



HAL
open science

Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires : Application à la dynamique des roues aubagées

Colas Joannin

► **To cite this version:**

Colas Joannin. Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires : Application à la dynamique des roues aubagées. Autre. Université de Lyon, 2017. Français. NNT : 2017LYSEC014 . tel-02613023

HAL Id: tel-02613023

<https://theses.hal.science/tel-02613023>

Submitted on 19 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

**ÉCOLE DOCTORALE MEGA
MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL - ACOUSTIQUE**

par

Colas JOANNIN

**RÉDUCTION DE MODÈLE PAR SOUS-STRUCTURATION ET MODES
NON-LINÉAIRES**

**-
APPLICATION À LA DYNAMIQUE DES ROUES AUBAGÉES**

Soutenue publiquement le 28 avril 2017, devant le jury d'examen :

P. CARTRAUD	Professeur, École Centrale de Nantes	Président
J.-F. DEÛ	Professeur, Conservatoire National des Arts et Métiers	Rapporteur
G. KERSCHEN	Professeur, Université de Liège	Rapporteur
L. BERTHE	Ingénieur méthodes et outils, Safran Helicopter Engines	Examineur
M. MBAYE	Ingénieur R&T Vibration, Safran Tech	Examineur
F. THOUVEREZ	Professeur, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
B. CHOUVION	Maître de conférences, École Centrale de Lyon	Co-encadrant

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail de thèse, ainsi que pour les échanges passionnants que nous avons pu avoir le jour de la soutenance. J'ai été sincèrement honoré de leur présence.

Un très grand merci à mon directeur de thèse, Fabrice Thouverez, pour la qualité de l'encadrement dont j'ai pu bénéficier durant ces trois années, me laissant une très grande autonomie tout en orientant judicieusement ce travail par ses précieux conseils. Je souhaite également remercier Benjamin Chouvion, pour ses retours minutieux sur l'ensemble des communications scientifiques qui ont jalonné ce travail de recherche, de la première conférence jusqu'à la soutenance, et qui contribuèrent grandement à en améliorer la qualité.

J'adresse de sincères remerciements à tous mes collègues du groupe Safran. Merci à Moustapha Mbaye de m'avoir offert cette opportunité alors que je ne recherchais qu'un stage de fin d'étude, et de l'intérêt porté à ce travail du premier au dernier jour. Merci à Loïc Berthe pour son investissement et son aide précieuse, notamment lorsqu'il fut question d'appliquer nos développements à un cas industriel pour en valider la pertinence. Merci également à Jean-Philippe Ousty pour la confiance qu'il m'a accordée en m'accueillant dans son équipe, tout en me laissant une grande liberté sur le plan géographique.

Un immense merci à l'ensemble des membres du LTDS. S'il est vrai qu'un travail de thèse peut parfois se révéler difficile, l'expérience n'en est pas moins plaisante lorsqu'on a la chance de venir travailler avec le sourire, et ce grâce à l'atmosphère que vous avez su créer durant ces trois années. C'est non sans une certaine appréhension que je vais tenter de n'oublier personne dans les lignes qui vont suivre. Mille mercis à Pierre G., Adrien M., Antoine M., Kevin S., Patricio A., Jérôme L., Lionel S., Xavier L., Sandra D., Alexa D., Bruno M., Cécile D., Étienne L., Laura G., Claude G., Zihan S., Josselin P., Gabriel H., Nicolas G., Antony B., Nicolas D.-P., Julien V., Guillaume D., Marie-Océane P., Clara O., Mélodie M., Denis B., Maxence C., Antoine G., Enora D., Sami K., Stéphane L., Isabelle T., Mathieu B., Christophe D., Jocelyn R., Rita T., Chang-Wei Z., et Diane.

Comment ne pas remercier ma famille et ma belle-famille, pour leur présence à mes côtés durant ces trois années bien entendu, mais surtout pour tant d'autres choses que je ne saurais résumer en quelques lignes. Il va de soi que le terme famille inclut ici la bande de loulous qui m'accompagne depuis de nombreuses années, Thomas C., Antoine P., Rémy D., Thomas A., Brice B., et Kevin P., sans oublier bien sûr leurs chères et tendres qui nous supportent au quotidien.

Enfin, je ne peux que conclure ces remerciements en exprimant toute ma tendresse et ma gratitude à celle qui partage ma vie depuis cinq ans déjà, et dont le soutien m'importe plus que tout, Johanna.

Résumé

Le désaccordage des roues aubagées est une thématique de recherche d'un intérêt tout particulier pour l'industrie aéronautique, en recherche constante d'outils de calcul toujours plus prédictifs et performants pour répondre aux exigences croissantes des organismes de certification. Si le phénomène est aujourd'hui relativement bien maîtrisé dans un cadre linéaire, la prise en compte des non-linéarités dans l'étude du désaccordage reste encore problématique, notamment en raison du manque de méthode adaptée pour mener ce type d'analyses sur des modèles industriels.

L'objectif principal de ce travail de thèse est de proposer une nouvelle méthode de calcul permettant de déterminer efficacement la réponse forcée d'une roue aubagée désaccordée, en tenant compte de l'impact des non-linéarités sur la dynamique de la structure à l'échelle macroscopique. La méthode développée repose sur le concept de sous-structuration, et exploite la notion de mode complexe non-linéaire pour capturer les non-linéarités dans l'espace de réduction de chaque sous-structure. En adoptant une approche fréquentielle, les sous-structures sont représentées par des super-éléments non-linéaires, dont l'assemblage conduit au modèle réduit de la roue désaccordée. La résolution du système mathématique obtenu est ensuite réalisée numériquement par des techniques itératives.

La méthode développée a pu être testée et validée sur différents systèmes soumis à des non-linéarités de frottement, allant du simple modèle phénoménologique à un modèle éléments finis de roue aubagée industrielle. Sur des modèles à paramètres concentrés de taille relativement faible, les performances très intéressantes de cette méthode permettent de conduire des études statistiques quantitatives sur l'impact du désaccordage en présence de non-linéarités. Les résultats obtenus suggèrent que le comportement du système non-linéaire face au désaccordage est susceptible d'être significativement différent du comportement de son homologue linéaire, d'où l'intérêt de mener ce type d'investigations. Les performances de cette méthode ont également pu être confirmées sur des modèles éléments finis de grande taille, en permettant de réaliser à un coût raisonnable des simulations de réponse forcée non-linéaire sur une roue industrielle désaccordée.

Mots-clés mode non-linéaire, désaccordage, frottement, sous-structuration, réduction de modèle, vibrations, roue aubagée

Abstract

Mistuning of bladed disks has been a key topic of research for the aeronautics industry. To get accreditation for their engines, manufacturers must comply with evermore stringent requirements, and thus constantly seek for better simulation tools. Even though the phenomenon is well understood nowadays for linear systems, nonlinearities are still seldom taken into account when dealing with the mistuning of industrial structures, partly due to the lack of a dedicated method to tackle such a complex problematic.

The main objective of this work is to develop a novel method allowing to compute efficiently the forced response of a mistuned bladed disk, while taking into account the impact of nonlinearities on the vibrations at a macroscopic scale. The method derived relies on a substructuring approach, and uses the concept of nonlinear complex modes to capture the nonlinearities in the reduction basis of each substructure. In the frequency domain, the substructures take the form of nonlinear superelements, which once assembled lead to the reduced-order model of the mistuned bladed disk. The resulting mathematical system is then solved by means of iterative solvers.

This new method is tested and validated on different systems subjected to dry friction nonlinearities, from basic phenomenological models to large-scale finite element models of industrial structures. On lumped-parameter models, the performance of this method allows to investigate the statistical impact of mistuning in the presence of nonlinearities, by performing thousands of simulations. The results suggest that the behaviour of the nonlinear model can be significantly different from that of the linear one, hence the importance to carry out such investigations. The capabilities of the method have also been confirmed on large-scale models, by performing several forced response computations on a nonlinear and mistuned finite element model, at a reasonable cost.

Keywords nonlinear mode, mistuning, friction, component mode synthesis, reduced-order modelling, vibrations, bladed disk

Table des matières

Introduction	1
I Dynamique des roues aubagées	7
1 Élastodynamique en repère mobile	8
1.1 Formulation forte	8
1.2 Formulation faible discrète	12
2 Modélisation des structures à symétrie cyclique	15
2.1 Décomposition en composantes cycliques	16
2.2 Formulation d'un problème en base cyclique	18
2.3 Conditions aux limites de symétrie cyclique	19
2.4 Problèmes structuraux en base cyclique	20
3 Dimensionnement vibratoire des roues aubagées	23
3.1 Sources de vibrations et phénomènes aéroélastiques	23
3.2 Outils classiques de conception	26
3.3 Désaccordage aléatoire et intentionnel	29
3.4 Aspects technologiques	31
Bilan	35
II Approche fréquentielle non-linéaire	37
1 Solutions périodiques et méthodes temporelles	38
1.1 Différences finies	38
1.2 Méthode de tir	39
1.3 Collocation orthogonale	40
2 Méthode de l'équilibrage harmonique	41
2.1 Principe théorique	41
2.2 Calcul des termes non-linéaires	44
2.3 Continuation des solutions	46
2.4 Matrice jacobienne analytique	48
2.5 Techniques de condensation	50
3 Phénoménologie des systèmes non-linéaires	52
3.1 Notion de stabilité	52
3.2 Bifurcations	57
3.3 Résonances non-linéaires	60
3.4 Exemple illustratif	62
4 Analyse modale non-linéaire fréquentielle	67
4.1 État de l'art	67
4.2 Techniques classiques d'analyse	69
4.3 Mode complexe non-linéaire	73

4.4	Exemple illustratif	78
5	Étude phénoménologique	79
5.1	Présentation du modèle	80
5.2	Analyse du système accordé	84
5.3	Introduction du désaccordage	88
	Bilan	93
III Sous-structuration par modes complexes non-linéaires		95
1	Rappel sur les méthodes de sous-structuration	96
1.1	Concept de base et généralités	96
1.2	Sous-structuration et méthode de Galerkin	96
1.3	Principales méthodes en dynamique des structures	99
2	Synthèse modale non-linéaire	104
2.1	Bref historique	104
2.2	Équations générales	104
2.3	Performances et limitations	108
3	CNCMS : Une nouvelle méthode de sous-structuration non-linéaire	110
3.1	Motivation et idée directrice	110
3.2	Équations générales	111
3.3	Matrice jacobienne semi-analytique	114
4	Évaluation de la méthode sur modèle phénoménologique	117
4.1	Application sur modèles accordé et désaccordé	117
4.2	Performances de la méthode et domaine de validité	122
4.3	Étude statistique du désaccordage en non-linéaire	124
5	Validation de la méthode sur modèle éléments finis	125
5.1	Présentation du modèle	127
5.2	Résultats de simulations	127
	Bilan	132
IV Étude d'un modèle industriel de roue aubagée		133
1	Présentation du modèle	134
1.1	Géométrie et matériaux	134
1.2	Maillage	135
1.3	Chargement statique et conditions aux limites	136
1.4	Positionnement fréquentiel	136
2	Phase préparatoire	137
2.1	Craig-Bampton initial	137
2.2	Modes non-linéaires	140
2.3	Modes d'interface	141
3	Résultats de simulations	143
3.1	Famille isolée	144
3.2	Zone de veering	146
3.3	Désaccordage en forme	149
	Bilan	151
Conclusion		155

Références	161
Table des figures	174
Liste des tableaux	176
Publications personnelles	177

Introduction

Contexte industriel

Avec le progrès des sciences et techniques ayant accompagné la révolution industrielle des XIX^e et XX^e siècles, le développement des turbomachines a permis l'essor de l'aéronautique, en fournissant aux aéronefs des moteurs dotés d'une densité de puissance jusqu'à lors inégalée. Les turboréacteurs et turbomoteurs se sont naturellement imposés comme principales sources d'énergie pour la propulsion des avions et des hélicoptères, et leur développement implique à l'heure actuelle une industrie de pointe investissant dans de nombreux secteurs de recherche.

Une turbomachine est composée d'un ou plusieurs étages de compresseurs et turbines, réalisant la compression et la détente du flux de gaz la traversant. Ce processus est accompagné de l'injection de carburant entre le dernier étage de compression et le premier étage de turbine, et résulte en un cycle thermodynamique permettant la production d'énergie. Chaque étage de compresseur et de turbine comprend une partie fixe liée au carter et une partie mobile liée à l'arbre, elles-mêmes constituées d'une multitude d'aubes (ou pales) dont le profil aérodynamique est minutieusement défini durant la phase de conception, afin d'optimiser la compression ou la détente des gaz. Une coupe simplifiée de turbomoteur répertoriant les principaux organes que l'on peut retrouver dans une turbomachine est donnée en figure 1. Les principes thermodynamiques et aérodynamiques du fonctionnement d'une turbomachine sont abordés dans de nombreux ouvrages [94, 117], et ne seront pas détaillés dans ce mémoire.

D'un point de vue structural, la tenue mécanique des aubes est capitale pour le bon fonctionnement de la turbomachine, une rupture de pale entraînant non seulement une perte d'efficacité du moteur, mais également un déséquilibre de l'ensemble en rotation qui peut conduire à d'importants efforts transmis aux paliers de l'arbre. Parmi les différents modes d'endommagement des pales, la rupture par fatigue vibratoire occupe une place particulièrement importante, faisant de la tenue mécanique des aubes face aux vibrations une problématique majeure du dimensionnement des turbomachines.

Afin de contrôler les niveaux vibratoires des aubages en fonctionnement et assurer leur intégrité, il est aujourd'hui courant de faire appel à des dispositifs d'amortissement permettant d'atténuer les vibrations à travers des phénomènes de contact et de frottement. Citons par exemple les nageoires inter-pales, les talons, et les amortisseurs sous plate-forme, également appelés frotteurs. Ainsi, la réponse dynamique d'une roue en opération est susceptible d'être fortement influencée par ces dispositifs, qui peuvent avoir un

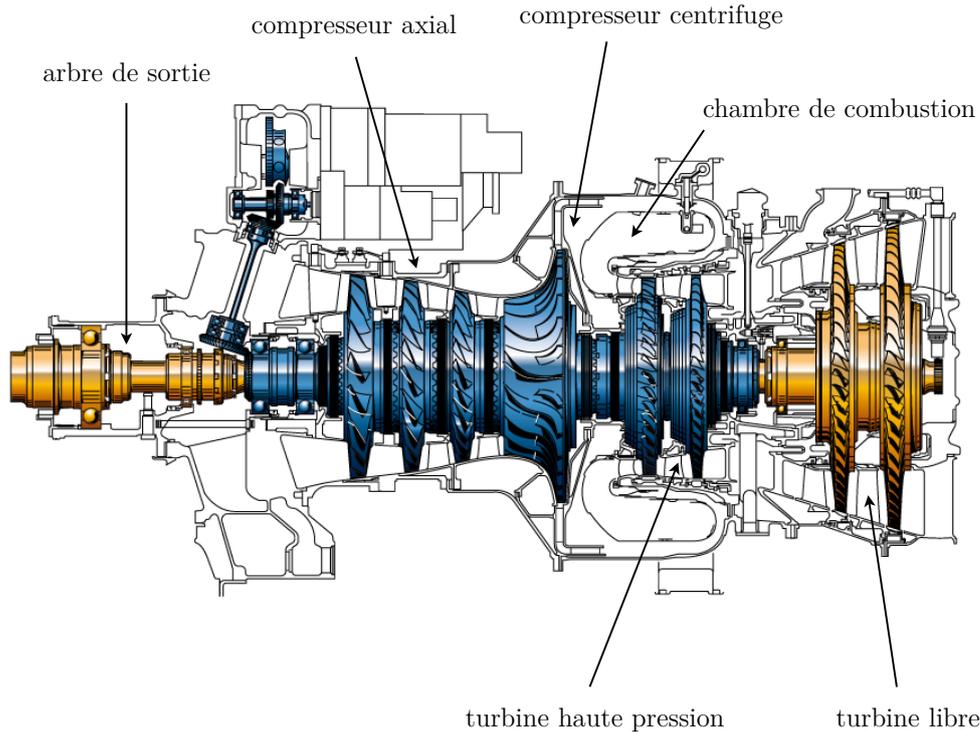


FIGURE 1 – Architecture typique d'un turbomoteur d'hélicoptère (une couleur correspond à un sous-ensemble cinématiquement équivalent)

impact du premier ordre sur la réponse globale de la structure. Cependant, la nature intrinsèquement non-linéaire des phénomènes mis en jeu rend leur prise en compte dans les simulations relativement complexe, et en pratique, la mise aux points de ces dispositifs fait essentiellement appel au savoir-faire des industriels qui ont su élaborer au fil des années des procédures de conception empiriques, se basant sur leurs retours d'expérience.

En parallèle de cette problématique de contrôle vibratoire par dispositifs à friction, les concepteurs doivent faire face à un phénomène bien connu en dynamique des roues aubagées, connu sous le nom de désaccordage. Ce terme fait référence aux dispersions matérielles et géométriques de la structure, imputables entre autres aux procédés d'usinage et à l'usure des composants en opération, qui ont pour conséquence de modifier de façon significative la réponse dynamique de la roue par rapport à ce que prévoit l'étude de la structure idéale, dépourvue de ces dispersions.

La procédure classique de conception consiste en général à négliger tout ou partie de ces différents phénomènes dans les simulations, et à inclure en phase de dimensionnement des coefficients de sécurité empiriques, qui permettront aux moteurs de passer les tests de certifications sur bancs d'essais. Non seulement cette façon de procéder est susceptible de mener à des moteurs sur-dimensionnés, mais la certification par l'expérimentation est extrêmement coûteuse pour les motoristes, qui cherchent donc à minimiser le nombre d'itérations en phase de certification, et à viser au plus juste dès la conception. En outre, la réglementation relative à la certification des moteurs est en pleine évolution, la tendance

étant d'accorder une importance croissante à la simulation dans le processus de certification. Une telle évolution permet aux industriels de réduire les coûts de développement d'un moteur, mais également d'être plus réactifs face aux demandes des hélicoptéristes et des avionneurs, ce qui les pousse à investir dans la recherche pour se doter d'outils de calculs toujours plus performants.

Contexte scientifique

Dans la littérature spécialisée, un très grand nombre d'études ont été consacrées à la compréhension du désaccordage et à son identification. Initiée vers les années 1960 par les travaux de Tobias [157], Whitehead [178], Wagner [170], Dye et Henry [36], et Ewins [37–39], cette problématique a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs issus du milieu académique et de l'industrie. Un état de l'art très complet est proposé par Castanier et Pierre en 2006 [19], insistant notamment sur les différentes techniques d'analyses faisant référence à l'heure actuelle, ainsi que sur les axes de recherche qui permettraient de lever les verrous toujours présents dans ce domaine.

Une conséquence immédiate du désaccordage en matière de modélisation est qu'il rend inapplicable les méthodes classiques d'études exploitant les propriétés de symétrie de la structure. De par ses aspects stochastiques, le désaccordage a dans un premier temps mené de nombreux auteurs à exploiter des modèles phénoménologiques à paramètres concentrés, afin de conduire des études statistiques permettant d'approfondir notre compréhension du phénomène. Citons notamment les travaux de Griffin et Hoosac [49], de Wei et Pierre [174–176], et de Mignolet *et al.* [102, 103] à ce sujet.

Afin de mener des analyses quantitatives sur des modèles numériques industriels, de taille bien plus importante, l'utilisation de techniques dites de réduction de modèle s'est révélée nécessaire. Parmi ces méthodes, on retrouve notamment les techniques classiques de sous-structuration, bien connues en dynamique des structures, telles que celles proposées par Bampton [5], Craig [27, 28], et MacNeal [96]. Face au problème très spécifique posé par la modélisation du désaccordage, des méthodes de réduction dédiées ont également vu le jour, telles que les techniques développées par Castanier *et al.* [17], Bladh *et al.* [10], et Yang et Griffin [181, 182]. Cette problématique est encore un axe de recherche très dynamique, en attestent les travaux récents de Mbaye [100, 101], Capiez-Lernout [13–16], Cazenove [20], et Epureanu *et al.* [35, 97].

Malheureusement, l'introduction de non-linéarités dans le modèle étudié rend la plupart de ces méthodes inadaptées, si ce n'est inapplicables, alors que la prise en compte de ces phénomènes apparaît pourtant comme inévitable dans une démarche d'optimisation du dimensionnement. En pratique, le calcul de la réponse forcée des roues aubagées en présence de phénomènes non-linéaires constitue déjà en soi une problématique complexe, ayant nécessité elle aussi le développement de méthodes de calcul spécifiques.

En raison de leur très grande polyvalence, les schémas d'intégration temporels ont pendant longtemps été utilisés de façon quasi-systématique pour résoudre tout type de problèmes de dynamique non-linéaire. Parmi les plus réputées, nous pouvons citer les mé-

thodes d'intégration de type Runge-Kutta [147], ou encore la méthode de Newmark [112], qui servent bien souvent encore de référence dans le domaine. Cependant, ces techniques d'intégration, malgré leur grande fiabilité, peuvent s'avérer extrêmement coûteuses en ressources de calcul à mesure que la taille des systèmes à résoudre augmente. En outre, lorsque seul le régime permanent du système dynamique est recherché, ces intégrateurs temporels s'avèrent peu adaptés au problème, car ceux-ci requièrent le calcul préalable du régime transitoire, à un coût souvent non-négligeable. Afin de pallier ce défaut des intégrateurs, des méthodes dites de tir [152] ont vu le jour, permettant de s'affranchir du calcul de la réponse transitoire. Malheureusement, celles-ci peuvent souffrir d'un manque de stabilité inhérent aux approches temporelles.

Pour calculer efficacement le régime permanent de modèles non-linéaires de taille importante, une approche alternative consiste à reformuler le problème dans le domaine fréquentiel. À l'heure actuelle, ce type d'approches est relativement répandu en dynamique des roues aubagées, la plus couramment utilisée étant la méthode de l'équilibrage harmonique, présentée au chapitre II de ce mémoire. Le passage dans le domaine fréquentiel induit généralement une augmentation de la taille du système, mais celui-ci peut être condensé sur les degrés de liberté non-linéaires avant l'étape de résolution [107], ce qui rend cette approche très intéressante pour traiter les non-linéarités localisées tels que le contact et le frottement, qui sont au cœur de notre problématique. Dans ce domaine, nous pouvons citer les travaux de thèse de Laxalde [83, 86, 88], Charleux [21, 22], Salles [139, 140], et Nacivet [107] sur le frottement et l'usure, ou les articles de Petrov *et al.* [120–122]. Sur des problématiques assez similaires, citons les travaux de Legrand [90] et Almeida [1] concernant le contact rotor-stator, qui font un bon état de l'art sur le sujet.

Malgré l'efficacité des méthodes développées ces dernières années pour aborder les non-linéarités ou le désaccordage, les temps de calculs impliqués sont encore trop importants pour permettre la prise en compte systématique de ces phénomènes dans les simulations à l'échelle industrielle avec des moyens de calcul standards. En outre, la combinaison des non-linéarités et du désaccordage dans un même calcul reste à l'heure actuelle un défi majeur, qu'aucune technique existante semble permettre d'aborder efficacement. Ainsi, le développement de nouvelles méthodes permettant de répondre à cette problématique a été identifié par Castanier et Pierre [19] comme l'un des grands enjeux à relever pour la conception des roues aubagées.

Objectifs

Ce travail de thèse s'inscrit dans la ligne des efforts menés par la recherche pour améliorer les capacités prédictives des outils de calcul utilisés en dynamique des roues aubagées. Comme nous avons pu le mentionner dans la section précédente, la littérature spécialisée propose aujourd'hui un large panel de méthodes élaborées, permettant d'aborder efficacement les problématiques relatives à la réponse forcée non-linéaire ou désaccordée de ce type de structures. En revanche, la combinaison du désaccordage et des non-linéarités dans la même simulation implique à l'heure actuelle des temps de calcul malheureusement prohibitifs pour un bureau d'étude, et ce malgré les progrès considérables réalisés ces dernières années dans le domaine du numérique.

L'objectif principal du travail présenté dans ce mémoire est de proposer une nouvelle méthode de calcul permettant de déterminer en un temps raisonnable, à l'échelle d'un bureau d'étude industriel, la réponse forcée des roues aubagées en présence de désaccordage et de non-linéarités. La réduction du temps de calcul et la prise en compte avec précision des effets dynamiques complexes résultant de ces phénomènes étant bien sûr antagonistes, la méthode élaborée devra proposer un compromis entre précision et rapidité. Les méthodes faisant état de l'art pour traiter de l'un ou l'autre de ces phénomènes tirant leur efficacité de la spécificité du système qu'elles cherchent à résoudre, il peut sembler assez complexe de chercher à élargir leur champ d'application de façon à englober les deux phénomènes, sans pour autant compromettre leurs performances. En revanche, la littérature dispose aujourd'hui de nombreux outils polyvalents, tels que la POD [69] ou les dérivées modales [172, 173], qui permettraient d'aborder une telle problématique sous un angle nouveau. Notamment, la notion de mode non-linéaire [132], par sa capacité à rendre compte de la richesse phénoménologique des systèmes non-linéaires, se révèle d'un intérêt tout particulier dans la démarche de réduction de modèle que nous avons adoptée.

Organisation du mémoire

Ce mémoire de thèse est constitué de quatre chapitres, organisés de la façon suivante. Le chapitre I présente tout d'abord quelques rappels sur la dynamique d'un corps élastique en rotation, afin de justifier la forme des équations qui seront manipulées dans la suite du manuscrit. Le formalisme utilisé habituellement pour étudier les roues aubagées est ensuite détaillé, ce qui permet d'introduire un certain nombre de notions caractéristiques de la phénoménologie vibratoire des roues de turbines et de compresseurs. Les aspects relatifs au dimensionnement des roues face aux vibrations sont abordés à la fin du chapitre, où sont présentés les outils standards de dimensionnement rencontrés en conception.

La chapitre II introduit la notion de non-linéarité dans les équations. Après une brève introduction sur les techniques classiques de recherche de solutions périodiques dans le domaine temporel, nous y présentons l'une des méthodes de référence des approches fréquentielles, l'équilibrage harmonique. Cette méthode nous permettra d'introduire le formalisme propre aux approches fréquentielles, mais également d'illustrer la richesse phénoménologique des systèmes non-linéaires. La notion de mode complexe non-linéaire, pierre angulaire de ce travail, est ensuite abordée, notion dont on cherchera à illustrer le potentiel en fin de chapitre.

Le chapitre III est consacré au développement d'une nouvelle technique de sous-structuration adaptée au calcul de la réponse forcée de systèmes non-linéaires et dissipatifs. Cette méthode est inspirée des méthodes classiques de CMS¹ à interfaces fixes, et exploite la notion de mode complexe non-linéaire introduite dans le chapitre II. Après quelques rappels sur les méthodes classiques de sous-structuration, nous présentons une technique de synthèse modale non-linéaire adaptée aux modes complexes. Les deux concepts sont ensuite combinés, pour aboutir à une méthode originale de sous-structuration non-linéaire.

1. CMS : *Component Mode Synthesis*, termes anglais utilisés pour désigner les techniques de sous-structuration sur base modale, dont nous verrons des exemples au chapitre III.

Les performances de cette méthode sont ensuite évaluées en fin de chapitre.

Le chapitre [IV](#) présente un cas d'application industriel, afin de vérifier que la méthode développée au chapitre [III](#) constitue bien une réponse intéressante à notre problématique. Après une présentation détaillée du modèle et de sa mise en données, les résultats obtenus par application de la méthode sur trois configurations différentes sont analysés, permettant notamment de mettre en valeur sa polyvalence.

Chapitre I

Dynamique des roues aubagées

Ce chapitre a pour vocation de présenter les méthodes classiques de modélisation et d'étude rencontrées en dynamique des roues aubagées. Dans un premier temps, quelques rappels sur la discrétisation d'un problème d'élastodynamique en repère mobile sont proposés, afin de justifier la forme des modèles mathématiques manipulés par la suite. La modélisation des roues aubagées dans le cadre de l'étude des systèmes à symétrie cyclique est ensuite introduite. Ce type de modélisation est aujourd'hui répandu, et maîtrisé par les codes de calculs commerciaux utilisés par l'industrie et la recherche. Elle permet la prédiction de nombreux phénomènes rencontrés en dynamique des turbomachines, indispensable à leur dimensionnement. Le chapitre se conclut par la présentation de quelques aspects relatifs au dimensionnement des roues aubagées face aux phénomènes vibratoires.

Sommaire

1	Élastodynamique en repère mobile	8
1.1	Formulation forte	8
1.2	Formulation faible discrète	12
2	Modélisation des structures à symétrie cyclique	15
2.1	Décomposition en composantes cycliques	16
2.2	Formulation d'un problème en base cyclique	18
2.3	Conditions aux limites de symétrie cyclique	19
2.4	Problèmes structuraux en base cyclique	20
3	Dimensionnement vibratoire des roues aubagées	23
3.1	Sources de vibrations et phénomènes aéroélastiques	23
3.2	Outils classiques de conception	26
3.3	Désaccordage aléatoire et intentionnel	29
3.4	Aspects technologiques	31
Bilan		35

1 Élastodynamique en repère mobile

L'étude des phénomènes naturels à l'aide des lois de la physique classique conduit généralement à des modèles mathématiques se présentant sous la forme de systèmes d'équations aux dérivées partielles, linéaires ou non-linéaires, dont la résolution analytique n'est envisageable que pour des systèmes relativement simples. Afin de pallier cette difficulté, et grâce à la croissance exponentielle des capacités de calcul numérique, des techniques dites de discrétisation ont été élaborées pour trouver des solutions approchées de ces systèmes d'équations. La méthode des éléments finis en est un parfait exemple, très répandue dans le monde de l'ingénierie, et notamment dans le domaine de la mécanique. De nos jours, le dimensionnement d'une structure industrielle, telle qu'une roue aubagée de turbine ou de compresseur, passe quasi-systématiquement par une phase de conception faisant appel à un logiciel de calcul par éléments finis. Ainsi, dans le but d'expliquer la forme des équations qui seront manipulées dans la suite de ce mémoire, nous proposons dans cette section quelques brefs rappels sur la discrétisation d'un système mécanique en se basant sur la formulation faible du problème élastodynamique régissant l'évolution d'un corps élastique en repère mobile [47]. Les équations classiques du problème dans le cadre de la mécanique des milieux continus sont dans un premier temps rappelées en section I.1.1 afin d'en établir la formulation forte, avant de présenter la formulation faible équivalente en section I.1.2, servant de base à la discrétisation du système. Comme il est d'usage dans les nombreux ouvrages traitant de la méthode des éléments finis [6, 47, 184–186] les équations sont dans la suite écrites avec la convention de notation de Voigt.

1.1 Formulation forte

Soit un solide déformable \mathcal{S} occupant un volume Ω de surface $\partial\Omega$, et défini dans un repère fixe inertiel orthonormée \mathcal{R}_f . Dans une configuration de référence, on repère chaque particule de ce solide par un vecteur position $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ exprimé dans \mathcal{R}_f . À l'instant $t = 0$, on note \mathbf{u}_0 le champ de déplacements appliqué au solide, le menant dans une configuration dite initiale. Une particule située au point P_{ref} dans la configuration de référence se retrouve alors au point P_0 dans cette nouvelle configuration, et est repérée par le vecteur

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{I.1})$$

À l'instant $t > 0$, le solide est porté dans une nouvelle configuration, dite déformée, et la particule située initialement en P_0 se retrouve au point P de vecteur position $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \{y_1, y_2, y_3\}^T$ dans \mathcal{R}_f . Soit le repère mobile non-galiléen orthonormé \mathcal{R}_m lié au solide et confondu avec \mathcal{R}_f à $t = 0$. Dans ce nouveau repère, la position d'une particule est défini par le vecteur

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2})$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est le vecteur déplacement de la particule au temps t . Le passage du repère \mathcal{R}_f au repère \mathcal{R}_m peut se décomposer en une translation $\mathbf{s}(t)$ reliant les origines des deux repères, et une rotation dont la vitesse angulaire dans \mathcal{R}_m est donnée par le vecteur $\boldsymbol{\omega}(t) = \{\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)\}^T$. Dans la suite, le vecteur translation $\mathbf{s}(t)$ et le vecteur vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega}(t)$ sont supposés connus. Le changement de repère est caractérisé par la

matrice orthogonale¹ $\mathbf{R}(t)$ dont les colonnes sont les vecteurs de base du repère mobile \mathcal{R}_m exprimés dans le repère fixe \mathcal{R}_f . Le vecteur position repérant une particule du solide \mathcal{S} à l'instant t dans \mathcal{R}_f est alors

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t)(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad (\text{I.3})$$

On définit la matrice antisymétrique $\mathbf{\Omega}(t)$ formée des composantes du vecteur vitesse

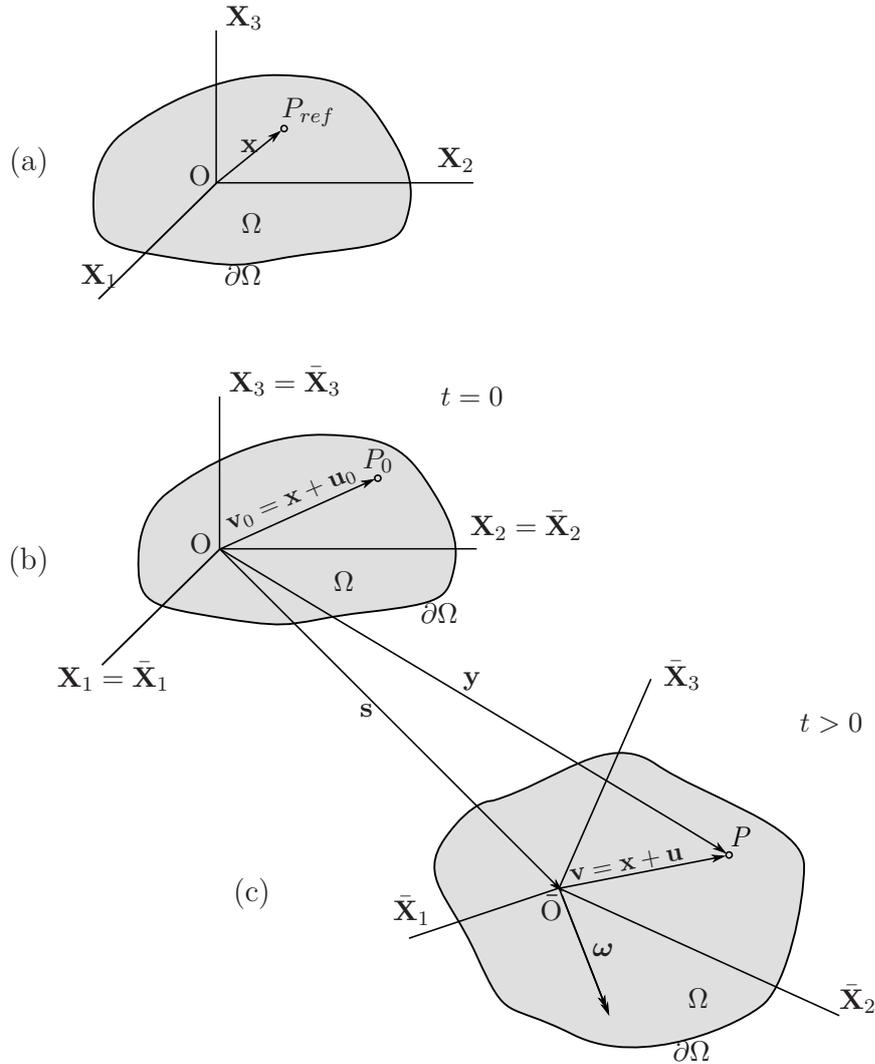


FIGURE I.1 – Configurations d'un système continu : (a) Configuration de référence; (b) Configuration initiale; (c) Configuration déformée [47, 114]

angulaire $\boldsymbol{\omega}(t)$ par

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.4})$$

1. Une matrice carrée \mathbf{R} de taille n à coefficients réels est dite orthogonale lorsqu'elle vérifie la relation $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, avec \mathbf{I} la matrice identité de taille n .

et telle que $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\Omega}(t)$. En omettant par souci de concision les dépendances en \mathbf{x} et en t des différentes grandeurs définies jusqu'à présent, il est possible par dérivations successives de déterminer le vecteur vitesse d'une particule dans \mathcal{R}_f

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \mathbf{R}\dot{\mathbf{u}} \quad (\text{I.5})$$

et le vecteur accélération correspondant

$$\ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + 2\mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{u}} \quad (\text{I.6})$$

que l'on peut exprimer dans le repère mobile \mathcal{R}_m à l'aide de l'inverse de la matrice orthogonale $\mathbf{R}(t)$

$$\mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{u}} \quad (\text{I.7})$$

On reconnaît dans cette expression les termes classiques résultants de la composition du mouvement, à savoir, l'accélération relative $\ddot{\mathbf{u}}$, l'accélération d'entraînement $\mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{x} + \mathbf{u})$, et l'accélération de Coriolis $2\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{u}}$.

La cinématique d'une particule du solide \mathcal{S} étant posée, il est possible d'exprimer dans le repère mobile \mathcal{R}_m les équations traduisant la conservation de la quantité de mouvement,

$$\boldsymbol{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) + \eta_1(\mathbf{x})\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.8})$$

avec $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T$ le vecteur regroupant les composantes du tenseur des contraintes, \mathbf{b} le vecteur des forces volumiques appliquées au solide, ρ la masse volumique du matériau constituant le solide dans sa configuration de référence, et η_1 un coefficient d'amortissement visqueux caractérisant les forces dissipatives proportionnelles à la vitesse relative $\dot{\mathbf{u}}$. On notera l'utilisation ici d'un formalisme lagrangien, lié à la configuration de référence du solide. L'opérateur de dérivation $\boldsymbol{\nabla}$ permet ici d'exprimer la divergence du tenseur des contraintes à partir des composantes du vecteur $\boldsymbol{\sigma}$, son expression étant donnée par

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

En admettant que le comportement du matériau constitutif du solide est régi par une loi de type visco-élastique, la relation liant les composantes du tenseur des contraintes et les composantes du tenseur des déformations regroupées dans le vecteur

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}\}^T \quad (\text{I.10})$$

peut se mettre sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x})(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + \eta_2(\mathbf{x})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)) \quad (\text{I.11})$$

avec \mathbf{E} la matrice représentative du tenseur d'ordre 4 des coefficients élastiques, et η_2 le coefficient d'amortissement interne visqueux liant les contraintes et le taux des déformations $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. En se restreignant par la suite au cadre de la linéarité géométrique, en adoptant

l'hypothèse des petites déformations, les composantes des vecteurs $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sont liées aux composantes du champ de déplacements et de vitesses par l'intermédiaire de l'opérateur de dérivation défini précédemment,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.12})$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.13})$$

Les grandeurs étant exprimées dans le repère \mathcal{R}_m lié au solide, les relations linéaires (I.12) et (I.13) restent licites malgré les grands déplacements potentiellement appliqués au solide.

Afin de poser convenablement le problème d'élastodynamique, il convient de compléter les équations précédentes avec des conditions aux limites sur la frontière du solide et des conditions initiales en déplacement et en vitesse. On partitionne pour cela la frontière $\partial\Omega$ en deux sous-frontières $\partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_\sigma$ telles que

$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma = \partial\Omega \quad (\text{I.14})$$

$$\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_\sigma = \emptyset \quad (\text{I.15})$$

Sur la sous-frontière $\partial\Omega_u$ sont appliquées les conditions aux limites cinématiques, aussi appelées conditions aux limites essentielles ou conditions de Dirichlet, que l'on peut exprimer de la façon suivante,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \quad (\text{I.16})$$

avec $\mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t)$ le vecteur regroupant les composantes du champ de déplacements imposé. Sur la sous-frontière $\partial\Omega_\sigma$ sont appliquées les conditions aux limites en efforts, aussi appelées conditions aux limites naturelles ou de Neumann, qui peuvent s'écrire,

$$\mathbf{N}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_\sigma \quad (\text{I.17})$$

avec $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ le vecteur des efforts surfaciques imposés, et $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ la matrice regroupant les composantes de la normale sortante au point courant de la surface $\partial\Omega_\sigma$,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \\ 0 & n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.18})$$

En théorie, les conditions aux limites essentielles et naturelles peuvent être appliquées en partitionnant la frontière suivant chaque direction de l'espace, ce qui permet d'utiliser des conditions aux limites mixtes, associant au même point un déplacement imposé et un effort imposé. Les conditions initiales viennent enfin compléter le problème sous la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{I.19})$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{I.20})$$

où le symbole de dérivation temporelle dans $\dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$ est purement formel et ne vise qu'à homogénéiser les notations, la condition initiale étant indépendante du temps. Les équations (I.8), (I.11), (I.12), (I.13), (I.16), (I.17), (I.19), et (I.20) constituent la formulation forte du

problème élastodynamique associé au champ de déplacements \mathbf{u} du solide \mathcal{S} . La résolution directe du système d'équations aux dérivées partielles obtenu n'est malheureusement pas envisageable dès lors que le système considéré ne présente pas des propriétés géométriques très particulières. Ainsi, on se contente généralement de rechercher une approximation de la solution \mathbf{u} dans un sous-espace fonctionnel judicieusement choisi, en passant par une étape de discrétisation en espace. Pour ce faire, il est plus courant de travailler avec une formulation dite faible du problème, introduite dans la section suivante.

1.2 Formulation faible discrète

Afin d'établir la formulation faible du problème d'élastodynamique associé au mouvement du solide \mathcal{S} , il est possible de faire appel à des principes variationnels recherchant la stationnarité d'une fonctionnelle énergétique, tel que le principe de Hamilton. Ces approches sont très intéressantes dès lors que la fonctionnelle en question est connue. On pourra se référer à différents ouvrages de la littérature consacrée à la méthode des éléments finis, tels que [6, 184–186], ou aux chapitres introductifs de travaux de thèse consacrés à la dynamique des machines tournantes [53, 54, 114]. L'approche présentée ici pour établir la formulation faible du problème s'appuie sur la méthode de Galerkin², que nous détaillerons plus loin.

Dans un premier temps, le système d'équations aux dérivées partielles de la formulation forte est pondéré par des fonctions tests $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$, et intégré sur le volume Ω pour obtenir la formulation intégrale suivante,

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \left(\nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \rho \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{y}} - \eta_1 \dot{\mathbf{u}} \right) d\Omega = \mathbf{0} \quad (\text{I.21})$$

En appliquant la formule d'intégration par partie généralisée, ou théorème de la divergence, au terme associé aux contraintes, et compte tenu du fait que le tenseur des contraintes est symétrique³, il est possible de réécrire la formulation intégrale de la façon suivante,

$$- \int_{\Omega} (\nabla \delta\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \left(\mathbf{b} - \rho \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{y}} - \eta_1 \dot{\mathbf{u}} \right) d\Omega = \mathbf{0} \quad (\text{I.22})$$

avec $\nabla \delta\mathbf{u}$ le vecteur englobant les composantes du tenseur des déformations associé à $\delta\mathbf{u}$. En imposant aux fonctions tests de s'annuler sur la sous-frontière correspondant aux conditions aux limites essentielles

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \quad (\text{I.23})$$

et en tenant compte des conditions aux limites naturelles dans l'intégrale de frontière, on obtient la formulation faible du problème élastodynamique,

$$- \int_{\Omega} (\nabla \delta\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\partial\Omega_\sigma} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \left(\mathbf{b} - \rho \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{y}} - \eta_1 \dot{\mathbf{u}} \right) d\Omega = \mathbf{0} \quad (\text{I.24})$$

Cette expression est identique à celle que l'on aurait obtenu à l'aide du principe de Hamilton, et est strictement équivalente à la formulation forte du problème dès lors que les

2. On retrouve également dans la littérature la transcription anglo-saxonne *Galerkin*.

3. La symétrie du tenseur des contraintes est essentielle pour faire apparaître le terme $\nabla \delta\mathbf{u}$. En effet, l'opérateur ∇ n'est pas strictement équivalent à l'opérateur gradient, faisant plutôt ici apparaître les composantes du gradient symétrisé afin d'obtenir les composantes de $\boldsymbol{\varepsilon}$.

conditions de régularité et de valeurs imposées aux fonctions tests sont vérifiées. L'intérêt de la formulation faible réside dans la relaxation des conditions de régularité imposées à \mathbf{u} , ce qui facilite la recherche d'une solution approchée du problème en se plaçant dans un espace fonctionnel plus grand⁴.

L'étape de discrétisation spatiale du problème consiste à rechercher une approximation de la solution comme combinaison linéaire de fonctions de forme, ou fonctions d'interpolation, regroupées en colonnes dans la matrice $\mathbf{H}(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{q}(t) \quad (\text{I.25})$$

Dans le cadre de la méthode de Galerkin classique, la même base de fonctions est utilisée pour approcher les fonctions tests,

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})\delta\mathbf{q} \quad (\text{I.26})$$

En substituant ces deux approximations dans la formulation faible (I.24), et en tenant compte de la loi de comportement (I.11), des relations liant déformations et taux de déformations aux déplacements (I.12) et (I.13), et en injectant l'équation (I.7), on aboutit au système suivant,

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{q}^T \left\{ \int_{\Omega} (\nabla\mathbf{H})^T \mathbf{E}(\nabla\mathbf{H})(\mathbf{q} + \eta_2 \dot{\mathbf{q}}) d\Omega + \int_{\Omega} \eta_1 \mathbf{H}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \left(\mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{q}) + \boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{q}) + 2\boldsymbol{\Omega}\mathbf{H}\dot{\mathbf{q}} \right) d\Omega \right. \\ \left. - \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{H}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega) \right\} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

Cette relation devant être satisfaite pour tout vecteur $\delta\mathbf{q}$, la formulation faible discrète du problème d'élastodynamique est équivalente au système matriciel d'équations différentielles ordinaires suivant, régissant la dynamique d'un solide élastique exprimée dans le repère mobile \mathcal{R}_m ,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{P} + \mathbf{N})\mathbf{q}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{r}(t) \quad (\text{I.28})$$

soumis aux conditions initiales

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \quad (\text{I.29})$$

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (\text{I.30})$$

4. La formulation forte impose de rechercher la solution dans l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ et satisfaisant les conditions aux limites essentielles, alors que la formulation faible se contente de l'ensemble des fonctions appartenant à l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(\Omega)$ des fonctions de dérivées premières de carrés sommables, et vérifiant les conditions aux limites essentielles.

où une fois encore le symbole de dérivation temporelle dans $\dot{\mathbf{q}}_0$ est purement formel, et avec

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\Omega \quad (\text{I.31})$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \eta_1 \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\Omega + \int_{\Omega} \eta_2 (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{E} (\nabla \mathbf{H}) d\Omega \quad (\text{I.32})$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} 2\rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{H} d\Omega \quad (\text{I.33})$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{E} (\nabla \mathbf{H}) d\Omega \quad (\text{I.34})$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{H} d\Omega \quad (\text{I.35})$$

$$\mathbf{N} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{H} d\Omega \quad (\text{I.36})$$

$$\mathbf{g} = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{H}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega) \quad (\text{I.37})$$

$$\mathbf{r} = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \left(\mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x} \right) d\Omega \quad (\text{I.38})$$

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{u}_0 d\Omega \quad (\text{I.39})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{u}}_0 d\Omega \quad (\text{I.40})$$

Les matrices \mathbf{E} et $\boldsymbol{\Omega}$ étant respectivement symétrique et antisymétrique, les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} , et \mathbf{N} sont symétriques par construction, correspondant respectivement aux matrices de masse, d'amortissement linéaire, de raideur linéaire élastique, et d'assouplissement centrifuge. Les matrices \mathbf{G} et \mathbf{P} sont quant à elles antisymétriques, et correspondent respectivement à la matrice de Coriolis⁵ et à la matrice d'accélération angulaire. Le vecteur $\mathbf{g}(t)$ regroupe les termes résultants des efforts volumiques et surfaciques appliqués à \mathcal{S} . Le vecteur $\mathbf{r}(t)$ représente quant à lui les efforts inertiels résultants de l'entraînement du système de coordonnées. Remarquons également que pour une masse volumique ρ constante, et des paramètres de dissipation η_1 et η_2 constants, la matrice d'amortissement peut se mettre sous la forme $\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$, ce qui correspond à la forme classique de l'amortissement de Rayleigh. Pour un solide en rotation à vitesse constante et sans mouvement de translation, le système d'équation se simplifie en

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{r} \quad (\text{I.41})$$

avec le terme d'effort inertiel dorénavant constant, simplement égal à un chargement centrifuge

$$\mathbf{r} = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x} d\Omega \quad (\text{I.42})$$

Dans l'étude de système en rotation, il est courant d'étudier le comportement de la structure au voisinage de l'état d'équilibre induit par le chargement centrifuge \mathbf{r} . Cet état est caractérisé par un champ de contraintes initial $\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x})$ associé à un champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x})$, dont la prise en compte dans les équations induit l'apparition d'une matrice

5. Le terme matrice gyroscopique est généralement réservé aux problèmes élastodynamiques exprimés dans le repère inertiel \mathcal{R}_f .

de raideur *géométrique* ou de *précontrainte* [44]. Cette matrice résulte du couplage entre ce champ de déformation initial et la partie quadratique du tenseur des déformations au voisinage de cet état d'équilibre. En écriture indicielle et en adoptant la convention de sommation d'Einstein, les composantes du tenseur des déformations au voisinage de l'équilibre avec prise en compte des termes quadratiques s'écrivent

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad (\text{I.43})$$

avec $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ la partie linéaire et $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ la partie quadratique. En tenant compte de la discrétisation du champ de déplacement, il est possible d'exprimer le terme quadratique en fonction des fonctions de formes

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial H_{kp}}{\partial x_i} \frac{\partial H_{kq}}{\partial x_j} q_p q_q \quad (\text{I.44})$$

En supposant un solide animé d'une vitesse de rotation constante, le déroulement des équations avec prise en compte de cet état initial précontraint conduit au système d'équations

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{S})\mathbf{q}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q}^0 = \mathbf{g}(t) + \mathbf{r} \quad (\text{I.45})$$

dans lequel apparaît la matrice de raideur géométrique \mathbf{S} , dont les coefficients ont pour expression

$$S_{pq} = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^0 \frac{\partial H_{kp}}{\partial x_i} \frac{\partial H_{kq}}{\partial x_j} d\Omega \quad (\text{I.46})$$

et d'un terme constant proportionnel au vecteur des degrés de liberté \mathbf{q}^0 associé à cet état de précontrainte. Cet état n'est autre que la réponse du système au chargement centrifuge \mathbf{r} , d'où la relation

$$(\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q}^0 = \mathbf{r} \quad (\text{I.47})$$

En tenant compte de cette égalité, on obtient le système d'équation régissant la dynamique du solide au voisinage de cet état de précontrainte

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{S})\mathbf{q}(t) = \mathbf{g}(t) \quad (\text{I.48})$$

Alors que la matrice \mathbf{N} possède un effet assouplissant sur les modes de la structure, la matrice de raideur géométrique \mathbf{S} possède elle un effet rigidifiant. Bien que ces effets soient globalement du même ordre de grandeur, l'influence de la précontrainte est généralement prépondérante, et l'on observe bien en pratique une augmentation des fréquences propres avec la vitesse de rotation.

2 Modélisation des structures à symétrie cyclique

En raison de leurs propriétés géométriques, les roues aubagées appartiennent à une classe particulière de systèmes, dits à symétrie cyclique, dont la caractéristique discriminante est de pouvoir être définis par la répétition circulaire d'un ensemble de sous-structures identiques, dénommées secteurs, se refermant sur lui-même pour former le système complet. Cette propriété de symétrie permet d'étudier ces structures avec un formalisme particulier, reposant sur une modélisation mixte physique et ondulatoire, et permettant entre autres la manipulation de modèles mathématiques considérablement réduits par comparaison avec le système physique global. En effet, en ne modélisant qu'un

seul secteur de la structure, appelé dans la suite secteur de référence, et en lui appliquant des conditions aux limites représentatives du type d'ondes étudié, il est possible de reconstruire de façon exacte la réponse de la structure toute entière. Les travaux faisant généralement référence dans ce domaine sont ceux de Thomas [154], Wildheim [179, 180], et Henry [58].

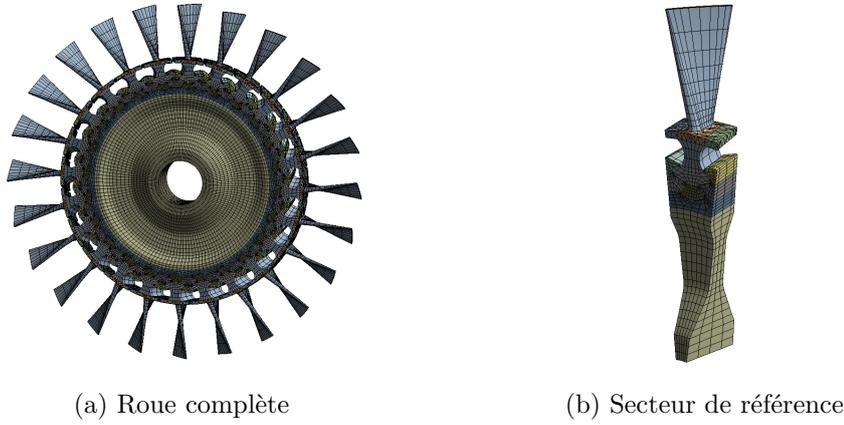


FIGURE I.2 – Modèle éléments finis d'une roue aubagée

2.1 Décomposition en composantes cycliques

Soit une structure cyclique constituée de N secteurs déphasés spatialement d'un angle $\alpha = 2\pi/N$ et numérotés de 0 à $N - 1$. La restriction d'une grandeur physique \mathbf{u} sur le secteur j de la structure est par la suite noté \mathbf{u}_j , ce qui permet d'écrire la condition de périodicité suivante,

$$\mathbf{u}_{j+N} = \mathbf{u}_j \quad \forall j \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \quad (\text{I.49})$$

Selon la théorie de représentation linéaire des groupes cycliques introduite par Valid et Ohayon [167], le champ \mathbf{u}_j associé au secteur j peut être représenté par une somme finie de fonctions harmoniques, dont l'expression est donnée par l'équation

$$\mathbf{u}_j = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{u}}^k e^{ijk\alpha} \quad (\text{I.50})$$

L'amplitude $\tilde{\mathbf{u}}^k$ de chaque fonction harmonique est appelée composante cyclique complexe d'ordre k , définie sur le secteur de référence, généralement associé à l'indice 0. Ces composantes sont liées aux champs physiques \mathbf{u}_j par la relation

$$\tilde{\mathbf{u}}^k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j e^{-ijk\alpha} \quad (\text{I.51})$$

Les relations (I.50) et (I.51) lient champs physiques et composantes cycliques correspondent à des transformées de Fourier discrètes. Si les grandeurs manipulées sont réelles, il est possible d'utiliser un formalisme mathématique réel pour ces transformations. Le champ \mathbf{u}_j est alors exprimé comme somme de fonctions trigonométriques pondérées par les composantes cycliques réelles suivant la relation

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\mathbf{u}}^0 + \sum_{k=1}^K \left(\tilde{\mathbf{u}}^{c,k} \cos(jk\alpha) + \tilde{\mathbf{u}}^{s,k} \sin(jk\alpha) \right) + (-1)^j \tilde{\mathbf{u}}^{N/2} \quad (\text{I.52})$$

La valeur du paramètre K dépend de la parité du nombre de secteurs N , et le dernier terme de la somme (I.52) n'est présent que si ce nombre est pair.

$$K = \begin{cases} N/2 - 1 & \text{si } N \text{ est pair} \\ (N - 1) / 2 & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases} \quad (\text{I.53})$$

Les composantes cycliques réelles sont liées aux champs \mathbf{u}_j par les relations (I.54)

$$\tilde{\mathbf{u}}^0 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \quad (\text{I.54a})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{c,k} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \cos(jk\alpha) \quad (\text{I.54b})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{s,k} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \sin(jk\alpha) \quad (\text{I.54c})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \mathbf{u}_j \quad (\text{I.54d})$$

En ordonnant respectivement les champs physiques et les composantes cycliques dans des vecteurs \mathbf{u} et $\tilde{\mathbf{u}}$ dont les expressions sont données par

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_0 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_j \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{N-1}]^T \quad (\text{I.55})$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{\mathbf{u}}^0 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{u}}^{c,k} \quad \tilde{\mathbf{u}}^{s,k} \quad \cdots \quad \mathbf{u}^{N/2}]^T \quad (\text{I.56})$$

les N relations (I.52) s'écrivent d'une façon très compacte, donnée par l'expression

$$\mathbf{u} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{I.57})$$

Le passage de la base physique à la base cyclique est réalisé simplement par l'intermédiaire de la matrice réelle de transformée de Fourier discrète \mathbf{F} dont l'expression est donnée par

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cos \alpha & \sin \alpha & \cos 2\alpha & \cdots & \sin K\alpha & -1 \\ 1 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 4\alpha & \cdots & \sin 2K\alpha & 1 \\ \vdots & & & \cdots & & & \vdots \\ 1 & \cos(N-1)\alpha & \sin(N-1)\alpha & \cos(N-1)2\alpha & \cdots & \sin(N-1)K\alpha & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.58})$$

Toute grandeur physique associée à une structure cyclique peut donc être représentée de façon exacte par des composantes cycliques, définies sur un secteur de référence, et par un indice harmonique k . Nous allons voir dans la section I.2.2 que la modélisation en base cyclique permet de ne traiter que des sous-problèmes du problème initial, totalement indépendants les uns des autres, chacun étant associé à un indice harmonique et donc à un type d'onde se propageant dans la structure⁶. Ceci permet donc de ne s'intéresser qu'à la résolution des systèmes d'équations correspondant aux types d'ondes souhaités, de taille significativement réduite par comparaison avec le problème exprimé en base physique.

6. L'aspect propagatif est bien illustré en exprimant le déphasage du champ entre les secteurs j et $j-1$, pour un indice harmonique k donné. La relation (I.50) permet alors d'écrire $\mathbf{u}_j^k = \mathbf{u}_{j-1}^k e^{ik\alpha}$.

2.2 Formulation d'un problème en base cyclique

Afin de déterminer l'expression d'un problème structural en base cyclique, considérons la grandeur scalaire \mathcal{E} définie en base physique par le vecteur de champs \mathbf{u} et une matrice \mathbf{Z} . Cette grandeur peut par exemple représenter l'énergie potentielle ou l'énergie cinétique de la structure, le vecteur \mathbf{u} et la matrice \mathbf{Z} associés correspondant respectivement au champ de déplacement et à la matrice de raideur, ou bien au champ de vitesse et à la matrice de masse.

$$\mathcal{E} = \mathbf{u}^T \mathbf{Z} \mathbf{u} \quad (\text{I.59})$$

Dans un repère cylindrique (r, θ, z) dont l'axe y coïncide avec l'axe de symétrie cyclique de la structure, la matrice \mathbf{Z} est constituée de N blocs identiques \mathbf{Z}_0 correspondant chacun à un secteur de la roue. L'expression (I.59) peut être décomposée en une somme (I.60) sur les énergies associées à chaque secteur,

$$\mathcal{E} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j^T \mathbf{Z}_0 \mathbf{u}_j \quad (\text{I.60})$$

En substituant la relation (I.57) dans (I.59), on obtient l'expression de \mathcal{E} en base cyclique,

$$\mathcal{E} = \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{F}^T \mathbf{Z} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{I.61})$$

En rappelant que l'angle $\alpha = 2\pi/N$, nous avons les relations d'orthogonalité suivantes,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \cos p\alpha \cos q\alpha = \frac{N}{2} \delta_{p,q} \quad (\text{I.62a})$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sin p\alpha \sin q\alpha = \frac{N}{2} \delta_{p,q} \quad (\text{I.62b})$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \cos p\alpha \sin q\alpha = 0 \quad (\text{I.62c})$$

Compte tenu de l'expression de la matrice \mathbf{F} , ces relations impliquent que la matrice $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}^T \mathbf{Z} \mathbf{F}$ est diagonale par blocs, dont l'expression est donnée par

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \text{diag} \left(\mathbf{Z}^k, \forall k \in \llbracket 0, N/2 \rrbracket \right) \text{ avec } \begin{cases} \tilde{\mathbf{Z}}^k = N \mathbf{Z}_0 & \text{si } k \in \{0, N/2\} \\ \tilde{\mathbf{Z}}^k = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_0 \end{pmatrix} & \text{si } k \in \llbracket 1, K \rrbracket \end{cases} \quad (\text{I.63})$$

Ainsi, la matrice $\tilde{\mathbf{Z}}$ étant diagonale par blocs, l'expression du problème en base cyclique équivaut à un ensemble de sous-problèmes indépendants correspondant à chaque indice harmonique k . Il convient de remarquer également que la taille des sous-problèmes à résoudre pour les harmoniques $k \in \{1, \dots, K\}$ est égale à deux fois la taille des sous-problèmes associés aux harmoniques 0 et $N/2$, du fait des termes en cosinus et en sinus caractérisant l'onde considérée.

Afin de finaliser la formulation du problème en base cyclique, il est nécessaire de compléter chaque sous-problème par des conditions aux limites appropriées, traduisant la fermeture de la structure sur elle-même, ainsi que le déphasage spatial caractérisant l'onde correspondant à l'indice harmonique considéré.

2.3 Conditions aux limites de symétrie cyclique

Afin d'expliciter les conditions, il convient avant tout de partitionner le vecteur des champs du secteur de référence \mathbf{u}_0 , en distinguant les degrés de liberté à la frontière des secteurs adjacents gauche ${}^g\mathbf{u}_0$ et droit ${}^d\mathbf{u}_0$ des degrés de liberté internes ${}^i\mathbf{u}_0$, selon l'expression

$$\mathbf{u}_0 = \left[{}^g\mathbf{u}_0, {}^d\mathbf{u}_0, {}^i\mathbf{u}_0 \right]^T \quad (\text{I.64})$$

En base physique, les conditions aux limites traduisent simplement la condition de continuité du champ \mathbf{u} à l'interface entre le secteur de référence et les deux secteurs adjacents 1 et $N - 1$, ce qui s'exprime par le couple d'équations (I.65), où les frontières gauche et droite sont illustrées sur la figure I.3.

$${}^g\mathbf{u}_0 = {}^d\mathbf{u}_1 \quad (\text{I.65a})$$

$${}^d\mathbf{u}_0 = {}^g\mathbf{u}_{N-1} \quad (\text{I.65b})$$

En base physique, ces conditions de symétrie appliquées à chaque secteur donnent à la

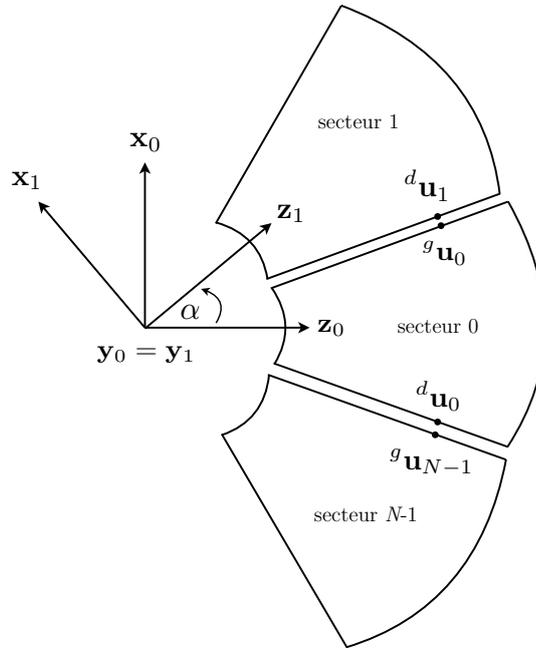


FIGURE I.3 – Définition des frontières inter-secteurs d'un système cyclique

matrice \mathbf{Z} une forme caractéristique des systèmes cycliques, dite circulante par blocs [31]. En utilisant l'expression (I.50), ces deux conditions se traduisent en termes de composantes cycliques à l'ordre k par le couple d'équations

$${}^g\tilde{\mathbf{u}}_0^k = {}^d\tilde{\mathbf{u}}_0^k e^{ik\alpha} \quad (\text{I.66a})$$

$${}^d\tilde{\mathbf{u}}_0^k = {}^g\tilde{\mathbf{u}}_0^k e^{i(N-1)k\alpha} \quad (\text{I.66b})$$

Les deux relations de propagation définies par les équations (I.66) couplent les degrés de liberté de la frontière droite à ceux de la frontière gauche d'un secteur. Ces relations sont équivalentes, et il n'est nécessaire que de conserver l'une des deux dans la formulation du

problème en base cyclique. Par souci de concision, on choisit généralement la condition (I.66a), qui en adoptant un formalisme réel donne les conditions (I.67), (I.68), et (I.69).

- Pour $k = 0$:

$$g_{\tilde{\mathbf{u}}^0} = {}^d \tilde{\mathbf{u}}^0 \quad (\text{I.67})$$

- $\forall k \in \{1, \dots, K\}$:

$$\begin{bmatrix} g_{\tilde{\mathbf{u}}^{c,k}} \\ g_{\tilde{\mathbf{u}}^{s,k}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} {}^d \tilde{\mathbf{u}}^{c,k} \\ {}^d \tilde{\mathbf{u}}^{s,k} \end{bmatrix} \quad (\text{I.68})$$

- Pour $k = N/2$:

$$g_{\tilde{\mathbf{u}}^{N/2}} = -{}^d \tilde{\mathbf{u}}^{N/2} \quad (\text{I.69})$$

Ces conditions viennent compléter chacun des sous-problèmes associés aux indices harmoniques k , finalisant ainsi la modélisation du problème en base cyclique. Nous allons voir dans la section suivante comment traiter les problèmes structuraux classiques avec ce formalisme.

2.4 Problèmes structuraux en base cyclique

La section I.1 a permis de montrer comment une méthode de discrétisation spatiale permettait de ramener la résolution d'un problème de mécanique des milieux continus à l'étude d'un système d'équations différentielles ordinaires pouvant se mettre sous la forme suivante,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(t) \quad (\text{I.70})$$

avec $\mathbf{u}(t)$ le vecteur des déplacements nodaux. Par souci de concision, les termes propres aux systèmes en rotation que nous avons explicités dans l'équation (I.48) sont ici inclus de manière implicite dans les termes de l'équation (I.70). Pour une structure à symétrie cyclique constituée de N secteurs et soumise à un chargement extérieur cyclique $\mathbf{g}(t)$ possédant le même axe de symétrie, les sections précédentes ont permis de montrer l'équivalence entre le problème (I.70) exprimé en base physique et les sous-problèmes (I.71) exprimés en termes de composantes cycliques.

$$\tilde{\mathbf{M}}^k \ddot{\tilde{\mathbf{u}}^k}(t) + \tilde{\mathbf{C}}^k \dot{\tilde{\mathbf{u}}^k}(t) + \tilde{\mathbf{K}}^k \tilde{\mathbf{u}}^k(t) = \tilde{\mathbf{g}}^k(t) \quad \forall k \in \llbracket 0, N/2 \rrbracket \quad (\text{I.71})$$

Pour chacun de ces sous-problèmes, il est nécessaire d'ajouter les équations de contraintes (I.67), (I.68), et (I.69), qui correspondent à des contraintes en déplacement imposés pouvant s'appliquer de façon classique à l'aide d'une matrice de transformation réalisant le couplage entre les composantes cycliques des frontières gauche et droite.

2.4.1 Analyse modale

L'analyse modale du système en base physique passe par la résolution du problème aux valeurs propres suivant,

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{I.72})$$

En base cyclique, ce problème équivaut à la résolution des problèmes aux valeurs propres (I.73) associés à chaque indice harmonique k .

$$\left(\tilde{\mathbf{K}}^k - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}^k \right) \tilde{\mathbf{x}}^k = \mathbf{0} \quad (\text{I.73})$$

Dans les équations (I.72) et (I.73), on suppose que les conditions aux limites, respectivement en base physique et en base cyclique pour l'ordre k , ont préalablement été imposées aux matrices par l'intermédiaire d'une matrice de transformation.

