Transitions d'écoulements en cavité chauffée latéralement : application à la croissance cristalline

Abdessamed Medelfef

▶ **To cite this version:**

Abdessamed Medelfef. Transitions d'écoulements en cavité chauffée latéralement : application à la croissance cristalline. Autre. Université de Lyon; Université des Sciences et de la Technologie Houari-Boumediène (Algérie), 2019. Français. NNT : 2019LYSEC018 . tel-02407493

HAL Id: tel-02407493

https://theses.hal.science/tel-02407493

Submitted on 12 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N°d'ordre NNT : 2019LYSEC018

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

opérée au sein de

l'Ecole Centrale de Lyon

et délivré en cotutelle internationale avec

l'Université des sciences et de la technologie Houari-Boumediene (USTHB, Algérie)

Ecole Doctorale N° 162

Mécanique, Energétique, Génie Civil et Acoustique

Spécialité de doctorat : Mécanique des Fluides

Soutenue publiquement le 17/06/2019, par :

Abdessamed MEDELFEF

TRANSITIONS D'ÉCOULEMENTS EN CAVITÉ CHAUFFÉE LATÉRALEMENT : APPLICATION À LA CROISSANCE CRISTALLINE

Devant le jury composé de :

MOULAY Mohamed Said	Professeur	FMT / USTHB	Président
ALBOUSSIERE Thierry	DR CNRS	Univ. Lyon 1	Rapporteur
JUEL Anne	Professeur	Univ. Manchester	Rapporteure
SAÏGHI Mohamed	Professeur	FPH / USTHB	Examinateur
HENRY Daniel	DR CNRS	E. C. Lyon	Directeur de thèse
BOUABDALLAH Ahcène	Professeur	FPH / USTHB	Directeur de thèse

N° d'ordre : 34/2019-C/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

COTUTELLE INTERNATIONALE DE THESE

Préparée entre

L'**UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE**
pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT
En : Physique
Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

et

L'**UNIVERSITÉ DE LYON**
opérée au sein de
L'**ECOLE CENTRALE DE LYON**
pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT de l'Université de Lyon
Ecole Doctorale N° 162 Mécanique, Energétique, Génie Civil et Acoustique
Spécialité : Mécanique des Fluides

Présentée par MEDELFEF Abdessamed

TRANSITIONS D'ÉCOULEMENTS EN CAVITÉ CHAUFFÉE LATÉRALEMENT : APPLICATION À LA CROISSANCE CRISTALLINE

Soutenu publiquement, le 17/06/2019 devant le jury composé de

M. M. S. MOULAY	Professeur à l'USTHB	Président
M. A. BOUABDALLAH	Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
M. D. HENRY	DR CNRS à l'École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
Mme A. JUEL	Professeur à l'Université de Manchester	Examinatrice
M. M. SAÏGHI	Professeur à l'USTHB	Examinateur
M. T. ALBOUSSIÈRE	DR CNRS à l'Université Claude Bernard Lyon 1	Examinateur

A ma mère,
A l'âme de mon père,
A mon frère et mes sœurs,
A toute ma famille ...

REMERCIEMENTS

Le Prophète Mohammed (que la prière d'Allah et Son salut soient sur lui) a dit :

« Celui qui ne remercie pas les gens n'a pas remercié Allah »

Ce travail a été préparé conjointement entre le Laboratoire de Thermodynamique et Systèmes Énergétiques de l'USTHB (Algérie) et le Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'UdL (France) dans le cadre d'une cotutelle internationale de thèse. De ce fait, je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements aux directeurs des deux laboratoires de m'avoir accueilli au sein de leur structure de recherche.

Ma reconnaissance et mes chaleureux remerciements vont également à mes deux directeurs de thèse, M. Daniel HENRY, Directeur de Recherche au CNRS, et M. Ahcène BOUABDALLAH, Professeur à l'USTHB, pour leur confiance ainsi que leur bienveillance envers moi pendant toutes mes années de thèse. J'ai extrêmement bénéficié de leurs conseils avisés, retour d'expériences et surtout de leurs compétences scientifiques et pédagogiques ainsi que de leurs qualités humaines.

Je tiens à remercier M. Mohamed Said MOULAY, Professeur à l'USTHB, d'avoir accepté la présidence du jury malgré toutes ses occupations. Je remercie également Mme Anne JUEL, Professeur à l'Université de Manchester, et M. Mohamed SAÏGHI, Professeur à l'USTHB, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury malgré leurs engagements dans la recherche et dans l'enseignement.

Un remerciement particulier est adressé à M. Thierry ALBOUSSIÈRE, Directeur de Recherche au CNRS, pour avoir tout d'abord suivi ce travail de plus près lors du comité de thèse organisé par l'école doctorale MEGA à Lyon et pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Que M. Valéry BOTTON, Professeur à l'INSA Lyon, trouve ici l'expression de mes chaleureux remerciements pour sa gentillesse et son accueil au sein de la structure de recherche de l'INSA Lyon. J'ai apprécié sa modestie et ses qualités humaines très particulières.

Je remercie également M. Slim KADDECHE, Professeur à l'INSAT Tunis, pour son soutien et son aide inconditionnels tout au long de cette thèse. Ses qualités humaines et scientifiques ainsi que sa modestie exemplaire resteront gravées dans ma mémoire toute ma vie.

Lors de la réalisation de cette thèse, j'ai rencontré plusieurs personnes qui ont contribué, d'une manière ou d'une autre, à la réalisation de ce travail. Je ne citerai pas de noms ! mais que toute personne ayant contribué, de près ou de loin, à la réalisation de cette thèse trouve ici mes chaleureux remerciements.

Finalement, je remercie ma famille et mes amis pour le soutien inconditionnel dont ils ont fait preuve durant toutes mes années d'étude.

RÉSUMÉ

Les instabilités hydrodynamiques en cavité chauffée latéralement jouent un rôle important dans certains processus de fabrication de matériaux tels que le procédé de Bridgman horizontal. En effet, le fluide (métal liquide qui va se solidifier) est le siège d'une circulation thermoconvective due à l'existence d'un gradient de température horizontal qui est susceptible de devenir instationnaire via des instabilités oscillatoires. La connaissance et la maîtrise de ces instabilités sont donc primordiales afin de pouvoir améliorer la qualité des cristaux obtenus par cette technique. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés en premier aux instabilités affectant la circulation convective dans une cavité tridimensionnelle de dimensions $4 \times 2 \times 1$ (longueur $\times$ largeur $\times$ hauteur). Grâce aux techniques numériques de continuation, nous avons pu obtenir les solutions stationnaires et oscillatoires, ainsi que leur stabilité, jusqu'à l'apparition de la quasi-périodicité en fonction du nombre de Grashof *Gr* et pour un nombre de Prandtl allant de 0 à 0,025. Ensuite, pour un éventuel contrôle des instabilités, nous nous sommes intéressés aux effets induits par la rotation de la cavité. Nous avons tout d'abord considéré un modèle monodimensionnel que nous avons développé durant cette thèse. Ce modèle analytique, bien que simplifié, est en très bon accord avec les observations en dynamique des écoulements atmosphériques (déviation des masses fluides vers la droite de la composante de vitesse dominante et vents thermiques). La stabilité linéaire de cet écoulement est ensuite effectuée en fonction du taux de rotation donné par le nombre de Taylor et du nombre de Grashof pour un nombre de Prandtl allant de 0 à 10. Nous avons pu montrer à travers ce modèle que la rotation possède un caractère stabilisant vis-à-vis de ce type d'écoulement. Enfin, nous nous sommes focalisés sur les effets de la rotation sur l'écoulement pleinement tridimensionnel dans la cavité de dimensions $4 \times 2 \times 1$. Nous avons mis en évidence deux régimes d'écoulements : un régime dominé par la convection, où la circulation du fluide est déviée par la rotation dans la diagonale de la cavité, et un deuxième régime dominé par la rotation où la circulation du fluide est concentrée dans les couches limites dites d'Ekman et de Stewartson. Un très bon accord est observé entre le modèle analytique simplifié et la simulation numérique tridimensionnelle.

Mots clés : Convection, instabilités, bifurcations, continuation numérique, écoulement en rotation.

ABSTRACT

Hydrodynamic instabilities in laterally heated cavities play an important role in some material processing techniques such as the horizontal Bridgman process. Indeed, the fluid (liquid metal to be solidified) is the seat of a thermoconvective circulation due to the existence of a horizontal temperature gradient which is likely to become unsteady via oscillatory instabilities. The knowledge and the control of these instabilities are thus essential in order to be able to improve the quality of the crystals obtained by this technique.

In this thesis, we are first interested in the instabilities of the convective circulation in a three-dimensional cavity of dimensions $4 \times 2 \times 1$ (length $\times$ width $\times$ height). Thanks to the numerical continuation techniques, we were able to obtain the stationary and oscillatory solutions, as well as their stability, until the appearance of the quasi-periodicity according to the Grashof number Gr and for a Prandtl number Pr ranging from 0 to 0.025.

Then, the effects induced by a rotation of the cavity around the vertical axis parallel to gravity (for a possible control of the instabilities) are studied and a one-dimensional model developed during this thesis was first considered. This analytical model, although simplified, is in very good agreement with the observations of the atmospheric flows (deviation of the fluid masses towards the right of the component of the dominant velocity and thermal winds). The linear stability of this flow as well as an energy analysis at the thresholds are then performed as a function of the rotation rate given by the Taylor number Ta and the Grashof number Gr for a Prandtl number Pr ranging from 0 to 10. Through this model, we have been able to show that the rotation has a stabilizing effect on this type of flow.

We finally focused on the effects of this type of rotation on the steady fully three-dimensional flow observed in the cavity $4 \times 2 \times 1$ at low Grashof numbers. We have highlighted two flow regimes: a regime dominated by convection where the fluid circulation, deviated by the rotation, occurs in the diagonal of the cavity, and a second regime dominated by rotation where the fluid circulation is concentrated in the so-called Ekman and Stewartson boundary layers. A very good agreement is observed between the simplified analytical model and the three-dimensional numerical simulation.

Key words: Convection, instabilities, bifurcations, numerical continuation, rotating flow.

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières i

Liste des figures iii

Liste des tableaux viii

Nomenclature ix

Introduction générale & problématique 1

1 Revue Bibliographique 3
- 1.1 Introduction . . . 3
- 1.2 Paramètres physiques de la convection naturelle . . . 4
- 1.3 Travaux antérieurs . . . 5
  - 1.3.1 Modèle monodimensionnel de Hadley . . . 6
  - 1.3.2 Convection en cavité bidimensionnelle . . . 10
  - 1.3.3 Convection en cavité tridimensionnelle . . . 15
- 1.4 Convection en rotation . . . 18
- 1.5 Conclusion . . . 19

2 Modèle physique et méthodes numériques 21
- 2.1 Introduction . . . 21
- 2.2 Équations du mouvement . . . 22
  - 2.2.1 Équation de conservation de la masse . . . 22
  - 2.2.2 Équation de la quantité de mouvement . . . 23
  - 2.2.3 Équation de l'énergie . . . 23
- 2.3 Conditions initiales et aux limites . . . 23
  - 2.3.1 Conditions initiales . . . 23
  - 2.3.2 Conditions aux limites . . . 23
- 2.4 Adimensionnement des équations du mouvement . . . 24
- 2.5 Description du code numérique tridimensionnel . . . 25
  - 2.5.1 Intégration temporelle et algorithme de projection . . . 25
  - 2.5.2 Méthode des éléments spectraux . . . 27
- 2.6 Technique de continuation . . . 30
  - 2.6.1 Continuation des états stationnaires . . . 31
  - 2.6.2 Continuation des états oscillatoires . . . 33
- 2.7 Conclusion . . . 37

3 Analyse des bifurcations d'écoulements en cavité tridimensionnelle différentiellement chauffée **38**
3.1 Introduction . . . 38
3.2 Écoulement de base à bas nombres de Grashof . . . 39
3.3 Bifurcations des solutions stationnaires . . . 41
3.4 Bifurcations des solutions oscillatoires . . . 46
3.4.1 Cas $Pr = 0,025$ . . . 48
3.4.2 Cas $Pr = 0,015$ . . . 48
3.4.3 Cas $Pr = 0,005$ . . . 50
3.4.4 Cas $Pr = 0$ . . . 53
3.4.5 Vue globale de toutes les solutions . . . 54
3.5 Évolution des scénarios de transition . . . 56
3.6 Conclusion . . . 62

4 Stabilité de l'écoulement de Hadley en rotation **65**
4.1 Introduction . . . 65
4.2 Détermination de l'écoulement de base . . . 66
4.2.1 Profils de vitesse . . . 67
4.2.2 Couches d'Ekman et vents thermiques . . . 71
4.2.3 Profils de température . . . 72
4.3 Analyse de stabilité linéaire . . . 73
4.3.1 Instabilité de cisaillement . . . 77
4.3.2 Instabilité thermique de Rayleigh . . . 79
4.3.3 Instabilité oscillatoire . . . 84
4.4 Analyse énergétique aux seuils . . . 87
4.4.1 Énergie cinétique de la perturbation . . . 87
4.4.2 Énergie thermique de la perturbation . . . 88
4.4.3 Contributions au nombre de Grashof critique . . . 89
4.4.4 Analyse des résultats . . . 89
4.5 Conclusion . . . 98

5 Convection tridimensionnelle en rotation **100**
5.1 Introduction . . . 100
5.2 Comparaison avec le modèle mono-dimensionnel . . . 100
5.3 Effets tridimensionnels . . . 101
5.3.1 Régime convectif . . . 103
5.3.2 Régime géostrophique . . . 103
5.3.3 Couches limites . . . 106
5.4 Conclusion . . . 108

Conclusion générale & perspectives **109**

A Production scientifique **112**

Références bibliographiques **113**

LISTE DES FIGURES

1.1 Illustration graphique des deux situations extrêmes de chauffage 4
1.2 Profils monodimensionnels de Hadley. (a) Profil de vitesse normalisé par le nombre de Grashof. (b) Profils de température correspondant aux parois parfaitement conductrices (en bleu) et aux parois parfaitement isolantes (en rouge). 6
1.3 Illustration graphique des deux modes déstabilisant le profil de Hadley à des faibles nombres de Prandtl 7
1.4 Caractéristiques et synthèse de l'effet des conditions aux limites thermiques sur l'apparition des instabilités hydrodynamiques dans le cas de la configuration rigide-rigide d'après Laure & Roux (1989). 8
1.5 Caractéristiques et synthèse de l'effet des conditions aux limites thermiques sur l'apparition des instabilités hydrodynamiques dans le cas de la configuration rigide-libre d'après Laure & Roux (1989). 8
1.6 Schéma de la cavité rectangulaire montrant les plans centraux V_l parallèle et V_t perpendiculaire au gradient de température. 11
1.7 Nombre de Grashof critique en fonction du rapport d'aspect correspondant aux solutions bidimensionnelles stationnaires à un et à deux rouleaux. 12
1.8 Nombre de Grashof critique normalisé par le cas hydrodynamique correspondant à la bifurcation de Hopf en fonction du nombre de Hartmann. . . 17
1.9 Circulation atmosphérique avec près de l'équateur la cellule de Hadley et les vents alizés. 18

2.1 Géométrie et système de coordonnées. Les parois froide et chaude aux températures T_F et T_C sont situées respectivement à $x = -L/2$ et $x = +L/2$ et la cavité est soumise à la rotation autour de l'axe vertical Oz. 22
2.2 Illustration de la section de Poincaré et de la trajectoire d'une solution périodique $\vec{q}(t) = \vec{q}(t+T)$. Figure adaptée de Seydel (2010). 33

3.1 Configuration étudiée de la cavité parallélépipédique chauffée latéralement. 39
3.2 Écoulement stationnaire de base pour $Pr = 0,025$ et $Gr = 3 \times 10^4$. 40
3.3 Diagramme de bifurcation stationnaire (u^* en fonction de Gr) pour $Pr = 0,015$. 43
3.4 Suivi des principaux points de bifurcation dans l'espace de paramètre (Pr, Gr_c). 44
3.5 Contours de la composante longitudinale $u'(y,z)$ de la perturbation dans la section transversale V_t pour les modes critiques (partie réelle) associés à différents points de bifurcation. 45

3.6 Solutions convectives pour $Pr = 0,025$. 47
3.7 Solutions convectives pour $Pr = 0,015$. 49
3.8 Solutions convectives pour $Pr = 0,005$. 50
3.9 Variation des normes des multiplicateurs de Floquet en fonction du nombre de Grashof pour $Pr = 0,005$. 51
3.10 Solutions convectives pour $Pr = 0$. 53
3.11 Vue globale de la plage d'existence en fonction de Gr pour toutes les solutions obtenues à partir de la solution stationnaire de base jusqu'aux états quasi-périodiques, pour quatre nombres de Prandtl dans l'intervalle $0 \leqslant Pr \leqslant 0,025$. 55
3.12 Diagramme de bifurcation $u^*(Gr)$ pour $Pr = 0,013$ montrant toutes les solutions convectives à partir de la solution stationnaire stable avec toutes les symétries jusqu'à l'apparition de la quasi-périodicité. 57
3.13 Évolutions temporelles $u^*(t)$ des solutions quasi-périodiques obtenues à $Pr = 0,013$ et $Gr = 46650$: état quasi-périodique avec symétrie S_c (en rouge) et sans symétrie (en bleu). 58
3.14 Suivi des points de bifurcation dans l'espace de paramètre (Pr, Gr_c) à très faibles nombres de Prandtl. 59
3.15 Diagramme de bifurcation pour $Pr = 1 \times 10^{-4}$. 61

4.1 Géométrie du modèle simplifié. 66
4.2 Effet du nombre de Taylor Ta sur les composantes (a) longitudinale $u_b(z)/Gr$ et (b) transverse $v_b(z)/Gr$ de la vitesse, normalisées par le nombre de Grashof. 68
4.3 Maximum des composantes de la vitesse $u_{b,max}/Gr$ (carrés), $v_{b,max}/Gr$ (cercles) et $(u_{H,max} - u_{b,max})/Gr$ (triangles) en fonction du nombre de Taylor Ta. 69
4.4 Profils de vitesse longitudinale $u_b(z)$ et transverse $v_b(z)$ dans la moitié inférieure de la cavité ($-0.5 \leqslant z \leqslant 0$). 70
4.5 Effet du nombre de Taylor Ta sur le profil vertical de la température $T_b(z)/(GrPr)$: (a) Parois thermiquement isolantes ; (b) Parois thermiquement conductrices. 73
4.6 Seuils d'instabilité Gr_c en fonction de Pr pour les modes dominants à $Ta = 0$: (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices. 75
4.7 Variation des seuils critiques Gr_c en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents types d'instabilités : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices. 76
4.8 Variation des seuils Gr_c correspondant à l'instabilité stationnaire de cisaillement en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices. 77
4.9 Variation de la norme du vecteur d'onde $|\vec{k}_c|$ correspondant à l'instabilité stationnaire de cisaillement en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices. 78
4.10 Variation de l'angle ϕ (l'angle que fait l'axe des rouleaux dans le plan xy) correspondant à l'instabilité stationnaire de cisaillement en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr (parois conductrices). 78

4.11 Structure du vecteur propre pour (a) $Ta = 0$ et (b) $Ta = 1000$ pour l'instabilité de cisaillement à l'état marginal ($Pr = 0,01$, parois thermiquement conductrices). 79

4.12 Iso-valeurs des seuils marginaux Gr_0 pour l'instabilité de Rayleigh (traits continus rouges) et de la fréquence angulaire correspondante σ_{i0} (traits discontinus noirs) dans l'espace des nombres d'ondes (k_x, k_y) pour $Pr = 0.7$. 80

4.13 Seuils marginaux Gr_0 de l'instabilité de Rayleigh (traits discontinus rouge et noir) et leur pulsation propre σ_{i0} (traits bleus continus) en fonction du nombre d'onde k_x pour $Pr = 0,7$. 81

4.14 Variation des seuils Gr_c correspondant à l'instabilité thermique de Rayleigh en fonction du nombre de Taylor Ta pour (a) $Pr = 0,7$ et (b) $Pr = 7$. Les seuils des modes stationnaire et oscillatoire sont présentés. Les encarts donnant $(Gr_c^{Osc} - Gr_c^{St})$ mettent en évidence le croisement possible des courbes critiques, croisement effectivement observé pour $Pr = 7$. . . . 82

4.15 Caractéristiques critiques des instabilités thermiques de Rayleigh en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) norme du vecteur d'onde critique $|\vec{k}_c|$; (b) pulsation critique $\sigma_{i,c}$ du mode oscillatoire à $Pr = 7$. 83

4.16 Variation de l'angle ϕ (l'angle que fait l'axe des rouleaux dans le plan xy) correspondant à l'instabilité thermique de Rayleigh en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr. 83

4.17 Structure du vecteur propre pour (a) $Ta = 0$ et (b) $Ta = 2500$ pour l'instabilité de Rayleigh à l'état marginal ($Pr = 0,7$, parois thermiquement conductrices) 84

4.18 Variation des seuils Gr_c correspondant à l'instabilité oscillatoire en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices. 85

4.19 Variation de la norme du vecteur d'onde $|\vec{k}_c|$ correspondant à l'instabilité oscillatoire en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices. 85

4.20 Variation de l'angle ϕ (l'angle que fait l'axe des rouleaux dans le plan xy) correspondant à l'instabilité oscillatoire en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices. 86

4.21 Variation de la pulsation propre $\sigma_{i,c}$ correspondant à l'instabilité oscillatoire en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices. 86

4.22 Contributions énergétiques locales le long de z pour l'instabilité de cisaillement à $Pr = 0,01$: (a) $Ta = 0$; (b) $Ta = 1000$; (c) $Ta = 5000$; (d) $Ta = 10000$. 90

4.23 (a) Contributions à l'énergie cinétique totale de la perturbation $K'_{s,U}$, $K'_{s,V}$ et K'_{buoy} et (b) ratios énergétiques R_U^K, R_V^K et R_b^K définissant Gr_{c0}/Gr_c en fonction du nombre de Taylor pour l'instabilité de cisaillement à $Pr = 0,01$. 91

4.24 Distributions locales le long de z de (a) $-(dU_b/dz)$, (b) $Re\{w'u'^*/|E_{visc}|\}$, (c) $-(dV_b/dz)$ et (d) $Re\{w'v'^*/|E_{visc}|\}$ pour l'instabilité de cisaillement à $Pr = 0,01$ et pour différentes valeurs de Ta. 92

4.25 Termes énergétiques globaux (K_i') en fonction du nombre de Prandtl pour (a) $Ta = 0$ et (b) $Ta = 500$ dans le cas de l'instabilité thermique de Rayleigh (mode stationnaire longitudinal). 93
4.26 Seuil de l'instabilité de Rayleigh exprimé en nombre de Rayleigh critique $Ra_c = Pr\,Gr_c$ en fonction du nombre de Prandtl Pr dans le cas sans rotation ($Ta = 0$). 94
4.27 Analyse énergétique de l'instabilité stationnaire de Rayleigh à $Pr = 0,7$ en fonction du nombre de Taylor. Termes globaux (a) dynamiques K_i' et (b) thermiques E_i' ainsi que les ratios (c) dynamiques (Éq. 4.32) et (d) thermiques (Éq. 4.33) correspondants. 95
4.28 Pour l'instabilité de Rayleigh au seuil ($Pr = 0,7$), profils spatiaux (a) du gradient de température vertical de l'écoulement de base $-(dT_b/dz)/(Gr\,Pr)$ et (b) du produit des perturbations marginales $Re\{\Theta'^{*}\,w'/|E_d|\}$, qui par intégration sur le volume donnent E_v''. 96
4.29 Analyse énergétique de l'instabilité oscillatoire de Rayleigh à $Pr = 7$ en fonction du nombre de Taylor. Termes globaux (a) dynamiques K_i' et (b) thermiques E_i' ainsi que les ratios (c) dynamiques (Éq. 4.32) et (b) thermiques (Éq. 4.33) correspondants. 96
4.30 (a) Contributions au bilan global de l'énergie cinétique de la perturbation marginale et (b) ratios R_U^K, R_V^K et R_b^K définissant Gr_{c0}/Gr_c en fonction du nombre de Taylor pour l'instabilité oscillatoire dans le cas de parois adiabatiques (traits discontinus, $Pr = 0,05$) et le cas de parois conductrices (traits continus, $Pr = 0,15$). 97

5.1 Comparaison des profils de vitesse u_b/Gr et v_b/Gr obtenus par le modèle analytique et par simulation numérique tridimensionnelle à $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^3$ en fonction du nombre de Taylor. 101
5.2 Nombre de Nusselt normalisé Nu^* en fonction du nombre de Taylor pour différents nombres de Prandtl et pour $Gr = 10^4$. Les encarts représentent les contours de la vitesse longitudinale $u(y,z)$ dans le plan transverse V_t à $x = 0$. 102
5.3 Contours de la composante longitudinale $u(y,z)$ dans le plan transverse V_t à $x = 0$, en fonction du nombre de Taylor pour $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^4$. . . 104
5.4 Iso-valeurs 3D de la composante longitudinale $u(x,y,z)$ correspondant en valeur absolue à $|u_{max}|/2$, positives (vertes) et négatives (rouges), en fonction du nombre de Taylor pour $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^4$. 104
5.5 Isothermes du champ de température $\Theta(x,z)$ dans le plan longitudinal V_l à $y = 0$ pour (a) $Ta = 10$ (régime convectif) et (b) $Ta = 1 \times 10^8$ (régime géostrophique). Les nombres de Grashof et de Prandtl sont fixés respectivement à $Gr = 10^4$ et $Pr = 0,01$. 105
5.6 Contours du module du champ de vitesse dans des plans transverses le long de la cavité, en fonction du nombre de Taylor pour $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^4$. 105
5.7 Schéma montrant le mécanisme proposé permettant de créer les rouleaux longitudinaux dans le cas de l'écoulement géostrophique à des grands nombres de Taylor. Vue de dessus de la cavité, x direction longitudinale, y direction transverse. 105

5.8 Maximums de la vitesse longitudinale en fonction du nombre de Taylor pour différents nombres de Prandtl et pour $Gr = 10^4$. 106
5.9 Profils de vitesse en régime géostrophique : (a) $u(z)$ à $x = y = 0$ indiquant la couche d'Ekman d'épaisseur δ_E et (b) $w(y)$ à $x = z = 0$ indiquant la couche de Stewartson d'épaisseur δ_S pour $Ta = 10^6$, $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^4$. Points numériques indiqués par des cercles noirs et interpolation Lagrangienne donnée par la ligne continue. 107
5.10 Épaisseurs des couches limites (a) d'Ekman δ_E et (b) de Stewartson δ_S en fonction du nombre de Taylor pour différents nombres de Prandtl et pour $Gr = 10^4$. 107

LISTE DES TABLEAUX

2.1 Coefficients de pondération implicites/explicites aux différents ordres d'intégration en temps d'après Karniadakis *et al.* (1991) 26
2.2 Coefficients ξ_i et champs f_i correspondant aux équations de Helmholtz et de Poisson. 28

3.1 Tests pour différents maillages portant sur la précision numérique du nombre de Grashof critique Gr_c pour deux bifurcations détectées (Hopf H_a^P et stationnaire fourche supercritique P_l^P) pour $A_X = 4$, $A_Y = 2$ et $Pr = 0,005$. Dans le cas du point de Hopf, la fréquence critique est aussi donnée. . . . 39
3.2 Seuils critiques Gr_c des principaux points de bifurcation (P pour bifurcation fourche *(pitchfork)*, H pour bifurcation de Hopf) sur les branches primaire (exposant P) et secondaire (exposant S) pour $Pr = 0$, $0,005$, $0,015$ and $0,025$. 42
3.3 Points d'intersection des courbes $Gr_c(Pr)$ des principaux points de bifurcation sur les branches primaire et secondaire dans l'intervalle étudié $0 \leqslant Pr \leqslant 0,025$. Définition des intervalles de Pr délimités par ces points. 56
3.4 Récapitulatif des différents écoulements stables, de l'état de base aux états quasi-périodiques. 62

4.1 Seuils critiques Gr_c correspondant au cas sans rotation ($Ta = 0$) avec des parois thermiquement isolantes. 75
4.2 Seuils critiques obtenus pour la convection sans rotation ($Ta = 0$) et la convection soumise à la rotation ($Ta = 100$). 76

NOMENCLATURE

Propriétés physiques du fluide

c_p	Capacité thermique massique	$J\,kg^{-1}\,K^{-1}$
α	Diffusivité thermique	$m^2\,s^{-1}$
β	Coefficient d'expansion thermique	K^{-1}
λ	Conductivité thermique	$W\,m^{-1}\,K^{-1}$
μ	Viscosité dynamique	$kg\,m^{-1}\,s^{-1}$
ν	Viscosité cinématique	$m^2\,s^{-1}$
ρ	Masse volumique	$kg\,m^{-3}$

Nombres adimensionnels

A_X	Rapport d'aspect dans la direction longitudinale Ox
A_Y	Rapport d'aspect dans la direction transversale Oy
Ek	Nombre d'Ekman
Gr	Nombre de Grashof
Ha	Nombre de Hartmann
Pr	Nombre de Prandtl
Nu	Nombre de Nusselt
Ta	Nombre de Taylor

Caractéristiques de la cavité

h	hauteur dans la direction Oz
L	Longueur dans la direction Ox
l	Largeur dans la direction Oy
T_C	Température de la paroi chaude
T_F	Température de la paroi froide
(x,y,y)	Variables d'espace respectivement dans les directions Ox, Oy et Oz
Ω	Rotation angulaire de la cavité en $rad\,s^{-1}$

Caractéristiques de l'écoulement

p	Champ de pression
T	Champ de température
$\vec{u}$	Champ de vitesse
(u,v,w)	Composantes de vitesse respectivement dans les directions Ox, Oy et Oz
Θ	Champ de température normalisé
S_a :	Toutes les symétries
S_w :	Sans aucune symétrie
S_π :	Symétrie de rotation axiale
S_c :	Symétrie par rapport au centre
S_l :	Symétrie de réflexion gauche/droite

Caractéristiques des instabilités

$\vec{k}$	Vecteur d'onde
k_x	Nombre d'onde dans la direction Ox
k_y	Nombre d'onde dans la direction Oy
σ	Valeur propre correspondant au mode propre critique
σ_r	taux de croissance de l'instabilité, $Re(\sigma)$
σ_i	pulsation propre de l'instabilité, $Im(\sigma)$

Points de bifurcation

Chaque point de bifurcation est désigné par

$$X_i^j$$

où

- $X = \{P, H\}$ est le type de la bifurcation
  - ➢ P pour *Pitchfork bifurcation*,
  - ➢ H pour *Hopf bifurcation*.
- $j = \{P, S, C_n\}$ est la branche de solution telle que
  - ➢ P : pour la branche primaire
  - ➢ S : pour la branche secondaire
  - ➢ C_n : pour une branche de cycles ayant la symétrie indiquée par n.
- $i = \{a, l, \pi, c, w\}$ indique la symétrie conservée par la bifurcation :
  - ➢ a : toutes les symétries,
  - ➢ w : sans aucune symétrie,
  - ➢ π : symétrie de rotation axiale,
  - ➢ c : symétrie par rapport au centre,
  - ➢ l : symétrie de réflexion gauche/droite.

INTRODUCTION GÉNÉRALE & PROBLÉMATIQUE

La convection thermique constitue l'un des phénomènes de transfert de chaleur les plus répandus et opérant à diverses échelles. Il est en effet impliqué, entre autres, dans les processus de mélange dans les mers et les océans (Stone, 1968, 1974; Kuhlbrodt *et al.*, 2007), la génération des champs magnétiques dans les planètes et les étoiles (Larmor, 1919; Glatzmaier & Roberts, 1995), le chauffage dans le domaine des énergies renouvelables (Bacharoudis *et al.*, 2007) et finalement dans les processus d'élaboration de matériaux tels que la solidification ou la fusion (croissance cristalline) (Pimputkar & Ostrach, 1981; Jaluria, 2000; Dhanaraj *et al.*, 2010; Lappa, 2010).

Dans le processus de solidification de type Bridgman horizontal, la solidification se fait d'une manière progressive et directionnelle dans un four où le fluide, confiné dans une cavité, est soumis à un gradient de température. Ce gradient varie entre la température du point de fusion du matériau considéré à une extrémité de la zone liquide et une température au dessus de ce point de fusion à l'autre extrémité. La solidification est alors induite en déplaçant très lentement la cavité dans le four ou inversement le four par rapport à la cavité, ou en abaissant lentement la température du four, la cavité et le four étant immobiles. Ce procédé de solidification s'accompagne d'une circulation convective du fluide à l'intérieur de la cavité qui est due à l'existence dans le fluide d'un gradient de température horizontal, perpendiculaire à la gravité (Lappa, 2010; Dhanaraj *et al.*, 2010).

L'un des problèmes rencontrés dans ce cas est l'apparition de striations macroscopiques périodiques de composition dans le cristal obtenu qui affectent considérablement sa qualité et ses propriétés physiques. Ces striations résultent de l'enregistrement, dans la partie solidifiée, des fluctuations de composition dues aux instabilités hydrodynamiques qui se sont développées dans le bain fondu au fur et à mesure que le front de solidification avance (Dhanaraj *et al.*, 2010). Les connaissances sur ces instabilités ont progressé depuis les premières études théoriques (Hart, 1972) et expérimentales (Hurle, 1966; Hurle *et al.*, 1974), mais beaucoup reste à faire pour mieux connaître ces instabilités et la façon de les maîtriser et éventuellement les contrôler. C'est dans ce contexte que se situe cette thèse.

Le travail que nous présentons ici, constitué de cinq chapitres, s'inscrit dans le cadre d'une cotutelle de thèse entre l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne et l'Ecole Centrale de Lyon membre de l'Université de Lyon et fait partie d'un projet Franco-Maghrébin PHC-Maghreb intitulé *"Modéliser la purification du silicium photovoltaïque par solidification dirigée"* réunissant des équipes de recherche venant de la Tunisie, du Maroc, de l'Algérie et de la France.

Le premier chapitre présente la bibliographie relative à la convection naturelle au sein des fluides à faibles nombres de Prandtl (essentiellement les métaux liquides) dans des cavités étendues et soumises à un gradient de température horizontal. Les études incluant un effet de rotation sont aussi mentionnées et les paramètres de contrôle pertinents dans

ce type de situations sont enfin présentés.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des équations du mouvement et des méthodes numériques employées pour les résoudre. Les techniques de continuation de solutions stationnaires (points fixes) et oscillatoires (cycles limites) y sont également décrites.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes focalisés sur la dynamique des écoulements dans une cavité tridimensionnelle de dimensions $4 \times 2 \times 1$ (longueur $\times$ largeur $\times$ hauteur). L'enchainement des solutions convectives stationnaires et oscillatoires, de la solution stationnaire de base jusqu'aux solutions quasi-périodiques, est mis en évidence sur une large gamme de nombres de Prandtl correspondant aux métaux liquides.

Dans le quatrième chapitre, les effets induits par la rotation de la cavité sont étudiés dans le cadre d'un modèle simplifié monodimensionnel que nous avons développé. L'état stationnaire de base ainsi que les instabilités qui s'y développent sont alors étudiés en fonction de l'intensité de cette rotation.

Après avoir étudié l'influence de la rotation sur le modèle simplifié, nous étendons cette étude aux effets tridimensionnels dans le dernier chapitre. Des changements importants de la structure de l'écoulement dus à la rotation y sont décrits et discutés.

Le travail réalisé est à caractère fondamental. Toutefois, il constitue une première étapes importante, utile pour aller dans l'avenir vers des situations plus appliquées et pouvoir simuler de façon réaliste les procédés de croissance cristalline de type Bridgman horizontal.

CHAPITRE 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Sommaire

1.1 Introduction 3
1.2 Paramètres physiques de la convection naturelle 4
1.3 Travaux antérieurs 5
1.3.1 Modèle monodimensionnel de Hadley 6
1.3.2 Convection en cavité bidimensionnelle 10
1.3.3 Convection en cavité tridimensionnelle 15
1.4 Convection en rotation 18
1.5 Conclusion 19

1.1 Introduction

La convection naturelle est un mode de transport de chaleur dû au mouvement d'un fluide provoqué par la variation de sa masse volumique dans le champ de gravité, sans action extérieure (pompe ou autres). La variation de masse volumique est le plus souvent liée à des variations de température dues par example à des gradients de température imposés. Selon l'orientation de la gravité par rapport à ces gradients de température, la convection naturelle se manifeste d'une manière complètement différente et donne donc lieu à des phénomènes très divers.

Si le gradient de température et la gravité sont colinéaires (Fig 1.1a), la configuration présente un écoulement de base nul (solution diffusive) qui se déstabilise au dessus d'un certain seuil lié au gradient de température imposé et bifurque vers un état convectif sous la forme de rouleaux contrarotatifs. L'instabilité correspondante est connue sous le nom d'instabilité de Rayleigh-Bénard. La condition d'apparition de cette instabilité est que le fluide soit chauffé par le bas, ce qui engendre une stratification instable de densité. En revanche, si le gradient de température et la gravité sont orthogonaux (Fig. 1.1b), la configuration en question exhibe un autre écoulement de base connu sous le nom de circulation de Hadley où on observe un écoulement ascendant à la paroi chaude et descendant à la paroi froide produisant ainsi un seul rouleau convectif dans le fluide. Cet écoulement se déstabilise vers des états stationnaires ou oscillatoires qu'on examinera en détails par la suite. Des revues bibliographiques concernant ces deux situations ont été publiées par Lappa (2007a,b).

Bien évidement, il existe aussi le cas intermédiaire des cavités inclinées où on passe d'une situation à l'autre avec une phénoménologie plus ou moins complexe (Delgado-Buscalioni & Crespo del Arco, 1999; Delgado-Buscalioni, 2001; Torres *et al.*, 2013, 2014; Williamson *et al.*, 2016). Une description assez complète de toutes ces situations d'une manière académique et progressive peut être trouvée dans Lappa (2010).

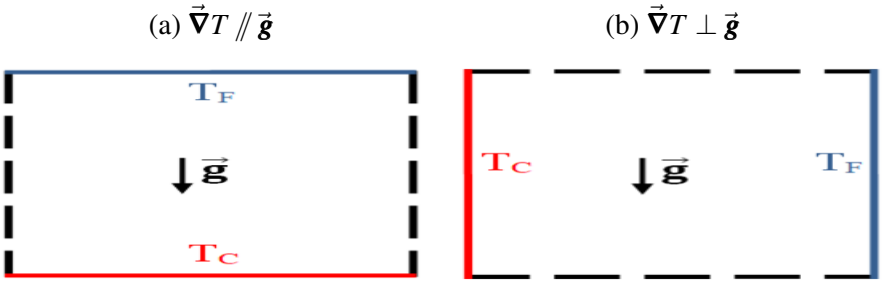


FIGURE 1.1 – Illustration graphique des deux situations extrêmes de chauffage. (a) et (b) représentent respectivement le cas du chauffage par le bas (situation de Rayleigh-Bénard) et le cas du chauffage latéral (situation de Hadley). T_F et T_C sont des températures imposées aux parois isothermes telles que $T_C > T_F$.

1.2 Paramètres physiques de la convection naturelle

Les groupements adimensionnels jouent un rôle important en physique. Ils permettent de comparer des effets antagonistes, des temps caractéristiques, des forces, etc. Dans la mesure où la convection naturelle n'échappe pas à la règle, il est important d'introduire les groupements intervenant dans notre étude afin de les utiliser avec clarté par la suite.

Le nombre de Grashof

Le nombre de Grashof représente le rapport entre les forces de flottabilité et les forces visqueuses. Ce nombre est très utilisé en convection naturelle notamment en configuration différentiellement chauffée. Il est donné par

$$Gr = \frac{g\beta(T_C - T_F)h^3}{\nu^2}$$

où g est la gravité, β est le coefficient d'expansion thermique, h est la hauteur de la cavité, T_C est la température de la paroi chaude, T_F est la température de la paroi froide et ν est la viscosité cinématique du fluide.

Il est aussi judicieux dans les problèmes de cavités chauffées latéralement de définir le nombre de Grashof basé sur le gradient global de température $(T_C - T_F)/L$ avec L la longueur de la cavité (Crochet *et al.*, 1987). Il vient alors

$$Gr = \frac{g\beta(T_C - T_F)h^3}{A_X\,\nu^2}$$

où $A_X = L/h$ est le rapport d'aspect dans la direction longitudinale de la cavité. Dans ce qui suit, et durant toute cette étude, nous retiendrons cette définition du nombre de Grashof [1].

1. Cette définition permet d'avoir le même nombre de Grashof pour le même gradient de température indépendamment de la longueur de la cavité.

Le nombre de Prandtl

C'est le rapport entre la viscosité cinématique ν et la diffusivité thermique $\alpha = \lambda/(\rho\, c_p)$ où λ est la conductivité thermique du fluide, ρ est sa masse volumique et c_p est sa capacité thermique massique. D'un point de vue physique, il indique le couplage entre la thermique et la dynamique [1], par exemple à travers la déformation des isothermes par le champ de vitesses :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Il est à noter que le produit des nombres de Grashof et de Prandtl donne le nombre de Rayleigh, à savoir,

$$Ra = Gr\,Pr.$$

Ce nombre adimensionnel est souvent utilisé dans des situations de chauffage par le bas (i. e. convection de Rayleigh-Bénard).

Le nombre de Taylor

Il compare les forces dues à la rotation aux forces visqueuses [2]. Il est donné par

$$Ta = \frac{4\Omega_0^2 h^4}{\nu^2}$$

où Ω_0 représente la rotation angulaire du système.

1.3 Travaux antérieurs

La littérature consacrée à l'étude de la convection naturelle se développant dans une cavité rectangulaire soumise à un chauffage latéral [3] où un gradient de température horizontal perpendiculaire à la gravité existe est très abondante. Allant de situations simplifiées d'une couche fluide confinée entre deux plans infinis (ou entre un plan et une surface libre) jusqu'aux problèmes pleinement tridimensionnels, cette situation suscite l'intérêt des physiciens et des ingénieurs tant sur le plan fondamental que sur le plan appliqué en raison de sa présence dans diverses situations tels que les énergies renouvelables, l'élaboration de matériaux, les écoulements planétaires et l'effet dynamo. Historiquement, Batchelor (1954) fut le premier à avoir étudié, dans le cadre d'une étude bidimensionnelle, l'écoulement engendré par un gradient de température horizontal dans une cavité allongée dans la direction verticale. Notons que cette revue bibliographique ne concerne que les travaux liés aux cavités allongées horizontalement qui sont le cas étudié dans cette thèse.

1. D'après Bejan (2013), le nombre de Prandtl permet d'évaluer le rapport entre les épaisseurs des couches limites thermique et dynamique, respectivement δ_T et δ_D qui sont telles que $\delta_T \sim Pr^{-1/n}\,\delta_D$ avec $n = 3$ pour $Pr << 1$ et $n = 2$ pour $Pr >> 1$. Le cas $Pr << 1$, implique une diffusion rapide de la chaleur par rapport à la diffusion de la quantité de mouvement tandis que $Pr >> 1$ représente la situation inverse.

2. Il existe aussi le nombre d'Ekman tel que $Ek = Ta^{-1/2}$. Ce nombre est souvent utilisé en mécanique des fluides géophysiques.

3. Parfois appelée *cavité différentiellement chauffée*.

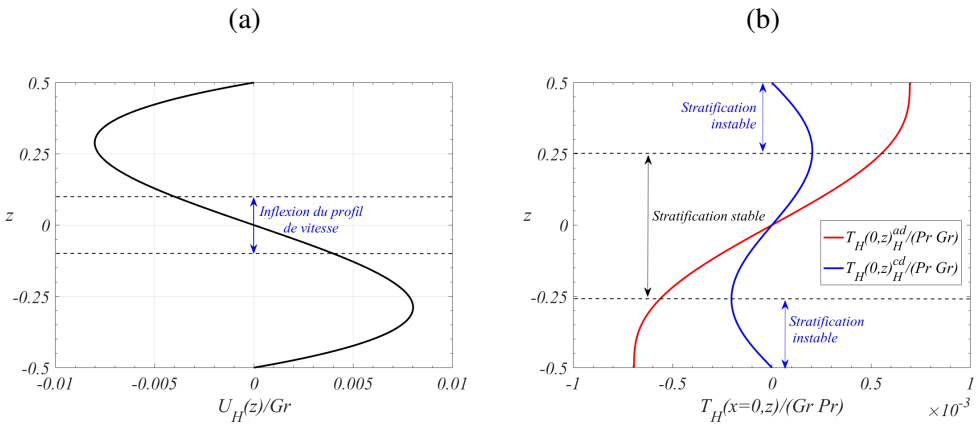


FIGURE 1.2 – Profils monodimensionnels de Hadley. (a) Profil de vitesse normalisé par le nombre de Grashof. (b) Profils de température correspondant aux parois parfaitement conductrices (en bleu) et aux parois parfaitement isolantes (en rouge).

1.3.1 Modèle monodimensionnel de Hadley

Le modèle mono-dimensionnel de Hadley (Hadley, 1735) est une vision simplifiée de l'écoulement de convection naturelle créé par un gradient de température horizontal où les parois isothermes (chaude et froide) sont supposées être très loin du cœur de l'écoulement, mais permettant tout de même un retour de ce dernier et donc une conservation de la masse. Dans ce cas, les équations du mouvement ainsi que l'équation de conservation de l'énergie admettent une solution analytique sous la forme d'un écoulement parallèle qui ne dépend que de la direction verticale Oz [1] et donnant un profil de vitesse cubique $U_H(z)$. Les profils de vitesse et de température dans le cas de parois rigides et pour z pris entre $-1/2$ et $1/2$ sont (Hart, 1972) :

$$U_H(z) = Gr\left(\frac{z^3}{6} - \frac{z}{24}\right), \tag{1.1}$$

pour la vitesse, et

$$T_H^{ad}(x,z) = x + GrPr\left(\frac{z^5}{120} - \frac{z^3}{144} + \frac{z}{384}\right), \tag{1.2a}$$

$$T_H^{cd}(x,z) = x + GrPr\left(\frac{z^5}{120} - \frac{z^3}{144} + \frac{7z}{5760}\right), \tag{1.2b}$$

pour les profils de température, respectivement dans le cas de parois parfaitement isolantes (Eq. 1.2a) ou parfaitement conductrices (Eq. 1.2b). Ces profils (Eqs. 1.1, 1.2a & 1.2b) sont tracés sur la figure 1.2.

L'écoulement parallèle de Hadley est important du point de vue de la théorie de la stabilité linéaire et a fait l'objet de plusieurs études depuis Hart (1972) et jusqu'à présent en incluant les effets de la rotation (Medelfef *et al.*, 2017) et du champ magnétique (Kaddeche *et al.*, 2003; Hudoba *et al.*, 2016; Hudoba & Molokov, 2018). En effet, le profil de vitesse est cubique, proportionnel au nombre de Grashof et admet un point d'inflexion en $z = 0$ (voir Fig. 1.2a), ce qui le rend potentiellement instable vis-à-vis des instabilités de cisaillement. D'un autre côté, les profils de température (Fig. 1.2b) montrent une

1. On retrouve aussi une dépendance en x dans les profils de température qui est due au gradient de température imposé. La solution est alors écrite sous la forme $T(x,z) = x + f(z)$ avec $f(z)$ à déterminer.

région de stratification stable de densité pour $-0,25 \lesssim z \lesssim +0,25$ interagissant avec un écoulement parallèle ce qui rend l'écoulement susceptible de développer des instabilités oscillatoires. Finalement, dans le cas de parois parfaitement conductrices (Fig. 1.2b), il existe une région près des parois où la stratification de densité est inversée (situation instable) donnant la possibilité d'avoir des instabilités de type Rayleigh-Bénard d'origine thermique.

L'étude de Hart (1972) est considérée comme l'une des premières études concernant la stabilité de l'écoulement de Hadley. Hart (1972) montre l'existence de deux modes d'instabilités qui dépendent du nombre de Prandtl. Le premier mode (Fig. 1.3a), dominant pour $Pr \to 0$, est une instabilité de cisaillement caractérisée par l'apparition de rouleaux transversaux stationnaires dont l'axe est perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement de base. Le deuxième mode (Fig. 1.3b), dominant pour des $Pr \sim O(10^{-1})$, est une instabilité oscillatoire caractérisée par des rouleaux longitudinaux dont l'axe est aligné avec la direction de l'écoulement de base produisant ainsi des ondes progressives voyageant dans la direction transverse. Une illustration graphique des deux modes en question est donnée sur la figure 1.3.

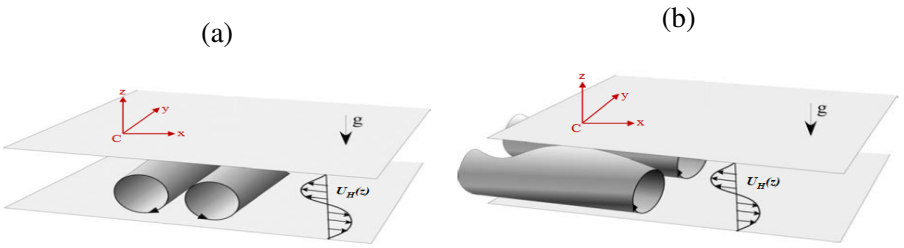


FIGURE 1.3 – Illustration graphique des deux modes déstabilisant le profil de Hadley à des faibles nombres de Prandtl. (a) mode transverse stationnaire (mode de cisaillement) et (b) mode longitudinal oscillatoire. D'après Lappa (2010).

D'autres études de stabilité ont été entreprises après l'étude de Hart (1972), notamment par Gill (1974), Laure (1987), Laure & Roux (1989), Kuo & Korpela (1988), Wang & Korpela (1989) et Gershuni *et al.* (1992) afin d'approfondir les résultats obtenus précédemment et d'élucider l'origine des oscillations (celles-ci sont le résultat d'équilibre entre la stratification stable en densité et l'inertie d'après Gill (1974)), les effets du nombre de Prandtl, des forces capillaires et des conditions aux limites thermiques et dynamiques.

Plus précisément, les études de Laure (1987) et Laure & Roux (1989) montrent que la déstabilisation de l'écoulement de Hadley vers des états stationnaires bidimensionnels ou oscillatoires tridimensionnels (modes discutés par Hart (1972)) dépend du nombre de Prandtl et aussi des conditions aux limites.

En effet, dans le cas des conditions dynamiques de type parois *rigide-rigide*, la condition thermique (isolation/conduction) n'a pas d'effet sur la longueur d'onde des rouleaux stationnaires transversaux mais sur le domaine d'apparition en fonction du nombre de Prandtl, alors que la longueur d'onde des instabilités oscillatoires se trouve diminuée lorsqu'on passe du cas des parois adiabatiques au cas des parois conductrices (voir Fig. 1.4).

L'existence d'une surface libre ou de conditions de type *rigide-libre* supprime complètement les rouleaux stationnaires en faveur d'un écoulement oscillatoire bidimensionnel, puis tridimensionnel quand le nombre de Prandtl est augmenté (voir Fig. 1.5). Dans ce cas, l'effet des forces thermo-capillaires peut être stabilisant lorsque ces forces agissent

dans la même direction que la force de flottabilité ou déstabilisant dans le cas contraire en favorisant l'apparition et le développement des instabilités hydrodynamiques.

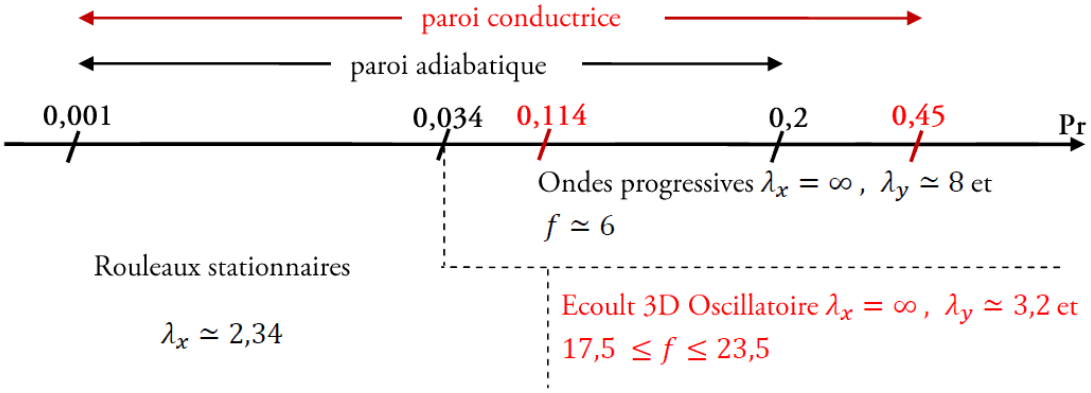


FIGURE 1.4 – Caractéristiques et synthèse de l'effet des conditions aux limites thermiques sur l'apparition des instabilités hydrodynamiques dans le cas de la configuration rigide-rigide d'après Laure & Roux (1989).

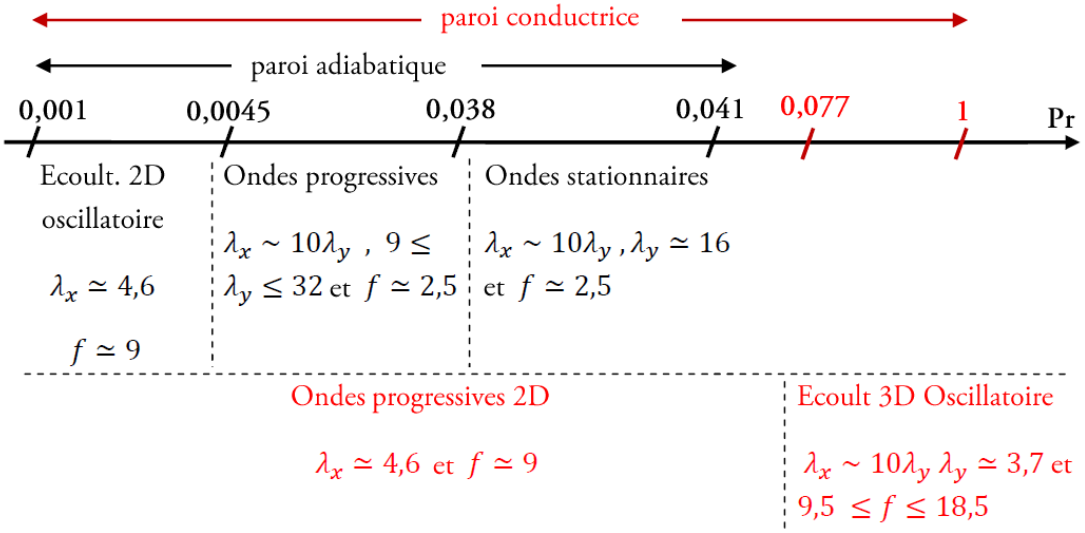


FIGURE 1.5 – Caractéristiques et synthèse de l'effet des conditions aux limites thermiques sur l'apparition des instabilités hydrodynamiques dans le cas de la configuration rigide-libre d'après Laure & Roux (1989).

Par ailleurs, Gershuni *et al.* (1992) ont mis en évidence l'existence d'une instabilité de type Rayleigh-Bénard due à la stratification instable de densité dans la région près des parois dans le cas des parois conductrices et pour des nombres de Prandtl $Pr > 0,44$. Cette instabilité se manifeste par des rouleaux longitudinaux stationnaires d'axe parallèle à la direction principale de l'écoulement de base et localisés le long des parois conductrices.

Le contrôle des instabilités dans le cas de l'écoulement de Hadley entre deux plaques planes et rigides a aussi fait l'objet de plusieurs études, notamment en introduisant un champ magnétique vertical, longitudinal ou transverse (Kaddeche *et al.*, 2003; Hudoba *et al.*, 2016; Hudoba & Molokov, 2018) ou en utilisant des ondes acoustiques (Achour *et al.*, 2005; Dridi *et al.*, 2007, 2010).

Dans le cas de fluides conducteurs d'électricité (métaux liquides à faible nombre de Prandtl en particulier), plusieurs études ont été faites pour explorer la structure de l'écoulement magnétohydrodynamique de Hadley et voir l'effet du champ magnétique sur les instabilités auxquelles cet écoulement est soumis. Le principal paramètre de contrôle est ici le nombre de Hartmann Ha.

Kaddeche *et al.* (2003) ont étudié l'effet d'un champ magnétique sur l'écoulement de Hadley entre deux plans infinis avec les trois orientations verticale, longitudinale et transverse. Dans le cas d'un champ magnétique horizontal (longitudinal ou transverse) l'écoulement de base reste inchangé $U_H(z)$ tandis que pour un champ magnétique vertical, le champ de base change et devient fonction du nombre Hartmann Ha tout en restant proportionnel au nombre de Grashof Gr.

Le champ magnétique vertical stabilise fortement le mode stationnaire transverse dû au cisaillement à des faibles nombres de Hartmann (typiquement $Ha \simeq 10$) jusqu'à sa suppression complète. Le seuil critique $Gr_c(Ha)$ suit une loi exponentielle de type $Gr_c(Ha) \sim \exp(Ha^2)$. Cette forte stabilisation est due à la diminution du cisaillement dans l'écoulement de base. L'instabilité oscillatoire est aussi stabilisée mais d'une manière moins efficace suivant une loi de type $Gr_c(Ha) \sim Ha^2$. Finalement, les champs magnétiques horizontaux (longitudinal et transverse) stabilisent aussi les deux modes, mais d'une manière moins efficace telle que $Gr_c(Ha) \sim Ha$.

Plus récemment, les études de Hudoba *et al.* (2016) et Hudoba & Molokov (2018) ont examiné les effets d'un champ magnétique vertical et du nombre de Prandtl afin d'étendre l'étude aux solutions électrolytes. Pour des faibles nombres de Prandtl, ces études confirment les résultats obtenus par Kaddeche *et al.* (2003) en ce qui concerne la disparition du mode transverse stationnaire et mettent en évidence le développement d'autres instabilités lorsque le nombre de Hartmann est augmenté.

Pour des parois thermiquement conductrices et après la disparition de l'instabilité de cisaillement ($Ha \gtrsim 10$), l'origine des instabilités devient uniquement thermique due à la stratification instable de densité dans la région des parois donnant ainsi des modes longitudinal oscillatoire, longitudinal stationnaire, longitudinal oscillatoire et finalement transverse oscillatoire lorsque le nombre de Hartmann augmente. Le nombre de Grashof critique varie suivant la loi $Gr_c(Ha) \sim Ha^2$ que l'on retrouve dans le cas de l'instabilité de Rayleigh-Bénard classique (Chandrasekhar, 1961).

Par ailleurs, pour des parois thermiquement isolantes et en augmentant le nombre de Hartmann, on note que les instabilités dominantes sont les modes classiques retrouvés par Hart (1972) auxquels se rajoute une troisième instabilité caractérisée par des rouleaux longitudinaux stationnaires pour des nombres de Hartmann élevés et dont le seuil suit la loi cubique $Gr_c(Ha) \sim Ha^3$.

En plus de l'effet d'un champ magnétique, le contrôle de l'écoulement convectif par ondes acoustiques (*acoustic streaming* [1]) semble être intéressant d'un point de vue application ; ce dernier ne se limite pas aux fluides conducteurs d'électricité. Achour *et al.* (2005), Dridi *et al.* (2007, 2010) ont étudié la stabilité linéaire de l'écoulement induit par l'effet combiné d'un gradient de température longitudinal et de l'*acoustic streaming* entre deux plaques horizontales infinies. Dans ce cas, l'écoulement de base est une superposition de l'écoulement classique de Hadley $U_H(z)$ et une partie due au type de l'*acoustic*

1. Il exist deux types d'*acoustic streaming*. Le *Rayleigh-Schlichting streaming* dans lequel la dissipation se fait dans une couche limite très fine et l'entrainement acoustique est introduit à travers les conditions aux limites, et l'*Eckart streaming* où l'écoulement est généré à l'intérieur du faisceau ultrasonore et l'entrainement acoustique est introduit comme une force de volume agissant sur tout le fluide.

streaming $U_{ac}(z)$.

