



Etude de la propagation des infrasons au-dessus de massifs montagneux

Florentin Damiens

► To cite this version:

Florentin Damiens. Etude de la propagation des infrasons au-dessus de massifs montagneux. Physique Atmosphérique et Océanique [physics.ao-ph]. Sorbonne Université, 2018. Français. NNT : 2018SORUS258 . tel-02868514

HAL Id: tel-02868514

<https://theses.hal.science/tel-02868514>

Submitted on 15 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École doctorale n° 129 : Sciences de l'Environnement

Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'Université Pierre et Marie Curie
Spécialité doctorale “Dynamique de l'atmosphère”

présentée et soutenue publiquement par

Florentin DAMIENS

le 18 Mai 2018

**Étude de la propagation des infrasons au dessus de
massifs montagneux**

Jury

M. Régis Marchiano,	Professeur	Président du jury
Mme Evelyne Richard,	Directrice de Recherche	Rapporteur
M. Thierry Dauxois,	Directeur de Recherche	Rapporteur
M. Paul Billant,	Directeur de Recherche	Examineur
M. Laurent Thomann,	Professeur	Examineur
M. François Lott,	Directeur de Recherche	Directeur
M. Christophe Millet,	Ingénieur de Recherche	Co-directeur

Ecole Normale Supérieure
Laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD)
UMR CNRS 8539, 75005 Paris, France

Table des matières

Table des matières	iii
Liste des figures	v
1 Introduction	1
1.1 Motivations et origines de la thèse	2
1.2 Propagation atmosphérique des infrasons	4
1.3 Incertitudes dans les modèles	9
1.4 Plan du manuscrit	15
2 Méthodologie	17
2.1 Théorie linéaire	18
2.2 Structure verticale	27
2.3 Calcul de la propagation horizontale	33
3 Ondes de montagne et effet de Foehn	47
3.1 Théorie linéaire	48
3.2 An adiabatic Foehn effect	53
4 Atmospheric propagation of infrasound across mountain ranges	73
4.1 Introduction	75
4.2 Atmospheric mountain flow model	77
4.3 Acoustic propagation in range-dependent media	81
4.4 Impact of mountain waves on the normal modes	85
4.5 Impact of mountain waves on signals	88
4.6 Conclusions	93
5 Propagation des infrasons dans un champ d'ondes de montagne incertain	95
5.1 Le contexte stochastique des simulations	96
5.2 Une première analyse de l'effet des incertitudes sur les infrasons	101
5.3 Identification des structures par modes de Koopman	107
5.4 Perspective : Décomposition spectrale stochastique	117
6 Conclusion générale	121

A	Annexes	I
A.1	Un modèle anélastique	II
A.2	Analyses systématiques des modèles d'ondes de gravité	VII
A.3	Solution analytique du problème aux valeurs propres	XII
A.4	Perturbations de l'écoulement et modes	XVI
A.5	DMD sur des matrices clichés simples	XXII

Liste des figures

1.1	Système de Surveillance International.	3
1.2	Exemple de profils de température (a) et des composantes zonale (U) et méridionale (V) de la vitesse (b). (c) Célérité effective obtenue en ajoutant à la vitesse du son $\sqrt{\gamma r T}$ la projection du vent dans le plan faisant un angle θ avec l'équateur.	6
1.3	Exemple de simulation extrait de la littérature [Fee and Matoza, 2013]. La source correspond à l'éruption du Mont Saint Helens (Etats-Unis) le 1 ^{er} février 2012. Les rayons, qui sont ici représentés par des lignes noires, sont superposés à une carte des pertes par transmission (en unité dB) pour une fréquence fixée, ici 0,5 Hz.	8
1.4	Signaux correspondants au cas <i>Hukkakero</i> . À gauche, signaux mesurés. À droite, signaux simulés avec la méthode des modes normaux en utilisant les données du CEPMMT. Les temps pour lesquels l'amplitude du signal mesuré est supérieure à 5% de la valeur maximale sont indiqués en rose.	10
1.5	Signaux correspondants au cas <i>Hukkakero</i> . À gauche, signaux mesurés. À droite, signaux simulés avec la méthode des modes normaux en utilisant les données du CEPMMT et en ajoutant une perturbation. La perturbation est modélisée par un paquet d'onde, de longueur d'onde 1 km, et localisé entre les altitudes 40 km et 60 km. Les temps pour lesquels l'amplitude du signal mesuré est supérieure à 5% de la valeur maximale sont indiqués en rose.	11
1.6	Amplitudes des signaux acoustiques avec et sans topographie à 8 Hz, issues de simulations paraboliques avec un relief présent au sol. Cependant lors de ces simulations aucun champ d'onde de montagne ni aucune paramétrisation locale de l'atmosphère n'a été prise en compte. Figure extraite de [McKenna et al., 2012]	13
1.7	Site de la station IS49, située à Tristan da Cunha, île du territoire britannique d'outre-mer de Sainte-Hélène.	14
2.1	Solutions de l'équation de dispersion dans le domaine (ω, k) pour différentes valeurs du nombre d'onde vertical m [cyc.m ⁻¹]. Les courbes de couleur rouge / orange correspondent aux solutions (2.26), celles de couleur bleu aux solutions (2.27).	22
2.2	Mode propre d'indice $j = 2$ pour le profil initial (gauche) et le profil avec un guide d'onde de haute altitude (droite).	42

2.3	Profil de célérité initial c_0 (trait plein) et profil accéléré c_a (pointillés). Les modes propres à $f = 3\text{Hz}$ sont représentés dans les deux cas par des croix et des cercles, respectivement.	43
2.4	Paquet d'ondes associées à chaque mode et signal acoustique résultant de la somme de ce paquets d'ondes (en noir) pour le profil initial c_0 (gauche) et le profil accéléré c_a (droite).	44
3.1	Contour à la limite du déferlement. Gauche : perturbations de la composante horizontale du vent ; Droite : perturbations de la composante verticale du vent. Figure extraite de [Muraki, 2011].	51
3.2	Coordonnées sigma en présence d'une orographie	52
3.3	Vertical profiles of the solutions used to build the canonical solution : inviscid exact solution $\hat{w}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z})$ (black solid), approximation of $\hat{w}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z})$ near $\bar{z} = 0$ (right of (3.28), black dashed), damped approximation $\hat{w}_{\text{surf}}$ (3.30, black dashed and dot), and approximation of $\hat{w}_c(\bar{k}, \bar{z})$ (thick gray). In all panels, only the real part of the complex functions are shown, $\bar{k} = 0.1$ and $\bar{z}_b = 0.05$ for $J = 0.5, 2$, and 4 in a) b) and c) respectively.	58
3.4	Isentropic surfaces predicted by the linear model when $H_N = 0.5$, $Fr = 5$ and for different value of J . Tanh incident wind and $\bar{z}_b = 0.05$: a) $J=0.5$, c) $J=2$, e) $J=4$. Constant shear and hydrostatic set-up in (3.34), $\bar{z}_b = 0.02$: b) $J=0.5$, d) $J=2$, e) $J=4$. In all panels the thick curve represent the incident wind U and the thick dashed curves the isentropes that initially are at the altitudes $\bar{z} = H_N$ and $\bar{z} = 2H$	60
3.5	Non-dimensional Horizontal wind disturbances ($\bar{u}$) predicted by the theory (a, c, e) and WRF (b, d, f), for $J = 0.5, 2$, and 4 , respectively. In all simulations $H_N = 0.5$ and in the linear model in (a), (c), and (e) the boundary layer scale varies as $\bar{z}_b = 0.05\sqrt{J}$. In each panel the contour interval is proportional to the background wind at the top of the hill, contours= $0.2 * H_N/\sqrt{J}$	64
3.6	Isentropic surfaces predicted by the theory and WRF, same parameters as in Fig. 3.5	65
3.7	Same as Fig. 3.6 but leaving $H_N/\sqrt{J} = \text{cte}$: a) and b) $J = 0.5$, $H_N = 0.25$; c) and d) $J = 4$, $H_N = 0.71$. e) and f) are enlarged views of c) and d).	66
3.8	Global indices measuring a) the downslope wind amplitudes (3.42), b) the normalised wave stress (3.43), and c) the foehn intensity (3.44). The results are from 64 numerical experiments, 32 uses with WRF and 32 the "inflow linear" theory (LT). Half the simulations are done with constant height $H_N = 0.71$, the other half with constant penetration of the mountain into the shear $H_N/\sqrt{J} = 0.4$	68
3.9	Sensitivity test : a) and b) are as Fig. 3.7c and 3.7d with the surface $\bar{h}$ shifted vertically by $H_N/10$. c) is as Fig. 3.7d but with a fully parameterized boundary layer.	70

4.1	(a) Temperature fluctuations T' and (b) horizontal wind fluctuations u' (b) resulting from interaction between a mountain and an incoming boundary layer. The streamlines are given by black lines superimposed to the wind fluctuations. The dimensionless parameters used are $H_N = 0.5$ and $J = 1.5$. The mountain is represented in gray.	79
4.2	Effective sound speed field without (a,c) and with (b,d) interaction between a mountain and an incoming boundary layer. The dimensionless parameters used are $H_N = 0.5$ (a,b,c,d) and $J = 1.5$ (a,b) or $J = 0.5$ (c,d).	80
4.3	Eigenfunctions $ \phi_j $ as functions of x and z for the first three modes (from left to right), and for a fixed frequency of 2.8125 Hz. The background state is computed for $H_N = 0.5$ and $J = 1.5$. (a) $j = 1$, (b) $j = 2$ and (c) $j = 3$	83
4.4	Phase velocity c_j for the first three modes (from top to bottom) as a function of streamwise location and frequency, for $H_N = 0.5$ and $J = 1.5$. (a,d) $j = 1$; (b,e) $j = 2$; (c,f) $j = 3$. The results obtained by applying a “mask” onto the effective sound speed field are given on the left (a-c). The figures on the right (d-f) show the impact of mountain wave dynamics. Black, blue and red curves give the WKB prediction and the cut-off frequencies ω^- and ω^+ as defined in section IV.	86
4.5	Ground-based sound intensity $ \phi_j /\sqrt{k_j}$ for the first three modes as a function of streamwise location and frequency, for $H_N = 0.5$ and $J = 1.5$. (a,d) $j = 1$; (b,e) $j = 2$. The WKB prediction is superimposed in black contours. Red and blue curves correspond of those of figure 4.4.	88
4.6	Waveforms obtained for cases I (a), II (b) and III (c) as functions of the retarded time $t - x/c_0$ for effective sound speed profiles obtained without (blue) and with (red) interaction between a mountain and a boundary layer. The signals obtained for an unperturbed range-independent case (e.g. without mountains) are plotted in gray. Case I : $J = 0.75$ and $H_N = 0.3$; case II : $J = 2$ and $H_N = 0.8$; case III : $J = 0.3$ and $H_N = 0.8$. The source is defined by (4.24).	89
4.7	Far-field averaged attenuation downstream the mountain, in the range 25–40 km as a function of J and H_N with mountain wave disturbances (a) and the “mask” effect alone (b). The downslope wind amplitude A is given by contours.	91
4.8	Far-field averaged attenuation, in the range 40–50 km as a function of J and H_N with mountain wave disturbances (a) and the “mask” effect alone (b). The downslope wind amplitude A is given by contours.	92
5.1	Schéma du domaine de calcul avec les couches absorbantes (PML) et la communication lors de la parallélisation (bibliothèque MPI).	98
5.2	Front d’onde acoustique se propageant au dessus d’une montagne caractérisée par $H_N = 0.9$ et $F_r = 2$. a, b et c : $J = 0,3$. d, e et f : $J = 5$	100
5.3	Signal acoustique en aval ($x = 37$ km) pour les deux cas $J = 0.3$ (gris) et $J = 5$ (rouge)	101
5.4	Direction des vents, moyennés verticalement, pour les deux cas d’intérêts : le 12 Janvier 2015 à 02h21 et le 9 mars 2015 à 19h44.	102
5.5	Carte des vents verticaux issus de simulations WRF 3D de deux écoulements au dessus des Pyrénées.	103

5.6	Gauche : Variance de la composante horizontale du vent, estimée avec 1000 simulations. Droite : Densité de probabilité du champ de célérité effective, estimée aux deux points représentés par les croix.	105
5.7	Signal moyen (rouge) et sa variance (gris) en aval de la montagne, estimés à partir de 128 simulations	106
5.8	Densité de probabilité estimée de l'amplitude de la perturbation par rapport à la simulation moyenne.	106
5.9	Développement d'une instabilité en aval de la montagne.	107
5.10	Représentations des modes DMD à partir des simulations WRF, avec 12 heures de données. (a) : Amplitude des modes de Koopman ; (b) : Spectre dans le plan complexe ; (c) : Pulsation du spectre en fonction du taux de croissance.	113
5.11	Représentations des 4 modes prédominants $\Phi_i(\mathbf{X}_0)$	114
5.12	(a) : $w(x, z)$ après 12 heures de simulations ; (b) Somme (5.16) tronquée aux 4 modes dominants.	115
5.13	Spectre DMD pour 24 valeurs différentes du nombre de Richardson. Seuls les 4 premiers modes sont représentés pour plus de visibilité. A titre d'information, le spectre pour $J = 4$ est représenté en noir.	116
5.14	Mode DMD $j = 3$. a : $J=5$; b : $J=1$	117
5.15	Densité de probabilité des 9 premiers modes DMD d'écoulements WRF, estimées à partir de 100 réalisations d'écoulements.	118
A.1	Distance δ , basée sur la SVD, entre le modèle linéaire et le modèle WRF pour différents nombres de Richardson J , nombre de Froude F_r et hauteurs de montagnes H_N	IX
A.2	Contours de l'erreur SSl en fonction de l'intensité du vent et de l'échelle spatiale	X
A.3	Validation de la structure verticale des modes	XIV

Chapitre 1

Introduction

*« Rien ne ressuscite autant le
passé que les sons »*

Léon Tolstoï

Sommaire

1.1	Motivations et origines de la thèse	2
1.2	Propagation atmosphérique des infrasons	4
1.2.1	Les sources infrasonores	4
1.2.2	Structure verticale de l'atmosphère	5
1.2.3	L'atmosphère comme milieu de propagation	6
1.2.4	Modèles de propagation des infrasons	9
1.3	Incertitudes dans les modèles	9
1.3.1	Effet des incertitudes sur les guides d'ondes	9
1.3.2	Incertitudes et ondes de montagne	12
1.3.3	Effet de site, effet de Foehn	14
1.4	Plan du manuscrit	15

1.1 Motivations et origines de la thèse

Les ondes acoustiques sont des ondes mécaniques se propageant dans des milieux solides ou fluides. Les ondes dont les fréquences sont comprises entre 20 Hz et 20 kHz sont audibles, elles peuvent être produites de manière volontaire, par exemple avec des instruments de musique, ou au travers des activités industrielles. La seconde catégorie, celle des ondes inaudibles, est composée des ultrasons qui ont une fréquence supérieure à 20 kHz et des infrasons qui ont une fréquence inférieure à 20 Hz. Les infrasons peuvent aussi être produits par des activités humaines (explosions, tirs de carrière, éoliennes, avions supersoniques, fusées, etc) mais ils sont aussi naturellement présents dans l'atmosphère sans même que l'on s'en rende compte. Parmi les sources naturelles, les plus remarquables sont les éruptions volcaniques, les orages, la houle océanique, les séismes, ou les météorites. Dans une moindre mesure les phénomènes météorologiques produisent des infrasons par le biais d'interactions entre les vents et les obstacles de petite échelle ou encore, via la turbulence. Contrairement aux ondes audibles et aux ultrasons, les infrasons ont la particularité de pouvoir se propager dans l'atmosphère sur de très grandes distances. Cette propagation est due à deux spécificités de l'atmosphère : d'une part, la structure verticale des vents et de la température forme des guides d'ondes naturels qui piègent les infrasons, d'autre part, les infrasons ont une fréquence suffisamment basse pour n'être que très faiblement atténués par la diffusion moléculaire [Chatillon, 2011].

C'est à la suite d'un rapport de Verbeek en 1883, que l'on commença à étudier la propagation des infrasons dans l'atmosphère. Dans son rapport Verbeek analysait les conséquences géologiques et géophysiques de l'éruption du volcan Krakatoa situé dans le détroit de la Sonde entre l'Île de Java et de Sumatra. Cette éruption d'une extrême puissance (estimée à 13000 fois la puissance de l'explosion nucléaire d'Hiroshima d'après [Winchester, 2004]) a eu des conséquences dramatiques, engendrant notamment une famine en Amérique du Nord, en Asie et en Europe du Nord. Ce qui nous intéresse ici, c'est qu'une partie du rapport Verbeek est consacrée à l'étude des perturbations barographiques [Evers and Haak, 2010] enregistrées en plusieurs points du globe. C'est une des premières preuves que les infrasons peuvent se propager sur de très longues distances : on peut observer sur certains enregistrements le passage de la même onde plusieurs fois, celle-ci ayant fait au moins 7 fois le tour de la terre [Symons, 1888]. Cette capacité à se propager sur de très longues distances a fait de "l'écoute" des infrasons une des techniques les plus fiables pour la surveillance des essais nucléaires durant la période de la guerre froide.

La mesure des infrasons est devenue l'une des 4 technologies utilisées pour veiller au respect du Traité d'Interdiction Complète des Essais nucléaires (TICE). Ce traité, qui interdit tout essai nucléaire quelle que soit sa puissance, a été ouvert à la signature le 24 Septembre 1996 au siège des Nations Unies à New York. Ce traité s'appuie principalement sur le Système de Surveillance International (SSI ou IMS en anglais pour *International Monitoring System*) qui permet de détecter d'éventuelles explosions nucléaires et d'en apporter les preuves. La figure 1.1 donne l'état du SSI. Le SSI s'est considérablement développé¹ et il y a aujourd'hui 321 stations de surveillances sismiques, infrasonores, hydroacoustiques et radionucléides distribuées

1. Les évolutions du SSI sont régulièrement portées à l'information publique via le site de l'Organisation du Traité d'Interdiction Complète des Essais nucléaires (<https://www.ctbto.org>).

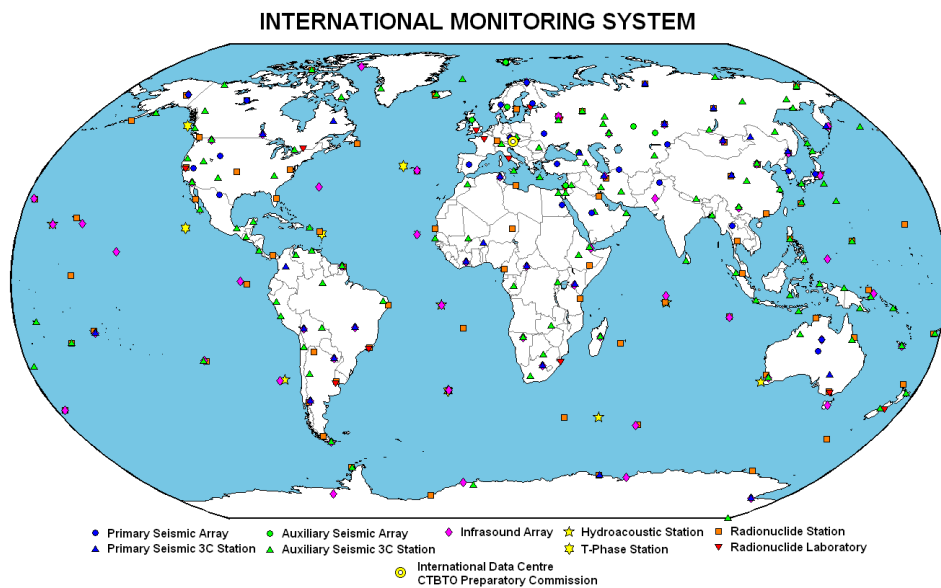


FIGURE 1.1 – Système de Surveillance International.

aussi uniformément que possible sur la surface de la terre. En partant de l'exigence principale stipulant qu'une explosion d'une énergie² de 1 kt doit être détectée par au moins 2 stations différentes, la configuration retenue est celle d'un réseau de 60 stations infrasons réparties de manière optimale à travers le monde. Pour être distribuées de manière relativement uniforme, les stations infrasons sont réparties dans des environnements divers et variés, certaines étant situées dans des zones très reculées et extrêmement difficiles d'accès (comme la station IS49 à Tristan da Cunha, Sainte-Hélène.).

L'intérêt naissant pour le domaine des infrasons a entraîné l'introduction de nombreux programmes de recherche dans plusieurs universités et la création de nombreux départements de recherche dans les institutions engagées dans la surveillance du respect du TICE. Au niveau Français cette tâche est dévolue au Département Analyse et Surveillance de l'Environnement du CEA (www.dase-cea.fr) qui, pour le besoin du TICE, a mis en place une chaîne de traitement permettant de détecter et d'analyser les mesures issues du SSI. Ces traitements et analyses sont continuellement améliorés, et la recherche dans ce domaine a été organisée selon 3 axes principaux : (1) le développement de nouvelles méthodes de traitement du signal et l'amélioration de méthodes existantes ; (2) le développement des capteurs microbarométriques et des filtres acoustiques associés et (3) la modélisation de la propagation des ondes infrasonores. La recherche menée dans le cadre de cette thèse se rapporte au troisième de ces axes. Les modèles de propagation usuels (tracé de rayons, sommation de modes, approximation de l'équation parabolique) sont souvent basés sur des approximations dont les conséquences sur les résultats sont parfois difficiles à évaluer. Et c'est pourquoi, dans certains cas ces techniques ne permettent pas d'interpréter les signaux mesurés [Kulichkov, 2004, Ponomarev et al., 2006,

2. Le kt est une unité de mesure d'énergie explosive, équivalente à mille tonnes de TNT. Son symbole est kt.

Millet et al., 2007]. C’est notamment le cas lorsque l’atmosphère met en jeu des structures relativement petites, par exemple sous la forme d’ondes de gravité [Lott and Millet, 2010], dont les montagnes constituent une des plus importantes sources [Smith, 1979, Durran, 1990a]. Dans la mesure où les ondes de gravité sont encore mal résolues par les modèles globaux de prévisions météorologiques, il est nécessaire de les simuler à partir de techniques *ad hoc*, et c’est précisément l’objectif de cette thèse que d’étudier l’effet de ces structures non/mal résolues sur la propagation des infrasons. C’est d’ailleurs du besoin de prédire ces ondes internes de gravité qu’est née la collaboration entre le CEA et le Laboratoire de Météorologie Dynamique de l’Ecole Normale Supérieure (LMD). L’équipe Dynamique Physique Atmosphère Océan (DPAO) du LMD étudie les processus dynamiques atmosphériques terrestres ainsi que l’évolution et la variabilité des climatologies tant globales que locales. De cette collaboration ont déjà résulté diverses contributions dont [Lott and Millet, 2010], où des paramétrisations d’ondes de gravité sont utilisées pour étudier la propagation des infrasons.

1.2 Propagation atmosphérique des infrasons

1.2.1 Les sources infrasonores

Les infrasons sont générés par une grande variété de sources [Campus, 2004]. Lorsqu’on s’intéresse aux sources naturelles, on peut citer les microbaromes résultant d’un mécanisme d’interaction entre la houle et l’atmosphère ([Posmentier, 1967]). Les météorites sont une autre source d’infrasons ([McIntosh et al., 1976, Liszka, 2008]) qui conduisent en moyenne à deux événements d’énergie supérieure à 1 kt tous les ans à l’échelle du globe [Brown et al., 2002]. Les signaux provenant de cette source ont une fréquence comprise entre 0,01 et 20 Hz. Les éruptions volcaniques quant à elles, génèrent des ondes qui se répartissent sur une très large gamme de fréquences (de 0,002 à 20 Hz) avec une amplitude proche de 100 Pa à 50 km de la source et quelques dizaines de pascals, à 1000 km [Le Pichon et al., 2005]. Les très grosses éruptions peuvent être détectées à plusieurs dizaines de milliers de kilomètres, le signal détecté présentant alors une arrivée très marquée suivie d’un train d’ondes irrégulier et pouvant durer plusieurs heures.

Les sources d’origine humaine sont aussi très nombreuses, souvent dues à des explosions, chimiques et plus rarement nucléaires. Les sources liées à des explosions chimiques, qui sont essentiellement le fait de l’exploitation minière, ont une fréquence comprise entre 0,05 Hz jusqu’à 20 Hz et une amplitude allant de quelques mPa jusqu’à 5 Pa. Les explosions nucléaires ont une signature infrasonore similaire à celle des grandes explosions chimiques. Elles sont observées avec une gamme de fréquences comprises entre 0,002 et 20 Hz et une amplitude pouvant dépasser les 20 Pa (pour d’importants événements). Les plus importantes explosions nucléaires (de l’ordre de la mégatonne) peuvent être détectées jusqu’à 20000 km. L’amplitude du signal mesuré à ces distances est corrélée à l’énergie de sorte que de la bonne prédiction numérique de l’amplitude acoustique dépend la pertinence du processus de caractérisation de la source. Et comme toute incertitude atmosphérique est susceptible de produire des effets sur les signaux calculés, et donc sur les amplitudes maximales, on peut s’attendre à ce que l’effet des petites structures de l’atmosphère se traduise par une caractérisation erronée. Il s’agit là d’un

autre aspect de la thèse.

1.2.2 Structure verticale de l'atmosphère

Pour comprendre la propagation des infrasons dans l'atmosphère une bonne connaissance de sa structure thermodynamique est nécessaire. Son comportement se rapproche de celui d'un gaz diatomique, car l'air sec se compose en moyenne de 78% d'azote, 21% d'oxygène, 0.93% d'argon, 0.039% de dioxyde de carbone et en faible concentration d'autres gaz. On considère donc que le rapport des chaleurs spécifiques γ est égal à celui du diazote *i.e* 7/5.

Parce que le champ de gravité terrestre piège les constituants de l'atmosphère en les empêchant de s'échapper dans l'espace, il est responsable de la concentration de la masse atmosphérique dans les couches inférieures de l'atmosphère. Cette tendance à stratifier le milieu se traduit directement par l'équilibre hydrostatique qui exprime que les forces de gravitation sont contrebalancées par un gradient de pression de direction opposée, soit

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g, \quad (1.1)$$

où p est la pression atmosphérique, z l'altitude, ρ la densité et g l'accélération due à la gravité. Considérant justifié le fait que les masses d'air déplacées et leurs vitesses soient faibles par rapport à la force exercée par le champ de gravité, l'approximation d'une atmosphère à l'équilibre hydrostatique est en général satisfaisante même lorsque celle-ci est en mouvement. Ainsi, l'action du champ de gravité terrestre confère à l'atmosphère une structure verticale relativement simple en terme de pression et de densité atmosphérique qu'il est possible d'obtenir en intégrant (1.1). Pour une atmosphère isotherme, on obtient aisément $p \sim \exp(-gz/(RT))$, où R désigne la constante universelle des gaz parfaits. Cet équilibre produit donc la décroissance exponentielle de la pression et de la densité avec l'altitude.

En terme de température les variations verticales sont nettement moins monotones, et nous verrons par la suite que ces variations ont un impact direct sur la propagation des infrasons. De manière générale, l'atmosphère est divisée en plusieurs couches d'épaisseurs variables dont les limites correspondent aux maxima et minima de la température. La figure 1.2 donne un exemple de profils, tels qu'on peut les obtenir à partir des données du centre européen de prévision météorologique à moyen terme (CEPMMT). La *troposphère* est la première couche de l'atmosphère, elle s'étend du sol jusqu'à des altitudes d'environ 12 km aux pôles et 18 km à l'équateur. Cette couche est le lieu des phénomènes météorologiques principaux. La dynamique y est turbulente et la variabilité spatiale et temporelle des conditions est importante. La troposphère contient près de 80% de la masse de l'atmosphère. Au sein de cette couche, la température décroît avec l'altitude jusqu'à la tropopause qui en marque la limite supérieure. La tropopause n'est pas une surface continue, elle présente des brèches concentriques par rapport aux pôles qui lui donnent une structure stratifiée imbriquée. Ces brèches, deux par hémisphères, sont à l'origine des courants appelés *jet stream* qui se forment au niveau des zones de chevauchement [Lehr and Burnett, 1964, Webb, 1966a]. La *stratosphère* s'étend de la tropopause jusqu'à la stratopause, à environ 55 km d'altitude. Cette couche est quasiment dépourvue de phénomènes météorologiques. La stratosphère contient la couche d'ozone qui transforme une partie du rayonnement solaire en chaleur par le biais du cycle ozone-oxygène.

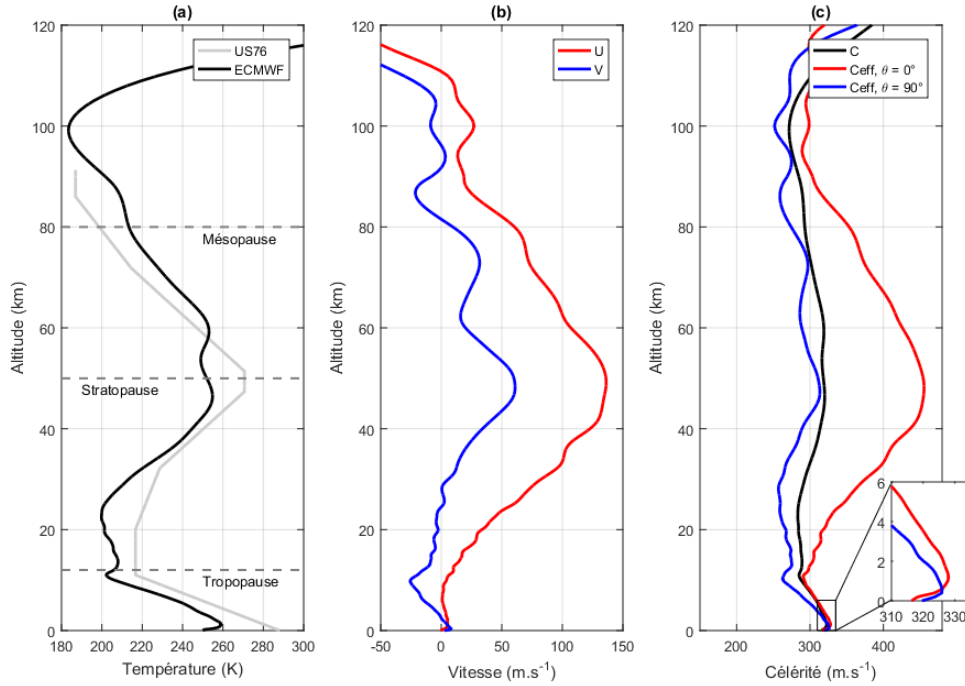


FIGURE 1.2 – Exemple de profils de température (a) et des composantes zonale (U) et méridionale (V) de la vitesse (b). (c) Célérité effective obtenue en ajoutant à la vitesse du son $\sqrt{\gamma r T}$ la projection du vent dans le plan faisant un angle θ avec l'équateur.

Ce dégagement de chaleur est responsable de l'augmentation de la température avec l'altitude [Fedele and Zancla, 1968, Kriester, 1969a, Kriester, 1969b]. Ce gradient de température positif entrave la formation de cellules de convection et la stratification est donc d'une grande stabilité [Webb, 1966b]. La *mésosphère* s'étend de 55 km à environ 90 km. Parce qu'elle est dépourvue de gaz ionisés, la température dans la *mésosphère* décroît jusqu'à la *mésopause* pour y atteindre un minimum global d'environ 180 à 200 K. Du fait de cette décroissance, la stratification de la *mésosphère* est moins stable que celle de la *stratosphère* [Webb, 1966b]. C'est dans cette couche que les météorites se vaporisent lors de leur entrée dans l'atmosphère [Spizzichino, 1968]. La *thermosphère* commence vers 90 km. La température y augmente avec l'altitude sous l'effet de l'absorption du rayonnement solaire très haute fréquence par des atomes d'azote et d'oxygène ionisés [Fedele and Zancla, 1969, Jacobson, 2005]. Elle peut atteindre plus de 1000 K à des altitudes supérieures à 300 km.

1.2.3 L'atmosphère comme milieu de propagation

Pour comprendre comment l'atmosphère peut guider les infrasons, la manière la plus simple est d'utiliser la définition de la vitesse du son c_0 , qu'on obtient classiquement à partir d'une approche linéarisée, sous la forme

$$c_0 = \sqrt{\gamma r T}, \quad (1.2)$$

avec $r = R/M$, où $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ est la constante universelle des gaz parfaits, T est la température (en Kelvin) et M la masse molaire moyenne, qui vaut 29 g.mol^{-1} pour les altitudes typiquement³ inférieures à 90 km. Ainsi, la célérité des ondes acoustiques a une structure similaire à celle présentée dans la figure 1.2a.

Les gradients de vitesse du son modifient les trajectoires des fronts d'onde (les surfaces d'égales phases de l'onde) par réfraction. En effet, les gradients de température et de vent génèrent des gradients d'indice de réfraction de l'air dont l'effet sera de modifier progressivement la relation de dispersion en fonction de l'altitude. Plus précisément, un gradient négatif de célérité du son va courber la direction de propagation vers le haut tandis qu'un gradient positif courbe ces trajectoires pour les dévier vers le sol. L'alternance de gradients positifs et négatifs de température (figure 1.2a) tend ainsi à confiner la propagation au sein de guides d'ondes, dont l'extension verticale est directement liée à la forme des profils des températures et des vents dans l'atmosphère. Pour le cas considéré dans la figure 1.2, on note la présence d'un maximum de température à très basse altitude (inférieure à 5 km), qui engendre un guide d'onde dit *troposphérique*, en référence aux altitudes mises en jeu.

Alors que l'équation (1.2) est obtenue en faisant l'hypothèse d'un état au repos (c'est-à-dire sans écoulement), la vitesse du vent peut atteindre des valeurs non négligeables vis-à-vis de la vitesse du son (jusqu'à 120 m/s dans la stratosphère). Pour tenir compte de l'effet du vent, au moins à l'ordre dominant, une approche répandue consiste à se placer dans un repère animé d'une vitesse égale à celle du vent, c'est-à-dire à prendre pour vitesse du son la définition $c_0 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$, où $\mathbf{n}$ est la normale au front d'onde et $\mathbf{v}$ est le vecteur vitesse du vent. On parle alors d'approximation de *célérité effective*. Dans ces conditions, les inhomogénéités de grande échelle sont aussi bien le résultat des variations verticales de la température que de celles des vents, comme l'illustre la figure 1.2c.

Il existe une version particulièrement simple des équations de propagation, obtenues en adoptant un formalisme mathématique ([Blokhintzev, 1946]) similaire à celui de l'optique géométrique, qui permet d'obtenir une équation dite *eikonale*. Supposant que les propriétés du milieu sont des fonctions *lentement* variables ([Whitham, 2011]), les équations de propagation se réduisent à un système différentiel de la forme

$$\frac{dx}{dt} = u + \frac{c_0(z)}{m^2 + k^2} = c_{gx}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{c_0(z)}{k^2 + m^2} = c_{gz}, \quad (1.3)$$

avec $d/dt = \partial_t + \vec{c}_g \cdot \vec{\nabla}$, où le nombre d'onde vertical m est régi par

$$\frac{dm}{dt} = -k \partial_z u - \sqrt{k^2 + m^2} \partial_z c_0, \quad (1.4)$$

avec la condition $dk/dt = 0$ dans l'hypothèse où le milieu de propagation ne varie pas dans la direction horizontale x . De la même manière, la fréquence ω ne varie pas car l'échelle de temps de la propagation acoustique est nettement plus petite que celle des variations atmosphériques : les infrasons se propagent dans un milieu quasiment stationnaire. La principale conséquence physique réside dans le fait que les équations (1.3)-(1.4) ne permettent pas de modéliser la

3. Au delà de 90 km, le fait que les fractions des principaux constituants de l'atmosphère varient dans des proportions importantes [Hanique-Cockenpot, 2011] engendrent un effet significatif sur la vitesse du son.

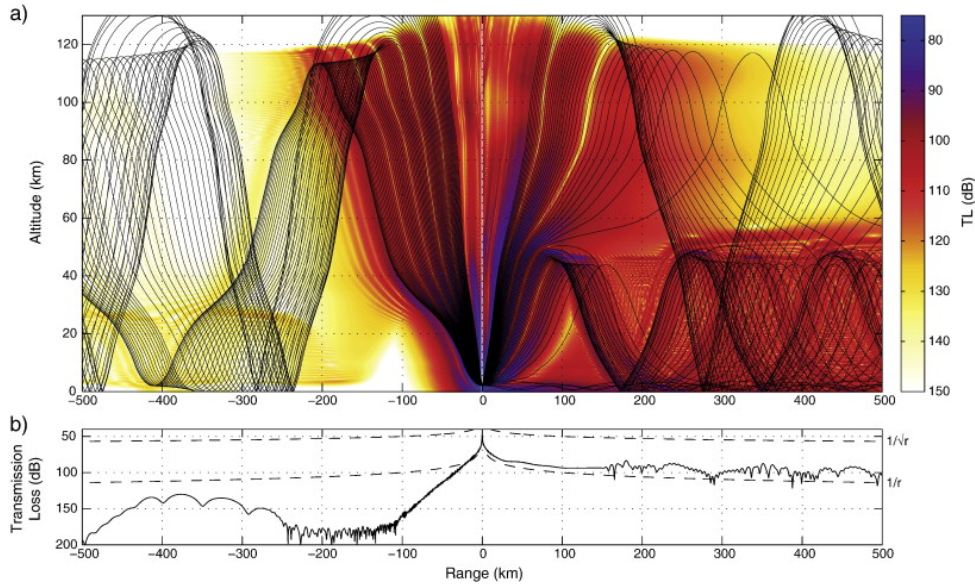


FIGURE 1.3 – Exemple de simulation extrait de la littérature [Fee and Matoza, 2013]. La source correspond à l'éruption du Mont Saint Helens (Etats-Unis) le 1^{er} février 2012. Les rayons, qui sont ici représentés par des lignes noires, sont superposés à une carte des pertes par transmission (en unité dB) pour une fréquence fixée, ici 0,5 Hz.

diffraction. Ces effets sont importants au niveau des caustiques où l'acoustique géométrique prévoit des amplitudes infinies [Cox, 1949], mais aussi dans les zones d'ombre où aucun rayon ne peut parvenir (région située à gauche de la source sur la figure 1.3). Sachant que la diffraction est directement à l'origine des arrivées observées dans les zones d'ombre (cf. figure 1.3), l'approximation géométrique ne sera pas utilisée dans le cadre de cette thèse.

À titre d'exemple, la figure 1.3 montre un ensemble de rayons émis à basse altitude pour des angles avec l'horizontale croissants. Les angles correspondent à des vecteurs d'ondes de directions différentes mais d'amplitude constante puisque $k^2 + m^2 = \omega^2 / [c_0(0)]^2$. On remarque qu'un premier ensemble de rayons reste confiné dans la basse troposphère qui forme alors un guide d'onde *troposphérique*. Le second ensemble se propage jusqu'à la stratopause où les ondes sonores sont réfractées. Un troisième groupe se propage jusqu'à la mésopause où les ondes sont elles aussi réfractées. Autrement dit, l'existence simultanée de plusieurs guides entraîne une division du front d'onde initial en différentes phases, qu'il est possible d'identifier sans ambiguïté en examinant les altitudes mises en jeu (cf figure 1.3). Parce que chaque phase est associée à un guide spécifique, et donc à une vitesse de propagation donnée, les temps de propagations associés jusqu'à une station de mesure sont généralement différents. Ajoutons que dans tous les cas présentés sur la figure 1.3 les altitudes de réfraction prédites par l'approximation géométrique sont liées à des maxima relatifs de c_0 , ce qui implique qu'il n'y a pas d'*effet tunnel* alors que cet effet est crucial pour les fréquences typiquement inférieures à 0,5 Hz. Il s'agit là d'une autre conséquence de l'approximation géométrique.

1.2.4 Modèles de propagation des infrasons

Il existe une autre approche, basée sur la résolution directe des équations de la mécanique des fluides (équations d'Euler ou de Navier-Stokes) que ce soit par des schémas aux volumes finis ou par des méthodes aux éléments finis. En dépit d'un fort intérêt lorsque le problème met en jeu des géométries complexes ([Blumrich and Heimann, 2002, Salomons et al., 2002, Van Renterghem and Botteldooren, 2003]), l'aspect le plus contraignant de ces méthodes est le coût numérique qui exclut⁴ la plupart des applications à grande distance [Deykina et al., 2007]

Une autre famille de techniques, basée sur l'approximation parabolique de l'équation d'onde, permet de capturer des phénomènes physiques affectant la propagation des ondes suivant des degrés d'approximation variables (milieu lentement variable, Mach du milieu faible, ...). Un intérêt de l'approximation parabolique est de tenir compte de la topographie ([Blairon, 2002, Aballéa, 2004]) dans la limite de l'approximation de milieu lentement variable, à un coût significativement inférieur aux méthodes de résolution des équations de la mécanique des fluides. Mais comme pour l'approche dite directe, l'équation parabolique ne permet pas d'interprétation simple, physique du phénomène de propagation d'ondes, en particulier lorsque des incertitudes interviennent à différents niveaux (source, milieu de propagation). Lorsqu'une onde se propage dans un guide d'onde, l'approche la plus naturelle consiste à représenter l'onde sous la forme d'une somme de *modes normaux*. Dans ce cas, chaque mode caractérise la manière dont un train d'onde initial est affecté par la réfraction, la diffraction, l'absorption ou encore la topographie [Raspet et al., 1992, Waxler, 2004]. Cette méthode est détaillée dans tous les ouvrages qui abordent la modélisation de la propagation des infrasons (e. g. [Gossard and Hooke, 1975, Pierce et al., 1981, Dighe et al., 1998]). Par rapport à l'approximation parabolique, la méthode des modes normaux permet de décomposer l'onde propagée en un petit nombre de composantes élémentaires (des trains d'ondes) qui peuvent être calculées à très bas coût numérique et ce, sans perte significative de précision sur les signaux calculés [Bertin et al., 2014].

1.3 Incertitudes dans les modèles

1.3.1 Effet des incertitudes sur les guides d'ondes

Bien que les données atmosphériques soient aujourd'hui de plus en plus précises, de nombreuses études réalisées au CEA-DAM et au sein de grands organismes américains, européens et russes ont montré la nécessité de corriger les données atmosphériques disponibles pour expliquer les observations infrasonores [Churchuzov et al., 2005]. Cette correction peut être obtenue en comparant les résultats d'une simulation standard, c'est-à-dire sans tenir compte des incertitudes, avec une simulation réalisée en ajoutant une perturbation au milieu de propagation. De la comparaison entre les signaux calculés et l'observation, il est alors possible d'estimer les caractéristiques de la *meilleure* perturbation, *i.e.* celle qu'il faudrait ajouter pour retrouver le signal observé.

La figure 1.4 donne un exemple particulièrement instructif, récemment fourni par la station

4. Différentes approches permettent de réduire le coût de calcul, par exemple en utilisant des maillages adaptatifs ou en déplaçant le domaine de calcul au cours de la résolution numérique [Sabatini, 2017].

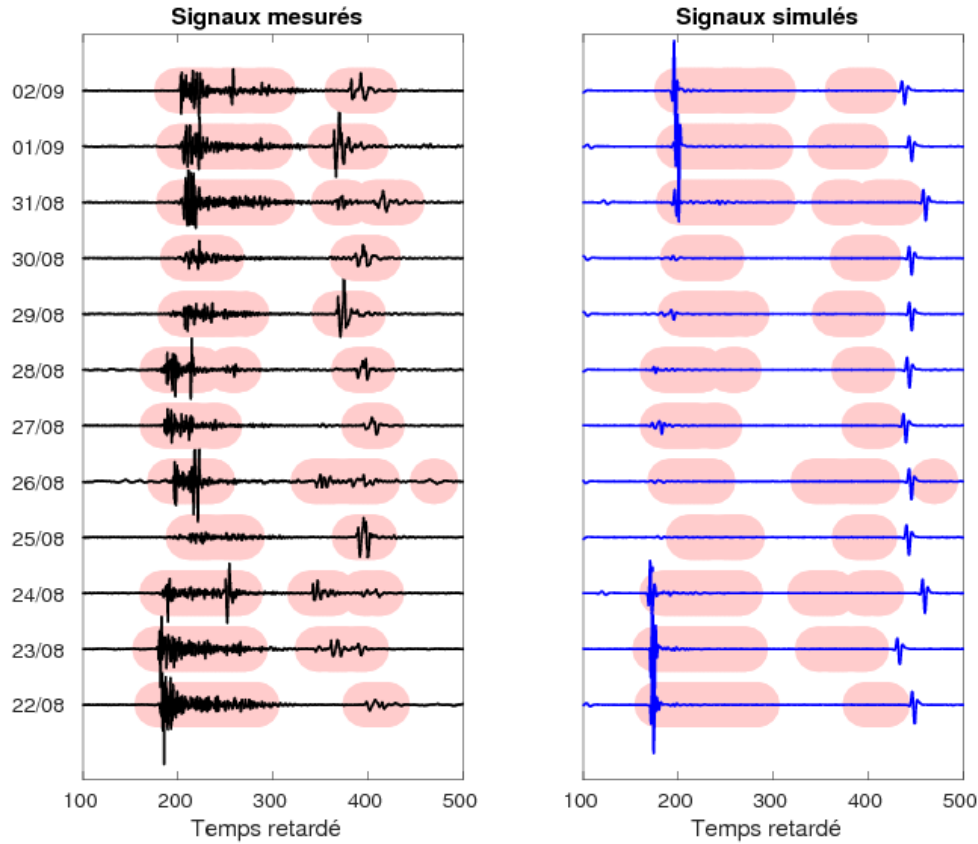


FIGURE 1.4 – Signaux correspondants au cas *Hukkakero*. À gauche, signaux mesurés. À droite, signaux simulés avec la méthode des modes normaux en utilisant les données du CEPMMT. Les temps pour lesquels l’amplitude du signal mesuré est supérieure à 5% de la valeur maximale sont indiqués en rose.

norvégienne I37NO⁵, qui a permis d’observer une source répétitive, située à une distance de l’ordre de 320 km de la station. Le caractère répétitif de cette source est lié à son origine organisationnelle. En fait, cette source correspond à la destruction de munitions identiques par l’armée finlandaise, sur le site Hukkakero [Gibbons et al., 2015]. Ces séries d’explosions présentent l’avantage d’être réalisées pendant plusieurs jours consécutifs, toutes les années, ce qui permet ainsi d’étudier l’impact de la variabilité de l’atmosphère sur la propagation acoustique au cours de la campagne de destructions. Pour l’exemple considéré ici, la période s’étend du 22 août 2014 au 02 septembre 2014 et les signaux acoustiques mesurés à la station I37NO sont représentés à gauche de la figure 1.4. On constate d’un jour sur l’autre une très forte variabilité, tant au niveau de l’arrivée stratosphérique qu’au niveau de l’arrivée thermosphérique.

Les données météorologiques mises à disposition par le CEPMMT (analyses à 137 niveaux verticaux) permettent de simuler la propagation de ces signaux pour chacun des douze jours, via la méthode des modes normaux. Les signaux simulés sont donnés à droite de la figure 1.4. L’ac-

5. La station I37NO a été inaugurée en Octobre 2013. Les caractéristiques techniques de cette station la rendent capable de détecter et de localiser des événements de faible intensité [Gibbons et al., 2015]

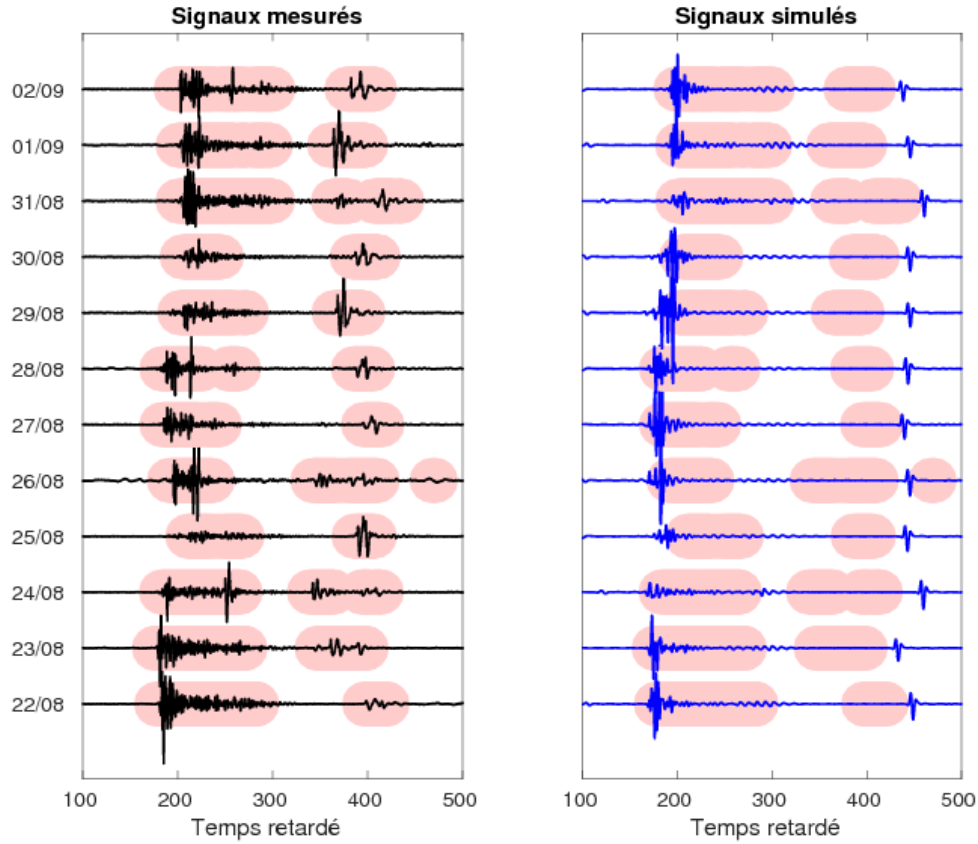


FIGURE 1.5 – Signaux correspondants au cas *Hukkakero*. À gauche, signaux mesurés. À droite, signaux simulés avec la méthode des modes normaux en utilisant les données du CEPMMT et en ajoutant une perturbation. La perturbation est modélisée par un paquet d’onde, de longueur d’onde 1 km, et localisé entre les altitudes 40 km et 60 km. Les temps pour lesquels l’amplitude du signal mesuré est supérieure à 5% de la valeur maximale sont indiqués en rose.

cord entre mesures et simulations est relativement décevant puisque d’une part, seules 50% des arrivées stratosphériques sont prédites par le modèle, et d’autre part, les durées simulées sont quasiment toujours inférieures à celles des signaux mesurés. A contrario, l’ajout d’une perturbation localisée dans la stratosphère permet d’obtenir une meilleure adéquation entre les signaux simulés et les signaux mesurés, comme le montre la figure 1.5. Si cette perturbation, censée reproduire les structures non résolues par le CEPMMT, a bien un impact sur les signaux simulés, sa forme précise ne semble pas avoir une grande importance lorsqu’on s’intéresse au mécanisme d’émergence des arrivées. Il s’agit en fait d’un effet de seuil relativement classique qui fait intervenir le rapport des célérités effectives entre le sol et l’altitude de réfraction de l’onde. En effet, l’ajout d’une perturbation permet de satisfaire à la condition $c_0(z) > c_0(0)$ qui est une condition suffisante pour obtenir une arrivée géométrique ([Bertin et al., 2014]). Par contre, les durées et amplitudes qu’il est possible d’obtenir par la simulation numérique dépendent de la forme de la perturbation, de sa position, et en particulier des échelles de longueur verticales.

Comme nous l'avons déjà suggéré, les ondes de gravité sont susceptibles de produire des perturbations similaires à celles qui ont été considérées pour produire les résultats des figures 1.4 et 1.5. C'est le cas lorsqu'on s'intéresse aux données issues de modèles numériques opérationnels (*ECMWF Integrated Forecast System*, *NOAA Global Forecast System*) ou de modèles climatiques (*ERA-Interim*, *NASA Modern Era Retrospective Reanalysis for Research and Application*). Alors que ces modèles sont connus pour ne pas résoudre les ondes de gravité de petite échelle [Lott and Millet, 2010, Bertin et al., 2014], on assiste depuis quelques années à l'émergence d'une nouvelle génération de modèles de circulation atmosphérique, basés sur des représentations stochastiques des processus d'émission des ondes de gravité. On parle alors de paramétrisation stochastique [Cámara and Lott, 2015] des ondes de gravité. Ces paramétrisations permettent de reproduire l'effet des ondes de gravité sur l'état de l'atmosphère, encore faut-il que les sources soient spécifiées.

Parmi les sources d'ondes de gravité possibles, on distingue celles qui résultent d'interactions entre le relief et l'écoulement. À ce titre, le *Global Atmospheric Sampling Program* (GASP) et des campagnes plus récentes d'observations ([Drobinski et al., 2007]) ont montré que, comparativement aux plaines ou aux océans ([Nastrom et al., 1987]), les fluctuations de vitesse horizontale et de température sont de l'ordre de deux à trois fois plus grandes au dessus des montagnes. Ainsi, on peut s'attendre à ce que les ondes de montagne aient un impact sur la propagation des infrasons au dessus des massifs montagneux : c'est le sujet central de cette thèse. Dans ce cas, les caractéristiques des ondes de montagne peuvent être obtenues à partir d'une paramétrisation *orographique* ([Palmer et al., 1986, Lott and Miller, 1997]).

1.3.2 Incertitudes et ondes de montagne

Lors de leur propagation sur des distances de l'ordre de la centaine de kilomètres, les infrasons peuvent être piégés dans un guide d'onde troposphérique ([Szuberla and Arnoult, 2009]). Lorsque cela est le cas, les ondes sonores interagissent avec la topographie⁶. L'effet des montagnes sur les infrasons se manifeste à courte distance, sous la forme de réflexions et de diffractions multiples. Lors d'une série d'expériences menées en 2006 ([McKenna et al., 2012]), des signaux infrasonores émanants de sources explosives localisées à Fox en Alaska ont été mesurés à une distance de 16 km de la source, dans la vallée Goldstream. Pour quantifier l'impact de l'orographie, [McKenna et al., 2012] ont simulé la propagation infrasonore au dessus de ce relief en utilisant un code parabolique. La figure 1.6 donne un exemple de résultat, pour une fréquence fixée (ici à 8 Hz). La présence d'obstacles divers (glaciers, blocs de schistes) engendre un relief, ce qui se traduit par une zone d'atténuation acoustique (région située entre les distances 10 km et 15 km sur la figure 1.6). [McKenna et al., 2012] ont montré qu'une partie de la complexité des signaux mesurés est bien reproduite avec ces simulations et ce, alors que le profil de célérité effective décroît uniformément avec l'altitude (c'est à dire en l'absence de guide d'onde).

À plus grande distance, typiquement supérieure à la dizaine de kilomètres, le guide d'onde

6. En toute rigueur, le mot *topographie* recouvre tout ce qui caractérise l'état de surface du sol, dont son élévation au-dessus du niveau de la mer, alors que le terme *orographie* se réduit strictement à l'élévation, faisant référence à la représentation des montagnes dans les modèles.

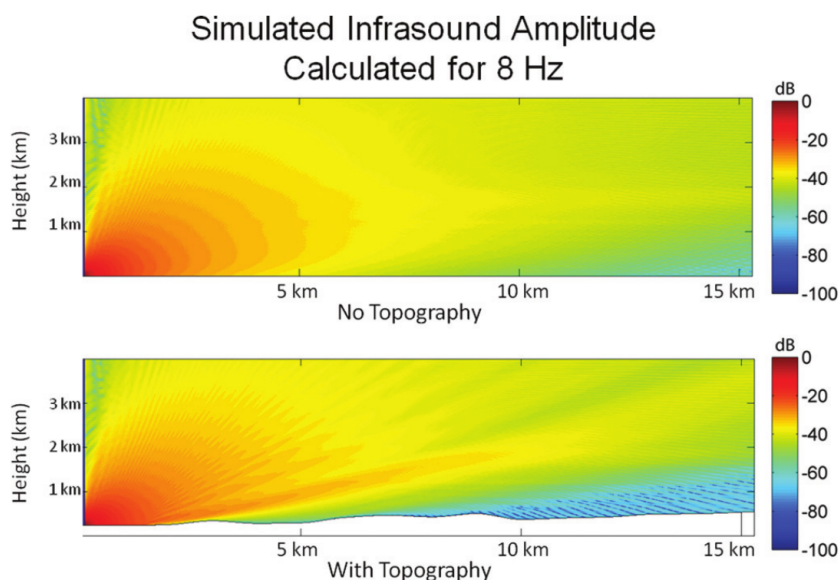


FIGURE 1.6 – Amplitudes des signaux acoustiques avec et sans topographie à 8 Hz, issues de simulations paraboliques avec un relief présent au sol. Cependant lors de ces simulations aucun champ d’onde de montagne ni aucune paramétrisation locale de l’atmosphère n’a été prise en compte. Figure extraite de [McKenna et al., 2012]

joue un rôle déterminant. Le guide d’onde peut aussi bien être produit par une inversion thermique ([Waxler et al., 2008]), souvent en fin de journée, que par un gradient vertical de vent. Or, dans ce cas, on sait que l’interaction entre le vent et le relief peut produire des perturbations au sein du guide d’onde. Les calculs réalisés par [McKenna et al., 2012] ne tiennent pas compte de cet effet, dont on sait pourtant qu’il peut être à l’origine de modifications acoustiques très importantes (e. g. décalage de la fréquence de coupure du guide d’onde). Plus généralement, la plupart des études réalisées au sein de la communauté impliquée dans l’interprétation des infrasons ne tiennent pas compte de l’orographie, ou alors simplement au travers d’une succession de “paliers”, c’est-à-dire sans prendre en compte les perturbations atmosphériques induites par la présence de l’orographie.

Les mécanismes d’interaction entre une orographie et un écoulement incident mettent en jeu directement la stratification du milieu, par l’intermédiaire des ondes de gravité, qui se propagent verticalement sur de très grandes distances ([Scorer, 1949a, Queney, 1948]), et peuvent déferler dans la haute atmosphère où elles jouent un rôle très important sur la circulation générale ([Fritts and Alexander, 2003]). Ces ondes peuvent présenter des amplitudes très importantes près de l’obstacle lui même, donnant lieu à des tempêtes en aval ou des effets de Foehn très importants. Ces derniers sont souvent (mais pas systématiquement) associés à des ondes de grandes amplitudes et proches du déferlement juste au dessus du massif. Pour estimer si le rôle des écoulements produits par les montagnes sur la propagation des infrasons est significatif, on peut utiliser des modèles théoriques ([Long, 1955, Smith, 1989, Durran, 1990a, Nance and Durran, 1998, Lott, 2016]) afin d’isoler les différents facteurs (effet direct de l’oro-



FIGURE 1.7 – Site de la station IS49, située à Tristan da Cunha, île du territoire britannique d’outre-mer de Sainte-Hélène.

graphie, du Foehn et des ondes de gravité). Un autre intérêt de ces modèles, souvent issus de processus de linéarisation d’équations plus complexes, est de produire des résultats à très faible coût numérique, ce qui rend possible le traitement statistique d’un grand nombre de configurations météorologiques.

1.3.3 Effet de site, effet de Foehn

La prise en compte des écoulement de montagnes est particulièrement critique lorsque l’on réalise que de nombreuses stations infrasonores du SSI sont situées au sein de massifs montagneux. La figure 1.7 illustre ce constat pour la station IS49. L’effet le plus important est probablement l’effet de Foehn, qui se produit en aval de pratiquement tous les massifs montagneux. La *World Meteorological Organization* (WMO) définit le terme ‘Foehn’ comme un vent intense, chaud et sec descendant le long du flanc aval des montagnes. Son impact sociétal est considérable qu’il soit positif au regard du climat, créant des journées douces en hiver dans certaines vallées alpines, ou négatif lorsqu’il est associé à des bourrasques destructrices. À l’aéroport de Innsbruck par exemple, des procédures “spéciales Foehn” sont instaurées afin que certains jours, la partie de la montagne voisine la plus souvent sujette à un effet de Foehn ne soit pas survolée lors des atterrissages et décollages. Plus récemment l’effet de Foehn a été mis en cause lors des incendies qui ont ravagé le sud est de la France du 20 au 31 Juillet 2017. En dehors des Alpes, les tempêtes liées au Foehn sont souvent appelées différemment, par exemple *Chinook* aux Etats-Unis ou *Helm wind* au Royaume-uni pour ne citer que ces deux exemples.

Pendant plusieurs décennies, l’effet de foehn a été utilisé comme un exemple caractéristique pour illustrer l’importance des processus thermodynamiques et de la chaleur latente sur la météorologie. Ainsi, dans de nombreux manuels on peut lire des phrases du type ([Hann, 1901]) : “ Lorsque le vent rencontre une montagne plus ou moins perpendiculairement, il suit le relief et s’élève. La pression atmosphérique diminuant avec l’altitude, la température de l’air diminue, par détente adiabatique, d’abord selon le gradient adiabatique sec. Si l’humidité est assez

grande au départ, la vapeur d'eau contenue dans l'air va se condenser à partir du niveau où il atteint la saturation, ce qui réchauffe l'air. Si l'air est stable au dessus de la chaîne de montagne, la parcelle soulevée ne peut continuer sa montée une fois la cime passée et redescend l'autre versant. Lorsqu'il descend, l'air se comprime et donc sa température augmente par compression adiabatique."

Aussi convaincant que cet exemple puisse paraître, en réalité, les processus diabatiques ne jouent pas un rôle aussi important sur le foehn. Il est maintenant largement accepté que le foehn a une origine dynamique [Baumann et al., 2001], mais aussi que cette origine est liée à la dynamique non linéaire des ondes de gravité juste au dessus et/ou en aval des montagnes qui les produisent. Nous montrerons que cette dynamique peut aussi être due à un effet de niveau critique près du sol, c'est à dire n'impliquant pas de déferlements d'ondes de gravité.

