HAL
open science

Etude des couplages hydromécaniques et effets de non-saturation dans les géomatériaux. Application aux ouvrages souterrains

Jean-Michel Pereira

To cite this version:

Jean-Michel Pereira. Etude des couplages hydromécaniques et effets de non-saturation dans les géomatériaux. Application aux ouvrages souterrains. Géotechnique. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA Lyon), 2005. Français. NNT : . tel-02882896

HAL Id: tel-02882896

https://theses.hal.science/tel-02882896

Submitted on 27 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Année 2005

N° d'ordre : 2005-ISAL-00109

Département Génie Civil et Bâtiment
URA CNRS 1652

École doctorale MEGA
Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Thèse

Etude des couplages hydromécaniques et effets de non-saturation dans les géomatériaux. Application aux ouvrages souterrains

présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le grade de docteur

spécialité Génie Civil

par

Jean-Michel PEREIRA

Ingénieur des Travaux Publics de l'État

soutenue le 9 décembre 2005 devant le jury composé de

Rapporteur	F. DARVE	Professeur (INPG)
Rapporteur	P. DELAGE	Directeur de recherche (ENPC)
Président	H. DI BENEDETTO	Professeur (ENTPE)
Examinatrice	I. DJERAN-MAIGRE	Professeur (INSA de Lyon)
Directeur	H. WONG	Directeur de recherche CNRS (ENTPE)
Directeur	Ph. DUBUJET	Professeur (ENISE)
Invité	P. DANGLA	Chercheur HDR (LCPC)

Cette thèse a été réalisée au
Laboratoire Géomatériaux
École Nationale des Travaux Publics de l'État

ENTPE

Si tu peux voir détruit l'ouvrage de ta vie
Et sans dire un seul mot te mettre à rebâtir,
Ou perdre d'un seul coup le gain de cent parties
Sans un geste et sans un soupir ;
Si tu peux être amant sans être fou d'amour,
Si tu peux être fort sans cesser d'être tendre
Et, te sentant haï, sans haïr à ton tour,
Pourtant lutter et te défendre ;

Si tu peux supporter d'entendre tes paroles
Travesties par des gueux pour exciter des sots,
Et d'entendre mentir sur toi leurs bouches folles
Sans mentir toi-même d'un seul mot ;

Si tu peux rester digne en étant populaire,
Si tu peux rester peuple en conseillant les rois
Et si tu peux aimer tous tes amis en frère
Sans qu'aucun d'eux soit tout pour toi ;

Si tu sais méditer, observer et connaître
Sans jamais devenir sceptique ou destructeur,
Rêver, mais sans laisser le rêve être ton maître,
Penser sans n'être qu'un penseur ;

Si tu peux être dur sans jamais être en rage,
Si tu peux être brave et jamais imprudent,
Si tu sais être bon, si tu sais être sage
Sans être moral ni pédant ;

Si tu peux rencontrer Triomphe après Défaite
Et recevoir ces deux menteurs d'un même front,
Si tu peux conserver ton courage et ta tête
Quand tous les autres les perdront ;

Alors les Rois, les Dieux, la Chance et la Victoire
Seront à tout jamais tes esclaves soumis
Et, ce qui vaut bien mieux que les Rois et la Gloire,
Tu seras un homme, mon fils.

Rudyard Kipling
(Traduction Paul Eluard)

à Baptiste...

Remerciements

Je souhaite ici remercier quelques personnes qui ont participé, de près ou de loin, à la réussite de ce travail de thèse qui s'achève.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude envers Henry Wong, directeur de recherche au Centre National de la Recherche Scientifique et Philippe Dubujet, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Saint-Étienne. Ils m'ont proposé un thème de recherche passionnant et m'ont laissé une grande liberté pour mener mes travaux. Leurs conseils, tout au long de cette thèse, ont été très précieux. Il m'a été très agréable de travailler à leurs côtés, d'un point de vue tant professionnel que personnel.

Mes plus vifs remerciements vont ensuite à Messieurs Félix Darve, professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble et Pierre Delage, directeur de recherche à l'École Nationale des Ponts et Chaussées pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter ce mémoire.

Qu'il me soit également permis de remercier Patrick Dangla, chercheur au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées dont l'intérêt pour mes travaux a été à l'origine d'échanges sur les aspects théoriques particulièrement enrichissants.

Je remercie tout particulièrement Hervé Di Benedetto, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, ainsi qu'Irini Djeran-Maigre, pour avoir accepté de participer à l'évaluation de ce travail.

Je tenais en outre à remercier Claude-Henri Lamarque pour m'avoir accueilli au sein du Laboratoire Géomatériaux du Département Génie Civil et Bâtiment. J'associe à ces remerciements l'ensemble de mes collègues.

Je pense en particulier à Marie, pour sa gentillesse, son écoute et ses conseils précieux, ainsi qu'à Simon, Emmanuel et Brice pour les discussions passionnées que nous avons eues. Je termine cette thèse riche de leur amitié.

J'ajoute un merci tout particulier à Brice, Emmanuel et Van pour leur précieux (et oh combien apprécié !) coup de main logistique dans les tous derniers moments. Merci également à Didier, Denis, Laurent, Claude, Emmanuelle, Corinne, Hocine, Delphine...

Ce travail n'aurait pas vu le jour sans le Ministère en charge de l'Équipement qui a financé cette thèse. Je remercie à cet égard la Direction du Personnel et l'ENTPE d'avoir cru en ce projet.

Cette thèse parachève mon parcours étudiant. J'en profite pour remercier ma famille et mes proches, qui m'ont constamment encouragé dans la poursuite et la réussite de mes études.

Je termine en m'adressant à mon épouse, Stéphanie. Son soutien et sa patience ont été déterminants tout au long de ce travail et, plus particulièrement, dans les moments difficiles. Je la remercie du fond du cœur.

Saint-Maur-des-Fossés, décembre 2005

Étude des couplages hydromécaniques et effets de non-saturation dans les géomatériaux : Application aux ouvrages souterrains

La prise en compte des effets de non-saturation dans la modélisation du comportement des géomatériaux revêt des enjeux importants dans de nombreuses applications du génie civil. Après une synthèse des principales caractéristiques du comportement des sols non-saturés ainsi que de plusieurs propositions récentes de modèles de comportement, un cadre général de modélisation est proposé. Ce cadre constitue un outil méthodologique permettant une extension plus aisée des modèles élastoplastiques existants vers le domaine de saturation partielle. Un modèle élastoplastique évolué (CJS) est ensuite étendu selon cette méthodologie. Le modèle ainsi obtenu est alors validé sur la base d'essais de laboratoire.

Parallèlement à cette contribution rhéologique, un code de calcul par éléments finis a été développé. La discrétisation du problème à résoudre est présentée. Des simulations d'essais pressiométriques et de déconfinement d'une cavité souterraine utilisant cet outil numérique sont fournies et analysées. Celles-ci permettent d'évaluer les effets d'une saturation partielle sur le comportement du massif dans lequel un ouvrage souterrain est présent.

Mots-clés : sols non-saturés, modèle de comportement, contrainte effective, élastoplasticité, couplages hydromécaniques, éléments finis, pressiomètre, expansion de cavité.

Study of hydromechanical couplings and unsaturation effects in geomaterials : application to underground works

Taking into account unsaturation effects in modelling the behaviour of geomaterials is a key issue in many civil engineering applications. After a synthesis of the main characteristics of unsaturated soils behaviour and of several recently proposed constitutive models, a general framework for modelling purposes is proposed. This framework constitutes a methodological tool allowing an easier extension of existing elastoplastic models to unsaturated states. This methodology is then used to extend a complex elastoplastic model (CJS). The obtained model is validated using laboratory tests.

In addition to this rheological contribution, a computational code using the finite element method has been developed. The boundary value problem discretization is presented. Simulations of pressure-meter tests and underground cavity deconfinement with this numerical tool are proposed and analysed. They contribute to evaluate the effects of a partial saturation on the behaviour of the ground surrounding the work.

Keywords : unsaturated soils, constitutive model, effective stress, elastoplasticity, hydromechanical couplings, finite elements, pressure-meter, cavity expansion.

Laboratoire de recherche :
Laboratoire Géomatériaux, Département Génie Civil et Bâtiment (URA CNRS 1652)
École Nationale des Travaux Publics de l'État, rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin Cedex

Sommaire

Principaux symboles **xiii**

Introduction générale **1**

1 Mécanique des milieux poreux **5**
1.1 Introduction 6
1.2 Milieux poreux saturés 7
1.2.1 Description cinématique 7
1.2.2 Équations de conservation 12
1.2.3 Thermodynamique des milieux continus ouverts 17
1.2.4 Poroélasticité 23
1.2.5 Problèmes particuliers 25
1.3 Milieux poreux partiellement saturés 27
1.3.1 Description cinématique 27
1.3.2 Équations de conservation 29
1.3.3 Thermodynamique des milieux continus ouverts 34
1.3.4 Poroélasticité 44
1.3.5 Problèmes particuliers 48

2 Observations expérimentales **51**
2.1 La succion dans les sols 52
2.1.1 Phénomènes capillaires 52
2.1.2 Définition de la succion 54
2.2 Comportement sous sollicitations hydriques 56
2.3 Comportement mécanique des sols non-saturés 62
2.3.1 Comportement volumique 62
2.3.2 Résistance au cisaillement 64
2.4 Synthèse 67

3 Modèles de comportement **69**
3.1 Choix des variables d'état 70
3.1.1 Extension du concept de contrainte effective 70

3.1.2 Utilisation de plusieurs variables d'état . . . 72
3.2 Approches classiques à deux variables . . . 74
3.2.1 Le modèle BBM . . . 74
3.2.2 L'approche de Wheeler et Sivakumar . . . 77
3.2.3 Commentaires . . . 78
3.3 Approches micro-macro . . . 79
3.3.1 Le modèle de Kohgo . . . 79
3.3.2 Le modèle de Abou-Bekr . . . 81
3.4 Approches fondées sur la définition de Bishop . . . 82
3.4.1 Commentaires . . . 82
3.4.2 Modèle de Loret et Khalili . . . 82
3.5 Approche thermodynamique . . . 84
3.6 Conclusions . . . 86

4 Cadre général et adaptation du modèle CJS 89
4.1 Cadre de travail . . . 90
4.1.1 Choix des variables d'état . . . 90
4.1.2 Remarques sur l'utilisation d'une contrainte effective . . . 91
4.2 Formulation générale d'un modèle non-saturé . . . 93
4.2.1 Hypothèses et définitions . . . 93
4.2.2 Modèle isotrope généralisé . . . 94
4.2.3 Comparaison avec les approches récentes . . . 99
4.2.4 Extension à un modèle tridimensionnel . . . 99
4.3 Adaptation du modèle CJS aux états non-saturés . . . 102
4.3.1 Modèle CJS initial . . . 103
4.3.2 Extension du modèle CJS aux états partiellement saturés . . . 110
4.4 Identification des paramètres CJS . . . 115
4.4.1 Paramètres CJS initiaux . . . 115
4.4.2 Paramètres capillaires . . . 116
4.4.3 Paramètres CJS étendu . . . 116
4.5 Validation du modèle CJS étendu . . . 116
4.5.1 Chemins de compression triaxiale . . . 117
4.5.2 Chemins de compression œdométrique . . . 121
4.5.3 Chemins de compression isotrope . . . 123

5 Modélisation numérique 127
5.1 Formulation du problème global . . . 128
5.2 Formulation variationnelle du problème . . . 130
5.3 Discrétisation spatiale . . . 131
5.4 Discrétisation temporelle . . . 133
5.5 Description du problème aux limites . . . 135
5.6 Présentation du code de calcul par éléments finis . . . 138
5.6.1 Calcul des matrices élémentaires . . . 142
5.6.2 Intégration numérique de la loi de comportement . . . 142
5.6.3 Architecture du programme . . . 145
5.7 Traitement de conditions particulières . . . 146
5.7.1 Cas saturé non-drainé . . . 146
5.7.2 Cas non-saturé non-drainé . . . 147

5.7.3 Implémentation de conditions œdométriques 152
5.7.4 Essai de gonflement empêché 154

6 Résultats numériques 155
6.1 Essais pressiométriques 156
6.1.1 Conditions non-drainées 156
6.1.2 Prise en compte de l'écoulement de la phase liquide 165
6.2 Essai de déconfinement d'une cavité souterraine 168
6.3 Essai de gonflement empêché 170

Conclusions et perspectives 173

Bibliographie 181

Principaux symboles et abréviations

Symb.	Définition	Dimension
	Caractères latins	
a	coefficient de tortuosité	1
$\boldsymbol{B}_e^p$	matrice élémentaire des dérivées des fonctions d'interpolation hydraulique	1
$\boldsymbol{B}_e^u$	matrice élémentaire des dérivées des fonctions d'interpolation mécanique	1
$\boldsymbol{B}^p$	matrice assemblée des dérivées des fonctions d'interpolation hydraulique	1
$\boldsymbol{B}^u$	matrice assemblée des dérivées des fonctions d'interpolation mécanique	1
$\boldsymbol{d}$	taux de déformation eulérien	T^{-1}
D_{va}	coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air sec	$\mathrm{L}^2.\mathrm{T}^{-1}$
e	indice des vides	1
e	énergie interne volumique du milieu	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
e_m^α	énergie interne spécifique de la phase α	$\mathrm{L}^2.\mathrm{T}^{-2}$
$\mathcal{E}$	énergie totale du milieu	$\mathrm{M.L}^2.\mathrm{T}^{-2}$
E	énergie interne du milieu	$\mathrm{M.L}^2.\mathrm{T}^{-2}$
$\mathcal{F}$	transformation du milieu	–
$\mathcal{F}^{-1}$	transformation inverse du milieu	–
$\mathcal{F}_t$	transformation relative à l'instant t du milieu	–
F	transformation linéaire tangente du milieu	1
$\boldsymbol{F}$	efforts à distance s'exerçant sur le milieu poreux	$\mathrm{M.L.T}^{-2}$
$\boldsymbol{F}^\alpha$	densité massique des efforts à distance sur la phase α	$\mathrm{L.T}^{-2}$
$\boldsymbol{F}_{int}^\alpha$	densité volumique des efforts d'interaction sur la phase α	$\mathrm{M.L}^{-2}.\mathrm{T}^{-2}$
$\boldsymbol{g}$	accélération de la pesanteur	$\mathrm{L.T}^{-2}$
g_m^α	enthalpie libre spécifique du fluide α	$\mathrm{L}^2.\mathrm{T}^{-2}$
H_R	humidité relative	1
I_1'	premier invariant du tenseur des contraintes	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
J	jacobien de la transformation	1
$\boldsymbol{k}$	tenseur de perméabilité intrinsèque du milieu	L^2

$\boldsymbol{k}_\alpha$	tenseur de perméabilité au fluide α du milieu	$\mathrm{M}^{-1}.\mathrm{L}^{3}.\mathrm{T}$
$k_{r\alpha}$	perméabilité relative au fluide α	1
K	énergie cinétique du milieu	$\mathrm{M.L}^{2}.\mathrm{T}^{-2}$
K_α	module de rigidité du fluide α	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
m	apport de masse fluide par unité de volume	$\mathrm{M.L}^{-3}$
m_α	contenu en masse α	$\mathrm{M.L}^{-3}$
$\dot{m}_{\to\alpha}$	taux massique de création de phase α	$\mathrm{M.L}^{-3}.\mathrm{T}^{-1}$
M_α	masse molaire du constituant α	$\mathrm{M.N}^{-1}$
$\boldsymbol{M}^\alpha$	courant relatif lagrangien de masse de fluide α	$\mathrm{M.L}^{-2}.\mathrm{T}^{-1}$
$\boldsymbol{M}_O$	moment au point O des efforts extérieurs sur le milieu	$\mathrm{M.L}^{2}.\mathrm{T}^{-2}$
n	porosité eulérienne du milieu	1
n_α	porosité partielle eulérienne de la phase α	1
$\boldsymbol{n}$	vecteur normal unitaire	1
n_e^p	nombre de nœuds par élément hydraulique	1
n_e^u	nombre de nœuds par élément mécanique	1
n^p	nombre total de nœuds hydrauliques	1
n^u	nombre total de nœuds mécaniques	1
$\boldsymbol{N}_e^p$	matrice élémentaire des fonctions d'interpolation nodale des pressions	1
$\boldsymbol{N}_e^u$	matrice élémentaire des fonctions d'interpolation nodale des déplacements	1
$\boldsymbol{N}^p$	matrice assemblée des fonctions d'interpolation nodale des pressions	1
$\boldsymbol{N}^u$	matrice assemblée des fonctions d'interpolation nodale des déplacements	1
p	contrainte moyenne	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
p'	contrainte effective moyenne	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
p'_0	contrainte de préconsolidation à saturation	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
p'_π	contrainte de préconsolidation à succion donnée	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
p_{atm}	pression atmosphérique	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
p_c	pression capillaire	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
$\tilde{p}_{le}$	vecteur élémentaire des pressions nodales	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
$\tilde{p}_l$	vecteur assemblé des pressions nodales	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
p_α	pression de la phase α	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
P_e	puissance des efforts extérieurs	$\mathrm{M.L}^{2}.\mathrm{T}^{-3}$
P_t	point géométrique du domaine à l'instant t	–
q	déviateur des contraintes	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
$\boldsymbol{q}$	vecteur courant de chaleur eulérien	$\mathrm{M.T}^{-3}$
$\boldsymbol{q}_\alpha$	flux de phase α dans le milieu	$\mathrm{L.T}^{-1}$
Q	taux de chaleur reçue par le milieu	$\mathrm{M.L}^{2}.\mathrm{T}^{-3}$
$\boldsymbol{Q}$	vecteur courant de chaleur lagrangien	$\mathrm{M.T}^{-3}$
r	taux de chaleur reçue depuis une source volumique	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-3}$
R	constante des gaz parfaits	$\mathrm{M.L}^{2}.\mathrm{T}^{-2}.\Theta^{-1}.\mathrm{N}^{-1}$
s	densité volumique eulérienne d'entropie du milieu	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}.\Theta^{-1}$
s	succion	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
$\boldsymbol{s}$	déviateur des contraintes	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}$
S	densité volumique lagrangienne d'entropie du milieu	$\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}.\Theta^{-1}$