Achour *et al.* (2005) considèrent l'effet d'une onde stationnaire plane sur les instabilités bidimensionnelles de cisaillement (mode transversaux, Fig. 1.3a) et tridimensionnelles oscillatoires (mode longitudinaux, Fig. 1.3b). Dans ce cas, il s'agit d'un *Rayleigh-Schlichting streaming* où l'intensité de l'onde acoustique est définie par un nombre de Reynolds Re_ω. Pour des faibles nombres de Reynolds $Re_\omega < 10^2$, le seuil critique Gr_c correspondant à l'apparition de ces instabilités reste le même. Lorsque le nombre de Reynolds est augmenté, les modes transverse et longitudinal subissent une stabilisation linéaire ($Gr_c \sim Re_\omega$). Finalement, la stabilisation du mode transverse devient moins efficace pour des valeurs de Reynolds $Re_\omega > 5000$ en suivant une loi de type $Gr_c \sim \sqrt{Re_\omega}$. Il est aussi à noter que le mode transverse, stationnaire dans le cas de l'écoulement de Hadley pur ($Re_\omega = 0$), devient oscillatoire dès lors que $Re_\omega > 0$.

En plus de ces deux modes d'instabilité, Achour *et al.* (2005) observent l'apparition d'un autre mode d'instabilité correspondant à des rouleaux stationnaires longitudinaux. Ce mode, devient le plus instable pour des nombres de Prandtl $0,002 < Pr < 0,06$ lorsque le nombre de Reynolds $Re_\omega > 5000$.

Par ailleurs, l'étude de Dridi *et al.* (2007, 2010) s'est plutôt focalisée sur la deuxième situation, à savoir l'*Eckart streaming* dont les paramères de contrôle sont le paramètre acoustique A et la largeur du faisseau acoustique H_s. Dans le cas isotherme ($A > 0$ et $Gr = 0$), Dridi *et al.* (2007, 2010) ont mis en évidence une instabilité oscillatoire due au cisaillement dont le seuil critique A_c et la fréquence dépendent de la largeur de la source ultrason H_s et de sa position.

L'écoulement chauffé ($A > 0$ et $Gr > 0$), quant à lui, se comporte différemment. En effet, l'instabilité de cisaillement (mode transverse) initialement stationnaire devient oscillatoire lorsque $A > 0$. On note aussi que pour $H_s < 0,6$ l'*acoustic streaming* contribue à la déstabilisation de l'écoulement de base, alors que pour $H_s > 0,6$ la valeur de Gr_c croit avec A pour atteindre un maximum, puis entame une phase de décroissance rapide. Dans tous les cas (quelque soit H_s), la nombre de Grashof critique $Gr_c(A, H_s)$ devient nul quand la valeur du forçage acoustique A devient égale à celle du seuil correspondant $A_c(H_s)$ dans le cas isotherme. L'instabilité oscillatoire (mode longitudinal) quant à elle, est stabilisée lorsque l'*acoustic streaming* est introduit tandis que l'instabilité de type Rayleigh-Bénard (existante pour des parois conductrices) est déstabilisée suivant la loi $Gr_c \sim 1/A$.

Pour conclure, ces études concernant l'*acoustic streaming* montrent que la stabilisation de l'écoulement de Hadley n'est pas systématique et qu'un choix judicieux des paramètres de contrôle doit être fait selon le type de l'instabilité considérée.

1.3.2 Convection en cavité bidimensionnelle

Bien que l'écoulement parallèle mono-dimensionnel de Hadley soit un modèle très intéressant pour étudier les instabilités et les transitions vers des états dépendant du temps (oscillatoires en particulier), ce dernier n'est valable que dans le cas des cavités très étendues et la présence de parois latérales le met donc en défaut. L'approximation bidimensionnelle consiste alors soit à considérer les parois chauffées et résoudre le problème physique dans le plan longitudinal parallèle au gradient de température imposé, soit à considérer l'existence de parois latérales tout en supposant que la cavité est très longue dans la direction longitudinale, ce qui nous amène à étudier le problème physique dans le plan transverse perpendiculaire au gradient de température imposé (voir Fig. 1.6).

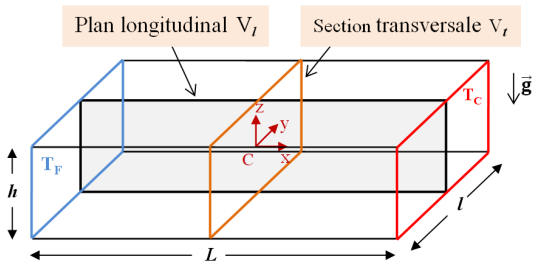


FIGURE 1.6 – Schéma de la cavité rectangulaire montrant les plans centraux V_l parallèle et V_t perpendiculaire au gradient de température.

Cormack *et al.* (1974a) ont montré à travers une étude asymptotique de l'approximation bidimensionnelle que l'écoulement parallèle est valable uniquement dans la région centrale et que l'écoulement de retour est créé par la présence des parois d'extrémités. L'écoulement est alors subdivisé en trois parties : la région centrale avec un écoulement parallèle et deux régions de parois où l'écoulement est soit montant (paroi chaude) soit descendant (paroi froide). Ces résultats ont été aussi confirmés ainsi que leur domaine de validité par Cormack *et al.* (1974b) en faisant des simulations numériques bidimensionnelles pour $Pr = 6,983$ avec un nombre de Grashof $10 < Gr < 2 \times 10^4$ et $0,05 < h/L < 1$ où h et L sont respectivement la hauteur et la longueur de la cavité. Les résultats sont en bon accord avec la théorie asymptotique tant que les conditions $h/L \lesssim 0,1$ et $Gr^2(h/L)^3Pr^2 \lesssim 10^5$ sont satisfaites.

Crochet *et al.* (1983, 1987) ont simulé l'écoulement de l'arséniure de gallium (GaAs) dans une cavité 2D avec surface libre plane. Pour ce faire, les valeurs du nombre de Prandtl $Pr = 0,015$ et $Pr = 0,069$ ont été retenues avec des rapports d'aspect $A_X = 2$, 4 et 8. Dans les cas où $A_X = 4$ et 8, l'écoulement s'organise en forme de cellules convectives corotatives stationnaires à bas nombres de Grashof. Cependant, lorsque Gr est augmenté, des instabilités oscillatoires, déclenchées par une bifurcation de Hopf, se développent après un certain régime transitoire et leur fréquence diminue lorsque le nombre de Grashof augmente.

Les conditions d'apparition des oscillations en convection bidimensionelle ont aussi été étudiées par Winters (1988). En effet, la dépendance du nombre de Grashof critique correspondant au développement de l'instabilité oscillatoire (bifurcation de Hopf) est examinée en fonction du rapport d'aspect A_X, du nombre de Prandtl Pr ainsi que des conditions aux limites dynamique (surface libre vs parois solides) et thermiques (parois horizontales conductrices ou isolantes). Dans toutes les simulations numériques, le rapport d'aspect est compris entre $A_X = 2,4$ et $A_X = 5$ tandis que le nombre de Prandtl varie entre $Pr = 0$ (cas purement diffusif) et $Pr = 0,05$.

Pulicani *et al.* (1990) ont présenté une étude détaillée de la convection 2D dans une cavité de rapport d'aspect $A_X = 4$ en considérant les différentes situations de conditions aux limites thermiques et dynamiques pour deux nombres de Prandtl $Pr = 0$ et $Pr = 0,015$. Plusieurs régimes d'écoulement stationnaires et oscillatoires (périodiques et quasi-périodiques) ont été identifiés dans chaque cas en se basant sur les symétries de la solution obtenue. En effet, dans le cas de l'existence d'une surface libre et pour $Pr = 0$, des solutions stationnaires asymétriques (solution unicellulaire notée $S1$ ou solution avec une cellule primaire accompagnée d'une cellule secondaire notée $S11$) ont été observées pour de faibles nombres de Grashof en plus d'une solution oscillatoire asymétrique correspondant à la solution $S11$ lorsque le nombre de Grashof est augmenté. Dans le cas de parois rigides, des solutions stationnaires centro-symétriques sont obtenues (solution unicellulaire notée $S1$, une cellule primaire accompagnée de deux cellules secondaires notée $S12$ et une solution avec deux cellules contrarotatives appelée $S2$). En plus de ces solu-

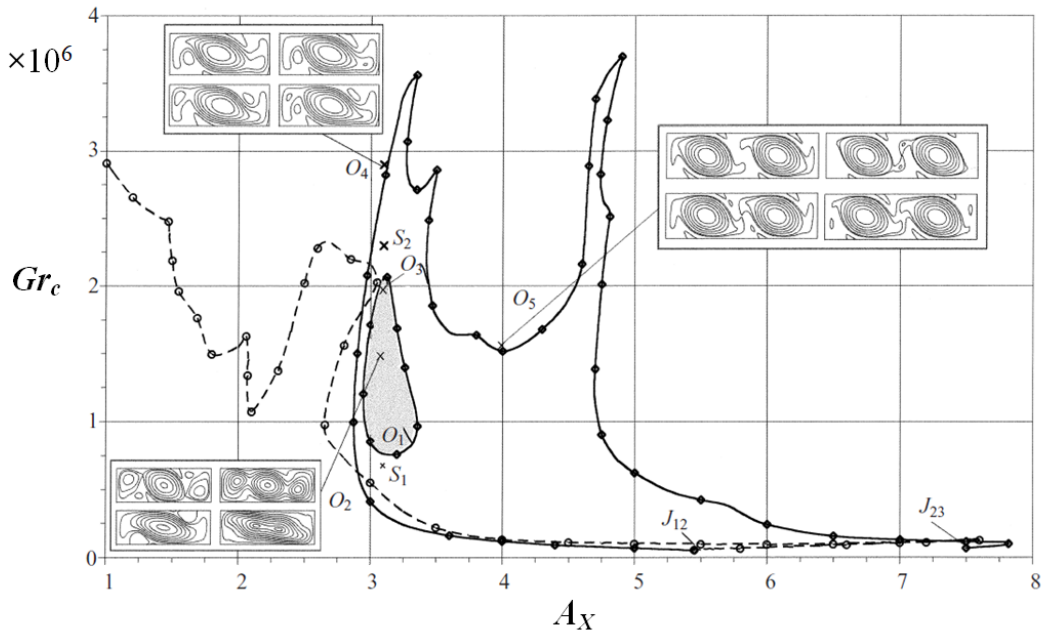


FIGURE 1.7 – Nombre de Grashof critique en fonction du rapport d'aspect correspondant aux solutions bidimensionnelles stationnaires à un et à deux rouleaux d'après Gelfgat *et al.* (1999b).

tions stationnaires, une solution oscillatoire périodique (appelée $P1$) correspondant à la structure de la solution $S12$ est obtenue ainsi qu'une autre solution quasi-périodique qui correspond à la solution $P1$, mais avec perte de symétrie. Lorsque le nombre de Grashof est encore augmenté, Pulicani *et al.* (1990) observent un retour à l'état stationnaire ($S2$) dans le cas de parois rigides, avec un hystérésis lorsque le nombre de Grashof est diminué. Lorsque $Pr = 0,015$, le seuil qui correspond à chaque instabilité est augmenté par rapport à celui observé dans le cas purement diffusif ($Pr = 0$) et, de plus, ce seuil est plus élevé dans le cas de parois isolantes que dans le cas de parois conductrices.

Par ailleur, Okada & Ozoe (1993) ont entrepris des simulations numériques dans le cas où le profil de température est purement diffusif ($Pr = 0$) en variant le rapport d'aspect A_X de 2 jusqu'à 5. L'objectif était de déterminer le nombre de Grashof critique et la fréquence critique (Gr_c, f_c) correspondant au seuil de la bifurcation de Hopf qui donne lieu à des instabilités oscillatoires. Le nombre de Grashof et la fréquence critiques diminuent rapidement lorsque la cavité devient plus allongée (A_X croissant) ce qui peut s'expliquer par l'atténuation de la dissipation visqueuse lorsque le rapport d'aspect augmente donnant lieu ainsi à une déstabilisation plus rapide vers des états oscillatoires.

La stabilité de la convection naturelle en cavité différentiellement chauffée a aussi été effectuée par Gelfgat *et al.* (1999a,b) qui ont considéré des rapports d'aspect allant de $A_X = 1$ jusqu'à $A_X = 11$. Plusieurs solutions stationnaires et oscillatoires ont été retrouvées en fonction du rapport d'aspect, à savoir, un écoulement unicellulaire à $A_X = 1$ (cavité carrée), et des écoulements à deux, trois voire quatre cellules co-rotatives selon que le rapport d'aspect A_X est augmenté. Les transitions vers tous ces états y ont été données sous la forme de diagrammes de stabilité donnant Gr_c en fonction de A_X pour $Pr = 0$ et $Pr = 0,015$ (voir par exemple Fig. 1.7).

Mercader *et al.* (2005) ont étudié le scénario de transitions vers le chaos de l'écoulement unicellulaire dans une cavité rigide de rapport d'aspect $A_X = 2$ et pour les deux

types de conditions aux limites thermiques. Le choix du rapport d'aspect $A_X = 2$ est motivé par le fait que cette configuration présente le nombre de Grashof critique le plus bas ($Gr_c \approx 3 \times 10^5$ pour $Pr = 0,01$) permettant l'obtention d'une solution à une seule cellule convective. Pour $Pr = 0,00715$, l'écoulement stationnaire de base subit une bifurcation de Hopf supercritique pour les deux types de conditions aux limites thermiques avec approximativement la même pulsation critique $\sigma_{i,c} \approx 6$ et un seuil un peu plus élevé dans le cas de parois adiabatiques. Ce résultat semble ne pas dépendre des conditions aux limites thermiques suggérant ainsi une origine dynamique (due au cisaillement) de l'instabilité. Au delà de cette première bifurcation, les cycles limites résultant seront aussi déstabilisés par une bifurcation de Neimark-Sacker qui rajoute une deuxième fréquence aux cycles et qui donne donc des cycles limites quasi-périodiques. Il est aussi à noter que lorsque le nombre de Grashof (ou de Rayleigh) devient plus important, les effets thermiques dépendant des conditions aux limites commencent à différer ce qui pourrait affecter la nature de la bifurcation secondaire. En effet, Mercader *et al.* (2005) montrent que la bifurcation de Neimark-Sacker est sous-critique dans le cas des parois conductrices tandis qu'elle est supercritique dans le cas de parois isolantes. Finalement, la transition vers un état chaotique se fait à travers d'autres séquences de bifurcations vers des cycles quasi-périodiques.

En plus de ces études (faites toutes dans le plan longitudinal 2D V_l, Fig. 1.6) et plus récemment, Lyubimova *et al.* (2009a) ont étudié la même problématique, mais dans la section transverse (plan V_t) en considérant une cavité de longueur infinie. Il est montré qu'à $Pr = 0$ l'écoulement est parallèle, similaire à celui de Hadley, tandis qu'à des valeurs non nulles du nombre de Prandtl ($Pr > 0$), une telle solution n'existe pas. Pour toute valeur faible de Pr, les trois composantes de la vitesse d'écoulement diffèrent de zéro et quatre vortex se développent dans la section transversale du canal V_t créant ainsi des zones de cisaillement avec des contre-courants. La stabilité linéaire de cet écoulement vis-à-vis de petites perturbations tridimensionnelles périodiques dans la direction longitudinale montre qu'à des faibles valeurs du nombre de Prandtl, l'état de base perd sa stabilité en raison d'une instabilité due au cisaillement entre les écoulements à contre-courant en haut et en bas de la cavité (mode hydrodynamique). Lorsque le nombre de Prandtl est augmenté et en fonction du rapport d'aspect (l/h, largeur/hauteur), ce mode de cisaillement est rapidement stabilisé au profit d'un autre mode d'origine hydrodynamique, appelé mode de paroi. Ce dernier est encore dû au cisaillement entre les écoulements à contre-courant, mais ce cisaillement est devenu particulièrement intense au voisinage des parois latérales.

À des valeurs encore plus élevées du nombre de Prandtl, Lyubimova *et al.* (2009a) retrouvent deux autres types instabilités qui deviennent les modes les plus dangereux, à savoir, des perturbations en spirale (rouleaux dont l'axe est parallèle au gradient de température) oscillatoires, puis des perturbations en spirale stationnaires de type Rayleigh-Bénard se développant dans la région de stratification inverse dans le cas de parois conductrices. Finalement, l'effet stabilisant de la diminution du rapport d'aspect transverse est clairement souligné dans tous les cas d'instabilités.

En plus de ces études concernant le cas hydrodynamique, on retrouve aussi des études consacrées à l'effet d'un champ magnétique, tant sur la structure de l'écoulement stationnaire de base que sur le développement des instabilités.

Garandet *et al.* (1992) ont examiné, par le biais d'une étude analytique, l'écoulement convectif bidimensionnel (dans le plan V_l) stationnaire soumis à un champ magnétique vertical entre deux parois horizontales rigides. Cette étude montre un changement important au niveau de la structure de l'écoulement avec l'augmentation du nombre de Hartmann Ha : décroissance de l'amplitude des deux composantes de la vitesse en une loi de

type $u \sim GrHa^{-2}$ pour la vitesse longitudinale et $w \sim GrHa^{-3/2}$ pour la vitesse verticale, formation de couches limites dont les épaisseurs varient comme $\delta_{\perp} \sim Ha^{-1}$ pour la couche limite de Hartmann et $\delta_{/\!/} \sim Ha^{-1/2}$ pour la couche limite se développant le long des parois verticales et finalement gradient de vitesse tendant vers une constante dans l'écoulement de cœur à l'extérieur de la couche limite de Hartmann. Cependant, toutes ces lois d'échelles restent valables tant que les forces inertielles restent faibles par rapport aux forces de Lorentz, à savoir pour $Ha^3/Gr >> 1$.

Par ailleurs, Ben Hadid *et al.* (1997) ont effectué la même étude dans le cas d'une couche rigide-libre avec possibilité de convection thermo-capillaire (caractérisée par un nombre de Reynolds Re associé au gradient de la tension de surface). Dans le cas de $Re = 0$, les lois d'échelles précédentes restent inchangées et la seule différence est l'absence d'une couche limite de Hartmann le long de la surface libre. Cependant, dans le cas où $Re \neq 0$, une autre source de forçage apparait sous la forme d'un cisaillement au niveau de la surface libre, ce qui change les lois de variations des vitesses en fonction du nombre de Hartmann ainsi que la condition de leur validité. En effet, Ben Hadid *et al.* (1997) obtiennent $u \sim ReHa^{-1}$ pour la vitesse longitudinale, $w \sim ReHa^{-3/2}$ pour la vitesse verticale et finalement $Ha^{5/2}/Re >> 1$ comme condition de validité.

Lyubimova *et al.* (2009b) ont aussi étudié numériquement la configuration du chauffage latéral avec champ magnétique mais en considérant cette fois l'écoulement dans la section rectangulaire transverse (dans le plan V_t) et sa stabilité linéaire. L'intensité de l'écoulement et la distribution des vitesses dans la section transverse vont avoir une forte dépendance vis-à-vis de l'intensité et de la direction du champ magnétique (vertical ou horizontal). Dans le cas d'un champ magnétique vertical intense, la circulation convective du fluide est concentrée près des coins de la section transverse sous la forme de jets de paroi horizontaux accompagnés d'un écoulement résiduel dans la région centrale. L'intensité de cette nouvelle structure est soumise à une diminution rapide avec l'augmentation du nombre de Hartmann suivant des lois caractéristiques de variation de types Ha^{-1} et Ha^{-2} pour respectivement les jets de coins et l'écoulement central. L'effet du champ magnétique horizontal sur l'écoulement hydrodynamique de base est moins efficace que celui du champ magnétique vertical. Les modifications de la structure de l'écoulement ne sont pas aussi brusques et on peut principalement voir la diminution des gradients horizontaux de vitesse dans la zone centrale et la croissance des gradients dans les couches limites de Hartmann qui se développent le long des parois.

L'analyse de la stabilité linéaire de cet écoulement a été réalisée pour un nombre de Prandtl Pr égal à 0 et des largeurs de section différentes, et pour Pr de $0,01$ à $0,15$ dans le cas d'une section carrée. Le champ magnétique vertical, avec une loi de stabilisation exponentielle, semble être plus efficace que le champ magnétique horizontal. Cette stabilisation est obtenue suite à la diminution de l'intensité de l'écoulement et à la perte d'énergie par dissipation Ohmique. Toutefois, une influence déstabilisatrice du champ magnétique horizontal a été obtenue pour $Pr = 0$ dans le cas du champ magnétique horizontal. Cette déstabilisation est observée dès que le champ magnétique est appliqué jusqu'à des valeurs modérées du nombre de Hartmann et l'effet est particulièrement fort lorsque la largeur du canal est inférieure à sa hauteur. Cet effet de déstabilisation est toujours présent, mais faible, pour un canal de section carrée, et disparaît rapidement lorsque la largeur de la section transverse est encore augmentée.

1.3.3 Convection en cavité tridimensionnelle

Toutes les études que nous venons de citer sont fondées sur des hypothèses permettant de négliger les effets de parois latérales ou du moins de les minimiser. En cavité 3D, l'écoulement de base obtenu à faibles nombres de Grashof est une boucle unicellulaire où le fluide monte du coté de la paroi chaude, traverse la cavité pour redescendre à la paroi froide et rejoindre la paroi chaude à nouveau tout en étant accompagné d'un mouvement hélicoïdal des particules fluides dû à la présence des parois latérales (Henry & Buffat, 1998). En réalité, le passage de cette configuration 3D à la configuration bidimensionnelle affecte considérablement la stabilité de l'écoulement et conduit à des scénarios différents de transition vers la convection oscillatoire. A titre d'exemple, Henry & Buffat (1998) ont comparé la transition vers l'écoulement oscillatoire (bifurcation de Hopf) dans le cas de cavités 2D de dimensions (4×1, longueur$\times$hauteur) et 3D de dimensions ($4 \times 1 \times 2$, longueur$\times$hauteur$\times$largeur) pour $Pr = 0$. Dans le cas 2D, les oscillations correspondent à des expansions puis des récessions successives de trois rouleaux dans la cavité ; dans le cas 3D, les oscillations ont un caractère tridimensionnel et correspondent à la flexion par rapport au centre d'un rouleau occupant toute la cavité sous la forme d'une onde stationnaire. Dans le cas général de cavités tridimensionnelles (longueur L, largeur l et hauteur h), plusieurs études, tant expérimentales que numériques, ont été réalisées afin de comprendre le développement de la convection, l'apparition d'instabilités et les scénarios de transition conduisant à des écoulement oscillatoires. Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques études expérimentales et numériques relatives au problème traité dans cette thèse. Historiquement et pour des raisons techniques liées à la capacité limitée de faire des calculs numériques tridimensionnels, les transitions d'écoulements en cavités chauffées latéralement ont été appréhendées d'un point de vue expérimental en premier.

Les premiers travaux expérimentaux, pionniers dans le domaine, sont ceux de Hurle (Hurle, 1966; Hurle *et al.*, 1974). Les expériences ont été effectuées avec du gallium liquide ($Pr \approx 0,018$) à l'intérieur de longues cavités ouvertes de dimensions $10 \times 1,3 \times 1,5$ cm^3, $10 \times 1 \times 1,5$ cm^3 et $10 \times 0,65 \times 1,5$ cm^3 ($L \times l \times h$). Ces études pour différentes largeurs de cavité mettent en évidence le déclenchement de la convection oscillatoire lorsque la différence de température entre les parois chaude et froide augmente ainsi que l'effet stabilisant du confinement latéral se traduisant par le décalage du seuil d'apparition des oscillations vers des valeur du nombre de Grashof plus importantes. De plus, ces études montrent qu'un champ magnétique transversal supprime les oscillations en freinant l'écoulement. McKell *et al.* (1990) ont étendu cette étude à la transition vers des états plus complexes dépendant du temps dans une cavité de $4 \times 1,3 \times 1$ cm^3 en présence d'un champ magnétique appliqué. La dynamique du système est organisée par une bifurcation de codimension-2 correspondant à l'intersection d'une ligne de bifurcations de Neimark-Sacker (quasi-périodicité) avec une ligne de bifurcations de doublement de période.

D'autres études expérimentales concernant les cavités de forts rapports d'aspect ont été entreprises. Par exemple, Hung & Andereck (1988) ont utilisé du mercure liquide ($Pr \approx 0,026$) dans une cavité de $16,1 \times 16 \times 0,9$ cm^3. Les résultats montrent que la première instabilité est liée à l'oscillation des rouleaux longitudinaux, qui devient bruitée et éventuellement chaotique lorsque la différence de température augmente. Bien que les longueurs d'onde et les fréquences mesurées soient en accord avec les valeurs théoriques de Hart (1972), le nombre de Grashof critique s'avère supérieur aux seuils théoriques attendus.

Pratte & Hart (1990) ont aussi présenté des résultats expérimentaux en utilisant le mercure liquide dans des cavités rigides de hauteur $h = 1,27$ cm et de rapports d'aspects

$1 \times 8 \times 8$, $1 \times 4 \times 2$ et $1 \times 4 \times 1$ ($1 \times L/h \times l/h$). La transition vers un état oscillatoire semble être considérablement affectée par la largeur de la cavité. En effet, le nombre de Grashof critique pour la cavité $1 \times 4 \times 2$, $Gr_c \approx 3,9 \times 10^4$, se trouve augmenté à $Gr_c \approx 2 \times 10^5$ en diminuant la largeur de la cavité de moitié ($1 \times 4 \times 1$). Les bifurcations secondaires y sont aussi rapportées. La transition vers des états chaotiques semble passer par des bifurcations successives de type Neimark-Sacker (quasi-périodicité) pour des cavités étroites et par une cascade de doublement de période dans le cas de la cavité large.

Daviaud & Vince (1993) ont rapporté l'observation de différents régimes dynamiques dans l'huile de silicone ($Pr \approx 10$) dans des cavités ouvertes. Pour des dimensions horizontales fixes (20×1 cm^2) et des hauteurs h variables du fluide, Daviaud & Vince (1993) ont observé que le premier mode d'instabilité est soit des ondes progressives (instabilités oscillatoires) pour $h < 2,8$ mm, soit des rouleaux transversaux stationnaires pour des valeurs supérieures de h jusqu'à 10 mm.

Mullin et ses collaborateurs ont également effectué d'autres expériences (Braunsfurth & Mullin, 1996; Juel *et al.*, 2001; Hof *et al.*, 2004) en utilisant le gallium liquide comme fluide de travail dans une cavité rigide et isolée de dimensions $5 \times 1,3 \times 1$ cm^3. D'après Braunsfurth & Mullin (1996) qui ont fait une étude systématique en faisant varier les nombres de Grashof et de Prandtl, il existe plusieurs états oscillatoires dont l'apparition dépend du nombre de Prandtl. Chaque état oscillatoire émane d'une bifurcation de Hopf super-critique à partir du même état de base, mais l'ensemble des bifurcations ne montre pas une dépendance régulière en fonction des paramètres de contrôle. L'interaction entre les différents types d'écoulements oscillatoires peut entraîner de brusques changements dans l'évolution du comportement dynamique, car les paramètres de contrôle changent régulièrement au cours de l'expérience en raison de la variation des propriétés physiques telles que la viscosité et la conductivité thermique.

Juel *et al.* (2001) et Hof *et al.* (2004) ont apporté des résultats expérimentaux et numériques indiquant le caractère tridimensionnel de l'écoulement. Les calculs numériques ont suggéré aussi que la structure complexe de l'écoulement au centre de la cavité avait une grande importance pour la transition vers un écoulement oscillatoire. Enfin, il a été montré que les oscillations apparaissent sous la forme d'une onde stationnaire sur toute la largeur de l'enceinte.

Dans la plupart des expériences entreprises et liées au procédé de Bridgman Horizontal, les fluides sont des métaux liquides à faible nombre de Prandtl. Il en a résulté alors une convergence de la communauté scientifique, depuis les travaux de Hurle (1966), vers le contrôle magnétohydrodynamique de ces écoulements convectifs. En effet, une suppression des oscillations et un effet stabilisant du champ magnétique a été observé par Hurle (1966), Hurle *et al.* (1974), Juel *et al.* (1999) et Hof *et al.* (2005). De plus, l'efficacité de cette stabilisation des modes oscillatoires semble dépendre de l'orientation du champ magnétique appliqué.

A titre d'exemple, Hof *et al.* (2005) ont examiné l'effet des trois orientations possibles (longitudinale, verticale et transverse) sur la transition oscillatoire dans le gallium liquide. La transition oscillatoire s'effectue dans le cas hydrodynamique ($Ha = 0$) pour $Gr_c \approx 4 \times 10^4$. La figure 1.8 montre que la stabilisation la plus efficace est celle obtenue avec un champ magnétique vertical avec une loi de type $Gr_c/Gr_c(Ha = 0) \sim \exp(Ha^3)$ suivie de celle avec un champ magnétique transverse dont la loi est de type $Gr_c/Gr_c(Ha = 0) \sim \exp(Ha^2)$ et finalement celle avec le champ magnétique longitudinal qui s'avère être le moins efficace bien qu'il soit lui aussi stabilisant.

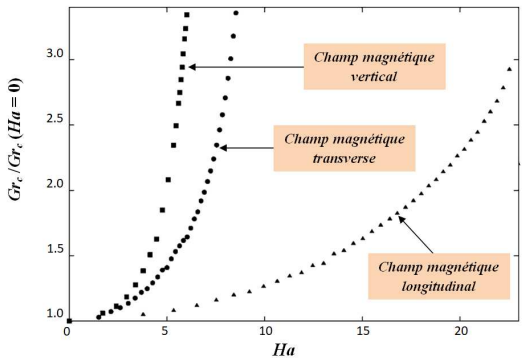


FIGURE 1.8 – Nombre de Grashof critique normalisé par le cas hydrodynamique correspondant à la bifurcation de Hopf en fonction du nombre de Hartmann d'après Hof *et al.* (2005). Le fluide utilisé est le gallium liquide ($Pr \approx 0,018$) dans une cavité de dimensions $5 \times 1,3 \times 1$ cm^3.

Il est à noter que ce caractère stabilisant du champ magnétique a été retrouvé numériquement par Kaddeche *et al.* (2003) dans le cas de l'écoulement induit par un gradient de température horizontal entre deux plans horizontaux infinis et par Ben Hadid & Henry (1997) et Henry *et al.* (2008) dans le cas d'une cavité tridimensionnelle. De plus, ces études (1D et 3D) montrent que l'efficacité du champ magnétique vertical est due à la suppression du gradient de vitesse vertical (cisaillement) dans la cavité.

En plus de l'approche expérimentale, des simulations numériques tridimensionnelles ont également été réalisées afin de comprendre la dynamique du passage à la convection oscillatoire, notamment par Dupont *et al.* (1987), Afrid & Zebib (1990), Henry & Buffat (1998), Wakitani (2000) et Henry & Ben Hadid (2007a,b) en mettant l'accent sur les situations des fluides à faible nombre de Prandtl, *i.e.* des métaux liquides. Ces études numériques concernent des cavités plutôt confinées avec différents rapports d'aspect et différentes conditions aux limites dynamiques (paroi supérieure rigide ou surface libre).

Il a été montré dans toutes ces études que le seuil d'apparition des instabilités oscillatoires est décalé vers des valeurs plus élevées du nombre de Grashof lorsque la frontière supérieure est plutôt rigide que libre et lorsque le confinement latéral est augmenté. En effet, cette stabilisation est justifiée par l'augmentation de la dissipation visqueuse due à la présence de forts gradients de vitesse au niveau des parois. Par exemple, selon Afrid & Zebib (1990), le seuil de convection oscillatoire à $Pr = 0$ est égal à $Gr_c = 1,25 \times 10^5$ pour une enceinte rigide contre $Gr_c = 1 \times 10^5$ pour une enceinte à surface libre sans contrainte dans une cavité de dimensions $4 \times 1 \times 1$ ($L/h \times l/h \times h/h$). Et le seuil diminue à $Gr_c = 3 \times 10^4$ dans une cavité rigide moins confinée de dimensions $4 \times 2 \times 1$.

L'étude de Dupont *et al.* (1987) montre dans le cas d'une cavité avec surface libre (de dimensions 4×1 en 2D et $4 \times 1 \times 1$ en 3D) et pour $Pr = 0,069$ que les effets tridimensionnels peuvent en effet être très importants et que les écoulements multicellulaires retrouvés en cavité bidimensionnelle n'existent plus en 3D au profit d'un écoulement stationnaire unicellulaire occupant toute la cavité. Une perte de convergence du solveur stationnaire utilisé est observée à $Gr \approx 7,1 \times 10^5$ en cavité 2D et à $Gr \approx 5 \times 10^5$ en cavité 3D qui est probablement due à la déstabilisation de l'écoulement de base et l'apparition de l'état oscillatoire.

Wakitani (2000) a aussi étudié l'effet des rapports d'aspect, longitudinal A_X et transverse A_Y, sur les seuils d'instabilités oscillatoires pour des fluides à faible nombre de Prandtl ($0 \leqslant Pr \leqslant 0,027$). Les cavités considérées sont rigides et ont des rapports d'aspects longitudinal $A_X = 2$ ou 4 et transverse allant de $A_Y = 0,5$ à $A_Y = 4,2$. Dans les cas $(A_X, A_Y) = (2,1), (2,2)$ et $(4,1)$ le nombre de Grashof critique des instabilités oscillatoires semble être sensible à l'augmentation du nombre de Prandtl. Il est à noter aussi que la diminution du rapport d'aspect transverse (confinement latéral) entraine une stabilisa-

tion de l'écoulement stationnaire de base, effet déjà observé par Afrid & Zebib (1990).

Henry & Ben Hadid (2007a,b) ont déterminé, à l'aide d'une technique de continuation, les seuils de la première instabilité (bifurcation primaire) dans une cavité rigide chauffée de manière différentielle pour une large plage de valeurs de rapports d'aspect longitudinaux ($2 < A_X = L/h < 5$) et transversaux ($1 < A_Y = l/h < 6$) et pour des nombres de Prandtl allant de $Pr = 0$ à $Pr = 0,03$. Le premier mode d'instabilité est soit stationnaire soit oscillant en fonction du nombre de Prandtl et des rapports d'aspect. En particulier, pour une cavité $4 \times 2 \times 1$, la première instabilité est déclenchée par une bifurcation fourche stationnaire supercritique pour $1 \times 10^{-4} \lesssim Pr \lesssim 1,65 \times 10^{-2}$ et par un mode oscillatoire de basse fréquence ($\sigma_{i,c} \approx 10$) pour $Pr \lesssim 1 \times 10^{-4}$ ou haute fréquence ($\sigma_{i,c} \approx 10^2$) pour $Pr \gtrsim 1,65 \times 10^{-2}$. Dans tous les cas, les bilans énergétiques montrent que le mécanisme physique déstabilisateur est le cisaillement, principalement dû aux variations verticales de la vitesse longitudinale.

1.4 Convection en rotation

Les écoulements chauffés en rotation sont d'une importance capitale aussi bien dans la nature qu'en engineering. Leur présence dans plusieurs domaines tels que les écoulements atmosphériques et géophysiques, la convection dans les étoiles, les machines rotatives, voire même dans les réservoirs des navettes spatiales, leur confère une place importante dans le domaine de la recherche scientifique (Vanyo, 1993). En plus des applications industrielles et technologiques de la convection naturelle due à un chauffage latéral, l'écoulement de Hadley a en particulier été proposé pour décrire les écoulements géophysiques et astrophysiques (Fig. 1.9). En fait, Hadley (1735) a proposé un mécanisme selon lequel les vents alizés sont créés par un gradient de température horizontal (perpendiculaire à la gravité) où l'air est plus chaud à l'équateur en raison de l'angle d'incidence du rayonnement solaire et plus froid aux environs de la latitude située à $30°N$ ou à $30°S$. Une circulation due à la convection naturelle est ainsi créée et porte le nom de *Circulation de Hadley* ou aussi *Cellule de Hadley*. Ce modèle de Hadley a été étudié par Stone (1968, 1974) dans des études relatives à des situations géophysiques telles que la circulation atmosphérique Vénusienne, la circulation tropicale et même les courants océaniques. Il est bien établi à notre connaissance que ces écoulements sont soumis à une rotation perpétuelle ce qui affecte fortement leur dynamique ainsi que leur stabilité et rend leur étude indispensable d'un point de vue de la géophysique.

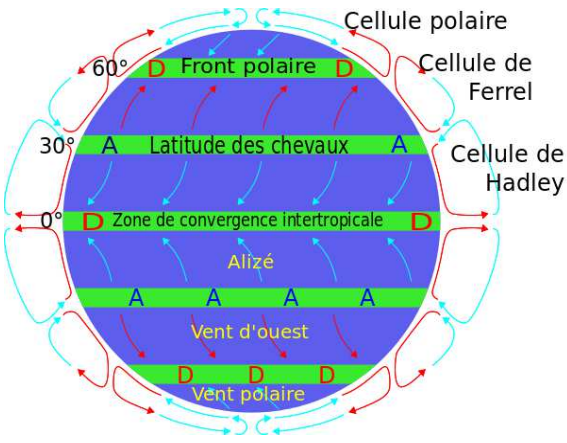


FIGURE 1.9 – Circulation atmosphérique avec près de l'équateur la cellule de Hadley et les vents alizés.
source : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Alizé.

La majorité des études concernant l'effet de la rotation sur les écoulements chauffés

ont été faites en lien avec la situation chauffée par le bas dite convection de Rayleigh-Bénard depuis les premières études menées par Jeffreys (voir Nakagawa & Frenzen (1955)) et dans lesquelles la rotation semble inhiber le développement des instabilités (on y lit d'ailleurs "*the effect of rotation is to maintain stability*"). Un nombre considérable de travaux ont été publiés depuis, tels que les études expérimentale et numérique de Nakagawa & Frenzen (1955), les fameuses études de stabilité hydrodynamique et magnétohydrodynamique de Chandrasekhar (1961) dans lesquelles nous retrouvons de nouveau le caractère stabilisant de la rotation ainsi que du champ magnétique et finalement le travail sur la convection sous l'effet de la rotation rapide de Zhang & Robert (1997) où la convection semble être décrite, au premier ordre, par des ondes inertielles thermiques quand le nombre de Prandtl est suffisamment petit.

Néanmoins, on retrouve dans la littérature quelques études relatives à la convection naturelle générée par un gradient de température horizontal soumise à la rotation. Dans les expériences de Fultz (1951) et de Hide (Hide, 1953; Hide & Mason, 1975; Hide, 2010; Ghil *et al.*, 2010) le fluide de travail (l'eau) est contenu entre deux cylindres coaxiaux (de rayons 2 cm et 5 cm et de longueur 12 cm) à surface libre. Le cylindre intérieur est refroidi avec de l'eau froide tandis que le cylindre de l'extérieur est maintenu à la température ambiante. De ce fait, l'écoulement observé dans l'état statique (sans rotation) est une boucle de circulation axisymétrique de Hadley. Lorsque l'ensemble du système est mis en rotation, les forces de Coriolis interviennent et brisent cette axisymétrie par la création d'une composante tangentielle de la vitesse. En faisant varier le gradient de température et le taux de rotation, plusieurs types d'écoulements se développent tels que la circulation de Hadley axisymétrique et non-axisymétrique ou les ondes de Rossby.

D'autres études concernant la convection en situation différentiellement chauffée soumise à la rotation autour de l'axe vertical (parallèle à la gravité) ont été faites. Aristov & Frik (1988) ont considéré les effets de la rotation sur la turbulence à grande échelle dans une couche mince de fluide en rotation et sous gradient de température horizontal. Shvarts (2005), Shvarts & Boudlal (2010) et Shvarts (2012) ont présenté plusieurs études de stabilité linéaire de l'écoulement de Hadley en rotation. Dans ces études, les auteurs ont analysé la réponse de l'écoulement de Hadley en rotation à des perturbations au-dessus du seuil d'instabilité pour des conditions aux limites rigides (Shvarts, 2005), avec surface libre (Shvarts & Boudlal, 2010) et finalement dans le cas de la convection thermo-capillaire avec des conditions de microgravité (Shvarts, 2012). Par ailleurs, Chikulaev & Shvarts (2015) ont étudié l'effet de la rotation sur la stabilité d'une couche de fluide chauffée horizontalement avec des parois rigides à des petits nombres de Prandtl (valeurs typiques pour les métaux liquides) et Knutova & Shvarts (2015) ont étudié l'effet de la rotation sur la convection thermo-capillaire dans des conditions de microgravité. Cependant, dans toutes ces études précédentes, les modes d'instabilité recherchés sont soit transversaux (avec $k_x \neq 0$ et $k_y = 0$), soit longitudinaux (avec $k_x = 0$ et $k_y \neq 0$), mais comme cela sera montré dans cette thèse (Chap. 4), ces modes ne sont pas les plus instables.

1.5 Conclusion

Cette recherche bibliographique avait pour objectif de présenter les principaux travaux liés à la problématique étudiée dans cette thèse. Les transitions d'écoulements de fluides à faible nombre de Prandtl en cavités chauffées latéralement a fait l'objet d'une activité de recherche assez active en raison de leurs implications dans différentes problématiques

telles que la croissance cristalline ou les écoulements géophysiques.

L'étude de ces transitions à partir d'un écoulement de base stationnaire a commencé historiquement par des modèles simplifiés d'une couche de fluide d'extensions infinies entre deux plans horizontaux, où l'écoulement est décrit par une simple circulation unicellulaire de Hadley. Ensuite, viennent les études bidimensionnelles où l'écoulement est étudié soit dans un plan longitudinal parallèle au gradient de température en supposant que l'extension latérale est infinie, soit dans une section perpendiculaire en supposant cette fois-ci que la cavité est d'une longueur infinie. L'écoulement de base dans ce cas dépend des rapports d'aspect de la cavité et nous pouvons observer des situations à plusieurs rouleaux pour des cavités longues. Finalement, la situation la plus réaliste (3D) a aussi connu une activité importante de recherche, tant sur le plan numérique que sur le plan expérimental. L'écoulement de base est une boucle unicellulaire où le fluide monte du coté de la paroi chaude, traverse la cavité pour redescendre à la paroi froide et rejoindre à nouveau la paroi chaude. A l'intérieur de cette boucle se développe un mouvement hélicoïdal des particules fluides dû à la présence des parois latérales.

D'après toutes les études que nous venons de présenter, le mécanisme principal de déstabilisation de l'écoulement de base dans les trois cas (1D, 2D ou 3D) dépend du nombre de Prandtl. Pour des très faibles nombres de Prandtl, l'instabilité est d'origine dynamique due au cisaillement dans le profil de vitesse. Lorsqu'on augmente le nombre de Prandtl, les effets thermiques prennent de l'importance et participent alors aussi à la déstabilisation. On peut également retrouver des instabilités d'origine purement thermique quand une stratification instable de la température existe, induite par des parois thermiquement conductrices. Les seuils critiques d'instabilités stationnaire et oscillatoire semblent dépendre de plusieurs paramètres, en particulier le nombre de Prandtl, les conditions aux limites et finalement les rapports d'aspect.

Notre investigation bibliographique montre que, contrairement aux effets du champ magnétique, l'effet de la rotation sur une telle situation n'a jusqu'à présent pas été étudié d'une manière approfondie. Afin de mieux cerner les possibilités de stabilisation des écoulements offertes par la rotation, nous avons donc étudié dans cette thèse l'effet qu'a la rotation autour d'un axe vertical sur la convection induite dans une cavité chauffée latéralement. Nous nous sommes intéressés à la structure de l'écoulement de base, aux instabilités qui s'y développent, puis aux propriétés des écoulements tridimensionnels.

Dans un premier temps, nous avons considéré la dynamique de transition vers des états instationnaires de ces écoulements chauffés. Même dans le cas sans rotation, cette dynamique est encore mal connue. Nous avons choisi d'étudier en détail le cas d'une cavité de dimensions $4 \times 2 \times 1$ contenant des fluides de faibles nombres de Prandtl ($0 \leqslant Pr \leqslant 0,025$). L'utilisation de techniques de continuation, à la fois pour les solutions stationnaires et pour les cycles périodiques, nous a permis de mettre en évidence des scénarios précis de bifurcation jusque vers des états oscillatoires quasi-périodiques. L'extension de ce travail dans le cas avec rotation est envisagée, mais, faute de temps, cette étude ne pourra être traitée de manière approfondie dans le cadre de cette thèse.

CHAPITRE 2

MODÈLE PHYSIQUE ET MÉTHODES NUMÉRIQUES

Sommaire

2.1 Introduction 21
2.2 Équations du mouvement 22
2.2.1 Équation de conservation de la masse 22
2.2.2 Équation de la quantité de mouvement 23
2.2.3 Équation de l'énergie 23
2.3 Conditions initiales et aux limites 23
2.3.1 Conditions initiales 23
2.3.2 Conditions aux limites 23
2.4 Adimensionnement des équations du mouvement 24
2.5 Description du code numérique tridimensionnel 25
2.5.1 Intégration temporelle et algorithme de projection 25
2.5.2 Méthode des éléments spectraux 27
2.6 Technique de continuation 30
2.6.1 Continuation des états stationnaires 31
2.6.2 Continuation des états oscillatoires 33
2.7 Conclusion 37

2.1 Introduction

L'écoulement d'un fluide est gouverné par les principes dits de conservation. Ces principes de conservation traduisent les bilans des quantités physiques pertinentes du problème considéré à savoir la quantité de mouvement, l'énergie et la masse. Pour un fluide newtonien, ces bilans conduisent aux équations de Navier-Stokes qui sont des équations aux dérivées partielles et non-linéaires. Dans le cas des écoulements chauffés, les équations deviennent couplées et n'admettent de solutions analytiques exactes que dans des cas très simplifiés ; le recours aux méthodes numériques s'avère alors inéluctable. Nous allons présenter dans ce chapitre les équations du mouvement, leur version adimensionnelle, ainsi que le code numérique et la technique de continuation permettant d'obtenir, à la fois, les solutions mathématiques du problème, leur stabilité linéaire et les diagrammes de bifurcations.

2.2 Équations du mouvement

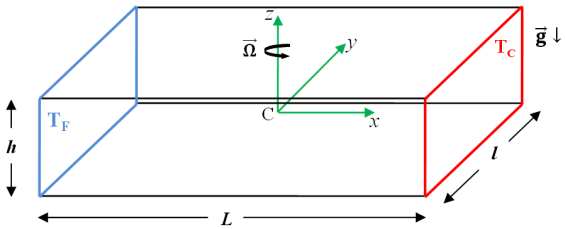


FIGURE 2.1 – Géométrie et système de coordonnées. Les parois froide et chaude aux températures T_F et T_C sont situées respectivement à $x = -L/2$ et $x = +L/2$ et la cavité est soumise à la rotation autour de l'axe vertical Oz.

Nous considérons dans ce travail un fluide dans une cavité chauffée de manière différentielle où la paroi chaude est maintenue à la température T_C tandis que la paroi froide est maitenue à la température T_F (Fig. 2.1). La cavité a pour rapports d'aspect $A_X = L/h$ et $A_Y = l/h$, où L est la longueur le long de la direction longitudinale Ox, l est la largeur le long de la direction transversale Oy et h est la hauteur le long de la direction verticale Oz. Le fluide est supposé newtonien avec des propriétés physiques constantes, à l'exception de la masse volumique dans le terme de flottabilité qui est régie par l'approximation de Oberbeck-Boussinesq et dépend linéairement de la température, $\rho = \rho_o\,(1-\beta(T-T_o))$, où β est le coefficient de dilatation thermique, $T_o = (T_F + T_C)/2$ est une température de référence et ρ_o est la masse volumique de référence qui correspond à T_o. La cavité est soumise à une rotation autour de l'axe vertical $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{e}_z$ parallèle à la gravité. Dans ce cas, la rotation intervient dans les équations du mouvement sous la forme de deux pseudo-forces [1] : terme de Coriolis, $\vec{F}_{CO} = 2\rho_o\Omega\,\vec{e}_z \times \vec{u}$, et terme de force centrifuge qui dérive d'un potentiel, $\vec{F}_{CE} = -\vec{\nabla}\left(\rho_o\Omega^2(x^2+y^2)/2\right)$ (Voir Chandrasekhar (1961) pour une dérivation complète des équations).

2.2.1 Équation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse est donnée par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\,\vec{u}) = 0, \tag{2.1}$$

ou encore

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\vec{\nabla}.\vec{u} = 0, \tag{2.2}$$

ce qui donne, en utilisant l'hypothèse d'incompressiblité :

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0. \tag{2.3}$$

Où $(\vec{\nabla}.)$ est l'opérateur divergence, $\vec{u}$ est le vecteur vitesse.

1. Parfois appelées aussi forces non-inertielles. Cela est dû au fait qu'il ne s'agit pas de l'action d'un objet physique sur un autre (par contact ou à distance comme pour respectivement la force visqueuse ou la force gravitationnelle), mais d'un pur effet d'accélération du référentiel.

2.2.2 Équation de la quantité de mouvement

L'équation de bilan de la quantité de mouvement traduisant la relation fondamentale de la dynamique pour un milieu continu incompressible est donnée par

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}.\bar{\bar{\nabla}}\vec{u} + 2\Omega\,(\vec{e}_z \times \vec{u}) = \frac{1}{\rho_o}\,\vec{\nabla} p + \nu\,\Delta\vec{u} - \beta\,(T - T_o)\,\vec{g}, \tag{2.4}$$

avec $p = P + \rho_o\, g\, z - \left(\frac{\rho_o \Omega^2 (x^2+y^2)}{2}\right)$. P est la pression et T le champ de température. $\vec{\nabla}$ et Δ désignent respectivement les opérateurs gradient et laplacien tandis que $\bar{\bar{\nabla}}\vec{u}$ représente l'opérateur gradient appliqué au champ de vitesse (tenseur d'ordre deux).

2.2.3 Équation de l'énergie

Elle est issue du premier principe de la thermodynamique. En tenant compte des hypothèses simplificatrices et en négligeant la dissipation visqueuse, elle s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla} T = \frac{\lambda}{\rho_o\, c_p}\,\Delta T, \tag{2.5}$$

où λ est la conductivité thermique et c_p est la capacité calorifique.

2.3 Conditions initiales et aux limites

A ce stade, on introduit les conditions initiales et les conditions aux limites correspondant aux phénomènes qui se produisent au niveau des frontières du domaine considéré.

2.3.1 Conditions initiales

Les conditions initiales permettent de définir l'état du système physique à l'instant initial t_o et donc de pouvoir suivre sa trajectoire d'évolution au cours du temps. En fait, on dit conditions initiales par abus de langage, mais, en vérité, il suffit de connaitre l'état du système à un instant donné quelconque pour pouvoir suivre l'évolution du système. Dans notre cas, les conditions initiales portent sur la vitesse et la température et sont données par

$$\vec{u}(\vec{r}, t_o) = \vec{u}_o(\vec{r}), \tag{2.6a}$$
$$T(\vec{r}, t_o) = T_o(\vec{r}), \tag{2.6b}$$

où $\vec{r} = \{x, y, z\}^T$.

2.3.2 Conditions aux limites

Dans le cas de cette étude, on distingue les conditions aux limites portant sur la vitesse et sur la température.

Condition sur la vitesse

Sur les frontières du domaine, la condition d'adhérence du fluide aux parois est imposée pour la vitesse, soit :

$$\vec{u}|_{\text{paroi}} = 0. \tag{2.7}$$

Conditions sur la température

On en distingue deux types : les conditions de parois isothermes (situées à $x = \pm L/2$) dans le cas de la cavité tridimensionnelle, soit

$$T(x = -L/2, y, z) = T_F \quad \text{et} \quad T(x = +L/2, y, z) = T_C, \tag{2.8}$$

et les conditions de Neumann pour les parois adiabatiques latérales, où un gradient de température nul est imposé, soit

$$\vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0, \tag{2.9}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la paroi considérée.

Finalement, dans le cas où la cavité est supposée infinie dans les directions horizontales Ox et Oy, et où un gradient de température longitudinal γ est imposé, ces conditions aux limites se réduisent à $\vec{u}(z = \pm h/2) = 0$ pour la vitesse et $(\partial T/\partial z)_{z=\pm h/2} = 0$ pour les parois adiabatiques. Dans ce cas de figure, nous nous sommes aussi intéressés au cas des parois parfaitement conductrices, ce qui revient à imposer à la température la condition $T(x, z = \pm h/2) = \gamma x$, basée sur le gradient de température imposé.

2.4 Adimensionnement des équations du mouvement

L'adimensionnement est une étape importante dans la résolution des équations de la mécanique des fluides ou de la physique d'une manière générale. En effet, lorsqu'on passe des équations brutes (Éqs. 2.3, 2.4 et 2.5) à un système sans dimensions, l'étude devient paramétrique et ne dépend donc que de quelques nombres adimensionnels qui comparent entre eux les effets physiques (viscosité vs inertie, flottabilité vs viscosité, ...) , les temps caractéristiques (temps de diffusion de la chaleur vs temps de diffusion de l'impulsion, ...) ou les tailles (rapports d'aspect, ...).

En utilisant h, h^2/ν, ν/h, $\rho_o(\nu/h)^2$ et $(T_C - T_F)\,h/L$ [1] comme quantités de référence pour les longueurs, le temps, les vitesses, la pression et la température, les équations adimensionnées deviennent alors [2] :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\vec{\nabla}}\vec{u} + \sqrt{Ta}\,(\vec{e}_z \times \vec{u}) = \vec{\nabla} p + \Delta \vec{u} + Gr\,\Theta\,\vec{e}_z, \tag{2.10a}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}\Theta = \frac{1}{Pr}\Delta\Theta, \tag{2.10b}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0. \tag{2.10c}$$

Ici, $\Theta = (T - T_o)A_X/(T_C - T_F)$ représente un profil de température normalisé, $Gr = (g\beta(T_C - T_F)h^3)/(A_X\,\nu^2)$ le nombre de Grashof, $Ta = (4\Omega_0^2 h^4)/\nu^2$ le nombre de Taylor et $Pr = \nu/\alpha$ le nombre de Prandtl précédemment définis au chapitre 1. A_X est le rapport d'aspect dans la direction longitudinal Ox et A_Y celui dans la direction transverse Oy.

1. Dans le cas de parois horizontales infinies, la quantité de référence pour la température est γh où γ est le gradient de température imposé.

2. Dans la perspective d'alléger la nomenclature des champs avec et sans dimension, nous allons garder les mêmes notations. Dorénavant, toutes les grandeurs qui apparaissent dans le manuscrit seront sans dimensions.

Les nouvelles conditions initiales et aux limites associées au système d'équations 2.10a, 2.10b et 2.10c sont :

$$\vec{u}(\vec{r},t_o) = \vec{u}_o(\vec{r}), \tag{2.11a}$$
$$\Theta(\vec{r},t_o) = \Theta_0(\vec{r}), \tag{2.11b}$$

pour les conditions initiales.

Les conditions aux limites sont

$$\vec{u}|_{\text{paroi}} = 0, \tag{2.12}$$

pour le champ de vitesse,

$$\Theta(x = \pm A_X/2, y, z) = \pm A_X/2, \tag{2.13}$$

pour les parois isothermes situées à $x = \pm A_X/2$, et

$$\vec{\nabla}\Theta \cdot \vec{n} = 0, \tag{2.14}$$

pour les parois adiabatiques.

Finalement, dans le cas de parois horizontales infinies, nous obtenons $\vec{u}(z = \pm 1/2) = 0$, $(\partial\Theta/\partial z)_{z=\pm 1/2} = 0$ pour les parois adiabatiques et $\Theta(x, z = \pm 1/2) = x$ pour les parois parfaitement conductrices.

2.5 Description du code numérique tridimensionnel

Il existe de nombreuses méthodes numériques pour la discrétisation spatiale des équations aux dérivées partielles telles que les équations de Navier-Stokes et de la conservation de l'énergie. Les plus courantes sont les différences finies, les volumes finis, les éléments finis, les méthodes spectrales et enfin une méthode hybride de ces deux dernières méthodes appelée méthode des éléments spectraux. Les équations 2.10a, 2.10b et 2.10c sont résolues à l'aide d'un code aux éléments spectraux développé par Ben Hadid & Henry (1997) et validé par de nombreuses simulations tridimensionnelles d'écoulements convectifs (Henry & Ben Hadid (2007a,b), Henry *et al.* (2008), Torres *et al.* (2013, 2014)). L'intégration spatiale est obtenue par des quadratures polynômiales de Gauss-Lobatto-Legendre alors que l'intégration temporelle est assurée par un schéma semi-implicite d'ordre élevé, proposé par Karniadakis *et al.* (1991), où les termes non linéaires sont intégrés explicitement, la pression est résolue en imposant la contrainte de l'incompressibilité et finalement les termes linéaires sont intégrés implicitement.

2.5.1 Intégration temporelle et algorithme de projection

En plus de la non-linéarité des équations de Navier-Stokes, le traitement de la pression et de la contrainte de l'incompressibilité pose une autre difficulté. La pression dans ce cas n'a pas de sens physique et s'adapte à chaque instant d'une manière à ce que la contrainte de l'incompressibilité soit satisfaite (Gresho & Sani, 1987). Toutefois, une des solutions apportées par la communauté scientifique est la méthode de projection qui permet de traiter ce couplage entre la vitesse et la pression. Les méthodes de projection traitent le couplage vitesse-pression en divisant le problème compliqué des équations de Navier-Stokes en sous-problèmes plus simples et en les résolvant efficacement. Cette technique divise les opérateurs différentiels de manière à ce qu'on finisse avec des équations de Poisson et de Helmholtz à résoudre à la place des équations de Navier Stokes.

