\lambda_n = \begin{cases} 16 \sin^4 \left( \frac{y_n^+ h}{2} \right) & \text{si } n \text{ est impair} \\ 16 \sin^4 \left( \frac{y_n^- h}{2} \right) & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases} \quad (2.32)$$

où  $y_n^+$  et  $y_n^-$  sont les zéros des fonctions  $f^+$  et  $f^-$  respectivement, localisés par les Théorèmes 2.7 et 2.8.

*Démonstration.* Pour démontrer ce théorème on utilise d'abord la forme des valeurs propres (2.26). Comme les zéros de la fonction  $f^+$  avec  $\sin(z) < 0$  sont donnés par  $y_n^+$  avec  $n$  impair et le zéros de la fonction  $f^-$  avec  $\sin(z) > 0$  sont donnés par  $y_n^-$ , la conclusion suit en appliquant le Théorème 2.7 et le Théorème 2.8.  $\square$

**Remarque 2.10.** *Pour chaque  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  on définit les nombres*

$$y_n = \begin{cases} y_n^+ & \text{si } n \text{ est impair} \\ y_n^- & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases} \quad (2.33)$$

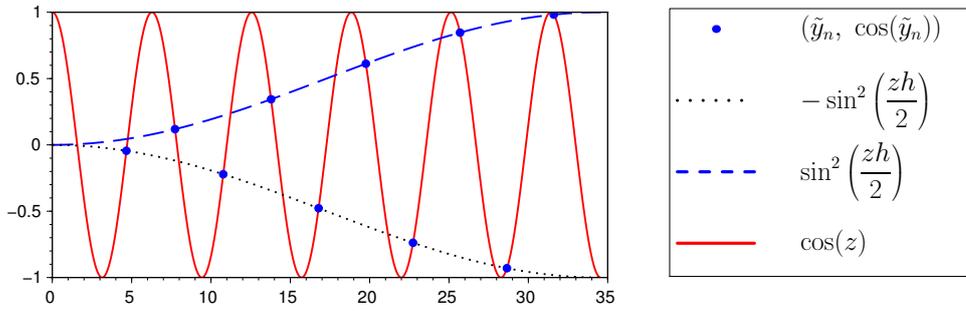
et

$$z_n = \begin{cases} z_n^+ & \text{si } n \text{ est impair} \\ z_n^- & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases} \quad (2.34)$$

Avec ces notations, le Théorème 2.9 affirme que  $\lambda_n = 16 \sin^4 \left( \frac{y_n h}{2} \right)$  et  $|y_n - z_n| \leq \delta$  pour tout  $\rho \ln N \leq n \leq N$ . Dans la Figure 2.1 on représente les fonctions  $z \mapsto \cos(z)$  et  $z \mapsto \pm \sin \left( \frac{zh}{2} \right)$  pour  $N = 10$  et  $z \in [0, (N+1)\pi]$ . Les cercles représentent les points  $(\tilde{y}_n, \cos(\tilde{y}_n))$  avec  $\tilde{y}_n$  calculés à partir de la relation  $\tilde{\lambda}_n = 16 \sin^4 \left( \frac{\tilde{y}_n h}{2} \right)$  avec  $\tilde{\lambda}_n$  étant les valeurs propres de la matrice  $A$  approchées par calcul numérique.

**Remarque 2.11.** *Pour des valeurs de  $\delta$  suffisamment petites, il existe deux constantes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  telles que la plus grande valeur propre de  $A$  vérifie :*

$$16(1 - \alpha_1 h^2) < \lambda_N < 16(1 - \alpha_2 h^2).$$


 FIGURE 2.1 – Solutions des équations  $g^\pm(z) = 0$ .

### 2.2.3 Analyse asymptotique des vecteurs propres

Soit  $\lambda$  une valeur propre de la matrice  $A$  donnée par le Théorème 2.9 et soit  $\phi = (\phi_k)_{1 \leq k \leq N}$  le vecteur propre associé normalisé. Dans cette sous-section on étudie le comportement de  $\phi_N$ , la dernière composante de  $\phi$ . De (2.18)-(2.23) on obtient

$$C_1 X_1^N = \frac{\mathfrak{C}}{X_1 r_N^1}, \quad (2.35)$$

$$C_2 X_2^N = -\frac{\mathfrak{C}}{X_2 r_N^2}, \quad (2.36)$$

$$C_3 X_3^N = \frac{\mathfrak{C}}{X_3} \left( -\frac{\alpha}{r_N^1} + \frac{\beta}{r_N^2} \right), \quad (2.37)$$

$$C_4 X_4^N = \frac{\mathfrak{C}}{X_4} \left( -\frac{\beta}{r_N^1} + \frac{\alpha}{r_N^2} \right). \quad (2.38)$$

Alors, de (2.17) et (2.35)-(2.38), on a

$$\phi_N = \frac{\mathfrak{C}}{r_N^1} \left( \frac{1}{X_1} - \frac{\alpha}{X_3} - \frac{\beta}{X_4} \right) + \frac{\mathfrak{C}}{r_N^2} \left( -\frac{1}{X_2} + \frac{\beta}{X_3} + \frac{\alpha}{X_4} \right). \quad (2.39)$$

Maintenant, en utilisant (2.15)-(2.16) et (2.24)-(2.25) on déduit

$$\frac{1}{X_1} - \frac{\alpha}{X_3} - \frac{\beta}{X_4} = \frac{1}{X_2} - \frac{\beta}{X_3} - \frac{\alpha}{X_4} = \sqrt{\lambda}.$$

Alors, en tenant compte de (2.39) on a

$$\phi_N = \mathfrak{C} \sqrt{\lambda} \left( \frac{1}{r_N^1} - \frac{1}{r_N^2} \right), \quad (2.40)$$

avec la constante  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\lambda)$  telle que  $\|\phi\|_0 = 1$ . Dans ce qui suit on utilise (2.40) pour évaluer  $\phi_N$ . Quelques estimations utiles sont données par le lemme suivant.

**Lemme 2.12.** *Il existe  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $N > N_0$  et pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$  ayant la propriété  $\lambda \geq (3h \ln N)^4$  les estimations suivantes sont vérifiées :*

$$\frac{1}{X_1^{N+1}} = o(1) \sqrt{\lambda}, \quad (2.41)$$

$$|1 - r_N^1| \leq \left( \frac{1}{X_1} \right)^{N+1}, \quad (2.42)$$

$$r_N^2 \geq X_1^{N+1} - 1. \quad (2.43)$$

Pour pouvoir estimer  $\phi_N$  il faudra plus d'informations sur la constante  $\mathfrak{C}$  apparaissant dans (2.40). Ainsi la Proposition 2.13 montre que pour de valeurs propres basses, la constante  $\mathfrak{C}$  est minorée par une constante strictement positive quand  $h$  tend vers 0, et la Proposition 2.14 démontre que pour la plus grand valeur propre  $\lambda_N$  la constante correspondante  $\mathfrak{C}$  tend vers 0 quand  $h \rightarrow 0$ .

**Proposition 2.13.** *Soit  $\sigma \in (0, 1)$ . Alors il existe  $K_0 > 0$  et  $N_0 \in \mathbb{N}$  tels que, pour tout  $N \geq N_0$  et pour tout  $\lambda$  valeur propre de la matrice  $A$  dans l'intervalle  $(\sigma, 16 - \sigma)$ , la constante associée  $\mathfrak{C}$  vérifie*

$$\mathfrak{C} \geq K_0. \quad (2.44)$$

**Proposition 2.14.** *Avec les notations précédentes, il existe deux constantes positives  $K_1, K_2$  et  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  tels que pour tout  $N \geq N_0$  la constante  $\mathfrak{C}$  associée à  $\lambda_N$  vérifie l'estimation suivante :*

$$K_1 h \leq \mathfrak{C} \leq K_2 h. \quad (2.45)$$

Nous omettons les preuves des Propositions 2.13 et 2.14. Pour les détails on envoie vers [CMR17]. Nous avons maintenant tous les ingrédients pour évaluer  $\phi_N$ .

**Théorème 2.15.** *Soit  $\sigma \in (0, 1)$ . Il existe  $K > 0$  et  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $N \geq N_0$  et toute valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A$  située dans l'intervalle  $(\sigma, 16 - \sigma)$ , le vecteur propre normalisé associé  $\phi = (\phi_k)_{1 \leq k \leq N} \in \mathbb{R}^N$  a la propriété suivante*

$$|\phi_N| > K\sqrt{\lambda}. \quad (2.46)$$

De plus, si  $\phi^N \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre  $\lambda_N$ , on a

$$\frac{|\phi_N^N|}{\sqrt{\lambda_N}} = \mathcal{O}(h). \quad (2.47)$$

*Démonstration.* Comme  $\lambda \in (\sigma, 16 - \sigma)$ , de (2.41), (2.42) et (2.43) on déduit qu'il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $N$  suffisamment grand, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$2 \geq \frac{1}{r_N^1} > C > \frac{2}{r_N^2}. \quad (2.48)$$

En utilisant (2.40) et (2.48) on obtient :

$$\phi_N = \mathfrak{C}\sqrt{\lambda} \left( \frac{1}{r_N^1} - \frac{1}{r_N^2} \right) > \mathfrak{C}\sqrt{\lambda} \frac{1}{2r_N^1} > \frac{C\mathfrak{C}\sqrt{\lambda}}{2}. \quad (2.49)$$

donc, l'inégalité (2.46) est une conséquence de (2.44) et (2.49). De l'autre coté, en utilisant (2.45) et (2.48), on déduit que (2.47) a lieu pour le vecteur propre normalisé associé à  $\lambda_N$ .  $\square$

**Remarque 2.16.** *L'inégalité (2.46) montre que les vecteurs propres associés aux valeurs propres situées dans l'intervalle  $(\sigma, 16 - \sigma)$  sont observables. De plus, l'inégalité (2.47) montre que l'inégalité d'observabilité dégénère pour le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre quand  $h \rightarrow 0$ . De l'autre coté, le résultat donné par le Théorème 2.15 n'est pas utile pour les fréquences basses  $\lambda \leq \sigma$ . Ce cas sera traité dans la Section 2.2.5. Dans la Figure 2.2 on représente graphiquement la quantité  $\frac{(\phi_N^N)^2}{\lambda_N}$  en fonction de  $h$ . On remarque que  $\frac{(\phi_N^N)^2}{\lambda_N} \approx 2.2h^2$ . Les valeurs et vecteurs propres utilisés pour la Figure 2.2 ont été obtenus à l'aide d'une méthode numérique.*

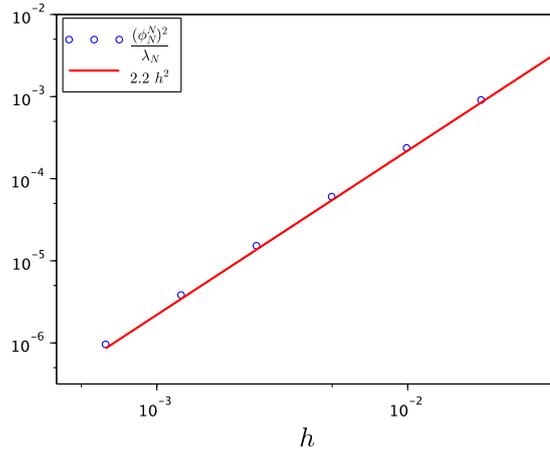


FIGURE 2.2 – Évolution de la quantité  $\frac{(\phi_N^N)^2}{\lambda_N}$  en fonction de  $h$ .

## 2.2.4 Estimations numériques pour la partie basse du spectre

Le but de cette section est d'analyser les valeurs propres pour lesquelles le Théorème 2.9 ne s'applique pas. Pour cela, nous allons utiliser le fait que les *petites* valeurs propres de la matrice  $A_h$  approchent bien les *petites* valeurs propres de l'opérateur différentiel de l'équation de la barre (1.4). Soit  $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \rightarrow L^2(0, 1)$  l'opérateur défini par

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\tilde{A}) = H^4(0, 1) \cap H_0^2(0, 1) \\ \tilde{A}\varphi = \varphi_{xxxx} \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{A})). \end{cases}$$

L'opérateur  $\tilde{A}$  possède une suite croissante de valeurs propres simples et positives  $(\tilde{\lambda}_n)_{n \geq 1}$  telle que

$$\sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + v_n,$$

avec  $(v_n)_{n \geq 1}$  une suite convergeant exponentiellement vers 0 (voir [TW09, Lemme 6.10.2]). Donc, pour tout  $\delta > 0$  il existe  $n_\delta \in \mathbb{N}$  tel que

$$\left| \sqrt[4]{\tilde{\lambda}_n} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \right| < \delta \quad (n \geq n_\delta).$$

Pour des valeurs pas *trop grandes* de  $n$  les valeurs propres de  $A_h$  sont proches des valeurs propres de  $\tilde{A}$ . Plus précisément, on peut démontrer le résultat suivant :

**Théorème 2.17.** *Soit  $\varepsilon \in (0, 2)$ . Avec les notations précédentes, il existe  $N_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que, pour tout  $N \geq N_0$  on a*

$$\left| \tilde{\lambda}_n - \frac{\lambda_n}{h^4} \right| \leq Ch^\varepsilon \quad \left(1 \leq n \leq N^{\frac{1}{6}(2-\varepsilon)}\right). \quad (2.50)$$

De ce théorème, on déduit facilement, le corollaire suivant :

**Corollaire 2.18.** *Soit  $\varepsilon \in (0, 2)$ . Il existe  $N_0 > 0$  et  $d > 0$  tels que, pour tout  $N \geq N_0$ , l'estimation suivante est vraie :*

$$\frac{1}{h^2} \left| \sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} \right| \geq dn \quad \left(1 \leq n \leq N^{\frac{1}{6}(2-\varepsilon)}\right). \quad (2.51)$$

### 2.2.5 Une inégalité d'observabilité pour les basses fréquences

Le but de cette section est d'établir une inégalité d'observabilité pour les basses fréquences de la matrice  $A$  (ou, autrement dit, pour les vecteurs propres de  $A$  associés aux plus petites valeurs propres de  $A$ ). Pour cela, on mettra en oeuvre une méthode discrète des multiplicateurs présentée en détail dans [CMR16 ; CMR17]. Ici on omettra les détails des preuves et on énoncera seulement les résultats. Plus précisément, le résultat qu'on obtient à l'aide de cette méthode des multiplicateurs est le théorème suivant :

**Théorème 2.19.** *Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sigma \in (0, 1)$  et  $\phi = (\phi_k)_{1 \leq k \leq N}$  le vecteur propre normalisé de  $A$  associé à une valeur propre  $\lambda \in (0, 16 - \sigma)$ . Alors, il existe une constante  $K$ , indépendante de  $N$  et de  $\lambda$ , telle que l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$|\phi_N| \geq K\sqrt{\lambda}.$$

**Remarque 2.20.** *Ce théorème généralise une partie des résultats démontrés par le Théorème 2.15. Plus précisément, le Théorème 2.19 montre que l'inégalité d'observabilité a lieu pour les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda \in (0, 16 - \sigma)$ . Les mêmes estimations ont été obtenues pour l'équation de la barre posée dans [LZ02].*

## 2.3 Résultats d'observabilité et de contrôlabilité

Cette section présente les résultats principaux du chapitre concernant l'observabilité des solutions de l'équation (2.12). Pour développer en série de Fourier la solution de (2.12), remarquons d'abord que la famille  $(\Phi^n)_{1 \leq |n| \leq N}$  définie par

$$\Phi^n = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{\sqrt{\lambda_{|n|}}} \\ -\operatorname{sgn}(n) i \end{pmatrix} \phi^{|n|} \quad (1 \leq |n| \leq N),$$

forme une base orthonormale de  $\mathbb{C}^{2N}$  par rapport au produit scalaire (2.9). En fait,  $\Phi^n$  sont les vecteurs propres normalisés de l'opérateur  $\begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{I} \\ A_h & 0 \end{pmatrix}$  associé à (2.12). Soit  $\gamma \in (0, 1)$ . On définit l'espace de données initiales filtrées :

$$\mathcal{C}_h(\gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} Y_h^0 \\ Y_h^1 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq |n| \leq \gamma N} a_n \Phi^n, \quad (a_n)_{1 \leq |n| \leq \gamma N} \subset \mathbb{C} \right\}. \quad (2.52)$$

Le résultat suivant concerne la séparation des valeurs propres de la matrice  $A$  et il va nous permettre de démontrer le résultat d'observabilité désiré.

**Proposition 2.21.** *Soit  $T > 0$ . Il existe  $N_0$ ,  $n_T \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $N \geq N_0$ , les valeurs  $\lambda_n$  de la matrice  $A$  vérifient*

$$\sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} \geq \frac{2\pi}{T} h^2 \quad (n_T \leq n \leq N - n_T). \quad (2.53)$$

L'idée de la preuve de cette proposition combine le résultat du Théorème 2.9 et le Corollaire 2.18. Le résultat principal du chapitre est le théorème suivant :

**Théorème 2.22.** *Soit  $T > 0$  et  $\gamma \in (0, 1)$ . Alors il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \geq N_0$  l'inégalité d'observabilité (2.11) est vérifiée, avec  $K$  une constante positive ne dépendant pas de*

$h$ , pour toute solution de (2.12) avec données initiales dans l'espace  $\mathcal{C}_h(\gamma)$  donné par (2.52). De plus,

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|Y_h^0\|_2^2 + \|Y_h^1\|_0^2}{\int_0^T \left| \frac{Y_{hN}(t)}{h^2} \right|^2 dt} \left| \begin{pmatrix} Y_h^0 \\ Y_h^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N} \text{ et } \begin{pmatrix} Y_h \\ Y_{h,t} \end{pmatrix} \text{ solution de (2.12)} \right. \right\} = \infty. \quad (2.54)$$

*Démonstration.* Si la donnée initiale  $\begin{pmatrix} Y_h^0 \\ Y_h^1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_h(\gamma)$  est donnée par  $\begin{pmatrix} Y_h^0 \\ Y_h^1 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq |n| \leq \gamma N} a_n \Phi^n$ , alors la solution correspondante de (2.12) est donnée par

$$\begin{pmatrix} Y_h(t) \\ Y_{h,t}(t) \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq |n| \leq \gamma N} a_n e^{-i \operatorname{sgn}(n) \frac{\sqrt{\lambda_{|n|}}}{h^2} t} \Phi^n. \quad (2.55)$$

En tenant compte de la propriété (2.53) des valeurs propres donnée par la Proposition 2.21, on peut appliquer l'inégalité d'Ingham démontrée dans [LZ02, Lemme 2.3] : il existe donc une constante  $K' > 0$  et  $N_0 \in \mathbb{N}^*$ , ne dépendant pas de  $h$ , tels que l'inégalité suivante soit vérifiée pour tout  $N \geq N_0$  et  $(a_n)_{1 \leq |n| \leq \gamma N} \subset \mathbb{C}$  :

$$\sum_{1 \leq |n| \leq \gamma N} |a_n|^2 \left| \frac{\phi_N^{|n|}}{\sqrt{\lambda_{|n|}}} \right|^2 \leq K' \int_0^T \left| \sum_{1 \leq |n| \leq \gamma N} a_n e^{-i \operatorname{sgn}(n) \frac{\sqrt{\lambda_{|n|}}}{h^2} t} \frac{\phi_N^{|n|}}{\sqrt{\lambda_{|n|}}} \right|^2 dt. \quad (2.56)$$

De l'autre coté, on peut remarquer que si  $n \leq \gamma N$ , alors

$$\lambda_n = 16 \sin^4 \left( \frac{y_n h}{2} \right) \leq 16 \sin^4 \left( \frac{(n+1)h\pi}{2} \right) \leq 16 \sin^4 \left( \frac{(\gamma+h)\pi}{2} \right)$$

et il existe  $\sigma \in (0, 1)$  tel que  $\lambda_n \leq 16 - \sigma$ . Le Théorème 2.19 nous assure que la dernière composante des vecteurs propres  $\phi^n$  de la matrice  $A$  vérifie :

$$|\phi_N^n| \geq K'' \sqrt{\lambda_n} \quad (1 \leq n \leq \gamma N), \quad (2.57)$$

où  $K''$  est une constante positive qui dépend de  $\gamma$  mais ne dépend pas de  $h$ . En combinant (2.56) et (2.57), on obtient l'inégalité suivante :

$$\sum_{1 \leq |n| \leq \gamma N} |a_n|^2 \leq K \int_0^T \left| \sum_{1 \leq |n| \leq \gamma N} a_n e^{-i \operatorname{sgn}(n) \frac{\sqrt{\lambda_{|n|}}}{h^2} t} \frac{\phi_N^{|n|}}{\sqrt{\lambda_{|n|}}} \right|^2 dt \quad ((a_n)_{1 \leq |n| \leq \gamma N} \subset \mathbb{C}),$$

avec  $K = \frac{K'}{(K'')^2}$ . Mais cela est équivalent à l'inégalité (2.11) avec une constante  $K$  indépendante de  $h$ , et la première partie du théorème est démontrée.