Les solutions de ces deux problèmes peuvent être classées en deux catégories. La première correspond à ce que l'on appelle les solutions non-dégénérées, pour lesquelles la multiplicité de la valeur propre ω^2 vaut 1. Ces solutions sont exactement celles associées aux indices harmoniques $k = 0$, et $k = N/2$ quand N est pair. Pour $k = 0$, l'ensemble des secteurs de la structure vibrent en phase, alors que deux secteurs adjacents sont en opposition de phase pour les déformées modales correspondant à $k = N/2$. La seconde catégorie correspond aux solutions dites dégénérées, associées à une valeur propre ω^2 de multiplicité égale à 2. Le sous-espace propre correspondant est engendré par deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à la même fréquence propre, et toute combinaison linéaire de ces vecteurs est donc un mode propre du système. Cette dégénérescence de certains modes est une notion fondamentale en dynamique des roues aubagées, car elle permet de reconstruire à partir de ces deux vecteurs propres linéairement indépendants une onde dite tournante, se propageant dans la structure dans l'une ou l'autre des directions. La déformée modale en base physique est finalement reconstruite à l'aide des relations (I.50) ou (I.52) en fonction du formalisme adopté, en ne conservant que les termes correspondant à l'indice harmonique k considéré.

Des exemples de déformées modales correspondant à des modes dégénérés sont données en figure I.4. On constate que les déformées possèdent des diamètres nodaux, qui correspondent aux lignes le long desquelles le champ de déplacement de la structure est nul. Le nombre de diamètres nodaux de la déformée est égal à l'indice harmonique k associé au mode en base cyclique. Les déformées associées à des modes d'indice harmonique différents sont donc nécessairement linéairement indépendantes. Ainsi, grâce au formalisme cyclique qui découple les problèmes aux valeurs propres correspondant à des indices k différents, il est possible de ne calculer que les modes possédant le nombre de diamètres nodaux désiré.

La figure I.5 donne un exemple de déformées de modes non-dégénérés. On constate que le mode correspondant à $k = 0$ possède bien 0 diamètre nodal, et que l'ensemble des secteurs vibrent en phase. Pour ce type de déformées, on peut constater l'existence de cercles nodaux, non illustré ici. La déformée modale du mode correspondant à $k = N/2$ possède quant à elle $N/2$ diamètres nodaux, les pales vibrant effectivement en opposition de phase.

2.4.2 Réponse forcée

Dans la mesure où le terme d'excitation $\mathbf{g}(t)$ possède le même axe de symétrie cyclique que la roue, il est possible d'adopter le formalisme cyclique vu précédemment pour déterminer la réponse de la structure, en résolvant les sous-problèmes (I.71) équivalents au problème initial en base physique. Les termes $\tilde{\mathbf{g}}^k(t)$ sont obtenus par simple application des formules (I.54).

Les sous-systèmes associés à chaque indice harmonique k sont parfaitement indépendants, et sont résolus séparément en prenant soin de leur adjoindre les conditions aux

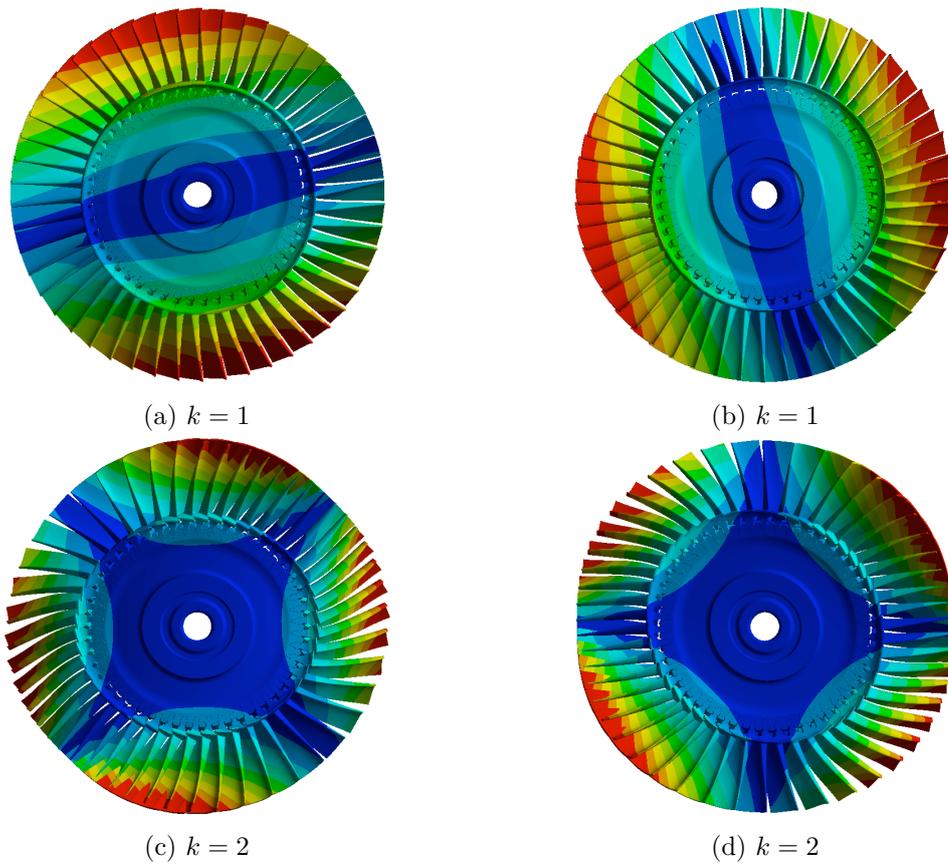


FIGURE I.4 – Déformées modales dégénérées

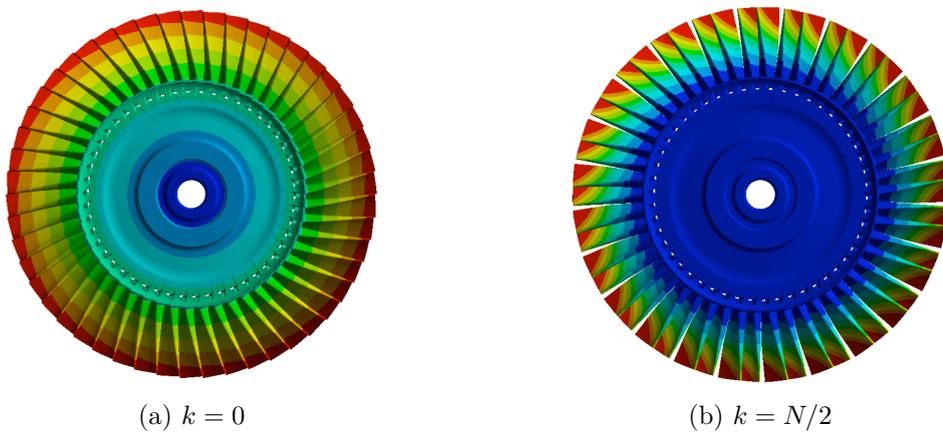


FIGURE I.5 – Déformées modales non-dégénérées

limites adéquates. Cette indépendance est extrêmement intéressante, car elle permet une fois de plus de ne résoudre que les équations d'intérêt, c'est à dire celles possédant un terme d'excitation $\tilde{\mathbf{g}}^k(t)$ non nul. Ces différents sous-problèmes sont donnés par les équations (I.74), (I.75), et (I.76).

- Pour $k = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}^0 \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^0 + \tilde{\mathbf{C}}^0 \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^0 + \tilde{\mathbf{K}}^0 \tilde{\mathbf{u}}^0 &= \tilde{\mathbf{g}}^0 \\ \text{avec, } g \tilde{\mathbf{u}}^0 &= {}^d \tilde{\mathbf{u}}^0 \end{aligned} \quad (\text{I.74})$$

- $\forall k \in \{1, \dots, K\}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}^k \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^{c,k} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^{s,k} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{C}}^k \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{c,k} \\ \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{s,k} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{K}}^k \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{c,k} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{s,k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{g}}^{c,k} \\ \tilde{\mathbf{g}}^{s,k} \end{bmatrix} \\ \text{avec, } \begin{bmatrix} g \tilde{\mathbf{u}}^{c,k} \\ g \tilde{\mathbf{u}}^{s,k} \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} {}^d \tilde{\mathbf{u}}^{c,k} \\ {}^d \tilde{\mathbf{u}}^{s,k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.75})$$

- Pour $k = N/2$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}^{N/2} \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^{N/2} + \tilde{\mathbf{C}}^{N/2} \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{N/2} + \tilde{\mathbf{K}}^{N/2} \tilde{\mathbf{u}}^{N/2} &= \tilde{\mathbf{g}}^{N/2} \\ \text{avec, } g \tilde{\mathbf{u}}^{N/2} &= -{}^d \tilde{\mathbf{u}}^{N/2} \end{aligned} \quad (\text{I.76})$$

Le champ de déplacement de la structure exprimée en base physique s'obtient finalement par superposition des composantes cycliques déterminées en résolvant les équations précédentes, à l'aide de la relation (I.52).

3 Dimensionnement vibratoire des roues aubagées

Cette section s'intéresse à quelques aspects concernant le dimensionnement des roues aubagées face aux phénomènes vibratoires, qui comme nous l'avons vu en introduction, constituent une cause majeure d'endommagement et de ruine des aubages. Nous rappelons dans un premier temps les sources d'excitations à l'origine de la mise en vibration des pales. Les outils classiquement manipulés en conception sont également introduits, avant d'approfondir la notion de désaccordage, au cœur de notre problématique, et déjà évoquée dans le chapitre introductif de ce mémoire. Nous concluons enfin en présentant quelques aspects technologiques relatifs au contrôle vibratoire des roues aubagées.

3.1 Sources de vibrations et phénomènes aéroélastiques

En fonctionnement, les composants d'une turbomachine sont sujets à plusieurs types d'excitations, susceptibles d'induire un comportement vibratoire dangereux pour l'intégrité de la machine, ainsi qu'une perte de rendement potentiellement significative. Ces sources de vibrations peuvent être classées en deux grandes catégories, à savoir, celles d'origine mécanique telles que les contacts rotor-stator et les phénomènes de balourd, et celles d'origine aéroélastique.

3.1.1 Sources d'origine mécanique

La mise en contact du rotor de l'un des étages de turbine ou de compresseur avec le carter est un phénomène dont la probabilité d'occurrence est vouée à augmenter à mesure que les jeux de fonctionnement en tête de pale sont réduits. Cette tendance de minimisation des jeux a pour objectif d'améliorer l'efficacité énergétique de la roue aubagée, en réduisant les pertes de flux par fuites de l'écoulement entre le carter et la tête des aubages. Cependant, en raison des effets combinés du champ centrifuge induit par la rotation et des hautes températures auxquelles sont soumises les pales, en particulier celles des turbines haute pression qui sont situées juste en sortie de la chambre de combustion, le matériau peut être sujet à ce que l'on désigne par fluage. Ce phénomène se traduit par l'apparition de déformations irréversibles malgré une contrainte mécanique inférieure à la limite d'élasticité du matériau, et résulte en l'élongation progressive des pales jusqu'à une éventuelle mise en contact avec le carter. Cette mise en contact induit une importante contrainte tangentielle appliquée en tête d'aube, entraînant le fléchissement de cette dernière de façon continue ou intermittente. Des études tendent à montrer que des phénomènes d'instabilités vibratoires et d'interactions modales peuvent en résulter [91, 92]. Afin de pallier le problème, on retrouve dans certaines machines des couches de matériau abrasable préalablement déposées dans les zones où le contact est susceptible de survenir. Les progrès réalisés en métallurgie ont également permis la mise au point de pales mono-cristallines présentant une tenue en fluage supérieure aux matériaux dotés d'une structure cristalline usuelle. Ce type de pales fait à l'heure actuelle office de référence pour les turbines haute pression, particulièrement sujettes au problème.

Une seconde source d'excitation qui peut être répertoriée comme étant d'origine mécanique est l'excitation par balourd. Ce type d'excitations, bien connu des concepteurs de machines tournantes [82, 169], est dû à une répartition hétérogène de la masse autour de l'axe de rotation, en raison par exemple des dispersions de matériau qui résultent de l'imperfection des techniques de fonderie et d'usinage, ou bien d'un mauvais alignement des composants. La conséquence majeure à cela étant que le centre de gravité du solide en rotation peut ne pas être situé sur l'axe de symétrie, on parle de déséquilibre statique, et que l'axe principal d'inertie du rotor peut de surcroît ne pas être confondu avec son axe de rotation, on parle de déséquilibre dynamique. En rotation, ces déséquilibres sont respectivement perçus par le rotor comme une excitation harmonique sous forme de force et de moment. Afin de minimiser l'impact de ce type d'excitations, les concepteurs imposent des tolérances de fabrication très sévères, et essayent d'équilibrer la machine tournante autant que faire se peut par ajout de masselottes ou retrait de matière par usinage. Cependant, la présence d'un balourd peut résulter de causes accidentelles, telles que la perte d'aube d'un étage de turbine ou de compresseur. Cette rupture de la liaison aube-disque en opération peut être due à des phénomènes de fatigue vibratoire, ou bien être provoquée par un choc suite à l'ingestion de corps étrangers tels que des oiseaux ou des grêlons. Bien que le dimensionnement de la structure soit fait de manière à contenir les débris de pales et prévenir la perforation du carter, le balourd induit n'en est pas moins significatif, et à l'origine d'importants efforts transmis aux paliers de l'arbre. Notons également que cet impact, qu'il entraîne ou non une perte de pale, est en soi une excitation mécanique à l'origine de vibrations pseudo-périodiques.

3.1.2 Sources d'origine aéroélastique

Les sources d'excitation aéroélastiques peuvent être répertoriées en deux catégories, les sources d'excitation synchrones [108], et les sources d'excitation asynchrones. Une source d'excitation synchrone est une source dont la fréquence d'excitation est un harmonique (*i.e.* un multiple entier) de la vitesse de rotation de l'arbre. Elles sont dues aux perturbations de l'écoulement induites par les obstacles fixes dans la veine d'air, tels que les distributeurs, les redresseurs, ou les bras de carter, pouvant entraîner par exemple le décollement de la couche limite pariétale sur l'extrados des aubages. Ces perturbations se traduisent par des fluctuations du champ de pression dans le fluide, et une pale de rotor verra ce type de perturbations un nombre de fois égal à la fréquence de rotation multipliée par le nombre d'obstacles. En écoulement subsonique, ces fluctuations peuvent remonter dans la veine et sont ainsi susceptibles d'exciter les aubages situés en amont de l'obstacle, on parle alors d'excitation par effet potentiel. Notons également que, ces excitations n'étant pas parfaitement sinusoïdales, il peut être nécessaire de considérer certains de leurs harmoniques dans les fréquences d'excitations de la roue. Par un raisonnement similaire dans un repère fixe, les fluctuations induites par les parties mobiles sont elles susceptibles d'exciter les pales liées au stator. Une illustration de ces perturbations obtenues par simulation est donnée en figure I.6.

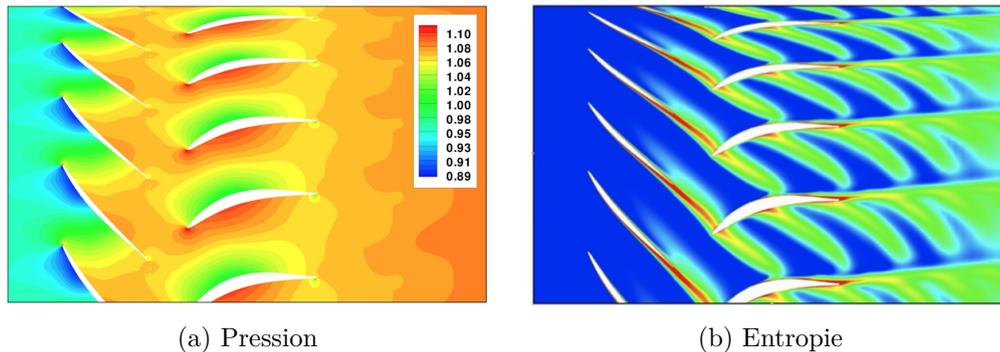


FIGURE I.6 – Perturbation de l'écoulement par les aubages [150].

Les excitations asynchrones désignent les excitations dont la fréquence n'est pas un harmonique de la fréquence de rotation de l'arbre. Ce type de phénomènes résulte de l'interaction entre les vibrations des pales et le fluide. La mise en vibrations des aubes vient perturber l'écoulement, et induire des fluctuations de pressions pouvant en retour exciter les pales qui en sont à l'origine. Cet échange d'énergie entre les pales et le fluide peut mener à des phénomènes de vibrations auto-entretenues et de couplage de modes très dangereux de type flottement, pouvant très rapidement mener à la ruine de la structure. Le flottement est par ailleurs intimement liée à la problématique du désaccordage, puisque des études ont pu montrer qu'une roue nettement désaccordée pouvait se montrer plus robuste face à ce type d'instabilités qu'une roue accordée [30, 67, 70, 98, 162]. Résultant de la vibration des pales elles-mêmes, et par conséquent n'étant pas synchrones avec la rotation, ces excitations sont bien plus difficiles à prédire que les excitations synchrones.

3.2 Outils classiques de conception

Le dimensionnement vibratoire des roues aubagées fait appel à différents outils, empiriques ou non, dont les plus classiques se présentent généralement sous la forme de diagrammes que nous allons succinctement introduire ici. Ces outils visent principalement à dimensionner la structure face aux excitations synchrones, qui comme nous venons de le voir sont plus faciles à prédire que les excitations asynchrones. À l'heure actuelle, la validation du dimensionnement face aux excitations asynchrones se base davantage sur le savoir-faire et le retour d'expérience du motoriste.

3.2.1 Diagramme de Campbell

Afin d'anticiper tout risque de coïncidence fréquentielle entre l'une des fréquences d'excitations synchrones induites par les sources présentées en section I.3.1 et l'une des fréquences propres de la roue aubagée, il est possible de tracer le diagramme de Campbell de la roue. Ce diagramme représente d'une part l'évolution des fréquences propres de la roue en fonction de sa vitesse de rotation, et d'autre part les différents harmoniques de la vitesse de rotation, appelés ordres moteur (ou EO pour *engine order* en anglais). Ce type de représentation permet de mettre à jour les risques de résonances lorsque, sur le diagramme, l'une des droites représentant les ordres moteur croise une ou plusieurs fréquences propres dans la plage de fonctionnement de la turbomachine. Un exemple de diagramme de Campbell est donné en figure I.7, sur lequel les ordres moteur de la vitesse de rotation N apparaissent en pointillés et les fréquences propres en traits pleins. Compte tenu

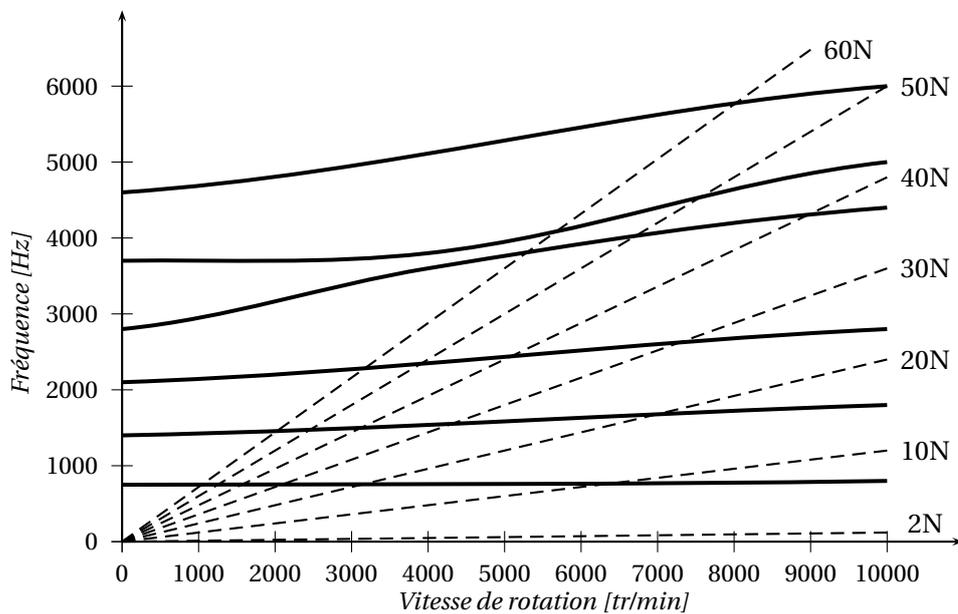


FIGURE I.7 – Diagramme de Campbell

de la très grande densité modale des structures à symétrie cyclique, un nombre important de coïncidences fréquentielles apparaît généralement sur le diagramme de Campbell d'une roue. En revanche, une coïncidence fréquentielle n'indique pas nécessairement un risque réel pour la machine. Pour cela, il faut que l'ordre moteur concerné ait bien été identifié

comme fréquence d'excitation, et que la condition d'appropriation modale soit également satisfaite. Cette condition est représentée graphiquement par le diagramme zigzag.

3.2.2 Diagramme zigzag

Un diagramme zigzag est une représentation graphique de la condition d'excitabilité d'un mode par un ordre moteur. Dans le cas d'une poutre ou d'une plaque, cette condition reflète simplement la condition nécessaire d'excitation d'un mode qui est que l'effort excitateur ne soit pas exclusivement situé sur les lignes nodales de la déformée modale. Pour une roue aubagée, cette condition, également appelée condition d'appropriation modale, n'est pas aussi intuitive. Il est en effet possible de démontrer [179, 180] que pour une roue parfaitement symétrique possédant un nombre de secteurs N , le travail d'un ordre moteur EO sur un mode sera non nul si et seulement si la relation (I.77) est satisfaite, pour k l'indice harmonique ou nombre de diamètre du mode et p un entier naturel.

$$EO \pm k = pN \quad (\text{I.77})$$

Cette relation peut se représenter graphiquement sur un diagramme dit zigzag, dont un exemple est donné en figure I.8 pour une roue à 50 pales. Sur cet exemple, on constate le phénomène de repliement qui permet aux modes à diamètres d'être excités par les ordres moteurs supérieurs à $N/2$. Cette condition d'appropriation modale réduit donc considéra-

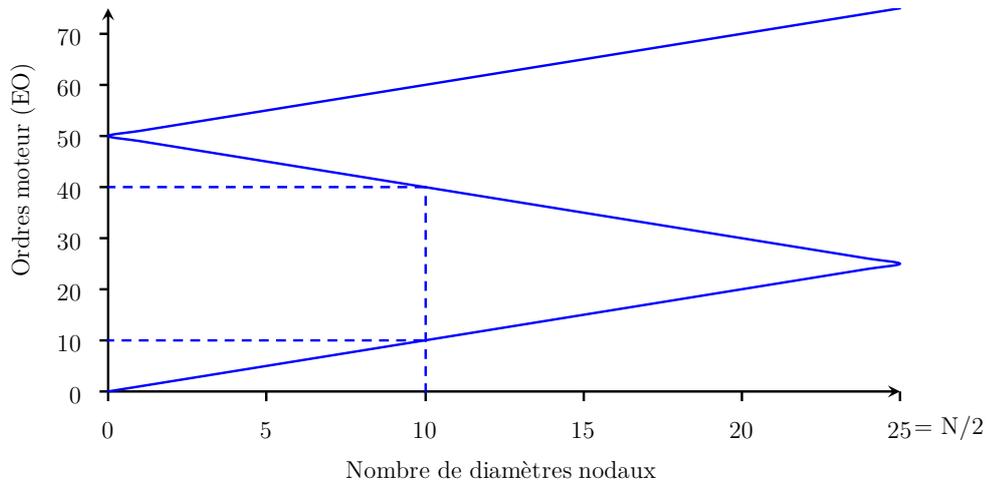


FIGURE I.8 – Diagramme zigzag

blement le nombre de coïncidences fréquentielles à risque identifiées sur le diagramme de Campbell de la roue. On comprend ici l'importance de connaître avec précision le positionnement fréquentiel des modes de vibrations de la structure en fonction du nombre de diamètres nodaux de leurs déformées.

3.2.3 Diagramme diamètres-fréquences

La classification des modes se fait généralement par familles correspondant à un type de déformée des pales, pour lesquelles on trace l'évolution de la fréquence propre en fonction du nombre de diamètres. On pourra par exemple s'intéresser à la famille du premier

mode de flexion des pales, la famille 1F, et calculer la fréquence propre associée de 0 à $N/2$ diamètres. On peut de la même manière suivre la famille 1T du premier mode de torsion, ou la famille 2F du second mode de flexion. La figure I.9 donne un exemple de diagramme diamètres-fréquences, sur lequel sont représentées en trait plein les différentes familles, dont la fréquence évolue en fonction du nombre de diamètres nodaux suivant l'axe des abscisses. Pour une famille de modes donnée, on peut constater sur le diagramme une zone

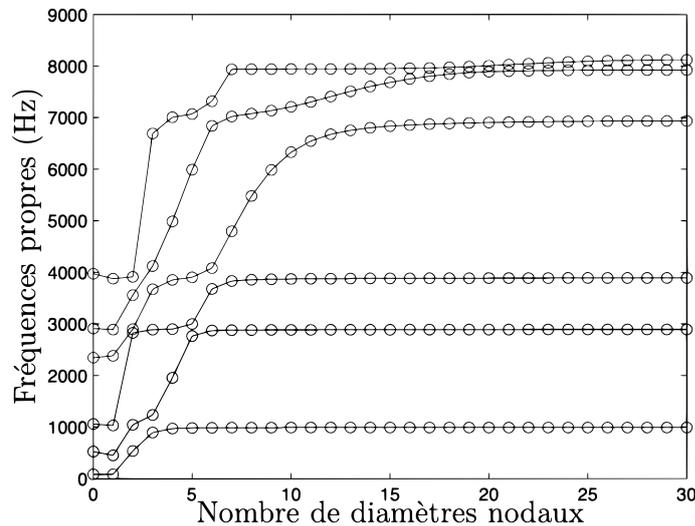


FIGURE I.9 – Évolution des fréquences propres en fonction de l'indice harmonique

dans laquelle la fréquence propre évolue fortement en fonction du nombre de diamètres, ce qui traduit la forte contribution en raideur du disque pour les déformées correspondantes. À mesure que le nombre de diamètres augmente, cette sensibilité de la fréquence au nombre de diamètres tend à disparaître, la fréquence propre se rapprochant asymptotiquement de celle des pales encastrées à la jonction aube-disque, vibrant selon les modes définissant la famille considérée.

Sur ce type de diagramme, il est également possible d'identifier les zones de *veering*, correspondant à un rapprochement des courbes associées à deux familles. Sur la figure I.9, on peut observer le phénomène au niveau des modes à 5 diamètres des deuxième et troisième famille de modes, ou bien au niveau des modes à 2 diamètres des troisième et quatrième familles. En conception, afin de ne pas nuire à la robustesse du dimensionnement, on cherche généralement à éviter les phénomènes de résonance au voisinage de telles zones.

Malgré les outils à disposition pour dimensionner les roues aubagées face aux vibrations et anticiper les risques de résonances en fonctionnement, la rupture par fatigue vibratoire reste l'une des causes principales d'endommagement des composants. Le dimensionnement en fatigue repose entre autre sur deux outils empiriques, les courbes de Wöhler et le diagramme de Haigh, que nous présentons brièvement dans la section suivante.

3.2.4 Courbe de Wöhler et diagramme de Haigh

Une courbe de Wöhler représente le niveau de contrainte alternée σ_a en fonction du nombre de cycles N_r auquel survient la rupture du matériau. Ces courbes sont issues

de campagnes de caractérisation qui reflètent le comportement statistique d'un matériau donné, c'est pourquoi il est d'usage de les tracer à un certain niveau de probabilité de rupture, en général 95%. Un exemple est donné figure I.10, sur lequel apparaît une *limite d'endurance* σ_∞ , désignant la valeur de contrainte alternée en deçà de laquelle le matériau ne rompt théoriquement pas. Cette propriété est caractéristique de certaines familles de matériaux telles que les aciers.

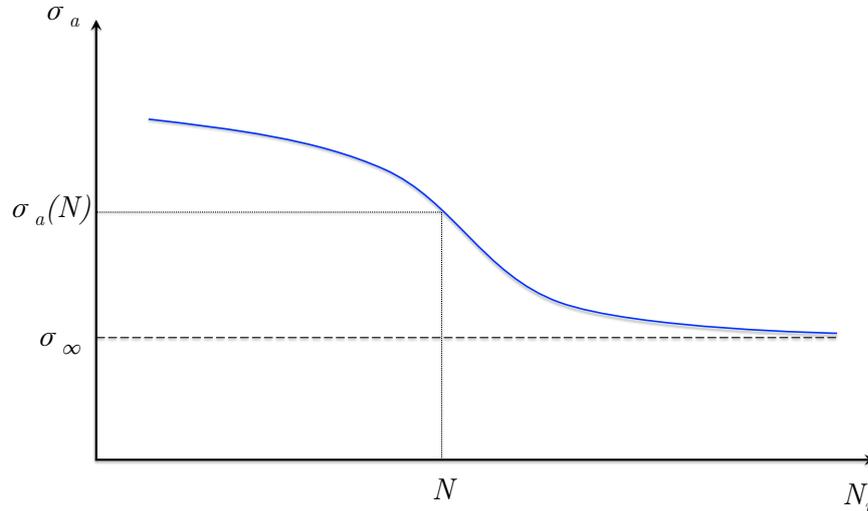


FIGURE I.10 – Courbe de Wöhler

En plus d'une contrainte cyclique en cas de vibrations, les pales sont soumises à un chargement statique induit par le champ centrifuge dû à la rotation de la roue, à l'origine d'une forte contrainte statique - ou moyenne σ_m - qui n'est pas représentée sur une courbe de Wöhler. Afin de prendre en compte ces deux paramètres dans l'estimation de la durée de vie des composants, plusieurs modèles ont été proposés. Parmi eux, on retrouve les modèles de Goodman, de Soderberg, ou de Gerber. Ces modèles sont généralement représentés sur le diagramme de Haigh, représentant, pour un nombre de cycles fixé, la contrainte alternée σ_a qui entraîne la rupture à une contrainte moyenne σ_m donnée. Sur le diagramme de Haigh, les modèles de Goodman et Soderberg sont représentés par des droites, alors que le modèle de Gerber est une portion de parabole, comme on peut l'observer sur la figure I.11. Pour assurer l'intégrité de la machine, de forts coefficients de sécurité sont généralement appliqués afin de réduire le niveau de contrainte alternée dans le matériau, et ainsi augmenter la distance entre le point de fonctionnement et la courbe.

3.3 Désaccordage aléatoire et intentionnel

La section I.2 a porté sur la modélisation des roues aubagées en tant que structures à symétrie cyclique, et a démontré l'intérêt d'une telle approche. Cependant, ce modèle idéalise les propriétés structurales de la roue, et peine parfois à prédire le comportement dynamique du composant lors de confrontation avec des données expérimentales. L'une des raisons à cela est que l'hypothèse de base de cette modélisation est bien souvent mise en défaut. En effet, les procédés de fabrication induisent en réalité des dispersions ma-

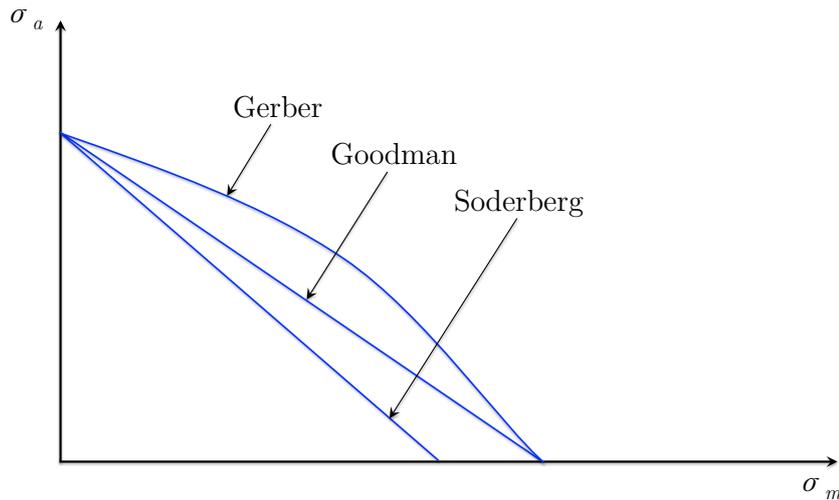


FIGURE I.11 – Diagramme de Haigh

térielles sur le disque et les aubages, du simple fait des tolérances d'usinage et de mise en forme, dispersions auxquelles viennent s'ajouter celles induites par l'usure des composants. Ainsi, la propriété de symétrie cyclique de la structure, hypothèse fondamentale du formalisme de la section I.2, s'en retrouve fortement impactée, et la pertinence d'une telle modélisation peut alors s'avérer discutable.

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre introductif de ce mémoire, le désaccordage de la roue, même à de faibles niveaux, est susceptible de perturber significativement la réponse dynamique de la structure. L'une des conséquences directes du phénomène est l'observation d'une localisation de l'énergie vibratoire sur certains secteurs de la roue, induisant des amplitudes pouvant excéder de plus de 50% celles prédites en étudiant la structure cyclique idéale. Si une marge de sécurité insuffisante a été retenue sur le diagramme de Haigh (voir section 3.2.4), les niveaux de contraintes réels observés en fonctionnement sont alors susceptibles de mettre en péril le dimensionnement en fatigue de la roue. Afin de quantifier le taux de désaccordage, il est courant d'utiliser l'écart type en fréquence propre des aubes par rapport à la valeur nominale. Cette convention conduit à des courbes telle que celle de la figure I.12, illustrant l'évolution du facteur d'amplification en amplitude des pales (par rapport à la structure accordée) en fonction de l'intensité du désaccordage.

Sur ce type de graphiques, il est classique d'observer un maximum en amplification, scindant la courbe en deux zones, une première précédant le maximum, où la courbe possède une pente relativement raide, et une seconde zone où la pente faiblit à mesure que l'on s'éloigne du pic. L'expérience tend à prouver que le désaccordage aléatoire résultant des imperfections matérielles et géométriques, ainsi que de l'usure des composants, conduit généralement à des taux positionnant la roue dans la première zone, là où de faibles imperfections induisent des variations significatives du facteur d'amplification. Ainsi, il apparaît qu'en termes de robustesse, il semble plus intéressant de se situer dans la seconde zone de la courbe, là où de faibles écarts par rapport au nominal induisent une variation plus

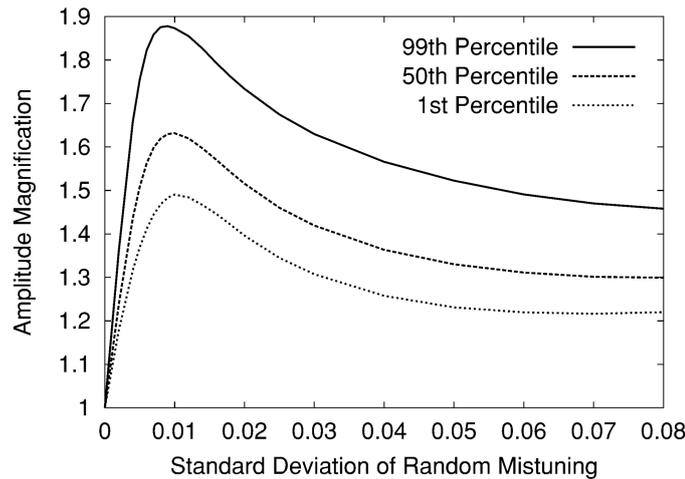


FIGURE I.12 – Facteur d’amplification en fonction du taux de désaccordage [19]

faible de l’amplification, et donc une erreur moindre sur les amplitudes prédites. Cette constatation a donné naissance au concept de désaccordage intentionnel, qui consiste à volontairement briser la symétrie cyclique de la roue pour se positionner au delà du pic, dans la zone permettant un dimensionnement plus robuste. Ce désaccordage intentionnel peut par exemple être obtenu en modifiant les propriétés géométriques des pales.

En plus des travaux déjà cités en introduction [36–39, 49, 102, 103, 157, 170, 174–176, 178], mentionnons également les travaux de Pierre *et al.* [126–129] adressant les phénomènes de localisation dans les structures cycliques en présence d’hétérogénéités structurales. En parallèle, des études se sont également intéressées au lien entre le désaccordage et les instabilités aéroélastiques [30, 67, 70, 98, 162], et ont notamment démontré qu’il était possible d’améliorer la robustesse du dimensionnement face à ces phénomènes très dangereux pour l’intégrité des roues, en augmentant les marges au flottage à l’aide du désaccordage. De nombreux auteurs se sont aussi intéressés à la réduction de l’amplification par optimisation du schéma de désaccordage de la roue [18, 23, 39, 49, 123, 138], en modifiant les caractéristiques modales des pales et leur répartition autour du disque. Plus récemment, on retrouve dans la littérature des études s’intéressant aux très grandes valeurs de désaccordage, qui seraient par exemple induites par l’endommagement d’une ou plusieurs pales [34, 97, 113]. Un état de l’art sur le désaccordage aléatoire et intentionnel des roues aubagées a été réalisé successivement par Slater [151], et par Castanier et Pierre [19]. Citons également le premier chapitre de la thèse de Mbaye [100] qui dresse un état de l’art très complet sur ces problématiques.

3.4 Aspects technologiques

Avant de conclure ce chapitre introductif dédié au cadre classique d’étude des roues aubagées, nous allons présenter quelques aspects technologiques relatifs à la conception des roues et au contrôle passif des vibrations.

3.4.1 Pales rapportées et technologie monobloc

Dans l'industrie aéronautique, on retrouve deux principales solutions technologiques pour la conception des roues aubagées. La première, plus ancienne, consiste à usiner le disque seul, et à brocher une série d'alvéoles sur sa périphérie, dans lesquelles viendront se loger les pales (figure I.13a). Ces dernières sont la plupart du temps obtenues par fonderie, permettant ainsi d'obtenir les géométries plus ou moins complexes dessinées par le bureau d'étude. Les pales sont ensuite insérées dans les alvéoles (figure I.13b), et éventuellement bloquée dans la direction colinéaire à l'angle de brochage afin de prévenir tout risque de désengagement. Les roues obtenues par ce procédé sont généralement appelées roues à pales rapportées. Pour ce type de technologie, on retrouve diverses géométries de pied de



(a) Brochage du disque



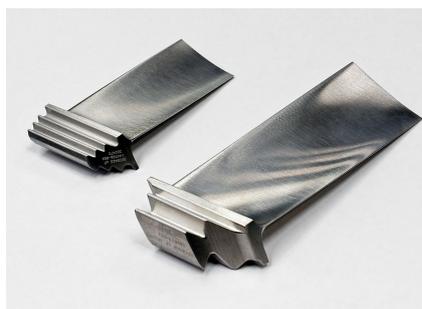
(b) Insertion des pales

FIGURE I.13 – Roue aubagée à pales rapportées

pale, telles que les pieds en queue d'aronde (figure I.14a) ou les pieds de sapin (figure I.14b), dont le but principal est de contrer les efforts centrifuges agissant sur la pale tout en assurant une répartition plus ou moins homogène des contraintes mécaniques dans le matériau, et ainsi limiter les risques de ruptures. Dans un même moteur, il est parfaitement possible de retrouver des pales à queue d'aronde et des pales à pied de sapin, le choix de la solution adoptée étant notamment fonction du champ centrifuge et du champ de température auxquels seront soumises les pales en opération.



(a) Pieds en queue d'aronde



(b) Pieds de sapin

FIGURE I.14 – Différents types de pieds de pale

La technologie des roues à pales rapportées s'est vue confrontée ces dernières années à l'apparition d'une technologie concurrente, offrant notamment des performances aérodynamiques plus intéressantes, celle des roues ou disques aubagé(s) monoblocs (DAM). Ce type de technologie n'a été rendu possible que par l'amélioration des techniques d'usinages

modernes, et permet aujourd'hui la conception de roues aubagées au rendement aérodynamique inégalable par la technologie à pales rapportées. En outre, le gain de performance obtenu pour chaque roue permet *in fine* de réduire le nombre d'étages nécessaire pour réaliser le cycle thermodynamique du moteur, ce qui conduit à un gain en masse et en consommation de carburant. En revanche, malgré ces avantages, cette technologie possède deux inconvénients majeurs. Tout d'abord, là où la rupture d'une ou plusieurs pales n'entraîne que le remplacement des pales endommagées sur une roue à pales rapportées, elle nécessite ici le remplacement de l'intégralité du DAM, ce qui est susceptible de représenter un coût non négligeable sur l'ensemble de la durée de vie du moteur. De plus, les roues monoblocs présentent un désavantage certain face aux roues à pales rapportées en ce qui concerne le dimensionnement vibratoire, à savoir qu'elles possèdent un amortissement intrinsèque très faible, résultant de la perte de l'amortissement induit par les phénomènes de friction à l'interface aube-disque. Ce constat a conduit les motoristes à mettre au point des dispositifs d'amortissement spécifiques à ce type de technologie, afin de pouvoir bénéficier de tout son potentiel sans compromettre le dimensionnement face aux phénomènes de fatigue. Bien avant l'apparition des roues monoblocs, le contrôle passif ou semi-actif des vibrations dans les ensembles aubagés était déjà au cœur des préoccupations de l'industrie, ce qui a donné lieu à l'élaboration de tout un arsenal de solutions technologiques permettant de garantir l'intégrité des composants. La section suivante dresse un bref état de l'art sur les solutions de contrôle vibratoire communément rencontrées en conception de roues aubagées.

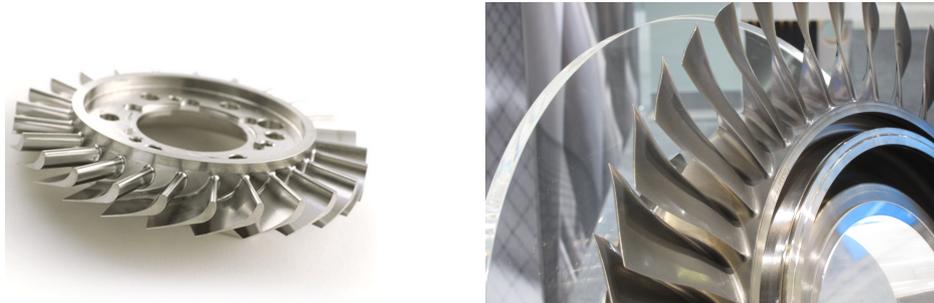


FIGURE I.15 – Disques aubagés monoblocs

3.4.2 Contrôle vibratoire

Comme nous avons pu le voir précédemment, le dimensionnement d'un ensemble de roues aubagées face aux vibrations fait appel à différents outils, permettant d'assurer que l'architecture des organes moteurs et que les paramètres choisis en conception minimisent les risques de ruptures des pales par fatigue vibratoire. La démarche globale peut se décomposer en deux étapes, à savoir, l'anticipation des phénomènes de résonances, et le cas échéant le contrôle des contraintes générées dans le matériau par amortissement des vibrations.

Idéalement, le dimensionnement doit permettre d'éviter tout risque de mise en résonance des composants sur la plage de fonctionnement du moteur. Nous avons pu voir qu'une résonance ne pouvait survenir qu'en cas de coïncidence fréquentielle entre un mode propre de la structure et une fréquence d'excitation, associée à une condition d'appropri-

tion modale faisant intervenir de façon sous-jacente le nombre de secteurs de la roue. Faire en sorte que ces deux conditions ne soient pas satisfaites simultanément constitue ainsi un moyen simple et efficace de valider le positionnement fréquentiel de la structure. Cependant, la conception d'une roue de turbine ou de compresseur fait intervenir des critères thermodynamiques et aérodynamiques fondamentaux pour le bon fonctionnement de la turbomachine, fixant un grand nombre de paramètres géométriques et matériels. Afin de limiter l'impact du dimensionnement vibratoire sur le design optimal en matière de rendement, diverses solutions technologiques ont pu voir le jour, se voulant aussi peu intrusives que possible, et permettant de moduler le positionnement fréquentiel de la roue sans trop dégrader le rendement du moteur. Un grand nombre de ces technologies exploitent des phénomènes de contact permettant de rigidifier la structure, et ainsi de décaler les fréquences propres des modes à risque de façon à invalider la condition de coïncidence fréquentielle.

Parmi ces dispositifs, nous pouvons citer les excroissances matérielles telles que les nageoires [131] ou les talons, que l'on retrouve sur certaines pales. Les nageoires désignent les excroissances positionnées sur un rayon intermédiaire, illustrées sur la figure I.16a, les talons faisant référence à celles que l'on retrouve en tête de pale, illustrés en figure I.16b. En fonctionnement, sous l'effet du dévissage résultant du champ centrifuge induit par la rotation du moteur, ces excroissances viennent lier physiquement les pales adjacentes et rigidifier l'ensemble aubagé en créant une structure annulaire plus ou moins rigide. Notons que les nageoires sont généralement réservées à des pales de taille relativement grande, et sont de moins en moins répandues en raison de leur forte intrusivité, générant des perturbations non-négligeable du fluide dans la veine d'air et donc des pertes de rendement. L'intérêt de ce type de technologie est double, puisque les phénomènes de friction résultant de la mise en contact d'un ou plusieurs composants induisent également une dissipation énergétique. Cette dissipation se traduit d'un point de vue dynamique par un amortissement plus ou moins important des vibrations, permettant de réduire la contrainte alternée dans le matériau et ainsi améliorer la robustesse du dimensionnement face au phénomène de fatigue vibratoire. Les roues aubagées à pales rapportées ont l'avantage de bénéficier naturellement de cette dissipation, à travers les divers phénomènes de glissement et micro-glissement générés à l'interface de jonction entre les aubes et le disque. Notons cependant que compte tenu des pressions de contact mises en jeu et du nombre de cycles subis par les composants, ces technologies sont susceptibles de soulever des problématiques liées à l'usure des matériaux, à l'amorce de criques de fatigue, et au phénomène de fretting.



FIGURE I.16 – Dispositifs rigidifiants par excroissance matérielle

Une autre technologie ayant fait ses preuves et largement utilisée de nos jours est celle

des amortisseurs sous-plateformes, également appelés frotteurs. Ces amortisseurs sont en fait des masselottes positionnées sous les plates-formes des aubes, tel qu'illustré en figure I.17, que le champ centrifuge vient plaquer sous les plates-formes, venant ainsi lier matériellement les pales adjacentes. Là aussi, l'apport du dispositif est double, puisqu'il permet non seulement le décalage d'une ou plusieurs fréquences propres à risque hors de la plage de fonctionnement du moteur, mais également une dissipation énergétique résultant du mouvement relatif induit par la mise en vibrations des pales. Cette technologie se retrouve régulièrement sur les roues aubagées à pales rapportées, mais est incompatible avec les technologies monoblocs du fait de l'absence de plate-forme et de séparation inter-pales. Une solution alternative consiste en la mise en place de jons de friction situés dans des gorges, que le champ centrifuge vient plaquer contre la roue. Ce type de dispositif fût notamment l'objet d'étude de la thèse de Laxalde [83], dressant un état de l'art intéressant sur les dispositifs d'amortissement par friction appliqués aux roues aubagées. Outre les solutions bien spécifiques d'amortissement par friction discutées ici, on y mentionne également l'usage de revêtements visco-élastiques, d'amortisseurs dynamiques ou TMD (*Tuned Mass Damper*), et d'amortisseurs par chocs.

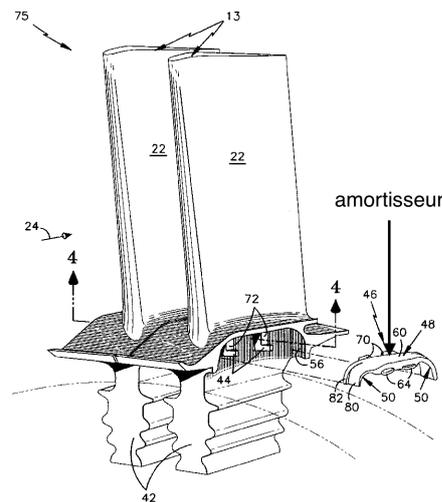


FIGURE I.17 – Amortisseur sous plate-forme [60]

Bilan

Ce chapitre nous a permis de poser le cadre scientifique de notre travail de recherche, en présentant les outils de modélisation couramment utilisés en dynamique des roues aubagées, avant de replacer la problématique dans son contexte industriel en introduisant quelques notions de dimensionnement vibratoire. Les dispositifs d'amortissement par friction que nous avons présentés dans la section précédente sont très largement répandus dans le monde des turbomachines. Cependant, compte tenu de l'aspect fortement non-linéaire des phénomènes physiques impliqués, la calibration de ces dispositifs résulte essentiellement du retour d'expérience des motoristes et de règles de conception empiriques. Si la prise en compte de la nature non-linéaire de ces dispositifs est aujourd'hui gérée efficacement par la plupart des codes de calculs commerciaux pour des analyses statiques, leur

modélisation en analyse vibratoire passe généralement par une linéarisation du modèle autour d'un point d'équilibre, obtenu par un calcul statique non-linéaire. Or, l'impact de ces dispositifs sur le comportement vibratoire du composant est profondément lié à des aspects dynamiques qu'une linéarisation ne peut finement capturer. La réponse la plus directe pour ne plus négliger ces phénomènes consiste à faire appel à des algorithmes d'intégration temporelle, mais le coût numérique d'une telle approche est bien trop souvent prohibitif pour un bureau d'étude. Différentes méthodes ont alors pu voir le jour pour répondre à cette problématique, et notamment une classe particulière exploitant le caractère périodique de la solution recherchée en analyse vibratoire, et transposant le problème dans le domaine fréquentiel. Ces méthodes sont présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre II

Approche fréquentielle pour l'étude des systèmes non-linéaires

Ce chapitre s'intéresse aux méthodes adaptées à la recherche des solutions périodiques ou pseudo-périodiques de systèmes non-linéaires, avec un intérêt particulier pour les techniques reposant sur une approche fréquentielle du problème. Nous y présentons notamment l'un des concepts clefs de ce travail de thèse, celui de mode complexe non-linéaire.

Sommaire

1	Solutions périodiques et méthodes temporelles	38
1.1	Différences finies	38
1.2	Méthode de tir	39
1.3	Collocation orthogonale	40
2	Méthode de l'équilibrage harmonique	41
2.1	Principe théorique	41
2.2	Calcul des termes non-linéaires	44
2.3	Continuation des solutions	46
2.4	Matrice jacobienne analytique	48
2.5	Techniques de condensation	50
3	Phénoménologie des systèmes non-linéaires	52
3.1	Notion de stabilité	52
3.2	Bifurcations	57
3.3	Résonances non-linéaires	60
3.4	Exemple illustratif	62
4	Analyse modale non-linéaire fréquentielle	67
4.1	État de l'art	67
4.2	Techniques classiques d'analyse	69
4.3	Mode complexe non-linéaire	73
4.4	Exemple illustratif	78
5	Étude phénoménologique	79
5.1	Présentation du modèle	80
5.2	Analyse du système accordé	84
5.3	Introduction du désaccordage	88
	Bilan	93

Les équations manipulées dans le chapitre précédent correspondent à des systèmes dynamiques linéaires, dont l'étude est à l'heure actuelle bien maîtrisée par les codes de calculs commerciaux. Cependant, la prise en compte de phénomènes non-linéaires, tels que le contact ou le frottement, se traduit par l'ajout d'un terme \mathbf{f} dans les équations du mouvement discrétisées en espace, représentatif des effets conservatifs et dissipatifs non proportionnels aux déplacements nodaux et à leurs dérivées temporelles. La prise en compte de ce terme aboutit au système dynamique suivant,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}(t) \quad (\text{II.1})$$

La résolution de ce type de systèmes est significativement plus complexe que ceux rencontrés dans le cadre d'une théorie linéaire. Bien que les techniques classiques d'intégration temporelle permettent de traiter ce type de problèmes, le coût numérique peut rapidement devenir prohibitif dès que le nombre de degrés de liberté du système dépasse quelques milliers. Cependant, dans la mesure où seul le régime permanent du système dynamique est recherché, nous allons voir qu'il est possible de faire appel à des méthodes dédiées à ce type de calcul, et offrant des performances plus intéressantes que les intégrateurs temporels standards.

1 Solutions périodiques et méthodes temporelles

Dans cette section, nous présentons quelques méthodes classiquement utilisées pour rechercher les solutions périodiques d'un système non-linéaire en adoptant une approche temporelle. Ces quelques rappels nous permettent d'introduire l'intérêt des méthodes fréquentielles, qui seront l'objet du reste du chapitre.

1.1 Différences finies

La méthode des différences finies est une technique très générale d'intégration temporelle pour la résolution de systèmes d'équations différentielles. En général, l'inconvénient majeur des intégrateurs lorsque l'on s'intéresse aux solutions périodiques est de devoir déterminer intégralement le régime transitoire de la réponse avant d'obtenir le régime permanent, périodique en l'occurrence. Cependant, il est possible de réécrire le problème mathématique initial en incorporant directement la condition de périodicité dans le système d'équations. Soit le problème initial écrit sous forme d'état

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(T) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

avec $\mathbf{y}(t)$ le vecteur d'état à l'instant t , \mathbf{f} la fonction résumant le système d'équations, et T la période de la solution. En échantillonnant la période avec un pas $h = T/n$, et en notant $\mathbf{y}(t_k = kh) = \mathbf{y}_k$, on se ramène au système

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, t_0) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{y}}_k = \mathbf{f}(\mathbf{y}_k, t_k) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{y}}_n = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

avec $\dot{\mathbf{y}}_k = d\mathbf{y}(t_k)/dt$. La résolution du système peut ensuite être abordée par intégration numérique, en utilisant par exemple la règle des trapèzes [44], ce qui revient à substituer l'expression

$$\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k = \frac{h}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{y}_{k+1}, t_{k+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_k, t_k)) \quad (\text{II.4})$$

dans le système (II.3). En incorporant la condition de périodicité à la dernière ligne, la procédure mène au système algébrique suivant, que l'on peut résoudre itérativement par une méthode de Newton-Raphson ou équivalent.

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0 = \frac{h}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{y}_1, t_1) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, t_0)) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k = \frac{h}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{y}_{k+1}, t_{k+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_k, t_k)) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_{n-1} = \frac{h}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{y}_0, t_0) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n-1}, t_{n-1})) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Notons que lorsque la période de la solution est inconnue, il est nécessaire d'ajouter une condition de phase pour fermer le système obtenu, en imposant l'amplitude d'une des coordonnées des vecteurs \mathbf{y}_k . À la lecture du système (II.5), on comprend que cette méthode peut rapidement mener à des systèmes algébriques de très grande taille.

1.2 Méthode de tir

La méthode de tir est une méthode se basant sur une correction itérative des conditions initiales jusqu'à obtention d'une solution identique après écoulement d'une période T . Tout comme la méthode précédente, cette technique permet de s'affranchir du calcul du régime transitoire. On définit pour cela une fonction de tir telle que

$$\mathbf{s}(T, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}(T, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0 \quad (\text{II.6})$$

Pour une condition initiale \mathbf{y}_0 donnée, on calcule par intégration temporelle la solution à l'instant T , ce qui permet d'évaluer la valeur de \mathbf{g} pour ce jeu de données. De façon analogue à une procédure de Newton-Raphson classique, les corrections à ajouter à \mathbf{y}_0 et T (lorsque la période est inconnue, voir section 4.2.2) sont obtenues par un développement de Taylor au premier ordre de la fonction tir au voisinage du point courant

$$\mathbf{s}(T + \Delta T, \mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}_0) \approx \mathbf{s}(T, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{y}_0} \Delta \mathbf{y}_0 \quad (\text{II.7})$$

Les dérivées partielles de la fonction \mathbf{s} peuvent être évaluées numériquement, ou bien en se basant sur une expression analytique [145], ce qui s'avère plus avantageux pour des systèmes de grande taille. Les termes correctifs sont alors simplement déterminés par résolution du système

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{y}_0} \Delta \mathbf{y}_0 = -\mathbf{s}(T, \mathbf{y}_0) \quad (\text{II.8})$$

Dans le cas où le système à résoudre est autonome et que la période est inconnue, il convient une fois de plus de fermer le système avec une condition de phase. Il est intéressant de remarquer que l'évaluation des dérivées partielles de la fonction de tir fait intervenir

le calcul de la matrice de monodromie du système, ce qui permet de statuer sans coût additionnel sur la stabilité de la solution. Nous reviendrons sur ces aspects à la section II.3.1. Un travail très complet sur la mise en œuvre de cette technique appliquée aux calculs de modes normaux non-linéaires été réalisé par Peeters *et al.* [68, 115, 116].

1.3 Collocation orthogonale

La méthode de collocation orthogonale consiste à échantillonner la période de la solution en $n + 1$ instants t_i , avec $t_0 = 0$ et $t_n = T$, et à approcher la solution sur chacun des intervalles de temps ainsi définis par un polynôme de degré p . Par collocation, on entend que l'approximation de la solution ne devra satisfaire le système d'équations qu'en p points $\xi_{i,j}$ de l'intervalle considéré.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}_i(\xi_{i,j}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_i(\xi_{i,j})) \quad \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad (\text{II.9})$$

Il est souvent utile de décomposer les n polynômes \mathbf{y}_i sur une base de polynômes de Lagrange

$$\mathbf{y}_i(t) = \sum_{j=0}^p \mathbf{y}_{i,j} \prod_{k=0, k \neq j}^p \frac{t - t_{i,k}}{t_{i,j} - t_{i,k}} \quad (\text{II.10})$$

et la condition de périodicité s'écrit alors

$$\mathbf{y}_{n-1,p} = \mathbf{y}_{0,0} \quad (\text{II.11})$$

La précision de l'approximation dépend directement des points de collocation $\xi_{i,j}$, dont le choix est *a priori* arbitraire. En pratique, il est souvent judicieux d'opter pour les points d'intégration de Gauss, qui garantissent une solution de qualité, si ce n'est optimale. Enfin, notons qu'une condition de phase peut une fois de plus s'avérer nécessaire pour fermer le système d'équations.

Les méthodes que nous venons de présenter succinctement sont dites temporelles, car elles exploitent directement le système d'équations différentielles en temps et discrétisées en espace établi au chapitre précédent, ici exprimé sous forme d'état. Elles ont l'avantage de ne pas requérir de développement analytique lourd et propre à chaque système, ce qui les rend adaptées à une implémentation numérique et leur procure une certaine polyvalence. En outre, elles ne requièrent aucune hypothèse concernant l'intensité des termes non-linéaires, contrairement aux méthodes de perturbation [110] dont le domaine de validité est restreint aux non-linéarités de faible amplitude. En revanche, ces techniques ont l'inconvénient de générer des problèmes de très grande taille, ce qui affecte leur capacité à traiter des modèles numériques industriels, possédant initialement plusieurs milliers voire millions de degrés de liberté. En outre, l'utilisation de schémas d'intégration temporelle par certaines d'entre-elles les rend potentiellement sujettes aux problèmes de stabilité et de consistance inhérents à ce type d'algorithmes. Afin de contourner certaines de ces limitations, il peut être intéressant de faire appel à des approches dites fréquentielles, dont l'archétype est la méthode de l'équilibrage harmonique, ou HBM (*Harmonic Balance Method*).

2 Méthode de l'équilibrage harmonique

La section précédente a permis d'introduire quelques éléments méthodologiques concernant la résolution de systèmes dynamiques non-linéaires, restreints au cas particulier des solutions périodiques. Il en ressort notamment que l'un des objectifs principaux des méthodes dédiées à ce type de solutions est de s'abstenir du calcul du régime transitoire en exploitant la périodicité de la fonction recherchée. La méthode de l'équilibrage harmonique tire parti de cette condition, en l'imposant directement dans la forme de la solution recherchée, ce qui permet de transposer le problème du domaine temporel, au domaine fréquentiel.

2.1 Principe théorique

La HBM est une application directe de la méthode de Galerkin, que nous avons déjà pu mentionner au chapitre précédent. Elle consiste à rechercher la solution du système (II.1) dans l'espace engendré par la famille libre de fonctions trigonométriques de pulsation fondamentale $\omega = 2\pi/T$, tronquée à l'ordre n_h . La solution est donc recherchée sous la forme d'une série de Fourier à coefficients réels, donnée par l'expression (II.12).

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{n_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.12})$$

Cette hypothèse permet de garantir la périodicité de la solution, imposée ici *a priori*. Nous verrons plus loin comment traiter par une approche similaire le cas des systèmes autonomes dont la période est inconnue.

2.1.1 Mise en équations

L'espace de réduction de la méthode de Galerkin étant donné, le résidu $\mathbf{r}(t)$ résultant de la substitution de (II.12) dans (II.1) doit être orthogonalisé par rapport à ce même sous-espace. On peut utiliser pour cela le produit scalaire (II.13) défini sur l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R} sur l'intervalle $[0, T]$,

$$\forall (f, g) \in C([0, T])^2, \quad \langle f|g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt \quad (\text{II.13})$$

En utilisant les notations $c_0 = 1$, $c_k = \cos(k\omega t)$, $s_k = \sin(k\omega t)$, la condition d'orthogonalité du résidu par rapport à une fonction φ de la base du sous-espace donne l'expression (II.14).

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}|\varphi \rangle &= \mathbf{M} \sum_{k=1}^{n_h} -(k\omega)^2 (\mathbf{a}_k \langle c_k|\varphi \rangle + \mathbf{b}_k \langle s_k|\varphi \rangle) \\ &\quad + \mathbf{C} \sum_{k=1}^{n_h} -(k\omega) (\mathbf{a}_k \langle s_k|\varphi \rangle - \mathbf{b}_k \langle c_k|\varphi \rangle) \\ &\quad + \mathbf{K} \sum_{k=1}^{n_h} (\mathbf{a}_k \langle c_k|\varphi \rangle + \mathbf{b}_k \langle s_k|\varphi \rangle) \\ &\quad + \mathbf{K}\mathbf{a}_0 \langle c_0|\varphi \rangle + \langle \mathbf{f}|\varphi \rangle - \langle \mathbf{g}|\varphi \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

En tenant compte de l'orthogonalité des fonctions de base pour le produit scalaire choisi, le système d'équations peut se simplifier, pour aboutir au système (II.15).

$$\langle \mathbf{r}|c_0 \rangle = 2\mathbf{K}\mathbf{a}_0 + \langle \mathbf{f}|c_0 \rangle - \langle \mathbf{g}|c_0 \rangle = \mathbf{0} \quad (\text{II.15a})$$

$$\langle \mathbf{r}|c_k \rangle = (\mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M})\mathbf{a}_k + (k\omega)\mathbf{C}\mathbf{b}_k + \langle \mathbf{f}|c_k \rangle - \langle \mathbf{g}|c_k \rangle = \mathbf{0} \quad (\text{II.15b})$$

$$\langle \mathbf{r}|s_k \rangle = (\mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M})\mathbf{b}_k - (k\omega)\mathbf{C}\mathbf{a}_k + \langle \mathbf{f}|s_k \rangle - \langle \mathbf{g}|s_k \rangle = \mathbf{0} \quad (\text{II.15c})$$

En matière de programmation, il est souvent plus pratique d'écrire le système d'équations (II.15) sous une forme matricielle plus compacte

$$\mathbf{Z}(\omega) \mathbf{x}_h + \mathbf{f}_h(\mathbf{x}_h, \omega) - \mathbf{g}_h = \mathbf{0} \quad (\text{II.16})$$

où, en raison du produit scalaire utilisé pour l'étape d'orthogonalisation de la méthode de Galerkin, les différents termes des vecteurs \mathbf{x}_h , \mathbf{f}_h , et \mathbf{g}_h , ne sont autres que les coefficients des développements en série de Fourier des vecteurs $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, et $\mathbf{g}(t)$. La matrice de rigidité dynamique multi-harmonique \mathbf{Z} est une matrice tridiagonale par blocs, se présentant sous la forme suivante

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{K} & & & & \\ & \mathbf{Z}_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{Z}_k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mathbf{Z}_{n_h} \end{pmatrix} \quad (\text{II.17})$$

et où chacun des blocs \mathbf{Z}_k a pour expression,

$$\mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} & k\omega\mathbf{C} \\ -k\omega\mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket \quad (\text{II.18})$$

La méthode de l'équilibrage harmonique permet ainsi de transformer le système d'équations différentielles initial (II.1) en un système d'équations algébriques, dont la résolution est discutée dans la section suivante.

2.1.2 Éléments de résolution

La résolution du système (II.16) peut ensuite être abordée numériquement, à l'aide d'un solveur itératif se basant par exemple sur la méthode de Newton-Raphson. Cette méthode est au cœur de nombreux algorithmes utilisés pour trouver les racines d'un système d'équations algébriques non-linéaires tel que (II.16), pouvant s'écrire sous la forme

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (\text{II.19})$$

avec \mathbf{q} le vecteur renfermant l'ensemble des variables du problème. Le principe de la méthode est de déterminer la solution \mathbf{q}_0 satisfaisant l'équation (II.19) de manière itérative, en partant d'un vecteur initial $\mathbf{q}^{(0)}$, et en évaluant à l'itération k l'incrément $\Delta\mathbf{q}$ à ajouter au vecteur $\mathbf{q}^{(k)}$ pour se rapprocher de la solution. Cette approche est commune à l'ensemble des algorithmes à directions de descente. Dans le cas de la méthode de Newton-Raphson,

le calcul de l'incrément est basé sur le développement de Taylor au premier ordre de l'équation (II.19), ce qui conduit à résoudre le système algébrique linéaire

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \left(\mathbf{q}^{(k)} \right) \cdot \Delta \mathbf{q} = -\mathbf{r} \left(\mathbf{q}^{(k)} \right) \quad (\text{II.20})$$

dans lequel apparaît la *matrice jacobienne* du système algébrique, évaluée en $\mathbf{q}^{(k)}$. Le nouvel itéré est alors simplement obtenu par

$$\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta \mathbf{q} \quad (\text{II.21})$$

et le processus est répété jusqu'à obtention d'un vecteur \mathbf{q}_0 vérifiant l'équation (II.19) de façon satisfaisante, selon un critère d'arrêt arbitraire défini en amont, généralement basé sur la norme du résidu, de type $\|\mathbf{r}(\mathbf{q}_0)\| < \epsilon$, et sur la stabilisation des valeurs de \mathbf{q} .

Dans ce travail, la résolution des systèmes d'équations algébriques rencontrés a dans la majeure partie des cas été réalisée avec un algorithme à région de confiance [25], implémenté dans la fonction `fsolve` de MATLAB. Mentionnons simplement que ce type d'algorithmes, plus robustes mais plus complexes à mettre en œuvre que les algorithmes à directions de descente, requièrent également la connaissance de la matrice jacobienne du système à résoudre à chaque itération, d'où l'importance de connaître une expression analytique de cette matrice. Nous reviendrons sur ce point en section II.2.4.

La résolution itérative du système d'équations algébriques (II.16) obtenu par équilibrage harmonique revient à rechercher une solution périodique de (II.1) directement dans le domaine fréquentiel. Néanmoins, pour certaines applications particulières telles que l'on peut en retrouver en mécanique des fluides, il est parfois préférable de résoudre ce système dans le domaine temporel à l'aide d'intégrateurs. Pour ce faire, le système (II.16) est prémultiplié par une matrice de transformée de Fourier discrète inverse, et les variables fréquentielles sont exprimées en fonction des signaux temporels correspondant échantillonnés, à l'aide d'une matrice de transformée de Fourier discrète. Le système mathématique obtenu est alors l'image du système (II.16) dans le domaine temporel, dont les inconnues ne sont autres que les échantillons du signal périodique $\mathbf{x}(t)$. La résolution de ce nouveau système est alors abordé par intégration temporelle en introduisant un pseudo-temps permettant de converger vers le régime stationnaire de la solution. Cette méthode combinant approche par équilibrage harmonique et résolution temporelle est généralement désignée par TSM, pour *Time Spectral Method*. On pourra se référer aux travaux de Hall *et al.* [56], Gopinath et Jameson [48], et Weide *et al.* [168] à ce sujet, ou bien au travail de thèse de Sicot [150]. Dans nos travaux, nous nous contenterons d'une résolution dans le domaine fréquentiel.

Nous allons voir dans la suite de cette section comment améliorer à la fois la robustesse et les performances de la HBM en vue de son implémentation dans un code de calcul. Dans un premier temps, nous explicitons la procédure de calcul des coefficients de Fourier du terme non-linéaire, dont la complexité a été volontairement omise jusqu'à présent. Nous présentons également une méthode de continuation très classique, dont le but est de pallier l'incapacité des techniques séquentielles standards face à certains comportements pathologiques de la réponse, résultant de phénomènes de bifurcations propres

aux systèmes non-linéaires. Nous explicitons ensuite l'expression analytique de la matrice jacobienne du système, dont l'importance vient d'être soulignée, ce qui permet d'exploiter pleinement le potentiel de la HBM en réduisant considérablement les temps de calcul du solveur. Nous concluons enfin en présentant une transformation du système algébrique permettant de condenser le problème sur les degrés de liberté non-linéaires, ce qui s'avère très intéressant en cas de non-linéarités localisées telles que le frottement.