Traitement du couplage vitesse-pression

L'algorithme proposé par Karniadakis *et al.* (1991) est utilisé : les termes non linéaires sont intégrés explicitement avec un schéma d'Adams-Bashforth tandis que les termes linéaires sont intégrés implicitement avec un schéma d'Adams-Moulton. La pression quant à elle, est découplée et est résolue à l'aide d'une équation de Poisson déduite de l'équation de la quantité de mouvement. Cet algorithme est divisé en trois sous problèmes :

- **étape 1.** La prédiction : Calcul d'un champ intermédiaire $\vec{u}_p$

$$\vec{u}_p = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \vec{u}^{(n-j)} - \delta t \left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \left(\vec{u}^{(n-j)} \cdot \vec{\vec{\nabla}} \vec{u}^{(n-j)} + \sqrt{Ta} \left(\vec{e}_z \times \vec{u}^{(n-j)} \right) \right) \right) + \delta t \left(Gr \Theta^{(n+1)} \vec{e}_z \right). \tag{2.15}$$

- **étape 2.** Incorporer le caractère incompressible de l'écoulement à travers l'équation de la pression. On définit un autre champ intermédiaire $\vec{u}_{pp}$

$$\vec{u}_{pp} = \vec{u}_p - \delta t \vec{\nabla} p^{(n+1)}, \tag{2.16}$$

où $\vec{\nabla} p^{(n+1)}$ est obtenu, en supposant $\vec{\nabla}.\vec{u}_{pp} = 0$, par la résolution de

$$\Delta p^{(n+1)} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{u}_p}{\delta t} \right), \tag{2.17}$$

avec les conditions aux limites

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p^{(n+1)} = -\vec{n} \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}^{(n-j)} \right) \right) - Gr \Theta^{(n+1)} \vec{e}_z \right). \tag{2.18}$$

- **étape 3.** La correction : on inclut les termes visqueux et on impose les conditions aux limites

$$\gamma_0 \vec{u}^{(n+1)} + \delta t \, \Delta \vec{u}^{(n+1)} = \vec{u}_{pp}. \tag{2.19}$$

Ici, α_j, β_j et γ_0 sont des coefficients de pondération implicites/explicites permettant d'avoir des schémas stables d'ordre k. Ces coefficients sont donnés dans le tableau 2.1.

poids	ordre 1	ordre 2	ordre 3
γ_0	1	3/2	11/6
α_0	1	2	3
α_1	0	-1/2	-3/2
α_2	0	0	1/3
β_0	1	2	3
β_1	0	-1	-3
β_2	0	0	1

TABLE 2.1 – Coefficients de pondération implicites/explicites aux différents ordres d'intégration en temps d'après Karniadakis *et al.* (1991)

Traitement de l'équation de la température

L'intégration temporelle de l'équation de bilan de l'énergie se fait en deux étapes au lieu de trois. Ceci revient au fait que l'équation de l'énergie n'est pas contrainte par l'incompressibilité du milieu fluide. Un schéma similaire au précédent est alors obtenu :

- **étape 1.** La prédiction : Calcul d'un champ intermédiaire Θ_p

$$\Theta_p = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \Theta^{(n-j)} - \delta t \left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \vec{u}^{(n-j)} \cdot \vec{\nabla} \Theta^{(n-j)} \right) \tag{2.20}$$

- **étape 2.** La correction : on inclut les termes de diffusion et on impose les conditions aux limites

$$\gamma_0 \Theta^{(n+1)} + \frac{\delta t}{Pr} \Delta \Theta^{(n+1)} = \Theta_p. \tag{2.21}$$

Il est important à ce stade de signaler que cet algorithme a été appliqué directement au problème physique et que seules les parties implicites en temps (Éqs. 2.17, 2.19 et 2.21) sont traitées avec la formulation faible. Enfin, notons que la partie thermique du problème (Éqs. 2.20 et 2.21) est résolue en premier afin d'obtenir une estimation du terme de flottabilité au pas de temps $(n+1)$ dans les équations du mouvement (Éqs. 2.15 et 2.18).

2.5.2 Méthode des éléments spectraux

La *méthode des éléments spectraux*, initialement développée par Patera (1984), combine à la fois la généralité de la méthode des éléments finis, permettant de traiter des géométries plus complexes, avec la précision des méthodes spectrales. Dans la discrétisation des éléments spectraux, le domaine de calcul est divisé en plusieurs éléments et l'inconnue est représentée, dans chaque élément, par un polynôme de Lagrange d'ordre élevé passant par les points de collocation de Gauss-Lobatto-Legendre. Comme dans la méthode classique des éléments finis, la méthode des éléments spectraux résout les équations du problème physique considéré dans leur formulation faible, c'est-à-dire dans leur formulation variationnelle.

Formulation faible des équations de Helmholtz et de Poisson

La formulation faible d'une équation différentielle quelconque consiste à la transformer en un problème variationnel. Cette transformation permet de réduire l'ordre de différentiation des opérateurs d'ordre élevé tels que les laplaciens et d'inclure les conditions aux limites à travers des intégrales de bords. Dans notre cas, nous somme amenés à résoudre des équations différentielles de type Helmholtz non-homogènes pour la vitesse et la température (étapes de correction, Éqs. 2.19 et 2.21) ainsi que l'équation de Poisson pour la pression (Éq. 2.17). Dans tous les cas, le problème à résoudre peut se ramener à la résolution de l'équation différentielle

$$\Delta \phi(x,y,z) + \xi_i \, \phi(x,y,z) = f_i(x,y,z), \tag{2.22}$$

où Δ est l'opérateur laplacien, ξ_i est un coefficient constant et $f_i(x,y,z)$ est un champ spatial tridimensionnel. Les coefficients ξ_i et les champs f_i correspondant à chaque équation sont donnés dans le tableau 2.2.

Variable	ξ_i	f_i
$\vec{u}$	$\gamma_0/\delta t$	$\vec{u}_{pp}/\delta t$
Θ	$Pr\cdot\gamma_0/\delta t$	$Pr\cdot\Theta_p/\delta t$
p	0	$(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}_p)/\delta t$

TABLE 2.2 – Coefficients ξ_i et champs f_i correspondant aux équations de Helmholtz et de Poisson.

L'équation 2.22 est mise sous forme faible en multipliant scalairement l'équation 2.22 par la fonction test $\phi^\star$ et en intégrant sur tout le volume $\mathscr{V}$ auquel nous associons une surface de bord $\mathscr{S}$. Il vient alors :

$$\int_{\mathscr{V}} \Delta\phi\cdot\phi^\star\, d\mathscr{V} + \xi_i \int_{\mathscr{V}} \phi\cdot\phi^\star\, d\mathscr{V} = \int_{\mathscr{V}} f_i\cdot\phi^\star\, d\mathscr{V}, \tag{2.23}$$

qui peut être encore écrite, en intégrant par parties le terme du Laplacien, sous la forme finale :

$$\int_{\mathscr{V}} \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi^\star\, d\mathscr{V} - \xi_i \int_{\mathscr{V}} \phi\cdot\phi^\star\, d\mathscr{V} = \int_{\mathscr{S}} (\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{n})\cdot\phi^\star\, d\mathscr{S} - \int_{\mathscr{V}} f_i\cdot\phi^\star\, d\mathscr{V}. \tag{2.24}$$

L'équation 2.24 représente la formulation faible, résolue pour les trois quantités $\vec{u}$, Θ et p, du problème physique traité dans cette thèse avec les coefficients ξ_i et les champs f_i appropriés à chaque quantité physique (Tab. 2.2).

Polynômes d'interpolation et évaluation des intégrales

A ce stade, les intégrales de la formulation faible (Éq. 2.24) doivent être évaluées afin de pouvoir déterminer la solution du problème posé par l'équation 2.22 et ainsi obtenir la vitesse, la température et la pression à chaque étape du schéma temporel décrit précédemment. Comme nous utilisons la quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre pour évaluer ces intégrales, les points de collocation sont les racines de l'expression $(1-x^2)\,H'_N(x)=0$ où $H'_N(x)$ est la dérivée première du polynôme de Legendre d'ordre N. Ces polynômes de Legendre, définis dans l'intervalle $[-1,+1]$, n'ont pas d'expression analytique générique, mais peuvent cependant être obtenus à partir de la formule de récurrence de Bonnet [1] ou de celle de Rodrigues [2]. De ce fait, intégrer une fonction quelconque $g(x)$ sur le segment $[-1,+1]$ revient à utiliser la formule de quadrature classique

$$\int_{-1}^{+1} g(x)\,dx = \sum_{s=0}^{N} g(x_s)\cdot w_x(x_s) \tag{2.25}$$

1. La formule de récurrence de Bonnet permet de calculer l'expression du polynôme de Legendre d'ordre $N+1$ à partir de ceux d'ordres antérieurs N et $N-1$ et est donnée par :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \quad \text{pour} \quad N=0, \\ H_1(x) &= x \quad \text{pour} \quad N=1, \\ H_{N+1}(x) &= \frac{(2N+1)\,x\,H_N(x)}{N+1} - \frac{N\,H_{N-1}(x)}{N+1} \quad \forall N>1. \end{aligned}$$

2. Celle-ci est donnée sous la forme de dérivées :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \quad \text{pour} \quad N=0, \\ H_N(x) &= \frac{1}{2^N N!}\frac{d^N}{dx^N}\left(x^2-1\right)^N \quad \forall N>0. \end{aligned}$$

avec $w_x(x_s)$ le poids associé aux polynômes de Legendre et donné par la formule

$$w_x(x_s) = \frac{-2}{(N+1)\,H'_N(x_s)\,H_{N+1}(x_s)} = \frac{2}{(1-x_s^2)\,H'^2_N(x_s)}$$

où les x_s sont les points de collocation dans la direction choisie de l'espace.

Lorsqu'on a une inconnue $\phi(x,y,z,t)$ telle que la composante de la vitesse ou la température dans la cavité définie aux points de collocation x_i, $i=0,\cdots,N_X$, y_j, $j=0,\cdots,N_Y$ et z_k, $k=0,\cdots,N_Z$, nous pouvons chercher la solution du problème sous la forme d'une approximation polynomiale de Lagrange. On écrit alors :

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z,t) &= \sum_{i=0}^{N_X}\sum_{j=0}^{N_Y}\sum_{k=0}^{N_Z}\phi_{ijk}(t)\,L_i(x)\,L_j(y)\,L_k(z)\\ &= \sum_{i=0}^{N_X}\sum_{j=0}^{N_Y}\sum_{k=0}^{N_Z}\phi_{ijk}(t)\prod_{q\neq i}\left(\frac{x-x_q}{x_i-x_q}\right)\prod_{q\neq j}\left(\frac{y-y_q}{y_j-y_q}\right)\prod_{q\neq k}\left(\frac{z-z_q}{z_k-z_q}\right).\end{aligned} \tag{2.26}$$

et les fonctions tests $\phi^\star(x,y,z,t)$ sont :

$$\begin{aligned}\phi^\star(x,y,z,t) &= L_l(x)\,L_m(y)\,L_n(z)\\ &= \prod_{q\neq l}\left(\frac{x-x_q}{x_l-x_q}\right)\prod_{q\neq m}\left(\frac{y-y_q}{y_m-y_q}\right)\prod_{q\neq n}\left(\frac{z-z_q}{z_n-z_q}\right).\end{aligned} \tag{2.27}$$

Ce choix des polynômes d'interpolation est motivé par le fait que les polynômes de Lagrange ont la propriété $L_i(x_j)=\delta_{ij}$ (δ_{ij} étant symbole de kronecker) ce qui revient à calculer les valeurs de $\phi_{ijk}(t)$ aux points de discrétisation. A titre d'exemple, l'intégration suivant la direction Ox ($-A_X/2 \le x \le +A_X/2$) revient à intégrer le produit de deux polynômes de Lagrange $L_i(x)$ et $L_l(x)$:

$$\begin{aligned}\int_{-A_X/2}^{+A_X/2} L_i(x)L_l(x)\,dx &= \left(\frac{A_X}{2}\right)\sum_{s=0}^{N_X} L_i(x_s)\,L_l(x_s)\,w_x(x_s)\\ &= \left(\frac{A_X}{2}\right)\delta_{is}\,\delta_{ls}\,w_x(x_s).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Ceci représente une matrice diagonale dont les valeurs sont le poids d'intégration pour chaque point. De même, les intégrales des gradients (termes issus des laplaciens par exemple) donnent :

$$\int_{-A_X/2}^{+A_X/2}\frac{\partial L_i(x)}{\partial x}\frac{\partial L_l(x)}{\partial x}\,dx = \left(\frac{2}{A_X}\right)\sum_{s=0}^{N_X}\left(\frac{\partial L_i(x)}{\partial x}\right)_{x=x_s}\left(\frac{\partial L_l(x)}{\partial x}\right)_{x=x_s} w_x(x_s). \tag{2.29}$$

Ici, nous obtenons une matrice pleine.

Il est important aussi de signaler que, dans notre cas, les dimensions de la cavité sont différentes de l'intervalle générique $-1 \le x \le 1$ sur lequel sont définis les polynômes d'interpolation. Des changements de variables sont donc nécessaires pour les trois directions de l'espace, ce qui explique l'apparition des pré-facteurs $A_X/2$ et $2/A_X$ dans les expressions. La même procédure entreprise dans 2.28 et 2.29 est faite pour les autres directions

de l'espace Oy ($-A_Y/2 \leq y \leq +A_Y/2$) et Oz ($-1/2 \leq z \leq +1/2$) ce qui permet, en rassemblant tous les termes, d'obtenir un système algébrique correspondant à la formulation faible de l'équation de Poisson pour la pression (Éq. 2.17) et des équations de correction de la vitesse et de la température (Éqs. 2.19 et 2.21). A l'issue de cette étape, nous avons entièrement déterminé l'état de l'écoulement au pas de temps $(n+1)$, i.e. $\vec{u}^{(n+1)}$, $\Theta^{(n+1)}$ et $p^{(n+1)}$.

2.6 Technique de continuation

L'une des propriétés des équations de Navier-Stokes, et de la mécanique des fluides d'une manière générale, est qu'elles sont non-linéaires et fortement couplées. Cette nature des équations fait qu'il y a souvent plusieurs solutions mathématiques possibles du système physique. Ces solutions diffèrent les unes des autres par leurs symétries spatiales, leurs comportement temporel (stationnaire/instationnaire) ou par leur stabilité vis-à-vis des perturbations qui sont inévitables dans toutes les situations. La méthode de continuation nous offre alors une voie de suivi de ces solutions en fonction d'un certain paramètre de contrôle tel que les nombres de Grashof, Prandtl ou Taylor. Nous allons raisonner ici en considérant le nombre de Grashof Gr comme paramètre de continuation.

En introduisant le vecteur $\vec{q} = \{\vec{u}, \Theta\}^T$ caractérisant l'état du système physique, les équations du mouvement se réécrivent sous la forme d'un système dynamique

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = \mathscr{L}\vec{q} + \mathscr{N}(Gr, \vec{q}), \tag{2.30}$$

où $\mathscr{L}\vec{q}$ est la partie linéaire dissipative (Laplaciens) et $\mathscr{N}(Gr, \vec{q})$ est la partie non-linéaire contenant tous les termes restant. $\mathscr{L}\vec{q}$ et $\mathscr{N}(Gr, \vec{q})$ sont donnés par :

$$\mathscr{L}\vec{q} = \begin{pmatrix} \Delta \\ Pr^{-1}\Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{u} \\ \Theta \end{Bmatrix} \tag{2.31}$$

et

$$\mathscr{N}(Gr, \vec{q}) = \begin{pmatrix} -\vec{\nabla} p - \vec{u}.\bar{\bar{\nabla}}\vec{u} - \sqrt{Ta}\,(\vec{e}_z \times \vec{u}) + Gr\,\Theta\,\vec{e}_z \\ -\vec{u}.\vec{\nabla}\Theta \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

L'idée générale est alors de suivre l'évolution du système dynamique 2.30 lorsque Gr est changé en traçant des diagrammes de bifurcation. La technique est basée sur deux sous-étapes : *la prédiction* suivie de *la correction*. La première sous-étape consiste à obtenir, par extrapolation, une solution proche de la solution exacte mais qui ne vérifie pas parfaitement l'équation de départ ; c'est *la prédiction*. La deuxième sous-étape est *une correction* qui se fait soit à Gr constant (cas usuel), soit en fixant une composante du vecteur d'état $\vec{q}$ et en cherchant Gr (cas de non convergence de la première tentative), tout en prenant la prédiction comme valeur initiale pour amorcer la résolution par la méthode de Newton.

Pour chaque étape de continuation p (prédiction+correction), la solution $(\vec{q}^{(p)}, Gr^{(p)})$ est utilisée pour calculer $(\vec{q}^{(p+1)}, Gr^{(p+1)})$ tel que $Gr^{(p+1)} = Gr^{(p)} + \delta Gr$ où δGr est le pas de continuation. Ce pas de continuation peut être crucial dans le processus de convergence, du moment où on peut rencontrer un point de rebroussement de la courbe de bifurcation, ce qui nous amène à le rendre adaptatif en fonction des résultats des itérations précédentes.

2.6.1 Continuation des états stationnaires

La continuation des solutions stationnaires (points fixes) est basée sur une approche de Newton-Krylov dans laquelle les états stationnaires du système dynamique 2.30 sont obtenus à partir du code numérique tridimensionnel à l'ordre un en temps en suivant les idées de Mamun & Tuckerman (1995) et Bergeon *et al.* (1998). Le fonctionnement de l'algorithme complet a été validé et testé avec succès précédemment par Henry & Ben Hadid (2007a,b) et Torres *et al.* (2013, 2014) dans le cas de la convection naturelle.

En considérant notre schéma temporel à l'ordre un pour lequel le terme linéaire est traité implicitement alors que le terme non linéaire est traité explicitement, on obtient

$$\frac{\vec{q}^{(n+1)}-\vec{q}^{(n)}}{\delta t} = \mathscr{L}\vec{q}^{(n+1)} + \mathscr{N}(Gr,\vec{q}^{(n)}). \tag{2.33}$$

La méthode de Newton, utilisée pour déterminer les états stationnaires du système dynamique [1] 2.30, est très puissante à cause de sa convergence rapide, en particulier si l'estimation initiale de la solution $\vec{q}^{(0)}$ est suffisamment proche de la solution recherchée $\vec{q}^{*}$.

Après quelques manipulations algébriques, l'équation 2.33 peut se réécrire de la manière suivante :

$$\vec{q}^{(n+1)}-\vec{q}^{(n)} = -\mathscr{L}^{-1}\left\{\mathscr{L}\vec{q}^{(n)} + \mathscr{N}(Gr,\vec{q}^{(n)})\right\}, \tag{2.34}$$

cette formulation n'étant valable que pour obtenir les états stationnaires du système.

Rappelons que notre but est de résoudre par la méthode de Newton le problème stationnaire associé à 2.30 :

$$\mathscr{L}\vec{q} + \mathscr{N}(Gr,\vec{q}) = 0, \tag{2.35}$$

ce qui donne le système à résoudre à chaque étape de Newton :

$$\begin{cases} \mathscr{L}^{-1}\left\{\mathscr{L} + \mathscr{N}_{\vec{q}}(Gr,\vec{q})\right\}\delta\vec{q} = -\mathscr{L}^{-1}\left\{\mathscr{L}\vec{q} + \mathscr{N}(Gr,\vec{q})\right\} \\ \vec{q} \leftarrow \vec{q} + \delta\vec{q} \end{cases} \tag{2.36}$$

D'après 2.34, le membre de droite du système 2.36 peut être obtenu par une étape en temps de notre problème non-linéaire, en retranchant $\vec{q}^{(n)}$ de $\vec{q}^{(n+1)}$. De même, chaque produit matrice vecteur du système 2.36 (réalisé à chaque étape du solveur itératif tel que GMRES [2]) peut être obtenu par une étape en temps du problème linéarisé. Il est à noter aussi que l'opérateur $\mathscr{L}^{-1}$ apparait comme un pré-conditionneur de la Jacobienne du système linéarisé, $\mathscr{L} + \mathscr{N}_{\vec{q}}(Gr,\vec{q})$, permettant ainsi d'accélérer la convergence du solveur itératif.

Stabilité des solutions stationnaires

L'algorithme de continuation que nous utilisons est couplé avec une méthode d'Arnoldi. Cette méthode permet d'examiner la stabilité de la solution à chaque pas de continuation et donc permet une détection des points de bifurcation. Le principe de cette méthode est de calculer une matrice Jacobienne de taille beaucoup plus petite que celle du

1. Appelés aussi points fixes en théorie des systèmes dynamiques.
2. GMRES, pour *Generalized minimal residual*, la généralisation de la méthode de minimisation du résidu est une méthode numérique itérative permettant de résoudre un système d'équations linéaires.

système physique (système linéarisé autour de l'état de base), et dont les valeurs et les vecteurs propres correspondent aux modes les plus instables de notre système. Les valeurs propres sont notées σ, leur partie réelle correspondant à un taux de croissance et leur partie imaginaire à une pulsation. Les vecteurs propres sont notés $\vec{h}$ et peuvent aussi être complexes.

Pour des états de base stationnaires, la stabilité est déterminée comme suit :

- Toutes les valeurs propres σ_j ont des parties réelles négatives ($\forall j,\ Re(\sigma_j) < 0$) : État stationnaire stable.
- Il existe au moins une valeur propre avec partie réelle positive ($\exists j,\ Re(\sigma_j) > 0$) : État stationnaire instable.

Toutefois, la dynamique et la nature de la bifurcation seront influencées par la valeur propre qui transite au point de bifurcation considéré :

- Si $Re(\sigma) = Im(\sigma) = 0$ alors il s'agit d'une bifurcation stationnaire (bifurcation fourche, nœud-col, ...),
- Si $Re(\sigma) = 0$ et $Im(\sigma) = \pm\sigma_{i,c}$ (paire de valeurs propres complexes conjuguées), alors la bifurcation est de type Hopf donnant naissance à un cycle limite périodique de fréquence critique au seuil $f_c = \sigma_{i,c}/2\pi$.

Détermination des points de bifurcation

La combinaison de l'algorithme de continuation et de la méthode d'Arnoldi nous permet de localiser les points de bifurcation (points où une valeur propre change de signe). Lorsque, pour une solution $\vec{q}$ obtenue pour une valeur de Gr, on a détecté un point de bifurcation associé à une certaine valeur propre σ, on stocke cette valeur propre σ, le vecteur propre ($\vec{h} \in \mathbb{C}$) correspondant, ainsi que la solution $\vec{q}$ et la valeur de Gr. On a a priori :

$$\begin{cases} \vec{h} = \vec{h}_r + i\,\vec{h}_i \\ \sigma = \sigma_r + i\,\sigma_i \end{cases} \tag{2.37}$$

où $\vec{h}_r$ et $\vec{h}_i$ sont les parties réelle et imaginaire du vecteur propre associé à la valeur propre σ, σ_r est son taux de croissance et σ_i est sa pulsation.

Le système à résoudre dans ce cas va nous permettre de trouver la valeur critique du nombre de Grashof, Gr_c, telle que $\vec{q}$ soit solution et $\vec{h}_r$ et $\vec{h}_i$ (dont on fixe l'une des composantes pour éviter la solution triviale nulle) soient associés à une partie réelle σ_r nulle. Ce système s'écrit :

$$\begin{cases} \mathscr{L}\vec{q} + \mathscr{N}(Gr, \vec{q}) = 0 \\ \left\{\mathscr{L} + \mathscr{N}_{\vec{q}}(Gr, \vec{q})\right\}\vec{h}_r + \sigma_i \vec{h}_i = 0 \\ \left\{\mathscr{L} + \mathscr{N}_{\vec{q}}(Gr, \vec{q})\right\}\vec{h}_i - \sigma_i \vec{h}_r = 0 \\ (\vec{h}_r)_l = 1 \\ (\vec{h}_i)_l = 1 \end{cases} \tag{2.38}$$

Notons que le système d'équations 2.38 représente le cas général où la transition est oscillatoire, mais on peut également se ramener au cas d'une transition stationnaire en annulant les parties imaginaires du problème.

Enfin, en utilisant la méthode de Newton, on se ramène à la résolution du système final :

$$\begin{bmatrix} \mathscr{L}+\mathscr{N}_{\vec{q}}(Gr,\vec{q}) & 0 & 0 & \mathscr{N}_{Gr}(Gr,\vec{q}) & 0 \\ \mathscr{N}_{\vec{q},\vec{q}}(Gr,\vec{q})\vec{h}_r & \mathscr{L}+\mathscr{N}_{\vec{q}}(Gr,\vec{q}) & \sigma_i & \mathscr{N}_{\vec{q},Gr}(Gr,\vec{q})\vec{h}_r & \vec{h}_i \\ \mathscr{N}_{\vec{q},\vec{q}}(Gr,\vec{q})\vec{h}_i & -\sigma_i & \mathscr{L}+\mathscr{N}_{\vec{q}}(Gr,\vec{q}) & \mathscr{N}_{\vec{q},Gr}(Gr,\vec{q})\vec{h}_i & -\vec{h}_r \\ 0 & \vec{e}_l^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{e}_l^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\vec{q} \\ \delta\vec{h}_r \\ \delta\vec{h}_i \\ \delta Gr \\ \delta\sigma_i \end{Bmatrix} \tag{2.39}$$
$$= - \begin{Bmatrix} \mathscr{L}\vec{q}+\mathscr{N}(Gr,\vec{q}) \\ \left\{\mathscr{L}+\mathscr{N}_{\vec{q}}(Gr,\vec{q})\right\}\vec{h}_r+\sigma_i\vec{h}_i \\ \left\{\mathscr{L}+\mathscr{N}_{\vec{q}}(Gr,\vec{q})\right\}\vec{h}_i-\sigma_i\vec{h}_r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

où $\mathscr{N}_{\vec{q}}(Gr,\vec{q})$, $\mathscr{N}_{Gr}(Gr,\vec{q})$ sont respectivement les matrices Jacobiennes de $\mathscr{N}(Gr,\vec{q})$ par rapport à $\vec{q}$ et Gr, tandis que $\mathscr{N}_{\vec{q},\vec{q}}(Gr,\vec{q})$ et $\mathscr{N}_{\vec{q},Gr}(Gr,\vec{q})$ sont les doubles Jacobiennes par rapport à $\vec{q}$ et Gr. Ici aussi, les termes du second membre, ainsi que les produits matrice-vecteur du premier membre, pourront être obtenus par des étapes en temps du problème non-linéaire ou de problèmes linéarisés adaptés.

2.6.2 Continuation des états oscillatoires

La continuation des solutions oscillatoires périodiques (ou cycles limites) a été développée plus récemment en utilisant la méthode proposée par Sánchez *et al.* (2004) et utilisée avec succès par Puigjaner *et al.* (2011) dans un problème de Rayleigh-Bénard. La nouveauté réside dans le fait que la méthode est développée à partir d'un schéma d'intégration temporelle d'ordre élevé. La méthode est basée sur une approche de Newton-Krylov dans laquelle les états périodiques du système dynamique 2.30 (ou encore des équations 2.10a, 2.10b et 2.10c) sont obtenus en tant que points fixes d'une section de Poincaré (Fig. 2.2). Dans notre code, le plan définissant cette section de Poincaré correspond à une valeur donnée u_0^* dans le plan k_p (Fig. 2.2) de u^*, la vitesse longitudinale en un point choisi à l'intérieur de la cavité, c'est-à-dire $u^* = u_0^*$.

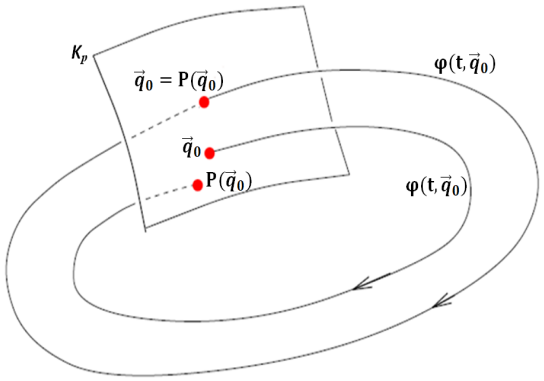


FIGURE 2.2 – Illustration de la section de Poincaré et de la trajectoire d'une solution périodique $\vec{q}(t) = \vec{q}(t+T)$. Figure adaptée de Seydel (2010).

Pour le calcul itératif du cycle, on choisit le schéma temporel à l'ordre trois avec un pas de temps $\delta t_c = 5 \times 10^{-5}$. On démarre à partir du point initial dans le plan de Poincaré

par deux étapes à l'ordre un avec $\delta t = \delta t_c/4$, puis par trois étapes à l'ordre deux avec $\delta t = \delta t_c/2$, avant de pouvoir utiliser des étapes à l'ordre trois avec $\delta t = \delta t_c$. Après un certain nombre d'itérations, on franchit la section de Poincaré entre les itérations t_n et t_{n+1}. Pour retourner exactement dans le plan de Poincaré, on va chercher à converger vers le temps qui nous donnera exactement $u^* = u_0^*$, soit t_m. On utilise pour cela une méthode de Newton. Si la solution obtenue en partant de $\vec{q}_0$ (condition initiale) au bout d'un temps t s'écrit $\varphi(t,\vec{q}_0)$, on aura la solution $P(\vec{q}_0)$ dans le plan de Poincaré à un temps $t = t(\vec{q}_0)$ et cette solution vaudra $P(\vec{q}_0) = \varphi(t(\vec{q}_0),\vec{q}_0)$.

Si le plan de Poincaré est défini par $g(\vec{q}) = 0$ (dans notre cas, cela donnerait $g(\vec{q}) = u^*(\vec{q}) - u_0^* = 0$), on aura donc $g[P(\vec{q}_0)] = g[\varphi(t(\vec{q}_0),\vec{q}_0)] = 0$. Pour construire les itérations de Newton, on pourra donc écrire :

$$g\left[\varphi(t^{(m+1)},\vec{q}_0)\right] = g\left[\varphi(t^{(m)},\vec{q}_0)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[g(\varphi(t^{(m)},\vec{q}_0))\right](t^{(m+1)} - t^{(m)}). \tag{2.40}$$

Or on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\{g[\varphi(t,\vec{q}_0)]\} = g_\varphi[\varphi(t,\vec{q}_0)] \cdot \frac{\partial}{\partial t}[\varphi(t,\vec{q}_0)], \tag{2.41}$$

où $g_\varphi[\varphi(t,\vec{q}_0)]$ est la Jacobienne de $g[\varphi(t,\vec{q}_0)]$ par rapport à φ. L'itération de Newton s'écrira donc :

$$t^{(m+1)} = t^{(m)} - \frac{g\left[\varphi(t^{(m)},\vec{q}_0)\right]}{g_\varphi\left[\varphi(t^{(m)},\vec{q}_0)\right] \cdot \partial/\partial t\left[\varphi(t^{(m)},\vec{q}_0)\right]} \tag{2.42}$$

Avec notre choix du plan de Poincaré, on a $g(\varphi(t^{(m)},\vec{q})) = u^*(t^{(m)},\vec{q}) - u_0^*$. On a donc $g_\varphi(\varphi)$ qui vaut donc 1 en u^* et 0 ailleurs, et $g_\varphi(\varphi) \cdot \partial/\partial t\left[\varphi(t^{(m)},\vec{q}_0)\right]$ correspond donc à la valeur de $\partial/\partial t\left[\varphi(t^{(m)},\vec{q}_0)\right]$ en u^*. Pour avoir les valeurs en t_m, on part des valeurs en t_n et on discrétise le temps entre t_n et t_m par des petits pas de temps δt.

A l'ordre 3, on peut démarrer à l'ordre 1 avec un pas de temps $(t_m - t_n)/4$ et l'on progresse comme en début de cycle en augmentant l'ordre et le pas de temps jusqu'à atteindre t_m. On peut ainsi obtenir la solution en t^m, $\varphi(t^{(m)},\vec{q})$, et on peut en déduire $g(\varphi(t^{(m)},\vec{q})) = u^*(t^{(m)},\vec{q}) - u_0^*$ et calculer la valeur en u^* de $\partial/\partial t\left[\varphi(t^{(m)},\vec{q})\right]$

$$\frac{\partial\left[\varphi(t^{(m)},\vec{q})\right]}{\partial t} = \left[\mathscr{L}\varphi(t^{(m)},\vec{q}) + \mathscr{N}(Gr,\varphi(t^{(m)},\vec{q}))\right]$$

en utilisant la formule de dérivation en temps à l'ordre que l'on a choisi, formule faisant intervenir les solutions aux temps précédant l'arrivée en $t^{(m)}$.

Notons que la première correction après le premier parcours du cycle a lieu pour $t^{(m=1)} = t^{(n)}$; on en déduit $t^{(m=2)}$ grâce à l'équation 2.42 ; on parcourt le cycle de $t^{(n)}$ à $t^{(m=2)}$; on fait une nouvelle correction avec 2.42 ; et ainsi de suite. Le processus de Newton pour retourner exactement dans le plan de Poincaré converge en peu d'itérations (de l'ordre de 3). On obtient ainsi à partir d'une solution initiale dans le plan de Poincaré la solution suivante qui recoupe ce plan de Poincaré (dans le même sens) et le temps nécessaire pour ce retour dans le plan de Poincaré.

En ayant fait ce parcours, on retourne en général dans le plan de Poincaré en un point différent du point initial (trajectoire ouverte sur la figure 2.2). Et l'idée est maintenant de

réduire cette différence en utilisant une méthode de Newton permettant de corriger le point de départ afin d'obtenir le véritable cycle périodique. Pour avoir une orbite (trajectoire fermée sur la figure 2.2), il faut donc vérifier :

$$\vec{q} - P(\vec{q}) = 0. \tag{2.43}$$

En utilisant une méthode de Newton, la résolution itérative de l'équation 2.43 devient :

$$\begin{cases} \left[I - P_{\vec{q}}(\vec{q}^{(i)})\right] \delta\vec{q}^{(i)} = \left[-\vec{q}^{(i)} + P(\vec{q}^{(i)})\right] \\ \vec{q}^{(i+1)} \leftarrow \vec{q}^{(i)} + \delta\vec{q}^{(i)} \end{cases} \tag{2.44}$$

avec $P_{\vec{q}}(\vec{q}^{(i)})$ la Jacobienne de $P(\vec{q}^{(i)})$ par rapport à $\vec{q}$. Le membre de droite de 2.44 correspond au calcul précédent d'un cycle pour retourner dans le plan de Poincaré et il suffit alors de retrancher la solution de départ (condition initiale) de la solution de retour. L'estimation du membre de gauche s'obtient en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées pour $P(\vec{q}) = \varphi(t(\vec{q}), \vec{q})$. On peut écrire :

$$P_{\vec{q}}(\vec{q}_0) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi(t(\vec{q}_0), \vec{q}_0)\right] \frac{\partial t}{\partial \vec{q}}(t(\vec{q}_0), \vec{q}_0) + \frac{\partial \varphi(t(\vec{q}_0), \vec{q}_0)}{\partial \vec{q}} \tag{2.45}$$

c'est à dire :

$$P_{\vec{q}}(\vec{q}_0)\delta\vec{q}_0 = \frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi(t(\vec{q}_0), \vec{q}_0)\right] \frac{\partial t}{\partial \vec{q}}(t(\vec{q}_0), \vec{q}_0)\delta\vec{q}_0 + \frac{\partial \varphi(t(\vec{q}_0), \vec{q}_0)}{\partial \vec{q}}\delta\vec{q}_0 \tag{2.46}$$

$z = [\partial\varphi/\partial\vec{q}](t(\vec{q}_0), \vec{q}_0)\delta\vec{q}_0$ est la solution au temps de retour $t(\vec{q}_0)$ (temps obtenu lors du calcul du second membre) du problème

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left\{\mathscr{L} + \mathscr{N}_{\vec{q}}(Gr, \vec{q})\right\} z \qquad \text{avec} \qquad z(0) = \delta\vec{q}_0, \tag{2.47}$$

qui est le problème linéarisé. Pour obtenir cette solution, il faut donc faire un cycle du problème linéarisé, de la même façon que pour le cycle normal (avec les mêmes pas de temps), en utilisant à chaque pas de temps les solutions $\vec{q}$ calculées lors du cycle normal (solutions autour desquelles on linéarise le problème). Ces solutions sont disponibles si elles ont été stockées lors du cycle normal ou recalculées à chaque fois qu'on fait un cycle linéarisé [1].

Il nous reste à calculer $\partial/\partial t\left[\varphi(t(\vec{q}_0), \vec{q}_0)\right] \frac{\partial t}{\partial \vec{q}}(t(\vec{q}_0), \vec{q}_0)\delta\vec{q}_0$. La première partie, que nous noterons x, $\partial/\partial t\left[\varphi(t(\vec{q}_0), \vec{q}_0)\right]$ peut être obtenue en fin du cycle normal. Pour obtenir $\frac{\partial t}{\partial \vec{q}}(t(\vec{q}_0), \vec{q}_0)\delta\vec{q}_0$, nous allons écrire que $P_{\vec{q}}(\vec{q}_0)\delta\vec{q}_0$ est tangent au plan de Poincaré (comme l'est dans le second membre $-\vec{q}_0 + P(\vec{q}_0)$). Si on note la propriété de tangence pour $\vec{q}_0$ par $T(\vec{q}_0) = 0$ où $T(\vec{q}_0)$ est linéaire par rapport à $\vec{q}_0$ (dans notre cas, ce serait $T(\vec{q}_0) = u^*(\vec{q}_0) = 0$), on aura

$$T\left(x\frac{\partial t}{\partial \vec{q}}(t(\vec{q}_0), \vec{q}_0)\delta\vec{q}_0 + z\right) = 0$$

1. Le stockage des solutions lors du cycle normal est lourd en mémoire tandis que le recalcul des solutions augmente fortement le temps de calcul. Il y a un choix à faire entre stockage et temps de calcul. Dans nos situations, les périodes des cycles n'étant pas trop longues, il a été possible de stocker les solutions, ce qui a permis de réduire les temps de calcul.

et donc

$$\frac{\partial t}{\partial \vec{q}}(t(\vec{q}_0),\vec{q}_0)\delta\vec{q}_0 = -\frac{T(z)}{T(x)}.$$

Pour notre cas, cela s'écrira :

$$\frac{\partial t}{\partial \vec{q}}(t(\vec{q}_0),\vec{q}_0)\delta\vec{q}_0 = -\frac{u^*(z)}{u^*(x)}.$$

En résumé, on a

$$P_{\vec{q}}(\vec{q}_0)\delta\vec{q}_0 = z - x\,\frac{T(z)}{T(x)} \tag{2.48}$$

où z est la solution au temps de retour $t(\vec{q}_0)$ du problème linéarisé 2.47 tandis que $x = \partial/\partial t\,[P(\vec{q}_0)]$, où $P(\vec{q}_0)$ est la solution au temps de retour $t(\vec{q}_0)$ du problème normal 2.30. Si on retranche $P_{\vec{q}}(\vec{q}_0)\delta\vec{q}_0$ ainsi obtenu à $\delta\vec{q}_0$, on peut donc obtenir à chaque étape du solveur itératif utilisé pour résoudre 2.44 le produit matrice vecteur correspondant au membre de gauche de ce système.

Finalement, on suppose que la convergence vers la solution périodique est obtenue lorsque la différence quadratique moyenne entre les points initial et final dans le plan de Poincaré est inférieure à 10^{-6}. Comme cela a été mentionné par Sánchez *et al.* (2004), la méthode s'est avérée très efficace avec une convergence généralement obtenue après quelques étapes de Newton-Krylov (2 à 4), chaque étape de Newton-Krylov nécessitant 5 à 15 itérations de GMRES pour une précision prescrite de 10^{-2}.

Stabilité des solutions oscillatoires

La stabilité des solutions oscillatoires périodiques est étudiée dans le cadre de la théorie de Floquet (Klausmeier, 2008; Seydel, 2010). Nous utilisons une méthode d'Arnoldi dans laquelle la base d'Arnoldi est obtenue en calculant l'évolution d'une perturbation avec la version linéarisée des équations 2.10a, 2.10b et 2.10c le long de la solution périodique envisagée. Les valeurs propres complexes $\sigma_j \in \mathbb{C}$ obtenues par la méthode d'Arnoldi sont les multiplicateurs de Floquet. Si la norme d'un multiplicateur de Floquet, associé à une perturbation donnée, est inférieure (supérieure) à 1, c'est-à-dire qu'il se trouve à l'intérieur (l'extérieur) du cercle de rayon unité, la perturbation associée au vecteur propre correspondant diminuera (croitra) au cours du cycle, indiquant le caractère stable (instable) de cette perturbation. Il est à noter cependant qu'il existe toujours un multiplicateur de Floquet réel égal à (+1), ce qui correspond à une perturbation le long de la trajectoire du cycle, qui restera toujours marginale. En excluant cette dernière valeur propre, la solution périodique sera instable s'il existe au moins un multiplicateur de Floquet en dehors du cercle unitaire (i.e. $\exists j,\ |\sigma_j| > 1$). À l'inverse, si tous les multiplicateurs de Floquet sont à l'intérieur du cercle unité (i.e. $\forall j,\ |\sigma_j| < 1$), la solution périodique est stable.

Finalement, selon la manière avec laquelle le multiplicateur de Floquet quitte le cercle unité, nous obtenons les trois cas suivants :

- Si $Re(\sigma) = +1$ et $Im(\sigma) = 0$ alors il s'agit d'une bifurcation de cycle. Le cycle obtenu a la même fréquence au seuil que celui qui lui donne naissance. Comme le cycle limite est un point fixe dans la section de Poincaré, on retrouve dans ce scénario les bifurcations classiques retrouvées dans le cas stationnaire (bifurcation fourche, nœud-col, ...).

- Si $Re(\sigma) = -1$ et $Im(\sigma) = 0$ alors il s'agit d'un doublement de période.
- Si $Re(\sigma) = \sigma_r$ et $Im(\sigma) = \pm\sigma_i$ (avec $|\sigma| = 1$) alors on a une bifurcation de type Naimark–Sacker (parfois appelée bifurcation de Hopf généralisée) donnant lieu à un cycle quasi-périodique. La nouvelle fréquence f_{QP} qui se rajoute à la dynamique oscillatoire est donnée par $f_{QP} = f_{CP}(\arctan(\sigma_i/\sigma_r) + 2k\pi)/(2\pi)$ où f_{CP} est la fréquence du cycle primaire et $k \in \mathbb{Z}$.

Détermination des points de bifurcation

Pour finir avec cette partie, les points de bifurcation dans le cas des cycles périodiques sont déterminés à l'aide d'une interpolation linéaire entre deux étapes de continuation successives à Gr_1 et Gr_2 entre lesquelles on détecte la traversée du cercle unitaire par un multiplicateur de Floquet. Si $(|\sigma_1|, |\sigma_2|)$ sont les deux multiplicateurs de Floquet correspondant respectivement à (Gr_1, Gr_2), le nombre de Grashof critique est obtenu par

$$Gr_c = Gr_1 + \frac{Gr_2 - Gr_1}{|\sigma_2| - |\sigma_1|}(1 - |\sigma_1|). \tag{2.49}$$

2.7 Conclusion

Cette partie constitue une synthèse des méthodes numériques utilisées lors de cette thèse. Le modèle mathématique ainsi que le code numérique tridimensionnel instationnaire aux éléments spectraux ont été présentés. Ce code a été adapté afin d'effectuer une procédure de continuation permettant de suivre les solutions stationnaires (points fixes) et périodiques (cycles limites) en fonction du nombre de Grashof Gr pour des nombres de Prandtl et de Taylor fixes.

La continuation des solutions stationnaires est effectuée en se basant sur la formulation au premier ordre du code instationnaire qui permet, après quelques manipulations, d'obtenir directement le produit matrice-vecteur utilisé dans la procédure itérative de Newton. Ensuite, les diagrammes de bifurcation sont déterminés à l'aide d'un algorithme permettant de calculer les solutions successives et leur stabilité.

Dans sa formulation d'ordre élevé, le code instationnaire permet aussi de suivre les solutions périodiques en fonction du nombre de Grashof et d'évaluer la stabilité de chaque solution. Ces solutions périodiques sont obtenues en tant que points fixes dans une section de Poincaré. Les difficultés ici résident dans la détermination exacte du temps de retour dans le plan de Poincaré en partant d'une certaine condition initiale, ainsi que dans l'obtention du retour exact au point de départ (orbite fermée). Deux boucles itératives de Newton sont alors imbriquées afin d'obtenir le cycle limite recherché.

L'obtention des solutions, stationnaires ou oscillatoires, qui se trouvent sur les branches bifurquées se fait en combinant la perturbation associée au point de bifurcation avec la solution de la branche mère. Une méthode de Newton utilisant cette combinaison comme condition de départ nous permet alors de détecter la branche en question.

Finalement, la superposition des diagrammes de bifurcation des solutions stationnaires et oscillatoires nous permet d'établir le scénario de transition vers des états quasi-périodiques et d'avoir une vue générale de la dynamique sous-jacente.

CHAPITRE 3

ANALYSE DES BIFURCATIONS D'ÉCOULEMENTS EN CAVITÉ TRIDIMENSIONNELLE DIFFÉRENTIELLEMENT CHAUFFÉE

Sommaire

3.1 Introduction 38
3.2 Écoulement de base à bas nombres de Grashof 39
3.3 Bifurcations des solutions stationnaires 41
3.4 Bifurcations des solutions oscillatoires 46
3.4.1 Cas $Pr = 0,025$ 48
3.4.2 Cas $Pr = 0,015$ 48
3.4.3 Cas $Pr = 0,005$ 50
3.4.4 Cas $Pr = 0$ 53
3.4.5 Vue globale de toutes les solutions 54
3.5 Évolution des scénarios de transition 56
3.6 Conclusion 62

3.1 Introduction

Après avoir présenté le code de calcul et son fonctionnement, on exposera ici les résultats de simulations numériques tridimensionnelles obtenus lors de cette thèse pour une cavité parallélépipédique illustrée sur la figure 3.1 de rapports d'aspect longitudinal $A_X = 4$ et transverse $A_Y = 2$. Les parois situées à $x = -A_X/2$ et $x = A_X/2$ sont maintenues à des températures fixes égales respectivement à T_F et T_C ($T_C > T_F$) tandis que toutes les parois latérales sont considérées comme étant adiabatiques.

Dans un premier temps, l'écoulement de base est analysé afin de bien montrer ses symétries qui sont l'une des clés pour la détermination de la nature des instabilités qui vont l'affecter. L'analyse des différentes transitions, stationnaires et oscillatoires, est ensuite faite en fonction du nombre de Grashof, en mettant l'accent sur la structure de l'écoulement résultant ainsi que le suivi des points de bifurcation avec la variation du nombre de Prandtl sur une plage allant de $Pr = 0$ où le profil de température est purement diffusif jusqu'à $Pr = 0,025$, i.e. pour des valeurs typiques des métaux liquides.

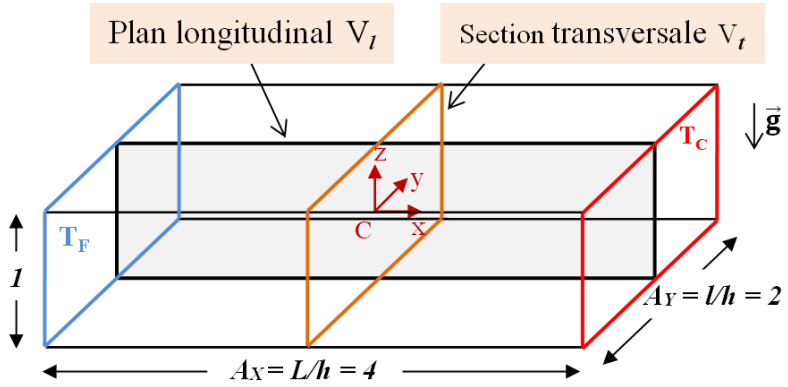


FIGURE 3.1 – Géométrie de la cavité parallélépipédique chauffée latéralement étudiée dans cette thèse. Les parois situées à $x = -A_X/2$ et $x = A_X/2$ sont maintenues à des températures fixes égales respectivement à T_F et T_C ($T_C > T_F$) tandis que toutes les parois latérales sont considérées comme étant adiabatiques.

$N_X \times N_Y \times N_Z$	$Gr_c(P_l^P)$	$Gr_c(H_a^P)$	$f_c(H_a^P)$
$41 \times 31 \times 21$	28955.25	30573.90	35.19
$43 \times 33 \times 23$	28954.80	30571.30	35.19
$45 \times 35 \times 25$	28959.58	30569.23	35.18
$47 \times 37 \times 27$	28957.50	30569.53	35.19
$49 \times 39 \times 29$	28957.40	30569.68	35.19
$51 \times 41 \times 31$	28957.66	30569.52	35.19
$53 \times 43 \times 33$	28957.54	30569.40	35.19

TABLE 3.1 – Tests pour différents maillages portant sur la précision numérique du nombre de Grashof critique Gr_c pour deux bifurcations détectées (Hopf H_a^P et stationnaire fourche supercritique P_l^P) pour $A_X = 4$, $A_Y = 2$ et $Pr = 0,005$. Dans le cas du point de Hopf, la fréquence critique est aussi donnée.

Le maillage utilisé pour tous nos calculs dans ce chapitre est constitué de $47 \times 37 \times 27$ points respectivement dans les directions x, y et z. Comme nous le montrons dans le tableau 3.1, cette grille de maillage donne une bonne résolution des seuils critiques Gr_c des différents points de bifurcation, indiquant que la solution et le vecteur propre qui induiront le comportement oscillatoire sont bien résolus sur la grille choisie.

3.2 Écoulement de base à bas nombres de Grashof

Contrairement à la situation chauffée par le bas dite de Rayleigh-Bénard où l'écoulement de base est un état de repos purement diffusif, la situation dans le cas avec chauffage latéral est complètement différente. En effet, un écoulement convectif s'installe dans notre cavité dès que le nombre de Grashof Gr n'est pas nul. À faible Gr, cet écoulement est stable, unicellulaire et occupe l'ensemble de la cavité. Plus précisément, le fluide monte au niveau de la paroi chaude, traverse longitudinalement la cavité et redescend au niveau de la paroi froide, avant de retourner vers la paroi chaude (Fig. 3.2). Tant que le champ de température reste diffusif et que les effets d'inertie restent faibles (jusqu'à $Gr \approx 10^3$), la structure de l'écoulement est invariante, avec notamment un écoulement quasi-parallèle

au cœur de la cavité (écoulement de Hadley, voir Hart (1972)), et seule son intensité varie linéairement avec Gr.

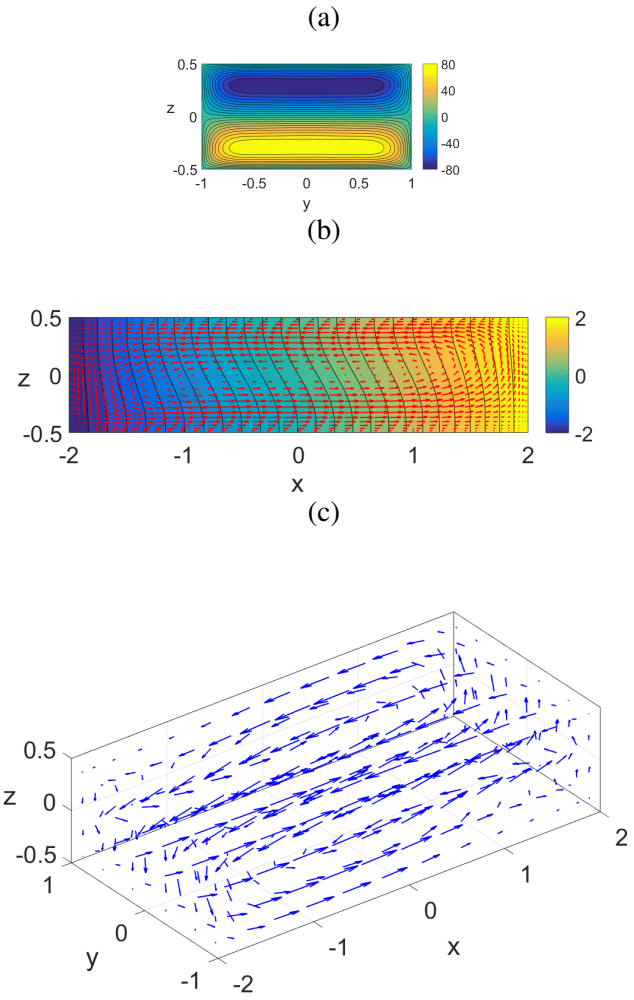


FIGURE 3.2 – Pour $Pr = 0,025$ et $Gr = 3 \times 10^4$: (a) profil de vitesse longitudinale $u(y,z)$ dans la section transverse V_t ; (b) champs de vitesses (u,w) et de température $-2 \leqslant \Theta(x,z) \leqslant 2$ dans le plan longitudinal V_l ; (c) Visualisation 3D du champ de vitesse montrant la boucle convective dans la cavité chauffée latéralement.

Dans l'approximation de Boussinesq, cet écoulement stationnaire présente différentes symétries provenant des symétries des équations, de la géométrie et des conditions aux limites :

- S_l, symétrie de réflexion par rapport au plan central V_l $(y = 0)$, aussi appelée symétrie gauche/droite :

$$S_l : (x,y,z,t) \to (x,-y,z,t), \quad (u,v,w,\Theta) \to (u,-v,w,\Theta),$$

- S_π, symétrie de rotation de π par rapport à l'axe y passant par le centre $(x = 0, z = 0)$:

$$S_\pi : (x,y,z,t) \to (-x,y,-z,t), \quad (u,v,w,\Theta) \to (-u,v,-w,-\Theta),$$

- S_c, symétrie centrale par rapport au centre C de la cavité, telle que :

$$S_c = S_\pi . S_l .$$

Ces symétries appartiennent à un groupe $Z_2 \times Z_2 = D_2$, qui contient quatre éléments (y compris l'identité I). Notez que nous allons également utiliser les notations S_a et S_w pour les écoulements avec respectivement toutes les symétries et sans symétrie.

Les contours de la composante longitudinale de la vitesse dans le plan transverse V_t, $u(y,z)$, donnés sur la figure 3.2a permettent de voir clairement ces symétries. En effet, pour u dans ce plan, la symétrie S_π est exprimée par $(y,z) \to (y,-z)$, $u \to -u$, la symétrie S_l par $(y,z) \to (-y,z)$, $u \to u$ et finalement la symétrie S_c par $(y,z) \to (-y,-z)$, $u \to -u$. Un tel tracé peut ensuite être utilisé pour voir les symétries des solutions sur les nouvelles branches apparaissant aux points de bifurcation. En analysant aussi les vecteurs propres $u'(y,z)$ dans ce plan (Fig. 3.5), nous allons pouvoir déterminer quelle symétrie est conservée ou brisée.

Les changements qui affectent l'écoulement de base stationnaire avant l'apparition de la première bifurcation quand le nombre de Grashof est augmenté sont décrits par Henry & Buffat (1998) et Henry & Ben Hadid (2007a,b). A $Gr \approx 10^4$, l'écoulement unicellulaire semble être déjà incliné par rapport à la circulation parallèle de Hadley. Pour des valeurs plus élevées de Gr, cet écoulement unicellulaire évolue avec le développement de rouleaux co-rotatifs à l'intérieur de la circulation principale. Dans le cas d'une cavité de dimensions $4 \times 2 \times 1$, il s'agit d'un seul rouleau au centre de la cavité qui tourne donc dans le même sens que la circulation principale. Comme indiqué par Henry & Buffat (1998), ces changements sont la signature d'une bifurcation imparfaite liée à la transition vers les rouleaux transversaux (instabilité de cisaillement) trouvée dans l'analyse de stabilité de l'écoulement de Hadley (Hart, 1972) entre deux plan infinis. Lorsque le nombre de Grashof est suffisamment élevé, cet écoulement stationnaire de base finira par être déstabilisé à différents points de bifurcation, ce qui déclenchera de nouvelles solutions qui peuvent être stationnaires ou oscillatoires. Ceci est discuté dans les sections suivantes.

3.3 Bifurcations des solutions stationnaires

Dans un travail précédent, Henry & Ben Hadid (2007a,b) ont déterminé le seuil de la première instabilité de l'écoulement stationnaire de base dans une cavité parallélépipédique chauffée de manière différentielle pour une large gamme de rapports d'aspect A_X et A_Y et de nombres de Prandtl. Ils ont montré la forte variation de ces seuils, associés à des instabilités de différents types (stationnaire ou oscillatoire), brisant différentes symétries. Dans la présente étude, les dimensions de la cavité sont maintenues constantes ($A_X = 4$ et $A_Y = 2$) et seul l'effet du nombre de Prandtl sera étudié. Cependant, nous ne nous concentrerons pas uniquement sur la première instabilité de l'écoulement de base, mais considérerons plus largement tous les points de bifurcation qui pourraient être impliqués dans la dynamique ultérieure de notre écoulement, sur la branche de l'écoulement de base (branche primaire) ainsi que sur les branches qui en bifurquent (branches secondaires, tertiaires, ...). Dans les différents diagrammes de bifurcation présentés dans toute cette étude, nous traçons u^*, la composante de vitesse longitudinale normalisée ($u^* = u/\sqrt{Gr}$) en un point représentatif de la cavité ($x = 0$, $y = 0,49391$, $z = -0,36911$), en fonction de Gr. Enfin, la stabilité des branches (états stationnaires et oscillatoires) sur ces diagrammes de bifurcation est indiquée par deux nombres entiers $(n-m)$ où n est le nombre de valeurs

$Pr = 0$						
Points	$H^P_{c,0}$	P^P_l	H^P_a	H^S_l	$H^S_{w,1}$	$H^S_{w,0}$
Gr_c	27893	28325	29341	30343	32139	32157
f_c	2,70	—	34,6	34,7	28,6	2,25

$Pr = 0,005$					
Points	P^P_l	H^P_a	$H^P_{c,0}$	H^S_l	$H^S_{w,1}$
Gr_c	28957	30569	34849	33026	34644
f_c	—	35,2	2,66	36,1	29,9

$Pr = 0,015$						
Points	P^P_l	$H^P_{c,25}$	H^P_a	$H^S_{w,25}$	H^S_l	$H^S_{w,1}$
Gr_c	34966	37314	38482	37413	44114	45276
f_c	—	13,6	36,5	13,8	38,7	32,5

$Pr = 0,025$				
Points	$H^P_{c,25}$	P^P_l	H^P_π	$H^S_{w,1}$
Gr_c	33055	61737	69950	67972
f_c	13,8	—	35,7	35,1

TABLE 3.2 – Seuils critiques Gr_c des principaux points de bifurcation (P pour bifurcation fourche *(pitchfork)*, H pour bifurcation de Hopf) sur les branches primaire (exposant P) et secondaire (exposant S) pour $Pr = 0$, $0,005$, $0,015$ et $0,025$. Les indices c, l, π, a et w indiquent les symétries conservées par le mode marginal à la bifurcation : respectivement les symétries S_c, S_l, S_π, toutes les symétries S_a et aucune symétrie S_w. Dans le cas des points de bifurcation de Hopf, la fréquence critique au seuil f_c est également donnée.

propres réelles instables, alors que m est le nombre de couples instables de valeurs propres complexes conjuguées. $0-0$ est donc l'indication d'une solution stable.

Pour commencer, nous avons déterminé les diagrammes de bifurcation des solutions stationnaires pour plusieurs nombres de Prandtl allant de 0 à $0,025$ (voir Fig. 3.3 et la partie stationnaire des différents diagrammes de bifurcation sur les figures 3.6a, 3.7a, 3.8a, 3.10a). Dans tous ces diagrammes de bifurcation, nous avons trouvé un seul point de bifurcation stationnaire P^P_l [1] (voir Tab. 3.2). Comme le montre la figure 3.3, cette bifurcation est de type fourche supercritique qui brise les symétries S_c et S_π et conserve la symétrie S_l. La branche secondaire initiée en ce point correspond donc à un écoulement stationnaire avec uniquement la symétrie S_l. Notez que deux branches secondaires apparaissent à la bifurcation fourche. Ces branches sont dynamiquement équivalentes car la solution d'une branche est la symétrique de la solution de l'autre branche par la symétrie brisée S_c ou S_π. Pour cette raison, une seule de ces branches sera souvent considérée et tracée.