1.4 Plan du manuscrit

Le but de cette thèse est d'expliquer les écarts entre les signaux acoustiques calculés et les observations aux stations infrasons du SSI proches de massifs montagneux. Dans le chapitre 2, nous présentons les bases théoriques des modèles d'ondes infrasonores (méthodes des modes normaux) et de gravité utilisés dans ce travail de thèse. Le chapitre 3 est consacré au développement d'un modèle linéaire pour calculer les perturbations atmosphériques engendrées par la présence d'une montagne soumise à un écoulement de couche limite. Sont également présentées des comparaisons systématiques avec le modèle météorologique américain WRF⁷, modèle qui inclut une dynamique non-linéaire et une paramétrisation réaliste de la couche limite. Les résultats du modèle linéaire, validés par les simulations réalisées avec WRF, permettent d'apporter un regard nouveau sur la dynamique de l'effet de foehn. Dans le chapitre 4, l'impact des ondes de montagne et de l'effet de foehn sur la propagation infrasonore sera détaillé en analysant mode par mode la propagation des infrasons. Nous montrerons comment l'écoulement de montagne peut favoriser la propagation des infrasons, alors que l'approche utilisant de simples masques et négligeant le guide d'onde échoue. Nous montrerons aussi comment dans d'autres circonstances, la perturbation atmosphérique produite par la montagne peut complètement détruire un guide d'onde. Le chapitre 5 conclut ce manuscrit et généralise les concepts développés dans le cadre des chapitres 3 et 4, et notamment l'approche modale, pour caractériser précisément l'effet d'un relief sur la propagation des infrasons à partir d'une utilisation combinée du code WRF et de la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation d'onde. L'originalité de cette approche est de prendre en compte la dimension aléatoire du problème, en intégrant au problème les effets transitoires et les fortes non-linéarités qui se manifestent lorsqu'un écoulement rencontre un relief.

7. <https://www.mmm.ucar.edu/weather-research-and-forecasting-model>

Chapitre 2

Méthodologie

*« Nous pouvons définir le son
comme un coup donné par l'air à
travers les oreilles au cerveau et au
sang et arrivant jusqu'à l'âme »*

Platon

Sommaire

2.1	Théorie linéaire	18
2.1.1	Équations fondamentales de la dynamique des fluides	18
2.1.2	Linéarisation	19
2.1.3	Relation de dispersion	21
2.1.4	Les ondes acoustiques	22
2.1.5	Les ondes de gravité	24
2.1.6	Conditions limites des équations d'ondes	26
2.2	Structure verticale	27
2.2.1	Niveau critique	27
2.2.2	Approximation WKB	30
2.2.3	Fonctions hypergéométriques et résolution quasi-analytique	31
2.3	Calcul de la propagation horizontale	33
2.3.1	Spectre d'opérateur	33
2.3.2	Décomposition sur une base de modes normaux	35
2.3.3	Résolution numérique du problème aux valeurs propres	37
2.3.4	Impacts de perturbations sur la propagation acoustique	41

Introduction

Ce deuxième chapitre s'intéresse à la modélisation mathématique de la propagation des ondes acoustiques dans l'atmosphère terrestre. Les équations de la dynamique des fluides sont introduites dans la première partie, leur linéarisation conduit à l'équation de dispersion reliant la pulsation d'une perturbation atmosphérique, vue comme une onde plane, à son nombre d'onde horizontal. Cette approche permet de dissocier les ondes de gravité et les ondes acoustiques tout en montrant leur origine commune. À la suite des dérivations des deux équations d'ondes, à savoir l'équation de Taylor Goldstein et celle des ondes acoustiques linéaires, nous nous intéressons à la structure verticale des ondes. À cause des mouvements atmosphériques, ces équations peuvent présenter des niveaux critiques associés à un comportement singulier de la solution nécessitant un développement asymptotique. Pour certaines gammes de fréquences, une approximation, dite WKB, peut permettre d'exprimer la structure verticale de ces ondes lorsqu'elles présentent un unique point tournant, se traduisant alors par une dégénérescence de l'équation. La propagation acoustique est simulée à l'aide d'une décomposition du champ de pression sur une base de modes normaux, dont la structure verticale est solution de l'équation d'onde acoustique. Nous résumons alors le problème de la propagation à la détermination du spectre discret de l'opérateur associé à l'équation d'ondes acoustiques. Nous détaillerons les différentes méthodes numériques utilisées, provenant de l'algèbre linéaire. À partir de ces méthodes quelques premiers résultats numériques introduiront l'impact de perturbations atmosphériques sur la propagation des infrasons.

2.1 Théorie linéaire

2.1.1 Équations fondamentales de la dynamique des fluides

Conservation de l'énergie

En négligeant l'énergie mécanique dissipée en chaleur par viscosité, la première loi de la thermodynamique s'écrit pour une parcelle d'air en mouvement ([Holton and Hakim, 2012]) :

$$\frac{d\theta}{dt} = Q, \quad (2.1)$$

où Q [K.s^{-1}] est un terme de forçage diabatique et θ est la température potentielle définie par :

$$\theta = T \left(\frac{p_r}{p} \right)^{R_M/c_p}, \quad (2.2)$$

où T représente la température, p la pression de la parcelle, p_r la pression de référence généralement égale à 10^5 Pa, $R_M = R/M_a = 287 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, où M_a est la masse molaire de l'air sec et R la constante des gaz parfaits. c_p représente la capacité thermique massique à pression constante pour un gaz diatomique.

Conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse appliqué à une parcelle d'air en mouvement s'écrit :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.3)$$

où ρ représente la masse volumique et $\mathbf{u}$ la vitesse [Holton and Hakim, 2012] et où $\frac{d}{dt}$ est la dérivée totale définie par $\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\Psi$.

Conservation de la quantité de mouvement

En supposant que les seules forces agissant dans l'atmosphère sont le gradient de pression, la gravité et la friction interne (viscosité), la deuxième loi de Newton s'écrit dans le référentiel terrestre ([Holton and Hakim, 2012])

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -2\Omega \times \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (2.4)$$

où $\mathbf{F}$ représente les termes de friction et Ω le vecteur de vitesse angulaire associé à la rotation terrestre. La force centrifuge est combinée avec la gravité dans l'accélération de pesanteur $\mathbf{g}$. En projetant l'équation (2.4) sur les axes du repère cartésien $(0, x, y, z)$ dirigés respectivement vers l'Est, le Nord et la verticale locale nous obtenons les trois équations suivantes :

$$\frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x, \quad (2.5)$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y, \quad (2.6)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z, \quad (2.7)$$

où (u, v, w) sont les composantes du vecteur vitesse $\mathbf{u}$ et f est le paramètre de Coriolis défini par

$$f = 2\Omega \sin(\phi), \quad (2.8)$$

avec ϕ la latitude. Pour une latitude moyenne de 45° , f vaut environ $10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}$.

2.1.2 Linéarisation

La théorie linéaire des ondes est fréquemment utilisée pour décrire le comportement au premier ordre des ondes de gravité ou des ondes acoustiques [Hines, 1997]. Cette théorie suppose que le champ d'ondes peut être décomposé en une superposition linéaire d'ondes monochromatiques. Le processus de linéarisation exclut les phénomènes de déferlement, d'interactions ondes-ondes et ondes-milieu ainsi que tous les transferts d'énergie résultants. Nous nous inspirons de l'article de revue de [Fritts and Alexander, 2003] pour la linéarisation des équations fondamentales de la dynamique des fluides. Les forces de frictions sont négligées au regard de leurs valeurs par rapport aux autres forces en jeu [Gossard and Hooke, 1975].

L'état de base de l'atmosphère est supposé horizontalement uniforme et à l'équilibre hydrostatique. Les différentes variables du champ d'onde sont décomposées en un état de base $(u_0, v_0, w_0, \theta_0, p_0, \rho_0)$, avec $w_0 = 0$, ne variant qu'avec l'altitude et une petite perturbation autour de cet état de base $(u_1, v_1, w_1, \theta_1, p_1, \rho_1)$. La linéarisation en coordonnées cartésiennes des équations (2.1)-(2.8) conduit au système suivant :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{w_1}{H} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{Du_1}{Dt} + w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} - f v_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_1}{\rho_0} \right) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{Dv_1}{Dt} + w_1 \frac{\partial v_0}{\partial z} + f u_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p_1}{\rho_0} \right) = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{Dw_1}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p_1}{\rho_0} \right) - \frac{1}{H} \left(\frac{p_1}{\rho_0} \right) + g \frac{\rho_1}{\rho_0} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right) + w_1 \frac{N^2}{g} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} + \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{p_1}{\rho_0} \right) = 0, \quad (2.14)$$

avec $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y}$ et $c_0 = \sqrt{\gamma R_M T_0}$ est la vitesse du son dans l'air sec, $\gamma = c_p / c_s = 1,4$ le rapport des chaleurs spécifiques, H la hauteur d'échelle (parfois notée H_p) liée à la masse volumique et N la fréquence de Brunt-Vaisala définie telle que :

$$N = \sqrt{\frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz}}. \quad (2.15)$$

La pulsation de Brunt-Vaisala N correspond à la fréquence d'oscillation d'une parcelle d'air déplacée verticalement dans une atmosphère stable et stratifiée. On peut d'ailleurs l'exprimer en fonction de la hauteur d'échelle H et de la célérité du son c_0 via la relation

$$\frac{N^2}{g} = \frac{1}{H} - \frac{g}{c_0^2}. \quad (2.16)$$

Nous utilisons maintenant l'approximation de Liouville-Green ou WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) qui considère que l'état de base de l'atmosphère varie peu au cours d'un cycle d'onde (voir par exemple [Gill, 1982]). Nous appliquons cette approximation aux équations (2.10) et (2.11) pour négliger les variations verticales des vitesses horizontales de l'état de base (u_0, v_0) devant les variations induites par la propagation des ondes. Ce qui revient formellement, à l'ordre dominant, à faire l'hypothèse d'ondes planes, c'est à dire à prendre des solutions de la forme

$$(u_1, v_1, w_1, \frac{\theta_1}{\theta_0}, \frac{p_1}{\rho_0}, \frac{\rho_1}{\rho_0}) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\theta}, \hat{p}, \hat{\rho}) \exp \left[i(kx + ly + mz - \omega t) + \frac{z}{2H} \right], \quad (2.17)$$

où par définition, l'amplitude des différentes variables de l'équation (2.17) ne dépend pas de l'altitude. En introduisant la solution (2.17) dans les équations (2.9)-(2.14), nous obtenons les

relations de polarisation :

$$-i\hat{\omega}\hat{\rho} + ik\hat{u} + il\hat{v} + \left(im - \frac{1}{2H}\right)\hat{w} = 0, \quad (2.18)$$

$$-i\hat{w}\hat{u} - f\hat{v} + ik\hat{p} = 0, \quad (2.19)$$

$$-i\hat{w}\hat{v} + f\hat{u} + il\hat{p} = 0, \quad (2.20)$$

$$-i\hat{\omega}\hat{w} + \left(im - \frac{1}{2H}\right)\hat{p} + g\hat{\rho} = 0, \quad (2.21)$$

$$-i\hat{\omega}\hat{\theta} + \frac{N^2}{g}\hat{w} = 0, \quad (2.22)$$

$$\hat{\theta} - \frac{1}{c_0^2}\hat{p} + \hat{\rho} = 0, \quad (2.23)$$

où $\hat{\omega}$ est la pulsation intrinsèque de l'onde. Elle correspond à la pulsation observée dans le repère se déplaçant à la vitesse du fluide. Elle est définie à partir de la pulsation ω (associée au référentiel terrestre) en utilisant la relation :

$$\hat{\omega} = \omega - ku_0 - lv_0. \quad (2.24)$$

2.1.3 Relation de dispersion

Les équations (2.18)-(2.23) forment un système linéaire homogène de six équations à six inconnues. Elles peuvent être combinées de manière à former l'équation de dispersion :

$$\hat{\omega}^2 \left(k^2 + l^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2} - \frac{(\hat{\omega}^2 - f^2)}{c_0^2} \right) - N^2(k^2 + l^2) - f^2(m^2 + \frac{1}{4H^2}) = 0. \quad (2.25)$$

On remarque que cette équation biquadratique présente deux solutions symétriques $(\hat{\omega}, \mathbf{k})$ et $(-\hat{\omega}, -\mathbf{k})$ qui sont physiquement identiques. On limitera notre étude aux solutions $(\hat{\omega}, \mathbf{k})$ avec $\hat{\omega}$ positif. Pour des composantes réelles du vecteur d'onde, l'équation (2.25) est purement réelle et son discriminant étant toujours strictement positif, elle présente deux solutions réelles distinctes en $\hat{\omega}$:

$$\hat{\omega}_1 = \sqrt{\frac{Bc_0^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4A}{B^2c_0^2}} \right)}, \quad (2.26)$$

$$\hat{\omega}_2 = \sqrt{\frac{Bc_0^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4A}{B^2c_0^2}} \right)}, \quad (2.27)$$

avec

$$A = N^2(k^2 + l^2) + f^2(m^2 + 1/4H^2), \quad (2.28)$$

$$B = k^2 + l^2 + m^2 + 1/4H^2 + f^2/c_0^2. \quad (2.29)$$

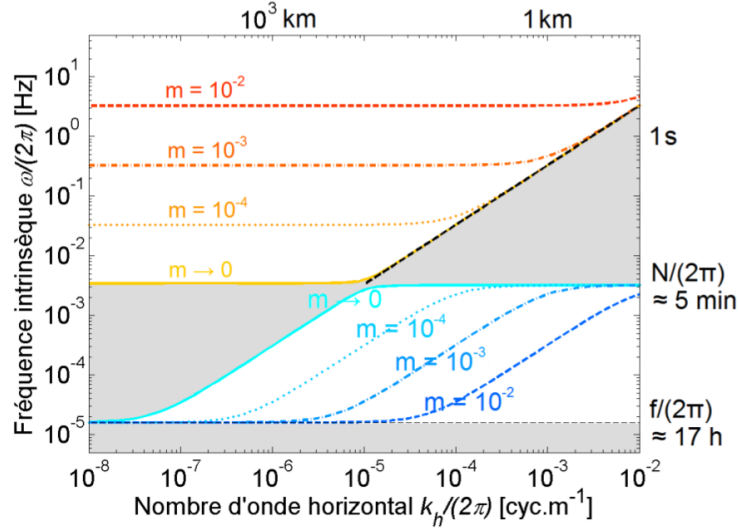


FIGURE 2.1 – Solutions de l'équation de dispersion dans le domaine (ω, k) pour différentes valeurs du nombre d'onde vertical m [cyc.m⁻¹]. Les courbes de couleur rouge / orange correspondent aux solutions (2.26), celles de couleur bleu aux solutions (2.27).

La première solution (2.26) décrit le comportement des ondes acoustiques-gravité tandis que la seconde (2.27) celui des ondes inertie-gravité. La figure représente les solutions des deux branches de l'équation de dispersion (2.25) dans le domaine $(\hat{\omega}, k_h)$, avec $k_h = \sqrt{k^2 + l^2}$. Nous fixons les paramètres de l'atmosphère aux valeurs suivantes : $N = 2 \cdot 10^{-2}$ rad.s⁻¹, $f = 10^{-4}$ rad.s⁻¹ et $H = 7,8$ km. Nous pouvons constater que les deux familles de solutions en $(\hat{\omega}, k)$ sont clairement distinctes.

2.1.4 Les ondes acoustiques

Les ondes acoustiques sont obtenues en ne considérant que les grandes fréquences $\hat{\omega} \gg 1$ et, sans perte de généralité, que la propagation s'effectue dans le plan $(0, x, z)$, la relation de dispersion (2.25) devient alors

$$k^2 + m^2 = \frac{\hat{\omega}^2}{c_0^2}. \quad (2.30)$$

Cette équation est communément utilisée pour décrire le comportement des ondes sonores. Pour décrire les champs physiques associés à ces types d'ondes, il faut dériver une approximation de notre système d'équations dont les solutions monochromatiques donnent les relations de polarisation vues auparavant. Pour les ondes sonores, filtrer les ondes de gravité revient à négliger tous les termes faisant intervenir la pesanteur (c'est à dire g et la flottabilité). En revenant aux équations linéarisées (2.9)-(2.14) et en supposant que le milieu initial ne varie que dans la

direction verticale z et en négligeant le terme de Coriolis, on obtient le jeu d'équations

$$\frac{Du_1}{Dt} + w_1 \frac{du_0}{dz} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{Dw_1}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{u_1}{\partial x} + \frac{w_1}{\partial z} = 0. \quad (2.33)$$

Afin de ne garder qu'une seule équation en pression (que nous noterons maintenant p au lieu de p_1) nous appliquons les opérateurs divergence à la première équation et D/Dt à la troisième puis nous les soustrayons. En redérivant par rapport au temps l'équation résultante puis en substituant Dw_1/Dt de (2.32) on obtient l'équation d'onde acoustique dans un écoulement :

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \right] + 2 \left(\frac{du_0}{dz} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (2.34)$$

Considérant l'onde plane $p \sim \hat{p}(z)e^{ikx-i\omega t}$, on obtient l'équation [Brekhovskikh, 2012] :

$$\rho_0(z)\hat{\omega}^2(z) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho_0(z)\hat{\omega}^2(z)} \frac{d\hat{p}(z)}{dz} \right] + \left[\frac{\hat{\omega}^2(z)}{c_0^2(z)} - k^2 \right] \hat{p}(z) = 0, \quad (2.35)$$

où $\hat{\omega}(z)$ est la fréquence intrinsèque, comme définie en (2.24). Notons que ω est la pulsation observée en un point fixe, par exemple par un microbarographe. Pour simplifier la façon dont apparaît la dérivée seconde, on peut effectuer le changement de variable :

$$\tilde{p} \mapsto \frac{\hat{p}}{\hat{\omega}\sqrt{\rho_0}},$$

transformant l'équation (2.35) en

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\hat{\omega}^2(z)}{c_0^2(z)} + \mathcal{S}(z) + \mathcal{T}(z) - k^2 \right] \tilde{p} = 0, \quad (2.36)$$

où $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des termes liés au cisaillement et aux variations verticales de densités, respectivement :

$$\mathcal{S}(z) = \frac{\hat{\omega}''(z)}{\hat{\omega}(z)} - \left(\frac{\hat{\omega}'(z)}{\hat{\omega}(z)} \right)^2 - \frac{\rho_0'(z)\hat{\omega}'(z)}{\rho_0(z)\hat{\omega}(z)},$$

$$\mathcal{T}(z) = \frac{\rho_0''(z)}{2\rho_0(z)} - 3 \left(\frac{\rho_0'(z)}{2\rho_0(z)} \right)^2.$$

Le $'$ indique la dérivée par rapport à z . Une forme simplifiée de l'équation (2.36) peut être obtenue en considérant que le gradient vertical du_0/dz est petit devant une longueur d'onde, ce qui amène à négliger $\mathcal{S}(z)$ [Assink J. D. and Evers, 2016]

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\hat{\omega}^2(z)}{c_0^2(z)} + \mathcal{T}(z) - k^2 \right] \tilde{p} = 0. \quad (2.37)$$

De plus le terme $\mathcal{T}(z)$ peut être négligé pour les fréquences supérieures à 0,05 Hz (donc les pulsations $\omega > 0,1 \text{ rad.s}^{-1}$), car $\mathcal{T}(z)c_0^2/\omega^2 \ll 1$ pour ces fréquences.

Lors de propagations à grande distance, l'angle que fait l'écoulement avec la direction de propagation est souvent considéré petit, on peut alors écrire $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k} = u_0(z)k$ et comme $k \sim \frac{\omega}{c_0}$, le quotient $\frac{\omega}{c_0}$ peut alors être approché par :

$$\frac{\omega}{c_0} - \frac{u_0(z)k}{c_0} \approx \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{u_0(z)}{c_0} \right) \approx \frac{\omega}{c_0 + u_0(z)}. \quad (2.38)$$

C'est l'approximation dite de la "célérité effective". On considère donc que le champ de vent perturbe la vitesse de propagation des ondes acoustiques, de sorte que celles-ci se déplacent avec une vitesse effective

$$c_{eff} = c_0 + u_0(z). \quad (2.39)$$

Dans l'essentiel des développements présentés ultérieurement, nous utilisons comme modèle prototype l'équation d'onde simple en célérité effective :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_{eff}^2(z)} - k^2 \right) \tilde{p} = 0. \quad (2.40)$$

Il faut noter que dans les équations présentées ici, la vitesse du son c_0 , l'écoulement moyen u et la célérité du son c_{eff} dépendent de l'altitude z . La relation de dispersion ne se présente donc pas de façon explicite, comme une relation algébrique, mais est obtenue en résolvant un problème aux valeurs propres, c'est à dire associé aux solutions non triviales $\tilde{p}$.

2.1.5 Les ondes de gravité

La branche inertie gravité (2.27) de l'équation de dispersion (2.25) est appelée équation de dispersion totalement compressible des ondes de gravité ([Marks and Eckermann, 1995]). Dans le but de supprimer la branche des ondes acoustique-gravité (qui se propagent via des variations de masse volumique) tout en conservant celle des ondes inertie-gravité, nous pouvons considérer l'approximation $c_0 \rightarrow +\infty$ dans l'équation (2.25) [Fritts and Alexander, 2003]. Nous obtenons alors une équation de dispersion spécifique au domaine des ondes de gravité :

$$\hat{\omega} = \sqrt{\frac{N^2(k^2 + l^2) + f^2(m^2 + \frac{1}{4H^2})}{k^2 + l^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2}}}. \quad (2.41)$$

Dans la mesure où le terme lié à la hauteur d'échelle verticale H n'influence que les grandes longueurs d'ondes, on peut faire l'approximation $m^2 \gg 1/(4H^2)$. L'équation de dispersion s'exprime alors, en négligeant les termes de Coriolis, sous la forme

$$\hat{\omega} = \sqrt{\frac{N^2(k^2 + l^2)}{k^2 + l^2 + m^2}}. \quad (2.42)$$

La même équation de dispersion peut être obtenue en négligeant les forces de compression excepté pour calculer les forces de flottabilité hydrostatique (on parle d'approximation de *Boussinesq*). Cette approximation consiste à ne considérer les variations de la masse volumique ρ que

lorsqu'elles sont associées à l'accélération gravitationnelle g , comme c'est le cas dans l'équation de conservation du moment projetée sur l'axe vertical. Les conséquences directes de cette approximation sont $c_0 \rightarrow +\infty$ et $H \rightarrow +\infty$ ce qui correspond bien aux approximations considérées pour obtenir l'équation de dispersion (2.42).

Reprenant le cadre de l'approximation de Boussinesq linéarisée, dans le plan de propagation $(0, x, z)$, sans les termes de Coriolis :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\rho_1}{\rho_r} g, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + w_1 \frac{N^2}{g} = 0, \quad (2.46)$$

où la fréquence de Brunt-Vaisala N est définie, dans le cas de l'approximation de Boussinesq, par $N^2 = -g/\rho_0 \partial_z \rho_0$. On recherche une solution de ce système sous forme d'ondes planes telles que

$$(u_1, v_1, w_1, p_1, \rho_1) = [\hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{p}(z), \hat{\rho}(z)] e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.47)$$

où les amplitudes de ces ondes monochromatiques ne dépendent que de l'altitude. On obtient :

$$-i\omega \hat{u} + i u_0 k \hat{u} + \hat{w} \frac{d u_0}{d z} = -\frac{i}{\rho_r} k \hat{p}, \quad (2.48)$$

$$-i\omega \hat{w} + i u_0 k \hat{w} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{d \hat{p}}{d z} - \frac{\hat{\rho}}{\rho_r} g, \quad (2.49)$$

$$i k \hat{u} + \frac{d \hat{w}}{d z} = 0, \quad (2.50)$$

$$-i\omega \hat{\rho} + i u_0 k \hat{\rho} + \hat{w} \frac{d \rho_0}{d z} = 0. \quad (2.51)$$

Comme dans les sections précédentes, nous définissons la fréquence intrinsèque $\hat{\omega}$ comme la fréquence de l'onde relative à l'écoulement, en regroupant les équations de polarisation (2.48)-(2.51) pour ne garder que la variable $\hat{w}$ on obtient :

$$\frac{d^2 \hat{w}}{d z^2} + \left[\frac{k^2 N^2}{\hat{\omega}^2} + \frac{k}{\hat{\omega}} \frac{d^2 u_0}{d z^2} - k^2 \right] \hat{w} = 0, \quad (2.52)$$

ce qui mène à

$$\frac{d^2 \hat{w}}{d z^2} + \left[\frac{N^2}{(c_x - u_0)^2} + \frac{u_0''}{(c_x - u_0)} - k^2 \right] \hat{w} = 0, \quad (2.53)$$

où $c_x = \omega/k$ est la vitesse de phase horizontale. On peut la réécrire sous la forme d'une équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2 \hat{w}}{d z^2} + [S^2(z) - k^2] \hat{w} = 0, \quad (2.54)$$

où $S(z)$ est le paramètre de Scorer [Queney, 1948], défini par

$$S(z) = \sqrt{\frac{N^2}{(c_x - u_0)^2} + \frac{u_0''(z)}{(c_x - u_0)}}.$$

En régissant la structure verticale des perturbations, ce paramètre joue un rôle central dans la dynamique des ondes orographiques.

2.1.6 Conditions limites des équations d'ondes

Comme les équations de propagation sont exprimées dans l'espace spectral (ω, k) , elles prennent la forme d'équations différentielles ordinaires selon z , dont le domaine considéré s'étend entre le sol et les dernières couches de l'atmosphère ($z \rightarrow \infty$). Pour résoudre le système, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites.

Condition au sol

La condition au sol, en $z = 0$ si le sol est plat ou en $z = h$ en présence d'un relief, reflète l'interaction d'un écoulement ou d'une onde avec le sol. Dans la plupart des cas étudiés dans cette thèse la condition limite peut s'écrire sous la forme suivante, avec Φ la quantité d'intérêt ($\hat{w}$ ou $\hat{p}$)

$$\alpha \partial_z \Phi(h) + \beta \Phi(h) + \gamma = 0, \quad (2.55)$$

où α , β et γ dépendent du problème. La dépendance en k et ω a été évincée pour garder des notations synthétiques. En acoustique linéaire, une hypothèse souvent utilisée pour la propagation à grande distance considère que le sol réfléchit parfaitement les ondes sonores. On impose alors une condition de Neumann homogène en $z = h(x)$, ie $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$. Cependant, la propagation ne se fait que rarement au dessus d'un sol parfaitement rigide et réfléchissant intégralement les ondes acoustiques. En effet les matériaux ou la végétation absorbent de l'énergie acoustique et donc l'impédance du sol a un effet d'atténuation sur la propagation [Attenborough, 1988, Daigle and Stinson, 1987]. L'impédance peut être prise en compte en imposant une condition de type Robin en $z = h(x)$:

$$\alpha = 1, \beta = -i\omega\rho(h)/Z(\omega), \text{ et } \gamma = 0,$$

avec $Z(\omega)$ l'impédance du sol et $\rho(h)$ la densité de l'air. Il faut noter que la condition de réflexion totale rend le problème auto-adjoint, ce qui ne peut plus être le cas avec une impédance complexe au sol.

À la différence de l'acoustique, pour les ondes de montagne, la condition limite varie selon l'axe horizontal. En effet la source qui va produire des ondes de montagne est l'interaction de l'écoulement avec l'orographie. La condition au sol est donc primordiale, puisque sans elle il n'y aurait aucune onde produite. Si on suppose que l'écoulement au dessus de la montagne est sans frottement, alors la surface du sol doit être une ligne de courant. Ainsi la composante de l'écoulement normale au sol doit être nulle on obtient alors une condition "free-slip" non linéaire :

$$\alpha = \frac{i}{k} h \partial_x h, \beta = -1, \gamma = u_0(h) \partial_x h.$$

Si l'on considère que les perturbations sont petites alors au premier ordre nous obtenons la condition "free-slip" linéarisée qui fixe la valeur de la perturbation de la composante verticale du vent au sol en imposant $\alpha = 0$. En revanche, si on considère que l'écoulement est sans glissement alors la condition limite s'écrit $u(h) = w(h) = 0$.

Condition à l'infini

Si l'on étudie le comportement à l'infini de l'équation d'onde acoustique et si on considère que le profil de célérité tend vers un profil constant pour les hautes altitudes¹, c'est à dire $c_0(z) \rightarrow c_\infty$ lorsque $z \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{p} + \left(\frac{\omega^2}{c_\infty^2} - k^2 \right) \hat{p} = 0. \quad (2.56)$$

Cette équation est une équation différentielle ordinaire qui a donc ses solutions décrites par la base d'exponentielles $e^{\pm \mu z}$ avec $\mu^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}$. Dans ce cas, on cherche à obtenir un champ de perturbations qui reste borné. L'imposition d'une condition limite va permettre de réduire l'espace des solutions et de passer de deux solutions à une solution. Choissant l'exponentielle $e^{-z\mu}$, la condition impose que $\Re(\mu) \geq 0$. Or la fonction racine carrée est une fonction bivaluée sur $\mathbb{C}$ et nécessite donc le choix d'une détermination. La détermination principale $\Re(\mu) \geq 0$ mène à

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(\mu) \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.57)$$

et place donc une coupure associée à la fonction $\arg(\mu)$ dont le point de branchement est $k^2 = \frac{\omega^2}{c_\infty^2}$. De plus, comme la pulsation et le nombre d'onde sont au carré dans l'argument de la racine, la coupure est dédoublée dans le plan complexe représentant les nombres d'ondes complexes k .

Quant aux ondes de gravité, on utilise la condition de rayonnement afin que les perturbations soient évanescences ou qu'elles correspondent à des ondes transportant de l'énergie. Cette condition autorise seulement les ondes se propageant vers le haut. Cette condition se traduit par $\hat{w}(z) \sim e^{-\lambda(k)z}$, lorsque $z \rightarrow +\infty$ et où la fonction racine carrée λ est définie par

$$\lambda(k) = \left[k^2 - \frac{N^2}{(c_x - u_\infty)^2} \right]^{1/2},$$

où $u_\infty = \lim_{z \rightarrow +\infty} u(z)$. Pour satisfaire la condition de rayonnement, la coupure associée à λ est insérée de sorte que $\hat{w}(z) \sim e^{i\epsilon\lambda(k)z}$ où $\epsilon = \text{sign}(k)$ pour assurer que les ondes se propagent vers le haut lorsque $|k| < N/(c_x - u_\infty)$.

2.2 Structure verticale

2.2.1 Niveau critique

Dans cette sous-section nous étudions le comportement des ondes proches d'un niveau critique. Ces niveaux sont caractérisés par une dégénérescence de l'équation d'onde qui se produit

1. En pratique nous considérons un domaine fini $[0, z_{\max}]$ et nous prolongeons $c(z)$ au dessus de $z_{\max}$ par $c(z) = c(z_{\max}) = c_\infty$.

lorsqu'un coefficient de l'équation différentielle devient singulier.

Dans le cas de l'acoustique linéaire décrit par l'équation (2.40), les niveaux critiques se produiraient pour $c_{eff}(z_c) = 0$ c'est à dire pour un écoulement dont la vitesse serait aussi rapide que la célérité du son. Ce genre d'écoulement posséderait alors un nombre de Mach $\mathcal{M}$ avoisinant 1. Même si, lorsque les vents ont une amplitude élevée, des nombres de Mach proches de $\mathcal{M} = 0.3$ peuvent parfois être atteints en hiver aux latitudes moyennes et aux altitudes proches de la stratopause [Evers and Haak, 2010], nous supposons que le nombre de Mach est petit devant 1, hypothèse pour laquelle l'approximation célérité effective reste valide.

En revanche, l'équation de Taylor Goldstein (2.54), modélisant les ondes orographiques, peut présenter de nombreux points critiques dans des situations ordinaires. Ces points sont définis par une altitude z_c telle que $u_0(z_c) = c_x$, où c_x peut être complexe (nous noterons $c_x = c_r + i c_i$). Si $c_i = 0$ alors l'équation de Taylor Goldstein est singulière. Ainsi lorsque z approche de z_c , le paramètre de Scorer devient infini, impliquant que l'onde associée se met à fluctuer très rapidement dans la direction verticale. Cette singularité peut générer localement des gradients importants, qui conduisent aussi au déferlement de l'onde.

Pour comprendre le comportement des solutions près de ces points, pour z proche de z_c , on peut développer $N^2(z)$ et $u_0(z)$ en série de Taylor autour de z_c :

$$\begin{aligned} N^2(z) &= N^2(z_c) + \frac{dN^2}{dz}(z_c)(z - z_c) + \dots, \\ u_0(z) &= u_0(z_c) + \frac{du_0}{dz}(z_c)(z - z_c) + \dots, \end{aligned}$$

injectant ces développements en séries dans l'équation de Taylor Goldstein, cette dernière devient pour z proche de z_c :

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \left[\frac{N^2(z_c)}{u_{0z}^2(z_c)(z - z_c)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_c} + a_0 + a_1(z - z_c) + \dots - k^2 \right] \hat{w} = 0, \quad (2.58)$$

où a_{-1} , a_0 , $a_1 \dots$ sont des constantes impliquant les dérivées successives de N^2 et u_0 près de z_c . Notons que le terme le plus singulier de cette équation est le premier et qu'à l'ordre dominant cette équation se ramène à

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \frac{J}{(z - z_c)^2} = 0, \quad (2.59)$$

où $J = \frac{N^2(z_c)}{u_{0z}^2(z_c)}$ est le nombre de Richardson au niveau critique. Les solutions de cette équation peuvent s'écrire sous la forme d'une somme de deux termes indépendants

$$\hat{w} = A(z - z_c)^{1/2+i\mu} + B(z - z_c)^{1/2-i\mu}, \quad (2.60)$$

où $\mu = \sqrt{J - 1/4}$. Si ces solutions sont bien définies lorsque $z - z_c > 0$, elles peuvent avoir plusieurs valeurs lorsque $z - z_c < 0$ suivant que l'on définisse $z - z_c$ sous la forme

$$|z - z_c|e^{+i\pi} \quad \text{ou} \quad |z - z_c|e^{-i\pi}. \quad (2.61)$$

Le choix du positionnement de la coupure associée à (2.60) se fait de la manière suivante : si on introduit une dissipation linéaire α , représentant une trainée de Rayleigh ou un refroidissement

Newtonien, dans le système d'équation (2.43)-(2.46), la fréquence intrinsèque devient $\hat{\omega} + i\alpha$ et la solution (2.60) se réécrit alors

$$\hat{w} = A(z - z_c - \frac{i\alpha}{ku_{0z}(z_c)})^{1/2+i\mu} + B(z - z_c - \frac{i\alpha}{ku_{0z}(z_c)})^{1/2-i\mu}. \quad (2.62)$$

Si l'on traite le cas $k > 0$, $u_{0z} > 0$, cela veut dire que la singularité est dans le demi plan complexe supérieur. On montre dans ce cas que lorsque α tend vers zéro il faut donc contourner la singularité par le bas [Lott et al., 2015] et donc faire le choix $e^{-i\pi}$ dans (2.61).

Prenons à présent le cas d'une onde se propageant verticalement vers le haut lorsque $z > 0$. Pour une telle onde, la vitesse de phase intrinsèque au dessus du niveau critique est négative, elle doit donc avoir un flux d'Eliassen-Palm F^z ([Eliassen and Palm, 1961]) négatif :

$$F^z = \Re(\rho_r \hat{u}^* \hat{w}) < 0. \quad (2.63)$$

Pour la solution (2.60), les relations de polarisations fournissent $\hat{u}$:

$$\hat{u} = \frac{i}{k} \left[(1/2 + i\mu)A(z - z_c)^{-1/2+i\mu} + (1/2 - i\mu)B(z - z_c)^{-1/2-i\mu} \right], \quad (2.64)$$

De fait pour cette solution le flux d'Eliassen Palm se réécrit

$$F^z = \rho_r \left(-\frac{\mu}{k} AA^* + \frac{\mu}{k} BB^* \right).$$

On constate alors que le premier terme de la solution (2.60) (associé à A) se propage vers le haut, car son flux est négatif, tandis que le second terme (associé à B) se propage vers le bas.

Un résultat intéressant, dérivé par Booker et Bretherton [Booker and Bretherton, 1967a], consiste à estimer l'absorption d'une onde de gravité se propageant vers un niveau critique. On se place au dessus du niveau critique et considérons l'onde transmise se propageant vers le niveau critique (donc vers le bas) d'amplitude $B = 1$, celle ci s'écrit donc

$$\hat{w} = (z - z_c)^{1/2+i\mu}.$$

En dessous du niveau critique, en utilisant le choix de coupure associée à la racine carrée, elle se réécrit ($z < z_c$)

$$\hat{w} = \left(|z - z_c| e^{-i\pi} \right)^{1/2+i\mu} = -i e^{\mu\pi} |z - z_c|^{1/2+i\mu}.$$

Cette onde incidente est $e^{\mu\pi}$ plus grande que l'onde transmise. On dit que l'absorption au niveau critique vaut $e^{\mu\pi}$, elle est très forte lorsque J est grand et diminue lorsque J s'approche de 0.25. Ce résultat très général nous sera utile pour comprendre la théorie du foehn dans le chapitre suivant. Un autre résultat intéressant, est que la vitesse horizontale $\hat{u}$ devient très grande près du niveau critique. Ce comportement expliquera pourquoi les niveaux critiques favorisent l'apparition de tempêtes en aval et de forts effets de Foehn.

2.2.2 Approximation WKB

La méthode WKB (Wentzel, Kramers et Brillouin) est une méthode générale pour obtenir la solution approchée d'une certaine classe d'équations différentielles linéaires.

Reprenant l'équation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + s^2(z) - k^2\right)\Phi(z) = 0, \quad (2.65)$$

on va s'intéresser au cas des "hautes" fréquences, *i.e* des petites longueurs d'ondes. On peut alors écrire la longueur d'onde en tant que fonction d'un petit paramètre, plus précisément $\lambda = o(\epsilon)$ où $\epsilon \ll 1$, ce qui implique pour le nombre d'onde verticale $k = o(\epsilon^{-1})$. On pose alors $S = \epsilon s$, $K = k\epsilon$ et $\Omega = \omega\epsilon$. L'équation (2.65) devient

$$\left(\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + S^2(z) - K^2\right)\Phi(z) = 0, \quad (2.66)$$

Notons $\mu(z) = K^2 - S^2(z)$, et supposons qu'il existe un unique point tournant, *i.e.* une unique altitude, notée $z_0(K)$, telle que $\mu(z_0(K)) = 0$. On peut alors écrire l'approximation WKB à l'ordre dominant, fournissant dans les trois régions (sous le point tournant, au voisinage du point tournant et au dessus de ce point) une solution :

$$\Phi(z) = \begin{cases} \alpha_1 (\mu(z))^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} \int_{z_0}^z \sqrt{\mu(t)} dt\right) & \text{si } z > z_0, \text{ et } z - z_0 \gg \epsilon^{\frac{2}{3}}, \\ 2\sqrt{\pi} (\epsilon \mu'(z_0))^{-\frac{1}{6}} \alpha_1 \text{Ai}(\epsilon^{-\frac{2}{3}} (\mu'(z_0))^{\frac{1}{3}} (z - z_0)) & \text{si } |z - z_0| \ll 1, \\ 2\alpha_1 (-\mu(z))^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{\epsilon} \int_z^{z_0} \sqrt{-\mu(t)} dt - \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } z < z_0 \text{ et } (z - z_0) \gg \epsilon^{\frac{2}{3}}, \end{cases} \quad (2.67)$$

En 1935, Langer a mis en avant le fait que ces 3 formules pouvaient être combinées en une seule qui est une approximation uniformément valable de $u(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^+$:

$$\Phi_{unif}(z) = 2\sqrt{\pi} C \left[\frac{3I_0(z)}{2\epsilon} \right]^{1/6} \mu^{-1/4}(z) \text{Ai} \left\{ \left[\frac{3}{2\epsilon} I_0(z) \right]^{2/3} \right\}, \quad (2.68)$$

où $I_0(z) = \int_{z_0}^z \sqrt{\mu(t)} dt$. En effet pour $z - z_0 > \epsilon^{2/3}$, on a $3I_0(z)/(2\epsilon) \gg 1$ permettant alors d'approximer la fonction de Airy dans (2.68) par son terme dominant, à savoir

$$\text{Ai} \left[\left(\frac{3I_0(z)}{2\epsilon} \right)^{2/3} \right] \sim \left(\frac{3I_0}{2\epsilon} \right)^{-1/6} \frac{e^{-I_0(z)/\epsilon}}{2\sqrt{\pi}}.$$

En substituant dans (2.68) on obtient alors la première ligne de (2.67).

Lorsque $|z - z_0| \ll 1$, $I_0(z)$ peut être approximé en remplaçant $\sqrt{\mu}$ par le premier terme de son développement en série de Taylor, résultant ainsi en un calcul d'intégrale classique fournissant directement la deuxième ligne de (2.67).

Enfin, pour z sous le point tournant, *i.e* $z - z_0 < -\epsilon^{2/3}$, il faut être extrêmement prudent quant aux choix de la coupure associée à la racine carrée. On choisit $\mu(z) = -\mu(z)e^{i\pi}$ lorsque $z < z_0$. Ainsi

$$I_0(z) = \int_{z_0}^z \sqrt{\mu(s)} ds = e^{3\pi i/2} \int_z^{z_0} \sqrt{-\mu(s)} ds.$$

Dans ce cas, $I_0(z)^{2/3}$ est grand et négatif, donc (2.68) peut être simplifiée en utilisant le développement asymptotique de la fonction de Airy pour les termes négatifs fournissant ainsi la dernière ligne de (2.67)

Les solutions de la relation de dispersion s'obtiennent en injectant (2.67) dans la condition au sol $\Phi'(h) = 0$, ce qui nous fournit la condition intégrale suivante :

$$\int_h^{z_0(k)} \sqrt{s^2(z) - k^2} dz = n\pi + \frac{\pi}{4}. \quad (2.69)$$

Les nombres d'ondes qui respectent la condition au sol sont les zéros de $k \mapsto \int_h^{z_0(k)} \sqrt{s(z)^2 - k^2} dz - n\pi - \frac{\pi}{4}$. Cette condition restreint la recherche des nombres d'onde k et si elle est respectée, il existe une solution $\Phi(z)$ associée à k . De plus l'intégrale (2.69) n'est définie et réelle que si

$$k \in [\min(s), \max(s)]. \quad (2.70)$$

2.2.3 Fonctions hypergéométriques et résolution quasi-analytique

Dans bon nombre de configurations étudiées, la variabilité verticale des paramètres des équations d'ondes ($u_0(z)$ et $N^2(z)$ pour l'équation de Taylor Goldstein ou $c_{eff}(z)$ pour les ondes acoustiques) ne permet pas d'obtenir une solution analytique. Cependant, dans quelques cas, un changement de variable transforme l'équation étudiée en une équation plus familière dont les solutions sont alors connues. C'est le cas, notamment, de l'équation dite *hypergéométrique*, se présentant sous la forme :

$$z(1-z) \frac{d^2\Phi}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\} \frac{d\Phi}{dz} - ab\Phi = 0, \quad (2.71)$$

où a , b et c sont des paramètres réels ou complexes. Cette équation admet comme solution, valable au voisinage des points $z = 0$, 1 , ou encore ∞ (qui sont des singularités régulières), la fonction *hypergéométrique* définie par la série

$$F(a, b, c; z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^s}{s!}, \quad (2.72)$$

où $(a)_n$ représente la factorielle croissante ou symbole de Pochhammer². Cette équation est d'intérêt pour notre étude car "Toute équation différentielle du second ordre ayant au plus trois singularités (incluant le point à l'infini), toutes régulières, peut se transformer en une équation hypergéométrique"[Olver, 1974]. Ainsi considérons une équation de la forme

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + f(z) \frac{dw}{dz} + g(z) w = 0, \quad (2.73)$$

ayant trois singularités régulières ξ , η et ζ d'exposants (α_1, α_2) , (β_1, β_2) et (γ_1, γ_2) , respectivement. En effectuant le changement de variables :

$$t = \frac{(\zeta - \eta)(z - \xi)}{(\zeta - \xi)(z - \eta)}, \quad W = t^{-\alpha_1} (1-t)^{-\gamma_1} w, \quad (2.74)$$

2. $(a)_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ a(a+1)\dots(a+n-1) & n>0 \end{cases}$

l'équation (2.73) devient de la forme (2.71) avec

$$a = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \quad b = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1, \quad c = 1 + \alpha_1 - \alpha_2, \quad (2.75)$$

et une solution de cette équation peut donc s'exprimer sous forme de fonctions hypergéométriques.

Le cas des ondes orographiques

L'équation non-visqueuse de Taylor-Goldstein adimensionnelle (dont la forme sera démontrée au chapitre 3 section 3.2.2)

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{U^2} + \frac{2(1-U^2)}{J} - k^2 \right) \hat{w} = 0, \quad (2.76)$$

avec $U(z) = \tanh^2(z)$, peut être résolue analytiquement. En effet, en effectuant dans un premier temps le changement de variable $r = \tanh^2(z)$, l'équation (2.76) devient une équation différentielle de la forme (2.73) avec trois singularités régulières. De fait en suivant le changement de variable (2.74), on obtient une solution sous forme de fonctions hypergéométriques qui peut finalement s'écrire :

$$\hat{w} = r^{\alpha_1} (1-r)^{\gamma_1} (b_1 W_{2(0)} + b_2 W_{1(0)}), \quad (2.77)$$

avec $b_1, b_2, \alpha_1, \gamma_1, a, b$ et c des fonctions de J et k (cf Annexe). $W_{1(0)}, W_{2(0)}$ sont définies par 15.5.3 et 15.5.4 dans [Abramowitz and Stegun, 1964] :

$$W_{1(0)} = F(a, b; c; r), \text{ et } W_{2(0)} = r^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; r).$$

Le cas de la propagation acoustique

Considérons l'équation de l'acoustique linéaire

$$\Phi_{zz} + (\omega^2/c^2(z) - k^2)\Phi = 0, \quad (2.78)$$

avec le profil de célérité effective défini par la relation $C_0/c(z) = a + (1-a)/\cosh(z/H)$, avec $0 < a < 1$ et H est une hauteur d'échelle. En suivant le même processus que pour le cas précédent, nous pouvons obtenir la solution analytique suivante :

$$\Phi(\bar{z}) = (1 + e^{-2\bar{z}})^{\nu} e^{-\mu\bar{z}} F(\nu + \mu, \nu, 1 + \mu; -e^{-2\bar{z}}) (-1)^{(1+\mu)/2} / \sqrt{2}. \quad (2.79)$$

où $2\nu = 1 + \sqrt{1 + 4(H^2\omega^2(1-a))/C_0^2}$, $\mu = Hk$ et $\bar{z} = \frac{z}{H}$. Cette solution analytique développée en annexe a été utilisée lors de cette thèse pour valider la plupart des algorithmes développés et utilisés par la suite (cf Annexe).

2.3 Calcul de la propagation horizontale

2.3.1 Spectre d'opérateur

Précédemment, nous avons présenté l'équation de l'acoustique linéaire dans l'espace de Fourier (ω, k) , cette équation régit la propagation d'ondes dans des guides d'ondes ouverts et peut être présentée sous la forme d'une équation aux valeurs propres d'opérateur.

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}^+)$ muni du produit scalaire canonique (Φ, Ψ) et de la norme associée $\|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)}$, et l'opérateur non borné défini par

$$A(\omega)\Phi = \Phi_{zz} + \omega^2\Phi/c(z)^2, \quad (2.80)$$

où $\Phi \in D(A(\omega))$, avec le domaine $D(A(\omega)) = \{\Phi \in H^1(\mathbb{R}^+); \Phi_{zz} \in L^2(\mathbb{R}^+)\}$. Les valeurs minimales et maximales de $c(z)$ sont notées dans la suite c_- et c_∞ ³. Le problème tel qu'il est exposé permet de faire appel à la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints pour déterminer les propriétés de la solution de l'équation différentielle (2.80).

Les propriétés de l'opérateur A peuvent être décrites à partir de son spectre, qu'on note $\sigma(A)$. Adoptant la terminologie classique, on définit l'ensemble résolvant $\rho(A)$ par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ est inversible (d'inverse borné)}\}, \quad (2.81)$$

ce qui permet d'introduire le spectre par la relation $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$, dont on sait qu'il est non vide et réel pour les opérateurs considérés ici (*i. e.* de la forme (2.80)). En se limitant aux opérateurs autoadjoints, on peut montrer que $\sigma(A)$ comporte une partie $\sigma_c(A)$, dite *spectre continu* (ou *spectre essentiel*) de A , et définie par l'ensemble des valeurs λ qui satisfont aux conditions $\|u_n\| = 1$ et $\|Au_n - \lambda u_n\| \rightarrow 0$, avec $u_n \rightarrow 0$ (convergence faible) pour $u_n \in D(A)$. Une autre façon de caractériser une valeur $\lambda \in \sigma_c(A)$ est de calculer son ordre de multiplicité. En effet si elle est de multiplicité infinie alors elle appartient nécessairement à $\sigma_c(A)$. Une méthode classique pour déterminer $\sigma_c(A)$, consiste à montrer que A peut s'écrire sous la forme $A = B + K$ où B est un opérateur autoadjoint dont on sait calculer le spectre essentiel par des techniques simples et K est un opérateur symétrique admettant certaines propriétés de compacité⁴. On parle alors de perturbation compacte de B et généralement on peut montrer que $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$. Par la suite, on considère B défini par

$$B\Phi = \Phi_{zz} + \omega^2\Phi/c_\infty^2,$$

où c_∞ est définie en (2.56). Comme ω^2/c_∞^2 ne dépend pas de l'altitude z , on peut chercher Φ sous la forme d'une onde plane en z à l'aide de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$. De fait on obtient dans l'espace spectral :

$$\hat{B}\hat{\Phi} = \mathcal{F}B\mathcal{F}^{-1}\Phi = (l^2 + \omega^2/c_\infty^2)\hat{\Phi},$$

où l est le nombre d'onde vertical. Par conséquent $\hat{B}$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $l^2 + \omega^2/c_\infty^2$. Or on sait que son spectre est constitué uniquement du spectre continu défini par $\sigma_c(\hat{B}) = [0, \frac{\omega^2}{c_\infty^2(x)}]$ [Paulin, 2016] et comme la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est un opérateur

3. Le prolongement du profil de célérité vers une constante c_∞ lorsque $z \rightarrow +\infty$ est fait de telle sorte que $c_\infty = \max_z c(z)$.

4. On se référera au cours de [Joly, 2013] pour de plus amples détails

unitaire, il en est de même de B. Le spectre continu de A s'écrit alors :

$$\sigma_c(A) = [0, \frac{\omega^2}{c_\infty^2}]. \quad (2.82)$$

Nous noterons par la suite Φ_λ^c les fonctions propres associés à un élément λ du spectre continu. Comme Φ_λ^c n'est pas dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^+)$ et bien que l'on puisse montrer qu'il présente un comportement oscillant à l'infini ([Waxler, 2002]), on ne peut pas le normaliser classiquement.

Le spectre continu de $A(\omega)$ ayant été déterminé, nous sommes maintenant en mesure d'étudier les valeurs propres situées en dehors du spectre continu à l'aide du principe de Min-Max [Queffélec and Zuily, 2013] on a :

$$\frac{\omega^2}{c_\infty^2} \leq \lambda_{N(\omega)}(\omega) \leq \dots \leq \lambda_2(\omega) \leq \lambda_1(\omega) \leq \frac{\omega^2}{c_-^2}, \quad (2.83)$$

où $N(\omega)$ est le nombre d'éléments de $\sigma(A) \setminus \sigma_c(A)$, appelé *spectre ponctuel*, est défini par :

$$N(\omega) = \sup\{m \geq 1; \frac{\omega^2}{c_\infty^2} < \lambda_m(\omega)\}.$$

De plus, par continuité de $c(z)$, il existe pour chaque fonction propre Φ_n un point tournant, *i.e.* une altitude telle que $\omega^2/c^2[z_0(\lambda_n)] = \lambda_n$. Par une approche WKB, similaire à celle de la section 2.2.2, on peut montrer que Φ_n est exponentiellement décroissante au dessus de son plus haut point tournant. Ainsi les valeurs propres du spectre discret correspondent bien à des modes confinés. Par abus de langage on appellera donc, désormais, mode piégé tout mode respectant cette inégalité (2.83). Ces fonctions propres forment une famille orthogonale et chaque fonction propre du spectre discret est normalisée de telle sorte que

$$\int_0^{+\infty} \Phi_j(z) \Phi_i(z) dz = \delta_{ij}. \quad (2.84)$$

Notons que cette normalisation n'est pas celle utilisée classiquement utilisant l'intégrale sur le carré du module $|\Phi_j(z)|^2$.

Les fonctions $\omega \mapsto \lambda_n(\omega)$ sont croissantes [Joly, 2013], *i.e.* lorsque ω augmente, la vitesse de phase du mode décroît et le mode se retrouve piégé dans un guide d'onde d'épaisseur plus faible [Waxler, 2002]. Et on peut montrer à l'aide de ces résultats que la fonction $\omega \rightarrow N(\omega)$ est croissante. Ce résultat est essentiel, car il assure la croissance du nombre de modes guidés.

Les fonctions propres (continues et discrètes) du spectre de $A(\omega)$ forment une base hilbertienne de sorte que chaque fonction $\Phi(z)$ solution de $A(\omega)\Phi = 0$ peut se décomposer sous la forme

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j(z) + \int_{\sigma_c(A)} \Phi_\lambda^c(z) d\lambda, \quad (2.85)$$

où α_j sont des coefficients à déterminer. La contribution associée au spectre continu est appelée contribution continue mais aussi contribution de *coupure*. Cette contribution permet de décrire le régime transitoire dans la théorie des instabilités hydrodynamiques ([Pedlosky, 1964, Farrell, 1982, Farrell, 1984, Huerre and Monkewitz, 1990]) et plusieurs démarches existent pour

l'évaluer. Une évaluation numérique directe de cette intégrale est possible mais extrêmement coûteuse [Waxler, 2002]. Une autre solution consiste à calculer l'intégrale en utilisant le théorème des résidus [Haddon, 1984, Haddon, 1986]. Enfin une approche efficace consiste à déduire le comportement asymptotique du spectre continu à partir des singularités de sa représentation intégrale [Stickler and Ammicht, 1980]. Dans le cas de la propagation acoustique, lorsque $\Phi(z)$ décrit la transformée de Fourier temporelle de la pression, cette contribution est dominante au voisinage des caustiques dans le champ d'onde [Le Dizès and Millet, 2007]. Néanmoins les travaux de [Waxler, 2003] ont montré que loin de la source, au sol, et en dehors des gammes de fréquences pour lesquelles un mode se trouve au voisinage du point de branchement ω^2/c_∞^2 , le champ de pression n'est pas significativement affecté par cette contribution. Par la suite, nous supposons donc que seuls les modes discrets suffisent pour représenter le champ de pression.

2.3.2 Décomposition sur une base de modes normaux

Considérons un champ de célérité $c(x, z)$ *lentement variable* dans la direction horizontale, caractérisé par l'échelle horizontale et un petit paramètre $\epsilon \ll 1$. On peut alors écrire $c(x, z) = c_0(z) (1 + \mu(\epsilon x, z))$ où $(x, z) \mapsto \mu(\epsilon x, z)$ est la perturbation selon x du profil de célérité avec $|\mu(\epsilon x, z)| \ll 1$ et ses variations sont de l'ordre de $o(1)$ sur un intervalle de l'ordre de $O(1)$. On suppose que $\mu(0, z) = 0$ de telle sorte que $c(0, z) = c_0(z)$. L'équation de Helmholtz mettant en jeu la transformée de Fourier temporelle $\hat{p}$ de la pression p s'écrit :

$$\nabla^2 \hat{p} + \frac{\omega^2}{c(x, z; \epsilon)^2} \hat{p} = 0 \quad (2.86)$$

Comme explicité dans la section précédente, les fonctions propres forment un ensemble complet de l'espace des solutions. Ainsi on cherche la solution se propageant selon les x positifs (par symétrie nous obtiendrons la solution négative) sous la forme

$$\hat{p}(x, z, \omega) = \sum_{m=1}^N \Psi_m(X) \Phi_m(X, z), \quad (2.87)$$

avec $X = \epsilon x$ et où $\Phi_m(X, z)$ est défini par

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_m(X, z) + \left[\frac{\omega^2}{c^2(X, z)} - \lambda_m(X) \right] \Phi_m(X, z) = 0. \quad (2.88)$$

Par la suite nous poserons $k_m^2(X) = \lambda_m(X)$. Injectant la décomposition (2.87) dans (2.86) on a

$$\sum_{m=1}^N \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Psi_m(X) \Phi_m(X, z)) + \Psi_m(X) \left(\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c(X, z)^2} \Phi_m(z) \right) \right] = 0. \quad (2.89)$$

Utilisant le fait que Φ_m est un mode local défini par (2.88) on obtient

$$\sum_{m=1}^N \left[\epsilon^2 \frac{\partial^2 \Psi_m(X)}{\partial X^2} \Phi_m(X, z) + 2\epsilon^2 \frac{\partial \Psi_m(X)}{\partial X} \frac{\partial \Phi_m}{\partial X} + \frac{\partial^2 \Phi_m(X, z)}{\partial x^2} \Psi_m(z) + k_m^2(X) \Psi_m(X) \Phi_m(X, z) \right] = 0. \quad (2.90)$$

On applique le produit scalaire avec Φ_n à l'équation (2.91) pour obtenir :

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 \Psi_n(X)}{\partial X^2} + 2\epsilon \sum_{m=1}^N B_{mn} \frac{\partial \Psi_m(X)}{\partial X} + \sum_{m=1}^N A_{mn} \Psi_m(X) + k_n^2(X) \Psi_n(X) = 0, \quad (2.91)$$

où les matrices $A = (A_{mn})$ et $B = (B_{mn})$ sont définies par

$$A_{mn} = \int \partial_{xx}^2 \Phi_m(x, z) \Phi_n(x, z) dz \quad \text{et} \quad B_{mn} = \int \partial_x \Phi_m(x, z) \Phi_n(x, z) dz. \quad (2.92)$$

Les matrices A et B ne font pas intervenir explicitement la perturbation μ du profil de célérité, cependant on comprend que cette perturbation va intervenir au travers de Φ_m . Dans le cas où la perturbation du profil de célérité est un processus aléatoire, ces matrices de couplage sont alors des matrices aléatoires. Une étude asymptotique basée sur la séparation des échelles peut permettre d'obtenir les lois de telles matrices [Fouque et al., 2007].

L'hypothèse adiabatique introduite par [Pierce et al., 1981] pour des problèmes d'acoustique océanique consiste à négliger les échanges d'énergies entre modes. De fait cela revient à négliger les matrices de couplages A et B , on obtient alors un ensemble d'équations découplées

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 \Psi_n(X)}{\partial X^2} + k_n^2(X) \Psi_n(X) = 0. \quad (2.93)$$

On suppose maintenant que la longueur d'onde horizontale est très inférieure aux échelles caractéristiques horizontales de l'atmosphère. La séparation d'échelle que présentent naturellement les champs atmosphériques permet d'effectuer cette approximation dans la plupart des cas. Néanmoins, des phénomènes turbulents de moindre échelle peuvent advenir et dans ce cas l'approximation adiabatique cesse d'être valable. Ce faisant l'approche WKB permet, en tronquant au premier ordre le développement asymptotique de $\Psi_n(X)$ ([Bender and Orszag, 2013]), d'obtenir

$$\Psi_n(X) = \frac{C_n}{\sqrt{k_n(X)}} e^{i \int_0^X k_n(s) ds}, \quad (2.94)$$

où C_n est une constante d'intégration. Ainsi le champ de pression peut se réécrire

$$\hat{p}(x, z; \omega) = \sum_{n=1}^N C_n \Phi_n(x, z) \frac{e^{i \int_0^x k_n(s) ds}}{\sqrt{k_n(x)}}. \quad (2.95)$$

Considérons maintenant une source ponctuelle en $x = 0$ et $z = z_s$, dont la transformée de Fourier s'écrit $\hat{s}(\omega)$, on obtient alors l'amplitude de chaque mode ([Fouque et al., 2007]) :

$$C_n = \hat{s}(\omega) \sqrt{k_n(0)} \Phi_n(0, z_s). \quad (2.96)$$

De cette manière la transformée de Fourier du champ de pression s'écrit

$$\hat{p}(x, z; \omega) = \sum_{m=1}^N C_m \Phi_m(0, z_s) \Phi_m(x, z) e^{i \int_0^x k_m(s) ds} / \sqrt{k_m(x)}. \quad (2.97)$$

Ainsi pour tout ω , il nous suffit de rechercher le spectre discret $(k_n(\omega), \Phi_n(\omega, z))$ du problème (2.40) en prenant garde à ce que les fonctions propres soient normées pour satisfaire (2.84). Ce spectre discret nous fournit alors $\hat{p}(x, z, \omega)$, la transformée de Fourier temporelle de la réponse acoustique.

2.3.3 Résolution numérique du problème aux valeurs propres

Discrétisation et formulation du problème discret

Dans la partie précédente, présentant la décomposition en modes normaux, nous avons montré que la recherche de solutions de l'équation d'ondes acoustiques se résumait à la somme discrète et finie de termes issus de la résolution d'un problème aux valeurs propres de la forme :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + S^2(z) \right) \Phi = k^2 \Phi. \quad (2.98)$$

Dans certains cas favorables, une solution peut être obtenue analytiquement, en revanche dans la plupart des situations rencontrées, le recours à une résolution numérique est nécessaire.