2.2 Calcul des termes non-linéaires

Le système d'équations algébriques (II.16) fait intervenir le vecteur $\mathbf{f}_h(\mathbf{x}_h, \omega)$ contenant les coefficients de la série de Fourier du vecteur des efforts non-linéaires $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Cependant, la loi liant \mathbf{f}_h aux variables fréquentielles \mathbf{x}_h et ω n'est dans la plupart du temps pas connue directement, seule la loi liant \mathbf{f} aux variables temporelles \mathbf{x} et $\dot{\mathbf{x}}$ étant donnée. Afin de pallier cette difficulté, il est possible d'utiliser une méthode de *collocation trigonométrique* [53], ou bien une procédure d'*alternance temps-fréquence* (AFT), telle que proposée par Cameron et Griffin [12]. Dans ce mémoire, nous utiliserons cette seconde approche, qui permet de déterminer à chaque pas du solveur le terme \mathbf{f}_h correspondant à l'itération courante, par utilisation de transformées de Fourier directes et inverses.

La décomposition en série de Fourier du terme non-linéaire, tronquée à l'ordre n_h , peut se mettre sous la forme suivante, dans laquelle la dépendance en $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ des coefficients est omise par souci de concision,

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{c}_0 + \sum_{k=1}^{n_h} (\mathbf{c}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{d}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.22})$$

et où les coefficients \mathbf{c}_0 , \mathbf{c}_k , et \mathbf{d}_k ne sont autre que les termes résultants du produit scalaire de \mathbf{f} et des fonctions de bases de l'espace de réduction dans les équations (II.14) et (II.15). Nous avons donc les égalités suivantes,

$$\mathbf{c}_0 = \langle \mathbf{f} | c_0 \rangle / 2 \quad (\text{II.23a})$$

$$\mathbf{c}_k = \langle \mathbf{f} | c_k \rangle \quad (\text{II.23b})$$

$$\mathbf{d}_k = \langle \mathbf{f} | s_k \rangle \quad (\text{II.23c})$$

dans lesquelles on rappelle que $c_0 = 1$, $c_k = \cos(k\omega t)$, et $s_k = \sin(k\omega t)$. On prendra garde au coefficient $1/2$ pour le terme constant, nécessaire pour garantir la cohérence des notations, et résultant du fait que $\langle c_0 | c_0 \rangle = 2$. D'un point de vue numérique, il est souvent bien plus efficace de manipuler des données discrètes plutôt que des grandeurs symboliques, c'est pourquoi on préfère généralement échantillonner les vecteurs temporels en n_t instants t_k de la période fondamentale T . Ainsi, pour un vecteur \mathbf{x}_h donné, choisi par le solveur, on calcule le vecteur échantillonné \mathbf{x} par l'intermédiaire d'une matrice de transformée de Fourier discrète inverse $\bar{\mathbf{F}}$, dont l'expression est donnée par

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \cdots & \cos(n_h \omega t_1) & \sin(n_h \omega t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega t_{n_t}) & \sin(\omega t_{n_t}) & \cdots & \cos(n_h \omega t_{n_t}) & \sin(n_h \omega t_{n_t}) \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad (\text{II.24})$$

Afin de remonter aux échantillons de la vitesse $\dot{\mathbf{x}}$ et de l'accélération $\ddot{\mathbf{x}}$, on définit l'opérateur différentiel suivant,

$$\nabla = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & & \\ & \nabla_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \nabla_k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \nabla_{n_h} \end{pmatrix} \quad (\text{II.25})$$

où chacun des blocs ∇_k a pour expression,

$$\nabla_k = \begin{pmatrix} 0 & k\omega \\ -k\omega & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad , \quad \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket \quad (\text{II.26})$$

ce qui permet de déterminer aisément les vecteurs échantillonnés dans le domaine temporel à l'aide des relations suivantes

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{x}_h \quad (\text{II.27a})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{F}}\nabla\mathbf{x}_h \quad (\text{II.27b})$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{F}}\nabla^2\mathbf{x}_h \quad (\text{II.27c})$$

Ces différents échantillons étant connus, le calcul de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ en chaque instant t_k est alors possible à l'aide de l'expression de la loi non-linéaire dans le domaine temporel. Une fois ce calcul effectué, le vecteur \mathbf{f}_h correspondant est déterminé à l'aide de la matrice de transformée de Fourier discrète suivante,

$$\mathbf{F} = \frac{2}{n_t} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_{n_t}) \\ \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_{n_t}) \\ \vdots & & \vdots \\ \cos(n_h \omega t_1) & \cdots & \cos(n_h \omega t_{n_t}) \\ \sin(n_h \omega t_1) & \cdots & \sin(n_h \omega t_{n_t}) \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad (\text{II.28})$$

En pratique, le calcul de \mathbf{f}_h est effectué par simple application de l'équation (II.29), permettant d'évaluer les efforts non-linéaires avec précision et à coût raisonnable, dans la mesure où le nombre de subdivisions temporelles n_t est suffisamment grand pour capturer l'information dans $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$.

$$\mathbf{f}_h = \mathbf{F}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{F}}\mathbf{x}_h, \bar{\mathbf{F}}\nabla\mathbf{x}_h) \quad (\text{II.29})$$

La procédure est résumée en figure II.1, sur laquelle les transformées de Fourier directe et inverse sont respectivement notées DFT et IDFT. Précisons que les matrices \mathbf{F} et $\bar{\mathbf{F}}$ ne sont pas fonctions de ω , car $\omega t_k = 2k\pi/n_t$, et qu'elles peuvent donc être construites une seule et unique fois en amont de la résolution. D'un point de vue numérique, il est également important de remarquer que, compte tenu des produits de Kronecker dans l'expression de \mathbf{F} et $\bar{\mathbf{F}}$, les matrices manipulées durant la procédure AFT sont creuses, et il est vivement recommandé d'exploiter cette caractéristique dans la phase de programmation en utilisant des fonctions adaptées à la manipulation de ce type d'entités. En pratique, le nombre d'échantillons retenus est susceptible d'influencer la convergence du solveur, et il convient

généralement de trouver un compromis entre convergence et temps de calcul, tout en s'assurant que la période d'échantillonnage satisfait le théorème de Shannon¹.

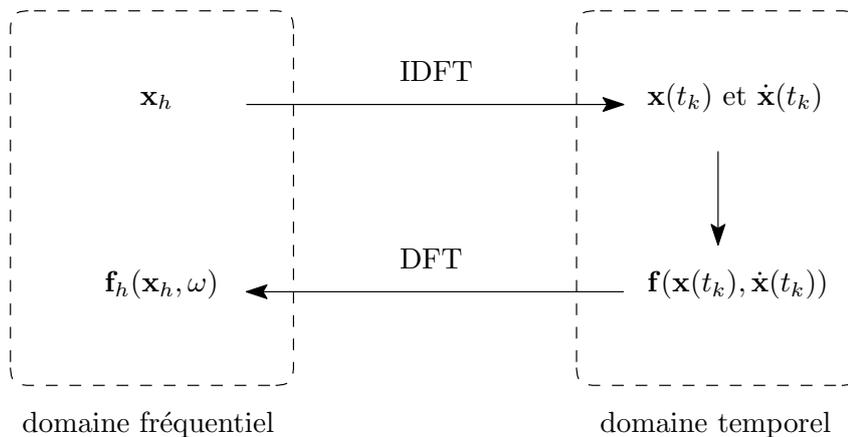


FIGURE II.1 – Procédure AFT (adaptée de [32])

2.3 Continuation des solutions

L'une des caractéristiques propres aux systèmes non-linéaires est la possibilité d'avoir plusieurs solutions pour une fréquence d'excitation donnée. Cette multiplicité des solutions est le fruit de phénomènes de bifurcations, se manifestant entre autres par des points de retournement ou d'embranchement sur la courbe de réponse. Nous reviendrons en détail sur ces aspects en section II.3.2. Afin de suivre l'évolution de la solution calculée par HBM dans ces cas de figure, il est possible de faire appel à des techniques dites de *continuation*. Dans notre travail, nous avons opté pour des techniques de continuation par prédicteur-correcteur, permettant de déterminer la réponse du système de proche en proche. Ces méthodes peuvent être décomposées en une étape de prédiction, utilisée pour fournir au solveur un point de départ suffisamment proche de la solution recherchée, et une étape de correction pour converger vers la solution. Ces techniques sont appréciées, entre autres, pour leur simplicité de mise en œuvre et leur grande polyvalence, mais il existe dans la littérature une alternative intéressante et bien adaptée à l'équilibrage harmonique, la *méthode asymptotique numérique* ou MAN [24, 66], reposant sur une reformulation quadratique du système dynamique et un développement de la solution en série entière. Nous présentons ci-après les deux types de continuation que nous avons été amenés à utiliser dans ce travail, à savoir, la continuation séquentielle, et la continuation *arc-length*, en nous concentrant principalement sur l'étape de correction et son implémentation. Un état de l'art relativement complet sur ces méthodes de continuation et les différents types de prédicteurs à disposition pourra être trouvé dans [53, 145]. Le système d'équations algébriques obtenu par équilibrage harmonique est rappelé ci-dessous, sous forme de vecteur résiduel.

$$\mathbf{r}_h(\mathbf{x}_h, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{x}_h + \mathbf{f}_h(\mathbf{x}_h, \omega) - \mathbf{g}_h \quad (\text{II.30})$$

1. Le théorème de Shannon stipule que la fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal.

2.3.1 Continuation séquentielle

La continuation séquentielle consiste tout simplement à fixer le paramètre de contrôle que l'on souhaite faire évoluer, ici la fréquence d'excitation ω , et à calculer la solution du système (II.30) pour la valeur choisie. La dépendance en ω des différents termes peut donc être ignorée, et le résidu du système s'écrit alors

$$\mathbf{r}_h(\mathbf{x}_h) = \mathbf{Z}\mathbf{x}_h + \mathbf{f}_h(\mathbf{x}_h) - \mathbf{g}_h \quad (\text{II.31})$$

Pour initialiser le solveur, on utilise généralement comme prédiction la dernière solution convergée. Ce type de continuation est très simple à mettre en œuvre, mais ne permet malheureusement pas de traiter efficacement les réponses non-linéaires présentant des points de retournement. Pour cela, on préfère implémenter des techniques de continuation utilisant l'abscisse curviligne s de la courbe pour paramétrer la solution. Nous présentons ci-après deux méthodes exploitant cette paramétrisation par longueur d'arc.

2.3.2 Continuation *arc-length*

Les techniques de continuation par longueur d'arc permettent à ω et \mathbf{x}_h de varier, sous la contrainte d'une équation supplémentaire qu'il convient d'ajouter au système (II.30) lors de la résolution. Pour un schéma *arc-length* standard, on utilise l'équation de contrainte (II.32), scalaire, dans laquelle ds désigne l'incrément d'abscisse curviligne choisi par l'utilisateur, et où $d\mathbf{x}_h$ et $d\omega$ désignent les écarts entre la dernière solution convergée et le jeu de variables courant du solveur.

$$r_a(\mathbf{x}_h, \omega) = (d\mathbf{x}_h)^T(d\mathbf{x}_h) + d\omega^2 - ds^2 \quad (\text{II.32})$$

Cette équation revient à contraindre le solveur à rechercher la solution sur une hypersphère de rayon ds centrée sur la dernière solution convergée. L'intérêt de ce type de continuation est qu'il existe toujours une intersection entre l'hypersphère en question et l'ensemble des solutions, ce qui permet *a priori* d'assurer la convergence face à n'importe quel point de retournement. En pratique, il existe en réalité non pas un, mais au moins deux points de convergence possibles, le premier, celui recherché, étant situé en aval de la courbe, et le second situé en amont, sur une portion de courbe qui vient tout juste d'être calculée. Cette spécificité peut exceptionnellement être une source de difficulté lorsque la partie amont de la courbe est plus attractive pour le solveur que la partie aval, ce qui est à l'origine d'allers-retours parasites. Cette difficulté peut être contournée en modifiant légèrement l'équation de contrainte (II.32), pour aboutir à ce que l'on retrouve dans la littérature sous le nom de continuation *pseudo arc-length*, que nous ne détaillerons pas dans ce mémoire (voir par exemple [53] pour davantage d'information). Le système (II.30) ainsi augmenté de cette nouvelle équation peut être résolu par le même type d'algorithme vu en section II.2. Pour ce type de continuation, la prédiction est généralement effectuée par un prédicteur tangent ou sécant, plus efficace qu'une simple initialisation sur la solution précédente. Dans la suite de ces travaux, un prédicteur sécant a été préféré, en raison de sa facilité d'implémentation et de sa plus grande robustesse que le prédicteur tangent à proximité des zones de bifurcations, où des problèmes de singularité matricielle peuvent apparaître. Une représentation graphique des schémas de continuation séquentielle et *arc-length* est donnée en figure II.2.

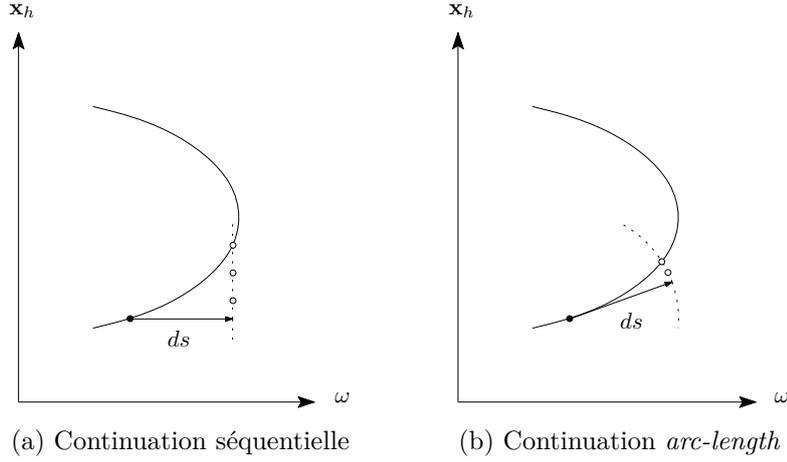


FIGURE II.2 – Représentation schématique des techniques de continuation (lieu de la solution —, axe de correction \cdots , itérations du solveur \circ)

2.4 Matrice jacobienne analytique

Nous avons vu en section 2.1.2 que les méthodes classiques de résolution d'un ensemble d'équations algébriques non-linéaires requièrent généralement la connaissance de la matrice jacobienne du système. D'un point de vue théorique, les colonnes de cette matrice ne sont autres que les dérivées partielles de la fonction à annuler, par rapport à chacune des variables du problème. Il est possible d'évaluer numériquement chaque coefficient de la matrice par différences finies, mais comme nous l'avons explicité par l'équation (II.20), ceci devra être répété à chaque itération du solveur. Le coût de l'opération peut alors très rapidement devenir prohibitif à mesure que la taille du système augmente, concentrant la majorité des efforts numériques sur l'unique évaluation de cette matrice. Pour traiter des systèmes de taille importante, la connaissance d'une expression analytique de la matrice jacobienne, ou à défaut d'une bonne approximation, est un avantage considérable qui permet d'éviter cette étape de différentiation numérique, et ainsi de bénéficier du réel potentiel de la HBM.

Pour le système (II.30), éventuellement augmenté d'une équation de continuation, la forme générale de cette matrice jacobienne, notée \mathbf{J} , est donnée par l'équation (II.33). La dépendance en $(\mathbf{x}_h^{(k)}, \omega^{(k)})$, fondamentale vis-à-vis de la résolution, est explicitement rappelée ici. Par la suite, elle sera volontairement omise par souci de concision. Nous avons donc,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_h^{(k)}, \omega^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \mathbf{x}_h}(\mathbf{x}_h^{(k)}, \omega^{(k)}) & \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \omega}(\mathbf{x}_h^{(k)}, \omega^{(k)}) \\ \frac{\partial r_a}{\partial \mathbf{x}_h}(\mathbf{x}_h^{(k)}) & \frac{\partial r_a}{\partial \omega}(\omega^{(k)}) \end{pmatrix} \quad (\text{II.33})$$

avec les termes relatifs aux équations de l'équilibrage harmonique,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \mathbf{x}_h} = \mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{f}_h}{\partial \mathbf{x}_h} \quad (\text{II.34})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{f}_h}{\partial \omega} \quad (\text{II.35})$$

D'un point de vue numérique, pour un système de n variables, la connaissance d'une expression analytique de la matrice jacobienne permet d'économiser à chaque itération $2n^2$ évaluations de la fonction à annuler. On comprend alors toute l'importance que revêt ce point particulier dans l'implémentation de la HBM pour aborder des modèles numériques de grande taille. Insistons sur le fait que, une fois encore, en raison du caractère creux des matrices de transformées de Fourier discrètes \mathbf{F} et $\bar{\mathbf{F}}$, la matrice jacobienne ainsi déterminée sera creuse elle aussi, ce qu'il convient d'exploiter en utilisant des fonctions adaptées à la manipulation de telles entités. Mentionnons néanmoins que, pour certaines lois non-linéaires, le calcul des termes $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ et $\partial \bar{\mathbf{f}} / \partial \bar{\mathbf{x}}$ peut ne pas être évident. Dans la section suivante, nous présentons une dernière façon d'améliorer les performances de la HBM pour traiter les non-linéarités localisées telles que le contact et le frottement.

2.5 Techniques de condensation

Avant de conclure sur les aspects numériques relatifs à l'implémentation de la HBM, nous allons voir ici comment exploiter, le cas échéant, le fait que seule une sous-partition des degrés de liberté du problème soit affectée par les termes non-linéaires [83]. Ce cas de figure est caractéristique des systèmes physiques à non-linéarités localisées, telles que les efforts de contact appliqués à l'interface entre deux composants d'un assemblage. On utilisera ici la notation suivante pour le système d'équations de la HBM,

$$\mathbf{Z}(\omega)\mathbf{x}_h + \mathbf{f}_h(\mathbf{x}_h, \omega) = \mathbf{g}_h \quad (\text{II.44})$$

2.5.1 Condensation sur les coordonnées non-linéaires

En supposant que les degrés de liberté du problème physique peuvent être partitionnés en degrés de liberté linéaires (indice a) et degrés de liberté non-linéaires (indice c), il est possible de réorganiser le système algébrique initial de la façon suivante

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{aa} & \mathbf{Z}_{ac} \\ \mathbf{Z}_{ca} & \mathbf{Z}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_a \\ \mathbf{g}_c \end{Bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

soit, en éclatant ce système en deux sous-systèmes

$$\mathbf{Z}_{aa}\mathbf{x}_a + \mathbf{Z}_{ac}\mathbf{x}_c = \mathbf{g}_a \quad (\text{II.46a})$$

$$\mathbf{Z}_{ca}\mathbf{x}_a + \mathbf{Z}_{cc}\mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c = \mathbf{g}_c \quad (\text{II.46b})$$

En injectant l'expression de \mathbf{x}_a issue de (II.46a) dans (II.46b), on obtient un système algébrique condensé sur les degrés de liberté non-linéaires, de taille potentiellement très réduite par rapport au système initial (II.16),

$$\mathbf{Z}_{red}\mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c = \mathbf{g}_{red} \quad (\text{II.47})$$

avec

$$\mathbf{Z}_{red} = \mathbf{Z}_{cc} - \mathbf{Z}_{ca}\mathbf{Z}_{aa}^{-1}\mathbf{Z}_{ac} \quad (\text{II.48})$$

$$\mathbf{g}_{red} = \mathbf{g}_c - \mathbf{Z}_{ca}\mathbf{Z}_{aa}^{-1}\mathbf{g}_a \quad (\text{II.49})$$

Il est intéressant de remarquer ici que la procédure de condensation revient en fait à déterminer le complément de Schur du bloc \mathbf{Z}_{aa} du système algébrique linéaire sous-jacent

de (II.45). Cette procédure de condensation, exacte aux erreurs d'arrondis près, est l'un des atouts majeurs de la HBM, permettant d'aborder efficacement des systèmes de très grande taille dès lors que les non-linéarités ne sont appliquées qu'à un sous-ensemble des degrés de liberté du modèle.

2.5.2 Condensation sur les coordonnées relatives

Une étape de condensation supplémentaire est encore possible pour les systèmes dont les termes non-linéaires sont exprimés en fonction de variables relatives, ce qui peut-être le cas pour certains problèmes dont les lois font intervenir une formulation nœud à nœud du contact. Ainsi, en considérant deux solides en contact, et soumis à aucune autre non-linéarité, il est possible d'appliquer la procédure de condensation présentée ci-dessus sur chacun d'entre eux,

$$\mathbf{Z}_{red}^1 \mathbf{x}_c^1 + \mathbf{f}_c^1(\mathbf{x}_c^1, \mathbf{x}_c^2) = \mathbf{g}_{red}^1 \quad (\text{II.50a})$$

$$\mathbf{Z}_{red}^2 \mathbf{x}_c^2 + \mathbf{f}_c^2(\mathbf{x}_c^1, \mathbf{x}_c^2) = \mathbf{g}_{red}^2 \quad (\text{II.50b})$$

La troisième loi de Newton, ou principe des actions réciproques, permet de relier très simplement les efforts de contact par la relation

$$\mathbf{f}_c^1(\mathbf{x}_c^1, \mathbf{x}_c^2) + \mathbf{f}_c^2(\mathbf{x}_c^1, \mathbf{x}_c^2) = \mathbf{0} \quad (\text{II.51})$$

En exprimant les variables fréquentielles relatives de la façon suivante,

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_c^1 - \mathbf{x}_c^2 \quad (\text{II.52})$$

et en utilisant par convention

$$\mathbf{f}_r(\mathbf{x}_r) = \mathbf{f}_c^1(\mathbf{x}_c^1, \mathbf{x}_c^2) \quad (\text{II.53})$$

il est alors possible d'écrire le système d'équations algébriques gouvernant les variables relatives

$$\mathbf{Z}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}_r) = \mathbf{g}_r \quad (\text{II.54})$$

avec

$$\mathbf{Z}_r = \left(\left(\mathbf{Z}_{red}^1 \right)^{-1} + \left(\mathbf{Z}_{red}^2 \right)^{-1} \right)^{-1} \quad (\text{II.55})$$

$$\mathbf{g}_r = \mathbf{Z}_r \left(\left(\mathbf{Z}_{red}^1 \right)^{-1} \mathbf{g}_{red}^1 - \left(\mathbf{Z}_{red}^2 \right)^{-1} \mathbf{g}_{red}^2 \right) \quad (\text{II.56})$$

Cette seconde étape de condensation permet de diviser par deux la taille du système obtenu après la première procédure de condensation sur les degrés de liberté non-linéaires. La restitution de la solution sur l'ensemble des variables fréquentielles initiales est ensuite possible à travers les équations (II.50) et (II.46).

Indépendamment du gain en performance résultant de ces techniques de condensation et de la connaissance d'une expression analytique de la matrice jacobienne, souvent indispensables pour aborder des modèles éléments finis industriels, l'implémentation d'un schéma de continuation par longueur d'arc couplé à une procédure d'alternance temps-fréquence suffit à faire de l'équilibrage harmonique une méthode très polyvalente pour aborder la phénoménologie relative aux vibrations des systèmes non-linéaires. Cette phénoménologie, parfois bien éloignée de celle classiquement rencontrée dans le cadre linéaire de la théorie des vibrations, est l'objet de la section suivante.

3 Phénoménologie des systèmes non-linéaires

Cette section s'intéresse aux phénomènes particuliers pouvant être observés dans l'étude du régime forcé des systèmes dynamiques non-linéaires. Elle nous permettra de présenter succinctement les différences notables de comportement vibratoire entre ce type de systèmes et leurs homologues linéaires, tout en illustrant le potentiel de l'équilibrage harmonique pour ce type d'étude phénoménologique.

3.1 Notion de stabilité

Les solutions d'un système dynamique non-linéaire ont cela de particulier qu'elles peuvent être instables, et donc non-observables en pratique. Cette notion de stabilité prend toute son importance lorsque l'on considère un système pour lequel plusieurs solutions coexistent à une fréquence d'excitation donnée, mais où seules quelques unes d'entre elles sont stables et donc atteignables par le système réel. Cette situation peut donner lieu à des phénomènes de saut, ou brusque changement d'amplitude, lorsque la trajectoire initialement suivie passe soudainement à un état instable, obligeant le système à accrocher la solution stable la plus proche. Dans cette section, nous allons présenter quelques outils permettant d'appréhender cette notion de stabilité sur le plan théorique.

3.1.1 Définitions

La notion de stabilité caractérise la capacité d'une solution à revenir vers son état d'équilibre lorsque celle-ci est soumise à une perturbation. On comprend ici que la nature (forme et amplitude) de la perturbation en question peut jouer un rôle majeur sur les résultats fournis par l'analyse de stabilité. On distingue généralement trois cas de figure en fonction du comportement de la solution face aux perturbations [111] :

- *Stabilité inconditionnelle* : la solution est stable quelle que soit la perturbation
- *Stabilité conditionnelle* : la stabilité de la solution dépend de la perturbation
- *Instabilité inconditionnelle* : la solution est instable quelle que soit la perturbation

La notion de stabilité conditionnelle est intimement liée à celle de *bassin d'attraction*, très courante dans la littérature traitant de dynamique non-linéaire, et désignant ici l'ensemble des perturbations pour lesquelles la solution, appelée *attracteur*, retourne à son état d'équilibre.

La transcription mathématique la plus couramment employée de la notion de stabilité inconditionnelle est la *stabilité au sens de Liapounov*², qui stipule qu'une solution $\mathbf{x}_0(t)$ est stable si pour toute distance ε , il existe un voisinage de $\mathbf{x}_0(t)$ tel que toute solution perturbée $\mathbf{x}(t)$ incluse dans ce voisinage à un instant t_0 reste confinée dans un tube de ligne moyenne $\mathbf{x}_0(t)$ et de rayon ε pour tous les instants $t > t_0$:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall \mathbf{x}(t) \text{ solution du système} \\ \|\mathbf{x}_0(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta \implies \forall t > t_0, \|\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

2. On retrouve également dans la littérature la transcription anglo-saxonne *Lyapunov*.

Si une solution est stable au sens de Liapounov et qu'elle vérifie de plus $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0$, elle est dite *asymptotiquement stable*. Cette définition est particulièrement intéressante en pratique, car elle signifie que l'amplitude de la perturbation tend vers zéro, alors que la stabilité au sens de Liapounov ne permet que de conclure que celle-ci est bornée.

Ces deux définitions de la stabilité inconditionnelle sont bien adaptées à l'étude des solutions de type points fixes, mais sont trop restrictives pour l'analyse des cycles limites d'un système non-linéaire [50]. Pour les solutions périodiques, on préfère généralement la définition de *stabilité orbitale* ou *stabilité au sens de Poincaré*, qui s'intéresse à la trajectoire de la solution davantage qu'à sa valeur en chaque instant. Cette définition de la stabilité stipule qu'une solution périodique $\mathbf{x}_0(t)$ de trajectoire \mathcal{C} est stable si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall \mathbf{x}(t) \text{ solution du système} \\ d(\mathbf{x}(t_0), \mathcal{C}) < \delta \implies \forall t > t_0, d(\mathbf{x}(t), \mathcal{C}) < \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

Si une solution est stable au sens de Poincaré et qu'elle vérifie de plus $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}(t), \mathcal{C}) = 0$, la solution est dite *orbitalement attractive*. Dans les définitions que nous venons de présenter, aucune hypothèse n'a été faite concernant l'amplitude de la perturbation considérée. En pratique, il est courant de ne se concentrer que sur des perturbations de faible amplitude, ce qui permet de linéariser le système au voisinage de la solution pour procéder à l'analyse de stabilité. Dans ce cas de figure, on parle alors d'étude de *stabilité locale*.

3.1.2 Stabilité locale

L'analyse de stabilité des solutions de type point fixe étant plus classique, et plus éloignée de notre problématique, on propose ici de se concentrer uniquement sur l'analyse de stabilité locale des solutions périodiques. En outre, on s'intéressera aux systèmes dynamiques dont le comportement est régi par un ensemble d'équations différentielles pouvant se mettre sous la forme suivante,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}(t) \quad (\text{II.59})$$

Davantage d'information sur la stabilité des solutions de type point fixe pourra être trouvée dans la littérature spécialisée [111, 146], ainsi que dans bon nombre de mémoires de thèses [50, 53, 114, 145]. L'analyse de stabilité locale se base sur l'étude de l'évolution d'une solution périodique $\mathbf{x}_0(t)$ du système (II.59) lorsque celle-ci est soumise à une perturbation $\mathbf{p}(t)$, d'amplitude suffisamment faible pour justifier une linéarisation du terme non-linéaire,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{p}(t) \quad (\text{II.60})$$

Le système d'équations différentielles régissant la dynamique du système perturbé, au voisinage de la solution $\mathbf{x}_0(t)$, est obtenu en substituant l'expression (II.60) dans (II.59) et en linéarisant le vecteur d'effort non-linéaire par un développement de Taylor au premier ordre,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \left(\mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \dot{\mathbf{p}}(t) + \left(\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{p}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{II.61})$$

dans lequel on constate l'apparition des sous-blocs de la matrice jacobienne des efforts non-linéaires évaluée en $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$. Ces deux termes représentent les corrections en amortissement

et en raideur à apporter au système linéaire sous-jacent, pour approcher au premier ordre le système non-linéaire au voisinage de la solution $\mathbf{x}_0(t)$. La résolution de ce nouveau système donne l'évolution temporelle de la perturbation, et permet ainsi de statuer sur la stabilité *locale* de la solution $\mathbf{x}_0(t)$. Le théorème de Hartman-Grobman [57] permet de valider la pertinence d'une approche locale de la stabilité en assurant que le comportement du système non-linéaire au voisinage de $\mathbf{x}_0(t)$ sera qualitativement similaire au comportement du système linéarisé. Néanmoins, en raison de la présence des termes $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ et $\partial \mathbf{f} / \partial \dot{\mathbf{x}}$ dans l'équation, l'obtention d'une expression explicite de $\mathbf{p}(t)$ est rarement triviale. Pour pallier cette difficulté, il est possible de faire appel à la théorie de Floquet, ou bien à la méthode de Hill.

3.1.3 Théorie de Floquet

La théorie de Floquet permet d'étudier la stabilité des systèmes linéaires à coefficients périodiques pouvant s'écrire sous la forme (II.62). Elle est donc adaptée à l'analyse de stabilité locale du système (II.59), puisque la matrice d'état du système augmenté équivalent à (II.61) hérite de la périodicité de $\mathbf{x}_0(t)$ par l'intermédiaire des dérivées partielles de \mathbf{f} .

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \quad (\text{II.62})$$

Pour tout système d'équations différentielles linéaires à coefficients T -périodiques tel que (II.62), le *théorème de Floquet* assure l'existence d'une matrice continue inversible T -périodique $\mathbf{Q}(t)$ et d'une matrice constante \mathbf{B} , telles que les colonnes de la matrice

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Q}(t) \exp(\mathbf{B}t) \quad (\text{II.63})$$

forment un système fondamental de solutions de l'équation (II.62). Ce théorème a été démontré par le mathématicien français Gaston Floquet à la fin du XIX^e siècle [41]. Le théorème assurant la T -périodicité de la matrice $\mathbf{Q}(t)$, il vient le résultat suivant,

$$\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{Z}(t) \exp(\mathbf{B}T) \quad (\text{II.64})$$

La matrice $\exp(\mathbf{B}T)$ est appelée *matrice de monodromie* du système. Elle est la pierre angulaire de la théorie de Floquet, puisque nous allons voir que la stabilité du système peut être étudiée par simple analyse de ses valeurs propres.

Le théorème de Floquet assure l'inversibilité de la matrice $\mathbf{Q}(t)$. Le changement de variable $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Q}(t)^{-1}\mathbf{Z}(t)$ est donc licite, et permet, après substitution dans (II.63) et dérivation par rapport au temps, de transposer l'étude du système d'équations différentielles à coefficients périodiques initial en l'étude d'un système différentiel à coefficients constants,

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{Y}(t) \quad (\text{II.65})$$

En effet, la matrice $\mathbf{Q}(t)$ étant périodique et continue, donc bornée, la stabilité de $\mathbf{Z}(t)$ se déduit directement de la stabilité de $\mathbf{Y}(t)$, que nous pouvons analyser de façon classique en étudiant le signe de la partie réelle des valeurs propres de \mathbf{B} . Ces parties réelles sont appelées *exposants de Liapounov*, et seront notés α_k dans la suite de cette section. En pratique, il est cependant plus courant d'étudier la stabilité locale d'une solution périodique par l'intermédiaire de la matrice de monodromie

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\mathbf{B}T) \quad (\text{II.66})$$

Les propriétés mathématiques de l'exponentielle d'une matrice assurent que si λ_k est valeur propre de \mathbf{B} associée au vecteur propre \mathbf{v} , alors $\exp(\lambda_k T)$ est valeur propre de la matrice $\exp(\mathbf{B}T)$, également associée au vecteur propre \mathbf{v} . Ainsi, les valeurs propres ρ_k de la matrice de monodromie Θ , appelées *multiplicateurs de Floquet* dans la littérature, sont liées aux valeurs propres λ_k de la matrice \mathbf{B} par la relation

$$\rho_k = \exp(\lambda_k T) \quad (\text{II.67})$$

En distinguant les parties réelles et imaginaires des valeurs propres de \mathbf{B} , on obtient l'égalité suivante, liant le module des multiplicateurs de Floquet aux exposants de Liapounov,

$$|\rho_k| = \exp(\alpha_k T) \quad (\text{II.68})$$

Il est alors possible de statuer sur la stabilité locale de la solution périodique $\mathbf{x}_0(t)$ en analysant le module des valeurs propres de la matrice de monodromie Θ qui lui est associée. On distingue les trois cas de figure suivant :

- $\max_k |\rho_k| < 1$: la perturbation va décroître, la solution est donc stable
- $\max_k |\rho_k| > 1$: la perturbation va croître, la solution est donc instable
- $\max_k |\rho_k| = 1$: une analyse au premier ordre est insuffisante pour conclure

Il est possible de prouver que dans le cas d'un système autonome, au moins un des multiplicateurs de Floquet est égal à 1 [111]. Lors de l'évaluation du module maximal des ρ_k il est nécessaire de faire abstraction de ce multiplicateur unitaire pour statuer sur la stabilité de la solution. Au sein d'une procédure de continuation, la perte de stabilité d'une solution périodique est le fruit d'un phénomène de bifurcation, que l'on peut identifier en s'intéressant à la façon dont les multiplicateurs de Floquet sortent du cercle unité dans le plan complexe. Nous reviendrons sur ces aspects à la section II.3.2.

En pratique, le calcul de la matrice de monodromie se fait généralement par intégration temporelle. En effet, à partir de l'équation (II.64), on obtient l'égalité suivante pour $t = 0$,

$$\mathbf{Z}(T) = \mathbf{Z}(0)\Theta \quad (\text{II.69})$$

Ainsi, la matrice de monodromie Θ peut être calculée par intégration du système différentiel

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Z}(t) \quad (\text{II.70})$$

en lui imposant comme conditions initiales $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}$, ce qui induit $\mathbf{Z}(T) = \Theta$.

L'étude de la stabilité des solutions périodiques d'un système non-linéaire avec la théorie de Floquet présente l'avantage d'être relativement simple à mettre en œuvre, à condition de pouvoir évaluer la matrice jacobienne des efforts non-linéaires à chaque pas de temps de l'intégrateur temporelle. Utilisée de paire avec l'équilibrage harmonique, cette technique nécessite de reconstruire la solution temporelle correspondant au système algébrique de la HBM après convergence du solveur. Il est intéressant de remarquer que dans ce cas, une évaluation précise de la stabilité d'une solution par la théorie de Floquet requiert un nombre d'harmoniques plus important que pour obtenir une bonne approximation de la

solution. Bien que fiable, cette méthode reste néanmoins relativement coûteuse en temps de calcul en raison de l'intégration temporelle qui doit se faire pour chaque solution avec un pas de temps suffisamment faible sur l'ensemble de la période. Afin de pallier cet inconvénient, l'étude de la stabilité peut se faire directement dans le domaine fréquentiel, avec une méthode telle que la méthode de Hill présentée ci-après, adaptée à l'analyse de stabilité des solutions calculées par HBM.

3.1.4 Méthode de Hill

L'analyse de stabilité par la méthode de Hill a été introduite par l'astronome et mathématicien américain George William Hill en 1886 [59], dans une étude traitant de la détermination du périégée de la Lune. Elle est adaptée aux systèmes dont la solution est recherchée sous forme de série de Fourier, et se base sur l'hypothèse que la perturbation $\mathbf{p}(t)$ peut s'exprimer comme le produit d'une fonction périodique $\mathbf{z}(t)$ de même pulsation que la solution $\mathbf{x}_0(t)$ et d'un terme exponentiel arbitraire

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{z}(t)e^{\lambda t} \quad (\text{II.71})$$

La solution $\mathbf{x}_0(t)$ sera donc stable au sens de Hill si le terme exponentiel associé à la perturbation est décroissant. Le terme $\mathbf{z}(t)$ étant périodique de même pulsation ω que $\mathbf{x}_0(t)$, il est possible de le décomposer lui aussi en série de Fourier tronquée, et d'appliquer la même procédure d'orthogonalisation du résidu que pour la méthode de l'équilibrage harmonique. On obtient alors le système suivant,

$$\mathbf{Z}\mathbf{x}_{h_0} + (\mathbf{Z} + \lambda\mathbf{\Lambda}_1 + \lambda^2\mathbf{\Lambda}_2)\mathbf{z}_he^{\lambda t} + \mathbf{f}_h(\mathbf{x}_{h_0} + \mathbf{z}_he^{\lambda t}, \omega) = \mathbf{g}_h \quad (\text{II.72})$$

avec \mathbf{x}_{h_0} et \mathbf{z}_h les vecteurs regroupant respectivement les coefficients de Fourier de la solution $\mathbf{x}_0(t)$ et du terme périodique $\mathbf{z}(t)$. Les matrices $\mathbf{\Lambda}_2$ et $\mathbf{\Lambda}_1$ sont diagonales par blocs, et construites de la façon suivante,

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} 2\mathbf{K} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_1^1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{\Lambda}_1^k & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_1^{n_h} \end{pmatrix} \quad (\text{II.73})$$

où l'expression de chaque bloc $\mathbf{\Lambda}_1^k$ est donnée par

$$\mathbf{\Lambda}_1^k = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & (2k\omega)\mathbf{M} \\ -(2k\omega)\mathbf{M} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket \quad (\text{II.74})$$

En supposant que la perturbation est de faible amplitude, le développement de Taylor au premier ordre du terme non-linéaire donne

$$\mathbf{f}_h(\mathbf{x}_{h_0} + \mathbf{z}_he^{\lambda t}, \omega) = \mathbf{f}_h(\mathbf{x}_{h_0}, \omega) + \frac{\partial \mathbf{f}_h}{\partial \mathbf{x}_h}(\mathbf{x}_{h_0}, \omega)\mathbf{z}_he^{\lambda t} \quad (\text{II.75})$$

Compte tenu du fait que la solution \mathbf{x}_{h_0} vérifie

$$\mathbf{Z}\mathbf{x}_{h_0} + \mathbf{f}_h(\mathbf{x}_{h_0}, \omega) = \mathbf{g}_h \quad (\text{II.76})$$

la substitution de (II.75) dans (II.72) conduit au système,

$$\left(\lambda^2 \mathbf{\Lambda}_2 + \lambda \mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{\Lambda}_0\right) \mathbf{z}_h = \mathbf{0} \quad (\text{II.77})$$

avec

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{f}_h}{\partial \mathbf{x}_h}(\mathbf{x}_{h_0}, \omega) \quad (\text{II.78})$$

Remarquons ici que la matrice $\mathbf{\Lambda}_0$ ne possède pas la structure particulière de la matrice de rigidité dynamique \mathbf{Z} , dont la forme tridiagonale par bloc est brisée par la matrice jacobienne des efforts non-linéaires dans le domaine fréquentiel. La résolution du problème aux valeurs propres quadratique (II.77) [156] permet de déterminer les valeurs propres λ_k , et ainsi de statuer *a priori* sur la stabilité de la solution,

- $\max_k (\text{Re}(\lambda_k)) < 1$: la perturbation va décroître, la solution est donc stable
- $\max_k (\text{Re}(\lambda_k)) > 1$: la perturbation va croître, la solution est donc instable
- $\max_k (\text{Re}(\lambda_k)) = 1$: une analyse au premier ordre est insuffisante pour conclure

La mise en œuvre de la méthode de Hill est tributaire de deux conditions, à savoir, de la capacité à évaluer efficacement la matrice jacobienne des efforts non-linéaires dans le domaine fréquentiel, et de la possibilité de résoudre en un temps raisonnable le problème aux valeurs propres quadratique (II.77). En pratique, l'expression analytique ou semi-analytique de la matrice jacobienne en question est systématiquement fournie au solveur, pour éviter une évaluation purement numérique. Cette première condition n'est donc pas problématique. De plus, les problèmes aux valeurs propres quadratiques étant au cœur de nombreux problèmes physiques, notamment en dynamique des structures, des algorithmes de résolution performants sont déjà implémentés dans la plupart des codes de calcul commerciaux [156]. La méthode de Hill semble donc être la plus adaptée pour mener une analyse de stabilité sur un système résolu par HBM. Cependant, des études comparatives [54] entre la théorie de Floquet et la méthode de Hill ont permis de mettre à jour les limitations de la seconde à proximité de certains points de bifurcations, nécessitant la rétention d'un très grand nombre d'harmoniques pour converger vers les résultats fournis par les multiplicateurs de Floquet. Ainsi, malgré les développements prometteurs menés ces dernières années pour accroître la précision de la méthode de Hill [50, 89], la théorie de Floquet reste bien souvent la méthode de référence pour l'analyse de stabilité des cycles limites d'un système dynamique non-linéaire.

3.2 Bifurcations

La notion de *bifurcation* a été introduite en dynamique non-linéaire par Henri Poincaré au XIX^e siècle. Elle fait référence au changement qualitatif des caractéristiques de la réponse d'un système, suite à la variation d'un ou plusieurs paramètres dits *de contrôle* [111]. On distingue généralement les bifurcations *continues*, lorsqu'à chaque variation infinitésimale d'un paramètre de contrôle correspond au moins une solution stable, des bifurcations *discontinues* ou *catastrophiques*, lorsque le franchissement du point de bifurcation ne laisse place à aucune solution stable, brisant ainsi la continuité en amplitude de la solution. Bon nombre d'ouvrages de mathématiques appliquées s'intéressent au phénomène, et fournissent un arsenal d'outils analytiques et numériques très complet pour aborder le

sujet. Mentionnons simplement ici les ouvrages de référence de Nayfeh et Balachandran [111], et de Seydel [146] pour une description détaillée de la thématique. Une revue très complète du phénomène est également donnée dans les mémoires de thèse de Sarrouy [145] et de Demailly [32]. Dans cette section, nous nous contenterons de présenter brièvement les principales bifurcations pouvant survenir lors de l'étude des cycles limites d'un système non-linéaire en réponse forcée.

L'étude des bifurcations d'une solution périodique est intimement liée à l'analyse de stabilité que nous avons présentée en section II.3.1. En effet, la perte de stabilité d'un cycle limite est le fruit d'un phénomène de bifurcation, dont la nature peut être identifiée en analysant l'évolution des multiplicateurs de Floquet au voisinage de la zone de transition. Nous avons pu voir que la perte de stabilité survient lorsque le plus grand multiplicateur atteint le cercle unité dans le plan complexe. Le cas échéant, la façon dont ce multiplicateur quitte le cercle est un indicateur du type de bifurcation ayant entraîné l'instabilité. Trois scénarii sont alors à envisager, représentés sur la figure II.3.

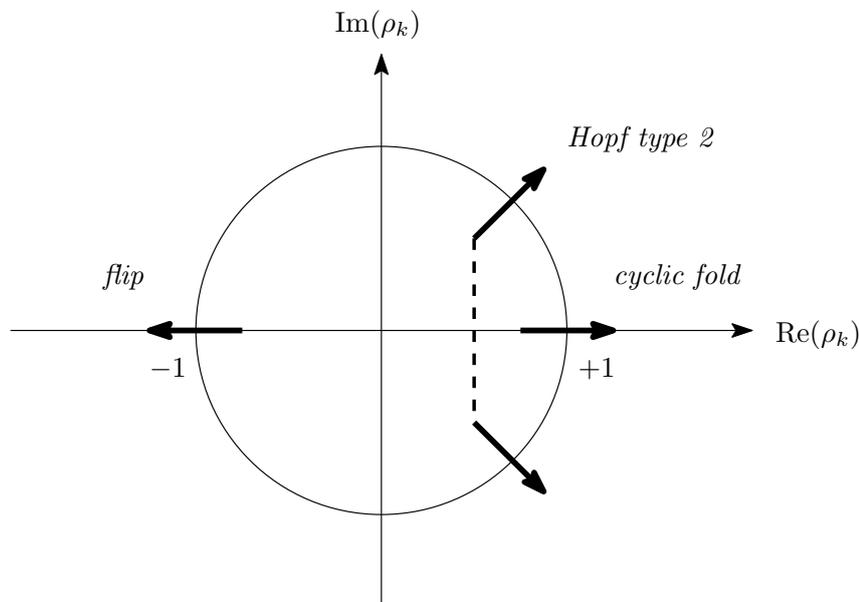


FIGURE II.3 – Bifurcation des solutions périodiques

Premier scénario, le multiplicateur traverse le cercle unité en suivant l'axe réel et en passant par $+1$. Dans ce cas de figure, la bifurcation est de type *cyclic fold*, ou point de retournement. Ces bifurcations sont assez standards dans la littérature, et se retrouvent notamment sur l'oscillateur de Duffing. La bifurcation est caractérisée par la coexistence de deux solutions périodiques, l'une stable et l'autre instable, qui se rejoignent au passage du point de bifurcation. La perte de stabilité qui en résulte lors de la continuation de la branche stable se traduit par un phénomène de saut qui rend ces bifurcations potentiellement dangereuses. Précisons que le calcul de la réponse d'un système exhibant ce type de bifurcation peut être réalisé simplement par équilibrage harmonique en continuation par longueur d'arc, tel que nous l'avons présenté en section II.2.

Deuxième scénario, le multiplicateur traverse le cercle unité en suivant l'axe réel et en passant par -1 . Ce cas de figure indique une bifurcation de type *flip*, ou doublement de période. Cette catégorie de bifurcations, propre aux cycles limites, indique qu'une solution T -périodique stable devient instable au passage du point de bifurcation, soit en donnant naissance à une solution $2T$ -périodique stable (cas *sur-critique*), soit en détruisant une solution $2T$ -périodique instable qui existait en amont de la bifurcation (cas *sous-critique*). On comprend que ce second cas correspond à une bifurcation catastrophique, entraînant un phénomène de saut. Dans le cas d'un doublement de période sur-critique, la bifurcation est continue, et la réponse du système physique voit simplement sa période fondamentale doubler. Le calcul de la réponse peut se faire une fois de plus par équilibrage harmonique, moyennant quelques modifications de l'algorithme pour permettre la continuation de la branche souhaitée (T -périodique ou $2T$ -périodique) [32]. Une cascade infinie de doublement de période est l'une des plus célèbres transitions vers le chaos, que l'on illustre généralement sur un diagramme de bifurcation. Ce type de diagramme représente la réponse x du système, échantillonnée à fréquence constante, en fonction du paramètre de contrôle μ . Un exemple³ est donné en figure II.4, pour lequel, partant d'une solution T -périodique échantillonnée à la fréquence $1/T$, on observe tout d'abord l'apparition d'une solution $2T$ -périodique, résultant d'une bifurcation de type *flip* de la solution initiale. S'ensuit une cascade de bifurcations donnant successivement naissance à une solution $4T$ -périodique puis $8T$ -périodique, pour finalement aboutir à un comportement chaotique.

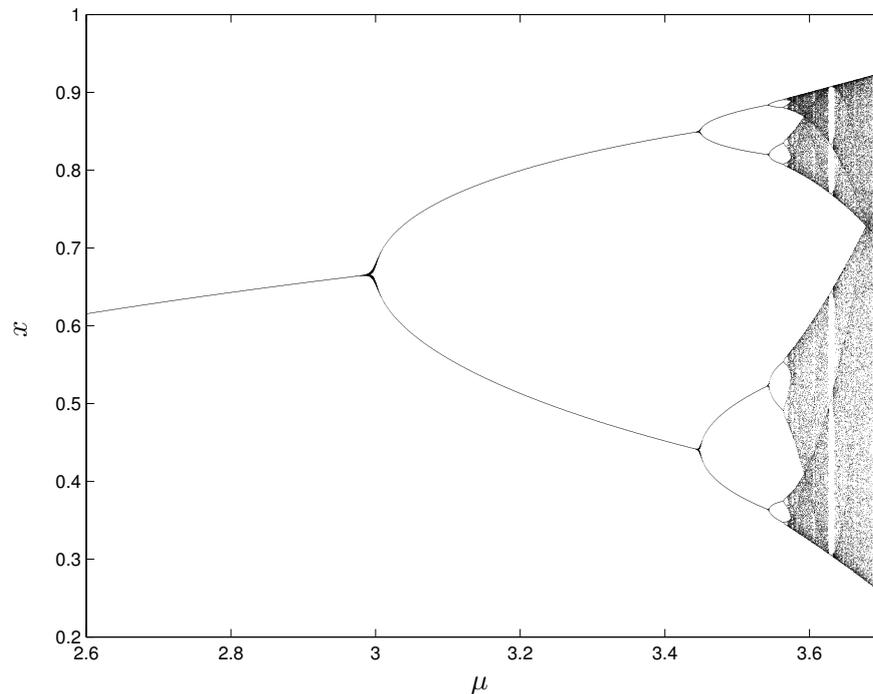


FIGURE II.4 – Diagramme de bifurcation

Le troisième et dernier scénario correspond à une paire de multiplicateurs complexes

3. Il s'agit ici d'une simple suite logistique, archétype de la littérature pour simuler ce comportement.

conjugués quittant simultanément le cercle unité. Dans ce cas, le système présente une bifurcation secondaire de Hopf ou *Hopf type 2*. Ce type de bifurcation est à mettre en regard de la bifurcation classique de Hopf, correspondant à l'apparition d'un cycle limite stable ou instable résultant de la perte de stabilité d'un point fixe. Ici, la bifurcation de la solution périodique initialement stable entraîne l'apparition d'une solution quasi-périodique stable (cas sur-critique) ou la destruction d'une solution quasi-périodique instable (cas sous-critique) qui coexistait avec la solution stable initiale. Une fois encore, le cas sous-critique correspond à une bifurcation *discontinue*, potentiellement dangereuse en raison du phénomène de saut qui l'accompagne. Notons que dans le cas sur-critique, les deux pulsations incommensurables de la solution quasi-périodique peuvent se synchroniser, pour redonner naissance à une solution périodique. Là encore, une cascade de bifurcation de Hopf secondaires, entrecoupée ou non de bifurcations par doublement de période, est une transition possible vers le chaos. Le calcul des solutions quasi-périodiques résultant de ce type de bifurcations est envisageable par une méthode fréquentielle type équilibrage harmonique, en incorporant la seconde pulsation dans les développements en série. Néanmoins, les coûts de calcul induit par ce type d'approches peuvent rapidement s'avérer prohibitifs en pratique. Davantage d'information à ce sujet pourra être trouvé dans le travail de thèse de Guskov [54], ou dans les travaux de Kim et Noah [71, 72].

3.3 Résonances non-linéaires

Le calcul du régime forcé d'un système non-linéaire conduit à des courbes de réponse en fréquence parfois très différentes de celles observées habituellement dans le cadre linéaire de la théorie des vibrations. Si l'on retrouve effectivement la notion de résonance, avec l'apparition d'un maximum en amplitude sur certaines plages fréquentielles plus ou moins confinées, l'impact des non-linéarités sur la dynamique du système peut se constater par la forme particulière du pic de réponse, et par la multiplicité des résonances observées.

3.3.1 Résonances principales

Pour un système linéaire, le principe de superposition modale stipule que la fonction de réponse en fréquence du système est une somme de fonctions rationnelles complexes dont les dénominateurs sont des polynômes du deuxième degré. Cette propriété explique d'un point de vue analytique la forme caractéristique des courbes de réponses forcées observées pour de tels systèmes, et leur apparente symétrie au voisinage d'un pic de résonance isolé. Pour un système non-linéaire en revanche, ce résultat n'est plus vrai, et la réponse est susceptible de prendre des formes plus originales. Il est possible d'expliquer en détail cette modification du comportement de la réponse à l'aide de la notion de mode non-linéaire, que nous aborderons en section II.4. Conceptuellement, les paramètres modaux du système doivent être vus non plus comme des constantes mais comme des variables, paramétrées par une quantité pilotant l'activation et l'intensité des non-linéarités. Ainsi, la fréquence de résonance du système est susceptible d'évoluer en cours de simulation, en fonction de l'amplitude de la réponse par exemple, ce qui conduit à des pics de résonance fortement asymétriques. Une illustration du phénomène sera donnée en section II.3.4.

3.3.2 Résonances secondaires

Une spécificité des systèmes non-linéaires en réponse forcée est la possibilité d'observer des résonances, que nous qualifierons de *secondaires*, à des fréquences autres que celles des modes de la structure. Ces résonances peuvent être issues d'interactions entre les harmoniques d'un mode et la fréquence de l'excitation, on parle de *résonances sous-harmoniques* et de *résonances sur-harmoniques*, ou bien de couplage direct entre deux modes aux fréquences commensurables par l'intermédiaire des non-linéarités, on parle alors de *résonances internes*.

Sous-harmoniques et sur-harmoniques Les résonances sous-harmoniques et sur-harmoniques sont susceptibles d'être observées lorsqu'il existe une relation entière entre la pulsation de l'excitation Ω et l'une des pulsations propres du système ω . Pour une relation du type (II.79a), il s'agit d'une résonance sur-harmonique, manifestation d'un mode de plus haute fréquence que l'excitation sollicité par les harmoniques d'ordre p (et multiples) de la non-linéarité. Un calcul de réponse forcée par équilibrage harmonique capturera sans difficulté ce type de phénomène, sous réserve que l'harmonique en question ait été conservé dans l'approximation de la solution et des termes non-linéaires, comme nous le verrons en section II.3.4. Une relation de la forme (II.79b) caractérise quant à elle une résonance sous-harmonique, issue d'un mode de plus basse fréquence que l'excitation, que celle-ci vient solliciter par les harmoniques d'ordre inférieurs générés par la non-linéarité. On pourra se référer à [143] pour une illustration du phénomène.

$$\Omega = \omega/p, \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{résonance sur-harmonique} \quad (\text{II.79a})$$

$$\Omega = \omega \cdot p, \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{résonance sous-harmonique} \quad (\text{II.79b})$$

Résonances internes Une résonance interne est la manifestation d'un transfert d'énergie entre plusieurs modes dont les pulsations propres ω_k sont liées par une relation entière telle que

$$\sum_k p_k \cdot \omega_k = 0 \quad \text{avec} \quad \forall k, p_k \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.80})$$

Elle résulte d'un couplage des modes impliqués dans la relation (II.80) à travers la non-linéarité, ce qui permet à des modes dont les fréquences sont situées hors de la plage d'excitation de contribuer à la déformée opérationnelle du système. Il est intéressant de remarquer que, du fait de la dépendance en amplitude des pulsations de résonances du système non-linéaire, des relations de résonances internes peuvent apparaître ou disparaître en fonction du niveau de réponse [43]. Mentionnons également que les paires de modes doubles des systèmes à symétrie cyclique étudiés en section I.2 vérifient naturellement la relation (II.80) (avec $\omega_1 = \omega_2$). Dans ce cas de figure, c'est bien la contribution simultanée des deux déformées modales de même pulsation qui permet d'observer une déformée opérationnelle prenant la forme d'une onde tournante directe ou rétrograde oscillant à la même fréquence [90]. On pourra se référer au travail de Samaranayake *et al.* concernant les phénomènes de résonances internes dans les structures non-linéaires présentant des propriétés de symétrie cyclique [141, 142, 144].

3.3.3 Localisation forcée

Une autre particularité de certains systèmes non-linéaires est leur capacité à confiner spatialement l'énergie sur un sous-ensemble de la structure globale. Il s'agit du phénomène de localisation forcée, que Vakakis *et al.* ont longuement étudié pour des systèmes à symétrie cyclique présentant des non-linéarités polynomiales [73, 163–165]. Ce comportement est à mettre en parallèle de la phénoménologie des structures linéaires à symétrie cyclique en présence de désaccordage, introduite en section 1.3.3. Dans son mémoire de thèse, Grolet [50] fait d'ailleurs remarquer que la localisation forcée des systèmes non-linéaires à symétrie cyclique peut être vue comme le résultat d'un désaccordage de la structure purement induit par la non-linéarité. La fréquence de résonance d'un secteur étant fonction de l'amplitude de vibration, un système initialement accordé mais dont les secteurs vibrent avec des amplitudes différentes aura effectivement tendance à se comporter comme un système ayant des secteurs dont les fréquences propres sont différentes *i.e.* désaccordé.

3.4 Exemple illustratif

Avant de conclure sur la phénoménologie des systèmes non-linéaires, nous présentons dans cette section quelques résultats obtenus sur un modèle académique, afin d'illustrer les différentes notions que nous venons d'aborder. Ce modèle a déjà été utilisé auparavant par Grolet dans la même optique, et la plupart des résultats présentés ici sont également discutés dans son mémoire de thèse [50].

Le système est constitué de deux degrés de liberté de masse ponctuelle m , reliés entre eux par un ressort de raideur linéaire k_c , chacun étant rattaché au bâti par un amortisseur de viscosité c , un ressort linéaire de raideur k , et un ressort non-linéaire de raideur k_{nl} générant une force de rappel proportionnelle au cube du déplacement. Un schéma représentatif du modèle est donné en figure II.5. En notant $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}^T$, les équations du mouvement

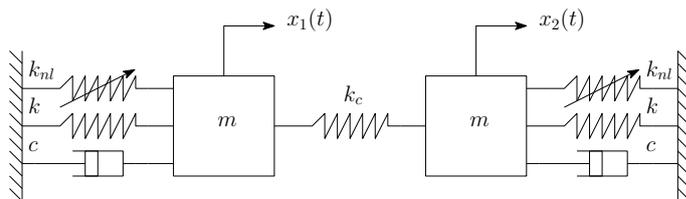


FIGURE II.5 – Modèle académique à non-linéarité cubique

gouvernant la dynamique du système peuvent se mettre sous la forme classique

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{g}(t) \quad (\text{II.81})$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k + k_c & -k_c \\ -k_c & k + k_c \end{pmatrix} \quad (\text{II.82})$$

et

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = k_{nl} \cdot (\mathbf{x}(t))^3 \quad (\text{II.83})$$

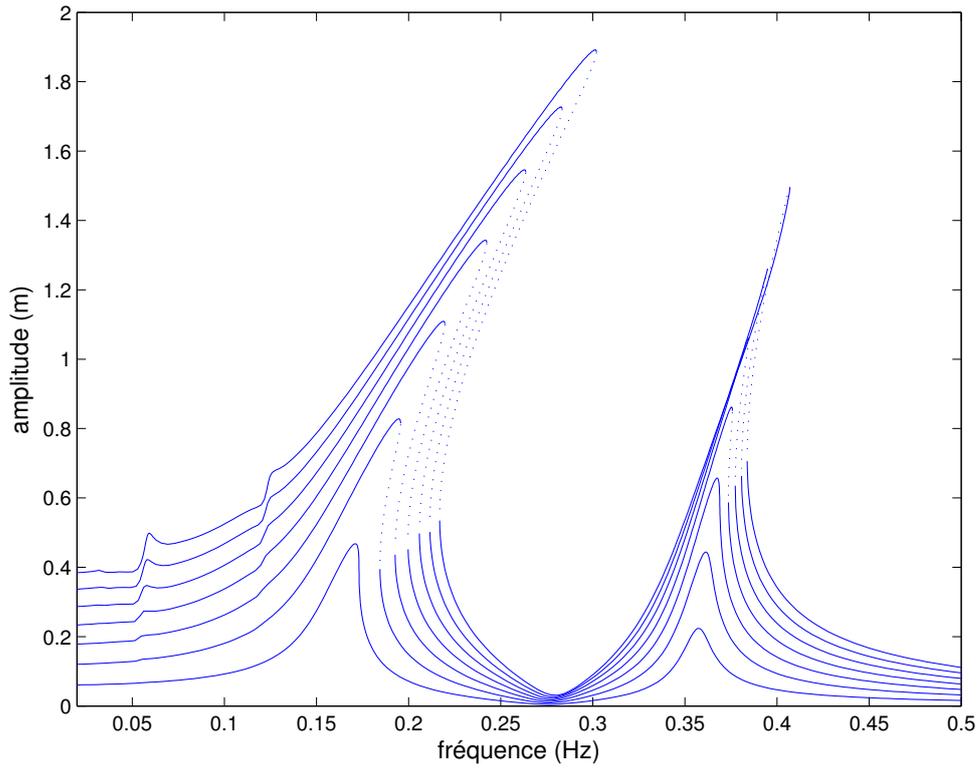
L'excitation $\mathbf{g}(t)$ utilisée ici est une force purement harmonique appliquée sur le premier degré de liberté, dont on modulera l'amplitude pour exhiber les phénomènes recherchés.

Pour les applications numériques, on utilisera les valeurs $m = 1$ kg, $k = 1$ N.m⁻¹, $k_{nl} = 1$ N.m⁻³, $k_c = 2$ N.m⁻¹, et $c = 0,1$ N.s.m⁻¹. Les calculs de réponse forcée sont réalisés par équilibrage harmonique (HBM), couplé à une procédure d’alternance temps-fréquence (AFT) conservant 100 échantillons de la période fondamentale pour l’évaluation des termes non-linéaires. Les séries de Fourier sont tronquées à l’ordre $n_h = 5$, et seuls les harmoniques impairs sont conservés. Il est en effet possible de démontrer analytiquement qu’une non-linéarité de ce type ne pourra pas à elle seule générer d’harmonique pair [50]. Le système algébrique de la HBM est augmenté d’une équation de continuation par longueur d’arc, afin de pallier les difficultés rencontrées aux éventuels points de retournement de la courbe. Compte tenu de la taille relativement faible du système, l’analyse de stabilité de la solution est réalisée à faible coût par la théorie de Floquet, en calculant par intégration temporelle la matrice de monodromie associée à chaque cycle limite.

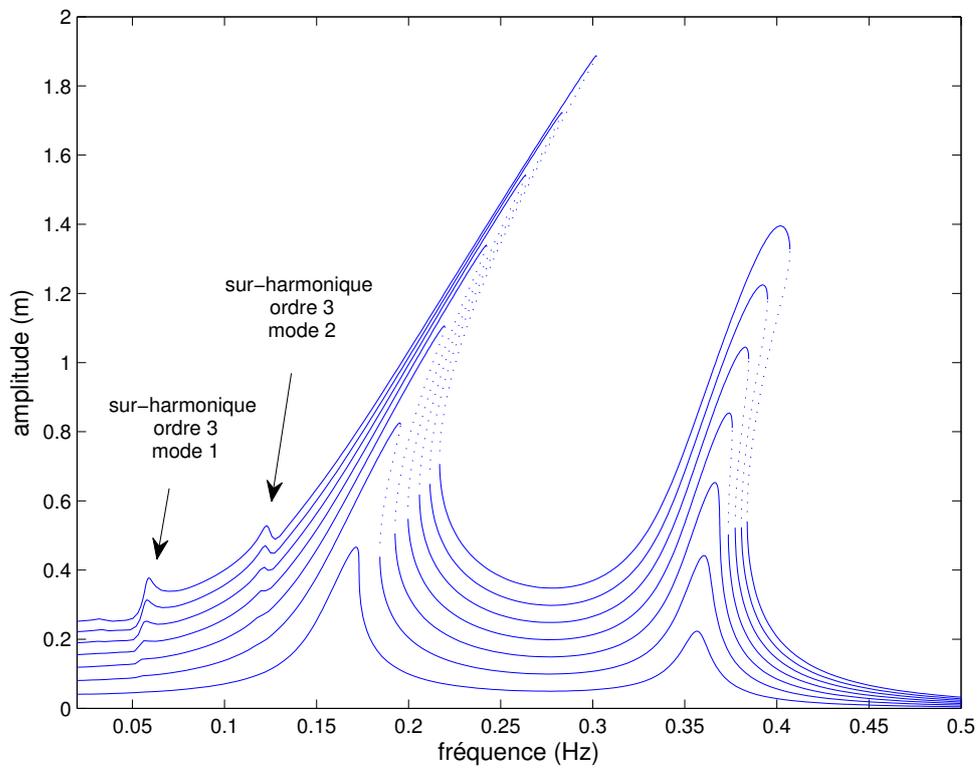
La figure II.6 montre la courbe de réponse en fréquence des deux degrés de liberté pour différents niveaux d’excitation croissants. L’évolution du pic de résonance en fonction du niveau de réponse est clairement visible, celui-ci étant d’autant plus penché vers les hautes fréquences que l’amplitude de vibration est élevée. Ce comportement est typique des non-linéarités cubiques, dont l’effet sur la dynamique est dit *raidissant*, traduisant le glissement progressif de la résonance vers les hautes fréquences. Les conclusions de l’analyse de stabilité ont également été reportées sur les graphiques, permettant de différencier les portions de courbes correspondant à une solution stable des portions correspondant à une solution instable. On constate ici que la perte de stabilité est induite par une bifurcation de type *cyclic fold*, caractérisée par les points de retournement de la courbe où la tangente est verticale. Lors d’un calcul ou d’une mesure par balayage fréquentiel, le passage d’un tel point induit un phénomène de saut en amplitude, représenté sur la figure II.7, menant à des courbes de réponse différentes suivant le sens du balayage. Sur la figure II.6, on constate également l’apparition de résonances secondaires, correspondant à des résonances sur-harmoniques d’ordre 3 du mode 1 et du mode 2, ce qui peut s’apprécier graphiquement en comparant les fréquences des pics secondaires et les fréquences de résonances des modes associés.

Si l’amplitude de l’effort excitateur est encore augmentée, les réponses changent radicalement d’allure, conduisant à des courbes de plus en plus complexes et présentant de nombreuses portions instables. Pour des niveaux d’excitation suffisamment élevés, il est alors possible de mettre en évidence le phénomène de localisation forcée discuté précédemment. Sur la figure II.8, on voit en effet apparaître pour une certaine plage de fréquences des portions de courbes correspondant à des cycles limites stables, d’amplitude significativement plus grande pour le DDL2 que pour le DDL1. Ce comportement résulte ici de la bifurcation du *mode non-linéaire* issu du second mode du système linéaire sous-jacent [50]. Cette notion de mode non-linéaire est au cœur du travail de recherche qui a été réalisé, et sera présentée de façon détaillée dans la section suivante. Remarquons également sur la figure II.8 l’apparition d’une nouvelle résonance sur-harmonique d’ordre supérieur, qui n’était pas visible pour les niveaux d’excitation plus faibles de la figure II.6.

Pour en finir avec cet exemple académique, intéressons nous brièvement à la bifurcation des solutions du système. Sur les courbes de la figure II.8, il est impossible d’identifier



(a) DDL1



(b) DDL2

FIGURE II.6 – Résonances principales et secondaires (solutions stables — et instables ...)