Les principaux points de bifurcation sur ces branches primaires et secondaires sont également déterminés. A l'exception du point P^P_l, ce sont tous des points de bifurcation de Hopf (voir Fig. 3.3) et leurs caractéristiques critiques (seuil critique Gr_c et fréquence f_c) sont données dans le tableau 3.2. Afin d'identifier tous les différents points de bifurcation, nous leur avons donné des noms spécifiques en fonction de leurs propriétés. Ces points de bifurcation sont soit de type fourche (P), soit de type Hopf (H). La nature de la branche sur laquelle ils apparaissent est indiqué par un exposant (P pour la branche primaire et S pour la branche secondaire), tandis que la symétrie conservée par le mode

1. L'appellation de ce point P vient de *Pitchfork bifurcation*.

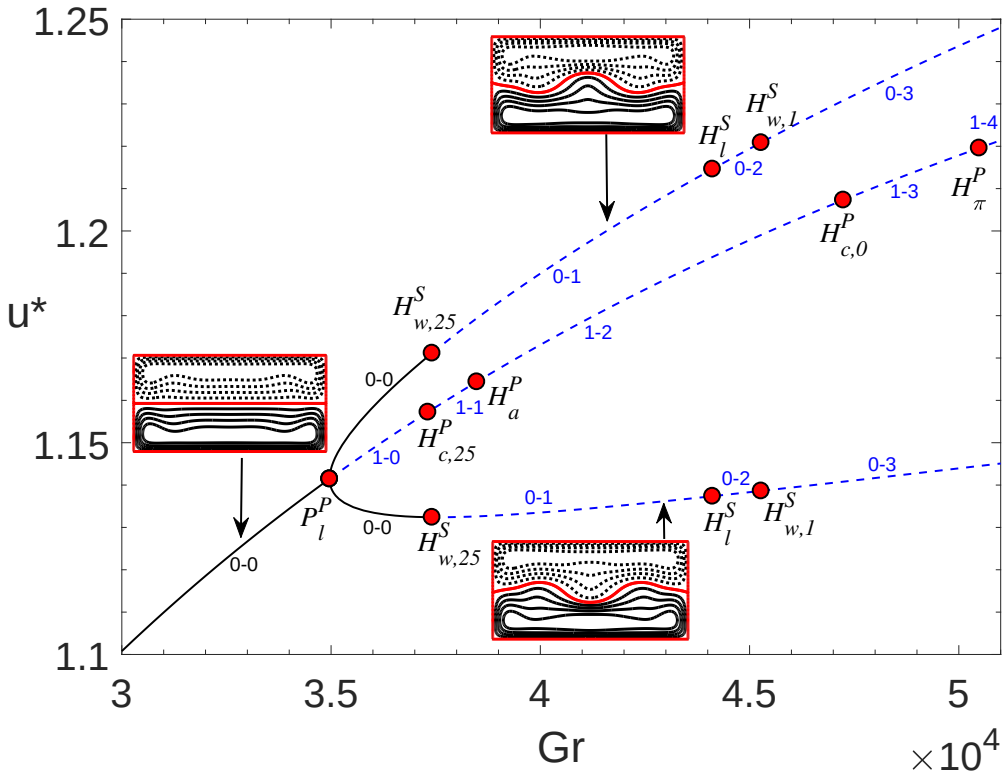


FIGURE 3.3 – Diagramme de bifurcation stationnaire (u^* en fonction de Gr) pour $Pr = 0,015$ montrant tous les points de bifurcation dans l'intervalle $3.0\times10^4 \leqslant Gr \leqslant 5.1\times10^4$. Les solutions stables sont représentées par des lignes continues, tandis que les lignes pointillées représentent des solutions instables.

critique au niveau de la bifurcation est mentionnée en indice. Plus précisément, les indices c, l et π correspondent respectivement à la symétrie par rapport au centre S_c, à la symétrie gauche/droite S_l et à la symétrie par rapport à l'axe S_π, alors que l'indice a (w) indique des modes critiques conservant (brisant) toutes les symétries. Par exemple, les points H^P_a et H^S_l sont respectivement le point de bifurcation de Hopf sur la branche primaire pour lequel toutes les symétries sont conservées et le point de bifurcation de Hopf sur la branche secondaire qui ne conserve que la symétrie gauche/droite S_l. Le même type de notations sera utilisé ultérieurement pour les bifurcations se produisant sur les cycles limites : l'exposant P ou S sera remplacé par C pour indiquer que la bifurcation se produit sur un cycle, mais avec une indication supplémentaire sur la symétrie du cycle. Par exemple, l'exposant C_a indiquera que la bifurcation se produit sur un cycle avec toutes les symétries. L'indice indiquera toujours la symétrie préservée par le mode critique.

A partir de la figure 3.3 et du tableau 3.2, on constate que cinq points de bifurcation principaux existent sur la branche primaire (P^P_l, $H^P_{c,0}$, $H^P_{c,25}$, H^P_a et H^P_π) et quatre autres (H^S_l, $H^S_{w,0}$, $H^S_{w,1}$ et $H^S_{w,25}$) sur la branche secondaire initiée au point stationnaire P^P_l. Tous ces points de bifurcation ont été suivis avec précision en fonction de Pr dans toute la gamme $0 \leqslant Pr \leqslant 0,025$. L'évolution de ces points dans l'espace des paramètres (Pr, Gr_c) est indiquée sur la figure 3.4 et les contours de la composante longitudinale des modes critiques correspondants dans le plan transversal V_t, $u'(y,z)$, sont représentés sur la figure 3.5. Notez que, dans certains cas, nous avons introduit une indication supplémentaire dans l'indice afin de distinguer les points de bifurcation correspondant aux modes ayant

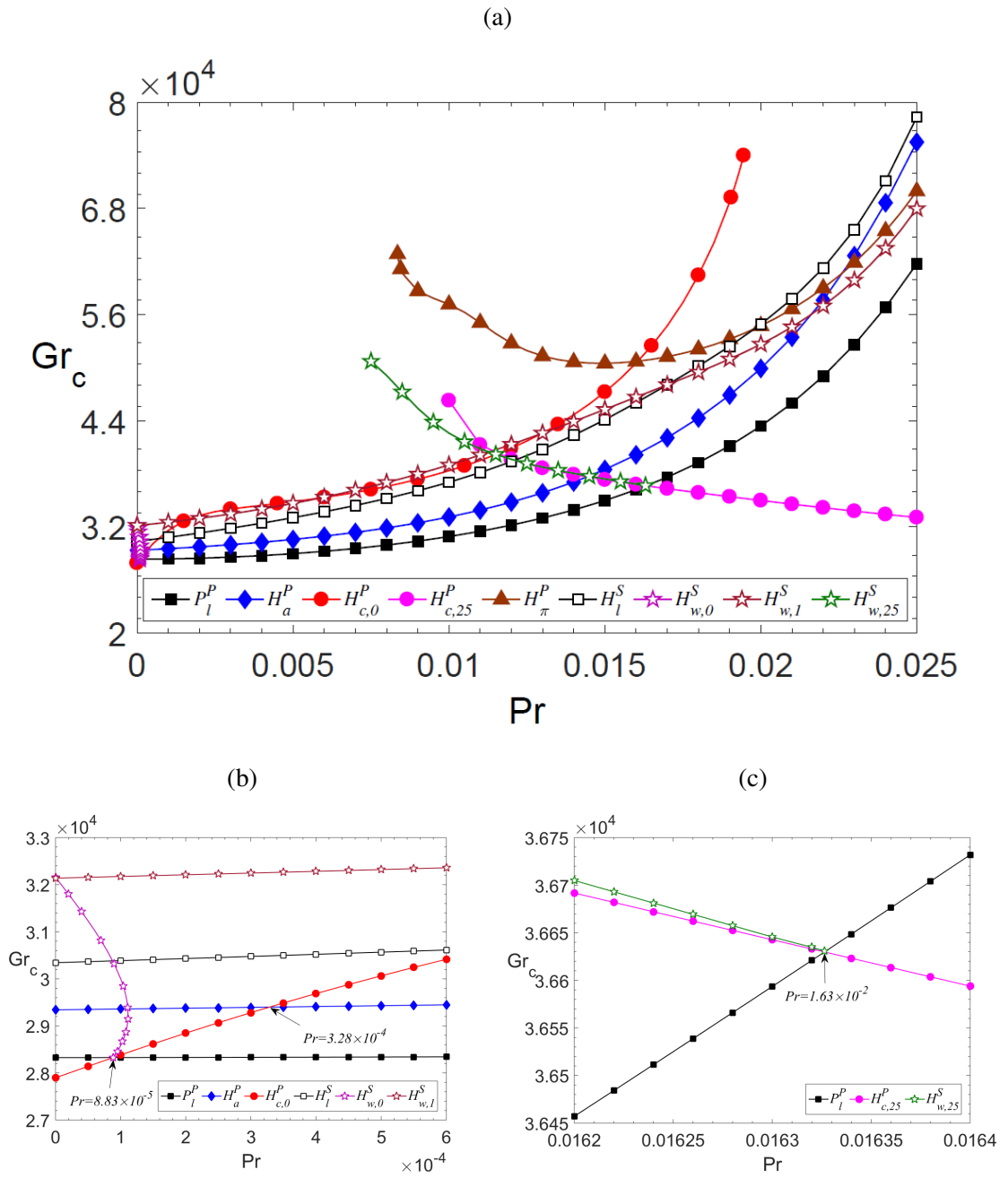


FIGURE 3.4 – Suivi des principaux points de bifurcation dans l'espace de paramètre (Pr, Gr_c). (a) Vue globale dans l'intervalle $0 \leqslant Pr \leqslant 0,025$. (b) Zoom sur la région $Pr \leqslant 6 \times 10^{-4}$ afin de mettre en évidence le croisement des points de bifurcation primaires P_l^P et $H_{c,0}^P$ à $Pr = 8,83 \times 10^{-5}$ avec la création du point de bifurcation secondaire $H_{w,0}^S$ à ce point de co-dimension 2. (c) Zoom autour du croisement des points de bifurcation primaires P_l^P et $H_{c,25}^P$ à $Pr = 1,63 \times 10^{-2}$ indiquant la création du point secondaire $H_{w,25}^S$ à ce point de co-dimension 2.

la même symétrie. L'indice 0 a été choisi pour le point de bifurcation $H_{c,0}^P$ qui est le premier à apparaître à $Pr = 0$ et pour le point $H_{w,0}^S$ issu de $H_{c,0}^P$. De même, l'indice 25 a été choisi pour le point $H_{c,25}^P$ qui est le premier à apparaître à $Pr = 0,025$ et pour le point

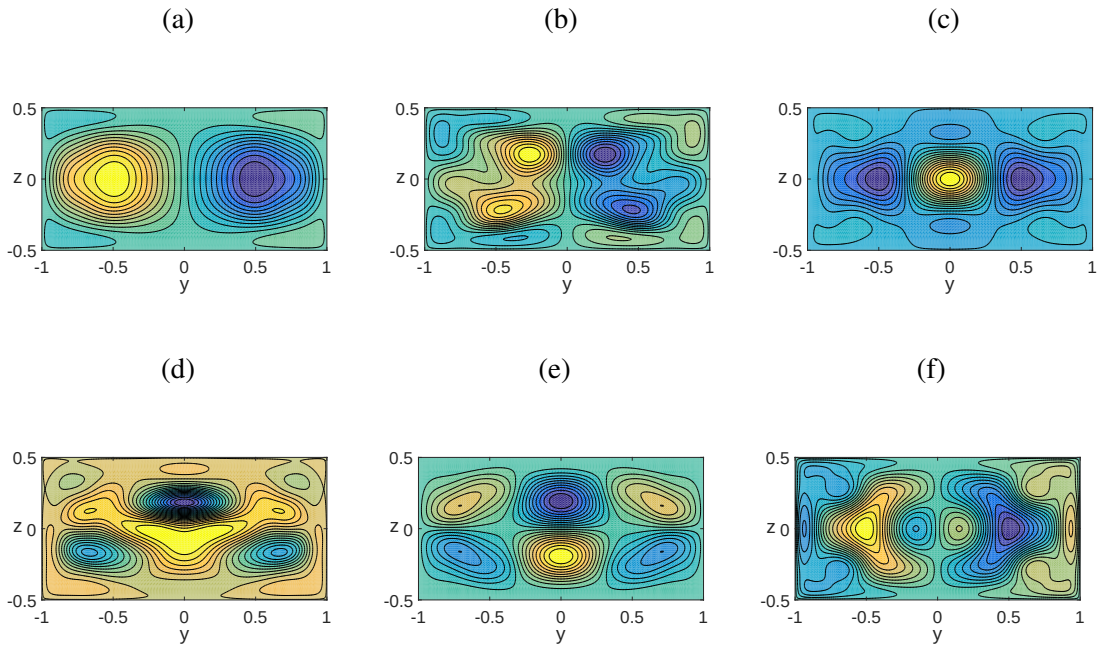


FIGURE 3.5 – Contours de la composante longitudinale $u'(y,z)$ de la perturbation dans la section transversale V_t pour les modes critiques (partie réelle) associés à différents points de bifurcation. Les figures (a)-(f) correspondent respectivement aux points $H^P_{c,25}$ à $Pr = 0,025$, $H^S_{w,25}$ à $Pr = 0,015$, P^P_l, H^S_l et H^P_a à $Pr = 0,005$ et finalement $H^P_{c,0}$ à $Pr = 0$.

$H^S_{w,25}$ issu de $H^P_{c,25}$. Finalement, l'indice 1 a été choisi pour l'autre point de bifurcation de Hopf sans symétrie $H^S_{w,1}$.

Sur la base des points de croisement des premiers points de bifurcation situés sur la branche primaire et observés sur la figure 3.4, trois régions principales peuvent être identifiées :

- pour $Pr \leqslant 8,83 \times 10^{-5}$, le point de Hopf $H^P_{c,0}$ (Fig. 3.5f) déstabilise la branche primaire et donne naissance à un cycle limite avec la symétrie S_c et une basse fréquence ($f_c \approx 2,70$ à $Pr = 0$),

- Pour des valeurs plus grandes du nombre de Prandtl ($8,83 \times 10^{-5} \leqslant Pr \leqslant 1,63 \times 10^{-2}$), la branche primaire est d'abord déstabilisée par le point stationnaire P^P_l (Fig. 3.5c), ce qui donnera naissance à une solution stationnaire stable avec la symétrie gauche/droite S_l.

- Enfin, pour $1,63 \times 10^{-2} \leqslant Pr \leqslant 2,5 \times 10^{-2}$, c'est le point de Hopf $H^P_{c,25}$ (Fig. 3.5a) qui déstabilise la branche primaire. Un cycle limite avec la symétrie S_c est également créé en ce point, mais sa fréquence est plus grande ($f_c \approx 13,8$ à $Pr = 0,025$).

Notons que les points d'intersection situés à $Pr = 8,83 \times 10^{-5}$ et $Pr = 1,63 \times 10^{-2}$ sont des points de bifurcation de codimension-2 (fourche-Hopf). Ils sont à l'origine de la création de deux points de bifurcation de Hopf sur la branche secondaire, respectivement $H^S_{w,0}$ (à partir de $H^P_{c,0}$ et P^P_l) et $H^S_{w,25}$ (à partir de $H^P_{c,25}$ et P^P_l) (voir Figs. 3.4b et 3.4c). Nous verrons plus tard que le point de codimension-2 à $Pr = 1,63 \times 10^{-2}$ est également à

l'origine de la création d'une bifurcation fourche de cycles sur la branche de solutions périodiques qui émerge de $H^P_{c,25}$. Le point $H^S_{w,25}$ évolue ensuite vers des nombres de Prandtl plus petits avec un seuil $Gr_c(Pr)$ croissant, alors que $H^S_{w,0}$ a également un seuil $Gr_c(Pr)$ en augmentation, mais évolue légèrement vers des nombres de Prandtl plus élevés avant de changer de sens à $Pr \approx 1,1 \times 10^{-4}$ pour rejoindre $Pr = 0$. Ce dernier comportement implique que dans la gamme $8,83 \times 10^{-5} \leqslant Pr \leqslant 1,1 \times 10^{-4}$, la branche secondaire stable est successivement déstabilisée puis restabilisée par $H^S_{w,0}$, avant d'être définitivement déstabilisée par le point de Hopf H^S_l (voir par exemple Fig. 3.15 pour $Pr = 1 \times 10^{-4}$).

De plus, lorsque la première bifurcation est stationnaire ($8,83 \times 10^{-5} \leqslant Pr \leqslant 1,63 \times 10^{-2}$), la branche secondaire qui bifurque est déstabilisée soit par le point de Hopf H^S_l (Fig. 3.5d) donnant un cycle limite qui conserve la symétrie S_l de la branche ($Pr \leqslant 1,21 \times 10^{-2}$) ou par le mode Hopf $H^S_{w,25}$ (Fig. 3.5b) qui brise cette symétrie S_l et initie un cycle sans symétries ($Pr \geqslant 1,21 \times 10^{-2}$). Enfin, deux autres croisements des points de bifurcation se produisant sur la branche primaire peuvent influer sur la dynamique des transitions dans la plage intermédiaire de Pr :

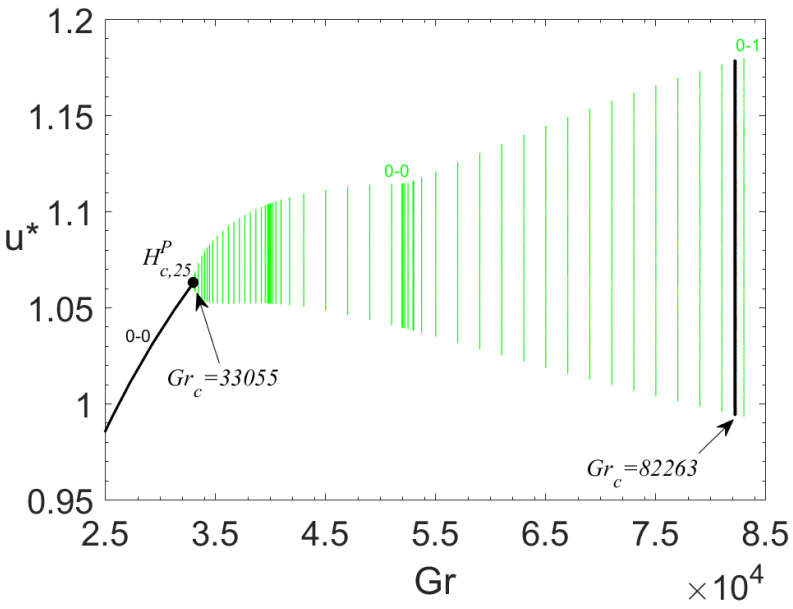
- Croisement des points de Hopf $H^P_{c,0}$ et H^P_a à $Pr = 3,28 \times 10^{-4}$.
- Croisement des points de Hopf H^P_a et $H^P_{c,25}$ à $Pr = 1,44 \times 10^{-2}$.

Pour conclure, l'analyse de bifurcation des écoulements stationnaires présentée dans cette section a montré qu'il n'y a que deux solutions stationnaires dans le cas de la cavité considérée ici et dans la gamme de Pr étudiée. Il existe cependant de nombreux points de bifurcation de Hopf différents sur ces branches primaires et secondaires, qui peuvent générer différentes solutions oscillatoires (cycles limites). L'étude de ces écoulements oscillatoires sera présentée dans la section suivante.

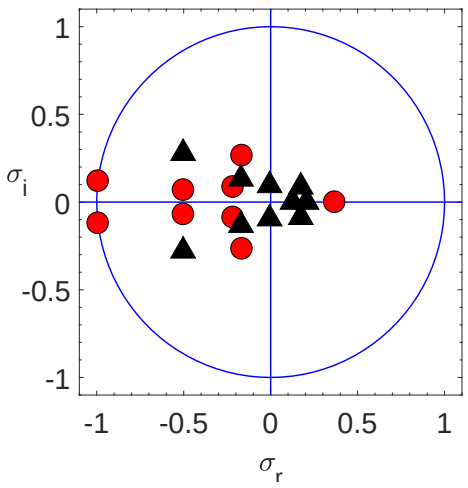
3.4 Bifurcations des solutions oscillatoires

L'analyse de bifurcation des écoulements oscillatoires a été réalisée pour différents nombres de Prandtl. Nous allons présenter les cas $Pr = 0$ et $Pr = 0,025$ pour lesquels la branche primaire est directement déstabilisée par une bifurcation de Hopf ainsi que les cas $Pr = 0,005$ et $Pr = 0,015$ où la branche primaire est déstabilisée par une bifurcation fourche supercritique donnant naissance à une branche secondaire stationnaire. Nous donnerons ensuite une vue plus globale de toutes les transitions rencontrées dans l'ensemble de la gamme de Pr. Nous commençons par le cas le plus simple correspondant à $Pr = 0,025$, puis considérons les cas à des valeurs de plus en plus petites de Pr. Notez que les cycles seront très souvent dénommés en fonction de la symétrie qu'ils conservent, c'est-à-dire cycles S_l, S_π ou S_c. Les appellations S_a et S_w seront également utilisées pour respectivement les cycles avec toutes les symétries et les cycles sans symétrie. Ces cycles seront également tracés avec des couleurs spécifiques : vert pour les cycles S_c, rouge pour les cycles S_a, bleu pour les cycles S_l et violet pour les cycles S_w. Enfin, comme nous l'avons déjà mentionné, les bifurcations apparaissant sur les cycles seront notées P (bifurcation fourche de cycle) ou H (bifurcation de Hopf généralisée) avec un exposant donnant des informations sur le cycle (C_l pour un cycle avec la symétrie S_l, par exemple) et un indice indiquant la symétrie conservée par le mode critique.

(a)



(b)



(c)

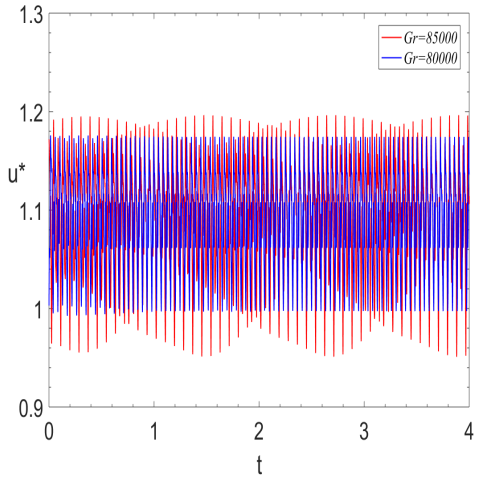


FIGURE 3.6 – Solutions convectives pour $Pr = 0,025$: (a) Diagramme de bifurcation $u^*(Gr)$ montrant la solution stationnaire stable avec toutes les symétries (branche primaire) et le cycle limite S_c avec symétrie centrale initié au point de Hopf $H^P_{c,25}$ sur la branche primaire et déstabilisé à $Gr_c = 82263$. La stabilité des différents états est indiquée par le nombre de valeurs propres instables $n-m$. (b) Multiplicateurs de Floquet associés au cycle limite pour $Gr = 52000$ (triangles noirs) et $Gr = 82263$ (cercles rouges), montrant que le cycle limite est déstabilisé par une paire de valeurs propres complexes conjuguées. (c) Évolutions temporelles $u^*(t)$ pour $Gr = 80000$ (régime périodique) et $Gr = 85000$ (régime quasi-périodique).

3.4.1 Cas $Pr = 0,025$

Comme indiqué dans le tableau 3.2 et sur la figure 3.4a, l'écoulement convectif à $Pr = 0,025$ est stationnaire et stable avec toutes les symétries jusqu'à sa déstabilisation par le mode $H^P_{c,25}$ à $Gr_c = 33055$. Ce mode de Hopf ne conserve que la symétrie S_c (Fig. 3.5a) et est associé à une fréquence critique égale à $13,8$. Au point critique, l'écoulement subit une bifurcation de Hopf supercritique vers un cycle limite stable (Fig. 3.6a). La structure résultante est donc un écoulement oscillatoire qui conserve la symétrie centrale. Ce cycle S_c a une amplitude croissante avec l'augmentation du nombre de Grashof et reste stable dans une large gamme de Gr. Cela pourrait être lié à l'absence de points de bifurcation au voisinage du point de Hopf déstabilisant $H^P_{c,25}$ (la prochaine bifurcation P^P_l n'apparaît qu'à $Gr_c = 61737$, voir Tab. 3.2 et Fig. 3.4). Pour indiquer la stabilité du cycle, on donne les multiplicateurs de Floquet de plus grande norme pour deux valeurs du nombre de Grashof sur la figure 3.6b. Pour $Gr = 52000$ (triangles noirs), tous les multiplicateurs de Floquet dominants sont à l'intérieur du cercle unité, ce qui signifie que le cycle limite est stable. En revanche, lorsque le nombre de Grashof est augmenté jusqu'à $Gr = 82263$ (cercles rouges), une paire de multiplicateurs complexes conjugués de Floquet traverse le cercle unitaire, indiquant la déstabilisation du cycle limite à une bifurcation de Naimark–Sacker, avec un vecteur propre qui conserve la symétrie S_c. Cette bifurcation est supercritique et donne ainsi naissance à un écoulement quasi-périodique stable avec une symétrie centrale (état $\mathrm{QP}_{c,2}$) au-delà de $Gr_c = 82263$. Certaines simulations numériques obtenues par évolution temporelle et données sur la figure 3.6c confirment cette transition : en effet, si la solution est toujours oscillatoire périodique pour $Gr = 80000$, elle devient quasi-périodique pour $Gr = 85000$.

3.4.2 Cas $Pr = 0,015$

Le diagramme de bifurcation correspondant à $Pr = 0,015$ est donné sur la figure 3.7a. Ce diagramme montre un chemin différent vers la quasi-périodicité. Deux solutions stables (lignes noires continues) et deux solutions périodiques (couleurs violette et verte) sont impliquées, avec des connexions entre ces solutions. Un troisième cycle, initié au point de bifurcation de Hopf H^P_a ($Gr_c = 38482$) sur la branche primaire et avec toutes les symétries (couleur rouge), existe également dans la même plage de Gr, mais reste instable et ne participera pas à la dynamique observée de l'écoulement à cette valeur de Pr.

Plus précisément, l'écoulement stationnaire de base avec toutes les symétries (branche primaire) est stable jusqu'au point de bifurcation P^P_l à $Gr_c = 34966$ où se produit une bifurcation fourche supercritique créant un autre écoulement stationnaire avec la symétrie gauche/droite S_l (branche secondaire). Cette branche secondaire est alors déstabilisée au point de bifurcation de Hopf $H^S_{w,25}$ ($Gr_c = 37413$). Le mode critique marginal qui correspond à ce point de Hopf (Fig. 3.5b) est antisymétrique par rapport à la symétrie S_l de la branche, de sorte que l'écoulement résultant sur le cycle limite qui émerge n'a plus aucune symétrie. Ce cycle S_w (couleur violette) est stable car il évolue de manière super-critique (Fig. 3.7d). Il disparaît finalement à $Gr_c = 38588$, par une bifurcation de type fourche de cycle au point $P^{C_{c,25}}_w$ sur la branche de cycle S_c (couleur verte). Notons que la bifurcation fourche de cycle permet de créer deux branches équivalentes et que nous n'en avons tracé qu'une seule ici.

D'autre part, ce cycle S_c est créé au point de bifurcation de Hopf $H^P_{c,25}$ ($Gr_c = 37314$) sur la branche primaire, au-delà du premier point de bifurcation stationnaire P^P_l . Le cycle est d'abord instable, car il est initié sur une branche qui est déjà instable. Lorsque le

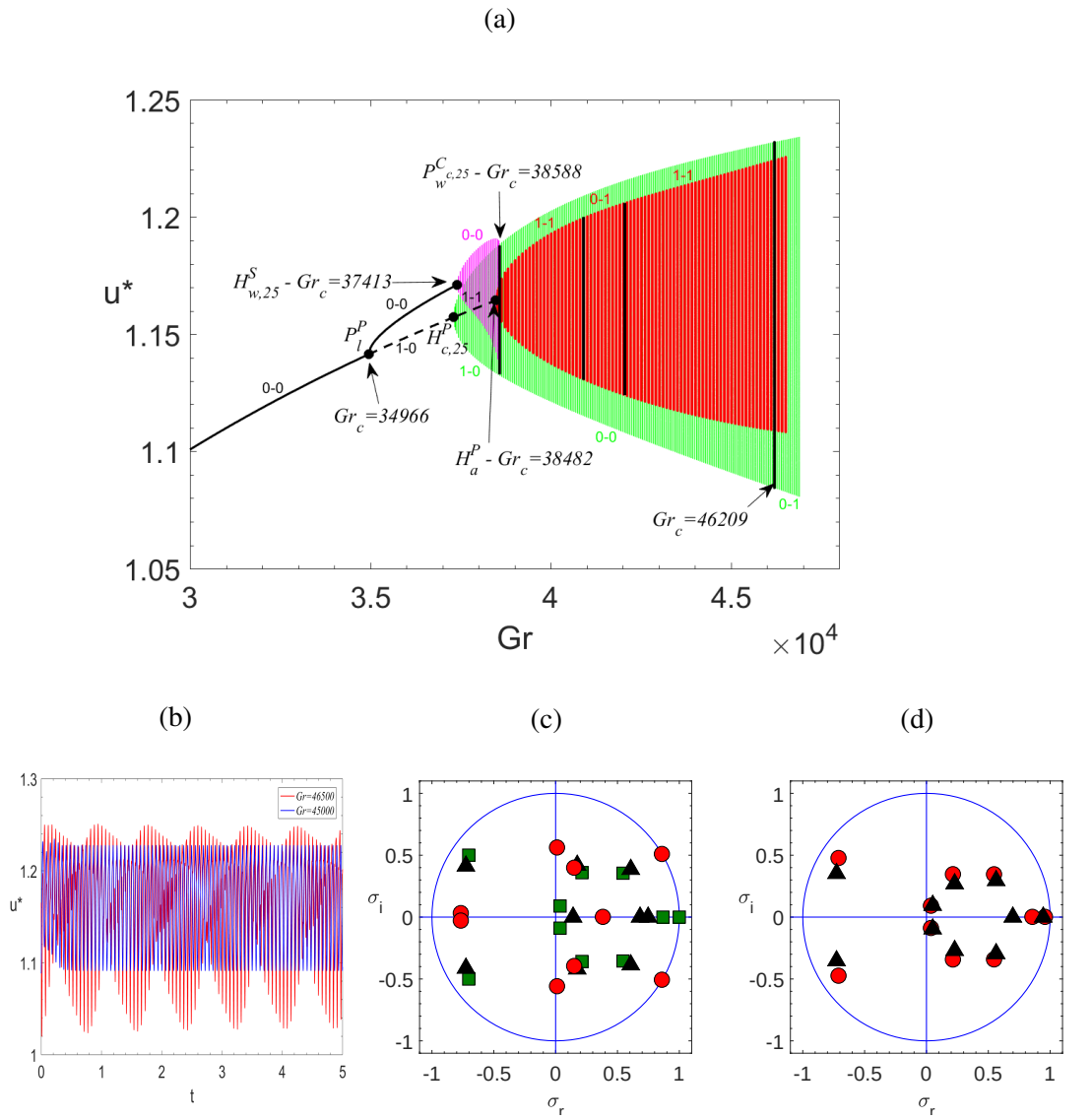


FIGURE 3.7 – Solutions convectives pour $Pr = 0,015$: (a) Diagramme de bifurcation $u^*(Gr)$ montrant les solutions stationnaires stables sur les branches primaire et secondaire (lignes noires continues), le cycle stable S_w (violet), qui stabilise le cycle S_c (vert) en $P_w^{C_{c,25}}$ à $Gr_c = 38588$ (jusqu'à $Gr_c = 46209$), et le cycle S_a (rouge), qui reste instable ; (b) Évolutions temporelles $u^*(t)$ pour $Gr = 45000$ (régime périodique) et $Gr = 46500$ (régime quasi-périodique) ; (c) Multiplicateurs de Floquet associés au cycle limite S_c initié au point de Hopf $H^P_{c,25}$ pour $Gr = 38588$ (carrés verts), $Gr = 40000$ (triangles noirs) et $Gr = 46209$ (cercles rouges) ; (d) Multiplicateurs de Floquet associés au cycle limite S_w initié au point de Hopf $H^S_{w,25}$ pour $Gr_c = 38000$ (triangles noirs) et $Gr = 38490$ (cercles rouges).

nombre de Grashof est augmenté, le cycle est stabilisé au point de bifurcation $P_w^{C_{c,25}}$, lorsqu'un multiplicateur de Floquet réel traverse le cercle unité (Fig. 3.7c, carrés verts). Lorsque le nombre de Grashof est encore augmenté, le cycle S_c évolue avec une amplitude qui augmente régulièrement jusqu'à sa déstabilisation par une bifurcation de Naimark-Sacker supercritique. La paire de multiplicateurs complexes conjugués de Floquet déstabilisant le cycle est illustrée sur la figure 3.7c (cercles rouges). Ces multiplicateurs

de Floquet sont associés à un vecteur propre conservant la symétrie centrale. Au-delà de cette bifurcation à $Gr_c = 46209$, un état quasi-périodique stable avec une symétrie S_c (état $QP_{c,2}$) peut alors être observé (Fig. 3.7b).

Pour résumer, pour $Pr = 0,015$ et $Gr \leqslant 47000$, nous observons une suite de solutions différentes qui sont stables sur les plages successives de Gr : la solution stationnaire avec toutes les symétries sur la branche primaire pour $Gr \leqslant 34965$, la solution stationnaire avec la symétrie S_l sur la branche secondaire pour $34965 \leqslant Gr \leqslant 37413$, le cycle limite S_w sans symétrie pour $37413 \leqslant Gr \leqslant 38588$, le cycle limite S_c pour $38588 \leqslant Gr \leqslant 46209$, et enfin la solution quasi-périodique avec symétrie S_c pour $Gr \geqslant 46209$.

3.4.3 Cas $Pr = 0,005$

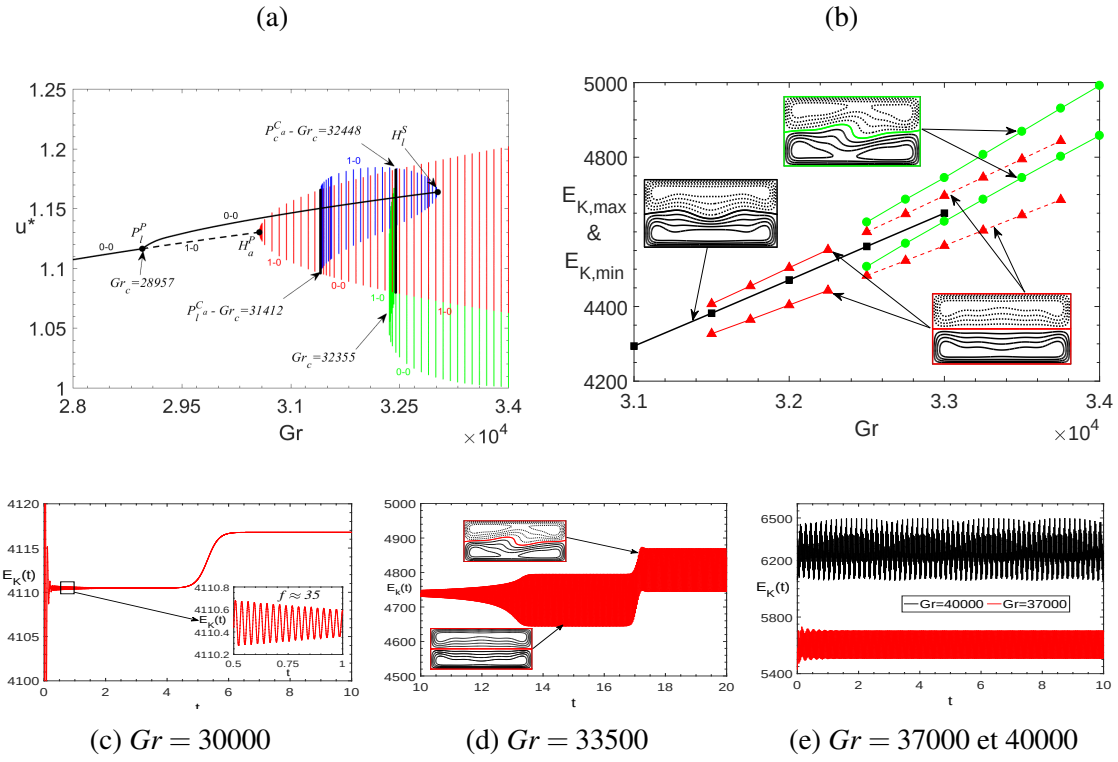


FIGURE 3.8 – Solutions convectives pour $Pr = 0,005$: (a) Diagramme de bifurcation $u^*(Gr)$ montrant les solutions stationnaires stables sur les branches primaire et secondaire (lignes noires continues), le cycle S_l sous-critique instable (bleu), le cycle S_a (rouge) stabilisé au point P_l^{Ca} jusqu'au point P_c^{Ca}, et le cycle S_c (vert) stable au-delà du point nœud-col à $Gr_c = 32355$. (b) Diagramme de bifurcation obtenu par des évolutions temporelles donnant l'énergie cinétique ($E_{K,max}$ et $E_{K,min}$) pour différentes solutions : la solution stationnaire sur la branche secondaire (carrés noirs), le cycle S_c (cercles verts) et le cycle S_a (triangles rouges, les lignes en pointillé sont utilisées pour les états transitoires) ; (c) (d) et (e) Évolutions temporelles de l'énergie cinétique $E_K(t)$ pour respectivement $Gr = 30000$, 33500, et 37000 et 40000. Les encarts donnent la vitesse longitudinale $u(y,z)$ dans le plan transversal V_t.

La situation convective à $Pr = 0,005$ diffère encore des situations précédemment étudiées, dans la mesure où une coexistence de solutions stables stationnaires et oscillantes sera observée. Le diagramme de bifurcation donnant les différentes solutions convectives

pour $Pr = 0,005$ est présenté sur la figure 3.8a. Lorsque le nombre de Grashof est augmenté, comme pour $Pr = 0,015$, nous observons d'abord les deux solutions stationnaires, la solution avec toutes les symétries sur la branche primaire, stable jusqu'à la bifurcation fourche P_l^P à $Gr_c = 28957$ et la solution stable avec symétrie gauche/droite S_l sur la branche secondaire bifurquée. Cette branche secondaire est stable jusqu'au point de bifurcation de Hopf H_l^S à $Gr_c = 33026$. Cette bifurcation de Hopf conserve la symétrie S_l de la branche secondaire (voir le mode critique, Fig. 3.5d), mais ce cycle limite avec la symétrie S_l (couleur bleue) évolue de manière sous-critique en étant tout le temps instable et finit par disparaître à $Gr_c = 31412$ par une bifurcation fourche de cycles P_l^{Ca} sur la branche du cycle S_a (couleur rouge). Ici aussi, il existe deux branches équivalentes pour ce cycle S_l, qui émergent des deux branches secondaires stables démarrées à P_l^P et disparaissent à P_l^{Ca}.

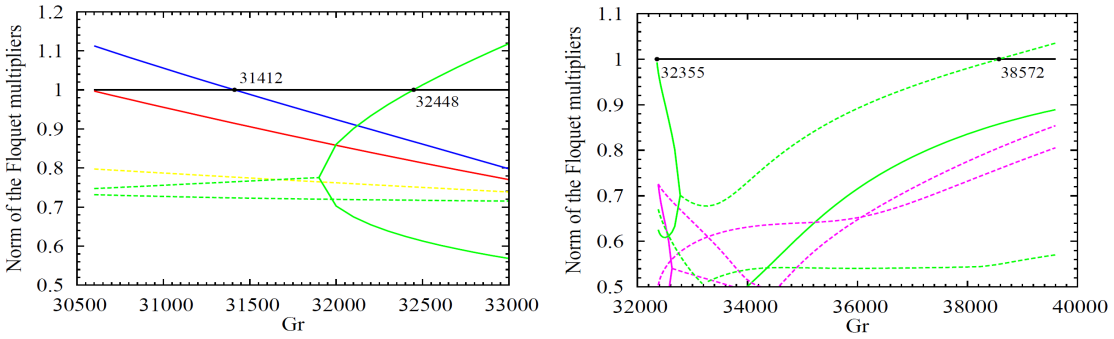


FIGURE 3.9 – Variation des normes des multiplicateurs de Floquet en fonction du nombre de Grashof pour (a) le cycle S_a (b) le cycle S_c (voir Fig. 3.8). Les lignes continues (pointillées) sont utilisée pour des multiplicateurs de Floquet réels (complexes conjugués). Les modes associés ont toutes les symétries (ligne rouge), la symétrie S_l (ligne bleue), la symétrie S_c (lignes vertes), la symétrie S_π (ligne jaune) ou aucune symétrie (ligne violette). Le nombre de Prandtl est $Pr = 0.005$.

D'autre part, le cycle S_a, initié au point de Hopf H_a^P ($Gr_c = 30569$) sur la branche primaire, au-delà de la bifurcation stationnaire P_l^P, évolue de manière supercritique, tel qu'il est montré sur la figure 3.8a. Les changements de stabilité pour ce cycle peuvent être obtenus à partir de la variation avec Gr de la norme des principaux multiplicateurs de Floquet tracée sur la figure 3.9a. Ce cycle limite est instable au début, avec un multiplicateur de Floquet réel positif supérieur à un (trait bleu continu, Fig. 3.9a), car il est initié sur une branche qui est déjà instable. La norme de ce multiplicateur de Floquet décroît linéairement lorsque Gr augmente et devient inférieure à 1 (croisement du cercle unitaire) à $Gr_c = 31412$, c'est-à-dire au point de bifurcation fourche de cycle P_l^{Ca}. Le cycle S_a, stable au-delà de ce point, se développe en amplitude (Fig. 3.8a), avant d'être déstabilisé au point de bifurcation fourche de cycle P_c^{Ca} ($Gr_c = 32448$) (courbe verte continue, Fig. 3.9a), qui ne conserve que la symétrie centrale. Le cycle initié à partir ce point a uniquement la symétrie S_c. Il est d'abord instable, car il nait de manière sous-critique à partir du cycle S_a, mais il est rapidement stabilisé par un point de nœud-col à $Gr_c \approx 32355$, puis évolue vers des valeurs supérieures de Gr. Les normes des principaux multiplicateurs de Floquet correspondant à ce cycle S_c sont données sur la figure 3.9b où nous voyons la stabilisation du cycle à $Gr_c = 32355$ (ligne verte continue) et sa déstabilisation par

une paire de multiplicateurs complexes conjugués de Floquet (ligne verte en pointillés) à $Gr_c = 38572$. Un écoulement quasi-périodique (état $QP_{c,2}$, voir Fig. 3.8e), toujours avec une symétrie S_c, apparaît pour des grands nombres de Grashof au-delà de cette bifurcation de Naimark-Sacker supercritique. Notons que la dynamique observée pour le cycle S_a, avec l'interaction avec le cycle S_l, puis avec un cycle S_c, était déjà présente pour $Pr = 0.015$. Toutefois, nous ne l'avions pas détaillé pour $Pr = 0,015$, car cela n'avait pas conduit à des solutions stables dans ce cas.

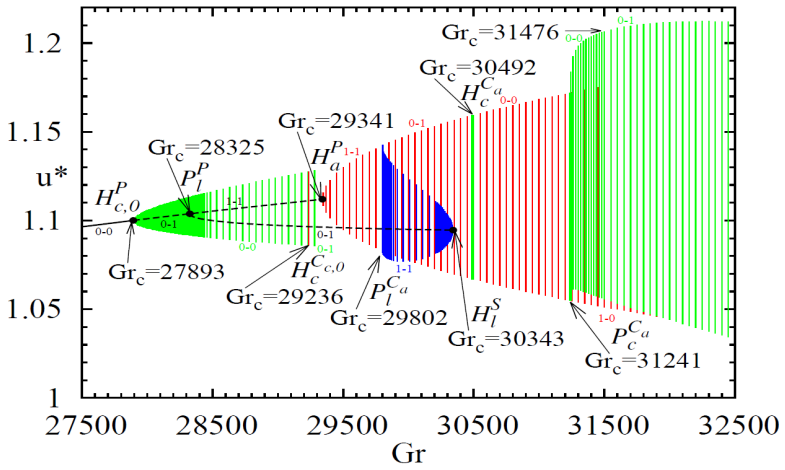
Ces résultats ont montré la coexistence de différentes solutions stables dans la même gamme de Gr : coexistence de la solution stationnaire avec la symétrie S_l avec le cycle S_a pour $31412 \leqslant Gr \leqslant 32448$ et avec le cycle S_c pour $32355 \leqslant Gr \leqslant 33026$, et même la coexistence des trois solutions pour $32355 \leqslant Gr \leqslant 32448$.

Afin de mettre en évidence cette dynamique complexe pour $Pr = 0,005$, des simulations numériques instationnaires ont été effectuées pour différents nombres de Grashof allant de 30000 à 40000. Les résultats sont d'abord présentés sur les figures 3.8c-3.8e en termes de variation temporelle de $E_K(t)$, énergie cinétique intégrée sur toute la cavité, pour $Gr = 30000$, 33500, 37000 et 40000. Une observation importante à tirer de ces figures est que le comportement des solutions obtenues par les simulations temporelles est influencé par les différentes solutions et modes d'instabilité présents au voisinage du nombre de Grashof considéré. Par exemple, pour $Gr = 30000$ (Fig. 3.8c), il existe la branche primaire de la solution stationnaire avec toutes les symétries, pour laquelle les principaux modes d'instabilité sont le mode déjà instable P_l^P et le mode oscillatoire encore stable (avec donc un taux de croissance $\sigma_r < 0$) H_a^P avec la fréquence $f(H_a^P) \approx 35$, et la branche stationnaire secondaire bifurquée à $Gr_c(P_l^P) = 28957$ (voir Fig. 3.8a). Nous prévoyons naturellement que la solution à long terme sera l'état stationnaire stable avec la symétrie S_l sur la branche secondaire. Cependant, on constate en pratique l'existence d'oscillations amorties liées au mode H_a^P (leur fréquence est proche de $f(H_a^P)$) qui conduisent à une convergence transitoire vers l'état stationnaire instable sur la branche primaire, et ce n'est que pour $t \approx 5$ que l'état stationnaire stable de la branche secondaire est finalement atteint (voir Fig. 3.8c). Un comportement similaire est également observé pour $Gr = 33500$ (Fig. 3.8d) : une convergence transitoire vers le cycle S_a (cycle instable) est observée, avant l'émergence du cycle stable S_c pour $t > 17$. Notons qu'un tel comportement avait déjà été observé lors de calculs transitoires dans des cavités bidimensionnelles chauffées différentiellement par Pulicani *et al.* (1990). Les différentes solutions obtenues au cours des simulations numériques instationnaires sont résumées dans le diagramme de bifurcation présenté sur la figure 3.8b. Les solutions sont tracées sous la forme de $E_{K,max}$ et $E_{K,min}$, respectivement les valeurs maximales et minimales de $E_K(t)$ au cours d'un cycle, ($E_{K,max} = E_{K,min}$ pour une solution stationnaire). Les cercles verts représentent le cycle S_c, les carrés noirs indiquent l'écoulement stationnaire avec la symétrie S_l sur la branche secondaire et enfin, les triangles rouges sont utilisés pour le cycle S_a. Pour ces dernières solutions, les cycles obtenus en tant qu'états transitoires sont indiqués en traits pointillés (comportement observé par exemple sur la figure 3.8d). Nous observons que ce diagramme de bifurcation obtenu par des simulations temporelles est cohérent avec celui obtenu en faisant de la continuation (Fig. 3.8a). Notons cependant que le cycle sous-critique avec la symétrie S_l n'est jamais observé comme un cycle transitoire au cours de nos simulations : seules des oscillations amorties vers l'état stationnaire stable avec la même symétrie S_l sont généralement obtenues. Cela pourrait être dû au fait que, dans ce cas, le cycle sous-critique et l'état stable ont les mêmes symétries.

3.4.4 Cas $Pr = 0$

Le cas $Pr = 0$ a longtemps été considéré comme une approximation intéressante pour simuler les écoulements de métaux liquides à faible Pr, tels que ceux observés dans les processus de croissance cristalline. Le champ de température, dans ce cas limite, est purement diffusif, avec une variation linéaire de la température entre les deux valeurs imposées aux extrémités de la cavité, et n'a pas besoin d'être résolu, ce qui allège les simulations numériques.

(a)



(b)

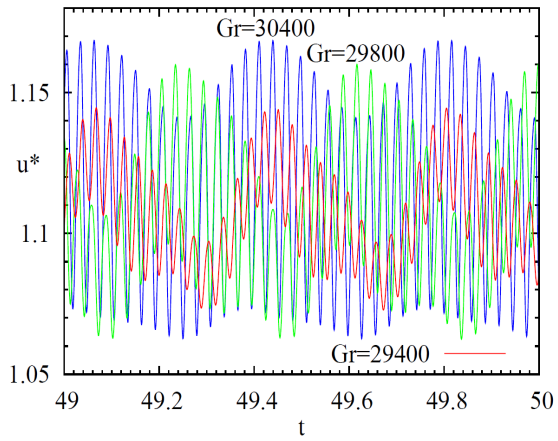


FIGURE 3.10 – Solutions convectives pour $Pr = 0$: (a) Diagramme de bifurcation $u^*(Gr)$ montrant la solution stationnaire stable avec toutes les symétries (branche primaire), le cycle S_c de basse fréquence (vert) stable de $H^P_{c,0}$ à $H^{C_{c,0}}_c$ ($Gr_c = 29236$), le cycle S_a (rouge) stabilisé à $H^{C_a}_c$ ($Gr_c = 30492$) jusqu'à $P^{C_a}_c$ ($Gr_c = 31241$), le cycle instable S_l (bleu), et un autre cycle S_c (vert) stable de $P^{C_a}_c$ jusqu'à $Gr_c = 31476$. Des solutions quasi-périodiques existent entre $H^{C_{c,0}}_c$ et $H^{C_a}_c$ (solution $\mathrm{QP}_{c,1}$) et au-delà de $Gr_c = 31476$ (solution $\mathrm{QP}_{c,2}$). (b) Évolutions temporelles $u^*(t)$ pour la solution quasi-périodique $\mathrm{QP}_{c,1}$ ($Gr = 29400$, rouge ; $Gr = 29800$, verte ; $Gr = 30400$, bleue).

La spécificité dans ce cas est que la première instabilité de l'écoulement de base stationnaire sur la branche primaire se produit au point de Hopf $H^P_{c,0}$, ce qui initie un cycle limite stable avec symétrie centrale et une basse fréquence ($Gr_c = 27893$ et $f_c = 2.7$, voir Fig. 3.5f et Tab. 3.2). Ce cycle S_c (Fig. 3.10a) est déstabilisé à la bifurcation de Naimark-Sacker $H^{C_{c,0}}_c$ par un mode ayant la même symétrie S_c, créant ainsi un cycle quasi-périodique stable $\mathrm{QP}_{c,1}$. Sur la même branche primaire, on trouve la bifurcation P^P_l habituelle vers la branche secondaire stationnaire, instable ici, et une bifurcation de Hopf H^P_a. À ce point de Hopf, un cycle S_a apparaît de manière super-critique. Il est deux fois instable à son apparition, devient une fois instable à $P^{C_a}_l$ en stabilisant un mode stationnaire avec symétrie S_l et se stabilise finalement au point de bifurcation $H^{C_a}_c$ en stabilisant un mode oscillatoire avec symétrie S_c. Il reste ensuite stable jusqu'à $P^{C_a}_c$, où un mode stationnaire avec symétrie S_c le déstabilise. A ces différentes valeurs critiques le long du cycle S_a, différentes solutions oscillatoires apparaissent. Au point de la bifurcation fourche $P^{C_a}_l$, un cycle S_l instable apparaît pour une valeur plus grande de Gr et ce cycle disparaît finalement au point de Hopf H^S_l sur la branche stationnaire secondaire. Au point de bifurcation de Naimark–Sacker $H^{C_a}_c$, une solution quasi-périodique stable à symétrie centrale est créée pour des nombres de Grashof plus petits. Cet état stable $\mathrm{QP}_{c,1}$ existe jusqu'à la bifurcation déjà mentionnée $H^{C_{c,0}}_c$ sur le cycle S_c de basse fréquence. Enfin, au point de bifurcation fourche de cycle $P^{C_a}_c$, un cycle S_c stable avec une fréquence critique au seuil $f_c = 34,67$ apparaît de façon supercritique. Ce cycle reste stable jusqu'à $Gr_c = 31476$ où une solution quasi-périodique (état $\mathrm{QP}_{c,2}$) est créée au-delà d'une bifurcation de Naimark-Sacker supercritique. Le cycle quasi-périodique $\mathrm{QP}_{c,1}$ obtenu pour $Pr = 0$ est illustré sur la figure 3.10b par les évolutions temporelles de u^* : on voit l'évolution de $\mathrm{QP}_{c,1}$ d'une solution avec des oscillations de courte période et de faible amplitude sur un signal de longue période ($Gr = 29400$, proche de $H^{C_{c,0}}_c$) à une solution avec des oscillations de courte période modulées en amplitude ($Gr = 30400$, proche de $H^{C_a}_c$).

3.4.5 Vue globale de toutes les solutions

La figure 3.11 donne une vision globale des différentes solutions obtenues lorsque Gr est augmenté pour les quatre nombres de Prandtl choisis. Les solutions sont données par des lignes horizontales couvrant leur domaine d'existence en termes de Gr, ces lignes étant des lignes pleines dans la plage où les solutions sont stables. Comme sur les figures précédentes, différentes couleurs sont utilisées pour les solutions, en fonction de leurs symétries (vert pour la symétrie S_c, rouge pour la symétrie S_a, bleu pour la symétrie S_l et violet pour le cas S_w sans symétrie). Pour chaque nombre de Prandtl, les solutions sont présentées de $Gr = 27000$ à des valeurs de Gr permettant d'atteindre des états quasi-périodiques, soit respectivement $Gr = 34000$, 39000, 47000 et 83500 pour $Pr = 0$, $0,005$, $0,015$ et $0,025$. Nous pouvons voir que de nombreuses solutions différentes (stationnaires, périodiques, quasi-périodiques) avec différentes symétries peuvent être obtenues. Le chemin suivi pour passer de la solution stationnaire de base à l'état quasi-périodique final en passant par des états périodiques est différent pour chaque nombre de Prandtl étudié. Quoi qu'il en soit, il s'est avéré que la dernière solution périodique est un cycle S_c, qui est ensuite déstabilisé lors d'une bifurcation de Naimark-Sacker établissant un état quasi-périodique avec la même symétrie S_c.

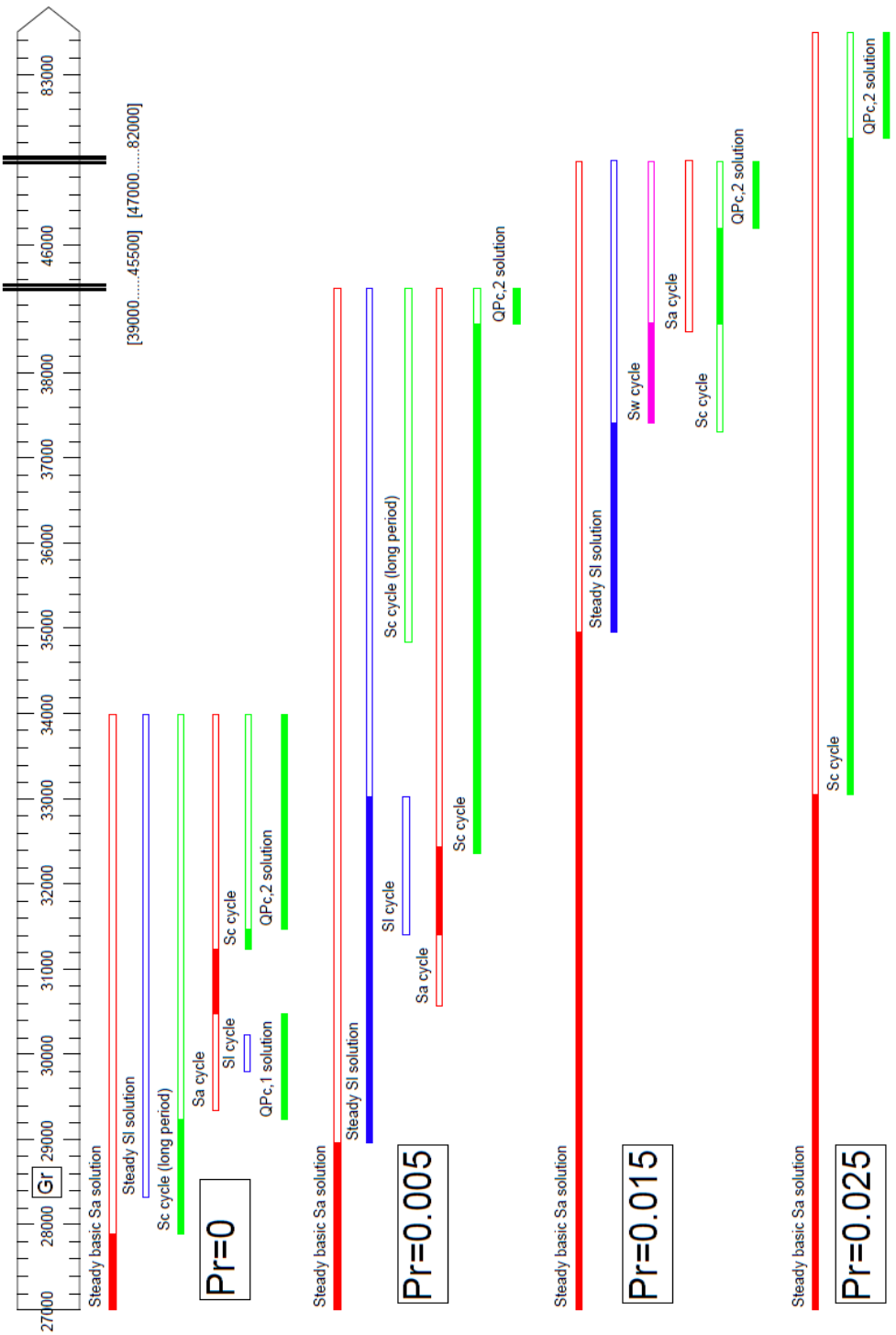


FIGURE 3.11 – Vue globale de la plage d'existence en fonction de Gr pour toutes les solutions obtenues à partir de la solution stationnaire de base jusqu'aux états quasi-périodiques, pour quatre nombres de Prandtl dans l'intervalle $0 \leqslant Pr \leqslant 0,025$. Des lignes colorées sont utilisées pour identifier facilement la symétrie des solutions. Ces lignes apparaissent sous forme de lignes pleines dans la plage de Gr où les solutions sont stables. Notez que pour une meilleure présentation globale de ces résultats, la plage de Gr est interrompue entre 39000 et 45500 et entre 47000 et 82000.

3.5 Évolution des scénarios de transition

Jusqu'à présent, nous avons présenté des analyses de bifurcation pour différents nombres de Prandtl, mais sans relier ces cas entre eux. L'idée est maintenant d'utiliser ces quelques exemples pour approfondir notre compréhension de la manière dont les scénarios de transition entre les différentes solutions stables observées évoluent lors de la modification du nombre de Prandtl.

Intersection	$H^P_{c,0}/P^P_l$	$H^P_{c,0}/H^P_a$	$H^S_l/H^S_{w,25}$	$H^P_a/H^P_{c,25}$	$P^P_l/H^P_{c,25}$
Gr_c	28327	29398	39518	37642	36630
Pr_c	$8,83\times10^{-5}$	$3,28\times10^{-4}$	$1,21\times10^{-2}$	$1,44\times10^{-2}$	$1,63\times10^{-2}$
Intervalles	R1 | R2	| R3	| R4	| R5	| R6

TABLE 3.3 – Points d'intersection des courbes $Gr_c(Pr)$ des principaux points de bifurcation sur les branches primaire et secondaire dans l'intervalle étudié $0 \leqslant Pr \leqslant 0,025$. Définition des intervalles de Pr délimités par ces points.

Les résultats présentés dans la section précédente ont montré que de nombreux points de bifurcation de Hopf, aussi bien sur la branche primaire que sur la branche secondaire, sont impliqués dans les scénarios de transition. Il existe également des liens importants entre les points de bifurcation de Hopf sur la branche secondaire et ceux qui se trouvent sur la branche primaire par l'interaction des cycles qui y naissent en des points de bifurcation de type fourche : par exemple, H^S_l est connecté à H^P_a par le biais des cycles S_l et S_a au point de bifurcation $P^{C_a}_l$ et $H^S_{w,25}$ est connecté à $H^P_{c,25}$ par l'interaction des cycles S_w et S_c au point de bifurcation $P^{C_{c,25}}_w$. Enfin, les scénarios de transition semblent être fortement influencés par les positions relatives des points de bifurcation sur la branche primaire, P^P_l, H^P_a, $H^P_{c,0}$ et $H^P_{c,25}$, et des points de bifurcation sur la branche secondaire, H^S_l, $H^S_{w,0}$ et $H^S_{w,25}$. L'intersection des courbes de stabilité $Gr_c(Pr)$ de ces différents points de bifurcation joue alors un rôle important. Toutes ces intersections (déjà mentionnées précédemment) sont résumées dans le tableau 3.3, avec les intervalles de Pr ainsi définis.