Considérant la grille verticale régulière $z = [z_0, z_1, \dots, z_N]$ d'incrément Δz , la discrétisation de l'opérateur A s'effectue en utilisant une méthode de différences finies centrées. La formule de Taylor nous fournit l'approximation à l'ordre 2 de la dérivée seconde :

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2}(z_i) \approx \frac{\Phi(z_{i+1}) - 2\Phi(z_i) + \Phi(z_{i-1}))}{(\Delta z)^2} = \frac{\mathbf{v}_{i+1} - 2\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i-1}}{(\Delta z)^2},$$

où $\mathbf{v}$ représente les vecteurs propres, qui sont l'approximation discrète des fonctions propres Φ . Les fonctions dépendantes de z sont, quant à elles, discrétisées selon la grille verticale. Le problème modal s'exprime alors sous sa forme discrétisée par :

$$\mathbb{A} \mathbf{v} = k^2 \mathbf{v}, \quad (2.99)$$

où $\mathbb{A}$ correspond au discrétisé de l'opérateur A . La forme discrétisée $\mathbb{A}$ de A se résume donc à une matrice tridiagonale :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{B} + S^2(z_0) & \frac{1}{(\Delta z)^2} & & & \\ \frac{1}{(\Delta z)^2} & -\frac{2}{(\Delta z)^2} + S^2(z_1) & \frac{1}{(\Delta z)^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{(\Delta z)^2} & -\frac{2}{(\Delta z)^2} + S^2(z_{N-1}) & \frac{1}{(\Delta z)^2} \\ & & 0 & \frac{1}{(\Delta z)^2} & -\frac{2}{(\Delta z)^2} + S^2(z_N) \end{pmatrix}.$$

Cette forme simple motive cette méthode de résolution, qui peut s'avérer moins précise que des méthodes des différences finies d'ordre supérieur (schémas de type DRP ou OSMP) ou des méthodes spectrales [Millet and Casalis, 2004], mais qui permet un calcul direct et efficace des solutions du problème modal. Le premier point de discrétisation fait intervenir $\mathcal{B}$ qui représente la condition limite au sol. Pour déterminer $\mathcal{B}$, il suffit de remarquer qu'au sol la fonction propre doit respecter la condition limite, mais est aussi solution du problème modal. Son discrétisé $\mathbf{v}$ doit donc vérifier :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{-1}}{(\Delta z)^2} + S_0^2 \mathbf{v}_0 = k^2 \mathbf{v}_0, \\ \alpha \frac{\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{-1}}{\Delta z} + \beta \mathbf{v}_0 + \gamma = 0. \end{cases}$$

Dans ce système le point $\mathbf{v}_{-1}$ est un point fictif que l'on se doit d'éliminer, obtenant ainsi :

$$\mathcal{B} = \frac{\beta \Delta z / \alpha - 1}{(\Delta z)^2}.$$

Alors que la condition au sol est explicitement écrite dans la forme discrétisée du problème, la condition à l'infini ne s'exprime pas d'une manière aussi simple. Pour ce faire nous cherchons les modes discrets dans l'intervalle $[\min(S^2), \max(S^2)]$ introduit par (2.83). Pour rappel cet intervalle ne contient que des valeurs propres du spectre ponctuel dont le comportement à l'infini respecte la condition d'ondes piégées. Il est seulement nécessaire de considérer une altitude z_N suffisamment importante de sorte que tous les vecteurs propres $\mathbf{v}$ aient leur point tournant inférieur à z_N . En effet cela garantit que les modes soient évanescents et très atténués lorsqu'ils atteignent l'altitude z_N . En pratique, nous choisissons l'altitude z_N de telle sorte qu'elle soit 2 fois supérieure à l'altitude du plus haut point tournant.

Comme lors de chaque discrétisation d'un problème continu, l'incrément de la grille de discrétisation s'avère être un paramètre déterminant pour obtenir une solution précise. Cependant, rappelons que la taille de la matrice $\mathbb{A}$ augmente lorsque Δz diminue, ainsi nous sommes confronté au choix entre une résolution maximale ou une vitesse d'exécution optimale. Le pas de discrétisation nous est imposé par $S(z)$ et par la pulsation de l'onde. On estime que la convergence est obtenue lorsque nous prenons 10 points de grille par longueur d'onde, cela revient à choisir, pour une fréquence donnée f , le pas de discrétisation tel que $\Delta z = \min(c)/(10f)$, ainsi pour chaque fréquence un pas de discrétisation est utilisé. Cela permet de réduire le temps de calcul plutôt que de calibrer le schéma de discrétisation sur le "pire" cas, à savoir la plus haute fréquence.

Cas d'une lente variabilité horizontale

En pratique, il nous faut résoudre le problème aux valeurs propres pour une série de distances $(X_1, X_2, \dots, X_M)$. Numériquement, cela suppose que l'on puisse identifier un même mode k dans une série d'ensembles $(k_j(X_m))_{j,m}$, et en faisant attention à ce que les fonctions propres $u_j(z; \omega, X)$ ne changent pas de signe d'un calcul à l'autre (contrairement au cas sans variation horizontale, il faut ici que les modes gardent leur polarité). Pour pouvoir suivre en pratique un mode k_j lorsque l'on passe de X_{m-1} à X_m , nous utilisons la condition :

$$\int_0^\infty \Phi_j(z; \omega, X_m) \frac{\partial \Phi_j}{\partial X}(z; \omega, X_m) dz = 0, \quad (2.100)$$

où la dérivée partielle s'approche en pratique avec une différence finie. Cette condition se trouve simplement en dérivant par rapport à X la condition sur la norme (2.84). Pour un mode $\Phi_j(z; \omega, X_{m-1})$ donné, on teste alors toutes les fonctions propres (et leurs opposées) trouvées au rang m , et celle satisfaisant la condition se trouve être $\Phi_j(z; \omega, X_m)$, avec le bon signe.

Pour que cette méthode fonctionne en pratique, il faut que la discrétisation horizontale $(X_1, X_2, \dots, X_M)$ ne soit pas de résolution trop importante. Cependant, plus on utilise de points, plus il faut calculer de spectres, ce qui peut considérablement rallonger le temps de calcul.

Méthode QR

La méthode repose sur la décomposition de la matrice A sous sa forme "QR", plus précisément on pose $A_0 = A$, à la $k^{\text{ième}}$ étape ($k \geq 0$), on calcule la décomposition de $A_k = Q_k R_k$ où Q_k est une matrice orthogonale et R_k est une matrice triangulaire supérieure. On pose ensuite $A_{k+1} = R_k Q_k$. Remarquons que

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^{-1} Q_k R_k Q_k = Q_k^{-1} A_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k.$$

Ainsi toutes les matrices A_k sont semblables et ont les mêmes valeurs propres. On peut montrer que *La suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice triangulaire* [Gourdon, 1994]. Ce résultat est le point central de la méthode car dans une matrice triangulaire les valeurs propres sont listées sur la diagonale.

La méthode QR est déjà implémentée en Matlab et Fortran 90 (bibliothèque SLATEC). Cette méthode est extrêmement stable car elle ne procède qu'à des transformations orthogonales semblables. Cependant elle est relativement coûteuse pour de très grandes matrices (le coût est en $\mathcal{O}(N^3)$). Cette méthode fournit toutes les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice. Or l'on sait que seul un nombre fini de modes seront piégés, il suffit alors de garder les valeurs propres qui sont comprises dans l'intervalle $[\min(S^2), \max(S^2)]$. Les autres valeurs propres correspondent à des éléments discrétisés de $\sigma_c(A)$.

Puissance inverse itérée

La méthode de la puissance inverse est un algorithme permettant de calculer la valeur propre de plus petit module d'une matrice, ou, plus généralement, la valeur propre non nulle la plus proche d'un nombre complexe donné. Elle est basée sur la méthode de la puissance itérée appliquée à l'inverse de la matrice A .

Précisément, soit λ un nombre complexe, on cherche à déterminer la valeur propre de A la plus proche de λ . Pour cela, on définit une suite de vecteurs (x_n) par la relation de récurrence :

$$(A - \lambda I)x_{n+1} = x_n.$$

Alors, sous l'hypothèse qu'il existe une seule valeur propre, notée μ , la plus proche de λ et que cette valeur propre est simple,

$$\begin{cases} \langle x_{n+1}, x_n \rangle \text{ converge vers } \mu, \\ \frac{x_n}{\|x_n\|} \text{ converge vers un vecteur propre associé,} \end{cases} \quad (2.101)$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. En général, pour résoudre à chaque étape le système, on ne calcule pas l'inverse de la matrice $A - \lambda I$, mais on réalise sa décomposition LU.

En pratique nous avons initié notre algorithme avec une valeur propre λ obtenue par l'approximation WKB. Sachant que cette approximation nous fournit le bon nombre de valeurs propres mais avec une erreur, nous devrions converger rapidement vers la valeur propre correcte. Cependant, la méthode de la puissance inverse itérée ne fournit qu'une seule valeur propre, il

faut donc la combiner avec une méthode de déflation pour obtenir plusieurs valeurs propres de A. Soient $k_1, k_2, \dots, k_N$ (resp $X^1, X^2, \dots, X^N$) le spectre (resp les vecteurs propres) de A, posons

$$B = A - \frac{k_1}{\|X^1\|^2} X^1 X^{1T}, \quad (2.102)$$

B a pour valeur propre 0, $k_2, \dots, k_N$ et on peut alors appliquer l'algorithme de la puissance inverse itérée à B.

Méthode de la bisection et suite de Sturm

Les valeurs propres de A sont par définition les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda) = |A - \lambda I|$. Or ce polynôme caractéristique peut être construit par récurrence du fait de la structure tridiagonale de A. Si l'on définit de façon imbriquée les matrices A_k telles que :

$$A_k - \lambda I = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A_{k-1} - \lambda I & & \\ 0 & \dots & a_{k,k-1} & a_{k,k} - \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.103)$$

alors le déterminant $P_k(\lambda) = |A_k - \lambda I|$ satisfait la relation suivante :

$$P_k(\lambda) = (a_{k,k} - \lambda)P_{k-1}(\lambda) - a_{k,k-1}^2 P_{k-2}(\lambda), \quad (2.104)$$

où il a été pris en compte le fait que la matrice est symétrique. Cette relation de récurrence s'initialise avec $P_1(\lambda) = a_{1,1} - \lambda$ et $P_0(\lambda) = 1$. Une telle suite de polynômes est appelée suite de Sturm [Queffélec and Zuily, 2013], caractérisée entre autre par le fait que $P_{k+1}(x)P_{k-1}(x) < 0$ si x est racine réelle de P_k . Le nombre de racines réelles isolées de $P = P_N$ dans l'intervalle $[a, b]$ est alors donné par $s(b) - s(a)$ où $s(x)$ est le nombre de changements de signe de la suite de Sturm évaluée sur $x : (P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_N(x))$. Nous avons donc rapidement accès au nombre de racines de P c'est-à-dire au nombre de valeurs propres de A, sur un intervalle réel quelconque. Il suffit de calculer la suite de Sturm évaluée sur les bornes de l'intervalle à l'aide de la relation de récurrence (2.105) et de comparer les changements de signe. Si une des bornes se trouve être racine d'un polynôme intermédiaire $P_k(x)$, il suffit alors de recommencer en prenant une autre valeur.

Dans le cas de l'équation d'onde acoustique, on recherche d'abord le nombre M de valeurs propres réelles dans l'intervalle $[\frac{\omega^2}{c_{\max}^2}, \frac{\omega^2}{c_{\min}^2}]$ à l'aide de ce procédé. Il faut ensuite subdiviser successivement l'intervalle en plus petits intervalles jusqu'à ce qu'ils ne contiennent chacun qu'une valeur propre. Enfin une stratégie de bisection classique peut être suivie à partir d'un intervalle contenant une valeur propre. Le coût de cette méthode n'est que de $\mathcal{O}(NM)$ où $M < N$ est le nombre de valeurs propres recherchées dans l'intervalle ciblé.

Méthode de Newton Raphson et suite de Sturm

Comme dans la méthode précédente, nous utilisons le théorème de Sturm. Une fois notre algorithme initialisé avec un intervalle (e.g. via le théorème de Gershgorin) on utilise la méthode

de Newton Raphson : à chaque itération, la fonction dont on cherche un zéro est linéarisée en l'itéré courant et l'itéré suivant est pris égal au zéro de la fonction linéarisée. Formellement, on part d'un point x_0 , dans notre cas une valeur approchée de la valeur propre recherchée et on construit par récurrence la suite

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

où $f(x) = \text{Det}(A - x.I)$ est le pôleynome caractéristique de A . On approxime la dérivée du pôleynome caractéristique par une différence finie. Ainsi à chaque étape, il est nécessaire de calculer deux déterminants : $f(x_k) = \text{Det}(A - x_k.I)$ et $f(x_k + \delta) = \text{Det}(A - (x_k + \delta).I)$. Afin d'optimiser le calcul du déterminant, plusieurs méthodes sont possibles, dans le cas d'une matrice tridiagonale, la méthode dite de Sturm est optimale et stable sans condition.

En pratique il est nécessaire de calculer les déterminants sous la forme $f(x) = d_1.10^{d_2}$ et donc de considérer le couple (d_1, d_2) comme un représentant du déterminant. En effet, si les coefficients de A sont tous inférieurs ou tous supérieurs à 1 (notre cas), le calcul du déterminant dépasse alors la précision machine (underflow ou overflow).

Cependant cette méthode, comme les précédentes ne fournit qu'une seule valeur propre, la plus proche de x_0 , il faut utiliser une méthode de déflation pour obtenir les suivantes.

2.3.4 Impacts de perturbations sur la propagation acoustique

Guides d'ondes et effet tunnel

Les modes propres (k_j, Φ_j) , obtenus grâce aux méthodes de la partie précédente, sont associés à une vitesse de phase $c_j = \omega/k_j$. A une altitude z fixée, si cette vitesse de phase est plus petite (respectivement plus grande) que la célérité effective $c(z)$, la fonction propre a un comportement évanescent (resp. oscillant). La structure verticale d'un tel mode est représentée sur la figure 2.2. Lorsque le profil $c(z)$ présente plusieurs extréma, les fonctions propres peuvent alors alterner ces deux types de comportement. Cette alternance est alors caractérisée par une succession de points tournants, dont la distance entre chaque paire détermine la quantité d'énergie transmise aux guides supérieurs. Pour exemple, si la distance entre deux points tournants z_1^j et z_2^j associée à une zone évanescente est trop grande alors la fonction propre se trouvera très amortie et aucune énergie ne sera transmise aux guides d'ondes d'altitudes supérieures à z_2^j . En revanche, si cette distance est d'ordre comparable à une longueur d'onde acoustique, de l'énergie pourra tout de même traverser cette zone d'amortissement et se propager dans les guides supérieurs. Nous appellerons cet effet "effet tunnel", par analogie avec la mécanique quantique [Bender and Orszag, 2013].

Ce mécanisme peut se présenter au cours de la propagation dans un champs 2D, lorsque de nouveaux guides d'ondes se créent. Considérons comme référence le profil $c_0(z) = 330 + U_0 \tanh(z/d)$, avec $d = 500\text{m}$ et $U_0 = 10\text{m.s}^{-1}$, et déformons le de telle manière qu'un nouveau guide d'onde de plus haute altitude se crée. Pour ce faire on définit le profil

$$c_t(z) = c_0(z) - \exp\left(-\left(\frac{z-2000}{1000}\right)^2\right). \quad (2.105)$$

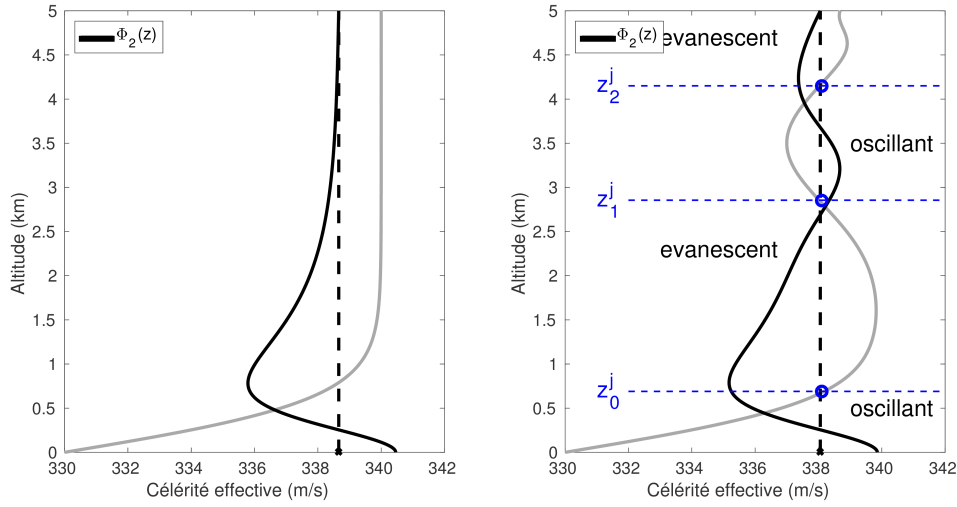


FIGURE 2.2 – Mode propre d'indice $j = 2$ pour le profil initial (gauche) et le profil avec un guide d'onde de haute altitude (droite).

Les deux profils sont représentés en figure (2.2). Fixons la fréquence à $f = 1.5\text{Hz}$, la structure verticale du mode d'indice $j = 2$ est superposée à chacun des profils pour cette fréquence. Alors que ce mode est piégé entre 0 et 2.5 km pour le profil initial, on constate qu'il a un comportement bien différent pour le profil $c_t(z)$. Comme décrit, la fonction propre alterne les comportements oscillants et évanescents mais, comme la zone $[z_0^j, z_1^j]$ n'est pas assez étendue, de l'énergie tend à passer au travers de ce puits de potentiel via un effet tunnel. Ainsi l'énergie qui était initialement piégée dans $[0, z_0]$ se retrouve maintenant piégée entre $[0, z_0]$ et $[z_1, z_2]$. Ainsi, à cause de la condition de normalisation (2.84), la contribution de ce mode au sol se retrouve alors diminuée.

Dispersion acoustique

Intéressons nous, maintenant, au comportement des modes (k_j, Φ_j) lorsque la vitesse du son augmente. Considérons un profil accéléré $c_a(z) = c_0(z) + \alpha(z)$. Nous montrerons à l'aide de l'approximation WKB que lorsque la vitesse de l'écoulement augmente, la vitesse de phase des modes augmente aussi. Cependant cette accélération n'est pas la même pour chaque mode, quelque soit le profil accéléré. En effet dans le cas simple où $c_a(z)$ est monotone, la vitesse à laquelle le mode se propage peut être approximée par $(z_0^j)^{-1} \int_0^{z_0^j} c_a(z) dz$. Comme $c_a(z)$ est croissante et $z_0^1 < z_0^2 < z_0^3$ alors la réponse du mode d'indice le plus élevé, à un accroissement de la célérité, est plus importante. Pour mettre en avant ce résultat, fixons la fréquence à $f = 3\text{Hz}$. Pour ce profil et à cette fréquence, il n'y a que 3 modes propres propagatifs. Ils sont représentés sur la même figure à l'aide de croix rouge, bleue et verte en fonction de leurs vitesses de phase. Supposons que l'écoulement accélère de 10m/s jusqu'à obtenir le profil accéléré c_a . Les nouvelles vitesses de phase sont représentées, toujours pour $f = 3\text{Hz}$, à l'aide de cercles.

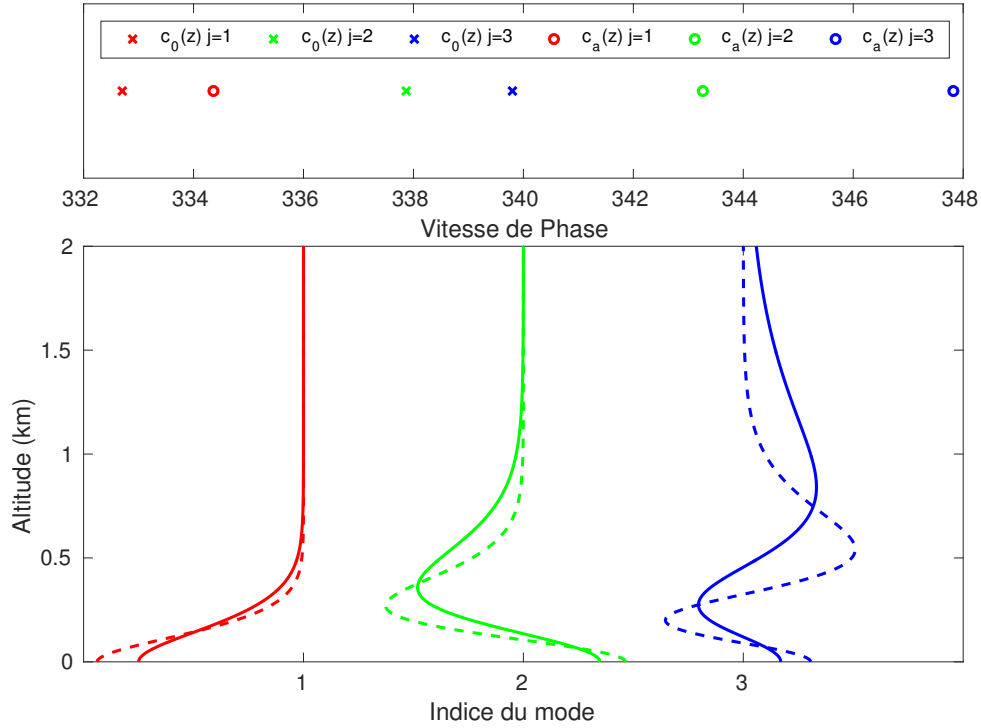


FIGURE 2.3 – Profil de célérité initial c_0 (trait plein) et profil accéléré c_a (pointillés). Les modes propres à $f = 3\text{Hz}$ sont représentés dans les deux cas par des croix et des cercles, respectivement.

Prenons comme source acoustique $t \mapsto s(t)$ définie par $s(t) = K e^{-\frac{t-T_0}{\sigma^2}} \cos(2\pi f_c t)$, avec $T_0 = 2$ s, $f_c = 3\text{Hz}$, $\sigma = 1/5$ et K une constante de normalisation. Les paquets d'ondes associés à chacun des modes pour les deux profils c_0 et c_a ont été calculés et le signal total est donc obtenu comme leur somme. Ces paquets d'ondes sont représentés en figure (2.4) pour le profil $c_0(z)$ à gauche et le profil $c_a(z)$ à droite. Les signaux acoustiques sont eux représentés en noir.

On constate que la contribution des modes a été impactée. Cette contribution est quantifiée dans (2.98) par la valeur de la fonction propre au sol, qui décroît lorsque le profil accélère. Cela sera prouvé rigoureusement à l'aide de l'approximation WKB dans un prochain chapitre. La perturbation de la célérité effective a aussi entraîné une dispersion des paquets d'ondes plus importante et donc un étalement plus important du signal avec trois arrivées distinctes au lieu d'un seul paquet d'onde. Cet exemple montre dans le cas d'une propagation avec un profil ne variant pas dans la direction de propagation, l'impact d'une accélération. Nous serons confronté par la suite à ce genre de phénomène lors du passage du front d'onde acoustique en aval de la montagne, où l'effet de Foehn entrainera une forte accélération de l'écoulement.

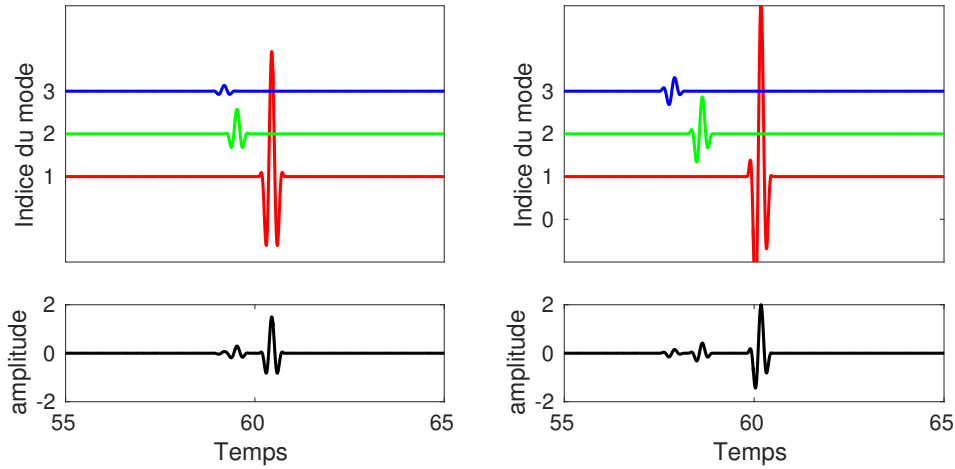


FIGURE 2.4 – Paquet d’ondes associées à chaque mode et signal acoustique résultant de la somme de ce paquets d’ondes (en noir) pour le profil initial c_0 (gauche) et le profil accéléré c_a (droite).

Conclusion

Dans ce chapitre, il a été montré à partir de la théorie linéaire qu’il est possible d’obtenir les équations régissant les ondes acoustiques et les ondes de gravité à partir d’un même jeu d’équations. Les ondes de gravité sont associées à des mécanismes atmosphériques connus, tels que la convection, des effets de cisaillement ou à la suite d’un ajustement géostrophique [Marty et al., 2010]. L’interaction d’un écoulement avec une orographie, dont le profil est utilisé comme condition limite inférieure de l’équation de Taylor Goldstein, peut aussi créer des ondes de gravité sur lesquelles nous allons focaliser notre étude. Les caractéristiques de l’écoulement incident sur la montagne peuvent engendrer différentes singularités ou dégénérescences qui peuvent mener à de très fortes perturbations d’ondes de gravité ou acoustiques. L’étude de ces perturbations atmosphériques, tel que l’effet de Foehn, sera le sujet du prochain chapitre. Les solutions de l’équation linéaire d’onde acoustique ont été décomposées sur une base de modes propres qui correspondent, en fait, aux fonctions propres du spectre discret de l’opérateur associé. Le spectre continu est négligé au regard de sa faible contribution lorsque l’on se place suffisamment loin de la source. Les coefficients de la décomposition modale, ont été obtenus en supposant une lente variabilité de l’atmosphère permettant une approximation de type WKB de la solution horizontale. Cette lente variabilité est justifiée par les échelles horizontales des perturbations d’ondes de gravité qui sont bien supérieures à une longueur d’onde acoustique. En revanche cette hypothèse exclut la prise en compte de turbulences. Les fonctions propres, correspondant à la structure verticale de l’onde acoustique, ont été obtenues en discrétisant l’opérateur et donc en résolvant un problème matriciel aux valeurs propres. Différentes méthodes d’algèbre linéaire peuvent alors être utilisées. La prise en compte des perturbations atmosphériques, par exemple générées par les ondes de gravité, lors de la propagation acoustique se fait grâce au profil de célérité effective. Lorsque ce profil présente de nouveaux guides d’ondes, certains modes se retrouvent alors impactés par un effet tunnel qui transmet une partie

de l'énergie à des guides d'ondes d'altitudes supérieures. De plus lorsque la vitesse de l'écoulement augmente et donc que la célérité effective augmente, le signal acoustique se retrouve doublement impacté, par la dispersion mais aussi en amplitude. Ces effets de vitesse ou de guides d'ondes peuvent se coupler et mener à une forte déformation du front d'onde lorsque la propagation se fait dans un champ d'ondes de gravité. Ce sera l'objet de l'étude du chapitre 4.

Chapitre 3

Ondes de montagne et effet de Foehn

*« Tous les modèles sont faux, mais
certains sont utiles »*

George Box

Sommaire

3.1	Théorie linéaire	48
3.1.1	Le cas d'un vent incident constant	48
3.1.2	L'équation de Long	50
3.1.3	Simulations avec le modèle WRF	52
3.2	An adiabatic Foehn effect	53
3.2.1	Introduction	54
3.2.2	Theoretical model	56
3.2.3	A dry foehn mechanism	59
3.2.4	Verification with fully nonlinear model	62
3.2.5	More systematic comparisons and alternative configurations	67
3.2.6	Discussion	69

Introduction

Ce chapitre vise à fournir un modèle d’ondes de montagne pouvant être utilisé lors de simulations de propagations infrasonores. La nécessité d’un tel modèle provient des lacunes des données climatiques, utilisées lors des simulations de propagation acoustique, qui ne prennent pas en compte les perturbations aux petites échelles de l’atmosphère. Pour simuler un champ d’ondes de montagne, un code “lourd” résolvant les équations non linéaires de la mécanique des fluides peut être utilisé, mais la complexité des mécanismes mis en jeu et le grand nombre de paramètres peut en rendre difficile l’interprétation et la compréhension physique. De ce fait nous proposons dans ce chapitre une extension du modèle linéaire [Lott, 2016]. Ce modèle théorique combine la dynamique linéaire des ondes de gravité avec une condition non linéaire au sol. Par construction de ce modèle, les déferlements d’ondes de gravité n’impactent pas l’écoulement. De plus les réflexions partielles d’ondes sont minimisés en utilisant un profil de vent incident assez lisse et une stratification uniforme. L’intérêt de ce modèle réside dans le faible nombre de paramètres mis en jeu et donc dans son interprétation. Nous montrerons au cours de ce chapitre que, malgré le fait que la théorie linéaire classique soit restreinte aux petites montagnes et aux écoulements de faibles amplitudes, ce modèle peut outrepasser ces limites et même reproduire avec une grande fiabilité les simulations non-linéaires. De ce modèle linéaire, nous proposons une nouvelle interprétation de l’effet de Foehn, complètement lié à la dynamique de l’écoulement : un effet de Foehn adiabatique. Ces résultats sont présentés dans la partie 3.2 qui a été publiée dans *The Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*.

DOI : [10.1002/qj.3272](https://doi.org/10.1002/qj.3272)

3.1 Théorie linéaire

3.1.1 Le cas d’un vent incident constant

Dans cette partie nous résolvons l’équation de Taylor Goldstein dans le cas d’un vent incident constant $U(z) = U_0$ et d’une atmosphère isotherme $T(z) = T_0$. La procédure exposée dans la suite de cette partie est documentée dans de nombreux ouvrages de référence (voir par exemple [Baines, 1998a]).

Considérons la forme 2D de l’équation de Taylor Goldstein

$$\hat{w}''(z) + (S(z)^2 - k^2) \hat{w}(z) = 0 \quad (3.1)$$

où la fonction $S(z)$ correspond au paramètre de Scorer [Scorer, 1949a]

$$S(z) = \sqrt{\frac{N^2}{U(z)^2} - \frac{U''(z)}{U(z)}} \quad (3.2)$$

Comme l’atmosphère est considérée comme isotherme, la fréquence de Brunt-Vaisala est constante égale à

$$N = \sqrt{\frac{\kappa g^2}{RT_0}}. \quad (3.3)$$

Nous utiliserons comme condition au sol après linéarisation

$$w'(x, h(x)) = U(h(x))\partial_x h(x),$$

où $h(x)$ désignera ici le profil d'Agnesi

$$h(x) = \frac{H}{1 + \frac{x^2}{2L^2}}.$$

Comme les solutions sont linéaires, nous pouvons les exprimer en terme de transformée de Fourier, la condition au sol devient alors

$$\hat{w}(k, h(x)) = iU(h(x))k\hat{h}(k). \quad (3.4)$$

Dans le cas considéré ici, le paramètre de Scorer S est constant selon z et de ce fait l'équation (3.1) devient la traditionnelle équation d'Helmoltz qui met en relief le comportement ondulatoire des solutions. L'équation (3.1) a donc pour solution

$$\hat{w}(z) = \hat{w}(k, h(x))e^{i\sqrt{S^2 - k^2}z} \text{ si } S^2 > k^2, \quad (3.5)$$

$$\hat{w}(z) = \hat{w}(k, h(x))e^{-\sqrt{k^2 - S^2}z} \text{ si } S^2 < k^2, \quad (3.6)$$

Ces deux solutions mettent en avant deux comportements différents suivant la valeur du nombre d'onde k . si $S^2 > k^2$ les ondes ont un caractère oscillant tandis que dans le cas $S^2 < k^2$ elles présentent un caractère d'ondes évanescentes, i.e l'amplitude de ces ondes décroît exponentiellement. Supposons que k soit fixé et négligeons pour le moment le second terme du paramètre de Scorer dans (3.2). Ainsi S^2/k^2 peut être écrit sous la forme $\frac{N^2}{U^2 k^2} = \frac{N^2}{1/t_{adv}^2}$, où t_{adv} correspond au temps nécessaire à l'écoulement pour effectuer une oscillation complète. Ainsi le critère d'existence d'ondes oscillantes $S^2 > k^2$ implique que le temps d'advection doit être plus grand que la période d'oscillation à la fréquence naturelle d'oscillation N . En quelque sorte nous devons laisser suffisamment de temps à la parcelle d'air pour osciller sous l'effet de la flottabilité. Si ce critère n'est pas respecté, les oscillations ne peuvent pas être réalisées et l'amplitude décroît alors progressivement et cela conduit à l'apparition d'ondes évanescents.

Une montagne isolée telle que la courbe d'Agnesi est dotée d'un spectre continu, et ainsi il faut considérer tous les nombres d'ondes afin de trouver $w'(x, z)$. En utilisant les deux solutions analytiques (3.5), et en prenant la transformée de Fourier inverse pour retourner dans l'espace physique (x, z) on obtient

$$w'(x, z) = 2\Re \left(\int_0^S iU(h(x))k\hat{h}(k)e^{i\sqrt{S^2 - k^2}z}e^{ikx}dk + \int_S^\infty iU(h(x))k\hat{h}(k)e^{-\sqrt{k^2 - S^2}z}e^{ikx}dk \right) \quad (3.7)$$

De cette solution sous forme de deux intégrales, nous pouvons distinguer différents régimes pour les solutions $w'(z)$. Fixant k dans (3.7), la contribution de l'onde correspondante e^{ikx} est pondérée par le facteur $k\hat{h}(k)$. Cela implique que la contribution totale d'un nombre d'onde k est gouvernée par la transformée de Fourier du profil orographique. Ainsi, si la plupart des k dont la pondération $\hat{h}(k)$ est importante sont supérieurs à S , alors la seconde intégrale de (3.7)

domine. Inversement si la première intégrale domine, on se retrouve dans le cas d'un écoulement dit hydrostatique. La fonction $k \mapsto k\hat{h}(k)$ a un maximum en $k = \frac{1}{\sqrt{2}L}$ valant $\frac{H}{2e}$ puis décroît de manière exponentielle après ce point. Ainsi la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}L}$ définit l'échelle des nombres d'onde horizontaux. Ainsi une condition pour que l'écoulement soit hydrostatique peut se réécrire

$$\frac{1}{L} \ll S \sim \frac{N}{|U|} \text{ ou de manière équivalente } \frac{NL\sqrt{2}}{|U|} \gg 1. \quad (3.8)$$

Sous l'approximation d'un écoulement hydrostatique, on peut supposer que la seconde intégrale de l'équation (3.7) peut être négligée ce qui donne alors

$$w'(x, z) = 2\Re \left(U(h(x)) \int_0^\infty i k \frac{HL}{\sqrt{2}} e^{-k\sqrt{2}L} e^{iSz} e^{ikx} dk \right) \quad (3.9)$$

De la même manière si l'écoulement n'est pas hydrostatique, on peut supposer que la première intégrale de l'équation (3.7) peut être négligée.

Cette solution linéaire fournit une description qualitative satisfaisante du champs de perturbation, mais ces résultats sont limités à l'étude de petites montagnes et pour un profil de vent particulier. Cela implique que l'on doit considérer d'autres modèles théoriques ou d'autres processus pour quantifier et étudier les écoulements au dessus de massifs montagneux, plus réalistes.

3.1.2 L'équation de Long

Notre compréhension des écoulements stables et stratifiés au dessus d'une topographie 2D est très largement due aux travaux de R. Long. En effet Long ([Long, 1955]) a montré que la fonction de courant non-linéaire peut être, dans certains cas, solution de l'équation rencontrée dans le problème linéaire, sous réserve d'utiliser une condition exacte au sol. La théorie de Long représente une étape importante dans l'étude des écoulements non linéaires au dessus d'une topographie.

Le modèle linéaire de la sous section précédente peut être étendu pour donner une solution exacte dans le cas où H_N n'est pas petit. Pour ce faire, nous devons supposer que la condition limite au sol est une ligne de courant, que l'écoulement est à l'équilibre et que cet écoulement en amont est bien connu. Nous partons des équations d'Euler stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et supposons que les profils amonts sont donnés par $u_0(z)$ et $\rho_0(z)$ avec $u_0(z) > 0$ et $\rho'_0(z) \leq 0$ partout. De plus nous supposons aussi que les lignes de courant s'étendent loin en amont, de telle manière qu'à chaque ligne de courant correspond une altitude z_0 . On introduit la variable $\delta(x, z)$ définie par $\delta(x, z) = z - z_0$ qui correspond au déplacement vertical d'une ligne de courant au point (x, z) par rapport à sa position amont. On définit la fonction de courant totale $\Psi(z_0)$ par

$$\Psi(z_0) = - \int_z^{z_0} u_0(z') dz',$$

de telle manière que le champ de vitesse est donné par

$$(u, w) = \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = u_0(z_0) \left(1 - \frac{\partial \delta}{\partial z}, \frac{\partial \delta}{\partial x} \right).$$

Les équations d'Euler combinées donnent alors l'équation suivante [Long, 1953] :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left(p + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho g z \right) = 0, \quad (3.10)$$

et

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left[\nabla^2 \Psi + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\Psi} \left(\frac{1}{2} (\nabla \Psi)^2 + g z \right) \right] = 0, \quad (3.11)$$

qui peut se réexprimer en fonction de δ

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\nabla^2 \delta + \frac{1}{q} \frac{dq}{dz} \left(\frac{\partial \delta}{\partial z} - \frac{1}{2} (\nabla \delta)^2 \right) + \frac{N^2(z_0)}{u_0^2(z_0)} \delta \right) = 0, \quad (3.12)$$

avec $q = \rho_0(z_0) u_0^2(z_0)/2$ et s est l'abscisse curviligne. Comme $\delta \rightarrow 0$ en amont, on peut intégrer cette équation, ce qui donne

$$\nabla^2 \delta + \frac{1}{q} \frac{dq}{dz} \left(\frac{\partial \delta}{\partial z} - \frac{1}{2} (\nabla \delta)^2 \right) + \frac{N^2(z_0)}{u_0^2(z_0)} \delta = 0. \quad (3.13)$$

Cette équation décrit un champ de perturbation pour un écoulement incident donné, et il peut être résolu pour toute forme de montagne en imposant la condition au sol

$$\delta = h(x), \text{ lorsque } z = h(x).$$

L'équation (3.13) est non linéaire mais lorsque $dq/dz = 0$, l'équation devient une simple équation de Helmholtz linéaire qui peut être résolue par les modes de Fourier [Muraki, 2011].

Une des caractéristiques de la solution de Long est la tendance qu'ont les lignes de courant à se retourner lorsque la hauteur maximale de l'obstacle augmente [Smith,]. La figure 3.1 montre un cas classique dans un écoulement hydrostatique au dessus d'une montagne d'Agnesi. Le vent total horizontal minimal est exactement zéro et ce minimum se trouve là où l'isentrope est verticale.

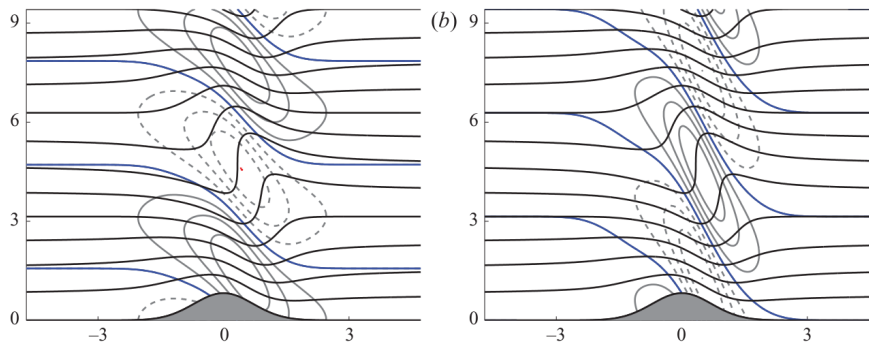


FIGURE 3.1 – Contour à la limite du déferlement. Gauche : perturbations de la composante horizontale du vent ; Droite : perturbations de la composante verticale du vent. Figure extraite de [Muraki, 2011].

Il est difficile d'utiliser la solution de Long pour étudier et interpréter les ondes de montagnes de grandes amplitudes car la simulation est alors immédiatement polluée par un déferlement de notre perturbation. Cependant on va voir par la suite qu'un cisaillement de basse altitude peut tempérer cet effet et rendre la solution stable. En revanche l'ajout d'un vent nul au sol va entraîner l'apparition d'un niveau critique.

3.1.3 Simulations avec le modèle WRF

Afin d'étendre les résultats obtenus avec les différentes théories linéaires, nous utilisons par la suite une version 2D du modèle "Weather Research and Forecasting" (WRF) [Michalakes et al., 2005, Skamarock et al., 2008] dans la configuration idéalisée pour les montagnes 2D disponible en ligne¹.

Le modèle WRF est un modèle complètement compressible, non-hydrostatique utilisé pour simuler des processus atmosphériques aux grandes échelles mais aussi aux petites échelles.

Les équations sont formulées en utilisant des coordonnées verticales basées sur la pression hydrostatique qui suit l'orographie, plus précisément

$$\eta = (p_h - p_1)/\Delta_p \text{ où } \Delta_p = p_0 - p_1. \quad (3.14)$$

p_h est la composante hydrostatique de la pression, et p_0 et p_1 sont les valeurs de la pression au sol et à la limite haute du domaine de résolution. Cette définition de coordonnées (3.14), proposée par [Laprise, 1992] est la traditionnelle coordonnée σ utilisée dans de nombreux modèles d'atmosphère hydrostatique. η varie d'une valeur valant 1 à la surface à 0 à la limite haute du domaine vertical (Figure 3.2). Ces coordonnées sont aussi parfois appelées coordonnées de masse verticale.

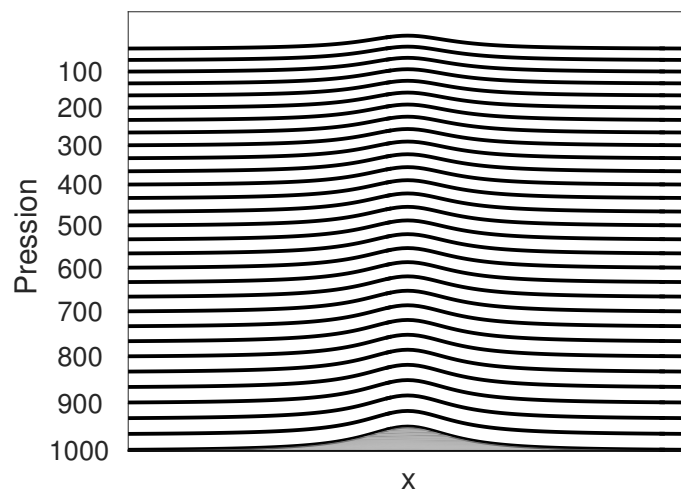


FIGURE 3.2 – Coordonnées sigma en présence d'une orographie

1. <http://www.wrf-model.org>

Les équations régissant la dynamique dans le modèle sont l'équation des gaz parfaits, les équations de Navier Stokes, les équations de conservation de scalaire tels que l'énergie cinétique, la chaleur, l'eau et les aérosols [Pielke Sr, 2013]. Les variables en jeux dans ce modèle sont la pression, les trois composantes du vent, la radiation, la température et celles en lien avec le transport d'humidité.

Les équations sont résolues à l'aide de méthodes de volumes finis en espace. Les variables sont discrétisées sur un nombre fini de points de grille et en chaque point de grille, les processus atmosphériques sont calculés séparément durant un pas de temps. En effet le modèle utilise un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 en temps. Le problème inhérent à ce genre de résolution vient du fait que le temps de simulation total est directement lié à la taille de la grille choisie. Il est à noter que des simulations dans le cas hydrostatique peuvent être réalisées avec WRF.

Afin d'éviter que les ondes de gravités calculées ne se réfléchissent sur la paroi supérieure de notre domaine et ne contaminent toute la simulation, nous imposons une dissipation dans la moitié haute de notre domaine. Pour ce faire nous utilisons une couche de dissipation de Rayleigh traditionnelle. Cette méthode applique à u , v , w , et θ une force de rappel afin de revenir vers une valeur de référence, plus précisément, on construit cette couche via les équations

$$\partial_t u = -\tau(z)(u - u_r) \quad (3.15)$$

$$\partial_t v = -\tau(z)(v - v_r) \quad (3.16)$$

$$\partial_t w = -\tau(z)w \quad (3.17)$$

$$\partial_t \theta = -\tau(z)(\theta - \theta_r). \quad (3.18)$$

où l'indice r réfère à la valeur de référence, qui est dépendante uniquement de z et est dans notre cas la valeur avec laquelle nous initialisons notre atmosphère. Les effets d'un tel filtre sur nos ondes de gravités sont discutés dans [Klemp and Lilly, 1978].

Les simulations sont initialisées via un sondage vertical de l'atmosphère, ces sondages sont fournis en fonction de l'altitude z géométrique via un fichier texte qui peut être directement édité par l'utilisateur. Il est nécessaire de fournir la température potentielle à la surface, le ratio de mélange et le vent horizontal sur toute une colonne verticale. Cependant ces données doivent respecter une unique condition : il faut qu'elles représentent un état d'équilibre hydrostatique.

3.2 An adiabatic Foehn effect

Atmospheric mountain flows produced when the incoming wind is small near the surface and continuously increases with altitude are evaluated with models of increasing complexity. All models confirm that foehn can be produced by a mountain gravity wave critical level mechanism, where the critical level is located below the surface. This mechanism does not involve humidity, upper level wave breaking, upstream blocking, downward wave reflections or hydraulic control as often suggested by popular theories. The first model used is a theoretical model which combines linear gravity wave dynamics with a nonlinear boundary condition : in this model the wave breaking does not feedback onto the dynamics by construction. Partial linear waves reflection are also minimized by using smooth profiles of the incident wind and a uniform stratification $N^2 = \text{cte}$, and can even be suppressed when the incident wind shear is also

constant, $U_z = \text{cst}$. The second model is a numerical mesoscale model (Weather Research and Forecat), and we show that it predicts mountain wave fields that can be reproduced by the theoretical model, provided that we specify an adequate boundary layer depth in the theoretical model.

3.2.1 Introduction

Foehn flows are characterized by downslope winds that are warm, dry and strong and that generally occur on the lee side of mountains [Richner and Hachler, 2013]. For more than a century they have been studied worldwide (see for three different mountain ranges [Brinkmann, 1974, McGowan et al., 2002, Drobinski et al., 2007]), because they have strong economical impacts, for instance through increase in fire danger [Takane and Kusaka, 2011, Sharples et al., 2010] [Cannon et al., 2017]), pollution [Seibert et al., 2000] or weather hazards. They can also actively contribute to the climate change through their local impacts on sea ice melting as shown by [Elvidge et al., 2015].

One long-standing question about foehn concerns the origin of the warming of the air masses, and it is generally admitted that there are two dominant mechanisms that can explain it [Richner and Hachler, 2013]. The first mechanism is along the line of meteorological textbooks [Seibert, 2005] when the example of the foehn is used to illustrate the significance of moist processes by using thermodynamical diagrams. In this "diabatic" theory, the warming of the air masses results from the forced condensation that occurs upstream of the ridge, the large temperature and dry air result from the flow descent on the lee side. As observational evidence suggests that warming has a more adiabatic cause [Seibert, 1990], a second mechanism, named "isentropic drawdown" is often proposed. In this mechanism, the foehn air comes from warmer and dryer altitudes upwind of the mountain because there is low level flow blocking. These two types of foehn, one diabatic with strong upstream ascent and one adiabatic with upstream flow blocking are sometimes referred to as Swiss and Austrian foehn respectively [Wursch and Sprenger, 2015]. With the progress of Lagrangian analysis, the relative amplitude of these two mechanisms is now better established [Miltenberger et al., 2016] and it seems that the adiabatic mechanism is often more efficient than the diabatic one. The Lagrangian analyses also reveal that other irreversible processes can play a role, like the vertical mixing occurring when the air passes the mountain summit, and the radiative impact of the upstream clouds [Elvidge and Renfrew, 2016].

The fact that dynamics play such a central role in the foehn motivates the present paper. Actually, behind the apparently simple idea that upstream blocking elevates the air parcels before they abruptly descent on the lee side are hidden quite subtle nonlinear processes. These processes are controlled by the non dimensional mountain height, $H_N = \frac{HN}{U_\infty}$, where H is the maximum mountain height, N the buoyancy frequency and U_∞ a scale for the incident wind. When H_N is large, the vertical wavelength of the mountain waves U_∞/N is small compared to the mountain height H , the mountain waves break near above the mountain top, and the resulting nonlinear dynamics produce strong downslope winds and foehn (see the review by [Durran, 1990b] and recent simulations in [Smith and Skillingstad, 2011]). The mixing produced by the breaking waves can induce a well mixed stagnant layer, which allows to establish a correspondence with the fully nonlinear hydraulic jump theory ([Baines, 1998b, Smith, 1985]).

The presence of the stagnant layer also permits to argue that nonlinear reflections at the self-induced critical level present in the mixed layer can reflect downward the waves and amplify the response [Laprise and Peltier, 1989, Smith and Skillingstad, 2011]. Also, for large H_N , part of the low level flow is blocked upstream making upstream blocking concomitant to the onset of foehn. All these efforts to interpret dynamically the onset of foehn in terms of breaking waves or blocking, hide the simple fact that some foehn can be produced by [Long, 1953]’s model for hydrostatic linear waves forced by a nonlinear boundary condition [Lilly and Klemp, 1979, Muraki, 2011]. Interestingly, using such a model, [Lilly and Klemp, 1979] predict that the wave response is enhanced for mountains with a small windward and large leeward slopes, which is a form of "isentropic drawdown" mechanism produced by blocking, if we assume that the blocked air can be represented dynamically by a gentle windward slope. Nevertheless, the results using [Long, 1953]’s type models are not much used to interpret foehn, essentially because when they produce foehn, they also predict intense wave breaking aloft which undermines all the linear interpretations of what occur downstream of the breaking zone (e.g which includes the foehn zone). As we shall see, low level wind shears can mitigate this upper level wave breaking because the mountain waves become less and less unstable with altitude when the wind increases.

Concerned with the recurrent problem in mountain meteorology theory that the near surface winds are ill defined ([Vergeiner, 1971, Lott, 2007]) and can become very small, [Lott, 2016] (hereinafter L16) adapts the model of [Long, 1953] to incident shear flow that are null in $z = 0$. L16 shows that this induces a critical level dynamics near below the surface that produces downslope windstorm and foehn without upper level wave breaking. L16 also shows that downslope winds and foehn are favored when the surface flow is stable, i.e. when the surface Richardson number $J = N^2/U_z^2$ is large compared to its critical value, $J = 0.25$. As the model is linear, it also suggests that there is no need to interpret the onset of foehn in terms of upstream blocking, nonlinear internal wave reflections, or using hydraulic theory, which are all the ingredients that are often mentioned to explain adiabatic foehn.

The results in L16 have several limitations. The first is that the model in L16 is only adapted to situations when the shear layer depth, d , is much larger than the maximum mountain height, H , i.e. as long as the near critical level solutions in [Booker and Bretherton, 1967b] can be used to treat the critical level. The second is that L16 does not explain why the results found are so sensitive to J . The third is that it does not exclude the possibility that reflections can play a role on foehn, because linear reflections can be present. The fourth is that the inflow equations used in [Long, 1953] is only rigorously valid when the incident flow is uniform. The last is the representation of boundary layer absorptive effects : L16 uses Raighleigh drag and Newtownian cooling with a free slip boundary condition. Some earlier studies have explored more realistic boundary conditions, e.g. for turbulent flow over hills, or with viscous solutions [Lott, 2007]. In L16, these simplifications are made to ease the numerical treatment of the problem. They are in part justified by the fact that in the atmosphere the low level wind shears are often due to horizontal gradients in temperature, they do not solely result from boundary layer dynamics : they can extend well above it, and there the inviscid dynamics can be applied.

The purpose of the present paper is to fill these gaps by extending the L16’s theory to taller mountains, and by validating it against fully nonlinear simulations. For this purpose, section 2 reformulates the results in L16 for a mountain of arbitrary height (not only for $H \ll d$) but still

for small dissipation (when the linear drags correspond to a boundary layer depth $z_b \ll d$). Section 3 exposes the dry foehn mechanism proposed and shows that it is entirely related to the near-surface critical level dynamics. Section 4 presents fully nonlinear simulations done with WRF and explains how the value of z_b is chosen to enable a comparison of the theory with the numerical simulations. Section 5 characterizes systematically the results in terms of foehn intensity, downslope winds amplitude, and gravity wave stress. To check if the results remain robust beyond our simplified treatment of the boundary layer, it also presents tests where (i) the incident wind is not null at the surface and (ii) where a conventional atmospheric boundary layer scheme is used. Section 6 concludes and discusses further the relations with observations.

3.2.2 Theoretical model

To analyze the mountain waves produced by a stably stratified shear flow when the incident wind is null at $z = 0$, L16 consider the background flow profiles

$$U(z) = U_\infty \tanh(z/d), N^2(z) = \text{const}, \quad (3.19)$$

incident on a 2-dimensional mountain, the height of which follows the Witch of Agnesi profile

$$h(x) = \frac{H}{1 + \frac{x^2}{2L^2}}. \quad (3.20)$$

In (3.19), $U(z)$ is the background horizontal wind, $N(z)$ the Brunt Vaisala frequency, z the altitude, d is the vertical scale of the shear and U_∞ the incident wind maximum amplitude. In (3.20) H is the maximum mountain height, L its characteristic horizontal length, and x the horizontal coordinate. When scaling time by N^{-1} and distances by U_∞/N the 2-dimensional non-rotating linear dynamics can be expressed in term of a non dimensional vertical velocity, $\bar{w}(\bar{x}, \bar{z})$ of the form,

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{k}) \hat{w}_c(\bar{k}, \bar{z}) e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k}, \quad (3.21)$$

where overbars denote dimensionless variables, and $\hat{w}_c(k, z)$ is a canonical monochromatic solution of "unit" amplitude in the far field which satisfies the dissipative Taylor Goldstein equation,

$$\frac{d^2 \hat{w}_c}{d\bar{z}^2} + \left[\frac{1}{(\bar{U} - i \frac{\bar{z}_k}{\sqrt{J}})^2} - \frac{\bar{U}_{\bar{z}\bar{z}}}{\bar{U} - i \frac{\bar{z}_k}{\sqrt{J}}} - \bar{k}^2 \right] \hat{w}_c = 0. \quad (3.22)$$

In (3.21) the amplitude term $f(\bar{k})$ is obtained by numerical inversion of the non-linear free-slip boundary condition :

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{h}(\bar{x})) = \left(\bar{U}(\bar{h}) + \bar{u}(\bar{x}, \bar{h}(\bar{x})) \right) \partial_{\bar{x}} \bar{h}(\bar{x}), \quad (3.23)$$

where $\bar{u}(\bar{x}, \bar{z})$ is the horizontal wind disturbance. In (3.22)-(3.23)

$$\bar{U}(\bar{z}) = \tanh\left(\frac{\bar{z}}{\sqrt{J}}\right), \text{ and } \bar{h}(\bar{x}) = \frac{H_N}{1 + \bar{x}^2/2F_r^2} \quad (3.24)$$

where

$$J = \frac{N^2 d^2}{U_\infty^2}, \quad H_N = \frac{HN}{U_\infty}, \quad \text{and} \quad Fr = \frac{LN}{U_\infty} \quad (3.25)$$

are the surface and minimum Richardson number, a non-dimensional mountain height, and a Froude number respectively. Still in (3.22) the dissipative vertical scale for each harmonics,

$$\bar{z}_k = \frac{\bar{z}_b}{2} \left(\frac{1}{Fr \bar{k}} + Fr \bar{k} \right). \quad (3.26)$$

has been expressed in terms of a global scale $\bar{z}_b$, with the first term in parenthesis resulting from Rayleigh drag and Newtonian cooling of coefficient $\bar{z}_b/Fr * \sqrt{J}/2$ and the second term from a viscous dissipation which acts in the x -direction only of coefficient $\bar{z}_b Fr/\sqrt{J}/2$ (see also the right hand sides of Eqs.4 in L16). They are introduced to regularize the critical level dynamics for all the harmonics, i.e. the longer and the shorter ones respectively. Note that $\bar{z}_k$ is written differently than in L16 to make clear that when the formula is applied to the dominant wavenumber Fr^{-1} , $\bar{z}_k$ in (3.26) compares to the dissipative scale $\bar{z}_b$ ².

To construct $\hat{w}_c$, L16 uses for each k an exact solution of the inviscid version of (3.22), $\hat{w}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z})$, which is based on hypergeometric functions (see [Lott et al., 1992] and (34) in L16), and which asymptotic behaviors are

$$\hat{w}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z} \gg 1) \approx e^{-\bar{m}\bar{z}/\sqrt{J}}, \quad (3.27)$$

$$\hat{w}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z} \ll 1) \approx a_1(\bar{k})\bar{z}^{1/2-i\mu} + a_2(\bar{k})\bar{z}^{1/2+i\mu} \quad (3.28)$$

where,

$$\bar{m} = \sqrt{J} \sqrt{|\bar{k}^2 - 1|}, \quad \mu = \sqrt{J - \frac{1}{4}}, \quad (3.29)$$

and where $a_1(\bar{k})$ and $a_2(\bar{k})$ have analytical forms once the "unit" amplitude condition (3.27) is satisfied. Also, when $\bar{k}^2 < 1$, $\bar{m}$ is changed in $-i \text{sign}(\bar{k})\bar{m}$, where the sign is to ensure upward group speed. Near the surface, L16 also uses the asymptotic solution of the damped Taylor-Goldstein Equation (3.22) valid when $\bar{z} \ll 1$:

$$\hat{w}_{\text{srf}}(\bar{k}, \bar{z}) = a_1(\bar{k})(\bar{z} - \bar{z}_k)^{1/2-i\mu} + a_2(\bar{k})(\bar{z} - \bar{z}_k)^{1/2+i\mu}, \quad (3.30)$$

where a_1 and a_2 are the same as in (3.28) to ensure matching. To establish how these approximate solutions can be combined to provide a uniformly valid approximation of $\hat{w}_c(\bar{k}, \bar{z})$, Fig. 3.3 shows $\hat{w}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z})$ (thin solid), its approximation near $z = 0$ ((3.28), thick dashed) and $\hat{w}_{\text{srf}}(\bar{k}, \bar{z})$ (thick dashed and dots). For the three values of J selected, $J = 0.5, 2, 4$, we see that below around $z \approx J/4$ the inviscid exact solution $\hat{w}_{\text{inv}}$ and its inviscid approximation on the right of (3.28) almost coincide whereas above this altitude the asymptotic damped approximation ($\hat{w}_{\text{srf}}$ in (3.30)) and the asymptotic inviscid solutions (3.28) are very close. This suggests that we can take the altitude $J/4$ to make a transition between the exact inviscid solution and the asymptotic

2. For consistency, note also that the boundary layer depth $\bar{z}_B$ used in L16 is related to the one here by $\bar{z}_B = 5\bar{z}_b$.

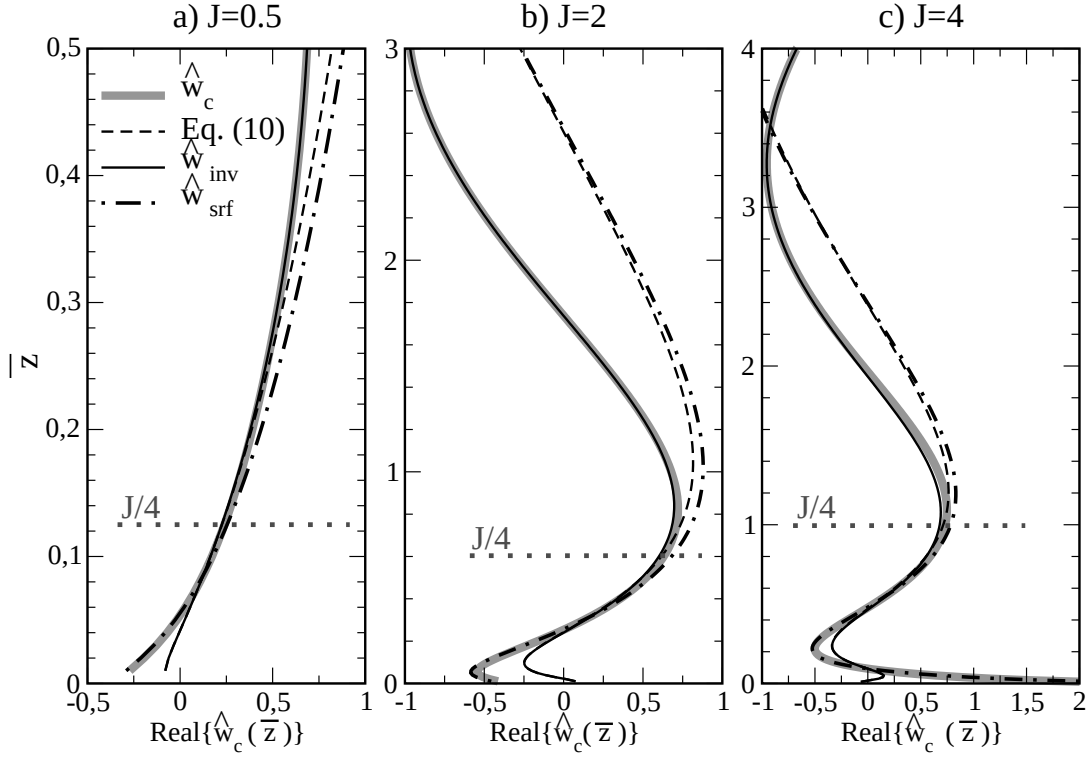


FIGURE 3.3 – Vertical profiles of the solutions used to build the canonical solution : inviscid exact solution $\hat{w}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z})$ (black solid), approximation of $\hat{w}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z})$ near $\bar{z} = 0$ (right of (3.28), black dashed), damped approximation $\hat{w}_{\text{srf}}$ (3.30, black dashed and dot), and approximation of $\hat{w}_c(\bar{k}, \bar{z})$ (thick gray). In all panels, only the real part of the complex functions are shown, $\bar{k} = 0.1$ and $\bar{z}_b = 0.05$ for $J = 0.5, 2$, and 4 in a) b) and c) respectively.

damped solution. In the following, this transition is by patching these two functions using *tanh* tapers centered at $\bar{z} = J/4$ and of depth $\Delta\bar{z} = J/5$, i.e. by writing,

$$\hat{w}_c(\bar{k}, \bar{z}) = \frac{\left(1 + \tanh\left(\frac{5\bar{z}}{J} - \frac{5}{4}\right)\right)}{2} \hat{w}_{\text{inv}}(\bar{k}, \bar{z}) + \frac{\left(1 - \tanh\left(\frac{5\bar{z}}{J} - \frac{5}{4}\right)\right)}{2} \hat{w}_{\text{srf}}(\bar{k}, \bar{z}). \quad (3.31)$$

The thick gray curves in Figs. 3.3a, b, c show these new approximations, and illustrate how well they behave for all $\bar{z}$, permitting a smooth passage from the damped solutions near the ground to the exact inviscid one in the far-field. Compared to L16, we use this approximation in the inversion of (3.23),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{k}) \left[\hat{w}_c(\bar{k}, \bar{h}) - \hat{u}_c(\bar{k}, \bar{h}) \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right] e^{i\bar{k}\bar{x}} d\bar{k} = U \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \quad (3.32)$$

rather than using (3.30) to express $\hat{w}_c$ and $\hat{u}_c$ in the terms between brackets in (3.32). This formally permits to consider more elevated ridges than in L16.