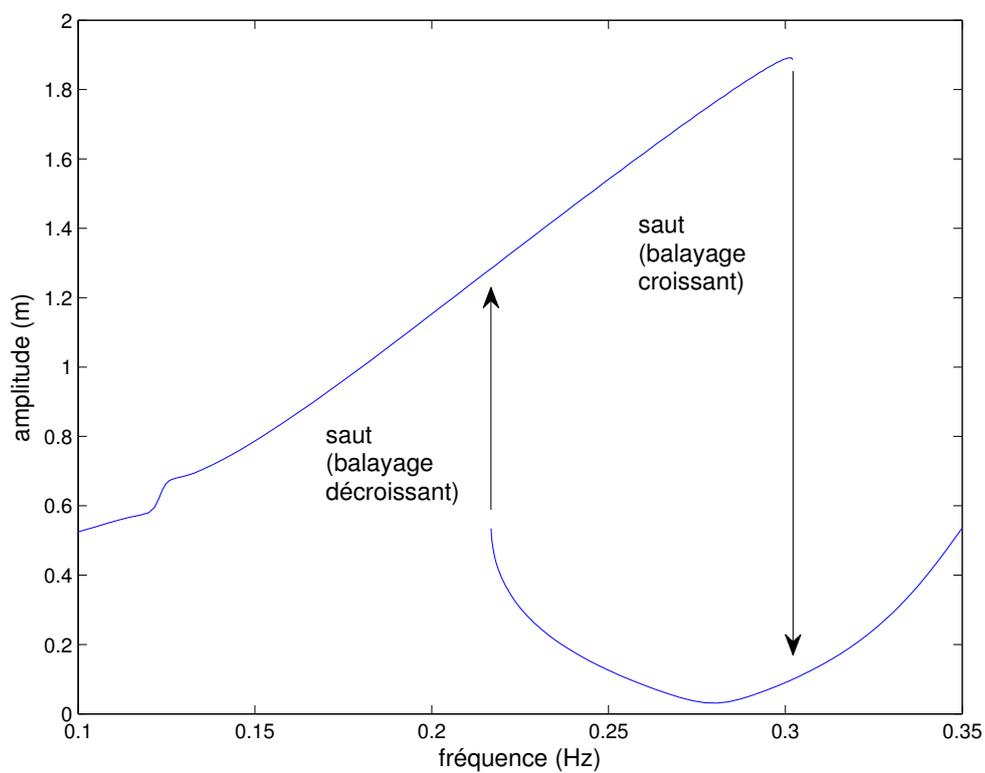
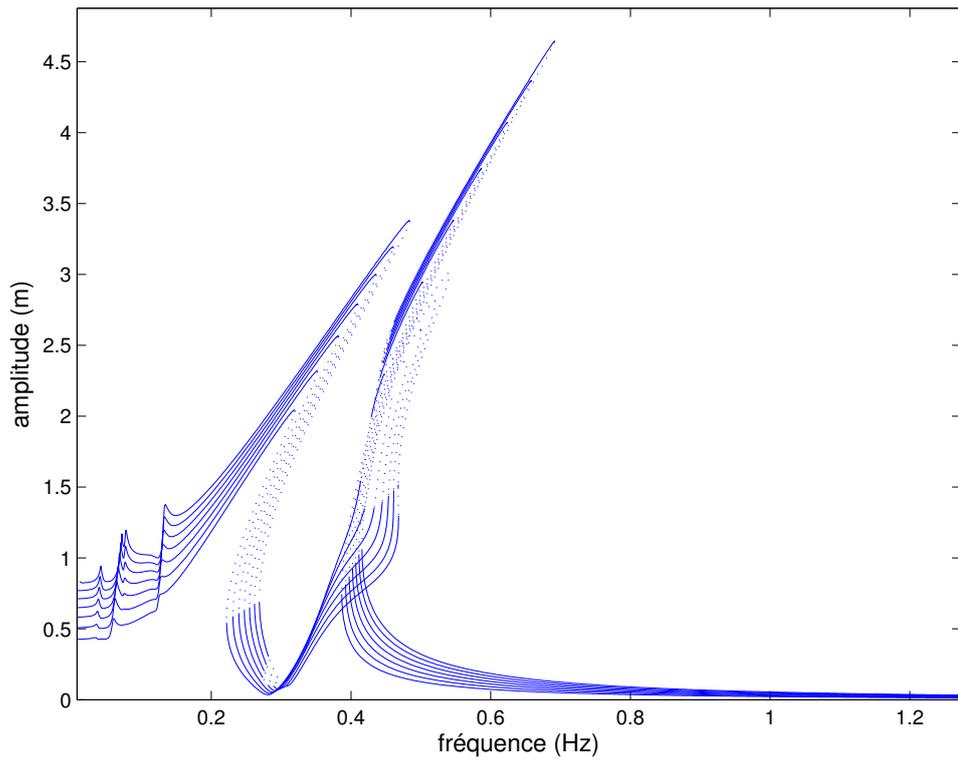
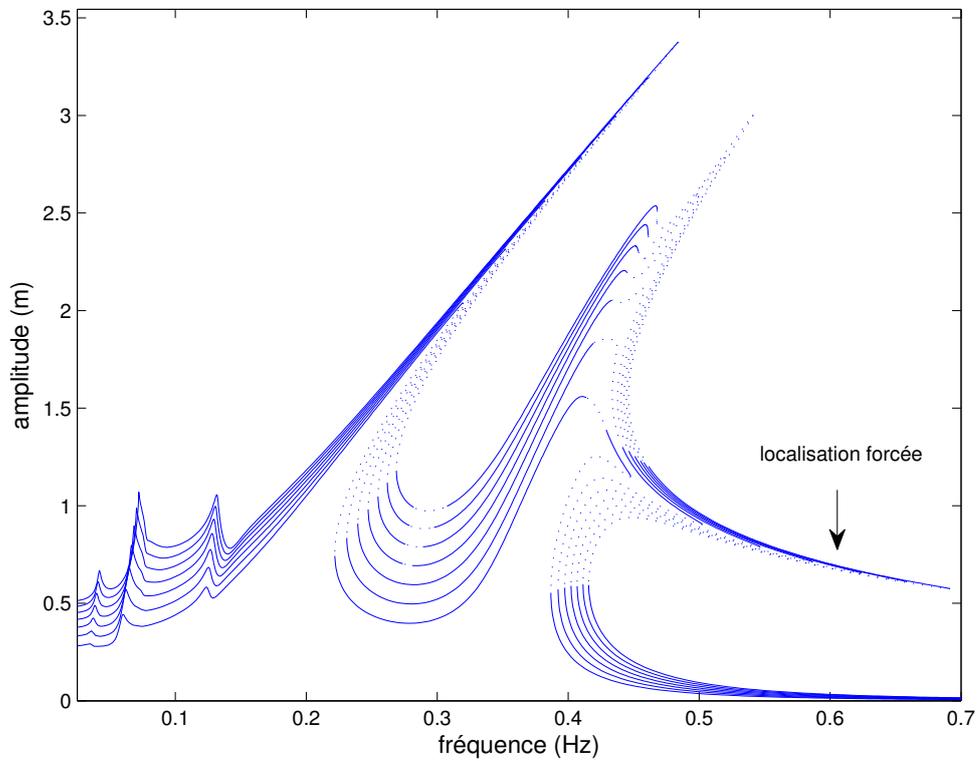


FIGURE II.7 – Phénomène de saut en amplitude au passage d'un point de retournement



(a) DDL1



(b) DDL2

FIGURE II.8 – Localisation forcée (solutions stables — et instables ...)

l'ensemble des bifurcations ayant entraîné les pertes de stabilité par simple visualisation de la réponse. En effet, certaines portions de courbes correspondant à des cycles limites instables ne sont ici liées à aucun point de retournement, et ne sont donc pas issues d'une bifurcation de type *cyclic fold*. Cependant, nous avons vu en section II.3.2 qu'il était possible d'identifier la bifurcation à la façon dont les multiplicateurs de Floquet franchissaient le cercle unité dans le plan complexe. Pour illustrer cela, considérons la figure II.9a, correspondant à la réponse du DDL2 pour un niveau d'excitation relativement élevé. La figure II.9b montre les multiplicateurs de Floquet associés à chaque point de cette courbe, et permet de révéler que les bifurcations non-identifiées résultent d'une paire de multiplicateurs complexes conjugués sortant simultanément du cercle. Il s'agit donc ici de bifurcations secondaires de Hopf, que nous avons pu reporter sur la figure II.9a pour constater qu'elles correspondaient bien aux portions instables de la courbe non associées à des points de retournement. Notons également la présence d'un point de retournement particulier, indiqué sur la courbe, n'entraînant aucune modification de la stabilité. Une analyse plus fine des multiplicateurs au voisinage de ce point révèle qu'en amont, deux d'entre eux sont réels de module supérieur à 1, et qu'au passage du point de retournement, l'un d'eux retourne dans le cercle unité. Il y a donc bien bifurcation de type *cyclic fold*, d'où le point de retournement de la courbe, mais le cycle limite reste instable en raison du multiplicateur réel positif restant en dehors du cercle.

4 Analyse modale non-linéaire fréquentielle

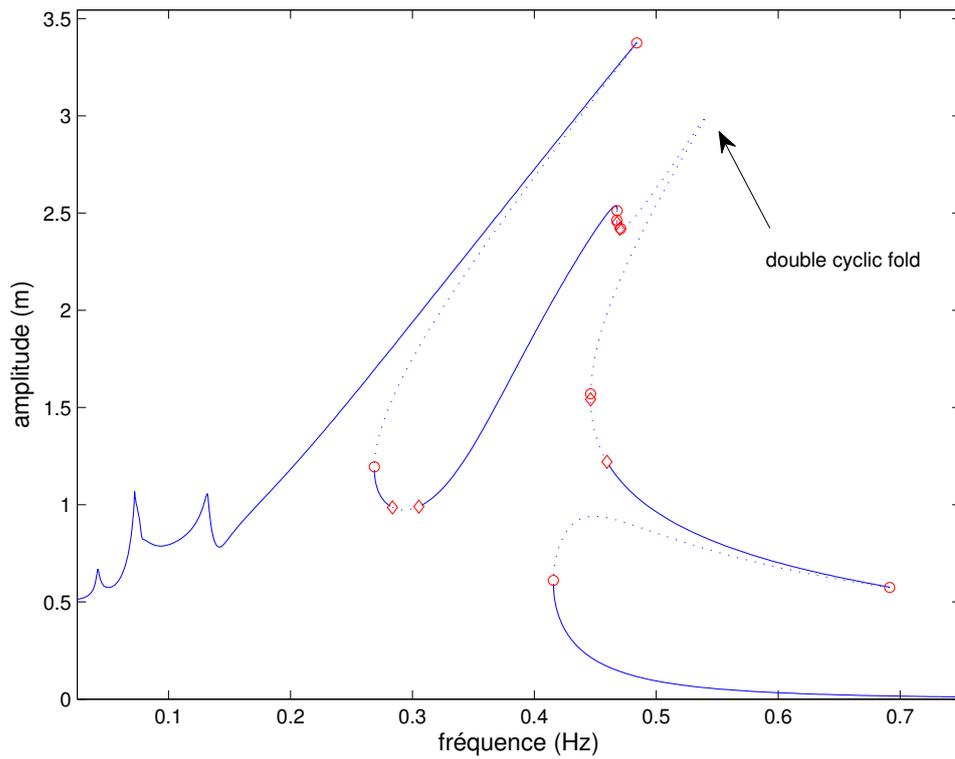
Jusqu'à présent, étant principalement intéressés par les vibrations des structures non-linéaires en régime forcé, nous nous sommes concentrés sur la résolution de systèmes dynamiques non-autonomes pouvant se mettre sous la forme donnée par l'équation (II.1). Pour peu que l'on s'intéresse au système autonome sous-jacent, en l'absence du terme d'excitation,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (\text{II.84})$$

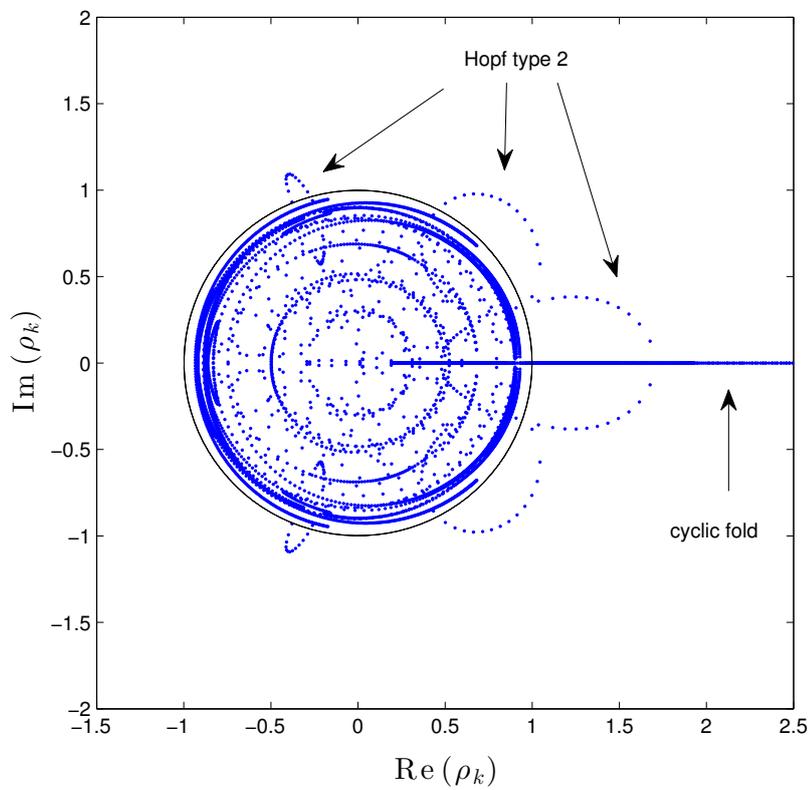
l'approximation de la solution par une série de fonctions purement harmoniques n'est plus nécessairement licite en raison de la décroissance éventuelle de la réponse. Cette décroissance est ici le fruit de la dissipation induite par la matrice d'amortissement visqueux \mathbf{C} , et par le terme non-linéaire potentiellement non-conservatif $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Néanmoins, nous allons voir qu'il est possible d'enrichir la base de réduction classique utilisée en HBM afin de rendre compte de cette décroissance, et ainsi permettre l'approximation de la solution d'un système non-linéaire, autonome, et dissipatif tel que (II.84). La résolution de ce type de système est étroitement liée à la notion de mode non-linéaire, d'un intérêt tout particulier pour notre travail.

4.1 État de l'art

Les *modes normaux non-linéaires* des systèmes dynamiques conservatifs ont été étudiés avec beaucoup d'intérêt par la communauté scientifique de ces dernières décennies. Rosenberg fut l'un des pionniers en la matière et publia dans les années 1960 des articles qui font encore référence à l'heure actuelle [133–137], travaux élégamment repris par Mahwin [99] à la même époque. Il fut suivi par de nombreux auteurs qui contribuèrent à l'élaboration d'une littérature très riche, dont un état de l'art complet a été réalisé par Kerschen *et al.*



(a) Points de bifurcations et stabilité des solutions (*cyclic fold* \circ et Hopf type 2 \diamond)



(b) Multiplicateurs de Floquet

FIGURE II.9 – Identification des bifurcations

[68]. On y retrouve entre autres les travaux de Vakakis sur les modes normaux de vibration des structures à symétrie cyclique soumises à des non-linéarités conservatives polynomiales [163–165], ainsi que la contribution de Shaw et Pierre qui proposèrent une approche par variété invariante basée sur la théorie des variétés centrales, permettant d'étendre le concept de mode non-linéaire aux systèmes dissipatifs faiblement non-linéaires [148, 149]. Cette technique servit de socle à Pesheck *et al.* [118, 119] pour construire une approche combinant méthode de Galerkin et variété invariante, permettant de contourner certaines de ces limitations. Mentionnons également le travail de Jézéquel et Lamarque [62] qui abordèrent le sujet par la théorie des formes normales, et la contribution de Nayfeh [109] qui compara méticuleusement les méthodes analytiques existantes pour construire les modes normaux non-linéaires de systèmes dynamiques continus. L'ouvrage de Vakakis *et al.* [166] pourra servir de référence sur la plupart de ces notions. Plus récemment, nous pouvons citer le travail de thèse de Peeters [115, 116] qui présente de façon claire et concise les enjeux liés à l'analyse modale non-linéaire dans les premiers chapitres de son mémoire. Mentionnons également les travaux de Arquier *et al.* [4], Monteil *et al.* [104, 105], ainsi que les nombreuses contributions de Touzé et Thomas [155, 158, 159]. Citons enfin les travaux récents de Grolet et Thouverez [51, 52], qui contribuèrent à démontrer l'intérêt des approches numériques pour aborder les problématiques liées à la construction des modes normaux de systèmes conservatifs non-linéaires, notamment pour l'étude de systèmes à symétrie cyclique. Un état de l'art récent et très complet sur les différentes techniques de calcul des modes non-linéaires est réalisé par Renson *et al.* dans [132]. Dans la section suivante, nous nous contenterons de faire quelques rappels sur les plus célèbres d'entre elles, avant de présenter en détail en section II.4.3 celle que nous avons choisie pour mener nos développements.

4.2 Techniques classiques d'analyse

Les différentes méthodes permettant le calcul des modes non-linéaires peuvent généralement être classées en deux catégories, à savoir, les méthodes que nous qualifierons d'*analytiques*, et celles dites *numériques*. L'affectation d'une méthode à l'une ou l'autre de ces catégories se base essentiellement sur l'importance des développements analytiques dans sa mise en œuvre. Ce raisonnement reste néanmoins entaché d'une faible part de subjectivité, car, bien que la résolution puisse être intégralement numérique, la mise en équation du problème à résoudre requiert nécessairement un travail analytique plus ou moins important en amont. C'est par exemple ce qui pousse certains auteurs à qualifier l'équilibrage harmonique de méthode *semi-analytique*, notamment lorsque l'évaluation des termes non-linéaires n'est pas réalisée numériquement (par AFT ou par collocation trigonométrique).

4.2.1 Méthodes analytiques

Nous nous contenterons ici de présenter succinctement les approches fondamentales, s'il en est, développées par Rosenberg dans les années 1960 et par Shaw et Pierre dans les années 1990.

Approche énergétique de Rosenberg S'il est aujourd'hui reconnu que le socle mathématique de la notion de mode non-linéaire fut posé par les travaux de Liapounov [95]

et de Poincaré sur la stabilité des systèmes dynamiques, c'est à Rosenberg [133–137] que l'on attribue généralement la paternité du concept appliqué à la dynamique des structures. Dans son analyse, il définit un mode non-linéaire comme une *vibration à l'unisson* du système. En d'autres termes, il s'agit d'une solution périodique pour laquelle les degrés de liberté du système atteignent leurs extrema respectifs et passent par zéro simultanément. Ainsi, le mouvement suivant un mode non-linéaire est paramétrable par un unique degré de liberté de référence x_k , choisit arbitrairement. Pour un système à n degrés de liberté, cette définition est traduite mathématiquement par

$$x_i(t) = g_i(x_k(t)), \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus k \quad (\text{II.85})$$

avec g_i les différentes fonctions liant le mouvement des degrés de libertés au DDL de référence. Le calcul du mode non-linéaire revient alors à déterminer les $n - 1$ fonctions g_i . Pour cela, on exprime les dérivées premières et secondes de chaque x_i en fonctions de g_i et de x_k , avant de substituer les expressions obtenues dans les équations du mouvement. Cette procédure aboutit à un système d'équations différentielles dont les solutions sont les fonctions g_i , et dont on recherche généralement une approximation sous la forme d'un développement polynomial. Les relations (II.85) impliquent que le mouvement suivant un mode non-linéaire est représenté par une courbe dans l'espace des configurations. Pour certains systèmes présentant des propriétés de symétrie particulières, cette courbe peut être une droite, et le mode non-linéaire en question est dit *similaire* selon la terminologie employée par Rosenberg. Dans le cas contraire, le mode est dit *non-similaire*, et sa déformée est fonction de l'énergie du système (*e.g.* de l'amplitude de vibration). On distingue deux propriétés géométriques remarquables des modes non-linéaires ainsi définis. D'une part, la courbe représentative d'un mode est tangente aux droites représentatives des modes du système linéarisé autour du point d'équilibre considéré. D'autre part, cette courbe est orthogonale (*i.e.* *normale*) aux surfaces équipotentielles de l'espace des configurations. Ces deux propriétés sont représentées schématiquement sur la figure II.10.

L'approche de Rosenberg permet de mettre à jour certaines propriétés fondamentales des modes non-linéaires, telle que la relation liant fréquence propre ou déformée à l'amplitude de vibration. Cependant, cette méthode n'est applicable qu'à une catégorie particulière de systèmes, qui se doivent d'être conservatifs et à non-linéarités impaires. L'approche proposée par Shaw et Pierre vise à contourner ces limitations, en proposant une définition qui permet d'étendre la notion de mode non-linéaire à une classe plus large de systèmes.

Approche de Shaw et Pierre Afin de généraliser le concept, Shaw et Pierre proposent de définir un mode non-linéaire comme une *variété invariante bidimensionnelle de l'espace des phases* du système. Cette approche est similaire à celle de Rosenberg, si ce n'est que le mouvement est ici paramétré par le déplacement x_k et la vitesse \dot{x}_k d'un DDL de référence. Les relations mathématiques liant ces deux coordonnées aux restes des variables d'état peuvent se mettre sous la forme

$$x_i(t) = g_i(x_k(t), \dot{x}_k(t)), \quad \dot{x}_i(t) = h_i(x_k(t), \dot{x}_k(t)), \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus k \quad (\text{II.86})$$

Le calcul du mode non-linéaire revient donc à déterminer l'ensemble des fonctions g_i et h_i du paramétrage. Par une procédure similaire à celle utilisée par Rosenberg, il est possible

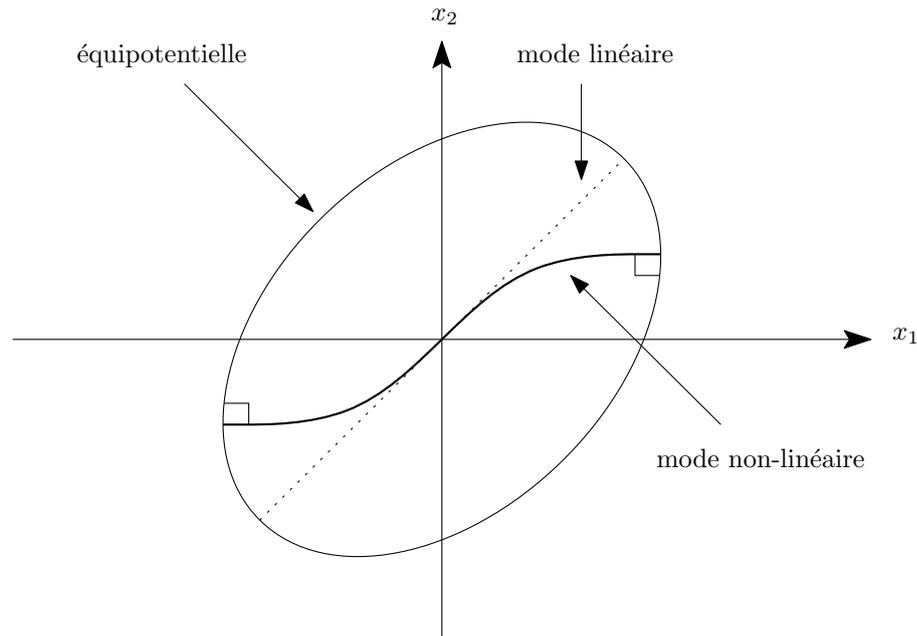


FIGURE II.10 – Mode non-linéaire et espace des configurations (adaptée de [83])

d'éliminer la dépendance temporelle et d'aboutir à un système de $2n - 2$ équations différentielles, dont les solutions sont les fonctions recherchées. Une fois encore, il est peu courant de pouvoir déterminer les solutions exactes du système, et l'on se contente généralement d'une approximation polynomiale.

Outre le caractère fortement analytique de cette méthode, qui restreint son application à des systèmes de taille relativement faible, sa principale limitation est due aux développements polynomiaux utilisés pour déterminer les fonctions g_i et h_i . En effet, le domaine de validité du mode non-linéaire ainsi calculé est tributaire de la validité de l'approximation, qui a tendance à décroître à mesure que l'amplitude du mouvement augmente. Afin de contourner ces limitations, Pescheck [118, 119] proposa une reformulation de la méthode en utilisant un paramétrage en amplitude et en phase, permettant de fixer *a priori* le domaine de validité de la solution. Cette nouvelle approche fait également intervenir une projection de Galerkin et une éventuelle subdivision du domaine, permettant d'aborder la résolution de façon purement numérique et d'en améliorer ainsi la polyvalence. En effet, c'est cette polyvalence qui fait généralement défaut aux méthodes analytiques que nous venons de voir, et qui rend les approches numériques plus attrayantes pour aborder les systèmes de grande taille.

4.2.2 Méthodes numériques

Les deux méthodes numériques que nous allons présenter s'intéressent à la résolution du système dynamique suivant,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{II.87})$$

Un mode non-linéaire est donc défini ici comme une *solution périodique de système dynamique non-linéaire autonome et conservatif*. En comparant cette équation au système

(II.84), on remarque ainsi l'absence de matrice d'amortissement et de dépendance en vitesse du terme non-linéaire, afin de garantir l'existence de solution strictement périodique⁴. C'est cette condition de non-dissipativité que la notion de *mode complexe non-linéaire* de la section II.4.3 viendra relaxer. Bien que l'aspect dissipatif autorisé par l'approche de Shaw et Pierre soit perdu, l'intérêt de cette nouvelle définition est qu'elle va permettre une résolution purement numérique, et sans approximation de la solution autour d'un point d'équilibre par développement polynomial (*i.e.* sans hypothèse sur l'amplitude du mouvement).

Méthode de tir Une approche numérique qui a fait ses preuves pour le calcul des modes non-linéaires est la méthode de tir, que nous avons déjà présentée en section II.1 pour le calcul des solutions périodiques d'un système non-autonome. La mise en œuvre de cette méthode pour calculer les modes non-linéaires est très similaire, si ce n'est que la période de la solution, imposée par l'excitation en régime forcé, est ici inconnue. Cette indétermination peut être levée en ajoutant une *condition de phase*, équation supplémentaire imposant la phase de la solution. Tout comme en régime forcé, un intérêt particulier de cette méthode est qu'elle fait intervenir de façon sous-jacente le calcul de la matrice de monodromie du système, et permet donc de statuer sur la stabilité du mode par simple extraction des multiplicateurs de Floquet (voir section II.3). Pour davantage d'information sur la méthode de tir employée au calcul de modes non-linéaires, on pourra se référer au travail de thèse très complet de Peeters [115, 116] sur la mise en œuvre de cette approche, abordant des aspects à la fois théoriques, numériques et expérimentaux.

Équilibrage harmonique Compte tenu de l'absence de dissipation dans (II.87), et donc du caractère strictement périodique de la solution, il est parfaitement licite de rechercher une approximation du mode non-linéaire sous forme de série de Fourier tronquée. La méthode de l'équilibrage harmonique détaillée en section II.2 est donc bien adaptée au calcul des modes non-linéaires ainsi définis. Néanmoins, tout comme pour la méthode de tir que nous venons de présenter, le système algébrique obtenu est sous-déterminé car la période (et donc la pulsation) de la solution est inconnue. Il convient donc de fermer le système avec une condition de phase, en imposant par exemple une vitesse initiale nulle à l'un des degrés de liberté. En outre, les modes non-linéaires étant tangents aux modes linéaires à faible amplitude (voir figure II.10), l'initialisation du solveur peut se faire par simple extraction des valeurs propres et vecteurs propres du système linéaire sous-jacent. Nous reviendrons plus en détail sur ces aspects dans la section suivante. L'utilisation de la HBM dans cette optique a été étudiée récemment par Grolet et Thouverez [50–52] sur des structures à symétrie cyclique, permettant notamment de révéler l'existence de modes localisés pour des systèmes parfaitement accordés, tel qu'avait pu le démontrer Vakakis *et al.* [163, 165] par des approches analytiques quelques années auparavant. Il a d'ailleurs pu être vérifié dans les mêmes travaux que ces modes localisés étaient à l'origine de phénomènes de localisation en régime forcé.

Si l'intérêt de ces deux méthodes dans un contexte d'analyse modale non-linéaire n'est

4. Il est ici sous-entendu que l'amortissement global du système (II.84) est strictement positif, et que l'on ne considère donc pas de problèmes de vibrations auto-entretenues tels que le flottement. Pour cette classe particulière de problèmes, des approches type HBM sous contrainte peuvent être utilisées [26].

plus à démontrer, elles souffrent néanmoins d'une limitation majeure qui peut, dans certains cas de figure, les rendre inapplicables. Comme le précise Peeters dans son mémoire de thèse [115], le fait d'omettre la matrice d'amortissement dans le calcul du mode n'est pas problématique *a priori*, car la dynamique du système non-linéaire amorti se déduit généralement très bien de la dynamique du système conservatif sous-jacent. En revanche, lorsque la dissipation résulte en partie de phénomènes non-linéaires, tel qu'en présence de frottement, ces deux approches ne sont plus adaptées car trop peu d'information est retenue dans le système conservatif sous-jacent.

Ainsi, Laxalde et Thouverez [88] proposèrent en 2009 une nouvelle méthode pour étendre la notion de mode non-linéaire à une classe de systèmes plus large encore. Cette méthode, inspirée des techniques d'équilibrages harmoniques, adresse directement la résolution du système (II.84), dans lequel les non-linéarités peuvent être fortes et irrégulières, mais également dissipatives. Un mode non-linéaire est alors simplement défini comme une *solution périodique ou pseudo-périodique*⁵ de système dynamique non-linéaire autonome, sans restriction aucune vis-à-vis de la dissipation. Les modes ainsi définis sont appelés *modes complexes non-linéaires*, en raison du parallèle qui peut être fait avec la notion de mode complexe linéaire [44, 47]. Outre le travail des auteurs [83–85, 87, 88], des études plus récentes menées par Krack [74–79] furent consacrées à ce nouveau concept, et démontrèrent sa grande efficacité dans l'analyse de systèmes de complexité aussi bien académique qu'industrielle. Pourtant, malgré un potentiel avéré, cette approche semble encore relativement méconnue au sein de la communauté scientifique. Cette notion étant au cœur du travail de recherche présenté dans ce mémoire, à travers une nouvelle approche combinant sous-structuration et modes complexes non-linéaires (voir chapitre III), nous proposons dans la section suivante d'en détailler les étapes de calculs et de l'illustrer sur un modèle académique. Une étude phénoménologique plus approfondie sera présentée en section II.5.

4.3 Mode complexe non-linéaire

On s'intéresse ici à la résolution d'un système dynamique non-linéaire autonome, dont le comportement est gouverné par un système d'équations différentielles pouvant se mettre sous la forme suivante,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (\text{II.88})$$

Pour rappel, un mode complexe non-linéaire désigne une solution périodique ou pseudo-périodique du système (II.88). Comme pour l'équilibrage harmonique classique présenté en section II.2, nous allons rechercher une approximation de la solution en faisant appel à la méthode de Galerkin, moyennant quelques hypothèses supplémentaires. Afin de rendre compte de la décroissance éventuelle sur une période de vibration, la solution est recherchée sous la forme d'une fonction pseudo-périodique multi-harmonique donnée par l'expression,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{n_h} e^{-k\beta t} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.89})$$

avec β le paramètre caractérisant l'amortissement issu de la dissipation, et ω la pulsation fondamentale. On remarque la similitude entre l'expression (II.89) et l'approximation

5. En accord avec la terminologie usuelle employée en mécanique classique, le terme pseudo-périodique fait ici référence à une solution oscillante amortie.

classique de la HBM donnée par l'équation (II.12). Afin de poursuivre la procédure de Galerkin, il est préférable de disposer d'un produit scalaire pour lequel la famille de fonctions de bases de la solution est orthogonale, afin de simplifier l'expression du système algébrique final. Cependant, la présence du terme exponentiel décroissant complique la tâche par rapport à un équilibrage harmonique classique, car le produit scalaire (II.13) ne remplit plus cette condition. Nous allons donc faire une hypothèse supplémentaire, qui consiste à négliger la décroissance de la solution sur la période d'oscillation T au cours de laquelle le produit scalaire est appliqué. En d'autres termes, lors de l'étape d'orthogonalisation, la solution est supposée être parfaitement périodique, et le terme d'amortissement β est pris nul dans les fonctions de bases⁶. Cette hypothèse est d'autant plus pertinente que le temps caractéristique de décroissance est grand face à la période fondamentale des oscillations [83, 88] (*i.e.* $\beta \ll \omega$), ce est vérifié dans l'ensemble de nos applications. Avec la même convention de notation qu'à la section II.2 pour les fonctions harmoniques et le produit scalaire, la projection du résidu sur une fonction quelconque φ de la famille engendrant le sous-espace de réduction donne,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r} | \varphi \rangle &= \mathbf{M} \sum_{k=1}^{n_h} (k^2 \beta^2 - k^2 \omega^2) (\mathbf{a}_k \langle c_k | \varphi \rangle + \mathbf{b}_k \langle s_k | \varphi \rangle) + (2k^2 \omega \beta) (\mathbf{a}_k \langle s_k | \varphi \rangle - \mathbf{b}_k \langle c_k | \varphi \rangle) \\
&+ \mathbf{C} \sum_{k=1}^{n_h} -k\beta (\mathbf{a}_k \langle c_k | \varphi \rangle + \mathbf{b}_k \langle s_k | \varphi \rangle) - k\omega (\mathbf{a}_k \langle s_k | \varphi \rangle - \mathbf{b}_k \langle c_k | \varphi \rangle) \\
&+ \mathbf{K} \sum_{k=1}^{n_h} (\mathbf{a}_k \langle c_k | \varphi \rangle + \mathbf{b}_k \langle s_k | \varphi \rangle) \\
&+ \mathbf{K} \mathbf{a}_0 \langle c_0 | \varphi \rangle + \langle \mathbf{f} | \varphi \rangle
\end{aligned} \tag{II.90}$$

En remplaçant successivement φ par chacune des fonctions de la base de réduction (ce qui dans le cadre de notre hypothèse revient à lui substituer les fonctions c_0 , c_k , et s_k), l'orthogonalité des fonctions harmoniques par rapport au produit scalaire choisit cède le système d'équations,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r} | c_0 \rangle &= 2\mathbf{K} \mathbf{a}_0 + \langle \mathbf{f} | c_0 \rangle \\
\langle \mathbf{r} | c_k \rangle &= \left((k^2 \beta^2 - k^2 \omega^2) \mathbf{M} - k\beta \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{a}_k - \left(2k^2 \omega \beta \mathbf{M} - k\omega \mathbf{C} \right) \mathbf{b}_k + \langle \mathbf{f} | c_k \rangle \\
\langle \mathbf{r} | s_k \rangle &= \left((k^2 \beta^2 - k^2 \omega^2) \mathbf{M} - k\beta \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{b}_k + \left(2k^2 \omega \beta \mathbf{M} - k\omega \mathbf{C} \right) \mathbf{a}_k + \langle \mathbf{f} | s_k \rangle
\end{aligned} \tag{II.91}$$

En matière de programmation, il peut être plus intéressant de réécrire le système d'équations algébriques (II.91) sous une forme plus compacte, très similaire au système (II.16) d'un équilibrage harmonique classique,

$$\mathbf{Z}(\omega, \beta) \mathbf{x}_h + \mathbf{f}_h(\mathbf{x}_h, \omega, \beta) = \mathbf{0} \tag{II.92}$$

dans lequel \mathbf{x}_h renferme les coefficients harmoniques \mathbf{a}_0 , \mathbf{a}_k , et \mathbf{b}_k . La matrice de rigidité dynamique \mathbf{Z} conserve sa structure tridiagonale par blocs donnée par l'équation (II.17), mais l'expression des sous-blocs \mathbf{Z}_k fait dorénavant intervenir le paramètre d'amortisse-

6. Les occurrences de β en dehors des fonctions exponentielles décroissantes servant de base de réduction, issues des expressions de $\dot{\mathbf{x}}(t)$ et $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, sont bel et bien conservées.

ment β ,

$$\forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket, \quad \mathbf{z}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{K} - k\beta\mathbf{C} + (k^2\beta^2 - k^2\omega^2)\mathbf{M} & -(2k^2\omega\beta\mathbf{M} - k\omega\mathbf{C}) \\ (2k^2\omega\beta\mathbf{M} - k\omega\mathbf{C}) & \mathbf{K} - k\beta\mathbf{C} + (k^2\beta^2 - k^2\omega^2)\mathbf{M} \end{pmatrix} \quad (\text{II.93})$$

Évaluation des termes non-linéaires Compte tenu de l'hypothèse de décroissance négligeable sur une période faite lors de l'étape d'orthogonalisation, les coefficients du vecteur \mathbf{f}_h peuvent être déterminés par la procédure d'alternance temps-fréquence détaillée à la section II.2.2, sans modification des matrices de transformées de Fourier discrètes. En revanche, les sous-blocs de l'opérateur de dérivation ∇ , dont l'expression est donnée par l'équation (II.25), doivent eux être modifiés pour prendre en compte l'amortissement lors de la reconstruction du vecteur vitesse échantillonné (et éventuellement des dérivées d'ordre supérieur),

$$\nabla_k = \begin{pmatrix} -k\beta & k\omega \\ -k\omega & -k\beta \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n, \quad \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket \quad (\text{II.94})$$

Continuation La résolution du système (II.92) peut être réalisée à l'aide du même type de solveurs itératifs qu'en équilibrage harmonique classique, dont le principe de base a été donné en section 2.1.2. Néanmoins, les techniques de continuation que nous avons présentées en section II.2.3 nécessitent d'être légèrement modifiées pour être applicable à ce nouveau système, en raison du paramètre β qui vient s'ajouter aux inconnues du problème.

Pour une procédure de continuation de type séquentielle, Laxalde [83, 88] propose tout d'abord d'utiliser comme paramètre de continuation, non pas la pulsation ω comme en régime forcé, mais l'amplitude de l'harmonique d'un degré de liberté d'indice j , choisi judicieusement. La condition de phase venant fermer le système consistant simplement à imposer également la phase de ce DDL de contrôle. Pour une non-linéarité de type frottement, cette approche permet dans la plupart des cas de résoudre le système sans difficulté. Cependant, pour anticiper certains comportements pathologiques susceptibles d'être rencontrés sur des modèles académiques, nous proposons ici d'utiliser une paramétrisation par longueur d'arc couplée à une correction de type *arc-length*. Pour cela, l'équation de contrainte (II.32) est légèrement modifiée pour prendre en compte la nouvelle variable β ,

$$r_a(\mathbf{x}_h, \omega, \beta) = (d\mathbf{x}_h)^T(d\mathbf{x}_h) + d\omega^2 + d\beta^2 - ds^2 \quad (\text{II.95})$$

La condition de phase que nous proposons pour fermer le système consiste à imposer une vitesse initiale nulle au DDL de contrôle. Cette contrainte est assurée par l'équation,

$$r_p(\mathbf{x}_h, \omega, \beta) = \sum_{k=1}^{n_h} k\omega b_{k,j} - k\beta a_{k,j} = \omega\mathbf{B}_1\mathbf{x}_h - \beta\mathbf{B}_2\mathbf{x}_h \quad (\text{II.96})$$

dans laquelle les matrices \mathbf{B}_1 et \mathbf{B}_2 sont des matrices booléennes réalisant la restriction de la somme au degré de liberté de contrôle, facilitant grandement l'implémentation.

Initialisation Le solveur utilisé pour la résolution itérative du problème requiert systématiquement un point de départ avant d'itérer. Des prédicteurs tel que le prédicteur

sécant que nous avons mentionné précédemment permettent de déterminer un jeu de variables initiales adéquat, mais ceux-ci nécessitent de connaître une ou plusieurs solutions convergées en amont de la courbe. Tout comme en régime forcé, pour le tout premier point de calcul, l'initialisation du solveur peut se faire sur une solution linéaire en assurant une faible activation de la non-linéarité. Pour une non-linéarité dont l'intensité est contrôlée par l'amplitude de la solution, on détermine pour cela un mode complexe linéaire du système sous-jacent, que l'on utilise comme initialisation du solveur après pré-multiplication de la déformée par un scalaire suffisamment petit pour ramener les amplitudes dans le domaine linéaire.

Matrice jacobienne analytique Là encore, les solveurs itératifs qui peuvent être utilisés pour résoudre le système d'équations algébriques non-linéaires (II.92) requièrent la connaissance de la matrice jacobienne de la fonction à annuler. L'évaluation de cette matrice par différence finie est bien entendu possible, mais il est toujours plus intéressant en matière de temps de calcul de bénéficier d'une expression analytique, exacte ou approchée. Pour un calcul de mode complexe non-linéaire, la forme générale de cette matrice est donnée par l'équation (II.97), où la dépendance des termes vis-à-vis des variables à l'itération k est explicitement rappelée.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_h^{(k)}, \omega^{(k)}, \beta^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \mathbf{x}_h}(\mathbf{x}_h^{(k)}, \omega^{(k)}, \beta^{(k)}) & \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \omega}(\mathbf{x}_h^{(k)}, \omega^{(k)}, \beta^{(k)}) & \frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \beta}(\mathbf{x}_h^{(k)}, \omega^{(k)}, \beta^{(k)}) \\ \frac{\partial r_a}{\partial \mathbf{x}_h}(\mathbf{x}_h^{(k)}) & \frac{\partial r_a}{\partial \omega}(\omega^{(k)}) & \frac{\partial r_a}{\partial \beta}(\beta^{(k)}) \\ \frac{\partial r_p}{\partial \mathbf{x}_h}(\omega^{(k)}, \beta^{(k)}) & \frac{\partial r_p}{\partial \omega}(\omega^{(k)}) & \frac{\partial r_p}{\partial \beta}(\beta^{(k)}) \end{pmatrix} \quad (\text{II.97})$$

avec les termes relatifs aux équations de l'équilibrage harmonique amorti,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \mathbf{x}_h} = \mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{f}_h}{\partial \mathbf{x}_h} \quad (\text{II.98})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathbf{f}_h}{\partial \omega} \quad (\text{II.99})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_h}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathbf{f}_h}{\partial \beta} \quad (\text{II.100})$$

les termes relatifs à la paramétrisation par longueur d'arc,

$$\frac{\partial r_a}{\partial \mathbf{x}_h} = 2(\delta \mathbf{x}_h)^\top \quad (\text{II.101})$$

$$\frac{\partial r_a}{\partial \omega} = 2(\delta \omega) \quad (\text{II.102})$$

$$\frac{\partial r_a}{\partial \beta} = 2(\delta \beta) \quad (\text{II.103})$$

Les courbes représentatives de l'évolution de la fréquence propre et de l'amortissement modal, appelées dans la suite *backbones* du mode, sont données en figure II.12 en fonction de l'amplitude de vibration $|x_1|$ de la masse m_1 . L'amplitude du déplacement est ici utilisée pour décrire les variations des paramètres modaux, mais il est parfaitement possible d'utiliser n'importe quelle autre quantité pouvant servir de mesure de l'activation des effets non-linéaires, telle que l'énergie cinétique comme on peut le retrouver dans certains travaux. On observe sur ces courbes un décalage de la fréquence propre vers les basses fréquences, traduisant les effets assouplissants du glissement. La fréquence ω varie ainsi entre les valeurs de la fréquence propre du mode associé aux systèmes linéaires sous-jacents possédant une interface collée et une interface glissante sans frottement, respectivement à bas et hauts niveaux de $|x_1|$. L'amortissement modal, quant à lui, exhibe un maximum correspondant à une dissipation optimale résultant de l'élément de Coulomb. Des *backbones* similaires furent obtenues et expliquées en détail dans les références [64, 78, 88].

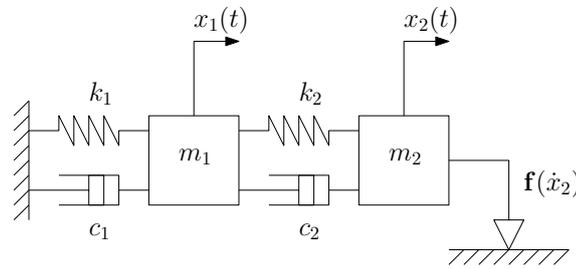


FIGURE II.11 – Modèle académique soumis à une non-linéarité de frottement sec

TABLEAU II.1 – Paramètres structuraux du modèle académique avec frottement sec

– (unité)	m (kg)	c (Ns/m)	k (N/m)
DDL1	1	0.5	640
DDL2	0.02	0.5	40

5 Étude phénoménologique

Dans cette section, les techniques d'approximations des solutions présentées en section II.2 et II.4 sont mises en œuvre dans l'étude d'un modèle phénoménologique de roue aubagée, afin de s'intéresser à l'impact des effets combinés des non-linéarités et du désaccordage sur la dynamique globale de la structure. Après la présentation du modèle et de son paramétrage en section II.5.1, la méthode de l'équilibrage harmonique est utilisée pour déterminer dans un premier temps la réponse du système en l'absence de désaccordage en section II.5.2. La section II.5.3 reprend l'analyse du système cette fois-ci après introduction d'un schéma de désaccordage en raideur aléatoire. Dans un cas comme dans l'autre, les modes complexes non-linéaires de la structure sont calculés par la méthode présentée en section II.4 pour interpréter la réponse du système, mettant en avant leur capacité à capturer la dynamique intrinsèque de la structure. Les résultats relatifs à cette section ont

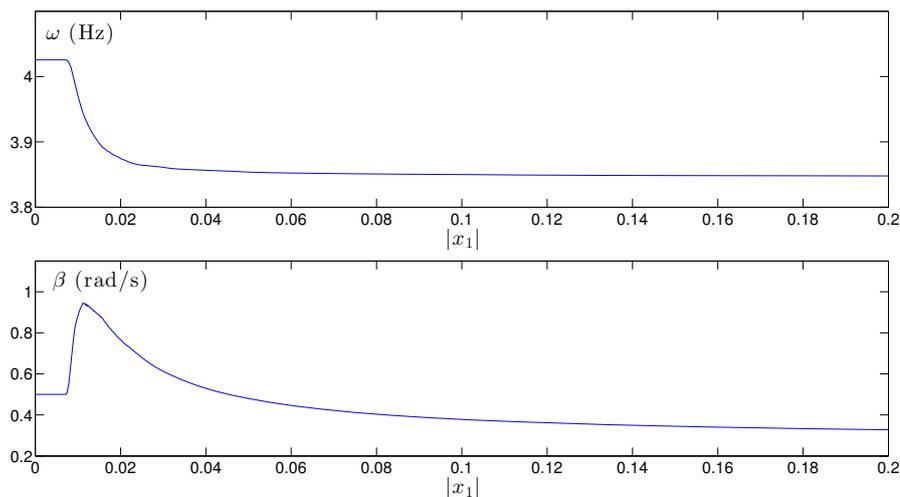


FIGURE II.12 – Backbones du modèle académique avec frottement sec

fait l'objet d'une publication dans la revue *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* [64].

5.1 Présentation du modèle

Le modèle en question est un système cyclique, dont le secteur fondamental est représenté en figure II.13. Ce secteur est constitué de trois degrés de liberté représentant une pale, et d'un degré de liberté représentant un secteur de disque. Sur chacun des secteurs, le pied de pale et le disque sont liés par un élément non-linéaire induisant une force de frottement sec, fonction du mouvement relatif des degrés de liberté ainsi reliés, représentatif d'un point de vue phénoménologique de la friction en pied de pale pouvant survenir sur des roues aubagées à pales rapportées (voir section I.3.4). Trois degrés de liberté sont utilisés pour la pale afin de modérer l'influence de la non-linéarité observée en tête des aubes. Un modèle similaire a été utilisé par Laxalde *et al.* [86] pour étudier la réponse forcée d'un disque aubagé monobloc possédant un dispositif d'amortissement par jonc de friction.

Dans la suite, le modèle sera constitué de six secteurs, permettant un bon compromis entre temps de calcul et représentativité en termes de modes à diamètres. Les paramètres structuraux sont calibrés de façon à rendre le modèle représentatif de la première famille de mode de flexion d'une roue industrielle. Les masses ponctuelles sont définies à partir de la masse des composants, et les raideurs sont ensuite calibrées de façon à positionner fréquemment les modes. Une attention particulière est prêtée à la valeur de la raideur de couplage entre les secteurs, qui régit l'évolution des fréquences propres en fonction du nombre de diamètres des modes, comme nous avons pu le voir en section I.3.2. Les valeurs des différents paramètres structuraux sont reportées dans le tableau II.2. Les fréquences propres de la première famille de modes du système accordé sont reportées dans le tableau II.3, pour les systèmes linéaires sous-jacents à interfaces collées, et à interfaces

sans frottement. Pour ces deux cas linéaires accordés, les couples de fréquences (f_2, f_3) et (f_4, f_5) sont associées à des modes doubles possédant 1 et 2 diamètres nodaux, respectivement, correspondant à des solutions dégénérées du système présentées en section I.2.4. Les fréquences f_1 et f_6 correspondent quant à elles aux solutions non-dégénérées à 0 et 3 diamètres nodaux.

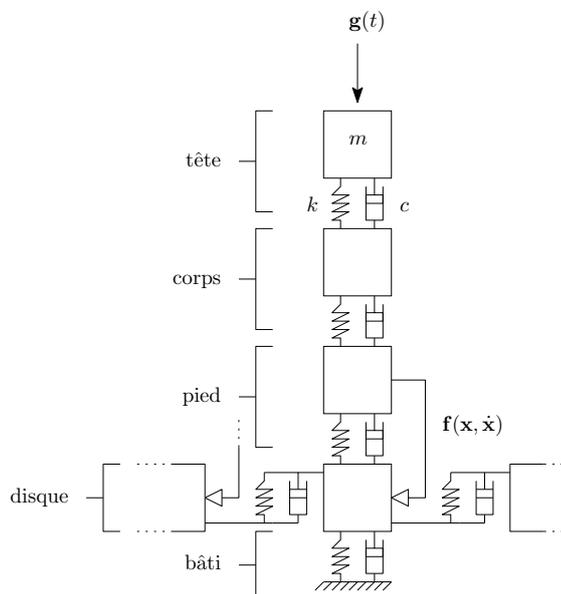


FIGURE II.13 – Secteur fondamental du modèle phénoménologique avec frottement sec

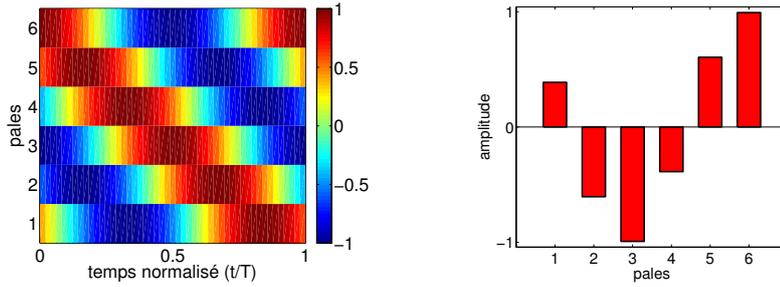
TABLEAU II.2 – Paramètres structuraux du modèle phénoménologique

– (unité)	tête	corps	pied	disque	bâti
m ($10^{-3} \cdot \text{kg}$)	5	5	15	120	–
c ($\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
k ($10^5 \cdot \text{N}/\text{m}$)	6	10	300	100	25

TABLEAU II.3 – Fréquences propres des systèmes linéaires accordés sous-jacents

f_i (Hz)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Diamètre(s)	0	1	1	2	2	3
Interfaces collées	654	1202	1202	1257	1257	1261
Interfaces glissantes	653	1189	1189	1244	1244	1248

Comme nous avons pu le voir en section I.3.1, les excitations tournantes sont d'un intérêt tout particulier en dynamique des roues aubagées, celles-ci étant directement générées par les composants de la turbomachine en fonctionnement. Nous avons également vu en section I.3.2 que la notion d'appropriation modale pour une structure cyclique était



(a) Séries temporelles de l'excitation (b) Amplitude spatiale à $t/T=0$

FIGURE II.14 – Excitation tournante du modèle phénoménologique

intimement liée à l'indice de déphasage de l'excitation, que l'on a pu illustrer par le diagramme de la figure I.8. Ici, le modèle phénoménologique ne possédant que six secteurs, il pourrait rapidement perdre en représentativité face à une excitation possédant un indice de déphasage élevé. Ainsi, l'excitation tournante que nous utiliserons dans cette étude est une excitation d'indice de déphasage égal à 1, que nous appliquerons aux DDL situés en tête de pale. L'expression de l'excitation imposée sur le secteur d'indice k est donc donnée par,

$$\mathbf{g}(t) = \{F \ 0 \ 0 \ 0\}^T \cos(\Omega t + 2\pi k/n_b) \quad (\text{II.116})$$

avec F l'amplitude, Ω la pulsation, et n_b le nombre de secteurs. L'amplitude normalisée de l'excitation dans le domaine temporel, sur une période T et pour l'ensemble des pales, est donnée en figure II.14a. L'aspect propagatif de l'excitation, de la sixième à la première pale, résulte en un schéma diagonal caractéristique des ondes tournantes. À un instant donné de l'axe des abscisses, l'amplitude de l'excitation en fonction de l'indice des secteurs exhibe clairement un diamètre nodal en passant deux fois par zéro, comme illustré sur la figure II.14b.

La littérature dispose de plusieurs lois permettant de modéliser une non-linéarité de frottement sec, telles que celles de Dahl [125] et de Bouc-Wen [11, 177]. Dans cette étude, la loi classique de Coulomb est retenue en raison de sa simplicité. Rappelons néanmoins que des lois plus sophistiquées ont déjà été utilisées pour calculer des modes complexes non-linéaires, prenant par exemple en compte des phénomènes d'usure et de micro-glissement [85]. Pour un modèle unidimensionnel tel que celui utilisé ici, l'implémentation de la loi de Coulomb peut se faire aisément à l'aide d'une fonction signe prenant en argument les vitesses relatives des degrés de liberté en contact, afin de déterminer la direction de l'effort non-linéaire. Cet effort est de valeur absolue constante égale à μN , avec μ le coefficient de frottement et N l'effort normal maintenant les degrés de liberté en contact. Par la suite, cette fonction signe est approchée par une loi en tangente hyperbolique, facilitant l'obtention de la matrice jacobienne analytique des sections II.2.4 et II.4.3. La loi régissant les efforts non-linéaires dans le domaine temporel est ainsi donnée par les expressions,

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}) = \mu N \tanh\left(\frac{\dot{\mathbf{x}}_{rel}}{\varepsilon}\right) \quad (\text{II.117})$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{rel} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \quad (\text{II.118})$$

La direction de la force non-linéaire étant fonction du mouvement relatif entre les degrés

de liberté en contact, le vecteur des vitesses relatives $\dot{\mathbf{x}}_{rel}$ est obtenu à partir de $\dot{\mathbf{x}}$ par l'intermédiaire d'une matrice de changement de base \mathbf{P} , réalisant le passage des coordonnées absolues vers les coordonnées relatives. L'effort normal N est égal à la force centrifuge agissant sur la pale, soit approximativement 1kN ici. Le coefficient de frottement est quant à lui fixé à 0.3 pour l'ensemble de l'étude. Le paramètre ε gouverne le degré de régularisation. Plus celui-ci est petit et plus la loi se rapproche de la fonction signe, comme illustré sur la figure II.15, mais plus la convergence est difficile pour le solveur. Afin de représenter convenablement l'état collé à basse amplitude de vibration, une valeur relativement faible est nécessaire, ou la tangente hyperbolique ne reviendrait qu'à ajouter au premier ordre un amortissement visqueux d'une valeur de $\mu N/\varepsilon$. En revanche, pour de grandes amplitudes, la valeur retenue pour ε à bas niveaux rendrait la convergence très lente, sans modifier de façon significative la solution pour autant. Ce paramètre est donc calibré de façon à assurer un bon compromis entre temps de calcul et précision, variant de 10^{-5} à 10^{-3} en fonction de l'amplitude.

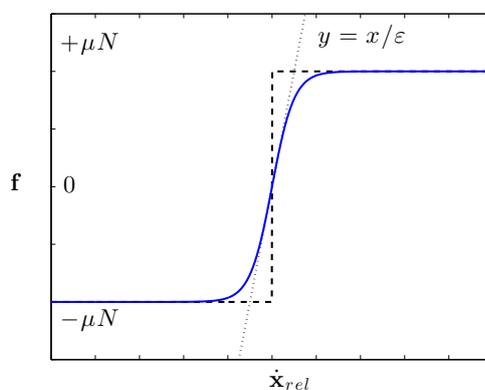


FIGURE II.15 – Loi non-linéaire du modèle phénoménologique (tangente hyperbolique —, fonction signe - - -, linéarisation en zéro ···).

L'un des paramètres les plus importants de la méthode de l'équilibrage harmonique est l'ordre maximal n_h des harmoniques retenus dans l'approximation de la solution (II.12). Une bonne compréhension des non-linéarités présentes dans le système peut permettre un choix judicieux concernant les harmoniques à conserver. Par exemple, il peut être démontré qu'en l'absence de bifurcation, une non-linéarité cubique génère seulement des harmoniques impairs, ce qui permet de réduire considérablement la taille du système algébrique à résoudre en supprimant les harmoniques pairs de la décomposition en série de la solution [52]. Pour une non-linéarité de type frottement sec, l'aspect fondamental régissant la qualité de l'approximation est la précision avec laquelle le mouvement relatif entre les degrés de liberté en contact peut être approché. En d'autres termes, un ordre n_h suffisamment élevé est nécessaire pour rendre compte des transitions entre état collé et état glissant survenant sur une période de vibration lorsque la non-linéarité est activée. Pour illustrer cela, le mouvement relatif entre deux degrés de liberté en contact est donné en figure II.16a pour différentes valeurs de n_h , et pour une même amplitude d'excitation $F = 2N$ suffisamment importante pour introduire des phases de glissement. À mesure que n_h augmente, le déplacement relatif calculé par HBM converge vers la solution déterminée

par intégration temporelle. La précision de l'approximation du déplacement relatif à l'interface affecte directement la convergence de l'amplitude en tête de pale, comme illustré en figure II.16b. À la lumière de ces résultats, un ordre $N_h = 15$ est retenu dans la suite de l'étude.

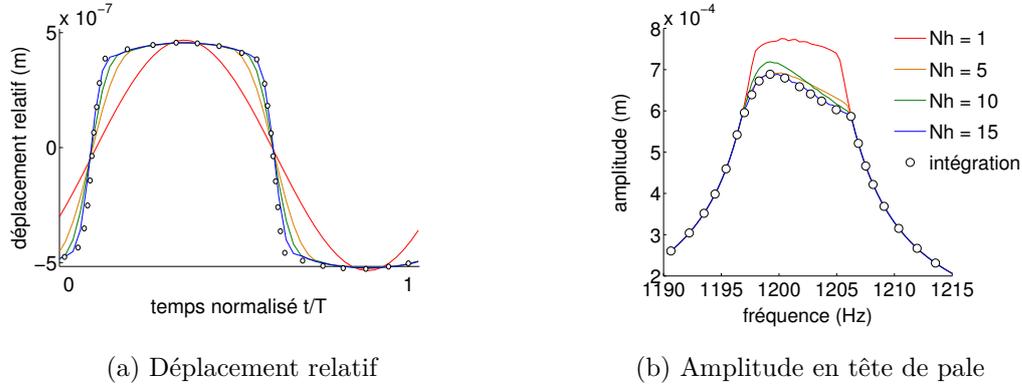


FIGURE II.16 – Convergence de la solution en fonction du nombre d'harmoniques

5.2 Analyse du système accordé

Dans cette section, la réponse forcée du système accordé est calculée par équilibrage harmonique classique, tandis que les modes complexes non-linéaires sont déterminés à l'aide de la méthode présentée en section II.4.3. Cette première étape de l'analyse phénoménologique permet d'illustrer dans quelle mesure le frottement affecte la dynamique de la structure idéalisée, en l'absence d'hétérogénéité structurelle entre les secteurs, et pourra servir de référence pour interpréter les résultats de la section II.5.3 traitant du système désaccordé.

En raison de la nature de l'excitation et de la condition d'appropriation modale discutée en section I.3.2, une seule résonance est observée sur la réponse fréquentielle du système, au voisinage de la fréquence propre du mode dégénéré à un diamètre nodal du système linéaire à interfaces collées. La réponse est illustrée en figure II.17 pour différentes amplitudes d'excitation, $F \in [0.1, 5]N$. La réponse temporelle de chaque tête de pale est également donnée pour différents points de la courbe, et montre que la déformée opérationnelle de la structure est elle aussi une onde tournante se propageant dans la même direction que l'excitation. Un décalage de phase entre l'excitation et la réponse peut être deviné sur ces séries temporelles, variant de 0 à π radians, respectivement en amont et en aval de la résonance, comme il est d'usage de rencontrer en dynamique linéaire. Les deux backbones fréquentielles du mode dégénéré sont également données sur le même graphique en pointillés noirs, parfaitement superposées dans ce cas de figure. On constate que ces backbones tracent le lieu des maxima en amplitude de la réponse forcée, comme il a pu être observé dans d'autres travaux pour des systèmes non-cycliques [68, 88].

Comme nous avons pu l'illustrer sur le modèle académique à 2 degrés de liberté de la section II.4.4, les modes non-linéaires exhibent ici aussi une dépendance vis-à-vis d'un paramètre mesurant l'activation de la non-linéarité, incarné ici par l'amplitude de vibration sur la figure II.18. Pour chacun des modes (mode a et mode b), à basse amplitude (au

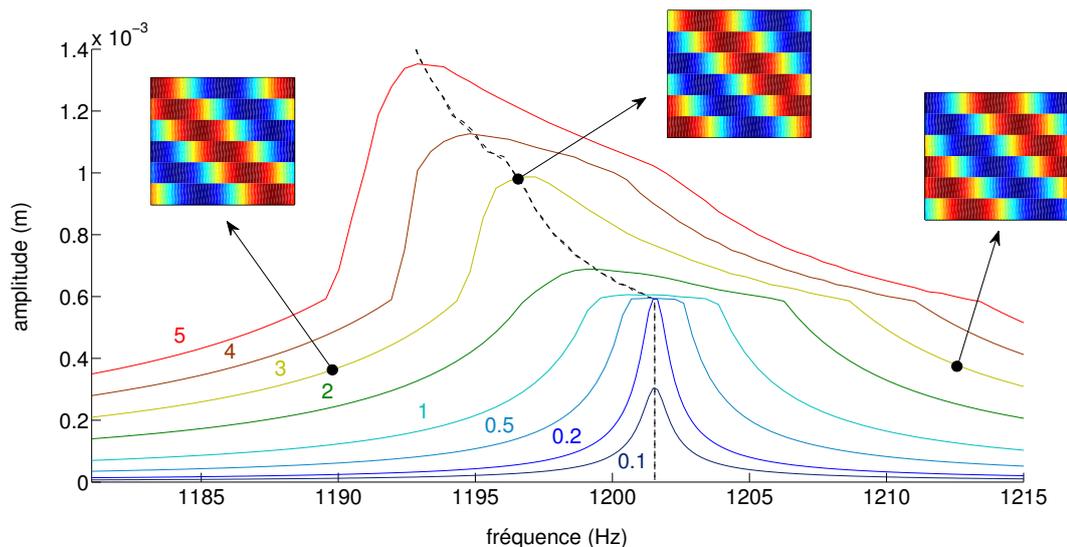


FIGURE II.17 – Réponse forcée et séries temporelles du système accordé pour différentes amplitudes d'excitation

voisinage du point A), la fréquence propre est constante, égale à celle du système linéaire avec interfaces collées. Quand l'amplitude croît suffisamment pour activer la non-linéarité et induire du glissement à l'interface, la fréquence propre se décale asymptotiquement vers la valeur de la fréquence correspondant au système linéaire à interfaces glissantes sans frottement (au voisinage du point B).

L'analyse modale des structures à symétries cycliques du chapitre I nous a permis de montrer l'existence de sous-espaces propres de dimension 2, engendrés par deux vecteurs propres linéairement indépendants. La conséquence directe de ce résultat est que ces vecteurs propres peuvent être recombinaés pour former deux ondes tournantes, l'une dite directe et l'autre dite rétrograde par rapport à la rotation de la roue, ce qui explique que la déformée opérationnelle observée soit une onde tournante pure, dans un cadre linéaire. Les séries temporelles et déformées modales correspondant à ces ondes reconstituées à partir du mode dégénéré à un diamètre nodal sont données en figure II.18, obtenues par reconstruction du déplacement sur une période. On observe ainsi que dans ce cas de figure, il est possible de construire une onde tournante et rétrograde pour toute amplitude de vibration, y compris dans le domaine non-linéaire, car nous avons toujours l'existence d'une valeur propre de multiplicité 2, ce qui étend ici le résultat classique obtenu en dynamique linéaire des structures cycliques. En conséquence, en réponse à une excitation tournante, la déformée opérationnelle du système dans le domaine non-linéaire, même pour une forte activation de la non-linéarité, est toujours une onde tournante, comme on peut l'observer sur la figure II.17. Il est important de garder en tête cette observation lors de l'analyse des résultats correspondant au système désaccordé de la section suivante.

Bien qu'en observant les déformées modales au niveau des têtes de pale, celles-ci ne semblent pas changer avec l'amplitude de vibration, nous savons qu'elles doivent nécessairement varier, car les degrés de liberté en contact sont collés à bas niveau (au voisinage

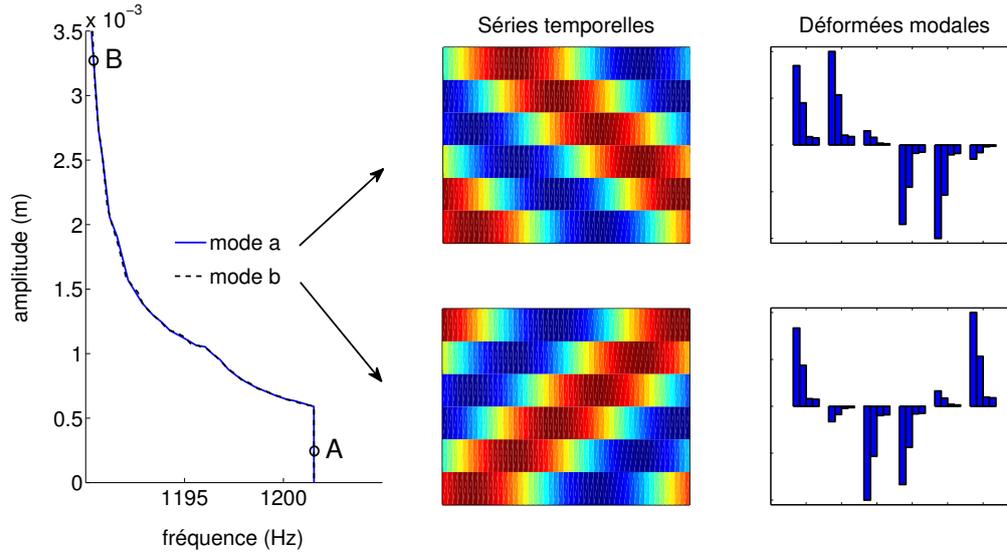


FIGURE II.18 – Backbones fréquentielles (superposées), séries temporelles, et déformées modales du mode non-linéaire dégénéré à un diamètre

du point A sur la figure II.18) et tendent graduellement vers un état continûment glissant à mesure que l'amplitude augmente (au voisinage du point B sur la figure II.18). La figure II.19 montre un zoom sur la déformée de l'interface et confirme bien cette évolution des déformées modales. En conséquence, les sous-espaces de l'espace des configurations correspondant à ces deux mouvements sont courbes, ce qui correspond à des modes non-similaires selon la terminologie employée par Rosenberg [135] (voir figure II.10).

Afin d'illustrer l'évolution de l'amortissement induit par la non-linéarité de frottement, il est possible de tracer la compliance (ou souplesse dynamique) de la réponse du système pour différents niveaux d'activation des effets non-linéaires, comme donnée en figure II.20, ce qui permet également d'observer le glissement de la résonance vers de plus basses fréquences. Le comportement observé sur la figure est relativement standard [86], avec la présence d'un optimum en amortissement, ici au voisinage de $F = 5\text{N}$. Pour tracer ce réseau de courbes, plusieurs calculs de réponse forcée sont requis, pour n'obtenir finalement qu'un aperçu des variations de l'amortissement. Or, nous avons pu voir que le calcul des modes complexes non-linéaires donne directement et avec précision l'évolution de cet amortissement en fonction des autres variables (ω et \mathbf{x}_h). La figure II.21 montre l'évolution de cet amortissement en fonction de l'amplitude de vibration en tête de pale. À basse amplitude (au voisinage du point A), l'amortissement est constant, égal à celui du système linéaire avec interfaces collées. À haute amplitude (au voisinage du point B), β converge asymptotiquement vers la valeur correspondant au système à interfaces sans frottement. Entre ces deux domaines, dans la zone de glissement partiel, on observe distinctement la présence du maximum en amortissement que l'on devinait sur la figure II.20. On observe également la présence d'un maximum local en amont du maximum global, qui s'explique par une modification du mouvement relatif à l'interface. La transition du premier vers le second pic correspond en effet à l'apparition de deux phases collées supplémentaires sur la période de vibration, comme illustré sur la figure II.21.