Pour démontrer (2.54), il suffit de prendre  $\begin{pmatrix} Y_h^0 \\ Y_h^1 \end{pmatrix} = \Phi^N$  et de remarquer qu'en appliquant le Théorème 2.15 on trouve

$$\frac{\|Y_h^0\|_2^2 + \|Y_h^1\|_0^2}{\int_0^T \left| \frac{Y_{hN}(t)}{h^2} \right|^2 dt} = \frac{\sqrt{\lambda_N}}{|\phi_N^N|} = \mathcal{O} \left( \frac{1}{h} \right),$$

ce qui finit la preuve du théorème.  $\square$

**Remarque 2.23.** Le Théorème 2.22 montre que l'équation (2.12) est uniformément observable si les fréquences propres  $|\frac{\lambda_n}{h^4}| > \frac{C}{h^4}$  de l'opérateur  $A_h$  sont filtrées, où  $C$  est une constante positive strictement inférieure à 16. De plus, ce théorème montre qu'il existe des solutions contenant des fréquences qui ne sont pas uniformément observables. Ces résultats sont similaires aux résultats obtenus pour l'équation de la barre sujet à d'autres conditions frontière étudiée dans [LZ02].

**Remarque 2.24.** *Le résultat du Théorème 2.22 ne peut pas être obtenu en utilisant seulement des estimations pour le schéma numérique. Effectivement, en utilisant les estimations pour le schéma numérique on obtient une inégalité d'observabilité seulement si on filtre une partie beaucoup plus importante des fréquences propres :  $|\frac{\lambda_n}{h^4}| > \frac{C}{h^{\frac{4}{3}-\varepsilon}}$ . Ce résultat plus faible est similaire aux résultats obtenus pour des systèmes plus généraux dans [Erv11 ; Erv09].*

Le résultat d'observabilité uniforme du Théorème 2.22 permet de démontrer que nous pouvons contrôler la projection de la solution de (2.5) sur l'espace  $\mathcal{C}_h(\gamma)$  à l'aide des contrôles uniformément bornés. Définissons l'opérateur de projection suivant :

$$\Pi_{h,\gamma} \begin{pmatrix} U_h^0 \\ U_h^1 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq |n| \leq \gamma N} a_n \Phi^n, \quad \begin{pmatrix} U_h^0 \\ U_h^1 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq |n| \leq N} a_n \Phi^n, \quad (2.58)$$

et le produit scalaire dans  $\mathbb{C}^{2N}$  défini par

$$\left\langle \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G^1 \\ G^2 \end{pmatrix} \right\rangle_{-2} = \langle F^1, G^1 \rangle_0 + \langle A_h^{-1} F^2, G^2 \rangle_0 \quad \left( \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G^1 \\ G^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N} \right), \quad (2.59)$$

avec la norme associée  $\|\cdot\|_{-2}$ . On a le résultat de contrôlabilité suivant :

**Théorème 2.25.** *Soit  $T > 0$  et  $\gamma \in (0, 1)$ . En prenant  $N_0 \in \mathbb{N}$  et  $K > 0$  fournis par le Théorème 2.22, pour tout  $N \geq N_0$  et  $\begin{pmatrix} U_h^0 \\ U_h^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}$ , il existe un contrôle  $v_h \in L^2(0, T)$  tel que la solution correspondante  $\begin{pmatrix} U_h \\ U_{h,t} \end{pmatrix}$  de (2.6) vérifie*

$$\Pi_{h,\gamma} \begin{pmatrix} U_h(T) \\ U_{h,t}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

en satisfaisant l'estimation suivante :

$$\|v_h\|_{L^2(0,T)} \leq 2\sqrt{K} \left\| \Pi_{h,\gamma} \begin{pmatrix} U_h^0 \\ U_h^1 \end{pmatrix} \right\|_{-2}. \quad (2.61)$$

La démonstration de ce résultat est assez classique et nous l'omettons ici. Pour les détails on renvoie vers [CMR17].

## 2.4 Simulations numériques

Dans cette section nous discutons quelques simulations numériques pour l'approximation des contrôles associés à des données initiales dans  $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$ . Plus précisément, on considère la donnée initiale suivante :

$$u_0(x) = \mathbb{1}_{(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})}(x), \quad u_1(x) = 0 \quad (x \in (0, 1)). \quad (2.62)$$

Pour filtrer les hautes fréquences, pour une valeur donnée de  $N$ , on approche d'abord numériquement les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice  $A$ . Pour toute valeur de  $N$  on calcule un contrôle associé à la donnée initiale (2.62) filtrée au niveau  $[\gamma N]$ , avec le seuil de filtration  $\gamma \in \{0.1, 0.5, 0.9, 1\}$ . Plus précisément, on considère des positions initiales de la forme

$$u_0^\gamma = \sum_{n=1}^{[\gamma N]} \langle u_0, \phi^n \rangle_0 \phi^n \in \mathbb{C}^N,$$

tandis que la vitesse initiale est nulle. La Figure 2.3 (gauche) montre la donnée initiale filtrée pour ces valeurs de  $\gamma$ .

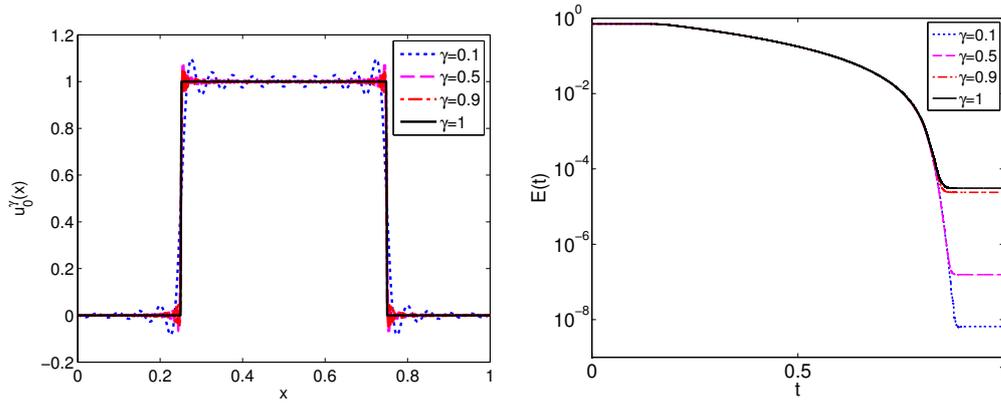


FIGURE 2.3 – Donnée initiale  $u_0^\gamma$  filtrée pour différentes valeurs de  $\gamma$  et  $N = 400$  (gauche) et l'énergie des solutions contrôlées associées (droite).

Comme les solutions de l'équation (2.5) sont données par (2.55), on a un critère pour choisir le pas de discrétisation en temps  $\Delta t$  pour représenter *correctement* ces solutions. Plus précisément, on prend  $\Delta t = \frac{\sqrt{\lambda_{[\gamma N]}}}{h^2}$ . Pour la discrétisation en temps on utilise un schéma de Newmark de paramètres  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{2}$  (voir, par exemple, [Hug87]).

	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 0.9$	$\gamma = 1$
$N = 25$	4	6	12	29
$N = 50$	4	6	15	52
$N = 100$	4	6	17	87
$N = 200$	4	6	20	168
$N = 400$	4	6	19	321

TABLE 2.1 – Nombre d'itérations nécessaires à la convergence du gradient conjugué pour la donnée initiale  $(u_0^\gamma, 0)$  et différentes valeurs de  $N$ .

Pour calculer effectivement les contrôles nous utilisons un algorithme de gradient conjugué pour minimiser la fonctionnelle duale (avec un poids en temps) associée au problème du contrôle. Pour garder la solution dans l'espace  $C_h(\gamma)$  à chaque itération du gradient conjugué on filtre les fréquences supérieures à  $\lambda_{\gamma N}$  qui apparaissent comme une conséquence des termes frontière non-homogènes. Le Table 2.1 reporte le nombre d'itérations nécessaires à la convergence du gradient conjugué. Le critère d'arrêt du gradient conjugué est que le résidu soit inférieur à  $\epsilon = 10^{-7}$ . On observe que pour une valeur fixée de  $N$  le nombre d'itérations croît quand  $\gamma$  s'approche de 1. De plus, si  $\gamma = 1$  le nombre d'itérations croît linéairement avec  $N$ , tandis que pour  $\gamma < 1$  ce nombre est clairement borné. Cela est liée à la non-uniformité de l'observabilité pour les hautes fréquences.

	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 0.9$	$\gamma = 1$
$N = 25$	0.5691	0.5992	0.6411	0.9871
$N = 50$	0.5986	0.6082	0.6462	0.8104
$N = 100$	0.5880	0.5971	0.6104	0.8025
$N = 200$	0.5927	0.5982	0.6064	0.8031
$N = 400$	0.5960	0.5987	0.6028	0.8033

TABLE 2.2 – Normes des contrôles  $\|v_h\|_{L^2(0,T)}$  associés aux solutions filtrées dans  $C_h(\gamma)$ .

Dans le Table 2.2 on donne les normes  $L^2$  des contrôles associés aux données initiales  $(y_0^\gamma, 0)$  pour différentes valeurs de  $N$  et  $\gamma$ . La Figure 2.4 représente les contrôles calculés pour les mêmes données initiales en prenant  $N = 400$  et  $\gamma \in \{0.1, 0.5, 0.9, 1\}$ . Dans la Figure 2.3 (droite) on représente l'énergie des solutions associées à ces contrôles. Comme attendu, les contrôles

présentent des oscillations de plus en plus importantes quand  $\gamma$  s'approche de 1. Néanmoins, l'énergie des solutions contrôlées va vers 0 quand le temps s'approche du temps de contrôle  $T = 1$ .

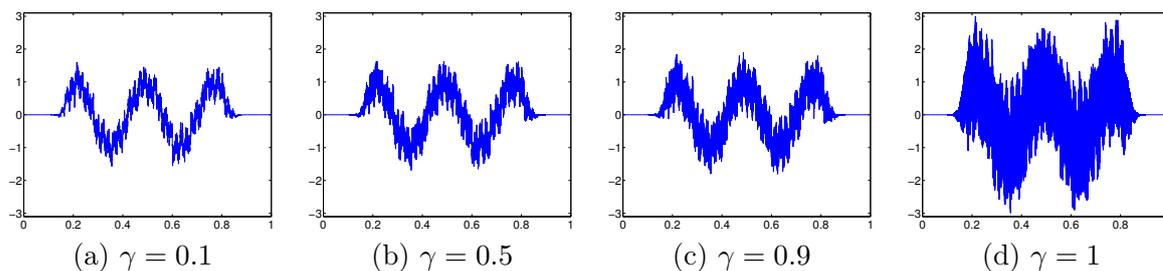


FIGURE 2.4 – Contrôles obtenus pour  $N = 400$  et différentes valeurs de  $\gamma$ .

## 2.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre nous avons présentés quelques résultats concernant l'approximation des contrôles de norme  $L^2$  minimale pour une équation de d'Euler-Bernoulli modélisant les oscillations d'une barre encastree à ses deux extrémités. Plus précisément, nous avons déterminé le seuil optimal de filtration des données initiales pour avoir une inégalité d'observabilité uniforme par rapport au paramètre de discrétisation (par différences finies)  $h$ . De plus nous avons montré que la dernière fréquence de l'opérateur discret n'est pas uniformément observable. Cela a été possible en estimant de manière précise les valeurs et les vecteurs propres de cet opérateur.

Les résultats que nous avons obtenus sont similaires aux résultats connus pour l'équation de la barre posée [LZ02] et plus précises que les résultats existants pour des systèmes généraux [Erv11; Erv09]. Nous mentionnons que la méthode proposée pour l'approximation des contrôles pour l'équation des ondes dans le Chapitre 1 requiert, dans la forme actuelle, l'utilisation des éléments finis de classe  $C^3$  si on voudrait l'adapter pour l'approximation des contrôles pour l'équation des poutres. Cette régularité élevée des éléments finis rend la mise en oeuvre numérique de cette méthode un peu délicate dans le cas de l'équation des poutres, mais reste néanmoins faisable.

Dans l'esprit du travail présenté dans ce chapitre, il sera intéressant d'étudier l'approximation numérique des contrôles pour l'équation des plaques en dimension 2, par exemple dans un domaine carré. Dans ce cas on pourra estimer les valeurs et vecteurs propres d'une manière similaire. Une autre perspective possible dans l'optique de ce chapitre et de considérer d'autres modèles de barres ou des plaques.



DEUXIÈME PARTIE

PROBLÈMES INVERSES



# 3

## Problèmes inverses pour l'équation des ondes

Ce chapitre présente une méthode directe pour la résolution du problème inverse de la reconstruction de l'état et d'un terme source pour une équation des ondes à partir d'une observation distribuée ou d'une observation frontière. Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de deux publications [CM15b; CM16].

Soit  $\Omega$  un ouvert borné et non-vide de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) de frontière Lipschitz  $\partial\Omega$  et soit  $T = 0$ . On note  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  et  $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$ . Dans ce chapitre on considère l'équation hyperbolique suivante :

$$\begin{cases} y_{tt} - \nabla \cdot (a(x)\nabla y) + b(x, t)y = f, & (x, t) \in Q_T \\ y = 0, & (x, t) \in \Sigma_T \\ (y(\cdot, 0), y_t(\cdot, 0)) = (y_0, y_1), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

On suppose que  $a \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$  avec  $a(x) \geq a_0 > 0$  dans  $\bar{\Omega}$  et  $b \in L^\infty(Q_T)$ . En fonction de la quantité observée, nous allons supposer des régularités différentes des données initiales et des termes source :

- pour une observation distribuée on suppose  $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  et des termes source  $f \in L^2([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ .
- pour une observation frontière on suppose  $(y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  et  $f(x, t) = \sigma(t)\mu(x)$  avec  $\sigma \in C^1([0, T])$  et  $\mu \in H^{-1}(\Omega)$ .

Dans les deux situations, il est clair qu'il existe une unique solution de (3.1) ayant la régularité  $C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega))$  pour le premier cas, et dans le deuxième cas la régularité  $C([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ .

Pour tout le reste du chapitre, on notera  $L$  l'opérateur des ondes suivant :

$$Ly = y_{tt} - \nabla \cdot (a(x)\nabla y) + b(x, t)y. \quad (3.2)$$

### 3.1 Observation distribuée

Soit  $\omega$  un sous-ensemble ouvert et non-vide de  $\Omega$  et soit  $q_T = \omega \times (0, T) \subset Q_T$ . Un problème inverse typique pour (3.1) est le suivant : à partir d'une observation distribuée  $y_{\text{obs}}$  dans  $L^2(q_T)$  on veut reconstruire une solution de (3.1) qui coïncide avec l'observation  $y_{\text{obs}}$  sur  $q_T$ . On note  $X$  l'espace défini par  $X = L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ . En considérant l'opérateur  $P : Z \rightarrow X \times L^2(q_T)$  défini par  $Py = (Ly, y|_{q_T})$ , où  $Z$  est l'espace suivant :

$$Z = \{y \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], H^{-1}(\Omega)) \mid Ly \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), y|_{\Sigma_T} = 0\}, \quad (3.3)$$

ce problème inverse peut être reformulé comme suit :

$$\text{trouver } y \in Z \text{ solution de } Py = (f, y_{\text{obs}}). \quad (3.4)$$

En utilisant la propriété de continuation unique de (3.1), si le domaine  $q_T$  vérifie certaines conditions géométriques et si  $y_{\text{obs}}$  est la restriction d'une solution de (3.1), alors le problème inverse (3.4) admet une unique solution.

Comme les observations  $y_{\text{obs}}$  sont sujet à des incertitudes dues, par exemple, aux erreurs de mesure ou aux approximations numériques, le problème (3.4) doit être relaxé. Plus précisément, la relaxation la plus naturelle et la plus utilisée consiste à considérer le problème suivant de type minimisation au sens des moindres carrés :

$$\begin{cases} \text{minimiser } J(y_0, y_1) = \frac{1}{2} \|y - y_{\text{obs}}\|_{L^2(Q_T)}^2 \text{ sur } L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \\ \text{où } y \text{ est solution de (3.1).} \end{cases} \quad (3.5)$$

Malgré le fait que dans (3.5) la contrainte  $y|_{Q_T} = y_{\text{obs}}$  est relaxée, si  $y_{\text{obs}}$  provient d'une solution de (3.1) les problèmes (3.4) et (3.5) coïncident. Une suite minimisante pour  $J$  peut être facilement définie à l'aide de la solution d'un problème adjoint. Minimiser la fonctionnelle  $J$  par une méthode de gradient souffre de plusieurs problèmes comme le ralentissement de la convergence de l'algorithme de minimisation au voisinage du minimum, ou encore du fait que, en général, ce n'est pas possible de minimiser dans un sous-espace de dimension finie de  $\{y : Ly = f\}$  [Isa17]. Ce même genre de difficultés apparaissent quand on veut approcher numériquement les contrôles discrets pour l'équation des ondes [Zua05]. A notre connaissance, ces problèmes délicats ont reçu des réponses dans des situations assez spécifiques (voir [CM15b], [GLH08], [Mün05], [KL07]).

En suivant les idées employées dans [CCM14] pour la contrôlabilité de l'équation des ondes, nous proposons une méthode directe pour la résolution des conditions d'optimalité associées au problème de minimisation (3.5). D'une manière similaire aux méthodes proposées pour la contrôlabilité dans le Chapitre 1, nous proposons une stratégie qui évite tout procédé itératif et prend en compte la contrainte  $Ly = f$  à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. Cela permet d'écrire les conditions d'optimalité associées à (3.5) comme une formulation mixte. Le caractère bien posé de cette formulation mixte est la conséquence d'une inégalité d'observabilité pour le problème adjoint.

Un deuxième problème inverse que nous allons étudier au cours de ce chapitre et le problème de la reconstruction simultanée de la solution  $y$  et de la source  $f$  de (3.1) à partir de l'observation  $y_{\text{obs}}$ . Dans le cadre présenté plus haut, cela s'écrit :

$$\begin{cases} \text{minimiser } J(y_0, y_1, f) = \frac{1}{2} \|y - y_{\text{obs}}\|_{L^2(Q_T)}^2 \text{ sur } L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times X \\ \text{où } (y, f) \text{ vérifie (3.1).} \end{cases} \quad (3.6)$$

Sans autres conditions sur  $f \in X$ , ce dernier problème inverse n'est pas bien posé, le couple  $(y, f)$  correspondant à  $y_{\text{obs}}$  n'étant pas unique.

### 3.1.1 Une reformulation mixte du problème inverse (3.5)

On suppose donc que la donnée initiale  $(y_0, y_1)$  est inconnue et on considère le problème inverse (3.5). En tenant compte que l'équation (3.1) est linéaire, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que  $f \equiv 0$  dans  $Q_T$ . On fait également l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 3.1.** *Il existe une constante  $C_{\text{obs}} = C(\omega, T, \|a\|_{C^1(Q_T)}, \|b\|_{L^\infty(Q_T)})$  telle que l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\|y(\cdot, 0), y_t(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C_{\text{obs}} \left( \|y\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|Ly\|_X^2 \right) \quad \forall y \in Z. \quad (3.7)$$

L'estimation (3.7) est une inégalité d'observabilité généralisée : pour l'équation des ondes à coefficients constants cette estimation est satisfaite si le triplet  $(\omega, T, \Omega)$  vérifie la condition d'optique géométrique [BLR92]. En particulier, le temps  $T$  doit être suffisamment grand. Sous la même condition géométrique, l'inégalité (3.7) est vraie pour le cas où le domaine  $\omega$  varie en temps (voir [CCM14] pour une preuve en dimension un de l'espace).

Sous ces hypothèses, pour tout  $\eta > 0$ , on définit sur  $Z$  la forme bilinéaire suivante :

$$\langle y, \bar{y} \rangle_Z = \iint_{q_T} y(t) \bar{y}(t) dx dt + \eta \int_0^T \langle Ly(t), L\bar{y}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega)} dt \quad \forall y, \bar{y} \in Z. \quad (3.8)$$

De (3.7) on obtient que cette forme bilinéaire est en fait un produit scalaire sur  $Z$ . De plus, on peut facilement démontrer que  $Z$  est un espace de Hilbert par rapport à ce produit scalaire. On note la norme associée par  $\|z\|_Z = \sqrt{\langle y, y \rangle_Z}$ . Alors, nous considérons le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{minimiser } J(y) = \frac{1}{2} \|y - y_{\text{obs}}\|_{L^2(q_T)}^2, \\ \text{sujet à la contrainte } y \in W, \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $W$  est le sous-espace fermé de  $Z$  défini par

$$W = \{y \in Z; Ly = 0 \text{ dans } X\}$$

et muni de la norme de  $Z$ . Remarquer que le problème extremal (3.9) est bien posé :  $J$  est continue sur  $W$ , est strictement convexe et  $J(y) \rightarrow +\infty$  quand  $\|y\|_W \rightarrow +\infty$ . De plus, la solution de (3.9) ne dépend pas de  $\eta$ .