3.2.3 A dry foehn mechanism

As the numerical results obtained with this new formulation of the model are consistent with those in L16 we will only emphasize on the descents of warm air that characterize foehn. In the following we take a domain of length 800 spanned by 1024 equally spaced points, the Froude number $F_r = 5$ and the boundary layer scale $\bar{z}_b = 0.05$. The three panels in the left column of Fig. 3.4 shows that when J increases the foehn effect increases, as expected from the results in L16, where the same behavior was discussed in terms of downslope windstorms. The reader is referred to this paper for more complete sensitivity tests to H_N and $\bar{z}_b$, but it is worthwhile to note here that when J passes 1 typically, an isentropic surface initially at the altitude of the ridge is not much displaced upward when it approaches the ridge but easily reaches the surface along the downslope side of the ridge (lowest dashed line in Fig. 3.4c). This "foehn" effect becomes extremely pronounced when $J = 4$ in Fig. 3.4e : almost all the air located between $H_N < \bar{z} < 2H_N$ upstream of the ridge descent below the mountain top $\bar{z} < H_N$ in the lee-side. Near the surface downstream, the theory predicts highly distorted isentropes and potential temperatures that are below the minimum value upstream : this is not realistic so they are not shown but this indicates where the dynamics may trigger breaking.

If the foehn effect detected is purely related to the critical level dynamics, then it should be present in a theory that is even simpler than the one used to produce the panels on the left in Fig. 3.4, e.g. when the wind shear U_z and buoyancy frequency are both constant, in the hydrostatic approximation and when the boundary layer depth is identical for all harmonics $\bar{z}_k = \bar{z}_b$. As we will see in this "constant shear" case we can also formally eliminate the reflected waves, proving that they play a minor role on the dry foehn mechanism described here. To establish this, we next built a simplified version of the theory where the dynamics is only controlled by J and $\bar{z}_b$, the two parameters that control the critical level dynamics. For this purpose we introduce a new scaling of the problem suited to the constant wind shear configuration and taking for the horizontal and vertical scales those of the mountain. We also scale the horizontal velocity disturbance by the background velocity at the mountain top, simply because it is the order of magnitude the disturbance needs to reach for the total wind to satisfy the lower boundary condition,

$$x = L\tilde{x}, z = H\tilde{z}, u = U_z H \tilde{u}, w = U_z H^2 / L \tilde{w}, p = \rho_r U_z^2 H^2 \tilde{p}, \text{ and } b = U_z^2 H \tilde{b}. \quad (3.33)$$

We also make the hydrostatic approximation to guarantee that our simplified model does not yield reflected waves and, in this new set-up and scaling, the Boussinesq dynamics writes

$$\tilde{z} \partial_{\tilde{x}} \tilde{u} + \tilde{w} = -\partial_{\tilde{x}} \tilde{p}, \partial_{\tilde{z}} \tilde{p} = \tilde{b}, \tilde{z} \partial_{\tilde{x}} \tilde{b} + J \tilde{w} = 0, \quad (3.34a)$$

$$\partial_{\tilde{x}} \tilde{u} + \partial_{\tilde{z}} \tilde{w} = 0, \tilde{w}(\tilde{z} = \tilde{h}) = (\tilde{h} + \tilde{u}) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}, \quad (3.34b)$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{1 + \tilde{x}^2/2}, \quad (3.34c)$$

it is only controlled by the Richardson number J . In this setup, we know that for each harmonics the vertical velocity is exactly of the form ,

$$\tilde{w} = \tilde{z}^{1/2 + i \text{sign}(\tilde{k}) \mu}, \quad (3.35)$$

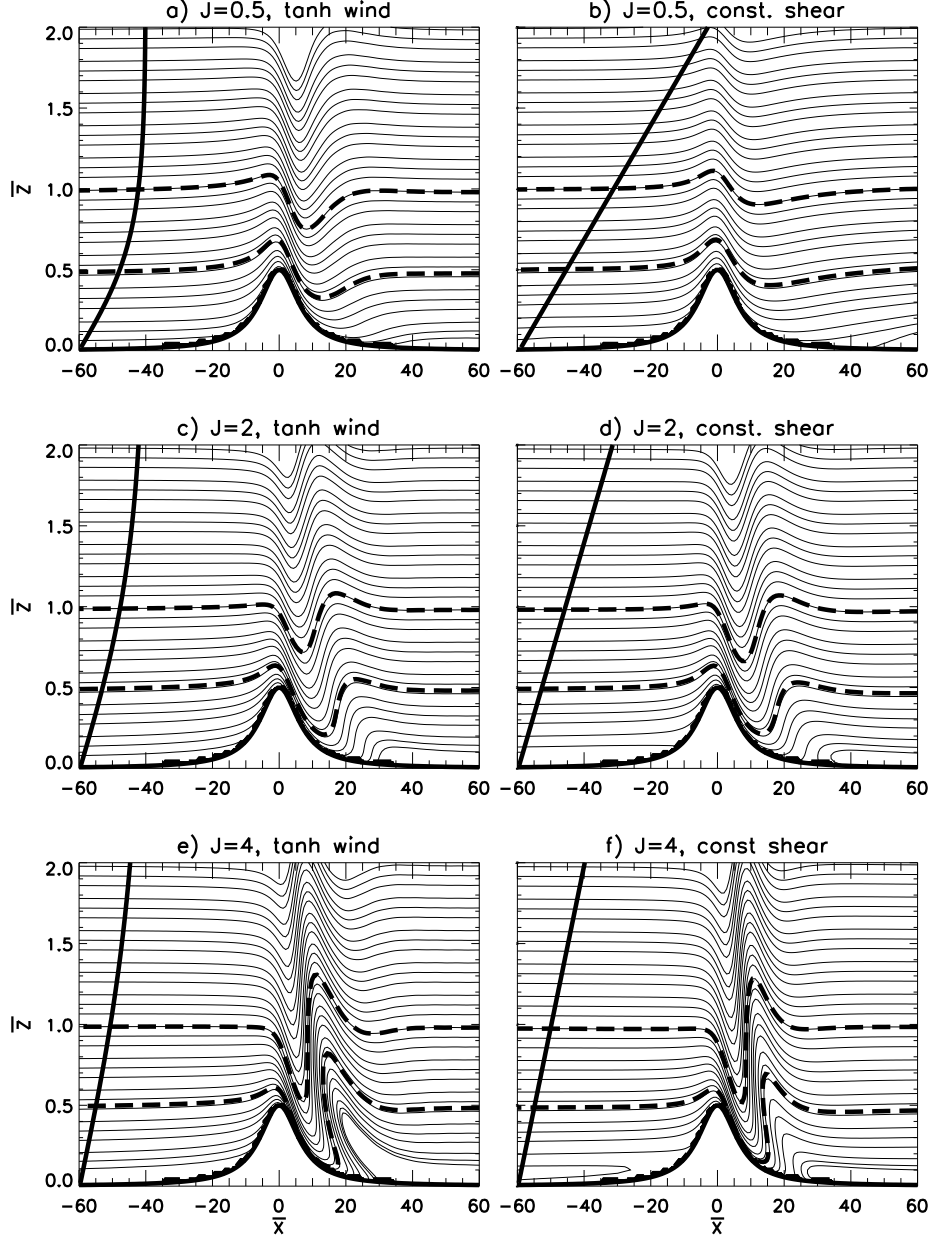


FIGURE 3.4 – Isentropic surfaces predicted by the linear model when $H_N = 0.5$, $Fr = 5$ and for different value of J . Tanh incident wind and $\bar{z}_b = 0.05$: a) $J=0.5$, c) $J=2$, e) $J=4$. Constant shear and hydrostatic set-up in (3.34), $\bar{z}_b = 0.02$: b) $J=0.5$, d) $J=2$, e) $J=4$. In all panels the thick curve represent the incident wind U and the thick dashed curves the isentropes that initially are at the altitudes $\bar{z} = H_N$ and $\bar{z} = 2H$.

where we have only retain the upward propagating solution [Booker and Bretherton, 1967b] : there is no reflected wave by construction. We then incorporate a dissipative scale $\tilde{z}_k = \tilde{z}_b$ which

we also take constant, a simplification that permits to define a canonical solution

$$\hat{w}_c(\bar{z}, \bar{k}) = (\bar{z} - i \text{sign}(\bar{k}) \bar{z}_b)^{1/2 + i \text{sign}(\bar{k}) \mu}. \quad (3.36)$$

We will next use this solution to evaluate the wave field in (3.21) and the boundary condition in (3.23). To ease comparison, the results will be shown using the dimensionless variables of the more complete theory,

$$\bar{x} = F_r \tilde{x}, \bar{z} = H_N \tilde{z}, \bar{u} = \frac{H_N}{\sqrt{J}} \tilde{u}, \bar{w} = \frac{H_N^2}{F_r \sqrt{J}} \tilde{w}. \quad (3.37)$$

The results from the simplified theory are shown in the right panels of Fig. 3.4, the resolutions being identical to those used to build the corresponding panels on the left. To have comparable results nevertheless we have taken a boundary layer scale that is smaller than that used in Section 2, $\bar{z}_b = 0.02$, a difference that is only related to our choice to take a constant boundary layer scale (if we adopt the formula (3.26) we need to return to the value $\bar{z}_b = 0.05$ to obtain the same results). With this scale, the simplified theory gives almost exactly the same results as the more complete one, at least at low level. As we emphasized previously, in this simplified theory, there is no reflected waves by construction, proving that the onset of foehn can be entirely due to the near surface critical level dynamics i.e. a mechanism summarized mathematically by (3.36), a mechanism that exclude pre-conditionning of a well mixed layer by upper level wave breaking, non-linear and now linear wave reflections.

Finally to understand further why the near-surface critical level dynamics makes the foehn so sensitive to J it is worthwhile to notice that for large J , the [Booker and Bretherton, 1967b]'s solution (3.35) has an interpretation in terms of vertical wavenumber. To make this transparent we approximate it near the mountain top by writing $\bar{z} = H_N + \delta \bar{z}$, which yields

$$\bar{z}^{1/2 + i\mu} = \bar{z}^{1/2} e^{i\mu \ln \bar{z}} \approx \bar{z}^{1/2} H_N^{i\mu} e^{i \frac{\mu}{H_N} \delta \bar{z}}. \quad (3.38)$$

Near the mountain top, the disturbance has a characteristic wavenumber $\bar{m} \approx \mu/H_N$. Now, we know that mountain flow dynamics becomes nonlinear when the disturbance's vertical wavelength $\bar{m}^{-1}$ becomes smaller than the mountain height H_N . The argument often given is that in this case the linear theory predicts that vertical velocities change sign before the air parcels reach the mountain top. If we apply this condition here, we have that nonlinear effect become large when $H_N/\mu < H_N$, which approximately simplifies to the condition $J > 1$, which is the condition that favors foehn in the theory here and the downslope winds in L16.

Another point we make is that foehn is not associated with upper level wave breaking, i.e. that some form of wave breaking can occur below the mountain top without occurring aloft. To illustrate this qualitatively we next use the same line of arguments as before. We compare the wave vertical wavelength $\bar{m}_B$ and the vertical displacement $\bar{\eta}_B$ produced by the wave around a "breaking" altitude H_B , yet to be found, and by writing $\bar{z} = H_B + \delta \bar{z}$. This yields

$$\bar{m}_B \approx \mu/H_B \text{ and } \bar{\eta}_B \approx H_B^{-1/2 + i\mu} H_N^{3/2 - i\mu}. \quad (3.39)$$

respectively. Qualitatively, breaking occurs when $|\bar{\eta}_B| \geq \bar{m}_B^{-1}$, which gives,

$$H_B \leq \mu^{2/3} H_N. \quad (3.40)$$

Wave breaking is confined to the lowest layers, and inhibited above the mountain summit H_N at least when $\mu < 1$. This is the basic reason due to which the foehn mechanism described here is not associated with upper level wave breaking. Of course this effect simply translates the fact that in presence of shear, the vertical wavelength increases with altitude.

The result in (3.40) also illustrates that the depth of the layer over which breaking occurs increases with J . To a certain extent this suggests that the dissipative layer depth should increase with J . As we will see next this is in fact the case when we compare to fully nonlinear simulations.

3.2.4 Verification with fully nonlinear model

To extend the above results beyond the inflow-linear and Boussinesq approximations, we next use the WRF model ([Skamarock et al., 2008]) in the 2D mountain flow configuration available on line³. It is configured here for a 100km long and 12km height domain gridded by 1000×1000 points yielding resolutions of 100m and 12m in the horizontal and vertical directions respectively. At the lateral bounds the domain is open and below the model top a 6km deep absorbing layer prevents the gravity waves to be reflected downward. These quite high resolutions are to ensure that the near surface critical level dynamics is well represented. They require a time step $\Delta t = 0.5s$. Note also that all the results from WRF shown next have been verified against simulations where the horizontal and vertical gridspacing are divided by two. As the WRF model is fully compressible, it is mandatory to recall that in it the stratification is represented by a Brunt Vaisala frequency given by $N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz}$, where θ_0 is a background potential temperature. To ensure that it is constant and to minimize the vertical variations of the background fields that could result in partial reflections, we consider an isothermal atmosphere $T_r = 290K$, yielding $N^2 = \frac{\kappa g^2}{RT_r} = 3.10^{-4}s^{-2}$, where κ , R , and g have their conventional dry air and earth-values. We will then impose the background wind (3.19) and always take $U_\infty = 10m/s$, the minimum Richardson number will then be changed by varying the shear layer depth d . Also, the mountain height will be given by (3.20) with $L = 2.8km$ to ensure $F_r = 5$.

Finally, in all the WRF simulations presented the dissipative coefficients are set to 0 and the surface boundary condition is free slip. This does not mean that the simulations are inviscid, because irreversible and diabatic processes will necessarily occur if the model confirms the onset of convective overturnings like those found in the theoretical model in the previous section. All the experiments presented in the next section prove that the WRF dynamical core is stable and dissipative enough to handle these irreversible processes. When we return to the theory, it is a priori difficult to say how these irreversible processes can be translated in the theoretical model. Nevertheless, as this model has a free parameter to represent dissipations, the boundary layer scale $\bar{z}_b$, we can vary it and try to identify a value for which there is a match between the nonlinear simulations and the theory. To sort out this issue we have undertaken a systematic comparison between the WRF model and the theoretical one, varying the boundary layer depth in the latter. We found a good agreement when we take a boundary layer depth varying like

$$\bar{z}_b / \sqrt{J} = 0.05. \quad (3.41)$$

3. www2.mmm.ucar.edu/wrf/users/downloads.html

The 0.05 factor is purely empirical and little sensitive to the resolution in both models, but the $\sqrt{J}$ term suggests that between the simulations and the theory, the penetration of the boundary layer depth into the shear layer needs to be the same.

Fixed mountain height

To confirm that theory can match the fully nonlinear simulation, we present experiments with a fixed mountain height $H = 250\text{m}$, ($H_N = 0.5$), and vary the minimum Richardson number between $J = 0.5$ and $J = 5$.

Figure 3.5 shows the horizontal wind disturbances from the linear model (left) and the WRF model (right) for 3 different Richardson numbers ($J = 0.5, 2$, and 4). In each figure the contour interval is proportional to the background wind amplitude at the top of the Hill ($\approx H_N/\sqrt{J}$), a value representative of the disturbance amplitude needed to satisfy the lower boundary condition. The first striking result is that the left hand and right hand panels share strong similarities : the wave amplitude and phase line tilts with altitude are comparable. Also, when J increases, the phase line tilts with altitude become more and more vertical above the ridge, which means that the characteristic horizontal scale of the wave field decreases when J increases : this behavior is consistently reproduced by the linear and by the WRF model. In all panels, we also note that the horizontal wind disturbances are substantially larger on the downstream side ($\bar{x} > 0$). This upstream/downstream difference becomes very pronounced near the ground, contrasting the two flanks of the mountain. It is this difference in horizontal winds that explains why low level shears can produce intense downslope winds (L16), and we see here that it is also present in the simulations.

Returning to the foehn effect, Fig. 3.6 shows the isentropic surfaces corresponding to the experiments shown in Fig. 3.5. Again, the results between the linear model and WRF are quite consistent, some qualitative discrepancies emerge downstream where the simulations start to predict potential temperatures jumps. These figures also illustrate another feature : the theoretical results shown in Fig. 3.4 and in Fig. 3.6 differ by the value of $\bar{z}_b$, which increases with J for the comparison with WRF (see eq. 3.41). Comparison of figures 3.4 and 3.6 shows that the increase of $\bar{z}_b$ limits the onset of foehn.

Fixed penetration of the mountain into the shear

As said before, to match the WRF simulations, we had to keep constant in the theoretical model, the ratio between the shear layer depth $\sqrt{J}$ and the boundary layer scale $\bar{z}_b$. This limits the amplitude of foehn in the theoretical model, but does not make it disappear. To make the Foehn effect more evident in the simulations, we next keep the "penetration" of the mountain into the shear constant between the experiments by keeping $H_N/\sqrt{J}$ constant. In this case, at the top of the hill, the incident wind is the same in all the experiments, and to a certain extent, it is only the stratification that is changed. Note also that in these experiments the ratio between the boundary layer depth and the mountain height $\bar{z}_b/H_N$ is also constant, which allows cleaner comparisons of results since z_b now changes with $\sqrt{J}$.

The results are shown in Fig. 3.7 for ($J = 0.5, H_N = 0.25$) and ($J = 4, H_N = 0.71$), the corresponding plots for ($J = 2, H_N = 0.5$) being already in Figs 3.6c–d. Again, a good match between

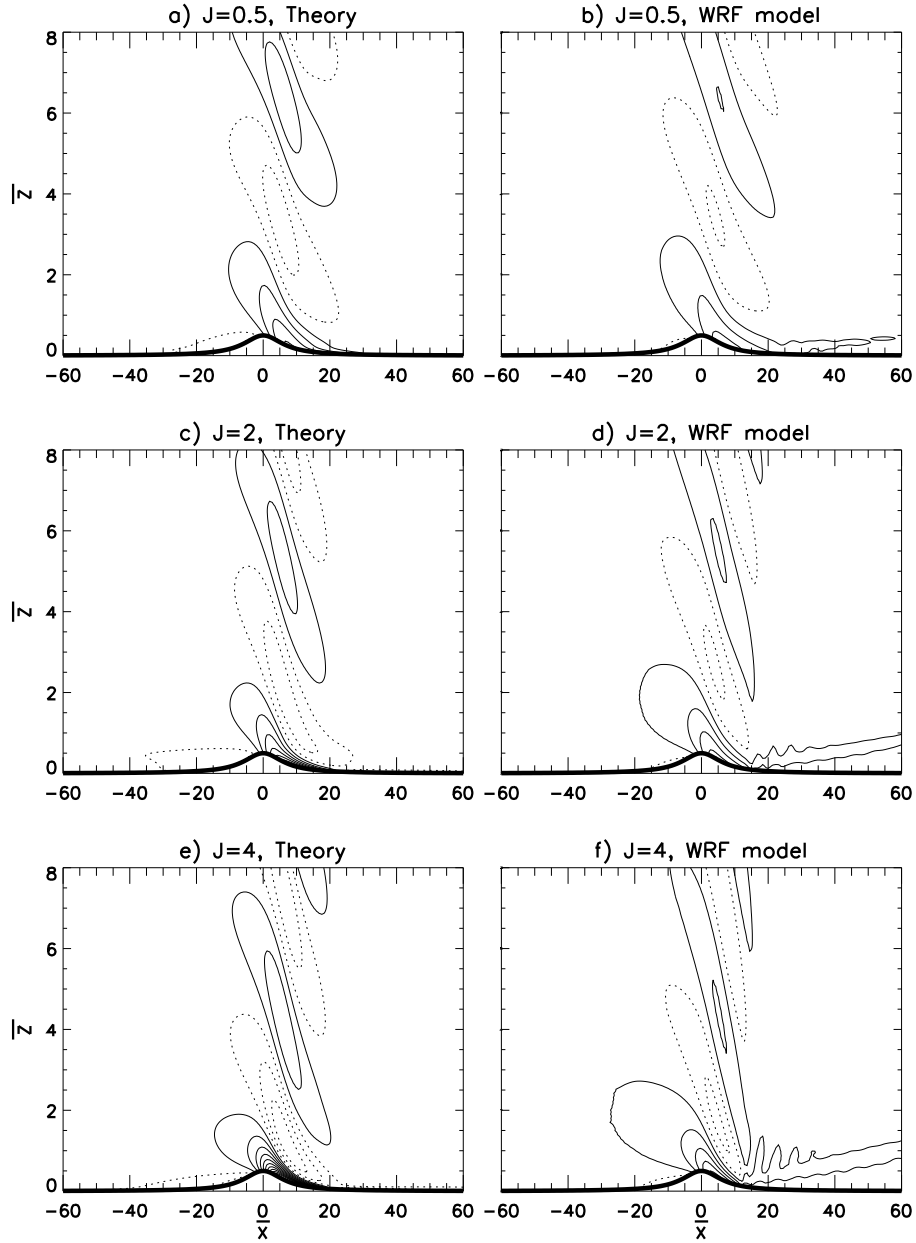


FIGURE 3.5 – Non-dimensional Horizontal wind disturbances ($\bar{u}$) predicted by the theory (a, c, e) and WRF (b, d, f), for $J = 0.5, 2$, and 4 , respectively. In all simulations $H_N = 0.5$ and in the linear model in (a), (c), and (e) the boundary layer scale varies as $\bar{z}_b = 0.05\sqrt{J}$. In each panel the contour interval is proportional to the background wind at the top of the hill, contours = $0.2 * H_N / \sqrt{J}$.

the theory and WRF is found, which is important since we are now using non-dimensional mountain height that are near 1. In both the theoretical model and in WRF, the foehn downstream is now slightly more substantial when $J = 4$ than when $J = 0.5$, but the difference are more

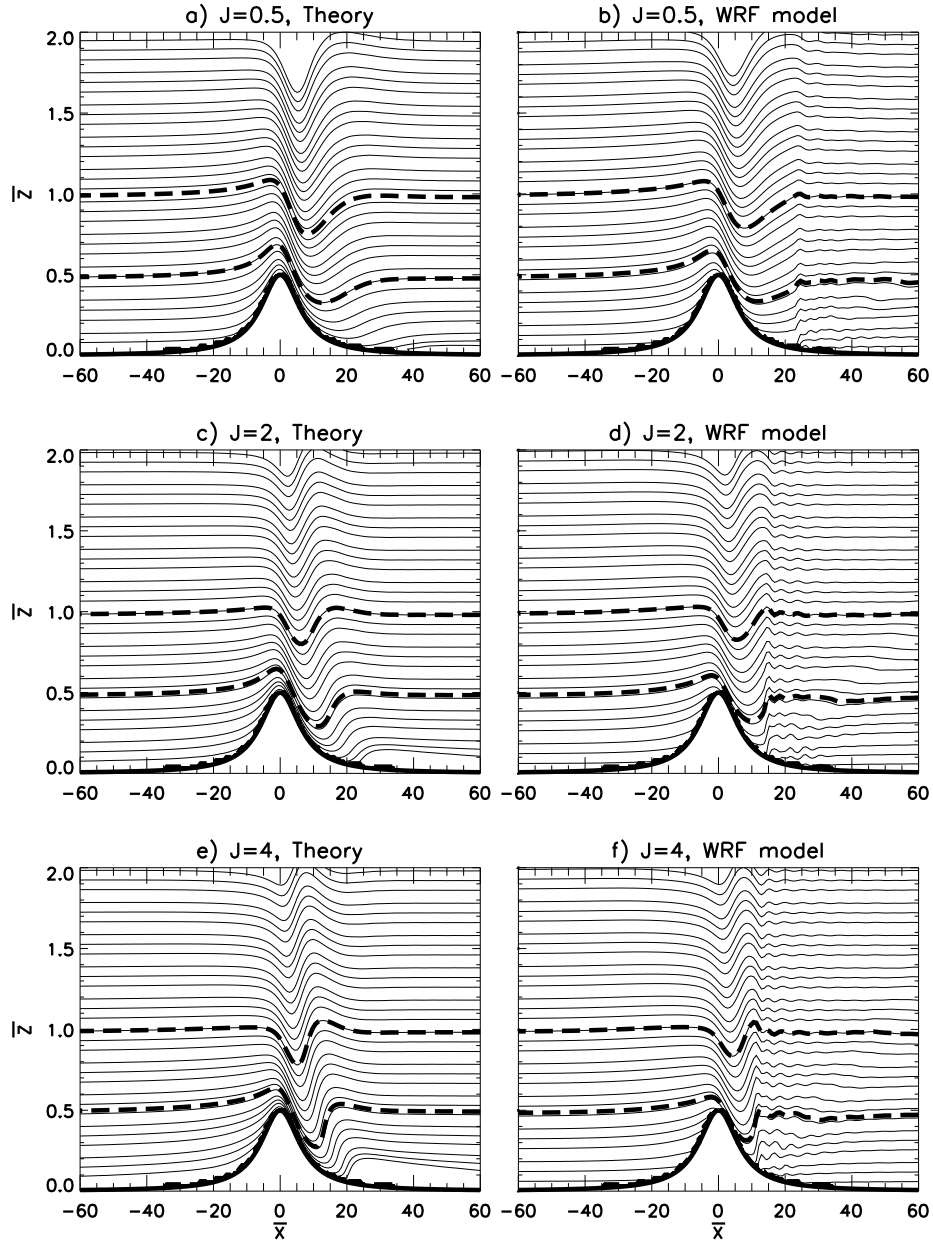


FIGURE 3.6 – Isentropic surfaces predicted by the theory and WRF, same parameters as in Fig. 3.5

in terms of horizontal distance over which the air descends on the lee-side. In the simulation with $J = 4$ the isentropes which are at the altitude of the mountain summit upstream rapidly descend below half the mountain top downstream, before returning to their upstream altitude after the passage through an hydraulic jump. Importantly both this behavior and the location of the jump are well predicted by the theory. When $J = 0.5$ the descent of air in WRF is less abrupt, in agreement with theory but the total descent is still about half the mountain height. Another point

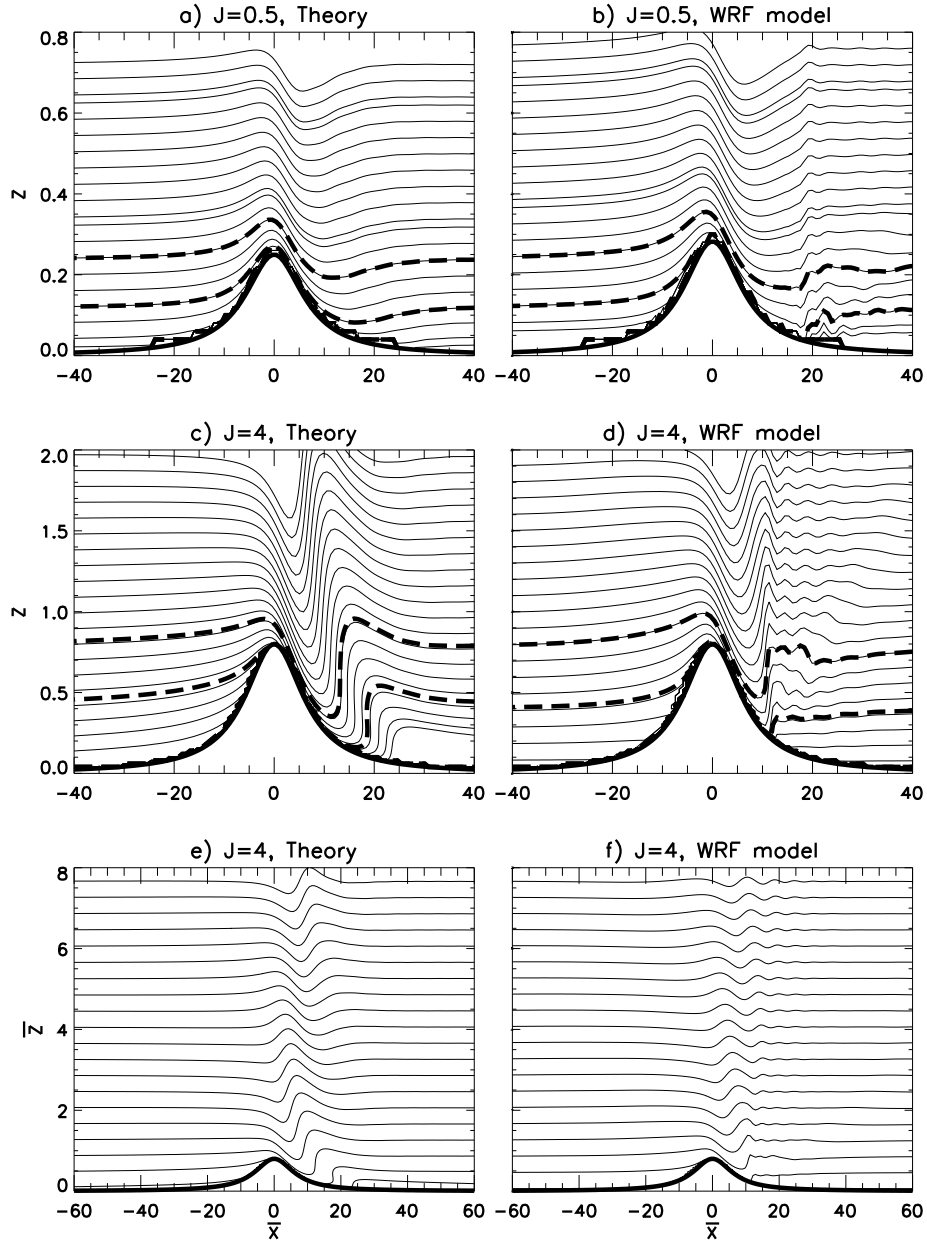


FIGURE 3.7 – Same as Fig. 3.6 but leaving $H_N/\sqrt{J} = \text{cte}$: a) and b) $J = 0.5$, $H_N = 0.25$; c) and d) $J = 4$, $H_N = 0.71$. e) and f) are enlarged views of c) and d).

is worth noticing. In Figs. 3.7a-d, but this is also true in all the other Figures, there is very little uplift of the air parcels in front of the ridge, the most spectacular vertical displacements occur after the passage of the summit. This small uplift could suggest that diabatic effects should not much affect the results, at least when the atmosphere is not close to water vapor saturation.

In this paper we try to make the point that upper level wave breaking is not needed for foehn

to occur. The basic argument is that the theory is linear, yet shows a very good agreement with the fully non linear simulations. Nonetheless, we can go one step further and diagnose if upper level wave breaking actually occurs in WRF and in the theory. The answer is simply that it does not, and to illustrate this the Figs. 3.7e-f display the isentropic surfaces over a much larger domain than in Figs. 3.7c-d. In no place, except in the downstream lee side, the isentropes become almost vertical. This is in contrast with what is found with the Long's model with uniform U (see Fig. 1f in L16). In it, downslope winds and foehn always occur in conjunction with upper level wave breaking.

3.2.5 More systematic comparisons and alternative configurations

Quantitative indices

To provide quantitative measures of our results we have built global indices characterizing our problem and conducted 64 pairs (theory versus WRF) of experiments, 32 corresponding to the constant height cases described in 4.1. and 32 to the constant penetration of the mountain into the shear cases described in 4.2. For the first index, we follow L16 and measure downslope windstorm intensity by,

$$A = \underset{\substack{\bar{z} < H_N/2 \\ 0 < \bar{x} < 5F_r}}{\text{Max}} \left(\frac{\overline{u(\bar{x}, \bar{z})}}{U(H_N/\sqrt{J})} \right). \quad (3.42)$$

The index A indicates to which extent the wind in the flow along the foothills (defined as the region with $z < H_N/2$ and $0 < x < 5F_r$) exceeds the background wind at the top of the hill ($U(H/d)$). In terms of foehn it is an important index because when the descent is rapid there is less time for diabatic effects to mitigate the warming of the air masses. The results in Fig. 3.8a somehow reproduce those in L16 : the downslope wind intensity increases with stability J . However the increases are not as spectacular as in [Lott, 2016] where A much more easily reaches values above 1, but this is consistent with the fact that z_b increases with J . This constraint is the price to pay for our theory to be consistent with the simulations.

As our theory reproduces mountain waves quite well (see Fig 3.5), we have also evaluated the wave stress in $z = 2\sqrt{J}$ (that is well above the maximum mountain height and the low level shear) and compare it to the linear hydrostatic wave drag produced by the mountain in (3.24) in a uniform flow of intensity $U(H_N) = \frac{H_N}{\sqrt{J}}$:

$$F^z = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{u w} d\bar{x}}{\frac{\pi}{4} \frac{H_N^3}{\sqrt{J}}}. \quad (3.43)$$

Again, the curves in Fig. 3.8b show that the theory and the nonlinear simulations are in good agreement. Interestingly, when the penetration of the mountain into the shear stays constant and J increases, the normalized wave stress F^z increases well beyond 1. This behavior is reminiscent of the high drag states often found in non linear mountain flow theory.

Finally, to characterize foehn, we identify the highest altitude from which are coming the isentropic surfaces that arrive along the downstream foothill, and normalize by the mountain

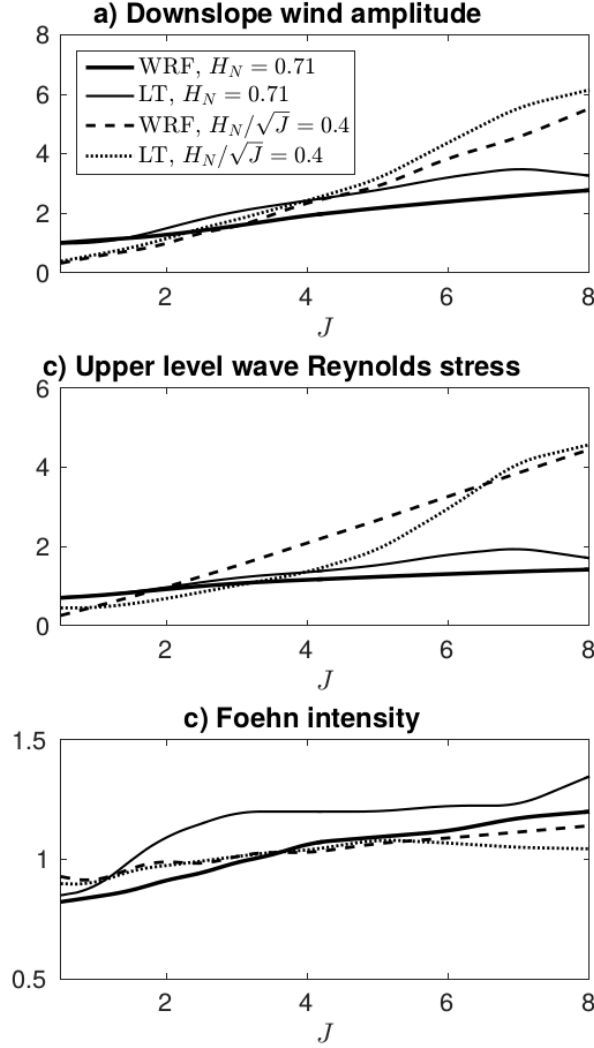


FIGURE 3.8 – Global indices measuring a) the downslope wind amplitudes (3.42), b) the normalised wave stress (3.43), and c) the foehn intensity (3.44). The results are from 64 numerical experiments, 32 uses with WRF and 32 the "inflow linear" theory (LT). Half the simulations are done with constant height $H_N = 0.71$, the other half with constant penetration of the mountain into the shear $H_N/\sqrt{J} = 0.4$.

maximum altitude. In our non-dimensional formalism where the background potential temperature varies as $\bar{z}$ exactly, this is conservatively given by,

$$F_{hn} = \underset{\substack{\bar{z} < H_N/2 \\ 0 < \bar{x} < 5F_r}}{\text{Max}} \left(\frac{\bar{\theta} + \bar{z}}{H_N} \right). \quad (3.44)$$

Interestingly, in our models this factor is always near 1. In other words the dynamics forces isentropic surfaces that are upstream at the altitude of the ridge to descend along the foothills downstream. Hereagain simulations and theory compare well. In both, the foehn intensity in-

creases with J , but as for the downslope winds intensity, it is less pronounced than when z_b is kept small and constant in the theory (not shown).

Alternative configurations

In the real atmosphere the low level shears have at least two causes : the thermal gradients due to the presence of fronts and the effect of the boundary layer. The first imposes shears that extend well above the boundary layer, the second forces the winds to vanish at the surface. There is no reason, except simplicity, to consider that the shears associated with these two processes have similar values. In this sense, we could say that our almost inviscid interpretation of the wave dynamics above the boundary layer is only adapted to the shears produced via thermal wind balance, Rayleigh friction and Newtownian cooling being an ad hoc parameterizations of the boundary layer absorptive properties, an absorption that becomes very efficient when the incident wind is null at $z = 0$. To show that our results have more generality than this apparently "ad-hoc" setup, we next propose three experiments. In the first two, we keep the same models and setup as in Figs. 3.7c and 3.7d but shift vertically the mountain height by $H_N/10$, e.g. by writing,

$$\bar{h}(\bar{x}) = \bar{h} = \frac{H_N}{1 + \bar{x}^2/2F_r^2} + \frac{H_N}{10}. \quad (3.45)$$

Doing so there is no need to rewrite the theory but, from a dynamical point of view there is a major change : the incident wind is no longer exactly null at the surface. The results in Figs. 3.9a and 3.9b show that in this case the theory and WRF simulations are still consistent and that the foehn effects are almost identical to those when the incident wind is null at $z = 0$ in Figs. 3.7c and 3.7d respectively.

In the third experiment, we return to the exact setup of WRF used in Fig. 3.7d, but instead of the free slip boundary layer condition we adopt a planetary boundary layer scheme that has been extensively used in WRF. The chosen configuration activates the vertical diffusion described in [Hong and Pan, 1996] with the surface conditions evaluated using similarity theory. At the surface we impose a constant potential temperature, with value equal to the upstream temperature value at $z = 0$ and take a roughness length $z_0 = 10\text{cm}$. The results for the potential temperature and after a non-dimensional time $\bar{t} \approx 100$, are shown in Fig. 3.9c. Again the results in term of foehn compare well with those in Fig. 3.7d, and this despite the fact that now the low level winds and temperature adapt themselves to more conventional surface boundary conditions.

3.2.6 Discussion

The central result of this paper is the resemblance between Fig. 3.7c and Fig. 3.7d. It shows that isentropic "drawdown", a dry mechanism of foehn, where air parcels do not ascend significantly on the upstream side of mountains before descending abruptly on the lee side can be produced in a model without inflow nonlinear effects. The mechanism at work is related to the near surface critical level dynamics that occurs for mountain waves, the critical level being located just below the lower boundary. In this case, the inflow linear dynamics anticipate well where the wave breaks as is often the case in gravity wave theory. Not surprisingly, in the presence of

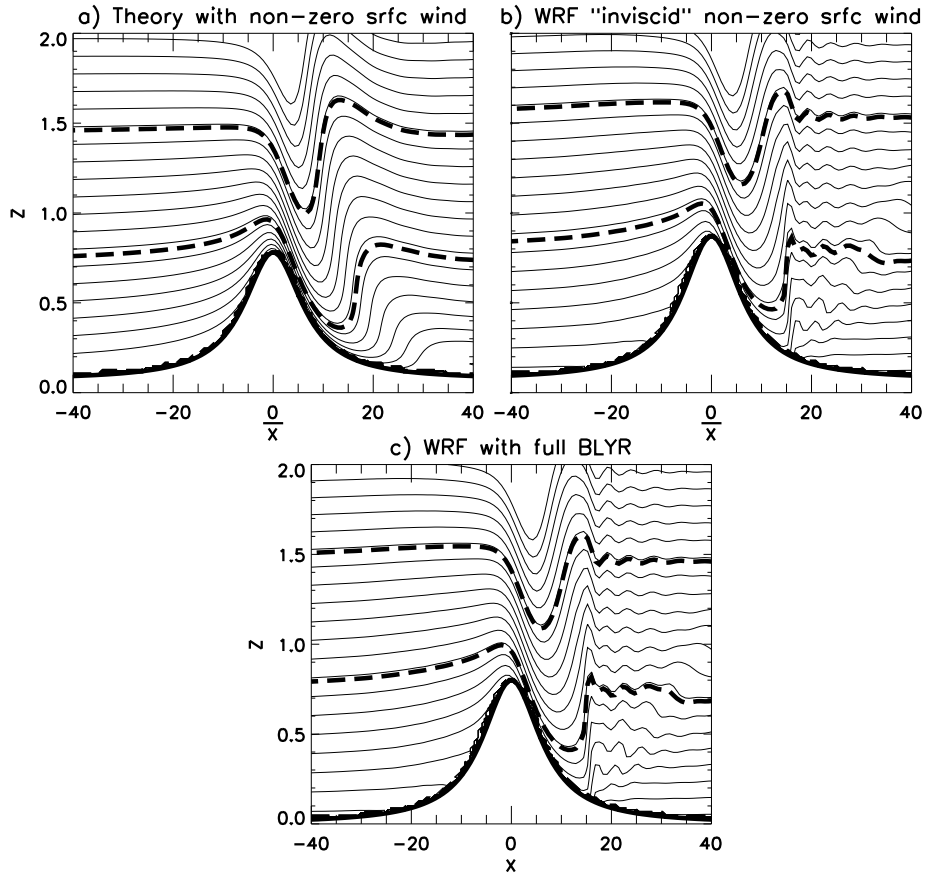


FIGURE 3.9 – Sensitivity test : a) and b) are as Fig. 3.7c and 3.7d with the surface $\bar{h}$ shifted vertically by $H_N/10$. c) is as Fig. 3.7d but with a fully parameterized boundary layer.

low level wind shear, mountain wave breaking is favored in regions located below the mountain top rather than above.

In essence, the results obtained illustrate the significance of low level wind shears and stability on mountain flow dynamics, something often noticed in mountain meteorology, at least in the context of trapped lee waves [Reinecke and Durran, 2009, Georgelin and Lott, 2001]. In this context it is interesting to note that there are many field experiments where upstream soundings show low level shears [Doyle et al., 2011, Sheridan et al., 2007], generally related to advancing fronts [Lothon et al., 2003], when the low level shear is associated with thermal wind balance. It is also worth noticing that there are cases where foehn is observed in the absence of upper level wave breaking [Flamant et al., 2002]. Other aspects of the theory also have reasonable behavior. According to [Richner and Hachler, 2013] a forecaster's rule says that foehn winds rarely descend more than 2000m below the mountain crest. In all figures when the foehn is strong (for instance when $J \geq 2$ in Figs. 3.6–3.7) we note a comparable behavior, the foehn never extend down to $z = 0$ in the lee side in these cases. Also, downstream where the isentropic surface become vertical, there is always near the surface a pool of relatively cold air. It is interesting that such a pool has often been viewed as an active part of the foehn dynamics [Lothon et al., 2003], we see here that it can be a consequence of it.

All these remarks are not to say that we want here to replace the existing theories of adiabatic foehn by a completely new one, the message is rather to complement them. Actually, our upstream low level shear can be viewed as a form of blocking, since it imposes slow incident low level flows. Also, upper level mountain wave breaking tend to decelerate the low level flow, again our background profiles with slow low level winds can be viewed as a result of this process. Finally, our results show that linear models forced by a nonlinear boundary condition potentially have some skill, which can turn out to be useful since simplified linear models are still sometimes used to predict mountain wave operationally at a cheap numerical cost [Vosper, 2003, Sheridan et al., 2017]. Finally, and although we have given examples in Section 5 that illustrate that our results are not limited to free-slip surface conditions, or to situations where the incident wind is exactly null at the surface, the theory should be extended so that both the disturbance field and the incident wind satisfy the same viscous equations. For consistency, the WRF model should also be adapted to solve the same set of equations.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé un modèle linéaire théorique d'ondes orographiques. Ce modèle repose sur un vent incident, nul au sol et augmentant lentement jusqu'à une valeur limite, interagissant avec une orographie modélisée par une condition de glissement non linéaire. L'équation de Taylor Goldstein peut, après un changement de variable judicieux, être résolue à l'aide de fonctions hypergéométriques. La seule étape numérique réside en l'inversion de la condition limite. Contrairement aux théories linéaires existantes, elle permet l'étude de la dynamique sans déferlement au dessus de la montagne, phénomène qui jusqu'à présent empêchait l'étude de montagnes de tailles conséquentes. Cette dynamique prédite, a été validée et comparée dans un grand nombre de configurations météorologiques et / ou orographiques avec le modèle complètement non linéaire WRF. Le modèle linéaire a montré une très bonne aptitude à reproduire les simulations WRF, surtout dans la prédiction de phénomènes intenses tel que le Foehn en aval. Ce mécanisme, souvent expliqué à l'aide de principes thermodynamiques, est présent dans ce modèle où la dynamique est régie uniquement par la présence d'un niveau critique sous la montagne. Ce mécanisme a permis d'apporter un éclairage nouveau sur la dynamique menant au Foehn. De plus l'impact de la stabilité de l'écoulement, représentée par le nombre de Richardson de surface J , et de la hauteur de la montagne sur l'intensité du Foehn a été exhibé.

D'un point de vue acoustique, un tel modèle est extrêmement important car il fournit à moindre coût un champ d'ondes de montagne réaliste ne dépendant que de quelques paramètres. L'impact d'un tel champ sur la propagation sera le sujet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Atmospheric propagation of infrasound across mountain ranges

« Dans la nature, tout a toujours une raison. Si tu comprends cette raison, tu n'as plus besoin de l'expérience »

Léonard De Vinci

Sommaire

4.1	Introduction	75
4.2	Atmospheric mountain flow model	77
4.2.1	Formalism	77
4.2.2	Effective sound speed disturbances	78
4.3	Acoustic propagation in range-dependent media	81
4.3.1	Normal mode approach	81
4.3.2	WKB treatment of the low-level waveguide	83
4.4	Impact of mountain waves on the normal modes	85
4.5	Impact of mountain waves on signals	88
4.6	Conclusions	93

Résumé

Dans ce chapitre la théorie linéaire des ondes est utilisée pour analyser le piégeage des infrasons dans le guide d'onde troposphérique lors de propagations au dessus de massifs montagneux. Les perturbations de l'écoulement induite par la présence d'une montagne sont décrites par le modèle linéaires exposés dans le chapitre précédent. La composante acoustique est obtenue en résolvant l'équation d'onde linéaire, sous l'approximation de célérité effective introduite au chapitre 2, en utilisant à la fois des méthodes d'algèbre linéaire et une approche de type WKB. Il est montré que pour des configurations réalistes, les ondes de montagnes peuvent fortement impacter le guide d'ondes de bas niveau, ce qui mène à une dispersion acoustique relativement importante. Pour interpréter ces résultats, chaque mode acoustique est suivie indépendamment des autres le long du chemin de propagation. Il est montré qu'en présence d'un écoulement incident statiquement stable, tel qu'on peut en rencontrer la nuit en hiver, les ondes de montagnes induisent un fort effet de Foehn en aval. Cet effet réduit fortement la profondeur du guide d'onde, conduisant à une nouvelle forme d'absorption des infrasons, une forme qui peut largement dépasser l'effet direct d'une orographie sur le guide d'onde troposphérique. Dans le cas contraire, lorsque l'écoulement est moins statiquement stable (situations qui sont plus communes durant la journée en été), la dynamique de l'écoulement n'induit pas de réponse intense en aval. Ce faisant l'écoulement peut même favoriser la propagation acoustique, minimisant ainsi l'effet de l'obstacle montagneux. Ces résultats ont été publiés dans le *The Journal of the Acoustical Society of America*.

DOI : [10.1121/1.5020783](https://doi.org/10.1121/1.5020783)

4.1 Introduction

Infrasound, which is defined as sound waves that are lower in frequency than 20 Hz, is characterized by an ability to travel over long horizontal distances in the atmosphere. This is related to the fact that the wind and temperature strongly vary with altitude, providing multiple ducts in which infrasound can propagate efficiently ([Gossard and Hooke, 1975]). Although an efficient duct is potentially in the lower thermosphere, as a result of the steep increase in temperature (e.g. above 90 km), the decrease in mean density produces substantial absorption coefficients there ([Sutherland and Bass, 2004]). For this reason, the most efficient ducts are often within the middle atmosphere, e.g. above the tropopause at around 20 km and below the mesopause at 90 km. At lower altitudes, infrasound can also be trapped within tropospheric waveguides over distances that may reach several hundred of kilometers, at least when the weather conditions permit ([Szuberla and Arnoult, 2009, McKenna et al., 2008]). However in this case, the wave interacts with the ground surface much more than wave refracting higher in the atmosphere and topographic features produce quantifiable effects on the recorded data ([McKenna et al., 2012]). Furthermore, at these altitudes the absorption coefficient is small and thus, it is neglected in most practical applications.

Although much less studied, the propagation of infrasound over distances of a few tens of kilometers can be controlled by a planetary boundary layer duct ([Chunchuzov et al., 1990, Waxler, 2004]), which is a region of approximately 1 km depth in which the boundary effects are reflected in the flow ([Dutton, 1995]). For these relatively short propagation ranges, the upward refraction at higher altitudes (around and above the tropopause) can be ignored ([Waxler, 2004]) and the acoustic field can be described by a modal expansion involving a few modes. For completeness, it is important to note that the absorption properties of ground play a significant role ([Attenborough et al., 2006]), in the sense that vegetation-covered land absorbs more energy than bare-ground for instance. We know that some modes are sensitive to such absorptions ([Waxler, 2002, Waxler et al., 2008]) but we will not include these effects here, essentially because a comprehensive theory of acoustic propagation which accounts for both absorption by vegetation and turbulence is lacking.

The common approach to calculate infrasound propagation in the atmosphere consists in solving the acoustic equation in a given background atmospheric state that varies with altitude and horizontal distance. This approach captures the most significant ducts, but sometimes it fails in predicting important arrivals ([Fee et al., 2013, Assink et al., 2012, Matoza et al., 2011, Norris et al., 2010, Ceranna et al., 2009, Millet et al., 2007]). The reason is that the atmospheric specifications, that are issued from operational numerical weather forecasts (e.g., provided by the ECMWF Integrated Forecast System or the NOAA Global Forecast System) or atmospheric climate reanalysis (e.g., ERA-Interim or NASA Modern Era Retrospective Reanalysis for Research and Applications), are associated with spatial resolutions that are much larger than the typical infrasound wavelength. These products therefore fail in representing important small-scale atmospheric fluctuations that can substantially modify the larger-scale ducts ([Bertin et al., 2014]), especially for borderline ducts that barely return sound to the ground. The statistics of these fluctuations, however, are poorly understood, whereas their knowledge is required for infrasound propagation modeling. For instance, [Chunchuzov et al., 2005] have shown the need to introduce random atmospheric perturbations to adequately represent the

acoustic properties of the boundary layer, but in their work the sources of perturbations are not specified. As in the troposphere the (unresolved) fluctuations are mainly produced by mountains, the contribution of these mountains to infrasound propagation remains an important open question.

In a first attempt to incorporate topography effects in acoustic propagation, high-resolution terrain models have been used to represent the lower boundary by a sequence of up and down stair steps (e.g., [Assink J. D. and Evers, 2016, McKenna et al., 2012]). In this approach, mountains directly modify the altitude of the lower boundary of the troposphere, which affects the acoustic cut-off frequencies of the corresponding ducts. This can be viewed as applying a “mask” onto the atmospheric specifications, and ignoring the direct influence of the mountain ridges on the local wind and temperature fields. This is an extremely serious limitation, given that mountains can dynamically produce very intense phenomena, like downslope winds, Foehn, or trapped lee waves ([Smith et al., 2008, Durran, 1990a] and references in [Lott, 2016]). As an illustration, it is worth mentioning that even small “mountains”, with elevations of a several hundred meters, can develop substantial winds and temperature disturbances, depending on the incoming flow structure ([Durran, 1990a]).

One of the primary objectives of this paper is to examine the physical mechanism that causes a low-level acoustic duct to be affected and eventually destroyed by mountain-induced disturbances. In this work, the mountain wave is predicted by the semi-theoretical model described in [Lott, 2016], and which incorporates two factors that can deeply affect infrasound propagation. The first factor is that it considers a nonlinear boundary condition, *i.e.* it includes an obstacle that penetrates inside the low level waveguide and reduces its depth, an effect that potentially recovers the classical “mask” technique often used within the infrasound research community. The second factor is that the model predicts a mountain wave field, which compares in amplitude to the background winds and temperature variations responsible for the waveguide. This inherently affects the trapped acoustic modes, yielding highly dispersed signals as well as irreversible absorption of the acoustic wave passing over the ridge.

The paper is organized as follows. In section II, the mountain wave model is described and the dominant features of the mountain wave field are discussed in terms of dimensionless Richardson and Froude numbers. The effect of mountain wave disturbances on the acoustic field $p(x, z)$ is then considered in section III, using a classical range-dependent normal mode approach ([Jensen et al., 2011]) to account for flow changes along the source-receiver distance x . To make the absorptive properties more transparent, the acoustic modes are also obtained using a WKB approximation. In section IV, it is found that the interaction between the mountain flow and the acoustic field gives rise to attenuation or amplification of ground-based signals, depending on the statical stability of the boundary layer flow. The characteristics of the perturbed acoustic modes such as phase velocities, attenuations, and wave structures in the (x, z) -plane are provided and discussed. Importantly, it is found that in near neutral conditions near the surface, the mountain wave dynamics can favor infrasound propagation above the mountain, mitigating the direct effect of the obstacle. In section V, the downstream attenuation is systematically evaluated in terms of dimensionless numbers that control the mountain flow dynamics.

4.2 Atmospheric mountain flow model

4.2.1 Formalism

Mountain waves, that occur when a stably stratified flow is forced by an obstacle, are often standing or nearly so, at least to the extent that the upstream environmental conditions are stationary. They can accompany Foehn wind conditions that are characterized by warm and dry downslope winds on the lee side of mountains ([Richner and Hächler, 2013]). In the present study, we use the mountain wave model developed by [Lott, 2016], which is adapted from [Long, 1955]’s model to incoming shear flows that varies with altitude. Comparisons with nonlinear simulations (Previous chapter) demonstrated that this model is well-suited for capturing realistic features of mountain flow dynamics.

In the present study, the mean state consists of an isothermal atmosphere, at temperature T_0 , in the presence of a background wind $U(z)$ which is assumed to be in the shape of an hyperbolic tangent function. This representation is appropriate to describe the planetary boundary layers (e.g., [Candelier et al., 2012, Chimonas and Grant, 1984]) and can even be used to initialize mesoscale models ([Nappo, 2013]). Specifically, the mean flow is given by

$$T(z) = T_0, \quad U(z) = U_0 \tanh(z/\delta), \quad (4.1)$$

where δ is the boundary layer thickness, U_0 denotes the maximum wind speed over the mountain, and z is the height, which is here typically smaller than 5 km. The thermodynamic sound speed c_0 is given by $c_0^2 = \gamma RT_0$, where γ is the ratio of specific heats and R is the specific gas constant for dry air. Hence, in an isothermal atmospheric boundary layer, the sound speed is constant. Using the ideal gas law and hydrostatic balance we know that in an isothermal atmosphere the background pressure and density vary as $\exp(-gz/RT_0)$, and the background potential temperature θ is related to the Brunt-Väisälä frequency N ([Gossard and Hooke, 1975]) through

$$N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g^2}{RT_0}, \quad (4.2)$$

where g is the gravitational constant. Solving (4.2), we observe that θ varies as $\exp(N^2 z/g)$, which provides the stratification needed for internal gravity waves to develop.

Now, given this stratification (through N), it is conventional to neglect the vertical changes of background density for relatively small δ (typically less than 1 km). This is the classical Boussinesq approximation, that we can adopt here because our focus lies on the low level waveguide. Within the framework of the above hypothesis, and following [Lott, 2016], the vertical perturbation in the velocity is given by the (inverse) Fourier transform

$$w'(x, z) = \int_{\mathbb{R}} f(k) \hat{w}_c(k, z) e^{ikx} dk, \quad (4.3)$$

where $f(k)$ is an amplitude function that depends on the wavenumber k , and $\hat{w}_c(k, z)$ is a canonical solution satisfying the Taylor-Goldstein equation

$$\frac{d^2 \hat{w}_c}{dz^2} + \left[\frac{N^2}{U^2} - \frac{U_{zz}}{U} - k^2 \right] \hat{w}_c = 0, \quad (4.4)$$

with the condition $\hat{w}_c(k, z) \sim e^{-\lambda(k)z}$, as $z \rightarrow \infty$, and where the square-root function λ is defined by

$$\lambda(k) = \left[k^2 - \frac{N^2}{U_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.5)$$

In order that the boundedness or outgoing-wave condition be satisfied as $z \rightarrow \infty$, the branch cuts of λ are inserted such that we have $\hat{w}_c(k, z) \sim e^{i\epsilon\lambda(k)z}$ where $\epsilon = \text{sign}(k)$ is to ensure upward propagation for $|k| < N/U_0$.

The boundary condition at $z \rightarrow \infty$ and the choice of branch cuts allow the solution of (4.4) to be expressed in terms of hypergeometric functions. A dynamically consistent horizontal velocity field u' can be obtained ([Fritts and Alexander, 2003]) in spectral space using a polarization relation. The amplitude $f(k)$ is then determined through inversion of the “free-slip” nonlinear boundary condition

$$w'(x, h(x)) = [U(h) + u'(x, h(x))] \frac{dh}{dx}, \quad (4.6)$$

with the witch of Agnesi profile

$$h(x) = \frac{H}{1 + \frac{x^2}{2L^2}}, \quad (4.7)$$

where H is the ridge top height and L is a characteristic length scale. Application of the Fourier transform to (4.7) leads to $\hat{h}(k) = HLe^{-k\sqrt{2}L}/\sqrt{2}$, which implies that the dominant horizontal wavelength is given by $k = 1/\sqrt{2}L$. In the following, this profile will be centred at $x_0 = 25$ km and we will use $h(x)$ instead of $h(x - x_0)$ for notational conciseness.

To describe the flow response, it is also worthwhile to use the three dimensionless parameters

$$J = \frac{N^2\delta^2}{U_0^2}, \quad H_N = \frac{NH}{U_0}, \quad \text{and} \quad F = \frac{NL}{U_0}. \quad (4.8)$$

While the Richardson number J measures the background flow stability, the other parameters are related to the shape of the mountain ([Miles, 1961, Howard, 1961]). The parameter H_N is a dimensionless mountain height that measures the degree of nonlinearity in the flow response ([Smith, 1979]). The classical Froude number F compares the advective time-scale to cross the ridge and the buoyancy oscillation time-scale. This last parameter measures the significance of non-hydrostatic effects ([Queney, 1948]). In the following we will fix N , U_0 and L such that $F = 10 \gg 1$, a value that guarantees that no substantial trapped lee waves are forced. We will vary the low level waveguide δ and hence the flow stability or the mountain height H .