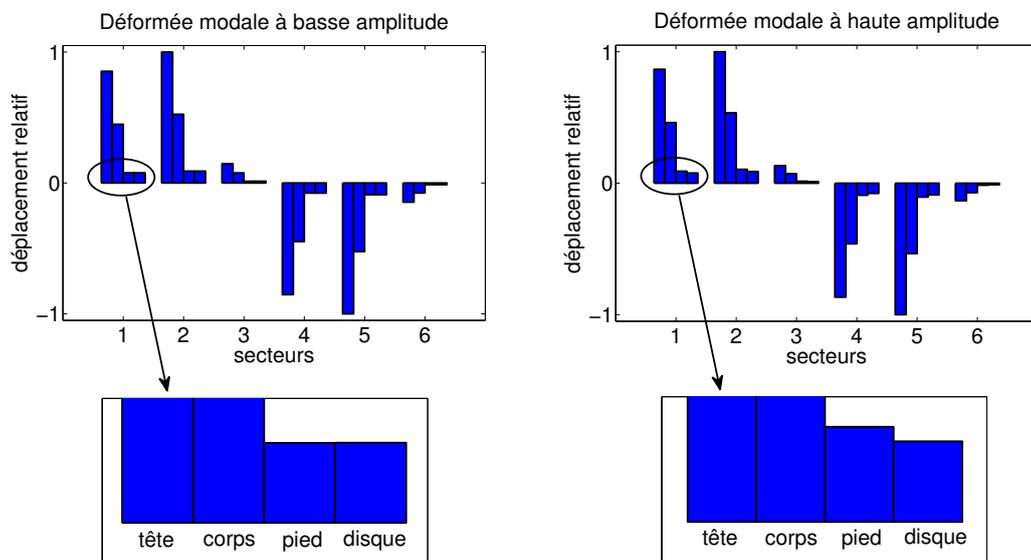


FIGURE II.19 – Zoom sur l'interface d'une déformée modale à basse et haute amplitude (interface collée à gauche, introduction de glissement à droite)

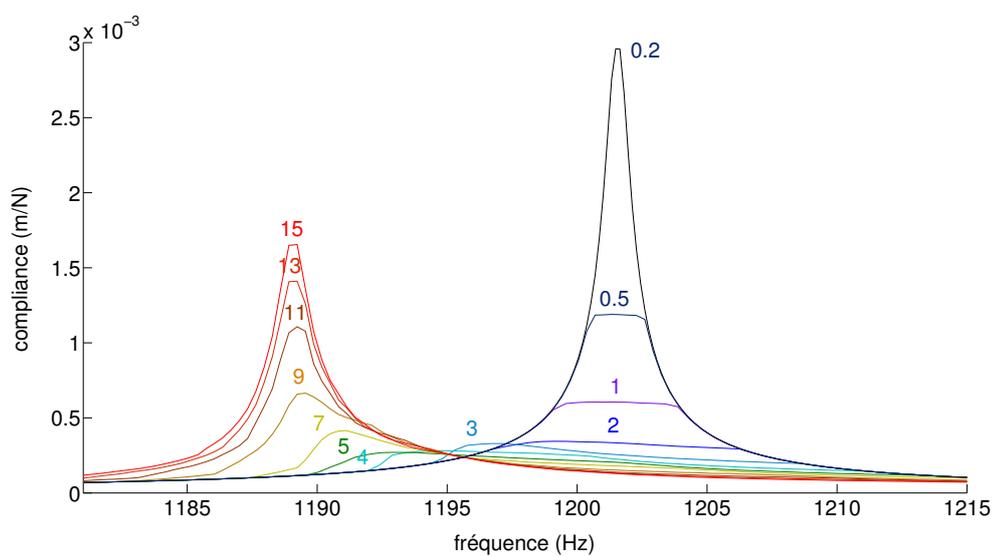


FIGURE II.20 – Compliance du système accordé pour différents niveaux d'excitation

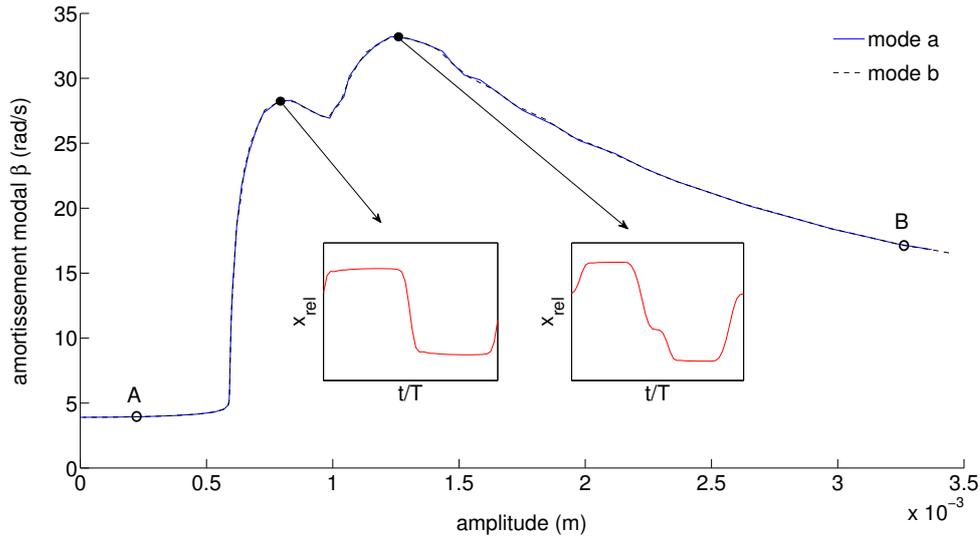


FIGURE II.21 – Backbones (superposées) de l’amortissement modal du mode non-linéaire dégénéré à un diamètre

Le calcul des modes complexes non-linéaires montre ici qu’une prédiction fine du comportement dynamique d’une structure cyclique non-linéaire est possible par équilibrage harmonique amorti, et a permis également de montrer la présence potentielle d’extrema locaux en amortissement pour ce type de système. Dans la section suivante, le même type de simulations est réalisé pour le modèle désaccordé.

5.3 Introduction du désaccordage

Intéressons nous maintenant à l’étude du modèle phénoménologique présenté en section II.5.1 en présence de désaccordage structural, grâce aux méthodes d’équilibrage harmonique classique et amorti présentées respectivement en section II.2 et II.4. Le système est désaccordé par ajout d’une perturbation aléatoire ξ de la raideur des degrés de liberté “tête” et “corps” des pales, tirée dans la distribution continue uniforme $[-10^{-1}, 10^{-1}]$. La valeur de ξ utilisée pour chaque secteur est reportée dans le tableau II.4. La valeur

TABLEAU II.4 – Désaccordage du modèle phénoménologique

Secteur	1	2	3	4	5	6
ξ tête	0.0810	-0.0063	-0.0792	0.0473	-0.0632	-0.0400
ξ corps	0.0351	0.0824	0.0491	0.0124	0.0194	-0.0732

de raideur désaccordée k_m est obtenue par l’expression (II.119), dans laquelle k_t est la valeur de raideur nominale, ce qui résulte en une séparation des fréquences propres du mode double de l’ordre de 2%. Les fréquences propres des systèmes linéaires sous-jacents

désaccordés sont reportées dans le tableau II.5.

$$k_m = k_t (1 + \xi) \quad (\text{II.119})$$

TABLEAU II.5 – Fréquences propres des systèmes linéaires désaccordés sous-jacents

f_i (Hz)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Diamètre(s) originel(s)	0	1	1	2	2	3
Interfaces collées	654	1176	1199	1237	1255	1285
Interfaces glissantes	653	1165	1187	1225	1242	1272

Pour la même excitation tournante que dans l'étude du système accordé, la réponse n'exhibe plus une seule et unique résonance, mais plusieurs pics d'amplitude variable répartis sur la plage de fréquences. Cette réponse peut s'expliquer en s'intéressant aux déformées modales du système désaccordé. En conséquence du désaccordage, chaque couple de modes dégénérés du système linéaire accordé donne naissance à deux modes distincts possédant des fréquences propres différentes. Ainsi, le système ne possède plus de sous-espace propre de dimension 2, engendré par deux vecteurs linéairement indépendants, et il n'est plus possible de reconstruire une onde tournante par combinaison de ces vecteurs propres. En fin de compte, la nature propagative de l'excitation ne peut plus être représentée parfaitement par un mode double, et chaque mode apporte sa contribution dans la réponse, d'où l'apparition de plusieurs résonances. En d'autres termes, la perte de symétrie invalide la condition d'appropriation modale (I.77) de la section I.3.2, qui n'est plus applicable. Une excitation tournante est dorénavant susceptible de fournir un travail sur chacun des modes de la structure désaccordée.

Néanmoins, dans notre cas de figure, la contribution des modes dont la déformée possède un diamètre nodal est malgré tout majoritaire en raison de la forme de l'excitation. Ainsi, sur la figure II.22 montrant la réponse d'une des pales pour différentes amplitudes d'excitation ($F \in [0.1, 5]N$), les deux pics de résonances correspondent bien à la paire de modes issue du mode dégénéré à un diamètre. La série temporelle de la réponse est également donnée en des points spécifiques de la courbe, révélant que loin des pics de résonance, la réponse peut être divisée en une onde tournante (*i.e.* schéma diagonal) et une onde stationnaire. À mesure que la réponse approche une fréquence propre, la contribution tournante diminue graduellement, au profit de la composante stationnaire, pour donner au final une déformée opérationnelle purement stationnaire à la résonance. Ce comportement se retrouve pour tout niveau d'excitation. Sur le même graphique sont tracés les backbones des fréquences propres des deux modes issus du mode dégénéré à un diamètre. On constate à nouveau que pour un pic de résonance donné, la backbone correspondante trace le lieu des maxima en amplitude de la réponse, les faibles écarts observés étant imputable à la contribution non-négligeable du mode voisin, compte tenu de la proximité fréquentielle des deux modes.

En s'intéressant de plus près aux modes complexes non-linéaires du système, il est

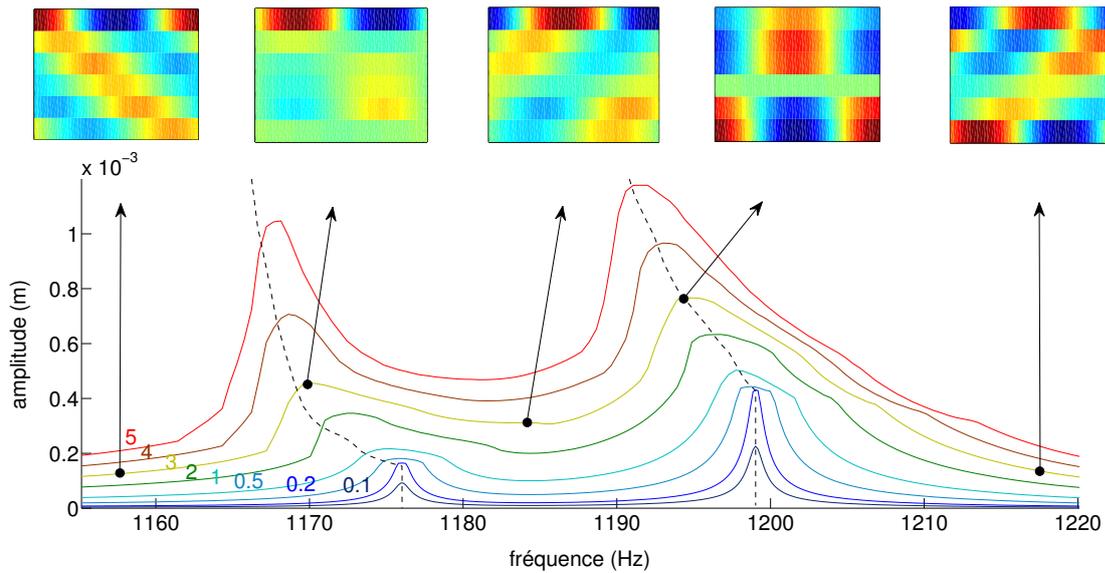


FIGURE II.22 – Réponse forcée et séries temporelles d’une pale du système désaccordé pour différentes amplitudes d’excitation

possible d’approfondir notre compréhension des mécanismes ayant donné les séries temporelles de la réponse forcée. La figure II.23 montre les séries temporelles et déformées modales des deux modes en question. Bien entendu, les séries temporelles correspondent à des ondes stationnaires, comme nous avons pu l’expliquer précédemment. Ces séries temporelles correspondent parfaitement à celles observées à la résonance sur la figure II.22. Ainsi, on peut en déduire que la composante stationnaire de la réponse forcée est générée par le mode le plus proche, et que la composante tournante est un produit dérivé de l’excitation, construit à partir d’autres contributions modales. En raison de la séparation du mode dégénéré induite par le désaccordage, l’excitation tournante cède ainsi une réponse purement stationnaire à la résonance, contrairement au cas accordés linéaire et non-linéaire. Précisons une nouvelle fois que, pour ce cas particulier, même si le caractère propagatif de la réponse est impacté par le désaccordage, les déformées modales résultant du mode dégénéré possèdent toujours un diamètre nodal et en conséquent génère les principaux pics (malgré une forte localisation de la déformée pour l’un des deux).

Pour conclure, la compliance de la réponse est finalement tracée sur la figure II.24 pour une amplitude d’excitation $F \in [0.2, 13]N$, révélant pour chacune des deux résonances un comportement similaire à ce qui pouvait être observé sur le cas accordé en figure II.20. Cependant, notons bien que le niveau d’activation de la non-linéarité (*i.e.* la valeur de F) donnant un amortissement maximal n’est pas nécessairement le même pour les deux résonances. Si les deux pics s’avéraient critiques pour la structure et qu’une calibration de la non-linéarité était envisagée pour optimiser l’amortissement, un compromis serait nécessaire afin de pondérer l’importance relative de chacune des résonances dans le processus d’optimisation. Dans cette optique, le calcul des modes complexes non-linéaires pourrait être très avantageux, en fournissant l’évolution précise de l’amortissement associé à chacun des modes à l’origine des phénomènes de résonance, ici donnée en figure II.25.

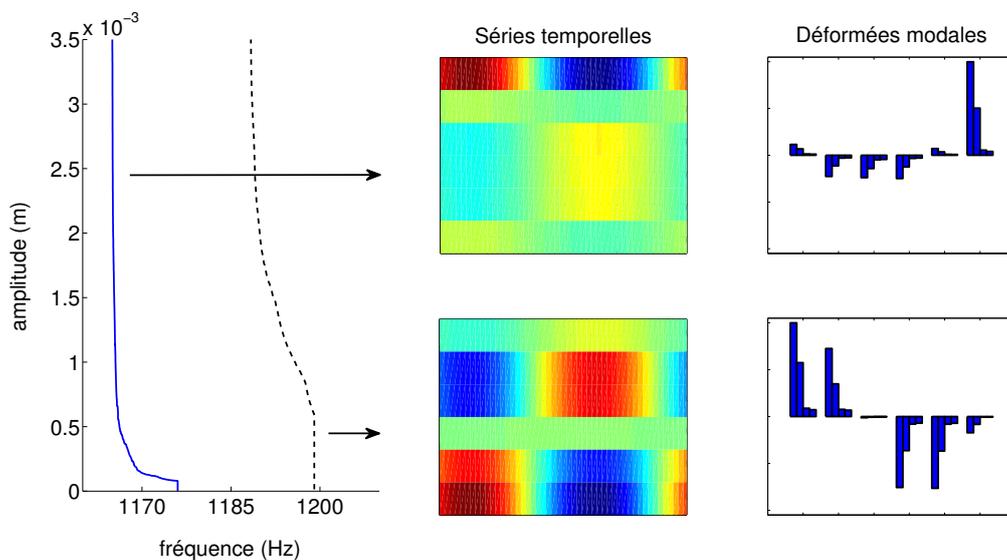


FIGURE II.23 – Backbones fréquentielles, séries temporelles, et déformées modales des deux modes désaccordés issus du mode dégénéré à un diamètre

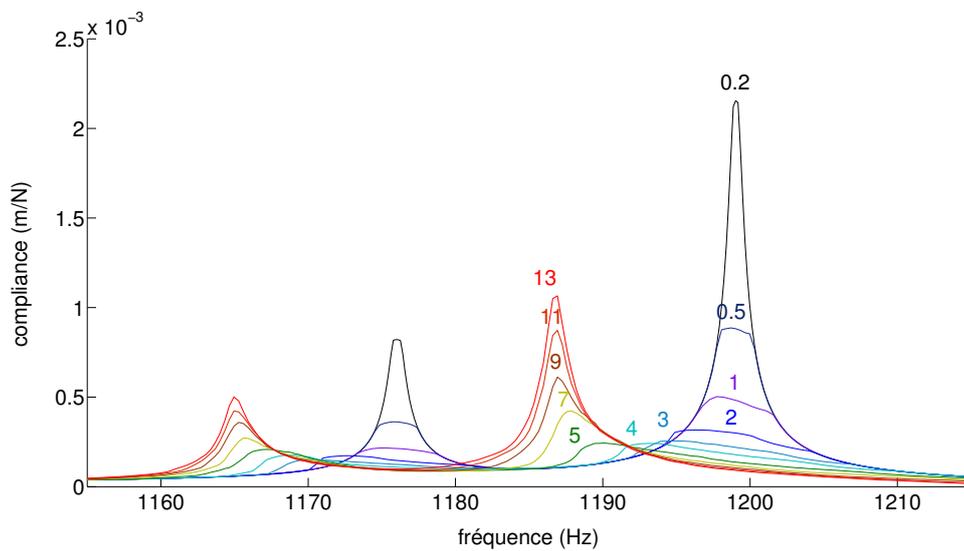


FIGURE II.24 – Compliance en tête de la deuxième pale du système désaccordé, pour différents niveaux d'excitation

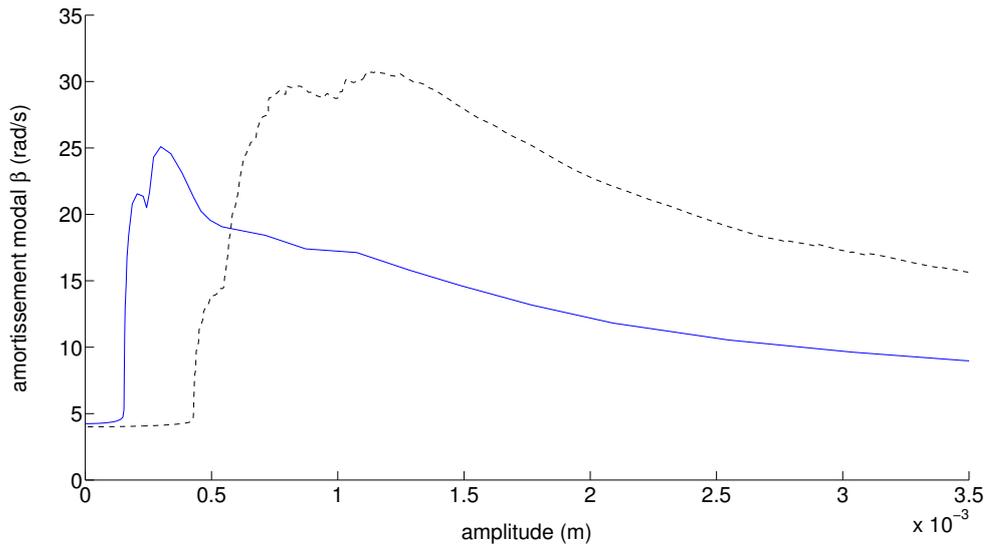


FIGURE II.25 – Backbones en amortissement des modes désaccordés issus du mode dégénéré à un diamètre

Les courbes de réponse forcée de la figure II.22 sont mesurées sur l'une des six pales du modèle. Cependant, contrairement au système accordé dont l'ensemble des pales présenteraient des réponses identiques, les pales du système désaccordé ont des réponses qui peuvent différer significativement les unes des autres. Sur la figure II.26 est tracée la réponse forcée d'une pale différente de celle utilisée pour la figure II.22. Pour cette pale, la première résonance possède un comportement moins standard, puisqu'on y observe le pic en amplitude se scinder en deux pics distincts, avant de fusionner à nouveau lorsque le niveau d'excitation augmente. Le calcul du mode non-linéaire associé et une comparaison des séries temporelles de la déformée opérationnelle et du mode révèlent que les deux pics ne sont en réalité le fruit que d'un seul mode.

Le premier objectif de cette étude phénoménologique était de se familiariser avec la dynamique des systèmes que nous allons traiter, combinant les effets du désaccordage et des non-linéarités de frottement, tout en illustrant les capacités des techniques de calcul présentées en section II.2 et II.4 de ce chapitre. De plus, cette étude a permis d'illustrer la capacité des modes complexes non-linéaires à capturer la dynamique intrinsèque de ces systèmes, capacité employée ici essentiellement pour interpréter les résultats obtenus en réponse forcée. Restreindre les modes non-linéaires à de simples outils d'interprétation serait en revanche très réducteur face à leur réel potentiel. Dans le chapitre III de ce mémoire, nous allons voir comment exploiter la richesse d'information contenue dans ces modes pour en faire de véritables outils permettant de synthétiser la réponse forcée des systèmes non-linéaires.

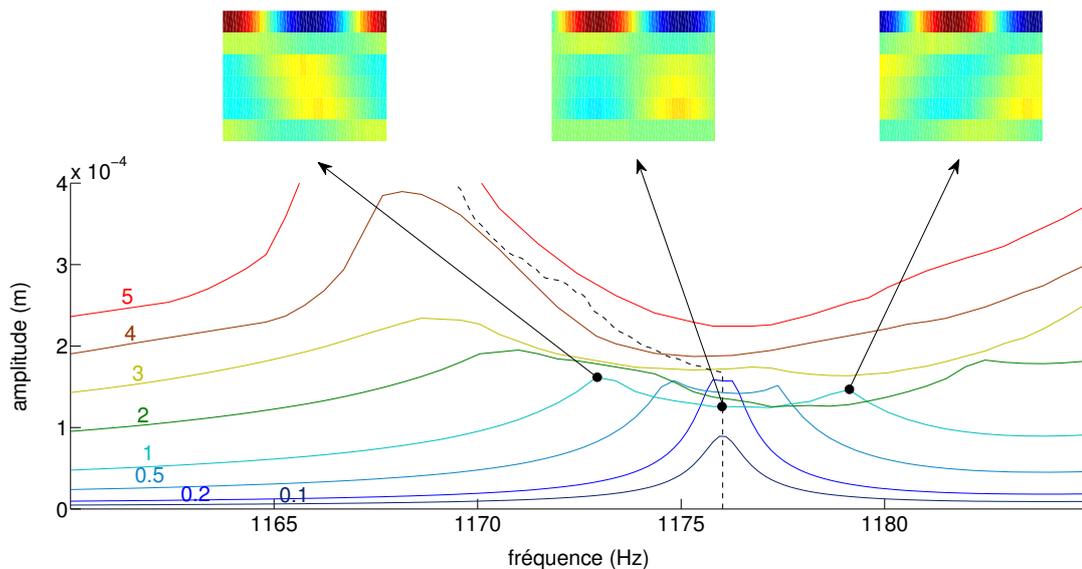


FIGURE II.26 – Réponse forcée et séries temporelles d'une autre pale du système désaccordé pour différentes amplitudes d'excitation

Bilan

Ce chapitre nous a permis de mettre en avant l'intérêt des approches fréquentielles pour aborder l'étude des vibrations dans les structures non-linéaires, offrant à la fois efficacité et polyvalence face à la complexité phénoménologique de ces systèmes. De nombreux travaux ont d'ailleurs démontré le potentiel de ces méthodes appliquées à la dynamique non-linéaire des roues aubagées [84, 86, 120–122]. Cependant, malgré les améliorations proposées en section II.2, ces techniques se heurtent rapidement à la taille des systèmes algébriques générés, dont la résolution peut s'avérer prohibitive dès lors que l'on s'intéresse à des modèles industriels. En particulier, si l'étude de structures cycliques telles qu'une roue aubagée est envisageable à l'heure actuelle avec les ressources d'un bureau d'étude, en imposant des conditions de symétrie permettant la modélisation d'un unique secteur (voir section I.2), l'analyse d'une structure non-linéaire désaccordée, avec modélisation de l'ensemble des secteurs, reste très problématique.

Parmi les premières méthodes qui furent employées pour aborder la thématique du désaccordage, les techniques de sous-structuration présentèrent un intérêt certain, avant d'être supplantées par des approches plus performantes, élaborées spécifiquement pour ce type de structures [17, 19, 40, 42, 93, 97, 181, 182]. Cependant, ces méthodes récentes sont pour la plupart restreintes à l'étude de systèmes linéaires, et il peut sembler intéressant de se tourner à nouveau vers des approches plus classiques, telle que les méthodes de CMS, dont on pourra chercher à enrichir la base de réduction pour aborder plus efficacement les systèmes non-linéaires. Cette stratégie n'est pas complètement nouvelle, puisqu'on la retrouve notamment dans le travail de Apiwattanalungarn [3], qui proposa en 2005 de combiner CMS et modes normaux non-linéaires, calculés avec l'approche de Shaw et Pierre. Mentionnons également les travaux récents de Kuether et Allen sur le sujet [80, 81], qui s'intéressèrent au calcul de modes normaux non-linéaires de systèmes préalablement ré-

duits par sous-structuration, en utilisant la méthode de tir décrite par Peeters *et al.* [116]. Néanmoins, ces travaux furent consacrés à l'étude de systèmes de taille relativement faible, et à non-linéarités polynomiales et conservatives. Pour étendre cette stratégie à des modèles éléments finis industriels et à des non-linéarités de contact, la notion de mode complexe non-linéaire que nous avons introduite présente un intérêt certain. Le chapitre suivant s'intéresse ainsi à l'élaboration d'une nouvelle méthode combinant sous-structuration et modes complexes non-linéaires, ayant pour objectif de répondre à notre problématique de réponse forcée non-linéaire et désaccordée.

Chapitre III

Sous-structuration par modes complexes non-linéaires

Ce chapitre présente une nouvelle méthode de sous-structuration développée pour l'étude de systèmes non-linéaires et dissipatifs. La technique proposée exploite la notion de mode complexe non-linéaire pour construire une base de réduction riche en information, et bénéficie ainsi de la polyvalence des approches fréquentielles pour traiter tout type de non-linéarités. Une méthode de synthèse modale non-linéaire est d'abord présentée, puis combinée au concept de sous-structuration pour aboutir à la méthode proposée. Cette méthode est testée et validée sur différents modèles de roues aubagées désaccordées, et révèle un potentiel très intéressant pour étudier ce type de structures.

Sommaire

1	Rappel sur les méthodes de sous-structuration	96
1.1	Concept de base et généralités	96
1.2	Sous-structuration et méthode de Galerkin	96
1.3	Principales méthodes en dynamique des structures	99
2	Synthèse modale non-linéaire	104
2.1	Bref historique	104
2.2	Équations générales	104
2.3	Performances et limitations	108
3	CNCMS : Une nouvelle méthode de sous-structuration non-linéaire	110
3.1	Motivation et idée directrice	110
3.2	Équations générales	111
3.3	Matrice jacobienne semi-analytique	114
4	Évaluation de la méthode sur modèle phénoménologique	117
4.1	Application sur modèles accordé et désaccordé	117
4.2	Performances de la méthode et domaine de validité	122
4.3	Étude statistique du désaccordage en non-linéaire	124
5	Validation de la méthode sur modèle éléments finis	125
5.1	Présentation du modèle	127
5.2	Résultats de simulations	127
	Bilan	132

1 Rappel sur les méthodes de sous-structuration

La méthode de sous-structuration non-linéaire que nous avons développée s'inspire grandement des méthodes classiques de sous-structuration, bien connues du monde de la recherche et implémentées dans la plupart des codes commerciaux de calcul par éléments finis. Cette section rappelle les principes de base de cette classe particulière de méthodes de réduction, et liste quelques unes des méthodes les plus répandues.

1.1 Concept de base et généralités

La démocratisation de la méthode des éléments finis dans le monde de l'industrie a naturellement menée à la création de modèles mathématiques de taille de plus en plus importante, exploitant au maximum les capacités des ordinateurs les plus modernes. Cependant, malgré la croissance exponentielle du potentiel de calcul à disposition des ingénieurs, le nombre de degrés de liberté du système final ne permet pas systématiquement une résolution dans des délais raisonnables vis-à-vis du processus de conception.

Afin de contourner ce verrou technologique sans pour autant revoir à la baisse la finesse du maillage des modèles éléments finis, et donc la précision des simulations, des méthodes de réduction s'inspirant des techniques de synthèse modale ont vu le jour. L'idée directrice de ces méthodes est de diviser la structure principale en plusieurs entités, appelées sous-structures ou composants, et d'approcher le champ solution de chaque sous-structure sur la base de ses modes propres, complétée de vecteurs permettant l'assemblage pour reconstruire la solution sur la structure principale. Ces techniques sont généralement connues sous leur acronyme anglais CMS, pour *Component Mode Synthesis*.

L'avantage de ces techniques est double. Tout d'abord, la projection du problème relatif à chaque sous-structure dans la base de ses modes propres permet une réduction forte du système, troquant généralement des milliers de degrés de liberté contre quelques centaines de coordonnées modales. En outre, il se trouve que l'analyse modale expérimentale d'une structure constituée d'un assemblage de plusieurs pièces est en générale très complexe de par sa taille, ainsi que par le biais imputable entre autres aux dispersions issues de l'assemblage des pièces. En revanche, la caractérisation modale des composants étudiés séparément est beaucoup plus facile, et permet un recalage de modèle numérique plus fidèle en amont de la résolution.

1.2 Sous-structuration et méthode de Galerkin

Les méthodes de sous-structuration que nous allons présenter appartiennent à la famille des méthodes de réduction par résidus pondérés, et plus particulièrement à la famille des méthodes de Galerkin. Nous avons déjà fait appel à cette méthode dans les chapitres précédents de ce mémoire pour discrétiser les systèmes d'équations rencontrés, vis-à-vis d'une ou plusieurs variables. Le passage de la formulation forte à la formulation faible du problème élastodynamique du chapitre I est ainsi un cas de discrétisation spatiale typique exploitant cette méthode, et détaillé dans bon nombre d'ouvrages de référence traitant des éléments finis [6, 7, 33, 186]. La méthode de l'équilibrage harmonique du chapitre II est également une application directe de la méthode de Galerkin employée à la discrétisation

d'un problème, mais cette fois-ci vis-à-vis de la variable temporelle. La discrétisation d'un problème n'est pas, cependant, l'unique intérêt de cette approche. Elle permet également de réduire la taille d'un système préalablement discrétisé, par projection du modèle initial dans un sous-espace vectoriel de l'espace dans lequel évoluent les solutions. C'est dans ce cadre que s'inscrivent les méthodes classiques de sous-structuration. Avant de lister quelques unes des méthodes les plus répandues dont nous allons nous inspirer, nous présentons ci-après une brève illustration de la méthode de Galerkin appliquée à ce type de problèmes.

Quel que soit l'application visée, la méthode de Galerkin se décompose toujours en deux étapes fondamentales. Une étape dite de *réduction*, et une dite d'*orthogonalisation*. Considérons un système dynamique classique, discret et ramené sous forme d'état, dont le comportement est régi par un ensemble d'équations différentielles ordinaires pouvant se mettre sous la forme suivante

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) \quad (\text{III.1})$$

Ce modèle mathématique est appelé *modèle global* du système. En règle général il n'est pas possible de trouver une solution exacte $\mathbf{y}(t)$ de ce modèle. En revanche, il est possible de rechercher une approximation $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ dans un sous-espace \mathcal{V} de l'espace de travail initial \mathcal{U} , engendré par une famille libre d'éléments de matrice représentative \mathbf{V} dans la base canonique de \mathcal{U} . Il s'agit de l'étape de réduction, traduite par

$$\mathbf{y}(t) \approx \tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{V}\mathbf{q}(t) \quad (\text{III.2})$$

Les nouvelles inconnues sont alors les coordonnées généralisées $\mathbf{q}(t)$ de la solution approchée dans la base \mathbf{V} . La substitution de cette expression dans le système d'équations initial induit l'apparition d'un terme résiduel $\mathbf{r}(t)$, dont l'amplitude traduit la qualité de l'approximation.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{V}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{V}\mathbf{q}(t), t) + \mathbf{r}(t) \quad (\text{III.3})$$

La deuxième étape de la méthode consiste à rechercher le vecteur des coordonnées généralisées qui rend ce résidu orthogonal à un sous-espace \mathcal{W} , engendré par une famille libre d'éléments de matrice représentative \mathbf{W} dans la base canonique de \mathcal{U} , selon un produit scalaire euclidien ou hermitien $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Il s'agit de l'étape d'orthogonalisation. En utilisant le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n , cette condition peut s'écrire

$$\langle \mathbf{r}(t) | \mathbf{W} \rangle = \mathbf{W}^T \mathbf{r}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{III.4})$$

En prémultipliant le système d'équations différentielles par \mathbf{W}^T , cette condition d'orthogonalité mène au système suivant,

$$\mathbf{W}^T \frac{d}{dt} \mathbf{V} \mathbf{q}(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{f}(\mathbf{V} \mathbf{q}(t), t) \quad (\text{III.5})$$

En supposant que la base \mathbf{V} est indépendante du temps, ce qui est le cas dans le cadre des méthodes de sous-structuration classiques, et que la matrice $\mathbf{W}^T \mathbf{V}$ est inversible, on obtient le système d'équations constituant le *modèle réduit* du modèle global, régissant l'évolution temporelle des coordonnées généralisées,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{q}(t) = (\mathbf{W}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{f}(\mathbf{V} \mathbf{q}(t), t) \quad (\text{III.6})$$

Compte tenu de l'expression (III.2), le *modèle global équivalent* au modèle réduit est obtenu en prémultipliant ce dernier par la matrice \mathbf{V} ,

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{y}}(t) = \left(\mathbf{V}(\mathbf{W}^T\mathbf{V})^{-1}\mathbf{W}^T\right)\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{y}}(t), t) \quad (\text{III.7})$$

Le terme $\mathbf{\Pi} = \mathbf{V}(\mathbf{W}^T\mathbf{V})^{-1}\mathbf{W}^T$ est une matrice représentative du projecteur¹ oblique sur \mathcal{V} parallèlement à \mathcal{W}^\perp . Les deux étapes de la méthode de Galerkinge, à savoir l'étape de réduction et l'étape d'orthogonalisation, résultent ainsi en la résolution d'un modèle global équivalent au modèle initial après projection de $\mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t)$ sur le sous-espace \mathcal{V} parallèlement à \mathcal{W}^\perp . La méthode de Galerkinge est ainsi qualifiée de technique de réduction de modèle par projection. Lorsque les sous-espaces \mathcal{V} et \mathcal{W} sont différents, on parle généralement de méthode de Petrov-Galerkinge, la méthode de Galerkinge dans son acception classique sous-entendant l'égalité de \mathcal{V} et \mathcal{W} . Il est intéressant de noter que le choix de bases \mathbf{V}' et \mathbf{W}' différentes de \mathbf{V} et \mathbf{W} mais générant les mêmes sous-espaces mène à la même solution approchée [2].

Si l'on s'intéresse à l'erreur commise en résolvant le modèle réduit plutôt que le modèle global, dans le cadre d'une méthode de Galerkinge classique, il est possible de montrer qu'elle se décompose en une erreur $\varepsilon_{\mathbf{V}^\perp}(t)$ orthogonale à \mathbf{V} , et une erreur $\varepsilon_{\mathbf{V}}(t)$ parallèle à \mathbf{V} , illustrées en figure III.1. L'erreur orthogonale traduit le fait que la trajectoire de la solution exacte n'est pas strictement incluse dans \mathcal{V} , et l'erreur parallèle résulte du fait que le modèle global équivalent au modèle réduit diffère du modèle global initial, à travers le projecteur $\mathbf{\Pi}$.

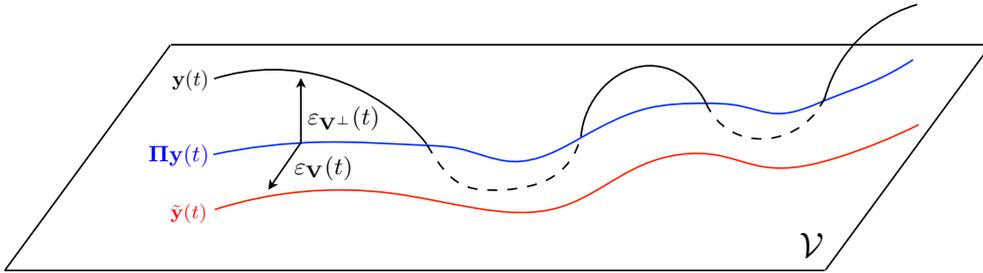


FIGURE III.1 – Erreur induite par la méthode de Galerkinge (adaptée de [2, 130])

Afin de faire le lien entre les différents points abordés dans cette section et les méthodes de sous-structuration rencontrées en dynamique des structures, il est intéressant de remarquer que la formulation faible du problème élastodynamique sous sa forme discrète (I.48) peut se mettre sous la forme d'état (III.1) avec

$$\mathbf{y}(t) = \left\{ \mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T \right\}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{c}(t)) \quad (\text{III.8})$$

les matrices de raideur et de masse généralisées \mathbf{A} et \mathbf{B} , et le vecteur des efforts généralisés

1. Un projecteur π est une application linéaire vérifiant $\pi^2 = \pi$.

$\mathbf{c}(t)$, étant définis à partir des données structurelles initiales du problème discrétisé

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{S} \\ \mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{S} & \mathbf{C} + \mathbf{G} \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{pmatrix} \quad (\text{III.10})$$

$$\mathbf{c}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Finalement, en choisissant comme sous-espaces de réduction \mathcal{V} et d'orthogonalisation \mathcal{W} les sous-espaces engendrés par les familles libres de matrices représentatives $\tilde{\mathbf{V}}$ et $\tilde{\mathbf{W}}$, d'expressions

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{pmatrix} \quad (\text{III.12})$$

et en posant $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q}$, la méthode de Galerkin, dans le cadre de la réduction de modèles discrets que nous venons d'illustrer, mène à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 2, dont la forme canonique s'écrit

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{W}^T (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{W}^T (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{S}) \mathbf{V} \mathbf{q}(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{g}(t) \quad (\text{III.13})$$

Les différentes méthodes de sous-structuration que nous allons voir sont issues de l'application de la méthode de Galerkin dans son acception classique, les bases de réduction \mathbf{V} et d'orthogonalisation \mathbf{W} seront donc prises identiques. La technique de sous-structuration considérée est alors intégralement caractérisée par la nature de sa base de réduction.

1.3 Principales méthodes en dynamique des structures

Dans le cadre des techniques de sous-structuration en mécanique, le vecteur des degrés de liberté $\mathbf{x}(t)$ du système est partitionné en degrés de liberté maîtres $\mathbf{x}_b(t)$, listant les degrés de liberté situés sur les frontières de la sous-structure considérée, et en degrés de liberté esclaves $\mathbf{x}_i(t)$. Lorsque ces méthodes sont employées sur des modèles non-linéaires, les degrés de liberté affectés par les non-linéarités sont généralement retenus dans la partition des degrés maîtres, ce qui est susceptible d'avoir un impact sur le potentiel de réduction. Ce constat est d'ailleurs l'une des motivations ayant mené au développement de la technique de sous-structuration non-linéaire que nous proposons en section III.3. Dans la suite de cette section, quelques unes des techniques les plus répandues en dynamique des structures sont listées, en explicitant les bases de réduction \mathbf{V} associées à chacune.

1.3.1 Méthode de Guyan

La philosophie de la méthode de Guyan [55] est de négliger les efforts d'inerties associés aux degrés de liberté esclaves face aux efforts d'inerties des degrés de liberté maîtres. Pour cela, on partitionne la matrice de raideur de la façon suivante,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix} \quad (\text{III.14})$$

faisant apparaître explicitement les blocs associés à chacune des deux partitions. L'hypothèse de Guyan conduit alors à résoudre le problème statique formé par les blocs supérieurs, liant ainsi linéairement les degrés esclaves aux degrés maîtres,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i(t) &= (-\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib})\mathbf{x}_b(t) \\ &= \mathbf{\Psi}\mathbf{x}_b(t)\end{aligned}\quad (\text{III.15})$$

Les vecteurs contenus dans la matrice $\mathbf{\Psi}$ sont communément appelés *modes statiques de liaison*. La matrice représentative de la base du sous-espace de réduction est alors donnée par

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (\text{III.16})$$

et les coordonnées généralisées $\mathbf{q}(t)$ du modèle réduit de l'équation (III.13) ne sont autres que les degrés de liberté maîtres $\mathbf{x}_b(t)$ du modèle initial. En raison de l'hypothèse faite pour exprimer la relation entre les degrés de liberté maîtres et les degrés de liberté esclaves, cette méthode est aussi appelée *condensation statique de Guyan*. En pratique, cette hypothèse est très restrictive et on préfère généralement des méthodes basées sur des approches par synthèse modale, incorporant des aspects dynamiques dans la base de réduction, telles que les méthodes de Craig-Bampton et de MacNeal.

1.3.2 Méthode de Craig-Bampton

La méthode de Craig-Bampton [5] est une méthode de sous-structuration très répandue et dont les performances et la robustesse sont aujourd'hui reconnues dans le monde de la recherche et de l'industrie. Les matrices de masse et de raideur sont partitionnées de façon à faire apparaître explicitement les blocs associés aux degrés de liberté maîtres et ceux associés aux degrés de liberté esclaves,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ib} \\ \mathbf{M}_{bi} & \mathbf{M}_{bb} \end{pmatrix} \quad (\text{III.17})$$

La base de réduction de chaque sous-structure est ensuite formée d'un ensemble de vecteurs propres linéaires calculés pour des interfaces fixes, en encastrant les degrés maîtres, complété d'un ensemble de modes statiques de liaison, permettant de prendre en compte l'effet du mouvement des interfaces sur les degrés internes. Les modes linéaires à interfaces fixes sont extraits du problème aux valeurs propres généralisé suivant,

$$(\mathbf{K}_{ii} - \omega^2\mathbf{M}_{ii})\mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \quad (\text{III.18})$$

et les modes statiques de liaison sont calculés en imposant successivement un déplacement unitaire sur chacun des degrés de frontières, ce qui revient à calculer

$$\mathbf{\Psi} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib} \quad (\text{III.19})$$

Dans la base canonique de \mathbb{R}^n , la matrice représentative de la base du sous-espace de réduction est alors donnée par

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (\text{III.20})$$

En raison de l'expression des modes statiques de liaison $\mathbf{\Psi}$, on démontre aisément [45] que la projection d'une matrice de raideur symétrique à l'aide de la matrice \mathbf{V} ainsi définie

conduit à une matrice de raideur réduite diagonale par blocs. En l'absence d'amortissement, le couplage entre les coordonnées modales associées aux modes internes Φ et les degrés maîtres $\mathbf{x}_b(t)$ se fait donc uniquement à travers la matrice de masse réduite.

Les vecteurs propres retenus dans la matrice Φ sont généralement sélectionnés en utilisant un critère fréquentiel, ou bien en se basant sur la masse modale effective correspondante [45]. Il est intéressant de remarquer que la méthode de Craig-Bampton est strictement équivalente à une condensation statique de Guyan sur les degrés de frontières si aucun mode linéaire à interfaces fixes n'est retenue. Cette méthode de sous-structuration est relativement bien adaptée aux systèmes présentant des non-linéarités localisées, car la taille du système réduit dépend alors essentiellement de la taille des frontières de jonctions entre les sous-structures.

1.3.3 Méthode de MacNeal

Par opposition à la méthode de Craig-Bampton, qui est généralement qualifiée de CMS à interfaces fixes, la méthode de MacNeal [96] fait partie des CMS à interfaces libres, utilisant un sous-espace de réduction engendré par les vecteurs propres des modes libres de la sous-structure. On détermine ainsi, dans un premier temps, les modes propres de chaque sous-structure en résolvant le problème suivant,

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \tilde{\Phi} = \mathbf{0} \quad (\text{III.21})$$

Afin de prendre en compte l'influence des sous-structures adjacentes, la base ainsi calculée est complétée de modes d'attaches $\tilde{\Psi}$, définis comme étant la réponse de la sous-structure à un ensemble d'efforts unitaires, regroupés dans la matrice $\tilde{\mathbf{F}}$, imposés successivement sur chaque degrés de liberté de frontières.

$$\tilde{\Psi} = \mathbf{K}^{-1} \tilde{\mathbf{F}} \quad (\text{III.22})$$

Dans le cas général où la structure possède n_r modes de corps rigide, il est nécessaire de rendre le système isostatique en imposant préalablement n_r contraintes, pour former une matrice de souplesse \mathbf{G}_i . La contribution de $\tilde{\mathbf{F}}$ sur les modes de corps rigides doit ensuite être soustraite [9, 61], ce qui est effectué en projetant \mathbf{G}_i sur le sous-espace engendré par la matrice

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{M} \Phi_r (\Phi_r^T \mathbf{M} \Phi_r)^{-1} \Phi_r^T) \quad (\text{III.23})$$

avec Φ_r la matrice regroupant les vecteurs propres associés aux modes de corps rigide. On définit alors une nouvelle matrice de souplesse,

$$\mathbf{G}_e = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_i \mathbf{P} \quad (\text{III.24})$$

La matrice \mathbf{G}_e contient également les contributions statiques des N modes libres retenus dans la base $\tilde{\Phi}$. Afin d'éviter la redondance d'information, il est possible de retirer la contribution de ces modes en soustrayant leur contributions statiques dans le développement modal de la matrice. Pour cela, on décompose dans un premier temps la matrice \mathbf{G}_e sur la base des modes propres de la sous-structure, en faisant apparaître explicitement les termes associés aux modes retenus et non retenus,

$$\mathbf{G}_e = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i \varphi_i^T}{\omega_i^2} + \sum_{i=N+1}^n \frac{\varphi_i \varphi_i^T}{\omega_i^2} \quad (\text{III.25})$$

On en déduit la définition de la matrice de souplesse recherchée, qui ne retient que les contributions statiques des modes non retenus,

$$\mathbf{G} = \sum_{i=N+1}^n \frac{\varphi_i \varphi_i^T}{\omega_i^2} \quad (\text{III.26})$$

Cette expression est peu utilisée en pratique, car elle nécessite de calculer initialement l'intégralité des modes propres du système, ce qui est susceptible de représenter un coût prohibitif pour des structures industrielles pouvant posséder plusieurs milliers de degrés de liberté. Pour évaluer la matrice, il est plus facile de procéder par simple soustraction à partir de \mathbf{G}_e et des modes retenus,

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_e - \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i \varphi_i^T}{\omega_i^2} \quad (\text{III.27})$$

En partitionnant cette matrice de souplesse entre degrés internes et degrés de frontières, et étant donné que seuls les degrés de frontières sont chargés lors du calcul des modes d'attaches, on obtient la relation liant les deux partitions,

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{\Psi} \mathbf{x}_b(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{\Psi} = \mathbf{G}_{ib} \mathbf{G}_{bb}^{-1} \quad (\text{III.28})$$

Enfin, afin de garantir la compatibilité du déplacement aux interfaces, il est nécessaire d'apporter une correction aux vecteurs propres des modes libres pour annuler les déplacements associés. Cette matrice corrigée est définie de la façon suivante,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Phi}}_i - \mathbf{\Psi} \tilde{\mathbf{\Phi}}_b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{III.29})$$

avec $\tilde{\mathbf{\Phi}}_i$ et $\tilde{\mathbf{\Phi}}_b$ les partitions de $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ correspondant respectivement aux degrés de liberté internes et de frontière. Dans la base canonique de \mathbb{R}^n , la matrice représentative de la base du sous-espace de réduction est alors donnée par

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (\text{III.30})$$

On retrouve ici la topologie particulière de la matrice obtenue pour la méthode de Craig-Bampton, donnée par l'équation (III.20), avec un bloc $\mathbf{\Phi}$ pilotant la dynamique interne, et un bloc $\mathbf{\Psi}$ couplant les sous-structures entre elles. Néanmoins, contrairement à la méthode de Craig-Bampton, la projection de la matrice de raideur par l'intermédiaire de la matrice \mathbf{V} ne conduit pas ici à une matrice réduite diagonale par blocs [45].

Bien que plus complexe à mettre en œuvre, la méthode de MacNeal présente un avantage non-négligeable face à la méthode de Craig-Bampton lorsque l'on cherche à recalculer un modèle numérique à l'aide de données mesurées en essais. En effet, d'un point de vue expérimental, il est souvent plus facile de recréer des conditions aux limites libre-libre pour le composant que des conditions d'encastrement, dont l'imperfection peut avoir un impact fort sur les mesures, notamment en ce qui concerne l'amortissement. Néanmoins, les opérations relatives à la matrice de souplesse résiduelle \mathbf{G} peuvent représenter un coût non-négligeable, qu'il convient de prendre en considération. Lorsqu'aucun recalage de modèle n'est nécessaire, bon nombre d'auteurs lui préfère ainsi la méthode de Craig-Bampton pour son efficacité, sa simplicité, et sa robustesse.

1.3.4 Double synthèse modale

L'un des inconvénients majeurs de la méthode de Craig-Bampton est que celle-ci est susceptible de mener à un modèle réduit conservant un très grand nombre de coordonnées physiques correspondant aux frontières entre les sous-structures. Pour pallier cela, postulant sur le fait qu'un excès d'information est conservé par le modèle, différentes méthodes ont été développées afin de filtrer la dynamique des interfaces et ne conserver que le strict nécessaire en fonction des besoins du calcul. Ainsi, on retrouve dans la littérature des approches se basant sur une condensation statique de Guyan des interfaces, ne sélectionnant qu'une sous-partition des degrés de frontière comme degrés maîtres et utilisant la matrice de réduction de l'équation (III.16). Le filtrage peut également être fait en mesurant la corrélation des modes statiques de liaison, et en ne conservant que les plus pertinents au sens de la mesure utilisée [124]. Une troisième méthode consiste à réduire les frontières sur la base des modes propres correspondant à la projection des matrices de masse et de raideur sur le sous-espace engendré par les modes statiques. Pour cela, on assemble dans un premier temps les N super-éléments obtenus par la méthode de Craig-Bampton pour former les matrices réduites de masse et de raideur du système complet,

$$\mathbf{K}_{CB} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_c^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{K}_c^N & \\ & & & \mathbf{K}_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{CB} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_c^1 & & & \mathbf{M}_{cs}^1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \mathbf{M}_c^N & \mathbf{M}_{cs}^N \\ \mathbf{M}_{sc}^1 & \cdots & \mathbf{M}_{sc}^N & \mathbf{M}_s \end{pmatrix} \quad (\text{III.31})$$

Les sous-blocs correspondant aux frontières sont ensuite extraits des matrices réduites, et l'on résout le problème aux valeurs propres généralisé associé,

$$(\mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s) \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{III.32})$$

La réduction des interfaces est effectuée en sélectionnant les vecteurs propres du problème (III.32) qui seront utilisés comme base de réduction pour les degrés de frontières. Cette sélection peut être faite sur simple critère fréquentiel en ne conservant que les modes dont les fréquences sont du même ordre que celles des modes à interfaces fixes conservés pour la création des super-éléments [29]. Une fois la sélection faite, les interfaces des matrices réduites sont projetées sur cette nouvelle base à l'aide de la matrice de transformation

$$\mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{I}^N & \\ & & & \mathbf{\Gamma} \end{pmatrix} \quad (\text{III.33})$$

où $\mathbf{\Gamma}$ est la matrice représentative de la base de réduction des interfaces, constituée des vecteurs propres du problème (III.32) ordonnés en colonnes après filtrage. Ces nouveaux modes sont appelés *modes de branches* dans les travaux de Jézéquel [63] et Besset [9], ou *modes d'interface* dans les travaux de Tran [160, 161], qui démontra leur fort potentiel dans l'étude de structures cycliques telles que les roues aubagées. Dans la littérature, l'utilisation de cette seconde réduction sur un modèle préalablement réduit par sous-structuration est parfois appelée *double synthèse modale*. Dans la suite de notre travail, c'est cette solution que nous avons retenue pour réduire les degrés de frontières de notre modèle réduit.

Outre les méthodes que nous avons pu présenter succinctement dans cette section, mentionnons également la méthode à interfaces fixes de Benfield-Hruda [8], similaire à celle de Craig-Bampton mais qui présente un potentiel de réduction théoriquement plus fort, ou encore la méthode à interfaces libres de Craig-Chang [28]. Davantage d’information sur ces méthodes pourra être trouvée dans le mémoire de thèse de Philippe [124].

2 Synthèse modale non-linéaire

Les techniques classiques de synthèses modales ou superpositions modales sont des méthodes de Galerkin adaptées à la résolution des systèmes dynamiques linéaires, très répandues et implémentées dans la plupart des codes de calcul commerciaux. De nombreux ouvrages en présentent les concepts de base [44, 47], et une explication plus ou moins approfondie de leur implémentation peut être trouvée dans les manuels de références des logiciels de simulation numérique. Ces techniques exploitent les modes propres du système pour en simplifier la résolution, grâce à l’orthogonalité des vecteurs propres par rapport aux matrices de masse et de raideur. Bien que la notion de mode non-linéaire puisse être vue comme une extension de la notion de mode linéaire, cette propriété d’orthogonalité n’est en revanche plus garantie, remettant en question l’intérêt de cette approche pour les systèmes non-linéaires. Néanmoins, nous allons voir que le principe de synthèse modale peut être lui aussi généralisé de façon intéressante.

2.1 Bref historique

L’un des travaux faisant références dans le domaine de la synthèse modale non-linéaire est l’article de Szemplinska [153] datant de 1979, présentant une méthode du “mode résonant” modifié, utilisant un mode non-linéaire pour synthétiser la réponse du système. D’autres travaux ont depuis lors montré la faisabilité d’une telle approche, notamment en exploitant des données expérimentales comme a pu le montrer Gibert [46]. Dans leur article de 2009 introduisant la notion de mode complexe non-linéaire, Laxalde et Thouverez [88] abordèrent cette problématique de synthèse modale non-linéaire à l’aide des résultats obtenus par leur méthode d’équilibrage harmonique modifiée (voir section II.4), en réalisant la synthèse de la réponse forcée d’un modèle de pale industrielle possédant des non-linéarités de frottement en pied d’aube. L’article de Krack *et al.* [78] de 2013 montre qu’une approche par synthèse modale utilisant les modes complexes non-linéaires est également prometteuse pour l’étude de structures cycliques.

La méthode de synthèse modale non-linéaire utilisée dans [88] et [78] est un concept clé de la méthode de sous-structuration non-linéaire que nous allons proposer. C’est pourquoi, dans un premier temps, les équations fondamentales de cette technique sont rappelées en section III.2.2, et étendues à un cadre multimodal permettant de conserver plusieurs modes dans la base de réduction sans supposer leur orthogonalité. Les performances et limitations de cette méthode sont discutées en section III.2.3.

2.2 Équations générales

Dans la suite du chapitre un formalisme complexe sera utilisé pour écrire les équations. On redéfinit pour cela le produit scalaire (II.13) par le produit scalaire hermitien (III.34)

défini sur l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{C} sur l'intervalle $[0, T]$, avec $T = 2\pi/\omega$,

$$\langle f|g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt \quad (\text{III.34})$$

On définit les composantes complexes associées aux harmoniques du mode non-linéaire,

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{a}_k - i\mathbf{b}_k \quad , \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket \quad (\text{III.35})$$

et la valeur propre complexe du mode $\lambda = -\beta + i\omega$. On introduit également la famille libre de fonctions exponentielles complexes $\{e_k = c_k + is_k\}$. Avec ces notations, et en omettant le terme statique, le système d'équations (II.91) définissant le mode non-linéaire peut s'écrire sous la forme,

$$\langle \mathbf{r}|e_k \rangle = \left((k\lambda)^2 \mathbf{M} + (k\lambda) \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{c}_k + \langle \mathbf{f}|e_k \rangle = \mathbf{0} \quad , \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket \quad (\text{III.36})$$

Pour rappel, la forme générale du système d'équations différentielles non-linéaires que nous cherchons à résoudre est donnée par,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}(t) \quad (\text{III.37})$$

Dans la suite, on suppose qu'un ou plusieurs modes complexes non-linéaires du système ont été déterminés à l'aide de la méthode présentée en section II.4.3, et que le vecteur des efforts extérieurs $\mathbf{g}(t)$ est une excitation multi-harmonique de fréquence fondamentale Ω ,

$$\mathbf{g}(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_k \langle \mathbf{g}|e_k \rangle e^{ik\Omega t} + c.c. \right) \quad (\text{III.38})$$

avec *c.c.* les termes complexes conjugués. On recherche alors une approximation de la solution $\mathbf{x}(t)$ du système d'équations (III.37) sous la forme d'une somme multi-harmonique de vecteurs propres associés aux modes complexes non-linéaires du système, dont l'expression est donnée par

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_n q_n \sum_k \varphi_{n,k} (|q_n|) e^{ik\Omega t} + c.c. \right) \quad (\text{III.39})$$

avec q_n la coordonnée généralisée associée au mode d'indice n . Les vecteurs propres $\varphi_{n,k}$ sont liés aux composantes $\mathbf{c}_{n,k}$ de l'équation (III.35), à travers la coordonnée généralisée q_n ,

$$\mathbf{c}_{n,k} = q_n \varphi_{n,k} \quad , \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket \quad (\text{III.40})$$

Les paramètres modaux $\varphi_{n,k}$ et λ_n sont théoriquement fonctions de deux variables indépendantes [88], telles que les parties réelles et imaginaires de la coordonnée généralisée q_n . Cependant, dans l'équation (III.39), il est supposé que l'amplitude $|q_n|$ de la coordonnée généralisée suffit pour décrire les variations du mode. Cette hypothèse a déjà été utilisée dans [88] et [78], et s'est avérée fournir d'excellents résultats. Dans la suite de cette section, la dépendance de $\varphi_{n,k}$ et λ_n par rapport à $|q_n|$ n'est pas écrite explicitement pour alléger les équations. La substitution des expressions (III.38) et (III.39) dans le système (III.37), et l'orthogonalisation du résidu par rapport à chaque fonction de base $\{e_k = e^{ik\Omega t}\}$ à l'aide du produit scalaire (III.34) aboutit au système

$$\left((ik\Omega)^2 \mathbf{M} + (ik\Omega) \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \left\{ \sum_n q_n \varphi_{n,k} \right\} + \langle \mathbf{f}|e_k \rangle = \langle \mathbf{g}|e_k \rangle \quad , \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket \quad (\text{III.41})$$

La projection des efforts non-linéaires $\langle \mathbf{f} | e_k \rangle$ est ensuite approchée par la somme des projections analogues dans les problèmes aux valeurs propres (III.36) correspondant aux modes non-linéaires retenus. Un raisonnement similaire est utilisé dans [78] dans le cas d'une synthèse modale avec un seul mode non-linéaire. Cette hypothèse permet de remplacer le terme non-linéaire projeté par l'opposé de la somme des termes restants dans les problèmes aux valeurs propres, représentée par la seconde ligne de l'équation

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket : \\ \sum_n \left((ik\Omega)^2 \mathbf{M} + (ik\Omega) \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) q_n \varphi_{n,k} \\ - \sum_n \left((k\lambda_n)^2 \mathbf{M} + (k\lambda_n) \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) q_n \varphi_{n,k} \\ \approx \langle \mathbf{g} | e_k \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Bien que trop restrictive dans certains cas de figure, comme nous le verrons par la suite, cette hypothèse permet de tirer pleinement profit de l'information contenue dans les modes non-linéaires, en faisant intervenir explicitement les valeurs propres non-linéaires dans le système d'équations. Cette substitution permet *in fine* de s'affranchir de l'évaluation des termes d'efforts non-linéaires agissant sur la structure globale, opération qui peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul. Finalement, le résidu du système obtenu est orthogonalisé par rapport aux vecteurs $\varphi_{n,k}$ à l'aide du produit scalaire hermitien canonique de \mathbb{C}^n , noté ici \bullet^\dagger , ce qui résulte en un système pouvant s'écrire sous la forme compacte suivante,

$$\boxed{\Phi_k^\dagger (\mathbf{Z}_k \Phi_k - \xi_k) \mathbf{q} = \Phi_k^\dagger \langle \mathbf{g} | e_k \rangle, \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket} \quad (\text{III.43})$$

avec

- $\mathbf{Z}_k = ((ik\Omega)^2 \mathbf{M} + (ik\Omega) \mathbf{C} + \mathbf{K})$, la matrice de rigidité dynamique du système, en formalisme complexe, associée à l'harmonique d'ordre k
- $\xi_k = (\mathbf{M} \Phi_k \mathbf{\Lambda}^2 k^2 + \mathbf{C} \Phi_k \mathbf{\Lambda} k + \mathbf{K} \Phi_k)$, la matrice non-linéaire résultant de l'étape de substitution des problèmes aux valeurs propres, associée à l'harmonique d'ordre k
- $\Phi_k = (\cdots \varphi_{n,k} \cdots)$, la matrice non-linéaire formée des composantes complexes de la déformée de chaque mode pour l'harmonique d'ordre k
- $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\cdots \lambda_n \cdots)$, la matrice spectrale non-linéaire, renfermant les valeurs propres des modes non-linéaires distribuées sur sa diagonale
- $\mathbf{q} = \{\cdots q_n \cdots\}^T$, le vecteur colonne renfermant les coordonnées généralisées des modes non-linéaires retenus, inconnues du problème

Commentaires

Il est intéressant de remarquer que l'étape de substitution permettant de faire disparaître le terme $\langle \mathbf{f} | e_k \rangle$ de l'équation (III.41) n'est pas équivalente à une hypothèse d'orthogonalité des modes non-linéaires, comme cela a pu être fait dans des travaux antérieurs [46]. Bien que les effets non-linéaires associés à un mode soient majoritairement pilotés par la

2. On rencontre parfois dans la littérature \bullet^* pour désigner la transposition du conjugué de \bullet .

coordonnée généralisée correspondante, des termes de couplages sont effectivement retenus après projection, ce qui se traduit par la présence de termes extra-diagonaux dans le produit $\Phi_{n,k}^\dagger (\mathbf{Z}_k \Phi_{n,k} - \boldsymbol{\xi}_k)$.

En raison de la dépendance des paramètres modaux en $|q_n|$, connue en un ensemble discret de points grâce à l'étape d'analyse modale non-linéaire réalisée au préalable, il est nécessaire d'interpoler ces paramètres à chaque itération du solveur afin d'obtenir $\varphi_{n,k}$ et λ_n pour la valeur courante de $|q_n|$. En pratique, l'évolution des modes est connue avec une précision relativement bonne compte tenu de la finesse du pas de continuation utilisé durant l'analyse modale, et une interpolation linéaire par morceaux s'est avérée suffisante dans la grande majorité des cas. Dans le cas contraire où la discrétisation des modes est plus grossière, une interpolation cubique par morceaux permet de faciliter la convergence.

Dans la mesure où plus d'un harmonique est généralement conservé dans le calcul du mode, afin d'évaluer les effets non-linéaires avec suffisamment de précision [64], le système d'équations (III.43) est souvent sur-déterminé. En effet, d'après l'approximation (III.39), l'ensemble des harmoniques $k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket$ du n -ième mode est piloté par la même coordonnée q_n , contrairement à un calcul HBM standard où tous les harmoniques varient indépendamment. Deux options sont alors envisageables. La première, *a priori* plus rigoureuse, consiste tout simplement à résoudre ce système en conservant la totalité des équations, grâce à des techniques de résolution adaptées exploitant par exemple l'algorithme de Levenberg-Marquardt [171]. Cependant, dans le cas d'une excitation mono-harmonique, *i.e* $\forall k \neq 1 : \langle \mathbf{g} | e_k \rangle = \mathbf{0}$, le fait de négliger les équations correspondant à $k \neq 1$, donc sans terme d'excitation, s'est révélé fournir des résultats en parfait accord avec la solution du système sur-déterminé initial. Pour cette seconde option, le système résultant est alors carré, et peut être résolu à l'aide des routines usuelles de type Newton-Raphson ou algorithmes à région de confiance [25]. Insistons sur le fait que négliger ces équations n'est en aucun cas équivalent à supposer un mode non-linéaire mono-harmonique, ni à supposer une solution (III.39) mono-harmonique. Les termes Φ_1 et $\mathbf{\Lambda}$ sont bel et bien calculés en retenant tous les harmoniques nécessaires lors de l'analyse modale non-linéaire, et peuvent en effet être hautement dépendants de l'ordre maximal n_h de l'approximation. En outre, la reconstruction de la solution multi-harmonique (III.39) pourra également se faire *a posteriori* en utilisant l'ensemble des vecteurs harmoniques de la décomposition.

À ce stade de nos développements, il est également intéressant de faire quelques commentaires sur l'utilisation d'une telle approche pour les systèmes en rotation. En effet, nous avons pu démontrer en section I.1.2 que la formulation faible discrète de l'élastodynamique en repère mobile faisait intervenir des termes particuliers dans les équations du mouvement, résultant de la rotation du corps par rapport à un référentiel fixe galiléen. En particulier, pour un solide en rotation à vitesse constante, la matrice de Coriolis \mathbf{G} et la matrice d'assouplissement centrifuge \mathbf{N} sont toutes deux présentes dans les équations régissant le système autonome. Ces matrices ont été volontairement omises du système initial (III.37) afin d'alléger les équations. Néanmoins, il est parfaitement possible de les conserver dans l'équation de départ régissant le système non-autonome, et de les retrouver ainsi dans l'expression de la matrice de rigidité dynamique \mathbf{Z}_k de l'équation (III.43).

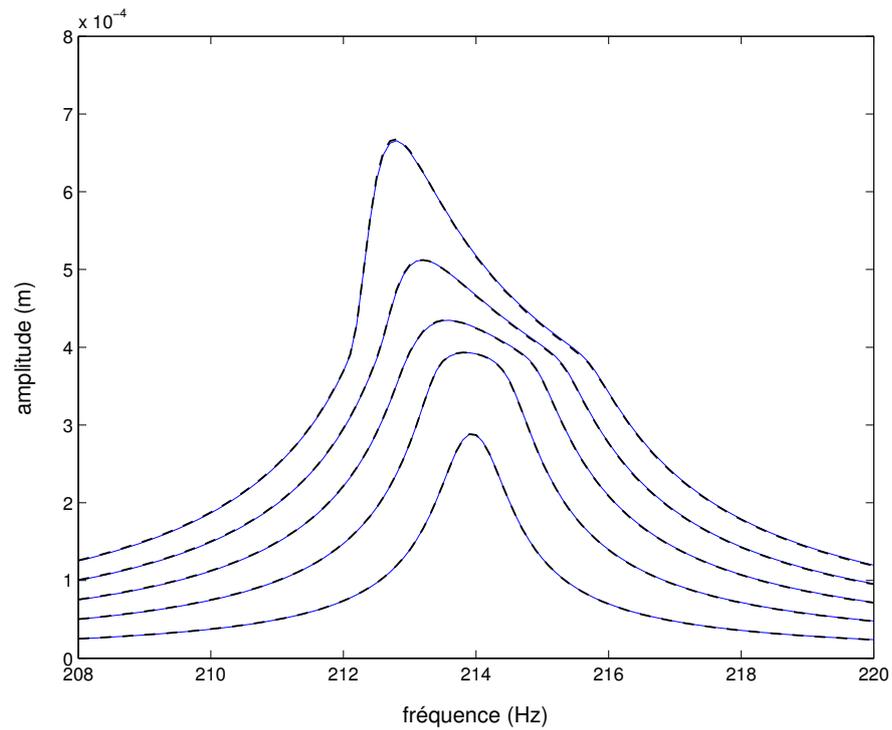
Les solveurs itératifs utilisés pour résoudre des systèmes d'équations algébriques non-linéaires utilisent un formalisme arithmétique réel, et chercheront donc à annuler la partie réelle et la partie imaginaire du résidu du système (III.43), en manipulant directement les parties réelles et parties imaginaires des variables. De plus, comme nous l'avons mentionné dans les sections II.2 et II.4 traitant respectivement de l'équilibrage harmonique standard et généralisé aux solutions amorties, ces solveurs requièrent la connaissance de la matrice jacobienne du système, et la connaissance d'une expression analytique de cette matrice est nécessaire pour permettre d'aborder des systèmes de taille importante. Ces deux aspects seront détaillés dans la section III.3. Dans la section suivante, nous donnons un exemple d'application de synthèse modale non-linéaire, avant d'en illustrer les performances et principales limitations.