On rappelle que si  $y \in Z$  alors  $Ly \in X$ . De plus, (3.9) n'admet plus une solution unique si l'Hypothèse 3.1 n'est pas vérifiée. On rappelle également que, comme le problème (3.1) est bien posé, il existe une constante  $C_{\Omega, T}$  telle que pour tout  $z \in Z$

$$\|z\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C_{\Omega, T} \left( \|(z(\cdot, 0), z_t(\cdot, 0))\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 + \|Lz\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \right). \quad (3.10)$$

A l'aide de l'inégalité d'observabilité généralisée, (3.10) donne

$$\|z\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C_{\Omega, T} \left( C_{\text{obs}} \|z\|_{L^2(q_T)}^2 + (1 + C_{\text{obs}}) \|Lz\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \right) \quad \forall z \in Z. \quad (3.11)$$

Pour résoudre (3.9), nous allons traiter la contrainte  $y \in W$  à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange  $\lambda \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Plus précisément, nous considérons la formulation mixte suivante :

$$\begin{cases} \mathfrak{a}(y, \bar{y}) + \mathfrak{b}(\bar{y}, \lambda) = \ell(\bar{y}), & \forall \bar{y} \in Z \\ \mathfrak{b}(y, \bar{\lambda}) = 0, & \forall \bar{\lambda} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{cases} \quad (3.12)$$

où

$$\mathfrak{a} : Z \times Z \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{a}(y, \bar{y}) = \iint_{q_T} y \bar{y} dx dt, \quad (3.13)$$

$$\mathfrak{b} : Z \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{b}(y, \lambda) = \int_0^T \langle \lambda(t), Ly(t) \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} dt, \quad (3.14)$$

$$\ell : Z \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell(y) = \iint_{q_T} y_{\text{obs}} y dx dt. \quad (3.15)$$

Le système (3.12) est le système d'optimalité pour le problème de minimisation (3.9). Plus précisément, le résultat suivant peut être démontré.

**Théorème 3.2.** *On suppose l'Hypothèse 3.1 vérifiée. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées :*

1. La formulation mixte (3.12) est bien posée.
2. L'unique solution  $(y, \lambda) \in Z \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  de (3.12) est l'unique point selle du Lagrangien  $\mathcal{L} : Z \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$\mathcal{L}(y, \lambda) = \frac{1}{2} \mathfrak{a}(y, y) + \mathfrak{b}(y, \lambda) - \ell(y).$$

3. On a l'estimation suivante :

$$\|y\|_Z = \|y\|_{L^2(Q_T)} \leq \|y_{\text{obs}}\|_{L^2(Q_T)}, \quad \|\lambda\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq 2\sqrt{C_{\Omega,T} + \eta} \|y_{\text{obs}}\|_{L^2(Q_T)}. \quad (3.16)$$

La démonstration de ce théorème est similaire à celle du Théorème 1.15 et elle est omise ici. Notamment, il faudra vérifier qu'il existe  $\delta > 0$  tel que la condition *inf-sup* suivante est satisfaite :

$$\inf_{\lambda \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \sup_{y \in Z} \frac{\mathbb{b}(y, \lambda)}{\|y\|_Z \|\lambda\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}} \geq \delta. \quad (3.17)$$

En pratique, il est nécessaire d'augmenter le Lagrangien (voir le livre [FG83]) : on considère donc le Lagrangien  $\mathcal{L}_r$  défini par

$$\mathcal{L}_r(y, \lambda) = \frac{1}{2} \mathfrak{a}_r(y, y) + \mathbb{b}(y, \lambda) - \ell(y),$$

avec  $\mathfrak{a}_r(y, y) = \mathfrak{a}(y, y) + r\|Ly\|_X^2$  pour tout  $r > 0$ .

**Remarque 3.3.** *En supposant que la solution  $\lambda$  est plus régulière, notamment que  $L\lambda \in L^2(Q_T)$  et  $(\lambda, \lambda_t)|_{t=0,T} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , on peut facilement démontrer que les conditions d'optimalité pour  $\lambda$  s'écrivent comme suit :*

$$\begin{cases} L\lambda = -(y - y_{\text{obs}})\mathbb{1}_{Q_T}, & \text{dans } Q_T \\ \lambda = 0, & \text{sur } \Sigma_T \\ \lambda = \lambda_t = 0, & \text{sur } \Omega \times \{0, T\}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Autrement dit,  $\lambda$  est une solution contrôlée de l'équation des ondes par le contrôle  $-(y - y_{\text{obs}})\mathbb{1}_{Q_T} \in L^2(Q_T)$ .

Le système (3.18) peut être utilisé pour définir une nouvelle formulation mixte qui sera intéressante pour les applications numériques. Plus précisément, on considère l'espace  $\Lambda$  défini par

$$\Lambda = \{\lambda \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega)), L\lambda \in L^2(Q_T), (\lambda, \lambda_t)(\cdot, 0) = (0, 0)\}. \quad (3.19)$$

En utilisant encore l'inégalité d'observabilité généralisée (3.7), on peut vérifier que l'espace  $\Lambda$  muni du produit scalaire  $\langle \lambda, \bar{\lambda} \rangle_\Lambda = \iint_{Q_T} (\lambda \bar{\lambda} + L\lambda L\bar{\lambda}) dx dt$  est un espace de Hilbert. Alors, pour tout paramètre  $\alpha \in (0, 1)$  on considère la formulation mixte suivante : trouver  $(y, \lambda) \in Z \times \Lambda$  tel que

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_{r,\alpha}(y, \bar{y}) + \mathbb{b}_\alpha(\bar{y}, \lambda) = \ell_{1,\alpha}(\bar{y}), & \forall \bar{y} \in Z \\ \mathbb{b}_\alpha(y, \bar{\lambda}) - \mathfrak{c}_\alpha(\lambda, \bar{\lambda}) = \ell_{2,\alpha}(\bar{\lambda}), & \forall \bar{\lambda} \in \Lambda, \end{cases} \quad (3.20)$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{r,\alpha} : Z \times Z &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathfrak{a}_{r,\alpha}(y, \bar{y}) &= (1 - \alpha) \iint_{Q_T} y \bar{y} dx dt + r \int_0^T \langle Ly(t), L\bar{y}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega)} dt, \\ \mathbb{b}_\alpha : Z \times \Lambda &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbb{b}_\alpha(y, \lambda) &= \int_0^T \langle \lambda(t), Ly(t) \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} dt - \alpha \iint_{Q_T} y L\lambda dx dt, \\ \mathfrak{c}_\alpha : \Lambda \times \Lambda &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathfrak{c}_\alpha(\lambda, \bar{\lambda}) &= \alpha \iint_{Q_T} L\lambda L\bar{\lambda} dx dt, \\ \ell_{1,\alpha} : Z &\rightarrow \mathbb{R}, & \ell_{1,\alpha}(y) &= (1 - \alpha) \iint_{Q_T} y_{\text{obs}} y dx dt, \\ \ell_{2,\alpha} : \Lambda &\rightarrow \mathbb{R}, & \ell_{2,\alpha}(\lambda) &= -\alpha \iint_{Q_T} y_{\text{obs}} L\lambda dx dt. \end{aligned}$$

La formulation mixte stabilisée (3.20) correspond au problème de point selle suivant :

$$\begin{cases} \sup_{\lambda \in \Lambda} \inf_{y \in Z} \mathcal{L}_{r,\alpha}(y, \lambda), \\ \mathcal{L}_{r,\alpha}(y, \lambda) = \mathcal{L}_r(y, \lambda) - \frac{\alpha}{2} \|L\lambda + (y - y_{\text{obs}})\mathbb{1}_{Q_T}\|_{L^2(Q_T)}^2. \end{cases}$$

**Proposition 3.4.** *Si l'Hypothèse 3.1 est vérifiée, alors la formulation mixte (3.20) est bien posée pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ . De plus, son unique solution  $(y, \lambda) \in Z \times \Lambda$  satisfait la relation suivante :*

$$\theta_1 \|y\|_Z^2 + \theta_2 \|\lambda\|_\Lambda^2 \leq \left( \frac{(1-\alpha)^2}{\theta_1} + \frac{\alpha^2}{\theta_2} \right) \|y_{obs}\|_{L^2(q_T)}^2. \quad (3.21)$$

où

$$\theta_1 = \min \left( 1 - \alpha, \frac{r}{\eta} \right), \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{1 + C_{\Omega, T}}.$$

La preuve de la Proposition 3.4 ne nécessite pas la vérification d'une condition *inf-sup*. En effet, il suffit de vérifier que les conditions de la Proposition 4.3.1 de [BBF13] soient satisfaites. Le terme  $\frac{\alpha}{2} \|L\lambda + (y - y_{obs})\mathbb{1}_{q_T}\|_{L^2(Q_T)}^2$  apparaissant dans l'expression du Lagrangien  $\mathcal{L}_{r,\alpha}$  a un rôle de stabilisation. Il assure la coercitivité du Lagrangien  $\mathcal{L}_{r,\alpha}$  par rapport à la variable  $\lambda$  et donc le fait que la formulation mixte (3.20) est bien posée.

La relation entre les formulations mixtes (3.12) et (3.20) est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 3.5.** *Si la solution  $(y, \lambda) \in Z \times L^2(0, T; H_0^1)$  de (3.12) a de plus la propriété  $\lambda \in \Lambda$ , alors les solutions des formulations mixtes (3.12) et (3.20) coïncident.*

**Remarque 3.6.** *En échangeant les priorités des deux contraintes  $y - y_{obs} = 0$  dans  $L^2(q_T)$  et  $Ly - f = 0$  dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , il est possible de minimiser la fonctionnelle  $y \mapsto \|Ly - f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2$  pour  $y \in Z$  sous la contrainte  $y - y_{obs} = 0$  gérée à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. Une analyse supplémentaire sera nécessaire pour établir le caractère bien posé de la formulation mixte ainsi obtenue.*

### 3.1.2 Une reformulation mixte du problème inverse (3.6)

On considère maintenant le problème suivant : étant donnée une observation partielle  $y_{obs}$  sur le domaine  $q_T \subset Q_T$  on veut reconstruire la solution  $y$  de (3.1) ainsi que le terme source  $f$  supposé dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . On suppose toujours que les données initiales  $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  sont inconnues.

La situation est différente de celle décrite dans la Section 3.1.1, au sens que si on ne suppose aucune autre information sur  $f$ , le couple  $(y, f)$  n'est pas unique. Néanmoins, si le terme source est de la forme  $f(x, t) = \sigma(t)\mu(x)$ , avec  $\sigma \in C^1([0, T])$ ,  $\sigma(0) \neq 0$  et  $\mu \in L^2(\Omega)$ , on peut reconstruire la partie spatiale  $\mu$  de la source en supposant connue la dérivée seconde de la solution  $y_{tt}$  sur le domaine  $q_T$  et en supposant les données initiales nulles [LYZ03, Théorème 3.3]. Comme l'observation de la quantité  $y_{tt}$  n'est souvent pas disponible pour les applications pratiques, nous allons relaxer encore le problème (3.6).

Supposons encore Hypothèse 3.1 vérifiée. On note  $Y = Z \times L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  et, pour tout  $\varepsilon, \eta > 0$  on définit sur  $Y$  la forme bilinéaire suivante :

$$\langle (y, f), (\bar{y}, \bar{f}) \rangle_Y = \iint_{q_T} y \bar{y} dx dt + \eta \int_0^T \langle Ly - f, L\bar{y} - \bar{f} \rangle_{-1} dt + \varepsilon \int_0^T \langle f, \bar{f} \rangle_{-1} dt. \quad (3.22)$$

Cette forme bilinéaire est en fait un produit scalaire sur  $Y$  et  $Y$  est un espace de Hilbert avec ce produit scalaire. On note  $\|(y, f)\|_Y$  la norme associée à ce produit scalaire.

Pour tout  $\varepsilon > 0$  on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{minimiser } J_\varepsilon(y, f) = \frac{1}{2} \|y - y_{obs}\|_{L^2(q_T)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2, \\ \text{sous la contrainte } (y, f) \in W \end{cases} \quad (3.23)$$

où  $W$  est l'espace fermé de  $Y$  défini par  $W = \{(y, f) \in Y; Ly - f = 0 \text{ dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}$  et muni de la norme de  $Y$ . Plus précisément,

$$\|(y, f)\|_W = \sqrt{\|y\|_{L^2(q_T)}^2 + \varepsilon \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2}, \quad \forall (y, f) \in W.$$

Le problème de minimisation (3.23) est bien posé : la fonctionnelle  $J_\varepsilon$  est continue sur  $W$ , est strictement convexe et  $J_\varepsilon(y, f) \rightarrow +\infty$  quand  $\|(y, f)\|_W \rightarrow +\infty$ . Noter que la solution de (3.23) dépend de  $\varepsilon$  mais ne dépend pas de  $\eta$ . Si  $\varepsilon = 0$  la fonctionnelle  $J_\varepsilon$  est seulement convexe, donc il n'y a pas unicité du minimum. Le terme en  $\varepsilon$  peut être vu comme un terme de pénalisation pour obtenir  $y - y_{\text{obs}}$  petit sur  $q_T$  et en même temps  $f$  de norme minimale dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .

Procédant de la même façon que dans la Section 3.1.1, on considère la formulation mixte suivante : trouver  $((y_\varepsilon, f_\varepsilon), \lambda_\varepsilon) \in Y \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  solution de

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_\varepsilon((y_\varepsilon, f_\varepsilon), (\bar{y}, \bar{f})) + \mathfrak{b}((\bar{y}, \bar{f}), \lambda_\varepsilon) = \ell(\bar{y}, \bar{f}), & \forall (\bar{y}, \bar{f}) \in Y \\ \mathfrak{b}((y_\varepsilon, f_\varepsilon), \bar{\lambda}) = 0, & \forall \bar{\lambda} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{cases} \quad (3.24)$$

où

$$\mathfrak{a}_\varepsilon : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{a}_\varepsilon((y, f), (\bar{y}, \bar{f})) = \iint_{q_T} y \bar{y} \, dx dt + \varepsilon \langle f, \bar{f} \rangle_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}, \quad (3.25)$$

$$\mathfrak{b} : Y \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{b}((y, f), \lambda) = \int_0^T \langle \lambda(t), Ly(t) - f(t) \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} dt, \quad (3.26)$$

$$\ell : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell(y, f) = \iint_{q_T} y_{\text{obs}} y \, dx dt. \quad (3.27)$$

Comme dans la situation quand le terme source était connu (Section 3.1.1), on a le résultat suivant :

**Théorème 3.7.** *On suppose l'Hypothèse 3.1 vérifiée. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées :*

1. *La formulation mixte (3.24) est bien posée.*
2. *L'unique solution  $((y_\varepsilon, f_\varepsilon), \lambda_\varepsilon) \in Y \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  de (3.24) est l'unique point selle du Lagrangien  $\mathcal{L}_\varepsilon : Y \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$  défini par*

$$\mathcal{L}_\varepsilon((y, f), \lambda) = \frac{1}{2} \mathfrak{a}_\varepsilon((y, f), (y, f)) + \mathfrak{b}((y, f), \lambda) - \ell(y, f).$$

*De plus le couple  $(y_\varepsilon, f_\varepsilon)$  est la solution de (3.23).*

3. *On a les estimations suivantes :*

$$\|(y_\varepsilon, f_\varepsilon)\|_Y = \left( \|y_\varepsilon\|_{L^2(q_T)}^2 + \varepsilon \|f_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \right)^{1/2} \leq \|y_{\text{obs}}\|_{L^2(q_T)} \quad (3.28)$$

et

$$\|\lambda_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \leq 2\sqrt{C_{\Omega, T} + \eta} \|y_{\text{obs}}\|_{L^2(q_T)} \quad (3.29)$$

pour une certaine constante  $C_{\Omega, T} > 0$ .

Comme d'habitude, pour démontrer que la formulation mixte (3.24) est bien posée il faut vérifier que les formes bilinéaires  $\mathfrak{a}_\varepsilon$  et  $\mathfrak{b}$  sont continues, que  $\mathfrak{a}_\varepsilon$  est coercive sur le noyau de  $\mathfrak{b}$  ainsi que la condition *inf-sup*. En fait, on démontre que la condition *inf-sup* a lieu uniformément par rapport à  $\varepsilon$ , tandis que la constante de coercivité de  $\mathfrak{a}_\varepsilon$  n'est pas uniforme.

Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $y_{\text{obs}} \in L^2(q_T)$ , la méthode proposée permet de retrouver un couple  $(y_\varepsilon, f_\varepsilon)$  tel que  $Ly_\varepsilon = f_\varepsilon$  dans  $Q_T$  et  $y_\varepsilon$  proche de  $y_{\text{obs}}$  dans  $q_T$ . Comme pour  $\varepsilon = 0$  on n'a plus l'unicité de la solution de (3.23), la suite  $(y_\varepsilon, f_\varepsilon)$  peut diverger quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

On peut associer à la formulation mixte (3.24) une formulation mixte stabilisée. Ainsi, nous n'avons plus à démontrer une condition *inf-sup*, cela étant très intéressant pour l'approximation numérique. On peut également augmenter le Lagrangien et, donc, considérer le Lagrangien  $\mathcal{L}_{\varepsilon, r}$  défini pour  $r > 0$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varepsilon, r}((y, f), \lambda) &= \frac{1}{2} \mathfrak{a}_{\varepsilon, r}((y, f), (y, f)) + \mathfrak{b}(y, \lambda) - \ell(y, f), \\ \mathfrak{a}_{\varepsilon, r}((y, f), (y, f)) &= \mathfrak{a}_\varepsilon((y, f), (y, f)) + r \|Ly - f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

### 3.1.3 Analyse numérique

Dans cette sous-section nous donnons quelques résultats concernant l'approximation numérique des formulations mixtes considérées.

#### Approximation numérique de la formulation mixte (3.12)

Soit  $Z_h$  et  $\Lambda_h$  deux espaces de dimension finie tels que  $Z_h \subset Z$  et  $\Lambda_h \subset L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  pour tout  $h > 0$ . On considère donc le problème suivant : trouver  $(y_h, \lambda_h) \in Z_h \times \Lambda_h$  solution de

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_r(y_h, \bar{y}_h) + \mathfrak{b}(\bar{y}_h, \lambda_h) &= \ell(\bar{y}_h), & \forall \bar{y}_h \in Z_h \\ \mathfrak{b}(y_h, \bar{\lambda}_h) &= 0, & \forall \bar{\lambda}_h \in \Lambda_h. \end{cases} \quad (3.30)$$

Le fait que (3.30) est bien posé découle de deux propriétés :

- le coercivité de la forme  $\mathfrak{a}_r$  sur l'ensemble

$$\mathcal{N}_h(\mathfrak{b}) = \{y_h \in Z_h; \mathfrak{b}(y_h, \lambda_h) = 0 \forall \lambda_h \in \Lambda_h\}.$$

Cette propriété est une conséquence du fait que  $\mathfrak{a}_r$  est coercive sur tout l'espace  $Z$ .

- la condition *inf-sup* : pour tout  $h$

$$0 < \delta_h = \inf_{\lambda_h \in \Lambda_h} \sup_{y_h \in Z_h} \frac{\mathfrak{b}(y_h, \lambda_h)}{\|\lambda_h\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \|y_h\|_Z}. \quad (3.31)$$

On suppose donc cette condition satisfaite, ainsi pour tout  $h > 0$ , la formulation mixte discrète possède une unique solution.

De la théorie classique de l'approximation des problèmes de point selle, on peut obtenir les estimations suivantes :

**Proposition 3.8.** *Soit  $h > 0$ . Soit  $(y, \lambda)$  et  $(y_h, \lambda_h)$  les solutions de (3.12) et de (3.30), respectivement. Soit  $\delta_h$  la constante de l'inégalité inf-sup discrète (3.31). Alors,*

$$\|y - y_h\|_Z \leq 2 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\eta} \delta_h} \right) d(y, Z_h) + \frac{1}{\sqrt{\eta}} d(\lambda, \Lambda_h), \quad (3.32)$$

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{\eta} \delta_h} \right) \frac{1}{\delta_h} d(y, Z_h) + \frac{3}{\sqrt{\eta} \delta_h} d(\lambda, \Lambda_h) \quad (3.33)$$

où  $d(\lambda, \Lambda_h) = \inf_{\lambda_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}$  et

$$\begin{aligned} d(y, Z_h) &= \inf_{y_h \in Z_h} \|y - y_h\|_Z \\ &= \inf_{y_h \in Z_h} \left( \|y - y_h\|_{L^2(Q_T)}^2 + \eta \|L(y - y_h)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

**Remarque 3.9.** *Si le paramètre d'augmentation  $r$  est nul, la formulation mixte (3.30) n'est pas bien posée. Effectivement,  $\mathfrak{a}_{r=0}$  n'est pas coercive sur le noyau discret de  $\mathfrak{b}$  : l'égalité  $\mathfrak{b}(y_h, \lambda_h) = 0$  pour tout  $\lambda_h \in \Lambda_h$  n'implique pas  $Ly_h = 0$ . Le terme  $r \|Ly_h\|$  apparaissant dans le Lagrangien  $\mathcal{L}_r$  peut être, donc, compris comme un terme de stabilisation.*

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation du  $Q_T$ . Pour construire l'espace  $Z_h$  nous allons utiliser les éléments finis de classe  $C^1$  de Bogner-Fox-Schmit (BFS) ou encore les éléments finis de Hsieh-Clough-Tocher (HCT). L'espace  $\Lambda_h$  sera l'espace d'éléments finis  $P_1$  sur le maillage  $\mathcal{T}_h$ .