4.2.2 Effective sound speed disturbances

Following [Waxler, 2002] we next use the effective sound speed approximation, in which the component of the horizontal wind speed in the direction of propagation is added to the thermodynamic sound speed ([Godin, 2002]). For an isothermal atmosphere, with a varying background wind U , this approximation yields $c(z) = c_0 + U(z)$ and thus, ducting is only due to the change in altitude of U . Hence, in presence of temperature and wind fluctuations, the

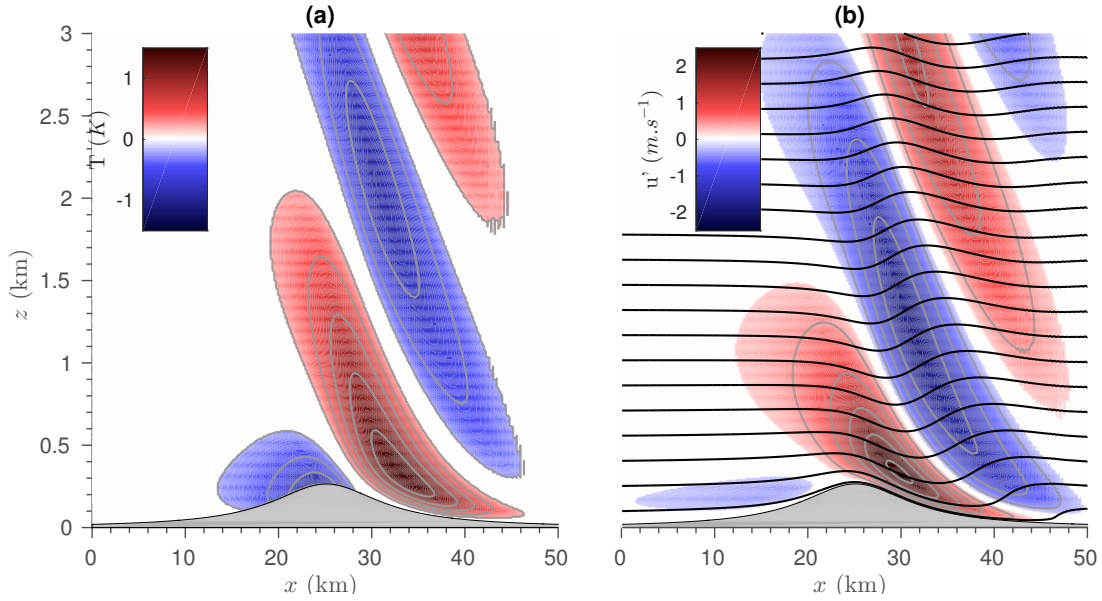


FIGURE 4.1 – (a) Temperature fluctuations T' and (b) horizontal wind fluctuations u' resulting from interaction between a mountain and an incoming boundary layer. The streamlines are given by black lines superimposed to the wind fluctuations. The dimensionless parameters used are $H_N = 0.5$ and $J = 1.5$. The mountain is represented in gray.

perturbed effective sound speed is given by

$$c_0 \sqrt{1 + \frac{T'}{T_0} + U + u'}. \quad (4.9)$$

where the temperature and the horizontal wind perturbations, which are denoted by T' and u' , respectively, are obtained from the vertical velocity w' using polarization relations.

In order to illustrate how mountain waves can perturb the background state, the mountain wave model described in section II.A is used with parameters that are representative of the lower troposphere. Here, and in the following, we consider a boundary layer flow at $U_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ in a stratified medium characterized by $N = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, and take $L = 10 \text{ km}$ to enforce $F = 10$. For illustrative purposes, the height of the mountain and the boundary layer thickness are fixed to $H = 350 \text{ m}$ and $\delta = 860 \text{ m}$, respectively. For these parameters, we obtain $J = 1.5$, which corresponds to a moderately stable situation. Finally, the dimensionless value $H_N = 0.5$ is sufficiently small to guarantee that the near-linear mountain flow theory applies and produces realistic downslope winds and Foehn.

Figure 4.1a and 4.1b show the temperature and wind fluctuations produced by the mountain flow model, respectively. In figure 4.1a we observe that the strongest temperature anomaly is reached on the lee side, which is the “Foehn” effect. Figure 4.1b shows that the wind intensity on the lee side is larger than that on the windward side, which is characteristic of downslope windstorms. The streamlines are represented in figure 4.1b to illustrate the so-called isentropic drawdown mechanism often used to explain Foehn. In this dry mechanism the Foehn results

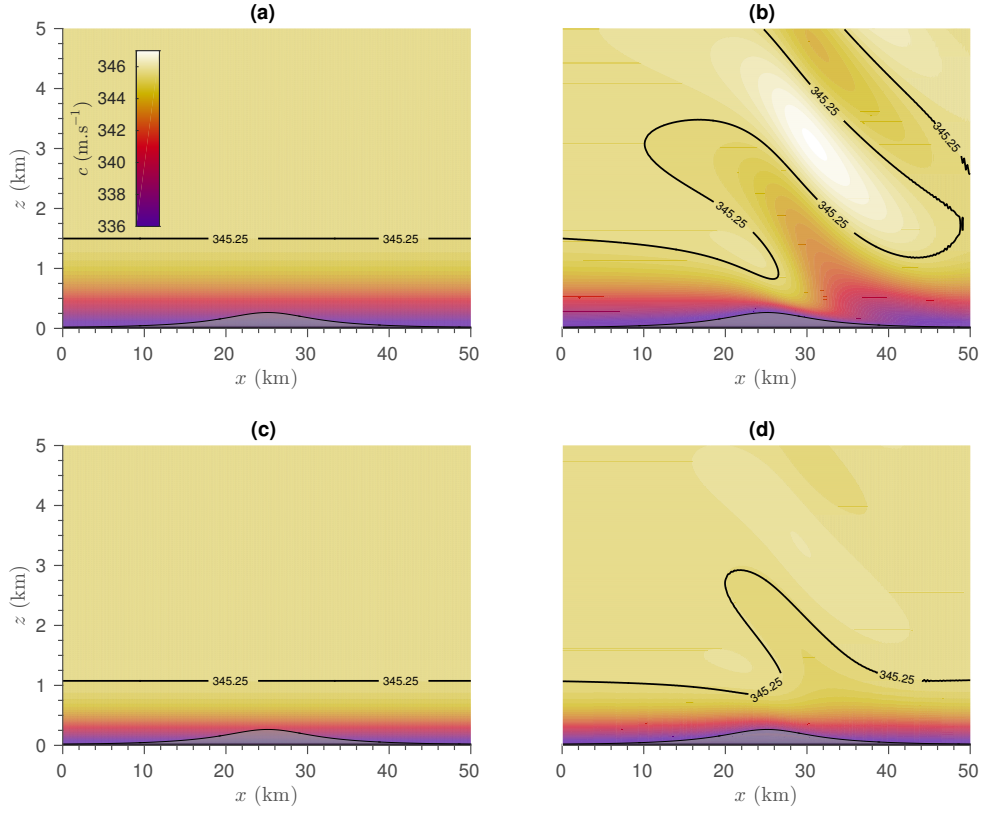


FIGURE 4.2 – Effective sound speed field without (a,c) and with (b,d) interaction between a mountain and an incoming boundary layer. The dimensionless parameters used are $H_N = 0.5$ (a,b,c,d) and $J = 1.5$ (a,b) or $J = 0.5$ (c,d).

from warm air masses that slightly ascend on the windward side before descending abruptly on the leeward side. From [Lott, 2016] we know that this effect and the intensity of the downslope winds are not that strong for significantly smaller values of J .

Figure 4.2 shows various effective sound speed fields that will be used in sections IV and V. In figure 4.2a,c we just keep the incident waveguide unaltered and chopped it by the mountain height for $J = 0.5$ (figure 4.2a) and $J = 1.5$ (figure 4.2c). This is representative of the “mask” technique used in the literature (e.g. [Assink J. D. and Evers, 2016]), and to which we will systematically compare our results to in the following. From figure 4.2a we can expect its effect to be substantial since this mask potentially exclude from trapping all the waves with phase speed between around 336 m.s^{-1} and 339 m.s^{-1} . This exclusion is not as strong when the mountain wave field is included as figure 4.2b shows, and indeed the effective sound speed “follows” the ground as the air passes over the mountain (see, for instance, the 336 m.s^{-1} isoline). Nevertheless, it is clear that even in this case, the depth of the lower atmospheric duct substantially decreases as we move from the upstream side of the mountain to its top. This shrinking also manifests on the lee side, before that the flow reaches an abrupt expansion at around mid-slope to

return to its upstream depth. Hence, for lower altitudes, these two effects produce a waveguide contraction as the flow passes over the mountain. Far above the mountain, the disturbances take the form of gravity waves that propagate upward. In the effective sound speed approximation framework, these gravity waves may be regarded as several acoustic waveguides in which relatively low-frequency acoustic waves can potentially propagate.

It is worthwhile noting that both the distortion of the low level waveguide and the upper level wave field are less pronounced for less stable situations (e.g. $J = 0.5$, figure 4.2d). This is consistent with the fact that large values of J favor downslope winds and Foehn. Comparison with the “mask” technique (figure 4.2a) demonstrates that for $J = 1.5$ the lowest effective sound speed isoline follows the global curvature of the terrain, instead of being chopped by the mountain. As discussed in section IV, this effect helps infrasound signals to travel across the hill.

4.3 Acoustic propagation in range-dependent media

4.3.1 Normal mode approach

The approach follows the formulation of the initial-value problem adopted, among others, by [Bertin et al., 2014], for range-dependent environments. Assuming that the modes couple *adiabatically* ([Jensen et al., 2011]), the solution for the Fourier transform $\tilde{p}(z; x, \omega)$ of the infrasound pressure fluctuations can be written as

$$\tilde{p}(z; x, \omega) \sim \sum_j \frac{a_j(\omega) \phi_j(z; x, \omega)}{\sqrt{k_j(x, \omega)}} e^{i\theta_j(x, \omega)}, \quad (4.10)$$

where ϕ_j , k_j , a_j and θ_j are respectively the j th mode function, the corresponding modal wave number, amplitude and phase function. For a localized point-source at $x = z = 0$ that emits a signal $s(t)$ we simply have $a_j(\omega) = \phi_j(0; 0, \omega)$, and the pressure fluctuations reads as

$$p(z; x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\omega) \tilde{p}(z; x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.11)$$

where $\tilde{s}(\omega)$ is the Fourier transform of $s(t)$. For convenience, we denote the derivative of $\theta_j(x, \omega)$ by $k_j(x, \omega)$ and the frequency dependence is dropped for conciseness. Physically k_j is the local (acoustic) wavenumber and the local phase speed is given by $c_j = \omega/k_j$.

It is worth noting that the pressure fluctuations can generally be decomposed into propagating modes (along the x -axis direction) and evanescent modes, for which the imaginary part of θ_j is positive. Far downstream of the acoustic point-source, at a distance large compared to the wavelength, the evanescent modes are negligible and (A.82) is the correct expression to consider.

Substitution of (4.10) into the classical Helmholtz equation gives, to order unity,

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - k_j^2 \right] \phi_j = 0, \quad (4.12)$$

with the Neumann boundary condition expressing that the derivative of ϕ_j at $z = h(x)$ vanishes. For unbounded boundary layers, (4.12) must be supplemented by requiring a boundedness or outgoing-wave condition as $z \rightarrow \infty$. The solution of (4.12) then becomes $p \sim e^{-\mu_\infty z}$

$$\mu_\infty(k) = \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c_\infty^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.13)$$

and c_∞ denotes the effective sound speed in the limit $z \rightarrow \infty$. The function (4.13) depends on the variable k . Thus in the complex k -plane the branch cuts are to be inserted such that $-\pi/2 < \arg(\mu_\infty) \leq \pi/2$. This choice of the branch cuts assures that as $z \rightarrow \infty$ the solution of (4.12) either goes to zero or represents an outgoing wave for all values of k in the complex plane.

The branch cuts extend from the branch points $k = \omega/c_\infty$ and $k = -\omega/c_\infty$ to infinity in the complex k -plane. Over the initial region, far upstream of the mountain, the gravity wave field vanishes and we have $c_\infty = c_0 + U_0$, whereas at ground-level the effective sound speed reaches its minimum $c(0,0) = c_0$. For a right-propagating wave the condition of trapping therefore imposes that the initial eigenvalues k_j lie initially along the interval $c_0 < \omega/k < c_0 + U_0$. As each mode propagates downstream both the vertical sound speed profile and the branch points $\omega/c_\infty(x)$ vary, and the local eigenvalues $k_j(x)$ slowly adapts to these changes. In this process, the phase velocity of some acoustic modes eventually become larger than c_∞ and the associated trajectories terminate at a branch cut. Since it is not allowed to cross the branch cut it is therefore not possible to continue the eigensolution downstream of this point (and still satisfy the boundedness condition as $z \rightarrow \infty$). Therefore the corresponding modes are simply suppressed from the expansion (A.82).

In this work, the eigenfunctions and eigenvalues of (4.12) are calculated at a discrete set of ranges $x = x_n$ using the finite difference scheme used by [Waxler et al., 2017] among others. The eigenvalues are obtained using a QR decomposition for $x = 0$ and, for other ranges, the eigenvalues are tracked by using an iterative approach.

Since eigenfunctions are determined only up to a multiplicative constant, for definiteness we impose the normalization condition ([Jensen et al., 2011])

$$\int_{h_n}^{\infty} \phi_j^2(x_n, z) dz = 1, \quad (4.14)$$

where $h_n = h(x_n)$, together with the orthogonality condition

$$\int_{h_n}^{\infty} \phi_j(x_n, z) \phi_l(x_{n+1}, z) dz = \delta_{jl}. \quad (4.15)$$

Anticipating the presence of upper level waveguides, the upper bound of integrals (4.14) and (4.15) was set to a sufficiently large value z_{top} and the effective sound speed profile $c(x_n, z)$ was smoothly continued to higher altitudes when necessary. To assess the validity of the numerical results, it has been checked that the eigenvalues were not sensitive to changes in z_{top} , or to the choice of the continuation of $c(x_n, z)$ above z_{top} .

For illustrative purposes, figure 4.3 shows the eigenfunctions of the first three modes as x increases along the source-receiver path, for a fixed frequency $\omega_0 = 2\pi \times 2.8125 \text{ rad.s}^{-1}$. For this frequency, these modes carry the dominant part of sound intensity over long distances and

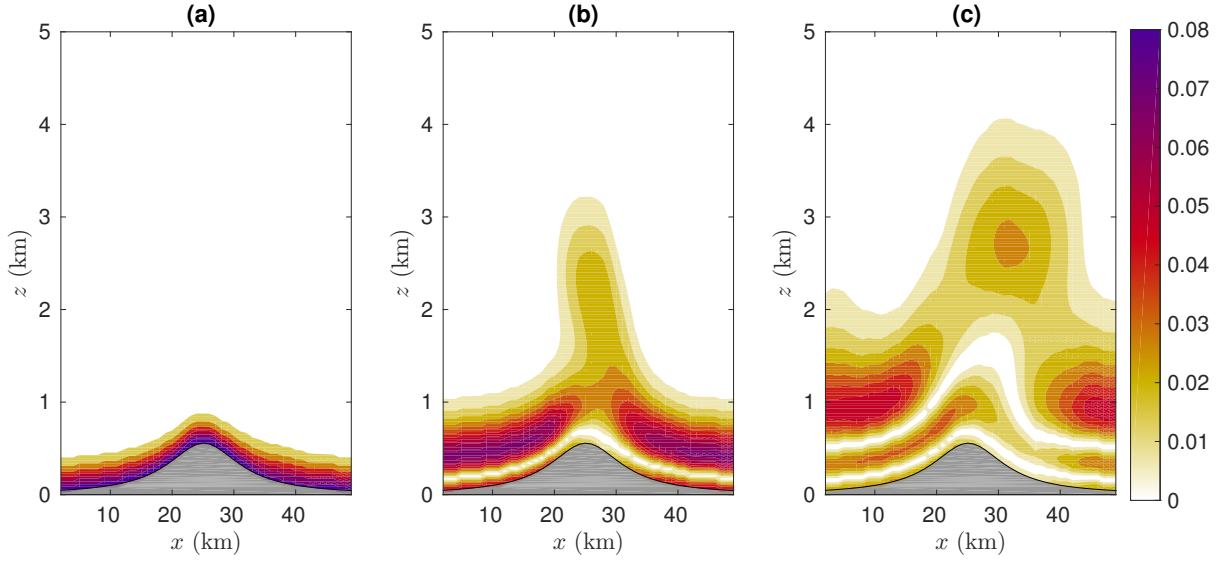


FIGURE 4.3 – Eigenfunctions $|\phi_j|$ as functions of x and z for the first three modes (from left to right), and for a fixed frequency of 2.8125 Hz. The background state is computed for $H_N = 0.5$ and $J = 1.5$. (a) $j = 1$, (b) $j = 2$ and (c) $j = 3$.

the expansion (4.10) can be truncated to $j \leq 3$, as discussed by [Bertin et al., 2014]. The first mode (figure 4.3a) is weakly sensitive to changes of the atmospheric flow as x varies. The other two modes in figures 4.3b,c are clearly affected by the presence of gravity waves and indeed, surface attenuation is clearly visible in the vicinity of the ridge top elevation. Furthermore, figure 4.3 shows that the presence of mountain waves aloft allows the modes to be trapped in an upper duct. This result is discussed further in section IV.

4.3.2 WKB treatment of the low-level waveguide

To distinguish the effect due to the boundary layer shrinking from that due to the mountain wave at upper levels, and to gain insight onto the behavior of the trapped modes, we have obtained solutions to (4.12) using the following profile of effective sound speed

$$\bar{c}(z) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 \tanh \left[z/\bar{\delta} \right], \quad (4.16)$$

and the WKB approximation of (4.12). In (4.16) the parameters $\bar{c}_0$, $\bar{c}_1$ and $\bar{\delta}$ are chosen to minimize the integrated squared error between c and $\bar{c}$ over the domain $h < z < z_{\max}$, where $z_{\max}$ is the depth of the low level waveguide, e.g. the lowest altitude such that

$$\frac{dc}{dz}(z_{\max}) = 0. \quad (4.17)$$

This definition ensures that the mountain wave is filtered out from the sound speed field and that the resulting waveguide width $z_{\max}$ varies slowly in the flow direction, as required by the classical asymptotic methods for modeling infrasound propagation ([Jensen et al., 2011]).

For fixed x , the filtered effective sound speed $\bar{c}$ in (4.16) is a smooth function of height and thus, $\omega^2/\bar{c}^2 - k^2$ is a continuous function which involves a single turning point at $z = z_0$ ([Bender and Orszag, 2013]). This choice allows us to use the Langer's formula ([Langer, 1949]) to build the uniformly valid WKB approximation

$$\bar{\phi}(z) = 2\sqrt{\pi}C \left[\frac{3}{2} \frac{S_0(z)}{\mu^3(z)} \right]^{\frac{1}{6}} \text{Ai} \left\{ \left[\frac{3}{2} S_0(z) \right]^{\frac{2}{3}} \right\}, \quad (4.18)$$

where Ai is the Airy function, and where the phase is given by

$$S_0(z) = \int_{z_0}^z \mu(s) ds, \quad (4.19)$$

and the turning point z_0 is the unique root of $\mu(z_0) = 0$, where

$$\mu(z) = \left[k^2 - \frac{\omega^2}{\bar{c}^2(z)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.20)$$

To ensure that the boundary condition at $z \rightarrow \infty$ is satisfied, the branch cuts are defined as for the complete function (4.13). Hence, using the leading asymptotic behavior of the Airy function for large z , (4.18) may be approximated by $\bar{\phi} \sim C\sqrt{\mu}e^{-S_0}$, which is the leading order of the classical WKB approximation and the constant C is determined by the normalization condition (4.14). It is important to point out at this time that this normalization condition plays a central role, especially when estimating the ground-based pressure $\bar{\phi}_j/\sqrt{k_j}$ as x varies. In many cases, it can easily be verified that the closer to the ground the turning point is located, the greater the amplitude of the pressure field at ground level.

Below the turning point, the path of integration must be deformed such that the square-root function is continued into $\mu^2 = -\mu^2 e^{i\pi}$ for $z < z_0$. On substituting this into (4.19), we note that $S_0^{2/3}$ is large and negative, and (4.18) can be simplified for $z \ll z_0$ by using the asymptotic behavior of the Airy function for negative argument ([Abramowitz and Stegun, 1964]) yielding,

$$\bar{\phi}(z) \sim 2C [-\mu^2(z)]^{\frac{1}{4}} \cos \left\{ \int_z^{z_0} [-\mu^2(s)]^{\frac{1}{2}} ds - \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (4.21)$$

Now for $z = h$, on account of the (Neumann) boundary condition $\bar{\phi}_z(h) = 0$, we obtain the constraint

$$\int_h^{z_0(k)} \sqrt{-\mu^2(s)} ds = \frac{\pi}{4} + j\pi, \quad (4.22)$$

where j is a nonnegative integer. Since μ^2 depends on k , it appears that (4.22) determines the approximate value of k_j . In other words (4.22) defines the local dispersion relation where the streamwise station x only appears as a parameter (which is not specified here for conciseness).

As an additional bonus, equation (4.22) may be used to evaluate the effect of either downslope winds or mountain height on the local wavenumber. Upon totally differentiating the implicit function (4.22) for fixed ω , and equating to zero, we obtain

$$\frac{dk}{dx} = - \frac{\int_h^{z_0} \frac{\omega^2 \bar{c}_x}{\bar{c}^3 \sqrt{-\mu^2}} ds + \frac{dh}{dx} \sqrt{-\mu^2(h)}}{\int_h^{z_0} \frac{k}{\sqrt{-\mu^2}} ds}, \quad (4.23)$$

where the terms of this ratio are the derivatives of (4.22) with respect to k and x and $\bar{c}_x$ is the derivative of $\bar{c}$ with respect to x . Similarly, we use the notations k_x and h_x for the derivatives of k and h with respect to x , respectively. Application of (4.23) for $\bar{c}_x > 0$ and $h_x > 0$ leads to $k_x < 0$. This means that the phase speed $c = \omega/k$ increases as the flow speeds up (or when h increases).

4.4 Impact of mountain waves on the normal modes

In order to obtain the pressure signal from (4.10), the modal wave numbers k_j , or equivalently the phase velocities $c_j = \omega/k_j$ are required. For range-dependent environments, these quantities are obtained as functions of ω and x either by solving (4.12) numerically or by using the WKB approximation, as described in section III.B. Figures 4.4 show contours of the phase velocity in the (ω, x) -plane for the first three modes [$j \leq 3$ in (4.10)] and the two effective sound speed fields considered in figures 4.2a and 4.2b. In figures 4.4a,b,c the numerically obtained results are represented in colors, when the mountain “mask” is applied, and the black curves give the corresponding WKB values. Figures 4.4d,e,f show the results obtained when the mountain flow dynamics is considered. Two important curves are also plotted as red and blue curves. These curves are obtained for each eigenvalue by decreasing ω , the location x being fixed. Starting from an initial value, the phase velocity c_j increases up to the maximum sound speed $c_{\max}$ as ω decreases. This behavior allows to identify the so-called cut-off frequency of the low-level waveguide, for which we have $c_j(x, \omega) = c(x, z_{\max})$, and which is referred to as $\omega_j^+(x)$ in the following (blue curve). For $\omega = \omega^+$ the eigenvalue obtained from (4.22) crosses a branch cut of (4.13) and thus, the WKB approximation fails to give a result for $\omega < \omega^+(x)$. Physically this condition may be interpreted as the requirement that the mode is not to be trapped in the low level duct. On the other hand the eigenvalue can be computed directly from (4.12) for lower frequencies, so that the eigenvalue reaches a terminal value for which we have $c_j(x, \omega) = c_{\max}(x)$. This value is referred to as $\omega_j^-(x)$ (red curve). It turns out that ω^- is not defined when considering the “mask” effect alone (figures 4.4a,b,c), essentially because in this case we have a single waveguide. Therefore, when mountain waves are present (figures 4.4d,e,f), the region $\omega_j^- < \omega < \omega_j^+$ corresponds to frequencies for which the eigenfunction ϕ_j penetrates up to the mountain wave field and can be confined within an upper level waveguide, as depicted in figure 4.3c for x lying in the range 25-35 km. This is an indication that at sufficiently low frequencies strong interaction between modes and mountain waves may occur.

For fixed but quite high frequencies (greater than 1 Hz typically), the phase velocity of the first mode, which is also the slowest mode (figure 4.4a,d), increases as we approach the ridge before decreasing in the lee side. Although this effect is less strong in presence of mountain flow, this behavior can be captured qualitatively using the “mask” technique and the WKB approximation. In fact this mode, which is confined in the vicinity of the ground, find its way through the ridge, even when the waveguide is substantially shrinked by mountain wave dynamics in (figure 4.4b) or chopped by the ridge (figure 4.4a). The excellent agreement with the WKB approximation suggests that the mode essentially adjusts to the vertical shrinking of the waveguide, the increasing in its phase velocity being correctly predicted by equation (4.23) with $\bar{c}_x = 0$. For lower frequencies (less than 1 Hz), the discrepancies between the results ob-

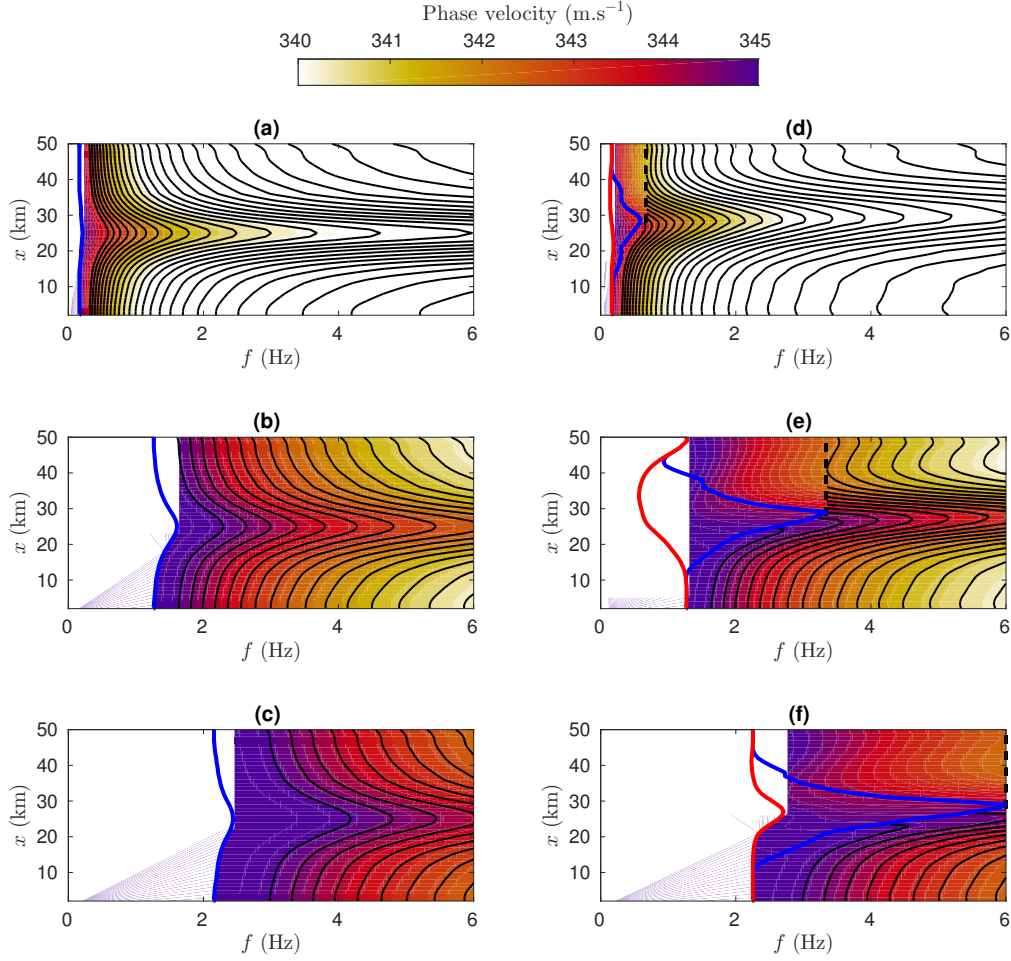


FIGURE 4.4 – Phase velocity c_j for the first three modes (from top to bottom) as a function of streamwise location and frequency, for $H_N = 0.5$ and $J = 1.5$. (a,d) $j = 1$; (b,e) $j = 2$; (c,f) $j = 3$. The results obtained by applying a “mask” onto the effective sound speed field are given on the left (a-c). The figures on the right (d-f) show the impact of mountain wave dynamics. Black, blue and red curves give the WKB prediction and the cut-off frequencies ω^- and ω^+ as defined in section IV.

tained with the “mask” technique and the mountain flow are more pronounced, and essentially occur in the region where the low level duct fails to trap the modes, e.g. when lines of constant phase velocity intersect the blue curve. This is detailed in the following for the next two modes. For $j = 1$, we observe an overall agreement between the results obtained by solving (4.12) numerically or by using the WKB approximation. From a practical standpoint, this demonstrates that the interaction between infrasound and mountain flows can adequately be predicted at a low numerical cost, through finding the first maximum in the local effective sound celerity and using the WKB approximation. This approach, however, is justified only if we can neglect the contribution of other modes ($j > 1$).

In computing the phase velocity for the other modes ($j > 1$), we observe that the mask technique fails in predicting important changes. Primarily, figures 4.4b,c show that the cut-off

CHAPITRE 4. ATMOSPHERIC PROPAGATION OF INFRASOUND ACROSS MOUNTAIN RANGES

frequency ω^+ substantially increases as we approach the ridge top, and reaches its maximum at $x_0 = 25\text{km}$. As discussed in section III.A, when the condition $\omega < \omega^+(x_0)$ is satisfied downstream x_0 , the mode is simply suppressed. In presence of mountain waves (figures 4.4e,f) the low level waveguide is extremely shrunk, and the penetration of $\omega^+(x)$ into the (ω, x) -plane is very pronounced. This effect is essentially due to Foehn, which shifts the maximum cut-off frequency $\omega^+(x)$ on the leeward side of the ridge, at $x_0 \approx 30\text{ km}$ (figure 4.4e,f). Hence, immediately downstream of x_0 , the mode obtained with the one-turning-point WKB approximation (*i.e.* when mountain waves are filtered out) should be suppressed. This is not the case when mountain waves are considered and indeed, the fact that the mode remains propagating in the horizontal direction for $x > x_0$ is essentially due to the emergence of multiple possible upper ducts above the mountain. For $j = 2$, we even see that the cut-off frequency of the upper duct ω^- decreases as we pass over the ridge and thus, the contribution of the mode has to be maintained in (4.10). This finding is in strong contrast with that obtained using the “mask” technique. On the other hand, and for $j = 3$, figure 4.4f shows that ω^- increases as we move closer to the ridge. This means that the mountain wave pattern failed in ducting the mode that escapes from the low-level duct. Finally it is important to notice that for smaller values of J (H_N being constant), the boundary layer tends to follow the global curvature of the terrain, thereby yielding a significant number of modes to travel over the mountain, whereas the upper bound ω^+ obtained with the “mask” technique penetrates much more into the (ω, x) -plane.

Figure 4.5 shows the sound intensity $|\phi_j|/\sqrt{k_j}$ at ground level $z = h(x)$, as a function of x and ω , for the first three modes. The magnitude of the contours are labelled in decibel, with a reference sound intensity computed at $x = 0$. Results are given for the two effective sound speed profiles defined above. The contours in color are for the results obtained by solving numerically (4.12), and the black curves give the one-turning-point WKB approximation. Red curves and blue curves represent the cut-off frequencies ω_j^- and ω_j^+ , as in figure 4.4. Figures 4.5a,b,c, essentially show strong attenuation in the region $\omega_j^- < \omega < \omega_j^+$. These attenuations are due to relatively strong interactions between the acoustic waves and the mountain waves, the latter creating new acoustic waveguides at higher altitudes, as discussed previously. The energy leaks that follow the tunneling effect for sound waves (cf. figure 4.3) and the standard requirement that the integral of $|\phi|^2$ is fixed to one [condition (4.14)], lead to strong attenuations at ground level. These attenuations are more pronounced for higher indices, simply because the corresponding turning points, at $x = 0$, are closer to $z_{\max}$. Since the phase velocity adapts to the local environment encountered by the sound wave, the highest modes are more likely to leave the low-level waveguide.

While the ground-based attenuation of sound intensity can be qualitatively understood when the mode shifts to upper-level waveguides (for $\omega_j^- < \omega < \omega_j^+$), it is less clear why it occurs when the waveguide shrinks, as figure 4.5 shows for $\omega > \omega^+$. This behavior appears to contradict the normalization requirement, which *a priori* results in surface amplifications rather than surface attenuations. However, using the WKB approximation, the apparent contradiction is resolved by the recognition that the proper measure of the size of the dispersive region, $z_0 - h$ is always smaller than its value at $x = 0$. Based on the above discussions, clearly the surface attenuation is a combination of the emergence of upper-level waveguides as well as depth reduction of the low-level waveguide.

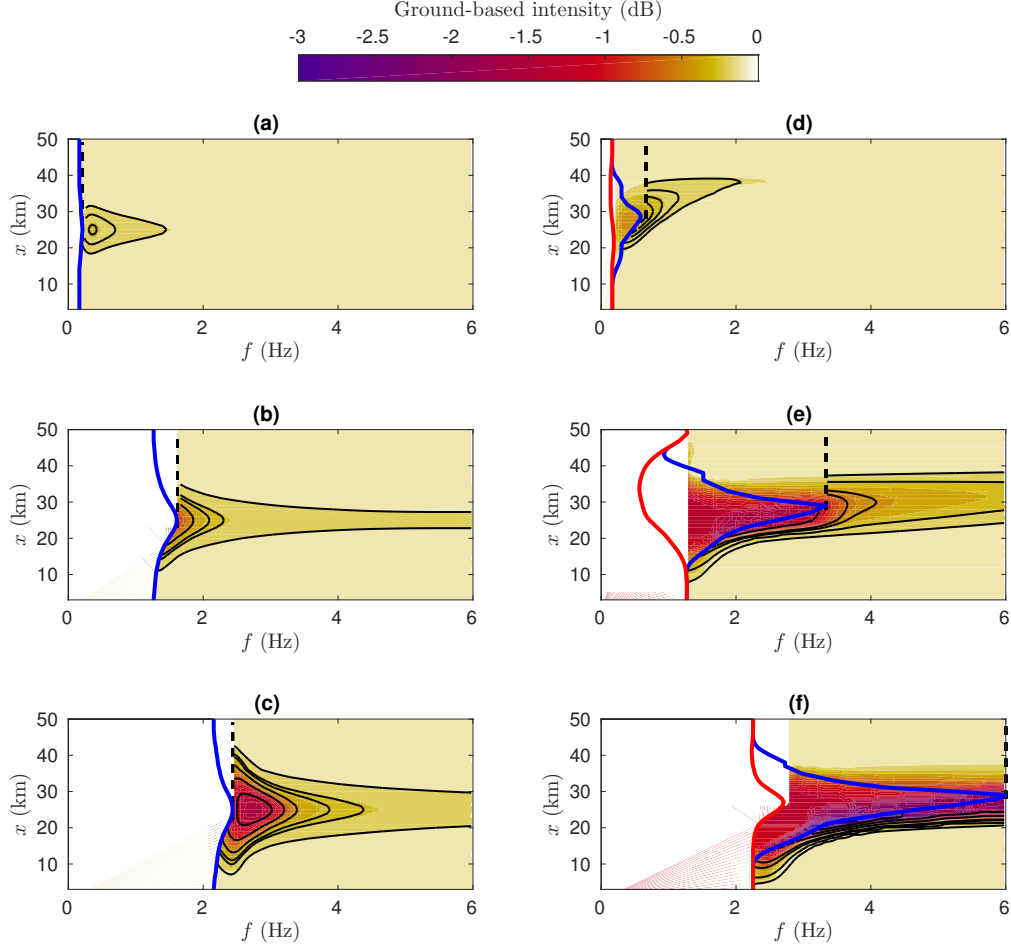


FIGURE 4.5 – Ground-based sound intensity $|\phi_j/\sqrt{k_j}|$ for the first three modes as a function of stream-wise location and frequency, for $H_N = 0.5$ and $J = 1.5$. (a,d) $j = 1$; (b,e) $j = 2$. The WKB prediction is superimposed in black contours. Red and blue curves correspond of those of figure 4.4.

4.5 Impact of mountain waves on signals

In the previous section we have seen how the pressure field, in which the structure over the whole (ω, x) -plane can be delineated, is attenuated by mountain waves, and we have given a general condition by which this interaction can be characterized, in terms of the cut-off frequencies ω^- and ω^+ .

To measure the extent to which these effects are significant when the sources of infrasound are localized in both space and time, we next calculate ground-based waveforms, using the FFT algorithm described by [Brigham and Morrow, 1967]. A source function is introduced on the right-hand side of (4.12) in the form

$$s(t) = K e^{-\frac{t-T_0}{\sigma^2}} \cos(2\pi f_c t), \quad (4.24)$$

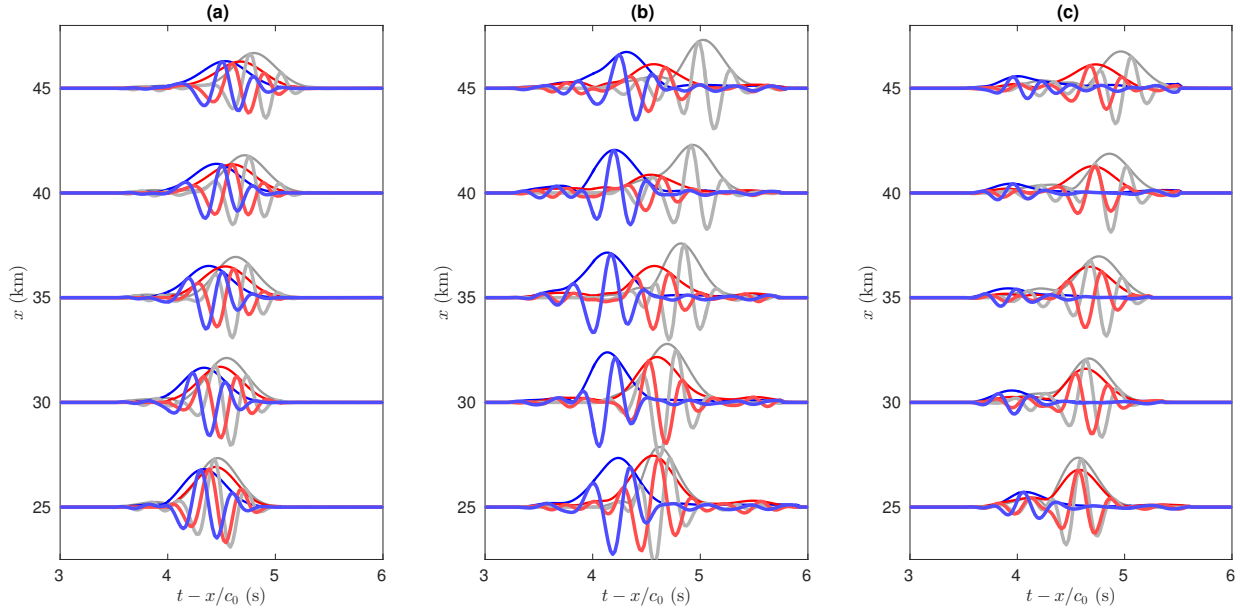


FIGURE 4.6 – Waveforms obtained for cases I (a), II (b) and III (c) as functions of the retarded time $t - x/c_0$ for effective sound speed profiles obtained without (blue) and with (red) interaction between a mountain and a boundary layer. The signals obtained for an unperturbed range-independent case (e.g. without mountains) are plotted in gray. Case I : $J = 0.75$ and $H_N = 0.3$; case II : $J = 2$ and $H_N = 0.8$; case III : $J = 0.3$ and $H_N = 0.8$. The source is defined by (4.24).

where $T_0 = 10$ s, $f_c = 3$ Hz and $\sigma = 1/5$. The parameters are adjusted such that the maximum frequency is 6 Hz, with a leading frequency of 3 Hz. K is a suitable coefficient that yields a normalized pulse. This source transfers most of its energy onto the first three modes which are the modes of greatest contribution when the frequency is relatively low. The normalization of signals obtained for different locations downstream the mountain is fixed so that the amplitudes can be compared to each other. The global effect of the mountain can be summarized by means of the attenuation

$$1 - \frac{I(x)}{I_0(x)}, \quad (4.25)$$

where the sound intensity at ground level ($z = h$) is defined as

$$I(x) = \int_0^\infty [p(h; x, t)]^2 dt, \quad (4.26)$$

and I_0 is a reference sound intensity obtained from a mountain-free range-independent case (*i.e.* the effective sound speed is given by $c_0 + U(z)$).

In this section, we proceed systematically and vary the Richardson number between 0.25 and 2 and the non-dimensional mountain height H_N between 0.2 and 0.8. As we have seen, the sound speed modifications are intimately linked with the mountain flow situations. As the latter is a function of both H_N and J we will sometimes characterize it by the measure of the

downslope wind amplitude and Foehn used in [Lott, 2016],

$$A = \max_{\substack{2z < H_N \\ 0 < x < 2F}} \left[\frac{u'(x, z)}{U(H)} \right], \quad (4.27)$$

and which is the maximum of the ratio between the horizontal wind disturbance along the foothill and the background wind at the top of the hill. Typically, when A approaches and exceeds 1, the dynamics induces wind amplitudes that are either equal to or exceed the amplitude of the winds at the summit of the ridge. In other words, the flow speeds up along the ridge, and this occurs easily for $J > 1$.

Before proceeding systematically we present here three cases that illustrate the general results that will conclude the paper. Case I is defined by $\delta = 600$ m and $H = 250$ m, which corresponds to a relatively small mountain and a pronounced shear. In terms of dimensionless parameters, we have $J = 0.75$ and $H_N = 0.3$ so that the downslope wind amplitude is $A = 0.75$. Case II is associated with a larger depth $\delta = 1$ km and a higher mountain $H = 600$ m. The corresponding dimensionless parameters are given by $J = 2$ and $H_N = 0.8$ so that $A = 3$, which reflects intense downslope winds. In order to estimate the role of stability, we keep $H_N = 0.8$ and consider a much less stable flow with a Richardson number $J = 0.3$, as a third Case III. This last case corresponds to a situation for which we have $H/\delta = H_N/\sqrt{J} \simeq 1.5$ and thus, we can expect that most of the modes are obstructed by the mountain when the “mask” technique is used.

The resulting acoustic signals associated with cases I, II and III are shown in figure 4.6 for different locations downstream the mountain. The envelope of signals is plotted in thinner line, using the Hilbert transform. Figure 4.6 shows evidence that the interaction between the mountain flow and the acoustic wave may give rise to attenuation or amplification of ground-based signals, depending on the Richardson number. While the impact of the mountain on the ground-based signals is moderate for Case I (figure 4.6a), for which the attenuation does not exceed 13%, Case II (figure 4.6b) gives rise to attenuations as large as 48% at $x = 40$ km. This attenuation is mainly due to the fact that the first mode is no longer trapped in the low level waveguide and thus, a large part of the energy is lost at higher altitudes through interactions with mountain waves. On the other hand, case III (figure 4.6c) shows that the mountain wave dynamics may favor the passage of acoustic waves, mitigating the “mask” effect. The essential contrast with Case II is that, despite a strong reduction of its height, the incoming waveguide slips over the mountain rather than being destroyed over the windward side. The acoustic path then follows the global curvature of the terrain and the sound intensity shows is 80% larger than that obtained with the “mask” technique.

As discussed above, the signals obtained for the three cases considered in figure 4.6 do not cover all situations. In order to estimate how the mountain wave dynamics impacts the infrasound measurement, the ground-based attenuations (4.25) are first computed as functions of x , and then averaged over two intervals $x_0 < x < x_1$ and $x_1 < x < x_2$, with $x_0 = 25$ km, $x_1 = 40$ km and $x_2 = 50$ km. The process is repeated for different values of J and H_N so as to obtain a complete portrait of attenuations. Figures 4.7 and 4.8 show typical results for the first and second intervals, respectively. The first interval $x_0 < x < x_1$ is adopted here to quantify the infrasound attenuation on the leeward flank of the ridge. Firstly, figure 4.7a shows that the mountain flow produces larger attenuations than that obtained with the “mask” technique (in figure 4.7b). Fur-

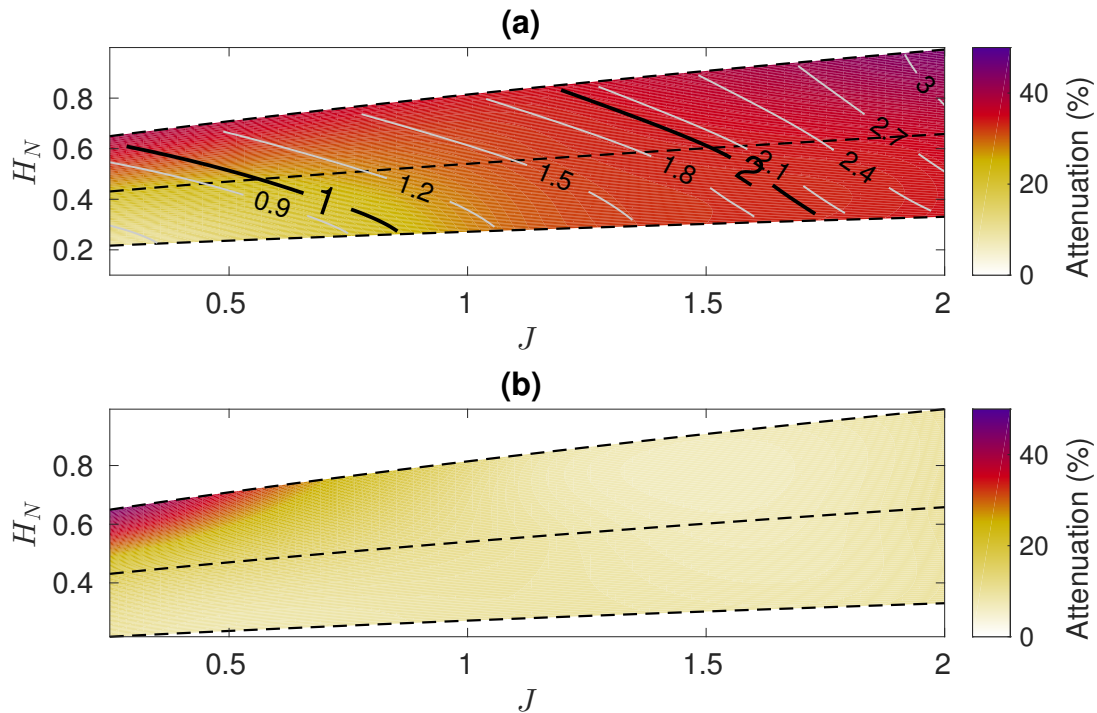


FIGURE 4.7 – Far-field averaged attenuation downstream the mountain, in the range 25 – 40 km as a function of J and H_N with mountain wave disturbances (a) and the “mask” effect alone (b). The downslope wind amplitude A is given by contours.

thermore, even though the shrinking of the waveguide by the Foehn produces strong attenuations (A is almost everywhere larger than 1), a significant fraction of the attenuation is indeed associated with sound propagation within upper level waveguides, through local adjustments of few normal modes, as discussed in length in section IV. This is typically the case for relatively large J ($J > 1.5$) and small H_N , in the range $0.2 < H_N < 0.4$. In this region the sound intensity on the lee-side flank of the ridge is attenuated by a factor of 30 % (figure 4.7a) and decreases down to about 20% far downstream (figure 4.8a). Secondly, comparisons of figures 4.7a and 4.7b show that at low Richardson numbers ($J < 0.5$) and for high mountains ($0.6 < H_N < 0.7$) attenuation is mainly due to the “mask” effect, which produces a strong reduction of the waveguide height.

The second interval is used to capture the far-field sound attenuation downstream the mountain without including the constructive/destructive interference effects associated with local changes of phases. In fact, at about two or three mountain half-widths downstream of the maximum height location, the modes recover their initial characteristics for $x \rightarrow \infty$, unless they reach a branch cut as discussed in section II.A. Owing to these changes in the resulting modal expansion (4.10), a residual attenuation is expected far downstream the mountain. This attenuation is irreversible in the sense that the full set of eigenvalues at $x = 0$ is not recovered downstream. Comparison of figures 4.7a and 4.8a shows that this effect is apparent at relatively high Richardson numbers, in the top right corner of figure 4.7a. A striking result is that for large values of H_N

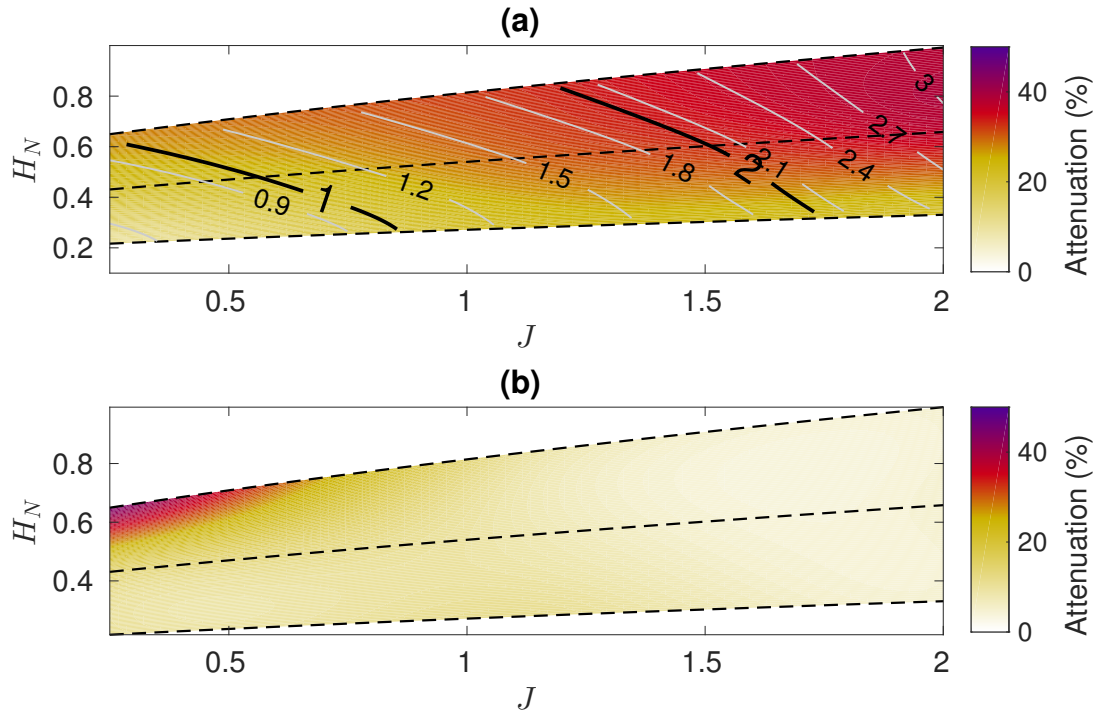


FIGURE 4.8 – Far-field averaged attenuation, in the range 40 – 50 km as a function of J and H_N with mountain wave disturbances (a) and the “mask” effect alone (b). The downslope wind amplitude A is given by contours.

and narrow waveguides (small J), the mountain flow dynamics favor infrasound propagation.

4.6 Conclusions

In this paper, we have examined the propagation of sound within mountain flows. The mountain flow model is based on the integration of the linear inviscid Taylor-Goldstein equation, forced by a nonlinear surface boundary condition. To calculate infrasound signals, we also used a range-dependent normal mode approach, which allows the decomposition of the acoustic pressure field into distinct normal modes. The basic assumption introduced in the present work is that the acoustic modes couple adiabatically, *i. e.* without any transfer of energy to higher or lower modes. Ground-based signals were computed using Fourier synthesis of frequency-domain solutions, for a given ground-based broadband acoustic source.

The central result of this paper is that mountain wave dynamics may lead to strong attenuation or amplification of upcoming acoustic waves, regarding to the direct “mask” effect the mountain has on acoustic propagation. For a stable flow ($J \geq 1$) the mountain wave dynamics produces large horizontal winds and buoyancy disturbances at low level that result in intense downslope winds and Foehn. When the downslope wind is less intense ($J < 1$), the flows can reinforce the acoustic waveguide over the mountain and lead to a signal of greater amplitude compared to that obtained by the “mask” effect. The acoustic waveguide is then strongly impacted which leads to a new kind of acoustic (reversible) absorption that can be related to local adjustments of few normal modes. It is worthwhile to point out here that acoustic absorption is mainly governed by the Richardson number, and more precisely by the critical value $J \simeq 1$, which is also a transition regime for mountain wave dynamics.

In striking contrast to this local behavior of acoustic modes is the sound attenuation far downstream from the mountain. This second type of absorption is due to irreversible processes that are intimately connected to leaking modes along the source-receiver path. While leaking modes are known to play a role in the transient waveform, the classical practice is to neglect the contributions from these modes at large horizontal distances from explosions in the atmosphere. This approach, however, ignores range-dependence of the environment. These modes may be “activated” by a point-source in the form of classical waveguide modes and then decay exponentially with increasing distances far downstream from the mountain, as a result of the atmospheric state evolution. In this way, the corresponding component involving these modes vanishes far downstream from the mountain. This results in absorption farther downstream from the mountain, even though the background state recovers its initial state (e.g. upstream from the mountain).

The present work presents our current understanding of acoustic absorption due to mountain wave dynamics with emphasis upon a modal description of the acoustic field, including static stability effects. Though the present analysis does not answer all the questions regarding the complex phenomenon of absorption, it has shown how a range-dependent analysis can provide some insight into the interaction of acoustic waves and mountain wave fields. Other aspects that may give rise to additional dissipation have not been fully explored, such as, interaction of infrasound waves with ground and turbulence. However, the mountain wave model used in this study cannot predict the turbulence associated with GW breaking, a process that occurs for small J .

The present work is also related to the more general issue of incorporating unresolved GW variability in infrasound propagation calculations. Recent works (e.g. [Lalande and Waxler, 2016,

Hedlin and Drob, 2014, Drob et al., 2013]) suggest that the mismatch between simulated and observed signals is related to the fact that the atmospheric specifications used in most studies do not adequately represent internal gravity waves. In the Atmospheric General Circulation Models which are used to produce the atmospheric specifications, these GWs are represented by parameterizations and in return, these parameterizations can be used to predict the GWs field used in infrasound studies. This is the approach followed by [Drob et al., 2013], in which the global spectral scheme of [Hines, 1997] is used to estimate the effect of GWs on infrasound time arrivals. The interesting aspect of using the model proposed by [Hines, 1997] is that it allows obtaining GW fields that give rise to the right climate ([Lott and Millet, 2010]).

Chapitre 5

Propagation des infrasons dans un champ d'ondes de montagne incertain

*« C'est l'incertitude qui nous
charme ; tout devient merveilleux
dans la brume »*

Oscar Wilde

Sommaire

5.1	Le contexte stochastique des simulations	96
5.1.1	La méthode des éléments finis appliquée à l'équation d'onde	97
5.1.2	Validation des résultats du chapitre 4	99
5.1.3	La nécessité d'une approche stochastique	101
5.2	Une première analyse de l'effet des incertitudes sur les infrasons	101
5.2.1	La variabilité atmosphérique mesurée par le SSI	101
5.2.2	Analyse de sensibilité du modèle d'onde de montagne	102
5.2.3	Impact sur la propagation acoustique	105
5.3	Identification des structures par modes de Koopman	107
5.3.1	Décomposition d'un écoulement en structures cohérentes	107
5.3.2	Opérateur d'évolution et opérateur de Koopman	108
5.3.3	Estimation des modes propres de l'opérateur	110
5.3.4	Application à la dynamique des ondes de montagne	113
5.3.5	Variabilité des modes de Koopman	115
5.4	Perspective : Décomposition spectrale stochastique	117

Introduction

Les signaux enregistrés par les stations du SSI présentent une très grande hétérogénéité de formes, d'amplitudes et de durées. Ces hétérogénéités sont le reflet de la multiplicité des sources et des variations, sur de larges gammes d'échelles spatiales et temporelles, du milieu de propagation. La principale difficulté liée à la technologie infrason est que l'atmosphère est un milieu en perpétuelle évolution, dont un état donné ne se reproduit jamais deux fois. Cette contrainte limite l'intérêt des lois empiriques et des "catalogues" de propagation qui permettent de constituer des bases de données des différents cas possibles, à l'avance, comme on peut le faire pour les ondes sismiques.

Lors de la propagation atmosphérique des infrasons, les sources d'erreurs ne sont pas toujours bien connues ni bien quantifiées. Une des sources proposées par [Ghanem, 2005] provient des erreurs dues à des mauvaises spécifications atmosphériques : la caractérisation de l'état atmosphérique avec un bon degré de précision, spatiale et temporelle, reste un challenge difficile. Les méthodes classiques de propagation d'incertitudes, basées sur un développement linéaire et une hypothèse de petites perturbations, ne peuvent s'appliquer à l'atmosphère. De ce fait, de nombreux modèles probabilistes de variabilités atmosphériques voient le jour et sont souvent utilisés par la communauté *infrason*. Cependant ces modèles, bien que mathématiquement sophistiqués, négligent souvent un grand nombre de sources d'incertitudes (prise en compte de l'orographie, variation de l'impédance du sol, ...). Les méthodes de type Monte-Carlo constituent une alternative pour la prise en compte de l'aléa, comme c'est le cas pour les prévisions d'ensembles en météorologie. Son coût de calcul élevé reste un frein important à son utilisation systématique. De ce fait, la réduction de nos modèles atmosphériques et de propagation reste la seule solution prometteuse.

La première partie de ce chapitre sera consacrée à l'étude de la propagation acoustique dans un champ d'ondes de montagne issu de simulations WRF. La propagation acoustique sera assurée par un code reposant sur une méthode aux éléments finis. Au delà de la validation des résultats du chapitre précédent, le milieu montre une forte variabilité, restituée dans les signaux, incitant à introduire un cadre stochastique à notre étude. La seconde partie présentera une première approche de type Monte-Carlo, permettant de quantifier la sensibilité des champs d'onde de montagne et des signaux acoustiques, aux incertitudes atmosphériques. Cependant le coût numérique important d'une telle approche rend impossible la quantification systématique de tels effets. Afin de proposer un modèle probabiliste d'ondes de montagne, il est nécessaire de capturer distinctement les structures cohérentes de l'écoulement. Pour ce faire, nous utiliserons la *Décomposition en Modes Dynamiques*. Cette méthode proposée depuis quelques années par [Rowley et al., 2009] et [Schmid, 2010] est une puissante méthode de décomposition spectrale, construite afin de représenter les événements statistiquement récurrents et les phénomènes transitoires.

5.1 Le contexte stochastique des simulations

L'étude réalisée dans le chapitre précédent repose sur certaines hypothèses qui peuvent s'avérer contraignantes pour l'étude de cas opérationnels. La décomposition modale utilisée

dans cette étude est une propagation dite *adiabatique*, c'est à dire sans aucun transfert d'énergie d'un mode vers un autre. Cette hypothèse repose sur le fait que l'on considère que l'atmosphère varie lentement dans la direction de propagation ce qui permet d'utiliser une approximation WKB de la composante horizontale. Cependant il est montré en annexe A.2 que les non linéarités négligées dans le modèle linéaire d'ondes de montagne, sont associées à des structures de petites échelles. Il est donc nécessaire d'étudier l'impact de ces hétérogénéités sur les infrasons. L'absence de couplage entre modes mérite aussi d'être étudié, car de nouveaux guides d'ondes sont créés et d'autres altérés au cours de la propagation. L'énergie acoustique se transfère donc d'un guide à un autre et, ce faisant, peut générer des interactions entre modes. Enfin, l'impact de l'orographie sur la propagation des infrasons a été modélisé uniquement en plaçant la condition limite de Neumann à hauteur du relief. Les effets discutés dans le chapitre introductif, à savoir les réflexions ou diffractions potentielles, ne sont donc pas modélisés. Pour confirmer que les résultats et les analyses faites dans le chapitre précédent sont corrects, nous allons simuler la propagation acoustique avec un code aux éléments finis appliqué à l'équation d'onde et en prenant pour champs de célérité effective les résultats de simulations WRF. Cependant en utilisant un code complètement non linéaire du type WRF, la dynamique de l'écoulement peut engendrer déferlements, rotors et instabilités. Ces réponses, non prises en compte par la plupart des données atmosphériques peuvent contribuer grandement aux sources d'incertitudes.

5.1.1 La méthode des éléments finis appliquée à l'équation d'onde

Nous présentons dans cette partie, l'emploi de la méthode des éléments finis pour simuler la propagation d'ondes infrasonores dans l'atmosphère. Pour de plus amples informations sur le code utilisé, ainsi que sur la méthodologie, nous nous référons à [Dergham and Millet, 2013].