Pour $1,63\times10^{-2} \leqslant Pr \leqslant 2,5\times10^{-2}$, dans l'intervalle R6, le premier point de bifurcation rencontré est $H^P_{c,25}$. On peut alors s'attendre à ce que dans cette gamme de Pr, comme pour $Pr = 0.025$, $H^P_{c,25}$ donnera un cycle S_c qui évoluera avec le nombre de Grashof et subira une bifurcation de type Naimark-Sacker permettant d'avoir une solution quasi-périodique.

Pour $1,44\times10^{-2} \leqslant Pr \leqslant 1,63\times10^{-2}$, dans l'intervalle R5, la première bifurcation sur la branche primaire est maintenant stationnaire et a lieu au point P^P_l en raison de l'intersection des points $H^P_{c,25}$ et P^P_l. Ce point de codimension-2 conduit également à la création de la bifurcation de Hopf $H^S_{w,25}$ sur la branche secondaire initiée à P^P_l et de la bifurcation fourche de cycle $P^{C_{c,25}}_w$ sur le cycle S_c initié à $H^P_{c,25}$. Dans cette plage de Pr, comme pour $Pr = 0,015$, on peut s'attendre à avoir une branche secondaire stable jusqu'au point $H^S_{w,25}$, où un cycle S_w stable est créé. Ce cycle S_w disparait en $P^{C_{c,25}}_w$, où il stabilise le cycle S_c, désormais instable à sa naissance dans ce domaine de Pr. Un état quasi-périodique avec une symétrie S_c apparaîtra ensuite lorsque le cycle S_c sera déstabilisé. Notez que, dans cette plage de Pr, le cycle S_a devrait rester instable et ne jouer aucun rôle dans le scénario de transition.

Les modifications suivantes, lorsque Pr est diminué, se produisent à $Pr_c = 1,44 \times 10^{-2}$ et $1,21 \times 10^{-2}$ et correspondent aux croisements des points de bifurcation $H^P_{c,25}$ et H^P_a sur la branche primaire et H^S_l et $H^S_{w,25}$ sur la branche secondaire. Au-delà de ces deux croisements, dans la plage R3, la dynamique trouvée précédemment dans la plage R5 et impliquant le cycle S_w et le cycle S_c est maintenant entièrement instable car ces deux cycles sont affectés par un mode complexe conjugué instable supplémentaire. Comme le montre la figure 3.8a pour $Pr = 0,005$, la dynamique importante de cette plage R3 est liée aux cycles sous-critique S_l et super-critique S_a : la branche secondaire stationnaire est stable jusqu'au point de bifurcation H^S_l, donnant naissance à un cycle sous-critique instable S_l, qui finira par stabiliser le cycle S_a au point de la bifurcation fourche de cycle $P^{C_a}_l$. Un autre point de bifurcation fourche sur le cycle S_a donnera lieu à un cycle S_c stable et finalement à un état quasi-périodique $\mathrm{QP}_{c,2}$ avec symétrie par rapport au centre.

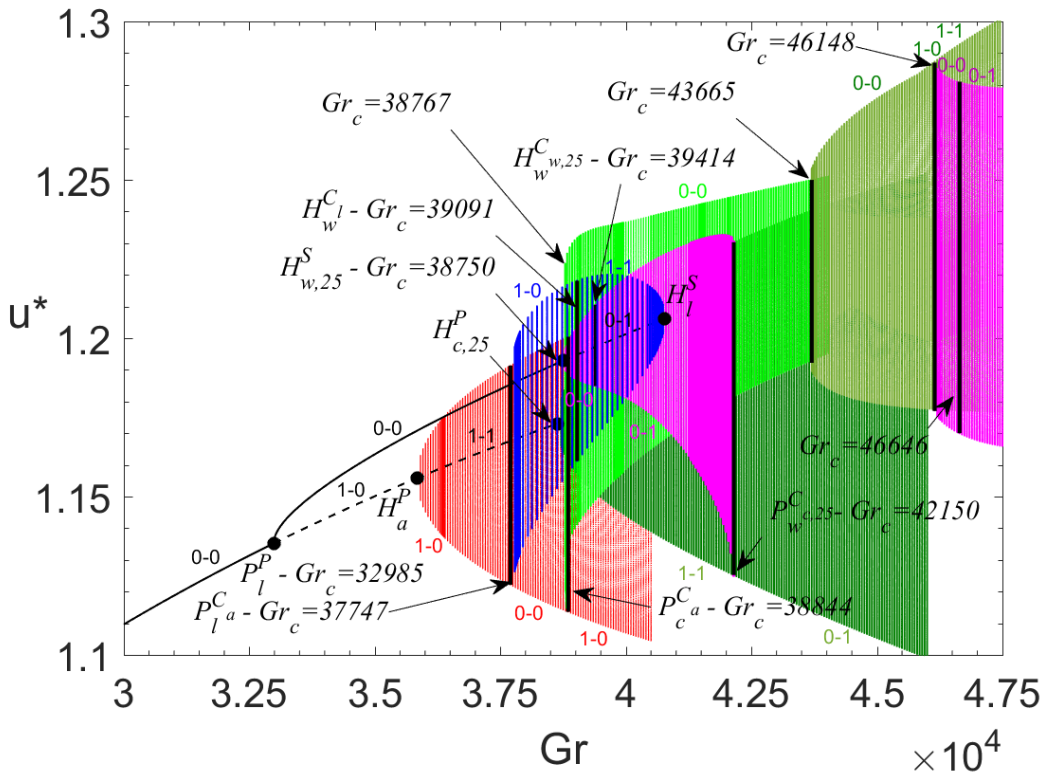


FIGURE 3.12 – Diagramme de bifurcation $u^*(Gr)$ pour $Pr = 0,013$ montrant toutes les solutions convectives à partir de la solution stationnaire stable avec toutes les symétries jusqu'à l'apparition de la quasi-périodicité. Comme dans les diagrammes précédents, le cycle S_a est rouge, le cycle S_l est bleu, les cycles S_c sont en vert et les cycles S_w sont en violet. Ce cas est intermédiaire entre $Pr = 0,015$ et $Pr = 0,005$ et donc certaines parties de leur dynamique sont observées ici. Notez l'occurrence d'une bifurcation de doublement de période à $Gr_c = 43665$, une spécificité de ce cas.

Dans l'intervalle intermédiaire R4, la dynamique doit être plus complexe car, comparativement à la plage R5, seul le croisement de $H^P_{c,25}$ et de H^P_a sur la branche primaire a eu lieu. Pour avoir plus d'informations sur la dynamique dans cette plage R4, nous avons calculé le diagramme de bifurcation pour $Pr = 0,013$, présenté sur la figure 3.12. Nous voyons que ce diagramme implique à la fois les caractéristiques trouvées dans les plages

R5 et R3. Le cycle S_w, stable au début comme dans la gamme R5, est maintenant déstabilisé par une bifurcation de Naimark-Sacker $H_w^{C_{w,25}}$, avant de disparaître à la bifurcation fourche $P_w^{C_{c,25}}$ sur le cycle S_c provenant du point $H_{c,25}^P$. Ce cycle S_c est maintenant doublement instable à sa naissance et n'est donc pas stabilisé. En revanche, comme dans le domaine R3, le cycle S_a n'est instable qu'une seule fois à sa naissance au point H_a^P et est stabilisé à la bifurcation fourche de cycle $P_l^{C_a}$ vers le cycle S_l. Notez que ce cycle S_l est doublement instable ($n-m=1-1$) à son apparition sous-critique au point H_l^S et qu'une bifurcation de Naimark-Sacker $H_w^{C_l}$ réduit son instabilité à une seule valeur propre réelle ($n-m=1-0$) pour des valeurs de Gr plus petites afin de s'adapter à sa stabilité au point $P_l^{C_a}$.

Comme déjà vu, le cycle S_a est ensuite déstabilisé à un point de bifurcation fourche ($Gr_c = 38844$), ce qui donne naissance à un cycle secondaire S_c, légèrement sous-critique à son apparition, stable sur un grand domaine de Gr (de $Gr_c = 38767$ à $Gr_c = 43665$). L'évolution ultérieure est différente de celle obtenue pour les autres valeurs de Pr. Le cycle S_c est déstabilisé par une bifurcation de type doublement de période, ce qui génère un autre cycle S_c avec une période double. Ce nouveau cycle S_c est déstabilisé à $Gr_c = 46148$ par une bifurcation fourche de cycle donnant lieu à un cycle S_w sans symétrie, stable jusqu'à $Gr_c = 46646$, puis à un état quasi-périodique sans symétrie, QP_w . En fait, sur le nouveau cycle S_c, il existe également une bifurcation de Naimark-Sacker très proche de 46148. L'état quasi-périodique à symétrie centrale qui en découle, $\mathrm{QP}_{c,3}$, apparaît donc d'abord comme instable, mais doit ensuite être stabilisé, car il peut être observé par des calculs instationnaires à des valeurs plus grandes de Gr telles que $Gr = 46300$ et 46600. Il existe alors une coexistence d'états quasi-périodiques sans symétrie et avec la symétrie S_c dans une certaine gamme de valeurs de Gr, comme cela a été confirmé par des simulations temporelles à $Gr = 46650$ (Fig. 3.13).

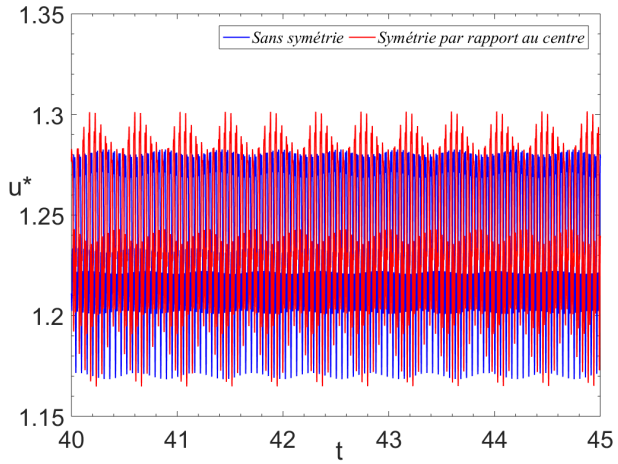


FIGURE 3.13 – Évolutions temporelles $u^*(t)$ des solutions quasi-périodiques obtenues à $Pr = 0,013$ et $Gr = 46650$: état quasi-périodique avec symétrie S_c (en rouge) et sans symétrie (en bleu).

Une spécificité de l'intervalle R4 est l'existence des deux bifurcations de Naimark-Sacker $H_w^{C_l}$ et $H_w^{C_{w,25}}$ respectivement sur les cycles S_l et S_w. Certains calculs supplémentaires ont montré que, pour $Pr = 0,0142$, ces points de bifurcation $H_w^{C_l}$ et $H_w^{C_{w,25}}$ sont proches des points limites de leurs cycles respectifs $P_l^{C_a}$ et $P_w^{C_{c,25}}$, alors que, pour

$Pr = 0,0122$, $H_w^{C_l}$ et $H_w^{C_{w,25}}$ sont proches des points de naissance de leurs cycles respectifs H_l^S et $H_{w,25}^S$ et également proches l'un de l'autre. Tout cela signifie que les points $H_w^{C_l}$ et $H_w^{C_{w,25}}$ apparaissent respectivement à $P_l^{C_a}$ et $P_w^{C_{c,25}}$, lorsque les points de bifurcation H_a^P et $H_{c,25}^P$ se croisent sur la branche primaire à $Pr_c = 1,44 \times 10^{-2}$ et qu'ils disparaissent à H_l^S et $H_{w,25}^S$, lorsque les points H_l^S et $H_{w,25}^S$ se croisent sur la branche secondaire à $Pr_c = 1,21 \times 10^{-2}$. C'est également une indication que la partie stable du cycle S_w, entre $H_{w,25}^S$ et $H_w^{C_{w,25}}$, se réduit progressivement entre $Pr_c = 1,44 \times 10^{-2}$ et $Pr_c = 1,21 \times 10^{-2}$ et disparaît finalement à $Pr_c = 1,21 \times 10^{-2}$.

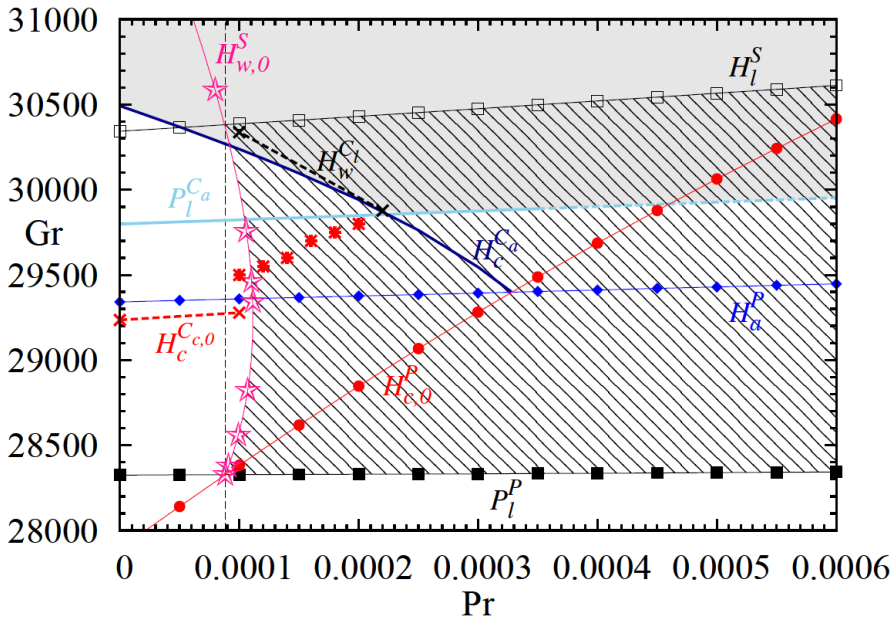


FIGURE 3.14 – Suivi des points de bifurcation dans l'espace de paramètre (Pr, Gr_c) à très faibles nombres de Prandtl. En plus des points de bifurcation sur les branches primaire et secondaire (P_l^P, $H_{c,0}^P$, H_a^P, H_l^S, et $H_{w,0}^S$, comme sur la figure 3.4b), sont donnés les points de bifurcation sur le cycle S_a : la bifurcation fourche stationnaire $P_l^{C_a}$ (ligne bleu clair, extrapolée avec une partie en pointillé) et la bifurcation de Naimark-Sacker $H_c^{C_a}$ (ligne bleue foncée). La bifurcation de Naimark-Sacker $H_w^{C_l}$ sur le cycle S_l est calculée pour $Pr = 1 \times 10^{-4}$ et $Pr = 2.2 \times 10^{-4}$ (croix noires), puis interpolée entre les deux points (ligne noire en pointillé). Sont mis en évidence les domaines où sont stables l'écoulement stationnaire secondaire (domaine avec lignes obliques) et le cycle S_a (domaine avec fond gris). La bifurcation $H_c^{C_{c,0}}$ sur le cycle $S_{c,0}$ est donnée pour $Pr = 0$ et $Pr = 1 \times 10^{-4}$ (croix rouges) et interpolée entre les deux points (ligne rouge en pointillé). Pour $Pr \leqslant 8,83 \times 10^{-5}$, la solution quasi-périodique $\mathrm{QP}_{c,1}$ peut être obtenue entre les points $H_c^{C_{c,0}}$ et $H_c^{C_a}$. Au-delà de $Pr = 8.83 \times 10^{-5}$ (ligne noire verticale en pointillé), l'état $\mathrm{QP}_{c,1}$ est toujours observé dans l'intervalle de Gr en-dessous de $H_c^{C_a}$ et au-dessus des astérisques rouges qui définissent une limite inférieure approximative.

Les derniers croisements de points de bifurcation se produisent sur la branche primaire, entre $H_{c,0}^P$ et H_a^P à $Pr_c = 3,28 \times 10^{-4}$ et entre $H_{c,0}^P$ et P_l^P à $Pr_c = 8,83 \times 10^{-5}$, et ils délimitent les deux derniers domaines de Pr, R2 et R1. À l'exception du cas limite $Pr = 0$, nous n'avons pas de diagrammes de bifurcation dans ces plages et des calculs supplémentaires seront alors nécessaires pour comprendre la transition entre les diagrammes à

$Pr = 0,005$ et $Pr = 0$. Nous suivrons les points de bifurcation importants apparaissant sur les cycles dans ces intervalles de Pr (Fig. 3.14) et calculerons un cycle non encore observé pour $Pr = 0,0001$ (Fig. 3.15). Par rapport au diagramme de bifurcation à $Pr = 0,005$, le croisement de $H^P_{c,0}$ et de H^P_a à $Pr_c = 3,28 \times 10^{-4}$ modifiera la stabilité du cycle S_a à son apparition au point H^P_a, avec une paire complexe conjugué de multiplicateurs de Floquet instables en plus du multiplicateur de Floquet réel déjà instable. En même temps cependant, une nouvelle bifurcation de Naimark-Sacker $H^{C_a}_c$ apparaît sur le cycle S_a et stabilise la paire de multiplicateurs complexes conjugués de Floquet. Comme le montre la figure 3.14, le point $H^{C_a}_c$ évolue à partir de H^P_a à $Pr = 3,28 \times 10^{-4}$, croise la courbe de $P^{C_a}_l$, l'autre bifurcation sur le cycle S_a, à $Pr \approx 2,3 \times 10^{-4}$, avant de poursuivre vers $Pr = 0$. L'apparition de ce point $H^{C_a}_c$ permet alors de conserver la dynamique obtenue à $Pr = 0,005$, c'est-à-dire la stabilisation du cycle S_a à $P^{C_a}_l$ et la dynamique ultérieure pour des valeurs plus grandes de Gr, au moins jusqu'à $Pr = 2,3 \times 10^{-4}$. En effet, pour les valeurs de Pr inférieures à $2,3 \times 10^{-4}$, c'est maintenant au-delà du point $H^{C_a}_c$ que le cycle S_a est stabilisé, en cohérence avec ce qui est observé pour $Pr = 0$. Notez que le domaine dans lequel le cycle S_a est stable est mis en évidence en grisé sur la figure 3.14. Enfin, le croisement de $H^{C_a}_c$ et $P^{C_a}_l$ modifie également le spectre instable du cycle S_l au point $P^{C_a}_l$ (à partir duquel il bifurque du cycle S_a) en rajoutant une paire instable complexe conjuguée de multiplicateurs de Floquet. Nous avons toutefois constaté que ce croisement induisait également la création d'une nouvelle bifurcation de Naimark-Sacker $H^{C_l}_w$ sur le cycle S_l, stabilisant ainsi ces multiplicateurs de Floquet. Au-delà de $H^{C_l}_w$, le spectre instable du cycle S_l est alors le même qu'avant le croisement, ce qui permet de maintenir la dynamique sur la branche secondaire à laquelle le cycle S_l est connecté en H^S_l. Le point $H^{C_l}_w$ évoluera tout au long du cycle S_l, de $P^{C_a}_l$ ($Pr = 2,3 \times 10^{-4}$) à H^S_l ($Pr = 8,83 \times 10^{-5}$), c'est-à-dire au croisement de $H^P_{c,0}$ et P^P_l. Ce dernier croisement ne modifie pas la dynamique initiée depuis la branche primaire et décrite précédemment.

Nous devons maintenant décrire la dynamique spécifique due au point de bifurcation $H^S_{w,0}$ apparaissant sur la branche secondaire au croisement de $H^P_{c,0}$ et P^P_l à $Pr_c = 8,83 \times 10^{-5}$. $H^S_{w,0}$ déstabilisera la branche secondaire stationnaire dans une certaine plage de Gr juste au-dessus de $Pr = 8,83 \times 10^{-5}$ (Fig. 3.14). Cette plage de Gr se réduit à mesure que Pr augmente et disparaît à $Pr \approx 1,1 \times 10^{-4}$. Le point de Hopf $H^S_{w,0}$ crée également un cycle S_w stable, sans symétrie et avec une basse fréquence. Ce cycle est illustré sur la figure 3.15 pour $Pr = 1 \times 10^{-4}$. Il est stable à partir de $Gr_c = 28581$, où il est initié à $H^S_{w,0}$ ($f_c = 2,76$), jusqu'à $Gr_c = 29705$, où il est déstabilisé par une bifurcation de Naimark-Sacker et donne lieu à un état quasi-périodique. Cet état quasi-périodique sans symétrie n'a jamais été observé comme état stable, ce qui signifie que la bifurcation de Naimark-Sacker doit être sous-critique. En revanche, l'état $\mathrm{QP}_{c,1}$ avec la symétrie S_c, qui existe et est stable entre $H^{C_{c,0}}_c$ et $H^{C_a}_c$ pour $Pr = 0$ et jusqu'à $Pr_c = 8,83 \times 10^{-5}$ dans la plage R1, reste stable dans une certaine plage de Gr au dessus de $Pr = 8,83 \times 10^{-5}$ malgré la déstabilisation du cycle S_c. Cet état $\mathrm{QP}_{c,1}$ a été observé par des simulations numériques instationnaires en dessous du point $H^{C_a}_c$, dans une plage de Gr décroissant en taille avec l'augmentation de Pr et qui disparait au croisement de $H^{C_a}_c$ et $P^{C_a}_l$ à $Pr = 2,3 \times 10^{-4}$. Cette plage de Gr peut être vue sur la figure 3.14 entre la courbe $H^{C_a}_c$ et les astérisques rouges qui donnent les plus petites valeurs de Gr où la solution quasi-périodique $\mathrm{QP}_{c,1}$ a été obtenue. Notons enfin que le second point $H^S_{w,0}$ apparaissant à $Gr_c = 30004$ sur la branche secondaire, en la restabilisant, ne donne pas lieu à des états stables comme on peut le voir sur la figure 3.15 pour $Pr = 1 \times 10^{-4}$. De tous ces résultats obtenus pour les

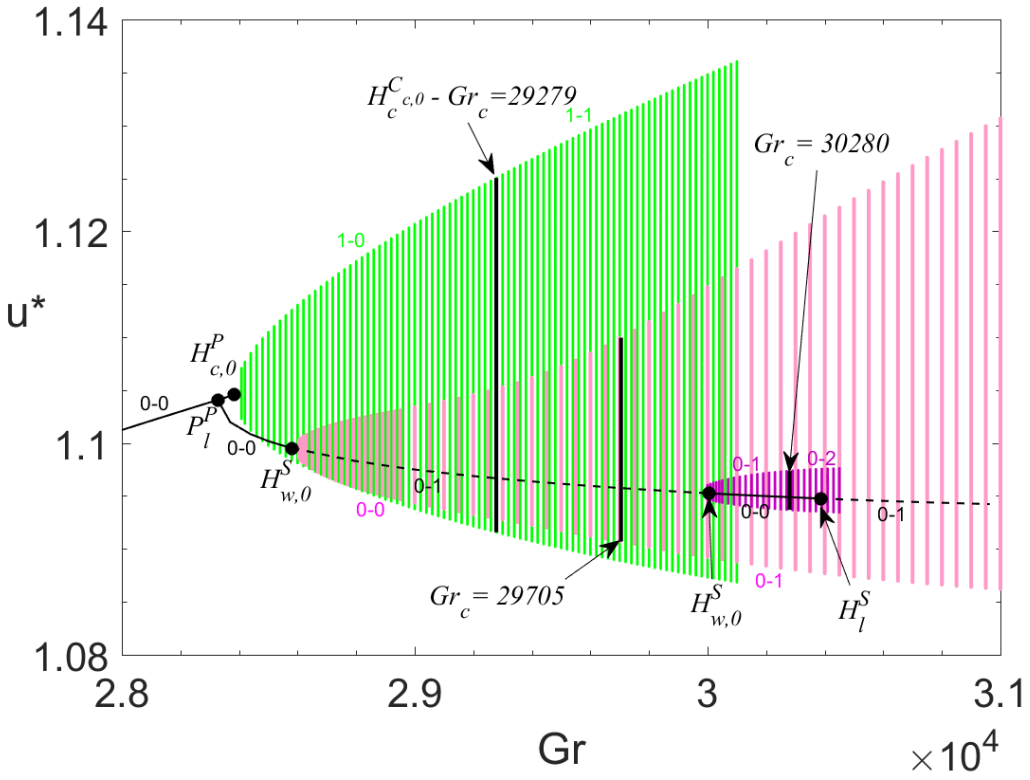


FIGURE 3.15 – Diagramme de bifurcation $u^*(Gr)$ pour $Pr = 1 \times 10^{-4}$ montrant le cycle S_c apparaissant au point $H^P_{c,0}$ ($Gr_c = 28383$, $f_c = 2.79$) sur la branche primaire et instable pour cette valeur de Pr, les cycles S_w (violets) initiés aux points $H^S_{w,0}$ sur la branche secondaire. Le premier cycle S_w initié à $Gr_c = 28581$ est stable à sa naissance et est déstabilisé à $Gr_c = 29705$ par une bifurcation de Naimark-Sacker, tandis que le second cycle S_w initié à $Gr_c = 30004$ reste instable. La branche stationnaire secondaire est stable de P^P_l ($Gr_c = 28328$) jusqu'au premier point de Hopf $H^S_{w,0}$, ainsi qu'entre le deuxième point $H^S_{w,0}$ et le point H^S_l ($Gr_c = 30386$).

très faibles valeurs de Pr, nous pouvons également conclure que la dynamique dans toute la plage R1 est similaire à celle obtenue pour $Pr = 0$, avec seulement quelques variations des principaux points de bifurcation, $H^P_{c,0}$, le seuil d'apparition du cycle stable S_c avec une basse fréquence, $H^{C_{c,0}}_c$, le seuil d'apparition du cycle quasi-périodique $\mathrm{QP}_{c,1}$ et $H^{C_a}_c$, la limite d'existence de la solution $\mathrm{QP}_{c,1}$ et le lieu de stabilisation du cycle S_a (voir Fig. 3.14).

Pour finir, nous donnons un résumé de tous les différents écoulements stables, allant de la solution stationnaire de base aux solutions quasi-périodiques, obtenus dans cette étude pour $0 \leqslant Pr \leqslant 0,025$ dans le tableau 3.4. Nous indiquons également dans quel domaine de Pr de R1 à R6 (voir Tab. 3.3) ils peuvent être trouvés. Quatorze états stables différents ont été obtenus, correspondant à deux états stationnaires, huit cycles limite et quatre états quasi-périodiques. Nous voyons qu'à côté de l'état stationnaire de base avec toutes les symétries, l'état quasi-périodique $\mathrm{QP}_{c,2}$ se trouve dans toutes les plages de Pr. Le cycle primaire S_c est stable pour les valeurs les plus grandes de Pr dans les plages R5 et R6, tandis que le cycle primaire S_a, bien que jamais stable à sa naissance, est obtenu sous la forme d'un état stable dans les autres plages de R1 à R4 et donne naissance à un

Intervalles de Pr	R1	R2	R3	R4	R5	R6
État de base stationnaire S_a	×	×	×	×	×	×
État stationnaire secondaire S_l		×	×	×	×	
cycle primaire S_c					×	×
cycle primaire S_c (basse fréquence)	×					
cycle primaire S_a	×	×	×	×		
cycle secondaire S_w				×	×	
cycle secondaire S_c	×	×	×	×		
cycle secondaire S_w (basse fréquence)		×				
cycle secondaire S_c (période double)				×		
cycle secondaire S_w (période double)				×		
État $QP_{c,1}$	×	×				
État $QP_{c,2}$	×	×	×	×	×	×
État $QP_{c,3}$				×		
État QP_w				×		

TABLE 3.4 – Récapitulatif des différents états de d'écoulements stables, de l'état de base aux états quasi-périodiques, obtenus dans cette étude et des domaines de Pr de R1 à R6 (voir Tab. 3.3) où ils peuvent être trouvés. Les cycles sont indiqués comme primaires quand ils sont initiés à une bifurcation de Hopf sur la branche primaire et comme secondaires quand ils sont initiés à une bifurcation de Hopf sur la branche secondaire ou à une bifurcation fourche sur un autre cycle.

cycle secondaire S_c stable. Le cycle S_w sur la branche secondaire est stable dans R5 où il stabilise également le cycle S_c sur la branche primaire, mais également dans R4 dans un intervalle de Gr décroissant en taille. En revanche, le cycle S_l sur la branche secondaire n'est jamais obtenu en tant qu'état stable, bien qu'il participe à la stabilisation du cycle S_a sur la branche primaire. Le cycle de basse fréquence S_c sur la branche primaire n'est stable que dans R1, mais un autre cycle secondaire de basse fréquence S_w est stable dans une très petite plage de Pr dans R2. L'état quasi périodique $QP_{c,1}$, stable dans R1 et une partie de R2, présente la particularité d'être un état intermédiaire entre des cycles stables. Enfin, le plus grand nombre d'états stables est obtenu dans R4, qui se présente comme la plage de Pr où se produit la transition entre différents scénarios de bifurcation.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude tridimensionnelle des transitions d'écoulements dans une cavité chauffée latéralement avec des dimensions fixes $4 \times 2 \times 1$ (longueur $\times$ largeur $\times$ hauteur) pour des nombres de Prandtl typiques des métaux liquides ($0 \leqslant Pr \leqslant 0,025$). L'utilisation de techniques sophistiquées de continuation nous a permis de suivre les solutions stationnaires et périodiques lorsque le nombre de Grashof est modifié. Malgré la petite gamme de Pr étudiée, nos résultats ont montré une dynamique très complexe, avec des scénarios de bifurcation impliquant différentes solutions stationnaires et périodiques et évoluant avec Pr. Plutôt que de résumer tous les scénarios de bifurcation observés, nous citerons des informations importantes obtenues au cours de cette étude.

Dans ces situations chauffées latéralement et à petit nombre de Prandtl, les solutions stationnaires sont peu nombreuses : l'écoulement de base à un rouleau avec toutes les

symétries (branche stationnaire primaire) et, éventuellement, une autre solution correspondant à la rupture de l'une des symétries (ici la solution S_l sur une branche stationnaire secondaire). En revanche, les solutions périodiques oscillatoires sont nombreuses, initiées aux différents points de bifurcation de Hopf sur les branches primaire ou secondaire, et plusieurs de ces cycles sont impliqués dans la dynamique du système conduisant aux solutions oscillatoires stables. Si le scénario de transition est simple pour les plus grandes valeurs de Pr ($Pr \approx 0,025$) avec une bifurcation de Hopf supercritique sur la branche principale menant à une solution périodique stable sur une large plage de Gr, la situation devient plus complexe pour les plus petites valeurs de Pr. En particulier, dans le domaine de Pr où la première instabilité est stationnaire donnant naissance à une branche stable secondaire, certains cycles instables à leur apparition sur la branche primaire seront stabilisés par une interaction avec les cycles provenant de la branche secondaire. Un exemple est donné par le cas $Pr = 0,005$: la branche secondaire est stable jusqu'à une bifurcation de Hopf avec une symétrie S_l et on pourrait donc s'attendre à obtenir un cycle S_l stable. En fait, cette bifurcation de Hopf étant sous-critique, le cycle S_l est instable et ne peut pas être observé, mais il stabilise un cycle S_a qui peut alors être observé, ainsi qu'un cycle S_c bifurquant à partir du cycle S_a. On peut aussi noter la coexistence possible de solutions stables (stationnaires ou oscillatoires) dans certaines gammes de Gr. Les situations plus proches de $Pr = 0$ sont particulièrement complexes car les points de bifurcation sur les branches stationnaires primaire et secondaire coexistent sur une petite plage de valeurs de Gr. Et le scénario obtenu pour $Pr = 0$, qui, dans le passé, était censé être représentatif de ce qui est obtenu pour les faibles valeurs de Pr, n'est en fait strictement valable que pour $Pr \leqslant 8,83 \times 10^{-5}$.

Cette étude a également montré que les scénarios de bifurcation changent aux différentes intersections des points de bifurcation sur les branches stationnaires primaire et secondaire, mais aussi parfois à des intersections de points de bifurcation sur des cycles. Nous avons essayé de comprendre tous les changements induits sur la dynamique par ces différentes intersections, puis de donner une vision claire de la dynamique sur toute la gamme de Pr considérée. Dans tous les cas, les scénarios de bifurcation, qui commencent par l'écoulement stationnaire de base, mènent pour finir à un cycle avec une symétrie S_c et à un autre état quasi-périodique avec la même symétrie S_c. Une exception a été trouvée pour $Pr = 0,013$ où une bifurcation avec doublement de période affecte d'abord le cycle S_c et où nous observons la coexistence ultérieure d'états quasi périodiques avec une symétrie S_c et sans symétrie. Cette dynamique spécifique aux valeurs élevées de Gr pourrait exister au voisinage de $Pr = 0,013$, mais n'a pas été observée pour $Pr = 0,005$ et $Pr = 0,015$.

Des comparaisons qualitatives peuvent être effectuées avec l'expérience de Braunsfurth & Mullin (1996) dans une cavité de dimensions $4 \times 1,3 \times 1$. Dans cette expérience utilisant du gallium liquide, le nombre de Grashof et le nombre de Prandtl ont été modifiés en faisant varier la différence de température ainsi que la température moyenne appliquée. Nous pouvons noter que la cavité est plus confinée que notre cavité, mais aussi que, comme le montre Juel *et al.* (1999), l'écoulement généré n'a pas la symétrie S_π en raison de l'isolation thermique imparfaite de la cavité. Une conséquence de ce dernier point est que la bifurcation stationnaire menant à la rupture de cette symétrie S_π ne peut pas être trouvée dans l'expérience. Cependant, il est intéressant de noter que, lors de la variation de Gr et de Pr, l'expérience met en évidence différents états oscillatoires, en bonne correspondance avec nos résultats. Les fréquences sans dimension mentionnées sont 52,1 , 22,1 , 65,7 et 39,2 , valeurs légèrement supérieures à nos valeurs, mais dans la

même plage pour Pr correspondant au gallium. Notez également que les mesures de température expérimentales ont été effectuées à travers un couvercle dans le plan de symétrie V_l : la conséquence est que, pour les oscillations brisant la symétrie gauche/droite S_l, le signal de température obtenu a deux fois la fréquence des signaux mesurés ailleurs dans la cavité (Hof *et al.*, 2004). Les fréquences de l'écoulement oscillatoire expérimental pourraient alors être, dans certains cas, la moitié des valeurs données. Des comparaisons plus quantitatives sont difficiles en raison des différences dans la géométrie et les symétries, mais également en raison des différentes manières d'explorer l'espace des paramètres (Gr, Pr).

Pour conclure, notre étude était limitée à des valeurs de Gr permettant d'atteindre des états quasi-périodiques, un domaine dans lequel nos techniques de continuation étaient particulièrement utiles pour comprendre la dynamique des écoulements. Nous n'avons pas exploré le domaine des Gr plus grands, ce qui conduirait à des écoulements oscillatoires plus complexes et pour finir à des états chaotiques voire turbulents, mais seules des techniques de simulations instationnaires peuvent être utilisées pour de telles études. En revanche, nos techniques de continuation pourraient être utilisées pour étudier la dynamique des écoulements dans des cavités présentant différents rapports d'aspect. Selon Henry & Ben Hadid (2007a), la première instabilité affectant l'écoulement stationnaire de base dépend fortement des dimensions de la cavité et peut être stationnaire ou oscillatoire et présenter des symétries différentes. En particulier, des bifurcations conduisant à des états avec la symétrie S_π (jamais vue dans cette étude) peuvent être obtenues pour certains rapports d'aspect. De tels changements dans les caractéristiques des premières transitions devraient amener à des changements dans les scénarios de bifurcation et il pourrait être intéressant d'étudier tout cela à l'avenir.

Nous allons, dans tout ce qui suit, nous concentrer sur les effets de la rotation autour de l'axe vertical sur la structure de l'écoulement de base ainsi que sur les instabilités dont il est le siège. Nous commençons par étudier le modèle de Hadley au chapitre 4, puis nous introduirons les effets tridimensionnels au chapitre 5.

CHAPITRE 4

STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT DE HADLEY EN ROTATION

Sommaire

4.1 Introduction 65
4.2 Détermination de l'écoulement de base 66
4.2.1 Profils de vitesse 67
4.2.2 Couches d'Ekman et vents thermiques 71
4.2.3 Profils de température 72
4.3 Analyse de stabilité linéaire 73
4.3.1 Instabilité de cisaillement 77
4.3.2 Instabilité thermique de Rayleigh 79
4.3.3 Instabilité oscillatoire 84
4.4 Analyse énergétique aux seuils 87
4.4.1 Énergie cinétique de la perturbation 87
4.4.2 Énergie thermique de la perturbation 88
4.4.3 Contributions au nombre de Grashof critique 89
4.4.4 Analyse des résultats 89
4.5 Conclusion 98

4.1 Introduction

La circulation de Hadley a été souvent utilisée pour des études de stabilité en raison de son implication dans divers problèmes naturels, industriels et techniques tels que les écoulements planétaires et les processus de croissance cristalline. Hadley (1735) a initialement proposé ce modèle pour décrire un écoulement unicellulaire afin d'expliquer l'origine de la circulation atmosphérique à grande échelle entre les régions chaudes équatoriales et les pôles froids. Bien que ce type d'écoulements planétaires dû à un gradient de température horizontal (perpendiculaire à la gravité) est fortement influencé par la rotation et en particulier par les effets de la force de Coriolis, on retrouve dans la littérature peu d'études consacrées à ce type de forçage convectif. Dans ce chapitre, nous allons déterminer l'écoulement de base correspondant à cet écoulement lorsqu'il est soumis à

la rotation ainsi que les modifications auxquelles il est sujet. Une étude de stabilité linéaire est ensuite entreprise, suivie d'une analyse énergétique aux seuils qui permet de déterminer le rôle de chaque effet physique dans le déclenchement des instabilités.

4.2 Détermination de l'écoulement de base

Dans le cas où les dimensions horizontales (L la longueur et l la largeur) sont très grandes par rapport à la hauteur h de la cavité, les gradients et les variations des quantités physiques deviennent indépendants de ces directions et on peut donc considérer une géométrie constituée de deux plans parallèles infinis (voir Fig. 4.1), entre lesquels une couche de fluide est soumise à un gradient de température horizontal. Cette couche est considérée comme infiniment longue dans les deux directions horizontales x et y, mais nous supposons également qu'il existe des parois verticales situées loin du centre dans ces deux directions ($x = \pm\infty$ et $y = \pm\infty$), qui permettent à l'écoulement de retourner et d'induire un débit nul dans toutes les sections à x fixe ou à y fixe. Dans une telle situation, les équations de Navier-Stokes admettent une solution analytique mono-dimensionnelle (i.e. ne dépendant que de la composante verticale z) permettant à un écoulement parallèle de se développer dans la direction longitudinale Ox. Cet écoulement est appelé circulation de Hadley.

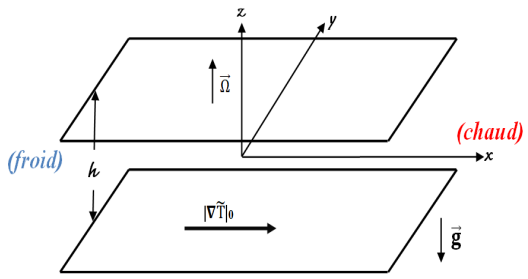


FIGURE 4.1 – Géométrie du modèle simplifié. Ici nous considérons $L >> h$ et $l >> h$. Les deux plans horizontaux parallèles sont situés à $z = \pm 1/2$ dans la géométrie adimensionnée.

Le modèle analytique que nous allons développer dans ce chapitre repose sur les hypothèses classiques d'un écoulement incompressible, newtonien, de propriétés thermophysiques constantes et sous l'approximation de Boussinesq. La nouvelle hypothèse à rajouter dans le cas où la rotation est introduite est liée aux composantes de la vitesse. En effet, nous considérons qu'il y a deux composantes,

- ➢ longitudinale $u_b(z)$ créée par le gradient de température appliqué,
- ➢ et transverse $v_b(z)$ liée à l'effet de la force de Coriolis.

Cette dernière, $v_b(z)$, est nulle dans le cas sans rotation et on doit donc alors retrouver le profil purement longitudinal de Hadley (Hart, 1972). Le profil de température reste inchangé et s'écrit $\Theta_b(x,z) = x + T_b(z)$ où la partie en x est liée au gradient de température imposé et $T_b(z)$ est le profil de température dans la direction verticale à déterminer.

En prenant en considération les hypothèses sus-citées, et en éliminant la pression de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, les équations du mouvement (Éqs. 2.10a, 2.10b et 2.10c) se réduisent à

$$\frac{d^3 u_b}{dz^3} + \sqrt{Ta}\frac{dv_b}{dz} = Gr, \tag{4.1a}$$

$$\frac{d^3 v_b}{dz^3} - \sqrt{Ta}\frac{du_b}{dz} = 0, \tag{4.1b}$$

pour les profils de vitesse, et

$$\frac{d^2T_b}{dz^2} - Pr\,u_b = 0, \tag{4.2}$$

pour le profil de température.

Les conditions aux limites associées à ces équations sont, pour les vitesses, l'adhérence à la paroi $u_b(z \pm 1/2) = v_b(z \pm 1/2) = 0$ et la condition de symétrie par rapport au centre $z = 0$ qui donne $u_b(z = 0) = v_b(z = 0) = 0$ et, pour la température, soit $T_b(z = \pm 1/2) = 0$ pour des parois parfaitement conductrices soit $(dT_b/dz)_{z=\pm 1/2} = 0$ pour des parois parfaitement isolantes.

4.2.1 Profils de vitesse

Les équations 4.1a et 4.1b sont résolues en introduisant un profil de vitesse complexe défini comme suit : $\varphi(z) = u_b(z) + i\,v_b(z)$, ce qui conduit à une équation différentielle de troisième ordre unique et simple

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} - i\sqrt{Ta}\frac{d\varphi}{dz} = Gr, \tag{4.3}$$

à laquelle on associe les conditions aux limites $\varphi(z = \pm 1/2) = 0$ et $\varphi(z = 0) = 0$.
En résolvant l'équation 4.3, on obtient le profil de vitesse complexe

$$\varphi(z) = \frac{iGr}{2\sqrt{Ta}}\left(2z - \frac{\exp\left(\frac{(i+1)Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right) - \exp\left(-\frac{(i+1)Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right)}{\exp\left(\frac{(i+1)Ta^{1/4}}{2\sqrt{2}}\right) - \exp\left(-\frac{(i+1)Ta^{1/4}}{2\sqrt{2}}\right)}\right) \tag{4.4a}$$

$$= \frac{iGr}{2\sqrt{Ta}}\left(2z - \frac{\sinh\left(\frac{(i+1)Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right)}{\sinh\left(\frac{(i+1)Ta^{1/4}}{2\sqrt{2}}\right)}\right). \tag{4.4b}$$

Notez que ce profil est similaire à celui donné par Chikulaev & Shvarts (2015). Enfin, les composantes de vitesse $u_b(z)$ et $v_b(z)$ peuvent être déduites en séparant les parties réelle et imaginaire de la fonction complexe $\varphi(z)$, ce qui donne :

$$u_b(z) = \frac{Gr}{2\sqrt{Ta}}\left(\frac{\alpha\cosh\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right)\sin\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right) - \beta\sinh\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right)\cos\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right)}{\alpha^2+\beta^2}\right), \tag{4.5a}$$

$$v_b(z) = \frac{Gr}{2\sqrt{Ta}}\left(2z - \frac{\alpha\sinh\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right)\cos\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right) + \beta\cosh\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right)\sin\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right)}{\alpha^2+\beta^2}\right), \tag{4.5b}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha(Ta) = \sinh\left(\frac{Ta^{1/4}}{2\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{Ta^{1/4}}{2\sqrt{2}}\right), \\ \beta(Ta) = \cosh\left(\frac{Ta^{1/4}}{2\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{Ta^{1/4}}{2\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$

A ce stade, il est intéressant d'évaluer les expressions asymptotiques des vitesses pour $Ta \to 0$. Le développement de l'expression complexe 4.4b en fonction de Ta conduit à

$$\varphi(z) = Gr\left[\left(\frac{z^3}{6} - \frac{z}{24}\right) - Ta\,Q(z) + i\sqrt{Ta}\,H(z)\right] + \mathscr{O}\left(Ta^{(3/2)}\right), \tag{4.6}$$

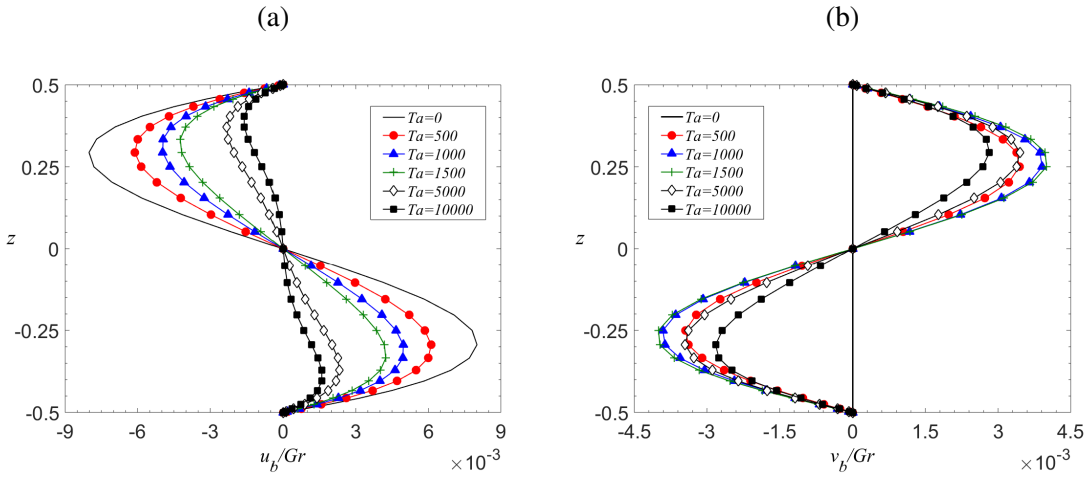


FIGURE 4.2 – Effet du nombre de Taylor Ta sur les composantes (a) longitudinale $u_b(z)/Gr$ et (b) transverse $v_b(z)/Gr$ de la vitesse, normalisées par le nombre de Grashof.

avec

$$Q(z) = \frac{1}{5040}z^7 - \frac{1}{2880}z^5 + \frac{7}{34560}z^3 - \frac{31}{967680}z, \tag{4.7a}$$

$$H(z) = \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{144}z^3 + \frac{7}{5760}z. \tag{4.7b}$$

À partir de l'équation 4.6, on peut d'abord vérifier que la limite de $\varphi(z)$ lorsque $Ta \to 0$ (c'est-à-dire sans rotation) correspond au profil de Hadley bien connu, obtenu par exemple par Hart (1972) :

$$u_H = Gr\left(\frac{z^3}{6} - \frac{z}{24}\right). \tag{4.8}$$

L'équation 4.6 indique également que, lorsque la rotation est appliquée, la variation de la vitesse longitudinale du profil de Hadley se présente sous la forme d'un polynôme de septième ordre donné par $Q(z)$ et est proportionnelle à Ta, alors que la création de la vitesse transversale apparait comme un polynôme du cinquième ordre donné par $H(z)$ et est proportionnelle à $\sqrt{Ta}$.

Les figures 4.2a et 4.2b montrent l'effet du nombre de Taylor sur les profils de vitesse $u_b(z)$ et $v_b(z)$ normalisés par le nombre de Grashof, obtenus respectivement à partir des équations 4.5a et 4.5b. Dans le cas sans rotation ($Ta = 0$), comme prévu, le profil est purement longitudinal, avec $u_b(z)$ correspondant au profil cubique de Hadley donné par 4.8. Lorsque le nombre de Taylor est augmenté, la dynamique de l'écoulement de base est modifiée par le terme de Coriolis, ce qui induit une déviation de l'écoulement vers la droite, créant ainsi des vitesses transversales ($v_b < 0$ lorsque $u_b > 0$ et $v_b > 0$ lorsque $u_b < 0$, dans notre système de coordonnées). Le profil de vitesse transversal croît avec l'augmentation du nombre de Taylor jusqu'à $Ta \approx 1500$, tandis que les vitesses longitudinales diminuent en raison de l'action de la force de Coriolis sur la vitesse transversale. Notons qu'à $Ta \approx 1500$, les composantes de la vitesse ont des intensités similaires. Si le nombre de Taylor augmente encore, les deux composantes de la vitesse vont finalement diminuer. Shvarts & Boudlal (2010), ainsi que Mehdizadeh & Oberlack (2010), par exemple, ont déjà observé un tel comportement dans des écoulements en rotation.

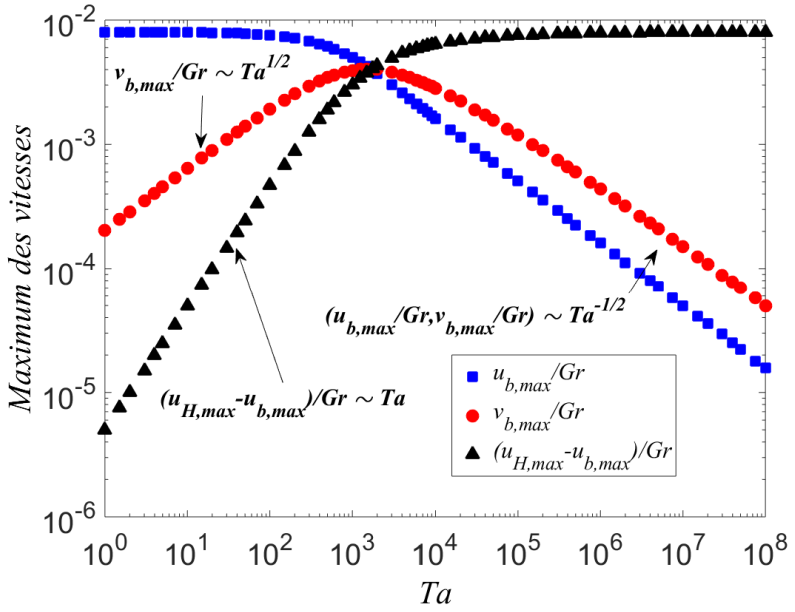


FIGURE 4.3 – Maximum des composantes de la vitesse $u_{b,max}/Gr$ (carrés), $v_{b,max}/Gr$ (cercles) et $(u_{H,max}-u_{b,max})/Gr$ (triangles) en fonction du nombre de Taylor Ta.

Plus de précisions sur les variations des intensités de vitesse lorsque la rotation est appliquée, peuvent être observées sur la figure 4.3 où les valeurs maximales des composantes de vitesse $u_b(z)$ et $v_b(z)$ sont données en fonction du nombre de Taylor. L'augmentation initiale de $v_{b,max}$ apparaît sous la forme $Ta^{1/2}$, tandis que celle de $(u_{H,max}-u_{b,max})$ correspond à Ta, en accord avec le calcul asymptotique donné par l'équation 4.6. Le maximum de $v_{b,max}$ est situé aux environs de $Ta = 1500$ et est très proche de l'intersection des courbes de $u_{b,max}$ et $v_{b,max}$. La diminution de $u_{b,max}$ et $v_{b,max}$ lorsque le nombre de Taylor est encore augmenté semble suivre une loi $Ta^{-1/2}$, plus clairement pour la composante longitudinale que pour la composante transversale.

La limite des profils de vitesse pour une rotation forte ($Ta \to \infty$) peut aussi être étudiée analytiquement. Pour $Ta \to \infty$, en supprimant un terme exponentiel négligeable au dénominateur, l'expression 4.4a peut être simplifiée et écrite comme suit :

$$\varphi_\infty(z) \approx \frac{iGr}{2\sqrt{Ta}}\left(2z - \exp\left(\frac{(i+1)Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}(z-0,5)\right) + \exp\left(-\frac{(i+1)Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}(z+0,5)\right)\right). \quad (4.9)$$

Pour des grands nombres de Taylor, la première exponentielle dans 4.9 est non nulle au voisinage de $z^+ = 0,5$, tandis que la deuxième exponentielle est non nulle proche de $z^- = -0,5$, ce qui nous permet de diviser le problème en deux parties et de définir

$$\varphi_\infty(z \to z^-) \approx \frac{iGr}{2\sqrt{Ta}}\left(2z + \exp\left(-\frac{(i+1)Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}(z+0,5)\right)\right), \quad (4.10a)$$

$$\varphi_\infty(z \to z^+) \approx \frac{iGr}{2\sqrt{Ta}}\left(2z - \exp\left(\frac{(i+1)Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}(z-0,5)\right)\right). \quad (4.10b)$$

Comme nous savons que les profils sont symétriques par rapport à $z = 0$, l'étude peut se concentrer sur l'une de ces expressions. Nous pouvons montrer que, dans ces

expressions, les exponentielles sont partout nulles pour les forts Ta, sauf près des bords $z = \pm 1/2$. De plus, elles ont des valeurs maximales finies :

$$\pm \exp(-3\pi/4)\cos(3\pi/4) \quad \text{à} \quad z = \mp\left(0.5 - \frac{3\sqrt{2}\,\pi}{4\,Ta^{1/4}}\right) \tag{4.11}$$

pour la partie réelle, i.e. pour v_b, et

$$\pm \exp(-\pi/4)\sin(-\pi/4) \quad \text{à} \quad z = \mp\left(0.5 - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4\,Ta^{1/4}}\right) \tag{4.12}$$

pour la partie imaginaire, i.e. pour u_b. Dans les expressions 4.10a et 4.10b, seul le préfacteur dépendra de Ta. Cela indique que u_b et v_b vont diminuer quand $Ta \to \infty$ selon la loi $Ta^{-1/2}$, comme cela a été observé sur la figure 4.3. Plus précisément, les maximums de u_b (seulement donnés par la partie imaginaire des exponentielles) se localisent près des bords, aux positions données dans 4.12, et correspondent à

$$u_{b,\infty,max} = \pm \frac{Gr}{2\sqrt{Ta}} \exp(-\pi/4)\sin(\pi/4), \tag{4.13}$$

alors que $u_{b,\infty}$ est nul dans la majeure partie de la cavité.

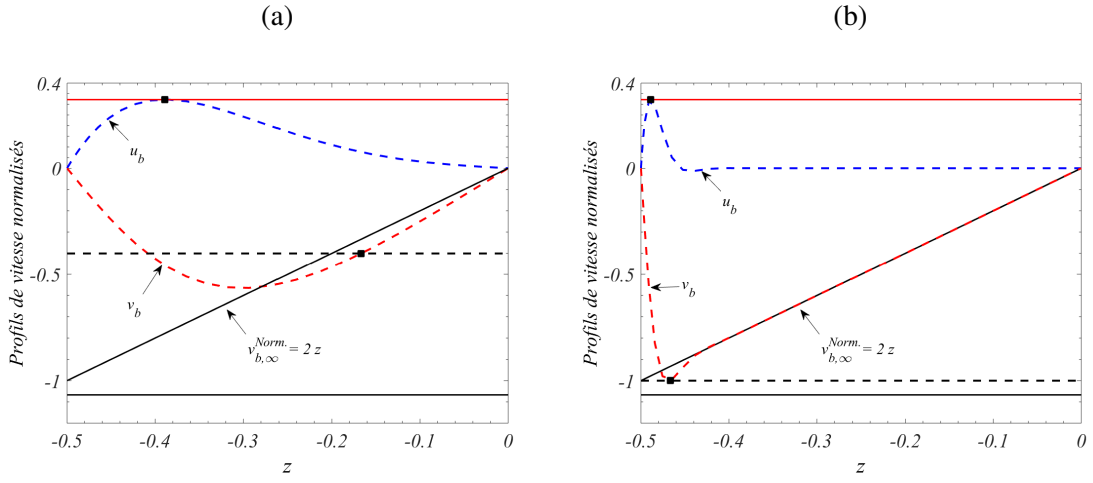


FIGURE 4.4 – Profils de vitesse longitudinal $u_b(z)$ et transverse $v_b(z)$ dans la moitié inférieure de la cavité ($-0.5 \leqslant z \leqslant 0$). Les vitesses sont divisées par le préfacteur $Gr/(2\sqrt{Ta})$. Les profils sont donnés pour $Ta = 10^4$ dans (a) et $Ta = 10^8$ dans (b) (profils positifs $u_b(z)$ avec des trait bleus pointillés et profils négatifs $v_b(z)$ avec des traits rouges pointillés). Les valeurs asymptotiques des maximums des vitesses sont données par des lignes horizontales : pour v_b (Éq. 4.14a, trait noir pointillé), pour v_b (Éq. 4.14b, trait noir continu), pour u_b (Éq. 4.13, trait rouge continu). Les positions de ces maximums (données par Éq. 4.11 et Éq. 4.12 pour respectivement v_b et u_b) sont représentées par des carrés noirs le long des lignes horizontales.

En revanche, les maximums de v_b sont ceux de la fonction linéaire $2z$ plus la partie réelle de l'exponentielle. C'est seulement pour de très forts Ta qu'ils peuvent se trouver

approximativement à la position donnée dans l'équation 4.11 et être donnés par

$$v_{b,\infty,max} \approx \pm\frac{Gr}{2\sqrt{Ta}}\left[-1+\frac{3\sqrt{2}\pi}{2\,Ta^{1/4}}-\exp(-3\pi/4)\sin(\pi/4)\right] \tag{4.14a}$$

$$\approx \pm\frac{Gr}{2\sqrt{Ta}}\left[-1-\exp(-3\pi/4)\sin(\pi/4)\right]. \tag{4.14b}$$

L'expression asymptotique 4.14b est valable lorsque le terme $3\sqrt{2}\pi/(2\,Ta^{1/4})$ dans 4.14a devient négligeable devant l'unité.

Notez que $v_{b,\infty}$ est proche de la fonction linéaire $Grz/\sqrt{Ta}$ dans la majeure partie de la cavité à l'exception des bords. Ces comportements asymptotiques sont confirmés par les résultats présentés sur la figure 4.4, où les profils de vitesse dans la moitié inférieure de la cavité, normalisés par $Gr/(2\sqrt{Ta})$, sont donnés pour $Ta = 10^4$ et 10^8. Le maximum de la vitesse longitudinale normalisée est en très bon accord avec la valeur asymptotique donnée par 4.13 et sa position est très bien indiquée par 4.11, pour les deux valeurs de Ta. Cela indique que le comportement asymptotique de u_b est déjà atteint pour $Ta = 10^4$. En revanche, la vitesse transversale normalisée est loin du comportement asymptotique à $Ta = 10^4$. Pour $Ta = 10^8$, l'accord avec le comportement asymptotique est bien meilleur : profil linéaire valide dans la majeure partie de la cavité, position du maximum donnée par l'expression dans 4.11 et valeur de ce maximum donné par 4.14a. Cependant, des valeurs plus élevées de Ta, comme $Ta = 10^{12}$, sont nécessaires pour atteindre le maximum asymptotique donné par 4.14b.