$\mathcal{S}$	entropie du milieu	$\mathrm{M.L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}}$
s_{II}	second invariant du tenseur $\boldsymbol{s}$	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
s_e	succion d'entrée d'air	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
S_s	densité volumique lagrangienne d'entropie du squelette	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}.\Theta^{-1}}$
$\boldsymbol{S}_t$	surface orientée dans la configuration à l'instant t	$\mathrm{L^2}$
s_m^α	densité massique d'entropie de la phase α	$\mathrm{L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}}$
S_α	degré de saturation de la phase α	1
t	temps	T
T	température	Θ
$\boldsymbol{T}$	densité surfacique des efforts sur le milieu	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
$\boldsymbol{T}^\alpha$	densité surfacique des efforts sur la phase α	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
$\tilde{\boldsymbol{u}}_e$	vecteur élémentaire des déplacements nodaux	L
$\tilde{\boldsymbol{u}}$	vecteur assemblé des déplacements nodaux	L
$\boldsymbol{u}^\alpha$	déplacement de la phase α	L
U	variation d'énergie libre des interfaces	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
v	volume spécifique du squelette	1
v_l	volume spécifique du liquide	1
$\boldsymbol{v}^\alpha$	vitesse de la phase α	$\mathrm{L.T^{-1}}$
$\boldsymbol{v}^{r,\alpha}$	vitesse relative du fluide α par rapport au squelette	$\mathrm{L.T^{-1}}$
$\boldsymbol{w}^\alpha$	courant relatif de masse fluide α eulérien	$\mathrm{M.L^{-2}.T^{-1}}$
w_s	énergie élastique volumique de la phase solide	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
$\boldsymbol{x}$	vecteur position dans la configuration eulérienne	L
$\boldsymbol{X}$	vecteur position dans la configuration lagrangienne	L
$\mathbf{1}$	tenseur unité	1

Caractères grecs

$\boldsymbol{\gamma}^\alpha$	accélération d'une particule de la phase α	$\mathrm{L.T^{-2}}$
γ_{lg}	tension superficielle entre les phases l et g	$\mathrm{M.T^{-2}}$
Γ_p	partition de la frontière où la pression de fluide est imposée	–
Γ_q	partition de la frontière où le flux est imposé	–
Γ_u	partition de la frontière où le déplacement est imposé	–
Γ_σ	partition de la frontière où la contrainte est imposée	–
$\delta\boldsymbol{\sigma}'$	correction du tenseur des contraintes effectives	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
$\boldsymbol{\Delta}$	tenseur des déformations de Green-Lagrange	1
$\boldsymbol{\epsilon}$	tenseur des déformations	1
$\boldsymbol{\epsilon}^e$	tenseur des déformations élastiques	1
$\boldsymbol{\epsilon}^p$	tenseur des déformations plastiques	1
ϵ_v	déformation volumique du squelette	1
$\boldsymbol{\epsilon}_s$	déformation déviatorique du squelette	1
θ	angle de contact liquide-gaz	1
$\theta_{\boldsymbol{s}}$	angle de Lode associé au tenseur $\boldsymbol{s}$	1
$\boldsymbol{\kappa}$	tenseur de conductivité thermique	$\mathrm{M.L.T^{-3}.\Theta^{-1}}$
μ_α	viscosité dynamique du fluide α	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-1}}$
π	pression interstitielle équivalente	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
$\boldsymbol{\Pi}$	tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
ρ_α	masse volumique intrinsèque de la phase α	$\mathrm{M.L^{-3}}$

ρ^α	masse volumique apparente de la phase α	$\mathrm{M.L^{-3}}$
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes de Cauchy	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
$\boldsymbol{\sigma}'$	tenseur des contraintes effectives	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
$\boldsymbol{\sigma}^\alpha$	tenseur de contrainte partielle dans la phase α	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
ϕ	porosité lagrangienne du milieu	1
ϕ_α	porosité partielle lagrangienne de la phase α	1
φ	dissipation eulérienne du milieu	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-3}}$
Φ	dissipation lagrangienne du milieu	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-3}}$
φ_1	dissipation intrinsèque volumique eulérienne du milieu	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-3}}$
φ_2	dissipation volumique eulérienne du milieu liée au transport de chaleur	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-3}}$
φ_3	dissipation volumique eulérienne du milieu liée au transport de masse fluide	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-3}}$
$\varphi_\rightarrow$	dissipation volumique eulérienne du milieu liée au changement de phase	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-3}}$
Φ_1	dissipation intrinsèque volumique lagrangienne du milieu	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-3}}$
Φ_2	dissipation volumique lagrangienne du milieu liée au transport de chaleur	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-3}}$
Φ_3	dissipation volumique lagrangienne du milieu liée au transport de masse fluide	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-3}}$
$\Phi_\rightarrow$	dissipation volumique lagrangienne du milieu liée au changement de phase	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-3}}$
ψ	énergie libre volumique eulérienne du milieu	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
ψ_s	énergie libre volumique du squelette	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
Ψ	énergie libre volumique lagrangienne du milieu	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
Ψ_s	énergie libre volumique lagrangienne du squelette	$\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}$
Ω_t	volume du milieu poreux à l'instant t	$\mathrm{L^3}$
Ω_t^p	volume poreux connecté du milieu à l'instant t	$\mathrm{L^3}$

Opérateurs

$\dfrac{\mathrm{d}^\alpha \cdot}{\mathrm{d}t}$	dérivée particulaire en suivant la phase α	–
$\dfrac{\mathrm{D}\cdot}{\mathrm{D}t}$	dérivée matérielle	–
div	divergence eulérienne	–
Div	divergence lagrangienne	–
div	divergence eulérienne (d'un tenseur)	–
grad	gradient eulérien	–
Grad	gradient lagrangien	–
${}^t(\cdot)$	transposée	–

Introduction générale

La mécanique des sols s'est longtemps intéressée aux sols saturés et de nombreux modèles de leur comportement ont été proposés. Ces modèles couvrent une large gamme de matériaux et ont permis, au fur et à mesure des propositions, une modélisation toujours plus fine des sols saturés. Cependant, un nombre croissant d'applications d'ingénierie civile implique des géomatériaux dans des états de saturation partielle.

Cette tendance est due, en partie seulement, à l'apparition de nouveaux enjeux faisant intervenir directement de tels matériaux. On pense en particulier à la problématique du stockage de déchets radioactifs de haute activité en profondeur qui a été à l'origine d'une dynamique importante autour de la modélisation du comportement des sols partiellement saturés.

En partie seulement puisqu'il s'avère qu'une grande partie des sols rencontrés à la surface du globe ne sont pas saturés en eau et ce, y compris dans les zones tempérées. De nombreux problèmes de géotechnique sont donc concernés.

Les applications faisant intervenir des matériaux partiellement saturés concernent des domaines très divers. Dans le génie civil traditionnel, le calcul d'ouvrages en terre (remblais routiers, barrages remblais) peut être cité : la non-saturation pourra avoir des effets importants sur le comportement de l'ouvrage durant les phases de construction (couplages hydromécaniques au cours du compactage, par exemple) et d'exploitation (évolutions du niveau de la nappe phréatique liées à de fortes pluies, des inondations ou, au contraire, un déficit pluviométrique...). L'interprétation d'essais géotechniques *in situ* sera également influencée par la non-saturation du matériau étudié.

Le cas du stockage de déchets radioactifs cité plus haut constitue un exemple d'application sortant du cadre du génie civil classique. Il est important de connaître les implications d'une désaturation éventuelle du massif hôte lors de son excavation (notamment en termes d'endommagement et de perméabilité). En outre, le matériau constitutif de la barrière ouvragée confinant les déchets sera mis en place en état de saturation partielle (il s'agit d'une bentonite non-saturée, compactée) ; le confinement des déchets par cette barrière ne deviendra effectif que si sa saturation se réalise (en raison du caractère gonflant du matériau). Ce processus est donc indispensable pour assurer le fonctionnement correct de la barrière ouvragée. L'étude du

comportement de cette barrière fait intervenir des couplages complexes d'origine hydraulique, mécanique et thermique (voire chimique).

La diversité et l'importance pour la société des enjeux des applications concernées rend nécessaire une modélisation fine du comportement des matériaux partiellement saturés. D'ailleurs, ce comportement est en général bien particulier par rapport à celui des matériaux saturés du fait de la coexistence de deux phases fluides dans l'espace poreux de ces matériaux. Les modèles et concepts utilisés en mécanique des sols saturés ne permettent pas de rendre compte de façon satisfaisante le comportement des sols non-saturés. Cet état de non-saturation doit donc être pris en compte spécifiquement afin d'améliorer la prédiction du comportement de ces sols par le biais de nouveaux concepts et modèles.

La modélisation du comportement des sols non-saturés a été particulièrement dynamique ces dernières années (notamment depuis le début des années 1990) et plusieurs propositions de modèles ont été avancées. Ces modèles se basent généralement sur des modèles élastoplastiques relativement simples pour le domaine saturé (comme le modèle de Cam Clay, par exemple). Il est donc intéressant d'étudier l'apport de modèles plus riches, pouvant décrire des comportements plus complexes. Cet enrichissement constitue en effet une démarche naturelle et a d'ailleurs été observé dans le cas des matériaux saturés.

Avant d'entamer cette démarche, il est utile de se pencher sur une tentative de formalisation des propositions d'extensions de modèles existants aux états de saturation partielle. Cette formalisation peut passer par la définition d'un cadre de modélisation élastoplastique pour les matériaux non-saturés afin de rendre la réutilisation de modèles existants plus aisée.

Cette question amène inévitablement à celle de la définition d'une contrainte effective permettant de modéliser le matériau sur l'ensemble du domaine saturé – non-saturé (une proposition célèbre a été faite par Bishop en 1959 [Bishop et Blight, 1963]). L'éventualité d'une telle définition apporterait évidemment des avantages considérables en terme de réutilisation des modèles rhéologiques existants mais également des algorithmes numériques utilisés dans l'implémentation de codes de calculs pouvant simuler le comportement d'un matériau quel que soit son état de saturation. Ce point, et plus largement, celui des variables d'état nécessaires à la définition de modèles de comportement pour les matériaux non-saturés sera abordé dans ce travail.

Les différents points évoqués ci-dessus ont fait l'objet de la thèse qui est présentée dans ce rapport. A cette étude théorique du comportement des matériaux non-saturés s'est également ajouté un volet numérique dont la finalité était d'étudier les effets de structure et non pas uniquement ceux liés à l'état de saturation du matériau.

Un code de calcul utilisant la méthode des éléments finis a donc été développé au cours de ce travail de thèse. Il permet d'étudier, sous des conditions géométriques simplifiées, le comportement de cavités cylindriques dans un massif totalement ou partiellement saturé, en tenant compte des écoulements de la phase liquide.

L'exploitation de ce code a pour but de mieux appréhender les couplages hydromécaniques se produisant dans les ouvrages souterrains, dès lors que des effets de structure sont mis en jeu. Des simulations d'essais pressiométriques ou de déconfinement de cavités souterraines seront menées. L'influence de la non-saturation du massif sera plus particulièrement étudiée. On s'intéressera également au rôle d'une condition de chargement non-drainé sur le comportement de l'ouvrage.

Ce rapport s'articule autour de six chapitres. Dans un premier temps, les équations fondamentales de la mécanique des milieux poreux sont présentées dans les cas saturé et non-saturé. Un parallèle est réalisé entre les formulations d'une contrainte effective dans ces deux situations.

Le deuxième chapitre est consacré à une synthèse des observations expérimentales du comportement des sols non-saturés. Les principaux aspects hydromécaniques sont résumés afin de fournir une base pour la modélisation élastoplastique du comportement de ces sols.

Le troisième chapitre offre une synthèse des principales contributions récentes à la modélisation rhéologique des sols partiellement saturés. Un intérêt particulier est accordé aux modèles dits « en contrainte effective » (qui utilisent, en fait, deux variables de contrainte indépendantes dont l'une est une combinaison complexe de la contrainte totale et de la succion).

Devant la diversité des approches rencontrées, une proposition de cadre méthodologique de modélisation est présentée au chapitre quatre. Ce cadre permet, en particulier, d'intégrer la plupart des modèles présentés au chapitre précédent. Cette méthodologie est en outre appliquée dans le cas concret de l'adaptation d'un modèle de comportement relativement avancé, le modèle CJS. Le modèle obtenu fait l'objet d'une validation sur la base de données expérimentales de laboratoire.

Le rapport se termine par les considérations numériques présentées ci-dessus avec, au chapitre cinq, la présentation de la discrétisation par éléments finis du problème à résoudre. Le dernier chapitre est consacré aux résultats de simulations numériques obtenues à l'aide du code de calcul développé pendant ces travaux.

CHAPITRE 1

Mécanique des milieux poreux

Ce chapitre rappelle les équations fondamentales de la mécanique des milieux poreux. Après une synthèse dans le cas saturé, le cas d'un milieu poreux partiellement saturé est plus particulièrement approfondi. Les équations d'état du milieu poreux sont données dans les deux descriptions et le comportement poroélastique est présenté.
La formulation d'une contrainte effective selon une approche thermodynamique et basée sur la définition d'une pression interstitielle équivalente est présentée dans la description des milieux partiellement saturés.

Sommaire

1.1 Introduction **6**
1.2 Milieux poreux saturés **7**
1.2.1 Description cinématique 7
1.2.2 Équations de conservation 12
1.2.3 Thermodynamique des milieux continus ouverts 17
1.2.4 Poroélasticité 23
1.2.5 Problèmes particuliers 25
1.3 Milieux poreux partiellement saturés **27**
1.3.1 Description cinématique 27
1.3.2 Équations de conservation 29
1.3.3 Thermodynamique des milieux continus ouverts 34
1.3.4 Poroélasticité 44
1.3.5 Problèmes particuliers 48

1.1 Introduction

Ce chapitre rappelle les équations fondamentales de la mécanique des milieux poreux. Il ne s'agit pas d'établir ces équations mais plutôt de présenter la démarche qui a permis de formaliser cette théorie. L'objectif de ce chapitre est d'introduire les outils utilisés dans la suite de ce travail. Le lecteur souhaitant plus de détails concernant la mécanique des milieux poreux pourra utilement se référer à [Coussy, 1995] ou [Lewis et Schrefler, 1998]. On pourra également voir [Dangla, 2001], [Coussy et Dangla, 2002] et [Bourgeois, 1997].

Les milieux poreux sont constitués d'une phase solide (matrice) formant un squelette (qui peut être granulaire, comme c'est le cas pour certains sols). Ce squelette solide n'occupe pas l'intégralité du volume du milieu poreux : un tel milieu comporte un volume poreux qui peut être saturé par un ou plusieurs fluides. Pour fixer les idées, dans le cas d'un sol granulaire, le squelette est constitué par les grains et les fluides sont généralement de l'eau et de l'air. Dans le cas où un fluide unique est présent, le milieu est dit saturé s'il s'agit de l'eau ou sec s'il s'agit de l'air. Si l'espace poreux est effectivement occupé par deux fluides non miscibles, il sera fait référence à un milieu non-saturé (ou partiellement saturé).

Il est à noter qu'il convient de distinguer l'espace poreux connecté (constituant un réseau dans lequel le(s) fluide(s) peut(peuvent) s'écouler) et l'espace poreux occlus (constitué par les vides compris dans le squelette solide). Cette porosité occluse sera considérée comme faisant partie intégrante du squelette solide et il n'y sera pas fait référence par la suite.

La description présentée ici s'inscrit dans la démarche adoptée d'abord par Biot [Biot, 1941, Biot, 1955, Biot, 1977] puis étendue par Coussy au cas de la thermodynamique des milieux continus ouverts polyphasiques. Il sera en particulier largement fait référence à [Coussy, 1995].

L'échelle d'étude considérée est l'échelle macroscopique (échelle de l'ingénieur), c'est-à-dire que l'on ne s'intéresse pas à la description microscopique du milieu poreux (tant en ce qui concerne la géométrie que le comportement mécanique). L'intérêt d'une telle démarche est de se placer à une échelle telle qu'un volume représentatif du milieux poreux pourra être considéré comme continu [1] ce qui permet d'utiliser les outils disponibles de la mécanique des milieux continus.

A l'échelle macroscopique, un milieu poreux sera considéré comme la superposition de plusieurs milieux continus, l'un représentant la phase solide (le squelette) et les autres les différentes phases fluides saturant l'espace poreux connecté.

Dans un premier temps, le cas d'un fluide seul sera examiné. L'extension au cas d'un milieu poreux saturé par plusieurs fluides sera abordée par la suite (section 1.3).

N.B. : la convention de sommation des indices répétés est adoptée sauf mention explicite. Les caractères gras représentent des grandeurs non-scalaires (vectorielles ou tensorielles).

1. L'existence d'une telle échelle ne fait pas le propos de ce travail. Il est cependant clair qu'elle dépend à la fois du matériau et de l'application considérée.