Nous considérons, comme dans les chapitres précédents, que l'état de l'atmosphère est connu et nous cherchons à propager une onde infrasonore à une distance donnée d'une source ponctuelle. Nous utilisons pour cela l'équation d'onde non-homogène (2.86) obtenue au chapitre 2 :

$$\frac{1}{c^2(x, z)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0, \quad \text{avec } p(x, z, 0) = p_0(t), \quad (5.1)$$

où $p_0(t)$ est un terme source qui simule l'effet d'une explosion. Nous faisons, comme précédemment l'approximation d'une célérité effective : $c(x, z)$ intègre les effets du vent sur la vitesse locale du son. Comme le domaine de calcul numérique est de taille finie, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites à ce domaine afin d'éviter les réflexions artificielles. Ces bornes absorbantes sont constituées de *Perfectly Matched Layers* (PML), consistant à simuler une couche absorbante dans le milieu de propagation qui empêchera toute réflexion sur les interfaces. Un terme d'amortissement agissant sur la direction perpendiculaire à la PML est introduit dans l'équation d'onde et les variables d'espace deviennent alors complexes dans cette région. Par exemple pour la direction horizontale x , nous introduisons la coordonnée complexe $\tilde{x}$ telle que

$$\tilde{x} = x + \frac{\alpha_x(x)}{i\omega} \quad (5.2)$$

où ω est la pulsation et α_x est un terme d'absorption acoustique. De plus pour éviter que les ondes allant de la PML vers le milieu de propagation soient amorties, nous ajoutons un profil

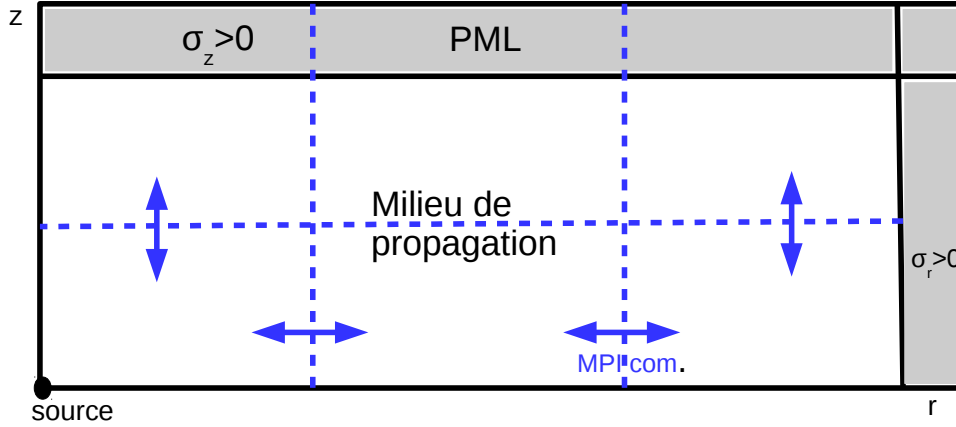


FIGURE 5.1 – Schéma du domaine de calcul avec les couches absorbantes (PML) et la communication lors de la parallélisation (librairie MPI).

amorti $\sigma_x = \alpha'_x$ de sorte que si $\sigma_x = 0$ les ondes ne soient pas affectées, et si $\sigma_x > 0$ les ondes sont alors amorties. Enfin, nous supposons que le sol réfléchit parfaitement les ondes acoustiques. La figure 5.1 représente le domaine de résolution numérique.

Pour résoudre ce problème à l'aide de la méthode des éléments finis, les équations doivent être réécrites sous forme variationnelle et discrétisées sur une grille composée d'éléments triangulaires correspondant à une base de fonctions de Lagrange. Si l'on appelle p_j la solution $p(t)$ discrétisée et P_j le vecteur dont les éléments sont les coordonnées de p_j dans la base d'éléments finis, alors le problème peut se réécrire

$$\mathbf{M}_j \frac{d^2 P_j}{dt^2}(t) + \Sigma_j \frac{d P_j}{dt}(t) + \mathbf{K}_j P_j(t) = S_j(t) \quad (5.3)$$

où $\mathbf{M}_j$, Σ_j et $\mathbf{K}_j$ sont des matrices et S_j est un vecteur. Ces matrices sont creuses et sont construites à l'aide du logiciel Freefem++¹. Pour simplifier l'inversion de la matrice de masse $\mathbf{M}_j$ qui, à chaque pas de temps, rend la procédure numériquement coûteuse, nous utilisons une procédure de *Mass Lumping* [Cohen et al., 2001] et un schéma explicite en temps. Les éléments finis de Lagrange P2-bulle (P2B), sont des éléments finis de degré 2 qui rendent la méthode stable et précise au troisième ordre. La solution discrète P_j est incrémentée en temps en utilisant la technique *Modified Equation Technique* [Shubin and Bell, 1987]. Les pas de discrétisation spatiale et temporelle sont fixés par une condition de stabilité CFL : $\frac{c \delta t}{\delta x} < 1$ où δx est la distance minimale entre deux noeuds. Le principal coût CPU provient des produits matrice-vecteur. Le code est parallélisé avec la librairie MPI et le domaine est décomposé en blocs de tailles égales comme indiqué en figure 5.1.

1. <http://www.freefem.org/ff++/>

5.1.2 Validation des résultats du chapitre 4

Deux résultats importants ont été montrés, dans le chapitre précédent, en utilisant les théories linéaires. Lorsque le nombre de Richardson est grand ($J \gg 1$), la dynamique de l'écoulement généré par la présence de la montagne peut produire d'importantes perturbations du vent horizontal et de la stabilité aux basses altitudes, provoquant un effet de Foehn parfois intense. Cet effet de Foehn impacte le guide d'onde troposphérique et certains modes acoustiques sont contraints de se propager dans les guides d'ondes supérieurs, menant à une atténuation de l'intensité acoustique au sol. En revanche lorsque le nombre de Richardson est petit ($J \leq 1$), l'écoulement peut renforcer la structure du guide d'onde troposphérique au dessus de la montagne qui permet alors la propagation acoustique, menant même à une amplification de l'intensité acoustique au sol.

Dans cette partie, nous étudions la propagation acoustique dans deux cas mettant en jeu une montagne très haute (relativement aux hauteurs atteignables par la théorie linéaire) caractérisée par une hauteur non-dimensionnelle $H_N = 0,9$ et deux situations atmosphériques différentes, caractérisées pour le premier cas par $J = 5$ et pour le deuxième par $J = 0,3$.

L'analyse des fronts d'onde acoustique se propageant permet de donner un premier aperçu des mécanismes d'interaction avec le champ d'ondes de gravité, à l'instar de ce qui a été réalisé pour le suivi dans le plan de propagation (x, z) des modes à une fréquence donnée (figure 4.5 du chapitre précédent). Les figures 5.2a, b et c représentent le front d'onde se propageant dans le champ associé à $J = 0,3$ et les figures 5.2d, e et f dans un champ associé à $J = 5$. Les figures 5.2a et d montrent qu'à $x = 10$ km, la majeure partie du front d'onde est piégée entre 0 et 1 km d'altitude, *i.e.* dans le guide d'onde troposphérique qui, en amont, n'est pas impacté par la présence de la montagne. Les figures 5.2b, e représentent le front d'onde au sommet de la montagne à $x = 25$ km. A cette distance dans le cas $J = 5$ (figure 5.2e), la hauteur du guide d'onde est déjà fortement réduite à cause de l'effet de masque lié à la présence de la montagne. De plus au dessus de la montagne, les ondes se propageant verticalement sont déjà pleinement développées créant ainsi de nouveaux guides d'onde. Ces deux mécanismes contraignent une partie de l'intensité acoustique contenue dans le guide inférieur à passer dans les guides supérieurs, comme on peut le voir sur cette figure (5.2e) où presque la moitié de l'intensité acoustique est transportée dans un guide d'altitude supérieure. Dans ce même cas, $J = 5$, quelques kilomètres après le sommet de la montagne, le long du flanc aval où l'effet de Foehn atteint son amplitude maximale, le guide d'onde inférieur est totalement détruit et plus aucune intensité acoustique n'est alors piégée à bas niveaux, comme le montre la figure 5.2f. Le front d'onde a été divisé en plusieurs parties, se propageant dans les guides d'onde supérieurs créés par les ondes de gravité, phénomène similaire à celui montré en figure 4.3. Un front d'onde résiduel, visible autour de $x = 26$ km, est dû aux réflexions dans le sens inverse de la propagation et aux réflexions / diffractions le long de la montagne.

Lorsque le nombre de Richardson est plus petit ($J = 0.3$), situation qui se produit plus souvent durant l'été, l'effet de Foehn est bien moins intense et l'écoulement assure le maintien du guide d'onde troposphérique, menant à un meilleur piégeage des ondes acoustiques que dans le cas précédent (figure 5.2f). Cela est clairement visible sur la figure 5.2c, où la majeure partie du front d'onde reste piégée à basse altitude et seule une petite partie de l'intensité acoustique se propage dans les guides d'onde supérieurs. Rappelons que si aucune paramétrisation d'onde de

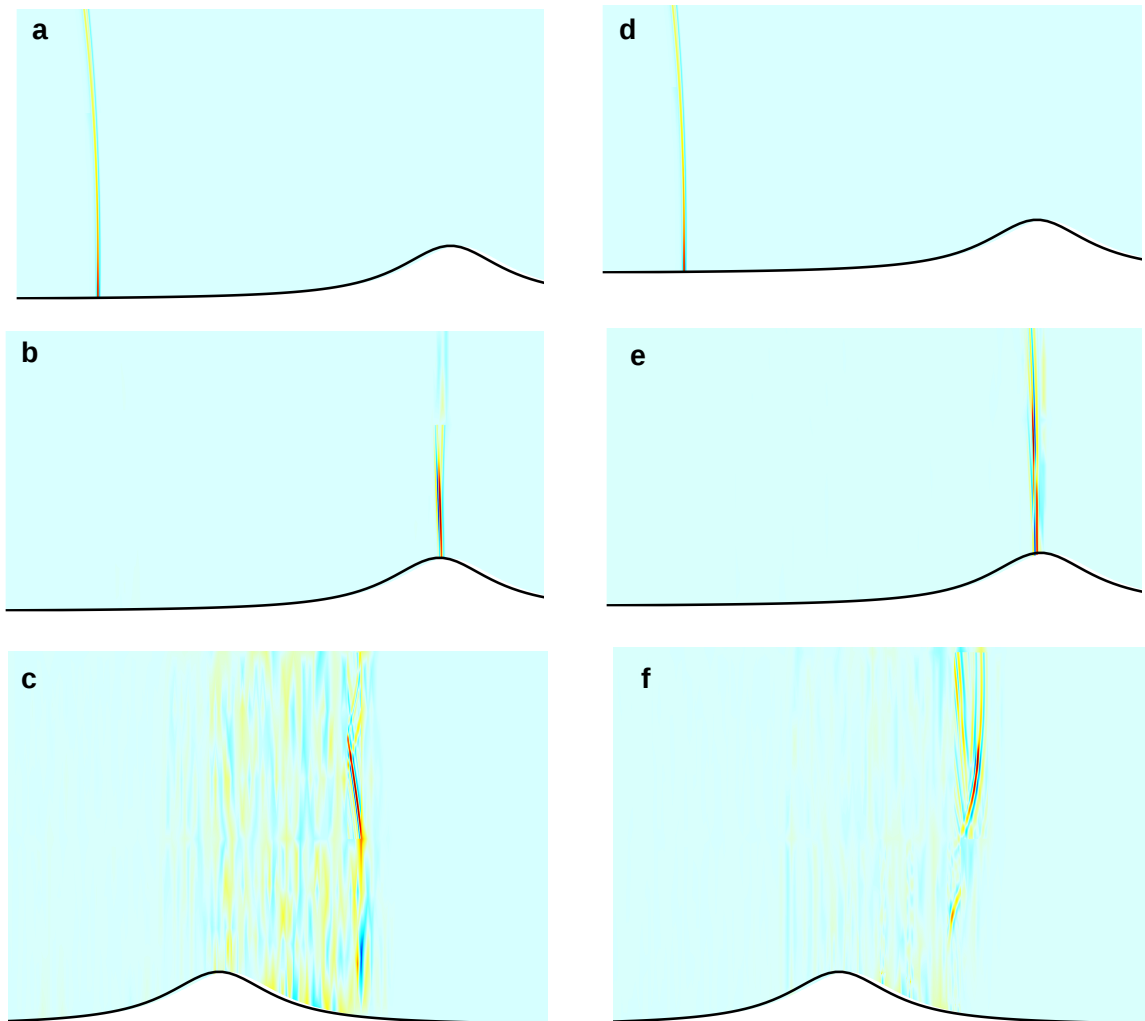


FIGURE 5.2 – Front d’onde acoustique se propageant au dessus d’une montagne caractérisée par $H_N = 0.9$ et $F_r = 2$. a, b et c : $J = 0, 3$. d, e et f : $J = 5$

montagne n’avait été utilisée, la montagne aurait agi tel un mur et aurait bloqué presque toute l’intensité acoustique en amont, générant ainsi une très forte atténuation en aval.

Les signaux acoustiques en aval à $x = 37$ km, résultant de ces deux propagations sont représentés en figure 5.3. Comme prédit avec les modes normaux et avec un modèle d’ondes de montagne linéaire, l’effet de Foehn conduit à une très forte atténuation du signal acoustique. Deux mécanismes ont été proposés pour expliquer l’atténuation. Le premier est dit “reversible” au sens où loin derrière la montagne, l’énergie manquante à basse altitude due à la propagation dans les guides supérieurs, sera de nouveau présente lorsque ces guides se seront atténués. La seconde, qui est irréversible, est due à l’énergie qui fuit vers les hautes altitudes et y restera piégée.

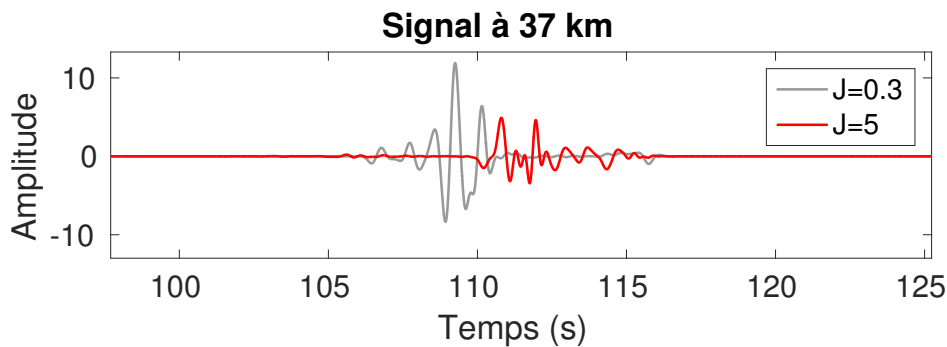


FIGURE 5.3 – Signal acoustique en aval ($x = 37$ km) pour les deux cas $J = 0.3$ (gris) et $J = 5$ (rouge)

5.1.3 La nécessité d'une approche stochastique

Plusieurs raisons ont été évoquées pour expliquer la complexité des signaux et des interactions qui est bien plus importante avec la combinaison des codes WRF / Freefem, que ce soit les réflexions / réfractions nombreuses induites par les petites structures non-linéaires de l'écoulement ou que ce soit les phénomènes de diffractions avec le sol. L'ensemble de ces interactions est régi par de nombreux paramètres : structures de la montagne, intensité de l'écoulement incident, etc. Ces paramètres peuvent être le résultat de campagne de mesures ou de simulations reposant sur un certain nombre d'hypothèses. Les diverses sources d'incertitudes en entrées des simulations sont alors propagées résultant en un signal aléatoire.

5.2 Une première analyse de l'effet des incertitudes sur les infrasons

5.2.1 La variabilité atmosphérique mesurée par le SSI

L'analyse continue des microbaromes et des profils atmosphériques grandes échelles peut fournir des indicateurs de la variabilité atmosphérique et des incertitudes associées. L'observatoire de Haute Provence (OHP)-UMS Pytheas, site de l'INSU et du CNRS pour l'astronomie, l'environnement et l'étude de l'atmosphère est situé une centaine de kilomètres au nord de Marseille. Cet observatoire accueille l'une des stations infrasons françaises. L'enregistrement en continu des signaux infrasonores captés à l'OHP regorge d'informations qu'il est possible d'extraire. En filtrant les enregistrements dans la gamme des fréquences 0.01-0.1 Hertz, fréquences associées aux ondes de montagne, il est possible d'estimer des plages horaires pour lesquelles il aurait pu y avoir une activité d'ondes de montagne. Pour obtenir la liste de tous les événements possibles, tous les enregistrements infrasonores du 1^{er} Janvier 2014 au 31 Décembre 2016 ont été filtrés dans cette gamme de fréquence résultant en un nombre important de détections, qui laisse alors penser qu'il est primordial de prendre en compte les perturbations orographiques dans cet environnement. Cependant, il reste à déterminer si les signaux capturés à l'OHP sont dûs aux ondes de montagnes ou proviennent d'acoustique produit par l'écoulement autour ou au

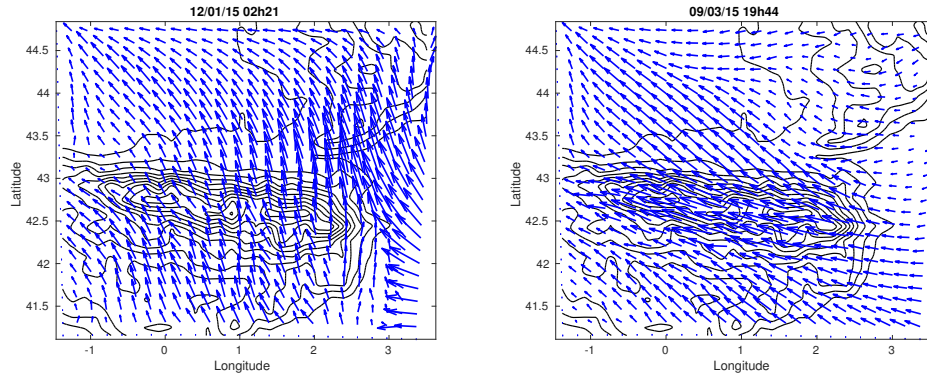


FIGURE 5.4 – Direction des vents, moyennés verticalement, pour les deux cas d'intérêts : le 12 Janvier 2015 à 02h21 et le 9 mars 2015 à 19h44.

dessus de la montagne. Pour répondre à cette question, nous avons choisi deux événements distincts, le 12 Janvier 2015 à 02h21 et le 9 mars 2015 à 19h44, événements pour lesquels une détection potentielle d'ondes de montagne a eu lieu. La carte des vents moyennés (figure 5.4) verticalement de 0 à 2 km montre que dans le premier cas, le vent est quasi-orthogonal à la chaîne montagneuse alors que dans le second cas, le vent la longe tangentiellement.

Afin de simuler l'écoulement atmosphérique au dessus de la montagne dans ces deux configurations, le modèle WRF initialisé avec les données ERA-interim a été utilisé. Pour garantir une plus grande précision, deux domaines imbriqués ont servi à l'intégration des équations, avec une résolution de 4×4 km et 1×1 km. La composante verticale w a souvent été utilisée par le passé pour fournir des diagnostics systématiques d'ondes de montagne [Pokharel et al., 2017]. Dans notre cas, la figure 5.5 représente la composante verticale de vitesse du vent à $z = 2000$ m ainsi qu'une coupe longitudinale pour les 2 cas. Cette figure nous montre une très forte activité au dessus de la montagne lorsque le vent incident est orthogonal à la chaîne montagneuse et une signature d'ondes piégées en aval de la montagne. Dans l'autre cas, il ne semble pas y avoir d'activité relative aux ondes de montagne. Ainsi ces simulations semblent confirmer que la direction du vent incident est un critère discriminant pour la présence d'ondes de montagne [Elvidge and Renfrew, 2016, Sheridan et al., 2007].

Une étude systématique devra être menée afin de montrer que toutes les détections, pour lesquelles le vent incident est orthogonal (dans certaines limites à spécifier), correspondent bien à des ondes de montagne. Si tel est le cas alors on comprend, au vue de leur fréquence (1 jour sur 2), l'intérêt de prendre en compte les perturbations liées aux ondes de montagne lors de la propagation acoustique.

5.2.2 Analyse de sensibilité du modèle d'onde de montagne

La réponse de l'écoulement à la présence d'une montagne a été discutée, en fonction des paramètres de l'écoulement, dans le chapitre 3 ainsi que dans [Lott, 2016]. Pour parfaire cette étude, il est important de noter que le nombre de Richardson J est un paramètre adimensionnel, estimé à partir de données atmosphériques qui peuvent être entachées d'incertitudes. En effet, J

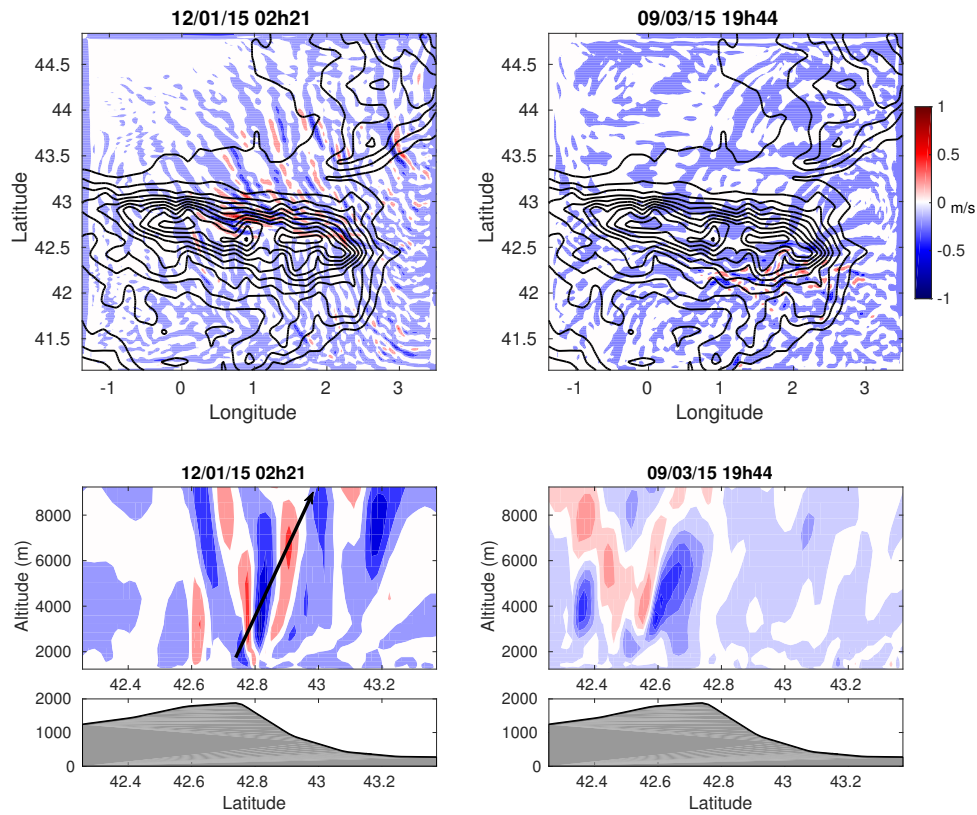


FIGURE 5.5 – Carte des vents verticaux issus de simulations WRF 3D de deux écoulements au dessus des Pyrénées.

mesure le cisaillement au sol et est défini dans notre étude comme un ratio impliquant le vent au dessus de la montagne, la stabilité mais aussi la hauteur de couche limite. Ces trois paramètres sont issus de mesures qui peuvent être imprécises et surtout rarement disponibles à l'endroit désiré. Ce constat nous amène donc à étudier l'impact d'incertitudes, au sens statistique, sur l'écoulement final : quelle est la sensibilité de notre modèle aux incertitudes sur les paramètres d'entrées ? Notons que si nous considérons dans notre étude J comme un paramètre aléatoire, caractérisé par une densité de probabilité, alors dans l'espace physique les paramètres U_0 , N_0 et d sont elles aussi aléatoires, par définition de J .

Pour quantifier la sensibilité des ondes de gravité, générées par le modèle linéaire, aux paramètres U_0 , N_0 et d , nous analysons comment de petites variations impactent la variabilité du résultat. Pour ce faire, nous avons décidé de synthétiser l'intensité de la réponse atmosphérique en un seul scalaire : l'intensité du vent en aval A , comme défini dans la section précédente. Cette variable est supérieure ou égale à 1 lorsque l'amplitude des vents est plus importante en aval qu'au sommet de la montagne. Nous avons vu dans la section précédente, grâce au modèle théorique, que cela était couplé à un important réchauffement de la surface en aval, signe distinctif de l'effet de Foehn. Pour quantifier comment un paramètre $(P_i)_{i \in \{1, K\}}$ (où dans notre étude $K = 3$, $P_1 = U_0$, $P_2 = N_0$ et $P_3 = d$) contribue à la variance des champs atmosphériques synthétisé par la variance de A notée $\mathbb{V}[A]$, une méthode classique et communément utilisée en

quantification des incertitudes revient à estimer la décroissance de la variance lorsque l'on fixe le paramètre P_i . Ce peut être réalisé en étudiant les indices de Sobol du premier ordre défini par

$$S_i = \frac{\mathbb{V}(\mathbb{E}[A|P_i])}{\mathbb{V}(A)}. \quad (5.4)$$

Les indices de Sobol fournissent alors immédiatement la réponse recherchée : plus S_i est grand, plus le paramètre P_i contribue à la variabilité de A .

La méthode présentée ici, repose sur une estimation par méthode Monte-Carlo des espérances conditionnelles. Le calcul des indices de Sobol nécessite l'estimation de $\mathbb{V}(\mathbb{E}[A|P_i])$ qui peut être obtenue à partir de :

$$\mathbb{V}_i = \mathbb{V}(\mathbb{E}[A|P_i]) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[A|P_i]^2] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[A|P_i]]^2 = Q_i - \mathbb{E}[A]^2, \quad (5.5)$$

où $Q_i = \mathbb{E}[\mathbb{E}[A|P_i]^2]$. De cette manière l'estimation de l'indice de Sobol revient principalement à l'estimation de Q_i , c'est à dire l'espérance du carré de l'espérance de A conditionnellement à P_i . Cela s'obtient de la même manière que pour une espérance classique, mais en tenant compte du conditionnement par P_i et donc en faisant varier entre deux appels à la fonction A toutes les variables sauf la variable P_i . Ceci nécessite à chaque appel de la fonction deux échantillons de paramètres $(P_1^{(1)}, \dots, P_K^{(1)})$ et $(P_1^{(2)}, \dots, P_K^{(2)})$. Nous estimons cette variance conditionnelle avec l'estimateur classique :

$$\hat{Q}_i = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N A(P_{1;l}^{(1)}, \dots, P_{i;l}^{(1)}, \dots, P_{K;l}^{(1)}) A(P_{1;l}^{(2)}, \dots, P_{i;l}^{(2)}, \dots, P_{K;l}^{(2)}), \quad (5.6)$$

où pour chaque indice l nous retirons deux échantillons de paramètres. Ainsi les indices de sensibilité du premier ordre sont estimés par

$$\hat{S}_i = (\hat{Q}_i - \hat{\mathbb{E}}^2) / \hat{\mathbb{V}} \quad (5.7)$$

Cette procédure a été suivie afin d'estimer les indices du premier ordre de notre modèle d'ondes de montagne. Pour rappel dans notre cas, nous fixons la hauteur de la montagne $H = 500$ m ainsi que sa largeur $L = 2500$ m. Nous faisons uniquement varier J au travers de U_0 , N_0 et d . Nous supposons que chacun de ces 3 paramètres suit une loi normale centrée en $U_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$, $N_0 = 0.02 \text{ s}^{-1}$ et $d = 800$ m, de variance 15% de leurs valeurs moyennes.

Nous avons utilisé des échantillons de 1000 réalisations. Afin de calculer les indices de Sobol, en utilisant (5.6) il a été nécessaire d'utiliser 4 échantillons différents et donc 4000 réalisations au total. Il a été vérifié que 1000 réalisations étaient suffisantes pour fournir un résultat précis au pourcent.

La figure (5.6) représente la variance totale de la perturbation de vent horizontal. On observe une zone de variance importante le long de la montagne qui est liée à la variation importante de l'effet de Foehn avec J . La variance est aussi très importante aux plus hautes altitudes. Cela est dû au fait que comme U_0 et N_0 varient, la longueur d'onde caractéristique varie aussi et donc les extréma locaux de $z \mapsto u'(x, z)$ sont plus ou moins hauts et plus ou moins importants selon les cas et entraînent des zones de fortes variances. Ce modèle d'ondes de gravité est régi par des lois physiques non chaotiques. La variance observée est donc assez lisse.

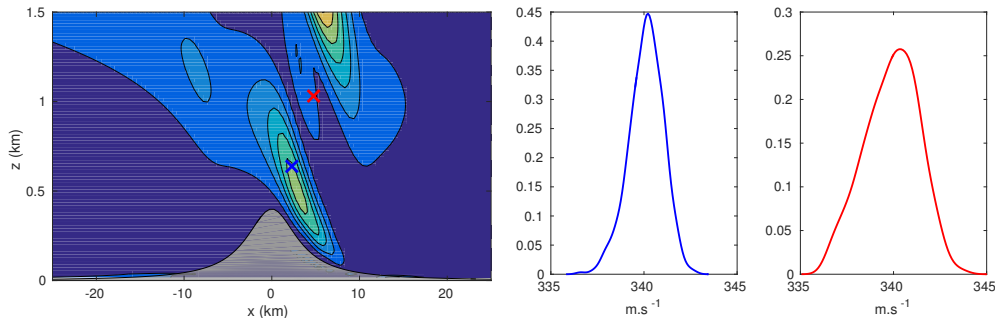


FIGURE 5.6 – Gauche : Variance de la composante horizontale du vent, estimée avec 1000 simulations. Droite : Densité de probabilité du champ de célérité effective, estimée aux deux points représentés par les croix.

Afin de quantifier la contribution de chaque paramètre à cette variance, les indices de Sobol du premier ordre donnent

$$S_{U_0} = 0.51; S_{N_0} = 0.17; S_d = 0.07. \quad (5.8)$$

La première remarque est que les indices de Sobol du premier ordre expliquent à 75% ($S_{U_0} + S_{N_0} + S_d$) la variance du champ. 25% de la variance est donc due à l'interaction des variables U_0 , N_0 et d entre elles. On constate aussi que la vitesse maximale de l'écoulement incident est la variable sur laquelle il faut concentrer nos efforts de simulation du fait de sa lourde contribution à la variance totale.

5.2.3 Impact sur la propagation acoustique

Afin de donner un premier aperçu de l'impact d'incertitudes atmosphériques (liées aux ondes de montagne) sur la propagation acoustique, nous avons entrepris la propagation acoustique au travers de 128 champs aléatoires. Ces champs ont été générés selon les lois exposées dans la partie précédente, à savoir avec un écoulement incident moyen caractérisé par $U_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$, $N_0 = 0.02 \text{ s}^{-1}$ et $d_0 = 800 \text{ m}$. Les signaux résultent de simulations par la méthode des éléments finis.

La figure 5.7 représente le signal moyen résultant de ces 128 simulations auquel nous avons superposé la variance du signal, estimée au moyen de l'estimateur classique sans biais. On constate une forte variabilité du train d'ondes principal, tant au niveau de l'amplitude maximale que de la durée. Cette dernière peut s'expliquer par la fragmentation du front d'ondes au fil des petites structures atmosphériques rencontrées (figures ?? à ??). Pour mettre en avant le potentiel impact sur l'amplitude du signal au sol, nous avons calculé pour chaque réalisation, l'atténuation ou l'amplification de l'intensité acoustique en pourcentage. Cette atténuation / amplification est calculée par rapport au signal obtenu lorsque le champ correspond au champ moyen, à savoir avec U_0 , N_0 et d . Pour ce faire, nous avons utilisé la même méthode que dans le chapitre précédent section 4.5. La densité de probabilité de la perturbation a été estimée via un estimateur à noyau. Le noyau d'Epanechnikov², minimisant la norme L^2 , a été utilisé. À pre-

2. $K(u) = 3/4(1 - u^2)\mathbb{1}_{|u| \leq 1}$

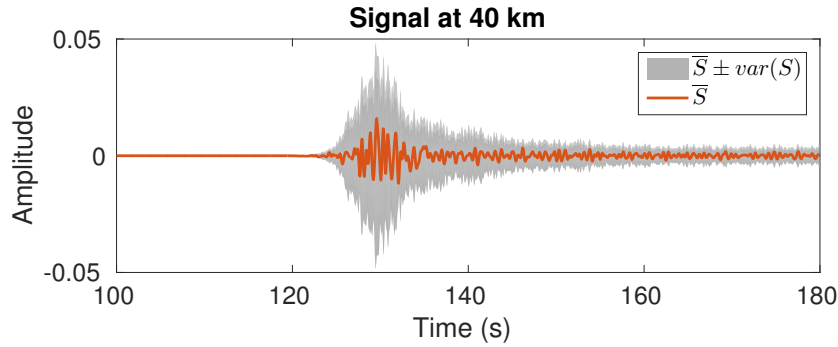


FIGURE 5.7 – Signal moyen (rouge) et sa variance (gris) en aval de la montagne, estimés à partir de 128 simulations

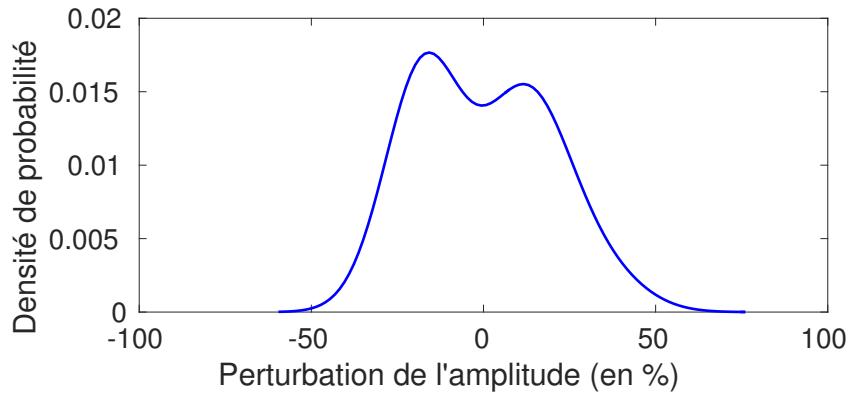


FIGURE 5.8 – Densité de probabilité estimée de l'amplitude de la perturbation par rapport à la simulation moyenne.

mière vue (Figure 5.8) l'impact semble très important, motivant réellement la prise en compte de cet aléa. Cependant une telle approche basée sur la méthode des éléments finis possède un coût numérique non négligeable. De ce constat, nous avons essayé de proposer un modèle probabiliste de propagation acoustique, modèle basé sur la décomposition sur une base de modes normaux aléatoires. À ce jour ce modèle a certaines faiblesses (absence de couplage, prise en compte des modes sortants, hypothèse d'indépendance entre modes...) qui nécessitent un travail plus important afin d'être validé. Un travail préliminaire est présenté en annexe A.4.

Soulignons que dans cette partie, les diverses réalisations du champ d'ondes de montagne sont le résultat du modèle linéaire. Ce modèle présente l'intérêt d'être quasi-analytique et donc d'avoir un coût numérique négligeable. L'utilisation de méthode type Monte-Carlo avec un code non-linéaire comme WRF, demanderait un coût trop important, rendant son utilisation opérationnelle impossible. Un modèle stochastique d'ondes de montagne possédant les bonnes propriétés dynamiques est donc nécessaire. La compréhension des divers mécanismes de l'écoulement peut fournir un premier angle d'attaque pour la construction d'un tel modèle, c'est là l'objectif de la prochaine partie.

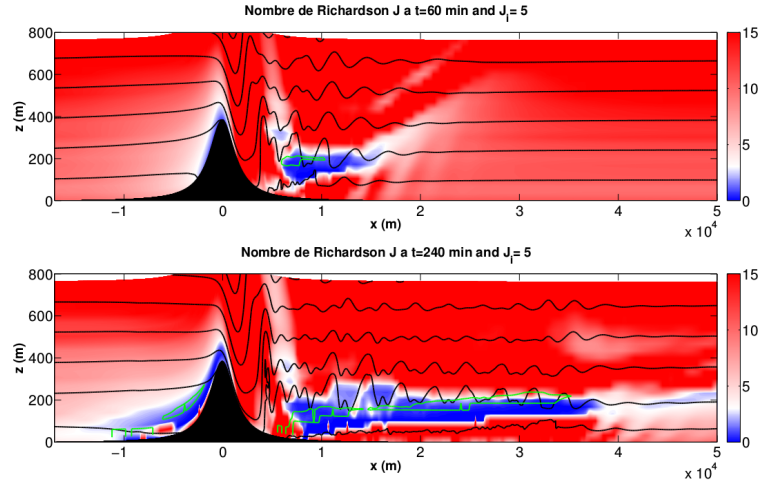


FIGURE 5.9 – Développement d’une instabilité en aval de la montagne.

5.3 Identification des structures par modes de Koopman

5.3.1 Décomposition d’un écoulement en structures cohérentes

La décomposition du champ d’ondes en différentes structures peut permettre une meilleure compréhension des mécanismes d’interactions. Cette démarche a été suivie au chapitre précédent, dans lequel nous avons isolé l’effet du Foehn via un profil, défini par (4.16), mimant la structure du guide d’onde de basse altitude. Cependant cette approche possède certaines limitations. Tout d’abord la forme du profil $\bar{c}(z)$ est définie à priori et est propre à notre étude, un autre profil de vent incident nous imposerait un nouveau profil, rendant alors impossible l’utilisation systématique de cette méthode. De plus en présence de mécanismes non-linéaires (déferlements, rotors, etc) la dynamique peut présenter d’importants changements en quelques heures [Strauss et al., 2016, Epifanio and Qian, 2008]. En particulier, il a été mis en exergue ([Soufflet et al. 2018]) que pour certaines valeurs de J , un ressaut hydraulique peut se produire en aval ([Lott, 2016]) et, de fait, modifier la stabilité (et donc la nature) de l’écoulement. À titre d’exemple, considérons une grande montagne ($H_N = 0,7$) et un écoulement associé à un grand nombre de Richardson $J = 5$. Afin de caractériser l’écoulement, la figure 5.9 représente après 1 heure (haut) et 4 heures (bas) le nombre de Richardson³ défini par :

$$J = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}, \text{ avec } N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Après une heure de simulation on constate que J est supérieur à 3 dans presque tout le domaine considéré, excepté dans une zone en aval sous le sommet où le nombre de Richardson

3. Au sol et en amont, ce nombre de Richardson est celui utilisé dans les chapitres 3 et 4.

est inférieur à 3 (zone bleue). À $t = 4h$, la zone s'est étendue tout le long du flan aval de la montagne et coïncide avec un fort gradient vertical de U . D'autre part, les valeurs de J y sont inférieures à 0.25, valeur représentée par un contour vert. Ainsi d'après le critère de Miles [Miles, 1961], l'écoulement à l'intérieur de cette zone critique peut développer des instabilités. De plus des ondes piégées semblent être provoquées par le caractère instable de l'écoulement en aval de la montagne.

La figure 5.9 montre que la dynamique de l'écoulement peut créer une zone d'instabilité hydrodynamique pouvant fortement impacter la structure des champs. Ces instabilités se développent avec une échelle de temps inférieure au pas de discrétisation temporelle des données utilisées pour la propagation acoustique. De fait ce genre de mécanismes peut être une grande source d'incertitudes, il paraît alors nécessaire d'en tenir compte. Cependant l'évolution dans le temps de l'écoulement et les petites échelles liées aux non-linéarités rendent impossible la dissociation de l'écoulement en structures indépendantes, comme réalisée au chapitre précédent : une méthode alternative doit être trouvée. La décomposition modale d'un écoulement est un bon candidat en extrayant les structures d'intérêts ou les plus sensibles de l'écoulement. Nous proposons dans cette partie de décomposer la dynamique de l'écoulement sur une base de modes de Koopman via la *Décomposition en Modes Dynamiques*. L'application de la *DMD* fournit une décomposition du champ g (où g peut être la vitesse, la température, etc) sous la forme :

$$g(x, z; t) = \sum_j \alpha_j(t) \mu_j(x, z).$$

L'objectif étant de séparer les termes de la décomposition en fonction de leur persistance et de l'échelle des structures qu'elles représentent. On souhaite écrire :

$$g(x, z; t) = \sum_{j \leq N} \alpha_j(t) \mu_j(x, z) + \epsilon \sum_{j \geq N} \alpha_j(t) \mu_j(x, z),$$

où $\sum_{j \geq N} \alpha_j(t) \mu_j(x, z) = \mathcal{O}(1)$. La première somme correspondrait à la dynamique la plus marquée et persistante des ondes de montagne. Le second terme serait alors assimilé à un bruit normalisé. Ce caractère aléatoire permet alors de prendre en compte, a posteriori, les différentes sources d'incertitudes inhérentes à la simulation d'un champ d'ondes de gravité : erreurs d'estimations ou de mesures des paramètres d'entrée du modèle, erreurs de modèles, etc.

5.3.2 Opérateur d'évolution et opérateur de Koopman

Considérons un système dynamique évoluant sur une variété $\mathcal{D}$ de dimension $n_{\mathcal{D}}$, $\mathbf{X} \in \mathcal{D}$ le vecteur d'état du système. Soit encore $F_{\Delta t}$ le flot dynamique du système, de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$, amenant l'état $\mathbf{X}(t)$, pris au temps t , à l'état $\mathbf{X}(t + \Delta t)$ au temps $t + \Delta t$. Δt est l'intervalle de temps entre deux mesures. Alors :

$$\mathbf{X}(t + \Delta t) = F_{\Delta t}(\mathbf{X}(t)). \quad (5.9)$$

On considère une application g de l'espace $\mathcal{D}$ sur l'espace des observables Ω . g peut être interprétée comme une mesure du système. L'observable $\mathbf{u}$ est alors définie comme :

$$\mathbf{u}(t) = g(\mathbf{X}(t)). \quad (5.10)$$

CHAPITRE 5. PROPAGATION DES INFRASONS DANS UN CHAMP D'ONDES DE MONTAGNE INCERTAIN

Par exemple $\mathbf{u}$ peut être le champ de vitesse mesuré dans un plan de l'écoulement. L'idée principale de la *Décomposition en Modes Dynamiques* est d'introduire un opérateur d'évolution K_t sur l'espace des observables. Pour ce faire l'opérateur K_t est construit tel que :

$$K_t \circ g = g \circ F_{\Delta t}, \quad (5.11)$$

où $\circ$ est l'opérateur de composition. Lorsque l'opérateur K_t est appliqué à une observable $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} K_t(\mathbf{u}(t_0 + n\Delta t)) &= K_t \circ g(\mathbf{X}(t_0 + n\Delta t)), \\ &= g \circ F_{\Delta t}(\mathbf{X}(t_0 + n\Delta t)), \\ &= g(\mathbf{X}(t_0 + (n+1)\Delta t)), \end{aligned}$$

Il suit :

$$K_t(\mathbf{u}(t_0 + n\Delta t)) = \mathbf{u}(t_0 + (n+1)\Delta t). \quad (5.12)$$

Cette propriété est déterminante. Elle implique que K_t est un opérateur d'évolution qui agit sur une réalisation du champ, pour renvoyer la réalisation suivante. Cette propriété provient du lien entre K_t et l'opérateur de Koopman [Rowley et al., 2009, Schmid, 2010], un opérateur linéaire de dimension infinie. En effet, on définit $\mathcal{K}$ l'opérateur de Koopman associé à la dynamique $F_{\Delta t}$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \mathcal{F}(\mathcal{D}, \Omega) &\mapsto \mathcal{F}(\mathcal{D}, \Omega) \\ g &\rightarrow \mathcal{K}g = g \circ F_{\Delta t}, \end{aligned}$$

alors l'opérateur d'évolution K_t dépend de l'opérateur de Koopman par la relation

$$\mathcal{K}(g(\mathbf{X})) = K_t \circ g(\mathbf{X}).$$

Par la suite on notera $K_t = K$. Supposons que l'opérateur K est diagonalisable, et que ses vecteurs propres forment une base de l'espace hilbertien des observables, et notons Φ_i un vecteur propre de K associé à la valeur propre λ_i :

$$K\Phi_i = \lambda_i\Phi_i. \quad (5.13)$$

La famille des $\{\Phi_i\}$ est de dimension infinie et toute mesure g de l'état du système peut se décomposer sur cette base :

$$g(\mathbf{X}_k) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \Phi_i(\mathbf{X}_k), \quad (5.14)$$

où α_i est la projection de h sur la base des $\{\Phi_i\}$. Notons que la base n'est pas orthogonale a priori et que la projection est donc non-normale a priori. Les α_i sont les coefficients de Koopman. La généralisation à une observable g non scalaire, par exemple deux composantes du champ de vitesse mesurées dans un plan par des techniques de vélocimétrie par images de particules, est immédiate ; le coefficient α_i , complexe, pourra avoir autant de composantes que g .

On peut remarquer une importante propriété des modes de Koopman :

$$g(\mathbf{X}_{k+1}) = Kg(\mathbf{X}_k) = K\left(\sum_{i \geq 1} \Phi_i(\mathbf{X}_k)\alpha_i\right) = \sum_{i \geq 1} K\Phi_i(\mathbf{X}_k)\alpha_i = \sum_{i \geq 1} \lambda_i \Phi_i(\mathbf{X}_k)\alpha_i. \quad (5.15)$$

Par récurrence, on obtient donc :

$$g(\mathbf{X}_k) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^k \Phi_i(\mathbf{X}_0) \alpha_i. \quad (5.16)$$

Le résultat remarquable est que, si un opérateur d'évolution tel que K existe c'est à dire que la dynamique (non-linéaire) sous jacente est déterministe, alors toute valeur prise par g peut se déduire de la connaissance de la projection de la condition initiale $g(\mathbf{X}_0)$ sur la base des $\Phi_i(\mathbf{X}_0)$, et des valeurs propres λ_i . On voit grâce à cette formulation l'importance des valeurs propres de Koopman : le module de λ_i représente son taux d'accroissement alors que sa phase, permet de déterminer la fréquence associée au mode d'indice i . Les modes Φ_i représentent la corrélation spatiale entre les différents clichés. D'autre part, si la dynamique du système évolue sur un attracteur non dégénéré, *i.e.* si l'image de la variété Ω est Ω , alors K est un opérateur unitaire, le théorème spectral assurant que les valeurs propres sont sur le cercle unité, ses vecteurs propres Φ_i étant orthogonaux, et $(Kf, Kg) = (f, g)$. L'opérateur K est alors un automorphisme de la variété, et la décomposition de l'équation (5.14) est complète.

5.3.3 Estimation des modes propres de l'opérateur

Opérateur similaire

L'algorithme DMD repose sur les propriétés des matrices similaires, où l'on dit que M_2 est similaire à M_1 si $\text{rang}(M_2) \leq \text{rang}(M_1)$, et s'il existe une matrice P telle que :

$$PM_2 = M_1P. \quad (5.17)$$

Alors une valeur propre λ de M_2 , ayant pour vecteur propre associé v , est une valeur propre de M_1 . De plus, le vecteur propre μ de M_1 associé à λ est facilement calculable à partir de v par la relation $\mu = Pv$. Connaître une matrice similaire permet donc de calculer une partie des propriétés spectrales sur la matrice de grande dimension M_1 . Dans le cas présent, $M_1 = K$ et l'objectif est d'identifier une matrice similaire $M_2 \equiv C$. À priori K est inconnu, en revanche, on peut disposer d'un ensemble de réalisations K_i^j de l'observable :

$$K_i^j = \{\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_j\},$$

où $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_0 + n\Delta t)$. K_i^j est par la suite exprimé matriciellement, *i.e.* l'observable est représentée par un vecteur colonne. Par conséquent :

$$\begin{aligned} KK_i^j &= \{K\mathbf{u}_i, \dots, K\mathbf{u}_j\} \\ &= \{\mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_{j+1}\} \\ &= K_{i+1}^{j+1}. \end{aligned}$$

Dans la suite, le jeu de données K_1^{N+1} sera utilisé, où $N + 1$ est le nombre de réalisations du champ de données. La relation suivante sera en conséquence au coeur de la méthode proposée :

$$KK_1^N = K_2^{N+1}. \quad (5.18)$$

Méthode par matrice compagnon

Une méthode pour construire une matrice similaire est de faire l'hypothèse que la réalisation $N + 1$ est linéairement dépendante des N premières réalisations de l'ensemble K_1^{N+1} . Cette hypothèse prend du sens si l'enregistrement dure suffisamment longtemps pour couvrir l'essentiel de la dynamique. Dès lors, rajouter des réalisations du champ au jeu de données ne rajoutera pas d'information nouvelle. Alors l'échantillon $\mathbf{u}_{N+1}$ peut être développé sur les réalisations précédentes :

$$\mathbf{u}_{N+1} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_N \mathbf{u}_N + \epsilon_{N+1}, \quad (5.19)$$

où ϵ_{N+1} est un résidu, qui permet de contrôler l'hypothèse faite précédemment. Les c_i peuvent être calculés par minimisation de la norme du résidu :

$$\mathbf{c}_{opt} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{c}} \left\| \mathbf{u}_{N+1} - \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{u}_j \right\|. \quad (5.20)$$

Cette minimisation de norme peut se faire, lorsque l'on considère la norme L^2 , par le biais d'une projection oblique sur le dernier échantillon $\mathbf{u}_{N+1}$ de la matrice K_1^N :

$$\mathbf{c}_{opt} = (K_1^{N^T} K_1^N)^{-1} K_1^{N^T} \mathbf{u}_{N+1}, \quad (5.21)$$

où T est la transposition hermitienne. Alors en considérant l'équation (5.18) on a :

$$K_2^{N+1} = K_1^N C + R, \quad (5.22)$$

où R est un résidu matriciel et C une matrice compagnon, qui envoie la $i^{\text{ème}}$ réalisation sur la réalisation suivante $(i + 1)$, à l'exception notable de la dernière, qui est développée selon l'équation (5.19), c'est-à-dire :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & & \vdots & c_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & c_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_N \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Si R est négligé, alors la matrice compagnon est similaire à l'opérateur d'évolution K :

$$K K_1^N = K_1^N C. \quad (5.24)$$

Nous présentons en annexe A.5 une application simple de la DMD à la succession de 4 clichés, permettant d'illustrer succinctement la mise en pratique de cette méthode.

Exemple d'un système dynamique 1D

Considérons l'exemple simple d'un système dynamique à une dimension,

$$x' = -\lambda x, \quad \lambda > 0. \quad (5.25)$$

Les trajectoires sont données par $F_t(x_0) = x_0 e^{-\lambda t}$. Choisissons comme observable, le système lui même $g(x) = x$. Nous avons alors

$$K_t g(x) = g(x e^{-\lambda t}) = x e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} g(x), \quad (5.26)$$

et donc $g(z) = z$ est une fonction propre de l'opérateur de Koopman associée à la valeur propre $-\lambda$. De la même manière $g(x) = x^n$ est fonction propre associée à $-n\lambda$. Ainsi malgré le fait que la dynamique elle même soit linéaire, les modes de l'opérateur de Koopman ne sont pas nécessairement linéaires. Ces fonctions sont denses dans l'espace des fonctions analytiques de $\mathbb{R}$, ainsi des observables non linéaires de la dynamique linéaire peuvent être représentés par la décomposition sur une base de modes de Koopman.

Les modes de Koopman pour une dynamique linéaire

Dans le cas d'une dynamique régie par une équation (d'onde par exemple) linéaire, nous pouvons réécrire (5.9) dans le cas de la dynamique régie par un opérateur linéaire A , sous la forme

$$F_t(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Il en ressort que les valeurs propres de A sont aussi les valeurs propres de l'opérateur de Koopman $\mathcal{K}$ associé à ce problème, de même les vecteurs propres de A sont reliés aux fonctions propres de $\mathcal{K}$. Soit $\mathbf{v}_j$ les vecteurs propres de A et λ_j les valeurs propres associées :

$$A\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j, \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

et définissons les fonctions à valeurs scalaires :

$$\Phi_j(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_j \rangle, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Ainsi en utilisant le caractère autoadjoint de A on obtient que les fonctions Φ_j sont des fonctions propres de $\mathcal{K}$, en effet :

$$\mathcal{K} \Phi_j(\mathbf{x}) = \Phi_j(A\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{x}, A^* \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{v}_j \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_j \rangle = \lambda_j \Phi_j(\mathbf{x}).$$

Remarquons cependant que, au contraire de A , l'opérateur $\mathcal{K}$ a une infinité de valeurs propres, car λ_j^k est aussi valeur propre associée à la fonction propre $\Phi_j(\mathbf{x})^k$, pour tout entier k . Maintenant, exprimant $\mathbf{x}$ dans la base des vecteurs propres de A , on obtient :

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_j \rangle \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \Phi_j(\mathbf{x}) \mathbf{v}_j,$$

On peut donc conclure que pour tout système linéaire, les valeurs propres de l'opérateur de Koopman coïncident avec les vecteurs propres de A .

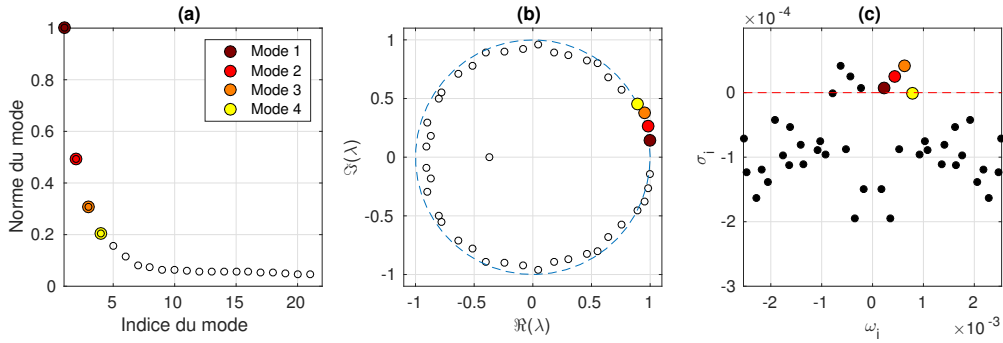


FIGURE 5.10 – Représentations des modes DMD à partir des simulations WRF, avec 12 heures de données. (a) : Amplitude des modes de Koopman ; (b) : Spectre dans le plan complexe ; (c) : Pulsation du spectre en fonction du taux de croissance.

5.3.4 Application à la dynamique des ondes de montagne

Nous appliquons dans cette partie l'algorithme DMD au cas de simulation WRF (figure 5.9). Pour cette étude, l'état que nous utilisons est

$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k],$$

où $\mathbf{u}_k$ est la composante horizontale du vent et $\mathbf{w}_k$ est la composante verticale, à l'instant k . Nous étudions la dynamique durant 12 heures et l'intervalle de temps entre deux états, noté δt est égal 5 minutes, nous avons donc à notre disposition 145 clichés de l'état au dessus de la montagne. Pour une étude DMD 2D dans un plan vertical, discrétisé horizontalement selon $r_1, r_2, \dots, r_p$ et verticalement selon $z_1, z_2, \dots, z_N$, le vecteur $\mathbf{u}_k$, de taille NP, se construit par concaténation des profils de vent pour chaque coordonnée horizontale :

$$\mathbf{u}_k = [u_k(r_1, z_1), u_k(r_1, z_2), \dots, u_k(r_1, z_N), u_k(r_2, z_1), \dots, u_k(r_2, z_N), \dots, u_k(r_p, z_N)]^T,$$

où $u_k(r, z)$ est le vent horizontal aux coordonnées r, z de la discrétisation du plan vertical, à la date t_k . Le vecteur $\mathbf{w}_k$ se construit de la même manière. Nous considérons le produit scalaire $\langle, \rangle$, suivant :

$$\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle_x = \left\langle \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \right\rangle$$

avec ρ la masse volumique, et $\langle, \rangle$ le produit scalaire L^2 (pour lequel les intégrales sur le domaine sont approchées avec la méthode des trapèzes). Ce produit scalaire permet d'avoir une quantité homogène à une énergie cinétique.

La figure 5.10(a) représente l'amplitude des modes DMD définie par $|\Phi_i(\mathbf{X}_0)\alpha_i|$. Contrairement à l'analyse via une décomposition orthogonale aux valeurs propres (ou POD), l'amplitude des modes n'est pas un critère en soi de la pertinence d'un mode en terme de dynamique, car un mode qui a une très forte amplitude peut en contrepartie être fortement amorti. Les valeurs propres, représentées dans le plan complexe en figure 5.10(b), se situent approximativement autour du cercle unité, ce qui indique que les clichés se répartissent à proximité d'un attracteur. À

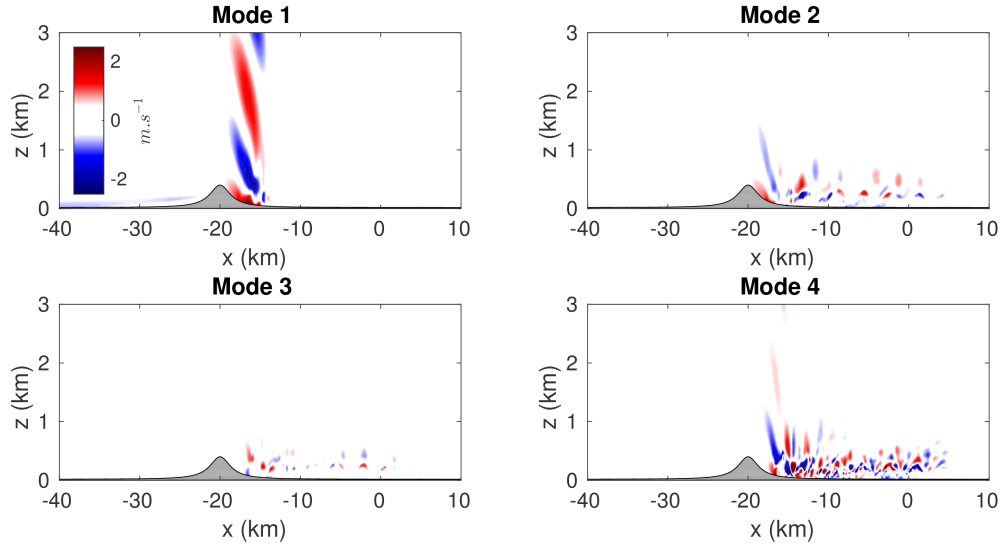


FIGURE 5.11 – Représentations des 4 modes prédominants $\Phi_i(\mathbf{X}_0)$.

ce stade, rappelons que les valeurs propres qui ont un module plus grand que un (*i.e.* en dehors du disque unité) sont des valeurs propres amplifiées au cours du temps ; inversement lorsque le module est inférieur à un, elles sont amorties. Afin d'étudier le comportement temporel et la structure spatiale de chaque mode, il est classique d'introduire le taux de croissance σ_i défini par $\sigma_i = \ln(|\lambda_i|)/\Delta t$ et à pulsation $\omega_i = \arg(\lambda_i)/\Delta t$, de chaque valeur propre. De cette manière la décomposition sur cette base de mode (5.16) peut se réécrire :

$$g(\mathbf{X}_t) = \sum_{j \geq 1} e^{i\omega_j t} e^{\sigma_j t} \Phi_j(\mathbf{X}_0) \alpha_j. \quad (5.27)$$

Ainsi la stabilité du mode dépend directement du signe de σ_i et la taille des structures spatiales du mode dépend de la pulsation, au même titre que l'inverse du nombre d'onde est relié à la pulsation dans le cas de l'acoustique linéaire. Dans cette représentation, figure 5.10(c), le spectre est symétrique par rapport à l'axe imaginaire $\omega_i = 0$, ce qui est une conséquence du fait que les données sont à valeurs réelles. En effet, dans ce cas particulier, les valeurs propres et les vecteurs propres associés sont réels ou complexes conjugués. Un autre fait intéressant, est que les valeurs propres se positionnent par paquets sur différents arcs, une caractéristique souvent observée lors du calcul numérique d'un spectre d'opérateur. Pour un arc donné, les structures présentent le même support dans le domaine de l'écoulement mais sont caractérisées par un nombre d'onde différent (voir par exemple [Barbagallo et al., 2011])

Quatre modes dynamiques ont été extraits en se concentrant sur leur taux d'accroissement, la figure 5.10(c) suggérant que quatre paires de modes devraient être suffisantes pour obtenir une bonne description de la dynamique. En effet les autres modes possèdent un taux d'accroissement négatif et seront, de fait, fortement atténués, leurs contributions après 12 heures seront donc négligeables. Ce choix de quatre modes est motivé par l'hypothèse selon laquelle dans la période d'observation utilisée pour extraire les données, les structures étaient persistantes et représentatives des structures grandes échelles de l'écoulement. La suite de modes représentée en

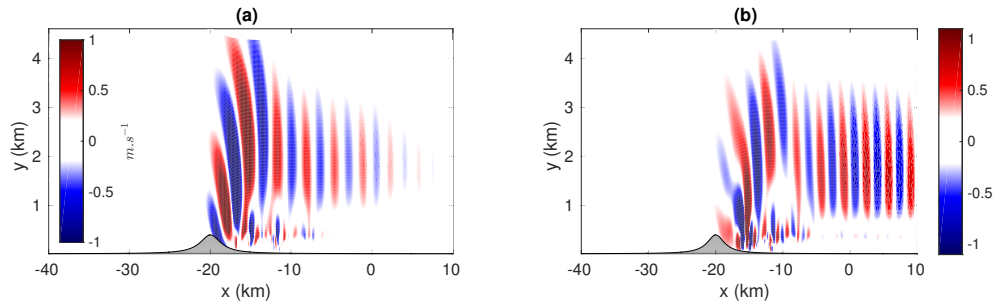


FIGURE 5.12 – (a) : $w(x, z)$ après 12 heures de simulations ; (b) Somme (5.16) tronquée aux 4 modes dominants.

figure 5.11 montre que lorsque la pulsation ω_i du mode augmente, les structures spatiales modélisées par ce mode sont plus petites, illustrant un rapport d'échelle dominant entre l'échelle locale de l'écoulement et sa fréquence temporelle. Ceci suggère que la décomposition en mode dynamique a réussi à extraire une relation de dispersion valide (bien que approximée) des données expérimentales. L'analyse de la structure spatiale des modes révèle, sans surprise, que les supports de ces modes sont clairement concentrés en aval de la montagne, et cela devient de plus en plus marqué lorsque l'échelle spatiale diminue. Plus précisément, le mode 1 est associé à une pulsation basse, traduisant les grandes structures de l'écoulement telles que les ondes se propageant verticalement au dessus de la montagne. Les 3 autres modes correspondent très clairement à des modes d'instabilité hydrodynamique, se développant juste en aval dans la zone où le nombre de Richardson tombe sous la barre des 0,25. Le mode 3, qui est le mode sélectionné de plus haute fréquence, est associé aux petites structures en aval, capturant avec succès les non linéarités induites par l'instabilité.

Afin de valider la décomposition de notre écoulement sur une base de modes de Koopman, il est nécessaire de comparer la série (5.16) tronquée aux 4 modes dominants, avec les données mesurées. La figure 5.12(a) représente le vent vertical après 12 heures de simulations, tandis que la figure 5.12(b) représente l'approximation via la somme tronquée. On constate que les grandes structures mais aussi les petites échelles liées à l'instabilité hydrodynamique sont bien représentées via les modes de Koopman. Cette cohérence et cette proximité entre les deux champs traduisent la capacité de la DMD à retranscrire les structures importantes de la dynamique d'un écoulement.