4.2.2 Couches d'Ekman et vents thermiques

Les écoulements en rotation sont le siège de plusieurs phénomènes tels que les ondes inertielles ou la formation des couches limites d'Ekman. Ces couches d'Ekman résultent de l'interaction de l'écoulement tournant avec des parois perpendiculaires à l'axe de rotation. Dans les régions proches de ces parois, les effets de la rotation deviennent dominés par la viscosité et on voit alors se former une couche limite dite d'Ekman. L'estimation de cette couche peut être obtenue en cherchant l'équilibre entre les forces visqueuses et l'accélération de Coriolis : $\sqrt{Ta}\,(\vec{e}_z \times \vec{u}) \sim \Delta\vec{u}$. On en tire alors une échelle de longueur qui correspond à l'épaisseur de cette couche limite d'Ekman $\delta_E \sim Ta^{-1/4}$ (voir Cushman-Roisin (1994) par exemple). Dans notre cas, nous retrouvons bien cette loi dans les équations 4.11 et 4.12.

Une autre propriété importante des écoulements chauffés horizontalement en rotation rapide, i.e. $Ta \to \infty$, est l'existence d'un certain courant appelé vent thermique. Ce vent thermique est le résultat d'un équilibre entre les effets de la rotation (force de Coriolis) et le gradient de pression résultant du chauffage. On note aussi que ce vent thermique a la propriété de varier linéairement dans la direction de l'axe de rotation. Ceci a été aussi observé dans notre cas où la composante longitudinale $u_b(z)$ tend à devenir parfaitement nulle, tandis que la composante transverse $v_b(z)$ devient linéaire dans le cœur, à l'extérieur des couches limites d'Ekman.

Pour être plus précis, essayons de retrouver ces tendances à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement. On se place dans le cas où la rotation domine toute la dynamique ($\sqrt{Ta}\,(\vec{e}_z \times \vec{u}) \gg \vec{u}.\bar{\bar{\nabla}}\vec{u}$) et à l'extérieur des couches limites ($\Delta\vec{u} \ll 1$). On est donc dans le cadre d'une approximation géostrophique pour laquelle les profils de vitesse géostrophiques $u_b^G(z)$ et $v_b^G(z)$ sont à déterminer. L'équation du mouvement se

réduit alors à :

$$\sqrt{Ta}\,(\vec{e}_z \times \vec{u}^G) = \vec{\nabla} p^G + Gr\,\Theta^G \vec{e}_z, \tag{4.15}$$

et en éliminant la pression dans 4.15, on obtient les deux équations pour $u_b^G(z)$ et $v_b^G(z)$:

$$\frac{du_b^G}{dz} = 0, \tag{4.16a}$$

$$\frac{dv_b^G}{dz} = \frac{Gr}{\sqrt{Ta}} \frac{\partial \Theta_b^G}{\partial x} = \frac{Gr}{\sqrt{Ta}}, \tag{4.16b}$$

car $\Theta_b^G(x,z) = x + T_b^G(z)$. En intégrant 4.16a et 4.16b, on obtient immédiatement

$$u_b^G(z) = 0, \tag{4.17a}$$

$$v_b^G(z) = \frac{Gr}{\sqrt{Ta}} z, \tag{4.17b}$$

ce qui correspond aux résultats asymptotiques obtenus précédemment pour $Ta \to \infty$ et aux tendances observées sur la figure 4.4b.

4.2.3 Profils de température

Les profils de température dans la direction verticale, $T_b(z)$, sont obtenus par intégration de l'équation de conservation de l'énergie 4.2, avec l'utilisation de l'expression 4.5a pour $u_b(z)$. On a :

$$T_b(z) = -\frac{Gr\,Pr}{2Ta}\left(\frac{\alpha \sinh\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right)\cos\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right) + \beta \cosh\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right)\sin\left(\frac{Ta^{1/4}}{\sqrt{2}}z\right)}{\alpha^2+\beta^2}\right) + C_1 z + C_2. \tag{4.18}$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 sont obtenues par application des conditions aux limites. Pour des parois parfaitement isolantes et conductrices, on obtient respectivement

$$C_1^{Ad} = \frac{Pr\,Gr}{2\sqrt{2}\,Ta^{3/4}} \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[(\alpha+\beta)\cosh\left(\frac{Ta^{1/4}}{2\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{Ta^{1/4}}{2\sqrt{2}}\right)\right] - \frac{Pr\,Gr}{2\sqrt{2}\,Ta^{3/4}} \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[(\alpha-\beta)\sinh\left(\frac{Ta^{1/4}}{2\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{Ta^{1/4}}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

et

$$C_1^{Cd} = \frac{Gr\,Pr}{Ta}.$$

Notez que la constante C_2 est nulle dans les deux cas en raison de la symétrie du problème. Le développement en série de Taylor de l'équation 4.18 quand Ta tend vers zéro donne

$$T_b^{Ad}(z) = Gr\,Pr\left(\frac{z^5}{120} - \frac{z^3}{144} + \frac{z}{384}\right) + \mathscr{O}(Ta)$$

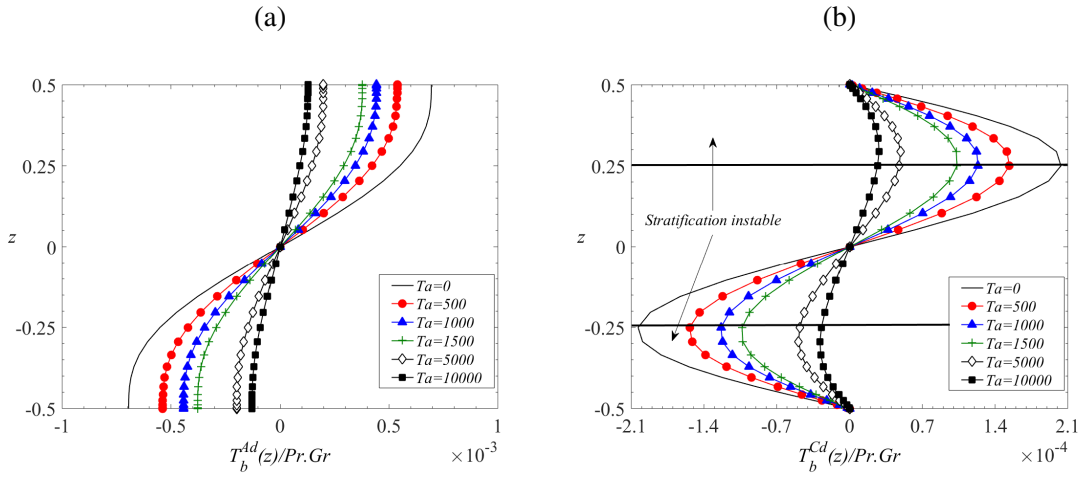


FIGURE 4.5 – Effet du nombre de Taylor Ta sur le profil vertical de la température $T_b(z)/(GrPr)$: (a) Parois thermiquement isolantes ; (b) Parois thermiquement conductrices.

et

$$T_b^{Cd}(z) = GrPr\left(\frac{z^5}{120} - \frac{z^3}{144} + \frac{7z}{5760}\right) + \mathscr{O}(Ta)$$

pour respectivement des parois adiabatiques et conductrices. Pour $Ta \to 0$, nous obtenons alors les profils donnés par Hart (1972) dans le cas sans rotation.

L'effet de la rotation sur les profils de température est indiqué sur la figure 4.5 pour les deux types de conditions aux limites thermiques (parois isolantes, Fig. 4.5a, ou conductrices, Fig. 4.5b). Nous observons une suppression progressive du gradient de température vertical lorsque la rotation est augmentée : ceci est lié à la diminution de la composante de vitesse longitudinale $u_b(z)$ responsable de ce gradient de température. Enfin, il convient de noter l'existence de régions de stratification thermique instables près des bords dans le cas de conditions aux limites conductrices, qui seront à l'origine des instabilités thermiques (modes de Rayleigh).

Notez enfin que pour tous ces profils stationnaires verticaux de base (Éqs. 4.5a et 4.5b pour les vitesses et 4.18 pour la température), les nombres de Grashof et de Prandtl apparaissent uniquement comme des facteurs multiplicatifs, ce qui fait que les quantités $(u_b(z), v_b(z))/Gr$ et $T_b(z)/(GrPr)$ ne dépendent que du nombre de Taylor.

4.3 Analyse de stabilité linéaire

L'analyse de la stabilité linéaire de l'écoulement de base a été réalisée à l'aide d'une méthode de collocation spectrale. La solution générale du problème est exprimée sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_b + \vec{u}'$, $\Theta = \Theta_b + \Theta'$ et $p = p_b + p'$, où $(\vec{u}', \Theta', p')$ sont des perturbations infinitésimales. Cette solution est introduite dans le système d'équations 2.10a, 2.10b et 2.10c et après linéarisation autour de la solution de base (termes du second ordre négligés), nous obtenons le système qui gouverne ces perturbations :

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \vec{u}'.\bar{\bar{\nabla}}\vec{u}_b + \vec{u}_b.\bar{\bar{\nabla}}\vec{u}' + \sqrt{Ta}\,(\vec{e}_z \times \vec{u}') = -\vec{\nabla}p' + \Delta\vec{u}' + Gr\,\Theta'\,\vec{e}_z, \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial t} + \vec{u}_b.\vec{\nabla}\Theta' + \vec{u}'.\vec{\nabla}\Theta_b = \frac{1}{Pr}\Delta\Theta', \tag{4.20}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{u}' = 0. \tag{4.21}$$

Dans le plan horizontal supposé infini, les perturbations peuvent être exprimées en tant que modes normaux dans les deux directions x et y,

$$\begin{Bmatrix} \vec{u}' \\ \Theta' \\ p' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\vec{u}}(z) \\ \hat{\Theta}(z) \\ \hat{p}(z) \end{Bmatrix} e^{\sigma t + i(k_x x + k_y y)}, \tag{4.22}$$

où k_x et k_y sont les nombres d'onde respectivement dans les directions longitudinale, x et transverse, y, et $\sigma = \sigma_r + i\,\sigma_i$ est une valeur propre complexe telle que σ_r est le taux de croissance de la perturbation et σ_i sa pulsation propre. Seules les conditions aux limites à $z = \pm 1/2$ sont nécessaires pour résoudre ce système et elles sont données par $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0$ et par $\hat{\Theta} = 0$ pour des bords parfaitement conducteurs ou $d\hat{\Theta}/dz = 0$ pour des bords parfaitement isolants. Un problème aux valeurs propres généralisé est alors obtenu : $LX = \sigma MX$, où $X = \{\hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{p}(z), \hat{\Theta}(z)\}^T$, L est un opérateur linéaire dépendant de k_x, k_y, Pr, Gr et Ta, et M est un opérateur linéaire constant. Ce problème aux valeurs propres est résolu numériquement en utilisant une méthode de collocation de Chebychev. A partir des courbes de stabilité marginale $Gr_0(Pr, Ta, k_x, k_y)$ (valeurs de Gr pour lesquelles une valeur propre a une partie réelle égale à zéro alors que toutes les autres valeurs propres ont des parties réelles négatives), le nombre de Grashof critique est obtenu après minimisation le long des nombres d'onde k_x et k_y, i.e. $Gr_c = min_{(k_x,k_y)\in\mathbb{R}^2}\,[Gr_0(Pr, Ta, k_x, k_y)]$. Notons finalement que les seuils critiques ont été calculés par discrétisation du domaine physique en utilisant 31 points de collocation, ce qui est suffisant pour une détermination précise des seuils et de leurs caractéristiques.

La procédure de minimisation est effectuée à l'aide de la méthode du simplexe de Nelder-Mead décrite par Lagarias *et al.* (1998). Cette technique localise le minimum local d'une fonction scalaire de plusieurs variables à partir d'une première estimation de ces variables (ici les nombres d'ondes k_x et k_y). Le simplexe utilisé dans la méthode de Nelder-Mead pour une fonction à deux variables (k_x et k_y) est un triangle pour lequel les valeurs de la fonction à ses trois sommets sont comparées. Le pire sommet (pour lequel la valeur de la fonction est la plus grande) est ensuite rejeté et remplacé par un nouveau sommet. L'objectif est alors de réduire la taille du triangle jusqu'à ce que le critère de convergence soit atteint. Pour plus de détails sur la méthode et son utilisation pratique, le lecteur peut consulter Mathews & Fink (1999). La minimisation s'effectue le long de k_x en fixant $k_y = 0$ pour les modes transversaux, le long de k_y avec $k_x = 0$ pour les modes longitudinaux et finalement, le long de la surface (k_x, k_y) pour les modes obliques. Enfin, ces modes sont soit stationnaires, soit oscillatoires, selon que la partie imaginaire de la valeur propre est respectivement nulle ou non-nulle.

La stabilité de l'écoulement de base a d'abord été étudiée dans le cas sans rotation ($Ta = 0$) afin de valider nos résultats par comparaison avec ceux de Laure (1987). Les nombres de Grashof critiques Gr_c correspondant à l'apparition du premier mode instable pour certains nombres de Prandtl Pr et pour $Ta = 0$ sont donnés dans le tableau 4.1. Un bon accord avec les résultats de Laure (1987) est trouvé. Notez que, dans le cas sans rotation, il a été montré que les modes critiques sont soit des modes transversaux ($k_y = 0$), soit des modes longitudinaux ($k_x = 0$), de sorte que les modes obliques ne sont jamais les plus instables (voir Laure & Roux (1989) ou Laure (1987), par exemple). Cela a également été vérifié lors de cette étude.

Pr	Gr_c	$\sigma_{i,c}$	Laure (1987)
0,001	7944,26	0	7942
0,01	8165,19	0	8168
0,05	8446,33	36,56	8445
0,1	7342,14	38,96	7342

TABLE 4.1 – Seuils critiques Gr_c correspondant au cas sans rotation ($Ta = 0$) avec des parois thermiquement isolantes.

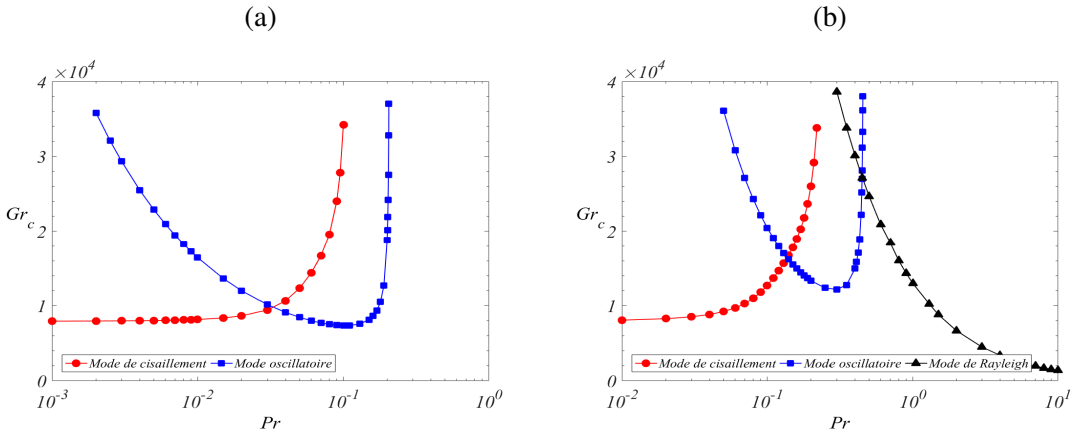


FIGURE 4.6 – Seuils d'instabilité Gr_c en fonction de Pr pour les modes dominants à $Ta = 0$: (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices.

À ce stade, il convient de rappeler les principales instabilités existant pour $Ta = 0$ et de les localiser dans l'espace des paramètres (Gr_c, Pr). Les seuils critiques de ces instabilités sont donnés en fonction de Pr sur la figure 4.6, à la fois pour les parois thermiquement isolantes (Fig. 4.6a) et conductrices (Fig. 4.6b). On trouve un mode transversal stationnaire de cisaillement pour les valeurs les plus faibles de Pr : les seuils correspondants restent pratiquement constants lorsque le nombre de Prandtl est augmenté jusqu'à des valeurs comprises entre $0,01$ et $0,1$ (domaine asymptotique des faibles Pr), avant une phase de croissance assez rapide. On trouve ensuite un mode longitudinal oscillatoire pour des valeurs plus grandes de Pr : la courbe critique décroît au fur et à mesure que Pr augmente, croise la courbe critique du mode de cisaillement puis atteint un minimum avant de passer par une phase de croissance rapide. Ces deux modes sont obtenus pour les deux conditions aux limites thermiques, avec uniquement des changements dans la variation exacte des courbes critiques avec Pr. En revanche, les modes de Rayleigh longitudinaux stationnaires ne sont obtenus que pour les parois thermiquement conductrices en raison de la présence d'une stratification instable le long des bords (voir Fig. 4.5b) : dans la gamme de Pr étudiée ($Pr \leqslant 10$), la courbe critique diminue lorsque le nombre de Prandtl est augmenté, de sorte que cette instabilité devient dominante pour $Pr > 0,45$.

Lorsque la rotation est appliquée, elle devrait avoir une influence sur les modes critiques, sur les seuils, mais aussi sur l'orientation spatiale de ces modes. Les seuils des modes obliques doivent donc être recherchés et comparés à ceux obtenus pour les orientations transversales et longitudinales usuelles, afin de déterminer les véritables seuils critiques. Ces comparaisons sont présentées sur les figures 4.7a et 4.7b, où les variations des seuils critiques de stabilité en fonction du nombre de Taylor Ta sont données pour

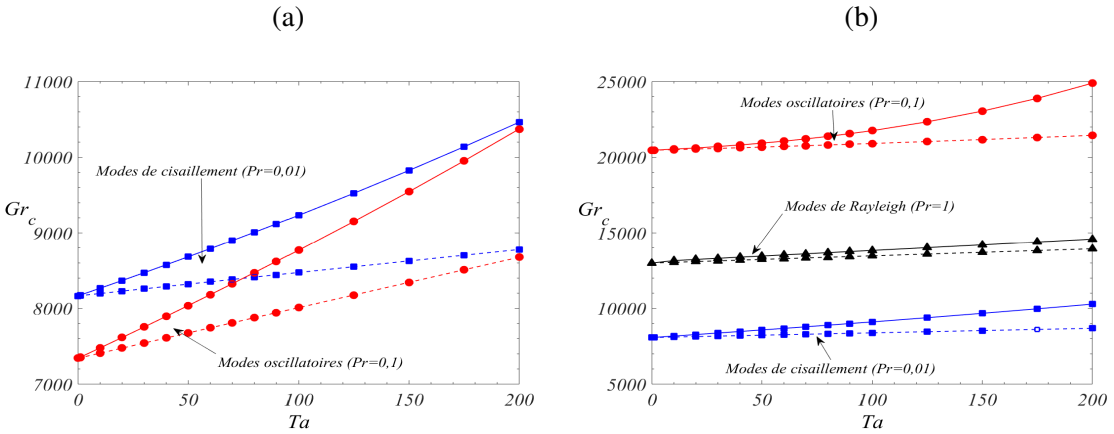


FIGURE 4.7 – Variation des seuils critiques Gr_c en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents types d'instabilités : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices. Les modes obliques sont donnés en traits pointillés tandis que les modes transversaux et longitudinaux sont donnés en traits pleins.

	Caractéristiques	Gr_c	$k_{x,c}$	$k_{y,c}$	$\sigma_{i,c}$
Parois isolantes					
$Ta = 0$	M.St.T. $(Pr = 0,01)$	8165,19	2,68	0	0
	M.Osc.L. $(Pr = 0,1)$	7342,14	0	1,02	38,96
$Ta = 100$	M.St.T. $(Pr = 0,01)$	9234,09	2,61	0	0
	M.St.Ob. $(Pr = 0,01)$	8474,03	2,52	-0,97	0
	M.Osc.L. $(Pr = 0,1)$	8770,32	0	1.07	46.65
	M.Osc.Ob. $(Pr = 0,1)$	8009,86	0,20	1,04	42,19
Parois conductrices					
$Ta = 0$	M.St.T. $(Pr = 0,01)$	8076,92	2,68	0	0
	M.Osc.L. $(Pr = 0,1)$	20466,78	0	2,01	126,46
	M.Ra.L. $(Pr = 0,7)$	18152,24	0	8,23	0
$Ta = 100$	M.St.T. $(Pr = 0,01)$	9106,81	2,61	0	0
	M.St.Ob. $(Pr = 0,01)$	8383,69	2,52	-0,98	0
	M.Osc.L. $(Pr = 0,1)$	21759,98	0	1,84	126,34
	M.Osc.Ob. $(Pr = 0,1)$	20911,98	0.23	1,97	125,46
	M.Ra.L. $(Pr = 0,7)$	19405,55	0	8,34	215,05
	M.Ra.Ob. $(Pr = 0,7)$	18794,52	1,82	8,01	0

TABLE 4.2 – Seuils critiques obtenus pour la convection sans rotation ($Ta = 0$) et la convection soumise à la rotation ($Ta = 100$). Ici, M.St.T., M.Osc.L., M.Ra.L., M.St.Ob., M.Osc.Ob., M.Ra.Ob. représentent respectivement les Modes Stationnaires Transversaux (modes de cisaillement), Oscillatoires Longitudinaux, de Rayleigh Longitudinaux, Stationnaires Obliques, Oscillatoires Obliques et Rayleigh Obliques.

différents types d'instabilités et différentes conditions aux limites thermiques. Quelques valeurs numériques des seuils d'instabilité sont également données dans le tableau 4.2.

Nous pouvons clairement observer que, lorsque le nombre de Taylor est augmenté, les seuils de ces instabilités sont décalés vers des valeurs plus élevées pour tous les cas, ce qui indique un effet de stabilisation. Cet effet de stabilisation est toutefois plus important dans le cas des orientations fixes (transversale ou longitudinale, en fonction de l'instabilité), indiquant ainsi que, dans tous les cas, les modes obliques deviennent les instabilités dominantes lors de l'application de la rotation. Notez que l'instabilité de Rayleigh peut changer de comportement temporel de stationnaire à oscillatoire dans le cas d'une rotation, tandis que les autres instabilités conservent leur comportement temporel habituel.

4.3.1 Instabilité de cisaillement

Nous étudions d'abord l'effet de la rotation sur les seuils de l'instabilité de cisaillement. L'évolution avec Ta du nombre de Grashof critique Gr_c correspondant aux modes obliques stationnaires est tracée sur la figure 4.8. Trois valeurs du nombre de Prandtl Pr sont considérées (0,01, 0,05 et 0,08) et les résultats sont donnés pour les parois adiabatiques (Fig. 4.8a) et conductrices (Fig. 4.8b).

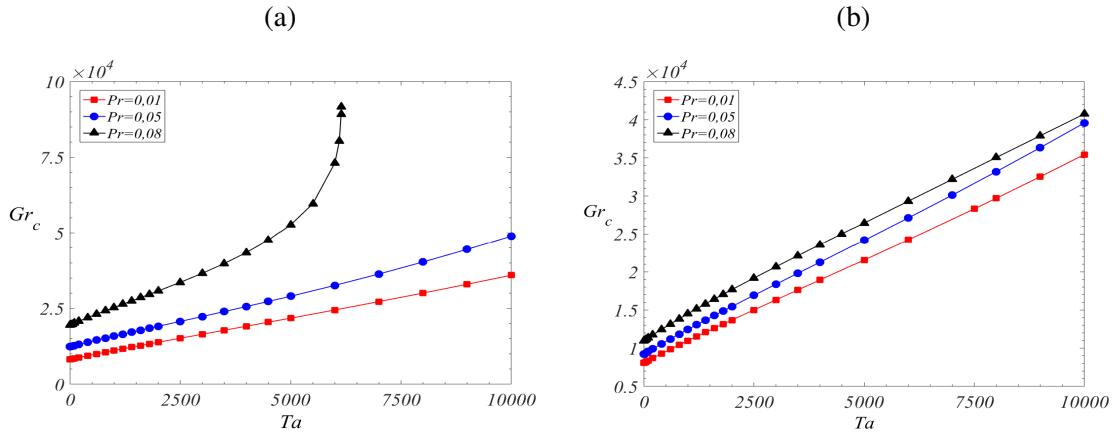


FIGURE 4.8 – Variation des seuils Gr_c correspondant à l'instabilité stationnaire de cisaillement en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices.

Dans l'intervalle de Ta étudié ($Ta \leqslant 10000$), pour les deux conditions aux limites thermiques, les seuils critiques augmentent linéairement avec Ta pour les plus petites valeurs du nombre de Prandtl ($Pr = 0,01$ et $0,05$ pour les parois isolantes, $Pr = 0,01$, $0,05$ et $0,08$ pour les parois conductrices) dans la plage asymptotique des faibles Pr (domaine du seuil constant sur la figure 4.6). En revanche, à $Pr = 0,08$ pour les parois isolantes (Fig. 4.8a), nous observons une variation linéaire initiale des seuils avec Ta, suivie d'une augmentation rapide. Des calculs supplémentaires effectués pour $Pr = 0,09$ et $Pr = 0,1$ dans le cas de bords isolants montrent que la plage de variation linéaire de Ta se rétrécit lorsque Pr est augmenté, indiquant une stabilisation plus efficace de ces modes de cisaillement par la rotation.

L'effet de la rotation sur le vecteur d'onde critique $\vec{k}_c$ peut être décrit à l'aide de la variation avec Ta de sa norme $|\vec{k}_c| = \left(k_{x,c}^2 + k_{y,c}^2\right)^{1/2}$ et de son orientation dans le plan xy. En pratique, nous suivons la normale au vecteur d'onde (c'est-à-dire l'axe des rouleaux contrarotatifs) par rapport à l'axe x et nous définissons l'angle $\phi = \arctan\left(-k_{x,c}/k_{y,c}\right)$ (ϕ est égal à 90° pour les modes transversaux et à 0 ° pour les modes longitudinaux). L'action de la rotation sur la norme du nombre d'onde est indiquée sur les figures 4.9a (bords

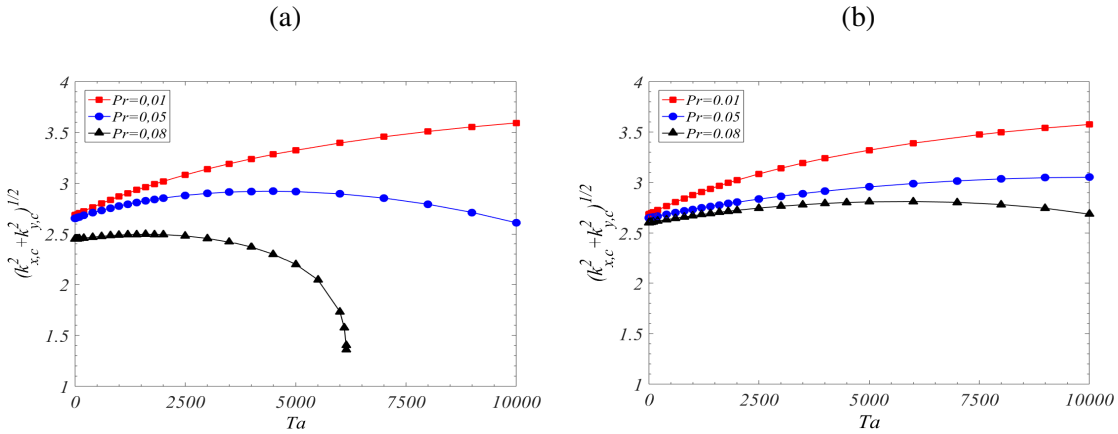


FIGURE 4.9 – Variation de la norme du vecteur d'onde $|\vec{k}_c|$ correspondant à l'instabilité stationnaire de cisaillement en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices.

isolants) et 4.9b (bords conducteurs) et son action sur ϕ sur la figure 4.10 (bords conducteurs). Pour $Ta = 0$, le vecteur d'onde $\vec{k}_c$ pour les modes de cisaillement transversaux et stationnaires, est défini uniquement par la composante $k_{x,c}$ et $\phi = 90°$. Lorsque le nombre de Taylor est augmenté, $\vec{k}_c$ commence à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre, créant ainsi une composante transversale négative $k_{y,c}$ (voir aussi Tab. 4.2). Sa norme $|\vec{k}_c|$ croit avec Ta pour les plus petites valeurs de Pr telles que $Pr = 0,01$. Cette phase de croissance est plus courte et plus faible et est suivie par une phase de décroissance pour des valeurs plus grandes de Pr, cette diminution devenant très forte dans le cas conducteur pour $Pr = 0,08$.

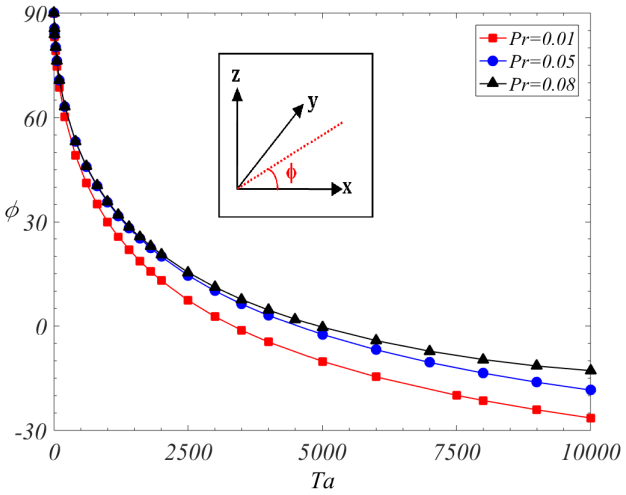


FIGURE 4.10 – Variation de l'angle ϕ (l'angle que fait l'axe des rouleaux dans le plan xy) correspondant à l'instabilité stationnaire de cisaillement en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr (parois conductrices).

La rotation du vecteur d'onde dans le sens horaire est bien décrite sur la figure 4.10 où la variation de ϕ, l'angle de l'axe des rouleaux par rapport à l'axe x, en fonction du nombre de Taylor est tracée. Sur cette figure, nous ne montrons que le cas des parois

thermiquement conductrices puisque la variation observée dans le cas des parois isolantes est assez semblable. L'angle ϕ évolue très rapidement de $\phi = 90°$ pour $Ta = 0$ à $\phi = 0°$ pour des valeurs modérées de Ta dépendant de Pr ($Ta \approx 3250$ pour $Pr = 0,08$, $Ta \approx 4500$ pour $Pr = 0,05$ et $Ta \approx 5000$ pour $Pr = 0,01$), indiquant une forte rotation des modes de cisaillement sous l'effet de la force de Coriolis. La variation de ϕ est très forte à petits nombres de Taylor Ta, dans un domaine de forts changements pour l'écoulement de base en raison de la création de la composante de vitesse transversale résultant de la rotation appliquée. La rotation du vecteur d'onde continue plus lentement au-delà de l'orientation longitudinale des rouleaux avec des valeurs négatives de ϕ. Notons que la diminution de ϕ avec Ta ne dépend pas beaucoup de Pr : elle est légèrement moins forte lorsque Pr est augmenté. Une telle déviation du vecteur d'onde a déjà été mentionnée par Chandrasekhar (1961) dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard en rotation. Une illustration du changement du vecteur propre marginal (la perturbation) avec la rotation appliquée est donnée sur la figure 4.11 : la modification de l'orientation du rouleau marginal y est bien décrite. La structure du rouleau marginal a également changé : les rouleaux inclinés obtenus pour $Ta = 0$ deviennent des rouleaux plutôt carrés à $Ta = 1000$, en relation avec la vitesse décroissante de l'écoulement de base lors de l'application de la rotation.

(a) (b)

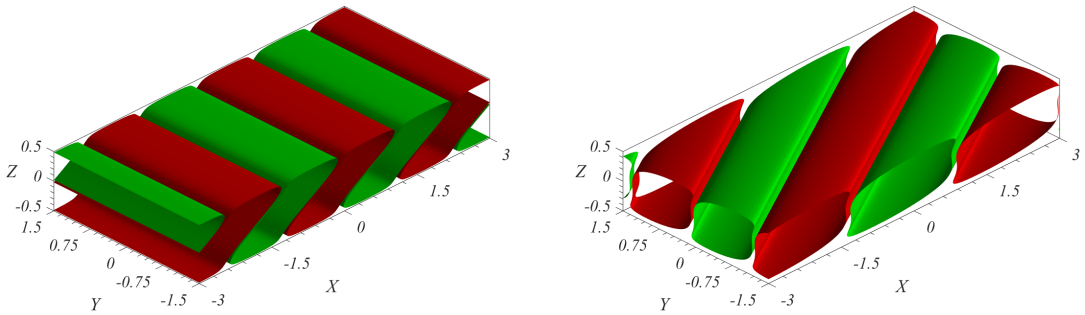


FIGURE 4.11 – Structure du vecteur propre pour (a) $Ta = 0$ et (b) $Ta = 1000$ pour l'instabilité de cisaillement à l'état marginal ($Pr = 0,01$, parois thermiquement conductrices). Les iso-surfaces correspondent à une amplitude donnée de la perturbation de température : valeur positive en vert et valeur négative en rouge.

4.3.2 Instabilité thermique de Rayleigh

Dans le cas d'instabilités thermiques apparaissant dans le cas des parois thermiquement conductrices, l'étude a été réalisée pour deux valeurs du nombre de Prandtl : $Pr = 0,7$ et $Pr = 7$. Ces deux valeurs correspondent respectivement aux valeurs typiques pour l'air et l'eau. Gershuni *et al.* (1992) ont signalé l'existence de deux modes pour cette instabilité, un mode longitudinal stationnaire et un mode transversal oscillatoire. Ils ont montré que le mode longitudinal est le plus instable. Dans ce travail, dans différents cas, nous avons déterminé les deux seuils Gr_c^L (mode longitudinal stationnaire) et Gr_c^T (mode transverse oscillatoire) et nous avons toujours constaté que $Gr_c^T > Gr_c^L$, ce qui est cohérent avec le travail de Gershuni *et al.* (1992).

Nous attirons tout d'abord l'attention sur le fait que le seuil critique de cette instabilité est très difficile à localiser lorsque la rotation est introduite. La raison principale en est que le mode stationnaire est localisé dans une région très mince de l'espace des nombres d'onde, dans une vaste zone où le mode principal est oscillatoire [1]. Pour $Ta = 0$, le mode stationnaire est longitudinal et peut être trouvé assez facilement en fixant k_x à 0 et en minimisant suivant l'axe k_y (Fig. 4.12a). En revanche, sous l'influence de la rotation, le mode stationnaire devient oblique et doit être trouvé dans l'espace (k_x, k_y), ce qui devient de plus en plus difficile à mesure que Ta augmente (Figs. 4.12b & 4.12c). En effet, la procédure de minimisation trouvera plus facilement le minimum pour le mode oscillatoire qui n'est pas dominant, mais qui possède un large bassin d'existence dans l'espace (k_x, k_y), tel que nous le montrons sur la figure 4.12.

Cette situation est plus clairement décrite sur la figure 4.12 où les seuils de ces instabilités, ainsi que les fréquences angulaires correspondantes, sont donnés dans l'espace des nombres d'onde (k_x, k_y) pour $Pr = 0,7$ et trois valeurs du nombre de Taylor, $Ta = 0$ (Fig. 4.12a), $Ta = 1$ (Fig. 4.12b) et $Ta = 500$ (Fig. 4.12c). Nous pouvons d'abord voir la région très localisée correspondant au mode stationnaire autour de $\sigma_{i0} = 0$. Cette région, initialement allongée le long de l'axe k_y pour $Ta = 0$, est déplacée vers les k_x positifs et inclinée vers la droite lorsque la rotation est appliquée. Nous pouvons également voir le grand bassin d'existence du mode oscillatoire. Étant à l'origine symétrique par rapport à l'axe k_y en $k_x = 0$ pour $Ta = 0$, ce bassin est également déplacé vers les k_x positifs et incliné vers la droite.

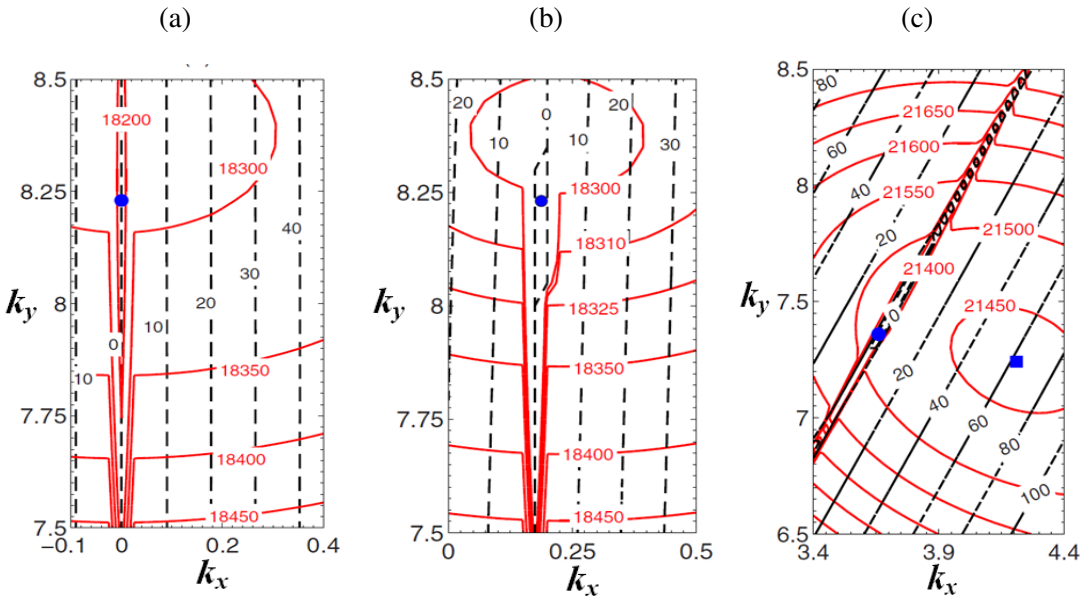


FIGURE 4.12 – Iso-valeurs des seuils Gr_0 pour l'instabilité de Rayleigh (traits continus rouges) et de la fréquence angulaire correspondante $\sigma_{i,0}$ (traits discontinus noirs) dans l'espace des nombres d'onde (k_x, k_y) pour $Pr = 0,7$: (a) $Ta = 0$; (b) $Ta = 1$; (c) $Ta = 500$. Les points bleus indiquent la position dans l'espace (k_x, k_y) des seuils stationnaires critiques (cercles) et, en (c), du seuil oscillatoire (carré).

Afin de mieux comprendre comment les modes stationnaire et oscillatoire sont connec-

1. Attention ! Ce mode oscillatoire n'est pas celui qui a été observé par Gershuni *et al.* (1992), i.e. l'instabilité oscillatoire transversale. En fait, nous allons voir dans la suite, que ce nouveau mode oscillatoire vient d'une collision de deux valeurs propres et qu'il est le mode dominant uniquement dans le cas avec rotation.

tés, les seuils marginaux (pour lesquels $\sigma_r = 0$) et les fréquences angulaires correspondantes sont maintenant tracés au voisinage de leurs valeurs critiques en fonction de k_x à k_y constant sur la figure 4.13. Les seuils correspondant aux deux valeurs propres principales (celles qui possèdent la partie réelle la plus grande) sont tracés dans le cas de $Pr = 0,7$ pour $Ta = 0$ (Fig. 4.13a) et $Ta = 500$ (Fig. 4.13b). Pour les deux valeurs de Ta, nous voyons que le mode stationnaire critique est créé localement à partir du mode oscillatoire. Plus précisément, les deux valeurs propres complexes conjuguées associées au mode oscillatoire fusionnent sur l'axe réel (leur fréquence angulaire tombe à zéro), puis se divisent, dans un intervalle très étroit de k_x, en deux valeurs propres réelles associées à deux modes stationnaires, l'un de ces modes étant le mode critique (à l'inverse, nous pouvons aussi définir cet événement comme une collision des valeurs propres stationnaires). Les modes de Rayleigh stationnaire et oscillatoire sont donc étroitement liés, l'un venant de l'autre.

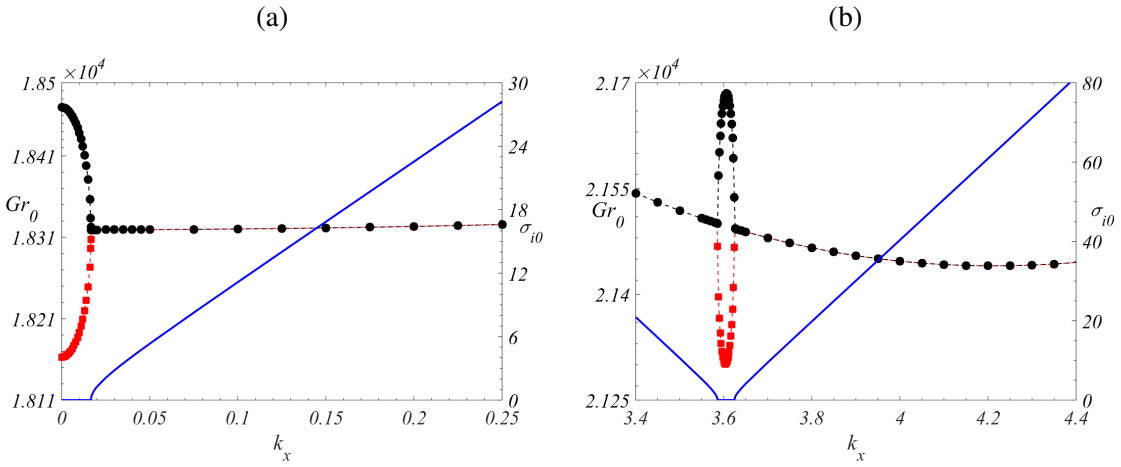


FIGURE 4.13 – Seuils marginaux Gr_0 de l'instabilité de Rayleigh (traits discontinus rouge et noir) et leur pulsation propre σ_{i0} (traits bleus continus) en fonction du nombre d'onde k_x pour $Pr = 0,7$. Les seuils sont donnés pour les premières (traits discontinus avec carrés rouges) et deuxièmes (traits discontinus avec cercles noirs) valeurs propres les plus instables : (a) $k_y = 8$ et $Ta = 0$; (b) $k_y = 7,25$ et $Ta = 500$.

Les figures 4.12 et 4.13 peuvent également donner des indications sur les différents seuils et les difficultés rencontrées lors de leur détermination. Pour $Ta = 0$ (Figs. 4.12a et 4.13a), l'intervalle k_x du mode stationnaire est situé au minimum des seuils oscillatoires dans l'espace des nombres d'onde. Pour $Ta = 0$ (et aussi pour les faibles valeurs de Ta), le large bassin d'attraction du mode oscillatoire permettra donc à la procédure de minimisation de trouver facilement le seuil du mode critique stationnaire. En revanche, pour les grandes valeurs de Ta telle que $Ta = 500$ (Figs. 4.12c et 4.13b), les deux valeurs minimales des seuils oscillatoire et stationnaire ont des positions différentes dans l'espace (k_x, k_y). Grâce à son large bassin d'attraction, le seuil critique du mode oscillatoire sera trouvé facilement par la minimisation, même s'il n'est pas le mode le plus critique. Des stratégies sont alors nécessaires pour trouver le seuil stationnaire critique. Nous avons utilisé le fait que le seuil stationnaire critique n'est pas très éloigné du seuil oscillatoire critique dans l'espace (k_x, k_y) : nous calculons les seuils d'instabilité dans un domaine

(k_x, k_y) proche du seuil oscillatoire critique jusqu'à la localisation de l'endroit où la pulsation devient nulle. Les nombres d'onde ainsi obtenus sont alors utilisés pour initialiser une procédure de minimisation qui permet d'obtenir le seuil de l'instabilité stationnaire. Notons enfin que les différentes localisations des minimums pour les seuils stationnaire et oscillatoire dans l'espace (k_x, k_y) (comme observé pour $Ta = 500$) pourraient permettre à l'instabilité oscillatoire de devenir finalement dominante lorsque Ta est encore augmenté.

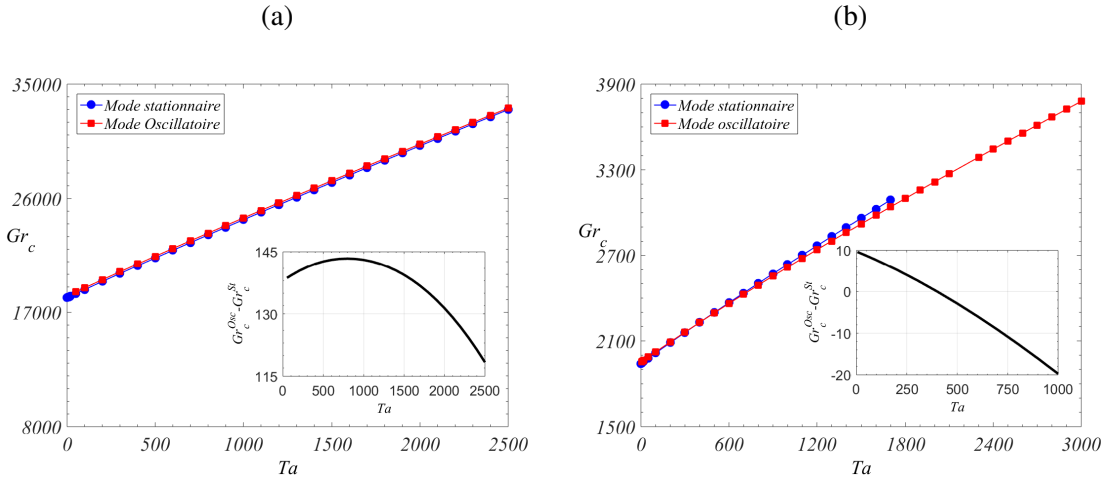


FIGURE 4.14 – Variation des seuils Gr_c correspondant à l'instabilité thermique de Rayleigh en fonction du nombre de Taylor Ta pour (a) $Pr = 0,7$ et (b) $Pr = 7$. Les seuils des modes stationnaire et oscillatoire sont présentés. Les encarts donnant $(Gr_c^{Osc} - Gr_c^{St})$ mettent en évidence le croisement possible des courbes critiques, croisement effectivement observé pour $Pr = 7$.

La figure 4.14 illustre la dépendance, en fonction de Ta, des seuils de l'instabilité de Rayleigh. Ces seuils, correspondant aux instabilités stationnaire et oscillatoire, sont donnés pour $Pr = 0,7$ (Fig. 4.14a) et $Pr = 7$ (Fig. 4.14b). Nous voyons que, dans la gamme de Ta étudiée, Gr_c croît dans tous les cas presque linéairement en fonction du nombre de Taylor. Cela indique une stabilisation de l'écoulement de base due à la rotation. De plus, les seuils pour les instabilités stationnaire et oscillatoire restent très proches les uns des autres. Pour $Pr = 0,7$ (Fig. 4.14a), on observe cependant que le mode stationnaire reste le mode dominant dans la gamme de Ta étudiée. En revanche, pour $Pr = 7$ (Fig. 4.14b), le mode stationnaire n'est dominant que pour $Ta \lesssim 400$. Au-delà de cette valeur, en raison du croisement des courbes critiques de stabilité (voir encart), le mode oscillatoire devient dominant. Notez que, pour $Pr = 0,7$, une extrapolation des deux courbes critiques pour des valeurs plus fortes de Ta indique également un croisement possible des courbes de stabilité des deux modes pour $Ta \approx 4400$: au-delà de cette valeur, le mode oscillatoire devient dominant.

La norme du vecteur d'onde critique associée à ces instabilités, ainsi que la fréquence angulaire critique du mode oscillatoire obtenu pour $Pr = 7$, sont données respectivement sur les figures 4.15a et 4.15b. Pour $Pr = 0,7$, le nombre d'onde diminue légèrement, atteint un minimum pour $Ta \approx 300$ et commence à croître, atteignant rapidement une loi linéaire. En revanche, pour $Pr = 7$, les nombres d'ondes correspondant aux instabilités stationnaire et oscillatoire croissent linéairement par rapport au nombre de Taylor et la

fréquence angulaire augmente comme une loi de puissance du type CTa^n avec $C = 1,33$ et $n = 0,47$.

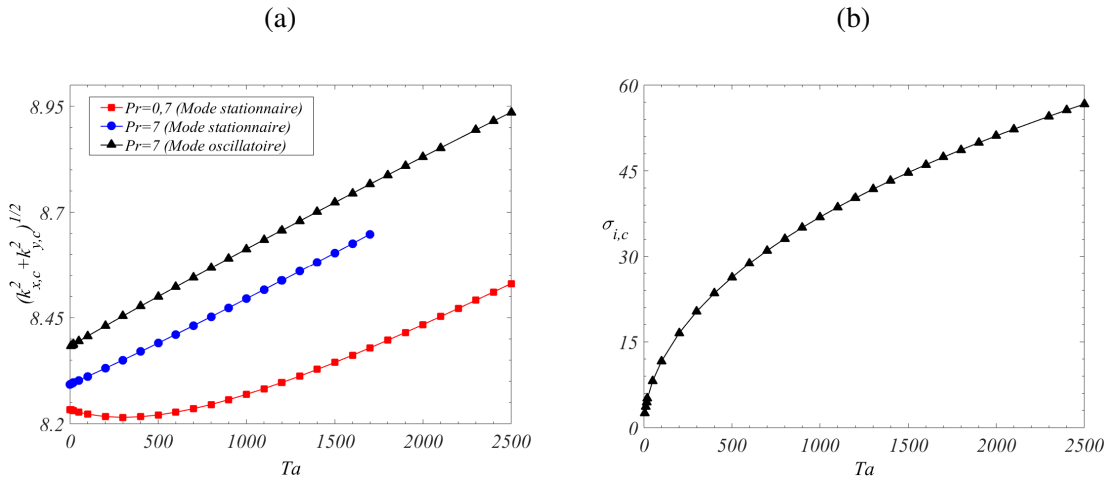


FIGURE 4.15 – Caractéristiques critiques des instabilités thermiques de Rayleigh en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) norme du vecteur d'onde critique $|\vec{k}_c|$; (b) pulsation critique $\sigma_{i,c}$ du mode oscillatoire à $Pr = 7$.

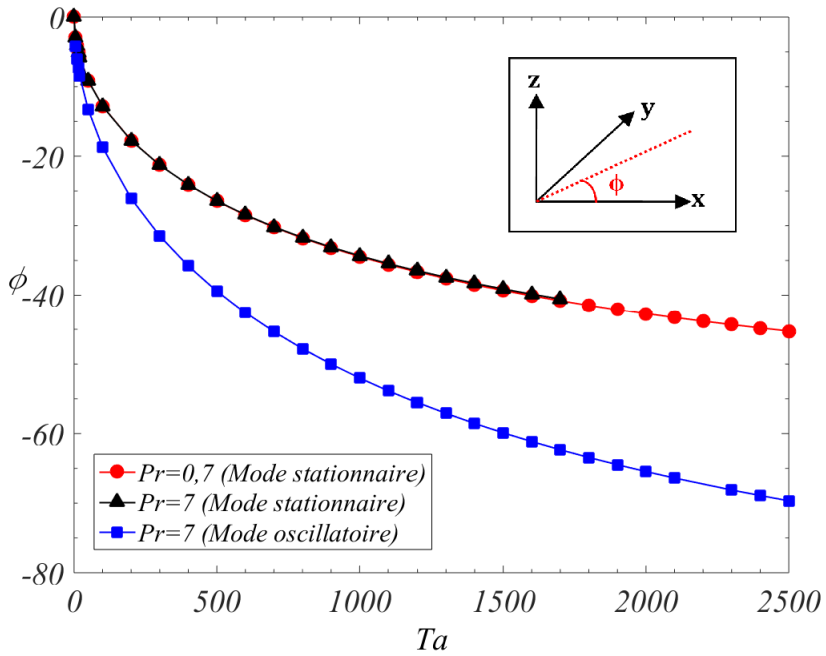


FIGURE 4.16 – Variation de l'angle ϕ (l'angle que fait l'axe des rouleaux dans le plan xy) correspondant à l'instabilité thermique de Rayleigh en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr.

La déviation des rouleaux critiques lorsque le nombre de Taylor Ta est augmenté est illustrée sur la figure 4.16. Pour $Ta = 0$, les modes sont longitudinaux et l'angle ϕ entre l'axe des rouleaux et l'axe $0x$ est donc égal à zéro. Lorsque Ta est augmenté, les modes deviennent des modes obliques, avec une déviation dans le sens horaire. La déviation est

plus faible que pour les modes transversaux de l'instabilité de cisaillement. Elle semble être la même pour $Pr = 0,7$ et $Pr = 7$ dans le cas de l'instabilité stationnaire, mais elle est plus accentuée pour l'instabilité oscillatoire. La figure 4.17 donne une illustration du changement d'orientation des rouleaux marginaux lorsque la rotation est appliquée. Nous pouvons noter que, dans les deux cas (sans rotation ou avec rotation), les rouleaux marginaux sont localisés dans le voisinage des parois conductrices supérieure et inférieure de la cavité, c'est-à-dire dans les deux zones où le gradient de température de base est déstabilisant, tel que le montre la figure 4.5b.

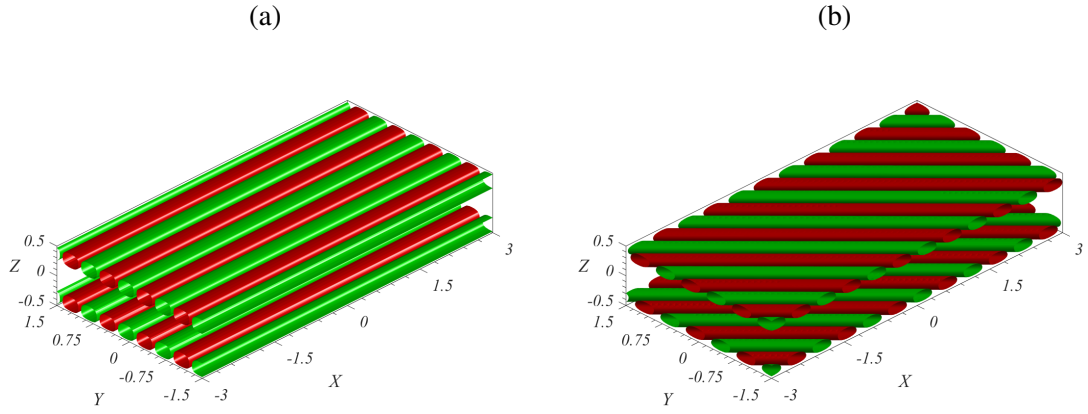


FIGURE 4.17 – Structure du vecteur propre pour (a) $Ta = 0$ et (b) $Ta = 2500$ pour l'instabilité de Rayleigh à l'état marginal ($Pr = 0,7$, parois thermiquement conductrices). Les iso-surfaces correspondent à une amplitude donnée de la perturbation de température : valeur positive en vert et valeur négative en rouge.

4.3.3 Instabilité oscillatoire

L'influence de la rotation sur l'instabilité oscillatoire a été étudiée pour les deux conditions aux limites thermiques et, dans chaque cas, pour différentes valeurs du nombre de Prandtl. Les courbes de stabilité montrant les seuils critiques en fonction du nombre de Taylor Ta sont données sur la figure 4.18. Pour les deux types de conditions aux limites, nous observons une stabilisation du mode oscillatoire lorsque la rotation est appliquée. Pour des parois thermiquement isolantes (Fig. 4.18a), on observe deux régimes en fonction du nombre de Taylor : un premier régime à petit Ta où la stabilisation est modérée et les seuils évoluent presque linéairement avec Ta et un autre régime pour les grands Ta avec une forte augmentation des seuils. L'augmentation du nombre de Prandtl induit une transition plus rapide entre les régimes (à $Ta \approx 7500$ pour $Pr = 0,05$, $Ta \approx 3000$ pour $Pr = 0,1$ et $Ta \approx 1000$ pour $Pr = 0,15$) et une augmentation plus marquée des seuils. Inversement, pour les parois conductrices (Fig. 4.18b), la stabilisation de l'écoulement de base est plus régulière et on retrouve une même évolution des seuils Gr_c avec Ta pour les différentes valeurs du nombre de Prandtl. Pour les plus petites valeurs de Pr ($Pr = 0,1$ et $0,15$), cependant, une pente plus petite des courbes de stabilité $Gr_c(Ta)$ est observée pour des valeurs de Ta supérieures à 6000, ce qui signifie un ralentissement de l'effet de stabilisation induit par la rotation.

La variation de la norme du vecteur d'onde avec Ta pour l'instabilité oscillatoire est illustrée sur la figure 4.19. Pour les parois isolantes (Fig. 4.19a), le nombre d'onde cri-

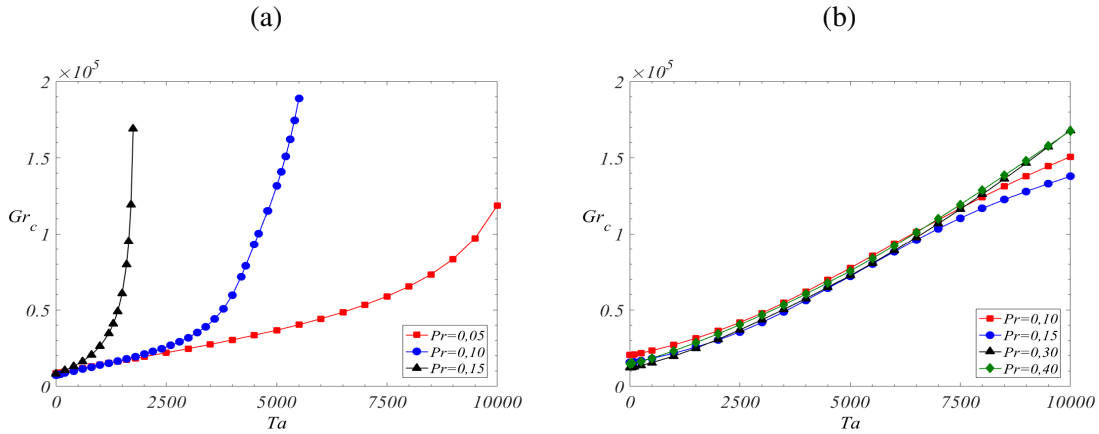


FIGURE 4.18 – Variation des seuils Gr_c correspondant à l'instabilité oscillatoire en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices.

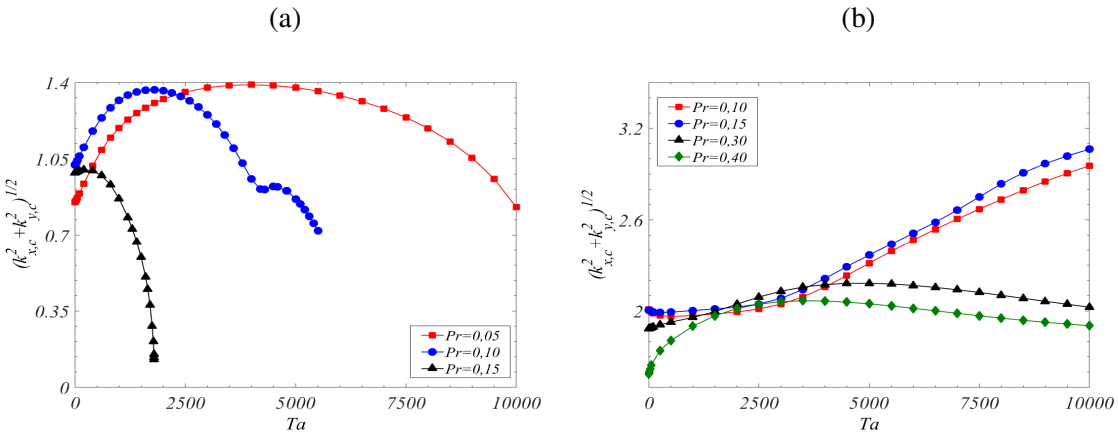


FIGURE 4.19 – Variation de la norme du vecteur d'onde $|\vec{k}_c|$ correspondant à l'instabilité oscillatoire en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices.

tique $|\vec{k}_c|$ augmente pour les petits nombres de Taylor, atteint un maximum, puis diminue finalement. Ce comportement dépend du nombre de Prandtl : lorsque Pr est augmenté, le maximum est plus bas, se produit pour de plus petits Ta, et la diminution finale est plus forte. Pour $Pr = 0,1$, on peut également noter une irrégularité au cours de la diminution. Le comportement est assez différent dans le cas des parois conductrices (Fig. 4.19b). Pour $Pr = 0,3$ et $0,4$, le nombre d'onde critique connaît toujours une augmentation initiale puis une diminution lorsque Ta est augmenté, mais ces changements restent modérés. En revanche, pour $Pr = 0,1$ et $0,15$, après une lente variation du nombre d'onde critique avec Ta, nous observons une dérive de la norme du nombre d'onde vers des valeurs plus grandes. Ceci indique que, pour ces valeurs de Pr, le ralentissement de la stabilisation observé sur la figure 4.18b lorsque Ta est augmenté est associé à des nombres d'onde plus importants.