2.3 Performances et limitations

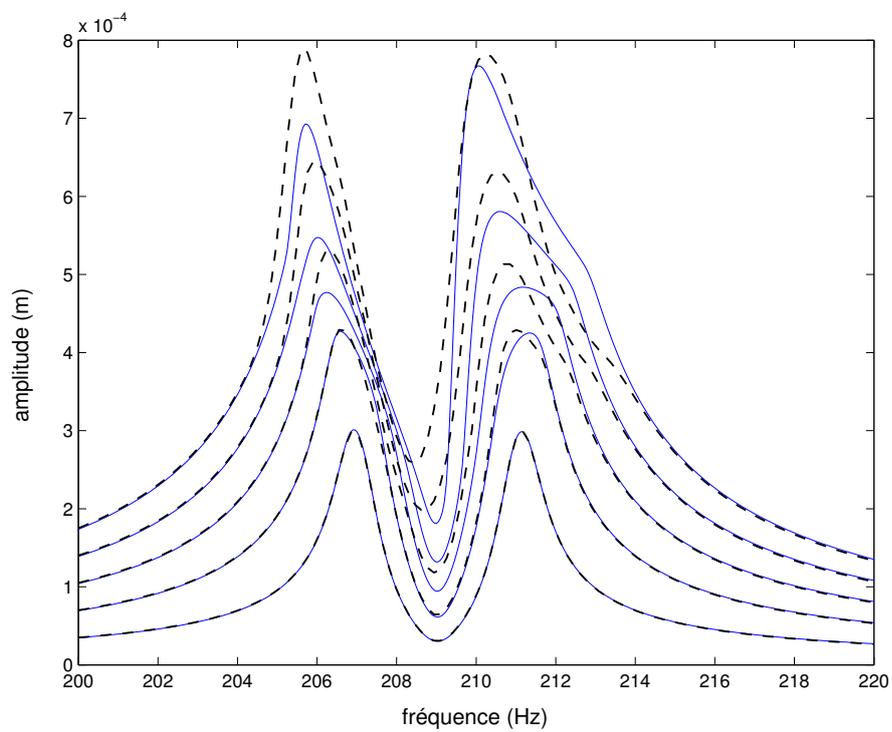
L'atout principal de la procédure de synthèse modale non-linéaire que nous venons de présenter réside dans sa capacité à déterminer la réponse forcée du système en des temps relativement courts, par comparaison aux méthodes usuelles. Pour illustrer cela, considérons la figure III.2a, représentant la réponse forcée d'un modèle phénoménologique de roue aubagée que nous détaillerons dans la section III.4.1. Cette réponse est calculée par synthèse modale non-linéaire, en conservant le mode qui nous intéresse³, et validée par équilibrage harmonique pour plusieurs niveaux d'excitation. On constate dans ce cas de figure une coïncidence quasi-parfaite entre les résultats fournis par les deux méthodes. Cependant, si l'on omet le temps requis pour déterminer le mode, le calcul de la réponse par synthèse modale est de 20 à 30 fois plus rapide. On comprend ici le potentiel des modes complexes non-linéaires pour non plus seulement interpréter, mais construire la réponse forcée du système.

Malgré l'intérêt que revêt la procédure de synthèse modale non-linéaire que nous venons de proposer, nous pouvons mettre en avant deux limitations majeures, qui la rende inadaptée à notre problématique. Tout d'abord, rappelons que notre objectif principal est d'élaborer une nouvelle approche permettant d'aborder efficacement le calcul de réponse forcée des systèmes cycliques désaccordés non-linéaires. Comme nous avons pu le constater dans l'étude phénoménologique de la section II.5, le désaccordage de la structure induit une multiplicité des résonances observées en réponse forcée. Cette multiplicité de résonances est problématique, car elle peut mettre en échec la synthèse modale non-linéaire lorsque les modes excités sont relativement proches. Cette limitation est illustrée sur la figure III.2b, représentant la réponse forcée du système lorsque deux modes voisins sont excités. Proche du domaine linéaire les résultats sont satisfaisants, mais à mesure que les effets non-linéaires gagnent en intensité, la méthode peine à reconstruire la réponse avec précision. Les écarts observés sont imputables à l'hypothèse majeure de la procédure, qui n'est plus vérifiée ici, à savoir, l'étape de substitution des problèmes aux valeurs propres qui nous a permis d'obtenir une approximation de la projection des efforts non-linéaires. En effet, bien qu'aucune condition d'orthogonalité entre les modes ne soit supposée, cette hypothèse ne permet pas ici de rendre compte de façon satisfaisante du couplage qui intervient entre les modes à travers la non-linéarité.

3. Ici, il s'agit du mode direct à 7 diamètres nodaux.



(a) Cas de résonance isolée



(b) Cas de résonances voisines

FIGURE III.2 – Comparaison des courbes de réponses forcées pour différents niveaux d'excitation (synthèse modale non-linéaire —, équilibrage harmonique - - -)

La seconde limitation que nous pouvons mentionner est induite par la nécessité de calculer les modes non-linéaires de la structure toute entière. En pratique, le calcul de ces modes est plus coûteux qu'un calcul de réponse forcée par équilibrage harmonique classique, et doit être réalisé pour tous les modes susceptibles de contribuer dans la déformée opérationnelle. Bien que l'approche par synthèse modale non-linéaire permettent de réaliser rapidement un très grand nombre de calculs pour des excitations variées, le temps requis par le calcul des modes, et son incapacité à traiter convenablement des cas de résonances proches, rendent cette méthode inadaptée pour répondre à notre problématique. La procédure que nous allons présenter dans la section III.3 a pour objectif d'exploiter au maximum le potentiel de synthèse des modes complexes non-linéaires, tout en palliant les deux limitations que nous venons d'explicitier. Cela est rendu possible en combinant l'approche par synthèse modale non-linéaire que nous avons introduite ici, avec les techniques de sous-structuration que nous avons présentées à la section III.1.

3 CNCMS : Une nouvelle méthode de sous-structuration non-linéaire

Dans cette section, nous présentons une nouvelle méthode de sous-structuration s'inspirant des techniques classiques de CMS, et adaptée à l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires en régime permanent. L'exploitation de la notion de modes complexes non-linéaires rend cette méthode très polyvalente, notamment en ce qui concerne la nature et l'intensité des non-linéarités.

3.1 Motivation et idée directrice

La section III.1 nous a permis de lister quelques unes des méthodes de sous-structuration les plus classiques utilisées en dynamique des structures. En se basant sur une approche par synthèse modale linéaire (*i.e.* utilisant des modes linéaires dans la base de réduction), la méthode de Craig-Bampton impose de conserver dans le vecteur des coordonnées généralisées l'ensemble des degrés de liberté affectés par les éventuelles non-linéarités du problème, sous peine de perdre l'information qui y est associée. On comprend aisément l'impact que cela est susceptible d'avoir sur le potentiel de réduction de la méthode, en présence d'un grand nombre de degrés de liberté non-linéaires. Typiquement, sur un modèle industriel de roue aubagée à pales rapportées (voir section I.3.4), chaque secteur du modèle peut contenir quelques centaines de degrés de liberté non-linéaires, affectés par les phénomènes de contact et de frottement à l'interface entre l'aube et de disque.

Bien que les travaux de Vakakis *et al.* [163–166], ou plus récemment de Grolet et Thouverez [52], aient révélé l'existence de solutions localisées pour les structures à symétrie cyclique en présence de non-linéarités, il est envisageable de ne s'intéresser dans un premier temps qu'aux solutions cycliques en appliquant les conditions aux limites adéquates aux frontières du secteur. La méthode de l'équilibrage harmonique, complétée des améliorations proposées en section II.2, permet alors généralement de traiter des systèmes de taille industrielle à un coût raisonnable. En revanche, en présence de désaccordage structurel, nous avons pu voir que la réponse du système était significativement différente

du cas accordé, ce qui rend inenvisageable l'utilisation de conditions aux limites cycliques, et implique de modéliser la roue dans son intégralité, portant ainsi le nombre de degrés de liberté non-linéaires à plusieurs centaines, voire plusieurs milliers. L'utilisation de la HBM pour résoudre un tel système avec les ressources informatiques d'un bureau d'étude est à l'heure actuelle peu envisageable.

Nous avons pu voir au chapitre II et dans la section III.2 du présent chapitre que les modes complexes non-linéaires étaient capables de prédire et synthétiser fidèlement le comportement dynamique d'une structure en réponse forcée. La méthode de sous-structuration que nous allons présenter propose d'utiliser l'information contenue dans ces modes pour mettre au point une méthode de sous-structuration du type CMS à interfaces fixes, similaire à la méthode de Craig-Bampton. La section suivante présente les différentes opérations permettant d'aboutir au système d'équations régissant le comportement d'une sous-structure quelconque, que nous appellerons par la suite super-élément non-linéaire.

3.2 Équations générales

Afin d'établir l'expression d'un super-élément non-linéaire, nous reprenons ici la démarche et les notations de la section III.2. Insistons sur le fait que, la méthode traitant indépendamment chaque sous-structure, les super-éléments obtenus pourront parfaitement être assemblés avec des super-éléments classiques, construits par la méthode de Craig-Bampton selon une procédure standard.

On s'intéresse ici au régime permanent d'un système dynamique non-linéaire, préalablement découpé en un nombre fini de sous-structures. Pour une sous-structure donnée, les équations du mouvement discrétisées peuvent se mettre sous la forme standard rappelée ci-dessous,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}(t) \quad (\text{III.44})$$

On supposera dans la suite que l'excitation imposée à la sous-structure peut s'écrire sous la forme d'une somme multi-harmonique, dont l'expression est donnée par,

$$\mathbf{g}(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_k \langle \mathbf{g} | e_k \rangle e^{ik\Omega t} + c.c. \right) \quad (\text{III.45})$$

avec Ω la pulsation fondamentale, et *c.c.* les termes complexes conjugués. Compte tenu de la forme de l'excitation, nous ferons l'hypothèse que le vecteur des déplacements nodaux de la sous-structure peut être approché par une somme multi-harmonique de même pulsation fondamentale, dont l'expression est donnée par,

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_n q_n \sum_k \boldsymbol{\varphi}_{n,k} (|q_n|) e^{ik\Omega t} + \sum_s p_s \sum_k \boldsymbol{\psi}_s e^{ik\Omega t} + c.c. \right) \quad (\text{III.46})$$

avec $\boldsymbol{\varphi}_{n,k}$ les vecteurs correspondants aux harmoniques des modes complexes non-linéaires de la sous-structure, calculés pour des frontières fixes⁴, et $\boldsymbol{\psi}_s$ des modes statiques de liai-

4. Dans la suite de ce mémoire, afin d'éviter tout malentendu, on préférera l'expression *frontières fixes* à *interfaces fixes* pour faire référence aux modes de la sous-structure encastrée. En effet, seuls les degrés aux frontières de la sous-structure sont bloqués. Les degrés de liberté de contact (à "l'interface" entre l'aube et le disque) sont, eux, bien libres de se déplacer lors du calcul du mode non-linéaire.

son. Les coordonnées généralisées q_n et p_s étant respectivement associées aux modes non-linéaires et aux modes statiques de liaison. Les vecteurs $\varphi_{n,k}$ sont toujours liés aux composantes $\mathbf{c}_{n,k}$ par l'intermédiaire des coordonnées généralisées q_n selon la relation (III.40).

Les modes statiques de liaison ψ_s sont calculés de la même manière que pour la méthode de Craig-Bampton, après linéarisation du système au voisinage d'un point d'équilibre de faible énergie (*i.e.* à basse amplitude). À titre d'exemple, pour une non-linéarité de contact à l'interface entre deux composants de la sous-structure, les surfaces en contact seront collées préalablement au calcul des modes statiques de liaison. Insistons sur le fait que le système linéaire sous-jacent utilisé pour le calcul de ces modes doit être judicieusement choisi, pour permettre à l'information en provenance des frontières de la sous-structure de circuler librement dans l'ensemble des composants. Après linéarisation, les modes statiques sont calculés à partir de l'équation (III.19). Bien que les vecteurs ψ_s utilisés ici soient les mêmes pour l'ensemble des harmoniques, la méthode de sous-structuration non-linéaire proposée permet parfaitement de retenir des vecteurs différents pour chacun des harmoniques si nécessaire.

Tout comme pour la procédure de synthèse modale non-linéaire de la section III.2, on suppose par la suite que l'amplitude $|q_n|$ suffit pour décrire les variations des paramètres modaux. La substitution des expressions (III.45) et (III.46) dans le système d'équations différentielles (III.44) régissant la dynamique de la sous-structure, suivie d'une étape d'orthogonalisation du résidu par rapport aux fonctions $\{e_k = e^{ik\Omega t}\}$ à l'aide du produit scalaire hermitien (III.34), mène au système,

$$\forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket : \quad \left((ik\Omega)^2 \mathbf{M} + (ik\Omega) \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \left\{ \sum_n q_n \varphi_{n,k} + \sum_s p_s \psi_s \right\} + \langle \mathbf{f} | e_k \rangle = \langle \mathbf{g} | e_k \rangle \quad (\text{III.47})$$

Comme pour établir les équations de la synthèse modale non-linéaire de la section III.2.2, on substitue ensuite la part structurale de chaque problème aux valeurs propres pour obtenir une approximation du terme $\langle \mathbf{f} | e_k \rangle$, et ainsi exploiter pleinement l'information contenue dans les modes non-linéaires. Remarquons cependant que les modes sont calculés ici pour une sous-structure ayant ses frontières encastées, ce qui résulte en une matrice de raideur $\tilde{\mathbf{K}}$ différente de la matrice initiale \mathbf{K} . Cette étape de substitution conduit au système,

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket : \\ & \sum_n \left((ik\Omega)^2 \mathbf{M} + (ik\Omega) \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) q_n \varphi_{n,k} \\ & - \sum_n \left((k\lambda_n)^2 \mathbf{M} + (k\lambda_n) \mathbf{C} + \tilde{\mathbf{K}} \right) q_n \varphi_{n,k} \\ & + \sum_s \left((ik\Omega)^2 \mathbf{M} + (ik\Omega) \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) p_s \psi_s \\ & \approx \langle \mathbf{g} | e_k \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

Finalement, le résidu du système obtenu est orthogonalisé par rapport au sous-espace engendré par les vecteurs de base $\varphi_{n,k}$ et ψ_s , à l'aide du produit scalaire hermitien canonique

de \mathbb{C}^n , noté \bullet^\dagger . La procédure aboutit au système,

$$\boxed{\begin{pmatrix} \Phi_k^\dagger (\mathbf{Z}_k \Phi_k - \xi_k) & \Phi_k^\dagger \mathbf{Z}_k \Psi \\ \Psi^\dagger (\mathbf{Z}_k \Phi_k - \xi_k) & \Psi^\dagger \mathbf{Z}_k \Psi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_k^\dagger \langle \mathbf{g} | e_k \rangle \\ \Psi^\dagger \langle \mathbf{g} | e_k \rangle \end{Bmatrix}, \quad \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket} \quad (\text{III.49})$$

avec

- $\mathbf{Z}_k = ((ik\Omega)^2 \mathbf{M} + (ik\Omega) \mathbf{C} + \mathbf{K})$, la matrice de rigidité dynamique de la sous-structure, en formalisme complexe, associée à l'harmonique d'ordre k
- $\xi_k = (\mathbf{M} \Phi_k \Lambda^2 k^2 + \mathbf{C} \Phi_k \Lambda k + \tilde{\mathbf{K}} \Phi_k)$, la matrice non-linéaire résultant de l'étape de substitution des problèmes aux valeurs propres, associée à l'harmonique d'ordre k
- $\Phi_k = (\cdots \varphi_{n,k} \cdots)$, la matrice non-linéaire formée des composantes complexes de la déformée de chaque mode pour l'harmonique d'ordre k
- $\Psi = (\cdots \psi_s \cdots)$, la matrice linéaire formée des modes statiques de liaison de la sous-structure, commune à l'ensemble des harmoniques
- $\Lambda = \text{diag}(\cdots \lambda_n \cdots)$, la matrice spectrale non-linéaire, renfermant les valeurs propres des modes non-linéaires distribuées sur sa diagonale
- $\mathbf{q} = \{\cdots q_n \cdots\}^T$, le vecteur colonne renfermant les coordonnées généralisées des modes non-linéaires retenus
- $\mathbf{p} = \{\cdots p_s \cdots\}^T$, le vecteur colonne renfermant les coordonnées généralisées des modes statiques de liaison

Il est intéressant de remarquer à ce stade la similitude entre le bloc supérieur gauche du système (III.49) et l'équation fondamentale (III.43) de la synthèse modale non-linéaire. Cette similitude est tout simplement le fruit des raisonnements ayant permis d'établir ces deux équations, en tout point similaires. Ainsi, les commentaires fait précédemment concernant le système (III.43) sont également applicables au système (III.49), et ne seront pas répétés ici.

En fin de compte, l'assemblage des super-éléments non-linéaires est effectué par l'intermédiaire des coordonnées généralisées \mathbf{p} , regroupant l'intégralité des degrés de liberté de frontière de la sous-structure. Par analogie avec la méthode de Craig-Bampton présentée en section III.1, il apparaît alors une première limitation de notre approche. En effet, bien que les modes complexes non-linéaires retenus dans la base de réduction aient permis ici de traiter les degrés de liberté non-linéaires comme des degrés esclaves, contrairement à la méthode de Craig-Bampton, nous avons conservé ici l'ensemble des degrés de liberté situés sur les frontières de la sous-structure. Ainsi, le potentiel de réduction de la méthode est tributaire au premier ordre de la taille des frontières de chaque sous-structure, comme nous avons pu le mentionner précédemment. Or, pour une sous-structure telle qu'un secteur de roue aubagée discrétisé par élément finis, on retrouve généralement un grand nombre de nœuds sur la section du disque. L'utilisation de la méthode de sous-structuration proposée sur un système de ce type serait susceptible de conduire à un modèle réduit de taille trop importante pour permettre une résolution en des temps raisonnables. Néanmoins, nous avons pu voir en section III.1 que des méthodes ont été développées pour pallier ce problème, telle que la double synthèse modale. Ainsi, afin de rendre notre méthode applicables

à des modèles éléments finis de grande taille, nous proposons ci-dessous une reformulation exploitant une base de modes d'interface, ou modes de branche, pour réduire les frontières. L'approximation de la solution est alors donnée sous forme compacte par

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_k \mathbf{\Phi}_k \mathbf{q} e^{ik\Omega t} + \sum_k \mathbf{\Psi}_k \mathbf{p} e^{ik\Omega t} + c.c. \right) \quad (\text{III.50})$$

où $\mathbf{\Gamma}$ représente la restriction de la matrice des modes d'interface aux degrés de liberté de frontière de la sous-structure considérée. Tout comme les modes statiques de liaison $\mathbf{\Psi}$, ces modes d'interface sont calculés sur le système global, après assemblage des sous-structures linéarisées à basse amplitude (*e.g.* interfaces de contact collées), selon la procédure décrite en section 1.3.4 du chapitre III. Insistons sur le fait que les coordonnées généralisées \mathbf{p} associées aux modes d'interface sont communes à l'ensemble des sous-structures, contrairement à la formulation précédente n'exploitant que des modes statiques de liaison. Lors de l'assemblage des super-éléments non-linéaires, les blocs correspondants aux coordonnées \mathbf{p} seront donc simplement sommés. Le système final résultant de la double orthogonalisation et de l'hypothèse de substitution est donné par,

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbf{\Phi}_k^\dagger (\mathbf{Z}_k \mathbf{\Phi}_k - \boldsymbol{\xi}_k) & \mathbf{\Phi}_k^\dagger \mathbf{Z}_k (\mathbf{\Psi} \mathbf{\Gamma}) \\ (\mathbf{\Psi} \mathbf{\Gamma})^\dagger (\mathbf{Z}_k \mathbf{\Phi}_k - \boldsymbol{\xi}_k) & (\mathbf{\Psi} \mathbf{\Gamma})^\dagger \mathbf{Z}_k (\mathbf{\Psi} \mathbf{\Gamma}) \end{array} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{\Phi}_k^\dagger \langle \mathbf{g} | e_k \rangle \\ (\mathbf{\Psi} \mathbf{\Gamma})^\dagger \langle \mathbf{g} | e_k \rangle \end{Bmatrix}, \quad \forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket \quad (\text{III.51})$$

En raison de l'analogie entre les méthodes classiques de CMS et la méthode que nous avons développée, celle-ci sera parfois désignée par l'acronyme CNCMS, pour *Component Nonlinear Complex Mode Synthesis*. On pourra ainsi étendre la terminologie employée habituellement en sous-structuration, en parlant ici de CNCMS à interfaces fixes, avec (équation (III.51)) ou sans (équation (III.49)) double synthèse modale.

Dans les commentaires de la section III.2.2, des aspects numériques relatifs à l'implémentation des équations ont été mentionnés sans être détaillés, à savoir, le retour à un formalisme arithmétique réel pour être compatible avec la plupart des solveurs, et le calcul d'une expression analytique de la matrice jacobienne pour en améliorer les performances. Ces deux aspects sont abordés dans la section suivante.

3.3 Matrice jacobienne semi-analytique

Dans cette section, nous allons voir qu'il est possible d'établir une expression de la matrice jacobienne du système, que nous qualifierons de semi-analytique en raison de sa dépendance vis-à-vis du type d'interpolation qui est utilisée pour déterminer les paramètres modaux à chaque itération du solveur. L'expression du résidu du système (III.51) sera notée

$$\rho_k = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(|q_n|) \mathbf{q} + \mathbf{B}(|q_n|) \mathbf{p} - \mathbf{a}(|q_n|) \\ \mathbf{C}(|q_n|) \mathbf{q} + \mathbf{D} \mathbf{p} - \mathbf{b} \end{array} \right\} \quad (\text{III.52})$$

avec

$$\mathbf{A}(|q_n|) = \Phi_k^\dagger (\mathbf{Z}_k \Phi_k - \xi_k) \quad (\text{III.53})$$

$$\mathbf{B}(|q_n|) = \Phi_k^\dagger \mathbf{Z}_k (\Psi \Gamma) \quad (\text{III.54})$$

$$\mathbf{C}(|q_n|) = (\Psi \Gamma)^\dagger (\mathbf{Z}_k \Phi_k - \xi_k) \quad (\text{III.55})$$

$$\mathbf{D} = (\Psi \Gamma)^\dagger \mathbf{Z}_k (\Psi \Gamma) \quad (\text{III.56})$$

$$\mathbf{a}(|q_n|) = \Phi_k^\dagger \langle \mathbf{g} | e_k \rangle \quad (\text{III.57})$$

$$\mathbf{b} = (\Psi \Gamma)^\dagger \langle \mathbf{g} | e_k \rangle \quad (\text{III.58})$$

En raison de son importance vis-à-vis de la dérivation, la dépendance des termes en $|q_n|$ est explicitement rappelée ici, mais sera omise par la suite pour alléger les notations.

Les solveurs itératifs utilisés pour la résolution de système d'équations algébriques non-linéaires manipulent généralement des grandeurs réelles, et non complexes. Ainsi, la résolution du système sous-structuré par la méthode proposée passera par la manipulation des variables q_n^r , q_n^i , p_s^r , and p_s^i , désignant respectivement les parties réelles et imaginaires des variables q_n et p_s . Le nombre d'inconnues ayant doublé, il sera demandé au solveur d'annuler la partie réelle et la partie imaginaire du résidu, obtenu après assemblage des super-éléments. Les différents blocs constitutifs de la matrice jacobienne d'un super-élément s'obtiennent donc en dérivant $\text{Re}(\rho_k)$ et $\text{Im}(\rho_k)$, $\forall k \in \llbracket 1, n_h \rrbracket$, par rapport à ces nouvelles variables réelles,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \text{Re}(\bar{\mathbf{J}}) \\ \text{Im}(\bar{\mathbf{J}}) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{J}} = k \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots & \boxed{\begin{matrix} \frac{\partial \rho_k}{\partial q_n^r} & \frac{\partial \rho_k}{\partial q_n^i} \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} \frac{\partial \rho_k}{\partial p_s^r} & \frac{\partial \rho_k}{\partial p_s^i} \end{matrix}} & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{III.59})$$

Les dérivées partielles de ρ_k par rapport à q_n^r et q_n^i sont données par,

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial q_n^r} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_n^r} \mathbf{q} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_n^r} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial q_n^r} \mathbf{p} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q_n^r} \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial q_n^r} \mathbf{q} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_n^r} \end{array} \right\} \quad (\text{III.60a})$$

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial q_n^i} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_n^i} \mathbf{q} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_n^i} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial q_n^i} \mathbf{p} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q_n^i} \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial q_n^i} \mathbf{q} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_n^i} \end{array} \right\} \quad (\text{III.60b})$$

où le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'exprimer ces dérivées partielles en fonction des dérivées partielles par rapport au module des variables complexes,

$$\frac{\partial \bullet}{\partial q_n^r} = \frac{\partial \bullet}{\partial |q_n|} \frac{\partial |q_n|}{\partial q_n^r} = \frac{\partial \bullet}{\partial |q_n|} \frac{q_n^r}{|q_n|} \quad (\text{III.61a})$$

$$\frac{\partial \bullet}{\partial q_n^i} = \frac{\partial \bullet}{\partial |q_n|} \frac{\partial |q_n|}{\partial q_n^i} = \frac{\partial \bullet}{\partial |q_n|} \frac{q_n^i}{|q_n|} \quad (\text{III.61b})$$

les dérivées partielles du vecteur des coordonnées généralisées associées aux modes non-linéaires étant simplement données par,

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_n^r} = \{0 \dots 0, \underset{n}{1}, 0 \dots 0\}^T \quad (\text{III.62a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_n^i} = \{0 \dots 0, \underset{n}{i}, 0 \dots 0\}^T \quad (\text{III.62b})$$

Les dérivées partielles des différents blocs matriciels par rapport à $|q_n|$ ont pour expressions,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial |q_n|} = \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial |q_n|} \right)^\dagger (\mathbf{Z}_k \Phi_k - \xi_k) + \Phi_k^\dagger \left(\mathbf{Z}_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial |q_n|} - \frac{\partial \xi_k}{\partial |q_n|} \right) \quad (\text{III.63})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial |q_n|} = \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial |q_n|} \right)^\dagger \mathbf{Z}_k (\Psi \Gamma) \quad (\text{III.64})$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial |q_n|} = (\Psi \Gamma)^\dagger \left(\mathbf{Z}_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial |q_n|} - \frac{\partial \xi_k}{\partial |q_n|} \right) \quad (\text{III.65})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial |q_n|} = \mathbf{M} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial |q_n|} \Lambda^2 + 2 \Phi_k \Lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial |q_n|} \right) + \mathbf{C} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial |q_n|} \Lambda + \Phi_k \frac{\partial \Lambda}{\partial |q_n|} \right) + \tilde{\mathbf{K}} \frac{\partial \Phi_k}{\partial |q_n|} \quad (\text{III.66})$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial |q_n|} = \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial |q_n|} \right)^\dagger \langle \mathbf{g} | e_k \rangle \quad (\text{III.67})$$

Ici, l'expression de chaque bloc est extraite de l'équation (III.51), correspondant au modèle réduit exploitant une base de modes d'interface Γ . L'expression des dérivées partielles analogues correspondant au système (III.49) se déduit simplement des équations précédentes en remplaçant les produits $\Psi \Gamma$ par Ψ . Comme nous l'avons rappelé en section III.2.2, les paramètres modaux doivent être systématiquement interpolés durant la résolution. Lorsqu'une interpolation linéaire par morceau est utilisée, ce qui est suffisant dans la plupart des cas, les dérivées partielles de Φ_k et Λ par rapport à $|q_n|$ peuvent être déterminées en calculant la pente entre les deux points délimitant le domaine d'interpolation. Si un ordre supérieur d'interpolation est utilisé, les dérivées de Φ_k et Λ devront être adaptées en conséquence. Finalement, les dérivées partielles de ρ_k par rapport à p_s^r and p_s^i sont données par,

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial p_s^r} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial p_s^r} \\ \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial p_s^r} \end{array} \right\} \quad (\text{III.68a})$$

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial p_s^i} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial p_s^i} \\ \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial p_s^i} \end{array} \right\} \quad (\text{III.68b})$$

les dérivées partielles des coordonnées généralisées associées aux frontières étant simplement données par,

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial p_s^r} = \{0 \dots 0, \underset{s}{1}, 0 \dots 0\}^T \quad (\text{III.69a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial p_s^i} = \{0 \dots 0, \underset{s}{i}, 0 \dots 0\}^T \quad (\text{III.69b})$$

En fin de compte, la matrice jacobienne du système global après assemblage des super-éléments non-linéaires est obtenue en assemblant les matrices \mathbf{J} correspondant à chacune des sous-structures.

Avant d’appliquer la méthode que nous venons d’élaborer à un modèle industriel de roue aubagée, ce qui sera l’objet du chapitre IV, il convient d’en évaluer la précision et les performances. Les sections suivantes présentent deux cas d’applications de la méthode. Le premier est un modèle phénoménologique similaire à celui employé en section II.5, permettant de comparer notre méthode à un calcul par équilibrage harmonique classique. Le second cas d’application est un modèle éléments finis tridimensionnel de roue aubagée “dégradée”, possédant un maillage suffisamment grossier au niveau des frontières de chaque secteur pour permettre un calcul avec et sans utilisation des modes d’interface.

4 Évaluation de la méthode sur modèle phénoménologique

Afin de tester les capacités de la méthode proposée, celle-ci est implémentée dans un code de calcul à l’aide du logiciel MATLAB, et appliquée sur un modèle phénoménologique de roue aubagée. La procédure est représentée schématiquement sur la figure III.3. Le modèle et les résultats obtenus sont présentés en section III.4.1, avant de discuter les performances de la méthode en section III.4.2. Les résultats de ces deux sections ont fait l’objet d’une publication dans la revue *Mechanical Systems and Signal Processing* [65]. Enfin, la section III.4.3 présente quelques résultats obtenus sur ce modèle lors d’une étude s’intéressant à l’évolution du facteur d’amplification induit par le désaccordage, comme de nombreux auteurs ont pu le faire par le passé (voir section I.3.3), mais ici en tenant compte des non-linéarités. Cette étude a pu être menée en un temps raisonnable grâce aux performances très intéressantes de la CNCMS en termes de temps de calcul.

4.1 Application sur modèles accordé et désaccordé

Le modèle phénoménologique utilisé ici est un modèle cyclique unidimensionnel à nombre de secteurs variable, dont le secteur fondamental est représenté sur la figure III.4. Les valeurs assignées aux paramètres structuraux sont reportées dans le tableau III.1. La matrice d’amortissement est déterminée en utilisant un modèle d’amortissement de Rayleigh, calibré de façon à obtenir un taux d’amortissement de 0.1% pour le premier mode linéaire du secteur. Un modèle très similaire a déjà été utilisé dans les travaux de Laxalde *et al.* [86] et Zhou *et al.* [183], cherchant à être représentatif du comportement modal d’une roue aubagée en flexion. Le diagramme diamètres-fréquences du modèle linéaire sous-jacent à interfaces collées est donné en figure III.5.

TABLEAU III.1 – Paramètres structuraux du modèle phénoménologique

– (unité)	tête	corps	piéd	disque	bâti
m (kg)	0.2	0.3	0.4	1.2	–
c (Ns/m)	1.3	0.7	26.7	33.3	0.4
k ($10^6 \cdot \text{N/m}$)	2	1	40	50	0.6

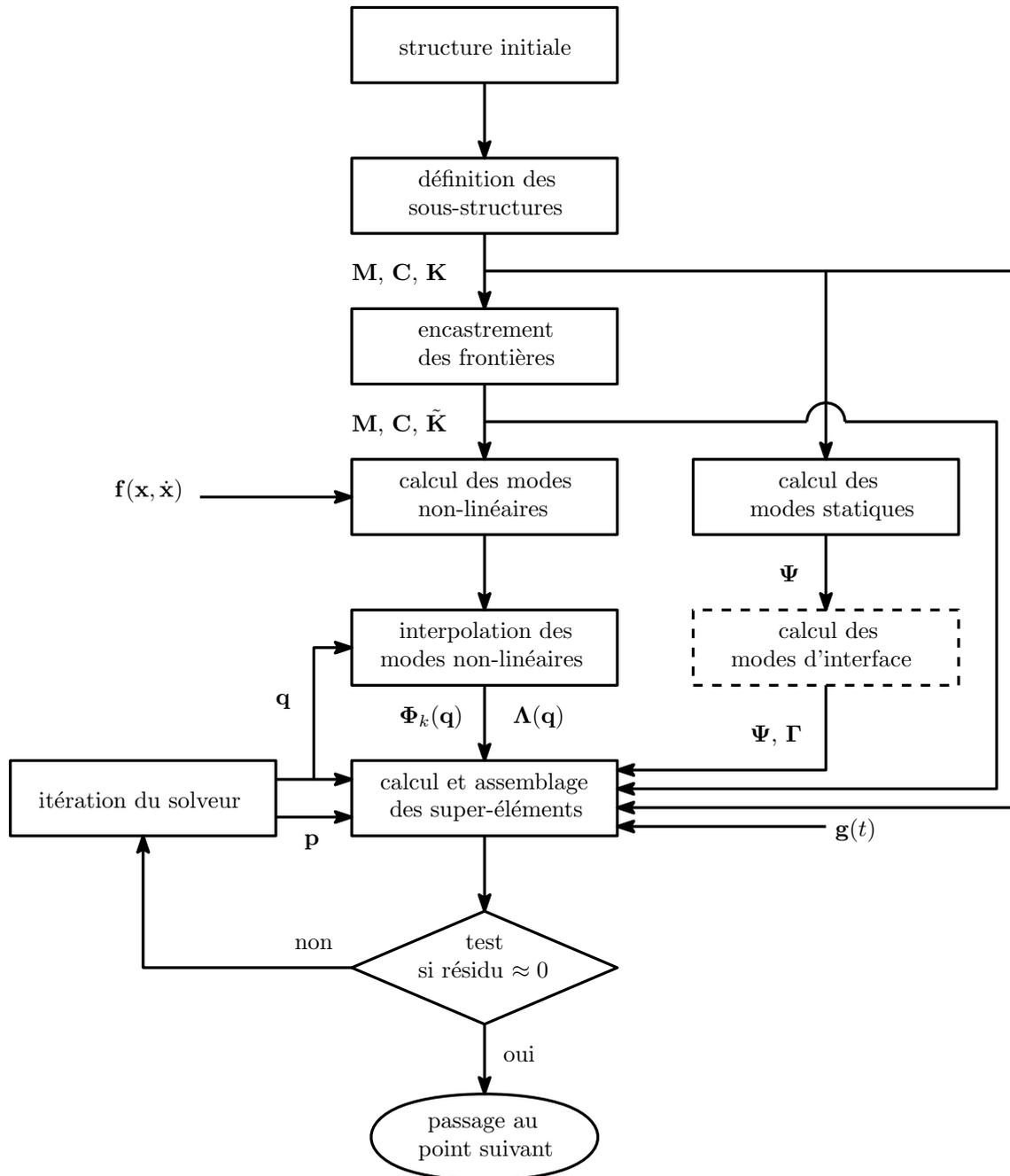


FIGURE III.3 – Schéma-bloc de la CNCMS

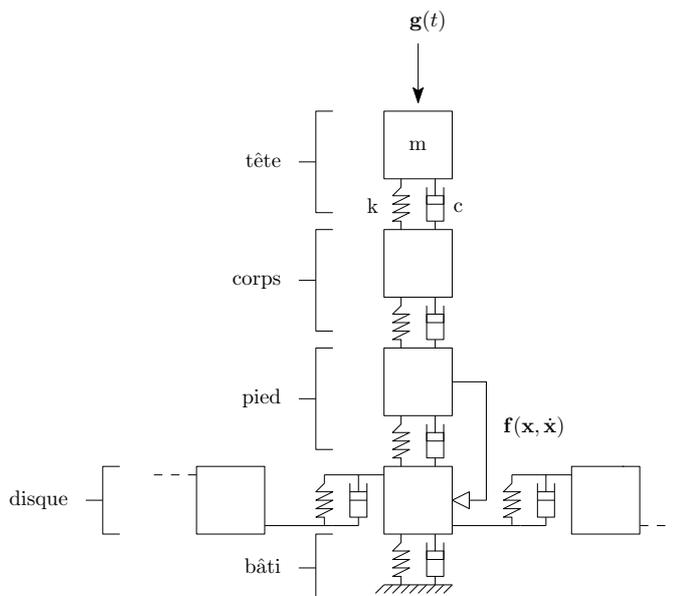


FIGURE III.4 – Secteur fondamental du modèle phénoménologique

Pour les différentes approches fréquentielles que nous allons employer, il est nécessaire de fixer l'ordre harmonique maximal n_h définissant la troncature des développements en série dans l'approximation des solutions. Nous avons pu voir que ce paramètre était très important dans l'étude de non-linéarités irrégulières tel que le frottement, afin de permettre aux modes complexes non-linéaires de capturer avec suffisamment de précision les effets non-linéaires. En se basant sur les résultats du chapitre II et de la référence [64], 5 harmoniques ($n_h = 5$) ont été conservés pour mener cette étude.

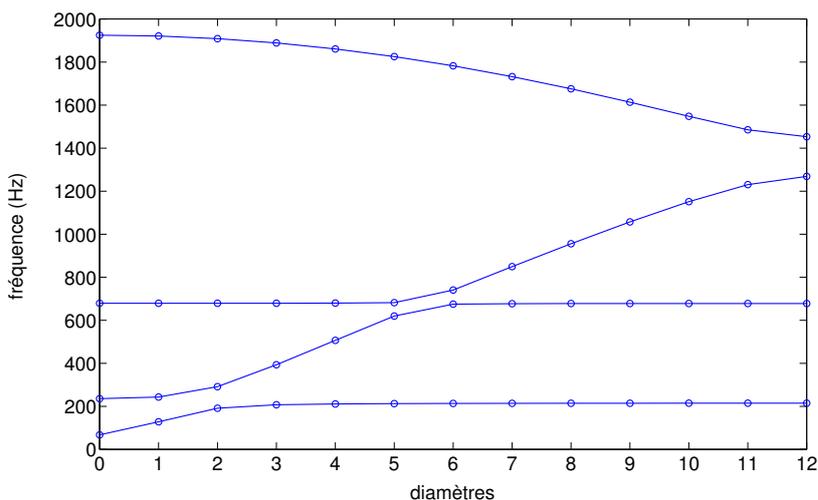


FIGURE III.5 – Familles modales du modèle phénoménologique

La nature non-linéaire du système provient des éléments de Coulomb liant les de-

grés de liberté représentatifs du disque et du pied de pale sur la figure III.4. Les efforts non-linéaires sont déterminés de la même façon que pour l'étude phénoménologique de la section II.5.1. Un coefficient de frottement de 0.3 et un effort normal de 1000N sont utilisés pour définir le contact, ainsi qu'un paramètre ε de 0.1%.

Le premier mode complexe non-linéaire du secteur fondamental est calculé par la méthode présentée en section II.4, afin de construire les super-éléments non-linéaires correspondant à chaque sous-structure. Compte tenu du faible nombre de degrés de liberté présents sur les frontières, c'est l'expression sans double synthèse modale, donnée par l'équation (III.49), qui sera utilisée ici. Les backbones du mode sont données sur la figure III.6, et possèdent le comportement standard observé à plusieurs reprises dans le chapitre II. Un zoom sur la déformée modale à basse et haute amplitude de vibration est également donné, permettant de constater le changement de l'état collé vers l'état glissant.

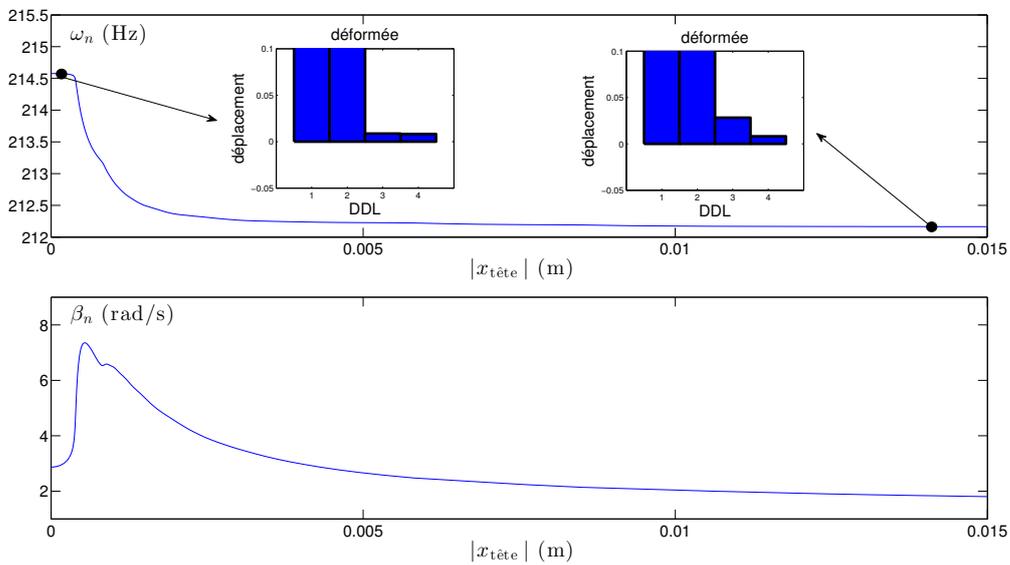


FIGURE III.6 – Backbones du premier mode complexe non-linéaire du secteur fondamental

Tout comme dans l'étude phénoménologique de la section II.5, nous nous intéresserons ici à la réponse du système soumis à des excitations du type ondes tournantes. L'expression du vecteur de chargement est donnée par

$$\mathbf{g}_{m,n_d}(t) = \{F \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \cos(\Omega t + 2\pi k n_d / n_b) \quad (\text{III.70})$$

avec m l'indice du secteur, n_b le nombre de secteurs du modèle, n_d le nombre de diamètre de l'excitation, et F l'amplitude de l'excitation.

La figure III.7 montre la réponse forcée d'un modèle à 12 secteurs pour une excitation à 6 diamètres. On constate que les courbes bleues, correspondant à la réponse calculée par CNCMS pour différents niveaux d'excitation, sont parfaitement superposées avec les courbes calculées par HBM sur le modèle complet, servant de références ici. Précisons que pour l'étude de ce cas accordée, la réponse du système étant ici parfaitement cyclique, le mode complexe non-linéaire utilisé pour construire les 12 super-éléments identiques aurait

aussi pu être calculé en appliquant des conditions de symétrie cyclique aux frontières du secteur fondamental, et utilisé en synthèse modale non-linéaire pure par la procédure décrite en section III.2. Néanmoins, cette approche n'est pas possible pour les systèmes qui nous intéressent, à savoir, les structures désaccordées.

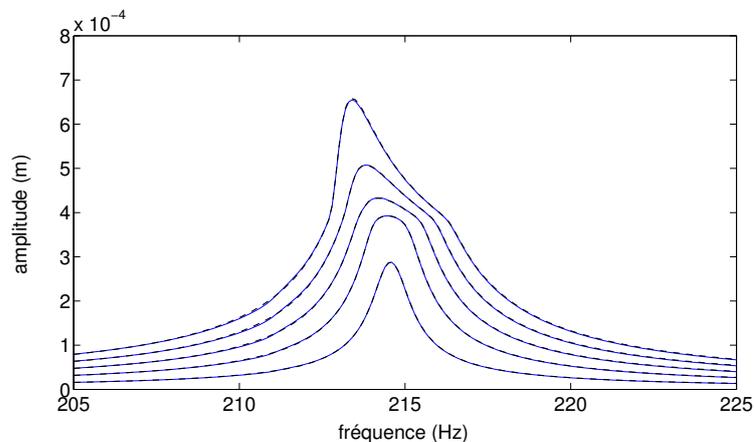


FIGURE III.7 – Réponse forcée du modèle accordé pour différentes amplitudes d'excitation (CNCMS —, HBM - - -)

Afin d'évaluer les capacités de la CNCMS pour traiter des cas de systèmes désaccordés, le modèle phénoménologique est modifié en définissant un nouveau type de secteur, ayant des raideurs en tête et milieu de pale différente du secteur fondamental défini précédemment, de façon à décaler la première fréquence propre de 5% du nominal. Les valeurs des paramètres structuraux de ce nouveau type de secteur sont reportées dans le tableau III.2. Le secteur fondamental A et ce nouveau secteur B sont ensuite distribués sur la

TABLEAU III.2 – Paramètres structuraux du secteur B

– (unité)	tête	corps	piéd	disque	bâti
m (kg)	0.2	0.3	0.4	1.2	–
k ($10^6 \cdot \text{N/m}$)	1.8	0.9	40	50	0.6

périphérie du disque selon le schéma de désaccordage du tableau III.3. Le premier mode complexe non-linéaire de chacun des deux types de secteur est calculé pour construire les deux super-éléments correspondant, qui sont finalement assemblés en suivant le schéma de désaccordage du tableau III.3 pour construire le modèle réduit.

TABLEAU III.3 – Schéma de désaccordage du modèle phénoménologique

Secteur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Type	A	B	A	A	B	B	B	A	A	B	A	B

La réponse forcée de ce système désaccordé est ensuite calculée pour l'excitation utilisée

précédemment avec le modèle accordé. Les courbes de réponses obtenues pour l'ensemble des 12 pales à un niveau fortement non-linéaire ($F=5N$) sont données en figure III.8, et comparées aux courbes de référence calculées par équilibrage harmonique. Comme l'on pouvait s'y attendre, les pales exhibent dorénavant des réponses en fréquence différentes, possédant chacune plusieurs pics de résonances. On constate sur la figure que les écarts entre les réponses calculées par CNCMS et celles calculées par HBM sont relativement faibles, restant inférieurs à 3% sur toute la plage de fréquence. Ce constat illustre la qualité des résultats en termes de précision, mais s'avère d'autant plus intéressant lorsque l'on compare les performances des deux méthodes en termes de temps de calcul. C'est l'objet de la section suivante.

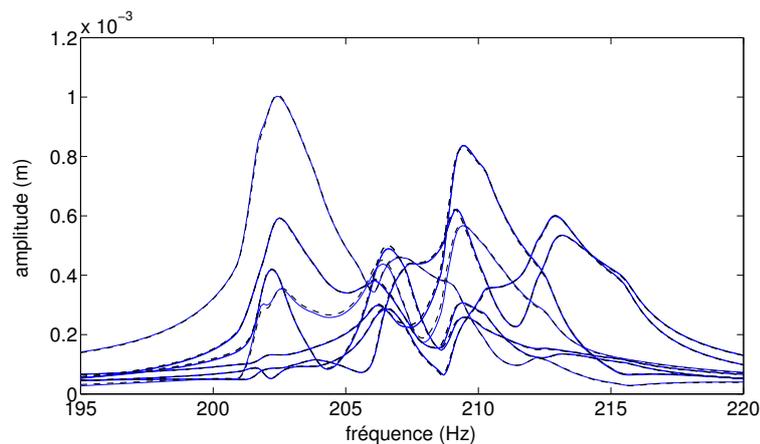


FIGURE III.8 – Réponse forcée non-linéaire des pales du système désaccordé (CNCMS —, HBM - - -)

4.2 Performances de la méthode et domaine de validité

La figure III.9 donne le rapport entre les temps de calcul de la HBM et de la CNCMS pour différents niveaux d'excitation F , sur un modèle possédant 72 secteurs. Le nombre de secteurs est ici augmenté afin de manipuler une quantité de degrés de liberté non-linéaires significative vis-à-vis des modèles que nous allons utiliser dans la suite de ces travaux, et ainsi évaluer le potentiel de la CNCMS face à des modèles plus complexes. Même très proche du domaine linéaire ($F=1N$), on observe ici que la CNCMS est déjà environ 80 fois plus rapide que la HBM, ce rapport atteignant des valeurs de l'ordre de 190 pour de très forts niveaux non-linéaires ($F=10N$). Proche du niveau pour lequel l'optimum en amortissement est obtenu ($F=5N$), d'un intérêt tout particulier, on observe un rapport d'environ 135 entre les deux techniques. La figure permet ainsi de quantifier le potentiel très intéressant de cette nouvelle méthode, notamment dans l'étude de modèles possédant un grand nombre de degrés de liberté non-linéaires, ou bien pour conduire des études statistiques requérant un grand nombre de tirages. Le maximum local observé pour $F=4N$ révèle que, en plus de leur intensité, la façon dont sont activées les non-linéarités peut également avoir une influence sur les performances de la HBM face à la CNCMS, cette dernière se comportant de façon relativement constante quel que soit le niveau d'excitation.

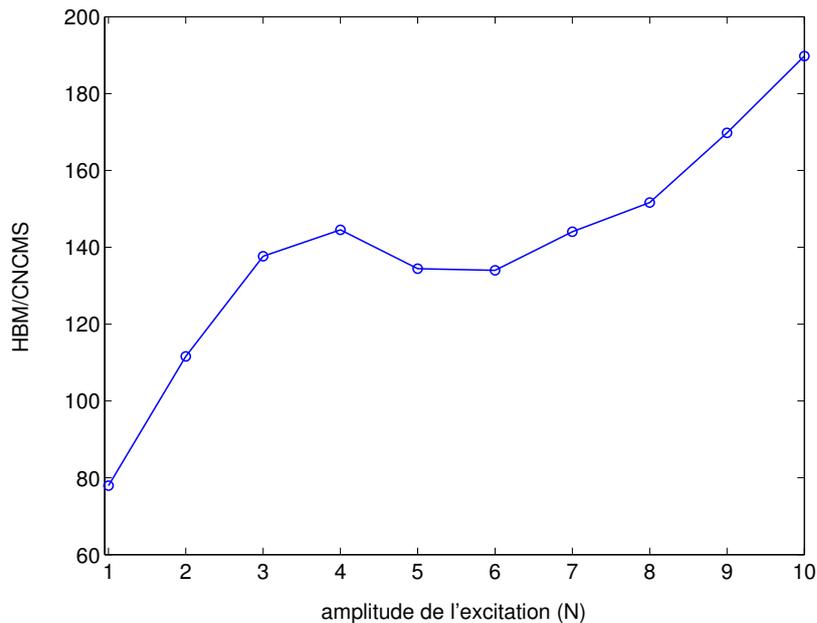


FIGURE III.9 – Rapport entre les temps de calcul de la HBM et de la CNCMS sur le modèle phénoménologique, en fonction du niveau d'excitation

Cette comparaison des temps de calcul met en avant la supériorité apparente de la CNCMS, mais les avantages de la méthode peuvent également être illustrés en s'intéressant à la vitesse de convergence. En effet, si l'on compare le nombre d'itérations total du solveur pour calculer une réponse par les deux méthodes, on observe une réduction du nombre d'itérations allant jusqu'à un facteur 7. Cette réduction du nombre d'itérations du solveur traduit une plus grande facilité de convergence, mais ne suffit pas à elle seule pour expliquer le gain en temps de calcul. En effet, malgré l'efficacité avérée de la procédure AFT présentée en section II.2, les performances de la HBM restent relativement dépendantes du temps requis pour évaluer les efforts non-linéaires $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Lors d'un calcul par CNCMS en revanche, ce terme n'est requis que pour le calcul des modes complexes non-linéaires, et donc sur une structure bien plus petite que le système global. L'interpolation des modes non-linéaires lors de la résolution du système réduit est relativement peu coûteuse en comparaison, *a fortiori* en cas d'interpolation linéaire par morceaux. Cela se traduit en pratique par une sensibilité plus faible de la CNCMS face au niveau d'activation des non-linéarités, et donc par une réduction significative des temps du calcul.

Pour l'étude de ce modèle non-linéaire désaccordé, la CNCMS présente des performances très intéressantes. Notons que sur la figure III.9, le calcul des modes complexes non-linéaire n'est pas pris en compte dans le temps de calcul de la réponse, car il n'est à faire qu'une seule et unique fois, étant indépendant de l'excitation. Or, lorsqu'il s'agit de réduction de modèle, il est toujours intéressant de mettre en perspectives le coût de construction du modèle réduit afin d'apprécier le gain réel obtenu. Pour le modèle phénoménologique utilisé ici, le calcul d'un mode prend une dizaine de secondes sur une station

de calcul standard⁵, ce qui est du même ordre de grandeur que le temps requis pour réaliser la synthèse d'une réponse forcée. Dans la section III.5 et le chapitre IV, considérant des modèles de plus grande taille, le temps consacré au calcul des modes sera bien entendu plus important.

Les performances de la CNCMS sur ce modèle phénoménologique doivent bien être mises en regard de l'ordre effectif de réduction obtenu dans ce cas de figure. En effet, en raison du nombre relativement faible de degrés de liberté non-linéaires pour chaque sous-structure, la CNCMS n'offre finalement qu'une réduction d'un facteur 5 du nombre de variables (ou 25 en l'absence de condensation sur les degrés non-linéaires). En revanche, sur un modèle plus complexe possédant davantage de degrés de liberté non-linéaires, la réduction obtenue grâce à l'utilisation des modes complexes non-linéaires sera d'autant plus importante par rapport à une CMS classique, qui nécessiterait de conserver l'intégralité de ces degrés de liberté. Nous reviendrons en détail sur cet aspect au chapitre IV.

Ce travail a été initié dans le but de répondre au besoin de l'industrie aéronautique en termes de réduction de modèle, et notamment face à la problématique posée par l'étude des roues aubagées désaccordées en présence de non-linéarités de contact. Bien que la CNCMS présentée dans cette section soit très polyvalente et applicable à un grand nombre de structures non-linéaires, l'obtention des équations (III.49) et (III.51) a requis certaines hypothèses susceptibles de limiter la qualité des résultats fournis par la méthode. En particulier, nous avons ici fait l'hypothèse que le mouvement des frontières entre les sous-structures pouvait être approché par des modes statiques ou des modes d'interface linéaires. Si cette approximation semble raisonnable pour l'étude du frottement en pied d'aube, elle pourrait s'avérer un peu trop grossière dans d'autres cas. En particulier, pour le modèle phénoménologique utilisé ici, en raison de la proximité entre les non-linéarités et les éléments de frontière, nous aurions pu nous attendre à ce que cette hypothèse induise une erreur relativement importante. Cependant, la qualité des résultats obtenus s'avère ici parfaitement acceptable, ce qui illustre la bonne robustesse de la CNCMS pour aborder ce type de structures.

4.3 Étude statistique du désaccordage en non-linéaire

Dans la section III.4.2 nous avons pu mettre en avant les performances très intéressantes de notre méthode en matière de temps de calcul, ce qui ouvre des perspectives pour étudier des modèles de grande taille, mais aussi pour mener des études statistiques telles que nous pouvons en rencontrer dans l'étude du facteur d'amplification résultant du désaccordage. Cette section présente quelques résultats concernant l'évolution du facteur d'amplification en fonction de l'intensité du désaccordage, pour le modèle non-linéaire de la section III.4.2 possédant 24 secteurs. Les temps de calculs étant considérablement réduits grâce à la CNCMS, il a été possible d'effectuer plusieurs milliers de tirages aléatoires, en appliquant directement le désaccordage sur la pulsation propre des modes non-linéaires. La pulsation propre de chaque secteur du système désaccordé est déterminée aléatoirement suivant une loi normale de probabilité, de valeur moyenne la pulsation propre du système accordé et d'écart type variable, définissant le taux de désaccordage considéré.

5. Intel(R) Core(TM) i5-4670K CPU @ 3.40GHz possédant 4 cœurs logiques.

Les courbes de la figure III.10 montrent l'évolution du facteur d'amplification induit par le désaccordage aléatoire pour des ordres moteurs (notés EO pour *Engine Order*) différents (*i.e.* pour des excitations tournantes possédant un nombre de diamètres différent). Sur chaque graphique correspondant à un ordre moteur, on a représenté en noir le facteur d'amplification du système linéaire avec interfaces de contact collées, et en bleu le facteur d'amplification du système non-linéaire. Chaque courbe est normalisée par la réponse du système accordé qui lui correspond, linéaire accordé pour les courbes noires, et non-linéaire accordé pour les courbes bleues. Insistons sur le fait qu'en aucun cas ces courbes ne permettent de juger de l'amplitude relative entre les réponses linéaires et les réponses non-linéaires, ces dernières étant en pratique systématiquement d'amplitude inférieure en raison de la dissipation résultant de la non-linéarité. Sur les courbes, chaque point de calcul correspond à un tirage aléatoire de 12 000 pales réparties sur 500 roues, assurant la convergence en moyenne de l'analyse.

Pour de faibles valeurs de désaccordage (*i.e.* pour un faible écart type σ), on observe un comportement similaire entre les cas linéaires et non-linéaires, avec une forte sensibilité (*i.e.* une forte pente) du facteur d'amplification face au désaccordage. Pour de fortes valeurs de désaccordage, on observe également une asymptote horizontale pour les deux modèles, comme nous pouvons le retrouver dans la littérature dans un cadre linéaire [19], présenté en section I.3.3. En revanche, la surtension classiquement observée pour les systèmes linéaires semble ici bien plus faible, si ce n'est absente, pour le système non-linéaire considéré. La valeur maximum du facteur d'amplification, bien que celle-ci soit du même ordre de grandeur dans un cas comme dans l'autre, semble quant à elle légèrement supérieure pour le système non-linéaire étudié.

Sans pour autant tirer des conclusions très générales sur le sujet, cette courte étude nous permet néanmoins d'entrevoir que le comportement statistique de la structure est susceptible d'être fortement influencé par la présence de non-linéarités, et qu'en conséquent, une extrapolation systématique des résultats obtenus sur des systèmes linéaires au cadre non-linéaire pourrait s'avérer assez discutable. Néanmoins, à la lumière de ces nouvelles observations, les problématiques liées au désaccordage intentionnel semblent toujours intéressantes pour la robustesse du dimensionnement vibratoire, à en croire la faible sensibilité du facteur d'amplification pour des valeurs relativement importantes, donc maîtrisées, du taux de désaccordage. Des études plus approfondies sur cette thématique seraient sans conteste d'un intérêt tout particulier pour les motoristes, mais pour cela, le développement de nouvelles méthodes de calcul adaptées, telle que celle proposée dans ce mémoire, semble être une étape nécessaire.

5 Validation de la méthode sur modèle éléments finis

L'étude consacrée au modèle phénoménologique de la section précédente nous a permis de mettre en évidence le potentiel de la CNCMS pour calculer la réponse forcée d'un système cyclique en présence de désaccordage, lorsqu'aucune hypothèse de symétrie ne peut être exploitée. Néanmoins, notre problématique s'intéresse à l'étude de modèles numériques industriels, dont la taille est d'une toute autre échelle. Pour rendre notre méthode

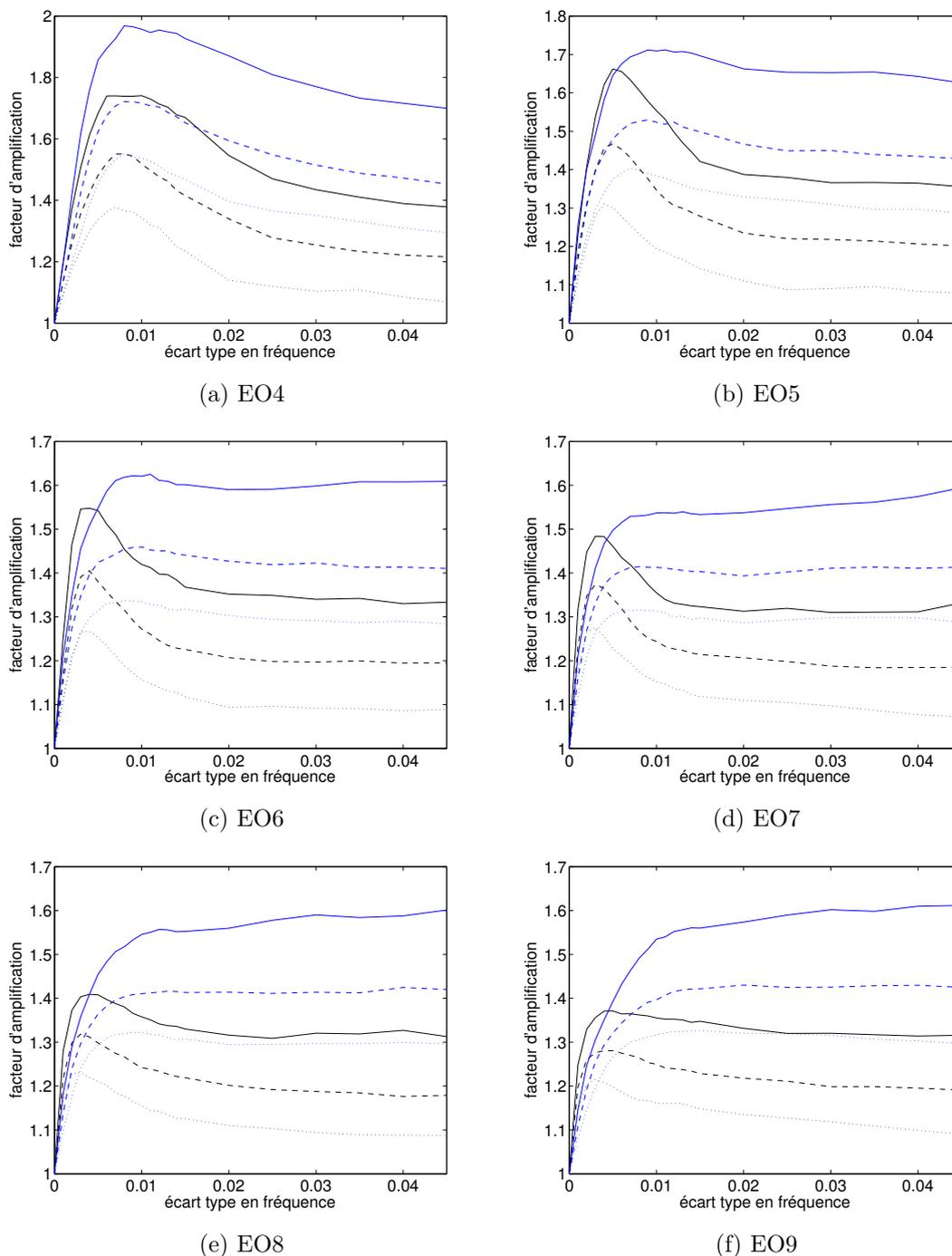


FIGURE III.10 – Facteur d’amplification en fonction du taux de désaccordage pour différents ordres moteur (1^{er} \dots , 5^e $---$, et 9^e $—$ déciles du modèle non-linéaire. 1^{er} \dots , 5^e $---$, et 9^e $—$ déciles du modèle linéaire.)

applicable à ce type de systèmes, nous en avons présenté une version exploitant une base de modes d'interface, visant à ne conserver que le strict nécessaire pour les besoins de l'étude. Cette section présente succinctement le modèle éléments finis que nous avons utilisé pour valider la CNCMS avec double synthèse modale, permettant d'aborder avec sérénité le modèle plus réaliste du chapitre IV.

5.1 Présentation du modèle

Les principaux critères identifiés lors de la rédaction du cahier des charges du modèle sont rappelés ci-dessous. Ceux-ci ont pour objectif de mener à un système assurant le compromis désiré entre simplification de la mise en données, et validation des performances de la méthode.

- Le modèle doit permettre une prise en main rapide des routines d'exportation réalisant le transfert des données générées par le logiciel de calcul par éléments finis, vers l'environnement MATLAB. La génération du maillage doit être relativement simple et paramétrable, offrant la possibilité de faire varier la finesse du maillage et la nature des éléments.
- Malgré sa simplicité, le modèle doit conserver suffisamment de complexité pour permettre de valider la faisabilité de la méthode sur un modèle de roue réelle. Entre autres, on prendra soin d'utiliser des éléments tridimensionnels quelconques, sans contrainte particulière quant à leur nature et leur ordre.
- Le modèle doit permettre de valider les performances de la méthode, particulièrement dans sa version avec double synthèse modale. Pour cela, on choisira un maillage relativement grossier sur les frontières du secteur, permettant de comparer les résultats obtenus avec et sans réduction des interfaces, à la fois en matière de précision et de temps de calcul.
- Afin de simplifier la mise en donnée, le pied de pale sera du type queue d'aronde. En effet, un pied de sapin alourdirait inutilement la tâche en augmentant le nombre d'interfaces de contact à définir. Le nombre de degrés de liberté non-linéaires pourra être ajusté simplement en faisant varier la finesse du maillage sur les portées de contact. Les zones de contact sont choisies planes, et le maillage des surfaces maître et esclave coïncidents, ce qui permettra d'exploiter des algorithmes de gestion du contact et du frottement déjà implémentés.

La roue complète et le secteur fondamental du modèle sont représentés sur la figure III.11. La structure possède 24 secteurs, portant le nombre total de nœuds du maillage à 24120, soit 72360 degrés de liberté. Pour chaque secteur, on dénombre 90 degrés de liberté de contact (*i.e.* non-linéaires) et 420 degrés de liberté sur les frontières cycliques. La section suivante présente les résultats de simulation obtenus sur ce modèle.

5.2 Résultats de simulations

La réalisation d'un calcul de réponse forcée par CNCMS, avec ou sans double synthèse modale, requiert une procédure de mise en données assez particulière, détaillée dans le chapitre IV. Dans cette section, nous nous concentrerons sur la validation de la réduction des frontières sur une base de modes d'interface, indispensable pour aborder efficacement un modèle de complexité industriel.

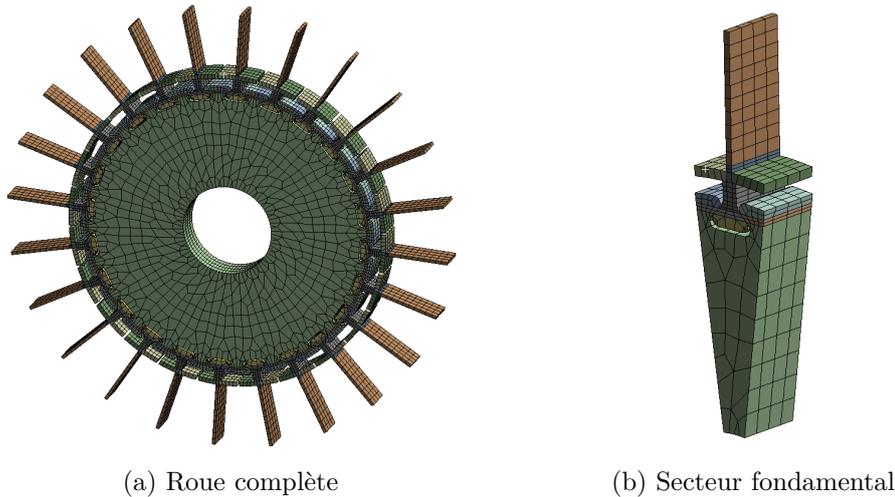


FIGURE III.11 – Modèle éléments finis simplifié de roue aubagée

Positionnement fréquentiel Avant toute chose, afin de cibler judicieusement la plage de l'étude, il est nécessaire de s'appropriier le positionnement fréquentiel de la structure. Pour cela, un code commercial de calcul par éléments finis a été utilisé pour réaliser l'analyse modale numérique du modèle, en collant le contact entre la pale et le secteur de disque. Ici, aucune précharge centrifuge n'est appliquée au système. L'utilisation du formalisme semi-ondulatoire présenté en section 1.2 permet de ramener l'analyse modale du système à la résolution de 12 problèmes aux valeurs propres généralisés, correspondant chacun à un indice harmonique. Le tri des modes selon le nombre de diamètres de leur déformée est alors immédiat, ce qui permet d'obtenir aisément l'évolution de chaque famille modale, reportée sur la figure III.12. On observe ici un comportement relativement classique. La déformée des modes pour l'indice harmonique 12 est donnée en figure III.13, permettant d'identifier chacune des familles selon la terminologie usuelle⁶.

Compte tenu de l'objectif poursuivi ici, à savoir, la validation de la CNCMS en double synthèse modale, il semble judicieux de placer notre étude dans une zone ne faisant intervenir qu'une seule famille modale, et dont les différents modes à diamètres sont regroupés sur une plage fréquentielle relativement restreinte, afin d'apporter une contribution significative en cas de désaccordage. À la lumière de ces résultats, nous allons cibler l'étude au voisinage du mode double à six diamètres de la première famille, dont la fréquence propre est de 811,8Hz.