Pour le cas  $N = 1$  (donc pour une équation des ondes uni-dimensionnelle) on peut démontrer le résultat suivant :

**Proposition 3.10.** *Soit  $h > 0$  et  $k \in \{1, 2\}$ . Soient  $(y, \lambda)$  et  $(y_h, \lambda_h)$  les solutions de (3.12) et de (3.30), respectivement. Alors, si  $(y, \lambda) \in H^{k+2}(Q_T) \times H^k(Q_T)$ , il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  indépendantes de  $h$  et telles que*

$$\|y - y_h\|_Z \leq K_1 \frac{h^{k-1}}{\sqrt{\eta}} \left( \left( \sqrt{\eta} + \frac{1}{\delta_h} \right) (h^3 + \sqrt{\eta}h) + 1 \right), \quad (3.34)$$

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq K_2 \frac{h^{k-1}}{\sqrt{\eta}\delta_h} \left( \left( \sqrt{\eta} + \frac{1}{\delta_h} \right) (h^3 + \sqrt{\eta}h) + 1 \right). \quad (3.35)$$

Pour démontrer une estimation de la vitesse de convergence de  $y_h$  dans l'espace  $L^2(Q_T)$  on utilise le fait  $y - y_h$  est solution de

$$\begin{cases} L(y - y_h) = -Ly_h & \text{dans } Q_T \\ ((y - y_h), (y - y_h)_t)(0) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \\ y - y_h = 0, & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

Ensuite, à l'aide de l'inégalité (3.11) on déduit

$$\|y - y_h\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C(C_{\Omega,T}, C_{obs})(\|y - y_h\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|Ly_h\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2)$$

et, donc,

$$\|y - y_h\|_{L^2(Q_T)} \leq C(C_{\Omega,T}, C_{obs}) \max\left(1, \frac{2}{\sqrt{\eta}}\right) \|y - y_h\|_Z. \quad (3.36)$$

Finalement, en couplant l'inégalité (3.36) et la Proposition 3.10 on obtient le résultat suivant (toujours pour les éléments BFS et  $N = 1$ ) :

**Théorème 3.11.** *Supposons l'Hypothèse 3.1 vérifiée. Soit  $h > 0$  et  $k \in \{1, 2\}$ . Soient  $(y, \lambda)$  et  $(y_h, \lambda_h)$  les solutions de (3.12) et de (3.30), respectivement. Alors, si  $(y, \lambda) \in H^{k+2}(Q_T) \times H^k(Q_T)$ , il existe une constante positive  $K$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|y - y_h\|_{L^2(Q_T)} \leq K \max\left(1, \frac{2}{\sqrt{\eta}}\right) \frac{h^{k-1}}{\sqrt{\eta}} \left( \left( \sqrt{\eta} + \frac{1}{\delta_h} \right) (h^3 + \sqrt{\eta}h) + 1 \right). \quad (3.37)$$

**Remarque 3.12.** *L'estimation (3.37) n'est pas complètement satisfaisante : si la constante  $\delta_h$  tend vers 0 quand  $h \rightarrow 0$  l'inégalité dégénère. Vue la structure compliquée de l'espace éléments finis  $Z_h$  et de la contrainte  $Ly = 0$ , démontrer que la constante  $\delta_h$  est uniformément minorée par un  $\delta > 0$  est un problème difficile. Néanmoins, comme dans le Chapitre 1, on peut estimer numériquement cette constante. Les simulations numériques montrent que  $\delta_h$  se comporte comme  $C_r/\sqrt{r}$ , avec  $C_r$  une constante indépendante de  $h$ .*

Des résultats similaires s'obtient en prenant  $Z_h$  l'espace HCT réduit.

### Approximation numérique de la formulation mixte stabilisée (3.20)

On considère maintenant l'approximation de la formulation mixte stabilisée (3.20). On rappelle que l'avantage principal de cette formulation est le fait qu'elle ne nécessite que la condition *inf-sup* soit vérifiée. Soit  $h > 0$  et  $Z_h$  et  $\tilde{\Lambda}_h$  deux espaces de dimension finie tels que

$$Z_h \subset Z, \quad \tilde{\Lambda}_h \subset \Lambda, \quad \forall h > 0.$$

On cherche donc  $(y_h, \lambda_h) \in Z_h \times \tilde{\Lambda}_h$  solution de

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_{r,\alpha}(y_h, \bar{y}_h) + \mathfrak{b}_\alpha(\bar{y}_h, \lambda_h) = \ell_{1,\alpha}(\bar{y}_h), & \forall \bar{y}_h \in Z_h \\ \mathfrak{b}_\alpha(y_h, \bar{\lambda}_h) - \mathfrak{c}_\alpha(\lambda_h, \bar{\lambda}_h) = \ell_{2,\alpha}(\bar{\lambda}_h), & \forall \bar{\lambda}_h \in \tilde{\Lambda}_h, \end{cases} \quad (3.38)$$

On continue de prendre  $Z_h$  l'espace d'éléments finis BFS (ou l'espace HCT réduit) et  $\tilde{\Lambda}_h$  donné par

$$\tilde{\Lambda}_h = \{z \in Z_h; \lambda(\cdot, 0) = \lambda_t(\cdot, 0) = 0\}. \quad (3.39)$$

Le résultat principal concernant les solutions de cette formulation mixte (avec  $Z_h$  étant choisi comme l'espace d'éléments finis BFS) est le suivant :

**Théorème 3.13.** *Supposons l'Hypothèse 3.1 vérifiée. Soit  $h > 0$  et  $k \in \{1, 2\}$ . Soit  $(y, \lambda)$  et  $(y_h, \lambda_h)$  les solutions des formulations mixtes (3.20) et de (3.38), respectivement. Si la solution  $(y, \lambda) \in H^{k+2}(Q_T) \times H^k(Q_T)$ , alors il existe une constante positive  $K$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|y - y_h\|_{L^2(Q_T)} \leq K \frac{h^k}{\sqrt{\eta}}. \quad (3.40)$$

### 3.1.4 Quelques simulations numériques

Dans cette sous-section nous présenterons brièvement quelques exemples numériques correspondant à la résolution des formulations mixtes (3.30) et (3.38) pour  $N = 1$  et  $N = 2$ .

#### Résultats pour $N = 1$

Pour vérifier la convergence de la méthode on considère quelques solutions *explicitites* de (3.1) et on génère des observations à partir de ces solutions. Plus précisément, on considère la donnée initiale  $(y_0, y_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$  :

$$\begin{cases} y_0(x) = 16x^2(1-x)^2 \\ y_1(x) = (3x - 4x^3)\mathbb{1}_{0,0.5}(x) + (4x^3 - 12x^2 + 9x - 1)\mathbb{1}_{0.5,1}(x) \end{cases} \quad (x \in (0, 1)) \quad (3.41)$$

et le terme source  $f = 0$ . La solution de (3.1) avec  $a \equiv 1$  et  $b \equiv 0$  est donnée par

$$y(x, y) = \sum_{k>0} \left( a_k \cos(k\pi t) + \frac{b_k}{k\pi} \sin(k\pi t) \right) \sqrt{2} \sin(k\pi x), \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

où

$$a_k = \frac{32\sqrt{2}(\pi^2 k^2 - 12)}{\pi^5 k^5} \left( (-1)^k - 1 \right), \quad b_k = \frac{48\sqrt{2} \sin(\pi k/2)}{\pi^4 k^4}. \quad (3.42)$$

On considère également des données initiales moins régulières  $(y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  :

$$y_0(x) = 1 - |2x - 1|, \quad y_1(x) = \mathbb{1}_{1/3, 2/3}(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad (3.43)$$

avec les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  correspondants donnés par :

$$a_k = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2 k^2} \sin(\pi k/2), \quad b_k = \frac{1}{\pi k} (\cos(\pi k/3) - \cos(2\pi k/3)) \quad (k \in \mathbb{N}^*). \quad (3.44)$$

Le domaine d'observation peut être cylindrique ou non cylindrique mais il doit vérifier la condition d'optique géométrique.

En prenant  $q_T = (0.1, 0.3) \times (0, 2)$  et les données initiales données par (3.41), les estimations suivantes sont obtenues en utilisant les éléments finis BFS pour  $Z_h$  :

$$\frac{\|y - y_h\|_{L^2(Q_T)}}{\|y\|_{L^2(Q_T)}} = \mathcal{O}(h^{1.03}), \quad \frac{\|y - y_h\|_{L^2(q_T)}}{\|y\|_{L^2(q_T)}} = \mathcal{O}(h^{0.98}), \quad \|\lambda_h\|_{L^2(Q_T)} = \mathcal{O}(h^{0.98}).$$

Comme  $y_{\text{obs}}$  est calculé comme la restriction à  $q_T$  d'une solution de (3.1), la suite  $\lambda_h$  converge vers 0 quand  $h \rightarrow 0$ . La norme  $L^2$  de  $Ly_h$  converge également à 0 quand  $h \rightarrow 0$  :

$$\|Ly_h\|_{L^2(Q_T)} = \mathcal{O}(h^{0.71}).$$

Nous obtenons des résultats similaires, éventuellement avec des taux de convergence plus bas, pour la donnée initiale (3.43).

La solution de référence  $y$  correspondant aux données initiales (3.43), la solution reconstruite ( $y_h$ ) à partir de l'observation sur le domaine  $q_T$  non cylindrique, ainsi que le domaine  $q_T$  utilisé, sont affichés dans la Figure 3.1.

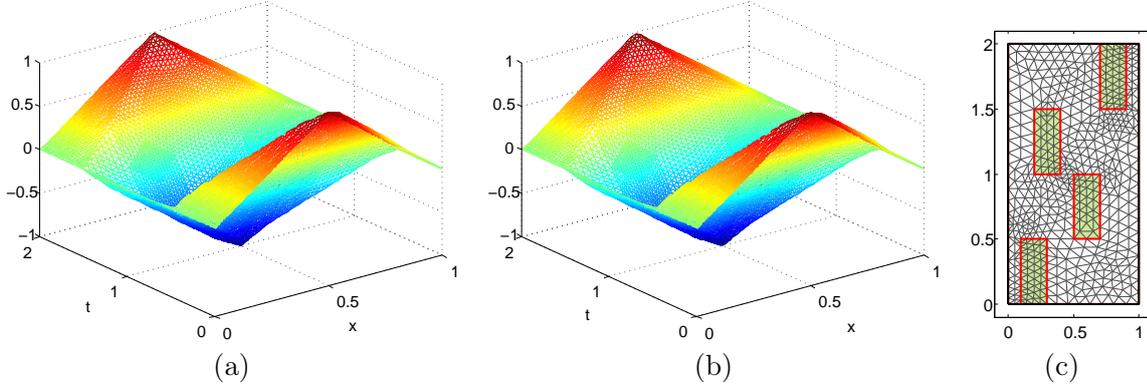


FIGURE 3.1 – Résultats pour les données initiales (3.43) avec domaine d'observation non-cylindrique. (a) Solution de référence ( $y$ ). (b) Solution reconstruite ( $y_h$ ). (c) Domaine  $q_T$ .

### Résultats pour $N = 2$

La méthode proposée s'applique sans efforts supplémentaires très importants en dimension 2 de l'espace dans le cas d'une observations localisée dans un domaine  $q_T$  cylindrique.

Pour définir la formulation mixte (3.30) on considère un maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $Q_T$  formé par des prismes triangulaires. Ce maillage est obtenu par l'extrapolation en temps d'un maillage triangulaire de  $\Omega$ . Dans la Figure 3.2 on illustre un exemple de  $\Omega$ ,  $\omega$  et du maillage associé. L'extrapolation en temps est faite avec un pas constant, c'est-à-dire, tout les éléments prismatiques ont la même hauteur.

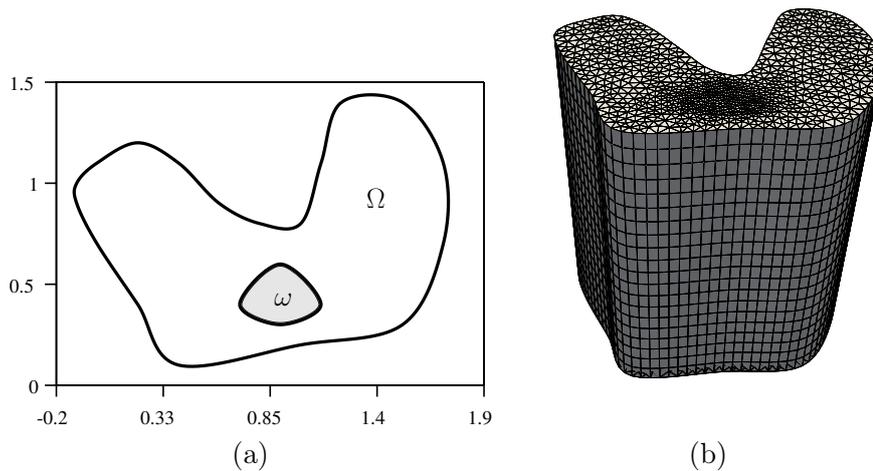


FIGURE 3.2 – (a) Exemple de domaines  $\Omega$  et  $\omega$ . (b) Exemple de maillage du domaine  $Q_T$ .

On considère l'espace d'éléments finis  $Z_h$  défini par

$$Z_h = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_h = \psi(x_1, x_2)\theta(t) \in C^1(\overline{Q_T}) \\ \varphi_h = 0 \text{ on } \Sigma_T \end{array} \middle| \begin{array}{l} \psi|_{K_{x_1x_2}} \in \mathbb{P}(K_{xy}), \theta|_{K_t} \in \mathbb{Q}(K_t) \\ \text{pour tout } K = K_{x_1x_2} \times K_t \in \mathcal{T}_h. \end{array} \right\}, \quad (3.45)$$

où  $\mathbb{P}(K_{x_1x_2})$  est l'espace des fonctions correspondant aux éléments finis *Hsieh-Clough-Tocher* (HCT);  $\mathbb{Q}(K_t)$  est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 sur les intervalles  $K_t$  de la forme  $[t_j, t_{j+1}]$  définis par leur valeurs et les valeurs des leurs dérivées aux points  $t_j$  et  $t_{j+1}$ . Autrement dit,  $Z_h$  est l'espace d'éléments finis obtenu comme produit tensoriel entre les éléments finis HCT réduits et l'espace des éléments finis cubiques d'Hermitte. Sur chaque élément  $K = K_{x_1x_2} \times K_t$  du maillage, la fonction  $\varphi_h$  est déterminée seulement par les valeurs suivantes :

$$\Sigma_K = \{\varphi(a_i), \varphi_{x_1}(a_i), \varphi_{x_2}(a_i), \varphi_t(a_i), \varphi_{x_1,t}(a_i), \varphi_{x_2,t}(a_i), i = 1, \dots, 6\}$$

où  $a_i$  sont les sommets de l'élément  $K$ . Donc, le nombre de degrés de liberté sur chaque élément est  $\dim \Sigma_K = 36$ .

Un exemple de donnée initiale utilisée pour générer les observations et la donnée initiale reconstruite à partir de ces observations à l'aide de notre méthode est illustré dans la Figure 3.3.

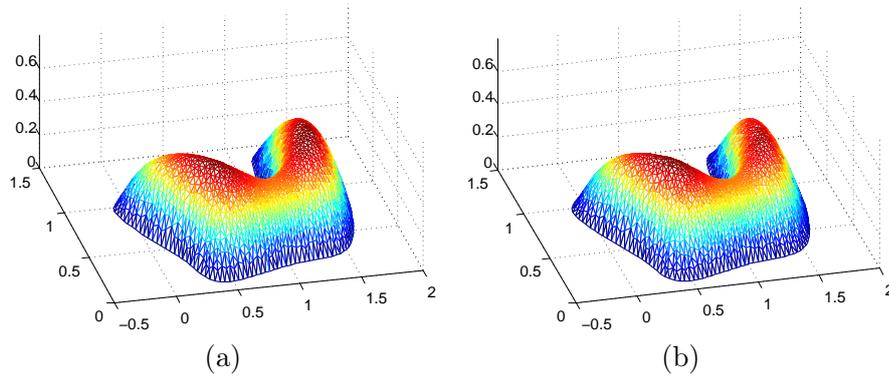


FIGURE 3.3 – (a) Donnée initiale utilisée pour générer  $y_{\text{obs}}$ . (b) Donnée initiale reconstruite à partir de la connaissance de  $y_{\text{obs}}$ .

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ( $N = 2$ ), la version courante de notre code de calcul ne traite pas des domaines d'observation  $q_T$  non-cylindriques. Pour cela il faudra, soit considérer des éléments finis de classe  $C^1$  sur des maillages formés par des tétraèdres, soit prendre en compte dans le code de calcul le fait que la frontière du domaine  $q_T$  n'est pas maillée de manière exacte. Une autre possibilité, serait d'écrire et d'approcher numériquement de manière différente la formulation mixte pour s'affranchir de l'utilisation des éléments finis  $C^1$ .

## 3.2 Observation frontière

Nous étudions maintenant le cas des observations frontière. Plus précisément, soit  $\Gamma$  une partie ouverte et non-vide de la frontière  $\partial\Omega$  qu'on suppose suffisamment régulière, et soit  $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T) \subset \Sigma_T$ .

Nous considérons deux problèmes inverses associés à l'équation (3.1). Le premier est le suivant : étant donné un terme source  $f \in L^2(Q_T)$ , à partir d'une observation  $y_{\nu, \text{obs}}$  de la dérivée normale sur la partie de la frontière  $\Gamma_T$ , on veut retrouver une solution  $y$  de (3.1) telle que sa dérivée normale  $\partial_\nu y$  coïncide avec l'observation  $y_{\nu, \text{obs}}$  sur  $\Gamma_T$ . Supposant  $y_{\nu, \text{obs}}$  dans  $L^2(\Gamma_T)$ , on définit l'opérateur  $P : Z \rightarrow L^2(Q_T) \times L^2(\Gamma_T)$  par  $Py = (Ly, a(x)\partial_\nu y|_{\Gamma_T})$  où  $Z$  est l'espace

$$Z = \{y : y \in C([0, T], H_0^1(\Omega) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega))), Ly \in L^2(Q_T)\}. \quad (3.46)$$

Remarquer que si  $y \in Z$  alors  $\partial_\nu y \in L^2(\Sigma_T)$  (voir, par exemple, [Lio88, Chapitre 1]). De manière formelle, le premier problème inverse est, donc, le suivant :

$$\text{trouver } y \in Z \text{ solution de } Py = (f, a(x)y_{\nu, \text{obs}}). \quad (3.47)$$

Si une propriété de continuation unique est vérifiée pour l'équation des ondes (3.1) et  $y_{\nu, \text{obs}}$  est la restriction à  $\Gamma_T$  de la dérivée normale d'une solution de l'équation (3.1), alors le problème inverse (3.47) est bien posé. Néanmoins, dans la pratique il est inévitable que l'observation  $y_{\nu, \text{obs}}$  ne soit pas affectée par des erreurs de mesure. On relaxe donc le problème (3.47) :

$$\begin{cases} \text{minimiser sur } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ la fonctionnelle } J(y_0, y_1) = \|a(x)(\partial_\nu y - y_{\nu, \text{obs}})\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 \\ \text{où } y \text{ est solution de (3.1).} \end{cases} \quad (3.48)$$

Pour éviter les problèmes numériques dus à la stratégie classique qui consiste d'abord à tout discrétiser et ensuite à minimiser la fonctionnelle  $J$ , nous mettons en place une méthode similaire à la méthode proposée dans la Section 3.1 pour le cas d'une observation distribuée. Plus précisément, nous allons considérer les conditions d'optimalité associées à (3.48) et leur résolution numérique.

Le deuxième problème inverse considéré dans ce chapitre est le suivant : supposant que la donnée initiale  $(y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  est connue, à partir de l'observation  $y_{\nu, \text{obs}}$  on désire reconstruire la solution  $y$  ainsi que la composante spatiale  $\mu$  du terme source  $f(x, t) = \sigma(t)\mu(x)$  :

$$\text{trouver } (y, \mu) \in Z \times H^{-1}(\Omega) \text{ solution de } Py = (\sigma\mu, a(x)y_{\nu, \text{obs}}), \quad (3.49)$$

où  $(y, f)$  est solution de (3.1) et  $\sigma \in C^1([0, T])$  est une fonction donnée. Si  $\sigma(0) \neq 0$ , à l'aide d'un résultat de stabilité de Yamamoto et Zhang [YZ01] et de la condition d'optique géométrique, on obtient l'unicité des solutions de (3.49). Nous pouvons ainsi appliquer le même genre de stratégie pour les deux problèmes inverses (3.47) et (3.49).