L'orientation du mode oscillatoire sous l'influence de la rotation est illustrée sur la figure 4.20. Pour $Ta = 0$, le mode critique est longitudinal, c'est-à-dire qu'il correspond à $\phi = 0$. Pour les parois isolantes (Fig. 4.20a), les rouleaux sont globalement déviés dans le sens horaire, suivant à peu près la même courbe pour les différentes valeurs de Pr.

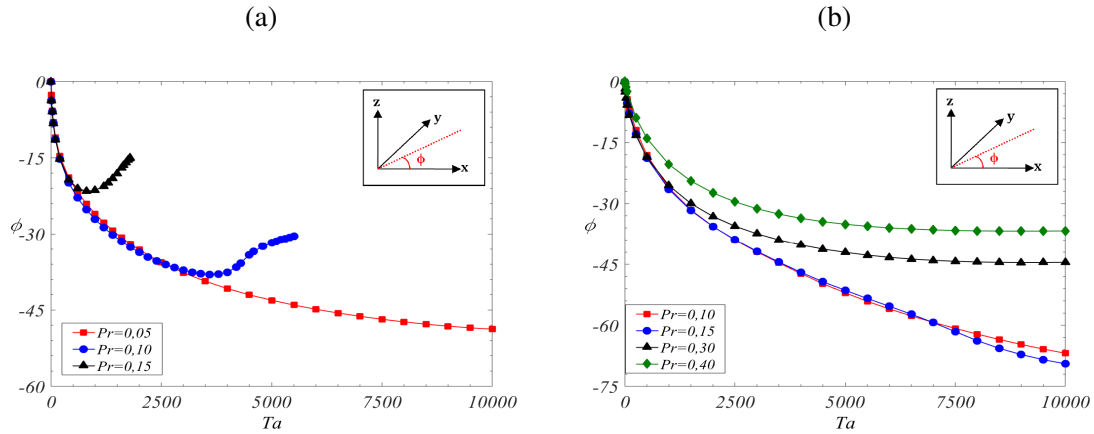


FIGURE 4.20 – Variation de l'angle ϕ (l'angle que fait l'axe des rouleaux dans le plan xy) correspondant à l'instabilité oscillatoire en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices.

Toutefois, cette déviation dans le sens horaire n'a lieu que jusqu'à une valeur de Ta qui dépend du nombre de Prandtl ($Ta \approx 3750$ pour $Pr = 0,1$, et $Ta \approx 750$ pour $Pr = 0,15$). Au delà de cette valeur, on peut observer une déviation plus faible dans le sens anti-horaire. Les déviations les plus importantes dans le sens horaire sont donc observées pour les plus petites valeurs de Pr. Pour des parois conductrices (Fig. 4.20b), la déviation des rouleaux évolue régulièrement dans le sens horaire. Cette déviation est plus faible pour $Pr = 0,4$ et $0,3$, et plus accentuée pour $Pr = 0,15$ et $0,1$. Pour ces dernières valeurs de Pr, cette forte déviation associée à une forte augmentation de la norme du vecteur d'onde (Fig. 4.19b) indique une forte augmentation de la composante $k_{x,c}$ due à la rotation.

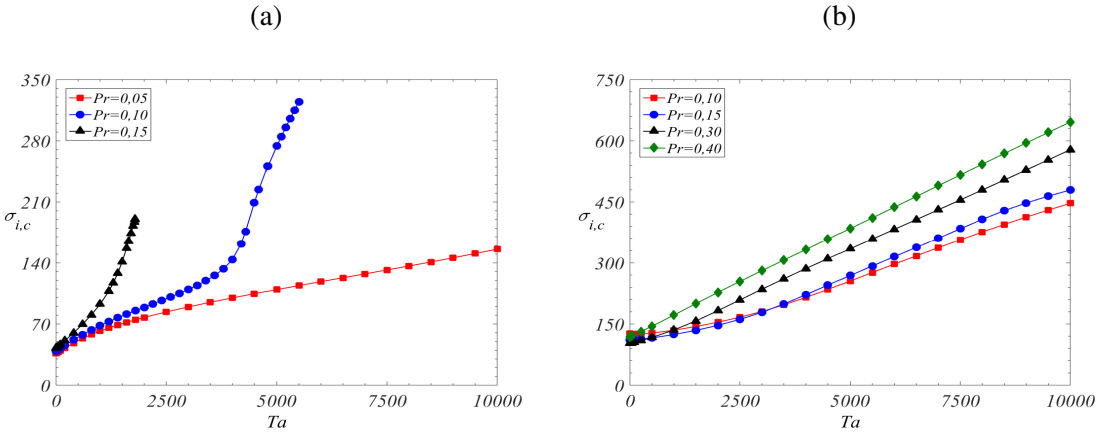


FIGURE 4.21 – Variation de la pulsation propre $\sigma_{i,c}$ correspondant à l'instabilité oscillatoire en fonction du nombre de Taylor Ta pour différents nombres de Prandtl Pr : (a) Parois isolantes ; (b) Parois conductrices.

En ce qui concerne la fréquence angulaire critique $\sigma_{i,c}$ de cette instabilité oscillatoire (Fig. 4.21), on constate qu'elle croit sous l'influence de la rotation et est d'autant plus forte que Pr est augmenté. Pour les parois isolantes (Fig. 4.21a), nous observons encore deux régimes : un premier régime avec une augmentation modérée de $\sigma_{i,c}$, et un deuxième régime avec une augmentation plus prononcée. Le changement de régime a lieu plus tôt lorsque le nombre de Prandtl est augmenté. Pour les parois conductrices (Fig. 4.21b), la fréquence critique évolue plus régulièrement, mais avec une augmentation globalement

plus importante. Notez que pour $Pr = 0,4$, l'augmentation de $\sigma_{i,c}$ avec Ta est presque linéaire.

4.4 Analyse énergétique aux seuils

Des informations importantes concernant les mécanismes physiques impliqués dans le déclenchement de l'instabilité et dans la stabilisation par la rotation appliquée peuvent être obtenues à partir du calcul, au seuil, du bilan d'énergie cinétique fluctuante. La solution de base au seuil et le vecteur propre critique entrent tous les deux dans l'équation de ce bilan énergétique. Nous rappelons ici quelques définitions mathématiques des bilans, que nous présenterons et discuterons dans la section suivante.

4.4.1 Énergie cinétique de la perturbation

L'énergie cinétique de la perturbation est définie par le produit scalaire de la perturbation par son complexe conjugué $k = Re(u'_i u'^*_i/2)$ (Re et l'exposant $*$ désignent respectivement la partie réelle et le complexe conjugué). L'équation régissant le bilan de l'énergie cinétique est donnée par

$$\frac{\partial k}{\partial t} = k_{s,U} + k_{s,V} + k_{pres} + k_{buoy} + k_{visc}, \tag{4.23}$$

où $\partial k/\partial t$ est le taux de variation de l'énergie cinétique fluctuante, $k_{s,U} = -Re\left(w'\,u'^*\frac{du_b}{dz}\right)$ et $k_{s,V} = -Re\left(w'\,v'^*\frac{dv_b}{dz}\right)$ représentent la production d'énergie cinétique fluctuante par cisaillement de l'écoulement de base, $k_{pres} = -Re\left(u'^*\frac{\partial p'}{\partial x} + v'^*\frac{\partial p'}{\partial y} + w'^*\frac{\partial p'}{\partial z}\right)$ est la redistribution de l'énergie cinétique fluctuante par les perturbations de la pression, $k_{buoy} = Re\,(Gr\,w'^*\Theta')$ est la contribution de la flottabilité à l'énergie cinétique fluctuante et enfin, $k_{visc} = Re\,(u'^*\Delta u' + v'^*\Delta v' + w'^*\Delta w')$ est la dissipation visqueuse de l'énergie cinétique de la perturbation. Notez que les deux termes de Coriolis liés à la rotation ne contribuent pas au bilan d'énergie cinétique (Éq. 4.23), car ils ont des contributions opposées qui s'annihilent. La contribution de la rotation ne sera alors effective que par le biais du changement de l'écoulement de base et des perturbations.

Nous pouvons également définir l'énergie cinétique fluctuante totale sur tout le volume : $K = \int_V k\,dV$. Le taux de variation de K est donc donné par les termes d'énergie volumiques (notés K_i) :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = K_{s,U} + K_{s,V} + K_{buoy} + K_{visc}. \tag{4.24}$$

Le terme de pression intégré sur le volume est nul et n'a donc pas été inclus dans l'équation 4.24. Notez que les perturbations associées au vecteur propre critique sont définies à une constante multiplicative près et doivent être normalisées de manière appropriée. Cette normalisation se fera avec la dissipation visqueuse, plus précisément $|K_{visc}| = -K_{visc}$, en utilisant le fait que K_{visc} est un terme stabilisant par nature et donc tout le temps négatif ($K_{visc} = \int_V (\vec{u}'^*.\Delta\vec{u}')\,dV = -\int_V (\bar{\bar{\nabla}}\vec{u}')^2\,dV$). De plus, au seuil, le vecteur propre critique est associé à une valeur propre de partie réelle nulle. Cela implique que $\partial k/\partial t$ et $\partial K/\partial t$ sont égaux à zéro à la stabilité marginale.

En normalisant l'équation 4.24, nous obtenons une nouvelle équation impliquant des termes d'énergie normalisés au seuil, $K' = K/|K_{visc}|$:

$$K'_{s,U} + K'_{s,V} + K'_{buoy} = 1. \tag{4.25}$$

De même, chaque terme d'énergie dans 4.23 peut être normalisé par $|K_{visc}|$, ce qui donne des termes k'_i et, au seuil, nous obtenons

$$k'_{s,U} + k'_{s,V} + k'_{pres} + k'_{buoy} + k'_{visc} = 0. \tag{4.26}$$

Notez que tous les termes K'_i et k'_i ont été normalisés et sont alors des quantités intrinsèques des perturbations de l'écoulement. Le calcul de toutes les contributions individuelles d'énergie K'_i nous permet de déterminer quel terme joue un rôle dominant dans le déclenchement de l'instabilité par la production d'une énergie cinétique fluctuante. Les champs spatiaux correspondants k'_i peuvent à leur tour être analysés pour localiser les régions de production. Les termes d'énergie positive et négative sont respectivement déstabilisants et stabilisants.

4.4.2 Énergie thermique de la perturbation

Le bilan de l'énergie thermique de la perturbation peut également être intéressant, en particulier dans le cas de l'instabilité thermique de Rayleigh. Ainsi, en prenant l'équation perturbée de la température (Éq. 4.20), en la multipliant par le complexe conjugué de la perturbation de température et en isolant la partie réelle, on obtient une équation liée au taux de production de l'énergie thermique fluctuante $e = Re(\Theta'\Theta'^*/2)$:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = e_l + e_v + e_d, \tag{4.27}$$

où $e_l = -Re\left(\Theta'^* u' \frac{\partial \Theta_b}{\partial x}\right) = -Re\left(\Theta'^* u'\right)$ représente un terme de production lié au gradient de température longitudinal imposé, $e_v = -Re\left(\Theta'^* w' \frac{\partial \Theta_b}{\partial z}\right) = -Re\left(\Theta'^* w' \frac{dT_b}{dz}\right)$ représente un terme de production lié au gradient vertical de température et, enfin, $e_d = Pr^{-1} Re\left(\Theta'^* \left(\frac{d^2\Theta'}{dz^2} - k^2\Theta'\right)\right)$ est un terme de dissipation lié à la diffusion de la chaleur. De manière similaire à l'équation 4.27, nous pouvons également obtenir une équation pour l'énergie thermique totale fluctuante $E = \int_V e\, dV$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E_l + E_v + E_d, \tag{4.28}$$

où E_l, E_v et E_d sont les quantités intégrales liées respectivement aux distributions locales e_l, e_v et e_d. Après normalisation par rapport à $|E_d| = -E_d$ (même raisonnement que pour $|K_{visc}| = -K_{visc}$), on obtient au seuil :

$$e'_l + e'_v + e'_d = 0, \tag{4.29}$$

et

$$E'_l + E'_v = 1. \tag{4.30}$$

4.4.3 Contributions au nombre de Grashof critique

Il est également intéressant de voir à travers quelles contributions énergétiques la rotation agira sur les seuils critiques. L'approche que nous proposons consiste à exprimer le nombre de Grashof critique Gr_c, donné par rapport au cas de référence sans rotation $Gr_{c0} = Gr_c(Ta = 0)$, en fonction de différentes contributions énergétiques exprimées sous forme de rapports caractéristiques. Pour ce faire, nous rappelons que l'écoulement de base $[u_b(z), v_b(z)]$ (Éq. 4.5) est directement proportionnel à Gr, $u_b(z) = GrU_b(z)$ et $v_b(z) = GrV_b(z)$. Ainsi, Gr peut être factorisé des termes d'énergie de cisaillement, de sorte que $K'_{s,U} = GrK''_{s,U}$ et $K'_{s,V} = GrK''_{s,V}$. Une transformation similaire s'applique aussi au terme lié à la flottabilité, qui peut être écrit $K'_{buoy} = GrK''_{buoy}$. L'équation 4.25 à l'état marginal peut ainsi être réarrangée pour donner :

$$Gr_c\left(K''_{s,U} + K''_{s,V} + K''_{buoy}\right) = 1. \tag{4.31}$$

Tenant compte du fait que $K''_{s,V} = 0$ dans le cas sans rotation ($Ta = 0$), l'équation 4.31 peut être utilisée pour écrire

$$\frac{Gr_{c0}}{Gr_c} = \overbrace{\left(\frac{K''_{s,U}}{K''_{s,U0} + K''_{buoy0}}\right)}^{R^K_U} + \overbrace{\left(\frac{K''_{s,V}}{K''_{s,U0} + K''_{buoy0}}\right)}^{R^K_V} + \overbrace{\left(\frac{K''_{buoy}}{K''_{s,U0} + K''_{buoy0}}\right)}^{R^K_b}. \tag{4.32}$$

En ce qui concerne l'équation 4.30, on peut aussi factoriser $GrPr$ de E'_v, ce qui donne $E'_v = GrPrE''_v$. En introduisant cela dans l'équation 4.30 et après quelques manipulations simples, nous obtenons

$$\frac{Gr_{c0}}{Gr_c} = \overbrace{\left(\frac{1 - E'_{l0}}{1 - E'_l}\right)}^{1/R^E_l}\overbrace{\left(\frac{E''_v}{E''_{v0}}\right)}^{R^E_v} = \frac{R^E_v}{R^E_l}. \tag{4.33}$$

Notez que les valeurs avec l'indice 0 se réfèrent au cas sans rotation ($Ta = 0$).

4.4.4 Analyse des résultats

Dans cette section, les résultats de stabilité obtenus pour les trois types d'instabilité sont analysés, en utilisant des considérations énergétiques. Dans le cas de l'instabilité de cisaillement ($Pr = 0,01$), nous avons choisi d'analyser le résultat correspondant au cas des parois isolantes. Ce choix est motivé par le fait que la flottabilité ne joue pas un rôle important et que la nature des conditions aux limites thermiques (isolation / conduction) n'affecte pas les résultats. Contrairement à ce cas, l'instabilité oscillatoire ($Pr = 0,1$) est affectée par la nature des conditions aux limites thermiques et nous allons donc considérer les deux cas. L'instabilité de Rayleigh n'est présente que dans le cas de parois conductrices, mais nous avons remarqué un changement significatif entre les cas pour $Pr = 0,7$ et $Pr = 7$. Par conséquent, les deux cas seront examinés ici.

Instabilité de cisaillement

Les champs spatiaux k'_i correspondant aux différentes contributions à l'énergie cinétique fluctuante pour l'instabilité de cisaillement sont présentés sur la figure 4.22 pour

différentes valeurs du nombre de Taylor. Pour $Ta = 0$ (Fig. 4.22a), nous observons une forte déstabilisation associée au terme de cisaillement longitudinal $k'_{s,U}$ dans la région centrale ($z = 0$) où le point d'inflexion du profil de vitesse de base est localisé, alors que le terme $k'_{s,V}$ est nul en l'absence de rotation. L'effet principal de stabilisation est observé près des parois, et est associé au terme visqueux k'_{visc}. Le terme de flottabilité k'_{buoy} agit également comme une contribution négative (stabilisation), mais il est très faible. Enfin, le terme de pression k'_{pres} assure l'équilibre énergétique local dans la couche de fluide par un transfert d'énergie de la région de production située au centre vers les zones de dissipation le long des parois. Lorsque le nombre de Taylor est augmenté, les termes de cisaillement $k'_{s,U}$ et $k'_{s,V}$ sont modifiés, notamment par la modification des profils de vitesse de base. Le terme de production d'énergie par cisaillement transverse $k'_{s,V}$ commence à croître tandis que le terme $k'_{s,U}$ décroît jusqu'à ce que $k'_{s,V}$ devienne dominant (voir Fig. 4.22c pour $Ta = 5000$). Pour des valeurs plus grandes de Ta ($Ta = 10^4$, voir Fig. 4.22d), ces deux contributions continuent à évoluer et à atteindre un état dans lequel l'instabilité est déclenchée par le cisaillement du profil de vitesse transverse, tandis que la contribution de celui associé à la vitesse longitudinale devient nulle au centre et agit même comme facteur stabilisateur dans une région intermédiaire entre les parois et la partie centrale de la couche fluide.

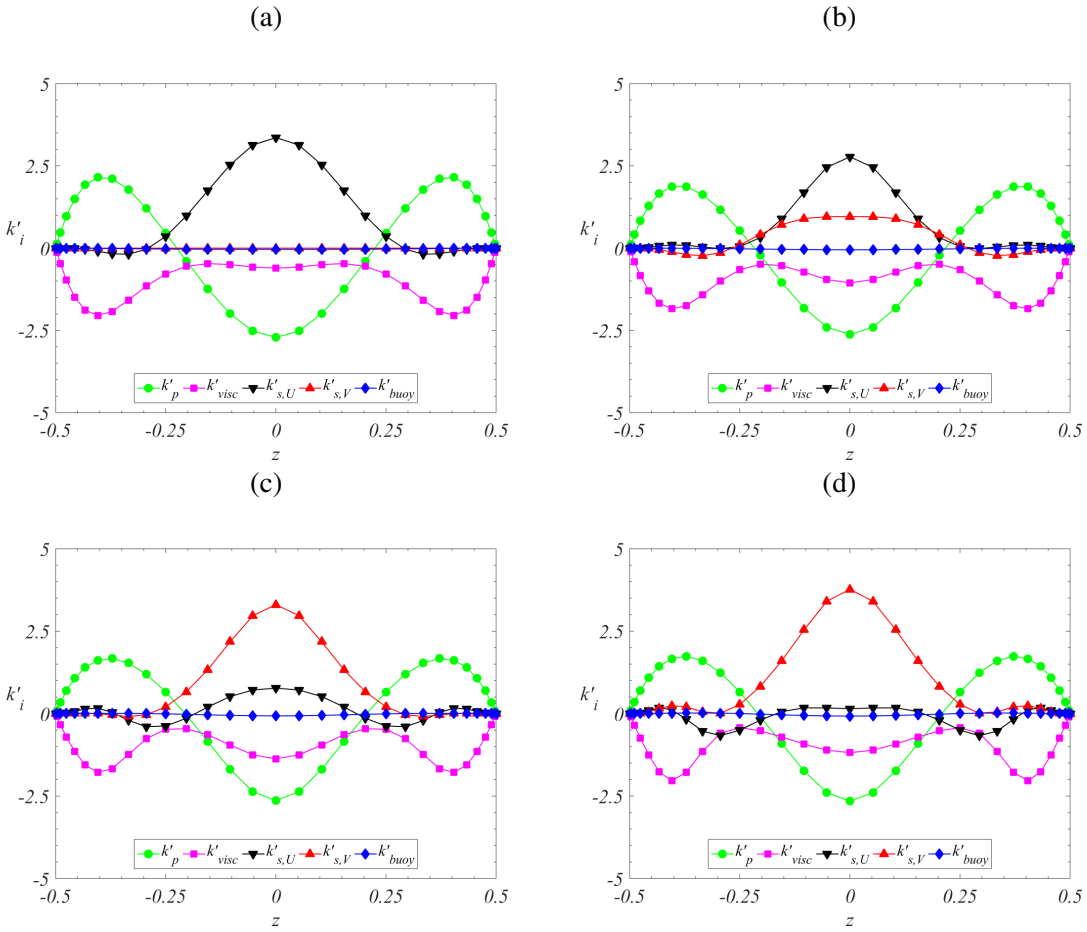


FIGURE 4.22 – Contributions énergétiques locales le long de z pour l'instabilité de cisaillement à $Pr = 0,01$: (a) $Ta = 0$; (b) $Ta = 1000$; (c) $Ta = 5000$; (d) $Ta = 10000$.

Les contributions globales à l'énergie cinétique de la perturbation sont données sur la figure 4.23a en fonction du nombre de Taylor. Nous voyons que le terme de flottabilité,

qui reste faible et légèrement négatif, est négligeable dans le bilan énergétique et que les principales contributions à la déstabilisation proviennent des termes de cisaillement. Pour les petits nombres de Taylor, la contribution principale, $K'_{s,U}$, est liée au terme de cisaillement longitudinal, qui diminue à mesure que le nombre de Taylor augmente. En revanche, le terme $K'_{s,V}$ associé au profil de vitesse transverse augmente avec Ta et devient dominant pour $Ta \approx 1800$. Le terme décroissant $K'_{s,U}$ devient finalement négatif pour $Ta \approx 7000$, ce qui signifie que, pour un plus grand Ta, seul le terme $K'_{s,V}$ contribue à la déstabilisation et donc au déclenchement de cette instabilité.

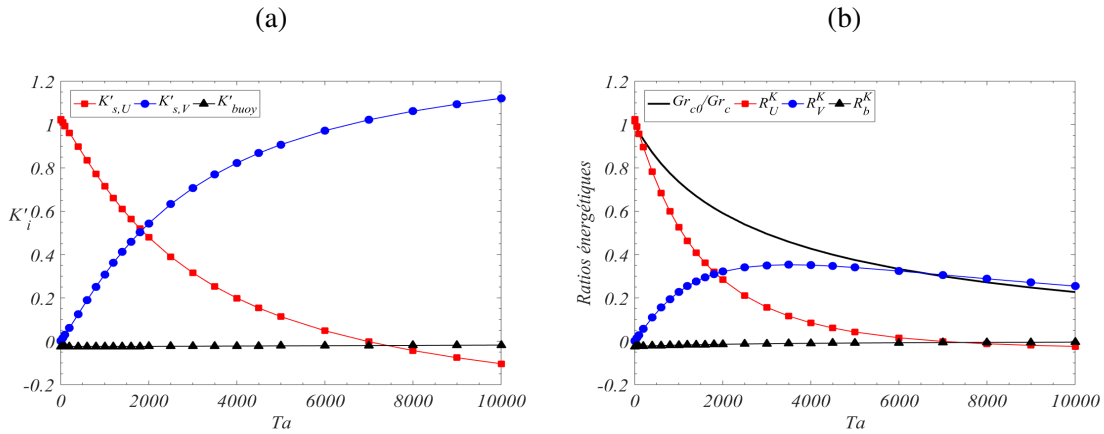


FIGURE 4.23 – (a) Contributions à l'énergie cinétique totale de la perturbation $K'_{s,U}$, $K'_{s,V}$ et K'_{buoy} et (b) ratios énergétiques R_U^K, R_V^K et R_b^K définissant Gr_{c0}/Gr_c en fonction du nombre de Taylor pour l'instabilité de cisaillement à $Pr = 0,01$.

Pour mieux montrer comment ces termes d'énergie participent à l'augmentation observée du seuil Gr_c avec Ta et donc à la stabilisation, la figure 4.23b donne les rapports R_U^K, R_V^K et R_b^K définis dans l'équation 4.32, ainsi que Gr_{c0}/Gr_c, en fonction du nombre de Taylor. Notez tout d'abord que la contribution de flottabilité R_b^K reste très faible pour ces instabilités de cisaillement. Sans rotation ($Ta = 0$), R_V^K est égal à zéro (pas d'écoulement transverse) et $Gr_{c0}/Gr_c = R_U^K + R_b^K = 1 \approx R_U^K$. Lorsque Ta est augmenté, l'effet de stabilisation correspond à la diminution de la quantité Gr_{c0}/Gr_c. Cette quantité est la somme du terme rapidement décroissant R_U^K, qui devient même négatif à $Ta \approx 7000$, et du terme R_V^K lié à la vitesse transversale créée par la rotation, qui subit une croissance initiale jusqu'à $Ta \approx 3000$, puis une diminution régulière et modérée. La diminution initiale de Gr_{c0}/Gr_c est alors due à la forte diminution de R_U^K qui dépasse la croissance moins rapide de R_V^K. En revanche, pour Ta élevé, les deux termes contribuent à la diminution de Gr_{c0}/Gr_c, mais R_V^K est l'unique contributeur au déclenchement de l'instabilité. Notez que la contribution liée à la vitesse de base transversale dépasse celle liée à la vitesse de base longitudinale à $Ta \approx 1800$.

Finalement, nous pouvons approfondir l'analyse des termes de cisaillement $K''_{s,U}$ et $K''_{s,V}$, qui représentent respectivement les parties principales de R_U^K et R_V^K. $K''_{s,U}$ ($K''_{s,V}$) est donné par l'intégrale à travers la couche de fluide du terme $k''_{s,U}$ ($k''_{s,V}$), qui peut lui-même être écrit comme le produit de deux termes : $-(dU_b/dz)$ $(-(dV_b/dz))$, quantité liée au cisaillement de l'écoulement de base, qui est indépendant de Gr_c et ne dépend donc que de Ta, et $Re\{w'u'^*/|K_{visc}|\}$ $(Re\{w'v'^*/|K_{visc}|\})$, quantité liée aux perturbations de vitesse au seuil Gr_c. Ces termes sont donnés sur la figure 4.24 et sont tous symétriques par rapport à $z = 0$.

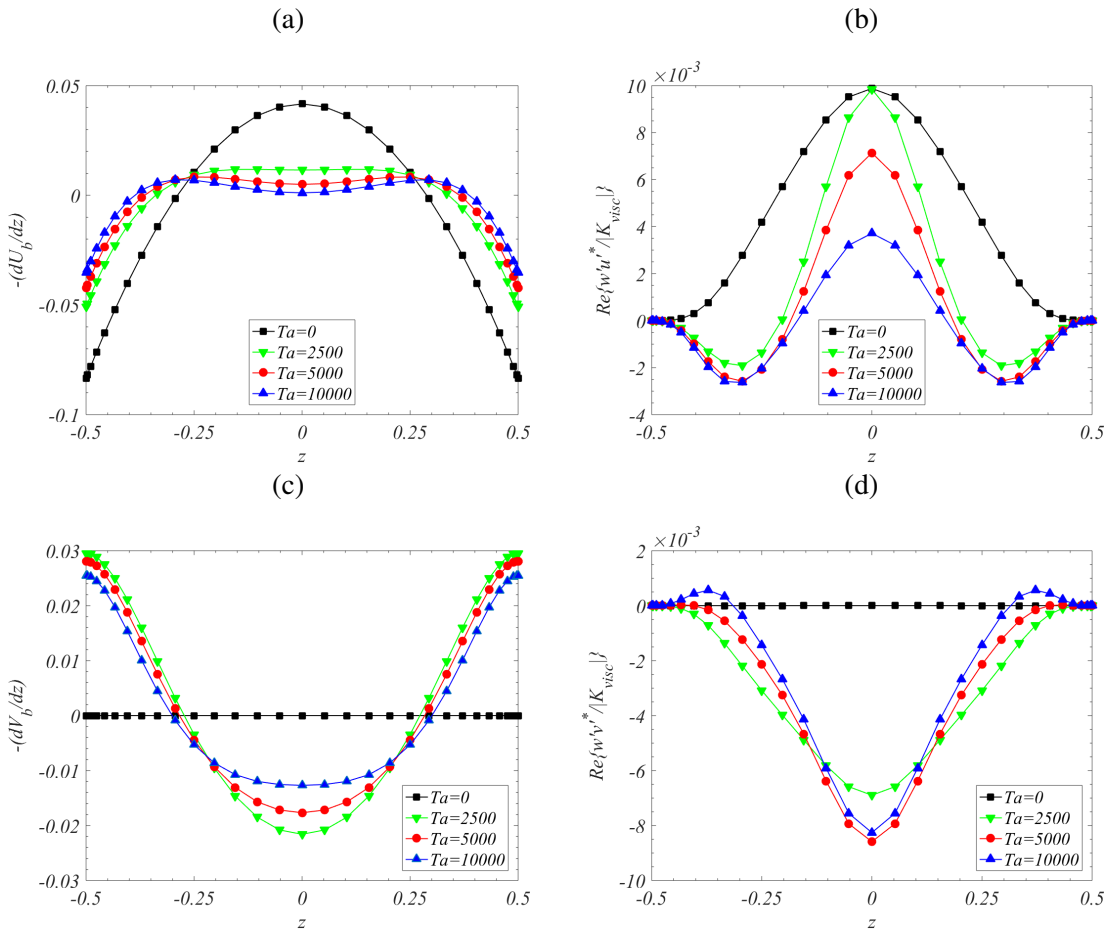


FIGURE 4.24 – Distributions locales le long de z de (a) $-(dU_b/dz)$, (b) $Re\{w'u'^*/|E_{visc}|\}$, (c) $-(dV_b/dz)$ et (d) $Re\{w'v'^*/|E_{visc}|\}$ pour l'instabilité de cisaillement à $Pr = 0,01$ et pour différentes valeurs de Ta.

Nous considérons tout d'abord les composantes liées à $K''_{s,U}$ et données sur les figures 4.24a et 4.24b. Pour $Ta = 0$, nous voyons que la principale contribution positive à $K''_{s,U}$ provient des valeurs positives de $-dU_b/dz$ autour du centre, associées aux valeurs positives maximales de $Re\{w'u'^*/|K_{visc}|\}$, alors que les valeurs négatives de $-dU_b/dz$ le long des parois sont associées à des valeurs positives plutôt faibles de $Re\{w'u'^*/|K_{visc}|\}$ et ne donneront qu'une petite contribution négative. Lorsque le nombre de Taylor est augmenté, $-dU_b/dz$ est considérablement réduit au centre, atteignant même des valeurs proches de zéro pour Ta au dessus de 10^4. En même temps, le large pic de $Re\{w'u'^*/|K_{visc}|\}$ est d'abord réduit en largeur, ce qui correspond à un changement de la structure de la perturbation, avant de diminuer en intensité. Tous ces changements contribuent ensemble à la forte diminution de $K''_{s,U}$. Notez que des valeurs négatives de $Re\{w'u'^*/|K_{visc}|\}$ sont également observées à mi-distance entre le centre et les parois. Associées à des valeurs positives de $-dU_b/dz$, elles donneront la contribution négative à $K''_{s,U}$ observée sur la figure 4.22.

En ce qui concerne les composantes liées à $K''_{s,V}$ et données sur les figures 4.24c et 4.24d, elles sont bien nulles pour $Ta = 0$ et se développent lorsqu'on introduit la rotation, avec une première phase d'augmentation rapide et une seconde phase de décroissance modérée. La principale contribution positive à $K''_{s,V}$ provient des valeurs négatives de $-dV_b/dz$ autour du centre, associées aux valeurs négatives maximales de $Re\{w'v'^*/|K_{visc}|\}$,

alors que les valeurs positives de $-dV_b/dz$ le long des parois sont associées à des valeurs plutôt petites de $Re\{w'v'^*/|K_{visc}|\}$ et ne donneront qu'une petite contribution négative. Lorsque Ta est augmenté, la diminution observée de ces composantes reste modérée, ce qui explique que $K''_{s,V}$ (c'est-à-dire le profil de la vitesse transversale) garde une contribution déstabilisante à des nombres de Taylor assez forts.

Instabilité thermique de Rayleigh

Pour l'instabilité thermique de Rayleigh, contrairement à l'instabilité de cisaillement, la flottabilité devrait jouer un rôle important puisque cette instabilité doit son existence à la stratification instable de la température de l'écoulement de base dans le cas de parois thermiquement conductrices. Nous considérons tout d'abord le bilan énergétique total de cette instabilité de Rayleigh en fonction du nombre de Prandtl Pr compris entre $0,1$ et 10 donné sur la figure 4.25. Deux valeurs du nombre de Taylor sont considérées : $Ta = 0$ (rouleaux longitudinaux, Fig. 4.25a) et 500 (rouleaux obliques, Fig. 4.25b). Dans les deux cas, on observe une forte augmentation du terme de flottabilité K'_{buoy} avec l'augmentation du nombre de Prandtl dans la région $0,1 < Pr < 3$, alors que les autres termes ($K'_{s,U}$ et $K'_{s,V}$) sont fortement amortis. Pour $Pr > 3$, tous les termes évoluent plus lentement et tendent vers des valeurs asymptotiques, 1 pour K'_{buoy} et 0 pour $K'_{s,U}$ et $K'_{s,V}$, indiquant que la flottabilité devient le terme dominant dans le déclenchement de ce type d'instabilité dans tous les cas considérés.

(a) (b)

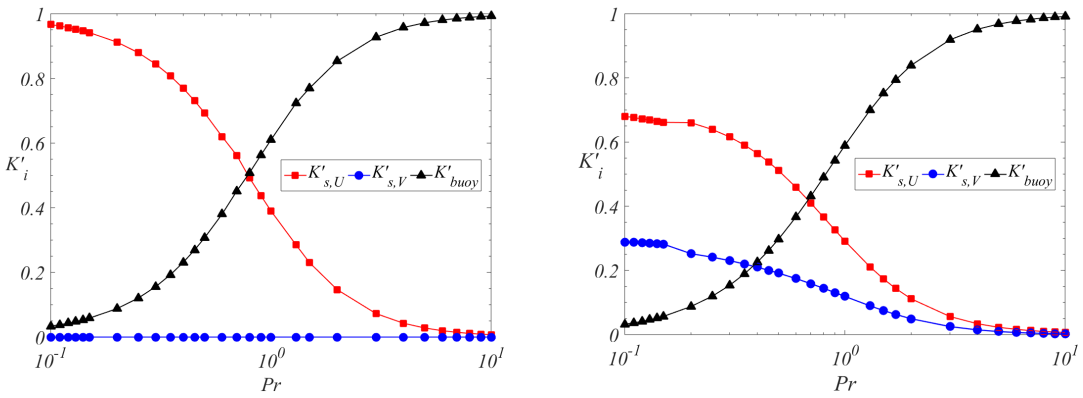


FIGURE 4.25 – Termes énergétiques globaux (K'_i) en fonction du nombre de Prandtl pour (a) $Ta = 0$ et (b) $Ta = 500$ dans le cas de l'instabilité thermique de Rayleigh (mode stationnaire longitudinal).

Il peut être intéressant aussi de voir si les seuils de cette instabilité de Rayleigh peuvent être obtenus à partir d'un nombre de Rayleigh critique Ra_B défini au niveau des couches stratifiées le long des parois. En prenant le cas $Ta = 0$ comme exemple, nous pourrions écrire

$$Ra_B = \frac{g\beta\Delta\tilde{T}L_{ref}^3}{\alpha\nu} = 1100, \tag{4.34}$$

avec l'écart de température caractéristique $\Delta\tilde{T} = 3,5\,10^{-4} Gr\,Pr\,h|\nabla\tilde{T}|_0$ (obtenu à partir du gradient de température sans dimension à la limite de la hauteur stratifiée instable (Fig. 4.5b)), multiplié par la température de référence $h|\vec{\nabla}\tilde{T}|_0$) et $L_{ref} = h/4$. La valeur 1100

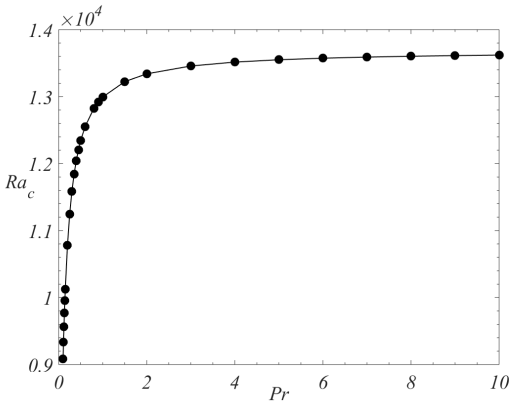


FIGURE 4.26 – Seuil de l'instabilité de Rayleigh exprimé en nombre de Rayleigh critique $Ra_c = Pr\,Gr_c$ en fonction du nombre de Prandtl Pr dans le cas sans rotation ($Ta = 0$).

correspond au nombre de Rayleigh critique d'une couche infinie stratifiée de manière instable avec des conditions aux limites dynamiques de type rigide-libre (Chandrasekhar, 1961). On obtient alors :

$$\frac{3,5\,10^{-4}}{64} Gr\,Pr \frac{g\beta|\nabla\tilde{T}|_0 h^4}{\alpha\nu} = 1100,$$

qui donne finalement

$$Ra_c = Gr_c\,Pr = 800\sqrt{\frac{1100}{3,5}} \approx 14180. \tag{4.35}$$

Si nous comparons avec les valeurs du nombre de Rayleigh critique Ra_c pour l'instabilité de Rayleigh données en fonction de Pr sur la figure 4.26, nous voyons que la valeur 14180 correspond assez bien aux valeurs de Ra_c obtenu de manière asymptotique pour un Pr assez grand ($Pr > 3$, par exemple), dans le domaine où la flottabilité est la principale force de déstabilisation et donc dans le domaine où ces instabilités sont purement thermiques.

La figure 4.27 représente une analyse énergétique complète, à $Pr = 0,7$, de l'instabilité stationnaire de Rayleigh dans le domaine où celle-ci est déclenchée par des effets mixtes (dynamiques et thermiques, $Pr < 3$). Les termes globaux dynamiques K_i' (Fig. 4.27a) montrent le caractère déstabilisateur du terme de flottabilité K_{buoy}' avec une contribution conséquente des termes de cisaillement liés aux profils de vitesse de l'écoulement de base $K_{s,U}'$ et $K_{s,V}'$. On peut aussi analyser l'origine de l'énergie thermique dans ce cas en s'intéressant aux termes liés aux mécanismes de transports de la chaleur longitudinal E_l' et vertical E_v' que l'on représente sur la figure 4.27b. Cette figure montre que l'instabilité est liée principalement au transport vertical de la température et donc à la stratification instable de la température.

La contribution de chaque terme dans la stabilisation de ce type d'instabilité est donnée sur les figures 4.27c (partie dynamique) et 4.27d (partie thermique). On observe que les termes liés au cisaillement se compensent mutuellement (quand R_U^K diminue, R_V^K augmente) ce qui laisse l'effet thermique plus déterminant. En effet, on voit que la diminution de ce terme R_b^K est pratiquement la même que celle du rapport Gr_{c0}/Gr_c. Par ailleurs, la contribution des termes de transport de la chaleur à la stabilisation, donnée par l'équation

4.33, est représentée sur la figure 4.27d où on observe que le ratio R_l^E demeure insensible aux effets de la rotation et donc reste constant et ne participe pas à la stabilisation. En revanche, le ratio R_v^E de transport lié au gradient vertical de la température suit la courbe du rapport des seuils Gr_{c0}/Gr_c indiquant ainsi qu'il est le seul participant à cette stabilisation.

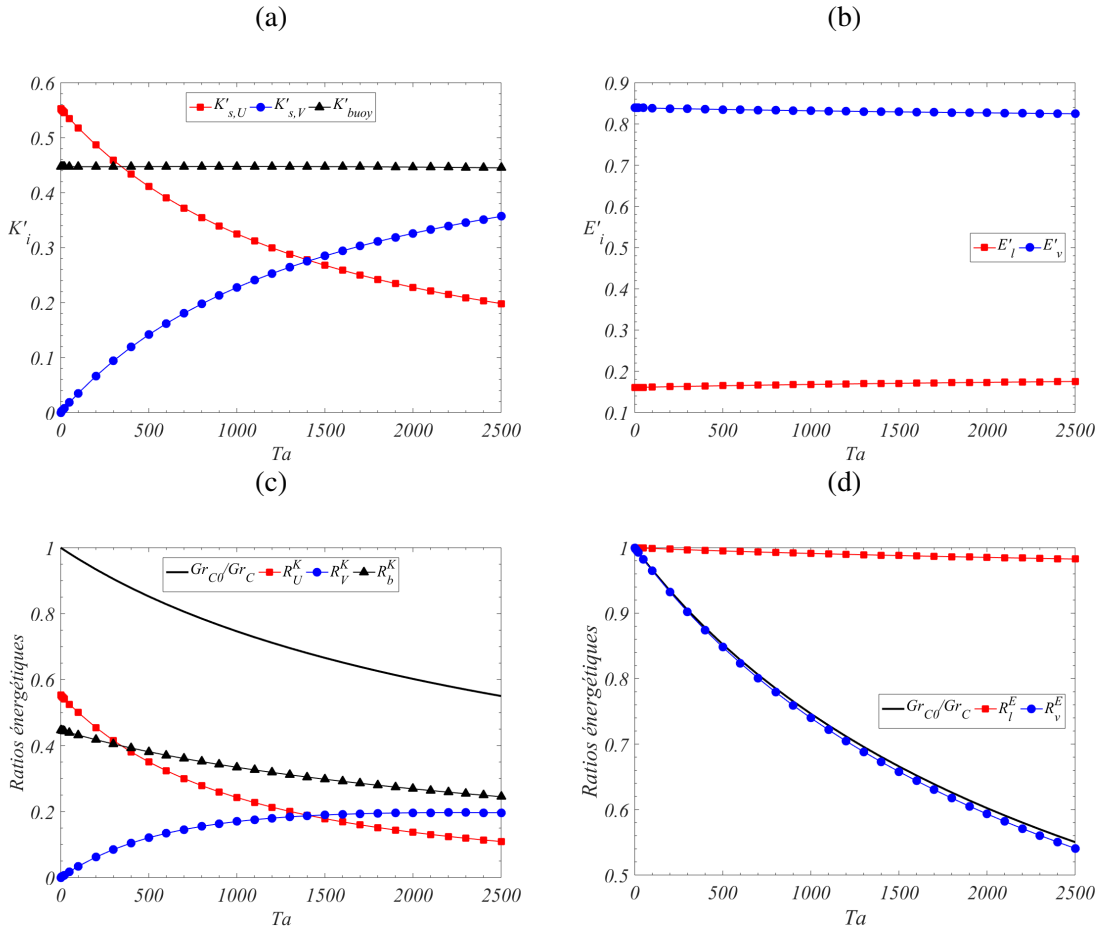


FIGURE 4.27 – Analyse énergétique de l'instabilité stationnaire de Rayleigh à $Pr = 0,7$ en fonction du nombre de Taylor. Termes globaux (a) dynamiques K'_i et (b) thermiques E'_i ainsi que les ratios (c) dynamiques (Éq. 4.32) et (d) thermiques (Éq. 4.33) correspondants.

Pour être plus précis, le ratio R_v^E est construit sur $E''_v = E'_v/Gr_c$, qui est l'intégrale d'un champ spatial. Ce champ spatial peut être décomposé en tant que produit de deux termes, l'un lié à l'écoulement de base $-(dT_b/dz)/(GrPr)$ et l'autre lié aux perturbations marginales au seuil critique $Re\{\Theta'^* w'/|E_d|\}$. Ces deux termes sont présentés sur la figure 4.28. Nous constatons que la diminution de R_v^E observée lorsque l'écoulement est soumis à la rotation est due à la diminution du gradient de température de base $(-dT_b/dz)/(GrPr)$, effet légèrement atténué par la petite augmentation du produit des perturbations $Re\{\Theta'^* w'/|E_d|\}$.

Lorsque le nombre de Prandtl augmente, en particulier pour $Pr = 7$, on constate deux changements. Le premier changement est que le mode de Rayleigh oscillatoire devient dominant à des nombres de Taylor relativement bas ($Ta \approx 400$, voir Fig. 4.14b) et donc il sera l'objet de notre étude. Le deuxième changement réside dans la nature du déclenchement de l'instabilité qui devient purement thermique comme le montrent les figures 4.25 et 4.29.

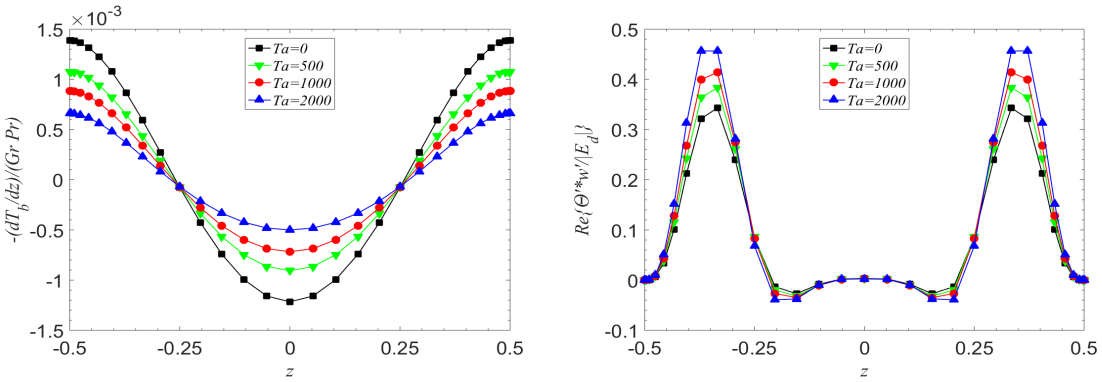


FIGURE 4.28 – Pour l'instabilité de Rayleigh au seuil ($Pr = 0,7$), profils spatiaux (a) du gradient de température vertical de l'écoulement de base $-(dT_b/dz)/(GrPr)$ et (b) du produit des perturbations marginales $Re\{\Theta'^* w'/|E_d|\}$, qui par intégration sur le volume donnent E''_v.

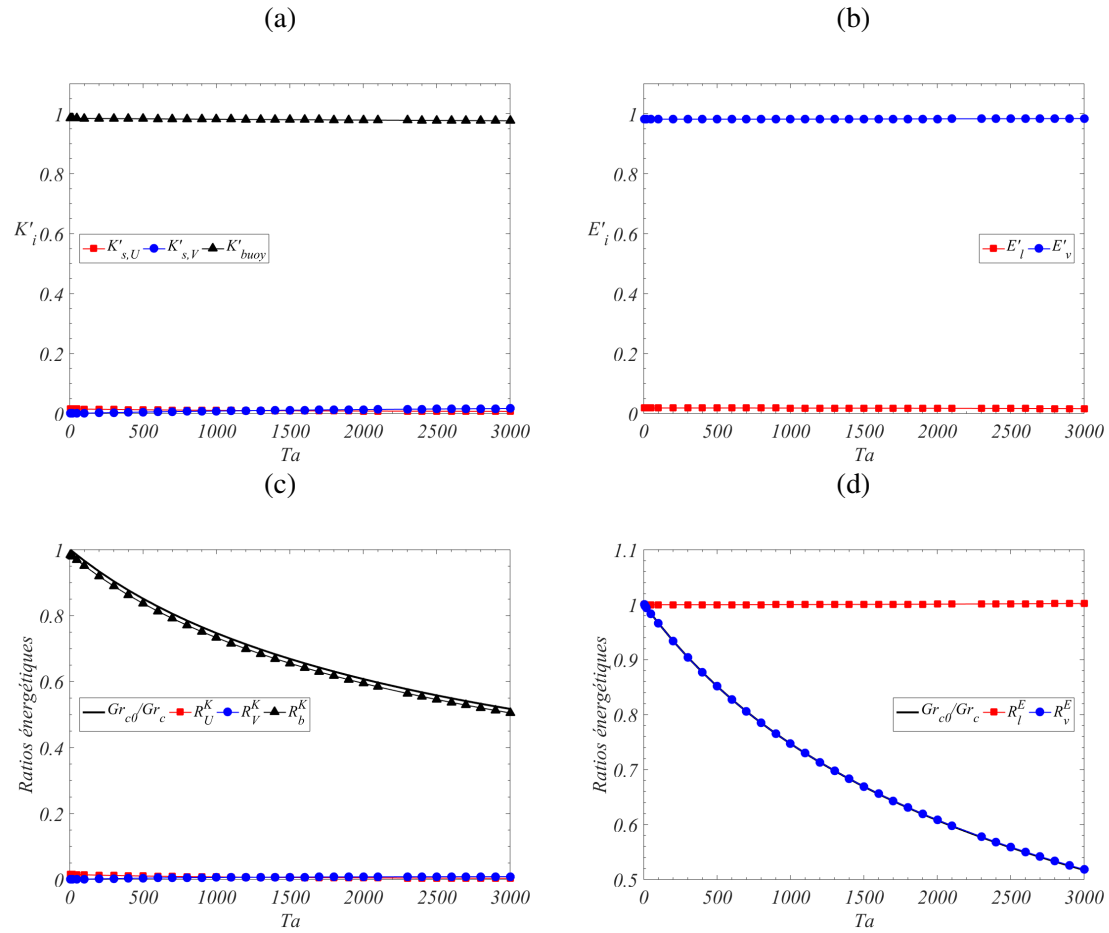


FIGURE 4.29 – Analyse énergétique de l'instabilité oscillatoire de Rayleigh à $Pr = 7$ en fonction du nombre de Taylor. Termes globaux (a) dynamiques K'_i et (b) thermiques E'_i ainsi que les ratios (c) dynamiques (Éq. 4.32) et (b) thermiques (Éq. 4.33) correspondants.

Les termes énergétiques dynamiques (Fig. 4.29a) et thermiques (Fig. 4.29b) montrent que l'instabilité est effectivement déclenchée uniquement par le terme de flottabilité K'_{buoy} et que l'énergie thermique de la perturbation marginale vient directement de la partie liée au transport vertical de la chaleur E'_v dans toute la gamme des nombres de Taylor

étudiée. Par ailleurs, les figures 4.29c et 4.29d montrent les ratios énergétiques associés à la stabilisation de ce mode oscillatoire de Rayleigh. On y observe clairement que la stabilisation est liée aux effets de la rotation sur le ratio R_b^K lié à la flottabilité et sur le ratio R_v^E lié au gradient vertical de la température. On retrouve le même mécanisme de stabilisation observé pour des nombres de Prandtl plus petits, notamment pour $Pr = 0,7$, mais de façon encore plus marquée.

Instabilité oscillatoire

Les contributions énergétiques globales du bilan de l'énergie cinétique des perturbations marginales correspondant à l'instabilité oscillatoire sont données sur la figure 4.30a en fonction du nombre de Taylor pour le cas de parois adiabatiques à $Pr = 0,05$ et le cas de parois conductrices à $Pr = 0,15$. Nous voyons que pour cette instabilité oscillatoire, les contributions de cisaillement et de flottabilité sont impliquées et donc qu'il s'agit d'une instabilité dont l'origine est mixte (cisaillement et flottabilité). Le terme de cisaillement longitudinal $K'_{s,U}$ décroit avec la rotation, alors que le terme de cisaillement transversal $K'_{s,V}$ croit à partir de zéro et finit par devenir dominant. Le terme de flottabilité évolue différemment selon les cas considérés. Dans le cas de parois conductrices à $Pr = 0,15$, la contribution de la flottabilité est inférieure à $K'_{s,U}$ dans le cas sans rotation et reste plus petite lorsque la rotation est appliquée. Elle est d'abord presque constante jusqu'à $Ta \approx 5000$, puis diminue pour donner une petite contribution à $Ta = 10000$. En revanche, dans le cas de parois adiabatiques à $Pr = 0,05$, la contribution de flottabilité reste supérieure à $K'_{s,U}$, qui diminue même vers des valeurs négatives (petite contribution stabilisante). Cette contribution de la flottabilité diminue d'abord avec l'augmentation de Ta, avant d'augmenter légèrement, conservant ainsi une contribution non négligeable. Finalement, on constate que le terme lié au cisaillement transverse $K'_{s,V}$ ne fait que croitre pour aller vers une saturation lorsque le nombre de Taylor devient grand, et ceci est observé dans les deux cas de conditions aux limites thermiques considérés ici.

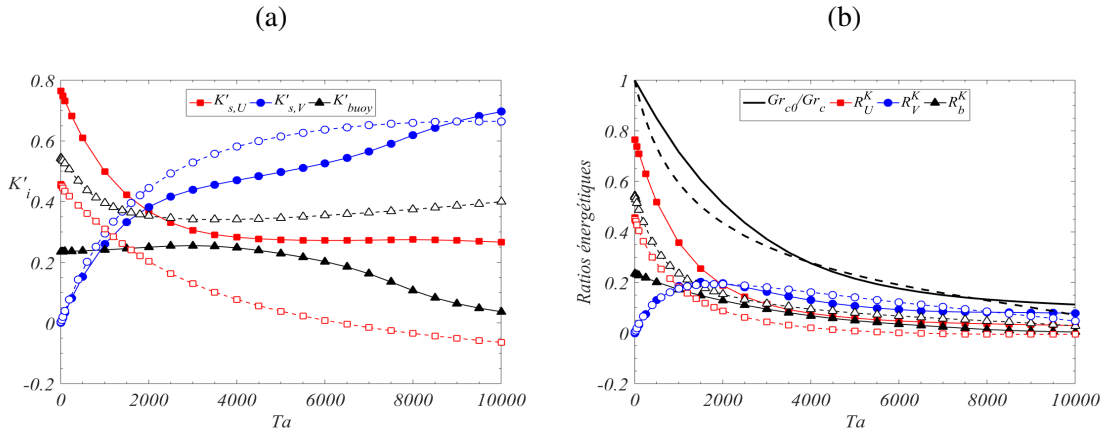


FIGURE 4.30 – (a) Contributions au bilan global de l'énergie cinétique de la perturbation marginale et (b) ratios R_U^K, R_V^K et R_b^K définissant Gr_{c0}/Gr_c en fonction du nombre de Taylor pour l'instabilité oscillatoire dans le cas de parois adiabatiques (traits discontinus, $Pr = 0,05$) et le cas de parois conductrices (traits continus, $Pr = 0,15$).

Pour mieux montrer comment ces termes d'énergie participent à l'augmentation observée du seuil Gr_c avec Ta (et donc à la stabilisation de cette instabilité), la figure 4.30b donne les rapports R_U^K, R_V^K et R_b^K définis dans l'équation 4.32, ainsi que Gr_{c0}/Gr_c, en

fonction du nombre de Taylor, pour les deux cas précédents. Dans les deux cas, l'effet de stabilisation obtenu lors de l'augmentation de Ta (diminution de la quantité Gr_{c0}/Gr_c) est dû à la forte diminution des contributions R_U^K et de R_b^K atténuée par l'augmentation initiale de R_V^K.

4.5 Conclusion

Ce chapitre s'est concentré sur une situation chauffée simple, plus précisément sur la convection naturelle générée par un gradient de température horizontal dans une couche de fluide infinie, appelée circulation de Hadley, et a étudié les effets induits par l'application d'une rotation autour de l'axe vertical, parallèle à la gravité.

Nous avons d'abord calculé le profil de l'écoulement de base en présence de rotation, ce qui nous a permis de décrire l'influence de la rotation, quantifiée par le nombre de Taylor Ta. Le profil usuel de vitesse longitudinale (profil cubique de Hadley) diminue en intensité lorsque la rotation est appliquée et sa structure est progressivement modifiée. En parallèle, une composante transverse de la vitesse est créée dès que la rotation est appliquée ($Ta > 0$). Cette composante transverse augmente d'abord avec l'augmentation du taux de rotation, jusqu'à avoir le même ordre de grandeur que la vitesse longitudinale, puis les deux composantes de vitesse entament une phase de décroissance.

A grands nombres de Taylor (régime dominé par la rotation), le profil de base subit un équilibre géostrophique qui se traduit par une zone centrale sans écoulement longitudinal et par un écoulement transverse qui varie linéairement avec la hauteur et est communément appelé *vents thermiques*. Une zone de couche limite d'Ekman apparait aussi le long des parois.

Différents comportements asymptotiques de ces composantes de la vitesse ont également été mis en avance : l'augmentation initiale de la composante transverse est en $Ta^{1/2}$ et l'écart entre le profil de Hadley sans rotation et la composante longitudinale varie en Ta ; concernant la diminution asymptotique aux grandes valeurs de Ta (régime géostrophique), elle évolue pour ces deux composantes en $Ta^{-1/2}$.

Nous avons ensuite étudié la stabilité linéaire de cet écoulement. Les trois types d'instabilité obtenus sans rotation pour différents nombres de Prandtl (instabilité de cisaillement, instabilité oscillatoire, instabilité de Rayleigh) sont toutes stabilisées par la rotation. La stabilisation est liée à la diminution des profils de la vitesse et de la température de l'écoulement de base lorsque la rotation est appliquée, en particulier leurs gradients verticaux. Pour l'instabilité de cisaillement, la principale contribution au déclenchement de l'instabilité est l'énergie venant du cisaillement de la composante longitudinale de l'écoulement de base, du_b/dz, qui diminue à mesure que la rotation augmente. A des nombres de Taylor importants, c'est l'énergie venant du cisaillement de la composante transverse créée par la rotation, dv_b/dz, qui devient l'élément déclencheur de cette instabilité. Pour l'instabilité oscillatoire, nous observons le même changement d'influence entre les composantes de vitesse longitudinale et transverse, mais une contribution déstabilisante de la force de flottabilité est également impliquée. Enfin, pour l'instabilité de Rayleigh, la stabilisation est liée à la diminution du terme d'énergie thermique déstabilisant lié au gradient vertical de la température de base, dT_b/dz.

Dans tous les cas, l'augmentation des seuils critiques s'accompagne d'une rotation du vecteur d'onde critique (initialement orienté selon les axes principaux) correspondant à un changement progressif de l'orientation des rouleaux marginaux, due à la rotation appliquée. Cette déviation des rouleaux est particulièrement importante pour les instabilités

de cisaillement, correspondant initialement aux rouleaux transversaux.

Pour conclure, une étape suivante de cette étude portera sur l'influence de la rotation sur la convection naturelle dans des cavités tridimensionnelles chauffées différentiellement entre des parois verticales opposées. Nous allons alors voir les effets du confinement sur l'écoulement de Hadley que nous venons d'étudier.

CHAPITRE 5

CONVECTION TRIDIMENSIONNELLE EN ROTATION

Sommaire

5.1 Introduction 100

5.2 Comparaison avec le modèle mono-dimensionnel 100

5.3 Effets tridimensionnels 101

5.3.1 Régime convectif 103

5.3.2 Régime géostrophique 103

5.3.3 Couches limites 106

5.4 Conclusion 108

5.1 Introduction

Après avoir étudié la convection de Hadley en rotation où les effets de bord étaient négligés, nous nous proposons ici de revenir à l'état tridimensionnel en se focalisant sur l'étude des mouvements de convection en cavité de dimensions $4 \times 2 \times 1$ soumise à la rotation autour de l'axe vertical, aligné avec la gravité. Dans un premier temps, nous donnons quelques comparaisons avec le modèle mono-dimensionnel. Ensuite, nous étudions en détails l'effet de la rotation sur l'écoulement de base stationnaire. Cette étude se révèle assez riche en terme de réorganisation de l'écoulement notamment par la formation de nouvelles structures ainsi que des couches limites dues à la rotation rapide. Elle nous permet aussi une distinction des régimes d'écoulement en fonction de l'intensité des forces de Coriolis.

5.2 Comparaison avec le modèle mono-dimensionnel

Lorsqu'on introduit la rotation, l'écoulement décrit précédemment (Sec. 3.2) est affecté par un terme de Coriolis. Ce terme n'intervient pas comme un forçage de l'écoulement (car il préserve la situation de repos lorsque le nombre de Grashof est nul), mais comme une correction agissant sur les composantes de la vitesse initialement induites par le chauffage latéral.

Nous présentons sur la figure 5.1 une comparaison des profils de vitesse longitudinale et transverse, issus du modèle monodimensionnel analytique (lignes continues) et de

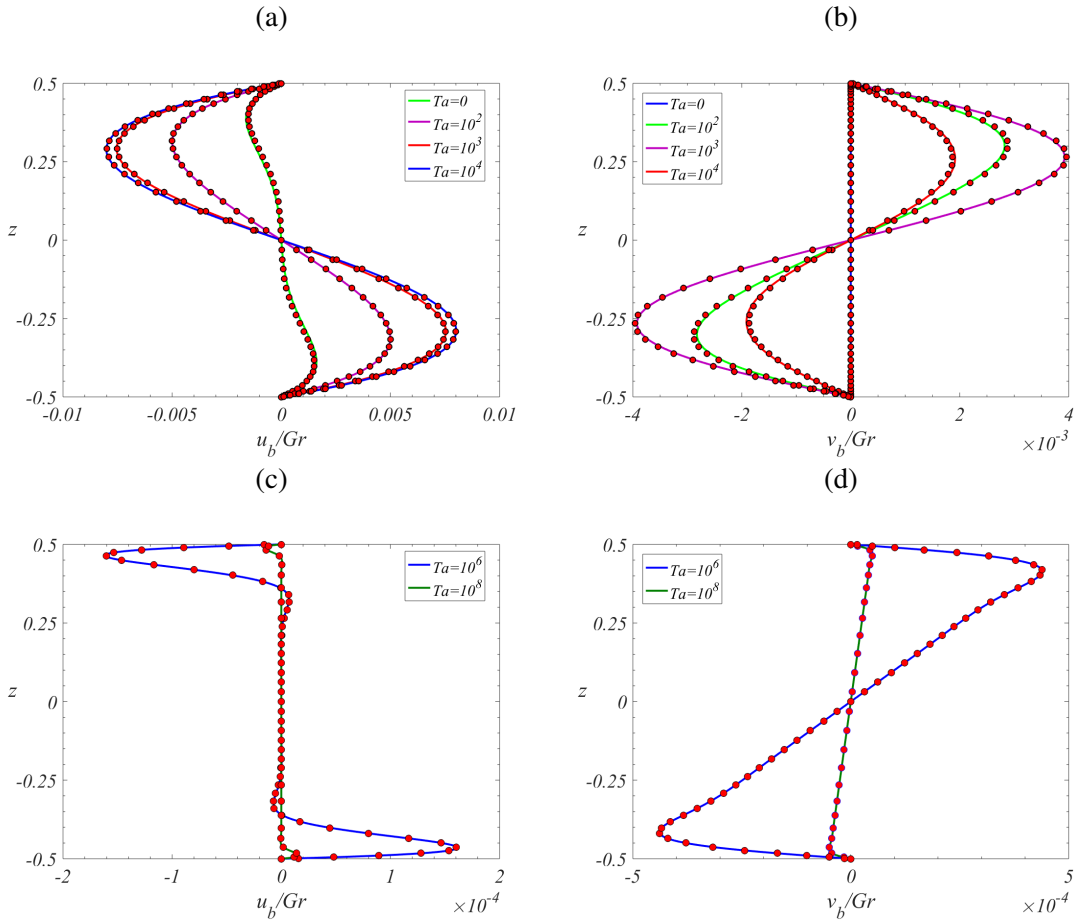


FIGURE 5.1 – Comparaison des profils de vitesse u_b/Gr et v_b/Gr obtenus par le modèle analytique et par simulation numérique tridimensionnelle à $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^3$ en fonction du nombre de Taylor.

ceux obtenus le long de la verticale, au centre de la cavité tridimensionnelle de dimensions $4 \times 2 \times 1$, là où les effets des parois sont les plus limités (cercles rouges), en fonction du nombre de Taylor pour $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^3$. Ces profils montrent une très bonne concordance entre le profil analytique développé précédemment et la simulation tridimensionnelle. Nous pouvons constater la création de la vitesse transverse sur les figures 5.1b et 5.1d, ainsi que les effets géostrophiques observés pour des nombres de Taylor assez forts sur les figures 5.1c et 5.1d. Finalement, il faut noter que cette comparaison ne peut être faite que pour des vitesses faibles où les effets non linéaires sont négligeables, c'est à dire pour des nombres de Grashof modérés, à faible nombre de Taylor, ou pour des forts nombres de Taylor [1].

5.3 Effets tridimensionnels

Avant de décrire les effets qu'induit la rotation sur la structure de l'écoulement convectif en cavité tridimensionnelle à bas nombres de Grashof, nous rappelons qu'à $Ta = 0$ (cas sans rotation, Figs. 5.3a, 5.4a), l'écoulement est constitué d'une boucle convective occupant toute la cavité où le fluide monte à la paroi chaude, traverse la cavité, descend à la

1. Dans le cas où les effets non linéaires ne sont pas négligeables, la vitesse dans la cavité 3D est plutôt proportionnelle à $\sqrt{Gr}$ et non pas à Gr comme le prédit le modèle analytique de Hadley.

paroi froide pour ensuite retraverser la cavité dans la direction opposée. Lorsqu'on introduit la rotation (Figs. 5.3b-5.3f), l'écoulement de base perd d'entrée les symétries S_l et S_π et ne conserve donc que la symétrie par rapport au centre S_c exprimée pour u dans le plan transverse V_t par : $(y,z) \to (-y,-z)$, $u \to -u$. De plus, selon que le taux de rotation, quantifié par le nombre de Taylor Ta, est fort ou faible par rapport au nombre de Grashof, nous allons observer deux régimes d'écoulement très différents, aussi bien dans la structure spatiale globale de l'écoulement que dans l'efficacité thermique du transfert de chaleur entre la paroi chaude et la paroi froide. Nous appellerons ces régimes : régime convectif (à Ta faibles et modérés) et régime géostrophique (à Ta très forts).

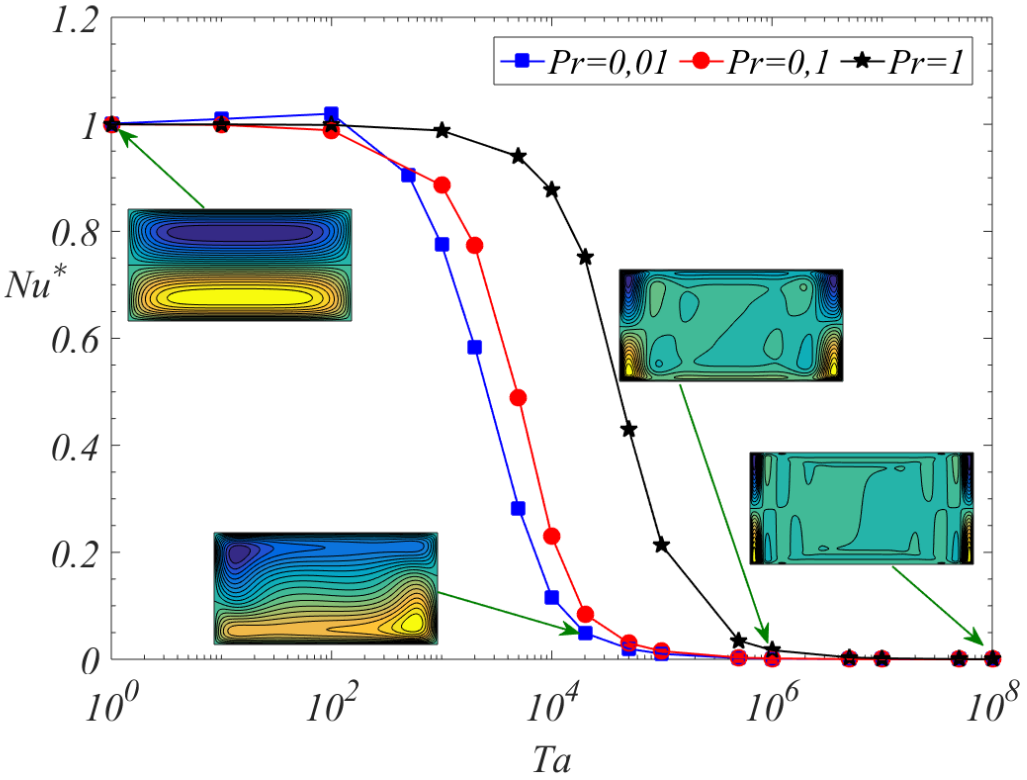


FIGURE 5.2 – Nombre de Nusselt normalisé Nu^* en fonction du nombre de Taylor pour différents nombres de Prandtl et pour $Gr = 10^4$. Les encarts représentent les contours de la vitesse longitudinale $u(y,z)$ dans le plan transverse V_t à $x = 0$.

Afin de voir l'effet de la rotation sur le transfert thermique, nous avons défini un nombre de Nusselt normalisé Nu^*, tel que

$$Nu^* = \frac{Nu(Ta) - Nu_D}{Nu_0 - Nu_D},$$

où $Nu(Ta) = (1/A_Y A_Z) \int_y \int_z (\partial\Theta/\partial x)_{x=\pm A_X/2}\, dydz$ est le nombre de Nusselt d'un cas donné en fonction de Ta, Nu_D est le nombre de Nusselt correspondant au cas purement diffusif ($Nu_D = 1$) et Nu_0 est le nombre de Nusselt correspondant au cas sans rotation ($Ta = 0$). Avec cette définition de Nu^*, on obtient deux asymptotes : lorsque le transfert de chaleur s'effectue par l'écoulement convectif sans rotation ($Ta = 0$), Nu^* tend vers 1, tandis que dans le cas où le transfert de chaleur s'effectue uniquement par conduction, Nu^* tend alors vers 0.

La figure 5.2 montre la variation du nombre de Nusselt normalisé Nu^* en fonction du nombre de Taylor Ta pour trois nombres de Prandtl ($Pr = 0,01$, $0,1$ et 1). Sur cette figure, nous voyons que le nombre de Nusselt normalisé évolue selon le nombre de Taylor entre les deux valeurs plateaux 1 et 0 avec un domaine transitoire intermédiaire dépendant du nombre de Prandtl. En effet, $Nu^* \to 1$ ($Nu(Ta) \approx Nu_0$) quand Ta est faible ou modéré (ce qui est bien mis en évidence par l'échelle logarithmique utilisée pour Ta), diminue rapidement dans une région qui dépend du nombre de Prandtl ($10^2 \leqslant Ta \leqslant 10^5$ pour $Pr = 0,01$ et $0,1$, et $10^3 \leqslant Ta \leqslant 10^6$ pour $Pr = 1$), et finalement atteint la limite $Nu^* \to 0$ ($Nu(Ta) \approx Nu_D$) quand Ta est très grand. Ces variations sont en lien avec les deux régimes d'écoulement que nous allons maintenant décrire plus précisément.

5.3.1 Régime convectif

Pour des nombres de Taylor faibles et modérés, l'écoulement principal (boucle convective longitudinale) est dévié vers la droite de la composante dominante. Le long de la cavité, la composante dominante est la composante longitudinale, u, parallèle au gradient de température, ce qui engendrera la création d'une composante transverse, v. Cette dernière devient de plus en plus importante et participe à la déviation de la boucle initiale qui va devenir diagonale à des nombres de Taylor modérés. Les figures 5.3b et 5.3c donnant les contours de la composante longitudinale $u(y,z)$ dans le plan transverse V_t et les figures 5.4b et 5.4c donnant pour cette même composante les iso-valeurs $\pm|u_{max}|/2$, pour $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^4$, montrent cette déviation vers la droite de la boucle initiale présentée sur les figures 5.3a et 5.4a. Nous observons aussi sur la figure 5.3 un déclin de l'intensité de l'écoulement dont nous parlerons plus en détail dans la suite.

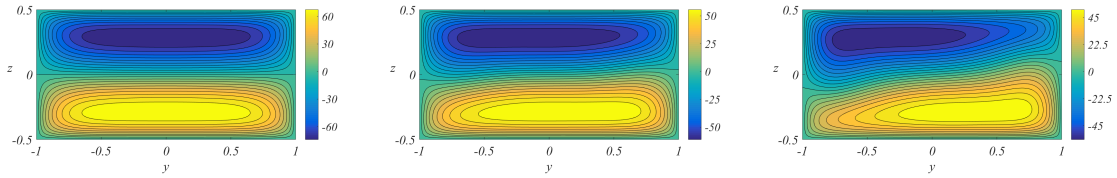
Du point de vue de la thermique et notamment du transfert de chaleur, la figure 5.5a donne les isothermes du champ $\Theta(x,z)$ dans le plan longitudinal V_l. Tout en tenant compte des conditions aux limites thermiques imposées, la déformation de ces isothermes est due au transport convectif assuré par le champ de vitesse. Nous constatons donc la persistance du transport de chaleur convectif dans ce cas, ce qui, sur la figure 5.2 donnant Nu^* en fonction de Ta, nous situe dans le domaine de Ta où $Nu^* \approx 1$ et dans la région intermédiaire de décroissance de Nu^*.

5.3.2 Régime géostrophique

Lorsque le nombre de Taylor devient important, un autre type de structure spatiale s'impose. En effet, on voit apparaitre une structure particulière (Figs. 5.3e et 5.3f) constituée de deux rouleaux longitudinaux concentrés près des parois latérales, là où la vitesse sans effet de rotation est généralement faible en raison de l'adhérence du fluide aux parois (donc faible effet de la rotation), qui sont mutuellement alimentés par des écoulements transversaux dans la partie centrale de la cavité (présence des couches d'Ekman, d'épaisseur $\delta_E \sim Ta^{-1/4}$) et verticaux le long des parois latérales (présence des couches de Stewartson, d'épaisseur $\delta_S \sim Ta^{-1/6}$). Ces couches limites sont clairement observables sur la figure 5.6 donnant les contours du module du champ de vitesse dans des plans transverses parallèles au plan V_t le long de la cavité à $Ta = 10^6$ et 10^7, pour $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^4$. L'écoulement à des nombres de Taylor importants est donc fortement dominé par la dynamique de ces couches limites (Stewartson, 1957, 1966; Hide & Titman, 1967; van de Vooren, 1992).

Pour expliquer la formation de ces deux rouleaux de paroi, nous devons revenir sur le mécanisme de déclin de l'écoulement. Pour faire simple, nous nous plaçons dans la

(a) $Ta = 0$ (b) $Ta = 10^2$ (c) $Ta = 10^3$



(d) $Ta = 10^4$ (e) $Ta = 10^6$ (f) $Ta = 10^7$

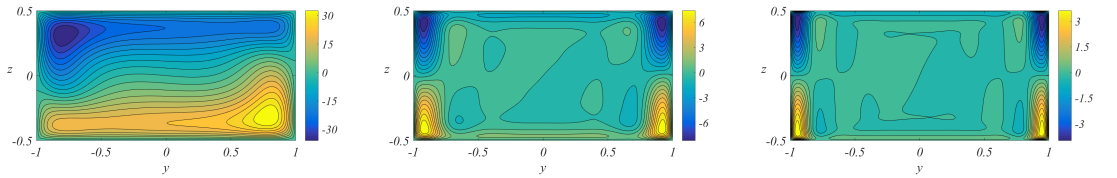
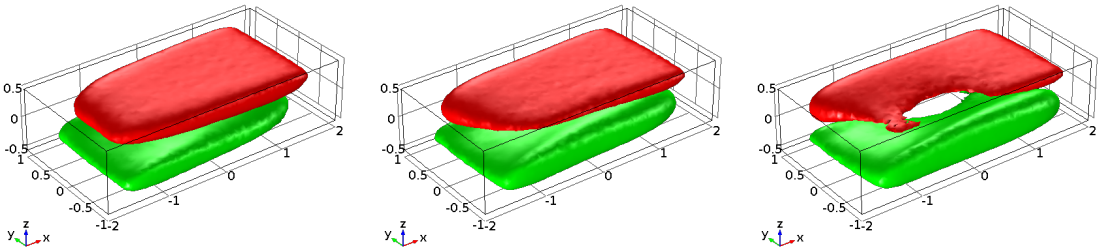


FIGURE 5.3 – Contours de la composante longitudinale $u(y,z)$ dans le plan transverse V_t à $x = 0$, en fonction du nombre de Taylor pour $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^4$.

(a) $Ta = 0$ (b) $Ta = 10^2$ (c) $Ta = 10^3$



(d) $Ta = 10^4$ (e) $Ta = 10^6$ (f) $Ta = 10^7$

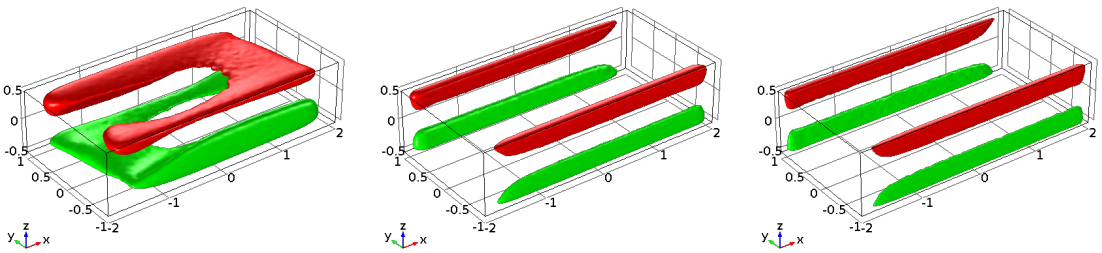


FIGURE 5.4 – Iso-valeurs 3D de la composante longitudinale $u(x,y,z)$ correspondant en valeur absolue à $|u_{max}|/2$, positives (vertes) et négatives (rouges), en fonction du nombre de Taylor pour $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^4$.

partie inférieure de la cavité où la composante dominante est positive ($u \geqslant 0$). Nous montrons sur la figure 5.7 un schéma qualitatif des effets induits par la rotation, les conditions aux limites et le confinement, et qui conduisent à la structure observée en régime géo-

(a) (b)

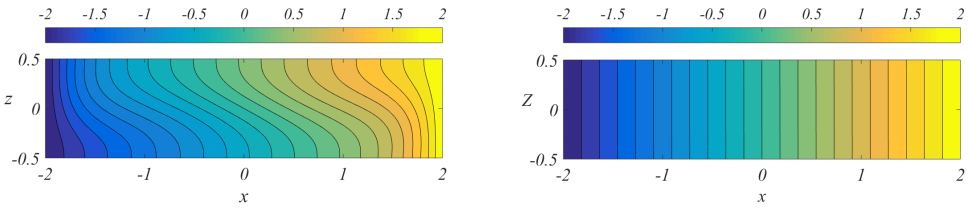


FIGURE 5.5 – Isothermes du champ de température $\Theta(x,z)$ dans le plan longitudinal V_l à $y = 0$ pour (a) $Ta = 10$ (régime convectif) et (b) $Ta = 1 \times 10^8$ (régime géostrophique). Les nombres de Grashof et de Prandtl sont fixés respectivement à $Gr = 10^4$ et $Pr = 0,01$.

(a) $Ta = 10^6$ (b) $Ta = 10^7$

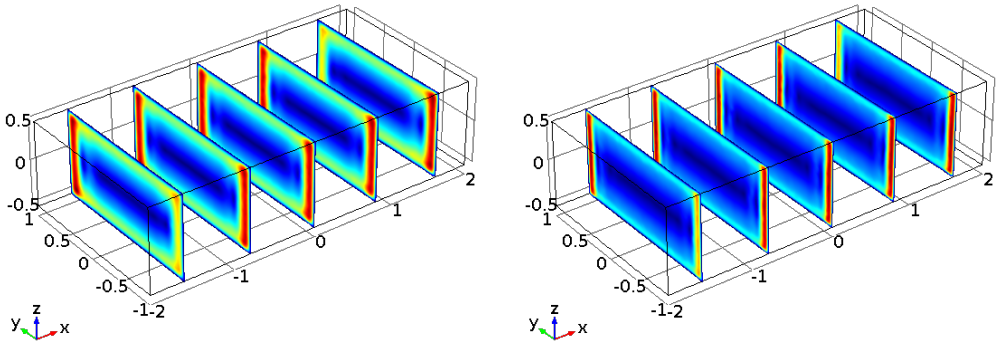


FIGURE 5.6 – Contours du module du champ de vitesse dans des plans transverses le long de la cavité, en fonction du nombre de Taylor pour $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^4$.

strophique. En effet, un écoulement initial sans rotation d'une vitesse $u' \geqslant 0$ va créer un courant transverse d'une vitesse négative $v \leqslant 0$ par l'action de la force de Coriolis. Ce dernier, subit aussi cet effet Coriolis et crée un autre courant qui lui est transverse (courant longitudinal, de vitesse négative dans notre repère, $u'' \leqslant 0$). La composante longitudinale totale dans le cas avec rotation est donc la somme de tous les courants de la boucle soit $u = u' - u''$. Ce mécanisme explique de façon générale la diminution de l'intensité de l'écoulement lorsque le nombre de Taylor augmente et il est particulièrement efficace dans le cœur de la cavité. Par contre, nous avons une condition d'adhérence du fluide aux

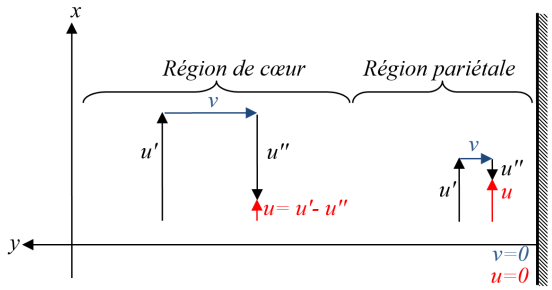


FIGURE 5.7 – Schéma montrant le mécanisme proposé permettant de créer les rouleaux longitudinaux dans le cas de l'écoulement géostrophique à des grands nombres de Taylor. Vue de dessus de la cavité, x direction longitudinale, y direction transverse.

parois impliquant $u = v = 0$ sur les parois ainsi que la condition d'imperméabilité donnant

$\partial v/\partial y = 0$. La combinaison de ces conditions fait que l'écoulement dans la région pariétale, originellement moins intense, va être moins affecté par le mécanisme de freinage dû à la rotation et finir par être prépondérant par rapport à l'écoulement de cœur. Un comportement assez similaire est observé dans ce même type de cavité chauffée en présence d'un champ magnétique vertical (Ben Hadid & Henry, 1997) : à fort champ (caractérisé par un fort nombre de Hartmann Ha), l'écoulement est fortement réduit dans le cœur de la cavité (décroissance en Ha^{-2}) et devient prépondérant près des parois latérales dans les couches dites parallèles (décroissance plus limitée en Ha^{-1}). Dans notre cas, à fort taux de rotation, l'écoulement de cœur est fortement réduit avec une décroissance en $Ta^{-1/2}$, telle que nous l'avons démontrée analytiquement et numériquement précédemment, et l'écoulement devient plus intense au niveau des rouleaux dans la région des parois avec une décroissance plus lente en $Ta^{-1/3}$. Cette décroissance en $Ta^{-1/3}$ est mise en évidence sur la figure 5.8.

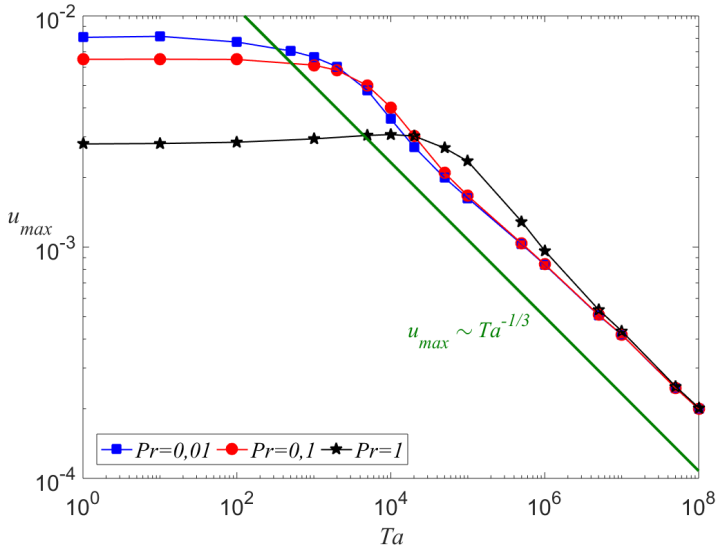


FIGURE 5.8 – Maximums de la vitesse longitudinale en fonction du nombre de Taylor pour différents nombres de Prandtl et pour $Gr = 10^4$.

Le transfert de chaleur dans le cas de cet écoulement est effectué par conduction et correspond sur la figure 5.2 au domaine des forts nombres de Taylor où $Nu^* \to 0$. En effet, la figure 5.5b montre les isothermes de $\Theta(x,z)$ dans le plan longitudinal V_l à $y = 0$ pour $Gr = 10^4$ et $Pr = 0,01$ à $Ta = 10^8$ où les effets de la rotation sont dominants. On y observe clairement que les isothermes sont parallèles, signature d'un processus diffusif. Ceci s'explique par le fait que l'intensité de l'écoulement est fortement réduite lorsqu'on est dans ce régime géostrophique.

5.3.3 Couches limites

D'un point de vue de la dynamique des couches limites d'Ekman et de Stewartson, nous nous sommes intéressés à la variation de leur épaisseur en fonction du nombre de Taylor afin d'en tirer des lois asymptotiques. Pour ce faire, nous les avons définies à partir des profils de vitesse tracés sur des lignes passant par le centre (voir Fig. 5.9). Pour déterminer l'épaisseur de la couche d'Ekman δ_E, nous avons tracé $u(z)$ à $x = y = 0$ (Fig.

5.9a), tandis que pour déterminer l'épaisseur de la couche de Stewartson δ_S, nous avons tracé $w(y)$ à $x = z = 0$ (Fig. 5.9b). Il est à noter qu'afin d'assurer une meilleure résolution de ces couches limites, les profils obtenus numériquement sur les points du maillage ont été interpolés sur 500 points en utilisant l'interpolation de Lagrange inhérente à notre code de calcul.

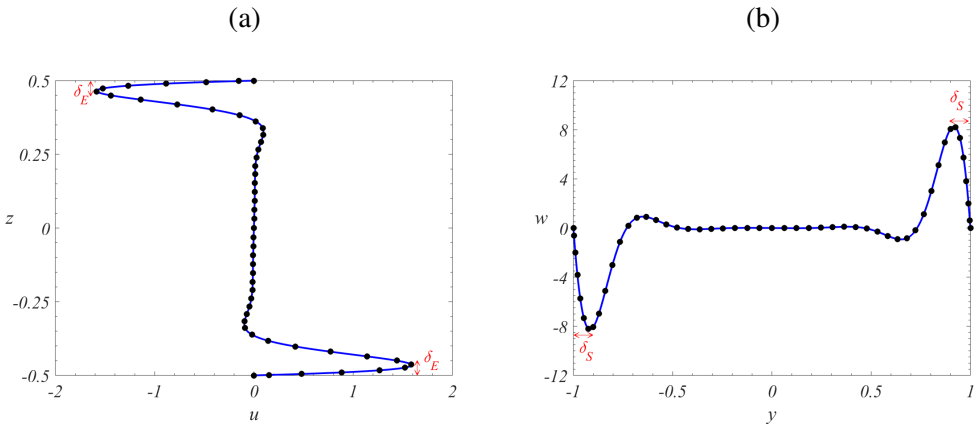


FIGURE 5.9 – Profils de vitesse en régime géostrophique : (a) $u(z)$ à $x = y = 0$ indiquant la couche d'Ekman d'épaisseur δ_E et (b) $w(y)$ à $x = z = 0$ indiquant la couche de Stewartson d'épaisseur δ_S pour $Ta = 10^6$, $Pr = 0,01$ et $Gr = 10^4$. Points numériques indiqués par des cercles noirs et interpolation Lagrangienne donnée par la ligne continue.

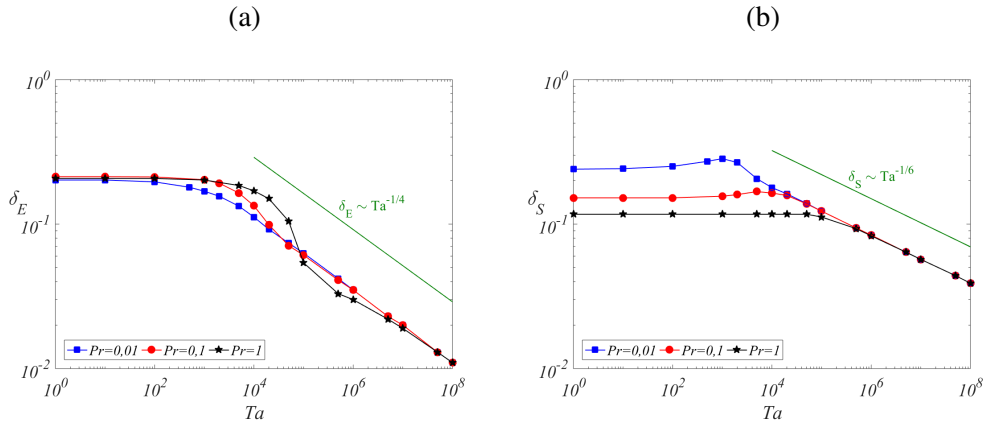


FIGURE 5.10 – Épaisseurs des couches limites (a) d'Ekman δ_E et (b) de Stewartson δ_S en fonction du nombre de Taylor pour différents nombres de Prandtl et pour $Gr = 10^4$.

Nous donnons sur la figure 5.10 la variation des épaisseurs des couches d'Ekman (Fig. 5.10a) et de Stewartson (Fig. 5.10b) en fonction du nombre de Taylor pour trois nombres de Prandtl. Sur ces figures, nous avons tracé les lois asymptotiques existant dans la littérature (Stewartson, 1957, 1966; Hide & Titman, 1967; van de Vooren, 1992), à savoir, $\delta_E \sim Ta^{-1/4}$ et $\delta_S \sim Ta^{-1/6}$. Lorsque le nombre de Taylor est grand, nos résultats issus de la simulation numérique tridimensionnelle montrent une bonne concordance avec ces lois de variations asymptotiques, ce qui confirme notre analyse à forts niveaux de rotation.

5.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude de l'écoulement de base stationnaire dans une cavité chauffée latéralement et soumise à la rotation autour de l'axe vertical parallèle à la gravité. En fonction du nombre de Taylor quantifiant le taux de rotation, nous avons observé deux régimes différents.

Le premier régime, observé à des nombres de Taylor faibles et modérés, est un régime convectif avec un rouleau convectif s'orientant selon la diagonale de la cavité et des vitesses encore peu réduites.

Le deuxième régime, valable à des nombres de Taylor forts, est un régime géostrophique dominé par des couches limites parallèle et normale à l'axe de rotation, dites respectivement de Stewartson et d'Ekman. L'écoulement principal, fortement réduit en intensité avec des lois en $Ta^{-1/2}$ dans le coeur et $Ta^{-1/3}$ dans la région des parois, est constitué de deux rouleaux longitudinaux, localisés près des parois latérales, connectés entre eux et alimentés par des courants transversaux (couches d'Ekman) et verticaux (couches de Stewartson).

Dans ce cas de rotation rapide, les lois de variation des épaisseurs de couches limites ont été vérifiées et sont données par $\delta_E \sim Ta^{-1/4}$ pour la couche horizontale d'Ekman et $\delta_S \sim Ta^{-1/6}$ pour la couche verticale de Stewartson.

Le processus de transfert de chaleur entre les parois chaude et froide se trouve aussi affecté selon le régime d'écoulement. A Gr et Pr fixés, on a trouvé que le transfert de chaleur s'effectue par convection dans le premier régime à Ta modéré, tandis qu'il est conductif dans le second régime à Ta grand. Ceci s'explique par la forte réduction de l'intensité de l'écoulement induite par la rotation.

CONCLUSION GÉNÉRALE & PERSPECTIVES

Cette thèse s'est inscrite dans le cadre d'un projet international (PHC-Maghreb) lié à la croissance cristalline. De ce fait, nous nous somme intéressés à une configuration particulière de croissance, *le procédé de Bridgman horizontal* où un bain fondu d'un métal liquide est tiré lentement dans un gradient de température horizontal et est le siège d'une circulation convective. Dans ce cas, la connaissance et la compréhension du développement des instabilités hydrodynamiques affectant cette circulation et diminuant considérablement la qualité du produit final solidifié demeurent essentielles en vue d'améliorer et de contrôler ce type de procédé.

Le premier et le deuxième chapitre de cette thèse ont été dédiés à la bibliographie liée à la stabilité de la convection naturelle dans les métaux liquides en cavités étendues ou confinées (mono-, bi- et tridimensionnelles), aux effets des ondes acoustiques, du champ magnétique (avec différentes orientations) et finalement de la rotation. Puis, le modèle mathématique, utilisant l'approximation de Boussinesq, a été présenté ainsi qu'un adimensionnement permettant de faire apparaitre les paramètres de contrôle pertinents dans cette situation. Finalement, les techniques de continuation des solutions stationnaires (points fixes) et oscillatoires (cycles limites) développées récemment sont présentées.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié en détails les scénarios de bifurcation dans une cavité tridimensionnelle de dimensions $4 \times 2 \times 1$ (longueur $\times$ largeur $\times$ hauteur). La dynamique non-linéaire dans ce cas est examinée pour des nombres de Prandtl Pr allant de 0 à 0,025 (valeurs typiques des métaux liquides) et en fonction du nombre de Grashof. A des nombres de Grashof faibles, et pour toutes les valeurs du nombre de Prandtl, il existe une solution stationnaire avec trois symétries (gauche/droite, S_l, rotation, S_π et par rapport au centre, S_c) où le fluide monte du côté de la paroi chaude et redescend du côté de la paroi froide tout en traversant la cavité longitudinalement. Lorsque le nombre de Grashof Gr est augmenté, cette solution entièrement symétrique subit une cascade de bifurcations jusqu'à devenir quasi-périodique avec symétrie par rapport au centre uniquement. Il s'avère, d'après notre étude, que le scénario de cette cascade dépend fortement du nombre de Prandtl. Contrairement à la situation de Rayleigh-Bénard où plusieurs solutions stationnaires avec différentes symétries existent, nous avons obtenu uniquement deux solutions stationnaires : la première est celle présente à bas nombre de Grashof ayant les symétries S_π, S_l et S_c et la deuxième est une solution qui ne conserve que la symétrie gauche/droite S_l. Cette deuxième solution naît à partir d'une bifurcation fourche super-critique et est stable dans certaines plages de Pr. En plus de ces deux solutions stationnaires, plusieurs solutions oscillatoires ont été observées. Leur stabilité ainsi que les scénarios de naissance et de transition entre ces solutions ont été examinés en détails en faisant varier le nombre de Prandtl entre 0 et 0,025. Dans tous les cas, à l'exception du cas $Pr = 0,013$, la transition finit par un cycle avec symétrie par rapport

au centre qui se déstabilise à une bifurcation de Neimark-Sacker de même symétrie et donne une solution quasi-périodique. Suivant les plages de Pr, la dynamique est plus ou moins complexe et met en jeu différentes solutions stationnaires, oscillatoires périodiques et quasi-périodiques. En résumé, nous avons obtenu sur l'intervalle étudié de Pr quatorze solutions dont deux solutions stationnaires (points fixes), huit solutions oscillatoires (cycles limites) et finalement quatre solutions quasi-périodiques (tores).

Après avoir étudié les instabilités conduisant aux écoulements quasi-périodiques dans une cavité tridimensionnelle, nous nous somme intéressés aux effets de la rotation d'axe vertical, parallèle à la gravité. Ces effets sont quantifiés à travers le nombre de Taylor Ta.

Dans le quatrième chapitre, nous avons développé un modèle analytique monodimensionnel simplifié afin de tenir compte des effets de la rotation. Ce modèle est basé sur l'hypothèse de rapports d'aspects très grands $(A_X, A_Y) \gg 1$ dans les directions horizontales Ox et Oy. Dans ce cas, les effets de la force de Coriolis participent à la dynamique et modifient à la fois l'écoulement de base par la création de vitesses transverses et la stabilité de celui-ci. La vitesse transverse créée par la rotation varie proportionnellement à $Ta^{1/2}$ tandis que l'écart, par rapport à la configuration sans rotation, de la vitesse longitudinale suit une loi linéaire en Ta. L'intensité de cet écoulement diminue ensuite (pour $Ta \gg 1$) suivant une loi en $Ta^{-1/2}$ avec le développement d'une couche limite d'Ekman dont l'épaisseur δ_E varie comme $\delta_E \sim Ta^{-1/4}$.

Nous avons ensuite étudié l'effet de la rotation sur la stabilité linéaire de cet écoulement. Comme dans le cas de Rayleigh-Bénard, la rotation possède un caractère stabilisant, et ce pour toutes les instabilités, quelles que soient leurs natures et leurs origines (dynamique ou thermique). Une analyse énergétique aux seuils de chaque instabilité a été effectuée afin de déterminer le rôle de chaque effet physique dans le déclenchement ou l'amortissement de celle-ci. Toutes nos analyses montrent que l'effet de la rotation sur l'écoulement de base, en particulier la suppression des gradients, est primordial dans sa stabilisation.

Enfin, les effets du confinement tridimensionnel sur l'écoulement de convection naturelle avec rotation sont examinés en fonction du nombre de Taylor. Une première étape était de confronter les résultats tridimensionnels au modèle analytique. Dans le cœur, loin des effets de paroi, le modèle analytique de Hadley (chapitre 4) s'est avéré en très bon accord avec la simulation numérique. Ensuite, et selon la plage des valeurs du nombre de Taylor (forts ou faibles Ta), nous avons pu mettre en évidence deux régimes d'écoulement complètement différents, aussi bien dans leur structure spatiale que dans leur comportement thermique.

Le premier régime d'écoulement est convectif et est caractérisé par la création de vitesses transverses à la composante dominante de l'écoulement. Ces vitesses transverses vont contribuer à la diagonalisation de la boucle convective longitudinale existant dans le cas sans rotation. En fait, nous nous retrouvons avec une boucle de convection s'étalant sur la diagonale de la cavité et non pas entre les parois chaude et froide. Sur le plan thermique, ce type d'écoulement reste convectif. Ce régime existe pour des valeurs modérées du nombre de Taylor.

Le deuxième régime observé est un régime dominé par la rotation et donc géostrophique. Dans ce cas, la structure de l'écoulement est composée de deux rouleaux longitudinaux concentrés dans la région des parois latérales et alimentés transversalement par des courants dans les couches d'Ekman, d'épaisseur $\delta_E \sim Ta^{-1/4}$, et verticalement par des courants dans les couches de Stewartson, d'épaisseur $\delta_S \sim Ta^{-1/6}$. La thermique ici devient diffusive car la convection est fortement réduite.

Ce travail ne constitue pas une fin en soit. En guise de perspectives, le cinquième chapitre que nous avons présenté constitue un début vers des études plus concrètes de contrôle des écoulements en situation de chauffage latéral par la rotation. Nous ne nous sommes intéressés dans cette thèse qu'à l'écoulement de base tridimensionnel, mais des études préliminaires ont montré des changements importants au niveau des diagrammes de bifurcation, ce que nous allons approfondir durant la dernière année de ce projet PHC-Maghreb.

Nous avons aussi montré l'existence de plusieurs solutions convectives avec différentes symétries. Malgré les études magnétohydrodynamiques poussées développées en vue d'un contrôle des instabilités, aucune d'entre elles ne s'est focalisée sur l'efficacité de l'orientation du champ magnétique appliqué par rapport à la symétrie des solutions oscillatoires. La question qu'on peut par exemple se poser est : *" Est-ce qu'un champ magnétique d'orientation X serait plus ou moins efficace dans la stabilisation d'une solution oscillatoire de symétrie Y ?"*. La combinaison des effets magnétohydrodynamiques avec ceux dus à la rotation est une tâche encore plus compliquée, mais reste aussi envisageable.

Enfin, cette thèse s'est focalisée sur le problème des instabilités oscillatoires d'une manière fondamentale et académique. Il serait intéressant dans l'avenir de se diriger aussi vers des situations plus pratiques, en appliquant les outils utilisés dans cette thèse, notamment le suivi des cycles limites.

ANNEXE A

PRODUCTION SCIENTIFIQUE

- **PUBLICATIONS INTERNATIONALES DE RANG A :**
  - ➢ A. Medelfef, D. Henry, A. Bouabdallah, S. Kaddeche et R. Boussàa, Effect of rotation on the stability of side-heated buoyant convection between infinite horizontal walls, *Phys. Rev. Fluids*, vol. 2(9), DOI 10.1103/PhysRevFluids.2.093902, 093902 (2017).
  - ➢ A. Medelfef, D. Henry, A. Bouabdallah et S. Kaddeche, Bifurcations from steady to quasi-periodic flows in a laterally heated cavity filled with low-Prandtl number fluids, *J. Fluid Mech.*, vol. 861 , DOI 10.1017/jfm.2018.912, pp. 223-252 (2018).
- **CONGRÈS ET CONFÉRENCES :**
  - ➢ A. Medelfef, D. Henry, R. Boussàa et A. Bouabdallah, Efftes de la rotation et du champ magnétique sur la convection Naturelle en cavité differentiellement chauffée, *JSP'20*, Faculté de physique, USTHB, Algérie, 2016.
  - ➢ A. Medelfef, D. Henry, A. Bouabdallah, S. Kaddeche et R. Boussàa, Stabilité de la convection naturelle due à un gradient de température horizontal dans un fluide en rotation uniforme, *Congrès Marocain de Mécanique*, Meknès, Maroc, 2017.
  - ➢ A. Medelfef, D. Henry, A. Bouabdallah, R. Boussàa, S. Kaddeche et V. Botton, Écoulements tridimensionnels dans une cavité chauffée latéralement et soumise à une rotation, *Congrès Français de Mécanique*, Lille, France, 2017.
  - ➢ A. Medelfef, D. Henry, A. Bouabdallah et S. Kaddeche, Bifurcation analysis of laterally heated buoyant convection in low-Prandtl number fluids, *12th European Fluid Mechanics Conference*, Vienna, Austria, 2018.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ACHOUR, M., KADDECHE, S., GHARBI, A., BEN HADID, H. & HENRY, D. (2005). On the stability of the Hadley flow under the action of an acoustic wave. *Fluid Dynamics & Materials Processing*, 1:277–283.

AFRID, M. & ZEBIB, A. (1990). Oscillatory three-dimensional convection in rectangular cavities and enclosures. *Phys. Fluids*, 2(8):1318–1327.

ARISTOV, S. N. & FRIK, P. G. (1988). Large-scale turbulence in a thin layer of non-isothermal rotating fluid. *Fluid Dynamics*, 23:522–528.

BACHAROUDIS, E., VRACHOPOULOS, M. G., KOUKOU, M. K., MARGARIS, D., FILIOS, A. E. & MAVROMMATIS, S. A. (2007). Study of the natural convection phenomena inside a wall solar chimney with one wall adiabatic and one wall under a heat flux. *Applied Thermal Engineering*, 27(13):2266 – 2275.

BATCHELOR, G. K. (1954). Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 12(3):209–233.

BEJAN, A. (2013). *Convection Heat Transfer*. John Wiley & Sons, Inc.

BEN HADID, H. & HENRY, D. (1997). Numerical study of convection in the horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field. Part 2: Three dimensional flow. *J. Fluid Mech.*, 333:57–83.

BEN HADID, H., HENRY, D. & KADDECHE, S. (1997). Numerical study of convection in the horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field. Part 1: Two dimensional flow. *J. Fluid Mech.*, 333:23–56.

BERGEON, A., HENRY, D., BEN HADID, H. & TUCKERMAN, L. S. (1998). Marangoni convection in binary mixtures with Soret effect. *J. Fluid Mech.*, 375:143–177.

BRAUNSFURTH, M. G. & MULLIN, T. (1996). An experimental study of oscillatory convection in liquid gallium. *J. Fluid Mech.*, 327:199–219.

CHANDRASEKHAR, S. (1961). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford University Press.

CHIKULAEV, D. G. & SHVARTS, K. G. (2015). Effect of rotation on the stability of advective flow in a horizontal liquid layer with solid boundaries at small Prandtl numbers. *Fluid Dynamics*, 50:215–222.

CORMACK, D. E., LEAL, L. & IMBERGER, J. (1974a). Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Part 1. Asymptotic theory. *J. Fluid Mech.*, 65(2):209–229.

CORMACK, D. E., LEAL, L. & SEINFELD, J. H. (1974b). Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Part 2. Numerical solutions. *J. Fluid Mech.*, 65(2):231–246.

CROCHET, M. J., GEYLING, F. T. & SCHAFTINGEN, J. J. V. (1983). Numerical simulation of the horizontal Bridgman growth of a gallium arsenide crystal. *J. Cryst. Growth*, 65:166–172.

CROCHET, M. J., GEYLING, F. T. & SCHAFTINGEN, J. J. V. (1987). Numerical simulation of the horizontal Bridgman growth. Part I: Two-dimensional flow. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7(1):29–47.

CUSHMAN-ROISIN, B. (1994). *Introduction to geophysical fluid dynamics*. Prentice Hall.

DAVIAUD, F. & VINCE, J. M. (1993). Traveling waves in a fluid layer subjected to a horizontal temperature gradient. *Phys. Rev. E*, 48:4432–4436.

DELGADO-BUSCALIONI, R. (2001). Convection patterns in end-heated inclined enclosures. *Phys. Rev. E*, 64:016303.

DELGADO-BUSCALIONI, R. & CRESPO DEL ARCO, E. (1999). Stability of thermally driven shear flows in long inclined cavities with end-to-end temperature difference. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 42(15):2811 – 2822.

DHANARAJ, G., BYRAPPA, K., PRASAD, V. & DUDLEY, M. (2010). *Springer handbook of crystal growth*. Springer, Berlin, Heidelberg.

DRIDI, W., HENRY, D. & BEN HADID, H. (2007). Influence de l'acoustic streaming sur la stabilité d'une couche de fluide isotherme ou chauffée latéralement. *C. R. Mecanique*, 335:238–244.

DRIDI, W., HENRY, D. & BEN HADID, H. (2010). Stability of buoyant convection in a layer submitted to acoustic streaming. *Phys. Rev. E*, 81:056309.

DUPONT, S., MARCHAL, J. M., CROCHET, M. & GEYLING, F. T. (1987). Numerical simulation of the horizontal Bridgman growth. Part II: Three-dimensional flow. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7(1):49–67.

FULTZ, D. (1951). Experimental analogies to atmospheric motions. *In Compendium of Meteorology*.

GARANDET, J., ALBOUSSIÈRE, T. & MOREAU, R. (1992). Buoyancy driven convection in a rectangular enclosure with a magnetic field. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35(4):741 – 748.

GELFGAT, A. Y., BAR-YOSEPH, P. Z. & YARIN, A. L. (1999a). Non-symmetric convective flows in laterally heated rectangular cavities. *Int. J. Comput. Fluid Dynam.*, 11:261–273.

GELFGAT, A. Y., BAR-YOSEPH, P. Z. & YARIN, A. L. (1999b). Stability of multiple steady states of convection in laterally heated cavities. *J. Fluid Mech.*, 388:315–334.

GERSHUNI, G., LAURE, P., MYZNIKOV, V., ROUX, B. & ZHUKHOVITSKY, E. (1992). On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers. *Microgravity Q.*, 2:141–151.

GHIL, M., READ, P. & SMITH, L. (2010). Geophysical flows as dynamical systems: the influence of Hide's experiments. *Astronomy & Geophysics*, 51:4.28–4.35.

GILL, A. E. (1974). A theory of thermal oscillations in liquid metals. *J. Fluid Mech.*, 64:577–588.

GLATZMAIER, G. A. & ROBERTS, P. H. (1995). A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Phys. Earth Planet. Inter*, 91:63–75.

GRESHO, P. M. & SANI, R. L. (1987). On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 7(10):1111–1145.

HADLEY, G. S. (1735). Concerning the cause of the general trade winds. *Phil. Trans.*, 29:58–62.

HART, J. E. (1972). Stability of thin non-rotating Hadley circulations. *J. Atmos. Sci.*, 29:687–696.

HENRY, D. & BEN HADID, H. (2007a). Multiple flow transitions in a box heated from the side in low-Prandtl-number fluids. *Phys. Rev. E*, 76:016314.

HENRY, D. & BEN HADID, H. (2007b). Multiple modes of instability in a box heated from the side in low-Prandtl-number fluids. *Phys. Fluids*, 19:081702.

HENRY, D. & BUFFAT, M. (1998). Two- and three-dimensional numerical simulations of the transition to oscillatory convection in low-Prandtl-number fluids. *J. Fluid Mech.*, 374:145–171.

HENRY, D., JUEL, A., BEN HADID, H. & KADDECHE, S. (2008). Directional effect of a magnetic field on oscillatory low-Prandtl-number convection. *Phys. Fluids*, 20(3): 034104.

HIDE, R. (1953). Some experiments on thermal convection in a rotating liquid. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 79(339):161.

HIDE, R. (2010). Path of discovery in geophysical fluid dynamics. *Astronomy & Geophysics*, 51:4.16–4.23.

HIDE, R. & MASON, P. J. (1975). Sloping convection in a rotating fluid. *Advances in Physics*, 24(1):47–100.

HIDE, R. & TITMAN, C. W. (1967). Detached shear layers in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 29:39–60.

HOF, B., JUEL, A. & MULLIN, T. (2005). Magnetohydrodynamic damping of oscillations in low-Prandtl-number convection. *J. Fluid Mech.*, 545:193–201.

HOF, B., JUEL, A., ZHAO, L., HENRY, D., BEN HADID, H. & MULLIN, T. (2004). On the onset of oscillatory convection in molten gallium. *J. Fluid Mech.*, 515:391–413.

HUDOBA, A. & MOLOKOV, S. (2018). The effect of the Prandtl number on magnetoconvection in a horizontal fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 116:1292–1303.

HUDOBA, A., MOLOKOV, S., ALEKSANDROVA, S. & PEDCENKO, A. (2016). Linear stability of buoyant convection in a horizontal layer of an electrically conducting fluid in moderate and high vertical magnetic field. *Phys. Fluids*, 28:094104.

HUNG, M. C. & ANDERECK, D. D. (1988). Transitions in convection driven by a horizontal temperature gradient. *Physics Letters A*, 132:253–258.

HURLE, D. T. J. (1966). Temperature oscillations in molten metals and their relationship to the growth state in melt grown crystals. *Phil. Mag.*, 13:305–310.

HURLE, D. T. J., JAKEMAN, E. & JOHNSON, C. P. (1974). Convective temperature oscillations in molten gallium. *J. Fluid Mech.*, 64:565–576.

JALURIA, Y. (2000). Fluid flow phenomena in materials processing—The 2000 Freeman scholar lecture. *ASME. J. Fluids Eng.*, 123(2):173–210.

JUEL, A., MULLIN, T., BEN HADID, H. & HENRY, D. (1999). Magnetohydrodynamic convection in molten gallium. *J. Fluid Mech.*, 378:97–118.

JUEL, A., MULLIN, T., BEN HADID, H. & HENRY, D. (2001). Three-dimensional free convection in molten gallium. *J. Fluid Mech.*, 436:267–281.

KADDECHE, S., HENRY, D. & BEN HADID, H. (2003). Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient. *J. Fluid Mech.*, 480:185–216.

KARNIADAKIS, G. E., ISRAELI, M. & ORSZAG, S. A. (1991). High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Physics*, 97(2):414 – 443.

KLAUSMEIER, C. A. (2008). Floquet theory: a useful tool for understanding nonequilibrium dynamics. *Theor. Ecol.*, 1:53–161.

KNUTOVA, N. S. & SHVARTS, K. G. (2015). A study of behavior and stability of an advective thermocapillary flow in a weakly rotating liquid layer under microgravity. *Fluid Dynamics*, 50:340–350.

KUHLBRODT, T., GRIESEL, A., MONTOYA, M., LEVERMANN, A., HOFMANN, M. & RAHMSTORF, S. (2007). On the driving processes of the Atlantic meridional overturning circulation. *Rev. Geophys.*, 45(2):2004RG000166.

KUO, H. P. & KORPELA, S. A. (1988). Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side. *Phys. Fluids*, 31(1):33–42.

LAGARIAS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H. & WRIGHT, P. E. (1998). Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, 9:1.112–1.147.

LAPPA, M. (2007a). Secondary and oscillatory gravitational instabilities in canonical three-dimensional models of crystal growth from the melt. Part 1: Rayleigh–Bénard systems. *C. R. Mécanique*, 335:253–260.

LAPPA, M. (2007b). Secondary and oscillatory gravitational instabilities in canonical three-dimensional models of crystal growth from the melt. Part 2: Lateral heating and Hadley circulation. *C. R. Mécanique*, 335:261–268.

LAPPA, M. (2010). *Convection: Patterns, Evolution and stability*. John Wiley & Sons, Inc.

LARMOR, J. (1919). How could a rotating body such as the Sun become a magnet? *Reports of the British Association*, 87:159–160.

LAURE, P. (1987). Étude des mouvements de convection dans une cavité rectangulaire soumise à un gradient de température horizontal. *J. Theo. App. Mechanics*, 6:351–382.

LAURE, P. & ROUX, B. (1989). Linear and non-linear analysis of the Hadley circulation. *J. Cryst. Growth*, 97:226–234.

LYUBIMOVA, T. P., LYUBIMOV, D. V., MOROZOV, V. A., BEN HADID, H. & HENRY, D. (2009a). Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 1. Effect of aspect ratio and Prandtl number. *J. Fluid Mech.*, 635:275–295.

LYUBIMOVA, T. P., LYUBIMOV, D. V., MOROZOV, V. A., HENRY, D. & BEN HADID, H. (2009b). Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 2. Effect of a magnetic field. *J. Fluid Mech.*, 635:297–319.

MAMUN, C. K. & TUCKERMAN, L. S. (1995). Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow. *Phys. Fluids*, 7(1):80–91.

MATHEWS, J. H. & FINK, K. D. (1999). *Numerical methods using Matlab*. Prentice Hall.

MCKELL, K. E., BROOMHEAD, D. S., JONES, R. & HURLE, D. T. J. (1990). Torus doubling in convecting molten gallium. *Europhysics Letters*, 12(6):513–518.

MEDELFEF, A., HENRY, D., BOUABDALLAH, A., KADDECHE, S. & BOUSSAA, R. (2017). Effect of rotation on the stability of side-heated buoyant convection between infinite horizontal walls. *Phys. Rev. Fluids*, 2:093902.

MEHDIZADEH, A. & OBERLACK, M. (2010). Analytical and numerical investigations of laminar and turbulent Poiseuille–Ekman flow at different rotation rates. *Phys. Fluids*, 22:105104.

MERCADER, I., BATISTE, O., RAMÍREZ-PISCINA, L., RUIZ, X., RÜDIGER, S. & CASADEMUNT, J. (2005). Bifurcations and chaos in single-roll natural convection with low Prandtl number. *Phys. Fluids*, 17(10):104108.

NAKAGAWA, Y. & FRENZEN, P. (1955). A theoretical and experimental study of cellular convection in rotating fluids. *Quart. J. Geophys.*, 7:1–21.

OKADA, K. & OZOE, H. (1993). The effect of aspect ratio on the critical Grashof number for oscillatory natural convection of zero Prandtl number fluid: numerical approach. *J. Cryst. Growth*, 126(2):330 – 334.

PATERA, A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Physics*, 54(3):468 – 488.

PIMPUTKAR, S. M. & OSTRACH, S. (1981). Convective effects in crystals grown from melts. *J. Cryst. Growth*, 55:614–646.

PRATTE, J. M. & HART, J. E. (1990). Endwall driven, low Prandtl number convection in a shallow rectangular cavity. *J. Cryst. Growth*, 102(1):54 – 68.

PUIGJANER, D., HERRERO, J., SIMÓ, C. & GIRALT, F. (2011). From steady solutions to chaotic flows in a Rayleigh–Bénard problem at moderate Rayleigh numbers. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(11):920 – 934.

PULICANI, J. P., ARCO, E. C. D., RANDRIAMAMPIANINA, A., BONTOUX, P. & PEYRET, R. (1990). Spectral simulations of oscillatory convection at low Prandtl number. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 10(5):481–517.

SÁNCHEZ, J., NET, M., GARCÍA-ARCHILLA, B. & SIMÓ, C. (2004). Newton-Krylov continuation of periodic orbits for Navier-Stokes flows. *J. Comp. Physics*, 201(1):13 – 33.

SEYDEL, R. (2010). *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer, New York.

SHVARTS, K. & BOUDLAL, A. (2010). Effect of rotation on stability of advective flow in horizontal liquid layer with a free upper boundary. *Journal of Physics: Conference Series*, 216:012005.

SHVARTS, K. G. (2005). Effect of rotation on the stability of advective flow in a horizontal fluid layer at a small Prandtl number. *Fluid Dynamics*, 40:193–201.

SHVARTS, K. G. (2012). Influence of slow rotation on the stability of a thermocapillary incompressible liquid flow in an infinite layer under zero-gravity conditions for small Prandtl number. *Fluid Dyn. Res.*, 44:031416.

STEWARTSON, K. (1957). On almost rigid rotations. *J. Fluid Mech.*, 03:17–26.

STEWARTSON, K. (1966). On almost rigid rotations. Part 2. *J. Fluid Mech.*, 26:131–144.

STONE, P. H. (1968). Some properties of Hadley regimes on rotating and non-rotating planets. *J. Atmos. Sci.*, 25:644–657.

STONE, P. H. (1974). The structure and circulation of the deep Venus atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 31:1981–1900.

TORRES, J. F., HENRY, D., KOMIYA, A. & MARUYAMA, S. (2014). Bifurcation analysis of steady natural convection in a tilted cubical cavity with adiabatic sidewalls. *J. Fluid Mech.*, 756:650–688.

TORRES, J. F., HENRY, D., KOMIYA, A., MARUYAMA, S. & BEN HADID, H. (2013). Three-dimensional continuation study of convection in a tilted rectangular enclosure. *Phys. Rev. E*, 88:043015.

van de VOOREN, A. I. (1992). The Stewartson layer of a rotating disk of finite radius. *J. Eng. Math.*, 26:131–152.

VANYO, J. P. (1993). *Rotating Fluids in Engineering and Science*. Butterworth-Heinemann.

WAKITANI, S. (2000). Numerical study of three-dimensional oscillatory natural convection at low Prandtl number in rectangular enclosures. *J. Heat Transfer*, 123:77–83.

WANG, T. & KORPELA, S. A. (1989). Convection rolls in a shallow cavity heated from a side. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1(6):947–953.

WILLIAMSON, N., ARMFIELD, S., LIN, W. & KIRKPATRICK, M. (2016). Stability and nusselt number scaling for inclined differentially heated cavity flow. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 97:787 – 793.

WINTERS, K. H. (1988). Oscillatory convection in liquid metals in a horizontal temperature gradient. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 25(2):401–414.

ZHANG, K. & ROBERT, P. H. (1997). Thermal inertial waves in a rotating fluid layer: Exact and asymptotic solutions. *Phys. Fluids*, 9:1980–1987.