Modes non-linéaires Afin d'appliquer notre méthode, le premier mode complexe non-linéaire du secteur encastré sur ses frontières cycliques est calculé à l'aide de la méthodologie présentée en section II.4.3. Il s'agit du premier mode de flexion de la pale, ce qui correspond bien à la famille modale qui nous intéresse. Dans un premier temps, étant donné l'écart en fréquence entre la première et la deuxième famille pour le nombre de diamètre considéré, aucun autre mode non-linéaire n'est conservé dans la base de réduction du super-élément. Nous reviendrons sur ce point par la suite afin de vérifier la validité de cette hypothèse. Spécifions ici que le calcul du mode non-linéaire a requis 87 secondes sur

6. F pour *flap-wise bending*, E pour *edge-wise bending*, T pour *torsion*, et C pour *compression*.

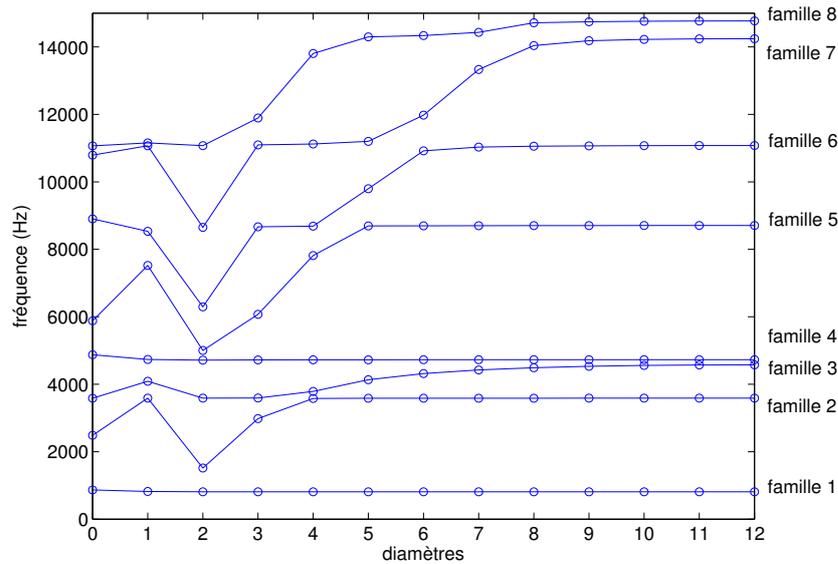


FIGURE III.12 – Évolution des fréquences propres du modèle simplifié avec contact collé en fonction de l'indice harmonique

un serveur de calcul⁷ en exploitant 16 cœurs logiques.

Modes d'interface Pour la simulation se basant sur l'expression (III.51) des super-éléments, la base de modes d'interface utilisée pour la réduction des frontières est déterminée par filtrage des modes de fréquence supérieure à 30kHz, ce qui s'avère amplement suffisant compte tenu de la plage fréquentielle du calcul [29, 124] (située au voisinage de 812Hz). La matrice $\mathbf{\Gamma}$ est ainsi constituée de 100 vecteurs, dont le calcul a pris 10 secondes sur le même serveur que précédemment⁸, en exploitant 3 cœurs logiques. Insistons sur le fait que cette étape de réduction permet de remplacer les 5040 degrés de frontière du modèle par seulement 100 coordonnées généralisées associées aux modes d'interface. Comme nous allons le voir, cette réduction drastique de la taille du modèle permet d'obtenir un gain non-négligeable en temps de calcul.

Désaccordage Le désaccordage de la structure est réalisé par ajout d'une perturbation aléatoire de faible amplitude sur la fréquence des modes non-linéaires de chaque sous-structure. Le schéma de désaccordage est déterminé avant la double synthèse modale, ce qui permet de le prendre en compte dans le calcul des modes d'interface, par ajout d'une correction en raideur modale, équivalente à l'aléa fréquentiel sur chacune des sous-structures. Cette prise en compte du désaccordage pour la réduction des frontières est d'autant plus importante lorsque l'on s'intéresse à des schémas de désaccordage intentionnels, brisant de façon plus nette encore la symétrie de la structure. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point au chapitre suivant.

7. Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2690 @ 2.90GHz.

8. Voir note de bas de page 7 (p.129).

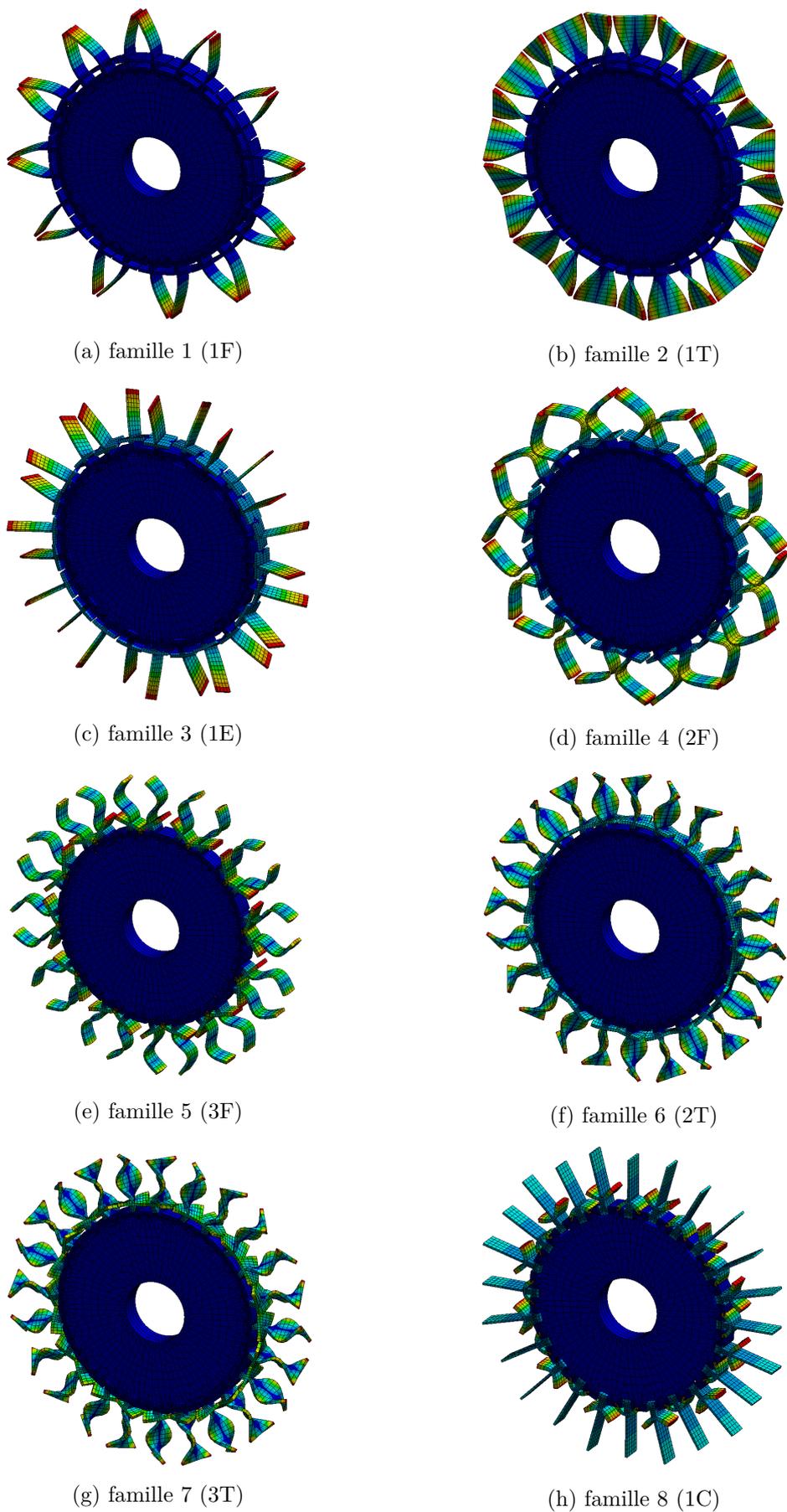


FIGURE III.13 – Déformées modales à 12 diamètres du modèle simplifié avec contact collé

Résultats La figure III.14 montre les réponses en fréquence obtenues par CNCMS avec, et sans double synthèse modale. On observe ici la superposition quasi-parfaite des courbes déterminées par l'une ou l'autre des méthodes pour chacune des 24 pales du modèle, et ce malgré la réduction significative des temps de calcul grâce aux modes d'interface. En effet, le calcul par CNCMS à frontières fixes dans sa version standard prend environ 15h sur le serveur⁷ en exploitant 14 cœurs logiques, alors que pour cette configuration le calcul par CNCMS avec double synthèse modale ne prend que 2h. Cette simulation permet de valider le modèle réduit livré par l'expression (III.51) des super-éléments non-linéaires, et ainsi d'aborder des modèles de roues aubagées plus réalistes, ce qui sera l'objet du chapitre IV.

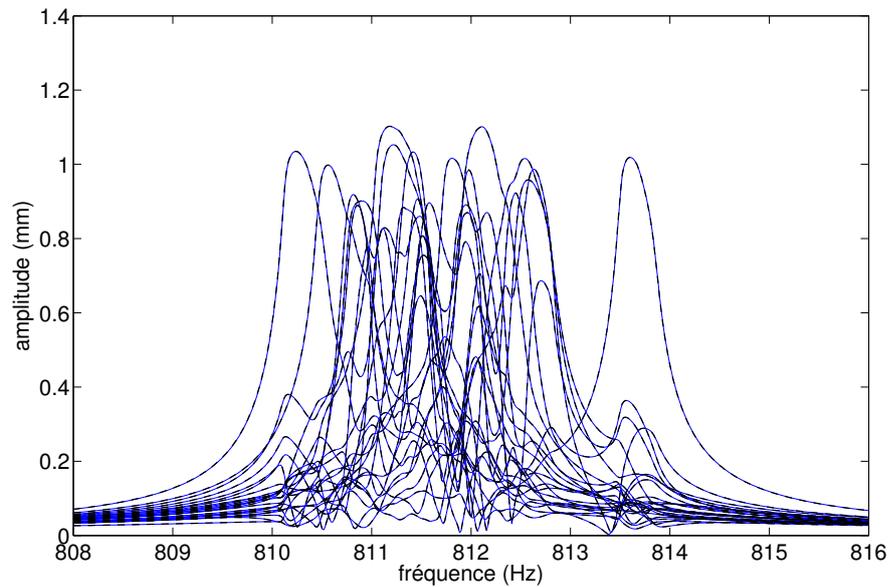


FIGURE III.14 – Réponse forcée non-linéaire du modèle simplifié désaccordé (CNCMS avec double synthèse modale —, CNCMS sans double synthèse modale - - -)

Avant de conclure cette section, il peut être intéressant de vérifier que l'omission volontaire des modes non-linéaires d'ordre supérieur, s'appuyant sur l'écart en fréquence séparant le mode cible et la famille modale la plus proche, est bel et bien justifiée. Pour cela, un calcul par CNCMS et double synthèse modale est réalisé en conservant dans la base de réduction un, puis deux modes non-linéaires, pour un même schéma de désaccordage aléatoire, appliqué sur le premier mode uniquement. La figure III.15 présente les courbes de réponses obtenues pour ces deux cas de figures. On constate une fois de plus la parfaite superposition entre les courbes de réponses, et donc l'absence de contribution modale du deuxième mode⁹, justifiant ainsi notre hypothèse initiale.

⁹. On aurait également pu se contenter de vérifier que la valeur des coordonnées généralisées est inférieure de plusieurs ordres de grandeur pour le second mode.

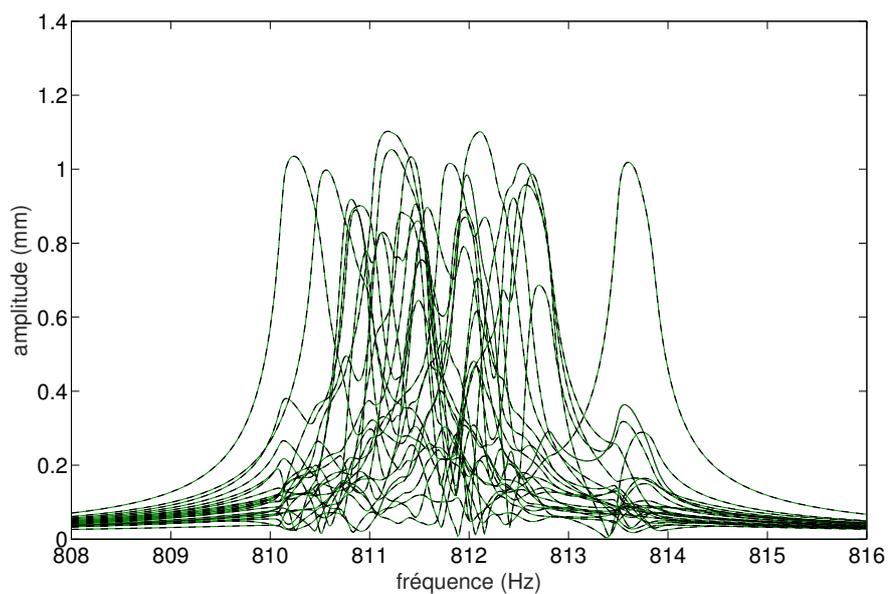


FIGURE III.15 – Réponse forcée non-linéaire du modèle simplifié désaccordé par CNCMS et double synthèse modale (un mode non-linéaire retenu —, deux modes non-linéaires retenus - - -)

Bilan

Ce chapitre nous a permis de présenter les principaux développements théoriques menés durant ce travail de recherche, aboutissant à l'élaboration d'une nouvelle méthode permettant d'aborder efficacement le calcul de la réponse forcée de systèmes non-linéaires. Cette méthode s'appuie sur le concept de mode complexe non-linéaire de la section II.4.3 pour capturer les effets dynamiques induits par les non-linéarités, combiné à une procédure de sous-structuration en double synthèse modale permettant de répartir efficacement les efforts de calcul, tout en assurant un impact relativement faible sur l'ordre de réduction. Cette approche a pu être testée dans un premier temps sur modèle phénoménologique pour évaluer ses performances, avant d'être validée sur un modèle élément finis tridimensionnel. Les résultats concluants obtenus nous permettent d'aborder l'étude d'un modèle de complexité supérieure, validant la pertinence de la méthode développée pour répondre à notre problématique. Cela est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre IV

Étude d'un modèle industriel de roue aubagée

Ce chapitre présente l'étude d'un modèle de roue aubagée de complexité industrielle. L'utilisation de la méthode développée au chapitre III permet ici de réaliser des calculs de réponse forcée non-linéaire sur une structure désaccordée, avec prise en compte des phénomènes de contact entre les composants. Après une première section présentant le modèle éléments finis de la roue, les étapes successives de réduction permettant la mise en donnée du problème sont détaillées en section IV.2. Des résultats de simulation pour différentes configurations sont finalement proposés en section IV.3.

Sommaire

1	Présentation du modèle	134
1.1	Géométrie et matériaux	134
1.2	Maillage	135
1.3	Chargement statique et conditions aux limites	136
1.4	Positionnement fréquentiel	136
2	Phase préparatoire	137
2.1	Craig-Bampton initial	137
2.2	Modes non-linéaires	140
2.3	Modes d'interface	141
3	Résultats de simulations	143
3.1	Famille isolée	144
3.2	Zone de veering	146
3.3	Désaccordage en forme	149
	Bilan	151

1 Présentation du modèle

Cette section présente le modèle numérique utilisé pour réaliser l'ensemble des simulations du chapitre. Il s'agit d'un modèle éléments finis de roue aubagée construit à l'aide d'un logiciel commercial, qui sera par la suite exporté pour servir de données d'entrées au code de calcul que nous avons élaboré.

1.1 Géométrie et matériaux

La roue étudiée est une roue fictive de turbine libre pour turbomoteurs d'hélicoptères. Elle est caractérisée par des pales relativement élancées, par comparaison aux pales courtes et trapues habituellement rencontrées sur les turbines haute pression. Le secteur fondamental de la structure est représenté sur la figure IV.1. Il s'agit d'une roue à pales rapportées, technologie couramment employée pour les étages de turbines, et dont nous avons pu discuter en section I.3.4. Les effets non-linéaires qui nous intéressent sont une fois de plus les phénomènes de friction prenant place à l'interface entre chacune des pales et le disque. L'ouverture angulaire du secteur est de 15° , ce qui équivaut à une roue complète de 24 pales. On constate ici que, contrairement au modèle simplifié de la section III.5, le pied de pale est de type pied de sapin, possédant non pas deux mais quatre surfaces de contact avec l'alvéole du secteur de disque¹.

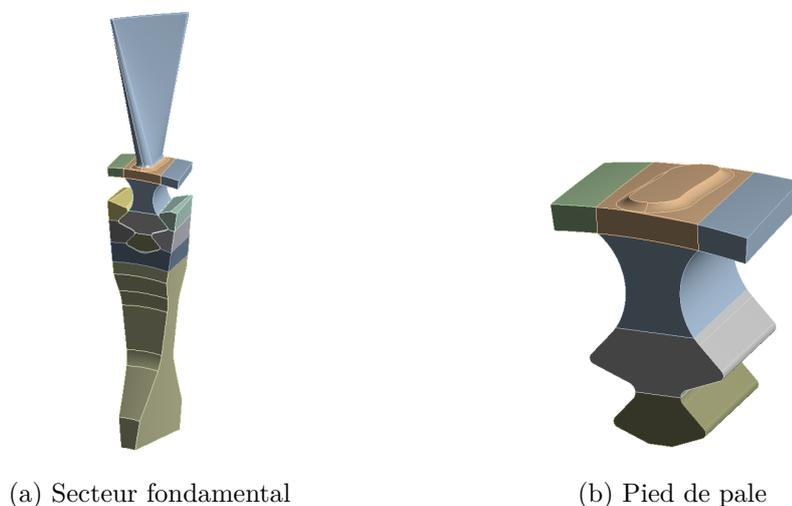


FIGURE IV.1 – Géométrie du modèle industriel

On suppose que la pale et le disque sont réalisés en super-alliages de type Inconel 738 et Inconel 718, respectivement, dont les propriétés sont reportées dans le tableau IV.1. Le coefficient de frottement entre les deux composants est supposé constant et égal à 0,15.

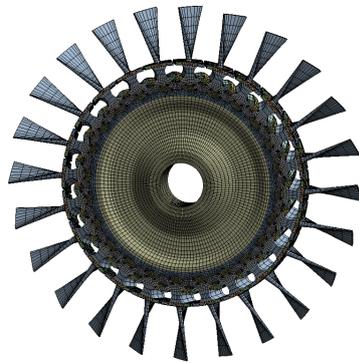
1. La terminologie “pied de sapin” est généralement employée dès lors que le nombre de lobes du pied de pale est supérieur à deux.

TABLEAU IV.1 – Propriétés matérielles des pales et du disque à 20°C

Matériau	Inconel 718 (Disque)	Inconel 738 (Pales)
Module d'Young E (GPa)	199,9	200,6
Coefficient de Poisson ν (-)	0,29	0,29
Masse volumique ρ (kg/m ³)	8200	8110

1.2 Maillage

Le maillage du modèle est représenté sur la figure IV.2. Celui-ci est exclusivement formé d'éléments volumiques linéaires et quadratiques, de type hexaédriques ou tétraédriques. Le maillage est réalisé de façon semi-automatique par le logiciel commercial, que l'on a pris soin de guider afin de contrôler la taille des éléments dans chacune des zones. Le secteur fondamental possède 35 532 degrés de liberté, dont 2994 situés sur les frontières cycliques, et 888 sur les zones de contact. Le maillage équivalent de la roue complète comporte ainsi 816 840 degrés de liberté, dont 35 928 sur les frontières et 21 312 sur les portées. On comprend ici que simuler la réponse forcée non-linéaire d'un tel système par équilibrage harmonique s'avèrerait extrêmement coûteux en temps de calcul. En outre, compte tenu du nombre de degrés de liberté situés sur les frontières, il apparaît que seule la CNCMS avec double synthèse modale est envisageable avec les ressources de calcul dont nous disposons, d'où l'intérêt que nous avons porté à valider cette approche en section III.5. Les statistiques du maillage sont résumées dans le tableau IV.2.



(a) Roue complète



(b) Secteur fondamental

FIGURE IV.2 – Maillage du modèle industriel

TABLEAU IV.2 – Statistiques du maillage pour le modèle industriel

Nombre de DDL	Pale	Disque	Secteur	Roue
Contact	444	444	888	21 312
Frontières	—	2994	2994	35 928
Total	15 222	20 310	35 532	816 840

1.3 Chargement statique et conditions aux limites

En raison des fortes températures du fluide en aval de la chambre de combustion, il est généralement d'usage en bureau d'étude de prendre en compte les effets thermiques lors des analyses statiques et modales des roues de turbines. La prise en compte de ces effets est habituellement réalisée par projection d'un champ thermique obtenu en amont de l'analyse mécanique. Cependant, nous ne disposons pas de ce champ thermique pour le modèle considéré, ce qui nous contraint à en ignorer les effets. Néanmoins, cela n'impacte en rien l'intérêt de notre analyse, puisque celle-ci ne vise qu'à évaluer la faisabilité de la CNCMS sur un modèle industriel, et non l'extraction d'amplitudes à corrélérer avec des données d'essais.

Afin de précontraindre la structure, on impose un champ centrifuge équivalent à une rotation de 20000 tr/min autour de l'axe de symétrie de la roue. En raison des non-linéarités de contact entre la pale et le disque, l'état de contraintes résultant est déterminé en réalisant une analyse statique non-linéaire permettant de converger de façon itérative vers un point d'équilibre du système. Afin de prévenir tout mouvement de corps rigide sans empêcher la dilatation de la roue sous l'effet du chargement, on applique un blocage axial et ortho-radial au disque sur la zone représentée en figure IV.3a, et on impose des conditions de symétrie cyclique aux frontières gauche et droite du secteur (voir figure IV.3b). Cette étape permet d'une part de déterminer le champ de précontrainte que nous allons utiliser lors de la création des super-éléments de la pale et du secteur de disque (voir section IV.2.1), représenté sur la figure IV.4 pour chacun des composants, et d'autre part d'obtenir les pressions de contact sur les portées. Ces pressions de contact seront par la suite moyennées pour obtenir l'effort normal à utiliser lors du calcul des modes non-linéaires.

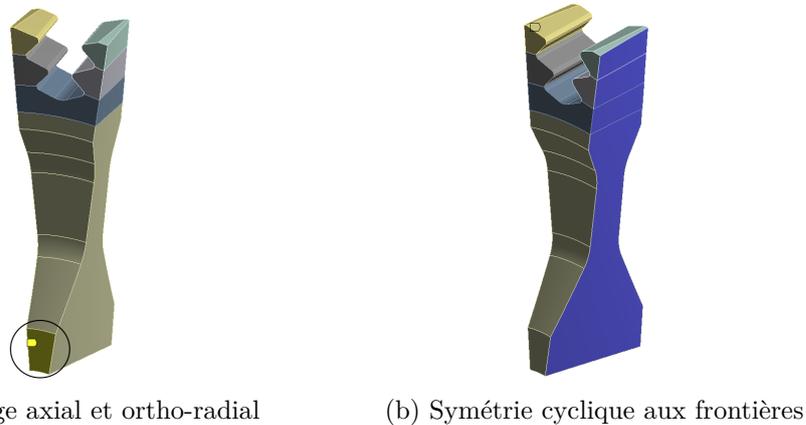


FIGURE IV.3 – Conditions aux limites de l'analyse statique non-linéaire

1.4 Positionnement fréquentiel

Finalement, pour les raisons déjà évoquées lors de l'analyse du modèle 3D de la section III.5, il est important de s'appropriier le positionnement fréquentiel de la roue. Pour cela, on procède à l'analyse modale numérique du modèle accordé, en appliquant des conditions de symétrie cyclique aux frontières. Ces conditions de symétrie permettent une fois de plus d'exploiter le formalisme de la section I.2, pour déterminer efficacement les premiers

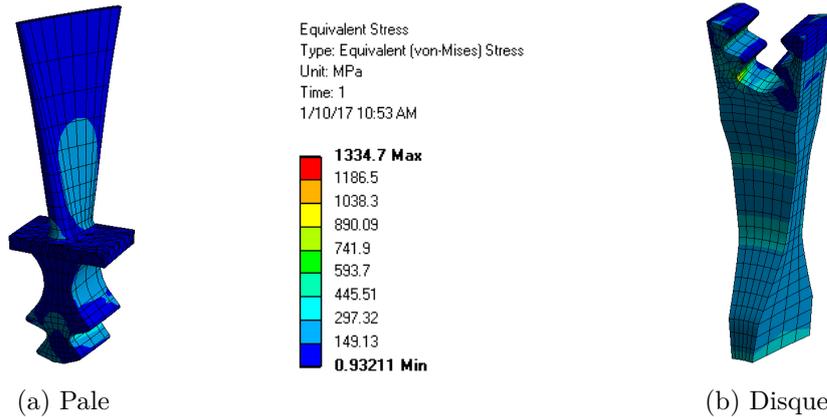


FIGURE IV.4 – Champs de précontraintes des composants

modes de la roue correspondant à chaque indice harmonique. L'analyse étant ici linéaire, il convient de coller préalablement le contact entre la pale et le disque à l'issue de l'analyse statique de précontrainte, qui reste, elle, non-linéaire. Notons que l'assouplissement centrifuge est ici pris en compte lors du calcul des modes, ce qui revient à conserver la matrice \mathbf{N} en plus de la matrice de précontrainte \mathbf{S} de l'équation (I.48). À titre indicatif, à 20000 tr/min, la prise en compte de ces effets induits par la rotation résulte en un décalage du premier mode de flexion des pales de l'ordre de 10% vers les hautes fréquences. L'évolution des fréquences propres du modèle en fonction de l'indice harmonique est représentée sur la figure IV.5, sur laquelle on a regroupé les modes par familles selon la procédure classique. L'identification des familles modales² est possible en observant les déformées correspondant à l'indice harmonique maximal, reportées sur la figure IV.6. Pour la suite de l'étude, on choisira de se concentrer sur la plage fréquentielle de la première famille modale.

2 Phase préparatoire

Cette section s'intéresse aux étapes réalisées en amont de la CNCMS à partir des données structurales du modèle éléments finis. Ces étapes comprennent la création des super-éléments qui seront utilisés pour le calcul des modes non-linéaires, le calcul des modes non-linéaires, et le calcul des modes d'interface utilisés pour la double synthèse modale.

2.1 Craig-Bampton initial

Afin de manipuler des données de taille réduite, en amont du calcul des modes non-linéaires, la pale et le secteur de disque sont préalablement réduits par une procédure classique de CMS à interfaces fixes. Pour cela, à l'issue de l'analyse statique non-linéaire permettant de calculer l'état de précontrainte du système, on relaxe l'ensemble des conditions aux limites, et l'on extrait les données matricielles relatives à la pale, et celles relatives au secteur de disque. Sur chacun de ces sous-systèmes, on applique alors une réduction de Craig-Bampton en conservant en degrés maîtres les degrés de liberté sur les zones de contact, et le cas échéant ceux situés sur les frontières du secteur. Il convient également

2. Voir note de bas de page 6 pour la terminologie (p.128).

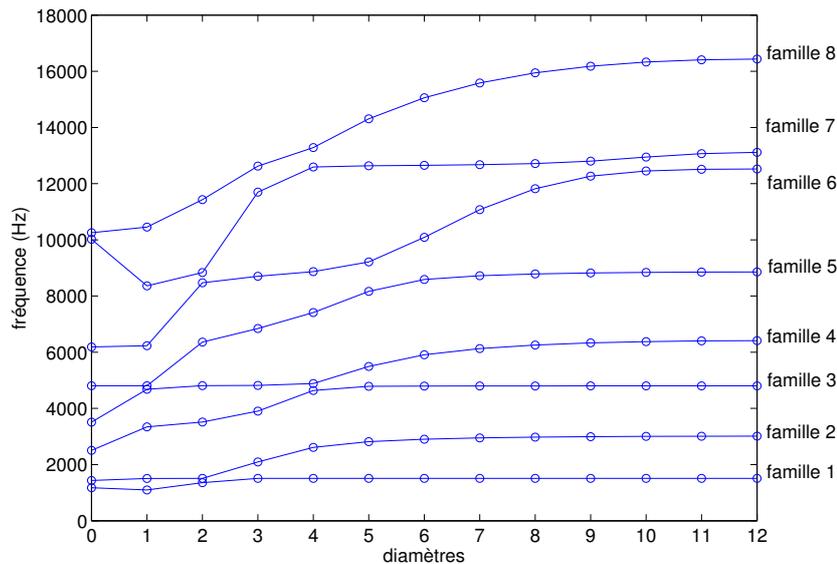


FIGURE IV.5 – Évolution des fréquences propres du modèle industriel avec contact collé en fonction de l'indice harmonique

de retenir en degrés maîtres les éventuels degrés de liberté d'observation, correspondant ici à un nœud en tête de pale représenté sur la figure IV.7. Rappelons que c'est l'un de ces degrés de liberté qui sera utilisé comme coordonnée de contrôle pour les modes non-linéaires, et donc comme coordonnée généralisée de la CNCMS.

La procédure conduit à la création de deux super-éléments, un pour la pale, et un pour le secteur de disque, incorporant chacun l'état de précontrainte résultant du champ centrifuge. Pour construire les super-éléments, on choisit de retenir les modes à interfaces fixes possédant une fréquence inférieure à 110kHz, garantissant ainsi la validité de la réduction pour l'ensemble des plages fréquentielles pouvant présenter un intérêt, et arrondi au multiple de 10 supérieur le plus proche pour faciliter le décompte des coordonnées. Le super-élément de la pale est ainsi construit à partir des 50 premiers modes linéaires à interfaces fixes et de 447 modes statiques de liaison associés aux 444 degrés de contact et aux 3 degrés d'observation. Le super-élément du disque est quant à lui construit en ne retenant que 10 modes linéaires à interfaces fixes et 3438 modes statiques de liaison, 444 associés aux degrés de contact, et 2994 associés aux frontières. Ce nombre relativement faible de modes internes retenus pour le disque s'explique simplement par la très grande rigidité du composant lorsque les frontières cycliques sont bloquées. Les super-éléments ainsi obtenus convergent en fréquence avec moins d'1% d'erreur sur une plage allant de 0 à 40kHz. Notons que lors de la construction des super-éléments, les étapes les plus coûteuses sont le calcul des modes statiques de liaison, dont l'expression est donnée par l'équation (III.19), et la construction des matrices réduites. Les temps de calculs associés aux principales étapes de cette réduction sont résumés dans le tableau IV.3, et ont été réalisés sur un serveur possédant 13 cœurs logiques de disponibles³.

3. Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2690 @ 2.90GHz.

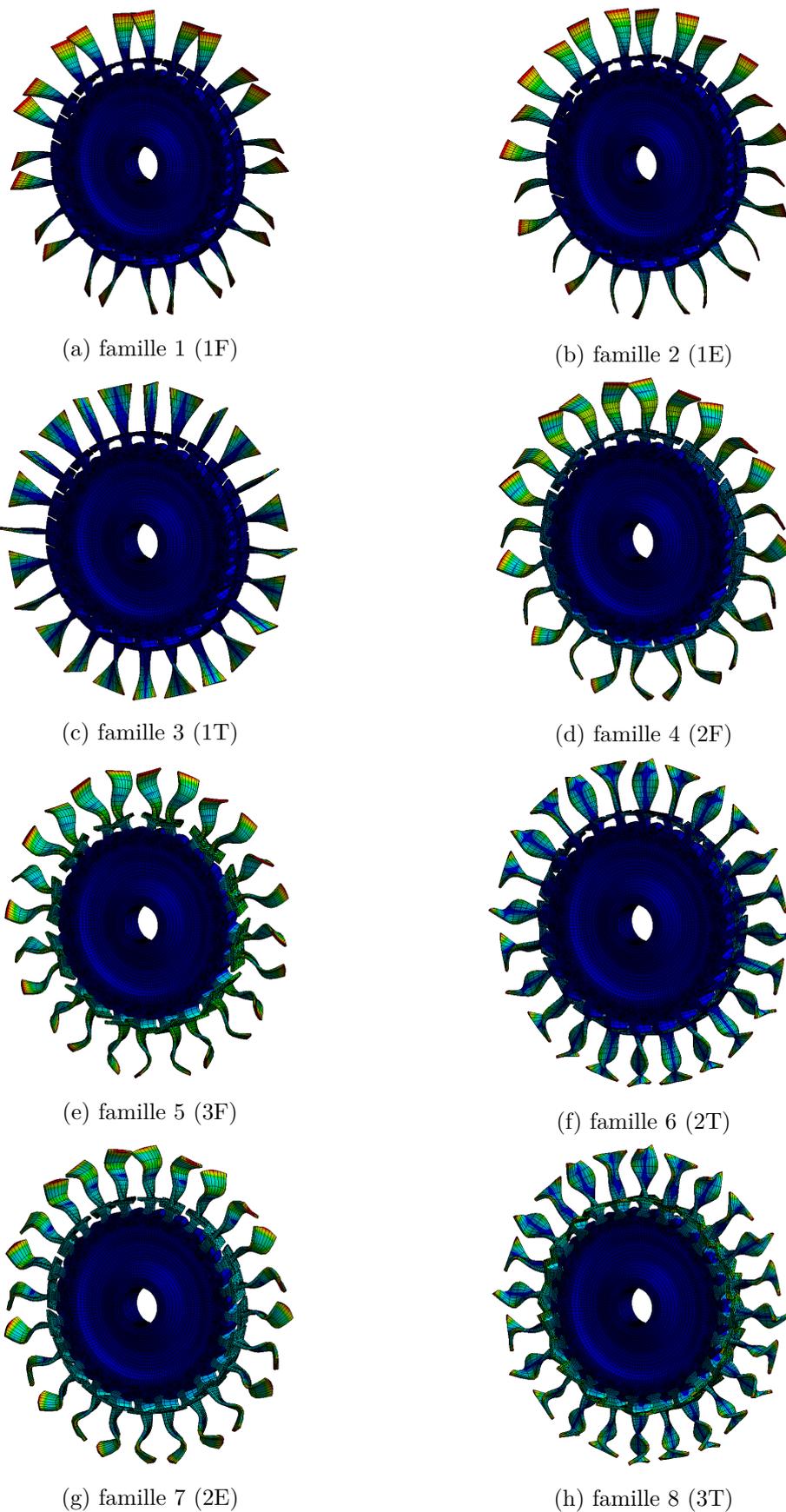


FIGURE IV.6 – Déformées modales à 12 diamètres du modèle industriel en contact collé, avec prise en compte de l'assouplissement centrifuge et de la précontrainte.

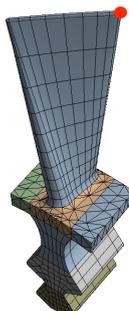


FIGURE IV.7 – Nœud d’observation en tête de pale sur le bord de fuite (point rouge)

TABLEAU IV.3 – Temps de calcul pour la création des super-éléments initiaux

Étapes	Modes linéaires	Modes statiques	Matrices réduites	Total
Pale	3.6 sec	31.7 sec	14.9 sec	57.6 sec
Disque	2.9 sec	321.6 sec	641.9 sec	985.4 sec

2.2 Modes non-linéaires

Une fois construits les super-éléments linéaires de la pale et du disque, nous pouvons passer au calcul des modes non-linéaires qui seront retenus dans la base de réduction de la CNCMS. Ces modes sont calculés sur le système résultant de l’assemblage des deux super-éléments, après avoir encastré les frontières du disque, dont les degrés de liberté ont été conservés en degrés maîtres. La procédure de calcul utilisée est celle décrite à la section II.4.3, bénéficiant d’une expression analytique de la matrice jacobienne du système. Les paramètres modaux sont obtenus par continuation séquentielle sur la coordonnée de contrôle correspondant au degré de liberté azimutal du nœud d’observation de la figure IV.7.

Les efforts non-linéaires agissant sur les composants au niveau de l’interface sont calculés par la procédure d’alternance temps-fréquence que nous avons présentée à la section II.2.2. Dans le domaine temporel, c’est la méthode *Dynamic Lagrangian Frequency-Time* ou DLFT qui est utilisée pour évaluer les efforts de contact et de frottement. Cette méthode est équivalente à la loi de frottement sec de Coulomb et à des conditions de non-pénétration entre les solides en contact. Elle a fait l’objet de nombreuses études ces dernières années [21, 22, 83, 106, 107], démontrant son potentiel pour l’analyse des systèmes frottants dans le domaine fréquentiel. Les routines associées à la DLFT que nous avons utilisées sont issues d’un code de calcul interne, validées lors de travaux antérieurs. Celles-ci utilisent un formalisme “nœud à nœud” du contact, permettant d’exploiter les techniques de condensation de la section II.2.5. L’effort normal appliqué sur les nœuds des portées est déterminé en prenant la moyenne des pressions de contact issues du calcul statique de précontrainte de la section IV.1.3, ce qui équivaut à 200N par paire de nœuds en contact pour le système considéré. Le coefficient de frottement est, quant à lui, maintenu à la valeur utilisée pour le calcul statique de précontrainte, soit 0.15.

Compte tenu du nombre de degrés de liberté de contact du modèle, les temps de calcul associés à l'obtention des modes non-linéaires ne sont plus négligeables face aux autres étapes de la simulation. À titre d'exemple, le calcul du premier mode non-linéaire du secteur encastré, correspondant au premier mode de flexion de la pale (famille 1F), prend environ 30min sur un serveur possédant 14 cœurs logiques de disponibles⁴. Bien entendu, ce temps de calcul dépend au premier ordre du nombre de points pour lesquels les paramètres modaux ont été évalués. Ici, le mode non-linéaire est calculé en 90 points, obtenus en discrétisant la plage d'amplitude $[0 \ 0.45]$ (mm) de la coordonnée de contrôle avec un pas de continuation de 0.005mm.

2.3 Modes d'interface

Afin d'utiliser la version de la CNCMS avec double synthèse modale, il est nécessaire de déterminer une base de modes d'interface sur laquelle projeter les frontières. Pour cela, on colle dans un premier temps les degrés de liberté de contact de la pale et du disque, afin de construire un nouveau super-élément linéaire par la méthode de Craig-Bampton, mais correspondant cette fois-ci au secteur complet (pale insérée dans le secteur de disque). Ce super-élément est l'équivalent du super-élément non-linéaire de la CNCMS en l'absence de glissement, il est donc construit en conservant les modes linéaires à frontières fixes équivalent aux modes non-linéaires que nous allons conserver, et en déterminant les modes statiques de liaison associés aux frontières du secteur. Comme nous l'avons précisé en section III.3, il est fondamental ici de travailler sur le modèle réduit linéaire associé à un contact collé, afin que l'information en provenance des frontières du secteur puissent circuler librement et se transmettre aux pales. Dans le cas contraire, le couplage des pales par le disque ne serait plus assuré. Les super-éléments obtenus sont ensuite assemblés par l'intermédiaire des degrés de frontières, pour aboutir à un modèle réduit linéaire de la roue équivalent au système (III.31). La base de réduction des frontières est alors déterminée par résolution du problème aux valeurs propres généralisé (III.32), en ne conservant que les 150 premiers modes. Cette troncature permet d'approcher avec moins d'1% d'erreur en fréquence les 148 premiers modes de la roue, balayant la plage fréquentielle allant de 0 à 43kHz. Rappelons ici que le modèle réduit obtenu par assemblage de ces 24 super-éléments incorpore les éventuels schémas de désaccordage aléatoire et intentionnel appliqués à la roue. En effet, le schéma intentionnel est directement inclus en calculant les super-éléments associés à l'ensemble des secteurs fondamentaux de la roue, et en respectant leur répartition lors de l'assemblage du modèle. Le schéma aléatoire, quant à lui, est pris en compte par ajout d'une correction en raideur modale équivalente à l'aléa fréquentiel directement sur le coefficient adéquat dans la matrice de raideur réduite. En raison de la taille du problème aux valeurs propres à résoudre, le calcul des modes d'interface est une étape qui peut s'avérer relativement coûteuse en ressources numériques. Néanmoins, le faible nombre de vecteurs propres à extraire permet ici d'obtenir les modes désirés en une dizaine de minutes, en effectuant le calcul sur un serveur possédant 14 cœurs logiques de disponibles⁵.

Résumé de la phase préparatoire

4. Voir note de bas de page 3 (p.138).

5. Voir note de bas de page 3 (p.138).

Comme nous avons pu le voir, la phase préparatoire de la CNCMS fait intervenir un certain nombre d'étapes qui, en pratique, complexifient légèrement son implémentation. Afin de clarifier la procédure, les points clés permettant d'aboutir à la construction du modèle réduit final sont résumées ci-dessous.

1. Craig-Bampton initial

- Création d'un super-élément pour la pale et d'un super-élément pour le secteur de disque pour chacun des secteurs fondamentaux de la roue, en conservant les degrés de contact, d'observation, et de frontières en degrés maîtres.
- Assemblage des super-éléments pour former un système pale+disque en vue du calcul des modes non-linéaires.

2. Modes non-linéaires

- Encastrement des degrés de frontières par suppression des lignes et colonnes correspondantes dans les matrices du système pale+disque.
- Calcul des modes complexes non-linéaires sur le système à frontières fixes obtenu. Ce calcul doit être fait pour l'ensemble des secteurs fondamentaux de la roue (cas de désaccordage intentionnel).

3. Modes d'interface

- Collage du contact sur le système pale+disque afin de garantir le couplage de la pale et des frontières du secteur.
- Encastrement des degrés de frontières par suppression des lignes et des colonnes associées dans les matrices du système.
- Calcul des modes linéaires à frontières fixes sur le système résultant, équivalents aux modes non-linéaires en absence de glissement à l'interface de contact.
- Calcul des modes statiques de liaison sur ce secteur avec contact collé.
- Construction d'un nouveau super-élément correspondant au secteur avec interface de contact collée.
- Assemblage de ces nouveaux super-éléments pour former un modèle réduit linéaire de la roue avec interfaces de contact collées.
- Calcul des modes d'interface à partir du modèle réduit nouvellement construit.
- Projection des degrés de frontières sur la base des modes d'interface obtenue.

L'ensemble de ces étapes aboutit *in fine* à un modèle réduit non-linéaire de la roue complète désaccordée, dont la résolution peut être abordée de façon itérative. Le tableau IV.4 résume la réduction progressive du modèle résultant de chacune de ces étapes, en rappelant les temps de calculs associés. Le nombre total de coordonnées du modèle final correspond ici aux 150 modes d'interface retenus, complétés du premier mode non-linéaire pour chacun des 24 secteurs. L'étude de la section III.5 nous a permis de démontrer que sur une plage fréquentielle ne faisant intervenir qu'une seule famille modale isolée, la rétention du seul mode encastré correspondant à cette famille était en effet suffisante pour calculer la réponse. Nous verrons ci-après comment notre méthode peut être aisément modifiée pour étudier efficacement des plages fréquentielles sur lesquelles plusieurs familles modales sont sollicitées.

TABLEAU IV.4 – Temps de calcul et réduction du modèle après application successive de chacune des étapes de la phase préparatoire

Étape de réduction	Temps de calcul (min)	Nombre de DDL restants
Modèle initial	—	816 840
Craig-Bampton	17	58 752
Modes non-linéaires	30	35 952
Modes d'interface	10	174

3 Résultats de simulations

Cette section présente quelques résultats de simulation que nous avons obtenus à l'aide du code de calcul développé, dans lequel est implémenté une version de la CNCMS avec double synthèse modale. Afin de démontrer l'intérêt de la CNCMS pour répondre à notre problématique, nous proposons ci-après trois études de cas reposant sur le modèle éléments finis présenté en section IV.1. La première consiste en une analyse qualitative de l'impact d'un schéma de désaccordage aléatoire sur la réponse non-linéaire de la roue, pour différents taux de désaccordage et différents niveaux d'excitation. La deuxième étude s'intéresse à une plage fréquentielle proche d'une zone de *veering*, afin d'illustrer la capacité de notre méthode à aborder ce type situation. Enfin, nous concluons ce chapitre en reprenant les analyses de la première étude, mais cette fois-ci pour une roue affectée d'un schéma de désaccordage intentionnel faisant intervenir deux secteurs fondamentaux.

Pour l'ensemble des cas traités, nous utiliserons le modèle d'amortissement de Rayleigh, appliqué sur les matrices réduites issues de la réduction initiale de Craig-Bampton. Les paramètres du modèle sont affectés de valeurs assurant un taux d'amortissement modal de 0.01% pour le mode cible de l'étude. En l'absence de recalage sur des données d'essais, l'intérêt d'adopter ce taux d'amortissement relativement faible est double. Tout d'abord, celui-ci nous permettra d'observer nettement l'ensemble des pics de résonances de la structure désaccordée, même pour de faible taux de désaccordage aléatoire. De plus, ce faible taux d'amortissement garantit la prépondérance de l'amortissement non-linéaire issu des phénomènes de frottement dès lors que le glissement apparaît dans la zone de contact, ce qui nous permet de visualiser nettement l'abattement dynamique qui en résulte sur la réponse de la roue. En outre, l'utilisation d'une faible valeur d'amortissement linéaire permet également de tester la robustesse de la méthode en terme de convergence, en empêchant l'amortissement visqueux d'étouffer les non-linéarités. Insistons ici sur le fait que modifier la valeur de l'amortissement linéaire ne requiert pas de recalculer systématiquement les modes non-linéaires, dans la mesure où ceux-ci ont été obtenus sans matrice d'amortissement dans l'équation (II.88). Ainsi, après une éventuelle modification des paramètres du modèle de Rayleigh, seule la synthèse de la réponse forcée serait à reprendre.

Par mesure de clarté, les différentes courbes de réponse en fréquence que nous allons présenter dans la suite de ce chapitre correspondent à l'amplitude maximale observée sur l'ensemble de la roue. Cette façon de représenter les résultats permet à la fois de visualiser

l'amplitude de la réponse, donnée pertinente vis-à-vis du dimensionnement vibratoire, et d'apprécier l'étalement spectral induit par le désaccordage.

3.1 Famille isolée

On propose ici de présenter quelques résultats de simulation obtenus sur un système initialement accordé (*i.e.* ne possédant qu'un seul secteur fondamental), que l'on a soumis à divers schémas de désaccordage aléatoire. Ce désaccordage est réalisé par perturbation de la fréquence propre de chaque secteur, en ajoutant aux modes non-linéaires un aléa fréquentiel suivant une loi normale de valeur moyenne la fréquence propre du secteur nominal. L'écart type de cette loi normale n'est autre que le taux de désaccordage considéré. Rappelons ici que la base de modes d'interface $\mathbf{\Gamma}$ de l'équation (III.51), permettant de réduire les frontières, incorpore bel et bien ce désaccordage aléatoire. Ici, on s'intéressera à la première famille modale de la structure (cf. figure IV.5) sur une plage fréquentielle relativement isolée. Pour cela, nous réaliserons la synthèse de la réponse au voisinage de 1522Hz, pour une excitation de type onde tournante possédant 6 diamètres nodaux. Un cas de figure légèrement plus complexe sera abordé en section IV.3.2.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la réponse de la roue pour un schéma de désaccordage aléatoire donné, en faisant varier l'amplitude de l'excitation. Il est ainsi possible d'apprécier l'évolution de la réponse en fonction de l'activation progressive des effets non-linéaires. À bas niveau, la mise en vibration des pales n'induit que relativement peu de glissement au niveau des portées, l'effort normal induit par la précharge centrifuge suffisant à maintenir un contact collé entre les composants. La réponse obtenue est donc proche de celle de la structure linéaire avec interfaces collées, ce qui est bien observé sur les figures IV.8a et IV.8b. À mesure que le niveau de l'excitation augmente, davantage d'énergie est dissipée dans l'interface. Cette dissipation se traduit par l'abattement progressif de la réponse que nous pouvons observer de façon très nette sur les figures IV.8c à IV.8e. En matière de temps de calcul, chacune de ces simulations a pris entre 5h et 10h sur un serveur possédant 12 cœurs logiques⁶. Cette analyse confirme que la méthode que nous avons développée est bel et bien une réponse pertinente à notre problématique initiale, à savoir, proposer une nouvelle approche permettant de réaliser un calcul de réponse forcée non-linéaire sur une roue aubagée désaccordée, avec les ressources d'un bureau d'étude.

Un autre paramètre susceptible de présenter un intérêt ici est la valeur du taux de désaccordage aléatoire affectant la roue. En effet, nous avons vu en section I.3.3 que de nombreuses études ont pu démontrer, dans un cadre linéaire, le lien direct qui existait entre ce paramètre et le facteur d'amplification en amplitude induit par le désaccordage. La connaissance de la loi reliant ces deux quantités est une donnée précieuse pour réaliser le dimensionnement vibratoire de la structure, permettant d'ajuster au mieux les coefficients de sécurité garantissant l'intégrité des pales. Cependant, les résultats de l'étude statistique menée en section III.4.3 sur un modèle phénoménologique suggèrent que le comportement du facteur d'amplification est susceptible de dépendre fortement de la prise en compte ou non des non-linéarités dans les simulations. L'extension de ce type d'études au cadre

6. Voir note de bas de page 3 (p.138).

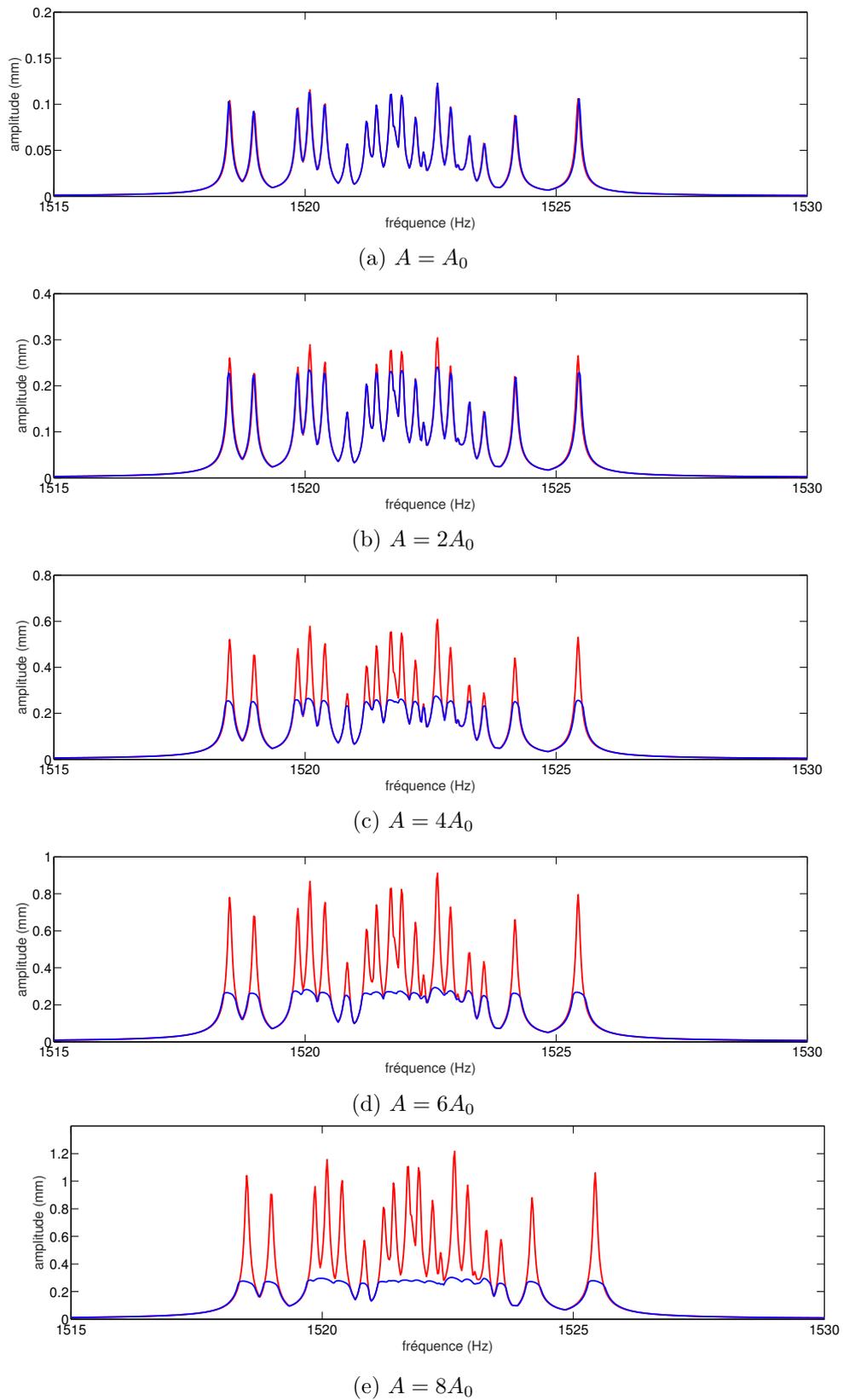


FIGURE IV.8 – Réponse forcée désaccordée aléatoirement pour différents niveaux d'excitation A (non-linéaire —, linéaire —)

non-linéaire, sur des modèles éléments finis industriels, est donc un axe de travail très prometteur. Or, la méthode développée durant ce travail de thèse, de par les performances que nous venons de constater, pourrait bien ouvrir la voie vers ce types d'analyses. Les figures IV.9a à IV.9e sont le fruit de calculs réalisés en faisant varier cette fois-ci, non pas le niveau d'excitation, mais le taux de désaccordage aléatoire affectant la roue. Les réponses observées exhibent le comportement attendu, à savoir, un étalement spectral croissant avec le taux de désaccordage, et une réponse désaccordée supérieure à la réponse accordée – d'environ 10% ici – tel que nous pouvons le constater sur les figures IV.10a à IV.10d sur lesquelles la réponse linéaire a été retirée. Notons ici que, en zoomant sur la réponse au voisinage d'une résonance isolée, telle que sur la figure IV.9a, il est possible de constater la forme asymétrique du pic pour le système non-linéaire, caractéristique de l'effet assouplissant du frottement sec. Ces simulations ont requis entre 6h et 10h de calcul sur 12 cœurs logiques⁷, sans rencontrer le moindre problème de convergence. En disposant de ressources informatiques supérieures, il semblerait alors envisageable de réaliser les milliers de tirages nécessaires permettant de retracer l'évolution du facteur d'amplification pour un modèle de cette taille, ce qui constitue une perspective très intéressante de ce travail⁸.

Nous avons jusqu'ici focalisé notre étude sur une plage fréquentielle ne faisant intervenir qu'une seule famille modale de la roue, à savoir, la famille 1F. Dans la section suivante, nous nous intéressons à un cas de figure légèrement plus complexe, en choisissant une plage fréquentielle proche d'une zone de *veering*, sur laquelle plusieurs familles modales sont susceptibles d'intervenir.

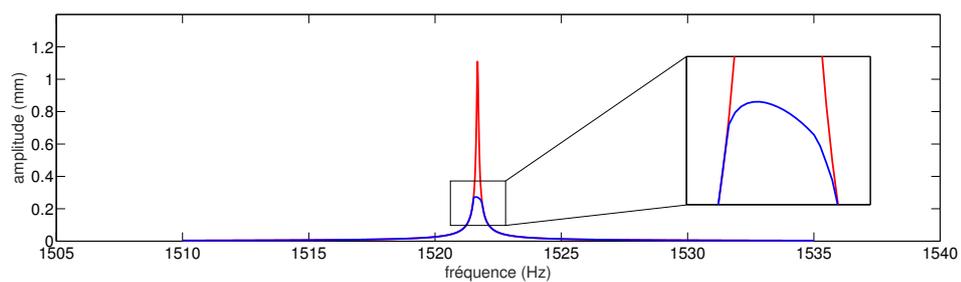
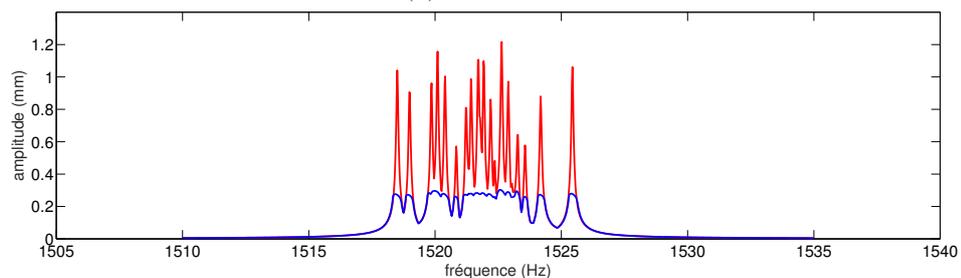
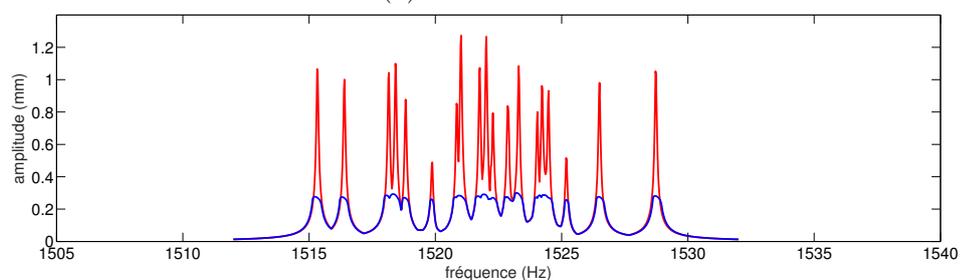
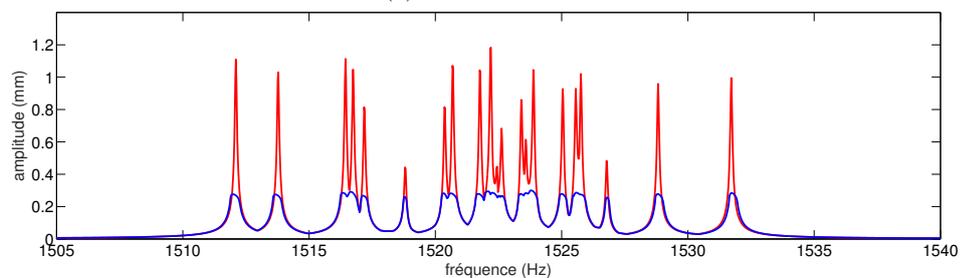
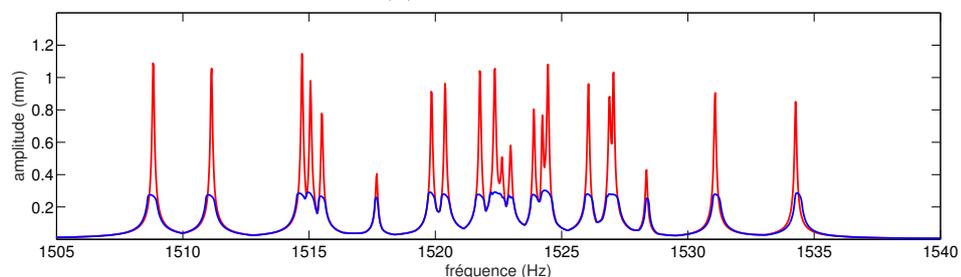
3.2 Zone de veering

Sur la figure IV.5, il est possible d'identifier plusieurs zones de *veering*, caractérisées par le rapprochement de deux familles modales pour certains indices harmoniques, généralement de faible valeur. Cette proximité suggère que sur une plage fréquentielle recouvrant l'une de ces zones, et pour une excitation travaillant sur l'indice harmonique en question, les deux familles vont apparaître dans la réponse de la roue. Dans cette section, nous proposons d'étudier la réponse du modèle au niveau de la zone de *veering* entre la première et la deuxième famille modale pour un indice harmonique égal à 2.

Afin de satisfaire la condition d'appropriation modale (I.77) relative à la structure accordée, et ainsi fournir un travail important sur les modes ciblés (d'indice harmonique 2), l'excitation utilisée ici est une onde tournante possédant deux diamètres nodaux. La plage fréquentielle de l'étude est centrée sur la fréquence propre de la première famille modale, et l'on cherchera à mettre en évidence l'éventuelle contribution de la deuxième famille, située hors de la plage de l'étude. Pour cela, on réalise deux calculs par CNCMS en double synthèse modale, dans un premier temps en l'absence de désaccordage. Le premier calcul est effectué en ne conservant dans les super-éléments que le mode non-linéaire équivalent à la première famille, *a priori* prépondérante en raison de la plage fréquentielle choisie. Le second calcul est quant à lui réalisé en ajoutant dans la base de réduction

7. Voir note de bas de page 3 (p.138).

8. Il est important de garder à l'esprit que le code de calcul utilisé ici pourrait encore être optimisé, non seulement d'un point de vue algorithmique, mais aussi en utilisant un langage informatique plus adapté au calcul haute performance.

(a) $\sigma = 0$ (b) $\sigma = 0.1\%$ (c) $\sigma = 0.2\%$ (d) $\sigma = 0.3\%$ (e) $\sigma = 0.4\%$ FIGURE IV.9 – Réponse forcée pour différents taux de désaccordage aléatoire σ (non-linéaire —, linéaire —)

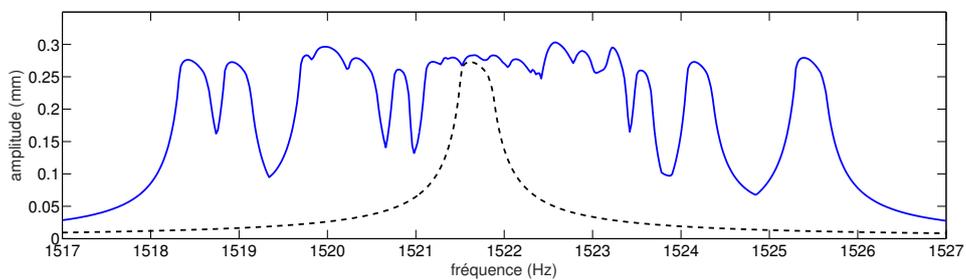
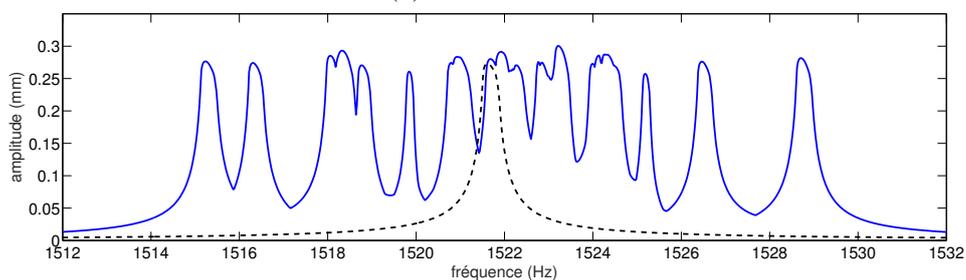
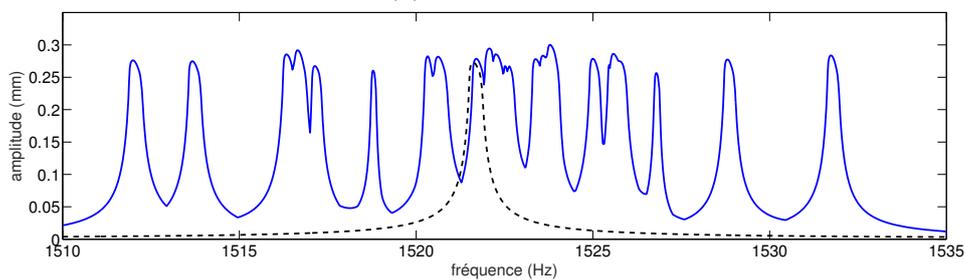
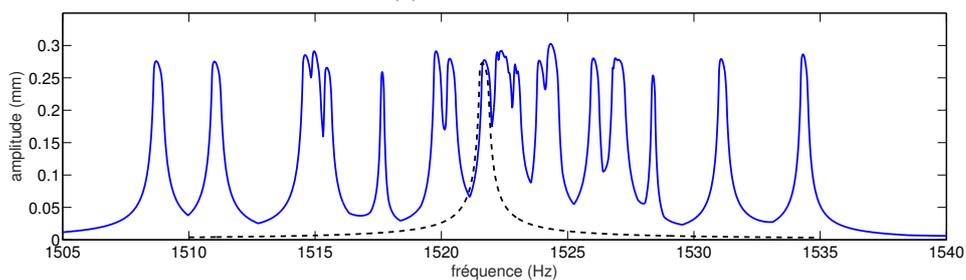
(a) $\sigma = 0.1\%$ (b) $\sigma = 0.2\%$ (c) $\sigma = 0.3\%$ (d) $\sigma = 0.4\%$

FIGURE IV.10 – Réponse forcée pour différents taux de désaccordage aléatoire σ (désaccordée —, accordée - - -)

le mode non-linéaire associé à la deuxième famille modale, afin de prendre en compte la contribution de ce mode dans la réponse. La figure IV.11a montre les résultats obtenus pour les deux simulations. Il apparaît ici que négliger la contribution du deuxième mode induit bel et bien une erreur sur la localisation du pic de résonance. Un calcul réalisé après ajout d'un schéma de désaccordage aléatoire permet de constater que cette erreur se retrouve sur la réponse désaccordée, comme nous pouvons l'observer sur la figure IV.11b.

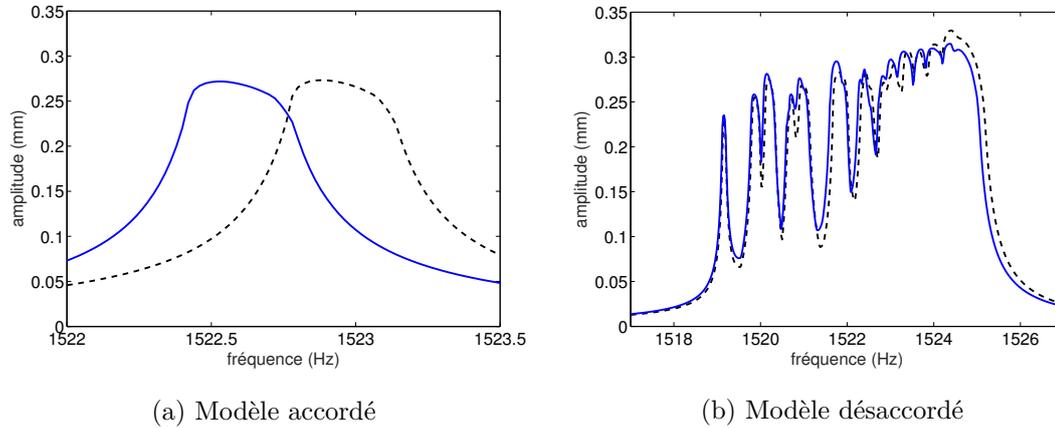


FIGURE IV.11 – Erreur induite sur la réponse forcée non-linéaire par l'omission d'un mode voisin en zone de *veering* (2 modes retenus —, 1 mode retenu - -)

Compte tenu de l'écart fréquentiel entre les deux familles, et bien qu'ayant un léger impact sur la précision du calcul, la contribution du deuxième mode semble malgré tout résiduelle face à celle du premier. Ainsi, il s'avère que ce mode n'est en réalité sollicité qu'à un niveau linéaire, ce qui peut se confirmer en comparant la valeur de la coordonnée généralisée associée à la valeur seuil marquant l'apparition du glissement (déclenchant notamment le décalage de la fréquence propre vers les basses fréquences), observable lors du calcul du mode non-linéaire. Il semble alors judicieux de ne conserver dans la base de réduction des super-éléments que l'équivalent linéaire de ce mode, ce qui permet d'affranchir le solveur de l'étape d'interpolation associée. Ainsi, la matrice Φ_k de l'équation (III.51) sera formée du vecteur propre non-linéaire du premier mode à frontières fixes, et du vecteur propre linéaire du deuxième mode à frontières fixes et contact collé. De même, la valeur propre non-linéaire complexe peut être remplacée par la valeur propre linéaire correspondante dans la matrice Λ . Les résultats obtenus en conservant cette nouvelle base sont reportés sur les figures IV.12a et IV.12b, et comparés aux courbes de référence obtenues en conservant les deux modes non-linéaires. On constate ici que les courbes de réponse en fréquence sont parfaitement superposées pour la structure accordée, de même que pour celle désaccordée. L'intérêt d'utiliser la base enrichie du mode linéaire plutôt que celle conservant les deux modes non-linéaires réside dans la légère réduction des temps de calculs qui en résulte, d'environ 20% pour le cas présenté ici.