### 3.2.1 Une reformulation mixte du problème inverse (3.47)

Pour cette sous-section on prendra, sans restreindre la généralité, un terme source  $f$  nul. On rappelle également, qu'il existe une constante  $C_{\Omega, T} > 0$  telle que pour tout  $y \in Z$  on a

$$\|a(x)\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 \leq C_{\Omega, T} \left( \|(y(\cdot, 0), y_t(\cdot, 0))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 + \|Ly\|_{L^2(Q_T)}^2 \right). \quad (3.50)$$

On formule l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.14.** *Il existe une constante  $C_{\text{obs}}$  telle que l'estimation suivante est vérifiée :*

$$\|(y(\cdot, 0), y_t(\cdot, 0))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq C_{\text{obs}} \left( \|a(x)\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 + \|Ly\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) \quad (y \in Z). \quad (3.51)$$

L'inégalité (3.51) est une inégalité d'observabilité généralisée, et, elle est satisfaite, par exemple, pour l'équation des ondes à coefficients constants si le temps d'observation  $T$  est suffisamment long.

Sous cette hypothèse, pour tout  $\eta > 0$  on définit la forme bilinéaire

$$\langle y, \bar{y} \rangle = \langle a\partial_\nu y, a\partial_\nu \bar{y} \rangle_{L^2(\Gamma_T)} + \eta \langle Ly, L\bar{y} \rangle_{L^2(Q_T)} \quad (y, \bar{y} \in Z) \quad (3.52)$$

et la norme associée  $\|y\|_Z$ . Une conséquence de l'inégalité (3.51) est le résultat suivant :

**Lemme 3.15.** *Avec les notations précédentes et sous l'hypothèse (3.51), l'espace  $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle_Z)$  est un espace de Hilbert. De plus, il existe une constante  $C$  telle que l'estimation suivante soit vérifiée :*

$$\|y\|_{L^2(Q_T)} \leq C \sqrt{\frac{1 + (1 + \eta)C_{\text{obs}}}{\eta}} \|y\|_Z \quad (y \in Z). \quad (3.53)$$

Comme dans le cas distribué, on relaxe la contrainte de (3.48) : pour tout  $r > 0$  on considère le problème de minimisation suivant

$$\begin{cases} \text{minimiser } J_r(y) = \frac{1}{2} \|a(x)(\partial_\nu y - y_{\nu, \text{obs}})\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 + \frac{r}{2} \|Ly\|_{L^2(Q_T)}^2, \\ \text{sous la contrainte } y \in Z. \end{cases} \quad (3.54)$$

On considère également la formulation mixte suivante :

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_r(y, \bar{y}) + \mathfrak{b}(\bar{y}, \lambda) = \ell(\bar{y}), & \forall \bar{y} \in Z \\ \mathfrak{b}(y, \bar{\lambda}) = 0, & \forall \bar{\lambda} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{cases} \quad (3.55)$$

où

$$\mathfrak{a}_r : Z \times Z \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{a}_r(y, \bar{y}) = \langle a \partial_\nu y, a \partial_\nu \bar{y} \rangle_{L^2(\Gamma_T)} + r \langle Ly, L\bar{y} \rangle_{L^2(Q_T)}, \quad (3.56)$$

$$\mathfrak{b} : Z \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{b}(y, \lambda) = \langle \lambda, Ly \rangle_{L^2(Q_T)}, \quad (3.57)$$

$$\ell : Z \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell(y) = \langle ay_{\nu, \text{obs}}, a \partial_\nu y \rangle_{L^2(\Gamma_T)}. \quad (3.58)$$

Le problème (3.55) est le système d'optimalité de (3.54),  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange qui gère la contrainte  $Ly = 0$  et  $r$  est un paramètre d'augmentation. On obtient le résultat suivant :

**Théorème 3.16.** *Supposons l'Hypothèse 3.14 vérifiée. Alors*

1. *La formulation mixte (3.55) est bien posée.*
2. *L'unique solution  $(y, \lambda) \in Z \times L^2(Q_T)$  de la formulation mixte (3.55) est l'unique point selle du Lagrangien  $\mathcal{L}_r : Z \times L^2(Q_T) \rightarrow \mathbb{R}$  défini par  $\mathcal{L}_r(y, \lambda) = \frac{1}{2} \mathfrak{a}_r(y, y) + \mathfrak{b}(y, \lambda) - \ell(y)$ .*
3. *La solution  $(y, \lambda) \in Z \times L^2(Q_T)$  vérifie les estimations*

$$\|y\|_Z \leq \|a(x)y_{\nu, \text{obs}}\|_{L^2(\Gamma_T)}, \quad \|\lambda\|_{L^2(Q_T)} \leq 2\sqrt{C_{\Omega, T} + \eta} \|a(x)y_{\nu, \text{obs}}\|_{L^2(\Gamma_T)}.$$

En suivant les idées du cas de l'observation distribuée, on peut considérer une formulation mixte stabilisée. Pour cela, on définit un nouveau espace

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega)), \\ L\lambda \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \lambda(\cdot, 0) = \lambda_t(\cdot, 0) = 0, \lambda|_{\Gamma_T} \in L^2(\Gamma_T) \end{array} \right\}$$

muni du produit scalaire  $\langle \lambda, \bar{\lambda} \rangle_\Lambda = \langle L\lambda, L\bar{\lambda} \rangle_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} + \langle a\lambda, a\bar{\lambda} \rangle_{L^2(\Gamma_T)}$ . Utilisant le fait que

$$\|\lambda\|_{L^2(Q_T)} \leq C_{\Omega, T} \sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle_\Lambda} \quad (\lambda \in \Lambda),$$

l'espace  $\Lambda$  est un espace de Hilbert. Contrairement au Lemme 3.15, l'Hypothèse 3.14 n'est pas nécessaire pour montrer que  $\|\cdot\|_\Lambda$  est une norme, cela étant une conséquence de la continuité de la dépendance de la solution de l'équation des ondes par rapport aux données. De manière similaire au cas distribué, les solutions des formulations mixtes stabilisée et non-stabilisée coïncident.

### 3.2.2 Une reformulation mixte du problème inverse (3.49)

On considère maintenant le problème inverse (3.49) de la reconstruction simultanée de l'état et du terme source dans (3.1) à partir de l'observation  $y_{\nu, \text{obs}}$ . On suppose que la donnée initiale  $(y_0, y_1)$  est connue. Sans autres hypothèses sur  $f$  le problème inverse (3.49) est mal posé au sens qu'il n'a pas de solution unique.

En conséquence, on suppose que  $f(x, t) = \sigma(t)\mu(x)$  avec  $\sigma \in C([0, T])$ ,  $\sigma(0) \neq 0$  et  $\mu \in H^{-1}(\Omega)$ . Dans ce cadre, on peut appliquer [YZ01] : ainsi, il existe une constante  $C > 0$  telle que toute solution  $y = y(\mu)$  de (3.1) correspondant à  $a \equiv 1$ ,  $b \equiv 0$  et  $y_0 = y_1 \equiv 0$ , vérifie

$$C^{-1} \|\mu\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_T)} \leq C \|\mu\|_{H^{-1}(\Omega)} \quad (\mu \in H^{-1}(\Omega)).$$

Ce résultat de stabilité donne l'unicité de la source correspondante à l'observation  $y_{\nu, \text{obs}}$ .

On relaxe le problème (3.49) :

$$\begin{cases} \text{minimiser } J(y, \mu) = \frac{1}{2} \|a(x)(\partial_\nu y - y_{\nu, \text{obs}})\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 + \frac{r}{2} \|Ly - \sigma\mu\|_{L^2(Q_T)}, \\ \text{sous la contrainte } (y, \mu) \in W, \end{cases} \quad (3.59)$$

où l'espace  $W$  est défini par

$$W = \left\{ (y, \mu); y \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega)), \mu \in H^{-1}(\Omega) \right\}.$$

Alors  $\partial_\nu y \in L^2(\Sigma_T)$  pour tout  $(y, \mu) \in W$ . On peut aussi vérifier que  $W$  est un espace de Hilbert pour la norme  $\|(y, \nu)\|_W = \|a(x)\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_T)}$  et que le problème (3.59) est bien posé.

Comme d'habitude, on considère une formulation mixte pour la prise en compte de la contrainte  $Ly - \sigma\mu = 0$  et on définit l'espace suivant

$$Y = \left\{ (y, \mu); y \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega)), \mu \in H^{-1}(\Omega) \right\}.$$

On fait l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.17.** *Il existe  $C_{\text{obs}}$  telle que l'estimation suivante soit satisfaite :*

$$\|\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C_{\text{obs}} (\|a(x)\partial_\nu y\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 + \|Ly - \sigma\mu\|_{L^2(Q_T)}^2), \quad \forall (y, \mu) \in Y.$$

Sous cette hypothèse, pour tout  $\eta > 0$  l'espace  $Y$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle (y, \mu), (\bar{y}, \bar{\mu}) \rangle_Y = \langle a\partial_\nu y, a\partial_\nu \bar{y} \rangle_{L^2(\Gamma_T)} + \eta \langle Ly - \sigma\mu, L\bar{y} - \sigma\bar{\mu} \rangle_{L^2(Q_T)}.$$

La formulation mixte s'écrit comme suit : pour tout  $r > 0$ , trouver  $((y, \mu), \lambda) \in Y \times L^2(Q_T)$  solution de

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_r((y, \mu), (\bar{y}, \bar{\mu})) + \mathfrak{b}((\bar{y}, \bar{\mu}), \lambda) = \ell((\bar{y}, \bar{\mu})), & \forall (\bar{y}, \bar{\mu}) \in Y \\ \mathfrak{b}((y, \mu), \bar{\lambda}) = 0, & \forall \bar{\lambda} \in L^2(Q_T), \end{cases} \quad (3.60)$$

où

$$\mathfrak{a}_r : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{a}_r((y, \mu), (\bar{y}, \bar{\mu})) = \langle a\partial_\nu y, a\partial_\nu \bar{y} \rangle_{L^2(\Gamma_T)} + r \langle Ly - \sigma\mu, L\bar{y} - \sigma\bar{\mu} \rangle_{L^2}, \quad (3.61)$$

$$\mathfrak{b} : Y \times L^2(Q_T) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{b}((y, \mu), \lambda) = \langle \lambda, Ly - \sigma\mu \rangle_{L^2}, \quad (3.62)$$

$$\ell : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell(y, \mu) = \langle ay_{\nu, \text{obs}}, a\partial_\nu y \rangle_{L^2(\Gamma_T)}. \quad (3.63)$$

Comme pour les autres formulations mixtes considérées dans ce mémoire, nous avons démontré que (3.60) est bien posée et l'unique solution de (3.60) est, en même temps, l'unique point selle d'un Lagrangien associé. Pour éviter la preuve d'une condition *inf-sup*, et, surtout de son équivalent discret, nous pouvons ajouter des termes stabilisants.

### 3.2.3 Quelques simulations numériques

L'idée principale que nous utilisons pour approcher numériquement les solutions des formulations mixtes (3.55) et (3.60) est la même que celle employée pour la Section 3.1.3, ou, encore, pour la Section 1.13 : nous considérons des sous-espaces de dimension finie des espaces  $Y$ ,  $Z$ ,  $L^2(Q_T)$ , etc. Plus précisément, on met en pratique une approximation conforme par la méthode des éléments finis. Nous avons à surmonter les mêmes difficultés techniques liées à l'utilisation des éléments finis de classe  $C^1$  en espace et en temps. Néanmoins, la base du code de calcul est la même pour toutes les simulations numériques des Chapitres 1 et 3.

Nous ne donnons pas ici le détail des résultats démontrés, en se contentant seulement de montrer quelques exemples de résultats que nous sommes capables d'obtenir dans le cas de l'observabilité frontière. Le lecteur désireux de plus de précisions pourra consulter la référence [CM16].

Un premier exemple que nous présentons c'est la reconstruction de la solution  $y_h$  de l'équation des ondes à coefficients constants, en dimension 1 de l'espace, à partir d'une observation frontière synthétisée à partir d'une solution exacte  $y$  associée aux données initiales

$$y_0(x) = 1 - |2x - 1|, \quad y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1}_{(1/3, 2/3)}(x) \quad (x \in (0, 1)) \quad (3.64)$$

et  $f \equiv 0$ ,  $T = 2$ . Dans la Figure 3.4 (gauche) on montre l'observation frontière  $y_{\nu, \text{obs}}$  générée pour ces données initiales. Dans le même figure, à droite, nous illustrons la vitesse de convergence des solutions numériques  $y_h$  de l'approximation de (3.55) vers la solution exacte  $y$ .

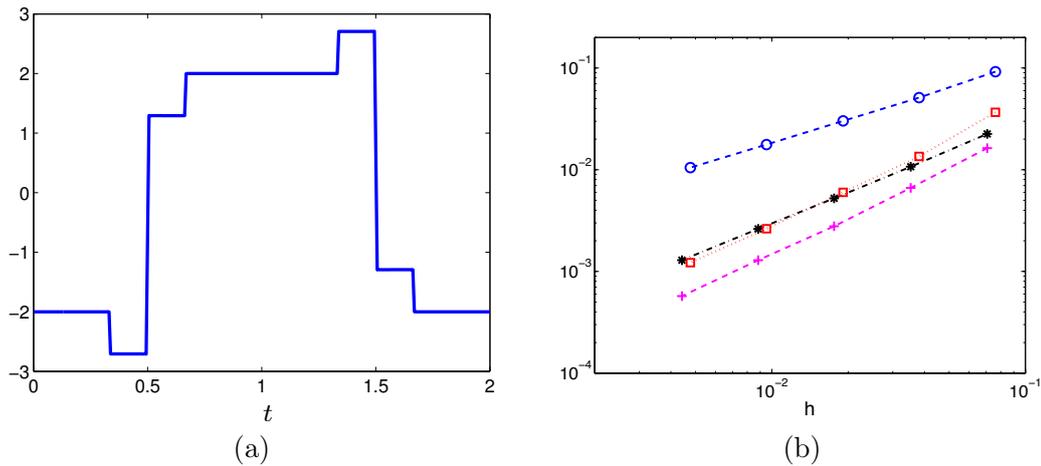


FIGURE 3.4 – (a) Observation  $y_{\nu, \text{obs}}$  associée à la donnée initiale (3.64) et  $f \equiv 0$ . (b) Erreur relative  $\|y - y_h\|_{L^2(Q_T)} / \|y\|_{L^2(Q_T)}$  pour une approximation utilisant les éléments finis BFS avec  $r = h^2$  (+) et  $r = 1$  (★) et les éléments finis HCT réduits avec  $r = h^2$  (□) et  $r = 1$  (○).

Pour la suite, nous montrons un résultat de simulation numérique pour la reconstruction d'un terme source, toujours pour l'équation des ondes unidimensionnelle à coefficients constants. Plus précisément on prend des données initiales nulles et on se propose de reconstruire la partie spatiale  $\mu$  d'un terme source  $f(x, t) = \sigma(t)\mu(x)$  à partir d'une observation  $y_{\nu, \text{obs}}$  générée à priori. On choisit donc  $\sigma(t) = 1 + t$ ,  $T = 2$  et

$$\mu(x) = \frac{x}{\theta} \mathbb{1}_{[0, \theta)}(x) + \frac{1-x}{1-\theta} \mathbb{1}_{[\theta, 1]}(x), \quad \text{avec } \theta = \frac{1}{3}. \quad (3.65)$$

Dans la Figure 3.5 on représente à gauche la fonction  $\mu$  (trait continu) et son approximation  $\mu_h$  (trait pointillé) et à droite l'erreur entre ses deux quantités.

D'autres expériences numériques ont été réalisées pour la reconstruction des solutions et la reconstruction des termes sources pour des équations des ondes deux dimensionnelles ou encore en perturbant les observations par un bruit blanc. Dans toutes les situations les résultats ont été satisfaisants : pour toutes les expériences numériques réalisées nous avons observé la convergence des reconstructions ; en particulier, le bruit présent dans les observations n'est pas augmenté par la résolution.

### 3.3 Conclusion et perspectives

Ce chapitre a été consacré aux problèmes inverses de la reconstruction de la solution, ou d'un terme source, pour des équations des ondes, à partir d'observations distribuées ou encore d'observations frontière. Les méthodes employées sont similaires aux méthodes utilisées dans le Chapitre 1 pour la contrôlabilité de l'équation des ondes. Notamment, on écrit le problème inverse

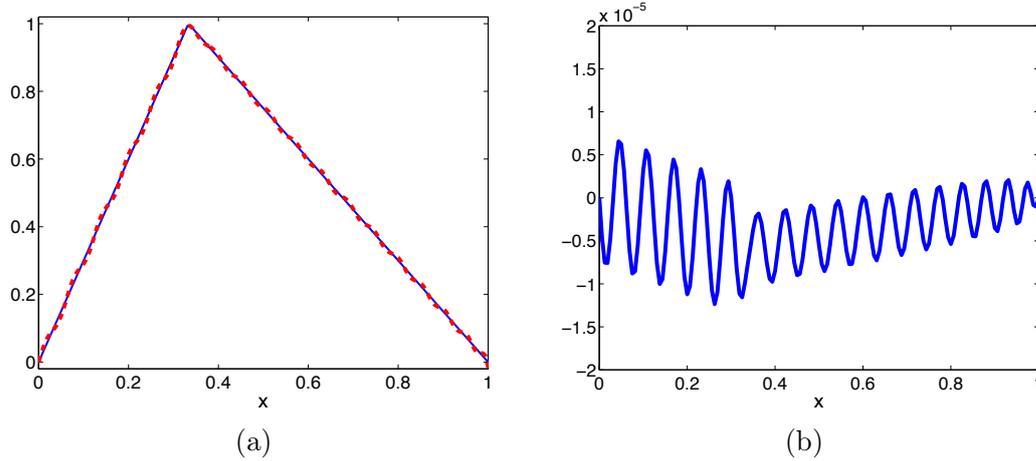


FIGURE 3.5 – (a) La fonction  $\mu$  donnée par (3.65) et son approximation  $\mu_h$  obtenue comme solution numérique de (3.60). (b) La quantité  $\frac{(-\Delta)^{-1}(\mu - \mu_h)}{\|(-\Delta)^{-1}\mu\|_{H^1_0}}$ .

comme un problème de minimisation sous contraintes, pour lequel, on écrit les conditions d’optimalité comme une formulation mixte. L’avantage de considérer une formulation mixte, est, comme dans le cas de la contrôlabilité, qu’on n’a pas à résoudre d’équations d’ondes discrètes, et, ainsi, on n’a pas à gérer les issues causées par l’apparition des hautes fréquences purement numériques. Néanmoins, il reste à vérifier une condition *inf-sup* discrète, qui doit avoir lieu uniformément par rapport au paramètre de discrétisation. Finalement, pour s’affranchir de la preuve du fait que la condition *inf-sup* est uniforme, on stabilise la formulation mixte et on considère une approximation numérique par des éléments finis conformes. Le prix à payer est que cette approximation conforme requiert que les éléments finis soient de classe  $C^1$ , ce qui est assez restrictif, surtout en dimension supérieure. Une première perspective de ces travaux sera donc de reformuler les problèmes de manière qu’on obtient des approximations convergentes pour des éléments finis de classe  $C^0$  : cela pourra être réalisée, par exemple, par la méthode proposée pour la contrôlabilité de l’équation des ondes dans [MM18] ou encore en considérant des approximations non-conformes [BFO19].

Une fois levée la restriction liée à l’utilisation des éléments finis réguliers, on pourra utiliser cette approche pour la résolution des problèmes inverses pour des équations des plaques, ou encore pour le système de l’élasticité linéaire.

Ce chapitre présente quelques résultats obtenus sur la convergence des observateurs pour des équations d'évolution aux dérivées partielles d'ordre deux en temps. Plus précisément, nous formulons les résultats dans un cadre abstrait qui couvre l'équation des ondes, le système de l'élasticité linéaire ou encore différents modèles de plaques. Les travaux présentés ici ont été commencés durant le stage post-doctoral que j'ai effectué pendant l'année 2010-2011 à INRIA Paris-Rocquencourt dans l'équipe MACS et ils ont fait l'objet de trois publications [CIM15; Cha+12; CCM12].

Dans l'article [CCM12] nous avons proposé l'utilisation des observations disponibles de l'état d'un système de type ondes pour contrôler les erreurs dues à la discrétisation numérique en temps. Plus précisément, nous avons adopté une stratégie inspirée de l'assimilation séquentielle des données, et qui consiste à corriger le système discret en utilisant la différence entre la solution et les observations. Cet article fait l'objet de la Section 4.1.

Dans un deuxième article [CIM15] nous avons proposé un schéma séquentiel d'assimilation des données, basé sur l'utilisation des observateurs de Luenberger, quand seulement des données partielles en temps sont disponibles. Pour utiliser ces données deux stratégies ont été analysées : la première consiste à assimiler les données seulement quand elles sont disponibles et la deuxième assimile les données qui ont été préalablement interpolées en temps. Pour traiter les problèmes dues à l'apparition des fréquences parasites quand on discrétise l'équation des ondes, un terme de viscosité numérique a été ajouté au schéma. Ce travail sera discuté dans la Section 4.2.

## 4.1 Améliorer la convergence des schémas numériques à l'aide des observateurs

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme associée. Soit un opérateur auto-adjoint  $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow \mathcal{H}$ , défini positif et à résolvantes compactes. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} w_{tt}(t) + A_0 w(t) = 0, & t > 0, \\ w(0) = w_0, \quad w_t(0) = w_1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Soit  $\mathcal{Z}$  un autre espace de Hilbert, et soit  $H_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0), \mathcal{Z})$ . On considère l'observation suivante :

$$z(t) = H_0 w(t). \quad (4.2)$$

**Définition 4.1.** *On dit que le système (4.1)- (4.2) est exactement observable en temps  $T > 0$  s'il existe  $K_T > 0$  telle que pour toute donnée initiale  $(w_0, w_1) \in \mathcal{D}(A_0) \times \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$  la solution de (4.1) vérifie*

$$\|A_0^{\frac{1}{2}} w_0\|^2 + \|w_1\|^2 \leq k_T \int_0^T \|H_0 w(t)\|_{\mathcal{Z}}^2 dt. \quad (4.3)$$

*Le système (4.1)- (4.2) est exactement observable s'il est observable en un certain temps  $T$ .*

En posant  $x(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ w_t(t) \end{pmatrix}$ , on peut écrire (4.1) comme un système d'ordre 1 en temps :

$$\begin{cases} x_t(t) = Ax(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0) \times \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$ ,  $\mathcal{X} = \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}) \times \mathcal{H}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}$ . On pose  $x_0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}$  et on définit  $H \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$  par  $H = (H_0 \ 0)$ .

Le but de l'article [CCM12], que nous allons synthétiser pendant cette section, a été de montrer qu'on peut obtenir des meilleurs propriétés de convergence quand on discrétise (4.1) si on intègre dans le schéma les observations (4.2). Pour cela, soit  $(\mathcal{V}_h)_{h>0}$  une famille de sous-espaces de dimension finie *approchant*  $\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$  quand  $h \rightarrow 0$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$\|\varphi_h\|_{\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})} \leq Ch^{-1}\|\varphi_h\| \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{V}_h, \quad (4.5)$$

$$\|\pi_h \varphi\|_{\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})} \leq C\|\varphi\|_{\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \quad (4.6)$$

$$\|\pi_h \varphi - \varphi\| \leq Ch^\theta \|\varphi\|_{\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \quad (4.7)$$

$$\|\pi_h \varphi - \varphi\|_{\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})} \leq Ch^\theta \|\varphi\|_{\mathcal{D}(A_0)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0), \quad (4.8)$$

$$\|\tilde{\pi}_h \varphi - \varphi\| \leq Ch^\theta \|\varphi\|_{\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \quad (4.9)$$

$$\|\tilde{\pi}_h \varphi - \varphi\|_{\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})} \leq Ch^\theta \|\varphi\|_{\mathcal{D}(A_0)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0), \quad (4.10)$$

où  $\pi_h$  et  $\tilde{\pi}_h$  sont les projecteurs orthogonaux sur  $\mathcal{V}_h$  par rapport aux produits scalaires dans  $\mathcal{H}$  et dans  $\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$ , respectivement. Il faudra définir l'équivalent discret de  $A_0$  : soit donc  $A_{0h} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_h)$  l'opérateur défini par

$$\langle A_{0h} \varphi_h, \psi_h \rangle = \left\langle A_0^{\frac{1}{2}} \varphi_h, A_0^{\frac{1}{2}} \psi_h \right\rangle \quad \forall \varphi_h, \psi_h \in \mathcal{V}_h. \quad (4.11)$$

Soit  $0 < \lambda_1^h \leq \lambda_2^h \leq \dots \leq \lambda_{n_h}^h$  les valeurs propres de  $A_{0h}$  et  $(\phi_j^h)_{j=1, \dots, n_h}$  les vecteurs propres associés normalisés. On note alors

$$\mathcal{C}_h(\eta) = \text{span} \left\{ \phi_j^h \text{ avec } \lambda_j^h \leq \eta \right\} \quad (4.12)$$

et l'opérateur  $H_{0h} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_h, \mathcal{Z})$  donné par la restriction de  $H_0$  à  $\mathcal{V}_h$ .

Pour construire un système de premier ordre discret on définit également  $\mathcal{X}_h = \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$ ,  $A_h \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_h)$  et  $H_h \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_h, \mathcal{Z})$  :

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_{0h} & 0 \end{pmatrix}, \quad H_h = (H_{0h} \ 0).$$

On peut maintenant considérer le système discret suivant

$$\begin{cases} \frac{x_h^{k+1} - x_h^k}{\Delta t} = A_h \frac{x_h^k + x_h^{k+1}}{2}, & k \in \mathbb{N}, \\ x_h^0 = \Pi_h x_0, \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $\Pi_h$  est un certain projecteur de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}_h$  et  $x_h^k$  étant destiné à approcher  $x(k\Delta t)$ . L'analyse de ce schéma est classique et on obtient l'estimation d'erreur suivante :

$$\|x_h^n - x(n\Delta t)\|_{\mathcal{X}} \leq C(T)(h^\theta + \Delta t^2),$$

où  $C(T)$  est une constante dépendant de manière linéaire de  $T$  et  $\theta$  est une constante positive caractérisant la précision de l'approximation de  $\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$  par  $\mathcal{V}_h$ .

Le principal objectif de l'article [CCM12] a été donc de démontrer que si nous utilisons les observations (4.2) on peut proposer un schéma tel que l'erreur soit contrôlée par des puissances de  $h$  et de  $\Delta t$  de manière uniforme par rapport à  $T$ . Dans ce but, nous avons construit un schéma inspiré par les observateurs de Luenberger [Lue66], [HR12], ou encore, par le *nudging* [AB05] :

$$\begin{cases} \hat{x}_t(t) = A\hat{x}(t) + \gamma H^*(z(t) - H\hat{x}(t)), & t > 0, \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Un tel observateur est construit ayant comme but de suivre le système cible en partant d'une condition initiale différente. Plus précisément, l'erreur  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  est solution de

$$\begin{cases} \tilde{x}_t(t) = (A - \gamma H^* H)\tilde{x}(t), & t > 0 \\ \tilde{x}(0) = x_0 - \hat{x}_0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Il est bien connu que la propriété d'observabilité (4.3) est équivalente à la décroissance exponentielle de la norme de l'erreur  $\tilde{x}$  (voir, par exemple [Har89] ou [Liu97]). Des soins supplémentaires sont nécessaires pour préserver la décroissance exponentielle quand on discrétise le système de l'erreur. Dans [EZ09] la décroissance exponentielle d'un tel système est préservée par le schéma de discrétisation à l'aide d'un terme de viscosité numérique. Nous employons donc les mêmes idées pour la discrétisation de (4.13). Plus précisément, soit  $V_\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_h)$  un opérateur de viscosité numérique satisfaisant certaines propriétés de « petitesse » et de commutativité avec le projecteur  $\Pi_h$  :

1. si  $\Pi_h^\varepsilon$  est le projecteur orthogonal de  $\mathcal{X}_h$  dans  $(\mathcal{C}_h(1/\varepsilon))^2$  alors

$$\Pi_h^\varepsilon V_\varepsilon = V_\varepsilon \Pi_h^\varepsilon; \quad (4.16)$$

2. il existe  $c > 0$  et  $C > 0$  telles que

$$\begin{cases} \sqrt{\varepsilon} \|(-V_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} y\|_{\mathcal{X}} \leq C \|y\|_{\mathcal{X}}, & y \in (\mathcal{C}_h(1/\varepsilon))^2, \\ \sqrt{\varepsilon} \|(-V_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} y\|_{\mathcal{X}} \geq c \|y\|_{\mathcal{X}}, & y \in (\mathcal{C}_h(1/\varepsilon)^\perp)^2; \end{cases} \quad (4.17)$$

3. l'estimation suivante est vérifiée :

$$\left\| V_\varepsilon \Pi_h \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{X}} \leq C\varepsilon \left( \|\varphi\|_{\mathcal{D}(A_0^{\frac{3}{2}})} + \|\psi\|_{\mathcal{D}(A_0)} \right), \quad (\varphi, \psi) \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{3}{2}}) \times \mathcal{D}(A_0). \quad (4.18)$$

L'opérateur  $V_\varepsilon = \varepsilon A_h^2$  est un exemple d'un tel opérateur de viscosité. On peut constater l'efficacité de l'introduction de cet opérateur de viscosité en comparant les parties réelles des valeurs propres des matrices  $A_h$ ,  $A_h - \gamma H_h^* H_h$  et  $A_h - \gamma H_h^* H_h + \varepsilon A_h^2$ . Plus précisément, on sait que la décroissance exponentielle du système

$$\begin{cases} \tilde{x}_{h,t}(t) = (A_h - \gamma H_h^* H_h + \varepsilon A_h^2)\tilde{x}_h(t), & t > 0 \\ \tilde{x}_h(0) = \tilde{x}_{h,0}. \end{cases}$$

est uniforme par rapport au paramètre de discrétisation  $h$  si les valeurs propres  $\lambda_h^n$  de l'opérateur  $A_h - \gamma H_h^* H_h + \varepsilon A_h^2$  sont de partie réelle strictement négative et vérifient  $\Re(\lambda_h^n) \leq c < 0$ . Dans la Figure 4.1 on illustre les valeurs propres de ces opérateurs pour le cas d'une équation des ondes uni-dimensionnelle avec une observation distribuée de la position, discrétisée par éléments finis  $\mathbb{P}_1$ . Dans cette figure on observe que les valeurs propres de  $A_h$  sont de partie réelle nulle (le système associé est conservatif), si on n'ajoute pas de viscosité numérique les plus grandes valeurs propres (en module) de l'opérateur  $A_h - \gamma H_h^* H_h$  s'approchent de l'axe imaginaire, donc on perd la décroissance uniforme de l'énergie du système associé, et si  $\varepsilon = h^2$ , les valeurs propres ont leur parties réelles uniformément négatives.

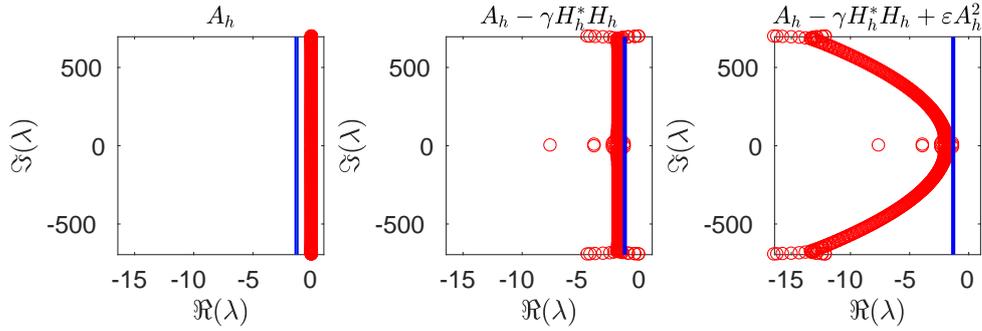


FIGURE 4.1 – Valeurs propres des matrices  $A_h$ ,  $A_h - \gamma H_h^* H_h$ ,  $A_h - \gamma H_h^* H_h + \varepsilon A_h^2$  correspondant à une discrétisation par éléments finis d’une équation des ondes uni-dimensionnelle avec observation distribuée de la position, pour  $h = 1/200$ ,  $\gamma = 10$  et  $\varepsilon = h^2$ .

En supposant que nous disposons des données (des observations) de la forme

$$z^k = Hx(k\Delta t),$$

on peut définir le système discret suivant :

$$\begin{cases} \frac{\bar{x}_h^{k+1} - \bar{x}_h^k}{\Delta t} = A_h \frac{\bar{x}_h^k + \bar{x}_h^{k+1}}{2} + \gamma H_h^* \left( \frac{z^k + z^{k+1}}{2} - H_h \frac{\bar{x}_h^k + \bar{x}_h^{k+1}}{2} \right), \\ \frac{\bar{x}_h^{k+1} - \bar{x}_h^{k+1}}{\Delta t} = \varepsilon V_\varepsilon \bar{x}_h^{k+1}, \\ \bar{x}_h^0 = \Pi_h x_0, \end{cases} \quad (4.19)$$

où  $\gamma > 0$  est un paramètre fixé. Le résultat suivant a été démontré dans [CCM12] et, dans ce mémoire, nous omettons les détails de la preuve.

**Théorème 4.2.** Soit  $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur auto-adjoint, défini positif avec des résolvantes compactes et soit  $H_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \mathcal{Z})$  un opérateur linéaire et borné tel que le système (4.1)-(4.2) soit exactement observable. Soit  $(\mathcal{V}_h)_{0 < h < h^*}$  une famille de sous-espaces de dimension finie de  $\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$  vérifiant (4.5)-(4.10) et soit  $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$  un pas de discrétisation. Soit  $\varepsilon = \max\{\Delta t, h^\theta\}$  et soit  $V_\varepsilon$  un opérateur de viscosité satisfaisant (4.16)-(4.18).

Alors, pour toute donnée initiale  $x_0 \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{3}{2}}) \times \mathcal{D}(A_0)$  il existe une constante  $C(x_0)$ , indépendante de  $h$ ,  $\Delta t$  et  $n$ , telle que

$$\|\bar{x}_h^n - x(n\Delta t)\|_{\mathcal{X}} \leq C(x_0) \max(\varepsilon, \varepsilon^2 h^{-1} \Delta t) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.20)$$

### 4.1.1 Application à l’équation des ondes

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ensemble ouvert connecté avec une frontière régulière, et soit  $\omega \subset \Omega$  un sous-ensemble ouvert et non-vidé de  $\Omega$ . On considère l’équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) - \Delta w(x, t) = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ w(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.21)$$

Nous illustrons le schéma (4.19) pour la discrétisation de (4.21) en supposant que nous disposons des observations suivantes :

$$z(t) = w(\cdot, t)|_\omega, \quad t \geq 0. \quad (4.22)$$

On construit l'opérateur d'observation en suivant les idées de [Cha+12]. Plus précisément, soit l'opérateur  $\mathcal{L}_\omega : H^1(\omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{L}_\omega \phi = \psi$ , où  $\psi$  est l'unique solution de l'équation elliptique suivante :

$$\begin{cases} -\Delta \psi = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \omega \\ \psi = 0, & \text{sur } \partial\Omega \\ \psi = \phi, & \text{dans } \bar{\omega}. \end{cases}$$

Pour rentrer dans le formalisme décrit au début de la section, on note  $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$  et soit  $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow \mathcal{H}$  le Laplacien de Dirichlet :

$$A_0 \varphi = -\Delta \varphi, \quad \mathcal{D}(A_0) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Alors,  $\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$ . Soit  $\mathcal{Z} = H^1(\omega)$  équipé de la norme  $\|\mathcal{L}_\omega(\cdot)\|_{H_0^1(\Omega)}$  et l'opérateur d'observation  $H_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \mathcal{Z})$  défini par

$$H_0 \varphi = \varphi|_\omega \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}).$$

L'adjoint  $H_0^*$  de cet opérateur est l'opérateur  $\mathcal{L}_\omega$  :

$$\langle H_0^* \varphi, \xi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle \varphi, H_0 \xi \rangle_{H^1(\omega)} = \langle \varphi, \xi|_\omega \rangle_{H^1(\omega)} = \langle \mathcal{L}_\omega \varphi, \mathcal{L}_\omega \xi|_\omega \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle \mathcal{L}_\omega \varphi, \xi \rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$

Avec ces notations, le système (4.21)-(4.22) est exactement observable au sens de la Définition 4.1. Plus précisément, dans [Cha+12, Proposition 2.2] nous avons démontré le résultat suivant :

**Proposition 4.3.** *Supposons que la condition d'optique géométrique est vérifiée par un sous-ensemble stricte de  $\omega$  et pour un temps  $T_0 > 0$ . Alors, il existe une constante  $k_T$  telle que toute solution de (4.21) vérifie*

$$\|w_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq k_T \int_0^T \|w(\cdot, t)\|_{H^1(\omega)}^2 dt.$$

La preuve de cette proposition est inspirée par [Zha00] et elle est omise dans ce mémoire.

## 4.1.2 Application à l'équation des plaques

Dans cette sous-section on adapte les résultats pour un opérateur  $A_0$  d'ordre quatre en temps. Plus précisément, soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ensemble ouvert, non-vide à frontière lisse. On considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} w_{tt}(t, x) + \Delta^2 w(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ w(t, x) = \Delta w(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega, \\ w(0, x) = w_0(x), \quad w_t(0, x) = w_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.23)$$

On note  $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$  et  $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow \mathcal{H}$  l'opérateur défini par

$$\mathcal{D}(A_0) = \{ \varphi \in H^4(\Omega) \mid \varphi = \Delta \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}, \quad A_0 \varphi = \Delta^2 \varphi \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(A_0).$$

L'opérateur  $A_0$  ainsi défini est auto-adjoint, défini positif et à résolvante compacte. De plus, l'opérateur  $A_0^{\frac{1}{2}} : \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}) \rightarrow \mathcal{H}$  est donné par

$$\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad A_0^{\frac{1}{2}} \varphi = -\Delta \varphi \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}).$$

Comme dans le cas de l'équation des ondes, nous avons introduit un opérateur de relèvement  $\mathcal{L}_\omega$  défini sur  $\mathcal{Z} = H^2(\omega)$  et à valeurs dans  $\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$  correspondant aux observations

$$z(t) = w(\cdot, t)|_\omega, \quad t \geq 0.$$

Plus précisément, cet opérateur associe à chaque  $\phi \in \mathcal{Z}$  la solution  $\psi$  de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \omega \\ \psi = \Delta \psi = 0, & \text{sur } \partial\omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}, & \text{sur } \partial\omega \\ \psi = \phi, & \text{dans } \bar{\omega}. \end{cases}$$

L'espace  $\mathcal{Z}$  est muni du produit scalaire  $\langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{Z}} = \langle \Delta \mathcal{L}_\omega \phi, \Delta \mathcal{L}_\omega \psi \rangle_{L^2(\Omega)}$ . La norme engendrée par ce produit scalaire est équivalente à la norme usuelle de  $H^2(\Omega)$ . Si on note  $H_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \mathcal{Z})$  l'opérateur d'observation donnant  $z$ , c'est-à-dire,  $H_0 \phi = \phi|_\omega$  pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$ , il est clair que son dual  $H_0^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}))$  n'est rien d'autre que l'opérateur  $\mathcal{L}_\omega$ . Dans l'appendix de l'article [CCM12], nous avons démontré l'inégalité d'observabilité suivante :

**Proposition 4.4.** *Soit  $\omega$  un sous-ensemble de  $\Omega$  tel que la condition de contrôle géométrique soit vérifiée par un sous-ensemble ouvert, non-vide  $\tilde{\omega}$  de  $\omega$  avec  $\text{dist}(\tilde{\omega}, \partial\omega) > 0$ . Alors, pour tout  $T > 0$  il existe une constante  $k_T > 0$  telle que toute solution  $w$  de (4.23) vérifie*

$$\|w_0\|_{\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})}^2 + \|w_1\|_{\mathcal{H}}^2 \leq k_T \int_0^T \|w(t, \cdot)\|_{H^2(\omega)}^2 dt.$$

Dans ce cadre, toutes les hypothèses du Théorème 4.2 sont vérifiées et donc on peut appliquer la méthode introduite au début de la section.

## 4.2 Assimilation des données sous-échantillonnées en temps à l'aide des observateurs

Cette section présente brièvement les résultats de l'article [CIM15]. Plus précisément, le but de cet travail a été de proposer une méthode pour prendre en charge dans le schéma de discrétisation en temps de (4.4) les observations « sous-échantillonnées » par rapport au pas de discrétisation.

Nous avons considéré la discrétisation en temps de l'observateur (4.14) suivante :

$$\begin{cases} \frac{\hat{x}_-^{n+1} - \hat{x}_+^n}{\Delta t} = A \frac{\hat{x}_-^{n+1} + \hat{x}_+^n}{2}, & n > 0 \\ \frac{\hat{x}_+^{n+1} - \hat{x}_+^{n+1}}{\Delta t} = \gamma_{n+1} H^* (z^{n+1} - H \hat{x}_+^{n+1}) + \nu_{\Delta t} A^2 \hat{x}_+^{n+1}, & n > 0 \\ \hat{x}_+^0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.24)$$

avec  $A$  l'opérateur apparaissant dans (4.4). La viscosité numérique dans le schéma est contrôlée par le paramètre  $\nu_{\Delta t}$ . Typiquement, on choisit  $\nu_{\Delta t}$  de l'ordre de  $\Delta t^2$ . Pour décrire quand les observations  $z^{n+1}$  sont disponibles, nous considérons  $(j_r)_{r \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante des nombres entiers positifs de manière que les observations disponibles soient données par

$$z^r = z(j_r \Delta t), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Nous avons proposé deux stratégies pour introduire ces données dans (4.24) :

- on utilise les données seulement quand elles sont disponibles :  $\gamma_n = 0$  quand  $z^n$  n'est pas disponible ;
- on interpole les données disponibles.

Les deux stratégies peuvent être décrites par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\widehat{x}_-^{n+1} - \widehat{x}_+^n}{\Delta t} = A \frac{\widehat{x}_-^{n+1} + \widehat{x}_+^n}{2}, & n > 0 \\ \frac{\widehat{x}_+^{n+1} - \widehat{x}_+^{n+1}}{\Delta t} = \delta^{n+1} \gamma H^* (d^{n+1} - H \widehat{x}_+^{n+1}) + \nu_{\Delta t} A^2 \widehat{x}_+^{n+1}, & n > 0 \\ \widehat{x}_+^0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (4.25)$$

Pour la première stratégie on a

$$\delta^n = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad d^n = \begin{cases} z^r \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{s'il existe } r \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = j_r \\ \text{sinon.} \end{array} \quad (4.26)$$

La deuxième stratégie correspond au choix suivant des paramètres  $\delta^n$  et  $d^n$  :

$$\delta^n = 1 \text{ pour tout } n \quad d^n = \frac{n - j_r}{j_{r+1} - j_r} z^{r+1} + \left( 1 - \frac{n - j_r}{j_{r+1} - j_r} z^r \right) \quad j_r \leq n \leq j_{r+1}. \quad (4.27)$$

Nous avons démontré les deux résultats suivants, donnant des estimations de convergence de l'observateur (4.25) pour chacune des situations (4.26) et (4.27).

**Théorème 4.5.** *Soit  $A$  un opérateur anti-adjoint à résolvante compacte et  $H \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$  un opérateur d'observation linéaire et borné tel que le couple  $(A, H)$  soit exactement observable. Supposons que  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(d^n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donnés par (4.26) et qu'il existe une constante  $\rho \in (0, 1]$  telle que*

$$c_n = \text{card}\{j, 1 \leq j \leq n, \delta_j = 1\} \geq \rho n, \quad n > 0.$$

*Alors, pour tout  $x_0 \in \mathcal{D}(A_0^2) \times \mathcal{D}(A_0^{\frac{3}{2}})$  il existe des constantes positives  $M_0, \mu_0, C_1$  et  $C_2$  indépendantes de  $\Delta t \in (0, 1)$  et  $n$ , telle que l'erreur  $\widetilde{x}_+^n$  entre le système observé (4.4) et l'observateur (4.25) vérifie :*

$$\|\widetilde{x}_+^n\|_{\mathcal{X}} \leq M_0 e^{-\mu_0 c_n \Delta t} \|\widetilde{x}^0\|_{\mathcal{X}} + \frac{\Delta t}{1 - e^{-\mu_0 \rho \Delta t}} (\Delta t^2 C_1 + \nu_{\Delta t} C_2).$$

**Théorème 4.6.** *On fait les mêmes hypothèses sur  $A, H$  et  $x_0$  que pour le Théorème 4.5. Supposons que  $(\delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(d^n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donnés par (4.27) et soit*

$$\varepsilon_d^n = Hx(n\Delta t) - d^n \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Alors, il existe des constantes positives  $M_0, \mu_0, C_1, C_2$  et  $C_3$  indépendantes de  $\Delta t \in (0, 1)$  et  $n$ , telle que l'erreur  $\widetilde{x}_+^n$  entre le système observé (4.4) et l'observateur (4.25) vérifie :*

$$\|\widetilde{x}_+^n\|_{\mathcal{X}} \leq M_0 e^{-\mu_0 n \Delta t} \|\widetilde{x}^0\|_{\mathcal{X}} + \frac{\Delta t}{1 - e^{-\mu_0 \Delta t}} \left( \Delta t^2 C_1 + \nu_{\Delta t} C_2 + \gamma C_3 \max_{1 \leq i \leq n} \|\varepsilon_d^i\|_{\mathcal{X}} \right).$$

Ces deux théorèmes illustrent très bien le fait que le choix de la stratégie d'utilisation des données repose sur un compromis entre la stabilité et la consistance. Le premier observateur, à correction intermittente, est exactement consistant avec les données mais il pourra souffrir d'instabilités. Le deuxième observateur interpole les données et donc corrige à tous les pas de temps. Ainsi, il a une excellente stabilité mais l'interpolation introduit des erreurs dans les données et ces erreurs se retrouvent dans l'état de l'observateur.

### 4.3 Conclusion et perspectives

Ce chapitre a présenté quelques résultats concernant la convergence numérique des observateurs pour des systèmes de type « ondes ». Dans la Section 4.1 les données, disponibles pour tout temps, ont été utilisées pour améliorer la convergence du schéma de discrétisation en temps du système (4.4). La deuxième section du chapitre traite le cas des données sous-échantillonnées en temps. Les observateurs proposés dans les deux sections ont en commun la présence d'une viscosité numérique ayant comme but de dissiper les modes propres numériques correspondant aux hautes fréquences. Les résultats ont été illustrés numériquement dans les articles [CIM15; CCM12] et nous envoyons le lecteur intéressé vers ces articles.

La totalité des résultats présentés au cours de ce chapitre utilisent des observations distribuées. Cela est pratique, car dans ce cas, l'observabilité du système homogène (4.4) est équivalente à la décroissance exponentielle de l'énergie du système (4.15). Dans le cas d'un opérateur  $H$  correspondant à des observations frontières, cette équivalence n'est pas vérifiée en général. Une perspective intéressante de ces travaux, sera donc d'adapter les observateurs proposés au cas frontière et d'étudier leur convergence.

■ TROISIÈME PARTIE

AUTRES TRAVAUX  
CONCLUSION  
PERSPECTIVES



# 5

## Autres travaux

Cette troisième partie de ce mémoire se fixe comme premier but de brièvement présenter mes « autres travaux » de recherche qui n’ont pas fait l’objectif d’un chapitre d’une des deux autres parties. Ces travaux peuvent être classés dans trois catégories :

- existence et approximation numérique des solutions périodiques des systèmes dissipatifs ou faiblement dissipatifs [CMP12 ; CMP13] ;
- contrôlabilité d’un modèle simplifié fluide-structure [Cm+13 ; Cm+15] ;
- modélisation et simulations numériques pour des systèmes ayant des applications en médecine [ACC18] et en mécanique des fluides [CC19].

Dans ce qui suit nous allons présenter très brièvement les résultats obtenus dans les travaux cités ci-dessus, en essayant de justifier le fait qu’ils ont été placés dans la partie « autres travaux » de ce mémoire.

### 5.1 Solutions périodiques des systèmes dissipatifs

Dans [CMP12] nous avons démontré l’existence des solutions périodiques du système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & \text{dans } (0, 1) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0, & \text{sur } (0, \infty) \\ u(1, t) + u_x(1, t) + \alpha u_t(1, t) = f(t), & \text{sur } (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{sur } (0, 1), \end{cases} \quad (5.1)$$

avec  $\alpha > 0$  et  $f$  une fonction périodique de période  $T$ . Plus précisément, le résultat principal démontré dans [CMP12] est le théorème suivant.

**Théorème 5.1.** *Soit  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique de période  $T > 0$  telle que  $f|_{(0, T)}$  est dans  $H^1(0, T)$ . Alors (5.1) admet une unique solution  $u \in C([0, T], V) \cap C^1([0, T], L^2(0, 1))$  périodique de période  $T$ , où  $V = \{\varphi \in H^1(0, 1) \mid \varphi(0) = 0\}$ .*

Si  $f|_{(0, T)}$  est seulement une fonction de  $L^2(0, T)$ , nous avons démontré l’existence des solutions périodiques sous une hypothèse de non approximation de la période  $T$  par des suites rationnelles ayant une certaine forme. Pour illustrer numériquement ces résultats nous avons proposé un algorithme de type point fixe pour l’approximation de la solution périodique. Par exemple, la solution périodique associée à une période  $T = \pi$  et à la fonction

$$f(t) = 1 - \frac{2}{T} \left( t - \frac{T}{2} \right) \quad (5.2)$$

est représentée dans la Figure 5.1. Les questions liées à la convergence de l’algorithme numérique proposé dans [CMP12] ont été étudié pour des systèmes dissipatifs dont la dissipation est plus forte que celle du (5.1). Plus précisément, dans [CMP13] nous avons considéré l’approximation numérique des solutions périodiques des systèmes de la forme

$$u_{tt}(t) + Au(t) + BB^*u_t(t) = f(t), \quad (5.3)$$

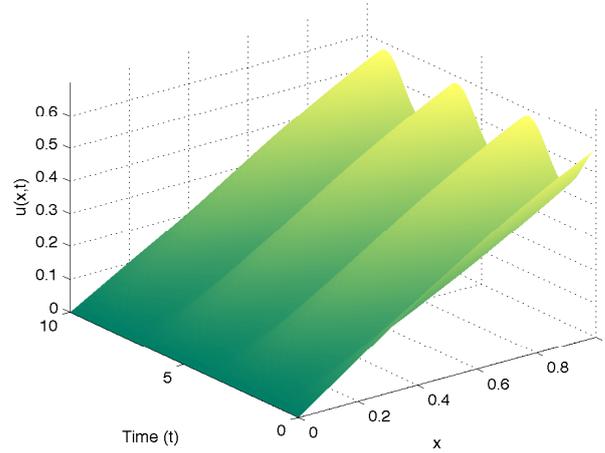


FIGURE 5.1 – Solution périodique de (5.1) associée au terme source (5.2).

où

- $H$  et  $U$  sont des espaces de Hilbert ;
- $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow H$  est un opérateur linéaire, positif, auto-adjoint, à résolvantes compactes ;
- $f : [0, \infty) \rightarrow H$  périodique ;
- $B \in \mathcal{L}(U, H)$ .

Sous ces hypothèses, couvrant, par exemple, l'équation des ondes et l'équation des plaques avec de termes dissipatifs distribués, nous avons démontré l'existence d'une unique solution périodique et nous avons proposé un schéma pour approcher numériquement cette solution. Comme pour les problèmes d'approximation des contrôles présenté au Chapitre 2, nous avons ajouté une viscosité numérique au schéma.

## 5.2 Contrôlabilité d'un modèle fluide-structure simplifié

Dans [Cin+15] nous avons étudié la contrôlabilité du système fluide-structure suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_t(t, y) - v_{yy}(t, y) + v(t, y)v_y(t, y) = 0, & t \in (0, T), y \in (-1, 1), y \neq h(t) \\ v(t, -1) = v(t, 1) = 0, & t \in (0, T) \\ h'(t) = v(t, h(t)), & t \in (0, T) \\ h''(t) = [v_y](t, h(t)) + u(t), & t \in (0, T) \\ v(0, y) = v_0(y), & y \in (-1, 1) \\ h(0) = h_0, \quad h'(0) = g_0. & \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Le résultat principal de cet article affirme que, en agissant sur le point matériel à l'aide du contrôle  $u$ , la position du point matériel  $h(t)$  peut être amenée arbitrairement proche d'une position cible, tandis que la vitesse du fluide  $v(t)$  et la vitesse du point matériel  $h'(t)$  sont nulles.

**Théorème 5.2.** *Soit  $v_0 \in L^2(-1, 1)$ ,  $g_0 \in \mathbb{R}$  et  $h_0 \in (-1, 1)$ . Alors, pour tout  $h_F \in (-1, 1)$  et  $\eta > 0$  il existe un temps  $T > 0$  et un contrôle  $u \in L^\infty(0, T)$  tels que la solution du système (5.4) vérifie*

$$v(T, \cdot) = 0, \quad |h(T) - h_F| \leq \eta, \quad h'(T) = 0.$$

La stratégie utilisée pour démontrer le Théorème 5.2 consiste en un choix préliminaire et ensuite en trois étapes principales. Le choix préliminaire est la sélection d'un nombre irrationnel algébrique  $h_1$  tel que  $|h_1 - h_F| < \eta$ . La première étape est de construire une fonction  $u$  sous la forme d'un terme de stabilisation. Lors d'une deuxième étape, on montre que le *feedback* proposé

à l'étape précédente ramène l'état du système  $\begin{bmatrix} v(t) \\ h'(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$  arbitrairement proche de l'état  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix}$ .

Finalement, on montre la contrôlabilité locale vers le point d'équilibre  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix}$ .

Malgré le fait que l'article [Cin+15] traite un problème de contrôlabilité d'une équation aux dérivées partielles, et donc il aurait pu être inclus dans la première partie de ce mémoire, nous avons décidé de ne pas le discuter en détail ici. La raison principale justifiant ce choix est que ce travail emploie des outils assez différentes par rapport aux outils employés pour les Chapitres 1 et 2. Notamment, contrairement aux autres équations considérées dans ce mémoire, le système (5.4) est un système non-linéaire.

### 5.3 Modélisation et applications

Le but de cette section est de présenter brièvement mes deux plus récents travaux [ACC18; CC19]. Ces deux travaux ont en commun le fait qu'ils étudient des problèmes de modélisation liés à la mécanique des fluides.

Dans [ACC18] nous avons proposé et résolu numériquement un modèle mathématique pour les échanges chimiques ayant lieu dans un dialyseur pendant une séance de dialyse. Ce modèle couple deux parties :

- **partie « fluides »**. Le domaine  $\Omega$  dans lequel on pose le problème est formé de trois sous-domaines  $\Omega_b$ ,  $\Omega_m$  et  $\Omega_d$ . Dans chaque sous-domaine les équations choisies pour modéliser l'écoulement sont différentes. Pour  $\Omega_b$ , domaine correspondant à la partie centrale d'une fibre d'un dialyseur, l'écoulement du sang est modélisé par les équations de Navier-Stokes avec une viscosité dépendant de la vitesse, donc par un modèle de fluide non Newtonien. Dans le domaine  $\Omega_m$ , correspondant à la membrane de la fibre, l'écoulement est modélisé par le système de Darcy. Finalement, dans le domaine  $\Omega_d$  occupé par le fluide de dialyse, l'écoulement est gouverné par les équations de Navier-Stokes.
- **partie « échanges chimiques »**. Les échanges chimiques ayant lieu dans les fluides sont modélisés par un système de réaction/convection/diffusion, faisant intervenir dans la partie convective le champs de vitesse calculé pour la *partie « fluides »*. Une difficulté supplémentaire du modèle est que les concentrations de certaines espèces chimiques présentes dans le sang exercent une pression oncotique qui intervient dans le système gouvernant l'écoulement des fluides.

Une fois les équations du modèle choisies, nous avons pris en compte la géométrie particulière d'une fibre de dialyse pour simplifier le modèle. Plus précisément, un dialyseur est composé d'un grand nombre de fibres, ayant des longueurs 10000 fois plus grandes que leur diamètres (voir la Figure 5.2 pour une représentation schématisée de la géométrie du domaine). Les simulations

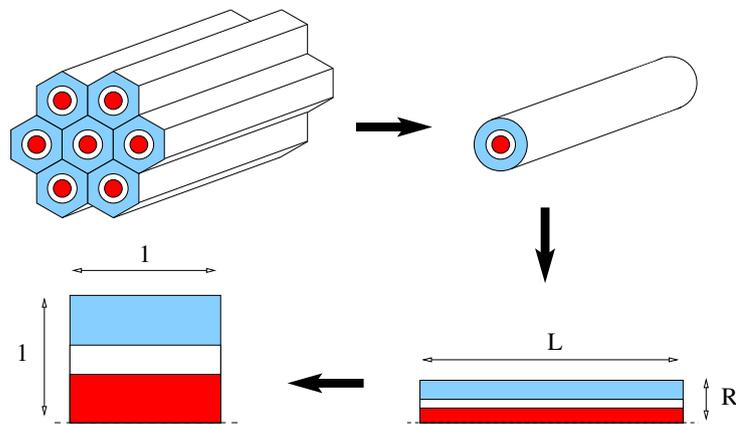


FIGURE 5.2 – Réduction du problème initial, posé dans une géométrie complexe, à un problème posé dans un carré.

numériques (en utilisant des paramètres physiques et chimiques adaptés) ont eu comme but d'illustrer l'évolution du Calcium dans le sang des patients sous dialyse pour plusieurs liquides de dialyses, contenant ou pas du Citrate.

Dans le travail [CC19] en collaboration avec Laurent Chupin, nous avons reformulé en dimension trois un modèle, écrit initialement pour la dimension deux [GH07], ayant comme but d'illustrer la migration inertielle des particules dans des fluides à bas nombres de Reynolds. Dans les années 1960 Segre et Silberberg [SS62] ont observé que les particules sphériques plongées dans un écoulement de Poiseuille migrent vers certaines positions d'équilibre. Notamment, dans un cylindre circulaire les particules se placent dans une couronne circulaire, située à une distance bien déterminée en fonction du rapport entre le diamètre des particules et le rayon du cylindre (voir Figure 5.3 (a)).

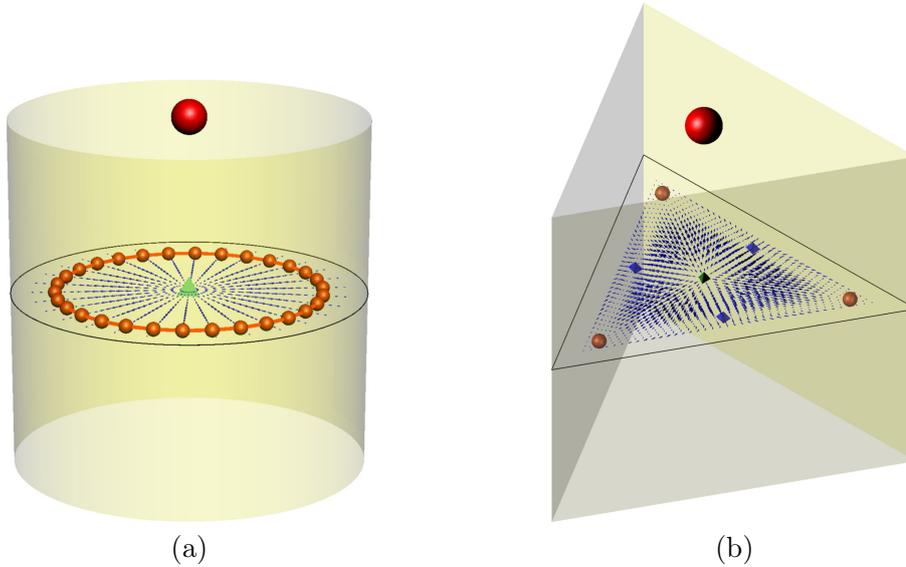


FIGURE 5.3 – Positions d'équilibre d'une particule dans un écoulement de Poiseuille à bas nombre de Reynolds dans un cylindre. (a) Cylindre de section circulaire. (b) Cylindre de section triangulaire.

Un des intérêts du modèle que nous avons proposé dans [CC19] est que nous pouvons chercher numériquement, avec de ressources informatiques raisonnables, les positions d'équilibre des particules dans des écoulements de Poiseuille pour des cylindres de différentes géométries. En particulier, nous avons calculé numériquement les positions d'équilibre (voir la Figure 5.3 (b) pour les résultats obtenus pour un cylindre de section triangulaire) dans plusieurs configurations géométriques qui ont récemment eu l'intérêt des expérimentateurs pour des applications comme la séparation des micro-particules de différentes tailles placées en suspension dans un fluide.

# 6

## Conclusion et perspectives

L'objectif de ce rapport est de rendre compte de mes activités de recherches effectuées après la fin de ma thèse de doctorat, en mars 2010. Ces travaux ont fait l'objet de treize articles publiés dans des revues à comité de lecture, de trois notes de conférences et d'un preprint, et ont été présentés dans ce manuscrit, avec plus ou moins de détails.

Le noyau central de mes travaux de recherche est la théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles, avec un intérêt particulier pour les aspects numériques de cette théorie. Par la dualité contrôlabilité / observabilité, à chaque problème de contrôle on peut associer un problème inverse. Mon intérêt a été donc partagé entre des problèmes de contrôle (Partie I) et des problèmes inverses (Partie II) avec toujours une démarche allant de la théorie vers les applications numériques. La plupart de mes travaux ont étudié des propriétés de contrôle, ou des problèmes inverses, pour des équations aux dérivées partielles d'évolution de second ordre en temps : l'équation des ondes et l'équation de plaques. Dans le Chapitre 5, j'ai présenté très brièvement d'autres travaux qui étudient la contrôlabilité d'autres équations (un modèle fluide-structure simplifié) ou des travaux qui n'ont comme objet ni un problème de contrôle ni un problème inverse (approximations des solutions périodiques ou des travaux de modélisation pour les échanges chimiques pendant une session de hémodialyse).

En continuation des travaux exposés dans le Chapitre 1, dans le cadre de la thèse d'Arthur Bottois que je co-encadre avec Arnaud Münch, nous étudions actuellement le problème de l'optimisation du support (variable en temps) du contrôle de l'équation des ondes uni-dimensionnelle dans le but de minimiser la norme  $L^2$  du contrôle de norme  $L^2$  minimale.

Dans un deuxième travaux en cours, en collaboration avec Arnaud Münch et Ionel Roventă, nous étudions la contrôlabilité de l'équation des poutres de Mindlin-Timoshenko par un seul contrôle frontière. Les résultats partiels que nous avons démontré utilisent le même genre d'outils que ceux employés dans le Chapitre 2. Pour l'approximation numérique des contrôles, nous envisageons utiliser la méthode numérique proposée pour le calculs des contrôles frontières pour l'équation des ondes dans le Chapitre 1.

En collaboration avec Annabelle Collin et Ghislain Haine nous avons proposé des observateurs pour le système fluide-structure que j'ai brièvement évoqué pendant la Section 5.2. Plus précisément, dans ce travail en cours, on se propose de reconstruire la vitesse d'un fluide gouverné par l'équation de Burgers visqueuse couplée à une équation décrivant l'interaction avec un point matériel dont on connaît la position et sans connaître la vitesse initiale du fluide.

Nous continuons également le travail (en collaboration avec Julien Aniert et Laurent Chupin), brièvement évoqué dans la Section 5.3, sur la modélisation des échanges chimiques en hémodialyse. Plus précisément, nous essayons de répondre aux demandes de notre collègue Julien Aniert, néphrologue au CHU de Clermont-Ferrand, en prenant en charge plus d'éléments dans le modèle et en précisant les paramètres, pour valider le modèle par des expériences cliniques.

Dans un travail actuellement soumis pour publication [Cin+19] en collaboration avec Anadaluzia Matei, Sorin Micu et Constantin Niță, nous étudions un problème de contrôle optimal pour un

système modélisant la déformation antiplane d'un corps cylindrique, élastique, isotrope et non-homogène ayant une partie de sa frontière en friction avec une fondation rigide. Malgré le fait que le modèle considéré dans ce travail est assez différent des équations que j'ai étudié auparavant, une fois donné un sens précis aux solutions, les idées employées pour démontrer la contrôlabilité du système, ainsi que pour l'approximation numérique du contrôle optimal, ont une grande partie commune avec les idées évoquées dans les autres chapitres de ce rapport.

## Bibliographie

- [ACC18] Julien ANIORT, Laurent CHUPIN et Nicolae CÎNDEA. “Mathematical model of calcium exchange during haemodialysis using a citrate containing dialysate”. In : *Math. Med. Biol.* 35.suppl. (2018), p. 87-120. ISSN : 1477-8599. DOI : [10.1093/imammb/dqx013](https://doi.org/10.1093/imammb/dqx013).
- [AB05] Didier AUROUX et Jacques BLUM. “Back and forth nudging algorithm for data assimilation problems”. In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 340.12 (2005), p. 873-878. ISSN : 1631-073X. DOI : [10.1016/j.crma.2005.05.006](https://doi.org/10.1016/j.crma.2005.05.006).
- [BLR92] Claude BARDOS, Gilles LEBEAU et Jeffrey RAUCH. “Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary”. In : *SIAM J. Control Optim.* 30.5 (1992), p. 1024-1065. ISSN : 0363-0129. DOI : [10.1137/0330055](https://doi.org/10.1137/0330055).
- [BDE13] Lucie BAUDOIN, Maya DE BUHAN et Sylvain ERVEDOZA. “Global Carleman estimates for waves and applications”. In : *Comm. Partial Differential Equations* 38.5 (2013), p. 823-859. ISSN : 0360-5302. DOI : [10.1080/03605302.2013.771659](https://doi.org/10.1080/03605302.2013.771659).
- [BH81] Michel BERNADOU et Kamal HASSAN. “Basis functions for general Hsieh-Clough-Tocher triangles, complete or reduced”. In : *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 17.5 (1981), p. 784-789. ISSN : 0029-5981. DOI : [10.1002/nme.1620170510](https://doi.org/10.1002/nme.1620170510).
- [BG09] Pavel B. BOCHEV et Max D. GUNZBURGER. *Least-squares finite element methods*. T. 166. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 2009, p. xxii+660. ISBN : 978-0-387-30888-3. DOI : [10.1007/b13382](https://doi.org/10.1007/b13382).
- [BBF13] Daniele BOFFI, Franco BREZZI et Michel FORTIN. *Mixed finite element methods and applications*. T. 44. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, Heidelberg, 2013, p. xiv+685. ISBN : 978-3-642-36518-8. DOI : [10.1007/978-3-642-36519-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-36519-5).
- [BP96] James H. BRAMBLE et Joseph E. PASCIAK. “Least-squares methods for Stokes equations based on a discrete minus one inner product”. In : *J. Comput. Appl. Math.* 74.1-2 (1996). TICAM Symposium (Austin, TX, 1995), p. 155-173. ISSN : 0377-0427. DOI : [10.1016/0377-0427\(96\)00022-2](https://doi.org/10.1016/0377-0427(96)00022-2).
- [BMR16] Ioan Florin BUGARIU, Sorin MICU et Ionel ROVENȚA. “Approximation of the controls for the beam equation with vanishing viscosity”. In : *Math. Comp.* 85.301 (2016), p. 2259-2303. ISSN : 0025-5718. DOI : [10.1090/mcom/3064](https://doi.org/10.1090/mcom/3064).
- [Bug+14] Ioan Florin BUGARIU et al. “Controllability of the space semi-discrete approximation for the beam equation”. In : *IFAC Proceedings Volumes* 47.3 (2014). 19th IFAC World Congress, p. 11369-11374. ISSN : 1474-6670. DOI : <https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.02286>.
- [BFO19] Erik BURMAN, Ali FEIZMOHAMMADI et Lauri OKSANEN. “A fully discrete numerical control method for the wave equation”. In : *arXiv e-prints*, arXiv :1903.02320 (mar. 2019), arXiv :1903.02320. arXiv : [1903.02320](https://arxiv.org/abs/1903.02320) [math.NA].
- [Cas13] Carlos CASTRO. “Exact controllability of the 1-D wave equation from a moving interior point”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 19.1 (2013), p. 301-316. ISSN : 1292-8119. DOI : [10.1051/cocv/2012009](https://doi.org/10.1051/cocv/2012009).
- [CCM14] Carlos CASTRO, Nicolae CÎNDEA et Arnaud MÜNCH. “Controllability of the linear one-dimensional wave equation with inner moving forces”. In : *SIAM J. Control Optim.* 52.6 (2014), p. 4027-4056. ISSN : 0363-0129. DOI : [10.1137/140956129](https://doi.org/10.1137/140956129).
- [CMM08] Carlos CASTRO, Sorin MICU et Arnaud MÜNCH. “Numerical approximation of the boundary control for the wave equation with mixed finite elements in a square”. In : *IMA J. Numer. Anal.* 28.1 (2008), p. 186-214. ISSN : 0272-4979. DOI : [10.1093/imanum/drm012](https://doi.org/10.1093/imanum/drm012).
- [CCM12] D. CHAPELLE, N. CÎNDEA et P. MOIREAU. “Improving convergence in numerical analysis using observers—the wave-like equation case”. In : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 22.12 (2012), p. 1250040, 35. ISSN : 0218-2025. DOI : [10.1142/S0218202512500406](https://doi.org/10.1142/S0218202512500406).

- [Cha+12] Dominique CHAPELLE et al. “Exponential convergence of an observer based on partial field measurements for the wave equation”. In : *Math. Probl. Eng.* (2012), Art. ID 581053, 12. ISSN : 1024-123X. DOI : [10.1155/2012/581053](https://doi.org/10.1155/2012/581053).
- [CC19] Laurent CHUPIN et Nicolae CÎNDEA. “Numerical method for inertial migration of particles in 3D channels”. In : *Comput. & Fluids* 192 (2019), p. 104246. ISSN : 0045-7930. DOI : [10.1016/j.compfluid.2019.104246](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.104246).
- [Cia78] Philippe G. CIARLET. *The finite element method for elliptic problems*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978, p. xix+530. ISBN : 0-444-85028-7.
- [CFM13] Nicolae CÎNDEA, Enrique FERNÁNDEZ-CARA et Arnaud MÛNCH. “Numerical controllability of the wave equation through primal methods and Carleman estimates”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 19.4 (2013), p. 1076-1108. ISSN : 1292-8119. DOI : [10.1051/cocv/2013046](https://doi.org/10.1051/cocv/2013046).
- [CIM15] Nicolae CÎNDEA, Alexandre IMPERIALE et Philippe MOIREAU. “Data assimilation of time under-sampled measurements using observers, the wave-like equation example”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 21.3 (2015), p. 635-669. ISSN : 1292-8119. DOI : [10.1051/cocv/2014042](https://doi.org/10.1051/cocv/2014042).
- [CMP12] Nicolae CÎNDEA, Sorin MICU et Ademir F. PAZOTO. “Periodic solutions for a weakly dissipated hybrid system”. In : *J. Math. Anal. Appl.* 385.1 (2012), p. 399-413. ISSN : 0022-247X. DOI : [10.1016/j.jmaa.2011.06.049](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.06.049).
- [CMP13] Nicolae CÎNDEA, Sorin MICU et Jardel Morais PEREIRA. “Approximation of periodic solutions for a dissipative hyperbolic equation”. In : *Numer. Math.* 124.3 (2013), p. 559-601. ISSN : 0029-599X. DOI : [10.1007/s00211-013-0523-y](https://doi.org/10.1007/s00211-013-0523-y).
- [CMR16] Nicolae CÎNDEA, Sorin MICU et Ionel ROVENȚA. “Uniform observability for a finite differences discretization of a clamped beam equation”. In : *IFAC-PapersOnLine* 49.8 (2016), p. 315-320. ISSN : 2405-8963. DOI : [10.1016/j.ifacol.2016.07.460](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.460).
- [CMR17] Nicolae CÎNDEA, Sorin MICU et Ionel ROVENȚA. “Boundary controllability for finite-differences semidiscretizations of a clamped beam equation”. In : *SIAM J. Control Optim.* 55.2 (2017), p. 785-817. ISSN : 0363-0129. DOI : [10.1137/16M1076976](https://doi.org/10.1137/16M1076976).
- [CMT11] Nicolae CÎNDEA, Sorin MICU et Marius TUCSNAK. “An approximation method for exact controls of vibrating systems”. In : *SIAM J. Control Optim.* 49.3 (2011), p. 1283-1305. ISSN : 0363-0129. DOI : [10.1137/09077641X](https://doi.org/10.1137/09077641X).
- [CM15a] Nicolae CÎNDEA et Arnaud MÛNCH. “A mixed formulation for the direct approximation of the control of minimal  $L^2$ -norm for linear type wave equations”. In : *Calcolo* 52.3 (2015), p. 245-288. ISSN : 0008-0624. DOI : [10.1007/s10092-014-0116-x](https://doi.org/10.1007/s10092-014-0116-x).
- [CM15b] Nicolae CÎNDEA et Arnaud MÛNCH. “Inverse problems for linear hyperbolic equations using mixed formulations”. In : *Inverse Problems* 31.7 (2015), p. 075001, 38. ISSN : 0266-5611. DOI : [10.1088/0266-5611/31/7/075001](https://doi.org/10.1088/0266-5611/31/7/075001).
- [CM16] Nicolae CÎNDEA et Arnaud MÛNCH. “Simultaneous reconstruction of the solution and the source of hyperbolic equations from boundary measurements : a robust numerical approach”. In : *Inverse Problems* 32.11 (2016), p. 115020, 36. ISSN : 0266-5611. DOI : [10.1088/0266-5611/32/11/115020](https://doi.org/10.1088/0266-5611/32/11/115020).
- [Cin+13] Nicolae CÎNDEA et al. “Numerical aspects and controllability of a one dimensional fluid-structure model”. In : *IFAC Proceedings Volumes* 46.26 (2013). 1st IFAC Workshop on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, p. 19-24. ISSN : 1474-6670. DOI : <https://doi.org/10.3182/20130925-3-FR-4043.00035>.
- [Cin+15] Nicolae CÎNDEA et al. “Particle supported control of a fluid-particle system”. In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 104.2 (2015), p. 311-353. ISSN : 0021-7824. DOI : [10.1016/j.matpur.2015.02.009](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2015.02.009).
- [Cin+19] Nicolae CÎNDEA et al. “Boundary optimal control for antiplane problems with power-law friction”. working paper or preprint. Jul. 2019.
- [ET99] Ivar EKELAND et Roger TÉMAM. *Convex analysis and variational problems*. English. T. 28. Classics in Applied Mathematics. Translated from the French. Society for Industrial et Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999, p. xiv+402. ISBN : 0-89871-450-8. DOI : [10.1137/1.9781611971088](https://doi.org/10.1137/1.9781611971088).
- [Erv09] Sylvain ERVEDOZA. “Spectral conditions for admissibility and observability of wave systems : applications to finite element schemes”. In : *Numer. Math.* 113.3 (2009), p. 377-415. ISSN : 0029-599X. DOI : [10.1007/s00211-009-0235-5](https://doi.org/10.1007/s00211-009-0235-5).
- [Erv11] Sylvain ERVEDOZA. “Spectral conditions for admissibility and observability of Schrödinger systems : applications to finite element discretizations”. In : *Asymptot. Anal.* 71.1-2 (2011), p. 1-32. ISSN : 0921-7134.
- [EZ09] Sylvain ERVEDOZA et Enrique ZUAZUA. “Uniformly exponentially stable approximations for a class of damped systems”. In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 91.1 (2009), p. 20-48. ISSN : 0021-7824. DOI : [10.1016/j.matpur.2008.09.002](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2008.09.002).

- [EZ13] Sylvain ERVEDOZA et Enrique ZUAZUA. *Numerical approximation of exact controls for waves*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, New York, 2013, p. xviii+122. ISBN : 978-1-4614-5807-4. DOI : [10.1007/978-1-4614-5808-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5808-1).
- [FG83] Michel FORTIN et Roland GLOWINSKI. *Augmented Lagrangian methods*. T. 15. Studies in Mathematics and its Applications. Applications to the numerical solution of boundary value problems, Translated from the French by B. Hunt and D. C. Spicer. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983, p. xix+340. ISBN : 0-444-86680-9.
- [GH07] Giovanni P. GALDI et Vincent HEUVELINE. “Lift and sedimentation of particles in the flow of a viscoelastic liquid in a channel”. In : *Free and moving boundaries*. T. 252. Lect. Notes Pure Appl. Math. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007, p. 75-110. DOI : [10.1201/9781420011159.ch4](https://doi.org/10.1201/9781420011159.ch4).
- [GLL90] Roland GLOWINSKI, Chin Hsien LI et Jacques-Louis LIONS. “A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation. I. Dirichlet controls : description of the numerical methods”. In : *Japan J. Appl. Math.* 7.1 (1990), p. 1-76. ISSN : 0910-2043. DOI : [10.1007/BF03167891](https://doi.org/10.1007/BF03167891).
- [GLH08] Roland GLOWINSKI, Jacques-Louis LIONS et Jiwen HE. *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*. T. 117. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. A numerical approach. Cambridge University Press, Cambridge, 2008, p. xii+458. ISBN : 978-0-521-88572-0. DOI : [10.1017/CB09780511721595](https://doi.org/10.1017/CB09780511721595).
- [HR12] Ghislain HAINE et Karim RAMDANI. “Reconstructing initial data using observers : error analysis of the semi-discrete and fully discrete approximations”. In : *Numer. Math.* 120.2 (2012), p. 307-343. ISSN : 0029-599X. DOI : [10.1007/s00211-011-0408-x](https://doi.org/10.1007/s00211-011-0408-x).
- [Har89] A. HARAUX. “Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps”. In : *Portugal. Math.* 46.3 (1989), p. 245-258. ISSN : 0032-5155.
- [HJ85] Roger A. HORN et Charles R. JOHNSON. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985, p. xiii+561. ISBN : 0-521-30586-1. DOI : [10.1017/CB09780511810817](https://doi.org/10.1017/CB09780511810817).
- [Hug87] Thomas J. R. HUGHES. *The finite element method*. Linear static and dynamic finite element analysis, With the collaboration of Robert M. Ferencz and Arthur M. Raefsky. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1987, p. xxviii+803. ISBN : 0-13-317025-X.
- [Ima02] Oleg Yu. IMANUVILOV. “On Carleman estimates for hyperbolic equations”. In : *Asymptot. Anal.* 32.3-4 (2002), p. 185-220. ISSN : 0921-7134.
- [IZ99] Juan Antonio INFANTE et Enrique ZUAZUA. “Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation”. In : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 33.2 (1999), p. 407-438. ISSN : 0764-583X. DOI : [10.1051/m2an:1999123](https://doi.org/10.1051/m2an:1999123).
- [Isa17] Victor ISAKOV. *Inverse problems for partial differential equations*. Third. T. 127. Applied Mathematical Sciences. Springer, Cham, 2017, p. xv+406. ISBN : 978-3-319-51657-8 ; 978-3-319-51658-5. DOI : [10.1007/978-3-319-51658-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-51658-5).
- [Kom94] V. KOMORNIK. *Exact controllability and stabilization*. RAM : Research in Applied Mathematics. The multiplier method. Masson, Paris ; John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1994, p. viii+156. ISBN : 2-225-84612-X.
- [KL07] Vilmos KOMORNIK et Paola LORETI. “Observability of discretized wave equations”. In : *Bol. Soc. Parana. Mat. (3)* 25.1-2 (2007), p. 67-76. ISSN : 0037-8712. DOI : [10.5269/bspm.v25i1-2.7430](https://doi.org/10.5269/bspm.v25i1-2.7430).
- [LZ02] Liliana LEÓN et Enrique ZUAZUA. “Boundary controllability of the finite-difference space semi-discretizations of the beam equation”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 8 (2002). A tribute to J. L. Lions, 827-862 (electronic). ISSN : 1292-8119. DOI : [10.1051/cocv:2002025](https://doi.org/10.1051/cocv:2002025).
- [Lio88] J.-L. LIONS. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*. T. 8. Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch. Masson, Paris, 1988, p. x+541. ISBN : 2-225-81477-5.
- [LYZ03] K. LIU, M. YAMAMOTO et X. ZHANG. “Observability Inequalities by Internal Observation and Their Applications”. English. In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 116.3 (2003), p. 621-645. ISSN : 0022-3239. DOI : [10.1023/A:1023069420681](https://doi.org/10.1023/A:1023069420681).
- [Liu97] Kangsheng LIU. “Locally distributed control and damping for the conservative systems”. In : *SIAM J. Control Optim.* 35.5 (1997), p. 1574-1590. ISSN : 0363-0129. DOI : [10.1137/S0363012995284928](https://doi.org/10.1137/S0363012995284928).
- [Lue66] D. LUENBERGER. “Observers for multivariable systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 11.2 (avr. 1966), p. 190-197. ISSN : 0018-9286. DOI : [10.1109/TAC.1966.1098323](https://doi.org/10.1109/TAC.1966.1098323).
- [Mey12] Arnd MEYER. “A Simplified Calculation of Reduced HCT-Basis Functions in a Finite Element Context”. In : *Computational Methods in Applied Mathematics Comput. Methods Appl. Math.* 12.4 (2012), p. 486-499.
- [Mic07] Sorin MICU. “On the approximation of the boundary control of the wave equation with numerical viscosity”. In : *Control Conference (ECC), 2007 European*. IEEE, 2007, p. 4467-4473.

- [Mün05] Arnaud MÜNCH. “A uniformly controllable and implicit scheme for the 1-D wave equation”. In : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 39.2 (2005), p. 377-418. ISSN : 0764-583X. DOI : [10.1051/m2an:2005012](https://doi.org/10.1051/m2an:2005012).
- [MM18] Arnaud MUNCH et Santiago MONTANER. “Approximation of controls for linear wave equations : a first order mixed formulation”. to appear in *Mathematical Control & Related Fields*. Mai 2018.
- [Roc70] R. Tyrrell ROCKAFELLAR. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970, p. xviii+451.
- [Rus78] D. RUSSELL. “Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations : Recent Progress and Open Questions”. In : *SIAM Review* 20.4 (1978), p. 639-739. DOI : [10.1137/1020095](https://doi.org/10.1137/1020095). eprint : <https://doi.org/10.1137/1020095>.
- [SS62] G SEGRÉ et AJ SILBERBERG. “Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow Part 2. Experimental results and interpretation”. In : *Journal of fluid mechanics* 14.1 (1962), p. 136-157.
- [Tat96] D. TATARU. “Carleman estimates and unique continuation for solutions to boundary value problems”. In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 75.4 (1996), p. 367-408. ISSN : 0021-7824.
- [TW09] Marius TUCSNAK et George WEISS. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, p. xii+483. ISBN : 978-3-7643-8993-2. DOI : [10.1007/978-3-7643-8994-9](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8994-9).
- [YZ01] Masahiro YAMAMOTO et Xu ZHANG. “Global Uniqueness and Stability for an Inverse Wave Source Problem for Less Regular Data”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 263.2 (2001), p. 479-500. ISSN : 0022-247X. DOI : <https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7621>.
- [Zha00] Xu ZHANG. “Explicit Observability Estimate for the Wave Equation with Potential and Its Application”. In : *Proceedings : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 456.1997 (2000), p. 1101-1115. ISSN : 13645021.
- [Zua05] Enrique ZUAZUA. “Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods”. In : *SIAM Rev.* 47.2 (2005), p. 197-243. ISSN : 0036-1445. DOI : [10.1137/S0036144503432862](https://doi.org/10.1137/S0036144503432862).