5.3.5 Variabilité des modes de Koopman

Pour continuer l'étude de la décomposition sur une base de modes de Koopman, la variabilité des modes aux paramètres d'entrée doit être étudiée. A cette fin, nous avons simulé 24 écoulements au dessus de la même montagne ($H_N = 0,7$) en ne faisant varier que le nombre de Richardson J . Ces derniers ont été choisis de manière déterministe et régulière entre $J = 0,5$ et $J = 7$. Les 24 simulations ont été effectuées sur la même grille spatiale et avec la même résolution temporelle. Les simulations ont été arrêtées à $t = 12$ heures. La Décomposition en Modes Dynamiques de chaque écoulement a été réalisée. L'objectif de ces 24 DMD est de quantifier

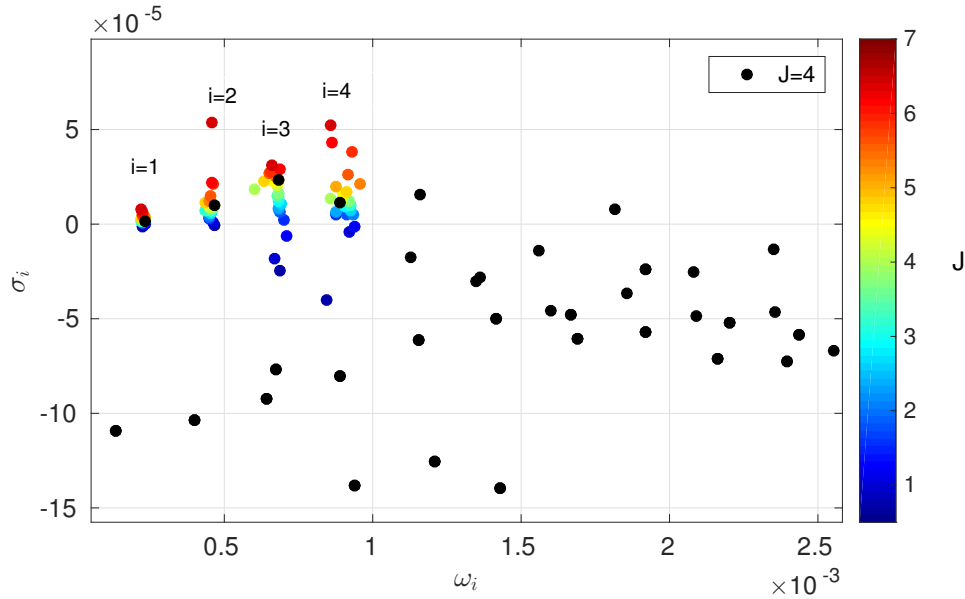


FIGURE 5.13 – Spectre DMD pour 24 valeurs différentes du nombre de Richardson. Seuls les 4 premiers modes sont représentés pour plus de visibilité. A titre d'information, le spectre pour $J = 4$ est représenté en noir.

l'évolution des modes d'instabilité, étudiés dans la partie précédente, avec le nombre de Richardson. La figure 5.13 représente en noir le spectre DMD lorsque $J = 4$ en fonction de la fréquence temporelle ω_i et du taux d'accroissement σ_i . Seules les fréquences positives ($\omega_i > 0$) ont été représentées. On constate, en comparant au spectre de la figure 5.10c, que deux modes supplémentaires présentent un taux d'accroissement positif. En revanche ces modes ont une amplitude quasi-nulle, les rendant alors négligeables. Les quatre premiers modes des 24 autres écoulements sont représentés en couleur, couleurs qui varient avec le nombre de Richardson. Le premier mode ($i=1$) représentait les ondes se propageant verticalement (figure 5.11a) avec un taux d'accroissement proche de 0, traduisant un caractère oscillant. Ce mode n'est pas impacté par la variation du nombre de Richardson, seule son amplitude décroît, ce qui a correctement été décrit au cours du chapitre 3. Les autres modes d'instabilités et plus particulièrement le mode 3 que l'on sait important, subissent de fortes variations lorsque J varie. La pulsation de ce mode ne change que très peu, reflétant le fait que les structures décrites sont de même nature mais le caractère évanescent / amplifié ainsi que l'amplitude évoluent avec J . On constate, toujours pour le troisième mode, qu'il passe de mode évanescent ($J < 3.5$) à mode d'instabilité pour les grandes valeurs de J . L'amplitude des modes évolue elle aussi et est représentée en figure 5.14a pour $J = 5$ et figure 5.14b pour $J = 1$. Sur ces figures on voit que le mode correspond, lorsque $J = 1$ à une turbulence petite échelle de faible amplitude, contrairement à $J = 5$ qui montre les traits d'une instabilité de type Kelvin-Helmholtz.

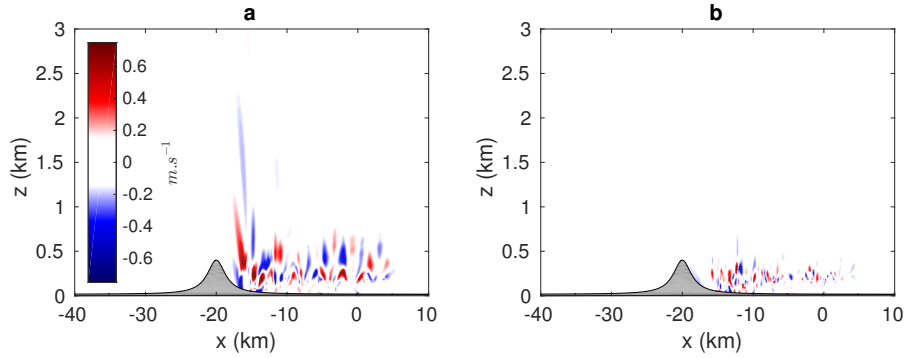


FIGURE 5.14 – Mode DMD $j = 3$. a : $J=5$; b : $J=1$.

5.4 Perspective : Décomposition spectrale stochastique

Comme introduit précédemment, les modes de Koopman sont de bons candidats pour décomposer les champs d'onde de montagne dans un cadre stochastique. Pour préciser cela, nous avons simulé 100 champs d'onde de montagne WRF en ne faisant varier que J de manière aléatoire. Nous avons échantillonné J selon une loi normale de moyenne 5 et d'écart type 0.5, de fait environ 70% des valeurs sont entre $J = 4$ et $J = 6$. Les 100 écoulements ont été simulés jusqu'à $t = 12$ heures dans les mêmes configurations. Cet ensemble de simulations représente un coût total de plus de 1600 heures CPU. A partir de ces 100 dynamiques d'onde de montagne, nous avons appliqué à chaque écoulement la DMD. Les densités de probabilité des 9 premiers modes, estimés toujours à partir du noyau d'Epanechnikov sont représentées sur la figure 5.15. Comme montré en figure 5.13, le premier mode ne varie pas avec J . Plus remarquable encore, les 3 autres modes (2, 3 et 4) correspondant à des modes d'instabilité pour le cas moyen ($J = 5$) possèdent une variance 2 à 5 fois inférieure aux autres modes. Ce résultat important est un premier argument en faveur d'une décomposition du type

$$\mu(x, z) = \mu_d(x, z) + \mu_r(x, z),$$

où μ_d correspond à une partie déterministe et μ_r une partie aléatoire. Dans notre cas, on pourrait écrire

$$w(x, z; t) = \sum_{j \leq 4} \alpha_j(t) \mu_j(x, z) + \sum_{j > 4} \alpha_j(t) \mu_j(x, z). \quad (5.28)$$

En effet, les quatre premiers modes possèdent une variabilité nettement inférieure aux autres et correspondent à des structures cohérentes et persistantes de la dynamique. Ces structures sont peu sensibles à de petites (mais suffisamment importantes pour l'acoustique) variations de l'écoulement. En revanche les termes d'indices supérieurs possèdent une très forte variabilité et une plus faible amplitude.

De ce constat, nous proposons l'approche suivante. Considérons une simulation d'un écoulement associé à un jeu de paramètres. On effectue la DMD de cet écoulement et conservons uniquement les modes oscillants ou d'instabilités dont l'amplitude est supérieure à 1% de l'amplitude totale. Les autres modes contenant l'aléa sont évincés et remplacés par un processus

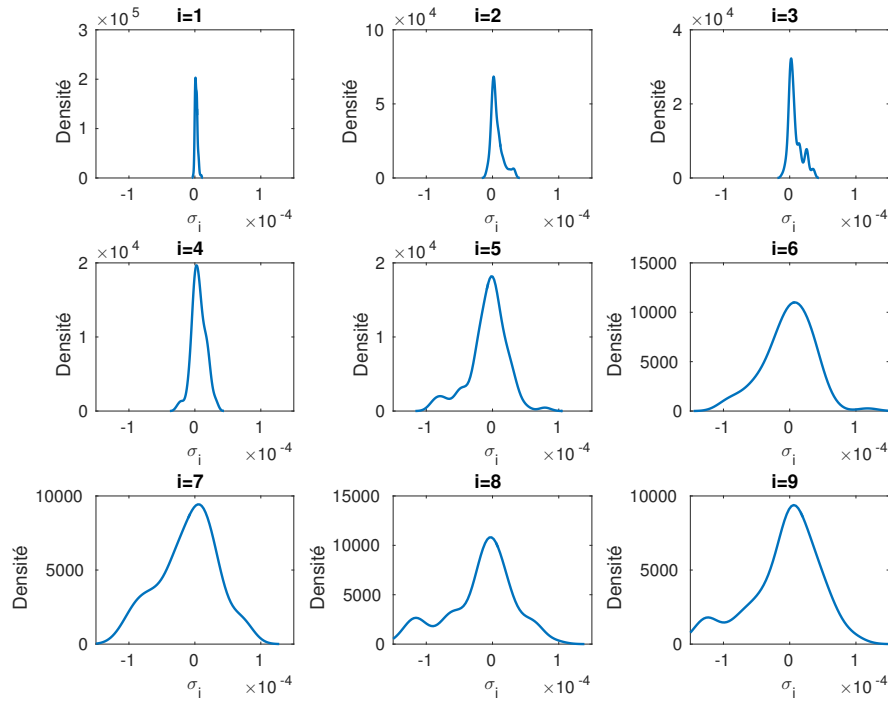


FIGURE 5.15 – Densité de probabilité des 9 premiers modes DMD d'écoulements WRF, estimées à partir de 100 réalisations d'écoulements.

stochastique 2D. Ce processus doit être placé en aval, là où les perturbations sont les plus importantes et les structures d'autocorrélations doivent respecter les échelles mises en jeu. Pour ce faire, un processus d'Ornstein-Uhlenbeck peut être utilisé, il présente l'avantage d'être gaussien avec tous les bénéfices théoriques que cela comporte. Des modèles quasi-analytiques de perturbations ou de turbulences peuvent aussi être utilisés.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons introduit la notion d'incertitude dans nos modèles. Au niveau des ondes de montagne la sensibilité de la réponse à une variation de l'écoulement incident a été étudiée. Au niveau de l'acoustique, un grand nombre de simulations a mis en avant l'importance de prendre en compte l'aléa atmosphérique. Le coût numérique associé aux méthodes statistiques qui exigent en général un nombre important de simulations exclut un grand nombre de codes du périmètre opérationnel. Nous avons donc cherché, à proposer une méthode basée sur un faible nombre de simulations. Pour les ondes de montagne, cette méthode est basée sur la décomposition en modes dynamiques. Cet algorithme initialisé à partir de clichés, décompose les champs atmosphériques en structures dynamiquement cohérentes. L'analyse de la variabilité de ces composantes et la classification en fonction de leur évolution dans le temps a permis de proposer une première esquisse de modèle réduit stochastique de perturbations orographiques.

Chapitre 6

Conclusion générale

« A la fin d'une longue discussion, nous arrivâmes à conclure qu'au fond il n'y rien de plus particulier qu'une idée générale. »

Jules Renard

Les travaux menés au cours de cette thèse ont été initiés par les récentes études conduites dans le cadre du Traité d'Interdiction Complète des Essais Nucléaire (TICE). Sous l'impulsion de ce traité, les études couplées sur la propagation des ondes infrasonores et la dynamique de l'atmosphère se sont multipliées au cours des dernières années. L'analyse des signaux infrasonores a révélé une difficulté dans le processus de simulation, due aux incertitudes sur les profils atmosphériques utilisés. Ces profils sont, le plus souvent, le fruit d'approximations et ne représentent pas les petites structures (*i.e.* de la taille d'une longueur d'onde acoustique) pouvant fortement impacter la propagation acoustique. Ces petites structures proviennent pour la plupart des champs d'ondes de gravité dont les sources sont diverses et variées [Fritts and Alexander, 2003]. Cependant, les montagnes se révèlent être une des sources permanentes les plus importantes. Comparativement aux plaines ou aux océans, les fluctuations de vitesse horizontale et de température sont de deux à trois fois plus grandes au dessus des montagnes ([Nastrom et al., 1987]). Sachant que certaines stations infrasonores du Système de Surveillance International (SSI) se trouvent à proximité d'un massif montagneux, il paraissait nécessaire et important d'étudier l'impact d'une orographie sur la propagation infrasonore.

Afin de répondre au problème posé, il semblait pertinent de commencer par une description des objets étudiés, à savoir les ondes de montagne et les ondes acoustiques. Ces ondes répondent, en tant que perturbations de l'état atmosphérique, aux mêmes équations *de la mécanique des fluides*. Une étude des différents régimes montre que ces ondes appartiennent à deux familles distinctes, chacune décrite par une équation qui lui est propre. Comme l'échelle temporelle des variations atmosphériques est bien supérieure à celle de l'acoustique, nous avons traité séparément ces deux phénomènes, en résolvant l'état atmosphérique puis en calculant la propagation acoustique dans cet état. Pour connaître l'état de l'atmosphère, on résout l'équation dite de *Taylor-Goldstein*. Une des difficultés rencontrées est que pour certains profils de vents

incidents, des niveaux critiques peuvent apparaître. L'intégration de la solution se fait en choisissant une coupure, puis en contournant le point critique dans le plan complexe. L'équation d'onde acoustique ne possède pas de niveau critique mais peut présenter des points tournants qui peuvent être traités par une méthode asymptotique (approximation WKB) fournissant alors une solution approchée. Pour assurer la propagation d'une source acoustique ponctuelle, nous avons utilisé la méthode des modes normaux dans le cadre de l'approximation adiabatique. Cette méthode décrit le champ d'ondes acoustiques comme une somme finie de trains d'ondes indépendants. Formellement la structure verticale des modes s'obtient en résolvant localement l'équation de Helmholtz et la composante horizontale s'obtient en résolvant une équation eikonale.

Dans ces conditions, seul un modèle d'écoulement au dessus d'une orographie pour continuer notre étude était nécessaire. Le modèle utilisé au cours de cette thèse est basé sur une résolution quasi-analytique de l'équation de Taylor-Goldstein dans le cas où le vent incident est nul au sol et constant à l'infini. Ce modèle présente l'avantage de dépendre de peu de paramètres et la physique décrite est totalement maîtrisée, en comparaison à un modèle plus complexe. Ce modèle théorique a été validé, dans un grand nombre de configurations météorologiques et orographiques, avec un code méso-échelle complètement non linéaire. Il a été montré que le modèle linéaire reproduit avec fiabilité les perturbations troposphériques mais aussi et surtout, il capture efficacement l'effet de Foehn en aval de la montagne. Cela est déterminant dans le cadre de cette étude, car de nombreuses stations (IS49 par exemple) se trouvent en aval de massifs montagneux et peuvent donc être fortement impactées par un tel effet. Au delà de bien capturer cet effet, et donc de fournir un bon outil pour la propagation acoustique, ce modèle a apporté un éclairage nouveau sur l'effet de Foehn. En effet nous avons montré que l'effet de Foehn peut être dû à un effet de niveau critique près du sol, c'est à dire n'impliquant aucun déferlement d'onde de gravité au dessus de la montagne.

A ce stade la quantification des effets sur l'acoustique restait une question ouverte. Dans le chapitre 4, nous nous sommes intéressés à l'impact des perturbations orographiques générées par le modèle linéaire sur le champ de célérité effective. L'effet de Foehn tend à réduire très fortement le guide d'onde troposphérique tandis que les ondes se propageant verticalement créent de nouveaux guides d'ondes. Ces deux phénomènes mènent à une fragmentation du front d'ondes, dont le comportement a été analysé explicitement par la méthode des modes normaux lors de configurations réalistes. Il a été montré qu'un écoulement incident stable (situation commune durant la nuit ou en hiver) induit un fort effet de Foehn, ce qui se traduit par une réduction de l'épaisseur du guide d'onde acoustique. Cette réduction se manifeste via une absorption très significative des ondes acoustiques qui est dans bien des cas supérieure à l'effet d'obstruction dû à la montagne. Dans le cas contraire, lorsque le guide d'onde est bien moins stable (situation plus commune en journée ou en été), la dynamique de l'écoulement ne produit pas de réponse si intense mais participe au maintien du guide d'onde et ce faisant favorise la propagation infrasonore, modérant ainsi l'effet direct de la montagne.

Les résultats obtenus au chapitre 4 reposent sur certaines hypothèses qui peuvent s'avérer contraignantes pour l'étude de cas opérationnels. La décomposition modale utilisée au cours de ce travail est une propagation "adiabatique", c'est à dire sans aucun transfert d'énergie d'un mode vers un autre. Cette hypothèse repose sur le fait que l'on considère que l'atmosphère varie lentement dans la direction de propagation, ce qui permet d'utiliser une approximation WKB de

la composante horizontale. Cependant il a été montré au chapitre 3 que les non-linéarités, qui ne sont pas prises en compte dans le modèle linéaire d'ondes de montagne, étaient associées à des structures petites échelles. De fait, l'approximation lentement variable serait mise à défaut en utilisant un code d'ondes de montagne prenant en compte les non-linéarités. L'absence de couplage entre modes soulevait une autre interrogation, car de nouveaux guides d'ondes sont créés et d'autres altérés par la dynamique de l'écoulement, l'énergie acoustique se transfère donc d'un guide à un autre et peut être à l'origine du couplage entre modes. Pour confirmer que les résultats et les analyses faites étaient correctes, nous avons simulé la propagation à partir d'une utilisation combinée du code WRF et de la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation d'onde.

Dans ce travail nous nous sommes concentrés sur la modélisation des ondes orographiques et la compréhension de leurs impacts sur la propagation acoustique. Cependant, compte tenu de l'étendue du sujet, plusieurs pistes d'intérêts pourraient être poursuivies. Dans un premier temps, la richesse des données infrasonores mesurées aux stations du SSI pourrait être utilisée comme une source d'informations sur le milieu atmosphérique pour améliorer les modèles actuels. En effet, la caractérisation d'un milieu pour l'étude de la propagation des ondes est très courante dans de nombreux domaines. En sismologie, cela a permis, par exemple, de déterminer les discontinuités internes de la Terre. Sur ce même principe, les ondes infrasonores ont permis de découvrir la tropopause [Whipple, 1926] ainsi que le gradient vertical positif de température dans la stratosphère au milieu des années 1940 [Cox, 1949]. À ce titre, l'utilisation des signaux infrasonores pourrait permettre de quantifier l'activité orographique. Une autre piste qui n'a été qu'effleurée au cours de cette thèse, concerne les incertitudes. Ces incertitudes peuvent provenir de nos modèles ou de nos mesures et se propager au cours de la simulation, ce qui doit produire un résultat aléatoire. Nous sommes convaincus qu'une piste prometteuse pour la prise en compte de ces incertitudes est de décomposer la variabilité atmosphérique sur une base de modes, et plus précisément de représenter sa dynamique sur une base réduite. Cela peut être effectué avec succès en exploitant les séries temporelles d'observations via la *Décomposition en Mode Dynamique*. Une fois cette décomposition réalisée, on dispose des principales structures atmosphériques mises en jeu dans la variabilité, et on peut alors traiter indépendamment ces différentes échelles et obtenir un modèle stochastique de variabilité atmosphérique. L'impact de ces différentes échelles sur la propagation acoustique peut-être quantifié en décomposant l'onde acoustique sur une base de polynômes de chaos. Des résultats prometteurs vont aujourd'hui dans ce sens. Ces deux méthodes combinées, permettraient une prise en compte efficace et rapide des incertitudes à n'importe quelle étape de la simulation.

Annexe A

Annexes

Sommaire

A.1	Un modèle anélastique	II
A.1.1	Les équations anélastiques et adimensionalisation	II
A.2	Analyses systématiques des modèles d’ondes de gravité	VII
A.2.1	Une mesure de la similarité basée sur la SVD	VII
A.2.2	Une approche échelle - intensité de la similarité	IX
A.3	Solution analytique du problème aux valeurs propres	XII
A.3.1	Cas d’un profil 1D	XII
A.3.2	Cas d’un profil 2D	XIII
A.4	Perturbations de l’écoulement et modes	XVI
A.4.1	Approche perturbative	XVI
A.4.2	Loi de probabilité des modes propres	XVII
A.4.3	Perturbation 2D	XVIII
A.5	DMD sur des matrices clichés simples	XXII

A.1 Un modèle anélastique

A.1.1 Les équations anélastiques et adimensionalisation

Pour analyser les ondes de montagne développées dans une atmosphère isotherme et incompressible, où la vitesse de l'écoulement est nulle au sol, nous considérons les profils de vents incidents et de températures suivants :

$$U(z) = U_r \left(1 - e^{-z/d}\right); T_0(z) = T_r, \quad (\text{A.1})$$

et nous considérons la montagne définie par la courbe d'Agnesi (4.7). Dans (A.1), $U(z)$ correspond au vent horizontal initial, $T = T_r$ est la température constante initiale, z est l'altitude, d est le cisaillement vertical associé au vent incident, et U_r est l'amplitude maximale de ce vent. Dans le cas à 2 dimensions sans effet de rotation terrestre, la dynamique de l'écoulement est exprimée par le set d'équations linéaires sous l'hypothèse d'anelasticité :

$$U\partial_x u' + U_z w' + \partial_x \Phi' = -\varepsilon u' + \nu \partial_x^2 u', \quad (\text{A.2})$$

$$U\partial_x w' + \partial_z \Phi' - b' = -\varepsilon w' + \nu \partial_x^2 w', \quad (\text{A.3})$$

$$U\partial_x b' + N^2 w' = -\varepsilon b' + \nu \partial_x^2 b' \quad (\text{A.4})$$

$$\partial_x \rho_0 u' + \partial_z \rho_0 w' = 0, \quad (\text{A.5})$$

où u' et w' sont les perturbations de vitesses horizontale et verticale. Dans (A.2-A.3), le potentiel Φ' est défini par $\Phi' = C_p \Theta_r \pi'$ avec π' la perturbation de pression de Exner $\pi = (\frac{p}{p_r})^\kappa$, où p_r est la pression de référence traditionnellement prise égale à 1000. Dans les équations (A.3) et (A.4) la perturbation de flotabilité b' est définie par $b' = g \frac{\theta'}{\theta_r}$ et la fréquence de Brunt Vaisala par $N^2 = g \frac{\theta_{rz}}{\theta}$. Finalement la compressibilité intervient au travers de la densité $\rho_0(z)$ dans (A.5). Maintenant, fixant le profil initial de température $T_0(z)$, il est bien connu que chaque variable thermodynamique initiale du problème peut en être déduite :

$$\rho_0 = \rho_r e^{-z/H_r}, \theta_r = T_r e^{\kappa z/H_r}, N^2 = \frac{\kappa g}{H_r}, \quad (\text{A.6})$$

où $H_r = RT_r/g$ est la hauteur caractéristique de l'atmosphère et $\rho_r = \frac{p_r}{RT_r}$. Si nous considérons une atmosphère isotherme de température moyenne proche de la température troposphérique, $T_r = 260$ K et comme $R = 287$ J.K⁻¹, et κ définie comme en (3.3), nous avons $H_r = 7606$ mètres et $N^2 = 3.7 \cdot 10^{-4}$ s⁻¹. Ainsi le coût pour obtenir une solution analytique est que notre atmosphère a une fréquence de Brunt Vaisala deux fois supérieure à sa valeur typique $N^2 = 0.01$ s⁻¹.

Dans cette étude nous allons travailler en variables adimensionnelles afin de réduire le nombre de dimensions du problème. Considérons l'adimensionalisation suivante :

$$(U, u', w') = U_r (\bar{U}, \bar{u}, \bar{w}), \Phi' = U_r^2 \bar{\Phi}, b' = U_r N \bar{b}, (x, z, h) = \frac{U_r}{N} (\bar{x}, \bar{z}, \bar{h}). \quad (\text{A.7})$$

Avec cette adimensionalisation le système d'équations (A.2-A.5) devient

$$\bar{U}\partial_{\bar{x}}\bar{u} + \bar{U}\partial_{\bar{z}}\bar{w} + \partial_{\bar{x}}\bar{\Phi} = -\bar{\epsilon}\bar{u} + \bar{\nu}\partial_{\bar{x}}^2\bar{u}, \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{U}\partial_{\bar{x}}\bar{w} + \partial_{\bar{z}}\bar{\Phi} - \bar{b} = -\bar{\epsilon}\bar{w} + \bar{\nu}\partial_{\bar{x}}^2\bar{w}, \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{U}\partial_{\bar{x}}\bar{b} + \bar{w} = -\bar{\epsilon}\bar{b} + \bar{\nu}\partial_{\bar{x}}^2\bar{b} \quad (\text{A.10})$$

$$\partial_{\bar{x}}\bar{\rho}\bar{u} + \partial_{\bar{z}}\bar{\rho}\bar{w} = 0, \quad (\text{A.11})$$

Ce système sera forcé par une condition limite non-linéaire à la surface :

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{z} = \bar{h}) = (\bar{U}(\bar{h}) + \bar{u}(\bar{x}, \bar{h}))\partial_{\bar{x}}\bar{h}. \quad (\text{A.12})$$

En effet il est nécessaire d'appliquer une condition non-linéaire à ce problème car on a choisi un vent nul au sol, ainsi une condition linéaire nous donnerait $w' = 0$. Dans ce dernier système, $\bar{U} = 1 - \exp(-\bar{z}/\sqrt{J})$, $\bar{h} = H_N/(1 + \bar{x}^2/2F_r^2)$ et $\bar{\rho} = e^{C\bar{z}/\sqrt{J}}$, avec

$$J = \frac{N^2 d^2}{U_r^2}, \quad H_N = \frac{HN}{U_r}, \quad F_r = \frac{LN}{U_r}, \quad \text{et } C = \frac{d}{H_r}, \quad (\text{A.13})$$

qui sont respectivement, le nombre de Richardson de surface, une hauteur de montagne adimensionnelle, un nombre de Froude et un facteur de compressibilité. Les trois premiers paramètres sont centraux dans notre étude. Le nombre de Richardson mesure la stabilité de l'écoulement initial [Miles, 1961]. La hauteur de montagne adimensionnelle mesure le degré de non linéarité de la réponse de l'écoulement [Smith, 1985]. Le nombre de Froude mesure l'importance des effets non-hydrostatiques : lorsqu'il décroît, plus d'harmoniques deviennent évanescences dans la direction verticale lorsque $z \rightarrow +\infty$, et la contribution relative des harmoniques piégées augmente alors. Le dernier paramètre d'incompressibilité contrôle les déferlements à hautes altitudes et, pour distinguer qu'il est moins important que le comportement dynamique proche du sol, l'échelle thermodynamique H_r est normalisée par d au lieu d'être normalisée par U_r/N .

Les termes de dissipations à droite du système (A.8-A.11) sont introduits pour régulariser le comportement proche du sol et donc du niveau critique. Ils sont considérés comme étant des petits paramètres avec $\bar{\epsilon} \ll 1$ qui est une trainée de Rayleigh dans (A.8) et (A.9) puis un Newtonian cooling dans (A.10). Une dissipation visqueuse a été introduite dans la direction horizontale x et est caractérisée par un grand nombre de Reynolds inverse $\bar{\mu} \ll 1$. Il a été introduit car la trainée de Rayleigh seule n'est pas assez efficace pour les grands nombres d'onde afin de garantir que le modèle soit stable proche du niveau critique pour toutes les harmoniques. D'après une étude des échelles mises en jeu nous pouvons connaître la hauteur jusqu'à laquelle l'amplitude des termes de dissipation peut se comparer à l'amplitude des termes d'advection, à savoir $\bar{z} \approx (\bar{\epsilon}F_r + \bar{\nu}F_r^{-1})\sqrt{J}$. Pour mesurer l'importance des dissipations, nous calculons une hauteur de couche limite

$$z_b = 5(\bar{\epsilon}F_r + \bar{\nu}F_r^{-1})\sqrt{J}. \quad (\text{A.14})$$

Avec ce choix, au dessus de z_B l'effet des dissipations chute en dessous de 20% de l'amplitude des termes d'advection.

Modèle semi-théorique

Dans la suite, les variables adimensionnelles seront notées sans la barre afin d'alléger les notations. Comme les solutions sont linéaires, nous pouvons les exprimer via leur transformée de Fourier définie par

$$w(x, z) = \frac{1}{\sqrt{\rho(z)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}(k, z) e^{ikx} dk, \text{ où } \hat{w}(k, z) = \frac{\sqrt{\rho(z)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, z) e^{-ikx} dx. \quad (\text{A.15})$$

Les termes de dissipations se transforment alors en $-(\epsilon + \nu k^2)(\hat{u}, \hat{w} \text{ et } \hat{b})$ respectivement. Ils sont linéaires dans la direction verticale et les effets sont significatifs au dessus d'altitudes comparables à la hauteur caractéristique

$$z_k = (\epsilon/k + \nu) \sqrt{J}. \quad (\text{A.16})$$

Suffisamment au dessus de la surface, c'est à dire lorsque $z \gg z_k$, $\hat{w}$ satisfait l'équation non visqueuse de Taylor-Goldstein qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \left(\underbrace{\frac{1}{U^2} - \frac{U_{zz} + U_z \frac{C}{\sqrt{J}}}{U}}_{S(z)} - \frac{C^2}{4J} - k^2 \right) \hat{w} = 0, \quad (\text{A.17})$$

où $S(z)$ est le paramètre de Scorer [Scorer, 1949b]. Si l'on fait maintenant le changement de variable $z \rightarrow U = 1 - e^{-z/\sqrt{J}}$, cette équation devient

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dU^2} - \frac{1}{1-U} \frac{d\hat{w}}{dU} + \left(\frac{J}{U^2(1-U)^2} + \frac{1-C}{U(1-U)} - \frac{C^2/4 + Jk^2}{(1-U)^2} \right) \hat{w} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Les solutions de cette équation peuvent s'exprimer en terme de fonctions hypergéométriques (voir chapitre 2 partie 2.2.3. En effet, notons que (A.18) a trois points singuliers en $r = 0, 1, \infty$. Lorsque $J > 0.25$ et $J(k^2 - 1) + C^2/4 > 0$, leurs paires d'exposants s'expriment sous la forme

$$r = 0: \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} + i\mu, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} - i\mu; \quad (\text{A.19})$$

$$r = 1: \quad \gamma_1 = -m, \quad \gamma_2 = +m; \quad (\text{A.20})$$

$$r = \infty: \quad \beta_1 = \sqrt{1 - C + C^2/4 + Jk^2}, \quad \beta_2 = -\beta_1, \quad (\text{A.21})$$

où

$$\mu = \sqrt{|J - \frac{1}{4}|} \text{ and } m = \sqrt{|J(k^2 - 1) + \frac{C^2}{4}|}. \quad (\text{A.22})$$

En suivant [Olver, 1974], le changement de variable $\hat{w} = U^{\alpha_1} (1-U)^{\gamma_1} W$, transforme (A.18) en une équation hypergéométrique

$$U(1-U) \frac{d^2 W}{dU^2} + \{c - (a+b+1)U\} \frac{dW}{dU} - abW = 0 \quad (\text{A.23})$$

où

$$a = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \quad b = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1, \quad c = 1 + \alpha_1 - \alpha_2 = 1 + 2i\mu. \quad (\text{A.24})$$

Pour construire notre solution on utilise la solution (15.5.6) de [Abramowitz and Stegun, 1964]

$$W_{2(1)} = (1 - U)^{c-a-b} F(c - b, c - a; c - a - b + 1; 1 - U), \quad (\text{A.25})$$

où F est la fonction hypergéométrique, permettant de définir une solution canonique $\hat{w}_c(k, z)$, c'est-à-dire une solution exponentiellement décroissante d'amplitude unitaire :

$$\hat{w}_c(k, z) = U^{\alpha_1} (1 - U)^{\gamma_1} W_{2(1)} \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} e^{-mz/\sqrt{J}} \quad (\text{A.26})$$

Lorsque $J(1 - k^2) - C^2/4 > 0$, cette solution piégée et évanescence lorsque $z \rightarrow \infty$ devient propagative, simplement en changeant m par $-i \text{sign}(k)m$ dans (A.20), où le signe de k sert à assurer une propagation vers le haut.

Afin de satisfaire la condition limite au sol, il est nécessaire d'exprimer $\hat{w}_c$ à l'aide d'un développement asymptotique proche du sol. Pour ce faire, nous utilisons la transformation (15.3.6) de [Abramowitz and Stegun, 1964] pour exprimer (A.25) en fonction des solutions (15.5.3) et (15.5.4) de [Abramowitz and Stegun, 1964]

$$W_{1(0)} = F(a, b; c; U), \text{ and } W_{2(0)} = U^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; U) : \quad (\text{A.27})$$

$$W_{1(0)} = A_1 W_{1(1)} + A_3 W_{2(1)}, \quad W_{2(0)} = A_2 W_{1(1)} + A_4 W_{2(1)} \quad (\text{A.28})$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, & A_3 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \\ A_2 &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, & A_4 &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Cela conduit à

$$\hat{w}_c = U^{\alpha_1} (1 - U)^{\gamma_1} (b_1 W_{2(0)} + b_2 W_{1(0)}), \text{ où } b_j = \frac{(-1)^{j-1} A_j}{A_1 A_4 - A_2 A_3} \text{ for } j = 1, 2. \quad (\text{A.30})$$

En approchant de la surface la solution non visqueuse se comporte comme

$$\hat{w}_c \underset{z \rightarrow 0}{\approx} a_1 z^{\frac{1}{2} - i\mu} + a_2 z^{\frac{1}{2} + i\mu}. \quad (\text{A.31})$$

si

$$a_1 = b_1 J^{-1/4 + i\mu/2}, \quad a_2 = b_2 J^{-1/4 - i\mu/2}. \quad (\text{A.32})$$

Proche de $z = 0$, la dissipation ne peut plus être négligée, mais à l'ordre dominant, on peut obtenir [Booker and Bretherton, 1967a] l'équation de structure verticale suivante

$$\frac{d^2 \hat{w}_c}{d\tilde{z}^2} + \frac{J}{\tilde{z}^2} \hat{w}_c = 0, \text{ où } \tilde{z} = z - iz_k, \quad (\text{A.33})$$

qui a pour solution

$$\hat{w}_c \approx a_1 \tilde{z}^{\frac{1}{2}-i\mu} + a_2 \tilde{z}^{\frac{1}{2}+i\mu} \quad (\text{A.34})$$

où a_1 et a_2 sont définis par (A.31) de telle sorte que la solution colle avec la solution non visqueuse. Dans les applications numériques nous utiliserons la solution basée sur l'hypergéométrie (A.25) lorsque $z \ll z_k$ puis lorsque $z \approx z_k$ nous utiliserons (A.34). Plus spécifiquement, nous utiliserons une interpolation des deux solutions en $\tanh$ de taille z_k centré en $5z_k$ afin de combiner ces deux solutions et de donner une solution uniforme $\hat{w}_c$.

Pour satisfaire la condition limite au sol (A.12), la solution dans (A.15) est cherchée sous la forme

$$w(x, z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \hat{w}_c(k, z) e^{ikx} dk, \quad (\text{A.35})$$

et en utilisant une expression similaire pour la perturbation de vent horizontale on obtient

$$u(x, z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \hat{u}_c(k, z) e^{ikx} dk, \text{ où } \hat{u}_c = \frac{i}{k} \left(\frac{d\hat{w}_c}{dz} - \frac{C\hat{w}_c}{2\sqrt{J}} \right), \quad (\text{A.36})$$

u et w peuvent être exprimées dans condition limite (A.34) et la fonction $f(k)$ peut être estimée par l'inversion de l'équation intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{w}_c(k, h(x)) - \hat{u}_c(k, h(x)) \frac{dh}{dx} \right) e^{ikx} f(k) dk = \sqrt{\rho(h)} U(h) \frac{dh}{dx}. \quad (\text{A.37})$$

Finalement, la perturbation de flotabilité peut aussi être obtenue par

$$b(x, z) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \hat{b}_c(k, z) e^{ikx} dk, \text{ où } \hat{b}_c = \frac{i}{k} \frac{\hat{w}_c}{U - iz_k}. \quad (\text{A.38})$$

A.2 Analyses systématiques des modèles d'ondes de gravité

Cette annexe a pour but d'évaluer la pertinence du modèle d'ondes de montagne linéaire de manière systématique, et ce pour une large gamme de configurations météorologiques et orographiques.

L'analyse et la comparaison de données constituent des sujets d'importance dans de nombreux domaines scientifiques allant de l'analyse d'images médicales ([Radke et al., 2005] à l'écologie. En météorologie, de nombreux *scores* (*i.e* des indicateurs de qualité) ont été développés et utilisés pour la comparaison de prévisions ou de simulations de champs 2D. Des scores basiques comme le coefficient de corrélation des anomalies [Miyakoda et al., 1972] et le coefficient de Pearson représentant le produit des corrélations, résument la capacité de prédiction d'un modèle par un scalaire. Or nous savons qu'un seul scalaire n'est pas suffisant pour résumer la performance totale d'un modèle [Murphy and Winkler, 1992], cependant certaines méthodes peuvent dans un premier temps fournir de bonnes indications sur la similarité entre deux modèles.

A.2.1 Une mesure de la similarité basée sur la SVD

En utilisant le modèle linéaire et WRF nous sommes en mesure de les comparer au travers de cartes de vents ou de températures. Cette comparaison peut donc se faire visuellement, mais ce genre de comparaison ne permet pas une étude systématique et peut parfois être fortement biaisée, car en effet définir la similarité visuelle entre deux cartes est subjective. Cette section tente de répondre à cette problématique en présentant une façon de définir la similarité.

La *Singular Value Decomposition* (SVD) est bien connue pour ses applications dans la compression de données ou le traitement de l'information [Aharon et al., 2006]. Elle repose sur le théorème suivant (démontré notamment dans [Golub and Reinsch, 1970]) :

Théorème A.2.1 Soit A une $n \times m$ matrice de rang r . Soit $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r$ les valeurs propres de la matrice $\sqrt{AA^T}$. Alors il existe une matrice orthogonale $U = (u_1, \dots, u_r)$ et $V = (v_1, \dots, v_r)$ dont les vecteurs colonnes sont orthonormaux, et une matrice diagonale $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. La décomposition $A = U\Sigma V^T$ est appelée la décomposition en valeurs singulières de A .

Une fois la SVD de A obtenue, il est possible grâce à la décroissance rapide des valeurs singulières de réduire la matrice k en écrivant :

$$A = U\Sigma V^T = (U_k U_0) \begin{pmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & \Sigma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_k^T \\ V_0^T \end{pmatrix},$$

on appelle alors $A_k = U_k \Sigma_k V_k^T$ la k -SVD réduction de A . Cette réduction présente un intérêt car c'est la meilleure (au sens L^2) approximation de rang k de la matrice A [Eckart and Young, 1936]. La matrice A_k peut être vue comme les données initiales ôtées du bruit présent dans la matrice A .

Afin de comparer deux modèles, supposons que nous avons en notre possession deux ensembles de cartes issues du modèle linéaire $\mathcal{L} = \{L^1, \dots, L^l\}$ et du modèle WRF $\mathcal{W} = \{W^1, \dots, W^l\}$. Si nous voulons quantifier la similarité entre deux simulations L^i et W^i , nous devons attribuer

au modèle linéaire un score, il s'agit donc de définir une fonction $\delta : \mathcal{L} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$. On pourrait penser que la manière la plus simple pour calculer la similarité est de prendre les deux matrices L^i et W^i et de calculer leur distance, mais le défaut de cette méthode vient de la forte dépendance aux données. En effet si toutes les données sont bruitées, la différence peut alors être importante, bien que les cartes soient similaires. La SVD est alors utilisée pour extraire le bruit et ne garder que les structures importantes. Les décompositions SVD des matrices L^i et W^i s'écrivent

$$L^i = U^i \Sigma^i V^{iT}, \quad W^i = \tilde{U}^i \Gamma^i \tilde{V}^{iT}.$$

On suppose que les matrices diagonales Σ^i et Γ^i sont triées par ordre décroissant, et de fait σ_1^i représente la caractéristique la plus importante, de même pour γ_1^i . De cette manière les matrices Σ^i et Γ^i contiennent toute l'information des cartes disponibles. Ainsi le degré de similarité entre deux cartes L^i et W^i peut être quantifié avec la distance L^2 entre Σ^i et Γ^i . Notons Θ la liste de taille $2l$ composée des matrices diagonales SVD issues du modèle linéaire puis du modèle WRF, à savoir $\Theta = [\Sigma^1, \dots, \Sigma^l, \Gamma^1, \dots, \Gamma^l]$. Nous noterons D la matrice composée des distances entre éléments de Θ , c'est à dire $d_{ij} = \|\Theta(i) - \Theta(j)\|_2$. La distance d'intérêt pour quantifier la similarité entre L^i et W^i pourrait être $d_{i,l+i}$ mais nous allons proposer une autre distance. En effet, pour chaque matrice L^i (resp W^i), la ligne $d_{i,*}$ (resp $d_{l+i,*}$) de la matrice D définit alors le degré de similarité de la carte L^i (resp W^i) avec les autres cartes. D'un point de vue géométrique chaque matrice diagonale Σ^i ou Γ^i représente un point dans l'espace à r -dimensions. Pour chaque point dans cet espace, il y a $2l - 1$ distances aux autres points, décrites par la ligne $d_{i,*}$ ou $d_{l+i,*}$. Ainsi ce vecteur peut être vu comme une courbe où les abscisses représentent l'indice dans Θ et les ordonnées la distance. La similarité peut alors se quantifier en mesurant la distance entre deux courbes. De cette manière nous définissons la similarité de L^i et W^i par,

$$\delta_{\text{SVD}}(L^i, W^i) = \|d_{i,*} - d_{l+i,*}\|_2.$$

Afin de quantifier la distance entre le modèle linéaire et le modèle WRF, nous avons entrepris de mesurer la distance SVD δ_{SVD} pour un grand nombre de paramètres (J, H_N, F_r). Chaque intervalle de définition des paramètres a été discrétisé en 20 valeurs, imposant 8000 simulations. Le nombre de Richardson a été pris dans l'intervalle $I_J = [0, 1; 4]$, la hauteur de la montagne étant comprise dans $I_{H_N} = [0, 2; 0, 9]$ et le nombre de Froude dans $I_F = [3; 8]$. Les valeurs des paramètres dimensionnelles U_∞, N_0, T_0 sont les mêmes que dans le chapitre 4 partie 4.2.2. Un premier résultat important est que pour des valeurs de paramètres adimensionnels raisonnables, le modèle linéaire reproduit avec fiabilité WRF (figure A.1), ce qui a déjà été mis en avant dans le chapitre 3, mais pour un seul nombre de Froude. Cependant, l'intérêt de ce calcul de distance est la mise en avant de différences pour un certain nombre de zones de $I_J \times I_{H_N} \times I_F$. Lorsque le nombre de Richardson décroît, la différence entre le modèle linéaire et WRF croît. Cela peut s'expliquer par le comportement non linéaire induit par les nombres de Richardson proche de 0.25. En effet pour ces valeurs, la dynamique de l'écoulement génère des ondes piégées qui peuvent être associées à de la turbulence en aval de la montagne. Cette turbulence et ce mélange ne sont pas, par définition, modélisés dans le modèle linéaire. De plus on constate que lorsque la taille de la montagne (que ce soit sa largeur au travers du nombre de Froude F_r ou sa hauteur via H_N) augmente, la distance entre les deux modèles augmente. Nous avons montré dans le

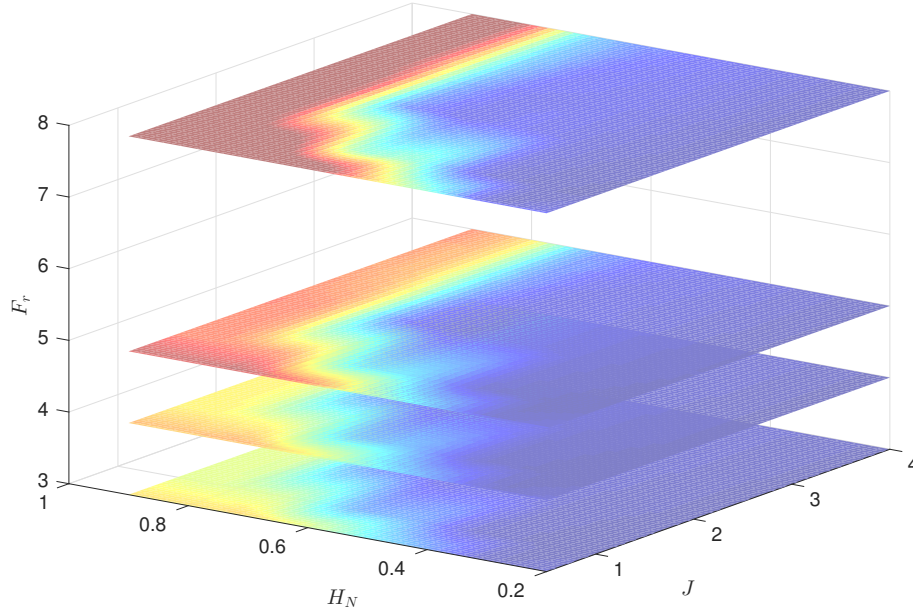


FIGURE A.1 – Distance δ , basée sur la SVD, entre le modèle linéaire et le modèle WRF pour différents nombres de Richardson J , nombre de Froude F_r et hauteurs de montagnes H_N .

chapitre 3 que la structure ainsi que l'intensité des ondes émises étaient reproduites avec fiabilité par le modèle linéaire, cependant les petites structures associées à un tel écoulement ou les comportements non linéaires au dessus de la montagne ou en aval, ne sont pas pris en compte.

A.2.2 Une approche échelle - intensité de la similarité

Comme noté dans la section précédente, le modèle linéaire présente, dans certain cas, des différences avec le modèle WRF. Afin de conforter l'idée que ces différences proviennent des très petites structures nous avons entrepris une comparaison systématique des simulations permettant de quantifier l'erreur en fonction de l'échelle spatiale considérée. Ces vérifications permettent de fournir une compréhension plus approfondie des capacités du modèle linéaire à simuler des processus d'échelles différentes. De plus, il peut être intéressant de montrer le comportement des écarts en fonction de l'intensité des vents : les écarts sont-ils plus importants dans les zones où le vent est important, telles qu'en aval où le Foehn prédomine, ou l'inverse ? Ces deux objectifs, nous poussent à considérer une méthode "intensité vs échelle" pour comparer la capacité de simulation. Cette technique fournit une façon d'évaluer le 'score' d'une simulation en fonction de l'intensité du vent et de l'échelle des structures. Nous considérerons dans cette partie uniquement les résultats associés au vent horizontal

Le *seuillage* est utilisé pour convertir les vents horizontaux prédits par les deux modèles,

U_{LM} et U_{WRF} en des ‘images’ (comprendre ici des matrices) binaires :

$$I_* = \begin{cases} 1, & \text{if } U_* > s \\ 0, & \text{if } U_* \leq s \end{cases}$$

pour chaque seuil s représentant l’intensité du vent horizontal $s = 0 ; 0,5 ; 1 ; \dots ; 20 \text{ m.s}^{-1}$ et l’indice $*$ est utilisé pour WRF ou LM. La différence entre le vent binaire WRF et le vent binaire du modèle linéaire définit l’erreur binaire

$$Z = I_{LM} - I_{WRF}.$$

L’image binaire est alors exprimée comme la somme de composantes dont les supports reposent sur différentes échelles spatiales. Pour ce faire nous utilisons la décomposition en ondelettes de Haar [Mallat, 1999] :

$$Z = \sum_{l=1}^L Z_l.$$

Il est important de rappeler que l indique l’échelle spatiale de l’erreur et non l’échelle spatiale associée à U . L’erreur quadratique moyenne de ces erreurs binaires peut alors être calculée sous la forme

$$MSE = \sum_{l=1}^L \overline{Z_l^2} = \sum_{l=1}^L MSE_l$$

où la barre représente la moyenne sur chaque pixel du domaine. L’erreur quadratique moyenne MSE_l dépend à la fois de l’échelle spatiale l et de l’intensité de seuil choisi s . Cela permet alors de vérifier et d’interpréter pour différentes intensités et pour différentes échelles spatiales notre erreur de simulation. Pour chaque seuil de vent, nous définissons un ‘score’ par

$$SS_l = 1 - \frac{MSE_l}{2\gamma(1 - \gamma)},$$

où γ est le nombre de points dans notre domaine pour lequel le modèle de référence (à savoir WRF) est supérieur au seuil.

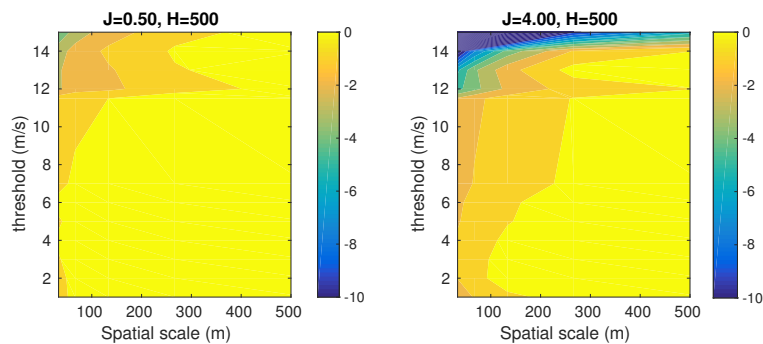


FIGURE A.2 – Contours de l’erreur SS_l en fonction de l’intensité du vent et de l’échelle spatiale

La figure A.2 représente deux cartes du score SS_l en tant que fonction du seuil s et de l'échelle spatiale l , pour deux cas d'intérêts. Les deux cas sont associés à une même hauteur de montagne $H_N = 0,5$, mais un cas est associé à un Richardson bas $J = 0,5$ et un autre élevé $J = 4$. On constate que le score SS_l est plus important pour les grandes structures que pour les petites échelles. Cela confirme que notre modèle reproduit fidèlement les grandes structures mais parfois modélise mal les petites structures (échelles caractéristiques inférieures à 200 mètres) qui peuvent être issues de processus non linéaires. Sur les deux figures nous constatons de plus deux zones d'intérêts, les deux correspondants aux petites échelles spatiales (inférieures à 200 m) mais l'une aux petits seuils de vent (inférieur à 8 m.s^{-1}) et l'autre aux grands seuils de vent. La première zone d'erreur correspond aux déferlements qui peuvent se produire à très basses altitudes derrière le ressaut hydraulique où l'intensité du vent est très faible. La seconde, elle, est due à deux phénomènes prédominants, tout d'abord la différence d'intensité constatée entre les effets de Foehn prédits par le modèle linéaire et le modèle WRF et ensuite les déferlements ou instabilités qui peuvent se créer à la suite d'un Foehn très important.

A.3 Solution analytique du problème aux valeurs propres

Dans cette annexe, nous montrons que pour certains profils de couche limite, il est possible d'obtenir les paires propres de la décomposition modale (k_j, Φ_j) sous une forme analytique. Cette méthode a été utilisée afin de valider les codes de propagation utilisés dans cette thèse.

A.3.1 Cas d'un profil 1D

Considérons le problème aux valeurs propres

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2 \right) \Phi = 0, \quad (\text{A.39})$$

avec le profil de célérité effective donné par :

$$c(z) = C_0 \frac{1}{a + \frac{(1-a)}{\cosh(\frac{z}{H})}},$$

où $0 < a < 1$. En introduisant les variables suivantes $v = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{H^2 \omega^2 (1-a)}{C_0^2}}}{2}$, $\mu = Hk$ et $\bar{z} = \frac{z}{H}$, l'équation (A.39) devient

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{z}^2} + \left(\frac{v(v-1)}{\cosh(\bar{z})} - \mu^2 \right) \Phi = 0. \quad (\text{A.40})$$

On effectue le changement de variable $u = \tanh(\bar{z})$, qui se traduit sur les opérateurs différentiels par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial u} = (1-u^2) \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial u} \left((1-u^2) \frac{\partial}{\partial u} \right) = (1-u^2) \left(-2u \frac{\partial}{\partial u} + (1-u^2) \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right). \end{aligned}$$

Injectant cela dans (A.40) on obtient

$$(1-u^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial \Phi}{\partial u} + (v(v-1) - \frac{\mu^2}{1-u^2}) \Phi = 0. \quad (\text{A.41})$$

Or l'équation (A.41) est une équation hypergéométrique dont nous connaissons les solutions (voir [Abramowitz and Stegun, 1964] ou [Olver, 1974]) qui par changement de variable sont aussi solutions de (A.40) :

$$\Phi(\bar{z}) = \Gamma(1+\mu) P_{v-1}^{-\mu}(u), \quad (\text{A.42})$$

avec P_b^a la fonction de Legendre. Cette dernière peut s'exprimer en termes de fonctions hypergéométriques :

$$\Phi(\bar{z}) = (1 + e^{-2\bar{z}})^v e^{-\mu \bar{z}} F(v + \mu, v, 1 + \mu; -e^{-2\bar{z}}) \frac{(-1)^{\frac{1+\mu}{2}}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.43})$$

Pour déterminer les fonctions propres associée et donc les valeurs propres k , on utilise la condition au sol

$$\Phi(\bar{z} = 0) = 0, \quad (\text{A.44})$$

ce qui revient à chercher les valeurs de μ telles que $P_{\nu-1}^{-\mu}(0) = 0$. Or la fonction hypergéométrique peut se réécrire en 0 en fonction de cosinus et de fonction Gamma ([Abramowitz and Stegun, 1964]) :

$$P_{\nu}^{\mu}(0) = 2^{\mu} \pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\mu + \nu)\right) \frac{\Gamma(\frac{\mu+\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu-\mu}{2} + 1)}, \quad (\text{A.45})$$

ce qui donne :

$$P_{\nu-1}^{-\mu}(0) = 2^{-\mu} \pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\nu - 1 - \mu)\right) \frac{\Gamma(\frac{\nu-\mu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+\mu-1}{2} + 1)}, \quad (\text{A.46})$$

$$P_{\nu-1}^{-\mu}(0) = (-1) \cdot 2^{-\mu} \pi^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\pi \frac{(\nu - \mu)}{2}\right) \frac{\Gamma(\frac{\nu-\mu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+\mu+1}{2})}. \quad (\text{A.47})$$

Or la fonction $\Gamma(z)$ est liée à la fonction sinus par

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \iff \Gamma(z) \sin(\pi z) = \frac{\pi}{\Gamma(1-z)}.$$

Ainsi on cherche μ tel que

$$\Gamma(1+\mu)P_{\mu-1}^{-\mu}(0) = -2^{-\mu} \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(\frac{1+\mu+\nu}{2})\Gamma(1+\frac{\mu-\nu}{2})} = 0. \quad (\text{A.48})$$

La seconde égalité de (A.48) correspond à l'équation de dispersion de notre problème aux valeurs propres

$$\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(\frac{1+\mu+\nu}{2})\Gamma(1+\frac{\mu-\nu}{2})} = 0 \implies \Gamma(1+\frac{\mu-\nu}{2}) = \infty.$$

Ainsi nos valeurs propres sont données par :

$$k_n = \frac{\nu - 2n - 2}{H}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.49})$$

A.3.2 Cas d'un profil 2D

Notre équation de propagation dans l'espace des fréquences s'écrit

$$\Delta \hat{p}(x, z; \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(x, z)} \hat{p}(x, z; \omega) = 0, \quad (\text{A.50})$$

avec le profil de célérité effective donné par :

$$c(x, z) = \frac{C_0}{a + b \tanh(\frac{x}{L}) + \frac{1-a}{\cosh(\frac{z}{H})}}.$$

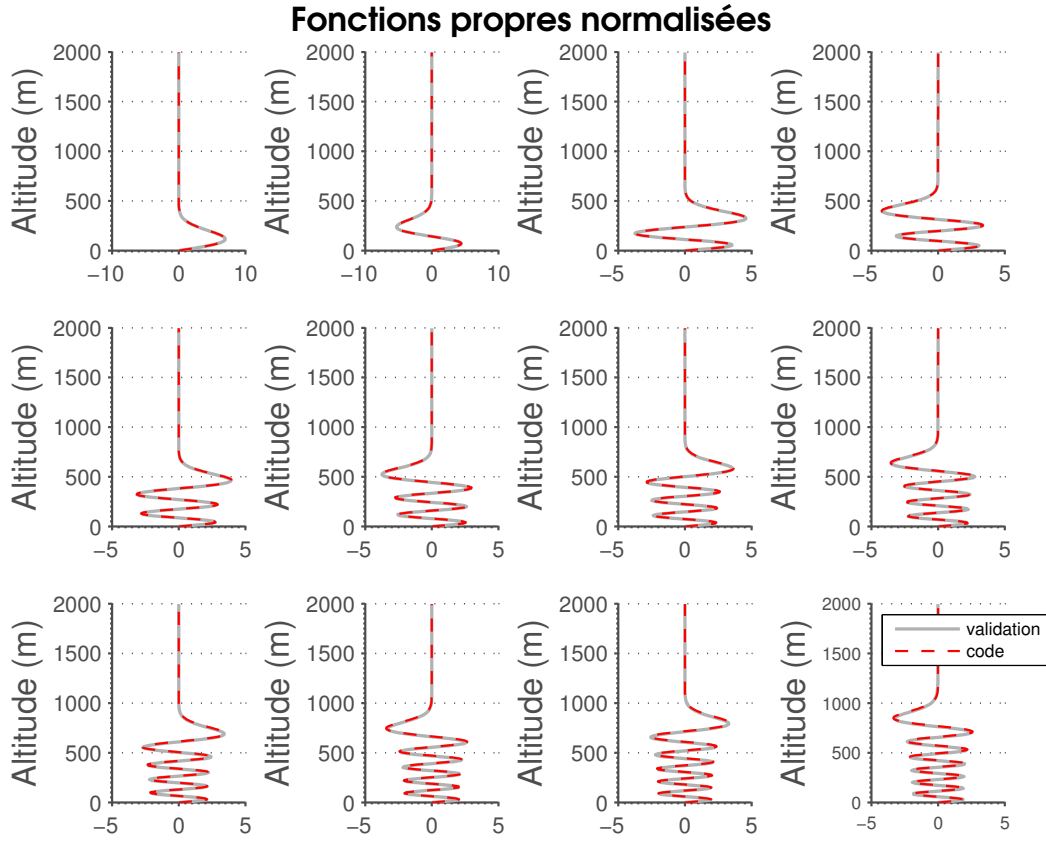


FIGURE A.3 – Validation de la structure verticale des modes

L'équation (A.50) devient

$$\Delta \hat{p}(x, z; \omega) + \frac{\omega^2}{C_0^2} \left(a + b \tanh\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1-a}{\cosh\left(\frac{z}{H}\right)} \right) \hat{p}(x, z; \omega) = 0. \quad (\text{A.51})$$

On cherche une solution sous la forme $\Phi(x, z) = X(x)Z(z)$, ainsi (A.51) devient

$$X''(x)Z(z) + X(x)Z''(z) + \frac{\omega^2}{C_0^2} (b \tanh(\frac{x}{L})) X(x)Z(z) + \left(\frac{\omega^2(1-a)}{C_0^2 \cosh(\frac{z}{H})} + \frac{\omega^2 a}{C_0^2} \right) X(x)Z(z) = 0. \quad (\text{A.52})$$

ce qui équivaut à

$$\frac{X''}{X}(x) + \frac{\omega^2}{C_0^2} (b \tanh(\frac{x}{L})) = -\frac{Z''}{Z}(z) - \frac{\omega^2(1-a)}{C_0^2 \cosh(\frac{z}{H})} - \frac{\omega^2 a}{C_0^2}. \quad (\text{A.53})$$

On introduit λ , paramètre de séparation tel que

$$\begin{cases} \frac{X''}{X}(x) + \frac{\omega^2}{C_0^2} (a + b \tanh(\frac{x}{L})) = \lambda^2 \\ \frac{Z''}{Z}(z) + \frac{\omega^2(1-a)}{C_0^2 \cosh(\frac{z}{H})} + \frac{\omega^2 a}{C_0^2} = \lambda^2 \end{cases} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{cases} X''(x) + \left(\frac{\omega^2}{C_0^2} (a + b \tanh(\frac{x}{L})) + \lambda^2 \right) X(x), \\ Z''(z) + \left(\frac{\omega^2(1-a)}{C_0^2 \cosh(\frac{z}{H})} + \frac{\omega^2 a}{C_0^2} - \lambda^2 \right) Z(z), \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

on pose $\bar{z} = \frac{z}{H}$ et $\bar{x} = \frac{x}{L}$. Le problème en z , a déjà été résolu dans la partie précédente fournissant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n^2 = \frac{1}{H^2} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{H^2 \omega^2 (1-a)}{C_0^2}}}{2} - 2n - 2 \right).$$

Posons $h(\bar{x}) = \frac{\omega^2}{C_0^2} (b \tanh(\bar{x})) + \lambda^2$, on a

$$h(\bar{x}) = L^2 \lambda^2 + \frac{1 + e^{-2\bar{x}} - 2e^{-2\bar{x}}}{1 + e^{-2\bar{x}}} L^2 \frac{\omega^2}{C_0^2} b, \quad (\text{A.56})$$

qui peut se réécrire

$$(\text{A.57})$$

$$h(\bar{x}) = L^2 \left(\lambda^2 + \frac{\omega^2}{C_0^2} b \right) - 2L^2 \frac{\omega^2}{C_0^2} b \frac{e^{-2\bar{x}}}{1 + e^{-2\bar{x}}}, \quad (\text{A.58})$$

on pose

$$\delta = iL \sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{C_0^2} b} \text{ et } \beta = iL \sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{C_0^2} b}, \quad (\text{A.59})$$

et donc

$$h(\bar{x}) = -1 - (\beta^2 - 1) + \frac{e^{-2\bar{x}}}{1 + e^{-2\bar{x}}} (\beta^2 - \delta^2). \quad (\text{A.60})$$

En posant $a = 1 + \frac{\delta + \beta}{2}$, $b = 1 + \frac{\beta - \delta}{2}$, $c = 1 + \beta$, on obtient une équation différentielle hypergéométrique dont $X(\bar{x})$ est la solution. Ainsi

$$X(\bar{x}) = A e^{-\beta \bar{x}} (1 + e^{-2\bar{x}}) F(a, b; c; -e^{-2\bar{x}}) \quad (\text{A.61})$$

avec $F(.; .; .)$ la fonction hypergéométrique, et A telle que $X(0) = 1$.

A.4 Perturbations de l'écoulement et modes

A.4.1 Approche perturbative

Dans un certain nombre de cas, les modes propres sont connus pour un profil donné et on peut s'interroger sur la pertinence (d'un point de vue efficacité) de recalculer tout ces modes lorsque le profil n'a que très peu varié. La méthode des petites perturbations, très fréquemment utilisée en mécanique quantique peut alors être utilisée.

On cherche à résoudre, pour chaque $\omega > 0$ et chaque $z > 0$ le problème aux valeurs propres

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2\right)\Phi_k = 0, \quad (\text{A.62})$$

dont le profil de célérité $c(z)$ est obtenu en ajoutant une petite perturbation à notre profil de célérité c_0 .

$$c(z) = c_0(z)(1 + \epsilon\mu(z)).$$

Injectant cette formulation dans l'équation (A.62) et en effectuant un développement limité à l'ordre 1, on obtient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2(z)}(1 - 2\epsilon\mu(z) + O(\epsilon^2)) - k^2\right)\Phi_k = 0. \quad (\text{A.63})$$

On considère que l'on connaît les couples (k_n^0, Φ_n^0) solution de

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2(z)} - k_n^2\right)\Phi_n = 0, \quad (\text{A.64})$$

avec $\forall m, n \in \{1, \dots, N\}$, $\int_0^\infty \Phi_m^0 \Phi_n^0 dz = \delta_{mn}$. Réécrivons le problème (A.63) sous la forme

$$D_0(\Phi) + \epsilon D_1(\Phi) = \lambda \Phi, \quad (\text{A.65})$$

avec $\lambda = k^2$, $D_0(\cdot) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2(z)}\right)(\cdot)$ et $D_1(\cdot) = -2\omega^2 \frac{\mu(z)}{c_0^2(z)}(\cdot)$. Écrivons (λ_n, Φ_n) comme un développement limité en ϵ , i.e

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \epsilon \lambda_n^1 + o(\epsilon^2), \quad (\text{A.66})$$

$$\Phi_n = \Phi_n^0 + \epsilon \Phi_n^1 + o(\epsilon^2). \quad (\text{A.67})$$

On injecte ces développements limités dans (A.65)

$$(D_0 + \epsilon D_1 + o(\epsilon^2))(\Phi_n^0 + \epsilon \Phi_n^1 + o(\epsilon^2)) = (\lambda_n^0 + \epsilon \lambda_n^1 + o(\epsilon^2))(\Phi_n^0 + \epsilon \Phi_n^1 + o(\epsilon^2)). \quad (\text{A.68})$$

À l'ordre 1 on obtient

$$D_1(\Phi_n^0) + D_0(\Phi_n^1) = \lambda_n^1 \Phi_n^0 + \lambda_n^0 \Phi_n^1. \quad (\text{A.69})$$

On prend le pseudo-produit scalaire de (A.69) avec Φ_n^0 ,

$$\int_0^\infty \Phi_n^0 D_1(\Phi_n^0) dz + \int_0^\infty \Phi_n^0 D_0(\Phi_n^1) dz = \lambda_n^1 \int_0^\infty \Phi_n^0 \Phi_n^0 dz + \lambda_n^0 \int_0^\infty \Phi_n^0 \Phi_n^1 dz, \quad (\text{A.70})$$

or

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Phi_n^0 D_0(\Phi_n^1) dz &= \int_0^\infty D_0(\Phi_n^0) \Phi_n^1 dz, \\ &= \lambda_n^0 \int_0^\infty \Phi_n^0 \Phi_n^1 dz \text{ car } D_0(.) \text{ est hermitien,} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus $\int_0^\infty \Phi_n^0 \Phi_n^1 dz = 0$ et $\int_0^\infty \Phi_n^0 \Phi_n^0 dz = 1$ ainsi

$$(k_n^1)^2 = -2\omega^2 \int_0^\infty \frac{\mu(z)}{c_0^2(z)} \Phi_n^0(z) \Phi_n^0(z) dz. \quad (\text{A.71})$$

En utilisant le théorème de la partition de l'unité, on obtient

$$\Phi_n^1 = -2\omega^2 \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k^0}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0} \int_0^\infty \frac{\mu(z)}{c_0^2(z)} \Phi_k^0(z) \Phi_n^0(z) dz. \quad (\text{A.72})$$

Ainsi on obtient une approximation de (k_n, Φ_n) solution de (A.62) sous la forme

$$(k_n)^2 = (k_n^0)^2 - \epsilon 2\omega^2 \int_0^\infty \frac{\mu(z)}{c_0^2(z)} \Phi_n^0(z) \Phi_n^0(z) dz + O(\epsilon^2), \quad (\text{A.73})$$

$$\Phi_n = \Phi_n^0 - \epsilon 2\omega^2 \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k^0}{(k_n^0)^2 - (k_k^0)^2} \int_0^\infty \frac{\mu(z)}{c_0^2(z)} \Phi_k^0(z) \Phi_n^0(z) dz + O(\epsilon^2). \quad (\text{A.74})$$

A.4.2 Loi de probabilité des modes propres

Dans de nombreux cas, les quantités atmosphériques nécessaires à l'obtention du profil de célérité effective sont entachées d'incertitudes. Ces incertitudes peuvent venir de mesures ou d'hypothèses dans nos modèles, toujours est il qu'elles mènent à une modélisation approximative du profil de célérité effective. La prise en compte d'un aléa dans la composition du profil de célérité permet de synthétiser toutes les sources d'incertitudes en un processus aléatoire à faible nombre de paramètres. Dans cette partie nous modélisons la perturbation μ par un processus stochastique d'Ornstein Uhlenbeck. Il permet de bien retranscrire l'aléa via un mouvement Brownien mais aussi de garder les échelles physiques via un paramètre d'autocorrélation. De plus, en tant que processus gaussien, il permet des développements théoriques simples. Le processus d'Ornstein Uhlenbeck est défini par l'équation différentielle stochastique ([Kyprianou, 2006])

$$d\mu_z = -\theta(\mu_z - \bar{\mu})dz + \sigma dB_z, \quad (\text{A.75})$$

où $\bar{\mu}$, σ , θ sont des paramètres à choisir représentants, respectivement, la moyenne autour de laquelle le processus oscille, la variance et le paramètre d'autocorrélation du processus. $(B_z)_{z \in \mathbb{R}}$ est un mouvement Brownien standard. En utilisant l'isométrie d'Itô ([Øksendal and Sulem, 2005]), on obtient la fonction de covariance intégrable

$$\mathbb{E}[\mu_z \mu_s] = \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{-\theta|z-s|} - e^{-\theta(z+s)}). \quad (\text{A.76})$$

Afin de trouver la loi des modes propres nous allons nous appuyer sur le résultat suivant

Théorème A.4.1 Soit $I := \int_0^{z_{max}} \mu(z) f(z) dz$ variable aléatoire avec $z \mapsto f(z)$ fonction $\mathbb{L}^2([0, z_{max}])$. Alors

$$I \stackrel{Loi}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \iint_{[0, z_{max}]^2} \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{-\theta|z-s|} - e^{-\theta(z+s)}) f(z) f(s) dz ds\right)$$

Preuve :

Soit $N \in \mathbb{N}$ on pose $z_1 = 0, \dots, z_n = n \frac{z_{max}}{N}, \dots, z_N = z_{max}$. On a, par définition de l'intégrale de Riemann

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{z_{max}}{N} \sum_{i=1}^N \mu(z_i) f(z_i) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_0^{z_{max}} \mu(z) f(z) dz. \quad (\text{A.77})$$

Or comme $z \mapsto \mu(z)$ est un processus gaussien, pour tout $N > 0$, $(\mu(z_1), \dots, \mu(z_N))$ est un vecteur gaussien. Ainsi

$$\frac{z_{max}}{N} \sum_{i=1}^N \mu(z_i) f(z_i) \stackrel{Loi}{\sim} \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^N f(z_i) \mathbb{E}[\mu(z_i)], \frac{z_{max}^2}{N^2} \sum_{i,j=1}^N f(z_i) f(z_j) \mathbb{E}[\mu(z_i) \mu(z_j)]\right) \quad (\text{A.78})$$

Or, par convergence des sommes de Riemann on a

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{z_{max}}{N} \sum_{i=1}^N f(z_i) \mathbb{E}[\mu(z_i)] &\xrightarrow{\text{p.s.}} \int_0^{z_{max}} \mathbb{E}[\mu(z)] f(z) dz \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{z_{max}^2}{N^2} \sum_{i,j=1}^N f(z_i) f(z_j) \mathbb{E}[\mu(z_i) \mu(z_j)] &\xrightarrow{\text{p.s.}} \iint_{[0, z_{max}]^2} \mathbb{E}[\mu(s) \mu(z)] f(z) f(s) dz ds. \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

Le résultat découle de $\mathbb{E}[\mu(z)] = 0$ et $\mathbb{E}[\mu_z \mu_s] = \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{-\theta|z-s|} - e^{-\theta(z+s)})$.

On a d'après (A.73)

$$(k_n)^2 = (k_n^0)^2 - \epsilon 2\omega^2 \int_0^\infty \frac{\mu(z)}{c_0^2(z)} \Phi_n^0(z)^2 dz + O(\epsilon^2). \quad (\text{A.80})$$

En utilisant le théorème (A.4.1) avec $f(z) = \frac{\Phi_n^0(z)^2}{c_0^2(z)}$ on a

$$(k_n)^2 \stackrel{Loi}{\sim} \mathcal{N}\left((k_n^0)^2, 4\epsilon^2 \omega^4 \iint_{[0, z_{max}]^2} \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{-\theta|z-s|} - e^{-\theta(z+s)}) \frac{\Phi_n^0(z)^2 \Phi_n^0(s)^2}{c_0^2(z) c_0^2(s)} dz ds\right) \quad (\text{A.81})$$

A.4.3 Perturbation 2D

On considère une perturbation du profil de célérité sous la forme $c(x, z) = c_0(x, z)(1 + \epsilon \mu(x, z))$, avec $\mu(x, z) = g(x) \mu(z)$, f étant une fonction déterministe nulle en 0 et R, et μ un processus d'Ornstein-Uhlenbeck comme précédemment. On peut voir f comme l'amplitude de la perturbation. f peut-être une fonction créneau comme une fonction plus régulière permettant de ne perturber le profil de célérité que lorsque l'on se rapproche de la montagne. Ainsi dans l'expression (A.82)

$$\hat{p}(X, z, \omega) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\pi/4} \sum_{m=1} \frac{\Phi_m(0, z_s, \omega) \Phi_m(X, z, \omega) e^{i \int_0^X k_m(s, \omega) ds}}{\sqrt{k_m(X, \omega)}} \hat{s}(\omega) \quad (\text{A.82})$$

l'aléa est contenu dans le terme $e^{i \int_0^X k_m(s, \omega) ds}$, le reste est déterministe.

Par un développement limité on a

$$k_n(x, \omega) = k_n^0(x, \omega) - \epsilon 2 \frac{\omega^2}{k_n^0(x)} \int_0^\infty \frac{\mu(x, z)}{c_0^2(x, z)} \Phi_n^0(x, z, \omega)^2 dz \quad (\text{A.83})$$

d'où

$$\int_0^R k_n(x, \omega) dx = \int_0^X k_n^0(x, \omega) dx - \epsilon 2 \omega^2 \int_0^X \int_0^\infty \frac{\mu(x, z) \Phi_n^0(x, z, \omega)^2}{c_0^2(x, z) k_n^0(x, \omega)} dz dx. \quad (\text{A.84})$$

En inversant les intégrales on a

$$\int_0^X k_n(x, \omega) dx = \int_0^X k_n^0(x, \omega) dx - \epsilon 2 \omega^2 \int_0^\infty \mu(z) \left(\int_0^X \frac{\Phi_n^0(x, z, \omega)^2 g(x)}{c_0^2(x, z) k_n^0(x, \omega)} dx \right) dz. \quad (\text{A.85})$$

En utilisant le théorème (A.4.1) avec $f(z) := \int_0^X \frac{\Phi_n^0(x, z, \omega)^2 g(x)}{c_0^2(x, z) k_n^0(x, \omega)} dx$ on a

$$\int_0^X k_n(x, \omega) dx \stackrel{\text{Loi}}{\sim} \mathcal{N} \left(\int_0^X k_n^0(x, \omega) dx, 4\epsilon^2 \omega^4 \iint_{[0, z_{\max}]^2} \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{-\theta|z-s|} - e^{-\theta(z+s)}) f(s) f(z) dz ds \right) \quad (\text{A.86})$$

On notera par la suite

$$\int_0^X k_n(x, \omega) dx \stackrel{\text{Loi}}{\sim} \mathcal{N} \left(v_n(\omega), \sigma_n(\omega)^2 \right) \quad (\text{A.87})$$

Le signal temporel s'exprime grace à

$$\begin{aligned} p(X, z, t) &= \int_0^\infty \hat{p}(X, z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\pi/4} \int_0^\infty \sum_{n=1} \frac{\Phi_n(0, z_s, \omega) \Phi_n(X, z, \omega)}{\sqrt{k_n(X, \omega)}} e^{i \int_0^X k_n(s, \omega) ds} \hat{s}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

On peut alors calculer les moments de $p(X, z, t)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[p(X, z, t)] &= \mathbb{E} \left[\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\pi/4} \int_0^\infty \sum_{n=1} \frac{\Phi_n(0, z_s, \omega) \Phi_n(X, z, \omega)}{\sqrt{k_n(X, \omega)}} e^{i \int_0^X k_n(s, \omega) ds} \hat{s}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\pi/4} \int_0^\infty \sum_{n=1} \frac{\Phi_n(0, z_s, \omega) \Phi_n(X, z, \omega)}{\sqrt{k_n(X, \omega)}} \mathbb{E}[e^{i \int_0^X k_n(s, \omega) ds}] \hat{s}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{A.89}) \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\pi/4} \sum_{n=1} \int_0^\infty \frac{\Phi_n(0, z_s, \omega) \Phi_n(X, z, \omega)}{\sqrt{k_n(X, \omega)}} \mathbb{E}[e^{i \int_0^X k_n(s, \omega) ds}] \hat{s}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

La fonction $\Psi_n : \theta \mapsto \mathbb{E}[e^{i\theta \int_0^X k_n(s) ds}]$ correspond à la fonction caractéristique de la variable aléatoire $\int_0^X k_n(s) ds$. Comme $\int_0^X k_n(s) ds$ suit une loi normale (A.87) on a $\Psi_n(\theta) = e^{i\theta v_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2 \theta^2}$ et donc

$$\mathbb{E}[e^{i \int_0^X k_n(s) ds}] = e^{i v_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2}. \quad (\text{A.90})$$

On obtient en injectant (A.90) dans (A.89)

$$\mathbb{E}[p(X, z, t)] = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} e^{-i\pi/4} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\Phi_n(0, z_s, \omega) \Phi_n(X, z, \omega)}{\sqrt{k_n(X, \omega)X}} e^{i\nu_n(\omega) - \frac{1}{2}\sigma_n^2(\omega) - i\omega t} \hat{s}(\omega) d\omega, \quad (\text{A.91})$$

qui peut-être évaluée numériquement.

De même pour la variance en utilisant la formule de Konig-Huygens

$$\text{Var}(p(X, z, t)) = \mathbb{E}[p(X, z, t)^2] - \mathbb{E}[p(X, z, t)]^2,$$

il suffit donc de calculer $\mathbb{E}[p(X, z, t)^2]$. Pour plus de lisibilité notons $A_n(X, \omega) = \frac{\Phi_n(0, z_s, \omega) \Phi_n(X, z, \omega)}{\sqrt{k_n(X, \omega)X}}$.

On a

$$p(X, z, t)^2 = \iint_0^{\infty} \left(\sum_{j,l} A_j(u) A_l(v) e^{i(\int_0^X k_j(s,u)ds + \int_0^R k_l(s,v)ds)} \right) \hat{s}(u) \hat{s}(v) e^{-i(u+v)t} du dv \quad (\text{A.92})$$

d'où

$$\mathbb{E}[p(X, z, t)^2] = \iint_0^{\infty} \left(\sum_{j,l} A_j(u) A_l(v) \mathbb{E}[e^{i(\int_0^X k_j(s,u)ds + \int_0^R k_l(s,v)ds)}] \right) \hat{s}(u) \hat{s}(v) e^{-i(u+v)t} du dv. \quad (\text{A.93})$$

Il est donc nécessaire de calculer la loi jointe de $(\int_0^X k_j(s, u)ds, \int_0^X k_l(s, v)ds)$ pour tout l, j . En sommant (A.85) on a

$$\begin{aligned} \int_0^X k_j(s, u) + k_l(s, v) ds &= \int_0^X k_j^0(s, u) + k_l^0(s, v) ds - 2\epsilon^2 \int_0^{\infty} \mu(z) \left(\int_0^X \frac{u^2 \Phi_j^0(s, z, u)^2 g(s)}{c_0^2(s, z) k_j^0(s, u)} \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{v^2 \Phi_l^0(s, z, v)^2 g(s)}{c_0^2(s, z) k_l^0(s, v)} ds \right) dz. \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

On pose

$$f_{j,l}(z, u, v) = \int_0^X \frac{u^2 \Phi_j^0(s, z, u)^2 g(s)}{c_0^2(s, z) k_j^0(s, u)} + \frac{v^2 \Phi_l^0(s, z, v)^2 g(s)}{c_0^2(s, z) k_l^0(s, v)} ds,$$

en appliquant le théorème (A.4.1) avec $f(z) = f_{j,l}(z, u, v)$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^X k_j(s, u) + k_l(s, v) ds &\stackrel{\text{Loi}}{\sim} \mathcal{N} \left(\int_0^X k_j^0(s, u) + k_l^0(s, v) ds, \iint_{[0, z_{\max}]^2} \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{-\theta|z-z'|} - e^{-\theta(z+z')}) \right. \\ &\quad \left. f_{j,l}(z') f_{j,l}(z) dz dz' \right) \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

On notera par la suite

$$\int_0^X k_j(s, u) ds + \int_0^X k_l(s, v) ds \stackrel{\text{Loi}}{\sim} \mathcal{N}(\nu_{j,l}(u, v), \sigma_{j,l}^2(u, v)). \quad (\text{A.96})$$

Ainsi en passant par la fonction caractéristique de $\int_0^X k_j(s, u)ds + \int_0^X k_l(s, v)ds$ on a

$$\mathbb{E}\left[e^{i(\int_0^X k_j(s, u)ds + \int_0^X k_l(s, v)ds)}\right] = e^{iv_{j,l}(u, v) - \frac{1}{2}\sigma_{j,l}^2(u, v)}. \quad (\text{A.97})$$

Donc

$$\mathbb{E}[p(X, z, t)^2] = \iint_0^\infty \left(\sum_{j,l} A_j(u)A_l(v)e^{(iv_{j,l}(u, v) - \frac{1}{2}\sigma_{j,l}^2(u, v))} \right) \hat{s}(u)\hat{s}(v)e^{-i(u+v)t} du dv, \quad (\text{A.98})$$

qui peut-être évaluée numériquement. Combinant (A.98) et le carré de (A.91) on obtient la variance de $p(R, z, t)$.

A.5 DMD sur des matrices clichés simples

Introduction

La méthode DMD (Dynamic Mode Decomposition) utilisée dans le chapitre 5, a fait l'objet d'une étude sur des écoulements au dessus d'une montagne. Cette annexe présente une application de la DMD sur une matrice clichés simple notée $\mathbf{V}_1^N$ composée des champs instantanés numérotés de 1 à N . Ces champs instantanés sont rangés par colonnes dans $\mathbf{V}_1^N$ de telle sorte que le champ instantané associé au $i^{\text{ème}}$ instant correspond à la $i^{\text{ème}}$ colonne. Considérons le cas simple $m = 2$, $N = 4$ et regardons la matrice clichés suivante :

$$\mathbf{V}_1^N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse fondamentale de la DMD est que l'on a suffisamment de clichés pour pouvoir expliquer le cliché N à partir des $N - 1$ premiers clichés. Cela se traduit par l'expression du $N^{\text{ème}}$ en tant que combinaison linéaire des $N - 1$ premiers. Selon la littérature (par exemple [Rowley et al., 2009]), il est d'usage de considérer deux matrices clichés notées $\mathbf{V}_1^{N-1}$ et $\mathbf{V}_2^N$. Elles contiennent respectivement l'information du champ instantané sur les trois premiers et trois derniers instants :

$$\mathbf{V}_1^{N-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V}_2^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le but est alors de déterminer la matrice C qui contient les coefficients de la combinaison linéaire, et qui permet de passer de $\mathbf{V}_1^{N-1}$ à $\mathbf{V}_2^N$ (i.e $\mathbf{V}_2^N = \mathbf{V}_1^{N-1}C$). La DMD repose sur l'analyse spectrale de cette matrice. Dans la suite est exposé le résultat issu de la méthode de décomposition de $\mathbf{V}_1^{N-1}$ proposée par [Rowley et al., 2009].

Décomposition QR de $\mathbf{V}_1^{N-1}$

L'intérêt est porté sur la matrice $\mathbf{V}_1^{N-1}$. La décomposition QR consiste à exprimer $\mathbf{V}_1^{N-1}$ comme le produit de Q une matrice $m \times m$ orthogonale, et R une matrice $m \times (N - 1)$ triangulaire supérieure. La méthode de Gram-Schmidt est appliquée pour le calcul des matrices Q et R . On obtient

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de la matrice de Frobenius C

[Rowley et al., 2009] et [Schmid, 2010] définissent la matrice de Frobenius (ou matrice compagnon) notée C comme :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & & 0 & c_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{M-1} \end{bmatrix},$$

où la dernière colonne de C est donnée par $\mathbf{c} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{v}_{N-1}$ ($\mathbf{v}_{N-1}$ étant la dernière colonne de la matrice cliqué $\mathbf{V}_1^{N-1}$). D'autre part, $\mathbf{R}$ étant rectangulaire, la matrice pseudo-inverse notée $\mathbf{R}^+$ et vérifiant $\mathbf{R}\mathbf{R}^+ = \mathbf{I}$ a été calculée via la méthode de Moore-Penrose :

$$\mathbf{R}^+ = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et donc $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/3 \\ 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Calcul des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de Frobenius $\mathbb{C}$

Le problème aux valeurs propres vérifie l'équation suivante :

$$|\mathbb{C} - \lambda \mathbf{Id}| = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1/3 \\ 1 & -\lambda & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Qui s'écrit sous forme d'un polynôme de degré 3, dont les solutions sont

$$\lambda_1 = -0,8712; \lambda_2 = 0,6022 + 0,1412i; \lambda_3 = 0,6022 - 0,1412i.$$

Par ailleurs on obtient en résolvant le système linéaire $\mathbb{C}x_i = \lambda_i x_i$ les vecteurs propres

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0,2374 \\ -0,7474 \\ 0,6205 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0,4462 - 0,1045i \\ -0,2287 - 0,12i \\ -0,8505 \end{pmatrix}; x_3 = \begin{pmatrix} 0,4462 + 0,1045i \\ -0,2287 + 0,1200i \\ -0,8505 \end{pmatrix}.$$

Calcul des modes dynamiques Φ_j

Dans le cas du calcul de la matrice de Frobenius par la décomposition QR, les modes de Koorman approximés sont définis par :

$$\Phi_j = \mathbf{V}_1^{N-1} x_j,$$

ce qui fournit

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = \begin{pmatrix} -0,1269 \\ 0,8579 \end{pmatrix} \\ \Phi_2 = \begin{pmatrix} -1,0792 - 0,12i \\ -0,4043 - 0,1045i \end{pmatrix} \\ \Phi_3 = \begin{pmatrix} -1,0792 + 0,12i \\ -0,4043 + 0,1045i \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Bibliographie

- [Aballéa, 2004] Aballéa, F.-E. (2004). Propagation acoustique en milieu extérieur : Application de l'équation parabolique rapide au couplage d'effets météorologiques et de topographies complexes outdoor sound propagation : Application of the green's function parabolic equation to study coupling effects of meteorology and complex topographies. Technical report, Université du Maine : Le Mans. [9](#)
- [Abramowitz and Stegun, 1964] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964). *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation. [32](#), [84](#), [V](#), [XII](#), [XIII](#)
- [Aharon et al., 2006] Aharon, M., Elad, M., and Bruckstein, A. (2006). *rmk-svd* : An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation. *IEEE Transactions on signal processing*, 54(11) :4311–4322. [VII](#)
- [Assink et al., 2012] Assink, J., Waxler, R., and Drob, D. (2012). On the sensitivity of infrasonic traveltimes in the equatorial region to the atmospheric tides. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 117(D1). [75](#)
- [Assink J. D. and Evers, 2016] Assink J. D., Averbuch, G.-S. P. S. M. and Evers, L. G. (2016). On the infrasound detected from the 2013 and 2016 dprk's underground nuclear tests. *Geophys. Res. Lett.*, 43 :3526–3533. [23](#), [76](#), [80](#)
- [Attenborough, 1988] Attenborough, K. (1988). Review of ground effects on outdoor sound propagation from continuous broadband sources. *Applied acoustics*, 24(4) :289–319. [26](#)
- [Attenborough et al., 2006] Attenborough, K., Li, K. M., and Horoshenkov, K. (2006). *Predicting outdoor sound*. CRC Press. [75](#)
- [Baines, 1998a] Baines, P. G. (1998a). *Topographic effects in stratified flows*. Cambridge University Press. [48](#)
- [Baines, 1998b] Baines, P. G. (1998b). *Topographic effects in stratified flows*. Cambridge University Press. [54](#)
- [Barbagallo et al., 2011] Barbagallo, A., Sipp, D., and Schmid, P. J. (2011). Input–output measures for model reduction and closed-loop control : application to global modes. *Journal of Fluid Mechanics*, 685 :23–53. [114](#)
- [Baumann et al., 2001] Baumann, K., Maurer, H., Rau, G., Piringer, M., Pechinger, U., Prévôt, A., Furger, M., Neininger, B., and Pellegrini, U. (2001). The influence of south foehn on the ozone distribution in the alpine rhine valley results from the map field phase. *Atmospheric Environment*, 35(36) :6379–6390. [15](#)

- [Bender and Orszag, 2013] Bender, C. M. and Orszag, S. A. (2013). *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I : Asymptotic methods and perturbation theory*. Springer Science & Business Media. 36, 41, 84
- [Bertin et al., 2014] Bertin, M., Millet, C., and Bouche, D. (2014). A low-order reduced model for the long range propagation of infrasounds in the atmosphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 136(1) :37–52. 9, 11, 12, 75, 81, 83
- [Blairon, 2002] Blairon, N. (2002). *Effets de la topographie sur la propagation des ondes acoustiques dans l’atmosphère : modélisation avec l’équation parabolique et validation sur un site extérieur*. PhD thesis, Laboratoire de mécanique des fluides et acoustique (Ecully, Rhône). 9
- [Blokhintzev, 1946] Blokhintzev, D. (1946). The propagation of sound in an inhomogeneous and moving medium i. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 18(2) :322–328. 7
- [Blumrich and Heimann, 2002] Blumrich, R. and Heimann, D. (2002). A linearized eulerian sound propagation model for studies of complex meteorological effects. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(2) :446–455. 9
- [Booker and Bretherton, 1967a] Booker, J. R. and Bretherton, F. P. (1967a). The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(3) :513–539. 29, V
- [Booker and Bretherton, 1967b] Booker, J. R. and Bretherton, F. P. (1967b). The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. 27 :102–109. 55, 60, 61
- [Brekhovskikh, 2012] Brekhovskikh, L. (2012). *Waves in layered media*, volume 16. Elsevier. 23
- [Brigham and Morrow, 1967] Brigham, E. O. and Morrow, R. (1967). The fast fourier transform. *IEEE spectrum*, 4(12) :63–70. 88
- [Brinkmann, 1974] Brinkmann, W. A. R. (1974). Strong downslope winds at boulder, colorado. 102 :592–602. 54
- [Brown et al., 2002] Brown, P., Spalding, R., ReVelle, D., Tagliaferri, E., and Worden, S. (2002). The flux of small near-earth objects colliding with the earth. *Nature*, 420(6913) :294. 4
- [Cámara and Lott, 2015] Cámara, A. and Lott, F. (2015). A parameterization of gravity waves emitted by fronts and jets. *Geophysical Research Letters*, 42(6) :2071–2078. 12
- [Campus, 2004] Campus, P. (2004). The ims infrasound network and its potential for detection of events : Examples of a variety of signals recorded around the world. *InfraMatics*, 6(1) :13–22. 4
- [Candelier et al., 2012] Candelier, J., Le Dizès, S., and Millet, C. (2012). Inviscid instability of a stably stratified compressible boundary layer on an inclined surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 694 :524–539. 77
- [Cannon et al., 2017] Cannon, F., Carvalho, L. M. V., Jones, C., Hall, T., Gomberg, D., Dumas, J., and Jackson, M. (2017). Wrf simulation of downslope wind events in coastal santa barbara county. 191 :57–73. 54

- [Ceranna et al., 2009] Ceranna, L., Le Pichon, A., Green, D., and Mialle, P. (2009). The bunchfield explosion : a benchmark for infrasound analysis across central europe. *Geophysical Journal International*, 177(2) :491–508. [75](#)
- [Chatillon, 2011] Chatillon, J. (2011). Perception des infrasons. *Acoustique et techniques*, (67) :4–10. [2](#)
- [Chimonas and Grant, 1984] Chimonas, G. and Grant, J. (1984). Shear excitation of gravity waves. part ii : Upscale scattering from kelvin-helmholtz waves. *Journal of the atmospheric sciences*, 41(15) :2278–2288. [77](#)
- [Churchuzov et al., 1990] Churchuzov, I., Bush, G., and Kulichkov, S. (1990). On acoustical impulse propagation in a moving inhomogeneous atmospheric layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 88(1) :455–461. [75](#)
- [Churchuzov et al., 2005] Churchuzov, I., Kulichkov, S., Otrezov, A., and Perepelkin, V. (2005). Acoustic pulse propagation through a fluctuating stably stratified atmospheric boundary layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(4) :1868–1879. [9](#), [75](#)
- [Cohen et al., 2001] Cohen, G., Joly, P., Roberts, J. E., and Tordjman, N. (2001). Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(6) :2047–2078. [98](#)
- [Cox, 1949] Cox, E. F. (1949). Abnormal audibility zones in long distance propagation through the atmosphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 21(1) :6–16. [8](#), [123](#)
- [Daigle and Stinson, 1987] Daigle, G. and Stinson, M. R. (1987). Impedance of grass-covered ground at low frequencies measured using a phase difference technique. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 81(1) :62–68. [26](#)
- [Dergham and Millet, 2013] Dergham, G. and Millet, C. (2013). Range-dependent propagation modeling of infrasound in complex atmospheres. In *43rd AIAA Fluid Dynamics Conference*, page 3209. [97](#)
- [Deykina et al., 2007] Deykina, E., Bailly, C., Bogey, C., and Juvé, D. (2007). Simulation numérique de la propagation de signaux acoustiques basse fréquences dans l’atmosphère. *18ème Congrès Français de Mécanique (Grenoble 2007)*. [9](#)
- [Dighe et al., 1998] Dighe, K. A., Whitaker, R. W., and Armstrong, W. T. (1998). Modeling study of infrasonic detection of 1 kt atmospheric blast. Technical report, Los Alamos National Lab., NM (United States). [9](#)
- [Doyle et al., 2011] Doyle, J. D., Gabersek, S., Jiang, Q., Bernardet, L., Brown, J. M., Dornbrack, A., Filaus, E., Grubisic, V., Kirshbaum, D. J., Knoth, O., Koch, S., Schmidli, J., Stiperski, I., Vosper, S., and Zhong, S. (2011). An intercomparison of t-rex mountain-wave simulations and implications for mesoscale predictability. 139 :2811–2831. [70](#)
- [Drob et al., 2013] Drob, D., Broutman, D., Hedlin, M., Winslow, N., and Gibson, R. (2013). A method for specifying atmospheric gravity wavefields for long-range infrasound propagation calculations. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 118(10) :3933–3943. [94](#)
- [Drobinski et al., 2007] Drobinski, P., Steinacker, R., Richner, H., Baumann-Stanzer, K., Befrey, G., Benech, B., Berger, H., Chimani, B., Dabas, A., Dorninger, M., et al. (2007). Föhn

- in the rhine valley during map : A review of its multiscale dynamics in complex valley geometry. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 133(625) :897–916. [12](#), [54](#)
- [Durran, 1990a] Durran, D. R. (1990a). Mountain waves and downslope winds. In *Atmospheric processes over complex terrain*, pages 59–81. Springer. [4](#), [13](#), [76](#)
- [Durran, 1990b] Durran, D. R. (1990b). Mountain waves and downslope winds. *AMS Meteorological Monographs*, 23 :59–83. [54](#)
- [Dutton, 1995] Dutton, J. A. (1995). *Dynamics of atmospheric motion : (formerly the ceaseless wind)*. Dover. [75](#)
- [Eckart and Young, 1936] Eckart, C. and Young, G. (1936). The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1(3) :211–218. [VII](#)
- [Eliassen and Palm, 1961] Eliassen, A. and Palm, E. (1961). On the transfer of energy in stationary mountain waves. *Geofysiske Publikasjoner*, 22 :1–23. [29](#)
- [Elvidge and Renfrew, 2016] Elvidge, A. D. and Renfrew, I. A. (2016). The causes of foehn warming in the lee of mountains. 97(3) :455–466. [54](#), [102](#)
- [Elvidge et al., 2015] Elvidge, A. D., Renfrew, I. A., King, J. C., Orr, A., Lachlan-Cope, T. A., Weeks, M., and Gray, S. L. (2015). Foehn jets over the larsen c ice shelf, antarctica. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 141(688) :698–713. [54](#)
- [Epifanio and Qian, 2008] Epifanio, C. C. and Qian, T. (2008). Wave–turbulence interactions in a breaking mountain wave. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 65(10) :3139–3158. [107](#)
- [Evers and Haak, 2010] Evers, L. G. and Haak, H. W. (2010). The characteristics of infrasound, its propagation and some early history. In *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*, pages 3–27. Springer. [2](#), [28](#)
- [Farrell, 1984] Farrell, B. (1984). Modal and non-modal baroclinic waves. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 41(4) :668–673. [34](#)
- [Farrell, 1982] Farrell, B. F. (1982). The initial growth of disturbances in a baroclinic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 39(8) :1663–1686. [34](#)
- [Fedele and Zanca, 1968] Fedele, D. and Zanca, A. (1968). Winds and turbulence in stratosphere, mesosphere and ionosphere. [6](#)
- [Fedele and Zanca, 1969] Fedele, D. and Zanca, A. (1969). Atmospheric structure between 30 and 120 km. Technical report, Ministero della Difesa Aeronautica, Rome. [6](#)
- [Fee and Matoza, 2013] Fee, D. and Matoza, R. S. (2013). An overview of volcano infrasound : From hawaiian to plinian, local to global. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 249 :123–139. [v](#), [8](#)
- [Fee et al., 2013] Fee, D., Waxler, R., Assink, J., Gitterman, Y., Given, J., Coyne, J., Mialle, P., Garces, M., Drob, D., Kleinert, D., et al. (2013). Overview of the 2009 and 2011 sayarim infrasound calibration experiments. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 118(12) :6122–6143. [75](#)
- [Flamant et al., 2002] Flamant, C., Drobinski, P., Nance, L., Banta, R., Darby, L., Dusek, J., Hardesty, M., Pelon, J., and Richard, E. (2002). Gap flow in an alpine valley during a shallow south fœhn event : Observations, numerical simulations and hydraulic analogue. 128(582) :1173–1210. [70](#)

- [Fouque et al., 2007] Fouque, J.-P., Garnier, J., Papanicolaou, G., and Solna, K. (2007). *Wave propagation and time reversal in randomly layered media*, volume 56. Springer Science & Business Media. 36
- [Fritts and Alexander, 2003] Fritts, D. C. and Alexander, M. J. (2003). Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere. *Reviews of geophysics*, 41(1). 13, 19, 24, 78, 121
- [Georgelin and Lott, 2001] Georgelin, M. and Lott, F. (2001). On the transfer of momentum by trapped lee waves. case of the iop3 of pyrex. 58 :3563–3580. 70
- [Ghanem, 2005] Ghanem, R. (2005). Error budgets : A path from uncertainty quantification to model validation. *Los Angeles*, 22. 96
- [Gibbons et al., 2015] Gibbons, S. J., Asming, V., Eliasson, L., Fedorov, A., Fyen, J., Kero, J., Kozlovskaya, E., Kværna, T., Liszka, L., Näsholm, S. P., et al. (2015). The european arctic : a laboratory for seismoacoustic studies. *Seismological Research Letters*, 86(3) :917–928. 10
- [Gill, 1982] Gill, A. E. (1982). Studies of moisture effects in simple atmospheric models : The stable case. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 19(1-2) :119–152. 20
- [Godin, 2002] Godin, O. A. (2002). Coupled-mode sound propagation in a range-dependent, moving fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 111(5) :1984–1995. 78
- [Golub and Reinsch, 1970] Golub, G. H. and Reinsch, C. (1970). Singular value decomposition and least squares solutions. *Numerische mathematik*, 14(5) :403–420. VII
- [Gossard and Hooke, 1975] Gossard, E. E. and Hooke, W. H. (1975). Waves in the atmosphere : atmospheric infrasound and gravity waves-their generation and propagation. *Atmospheric Science*, 2. 9, 19, 75, 77
- [Gourdon, 1994] Gourdon, X. (1994). Algèbre. 39
- [Haddon, 1984] Haddon, R. (1984). Computation of synthetic seismograms in layered earth models using leaking modes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 74(4) :1225–1248. 35
- [Haddon, 1986] Haddon, R. (1986). Exact evaluation of the response of a layered elastic medium to an explosive point source using leaking modes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 76(6) :1755–1775. 35
- [Hanique-Cockenpot, 2011] Hanique-Cockenpot, G. (2011). *Etude numérique de la propagation non linéaire des infrasons dans l’atmosphère*. PhD thesis, Ecully, Ecole centrale de Lyon. 7
- [Hann, 1901] Hann, J. (1901). *Lehrbuch der Meteorologie von Julius. Hann*. Chr. Herm. Tauchnitz. 14
- [Hedlin and Drob, 2014] Hedlin, M. A. and Drob, D. P. (2014). Statistical characterization of atmospheric gravity waves by seismoacoustic observations. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 119(9) :5345–5363. 94
- [Hines, 1997] Hines, C. O. (1997). Doppler-spread parameterization of gravity-wave momentum deposition in the middle atmosphere. part 2 : Broad and quasi monochromatic spectra, and implementation. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 59(4) :387–400. 19, 94

- [Holton and Hakim, 2012] Holton, J. R. and Hakim, G. J. (2012). *An introduction to dynamic meteorology*, volume 88. Academic press. 18, 19
- [Hong and Pan, 1996] Hong, S.-Y. and Pan, H.-L. (1996). Nonlocal boundary layer vertical diffusion in a medium-range forecast model. *Monthly weather review*, 124(10) :2322–2339. 69
- [Howard, 1961] Howard, L. N. (1961). Note on a paper of john w. miles. *Journal of Fluid Mechanics*, 10(4) :509–512. 78
- [Huerre and Monkewitz, 1990] Huerre, P. and Monkewitz, P. A. (1990). Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual review of fluid mechanics*, 22(1) :473–537. 34
- [Jacobson, 2005] Jacobson, M. Z. (2005). *Fundamentals of atmospheric modeling*. Cambridge university press. 6
- [Jensen et al., 2011] Jensen, F. B., Kuperman, W. A., Porter, M. B., and Schmidt, H. (2011). *Computational ocean acoustics*. Springer Science & Business Media. 76, 81, 82, 83
- [Joly, 2013] Joly (2013). Theorie spectrale des operateurs autoadjoints et applicationa lâetude des ondes guidees. 33, 34
- [Klemp and Lilly, 1978] Klemp, J. and Lilly, D. (1978). Numerical simulation of hydrostatic mountain waves. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 35(1) :78–107. 53
- [Kriester, 1969a] Kriester, B. (1969a). Effects of solar radiation in the lower atmosphere. Technical report, Free Univ., Berlin. 6
- [Kriester, 1969b] Kriester, B. (1969b). Stratospheric warmings. Technical report, Free Univ., Berlin. 6
- [Kulichkov, 2004] Kulichkov, S. (2004). Long-range propagation and scattering of low-frequency sound pulses in the middle atmosphere. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 85(1-3) :47–60. 4
- [Kyprianou, 2006] Kyprianou, A. E. (2006). *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*. Springer Science & Business Media. XVII
- [Lalande and Waxler, 2016] Lalande, J.-M. and Waxler, R. (2016). The interaction between infrasonic waves and gravity wave perturbations : Application to observations using utr rocket motor fuel elimination events. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 121(10) :5585–5600. 94
- [Langer, 1949] Langer, R. E. (1949). The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. *Transactions of the American Mathematical Society*, 67(2) :461–490. 84
- [Laprise, 1992] Laprise, R. (1992). The euler equations of motion with hydrostatic pressure as an independent variable. *Monthly weather review*, 120(1) :197–207. 52
- [Laprise and Peltier, 1989] Laprise, R. and Peltier, W. R. (1989). On the structural characteristics of steady finite-amplitude mountain waves over bell-shaped topography. 26 :586–595. 55

- [Le Dizès and Millet, 2007] Le Dizès, S. and Millet, C. (2007). Acoustic near field of a transonic instability wave packet. *Journal of Fluid Mechanics*, 577 :1–23. [35](#)
- [Le Pichon et al., 2005] Le Pichon, A., Blanc, E., Drob, D., Lambotte, S., Dessa, J., Lardy, M., Bani, P., and Vergnolle, S. (2005). Infrasound monitoring of volcanoes to probe high-altitude winds. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 110(D13). [4](#)
- [Lehr and Burnett, 1964] Lehr, P. E. and Burnett, R. (1964). Will, and zim, herbert s. *Weather*. [5](#)
- [Lilly and Klemp, 1979] Lilly, D. K. and Klemp, J. B. (1979). The effects of terrain shape on nonlinear hydrostatic mountain waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 95(2) :241â261. [55](#)
- [Liszka, 2008] Liszka, L. (2008). *Infrasound : a summary of 35 years of infrasound research*. Swedish Institute of Space Physics. [4](#)
- [Long, 1953] Long, R. R. (1953). Some aspects of the flow of stratified fluids ; 1. a theoretical investigation. *Tellus*, 5 :42–58. [51](#), [55](#)
- [Long, 1955] Long, R. R. (1955). Some aspects of the flow of stratified fluids : 111. continuous density gradients. *Tellus*, 7(3) :341–357. [13](#), [50](#), [77](#)
- [Lothon et al., 2003] Lothon, M., Druilhet, A., BÃ©nech, B., Campistron, B., Bernard, S., and SaÃ¬d, F. (2003). Experimental study of five foehn events during the mesoscale alpine programme : From synoptic scale to turbulence. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 129(592) :2171–2193. [70](#)
- [Lott, 2007] Lott, F. (2007). The reflection of a stationary gravity wave by a viscous boundary layer. 139 :3363–3371. [55](#)
- [Lott, 2016] Lott, F. (2016). A new theory for downslope windstorms and trapped mountain waves. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 73(9) :3585–3597. [13](#), [48](#), [55](#), [67](#), [76](#), [77](#), [80](#), [90](#), [102](#), [107](#)
- [Lott et al., 1992] Lott, F., Kelder, H., and Teitelbaum, H. (1992). A transition from kelvin-helmholtz instabilities to propagating wave instabilities. *Physics of Fluids A*, 4 :1990–1997. [57](#)
- [Lott and Miller, 1997] Lott, F. and Miller, M. J. (1997). A new subgrid-scale orographic drag parametrization : Its formulation and testing. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 123(537) :101–127. [12](#)
- [Lott and Millet, 2010] Lott, F. and Millet, C. (2010). The representation of gravity waves in atmospheric general circulation models (gcms). In *Infrasound monitoring for atmospheric studies*, pages 685–699. Springer. [4](#), [12](#), [94](#)
- [Lott et al., 2015] Lott, F., Millet, C., and Vanneste, J. (2015). Inertia–gravity waves in inertially stable and unstable shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 775 :223–240. [29](#)
- [Mallat, 1999] Mallat, S. (1999). *A wavelet tour of signal processing*. Academic press. [X](#)
- [Marks and Eckermann, 1995] Marks, C. J. and Eckermann, S. D. (1995). A three-dimensional nonhydrostatic ray-tracing model for gravity waves : Formulation and preliminary results for the middle atmosphere. *Journal of the atmospheric sciences*, 52(11) :1959–1984. [24](#)

- [Marty et al., 2010] Marty, J., Ponceau, D., and Dalaudier, F. (2010). Using the international monitoring system infrasound network to study gravity waves. *Geophysical Research Letters*, 37(19). [44](#)
- [Matoza et al., 2011] Matoza, R. S., Le Pichon, A., Vergoz, J., Herry, P., Lalande, J.-M., Lee, H.-i., Che, I.-Y., and Rybin, A. (2011). Infrasonic observations of the june 2009 sarychev peak eruption, kuril islands : Implications for infrasonic monitoring of remote explosive volcanism. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 200(1) :35–48. [75](#)
- [McGowan et al., 2002] McGowan, H. A., Sturman, A. P., and ans P. Zawar-Reza, M. K. (2002). Observations of foehn onset in the southern alps, new zealand. pages 215–230. [54](#)
- [McIntosh et al., 1976] McIntosh, B., Watson, M., and ReVelle, D. (1976). Infrasound from a radar-observed meteor. *Canadian Journal of Physics*, 54(6) :655–662. [4](#)
- [McKenna et al., 2012] McKenna, M. H., Gibson, R. G., Walker, B. E., McKenna, J., Winslow, N. W., and Kofford, A. S. (2012). Topographic effects on infrasound propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(1) :35–46. [v](#), [12](#), [13](#), [75](#), [76](#)
- [McKenna et al., 2008] McKenna, M. H., Stump, B. W., and Hayward, C. (2008). Effect of time-varying tropospheric models on near-regional and regional infrasound propagation as constrained by observational data. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 113(D11). [75](#)
- [Michalakes et al., 2005] Michalakes, J., Dudhia, J., Gill, D., Henderson, T., Klemp, J., Skamarock, W., and Wang, W. (2005). The weather research and forecast model : software architecture and performance. In *Proceedings of the Eleventh ECMWF Workshop on the Use of High Performance Computing in Meteorology*, pages 156–168. World Scientific : Singapore. [52](#)
- [Miles, 1961] Miles, J. W. (1961). On the stability of heterogeneous shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 10(4) :496–508. [78](#), [108](#), [III](#)
- [Millet and Casalis, 2004] Millet, C. and Casalis, G. (2004). Exponential-algebraic transition in the near-field of low supersonic jets. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 23(2) :367–379. [38](#)
- [Millet et al., 2007] Millet, C., Robinet, J.-C., and Roblin, C. (2007). On using computational aeroacoustics for long-range propagation of infrasounds in realistic atmospheres. *Geophysical Research Letters*, 34(14). [4](#), [75](#)
- [Miltnerberger et al., 2016] Miltnerberger, A. K., Reynolds, S., and Sprenger, M. (2016). Re-visiting the latent heating contribution to foehn warming : Lagrangian analysis of two foehn events over the swiss alps. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 142(698) :2194–2204. [54](#)
- [Miyakoda et al., 1972] Miyakoda, K., Hembree, G., Strickler, R., and Shulman, I. (1972). Cumulative results of extended forecast experiments i. model performance for winter cases. *Monthly Weather Review*, 100(12) :836–855. [VII](#)
- [Muraki, 2011] Muraki, D. J. (2011). Large-amplitude topographic waves in 2d stratified flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 681 :173–192. [vi](#), [51](#), [55](#)

- [Murphy and Winkler, 1992] Murphy, A. H. and Winkler, R. L. (1992). Diagnostic verification of probability forecasts. *International Journal of Forecasting*, 7(4) :435–455. VII
- [Nance and Durran, 1998] Nance, L. B. and Durran, D. R. (1998). A modeling study of nonstationary trapped mountain lee waves. part ii : Nonlinearity. *Journal of the atmospheric sciences*, 55(8) :1429–1445. 13
- [Nappo, 2013] Nappo, C. J. (2013). *An introduction to atmospheric gravity waves*. Academic Press. 77
- [Nastrom et al., 1987] Nastrom, G. D., Fritts, D. C., and Gage, K. S. (1987). An investigation of terrain effects on the mesoscale spectrum of atmospheric motions. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 44(20) :3087–3096. 12, 121
- [Norris et al., 2010] Norris, D., Gibson, R., and Bongiovanni, K. (2010). Numerical methods to model infrasonic propagation through realistic specifications of the atmosphere. In *Infra-sound Monitoring for Atmospheric Studies*, pages 541–573. Springer. 75
- [Øksendal and Sulem, 2005] Øksendal, B. K. and Sulem, A. (2005). *Applied stochastic control of jump diffusions*, volume 498. Springer. XVII
- [Olver, 1974] Olver, F. W. J. (1974). Asymptotics and special functions. *Academic Press*, page 572pp. 31, IV, XII
- [Palmer et al., 1986] Palmer, T., Shutts, G., and Swinbank, R. (1986). Alleviation of a systematic westerly bias in general circulation and numerical weather prediction models through an orographic gravity wave drag parametrization. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 112(474) :1001–1039. 12
- [Paulin, 2016] Paulin, F. (2016). Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique. 33
- [Pedlosky, 1964] Pedlosky, J. (1964). The stability of currents in the atmosphere and the ocean : Part i. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 21(2) :201–219. 34
- [Pielke Sr, 2013] Pielke Sr, R. A. (2013). *Mesoscale meteorological modeling*, volume 98. Academic press. 53
- [Pierce et al., 1981] Pierce, A. D. et al. (1981). *Acoustics : an introduction to its physical principles and applications*, volume 678. McGraw-Hill New York. 9, 36
- [Pokharel et al., 2017] Pokharel, A. K., Kaplan, M. L., and Fiedler, S. (2017). Subtropical dust storms and downslope wind events. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 122(19). 102
- [Ponomarev et al., 2006] Ponomarev, E., Rudenko, G., Sorokin, A., Dmitrienko, I., Lobycheva, I. Y., and Baryshnikov, A. (2006). Using the normal-mode method of probing the infrasonic propagation for purposes of the comprehensive nuclear-test-ban treaty. *Journal of atmospheric and solar-terrestrial physics*, 68(6) :599–614. 4
- [Posmentier, 1967] Posmentier, E. (1967). A theory of microbaroms. *Geophysical Journal International*, 13(5) :487–501. 4
- [Queffélec and Zuily, 2013] Queffélec, H. and Zuily, C. (2013). Analyse pour l'agrégation : cours et exercices corrigés. 34, 40

- [Queney, 1948] Queney, P. (1948). The problem of airflow over mountains : a summary of theoretical studies. 29 :16–26. [13](#), [26](#), [78](#)
- [Radke et al., 2005] Radke, R. J., Andra, S., Al-Kofahi, O., and Roysam, B. (2005). Image change detection algorithms : a systematic survey. *IEEE transactions on image processing*, 14(3) :294–307. [VII](#)
- [Raspet et al., 1992] Raspet, R., Baird, G., and Wu, W. (1992). Normal mode solution for low-frequency sound propagation in a downward refracting atmosphere above a complex impedance plane. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 91(3) :1341–1352. [9](#)
- [Reinecke and Durran, 2009] Reinecke, P. A. and Durran, D. R. (2009). Initial-condition sensitivities and the predictability of downslope winds. 66 :3401–3418. [70](#)
- [Richner and Hachler, 2013] Richner, H. and Hachler, P. (2013). Understanding and forecasting alpine foehn. *Mountain Weather and Forecasting*, pages 219–260. [54](#), [70](#)
- [Richner and Hächler, 2013] Richner, H. and Hächler, P. (2013). Understanding and forecasting alpine foehn. In *Mountain Weather Research and Forecasting*, pages 219–260. Springer. [77](#)
- [Rowley et al., 2009] Rowley, C. W., Mezić, I., Bagheri, S., Schlatter, P., and Henningson, D. S. (2009). Spectral analysis of nonlinear flows. *Journal of fluid mechanics*, 641 :115–127. [96](#), [109](#), [XXII](#)
- [Sabatini, 2017] Sabatini, R. (2017). *Simulation directe 3-D de la propagation non-linéaire des ondes acoustiques dans l’atmosphère terrestre*. PhD thesis, Université de Lyon. [9](#)
- [Salomons et al., 2002] Salomons, E. M., Blumrich, R., and Heimann, D. (2002). Eulerian time-domain model for sound propagation over a finite-impedance ground surface. comparison with frequency-domain models. *Acta Acustica united with Acustica*, 88(4) :483–492. [9](#)
- [Schmid, 2010] Schmid, P. J. (2010). Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of fluid mechanics*, 656 :5–28. [96](#), [109](#), [XXII](#)
- [Scorer, 1949a] Scorer, R. (1949a). Theory of waves in the lee of mountains. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 75(323) :41–56. [13](#), [48](#)
- [Scorer, 1949b] Scorer, R. S. (1949b). Theory of waves in the lee of mountains. 75 :41–56. [IV](#)
- [Seibert et al., 2000] Seibert, M. R., Feldman, H., Neiningen, B., Baumle, M., and Trickl, T. (2000). South foehn and ozone in the eastern alps - case study and climatological aspects. *Atmospheric Environment*, pages 1379–1394. [54](#)
- [Seibert, 1990] Seibert, P. (1990). South foehn studies since the alpex experiment. pages 91–103. [54](#)
- [Seibert, 2005] Seibert, P. (2005). Hannâs thermodynamic foehn theory and its presentation in meteorological textbooks in the course of time. *From Beaufort to Bjerknes and Beyond, Algorismus*, 52 :169–180. [54](#)
- [Sharples et al., 2010] Sharples, J. J., Mills, G. A., McRae, R. H. D., and Weber, R. O. (2010). Foehn-like winds and elevated fire danger conditions in southeastern australia. 49 :1067–1095. [54](#)

- [Sheridan et al., 2017] Sheridan, P., Vosper, S., and Brown, P. (2017). Mountain waves in high resolution forecast models : Automated diagnostics of wave severity and impact on surface winds. *Atmosphere*, 8(1) :24. [71](#)
- [Sheridan et al., 2007] Sheridan, P. F., Horlacherxi, V., Rooney, G. G., Hignett, P., Mobbs, S. D., and Vosper, S. (2007). Influence of lee waves on the near surface flow downwind of the pennines. 133 :1353–1369. [70](#), [102](#)
- [Shubin and Bell, 1987] Shubin, G. R. and Bell, J. B. (1987). A modified equation approach to constructing fourth order methods for acoustic wave propagation. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 8(2) :135–151. [98](#)
- [Skamarock et al., 2008] Skamarock, W. C., Klemp, J. B., Dudhia, J., Gill, D. O., Barker, D. M., Duda, M. G., Huang, X.-Y., Wang, W., and Power, J. G. (2008). A description of the advanced research wrf version 3. *NCAR Tech. Note*, page 113pp. [52](#), [62](#)
- [Smith and Skillingstad, 2011] Smith, C. M. and Skillingstad, E. D. (2011). Effects of inversion height and surface heat flux on downslope windstorms. 139 :3750–3764. [54](#), [55](#)
- [Smith,] Smith, R. S.,(1977)," the steepening of hydrostatic mountain waves. *J. Atmos. Sci*, 34. [51](#)
- [Smith, 1979] Smith, R. B. (1979). The influence of mountains on the atmosphere. *Advances in Geophys.*, 21 :87–230. [4](#), [78](#)
- [Smith, 1985] Smith, R. B. (1985). On severe downslope winds. 42 :2597–2603. [54](#), [III](#)
- [Smith, 1989] Smith, R. B. (1989). Hydrostatic airflow over mountains. *Advances in geophysics*, 31 :1–41. [13](#)
- [Smith et al., 2008] Smith, R. B., Woods, B. K., Jensen, J., Cooper, W. A., Doyle, J. D., Jiang, Q., and Grubišić, V. (2008). Mountain waves entering the stratosphere. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 65(8) :2543–2562. [76](#)
- [Spizzichino, 1968] Spizzichino, A. (1968). Mesures de vents par meteoros entre 80 et 110 km. In *Winds and Turbulence in Stratosphere, Mesosphere and Ionosphere*, page 201. [6](#)
- [Stickler and Ammicht, 1980] Stickler, D. C. and Ammicht, E. (1980). Uniform asymptotic evaluation of the continuous spectrum contribution for the pekeris model. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 67(6) :2018–2024. [35](#)
- [Strauss et al., 2016] Strauss, L., Serafin, S., and Grubišić, V. (2016). Atmospheric rotors and severe turbulence in a long deep valley. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 73(4) :1481–1506. [107](#)
- [Sutherland and Bass, 2004] Sutherland, L. C. and Bass, H. E. (2004). Atmospheric absorption in the atmosphere up to 160 km. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(3) :1012–1032. [75](#)
- [Symons, 1888] Symons, G. J. (1888). eruption of krakatoa, and subsequent phenomena : report of the krakatoa committee of the royal society. [2](#)
- [Szuberla and Arnoult, 2009] Szuberla, K., O. J. V. and Arnoult, K. M. (2009). Explosion localization via infrasounds. *The Journal of the Acoustical Society of America*, (125(5)) :112–116. [12](#), [75](#)

- [Takane and Kusaka, 2011] Takane, Y. and Kusaka, H. (2011). Formation mechanisms of the extreme high surface air temperature of 40.9°C observed in the Tokyo metropolitan area : Considerations of dynamic foehn and foehnlike wind. 50 :1827–1841. [54](#)
- [Van Renterghem and Botteldooren, 2003] Van Renterghem, T. and Botteldooren, D. (2003). Numerical simulation of the effect of trees on downwind noise barrier performance. *Acta Acustica united with Acustica*, 89(5) :764–778. [9](#)
- [Vergeiner, 1971] Vergeiner, I. (1971). An operational linear lee wave model for arbitrary basic flow and two-dimensional topography. 97(411) :30–60. [55](#)
- [Vosper, 2003] Vosper, S. (2003). Development and testing of a high resolution mountain-wave forecasting system. *Meteorological Applications*, 10(1) :75–86. [71](#)
- [Waxler, 2002] Waxler, R. (2002). A vertical eigenfunction expansion for the propagation of sound in a downward-refracting atmosphere over a complex impedance plane. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(6) :2540–2552. [34](#), [35](#), [75](#), [78](#)
- [Waxler, 2003] Waxler, R. (2003). On the use of modal expansions to model broadband propagation in the nighttime boundary layer and other downward refracting atmospheres over lossy ground planes. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(4) :2313–2313. [35](#)
- [Waxler, 2004] Waxler, R. (2004). Modal expansions for sound propagation in the nocturnal boundary layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(4) :1437–1448. [9](#), [75](#)
- [Waxler et al., 2017] Waxler, R., Assink, J., and Velea, D. (2017). Modal expansions for infrasound propagation and their implications for ground-to-ground propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(2) :1290–1307. [82](#)
- [Waxler et al., 2008] Waxler, R., Gilbert, K. E., and Talmadge, C. (2008). A theoretical treatment of the long range propagation of impulsive signals under strongly ducted nocturnal conditions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(5) :2742–2754. [13](#), [75](#)
- [Webb, 1966a] Webb, W. L. (1966a). *Structure of the Stratosphere and Mesosphere*, volume 9. Academic Press. [5](#)
- [Webb, 1966b] Webb, W. L. (1966b). *Structure of the Stratosphere and Mesosphere*, volume 9. Academic Press. [6](#)
- [Whipple, 1926] Whipple, F. (1926). B. some lessons from the observations. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 52(218) :136–143. [123](#)
- [Whitham, 2011] Whitham, G. B. (2011). *Linear and nonlinear waves*, volume 42. John Wiley & Sons. [7](#)
- [Winchester, 2004] Winchester, S. (2004). *Krakatoa : The day the world exploded*. Penguin UK. [2](#)
- [Wursch and Sprenger, 2015] Wursch, M. and Sprenger, M. (2015). Swiss and austrian foehn revisited : A lagrangian based analysis. *Meteorologische Zeitschrift*, 24 :225–242. [54](#)