3.3 Désaccordage en forme

Comment nous avons pu le mentionner en section I.3.3, les nombreuses études consacrées au désaccordage des structures cycliques ont conduit à l'émergence d'un nouveau

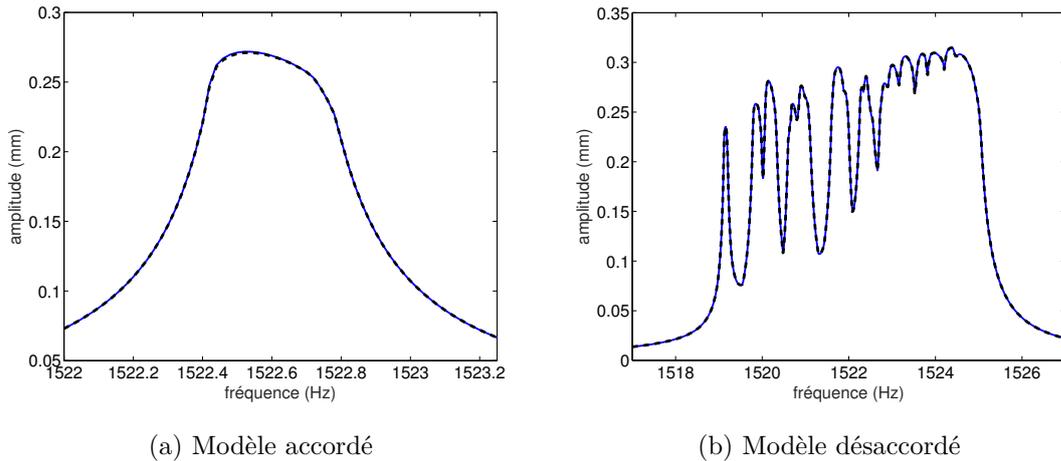


FIGURE IV.12 – Réponse forcée non-linéaire avec substitution d'un mode non-linéaire de faible contribution par le mode linéaire correspondant (1 mode non-linéaire complété d'un mode linéaire —, 2 modes non-linéaires - - -)

concept, connu aujourd'hui sous le nom de désaccordage intentionnel. Par désaccordage intentionnel, on entend généralement l'introduction volontaire d'un schéma de désaccordage à partir de plusieurs secteurs de référence, afin d'améliorer la robustesse du dimensionnement face aux sources de désaccordage aléatoire, ou d'accroître la marge de stabilité de la roue face à des phénomènes de vibrations auto-entretenues tel que le flottement. Devant l'intérêt croissant de la communauté industrielle pour cette thématique, il était intéressant de développer une méthode permettant de prendre en compte cette stratégie de dimensionnement dans les simulations. En reposant sur le concept de sous-structuration, l'un des avantages de la CNCMS est de pouvoir traiter indépendamment chacune des sous-structures constituant le modèle. Dans le cas d'une roue aubagée, cela se traduit par la possibilité d'utiliser un nombre quelconque de secteurs de référence. Ainsi, avant de conclure ce chapitre, nous allons nous intéresser à un cas particulier de désaccordage intentionnel, appliqué à notre modèle, afin de démontrer l'intérêt de la méthode développée pour aborder cette thématique.

Le schéma de désaccordage intentionnel que nous allons utiliser est constitué de deux secteurs de référence, désignés ci-après par les lettres A et B, répartis de façon alternée suivant le schéma du tableau IV.5 pour former la roue complète. Pour cela, à partir du secteur utilisé jusqu'à présent, nous avons défini une seconde géométrie de pale, plus fine d'un dixième de millimètre en tête de profil. Le secteur de disque reste, quant à lui, inchangé. L'avantage d'un schéma de type alterné (ou *square-wave pattern* dans la littérature anglo-saxonne) est qu'il ne repose que sur deux modèles de pales, ce qui en fait une solution technologique aisément réalisable en pratique, par comparaison à un schéma harmonique (*i.e. harmonic pattern*) requérant de nombreuses pales différentes. La phase préparatoire de la section IV.2 est ensuite appliquée à ce nouveau secteur. Insistons ici sur la nécessité de calculer les modes non-linéaires pour l'ensemble des secteurs de référence. Cette nouvelle géométrie de pale, légèrement plus fine, conduit à des modes de secteur encastré de fréquences légèrement supérieures au secteur initial, de l'ordre de 1.3%. Le sens de ce décalage fréquentiel s'explique par la prépondérance de la perte de masse en tête de pale

face à la perte de raideur, pour la géométrie considérée.

TABLEAU IV.5 – Schéma de désaccordage intentionnel du modèle industriel

Secteur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Type	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
Secteur	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Type	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B

Une fois la phase préparatoire terminée, les deux études paramétriques présentées en section IV.3.1 sont à nouveau réalisées sur ce nouveau modèle de roue. Pour un schéma de désaccordage aléatoire donné, appliqué par perturbation des fréquences propres des modes non-linéaires de chaque secteur, l'évolution de la réponse pour différents niveaux d'excitation est reportée sur les figures IV.13a à IV.13e. On constate une fois de plus l'influence des non-linéarités en matière d'amortissement, en atteste la chute drastique des amplitudes par rapport au système linéaire dès lors que l'excitation est suffisamment forte pour introduire du glissement. En ce qui concerne l'étude de l'influence du taux de désaccordage aléatoire, dont les résultats sont reportés en figure IV.14 et IV.15, il est intéressant de remarquer ici que pour de faible taux de désaccordage, la réponse de chaque type de pale reste confinée au voisinage de la fréquence nominale correspondante. Tel que l'on pouvait s'y attendre, à mesure que le taux de désaccordage aléatoire augmente, les deux groupes de résonances issues des deux secteurs de référence tendent à fusionner (*cf.* figures IV.14c à IV.14e). À titre indicatif, l'amplification maximale observée ici est de 13%.

Bilan

Cet ultime chapitre nous a permis de valider le travail réalisé sur un modèle éléments finis de roue aubagée, représentatif des modèles manipulés dans l'industrie. La polyvalence de la méthode développée pour traiter divers types de désaccordages, et notamment dans des situations particulières telles qu'en zone de *veering*, ouvre la voie à de nombreuses perspectives dont nous discuterons dans les dernières pages de ce mémoire. L'ordre de grandeur des temps requis pour réaliser les simulations, mis en regard des ressources informatiques utilisées, témoigne de la pertinence de cette approche pour répondre aux besoins de la recherche et de l'industrie.

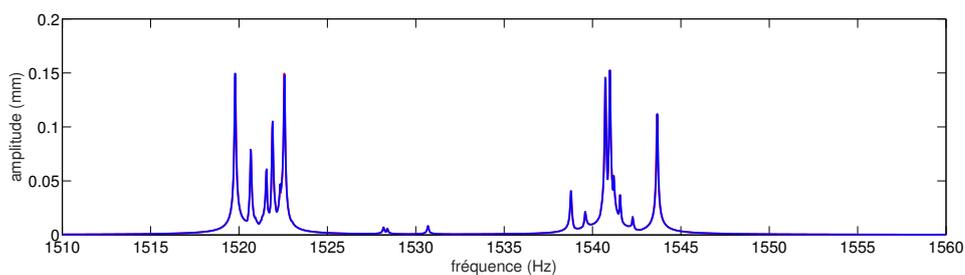
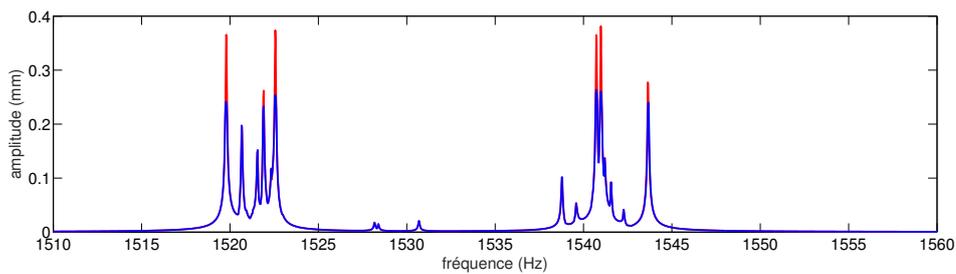
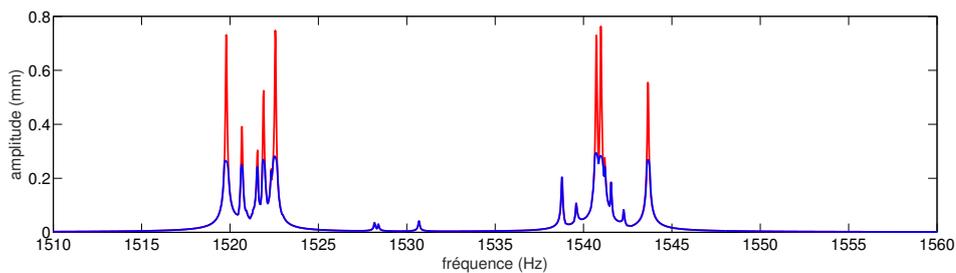
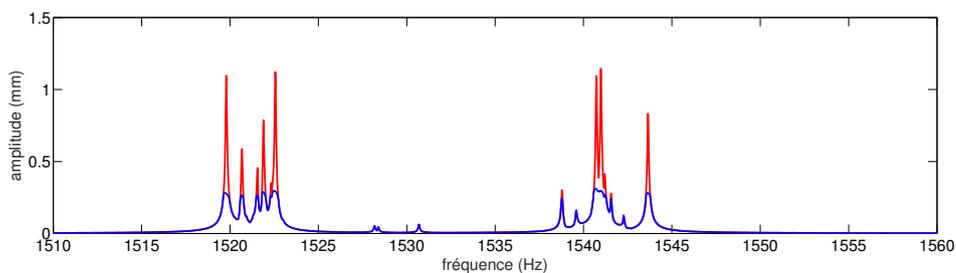
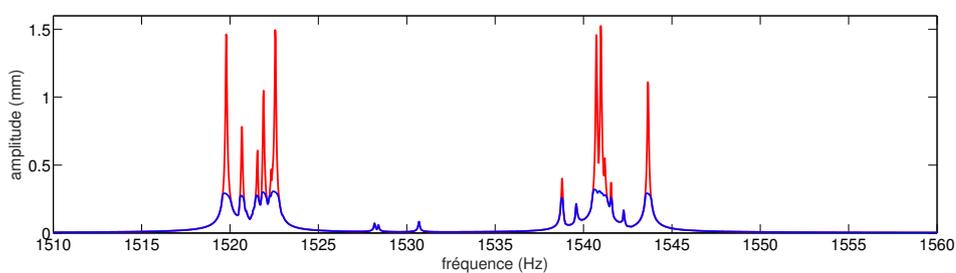
(a) $A = A_0$ (b) $A = 2A_0$ (c) $A = 4A_0$ (d) $A = 6A_0$ (e) $A = 8A_0$

FIGURE IV.13 – Réponse forcée du modèle industriel désaccordé intentionnellement et aléatoirement pour différents niveaux d'excitation A (non-linéaire —, linéaire —)

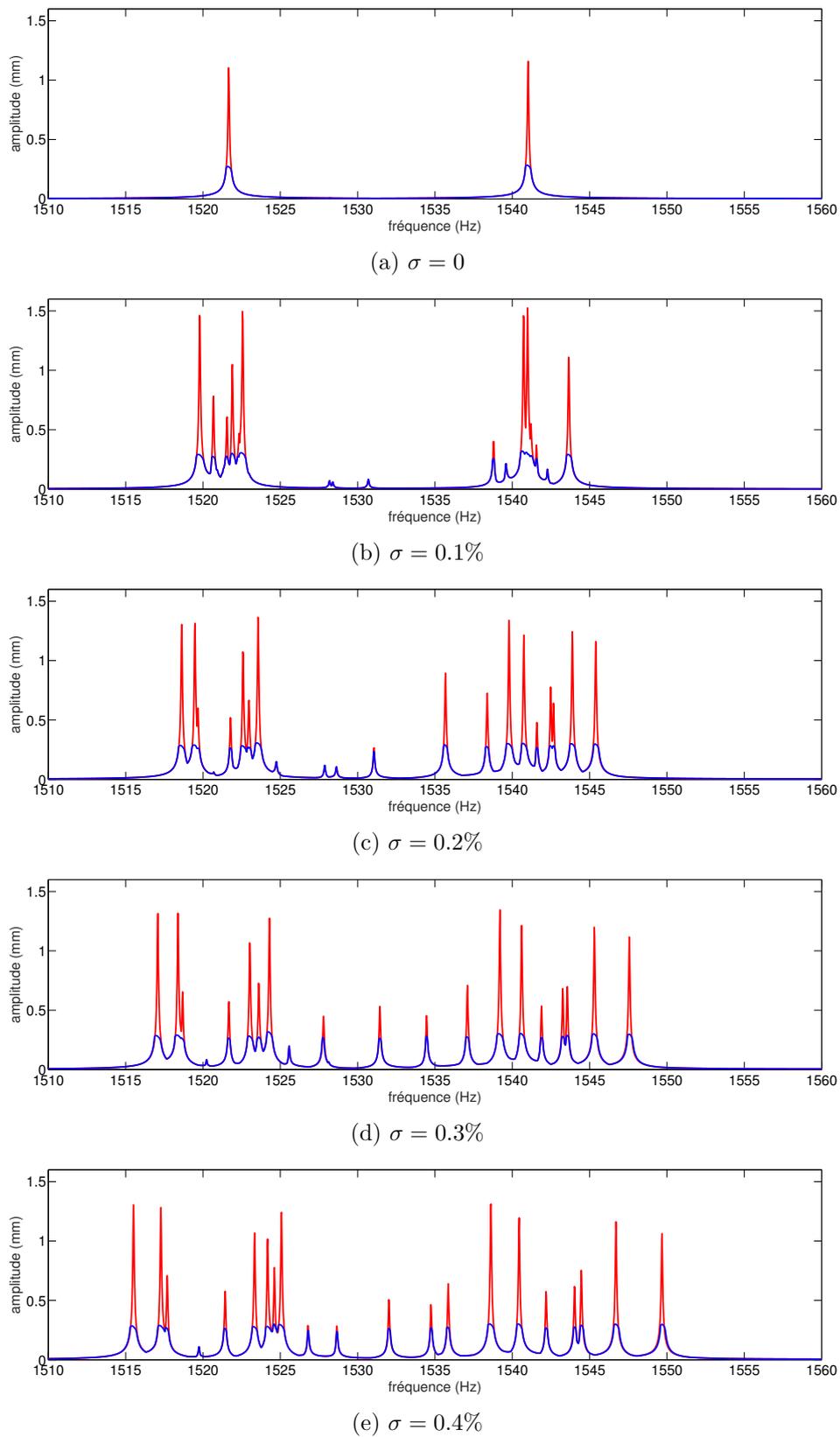


FIGURE IV.14 – Réponse forcée du modèle industriel désaccordé intentionnellement pour différents taux de désaccordage aléatoire σ (non-linéaire —, linéaire —)

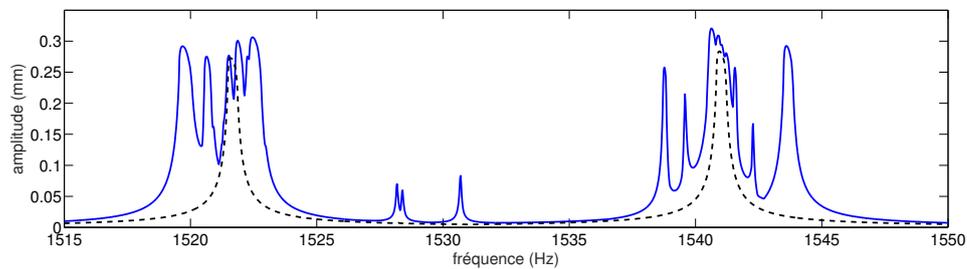
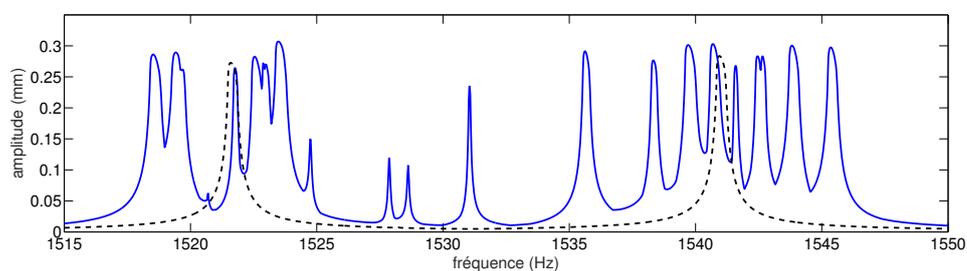
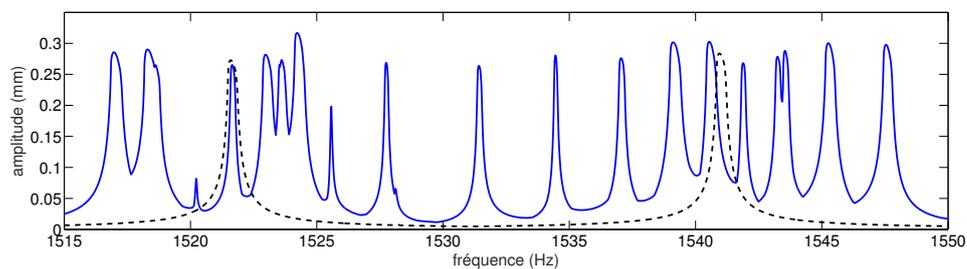
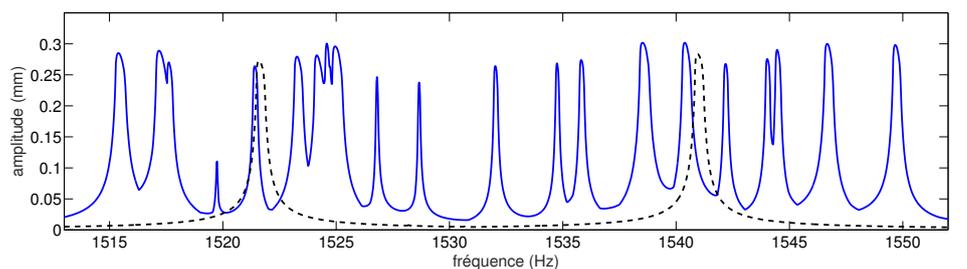
(a) $\sigma = 0.1\%$ (b) $\sigma = 0.2\%$ (c) $\sigma = 0.3\%$ (d) $\sigma = 0.4\%$

FIGURE IV.15 – Réponse forcée non-linéaire du modèle industriel désaccordé intentionnellement pour différents taux de désaccordage aléatoire σ (désaccordée —, accordée - - -)

Conclusion

En réponse aux besoins de l'industrie aéronautique en matière de simulation, ce travail de thèse a porté sur le développement d'une nouvelle méthode de réduction de modèle permettant de déterminer efficacement la réponse forcée non-linéaire d'une roue aubagée désaccordée. La méthode élaborée permet de prendre en compte l'influence de non-linéarités telles que le frottement en pied d'aube sur la réponse de la structure, et fait preuve d'une grande polyvalence en permettant d'aborder des schémas de désaccordage en fréquence ou en forme. Les deux sections suivantes reviennent en détail sur les principaux résultats de ce travail, et présentent quelques perspectives qui permettraient à la fois d'améliorer la méthode, et d'en exploiter les performances.

Résultats

L'objectif principal de ce travail de thèse était de proposer une nouvelle méthode de calcul permettant de déterminer efficacement la réponse forcée d'une roue aubagée désaccordée, en tenant compte de l'impact des non-linéarités sur la dynamique globale de la structure. Cette méthode se devant d'être applicable à des modèles éléments finis tels que ceux manipulés dans l'industrie, possédant des milliers de degrés de liberté, la nécessité de procéder par réduction de modèle s'est naturellement imposée. Afin d'autoriser l'étude de tout type de désaccordage – aléatoire ou intentionnel, en fréquence ou en forme – il a été choisi d'aborder le problème par sous-structuration, en décomposant la roue sous forme de secteurs indépendants. Restreint au cadre de la dynamique linéaire, ce type d'approches a déjà pu faire ses preuves par le passé, en permettant l'étude de modèles industriels de très grande taille. Cependant, l'efficacité de ces méthodes est fortement compromise dès lors qu'un grand nombre de degrés de liberté sont soumis à des non-linéarités, obligeant généralement à conserver ceux-ci comme degrés maîtres de la réduction. Pour pallier cela, il a été choisi d'exploiter les travaux récents portant sur la notion de mode complexe non-linéaire, afin d'enrichir la base de réduction des techniques de CMS classiques à interfaces fixes, en remplaçant les modes linéaires internes par leurs homologues non-linéaires. Ces modes non-linéaires sont calculés dans le domaine fréquentiel par une approche similaire à la méthode de l'équilibrage harmonique, et permettent de capturer directement dans la base de réduction n'importe quel type de non-linéarités, que celles-ci soient fortes, irrégulières, ou dissipatives. En utilisant les vecteurs propres de ces modes pour engendrer le sous-espace de réduction, il n'est alors plus nécessaire de retenir les degrés de liberté non-linéaires du modèle comme degrés maîtres, ce qui permet de repousser l'ordre de réduction du modèle par rapport aux techniques de sous-structuration standard. Une telle approche reste malgré tout confrontée au nombre potentiellement très grand de degrés de liberté situés sur les frontières entre les sous-structures, qui doivent être eux aussi retenus

comme coordonnées du modèle réduit. Cependant, en combinant cette nouvelle méthode avec une double synthèse modale – bien connue de la littérature spécialisée – il est possible de filtrer fortement la dynamique des frontières et de ne retenir que le strict nécessaire dans le modèle réduit final. Cette technique de réduction très performante exploite une base de modes propres linéaires du modèle réduit global – communément appelés modes d’interface ou modes de branche – pour projeter les degrés de liberté de frontières sur un sous-espace de taille beaucoup plus faible. Pour mettre en œuvre cette approche avec notre méthode de sous-structuration non-linéaire, les modes d’interface sont calculés sur le modèle réduit linéaire sous-jacent de la structure non-linéaire considérée, en collant les zones de contact entre les composants – pale et disque – d’où proviennent les termes d’efforts non-linéaires. De cette façon, l’information en provenance des frontières entre deux sous-structures pourra librement circuler au sein du secteur, assurant le couplage entre les différents composants. La méthode développée se veut en quelque sorte une extension de la méthode de Craig-Bampton en double synthèse modale, adaptée à l’étude de structures non-linéaires.

En pratique, l’intérêt de construire le modèle réduit à l’aide de modes non-linéaires est double. Non seulement ceux-ci permettent effectivement d’augmenter l’ordre de réduction en passant les degrés de liberté non-linéaires en coordonnées esclaves, mais les valeurs propres associées sont également utilisées ici dans une procédure de substitution, permettant d’évaluer les termes non-linéaires affectant chaque sous-structure. De cette manière, il n’est plus nécessaire de calculer explicitement les termes d’efforts non-linéaires appliqués à la structure, ce qui permet de s’affranchir d’un aller-retour systématique entre domaine fréquentiel et domaine temporel à chaque itération du solveur. Cette approximation permet ainsi d’exploiter pleinement l’information contenue dans les modes non-linéaires, à la fois en matière de déformée, de pulsation, et d’amortissement.

La méthode élaborée a dans un premier temps été testée et validée sur un modèle phénoménologique, représentatif d’une roue aubagée soumise à des non-linéarités de frottement sec en pieds d’aubes. Sur ce modèle, la méthode a révélé des performances très intéressantes en matière de temps de calcul, ce qui a permis de conduire une brève étude statistique concernant l’influence des non-linéarités sur le facteur d’amplification induit par le désaccordage. Les résultats obtenus suggèrent, pour le modèle considéré, que la prise en compte des non-linéarités pour mener ce type d’investigation pourrait être d’une importance cruciale. Finalement, après validation de notre méthode en double synthèse modale sur un modèle 3D conçu à cet effet, un cas d’application sur modèle industriel a pu être abordé. Le modèle en question est un modèle éléments finis de roue aubagée à pales rapportées, sur lequel la méthode développée a été appliquée pour différentes configurations. Dans un premier temps, les simulations furent conduites sur un modèle de roue dépourvue de désaccordage en forme (*i.e.* intentionnel), en étudiant l’évolution de la réponse en fonction du niveau d’excitation et du taux de désaccordage aléatoire affectant les secteurs. Ces analyses ont par la suite été menées sur une roue à laquelle est imposé un schéma de désaccordage intentionnel de type *square-wave pattern*, solution technologique d’un intérêt particulier pour l’industrie pour accroître la robustesse du dimensionnement. Compte tenu du positionnement fréquentiel relativement standard de la roue considérée, il a également été possible de réaliser quelques simulations de réponse forcée proche d’une

zone de *veering*. Dans ce cas de figure, il a pu être observé qu'un mode non-linéaire contribuant à de faibles niveaux dans la réponse pouvait être judicieusement remplacé par son homologue linéaire, afin de réduire les temps de calculs sans impacter la précision des résultats.

Perspectives

La méthode développée durant cette thèse, de par les performances très intéressantes dont elle a fait preuve à la fois sur modèle phénoménologique et sur modèle industriel, ouvre la voie à de nombreuses perspectives. Ci-après, nous listons quelques-unes d'entre-elles, visant soit à exploiter le travail déjà réalisé, soit à en élargir le champ d'application.

En ce qui concerne l'exploitation de la méthode de calcul proposée, nous pouvons d'ors et déjà citer son application à une étude plus approfondie du désaccordage aléatoire et intentionnel des roues aubagées en présence de non-linéarités. L'étude statistique présentée en section III.4.3, portant sur l'évolution du facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage, a en effet permis de révéler que la prise en compte des phénomènes non-linéaires pouvait mener à un comportement significativement différent de celui habituellement observé sur des structures linéaires. Or, une meilleure maîtrise des dispersions et de leur impact sur la dynamique des roues conduirait non seulement à un dimensionnement plus optimal, mais permettrait également d'anticiper les exigences croissantes des organismes de certification sur le sujet, en incorporant dès à présent la simulation des non-linéarités en phase de conception. Ce type d'études pourraient être menées dans un premier temps sur des modèles à paramètres concentrés, préalablement calibrés sur le comportement de roues réelles. En disposant de ressources informatiques plus importantes, et après une éventuelle phase d'optimisation du code développé durant la thèse, la CNCMS en double synthèse modale permettrait également de conduire ce type d'analyses directement sur les modèles éléments finis manipulés par le bureau d'étude. La finalité de ces investigations serait de pouvoir améliorer la robustesse du dimensionnement en fatigue et face aux instabilités aéroélastiques par optimisation d'un schéma de désaccordage intentionnel, comme des auteurs ont pu le faire dans un cadre linéaire, mais en tenant compte ici de l'influence des non-linéarités sur la dynamique des pales.

Une autre perspective intéressante, qui ne demanderait pas nécessairement de nouveaux développements théoriques, serait de tester la méthode sur d'autres types de non-linéarités. Dans le secteur de l'aéronautique, on pourra mentionner les non-linéarités géométriques – grands déplacements et grandes déformations – qui peuvent affecter la dynamique des pales élancées que l'on retrouve sur les soufflantes des moteurs à grand taux de dilution, ou sur la technologie en développement des *open rotors*. Notons d'ailleurs que les roues aubagées de soufflantes sont généralement à pales rapportées, et sont donc sujettes aux non-linéarités de friction en pied de pales que nous avons étudiées dans ce mémoire. La modélisation des non-linéarités géométriques conduit à l'apparition de termes polynomiaux (quadratique et cubique) dans les équations du mouvement de la structure. Grâce à sa grande polyvalence, la notion de mode complexe non-linéaire permet d'aborder sans restriction ce type de non-linéarité, ce qui rend la CNCMS adaptée à l'étude de ces nouveaux systèmes. Notons néanmoins que les efforts résultants des effets géométriques

sont, en théorie, appliqués à l'ensemble de la pale, ce qui rendrait le calcul des modes non-linéaires relativement coûteux, de par la taille du système à résoudre. Cependant, il est assez probable que ces efforts n'aient en réalité une influence significative que sur un nombre réduit de degrés de liberté, ce qui autoriserait alors une première étape de condensation permettant de réduire la taille du problème algébrique fourni au solveur. Précisons aussi que la notion de mode complexe non-linéaire a déjà été employée pour aborder des problématiques d'usure en pied de pale par *fretting* [85], en caractérisant l'évolution des propriétés modales en fonction du nombre de cycles, ce qui permettrait d'incorporer directement ces phénomènes dans la base de réduction de la CNCMS.

Mentionnons également que tester la méthode sur des systèmes à non-linéarités polynomiales permettrait également d'aborder rapidement la question des résonances secondaires que nous avons présentées en section II.3. En effet, ces systèmes sont connus pour exhiber des résonances sur-harmoniques et sous-harmoniques à haut niveau, et il pourrait être intéressant de vérifier que la procédure de réduction proposée permet bel et bien de capturer ce type de phénomènes. Dans un premier temps, la méthode de synthèse modale non-linéaire présentée au chapitre III pourrait être appliquée à des systèmes de taille réduite possédant ce type de comportement en régime forcé, ce qui peut aisément se vérifier en amont par équilibrage harmonique. Si la réponse reconstruite par synthèse modale permet bien de mettre à jour des résonances de ce type, alors tout porte à croire que la CNCMS pourra également capturer ce type de phénomènes. Auquel cas, il pourrait également être intéressant de reprendre l'analyse pour les résonances internes, plus complexes à révéler, mais auxquelles la communauté scientifique semble porter un intérêt croissant.

Une autre perspective, plus industrielle, serait de reprendre nos analyses sur des technologies de roues différentes. La CNCMS a été jusqu'à présent utilisée sur des géométries représentatives des roues aubagées à pales rapportées. Ce choix technologique n'est cependant pas le seul pouvant mener à des problématiques de réponse forcée non-linéaire en présence de désaccordage. L'utilisation de pales à talons, d'amortisseurs sous plates-formes, ou de joncs de friction est également répandue dans l'industrie, et il serait intéressant de voir comment notre méthode de sous-structuration se positionne vis-à-vis de ces technologies. Afin que la CNCMS soit pertinente sous sa forme actuelle, nous avons vu que les frontières entre deux sous-structures devaient avoir un comportement relativement linéaire. Or, pour une pale à talon, la non-linéarité est directement située à la frontière entre les secteurs adjacents, ce qui nécessiterait d'encaster les degrés de liberté non-linéaires lors du calcul des modes non-linéaires. En procédant ainsi, toute l'information concernant la non-linéarité serait malheureusement perdue. Pour aborder ce type de technologies, il pourrait sembler intéressant dans un premier temps de calculer les modes complexes non-linéaires d'une roue possédant des pales à talons en supposant le non-décollement des talons, et en imposant l'effort normal dans la zone de contact suite à une analyse statique de précharge. En procédant ainsi, il n'est plus nécessaire de considérer que la zone de liaison entre les talons fait partie de la frontière du secteur, et la CNCMS peut être utilisée sans difficulté. La qualité des résultats est alors simplement pondérée par la validité de l'approximation faite pour le contact entre les talons, à savoir l'hypothèse de non-décollement et la valeur de la pression de contact constante, non impactée par les vibrations. Pour pallier ce problème de non-linéarités situées sur les frontières, il est également envisageable de découper

le secteur de façon originale, de façon à éloigner les zones de contact des frontières du secteur. Cette stratégie pourrait également permettre d'aborder le cas des amortisseurs sous plate-forme

En ce qui concerne les axes d'amélioration de la méthode, nous pouvons citer l'utilisation de modes statiques de liaison non-linéaires, dont les vecteurs seraient fonction de l'amplitude des coordonnées généralisées correspondantes. La loi liant chaque vecteur $\psi_{s,k}$ à $|p_s|$ pourrait être déterminée par une succession d'analyses statiques non-linéaires, autorisant le glissement dans les zones de contact, en augmentant progressivement la valeur de p_s . Il serait alors possible d'enrichir la base de réduction classique de la CNCMS avec ces nouveaux vecteurs paramétriques, et ainsi d'étendre la méthode à une plus grande classe de systèmes, dont les sous-structures possèdent des frontières au comportement nettement non-linéaire.

Pour conclure, remarquons que le développement de la CNCMS repose en grande partie sur la construction d'une méthode analogue à la méthode de Craig-Bampton, et exploite donc une famille de modes non-linéaires à frontières fixes. Cependant, nous avons pu mentionner au chapitre III de ce mémoire que les méthodes de sous-structuration à interfaces libres pouvaient également présenter un réel intérêt, notamment en matière de recalage de modèle. Ainsi, la notion de mode complexe non-linéaire n'étant pas incompatible avec celle de mode libre, une perspective très intéressante de ce travail serait de développer une version de la CNCMS exploitant une base de modes non-linéaires calculés sur des sous-structures, non plus à frontières fixes, mais à frontières libres, homologues de la méthode de MacNeal pour les structures non-linéaires.

Références

- [1] P. ALMEIDA, C. GIBERT, F. THOUVEREZ, X. LEBLANC et J.-P. OUSTY : Experimental analysis of dynamic interaction between a centrifugal compressor and its casing. *Journal of Turbomachinery*, 137(3):031008–031008, 2014.
- [2] D. AMSALLEM et C. FARHAT : Projection-based model reduction. Stanford University, 2011.
- [3] P. APIWATTANALUNGGARN, S. SHAW et C. PIERRE : Component mode synthesis using nonlinear normal modes. *Nonlinear Dynamics*, 41(1-3):17–46, 2005.
- [4] R. ARQUIER, S. BELLIZZI, R. BOUC et B. COCHELIN : Two methods for the computation of nonlinear modes of vibrating systems at large amplitudes. *Computers & Structures*, 84(24–25):1565–1576, 2006.
- [5] M. C. C. BAMPTON et R. R. CRAIG, Jr. : Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313–1319, 1968.
- [6] K. BATHE : *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 2006.
- [7] J.-L. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermes Science Publication, 1995.
- [8] W. A. BENFIELD et R. F. HRUDA : Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal*, 9(7):1255–1261, 1971.
- [9] S. BESSET : *Optimisation du comportement vibro-acoustique des structures à l'aide d'une synthèse modale généralisée*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2006.
- [10] R. BLADH, M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Reduced order modeling and vibration analysis of mistuned bladed disk assemblies with shrouds. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 121(3):515–522, 1999.
- [11] R. BOUC : Forced vibrations of mechanical systems with hysteresis. *Proceedings of the 4th Conference on Non-Linear Oscillation*, 1981.
- [12] T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN : An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1):149–154, 1989.
- [13] E. CAPIEZ-LERNOUT : *Dynamique des structures tournantes à symétrie cyclique en présence d'incertitudes aléatoires. Application au désaccordage des roues aubagées*. Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée, 2004.

- [14] E. CAPIEZ-LERNOUT et C. SOIZE : Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 126(3):610–618, 2004.
- [15] E. CAPIEZ-LERNOUT, C. SOIZE, J. P. LOMBARD, C. DUPONT et E. SEINTURIER : Blade manufacturing tolerances definition for a mistuned industrial bladed disk. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 127(3):621–628, 2005.
- [16] E. CAPIEZ-LERNOUT, C. SOIZE et M. MBAYE : Mistuning analysis and uncertainty quantification of an industrial bladed disk with geometrical nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, 356:124–143, 2015.
- [17] M. P. CASTANIER, G. ÓTTARSSON et C. PIERRE : A reduced order modeling technique for mistuned bladed disks. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119(3):439–447, 1997.
- [18] M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors. *AIAA Journal*, 40(10):2077–2086, 2002.
- [19] M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration : Current status and emerging directions. *Journal of Propulsion and Power*, 22(2):384–396, 2006.
- [20] J. D. CAZENOVE : *Développement des méthodes numériques et expérimentales pour la certification vibratoire des disques aubagés monoblocs*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2014.
- [21] D. CHARLEUX : *Étude des effets de la friction en pied d’aube sur la dynamique des roues aubagées*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2006.
- [22] D. CHARLEUX, C. GIBERT, F. THOUVEREZ et J. DUPEUX : Numerical and experimental study of friction damping blade attachments of rotating bladed disks. *International Journal of Rotating Machinery*, 2006, 2006.
- [23] B. K. CHOI, J. LENTZ, A. J. RIVAS-GUERRA et M. P. MIGNOLET : Optimization of intentional mistuning patterns for the reduction of the forced response effects of unintentional mistuning : Formulation and assessment. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 125(1):131–140, 2002.
- [24] B. COCHELIN et C. VERGEZ : A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324(1–2):243 – 262, 2009.
- [25] A. CONN, N. GOULD et P. TOINT : *Trust Region Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [26] N. COUDEYRAS, J.-J. SINOU et S. NACIVET : A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The constrained harmonic balance method, with application to disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 319(3–5):1175 – 1199, 2009.

- [27] R. CRAIG, Jr. : On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1977.
- [28] R. R. CRAIG et C. J. CHANG : Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 14(11):1633–1635, 1976.
- [29] R. R. CRAIG et C. J. CHANG : Substructure coupling for dynamic analysis and testing. Rap. tech., NASA, 1977.
- [30] E. F. CRAWLEY et K. C. HALL : Optimization and mechanisms of mistuning in cascades. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 107(2):418–426, 1985.
- [31] P. J. DAVIS : *Circulant Matrices : Second Edition*. AMS Chelsea Publishing, 1994.
- [32] D. DEMAILLY : *Étude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Application à la dynamique rotor*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2003.
- [33] G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANÇOIS : *Méthode des éléments finis*. Hermes Science Publication, 2014.
- [34] K. D’SOUZA, A. SAITO et B. I. EPUREANU : Reduced-order modeling for nonlinear analysis of cracked mistuned multistage bladed-disk systems. *AIAA Journal*, 50(2):304–312, 2012.
- [35] K. X. D’SOUZA et B. I. EPUREANU : A statistical characterization of the effects of mistuning in multistage bladed disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 134(1):012503–012503–8, 2011.
- [36] R. C. F. DYE et T. A. HENRY : Vibration amplitudes of compressor blades resulting from scatter in blade natural frequencies. *Journal of Engineering for Power*, 91(3):182–187, 1969.
- [37] D. J. EWINS : Vibration characteristics of bladed disc assemblies. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 15(3):165–186, 1973.
- [38] D. J. EWINS : Vibration modes of mistuned bladed disks. *Journal of Engineering for Power*, 98(3):349–355, 1976.
- [39] D. EWINS : The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 9(1):65–79, 1969.
- [40] D. M. FEINER et J. H. GRIFFIN : A fundamental model of mistuning for a single family of modes. *Journal of Turbomachinery*, 124(4):597–605, 11 2002.
- [41] G. FLOQUET : Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 12:47–88, 1883.
- [42] V. GANINE, M. LEGRAND, H. MICHALSKA et C. PIERRE : A sparse preconditioned iterative method for vibration analysis of geometrically mistuned bladed disks. *Computers & Structures*, 87(5–6):342 – 354, 2009.

- [43] F. GEORGIADES, M. PEETERS, G. KERSCHEN, J. C. GOLINVAL et M. RUZZENE : Modal analysis of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry. *AIAA Journal*, 47(4):1014–1025, 2009.
- [44] M. GÉRADIN et D. RIXEN : *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Collection Physique fondamentale et appliquée. Masson, 1996.
- [45] M. GÉRADIN et D. RIXEN : *Mechanical Vibration : Theory and Application to Structural Dynamics*. Wiley, 2015.
- [46] C. GIBERT : Fitting measured frequency response using non-linear modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1):211–218, 2003.
- [47] T. GMÜR : *Dynamique des structures : analyse modale numérique*. Mécanique (Lausanne). Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.
- [48] A. GOPINATH et A. JAMESON : *Time Spectral Method for Periodic Unsteady Computations over Two- and Three- Dimensional Bodies*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
- [49] J. H. GRIFFIN et T. M. HOOSAC : Model development and statistical investigation of turbine blade mistuning. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 106(2):204–210, 1984.
- [50] A. GROLET : *Dynamique non-linéaires des structures mécaniques : application aux systèmes à symétrie cyclique*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2013.
- [51] A. GROLET et F. THOUVEREZ : Vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 133(2):022502–022502, 2010.
- [52] A. GROLET et F. THOUVEREZ : Free and forced vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry : Application to a simplified model. *Journal of Sound and Vibration*, 331(12):2911–2928, 2012.
- [53] M. GRUIN : *Dynamique non-linéaire d'une roue de turbine Basse Pression soumise à des excitations structurales d'un turboréacteur*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2012.
- [54] M. GUSKOV : *Dynamique non-linéaire des systèmes multi-rotors. Études numérique et expérimentale*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2007.
- [55] R. J. GUYAN : Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3(2):380–380, 1965.
- [56] K. C. HALL, J. P. THOMAS et W. S. CLARK : Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique. *AIAA Journal*, 40(5):879–886, 2002.
- [57] P. HARTMAN : A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 11:610–620, 1960.

- [58] R. HENRY : Calcul des fréquences et modes des structures répétitives circulaires. *Journal de Mécanique Appliquée*, 4(1):61–82, 1980.
- [59] G. W. HILL : On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and the moon. *Acta Mathematica*, 8:1–36, 1886.
- [60] D. P. HOUSTON, M. GONSOR, N. A. PELLAND et D. AIREY : European Patent Application 0 851 097 A2, 1998.
- [61] G. HUREL : *Simulation du comportement vibratoire non linéaire induit par frottement des freins aéronautiques*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2015.
- [62] L. JÉZÉQUEL et C. H. LAMARQUE : Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149(3):429–459, 1991.
- [63] L. JÉZÉQUEL : *Synthèse modale : théorie et extensions*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon, 1985.
- [64] C. JOANNIN, B. CHOUVION, F. THOUVEREZ, M. MBAYE et J.-P. OUSTY : Nonlinear modal analysis of mistuned periodic structures subjected to dry friction. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 138(7):072504–072504, 2015.
- [65] C. JOANNIN, B. CHOUVION, F. THOUVEREZ, J.-P. OUSTY et M. MBAYE : A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 83:75 – 92, 2017.
- [66] S. KARKAR, B. COCHELIN et C. VERGEZ : A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : The case of non-polynomial nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4):968 – 977, 2013.
- [67] K. R. V. KAZA et R. E. KIELB : Vibration and flutter of mistuned bladed-disk assemblies. *Journal of Propulsion and Power*, 1(5):336–344, 1985.
- [68] G. KERSCHEN, M. PEETERS, J. GOLINVAL et A. VAKAKIS : Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1):170–194, 2009.
- [69] G. KERSCHEN, J.-C. GOLINVAL, A. F. VAKAKIS et L. A. BERGMAN : The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : An overview. *Nonlinear Dynamics*, 41(1-3):147–169, 2005.
- [70] R. E. KIELB et K. R. V. KAZA : Effects of structural coupling on mistuned cascade flutter and response. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 106(1):17–24, 1984.
- [71] Y. B. KIM : Multiple harmonic balance method for aperiodic vibration of a piecewise-linear system. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120(1):181–187, 1998.
- [72] Y.-B. KIM et S. NOAH : Quasi-periodic response and stability analysis for a nonlinear jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 190(2):239 – 253, 1996.

- [73] M. E. KING et A. F. VAKAKIS : A very complicated structure of resonances in a nonlinear system with cyclic symmetry : Nonlinear forced localization. *Nonlinear Dynamics*, 7(1):85–104, 1995.
- [74] M. KRACK et J. BÖTTCHER : A method for the computational assessment of the damping performance of shape-memory alloys. *Smart Materials and Structures*, 23(8):085010, 2014.
- [75] M. KRACK : *The concept of nonlinear modes applied to friction-damped systems*. Thèse de doctorat, Leibniz Universität Hannover, 2014.
- [76] M. KRACK : Nonlinear modal analysis of nonconservative systems : Extension of the periodic motion concept. *Computers and Structures*, 154:59–71, 2015.
- [77] M. KRACK, S. TATZKO, L. P. von SCHEIDT et J. WALLASCHEK : Reliability optimization of friction-damped systems using nonlinear modes. *Journal of Sound and Vibration*, 333(13):2699 – 2712, 2014.
- [78] M. KRACK, L. P. von SCHEIDT et J. WALLASCHEK : A method for nonlinear modal analysis and synthesis : Application to harmonically forced and self-excited mechanical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 332(25):6798–6814, 2013.
- [79] M. KRACK, L. P. von SCHEIDT et J. WALLASCHEK : On the computation of the slow dynamics of nonlinear modes of mechanical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 42(1–2):71–87, 2014.
- [80] R. J. KUETHER et M. S. ALLEN : Craig-bampton substructuring for geometrically nonlinear subcomponents. In *32nd International Modal Analysis Conference (IMAC XXXII)*, Orlando, Florida, 2014.
- [81] R. J. KUETHER et M. S. ALLEN : Substructuring with nonlinear reduced order models and interface reduction with characteristic constraint modes. In *55th AIAA/ASME/ASCE/AHS/SC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, National Harbor, Maryland*, 2014.
- [82] M. LALANNE et G. FERRARIS : *Rotordynamics prediction in engineering*. Wiley, 2nd éd., 1998.
- [83] D. LAXALDE : *Étude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2007.
- [84] D. LAXALDE, C. GIBERT et F. THOUVEREZ : Experimental and numerical investigations of friction rings damping of blisks. In *ASME Turbo Expo 2008 : Power for Land, Sea, and Air*, vol. 5, p. 469–479, 2008.
- [85] D. LAXALDE, L. SALLES, L. BLANC et F. THOUVEREZ : Non-linear modal analysis for bladed disks with friction contact interfaces. In *ASME Turbo Expo 2008 : Power for Land, Sea, and Air*, vol. 5, p. 457–467, 2008.
- [86] D. LAXALDE, F. THOUVEREZ, J.-J. SINOUE et J.-P. LOMBARD : Qualitative analysis of forced response of blisks with friction ring dampers. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 26(4):676–687, 2007.

- [87] D. LAXALDE et M. LEGRAND : Nonlinear modal analysis of mechanical systems with frictionless contact interfaces. *Computational Mechanics*, 47(4):469–478, 2011.
- [88] D. LAXALDE et F. THOUVEREZ : Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 322(4–5):1009–1025, 2009.
- [89] A. LAZARUS et O. THOMAS : A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(9):510 – 517, 2010.
- [90] M. LEGRAND : *Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes - Université de Nantes, 2005.
- [91] M. LEGRAND, C. PIERRE et B. PESEUX : Structural modal interaction of a four degree of freedom bladed disk and casing model. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 5(4):13–41, 2010.
- [92] N. LESAFFRE, J. J. SINOÛ et F. THOUVEREZ : Stability analysis of rotating beams rubbing on an elastic circular structure. *Journal of Sound and Vibration*, 299(4–5):1005–1032, 2007.
- [93] S.-H. LIM, R. BLADH, M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Compact, generalized component mode mistuning representation for modeling bladed disk vibration. *AIAA Journal*, 45(9):2285–2298, 2017/01/09 2007.
- [94] E. LOGAN, JR : *Handbook of Turbomachinery*. Mechanical Engineering. CRC Press, 2003.
- [95] A. M. LYAPUNOV : The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, 55(3):531–534, 1992.
- [96] R. H. MACNEAL : A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4):581 – 601, 1971.
- [97] A. MADDEN, B. I. EPUREANU et S. FILIPPI : Reduced-order modeling approach for blisks with large mass, stiffness, and geometric mistuning. *AIAA Journal*, 50(2):366–374, 2012.
- [98] C. MARTEL, R. CORRAL et J. LLORENS : Stability increase of aerodynamically unstable rotors using intentional mistuning. *Journal of Turbomachinery*, 130(1): 011006–011006, 2007.
- [99] J. MAWHIN : Oscillations en mode normaux de systèmes dynamiques non linéaire à plusieurs degrés de liberté. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 33(9-10):540–557, 1964.
- [100] M. MBAYE : *Conception robuste en vibration et aéroélasticité des roues aubagées de turbomachines*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2009.
- [101] M. MBAYE, C. SOIZE, J.-P. OUSTY et E. CAPIEZ-LERNOUT : Robust analysis of design in vibration of turbomachines. *Journal of Turbomachinery*, 135(2):021008–021008, 2012.

- [102] M. P. MIGNOLET et W. HU : Direct prediction of the effects of mistuning on the forced response of bladed disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 120(3):626–634, 1998.
- [103] M. P. MIGNOLET, A. RIVAS-GUERRA et B. LABORDE : Towards a comprehensive direct prediction strategy of the effects of mistuning on the forced response of turbomachinery blades. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 71(5):462–469, 1999.
- [104] M. MONTEIL, O. THOMAS et C. TOUZÉ : Identification of mode couplings in nonlinear vibrations of the steelpan. *Applied Acoustics*, 89:1–15, 2015.
- [105] M. MONTEIL, C. TOUZÉ, O. THOMAS et S. BENACCHIO : Nonlinear forced vibrations of thin structures with tuned eigenfrequencies : the cases of 1 :2 :4 and 1 :2 :2 internal resonances. *Nonlinear Dynamics*, 75(1):175–200, 2013.
- [106] S. NACIVET : *Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2002.
- [107] S. NACIVET, C. PIERRE, F. THOUVEREZ et L. JÉZÉQUEL : A dynamic lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265(1):201–219, 2003.
- [108] M. NAUDIN et J.-M. PUGNET : Vibrations et contraintes alternées dans les turbomachines. *Techniques de l'ingénieur - Vibrations en milieu industriel, mesures, surveillance et contrôle*, ref. bm4175, 2017.
- [109] A. H. NAYFEH : On direct methods for constructing nonlinear normal modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Control*, 1(4):389–430, 1995.
- [110] A. H. NAYFEH et B. BALACHANDRAN : *Applied Nonlinear Dynamics*, chap. 3, p. 147–230. Wiley-VCH Verlag GmbH, 1995.
- [111] A. H. NAYFEH et B. BALACHANDRAN : *Applied Nonlinear Dynamics*, chap. 6, p. 423–460. Wiley-VCH Verlag GmbH, 1995.
- [112] N. M. NEWMARK : *A method of computation for structural dynamics*. American Society of Civil Engineers, 1959.
- [113] M. NIKOLIC, E. P. PETROV et D. J. EWINS : Robust strategies for forced response reduction of bladed disks based on large mistuning concept. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 130(2):022501–022501, 2008.
- [114] M.-O. PARENT : *Prédiction de la stabilité en contact rotor-stator dans les turboréacteurs d'avion*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2015.
- [115] M. PEETERS : *Theoretical and experimental modal analysis of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 2010.
- [116] M. PEETERS, R. VIGUIÉ, G. SÉRANDOUR, G. KERSCHEN et J. C. GOLINVAL : Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1):195–216, 2009.

- [117] W. PENG : *Fundamentals of Turbomachinery*. Wiley, 2008.
- [118] E. PESHECK, C. PIERRE et S. W. SHAW : A new galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 249(5):971–993, 2002.
- [119] E. PESHECK : *Reduced order modeling of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and invariant manifolds*. Thèse de doctorat, University of Michigan, 2000.
- [120] E. P. PETROV : A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 126(1):175–183, 2004.
- [121] E. P. PETROV et D. J. EWINS : Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 125(2):364–371, 2003.
- [122] E. P. PETROV et D. J. EWINS : Effects of damping and varying contact area at blade-disk joints in forced response analysis of bladed disk assemblies. *Journal of Turbomachinery*, 128(2):403–410, 2005.
- [123] E. P. PETROV, K. Y. SANLITURK et D. J. EWINS : A new method for dynamic analysis of mistuned bladed disks based on the exact relationship between tuned and mistuned systems. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(3):586–597, 2002.
- [124] J. PHILIPPE : *Prédiction du comportement vibratoire des redresseurs sectorisés désaccordés*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2016.
- [125] T. PIATKOWSKI : Dahl and lugre dynamic friction models — the analysis of selected properties. *Mechanism and Machine Theory*, 73:91 – 100, 2014.
- [126] C. PIERRE et P. D. CHA : Strong mode localization in nearly periodic disordered structures. *AIAA Journal*, 27(2):227–241, 1989.
- [127] C. PIERRE et D. V. MURTHY : Aeroelastic modal characteristics of mistuned blade assemblies - mode localization and loss of eigenstructure. *AIAA Journal*, 30(10):2483–2496, 1992.
- [128] C. PIERRE, D. TANG et E. H. DOWELL : Localized vibrations of disordered multispan beams - theory and experiment. *AIAA Journal*, 25(9):1249–1257, 1987.
- [129] C. PIERRE, T. E. SMITH et D. V. MURTHY : Localization of aeroelastic modes in mistuned high-energy turbines. *Journal of Propulsion and Power*, 10(3):318–328, 1994.
- [130] M. RATHINAM et L. R. PETZOLD : A new look at proper orthogonal decomposition. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(5):1893–1925, 2003.
- [131] J. RAVOUX : *Réponse forcée des aubages de turbomachines liaisonnés par nageoires*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2003.

- [132] L. RENSON, G. KERSCHEN et B. COCHELIN : Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. *Journal of Sound and Vibration*, 364:177 – 206, 2016.
- [133] R. M. ROSENBERG : Normal modes of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, 27(2):263–268, 1960.
- [134] R. M. ROSENBERG : On normal vibrations of a general class of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, 28(2):275–283, 1961.
- [135] R. M. ROSENBERG : The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 29(1):7–14, 1962.
- [136] R. M. ROSENBERG : On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, 9:155 – 242, 1966.
- [137] R. M. ROSENBERG et J. K. KUO : Nonsimilar normal mode vibrations of nonlinear systems having two degrees of freedom. *Journal of Applied Mechanics*, 31(2):283–290, 1964.
- [138] R. RZADKOWSKI : The general model of free vibrations of mistuned bladed discs, part i : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 173(3):377 – 393, 1994.
- [139] L. SALLES : *Étude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2010.
- [140] L. SALLES, L. BLANC, F. THOUVEREZ et A. GOUSKOV : Dynamic analysis of fretting-wear in friction contact interfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 48(10):1513 – 1524, 2011.
- [141] G. SAMARANAYAKE, S. SAMARANAYAKE et A. K. BAJAJ : Non-resonant and resonant chaotic dynamics in externally excited cyclic systems. *Acta Mechanica*, 150(3):139–160, 2001.
- [142] S. SAMARANAYAKE, A. K. BAJAJ et O. D. I. NWOKAH : Amplitude modulated dynamics and bifurcations in the resonant response of a structure with cyclic symmetry. *Acta Mechanica*, 109(1):101–125, 1995.
- [143] S. SAMARANAYAKE et A. BAJAJ : Subharmonic oscillations in harmonically excited mechanical systems with cyclic symmetry. *Journal of Sound and Vibration*, 206(1):39 – 60, 1997.
- [144] S. SAMARANAYAKE, G. SAMARANAYAKE et A. BAJAJ : Resonant vibrations in harmonically excited weakly coupled mechanical systems with cyclic symmetry. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(10):1519 – 1534, 2000.
- [145] E. SARROUY : *Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires. Application à la dynamique des rotors*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2008.
- [146] R. SEYDEL : *Practical Bifurcation and Stability Analysis*, vol. 5 de *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2010.

- [147] L. SHAMPINE : *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Chapman & Hall mathematics. Taylor & Francis, 1994.
- [148] S. SHAW et C. PIERRE : Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):85 – 124, 1993.
- [149] S. SHAW et C. PIERRE : Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169(3):319 – 347, 1994.
- [150] F. SICOT : *Simulation efficace des écoulements instationnaires périodiques en turbomachines*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2009.
- [151] J. SLATER, G. MINKIEWICZ et A. BLAIR : Forced response of bladed disk assemblies - a survey. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1998.
- [152] J. STOER, R. BARTELS, W. GAUTSCHI, R. BULIRSCH et C. WITZGALL : *Introduction to Numerical Analysis*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2002.
- [153] W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA : The modified single mode method in the investigations of the resonant vibrations of non-linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 63(4):475–489, 1979.
- [154] D. L. THOMAS : Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(1):81–102, 1979.
- [155] O. THOMAS, C. TOUZÉ et A. CHAIGNE : Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1 :1 :2 internal resonance. *International Journal of Solids and Structures*, 42(11–12):3339–3373, 2005.
- [156] F. TISSEUR et K. MEERBERGEN : The quadratic eigenvalue problem. *Society for industrial and applied mathematics*, 43(2):235–286, 2001.
- [157] S. A. TOBIAS et R. N. ARNOLD : The influence of dynamical imperfection on the vibration of rotating disks. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 171(1):669–690, 1957.
- [158] C. TOUZÉ, O. THOMAS et A. CHAIGNE : Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1–2):77–101, 5 2004.
- [159] C. TOUZÉ, O. THOMAS et A. HUBERDEAU : Asymptotic non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures. *Computers & Structures*, 82 (31–32):2671–2682, 2004.
- [160] D.-M. TRAN : Component mode synthesis methods using interface modes. application to structures with cyclic symmetry. *Computers & Structures*, 79(2):209 – 222, 2001.
- [161] D.-M. TRAN : Component mode synthesis methods using partial interface modes : Application to tuned and mistuned structures with cyclic symmetry. *Computers & Structures*, 87(17–18):1141–1153, 2009.

- [162] K. R. V. KAZA et R. E. KIELB : Flutter and response of a mistuned cascade in incompressible flow. *AIAA Journal*, 20(8):1120–1127, 1982.
- [163] A. VAKAKIS, T. NAYFEH et M. KING : A multiple-scales analysis of nonlinear, localized modes in a cyclic periodic system. *Journal of Applied Mechanics*, 60(2):388–397, 1993.
- [164] A. F. VAKAKIS : Dynamics of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry. *Acta Mechanica*, 95(1-4):197–226, 1992.
- [165] A. F. VAKAKIS et C. CETINKAYA : Mode localization in a class of multidegree-of-freedom nonlinear systems with cyclic symmetry. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 53(1):265–282, 1993.
- [166] A. F. VAKAKIS, L. I. MANEVITCH, Y. V. MLKHLIN, V. N. PILIPCHUK et A. A. ZEVIN : *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. Wiley-VCH Verlag GmbH, 2008.
- [167] R. VALID et R. OHAYON : Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques. *La Recherche aérospatiale*, 4:261–263, 1985.
- [168] E. van der WEIDE, A. GOPINATH et A. JAMESON : *Turbomachinery Applications with the Time Spectral Method*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
- [169] J. M. VANCE, F. Y. ZEIDAN et B. MURPHY : *Machinery Vibration and Rotordynamics*. Wiley, 2010.
- [170] J. T. WAGNER : Coupling of turbomachine blade vibrations through the rotor. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 89(4):502, 1967.
- [171] G. A. WATSON et J. J. MORÉ : *Lecture Notes in Mathematics - The Levenberg-Marquardt algorithm : Implementation and theory*, vol. 630. Springer Berlin Heidelberg, 1978.
- [172] O. WEEGER, U. WEVER et B. SIMEON : Nonlinear frequency response analysis of structural vibrations. *Computational Mechanics*, 54(6):1477–1495, 2014.
- [173] O. WEEGER, U. WEVER et B. SIMEON : On the use of modal derivatives for nonlinear model order reduction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 108(13):1579–1602, 2016.
- [174] S. T. WEI et C. PIERRE : Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry part i : Free vibrations. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110(4):429–438, 1988.
- [175] S. T. WEI et C. PIERRE : Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry part ii : Forced vibrations. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110(4):439–449, 1988.
- [176] S.-T. WEI et C. PIERRE : Statistical analysis of the forced response of mistuned cyclic assemblies. *AIAA Journal*, 28(5):861–868, 1990.

- [177] Y. K. WEN : Method for random vibration of hysteretic systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 102(2):249–263, 1976.
- [178] D. S. WHITEHEAD : Effect of mistuning on the vibration of turbo-machine blades induced by wakes. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 8(1):15–21, 1966.
- [179] J. WILDHEIM : Excitation of rotating circumferentially periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 75(3):397–416, 1981.
- [180] S. J. WILDHEIM : Excitation of rotationally periodic structures. *Journal of Applied Mechanics*, 46(4):878–882, 1979.
- [181] M. T. YANG et J. H. GRIFFIN : A reduced order approach for the vibration of mistuned bladed disk assemblies. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119(1):161–167, 1997.
- [182] M. T. YANG et J. H. GRIFFIN : A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(4):893–900, 1999.
- [183] B. ZHOU, F. THOUVEREZ et D. LENOIR : Vibration reduction of mistuned bladed disks by passive piezoelectric shunt damping techniques. *AIAA Journal*, 52(6):1194–1206, 2014.
- [184] O. ZIENKIEWICZ et R. TAYLOR : *The Finite Element Method : Fluid dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [185] O. ZIENKIEWICZ et R. TAYLOR : *The Finite Element Method : Solid mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [186] O. ZIENKIEWICZ et R. TAYLOR : *The Finite Element Method : The basis*. Butterworth-Heinemann, 2000.

Table des figures

1	Architecture typique d'un turbomoteur d'hélicoptère	2
I.1	Configurations d'un système continu	9
I.2	Modèle éléments finis d'une roue aubagée	16
I.3	Définition des frontières inter-secteurs d'un système cyclique	19
I.4	Déformées modales dégénérées	22
I.5	Déformées modales non-dégénérées	22
I.6	Perturbation de l'écoulement par les aubages [150].	25
I.7	Diagramme de Campbell	26
I.8	Diagramme zigzag	27
I.9	Évolution des fréquences propres en fonction de l'indice harmonique	28
I.10	Courbe de Wöhler	29
I.11	Diagramme de Haigh	30
I.12	Facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage [19]	31
I.13	Roue aubagée à pales rapportées	32
I.14	Différents types de pieds de pale	32
I.15	Disques aubagés monoblocs	33
I.16	Dispositifs rigidifiants par excroissance matérielle	34
I.17	Amortisseur sous plate-forme	35
II.1	Procédure AFT	46
II.2	Représentation schématique des techniques de continuation	48
II.3	Bifurcation des solutions périodiques	58
II.4	Diagramme de bifurcation	59
II.5	Modèle académique à non-linéarité cubique	62
II.6	Résonances principales et secondaires	64
II.7	Phénomène de saut en amplitude au passage d'un point de retournement	65
II.8	Localisation forcée	66
II.9	Identification des bifurcations	68
II.10	Mode non-linéaire et espace des configurations	71
II.11	Modèle académique soumis à une non-linéarité de frottement sec	79
II.12	Backbones du modèle académique avec frottement sec	80
II.13	Secteur fondamental du modèle phénoménologique avec frottement sec	81
II.14	Excitation tournante du modèle phénoménologique	82
II.15	Loi non-linéaire du modèle phénoménologique	83
II.16	Convergence de la solution en fonction du nombre d'harmoniques	84
II.17	Réponse forcée et séries temporelles du système accordé	85
II.18	Backbones fréquentielles du mode non-linéaire dégénéré à un diamètre	86

II.19	Zoom sur l'interface d'une déformée modale à basse et haute amplitude . . .	87
II.20	Compliance du système accordé pour différents niveaux d'excitation	87
II.21	Backbones en amortissement du mode non-linéaire dégénéré à un diamètre . .	88
II.22	Réponse forcée et séries temporelles du système désaccordé	90
II.23	Backbones fréquentielles des deux modes désaccordés à un diamètre	91
II.24	Compliance du système désaccordé pour différents niveaux d'excitation	91
II.25	Backbones en amortissement des modes désaccordés à un diamètre	92
II.26	Réponse forcée d'une autre pale du système désaccordé	93
III.1	Erreur induite par la méthode de Galerkin	98
III.2	Réponses forcées par synthèse modale non-linéaire	109
III.3	Schéma-bloc de la CNCMS	118
III.4	Secteur fondamental du modèle phénoménologique	119
III.5	Familles modales du modèle phénoménologique	119
III.6	Backbones du premier mode complexe non-linéaire du secteur fondamental .	120
III.7	Réponse forcée du modèle accordé pour différentes amplitudes d'excitation . .	121
III.8	Réponse forcée non-linéaire des pales du système désaccordé	122
III.9	Performances de la CNCMS en fonction du niveau	123
III.10	Facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage	126
III.11	Modèle éléments finis simplifié de roue aubagée	128
III.12	Familles modales du modèle simplifié	129
III.13	Déformées modales à 12 diamètres du modèle simplifié	130
III.14	Réponse forcée non-linéaire avec et sans double synthèse modale	131
III.15	Réponse forcée non-linéaire pour différentes bases de réduction	132
IV.1	Géométrie du modèle industriel	134
IV.2	Maillage du modèle industriel	135
IV.3	Conditions aux limites de l'analyse statique non-linéaire	136
IV.4	Champs de précontraintes des composants	137
IV.5	Familles modales du modèle industriel	138
IV.6	Déformées modales à 12 diamètres du modèle industriel	139
IV.7	Nœud d'observation en tête de pale sur le bord de fuite	140
IV.8	Réponse désaccordée aléatoirement pour différents niveaux d'excitation	145
IV.9	Réponse linéaire et non-linéaire pour différents taux de désaccordage	147
IV.10	Réponse accordée et désaccordée pour différents taux de désaccordage	148
IV.11	Erreur induite sur la réponse forcée par l'omission d'un mode voisin	149
IV.12	Substitution d'un mode non-linéaire par un mode linéaire	150
IV.13	Réponse désaccordée intentionnellement pour différents niveaux d'excitation .	152
IV.14	Réponse linéaire et non-linéaire désaccordée intentionnellement	153
IV.15	Réponse non-linéaire accordée et désaccordée intentionnellement	154

Liste des tableaux

II.1	Paramètres structuraux du modèle académique avec frottement sec	79
II.2	Paramètres structuraux du modèle phénoménologique	81
II.3	Fréquences propres des systèmes linéaires accordés sous-jacents	81
II.4	Désaccordage du modèle phénoménologique	88
II.5	Fréquences propres des systèmes linéaires désaccordés sous-jacents	89
III.1	Paramètres structuraux du modèle phénoménologique	117
III.2	Paramètres structuraux du secteur B	121
III.3	Schéma de désaccordage du modèle phénoménologique	121
IV.1	Propriétés matérielles des pales et du disque à 20°C	135
IV.2	Statistiques du maillage pour le modèle industriel	135
IV.3	Temps de calcul pour la création des super-éléments initiaux	140
IV.4	Temps de calcul et réduction du modèle à chaque étape	143
IV.5	Schéma de désaccordage intentionnel du modèle industriel	151

Publications personnelles

Reuves internationales avec comité de lecture

- C. Joannin, B. Chouvion, F. Thouverez, J.-P. Ousty, and M. Mbaye. A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 83, 75 - 92, 2017.
- C. Joannin, B. Chouvion, F. Thouverez, M. Mbaye, and J.-P. Ousty. Nonlinear modal analysis of mistuned periodic structures subjected to dry friction. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 138(7), 072504-072504, 2015.
- C. Joannin, F. Thouverez, B. Chouvion. Reduced-order modelling using nonlinear modes and triple modal synthesis. *In preparation*.

Colloques internationaux avec actes publiés

- C. Joannin, B. Chouvion, F. Thouverez. A reduced-order modeling technique for the study of non-linear vibrations in dissipative systems. *ISMA 2016 - International Conference on Noise and Vibration Engineering*, Leuven (Belgium), September 19-21, 2016.
- C. Joannin, B. Chouvion, F. Thouverez. A new dynamic substructuring method for nonlinear and dissipative systems. *ECCOMAS Congress 2016, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Crete Island (Greece), June 5-10, 2016.
- C. Joannin, F. Thouverez, B. Chouvion, M. Mbaye, J.-P. Ousty. Nonlinear modal analysis of mistuned periodic structures subjected to dry-friction. *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2015*, Montréal (Canada), June 15-19, 2015.

Colloques nationaux avec actes publiés

- C. Joannin, B. Chouvion, F. Thouverez. Dynamique non-linéaire des systèmes à symétrie cyclique en présence de frottement et de désaccordage structurel. *CSMA 2015, 12e Colloque National en Calcul des Structures*, Presqu'île de Giens (France), 18-22 Mai 2015.

Séminaires

- C. Joannin, L. Berthe, F. Thouverez. Réduction de modèle et dimensionnement des roues aubagées - Désaccordage et non-linéarités. *La réduction de modèles : Pratiques et perspectives (Journée 3AF - Commission Structures)*. ONERA Châtillon (France), 31 Mai 2016.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

M. G. KERSCHEN

Professeur - Université de Liège - Dept of Aerospace & Mechanical Engineering
Space Structures & System Laboratory - Quartier Polytech 1 (352/3) - Allée de la Découverte 9
4000 Liège - Belgique

et de

M. J-F. DEU

Professeur - CNAM - Laboratoire de Mécanique et des Systèmes Couplés
Mécanique Case courrier 2D6R10 - 292 rue Saint-Martin - 75141 Paris cedex 03

Monsieur JOANNIN Colas

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 18 avril 2017

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes