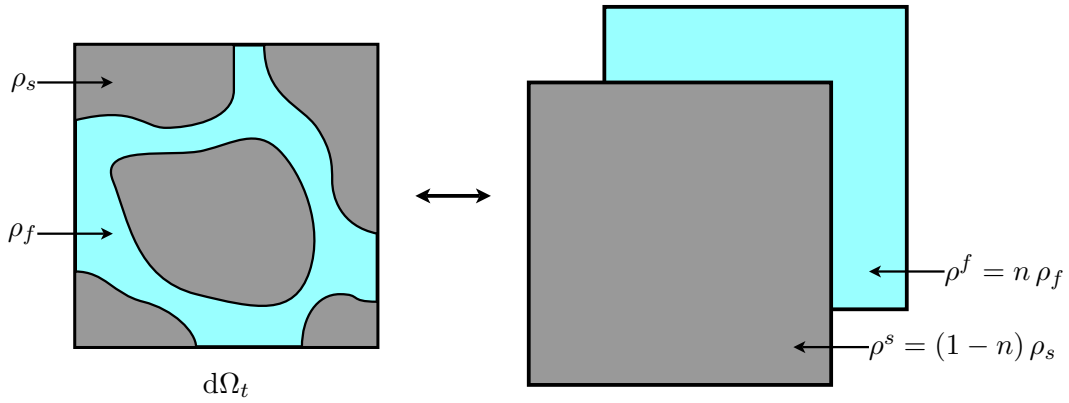


FIGURE 1.1 – Représentation d'un milieu poreux saturé comme la superposition de deux milieux continus.

1.2 Milieux poreux saturés

Les principales équations de la mécanique des milieux poreux saturés sont maintenant présentées brièvement. Des développements plus détaillés seront donnés lorsque le cas des milieux partiellement saturés sera abordé.

La description présentée ici donne un rôle tout à fait particulier au squelette solide ; c'est notamment le cas pour ce qui concerne la description cinématique du milieu poreux. Dans le cadre de cette approche, la particule solide est suivie dans son mouvement ; elle ne coïncide donc pas, *a priori*, avec la même particule fluide à chaque instant. De par l'intérêt porté au squelette, le milieu poreux est ainsi modélisé comme un milieu continu « ouvert ».

Hypothèse *Selon l'hypothèse de continuité, en tout point du volume élémentaire représentatif* $\mathrm{d}\Omega_t$*, il coexistera une particule solide et une particule fluide.*

Ces deux particules seront considérées comme des milieux continus. La Figure 1.1 illustre cette hypothèse de continuité.

1.2.1 Description cinématique

La description des déplacements et déformations des phases solide et fluide est maintenant abordée. Un référentiel muni d'un repère orthonormé $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ est considéré.

1.2.1.1 Définitions

Bien que cette étude ne fasse pas l'objet de considérations à l'échelle microscopique, l'introduction de certaines variables décrivant la composition volumique du milieu poreux est nécessaire. Il est en particulier utile de caractériser le volume effectivement occupé par le fluide. A cette fin, on introduit la porosité eulérienne n définie comme le rapport du volume poreux connecté $\mathrm{d}\Omega_t^p$ au volume total $\mathrm{d}\Omega_t$ d'une particule élémentaire :

$$n = \frac{\mathrm{d}\Omega_t^p}{\mathrm{d}\Omega_t} \tag{1.1}$$

Chaque phase n'occupant pas l'intégralité du volume du milieu poreux, il est possible de distinguer une masse volumique intrinsèque à la phase considérée et une masse volumique apparente. Comme il sera vu par la suite, ce sont les masses volumiques apparentes qui interviennent

dans les équations de conservation de la masse. Il convient cependant d'introduire les masses volumiques intrinsèques des deux phases puisqu'elles caractérisent leur matériau constitutif.

La masse volumique apparente du squelette ρ^s est la masse de solide contenue dans le volume élémentaire $\mathrm{d}\Omega_t$ rapportée au volume $\mathrm{d}\Omega_t$. La masse volumique intrinsèque du squelette ρ_s est la masse de solide contenue dans le volume $\mathrm{d}\Omega_t$ rapportée au volume effectivement occupé par le solide. En tenant compte de la définition de la porosité, il apparaît immédiatement que ces masses volumiques sont liées par la relation suivante :

$$\rho^s = (1-n)\,\rho_s \tag{1.2}$$

De façon similaire, pour le fluide, les masses volumiques apparente ρ^f et intrinsèque ρ_f sont introduites ; elles vérifient la relation suivante :

$$\rho^f = n\,\rho_f \tag{1.3}$$

1.2.1.2 Description du mouvement du squelette

La cinématique du squelette est identique à celle usuellement rencontrée dans le cas des milieux continus monophasiques. L'identité de ces descriptions provient de l'hypothèse de continuité ainsi que du rôle particulier donné au squelette. Cette description est maintenant brièvement rappelée. Pour de plus amples informations sur la description cinématique d'un milieu continu, le lecteur pourra se reporter à [Royis, 2000] ou [Salençon, 2002].

Description lagrangienne Dans sa configuration initiale à l'instant t_0, choisie comme configuration de référence, le squelette occupe un domaine noté Ω_0. Une particule située en un point géométrique P_0 est repérée par le vecteur position $\boldsymbol{X} = \overrightarrow{OP_0}$.

A tout instant t, le squelette occupe un domaine Ω_t et la particule matérielle située en P_0 (repérée par $\boldsymbol{X}$) dans la configuration de référence se situe maintenant au point géométrique P_t et est repérée par le vecteur position $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP_t}$.
Soit $\mathcal{F}$ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \Omega_0 \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \Omega_t \\ & (\boldsymbol{X}, t) & \longmapsto & \boldsymbol{x} \end{array} \tag{1.4}$$

et $\mathcal{F}_t$ l'application qui, à un instant t donné, est définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}_t: & \Omega_0 & \longrightarrow & \Omega_t \\ & \boldsymbol{X} & \longmapsto & \boldsymbol{x} \end{array} \tag{1.5}$$

Les applications $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_t$ sont appelées, respectivement, transformation et transformation relative à l'instant t du milieu continu constitué par le squelette. On suppose d'une part que l'application $\mathcal{F}$ est continûment différentiable par rapport aux variables d'espace et de temps et, d'autre part, que l'application $\mathcal{F}_t$ définit une bijection entre Ω_0 et Ω_t.

La description lagrangienne du mouvement du squelette entre les instants t_0 et t_1 consiste en la donnée de l'application $\mathcal{F}$ sur l'ensemble $\Omega_0 \times [t_0, t_1]$. Cette description requiert donc l'introduction d'une configuration de référence.

On introduit également le gradient de la transformation, appelé transformation linéaire tangente, au point P_0 et à l'instant t. C'est un tenseur du second ordre, noté $\mathsf{F}(\boldsymbol{X},t)$ et défini par :

$$\mathsf{F}(\boldsymbol{X},t) = \mathbf{Grad}\,\mathcal{F}(\boldsymbol{X},t) \tag{1.6}$$

soit, en notation indicielle :

$$F_{IJ}(\boldsymbol{X},t) = \frac{\partial \mathcal{F}_I}{\partial X_J}(\boldsymbol{X},t)\ \boldsymbol{e}_I \otimes \boldsymbol{e}_J \tag{1.7}$$

Le champ de déplacement du squelette $\boldsymbol{u}^s$ est défini selon :

$$\boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) - \boldsymbol{X} = \mathcal{F}(\boldsymbol{X},t) - \boldsymbol{X} \tag{1.8}$$

Le champ de vitesse du squelette $\boldsymbol{v}^s$ est défini comme la dérivée particulaire en suivant le squelette du champ de déplacement [2] :

$$\boldsymbol{v}^s(\boldsymbol{X},t) = \frac{\mathrm{d}^s u^s(\boldsymbol{X},t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

On introduit finalement le tenseur des déformations de Green-Lagrange, défini par :

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}({}^t\mathsf{F}\cdot\mathsf{F} - \mathbf{1}) \tag{1.10a}$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad}\boldsymbol{u}^s + {}^t\mathbf{Grad}\boldsymbol{u}^s + {}^t\mathbf{Grad}\boldsymbol{u}^s \cdot \mathbf{Grad}\boldsymbol{u}^s) \tag{1.10b}$$

où $\mathbf{1}$ représente le tenseur unité.

Rappelons maintenant les formules de transport usuelles. Le transformé $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ dans la configuration actuelle d'un vecteur $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ défini dans la configuration de référence est donné par :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathsf{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{1.11}$$

celui d'un élément de surface orienté $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_0$ par :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_t = J\ {}^t\mathsf{F}^{-1}\ \mathrm{d}\boldsymbol{S}_0 \tag{1.12}$$

et celui d'un élément de volume $\mathrm{d}\Omega_0$ par :

$$\mathrm{d}\Omega_t = J(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}\Omega_0 \tag{1.13}$$

où J, le jacobien de la transformation $\mathcal{F}_t$, est défini par :

$$J(\boldsymbol{X},t) = \det\big(\mathsf{F}(\boldsymbol{X},t)\big) \tag{1.14}$$

La Figure 1.2 illustre la transformation d'un volume élémentaire entre les instants initial et actuel.

2. Nous reviendrons sur cette notion de dérivée particulaire par la suite.

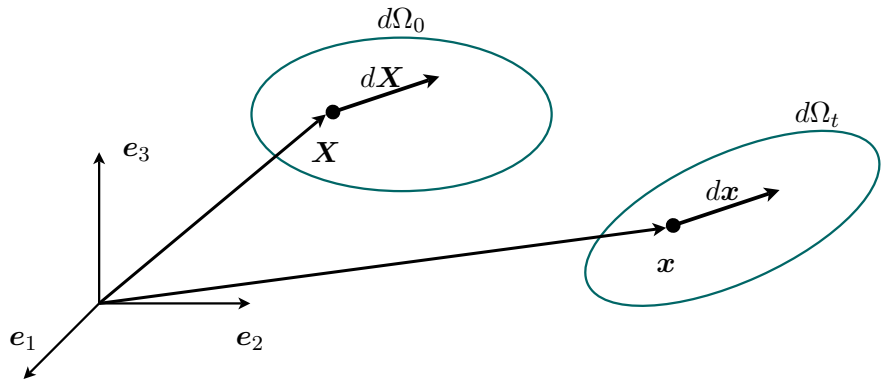


FIGURE 1.2 – Représentation de la transformation d'une particule de squelette.

Description eulérienne La description eulérienne du mouvement du squelette consiste à définir en tout point géométrique (repéré par le vecteur position $\boldsymbol{x}$) de la configuration actuelle et à tout instant t, la vitesse $\boldsymbol{v}^s$ de la particule du squelette située en ce point. Cette description est indépendante de toute configuration de référence ; l'ensemble des variables descriptives du squelette (champ de vitesse et son gradient eulérien) ne dépendent donc que de $\boldsymbol{x}$ et t.

La description eulérienne peut être obtenue à partir de la description lagrangienne en introduisant la transformation inverse $\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{x}, t)$ définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}^{-1}: & \Omega_t \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \Omega_0 \\ & (\boldsymbol{x}, t) & \longmapsto & \boldsymbol{X} \end{array} \tag{1.15}$$

On a bien sûr :

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{x}, t), t\big) = \boldsymbol{x} \tag{1.16}$$

La transformation linéaire tangente, notée $\mathsf{F}^{-1}(\boldsymbol{x}, t)$, associée à $\mathcal{F}^{-1}$ est définie par :

$$\mathsf{F}^{-1}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{grad}\, \mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.17}$$

soit, en notation indicielle :

$$F^{-1}_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{F}^{-1}_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, t)\ \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{1.18}$$

Avec ces définitions, il apparaît clairement que :

$$\mathbf{grad}\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{x}, t) = \big(\mathbf{Grad}\mathcal{F}(\boldsymbol{X}, t)\big)^{-1} \tag{1.19}$$

et donc que :

$$\mathsf{F}^{-1}(\boldsymbol{x}, t) = \big(\mathsf{F}(\boldsymbol{X}, t)\big)^{-1} \tag{1.20}$$

Le gradient eulérien des vitesses du squelette $\boldsymbol{v}^s$ est relié à la description lagrangienne par :

$$\mathbf{grad}\, \boldsymbol{v}^s(\boldsymbol{x}, t) = \dot{\mathsf{F}}\big(\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{x}, t), t\big) \cdot \mathsf{F}^{-1}\big(\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{x}, t), t\big) \tag{1.21}$$

avec

$$\dot{\mathsf{F}}(\boldsymbol{X}, t) = \frac{\partial \mathsf{F}}{\partial t}(\boldsymbol{X}, t) \tag{1.22}$$

1.2.1.3 Description du mouvement du fluide

La description cinématique du fluide saturant l'espace poreux est maintenant décrite.

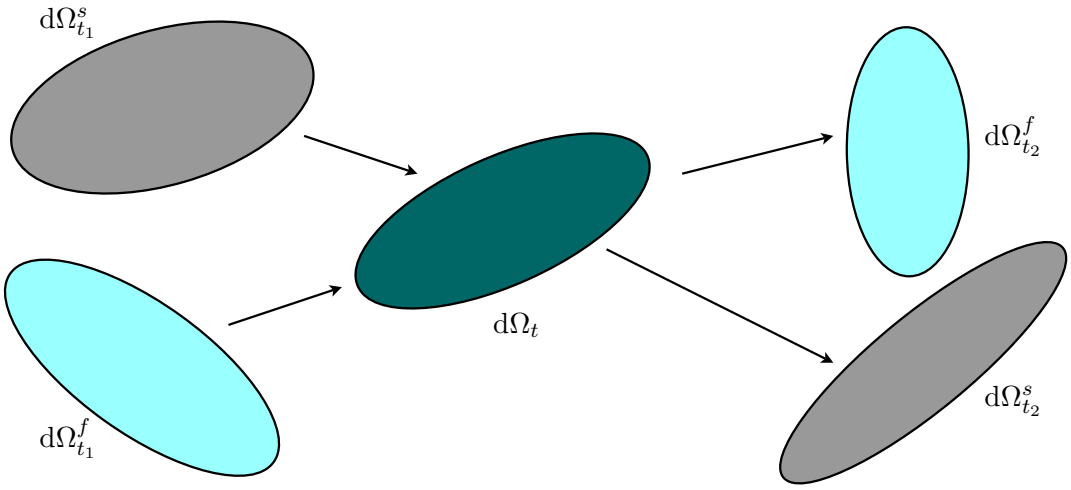


FIGURE 1.3 – Illustration du mouvement relatif entre les particules de solide et de fluide ($t_1 < t < t_2$).

Description eulérienne Cette description consiste à définir le champ de vitesse $\boldsymbol{v}^f(\boldsymbol{x}, t)$ pour tout instant t. Il s'agit de la description courante et « naturelle » pour retranscrire le mouvement d'un fluide.

Description du mouvement relatif du fluide par rapport au squelette L'intérêt particulier porté au squelette et à sa description tend naturellement à privilégier sa description vis-à-vis de celle du fluide. Dans cet objectif, la vitesse relative du fluide par rapport au squelette est introduite. On définit donc la vitesse relative de la particule de fluide située au point géométrique P_t comme la différence entre les vitesses eulériennes absolues des particules de fluide et de squelette situées à l'instant t au point géométrique P_t :

$$\boldsymbol{v}^{r,f}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}^f(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{v}^s(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.23}$$

Ces particules ne coïncident pas, *a priori*, dans la configuration initiale ou aux instants précédents et suivants. La Figure 1.3 illustre le mouvement relatif entre deux particules de squelette et de fluide. Sur cette figure, les particules ne coïncident qu'à l'instant t et pas en t_1 ou en t_2 (où t_1 et t_2 sont deux instants donnés tels que $t_1 < t < t_2$). À ces instants-là, la particule de squelette (que l'on suit dans tout cet intervalle contrairement à la particule fluide) coïncide avec d'autres particules fluides (qui ne sont pas représentées sur la figure).
Un vecteur eulérien courant relatif de masse fluide est introduit de la façon suivante :

$$\boldsymbol{w}^f(\boldsymbol{x}, t) = \rho^f(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{v}^{r,f}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.24}$$

Compte-tenu de la définition du vecteur $\boldsymbol{w}^f$, la quantité $\boldsymbol{w}^f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_t\,\mathrm{d}t$ correspond à la masse de fluide qui traverse, pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$, un élément de surface orienté $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_t$ que l'on suit dans le mouvement du squelette.
L'homologue lagrangien $\boldsymbol{M}^f$ du vecteur $\boldsymbol{w}^f$ est alors défini selon :

$$\boldsymbol{M}^f(\boldsymbol{X}, t) = J(\boldsymbol{X}, t)[\mathsf{F}(\boldsymbol{X}, t)]^{-1}\boldsymbol{w}^f\big(\mathcal{F}(\boldsymbol{X}, t), t\big) \tag{1.25}$$

de telle sorte que :

$$\boldsymbol{M}^f(\boldsymbol{X}, t)\mathrm{d}\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{w}^f\big(\mathcal{F}(\boldsymbol{X}, t), t\big)\mathrm{d}\boldsymbol{S}_t \tag{1.26}$$

où $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_0$ et $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_t$ sont les transportés l'un de l'autre dans la transformation du milieu. Seule la relation (1.26) justifie l'existence de $\boldsymbol{M}^f$ qui n'est aucunement lié à la vitesse actuelle de la particule fluide qui coïncidait avec la particule solide dans la configuration de référence.

On peut alors montrer la relation suivante entre les divergences de ces vecteurs :

$$\frac{1}{J(\boldsymbol{X},t)}\mathrm{Div}\boldsymbol{M}^f(\boldsymbol{X},t) = \mathrm{div}\boldsymbol{w}^f(\boldsymbol{x},t) \tag{1.27}$$

ou encore, en notations indicielles :

$$\frac{1}{J}\frac{\partial M_I}{\partial X_I} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \tag{1.28}$$

1.2.1.4 Grandeurs lagrangiennes et eulériennes

Il convient de noter que les qualificatifs lagrangiens et eulériens n'ont pas la même définition selon qu'ils s'appliquent à une grandeur mesurable ou à un champ, c'est-à-dire une fonction mathématique.

Une grandeur physique sera qualifiée de lagrangienne lorsqu'elle est définie par rapport à une configuration de référence. A l'inverse, une grandeur eulérienne est une grandeur qui ne dépend pas d'une configuration de référence. [3]

En ce qui concerne un champ, il sera qualifié de lagrangien (respectivement eulérien) s'il est une fonction de $\boldsymbol{X}$ (respectivement $\boldsymbol{x}$).

Notons finalement que, pour une grandeur donnée, décrite par un champ eulérien $b(\boldsymbol{x},t)$, il est possible d'introduire un représentant lagrangien $B(\boldsymbol{X},t)$ de ce champ dont la définition repose sur la bijection entre les descriptions lagrangienne et eulérienne. Ce représentant est défini par l'identité suivante :

$$B(\boldsymbol{X},t) = b(\mathcal{F}(\boldsymbol{X}),t) \tag{1.29}$$

Pour ce qui est du représentant lagrangien d'un champ eulérien de vecteurs ou de tenseurs, il s'agit d'un champ lagrangien défini à partir du champ eulérien par le biais d'une formule de transport (comme c'est le cas, par exemple, pour le champ $\boldsymbol{M}^f(\boldsymbol{X},t)$, représentant le champ $\boldsymbol{w}^f(\boldsymbol{x},t)$).

1.2.2 Équations de conservation

On s'intéresse maintenant aux équations de conservation de la masse de chacune des particules constituant le milieu poreux ainsi que de la quantité de mouvement de celui-ci.

Auparavant, les outils mathématiques permettant d'établir ces équations sont rappelés. Pour de plus amples détails, le lecteur pourra se reporter à [Royis, 2000], [Salençon, 2002] (dans le cadre de la mécanique des milieux continus) ou à [Coussy, 1995] (dans le cadre plus particulier de la mécanique des milieux poreux).

3. Il en résulte que dans la description cinématique du fluide introduite ici, il n'y aura pas de grandeur lagrangienne puisqu'aucune configuration de référence n'a été définie pour le fluide.

1.2.2.1 Dérivées particulaires et dérivée matérielle

Dérivées particulaires d'une grandeur physique L'établissement des équations de conservations passe par l'utilisation de la dérivée d'une grandeur donnée en suivant une particule dans son mouvement. Cette dérivée, dite particulaire, sera notée respectivement $\frac{\mathrm{d}^s\cdot}{\mathrm{d}t}$ ou $\frac{\mathrm{d}^f\cdot}{\mathrm{d}t}$ selon que la particule suivie est une particule représentant le squelette ou le fluide.

Considérons un champ lagrangien $B(\boldsymbol{X},t)$ représentant une grandeur physique donnée. La dérivée particulaire en suivant le squelette est simplement donnée par ($\boldsymbol{X}$ étant indépendant du temps) :

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}B(\boldsymbol{X},t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\boldsymbol{X},t) \tag{1.30}$$

La dérivée particulaire en suivant le squelette d'un champ eulérien $b(\boldsymbol{x},t)$ est donnée par ($\boldsymbol{x}$ dépendant du temps) :

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}b(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial b}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) + \mathbf{grad}\, b(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{v}^s(\boldsymbol{x},t) \tag{1.31}$$

La dérivée particulaire en suivant le fluide d'un champ eulérien $b(\boldsymbol{x},t)$ est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}^f}{\mathrm{d}t}b(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial b}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) + \mathbf{grad}\, b(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{v}^f(\boldsymbol{x},t) \tag{1.32}$$

L'utilisation de la relation (1.31) ainsi que la définition de la vitesse relative de la particule de fluide (1.23) permettent alors de relier les deux dérivées particulaires précédentes selon :

$$\frac{\mathrm{d}^f}{\mathrm{d}t}b(\boldsymbol{x},t) = \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}b(\boldsymbol{x},t) + \mathbf{grad}\, b(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{v}^{r,f}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.33}$$

Remarque : dans un soucis de clarté, on omettra désormais l'écriture des paramètres de dépendance des variables (sauf au moment de leur introduction).

Dérivées particulaires d'une intégrale de volume On considère un domaine Ω_t. Soit une grandeur physique représentée par une densité volumique $b(\boldsymbol{x},t)$. La quantité $\mathcal{B}$ de cette grandeur contenue dans Ω_t est donnée par :

$$\mathcal{B} = \int_{\Omega_t} b\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.34}$$

La dérivée particulaire de la quantité $\mathcal{B}$ en suivant le mouvement du milieu α (avec $\alpha = s$ pour le squelette et $\alpha = f$ pour le fluide) est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha\mathcal{B}}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega_t}\frac{\partial b}{\partial t}\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} b\ \boldsymbol{v}^\alpha\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.35}$$

ou, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha\mathcal{B}}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega_t}\frac{\partial b}{\partial t} + \mathrm{div}(b\ v^\alpha)\mathrm{d}\Omega \tag{1.36}$$

La définition des dérivées particulaires données en (1.31) et (1.32) permet de réexprimer la dernière intégrande. La dérivée particulaire de $\mathcal{B}$ peut ainsi être écrite selon :

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha\mathcal{B}}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega_t}\frac{\mathrm{d}^\alpha b}{\mathrm{d}t} + b\,\mathrm{div}(v^\alpha)\mathrm{d}\Omega \tag{1.37}$$

Dérivée matérielle Dans le cas où la variation d'une grandeur donnée est étudiée sur le milieu poreux dans son ensemble, il est intéressant d'introduire la dérivée matérielle de cette grandeur. Cette dérivée est notée $\frac{\mathrm{D}\cdot}{\mathrm{D}t}$.

On considère une grandeur physique extensive dont les densités par unité de volume de squelette et de fluide sont données respectivement par $b^s(\boldsymbol{x},t)$ et $b^f(\boldsymbol{x},t)$. De par le caractère extensif de la grandeur considérée, la quantité $\mathcal{B}$ de celle-ci contenue dans le domaine Ω_t est donnée par la somme des contributions de chacun des deux milieux :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^s + \mathcal{B}^f \tag{1.38}$$

avec les quantités partielles $\mathcal{B}^\alpha$ ($\alpha \in \{s, f\}$) étant définies par :

$$\mathcal{B}^\alpha = \int_{\Omega_t} b^j \mathrm{d}\Omega \tag{1.39}$$

La variation de la quantité $\mathcal{B}$ attachée au système matériel considéré vaut la somme des dérivées particulaires des quantités $\mathcal{B}^s$ et $\mathcal{B}^f$ en suivant la particule du milieu associé. La dérivée matérielle de $\mathcal{B}$ est ainsi donnée par (sans sommation sur les indices répétés) :

$$\frac{\mathrm{D}\mathcal{B}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}^s\mathcal{B}^s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^f\mathcal{B}^f}{\mathrm{d}t} \tag{1.40}$$

et peut être explicitée en utilisant les définitions (1.35) ou (1.37) des dérivées particulaires d'une intégrale de volume.

Il est à noter que les différentes dérivées données ici ne font intervenir aucune hypothèse quant à l'évolution du milieu. Il serait possible de réexprimer ces dérivées dans le cas particulier où la grandeur à dériver est représentée par une densité massique b_m^j. Il serait alors fait appel à la conservation de la masse de la phase j, ce qui permettrait de simplifier l'expression de la dérivée particulaire. Cette démarche ne sera cependant pas reprise ici afin de conserver toute la généralité apportée par l'utilisation d'une grandeur volumique représentant la grandeur physique à dériver, évitant ainsi tout risque de confusion ou d'erreur.[4] En effet, toute expression simplifiée tenant compte de la conservation de la masse d'une phase donnée doit être modifiée dès lors que cette équation de conservation est modifiée (pour tenir compte de réactions dans le milieu poreux comme, par exemple, la dissolution de la matrice solide ou le changement de phase liquide-vapeur).

1.2.2.2 Conservation de la masse

Expression eulérienne de la conservation de la masse du squelette On considère la particule de squelette contenue à l'instant t dans le volume Ω_t. La conservation de la masse de cette particule s'écrit simplement :

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} \rho^s \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{1.41}$$

Les expressions de la dérivée particulaire (1.36) ou (1.37) permettent d'exprimer l'Équation (1.41) sous forme locale selon :

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}(\rho^s) + \rho^s \mathrm{div}\boldsymbol{v}^s = 0 \tag{1.42a}$$

ou encore

$$\frac{\partial \rho^s}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho^s \boldsymbol{v}^s) = 0 \tag{1.42b}$$

4. Dans le cas où une grandeur est effectivement représentée par une densité massique, il est aisé de se ramener à une densité volumique en considérant le produit $\rho^\alpha\, b_m^\alpha$ (sans sommation sur les indices répétés).

Expression eulérienne de la conservation de la masse du fluide L'expression eulérienne de la conservation de la masse fluide est obtenue de façon analogue et l'on a :

$$\frac{\mathrm{d}^f}{\mathrm{d}t}(\rho^f) + \rho^f \mathrm{div}\boldsymbol{v^f} = 0 \tag{1.43a}$$

ou encore

$$\frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho^f \boldsymbol{v^f}) = 0 \tag{1.43b}$$

Expression lagrangienne de la conservation de la masse fluide Afin de parvenir à une expression lagrangienne de la conservation de la masse fluide, considérons la dérivée particulaire en suivant le squelette de la masse fluide contenue dans le volume élémentaire $\mathrm{d}\Omega_t$.

Pour déterminer cette masse fluide, il convient d'introduire l'apport de masse fluide m, grandeur lagrangienne définie par :

$$m(\boldsymbol{X}, t) = J(\boldsymbol{X}, t)\ \rho^f\big(\mathcal{F}(\boldsymbol{X}, t), t\big) - \rho_0^f(\boldsymbol{X}) \tag{1.44}$$

La quantité $m\,\mathrm{d}\Omega_0$ représente l'apport de masse fluide dans l'élément de volume $\mathrm{d}\Omega_t$ entre les instants initial et actuel.

En introduisant les masses volumiques intrinsèques, l'équation (1.44) peut également s'écrire (l'indice 0 fait référence à la configuration de référence) :

$$m = J\,\rho_f\,n - \rho_{f,0}\,n_0 \tag{1.45}$$

On montre alors la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^s m}{\mathrm{d}t} + J\,\mathrm{div}\boldsymbol{w}^f = 0 \tag{1.46}$$

Il reste alors à éliminer les grandeurs eulériennes en utilisant l'équivalent lagrangien $\boldsymbol{M}^f$ de $\boldsymbol{w}^f$ et la relation (1.27) entre leurs divergences respectives, ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{d}^s m}{\mathrm{d}t} + \mathrm{Div}\boldsymbol{M}^f = 0 \tag{1.47}$$

Il est à noter que la définition de m en tant qu'apport de masse fluide peut être réduite au contenu en masse fluide de la façon suivante : $m = J\,\rho_f\,n$. La quantité $m\,\mathrm{d}\Omega_0$ représente alors le contenu en masse fluide de l'élément de volume $\mathrm{d}\Omega_t$. L'expression lagrangienne de la conservation de la masse fluide ne serait en aucun cas modifiée (la dérivation étant menée en suivant le squelette, le second terme dans la définition (1.45) de m est donc ici sans influence). La définition proposée en (1.45) présente cependant certains avantages en termes de simplifications, notamment lorsqu'il s'agit de linéariser les équations de comportement du milieu poreux.

Régularité du vecteur courant de masse fluide Les fonctions de la porosité (et donc de masse volumique apparente) ne sont pas nécessairement continues des variables d'espace. Cependant, au passage d'une surface de discontinuité Σ de $\boldsymbol{w}^f$, la composante normale du vecteur courant de masse fluide doit nécessairement être continue et l'on aura :

$$\boldsymbol{w}^f + \cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{w}^f - \cdot\boldsymbol{n} \tag{1.48}$$

Cette condition peut être démontrée en considérant la masse fluide traversant un élément de surface $\mathrm{d}S_t$ attaché au squelette. La conservation de la masse impose que le débit massique

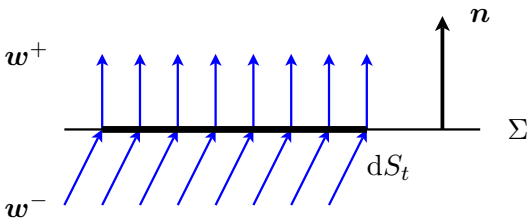


FIGURE 1.4 – Régularité du vecteur courant de masse fluide au passage d'une surface de discontinuité.

entrant $\boldsymbol{w}^f - \cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S_t$ soit égal au débit sortant $\boldsymbol{w}^f + \cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S_t$ (où $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire à l'élément de surface $\mathrm{d}S_t$). Cette condition est illustrée sur la Figure 1.4.

Un exemple de surface de discontinuité régulièrement rencontré est l'interface entre un milieu poreux et le fluide dans lequel il est immergé, cette discontinuité provenant du fait que la porosité passe de $n < 1$ dans le milieu poreux à l'unité dans le fluide.

1.2.2.3 Conservation de la quantité de mouvement

Introduisons tout d'abord $\boldsymbol{\gamma}^\alpha$, l'accélération d'une particule du milieu α :

$$\boldsymbol{\gamma}^\alpha = \frac{\mathrm{d}^\alpha \boldsymbol{v}^\alpha}{\mathrm{d}t} \tag{1.49}$$

On considère un sous-domaine Ω'_t de Ω_t. Le torseur (réduit au point O) des efforts extérieurs s'exerçant sur Ω'_t est donné par :

$$\boldsymbol{F} = \int_{\Omega'_t} (\rho^s \boldsymbol{F}^s + \rho^f \boldsymbol{F}^f) d\Omega + \int_{\partial\Omega'_t} \boldsymbol{T}\mathrm{d}S \tag{1.50a}$$

$$\boldsymbol{M}_O = \int_{\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge (\rho^s \boldsymbol{F}^s + \rho^f \boldsymbol{F}^f) d\Omega) + \int_{\partial\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge \boldsymbol{T}\mathrm{d}S \tag{1.50b}$$

avec $\boldsymbol{F}^i$, la densité massique des efforts à distance s'exerçant sur la phase $i = \{s, f\}$ et $\boldsymbol{T}$, la densité surfacique des efforts s'exerçant sur la frontière $\partial\Omega'_t$ du milieu.

Les composantes de la dérivée matérielle du torseur des quantités de mouvement du milieu poreux s'exprime, compte-tenu de la relation (1.40) et de la définition des accélérations particulaires de chaque milieu (1.49), selon les équations :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int_{\Omega'_t} (\rho^s \boldsymbol{v}^s + \rho^f \boldsymbol{v}^f)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega'_t} (\rho^s \boldsymbol{\gamma}^s + \rho^f \boldsymbol{\gamma}^f)\mathrm{d}\Omega \tag{1.51a}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int_{\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge (\rho^s \boldsymbol{v}^s + \rho^f \boldsymbol{v}^f)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge (\rho^s \boldsymbol{\gamma}^s + \rho^f \boldsymbol{\gamma}^f)\mathrm{d}\Omega \tag{1.51b}$$

La conservation de la quantité de mouvement du milieu poreux s'exprime par l'égalité de la résultante et du moment du torseur des efforts extérieurs (Eqs. (1.50)) et de la dérivée matérielle de celui des quantités de mouvement (Eqs. (1.51)). On obtient alors un système de deux relations dont la première s'écrit après réarrangement :

$$\int_{\partial\Omega'_t} \boldsymbol{T}\mathrm{d}S = \int_{\Omega'_t} \big(\rho^s(\boldsymbol{\gamma}^s - \boldsymbol{F}^s) + \rho^f(\boldsymbol{\gamma}^f - \boldsymbol{F}^f)\big)\mathrm{d}\Omega \tag{1.52}$$

Il est alors possible de démontrer (résultat classique connu sous le nom de « lemme du tétraèdre » qui ne sera pas rappelé ici) l'existence d'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{\sigma}$ (appelé tenseur des contraintes de Cauchy) vérifiant la propriété :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n} \tag{1.53}$$

En utilisant le théorème de la divergence, la relation (1.53) et en remarquant que l'équation (1.52) est valable sur tout sous-domaine Ω'_t de Ω_t, il est possible d'exprimer localement la conservation de la quantité de mouvement à partir de (1.52). On obtient la relation suivante (équation de la dynamique) :

$$\mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma} + \rho^s(\boldsymbol{F}^s - \boldsymbol{\gamma}^s) + \rho^f(\boldsymbol{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f) = \mathbf{0} \tag{1.54}$$

On montre facilement que la formulation lagrangienne de cette relation s'écrit :

$$\mathbf{Div}(\mathsf{F} \cdot \boldsymbol{\pi}) + m_s(\boldsymbol{F}^s - \boldsymbol{\gamma}^s) + \tilde{m}_f(\boldsymbol{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f) = 0 \tag{1.55}$$

avec $m_s = Jn\rho_s$ et $\tilde{m}_f = m_f + n_0\rho_{f,0}$, les masses de squelette et de fluide contenues dans $\mathrm{d}\Omega_t$ par unité de volume poreux $\mathrm{d}\Omega_0$.

La seconde relation du système précédemment évoqué permet de démontrer la symétrie du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$. Cette démonstration ne sera pas reprise ici.

1.2.3 Thermodynamique des milieux continus ouverts

La description thermodynamique du milieu poreux permet d'obtenir un cadre formel sur lequel s'appuyer pour établir les lois de comportement du milieu. Après la formulation des premier et second principes de la thermodynamique, l'inégalité fondamentale de Clausius-Duhem sera présentée. Celle-ci permettra d'énoncer les équations d'état du milieu poreux.

Pour de plus amples informations, on pourra se reporter à [Lemaitre et Chaboche, 1985] dans le cadre des milieux continus ou à [Coussy, 1995] dans le cadre spécifique des milieux poreux.

1.2.3.1 Premier principe de la thermodynamique

On considère un système occupant le domaine Ω_t. Le premier principe de la thermodynamique stipule que la dérivée matérielle de l'énergie d'un système matériel est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs P_e et du taux de chaleur reçue par le système Q :

$$\frac{\mathrm{D}\mathcal{E}}{\mathrm{D}t} = P_e + Q \tag{1.56}$$

L'énergie $\mathcal{E}$ du système considéré est, par définition, la somme de son énergie cinétique et de son énergie interne

$$\mathcal{E} = K + E \tag{1.57}$$

L'énergie cinétique K du système considéré est donnée par :

$$K = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2}(\rho^s \boldsymbol{v}^{s2} + \rho^f \boldsymbol{v}^{f2})\mathrm{d}\Omega \tag{1.58}$$

Son énergie interne E vaut quant à elle :

$$E = \int_{\Omega_t} (\rho^s e_m^s + \rho^f e_m^f)\mathrm{d}\Omega \tag{1.59}$$

La puissance des efforts extérieurs P_e est donnée par :

$$P_e = \int_{\Omega_t} (\rho^s \boldsymbol{F}^s \cdot \boldsymbol{v}^s + \rho^f \boldsymbol{F}^f \cdot \boldsymbol{v}^f) \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} (\boldsymbol{T}^s \cdot \boldsymbol{v}^s + \boldsymbol{T}^f \cdot \boldsymbol{v}^f) \mathrm{d}S \tag{1.60}$$

ou, en introduisant la vitesse relative du fluide par rapport au squelette :

$$P_e = \int_{\Omega_t} (\rho^s \boldsymbol{F}^s + \rho^f \boldsymbol{F}^f) \cdot \boldsymbol{v}^s \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} (\boldsymbol{T}^s + \boldsymbol{T}^f) \cdot \boldsymbol{v}^s \mathrm{d}S + \int_{\Omega_t} \rho^f \boldsymbol{F}^f \cdot \boldsymbol{v}^{r,f} \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{T}^f \cdot \boldsymbol{v}^{r,f} \mathrm{d}S \tag{1.61}$$

avec $\boldsymbol{T}^i$, les actions de surface s'exerçant sur la phase $i = \{s, f\}$ et vérifiant $\boldsymbol{T}^s + \boldsymbol{T}^f = \boldsymbol{T}$

Le taux de chaleur reçue par le système est quant à lui donné par :

$$Q = \int_{\Omega_t} r \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} -\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1.62}$$

soit, en appliquant le théorème de la divergence :

$$Q = \int_{\Omega_t} (r - \mathrm{div}\boldsymbol{q}) \mathrm{d}\Omega \tag{1.63}$$

Après calcul des dérivées particulaires des énergies cinétique et interne du système et introduction du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ et après avoir utilisé les équations de conservation de la quantité de mouvement, le premier principe de la thermodynamique peut être explicité selon :

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\sigma}^f : \mathbf{grad}\boldsymbol{v}^{r,f} + \big(\mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma}^f + \rho^f (\boldsymbol{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f)\big) \cdot \boldsymbol{v}^{r,f} - \big(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(e_m^f \boldsymbol{w}^f)\big) + r - \mathrm{div}\boldsymbol{q} = 0 \tag{1.64}$$

où le taux de déformation eulérien $\boldsymbol{d}$ est la partie symétrique du gradient des vitesses du squelette *i.e.* $2\boldsymbol{d} = \mathbf{grad}\boldsymbol{v}^s + {}^t\mathbf{grad}\boldsymbol{v}^s$ et e représente la densité volumique d'énergie interne du milieu poreux : $e = \rho^s e_m^s + \rho^f e_m^f$.

1.2.3.2 Second principe de la thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique introduit deux nouvelles variables pour le matériau qui sont l'entropie $\mathcal{S}$ (grandeur extensive dont l'existence est postulée) et la température absolue T (grandeur intensive, strictement positive).

Hypothèse *On suppose qu'en un point géométrique donné, la température des deux particules se superposant est la même.*

Ce principe postule que la production interne spontanée d'entropie doit être positive ou nulle. La relation suivante permet d'exprimer ce principe (l'augmentation d'entropie du milieu est nécessairement supérieure (ou égale) à l'apport externe d'entropie) :

$$\frac{\mathrm{D}\mathcal{S}}{\mathrm{D}t} \geq \int_{\Omega_t} \frac{r}{T} \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} -\frac{1}{T} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1.65}$$

On introduit les densités massiques d'entropie du squelette et du fluide, notées respectivement s_m^s et s_m^f ainsi que la densité volumique d'entropie du milieu poreux $s = \rho^s s_m^s + \rho^f s_m^f$. Après calcul de la dérivée matérielle de l'entropie $\mathcal{S}$, on peut exprimer le second principe de la thermodynamique sous forme locale :

$$T\big(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}(s\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(s_m^f \boldsymbol{w}^f)\big) - r + \mathrm{div}\boldsymbol{q} - \frac{1}{T} \boldsymbol{q} \cdot \mathbf{grad}T \geq 0 \tag{1.66}$$

1.2.3.3 Inégalité de Clausius-Duhem

Formulation eulérienne de l'inégalité fondamentale En sommant les relations (1.64) et (1.66), on obtient l'inégalité suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\sigma}^f : \mathbf{grad}\boldsymbol{v}^{r,f} + (\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}^f + \rho^f(\boldsymbol{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f)) \cdot \boldsymbol{v}^{r,f} + T\big(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}(s\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(s_m^f \boldsymbol{w}^f)\big) \\ -\big(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(e_m^f \boldsymbol{w}^f)\big) - \frac{1}{T}\boldsymbol{q} \cdot \mathbf{grad}T \geq 0 \tag{1.67}$$

On définit l'énergie libre volumique ψ du milieu poreux :

$$\psi = e - Ts \tag{1.68}$$

On introduit également la pression macroscopique[5] p de la phase fluide. En supposant que la contrainte partielle dans ce milieu est purement isotrope, l'expression du tenseur de contrainte partielle dans le fluide s'exprime :

$$\boldsymbol{\sigma}^f = -n\,p_f\mathbf{1} \tag{1.69}$$

L'enthalpie libre spécifique du fluide est également introduite :

$$g_m^f = e_m^f + \frac{p_f}{\rho_f} - Ts_m^f \tag{1.70}$$

En injectant (1.69) dans l'inégalité (1.67) et en utilisant les définitions de l'énergie libre et de l'enthalpie libre ainsi que celle du vecteur courant relatif de masse fluide $\boldsymbol{w}^f$, on obtient après quelques réarrangements l'inégalité de Clausius-Duhem généralisée aux milieux poreux :

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - g_m^f \mathrm{div}\boldsymbol{w}^f - s\frac{\mathrm{d}^s T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s \psi}{\mathrm{d}t} - \psi \mathrm{div}(s\boldsymbol{v}^s) - \boldsymbol{w}^f \cdot \big(s_m^f \mathbf{grad}T + \mathbf{grad}g_m^f - (\boldsymbol{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f)\big) \\ -\frac{1}{T}\boldsymbol{q} \cdot \mathbf{grad}T \geq 0 \tag{1.71}$$

Identification des dissipations Le terme de gauche de l'inégalité (1.71) représente la dissipation eulérienne du milieu poreux à l'instant t. Elle peut être décomposée comme suit :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \geq 0 \tag{1.72}$$

avec

$$\varphi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - g_m^f \mathrm{div}\boldsymbol{w}^f - s\frac{\mathrm{d}^s T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s \psi}{\mathrm{d}t} - \psi \mathrm{div}(s\boldsymbol{v}^s) \tag{1.73a}$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{T}\boldsymbol{q} \cdot \mathbf{grad}T \tag{1.73b}$$

$$\varphi_3 = -\boldsymbol{w}^f \cdot \big(s_m^f \mathbf{grad}T + \mathbf{grad}g_m^f - (\boldsymbol{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f)\big) \tag{1.73c}$$

La dissipation φ_1 est appelée dissipation intrinsèque volumique. Il est possible de démontrer qu'elle est nécessairement non-négative.

Les dissipations φ_2 et φ_3 sont associées respectivement au transport de chaleur et de masse fluide à travers le milieu poreux. Il n'est pas possible de conclure quant à la non-négativité des dissipations φ_2 et φ_3 considérées indépendamment.

5. En fait, p est un représentant à l'échelle macroscopique de la pression régnant dans le fluide à l'échelle microscopique.

Formulation lagrangienne de la dissipation intrinsèque Par la suite, le système que l'on considère est composé d'une particule de squelette que l'on suit dans son mouvement et d'une particule de fluide qui coïncide à l'instant t avec la particule de squelette [6]. Compte-tenu du rôle particulier donné à la particule de squelette, il convient de formuler la dissipation intrinsèque à l'aide de grandeurs lagrangiennes.
Commençons par définir la densité volumique lagrangienne de dissipation intrinsèque Φ_1 telle que :

$$\Phi_1 \mathrm{d}\Omega_0 = \varphi_1 \mathrm{d}\Omega_t \tag{1.74}$$

On introduit également Ψ et S les densités volumiques lagrangiennes d'énergie libre et d'entropie du milieu poreux :

$$\Psi \mathrm{d}\Omega_0 = \psi \mathrm{d}\Omega_t \tag{1.75}$$

$$S \mathrm{d}\Omega_0 = s \mathrm{d}\Omega_t \tag{1.76}$$

On définit encore le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\mathbf{\Pi}$ (clairement symétrique par définition) :

$$\mathbf{\Pi}(\boldsymbol{X},t) = J(\boldsymbol{X},t)\mathsf{F}^{-1}(\boldsymbol{X},t)\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{F}(\boldsymbol{X},t),t)\cdot({}^t\mathsf{F})^{-1}(\boldsymbol{X},t) \tag{1.77}$$

En utilisant la définition du tenseur taux de déformation eulérien $\boldsymbol{d}$ ainsi que (1.21), on obtient l'identité suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} = \frac{1}{J}\mathbf{\Pi} : \frac{\mathrm{d}^s\mathbf{\Delta}}{\mathrm{d}t} \tag{1.78}$$

où $\mathbf{\Delta}$ est le tenseur des déformations de Green-Lagrange, dont la définition est rappelée ici par commodité :

$$\mathbf{\Delta} = \frac{1}{2}({}^t\mathsf{F}\cdot\mathsf{F} - \mathbf{1}) \tag{1.79a}$$

$$\mathbf{\Delta} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad}\boldsymbol{u}^s + {}^t\mathbf{Grad}\boldsymbol{u}^s + {}^t\mathbf{Grad}\boldsymbol{u}^s\cdot\mathbf{Grad}\boldsymbol{u}^s) \tag{1.79b}$$

Utilisant la non-négativité de φ_1, il est possible de donner l'expression lagrangienne de la dissipation intrinsèque :

$$\Phi_1 = \mathbf{\Pi} : \frac{\mathrm{d}^s\mathbf{\Delta}}{\mathrm{d}t} + g_m^f\frac{\mathrm{d}^s m}{\mathrm{d}t} - S\frac{\mathrm{d}^s T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s\Psi}{\mathrm{d}t} \geq 0 \tag{1.80}$$

Le terme $g_m^f\frac{\mathrm{d}^s m}{\mathrm{d}t}$ est spécifique à la coexistence de deux phases dans le milieu poreux et provient du fait que le système considéré est ouvert. Il représente la puissance apportée au système par le mouvement relatif du fluide par rapport au squelette.

La relation (1.80) permet ensuite d'établir les équations d'état du milieu poreux. Celles-ci servent alors de base à la définition de lois de comportement dans le cadre d'une approche macroscopique.

De la même façon, il est possible de montrer que les formulations lagrangiennes des dissipations associées au transport de chaleur et de masse fluide peuvent s'écrire selon :

$$\Phi_2 = -\frac{1}{T}\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{Grad}T \tag{1.81}$$

$$\Phi_3 = -\boldsymbol{M}^f\cdot\left(s_m^f\mathbf{Grad}T + \mathbf{Grad}g_m^f - (\boldsymbol{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f)\cdot\mathsf{F}\right) \tag{1.82}$$

où $\boldsymbol{Q}$ est l'équivalent lagrangien du vecteur courant de chaleur eulérien $\boldsymbol{q}$.

6. Il résulte de ce choix que la particule de squelette suivie dans le mouvement du milieu poreux est identique quel que soit l'instant auquel on se place et qu'elle coïncide à chaque instant avec des particules fluides qui, *a priori*, sont différentes.

Lois de conduction de la chaleur et de la masse fluide Bien que la non-négativité des dissipations φ_2 et φ_3 considérées séparément ne soit démontrée, l'hypothèse de découplage de ces dissipations sera cependant faite par la suite :

$$\varphi_2 \geq 0 \tag{1.83}$$

$$\varphi_3 \geq 0 \tag{1.84}$$

On s'intéresse maintenant aux lois de conductions de la chaleur et de la masse fluide. Il est habituel d'adopter des lois de conductions linéaires assurant ainsi de fait la non-négativité des dissipations liées à ces phénomènes.
En ce qui concerne la conduction de chaleur, la loi de Fourier peut être adoptée :

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{grad} T \tag{1.85}$$

Pour ce qui est de la conduction de masse fluide, on considérera la loi de Darcy :[7]

$$\frac{\boldsymbol{w}^f}{\rho^f} = \boldsymbol{k}_f \cdot \big(-\mathbf{grad} p_f + \rho^f (\boldsymbol{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f) \big) \tag{1.86}$$

En pratique, les forces volumiques agissant sur le fluide se limitent souvent à la pesanteur $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. De plus, si l'on néglige l'accélération du fluide (cadre quasi-statique), la loi de Darcy peut être simplifiée en[8] :

$$\frac{\boldsymbol{w}^f}{\rho^f} = \boldsymbol{k}_f \cdot \big(-\mathbf{grad} p_f + \rho^f \boldsymbol{g} \big) \tag{1.87}$$

Équations d'état du squelette Les équations d'état du squelette lient les variables thermodynamiquement associées par le biais d'un potentiel thermodynamique. Elles se déduisent de l'inégalité exprimant la non-négativité de la dissipation intrinsèque. Chaque couple de variables associées comporte une force et un flux thermodynamiques.

Hypothèse *On suppose qu'un nombre fini de variables suffit à caractériser l'état du système considéré.*

Ces variables sont appelées variables d'état. Elles peuvent être externes (observables) ou internes (cachées), ces dernières caractérisant alors les transformations irréversibles.

Dans le cas présent, l'inégalité (1.80) suggère le choix de ($\boldsymbol{\Delta}$, m, T, $\boldsymbol{\chi}$) comme variables d'état.[9] La densité volumique d'énergie libre Ψ est donc une fonction de ces variables.

7. Cette loi permet bien d'assurer la non-négativité de ϕ_3 : il suffit de démontrer, en s'appuyant sur la définition de l'enthalpie libre spécifique du fluide et les équations d'état (1.94), que l'on a :

$$\mathbf{grad} g_m^f + s_m^f \mathbf{grad} T = \frac{1}{\rho_f} \mathbf{grad} p_f$$

8. En négligeant en outre les variations spatiales de la masse volumique du fluide et en introduisant la charge hydraulique $h = \frac{p_f}{\rho^f g} + z$, la loi de Darcy s'écrit encore :

$$\frac{\boldsymbol{w}^f}{\rho^f} = -\boldsymbol{k}_f \cdot \mathbf{grad} h$$

9. $\boldsymbol{\chi}$ caractérise les variables internes.

Faisant intervenir ces variables dans la dérivée matérielle de Ψ relativement au mouvement du squelette, la relation (1.80) devient :

$$\left(\mathbf{\Pi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{\Delta}}\right) : \frac{\mathrm{d}^s \mathbf{\Delta}}{\mathrm{d}t} + \left(g_m^f - \frac{\partial \Psi}{\partial m}\right) \frac{\mathrm{d}^s m}{\mathrm{d}t} - \left(S + \frac{\partial \Psi}{\partial T}\right) \frac{\mathrm{d}^s T}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \frac{\mathrm{d}^s \boldsymbol{\chi}}{\mathrm{d}t} \geq 0 \tag{1.88}$$

Dans le cas de transformations réversibles, la variable $\boldsymbol{\chi}$ est invariante et l'inégalité ci-dessus devient une égalité vérifiée quelle que soit la transformation envisagée. Il s'en suit que l'on a nécessairement :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{\Delta}} \tag{1.89a}$$

$$g_m^f = \frac{\partial \Psi}{\partial m} \tag{1.89b}$$

$$S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \tag{1.89c}$$

qui constituent les équations d'état du squelette.

On suppose que ces relations sont toujours vérifiées dans le cas de transformations irréversibles. Dans ce cas, la non-négativité de la dissipation intrinsèque s'exprime simplement en injectant (1.89) dans (1.88) :

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \frac{\mathrm{d}^s \boldsymbol{\chi}}{\mathrm{d}t} \geq 0 \tag{1.90}$$

En introduisant la transformée de Legendre-Fenchel Ψ^* de l'énergie libre Ψ définie par :

$$\Psi^* = \mathbf{\Pi} : \mathbf{\Delta} + g_m^f m - ST - \Psi \tag{1.91}$$

et en tenant compte des relations (1.89), il vient

$$\frac{\mathrm{d}^s \Psi^*}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Delta} : \frac{\mathrm{d}^s \mathbf{\Pi}}{\mathrm{d}t} + m \frac{\mathrm{d}^s g_m^f}{\mathrm{d}t} + T \frac{\mathrm{d}^s S}{\mathrm{d}t} \tag{1.92}$$

Il est donc possible d'obtenir une formulation réciproque (totalement équivalente) aux relations d'état du squelette (1.89) et qui se révèle nécessaire lorsque l'état du système est défini selon les variables ($\mathbf{\Pi}$, g_m^f, S) [10] :

$$\mathbf{\Delta} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mathbf{\Pi}} \tag{1.93a}$$

$$m = \frac{\partial \Psi^*}{\partial g_m^f} \tag{1.93b}$$

$$T = \frac{\partial \Psi^*}{\partial S} \tag{1.93c}$$

Équations d'état du fluide Les équations d'état (1.89) ou (1.93) se révèlent peu « pratiques » à l'usage car elles font intervenir des variables difficilement accessibles ou rarement utilisées dans la pratique (c'est le cas notamment de l'enthalpie libre du fluide ou de l'entropie).

Dans l'objectif de travailler avec des variables usuellement rencontrées, il conviendra de faire intervenir les équations d'état du fluide que l'on introduit maintenant. L'objectif est, en

10. Les transformations de Legendre-Fenchel constituent donc un outil mathématique permettant d'obtenir de nouvelles formulations des équations d'état lorsque qu'un nouveau choix de variables d'état est à considérer.

particulier, de faire intervenir la pression du fluide puisqu'elle joue un rôle fondamental dans le comportement mécanique du milieu poreux. [11]

On suppose que l'enthalpie libre spécifique du fluide est une fonction de la pression du fluide et de sa température (*i.e.* $g_m^f = g_m^f(p, T)$). On suppose également que les équations d'état suivantes sont vérifiées [12] :

$$\frac{\partial g_m^f}{\partial p_f} = \frac{1}{\rho_f} \tag{1.94a}$$

$$\frac{\partial g_m^f}{\partial T} = -s_m^f \tag{1.94b}$$

1.2.3.4 Effet de la tortuosité

Notons que l'expression de l'énergie cinétique donnée en (1.58) ne tient pas compte de l'effet de tortuosité. Il est clair que la vitesse microscopique du fluide dans la particule est supérieure à sa vitesse macroscopique, du fait de la tortuosité du réseau poreux. Cet effet, d'origine microscopique, ne peut être introduit directement dans la description macroscopique faite ici.

Si l'on veut en tenir compte, on introduira le coefficient de tortuosité a (supposant par là même un effet purement isotrope) tel que :

$$<(\tilde{\boldsymbol{v}}^{r,f})^2>= a(\boldsymbol{v}^{r,f})^2 \tag{1.95}$$

où $<\tilde{\boldsymbol{v}}^{r,f}>$ représente la moyenne de la vitesse microscopique relative du fluide.

L'utilisation de cette moyenne permet de calculer l'énergie cinétique du fluide en tenant compte de la tortuosité. Le calcul de la dérivée particulaire de l'énergie permet alors d'introduire un vecteur correctif $\boldsymbol{a}$ définit par :

$$\boldsymbol{a} = (a-1)(\boldsymbol{\gamma}^f - \boldsymbol{\gamma}^s - \boldsymbol{d}.\boldsymbol{v}^{r,f}) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}^{r,f}\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + (\boldsymbol{v}^{r,f})^2\ \mathbf{grad}a\right) \tag{1.96}$$

Les expressions du premier principe de la thermodynamique, de la conservation de la quantité de mouvement ainsi que de l'inégalité fondamentale et des dissipations qui en sont déduites sont alors modifiées par la prise en compte de cet effet de la façon suivante : l'accélération du fluide $\boldsymbol{\gamma}^f$ est remplacée par une accélération corrigée $\boldsymbol{\Gamma}^f = \boldsymbol{\gamma}^f + \boldsymbol{a}$.

1.2.4 Poroélasticité

La formulation de lois de comportement du milieux poreux respectant les principes de la thermodynamique doit nécessairement s'appuyer sur la relation (1.80) qui exprime la non-négativité de la dissipation intrinsèque lagrangienne.

Dans le cas de la poroélasticité, la formulation du comportement repose (par définition) sur la nullité de la dissipation intrinsèque. Les équations d'état définies par (1.89) (ou, de façon équivalente, par (1.93)) sont donc valables pour un matériau poreux élastique.

11. Un exemple de changement de variables sera donné dans la partie consacrée aux milieux partiellement saturés.

12. Ces relations constitutives microscopiques du fluide sont supposées valables à l'échelle macroscopique. D'un autre point de vue, il est également possible de dire que l'on considère que le comportement du fluide seul n'est pas modifié dans le milieu poreux *i.e.* qu'il n'y a pas d'interaction à distance entre les molécules du fluide et la matrice du squelette.

Il reste à définir l'énergie libre du milieu poreux pour obtenir le modèle poroélastique. On considère le cas particulier où cette énergie libre est une fonction quadratique des variables d'état $(\boldsymbol{\Delta}, m, T)$:[13]

$$\begin{aligned}\Psi = \Psi_0 + \boldsymbol{\Pi}_0 : \boldsymbol{\Delta} + g^f_{m,0} m - S_0 T + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\Delta} + M\left(\frac{m}{\rho^f_0}\right)^2 - \frac{1}{2} b T^2 \\ - M\frac{m}{\rho^f_0}\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\Delta} - T\boldsymbol{A} : \boldsymbol{\Delta} - (s_{m,0} - l) m T\end{aligned} \tag{1.97}$$

On considère également que l'enthalpie libre du fluide est une fonction linéaire de sa pression[14] :

$$g^f_m - g^f_{m,0} = \frac{p_f - p_{f,0}}{\rho_{f,0}} \tag{1.98}$$

La prise en compte des développements (1.97) et (1.98) dans les équations d'état donne (où $\theta = T - T_0$) :

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Pi}_0 + \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\Delta} - M\boldsymbol{B}\frac{m}{\rho^f_0} - \boldsymbol{A}\theta \tag{1.99a}$$

$$p_f = p_{f,0} + M\left(-\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\Delta} + \frac{m}{\rho_{f,0}}\right) + \rho_{f,0} l \theta \tag{1.99b}$$

$$S = S_0 + m s_{m,0} + \boldsymbol{A} : \boldsymbol{\Delta} - l m + b\theta \tag{1.99c}$$

Il est possible de réexprimer la relation (1.99a) dans le but d'y faire intervenir directement la pression du fluide (qui joue un rôle primordial dans le comportement du milieu poreux). Pour cela, on pose (avec $3\alpha_m = \rho_{f,0} l / M$) :

$$\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{C} - M\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A} - 3\alpha_m M \boldsymbol{B} \tag{1.100}$$

et, en utilisant (1.99b) et (1.100), la relation (1.99a) devient :

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Pi}_0 + \boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{B}(p_f - p_{f,0}) - \boldsymbol{A}_0\theta \tag{1.101}$$

Les paramètres introduits dans cette formulation restent à déterminer expérimentalement afin de compléter l'identification du modèle de comportement.

Le comportement décrit ici est un comportement linéaire du milieu poreux. Dans le cas d'une modélisation non-linéaire, ces relations doivent être récrites sous forme incrémentale et les paramètres du matériau peuvent alors dépendre des variables d'état.

1.2.4.1 Poroélasticité en transformations infinitésimales

Pour certaines applications, il est possible de faire l'hypothèse des petites perturbations pour le squelette. Cette hypothèse regroupe les trois hypothèses suivantes :

— petites transformations du squelette : $\|\mathbf{grad}\boldsymbol{u}^s\| \ll 1$

— petits déplacements du squelette[15] : $\dfrac{\|\boldsymbol{u}^s\|}{L} \ll 1$

— petites variations de porosité : $|n - n_0| \ll 1$

13. $\boldsymbol{\chi}$ n'intervient pas car le comportement est réversible.
14. Cette relation est bien sûr compatible avec l'équation d'état du fluide (1.94a)
15. L représente une dimension géométrique caractéristique du milieu poreux.

Sous l'hypothèse des petites perturbations du squelette, les configurations de référence et actuelle peuvent être confondues. Il est donc possible de confondre les grandeurs eulériennes et leur équivalent lagrangien. Les approximations suivantes peuvent donc être réalisées : $\boldsymbol{w}^f \approx \boldsymbol{M}^f$, $\boldsymbol{\epsilon} \approx \boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{\sigma} \approx \boldsymbol{\Pi}$... Dans ce cas, les équations (1.99) deviennent alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\epsilon} - M\boldsymbol{B}\frac{m}{\rho_0^f} - \boldsymbol{A}\theta \tag{1.102a}$$

$$p_f = p_{f,0} + M\left(-\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\epsilon} + \frac{m}{\rho_{f,0}}\right) + 3\alpha_m M\theta \tag{1.102b}$$

$$S = S_0 + ms_{m,0} + \boldsymbol{A} : \boldsymbol{\epsilon} - 3\alpha_m M\frac{m}{\rho_0^f} + b\theta \tag{1.102c}$$

La relation (1.102a) peut être réarrangée comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{B}(p_f - p_{f,0}) - \boldsymbol{A}_0\theta \tag{1.103}$$

puis selon :

$$\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{B}p_f = (\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{B}p_{f,0}) + \boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{A}_0\theta \tag{1.104}$$

faisant ainsi apparaître une contrainte dite effective définie par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{B}p_f \tag{1.105}$$

Cette contrainte présente l'avantage d'être reliée directement à la déformation $\boldsymbol{\epsilon}$ et à la température T sans dépendance de la pression du fluide p_f.

Comme précédemment, dans le cas où le comportement est non-linéaire, ces relations seront données sous forme incrémentale et les paramètres à déterminer seront éventuellement dépendants des variables d'état.

Si le matériau peut être modélisé par un comportement élastique linéaire isotrope, la relation (1.103) s'écrit, en conditions isothermes et pour un état initial libre de contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma} + b\,p_f\,\mathbf{1} = \lambda_0\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mu\,\boldsymbol{\epsilon} \tag{1.106}$$

où λ_0 et μ sont les coefficients de Lamé (drainés) et b est appelé coefficient de Biot. Ce dernier caractérise l'augmentation à déformation volumique nulle de la contrainte moyenne d'un échantillon soumis à une pression interstitielle. Ces coefficients sont des paramètres caractéristiques du squelette et doivent être déterminés expérimentalement. [16]

1.2.5 Problèmes particuliers

1.2.5.1 Problèmes de consolidation des sols

Dans cette section, les équations permettant de définir un problème de consolidation sont formulées. Le choix des inconnues se porte habituellement sur les champs de déplacement du squelette et de pression du fluide interstitiel. Les relations résultant de la formulation d'un problème de consolidation font intervenir ces deux champs inconnus et mettent en évidence un fort couplage hydromécanique.

16. Dans le cas d'un sol, le coefficient b est égal à 1 et l'on retrouve la contrainte effective de Terzaghi.

Équation de champ mécanique La première relation provient de la conservation de la quantité de mouvement et exprime localement l'équilibre mécanique du système considéré ; elle est donnée par (1.54). La pression interstitielle y intervient par l'intermédiaire de la contrainte effective (cf. (1.105)) pour donner la relation suivante :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{B}p_f) + \rho^s(\boldsymbol{F}^s - \boldsymbol{\gamma}^s) + \rho^f(\boldsymbol{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f) = \mathbf{0} \tag{1.107}$$

Équation de champ hydraulique Partant de l'équation de continuité pour la phase fluide (1.43b) que l'on rappelle :

$$\frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho^f \boldsymbol{v^f}) = 0 \tag{1.108}$$

et tenant compte des définitions (1.23) et (1.24) de la vitesse relative du fluide par rapport au squelette $\boldsymbol{v}^{r,f}$ et du vecteur courant relatif de masse fluide $\boldsymbol{w}^f$, on peut écrire :

$$\frac{\partial n\,\rho_f}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{w}^f) + \mathrm{div}(n\,\rho_f \boldsymbol{v}^s) = 0 \tag{1.109}$$

En faisant l'hypothèse (réaliste pour un sol) que la compressibilité de la matrice est négligeable devant celle du squelette [17], l'équation de continuité du squelette (1.42b) se simplifie en :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \mathrm{div}\big((1-n)\boldsymbol{v}^s\big) \tag{1.110}$$

En injectant (1.110) dans (1.109), on obtient (après avoir négligé le terme $\mathbf{grad}\rho_f$ devant les autres) :

$$\frac{n}{\rho_f}\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{w}^f}{\rho^f}\right) + \mathrm{div}\boldsymbol{v}^s = 0 \tag{1.111}$$

Il reste maintenant à utiliser la loi de conduction de la masse fluide (sous la forme (1.87) par exemple [18]) ainsi que les équations d'état du fluide (linéarisées). On obtient finalement :

$$\frac{n}{K_f}\frac{\partial p_f}{\partial t} + \mathrm{div}\big(\boldsymbol{k}(-\mathbf{grad}p_f + \rho^f \boldsymbol{g})\big) + \mathrm{div}\boldsymbol{v}^s = 0 \tag{1.112}$$

où $1/K_f$ représente le module de compressibilité du fluide défini par la relation :

$$\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{1}{K_f}\frac{\partial p_f}{\partial t} \tag{1.113}$$

Dans le cas de l'eau, on a $K_f = 2.2$ GPa.

La relation (1.112) exprime le fait qu'une variation de pression peut avoir deux origines : la première étant liée aux écoulements de la phase fluide et la seconde aux déformations (volumiques) du squelette.

Les relations (1.107) et (1.112) constituent la formulation d'un problème de consolidation des sols telle que nous l'utiliseront dans la suite de ce travail.

1.2.5.2 Chargement non-drainé

En remarquant que $\mathrm{div}\boldsymbol{v}^s = -\dfrac{\partial \epsilon_v}{\partial t}$ (avec ϵ_v ,la déformation volumique du squelette), la relation (1.111) peut être réexprimée comme suit :

$$\frac{n}{\rho_f}\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{w}^f}{\rho^f}\right) - \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = 0 \tag{1.114}$$

17. C'est-à-dire que la masse volumique de la matrice est une constante de l'espace et du temps.
18. L'accélération du fluide y est négligée et les forces volumiques se réduisent à la pesanteur.

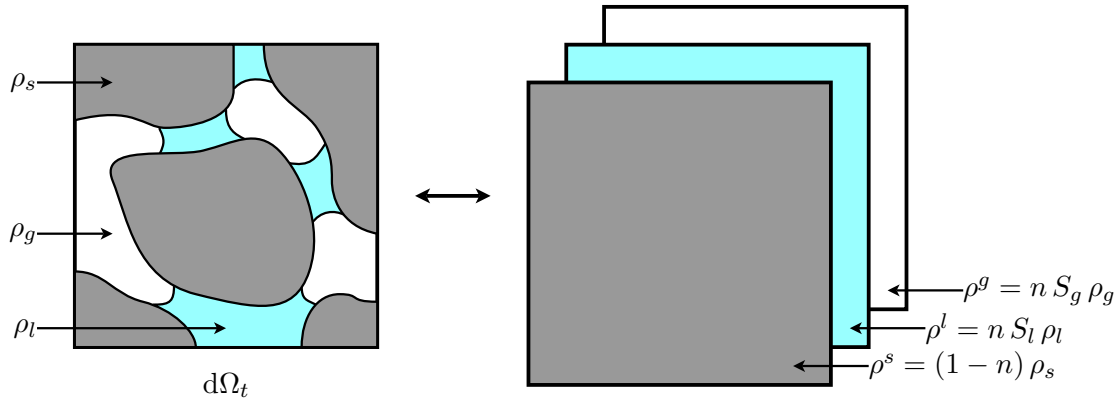


FIGURE 1.5 – Représentation d'un milieu poreux partiellement saturé comme la superposition de trois milieux continus.

En supposant que le chargement est suffisamment rapide pour se placer dans des conditions « non-drainées » (c'est-à-dire que $\boldsymbol{w}^f = \mathbf{0}$) et en utilisant la loi de comportement du fluide (1.113), il est possible d'exprimer une condition locale explicite de non-drainage :

$$\frac{n}{K_f}\frac{\partial p_f}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \tag{1.115}$$

Il est donc possible d'exprimer l'incrément de pression interstitielle dû à un incrément de déformation volumique sous des conditions non-drainées. Cette relation permet alors de déterminer le couple $(\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma'})$ si $\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}$ est connu. [19]

Il est à noter que l'utilisation de cette condition de non-drainage amène à ne pas négliger la compressibilité de la phase liquide devant celle du squelette, contrairement à l'hypothèse généralement effectuée en mécanique des sols.

1.3 Milieux poreux partiellement saturés

Le cadre théorique précédent, développé pour les milieux poreux saturés par un fluide donné, est maintenant étendu au cas des milieux dont l'espace poreux est saturé par plusieurs fluides. En mécanique des sols, il s'agit généralement d'un liquide (eau) et d'un gaz (air). D'autres types d'applications peuvent cependant être envisagés : en ingénierie pétrolière, par exemple, les phases fluides en présence seront une phase aqueuse et une phase organique.

Le milieu poreux est maintenant considéré comme la superposition de $k+1$ particules continues, l'une d'elles représentant le squelette et les autres, les k fluides saturant l'espace poreux connecté. La présence d'un mélange de fluides dans une même phase peut être envisagée : par exemple, la phase gazeuse peut être constituée d'un mélange air-vapeur d'eau.

1.3.1 Description cinématique

La description macroscopique de la cinématique d'un milieu poreux partiellement saturé est semblable à celle d'un milieu saturé par un fluide unique présentée dans la section précédente.

19. En fait, lorsque $\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}$ est connu, $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma'}$ est donné par les relations constitutives. La relation (1.115) fournit alors $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ et s'avère utile dans un code numérique, par exemple, puisqu'elle permet de réutiliser un code initialement écrit pour des sols secs ou saturés drainés afin de modéliser le comportement non-drainé d'un sol saturé sans y apporter de modification importante.

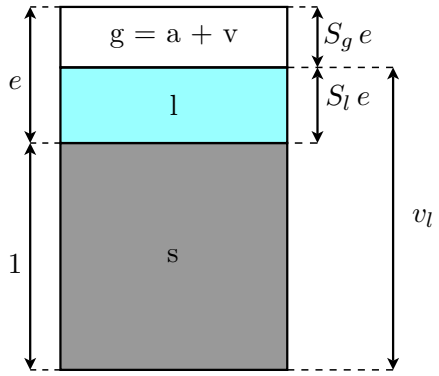


FIGURE 1.6 – Fractions volumiques des différentes phases constituant le milieu poreux partiellement saturé.

L'hypothèse de continuité est reconduite (voir la Figure 1.5). Quelques définitions supplémentaires sont maintenant introduites.

On définit en particulier la porosité lagrangienne comme le volume de l'espace poreux actuel rapporté au volume de squelette dans la configuration de référence :

$$\phi = \frac{\mathrm{d}\Omega_t^p}{\mathrm{d}\Omega_0} \tag{1.116}$$

A tout instant, le volume poreux contenu dans $\mathrm{d}\Omega_t$ est donc $\phi\,\mathrm{d}\Omega_0$. Les porosités lagrangienne et eulérienne sont liées par la relation :

$$\phi = J\,n \tag{1.117}$$

On introduit également ϕ_α la porosité partielle de la phase α (où $\alpha \in \{l, g\}$ selon que la phase considérée est la phase liquide ou gazeuse). A tout instant, le volume occupé par la phase α est donné par $\phi_\alpha \mathrm{d}\Omega_0$.
Par définition, la relation suivante est vérifiée :

$$\sum_{\alpha\in\{l,g\}} \phi_\alpha = \phi \tag{1.118}$$

Il est commode d'introduire le degré de saturation associé à une phase donnée :

$$S_\alpha = \frac{\phi_\alpha}{\phi} \tag{1.119}$$

Il est clair que l'on a :

$$\sum_{\alpha\in\{l,g\}} S_\alpha = 1 \tag{1.120}$$

Si l'on introduit n_α la porosité eulérienne partielle de la phase α, le degré de saturation en phase α est également donné par $S_\alpha = \dfrac{n_\alpha}{n}$. La Figure 1.6 représente les fractions volumiques des différentes phases constituant le milieu poreux partiellement saturé.

Les masses volumiques apparente ρ^α et intrinsèque ρ_α de la phase α sont introduites ; elles vérifient la relation :

$$\rho^\alpha = n_\alpha\,\rho_\alpha \tag{1.121}$$

La vitesse relative de la phase fluide α par rapport au squelette est notée $\boldsymbol{v}^{r,\alpha}$ et donnée par :

$$\boldsymbol{v}^{r,\alpha} = \boldsymbol{v}^\alpha - \boldsymbol{v}^s \tag{1.122}$$

De plus, on définit un vecteur courant relatif de masse fluide $\boldsymbol{w}^\alpha$ pour chaque phase fluide :

$$\boldsymbol{w}^\alpha = \rho^\alpha \, \boldsymbol{v}^{r,\alpha} = n_\alpha \, \rho_\alpha \, \boldsymbol{v}^{r,\alpha} \tag{1.123}$$

et son équivalent lagrangien $\boldsymbol{M}^\alpha$ est introduit comme cela a été fait dans le cas saturé (section 1.2.1.3).

La description cinématique du milieu partiellement saturé peut alors être généralisée à partir de celle introduite dans le cas d'un milieu saturé. Les dérivées particulaires introduites dans ce dernier cas peuvent être réutilisées en remplaçant f par α pour les fluides. Cela est possible car la conservation de la masse n'avait pas été introduite. Si cela avait été le cas, les équations seraient à modifier afin de prendre en compte un éventuel changement de phase.

On notera en particulier que la dérivée matérielle de la quantité $\mathcal{B}$ attachée au système matériel d'une grandeur physique extensive est définie par (relation analogue à (1.40)) :

$$\frac{\mathrm{D}\mathcal{B}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}^s\mathcal{B}^s}{\mathrm{d}t} + \sum_\alpha \frac{\mathrm{d}^\alpha\mathcal{B}^\alpha}{\mathrm{d}t} \tag{1.124}$$

avec $\alpha = \{l, g\}$ ou $\alpha = \{l, v, a\}$ selon le contexte.

Par la suite, un changement de phase liquide – vapeur sera pris en compte. On supposera que la vapeur et l'air sec constituent un mélange parfait et forment la particule gazeuse. Cette hypothèse implique donc que les particules de vapeur et d'air occupent le même volume et que la somme de leurs pressions donne la pression de la phase gazeuse. On a donc $\phi_a = \phi_v = \phi_g$ et $p_a + p_v = p_g$.

On introduit $\dot{m}_{\to\alpha}$ le taux massique de création de phase α (où $\alpha \in \{l, v\}$ selon que l'on considère la vapeur ou l'eau liquide) par unité de volume du milieu poreux dans la configuration de référence. La masse α créée pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ dans le volume $\mathrm{d}\Omega_t$ est donnée par $\dot{m}_{\to\alpha}\mathrm{d}\Omega_0\mathrm{d}t$.

Dans ce qui suit, les phases fluides constituées du liquide, de sa vapeur ainsi que de l'air sec seront considérées. Dans certains cas, le mélange gazeux, constitué de la vapeur et de l'air sec, sera pris en compte. Un indice α pourra donc représenter les indices l, v, a ou g, le contexte levant alors toute ambiguïté.

1.3.2 Équations de conservation

1.3.2.1 Conservation de la masse

La masse de squelette contenue dans $\mathrm{d}\Omega_t$ vaut à tout instant $(1-n)\,\rho_s\,\mathrm{d}\Omega_t$. Il est possible d'introduire la grandeur lagrangienne m_s, définie comme la masse volumique du squelette actuelle par unité de volume de milieu poreux dans la configuration de référence. La masse de squelette contenue dans $\mathrm{d}\Omega_t$ vaut alors à tout instant $m_s\,\mathrm{d}\Omega_0$. [20]

La conservation de la masse de la particule solide peut être exprimée comme suit (la masse solide contenue dans un volume Ω_t lorsque l'on suit la particule solide est constante) :

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} \rho^s \,\mathrm{d}\Omega_t = 0 \tag{1.125}$$

20. La masse de squelette m_s ne doit être confondue ni avec la masse volumique apparente ρ^s ni avec la masse volumique du constituant solide ρ_s, grandeur intrinsèque. Ces grandeurs sont reliées entre elles par les relations suivantes :

$$m_s = J\,\rho^s = J\,(1-n)\,\rho_s$$

.

En utilisant la définition des dérivées particulaires, il est aisé de montrer que cette formulation est équivalente à la suivante, exprimée localement et faisant intervenir la masse volumique intrinsèque ρ_s du constituant solide ainsi que la porosité eulérienne ϕ, caractérisant le volume de milieu poreux occupé par cette phase solide [21] :

$$\frac{\mathrm{d}^s(1-n)\,\rho_s}{\mathrm{d}t} + (1-n)\,\rho_s\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}^s = 0 \tag{1.126}$$

ou encore

$$\frac{\partial(1-n)\,\rho_s}{\partial t} + \mathrm{div}\big((1-n)\,\rho_s\,\boldsymbol{v}^s\big) = 0 \tag{1.127}$$

La conservation de la masse solide peut encore être exprimée en utilisant la grandeur lagrangienne m_s :

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_0} m_s\,\mathrm{d}\Omega_0 = 0 \tag{1.128}$$

ce qui entraîne, sous forme locale, la relation simple suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^s m_s}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.129}$$

Cette formulation est bien-entendu équivalente à la forme eulérienne donnée en (1.127).

En présence d'un changement de phase, la conservation des trois phases que sont le liquide, sa vapeur et l'air sec est à considérer pour chacune d'elles séparément. La masse d'une phase fluide α donnée contenue dans le volume de milieu poreux $\mathrm{d}\Omega_t$ vaut à tout instant $n_\alpha\,\rho_\alpha\,\mathrm{d}\Omega_t$.

En suivant une particule fluide de la phase $\alpha \in \{l, v, a\}$ dans son mouvement, la conservation de sa masse s'exprime selon (sans sommation sur l'indice α) [21] :

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} n_\alpha\,\rho_\alpha\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_0} \dot{m}_{\to\alpha}\,\mathrm{d}\Omega_0 \tag{1.130}$$

Il est à noter que dans le cas où $\alpha = a$, cette équation est simplifiée puisqu'il n'y a pas de création de masse d'air sec (*i.e.* $\dot{m}_{\to a} = 0$).

En utilisant les définitions des dérivées particulaires, l'équation (1.130) s'exprime sous forme locale selon les relations équivalentes suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha n_\alpha\,\rho_\alpha}{\mathrm{d}t} + n_\alpha\,\rho_\alpha\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}^\alpha = \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \tag{1.131}$$

$$\frac{\partial n_\alpha\,\rho_\alpha}{\partial t} + \mathrm{div}(n_\alpha\,\rho_\alpha\,\boldsymbol{v}^\alpha) = \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \tag{1.132}$$

Expression lagrangienne de la conservation des masses fluides Afin d'obtenir l'expression lagrangienne de la conservation des masses fluides, considérons la dérivée particulaire en suivant le squelette de la masse fluide α contenue dans le volume élémentaire $\mathrm{d}\Omega_t$. Cette masse vaut $n_\alpha\,\rho_\alpha\,\mathrm{d}\Omega_t = J\,n_\alpha\,\rho_\alpha\,\mathrm{d}\Omega_0$. Sa dérivée particulaire en suivant le fluide donne, après avoir divisé par $\mathrm{d}\Omega_0$:

$$\frac{\mathrm{d}^s J\,n_\alpha\,\rho_\alpha}{\mathrm{d}t} = J\,\frac{\mathrm{d}^s n_\alpha\,\rho_\alpha}{\mathrm{d}t} + n_\alpha\,\rho_\alpha\frac{\mathrm{d}^s J}{\mathrm{d}t} \tag{1.133}$$

21. L'hypothèse de superposition de plusieurs particules représentant chacune des phases est retrouvée dans les équations de conservation de la masse : ces équations sont équivalentes à celles que l'on obtiendrait dans le cas d'un milieu monophasique de masse volumique $(1-n)\,\rho_s$ ou $n_\alpha\,\rho_\alpha$ selon la phase considérée. Ce sont bien les masses volumiques apparentes qui interviennent dans les équations de conservation.

Sachant que $\dfrac{\mathrm{d}^s J}{\mathrm{d}t} = J \mathrm{div} \boldsymbol{v}^s$ et en ré-exprimant les dérivées particulaires dans le second membre, cette dérivée peut être récrite selon :

$$\frac{\mathrm{d}^s J\, n_\alpha\, \rho_\alpha}{\mathrm{d}t} = J \left[\frac{\partial n_\alpha\, \rho_\alpha}{\partial t} + \mathrm{div}(n_\alpha\, \rho_\alpha\, \boldsymbol{v}^s) \right] \tag{1.134}$$

L'utilisation de l'expression eulérienne de la conservation de la masse fluide (1.132), de la définition du vecteur courant relatif de masse fluide $\boldsymbol{w}^\alpha$ ainsi que de la relation (1.134) permettent d'exprimer la conservation de la masse fluide en suivant le squelette selon :

$$\frac{\mathrm{d}^s J\, n_\alpha\, \rho_\alpha}{\mathrm{d}t} + J\, \mathrm{div} \boldsymbol{w}^\alpha = \dot{m}_{\to\alpha} \tag{1.135}$$

Cette expression comporte toujours des grandeurs eulériennes (ρ_α et $\boldsymbol{w}^\alpha$). Afin de parvenir à une expression lagrangienne, il est possible d'introduire le contenu en masse fluide m_α défini sur la configuration initiale. La masse de fluide α contenue à tout instant dans $\mathrm{d}\Omega_t$ est donnée par $m_\alpha\, \mathrm{d}\Omega_0$ (mais aussi par $n_\alpha\, \rho_\alpha\, \mathrm{d}\Omega_t$). Le contenu en masse fluide m_α est donc lié à la masse volumique intrinsèque du fluide α par [22] :

$$m_\alpha = J\, n_\alpha\, \rho_\alpha \tag{1.136}$$

En introduisant cette définition dans l'Équation (1.135), il vient :

$$\frac{\mathrm{d}^s m_\alpha}{\mathrm{d}t} + J\, \mathrm{div} \boldsymbol{w}^\alpha = \dot{m}_{\to\alpha} \tag{1.137}$$

On tire finalement parti de la définition de l'équivalent lagrangien $\boldsymbol{M}^\alpha$ de $\boldsymbol{w}^\alpha$ ainsi que de la formule de transport (1.27) pour obtenir une expression lagrangienne de la conservation de la masse de la phase $\alpha \in \{l, v\}$:

$$\frac{\mathrm{d}^s m_\alpha}{\mathrm{d}t} + \mathrm{Div} \boldsymbol{M}^\alpha = \dot{m}_{\to\alpha} \tag{1.138}$$

La conservation de la masse totale des phases fluides implique la condition suivante sur les taux de changement de phase :

$$\sum_{\alpha=\{l,v\}} \dot{m}_{\to\alpha} = 0 \tag{1.139}$$

Dans le cas de l'air sec, l'équation de conservation de la masse est simplifiée en :

$$\frac{\mathrm{d}^s m_a}{\mathrm{d}t} + \mathrm{Div} \boldsymbol{M}^a = 0 \tag{1.140}$$

De même, si aucun changement de phase ne se produit dans le milieu (*i.e.* $\dot{m}_{\to l} = \dot{m}_{\to v} = 0$), la conservation de la masse des phases fluides s'écrit plus simplement, pour les phases liquide et gazeuse ($\alpha \in \{l, g\}$) :

$$\frac{\mathrm{d}^s m_\alpha}{\mathrm{d}t} + \mathrm{Div} \boldsymbol{M}^\alpha = 0 \tag{1.141}$$

22. A la différence du cas saturé, c'est le contenu global en masse fluide et non son apport qui est considéré ici.

1.3.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

On note $\boldsymbol{\gamma}^i$ l'accélération d'une particule du milieu $i \in \{s, l, g, v, a\}$:

$$\boldsymbol{\gamma}^i = \frac{\mathrm{d}^i \boldsymbol{v}^i}{\mathrm{d}t} \tag{1.142}$$

Pour un fluide α donné, l'accélération d'une particule peut également être exprimée en fonction de la dérivée particulaire en suivant le solide :

$$\boldsymbol{\gamma}^\alpha = \frac{\mathrm{d}^s \boldsymbol{v}^\alpha}{\mathrm{d}t} + \mathbf{grad}\boldsymbol{v}^\alpha \cdot \boldsymbol{v}^{r,\alpha} \tag{1.143}$$

Le torseur (réduit au point O) des efforts extérieurs s'exerçant sur un sous-domaine Ω'_t de Ω_t est donné par :

$$\boldsymbol{F} = \int_{\Omega'_t} (\rho^s \boldsymbol{F}^s + \rho^\alpha \boldsymbol{F}^\alpha) \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega'_t} \boldsymbol{T} \mathrm{d}S \tag{1.144a}$$

$$\boldsymbol{M}_O = \int_{\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge (\rho^s \boldsymbol{F}^s + \rho^\alpha \boldsymbol{F}^\alpha) \mathrm{d}\Omega) + \int_{\partial\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge \boldsymbol{T} \mathrm{d}S \tag{1.144b}$$

avec $\boldsymbol{F}^\alpha$, la densité volumique des efforts à distance s'exerçant sur la phase $\alpha = \{s, l, v, a\}$ et $\boldsymbol{T}$, la densité surfacique des efforts s'exerçant sur la frontière $\partial\Omega'_t$ du milieu.

Les composantes de la dérivée matérielle du torseur des quantités de mouvement du milieu poreux s'expriment, compte-tenu de la définition de la dérivée matérielle (1.124), de la définition des accélérations particulaires de chaque milieu (1.142) ainsi que des équations de conservation de la masse de chaque particule, selon les équations :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int_{\Omega'_t} (\rho^s \boldsymbol{v}^s + \rho^\alpha \boldsymbol{v}^\alpha) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega'_t} \left(\rho^s \boldsymbol{\gamma}^s + \rho^\alpha \boldsymbol{\gamma}^\alpha + \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v}^\alpha \right) \mathrm{d}\Omega \tag{1.145a}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int_{\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge (\rho^s \boldsymbol{v}^s + \rho^\alpha \boldsymbol{v}^\alpha) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\rho^s \boldsymbol{\gamma}^s + \rho^\alpha \boldsymbol{\gamma}^\alpha + \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v}^\alpha \right) \mathrm{d}\Omega \tag{1.145b}$$

La conservation de la quantité de mouvement du milieu poreux s'exprime par l'égalité de la résultante et du moment du torseur des efforts extérieurs (Eqs. (1.144)) et de la dérivée matérielle de celui des quantités de mouvement (Eqs. (1.145)). On obtient alors un système de deux relations dont la première s'écrit après réarrangement :

$$\int_{\partial\Omega'_t} \boldsymbol{T} \mathrm{d}S + \int_{\Omega'_t} \left(\rho^s (\boldsymbol{F}^s - \boldsymbol{\gamma}^s) + \rho^\alpha (\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha)) - \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v}^\alpha \right) \mathrm{d}\Omega = \mathbf{0} \tag{1.146}$$

Il est alors possible de démontrer en utilisant le « lemme du tétraèdre » (cette démonstration ne sera pas rappelée ici) l'existence d'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{\sigma}$ (appelé tenseur des contraintes de Cauchy) vérifiant la propriété :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n} \tag{1.147}$$

En utilisant le théorème de la divergence ainsi que la relation (1.147) et en remarquant que l'équation (1.146) est valable sur tout sous-domaine Ω'_t de Ω_t, il est possible d'exprimer localement la conservation de la quantité de mouvement à partir de (1.146) (équation de la dynamique) :

$$\mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma} + \rho^s (\boldsymbol{F}^s - \boldsymbol{\gamma}^s) + \rho^\alpha (\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) - \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v}^\alpha = \mathbf{0} \tag{1.148}$$

La formulation lagrangienne de cette relation s'écrit :

$$\mathbf{Div}(\mathsf{F}\cdot\boldsymbol{\pi}) + m_s(\boldsymbol{F}^s - \boldsymbol{\gamma}^s) + m_\alpha(\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) - \dot{m}_{\to\alpha}\,\boldsymbol{v}^\alpha = 0 \tag{1.149}$$

La seconde relation du système précédemment évoqué permet de démontrer la symétrie du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ (cette démonstration ne sera pas reprise ici) :

$$^t\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \tag{1.150}$$

Tenseurs des contraintes partielles En reprenant la démarche précédente mais en l'appliquant à chaque milieu continu pris séparément, il est possible de définir une représentation des efforts propres à chaque milieu et de parvenir ainsi à une définition de tenseurs de contraintes partielles. En particulier, les efforts extérieurs peuvent être décomposés en :

$$\boldsymbol{T} = \sum_{\alpha\in\{s,l,v,a\}} \boldsymbol{T}^\alpha \tag{1.151}$$

Il convient d'introduire (on postule son existence) une densité volumique $\boldsymbol{F}^\alpha_{int}$ permettant de modéliser l'interaction entre les milieux continus. $\boldsymbol{F}^\alpha_{int}$ représente l'action exercée sur la phase α par les autres phases.

Pour une phase α donnée, on peut donc écrire la résultante du torseur des efforts extérieurs de la façon suivante (sans sommation sur les indices répétés) :

$$\boldsymbol{F}^\alpha = \int_{\Omega'_t} (\rho^\alpha \boldsymbol{F}^\alpha + \boldsymbol{F}^\alpha_{int}) d\Omega + \int_{\partial\Omega'_t} \boldsymbol{T}^\alpha \mathrm{d}S \tag{1.152a}$$

$$\boldsymbol{M}^\alpha_O = \int_{\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge (\rho^\alpha \boldsymbol{F}^\alpha + \boldsymbol{F}^\alpha_{int}) + \int_{\partial\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge \boldsymbol{T}^\alpha \mathrm{d}S \tag{1.152b}$$

Les composantes de la dérivée particulaire[23] du torseur des quantités de mouvement sont données par (sans sommation sur les indices répétés) :

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega'_t} \rho^\alpha \boldsymbol{v}^\alpha \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega'_t} \left(\rho^\alpha \boldsymbol{\gamma}^\alpha + \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\,\boldsymbol{v}^\alpha\right) \mathrm{d}\Omega \tag{1.153a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge \rho^\alpha \boldsymbol{v}^\alpha \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega'_t} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\rho^\alpha \boldsymbol{\gamma}^\alpha + \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\,\boldsymbol{v}^\alpha\right) \mathrm{d}\Omega \tag{1.153b}$$

Comme précédemment, l'égalité du torseur des efforts extérieurs et de la dérivée particulaire de celui des quantités de mouvement fournit, pour ce qui est de l'égalité des résultantes (sans sommation sur les indices répétés) :

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{T}^\alpha \mathrm{d}S + \int_{\Omega_t} \left(\rho^\alpha(\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) + \boldsymbol{F}^\alpha_{int} - \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\,\boldsymbol{v}^\alpha\right) \mathrm{d}\Omega \tag{1.154}$$

Le lemme du tétraèdre permet de démontrer l'existence d'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ vérifiant la relation :

$$\boldsymbol{T}^\alpha(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}^\alpha(\boldsymbol{x}, t)\cdot\boldsymbol{n} \tag{1.155}$$

23. Contrairement au cas précédant où la dérivée matérielle était considérée, seule la dérivée particulaire de la quantité de mouvement est à prendre en compte ici puisque chaque milieu continu est considéré séparément.

Il est alors possible d'exprimer localement la conservation de la quantité de mouvement d'une phase $\alpha \in \{l, v, a\}$ (sans sommation sur les indices répétés) :

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha(\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) + \boldsymbol{F}^\alpha_{int} - \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\,\boldsymbol{v}^\alpha = \mathbf{0} \tag{1.156}$$

Dans le cas de la phase solide, puisqu'aucun apport de masse n'est considéré, cette relation se simplifie en :

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}^s + \rho^s(\boldsymbol{F}^s - \boldsymbol{\gamma}^s) + \boldsymbol{F}^s_{int} = \mathbf{0} \tag{1.157}$$

Dans le cas où aucun changement de phase liquide-vapeur n'est pris en compte, la relation (1.156) est simplifiée en ($\alpha \in \{l, g\}$, sans sommation sur les indices répétés) :

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha(\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) + \boldsymbol{F}^\alpha_{int} = \mathbf{0} \tag{1.158}$$

L'égalité des moments des torseurs permet à nouveau de démontrer la symétrie des tenseurs de contraintes partielles.

En comparant les relations de la dynamique pour chacune des phases considérées séparément et la relation globale (1.54), il est aisé de constater que les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha\in\{s,l,v,a\}} \boldsymbol{\sigma}^\alpha \tag{1.159}$$

$$\sum_{\alpha\in\{s,l,v,a\}} \boldsymbol{F}^\alpha_{int} = \mathbf{0} \tag{1.160}$$

Dans le cas où la contrainte dans le fluide peut être assimilée à une contrainte isotrope et en introduisant une pression macroscopique, le tenseur des contraintes partielles dans le fluide α s'exprime simplement :

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = -n_\alpha\, p_\alpha\, \mathbf{1} \tag{1.161}$$

L'expression de la force d'interaction $\boldsymbol{F}^\alpha_{int}$ peut alors être obtenue en reportant la relation (1.161) dans l'équation (1.156) :

$$\boldsymbol{F}^\alpha_{int} = \mathbf{grad}(n_\alpha\, p_\alpha) - \rho^\alpha(\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) + \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\,\boldsymbol{v}^\alpha = \mathbf{0} \tag{1.162}$$

Il est à noter que la partition de la contrainte totale rencontrée ici (1.159) permet de formuler l'équilibre de chaque particule étudiée séparément des autres. Elle ne doit cependant pas être confondue avec une tentative d'introduire une contrainte effective.

1.3.3 Thermodynamique des milieux continus ouverts

Cette partie présente une description thermodynamique du milieu poreux partiellement saturé. Il s'agit d'une généralisation de la description présentée précédemment dans le cas d'un milieu saturé. La démarche alors adoptée est reprise ici.

1.3.3.1 Premier principe de la thermodynamique

On considère un système occupant le domaine Ω_t. Le premier principe de la thermodynamique stipule que la dérivée matérielle de l'énergie d'un système matériel est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs P_e et du taux de chaleur reçue par le système Q :

$$\frac{\mathrm{D}\mathcal{E}}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\mathrm{D}K}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} = P_e + Q \tag{1.163}$$

avec l'énergie $\mathcal{E}$ du système valant la somme de son énergie cinétique K et de son énergie interne E :

$$\mathcal{E} = K + E \tag{1.164}$$

En tenant compte de l'ensemble des phases constituant le milieu poreux, l'énergie cinétique du système est donnée par :

$$K = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2}(\rho^s \boldsymbol{v}^{s2} + \rho^\alpha \boldsymbol{v}^{\alpha 2})\mathrm{d}\Omega \tag{1.165}$$

et son énergie interne par :

$$E = \int_{\Omega_t} (\rho^s e_m^s + \rho^\alpha e_m^\alpha)\mathrm{d}\Omega \tag{1.166}$$

où e_m^α représente la densité massique d'énergie interne de la phase $\alpha \in \{s, l, v, a\}$.

L'énergie $\mathcal{E}$ du système considéré est, par définition, la somme de son énergie cinétique et de son énergie interne. On a donc :

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2}(\rho^s \boldsymbol{v}^{s2} + \rho^\alpha \boldsymbol{v}^{\alpha 2})\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_t} (\rho^s e_m^s + \rho^\alpha e_m^\alpha)\mathrm{d}\Omega \tag{1.167}$$

On s'attache maintenant à expliciter les différentes quantités auxquelles le premier principe de la thermodynamique fait référence.

En utilisant la définition des accélérations des différentes particules ainsi que les équations de conservation de la masse de chacune de celles-ci, il est possible d'expliciter la dérivée matérielle de l'énergie cinétique comme suit :

$$\frac{\mathrm{D}K}{\mathrm{D}t} = \int_{\Omega_t} (\rho^s \boldsymbol{\gamma}^s + \rho^\alpha \boldsymbol{\gamma}^\alpha) \cdot \boldsymbol{v}^s \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_t} \left(\rho^\alpha \boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \boldsymbol{v}^{r,\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\, \boldsymbol{v}^{\alpha 2} \right) \mathrm{d}\Omega \tag{1.168}$$

Par définition, la dérivée matérielle de l'énergie interne est donnée par :

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} \rho^s e_m^s \mathrm{d}\Omega + \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} \rho^\alpha e_m^\alpha \mathrm{d}\Omega \tag{1.169}$$

La dérivée particulaire relative au fluide présente dans l'Équation (1.169) peut être réexprimée en utilisant la relation (1.35) avec la densité volumique $b = \rho^\alpha e_m^\alpha$. On obtient alors :

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} \rho^\alpha e_m^\alpha \mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} \rho^\alpha e_m^\alpha \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_t} \mathrm{div}(e_m^\alpha \boldsymbol{w}^\alpha)\mathrm{d}\Omega \tag{1.170}$$

Réinjectant ce résultat dans la relation (1.169) et après réarrangement, il sort :

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} e\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_t} \mathrm{div}(e_m^\alpha \boldsymbol{w}^\alpha)\mathrm{d}\Omega \tag{1.171}$$

avec e la densité volumique d'énergie interne du milieu poreux :

$$e = \rho^s e_m^s + \rho^\alpha e_m^\alpha \tag{1.172}$$

L'équation (1.171) peut à nouveau être récrite en utilisant la définition de la dérivée particulaire par rapport au solide :

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e\boldsymbol{v}^s) \right) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_t} \mathrm{div}(e_m^\alpha \boldsymbol{w}^\alpha) \mathrm{d}\Omega \tag{1.173}$$

La puissance des efforts extérieurs P_e est donnée par :

$$P_e = \int_{\Omega_t} (\rho^s \boldsymbol{F}^s \cdot \boldsymbol{v}^s + \rho^\alpha \boldsymbol{F}^\alpha \cdot \boldsymbol{v}^\alpha) \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} (\boldsymbol{T}^s \cdot \boldsymbol{v}^s + \boldsymbol{T}^\alpha \cdot \boldsymbol{v}^\alpha) \mathrm{d}S \tag{1.174}$$

ou, en introduisant la vitesse relative du fluide par rapport au squelette :

$$P_e = \int_{\Omega_t} (\rho^s \boldsymbol{F}^s + \rho^\alpha \boldsymbol{F}^\alpha) \cdot \boldsymbol{v}^s \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} (\boldsymbol{T}^s + \boldsymbol{T}^\alpha) \cdot \boldsymbol{v}^s \mathrm{d}S + \int_{\Omega_t} \rho^\alpha \boldsymbol{F}^\alpha \cdot \boldsymbol{v}^{r,\alpha} \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{T}^\alpha \cdot \boldsymbol{v}^{r,\alpha} \mathrm{d}S \tag{1.175}$$

Le théorème de la divergence ainsi que les définitions (1.147) et (1.155) des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ permettent de récrire (1.175) :

$$P_e = \int_{\Omega_t} \big((\rho^s \boldsymbol{F}^s + \rho^\alpha \boldsymbol{F}^\alpha) \cdot \boldsymbol{v}^s + \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}^s) \big) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_t} \big(\rho^\alpha \boldsymbol{F}^\alpha \cdot \boldsymbol{v}^{r,\alpha} + \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot \boldsymbol{v}^{r,\alpha}) \big) \mathrm{d}\Omega \tag{1.176}$$

Le taux de chaleur reçue par le système est quant à lui donné par :

$$Q = \int_{\Omega_t} r \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} -\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1.177}$$

soit, en appliquant le théorème de la divergence :

$$Q = \int_{\Omega_t} (r - \mathrm{div}\boldsymbol{q}) \mathrm{d}\Omega \tag{1.178}$$

Il est maintenant possible d'expliciter le premier principe de la thermodynamique. Après avoir introduit $\boldsymbol{d}$, la partie symétrique du gradient des vitesses du squelette *i.e.* $2\boldsymbol{d} = \mathbf{grad}\boldsymbol{v}^s + {}^t\mathbf{grad}\boldsymbol{v}^s$, il vient d'après (1.163) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \big[\big(\mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma} + \rho^s (\boldsymbol{F}^s - \boldsymbol{\gamma}^s) + \rho^\alpha (\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) \big) \cdot \boldsymbol{v}^s + \big(\mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha (\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) \big) \cdot \boldsymbol{v}^{r,\alpha} \big] \mathrm{d}\Omega \\ + \int_{\Omega_t} \big[\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \mathbf{grad}\boldsymbol{v}^{r,\alpha} - \big(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(e_m^\alpha \boldsymbol{w}^\alpha) \big) \\ - \frac{1}{2} \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v}^{\alpha 2} + \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v}^\alpha \boldsymbol{v}^s + r - \mathrm{div}\boldsymbol{q} \big] \mathrm{d}\Omega = 0 \end{aligned} \tag{1.179}$$

Sous forme locale et après avoir utilisé l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.148), la relation (1.179) fournit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \mathbf{grad}\boldsymbol{v}^{r,\alpha} + \big(\mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha (\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) \big) \cdot \boldsymbol{v}^{r,\alpha} - \big(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(e_m^\alpha \boldsymbol{w}^\alpha) \big) \\ - \frac{1}{2} \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v}^{\alpha 2} + \frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J} \boldsymbol{v}^\alpha \boldsymbol{v}^s + r - \mathrm{div}\boldsymbol{q} = 0 \end{aligned} \tag{1.180}$$

soit, en éliminant la vitesse absolue de la particule de fluide α et après avoir rappelé que $\sum_{\beta\in\{l,v\}} \dot{m}_{\to\beta} = 0$:

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \mathbf{grad}\boldsymbol{v}^{r,\alpha} + \big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha(\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha)\big)\cdot \boldsymbol{v}^{r,\alpha} - \big(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(e_m^\alpha \boldsymbol{w}^\alpha)\big) - \frac{1}{2}\frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\,\boldsymbol{v}^{r,\alpha 2} + r - \mathrm{div}\boldsymbol{q} = 0 \tag{1.181}$$

1.3.3.2 Second principe de la thermodynamique

Hypothèse *On suppose qu'en un point géométrique donné, la température des différentes particules se superposant est la même.*

Le second principe de la thermodynamique postule que la production interne spontanée d'entropie doit être positive ou nulle. La relation suivante permet d'exprimer ce principe (l'augmentation d'entropie du milieu est nécessairement supérieure (ou égale) à l'apport externe d'entropie) :

$$\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} \geq \int_{\Omega_t} \frac{r}{T}\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.182}$$

On introduit les densités massiques d'entropie du squelette et des fluides, notées respectivement s_m^s et s_m^α ainsi que la densité volumique d'entropie du milieu poreux $s = \rho^s s_m^s + \rho^\alpha s_m^\alpha$.

La démarche utilisée dans la section précédente pour calculer la dérivée matérielle de l'énergie interne E peut être employée à nouveau ici et donne :

$$\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} = \int_{\Omega_t} \big(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}(s\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(s_m^\alpha \boldsymbol{w}^\alpha)\big)\mathrm{d}\Omega \tag{1.183}$$

En injectant (1.183) dans (1.182) et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_{\Omega_t} \big(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}(s\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(s_m^\alpha \boldsymbol{w}^\alpha) - \frac{r}{T} + \mathrm{div}\frac{\boldsymbol{q}}{T}\big)\mathrm{d}\Omega \geq 0 \tag{1.184}$$

On peut exprimer cette relation sous forme locale :

$$T\big(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}(s\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(s_m^\alpha \boldsymbol{w}^\alpha)\big) - r + \mathrm{div}\boldsymbol{q} - \frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{grad}T \geq 0 \tag{1.185}$$

1.3.3.3 Inégalité de Clausius-Duhem

Formulation eulérienne de l'inégalité fondamentale En sommant les relations (1.181) et (1.185), on obtient l'inégalité suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \mathbf{grad}\boldsymbol{v}^{r,\alpha} + \big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha(\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha)\big)\cdot \boldsymbol{v}^{r,\alpha} + T\big(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}(s\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(s_m^\alpha \boldsymbol{w}^\alpha)\big) - \big(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e\boldsymbol{v}^s) + \mathrm{div}(e_m^\alpha \boldsymbol{w}^\alpha)\big) - \frac{1}{2}\frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\,\boldsymbol{v}^{r,\alpha 2} - \frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{grad}T \geq 0 \tag{1.186}$$

En introduisant l'énergie libre volumique ψ du milieu poreux :

$$\psi = e - Ts \tag{1.187}$$

et en remarquant que : [24]

$$\frac{\mathrm{d}^s\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}(e\boldsymbol{v}^s) - T\frac{\partial s}{\partial t} - T\mathrm{div}(s\boldsymbol{v}^s) - \psi\mathrm{div}(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{s}}) - s\frac{\mathrm{d}^sT}{\mathrm{d}t} \tag{1.188}$$

l'inégalité (1.186) devient :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - s\frac{\mathrm{d}^sT}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s\psi}{\mathrm{d}t} - \psi\mathrm{div}(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{s}}) + \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \mathbf{grad}\boldsymbol{v}^{r,\alpha} + \big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha(\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha)\big)\cdot\boldsymbol{v}^{r,\alpha}\\ +T\mathrm{div}(s_m^\alpha\boldsymbol{w}^\alpha) - \mathrm{div}(e_m^\alpha\boldsymbol{w}^\alpha) - \frac{1}{2}\frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\,\boldsymbol{v}^{r,\alpha 2} - \frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{grad}T \geq 0\end{aligned} \tag{1.189}$$

En introduisant une pression macroscopique [25] p_α de la phase fluide α et en supposant que la contrainte partielle dans ce milieu est purement isotrope (c'est-à-dire en négligeant les efforts de cisaillement dans le fluide), l'expression du tenseur de contrainte partielle dans le fluide α s'exprime :

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = -n_\alpha\, p_\alpha\, \mathbf{1} \tag{1.190}$$

On introduit également l'enthalpie libre spécifique du fluide α :

$$g_m^\alpha = e_m^\alpha + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} - T\, s_m^\alpha \tag{1.191}$$

En injectant (1.190) et en utilisant les définitions de l'enthalpie libre spécifique ainsi que du vecteur courant relatif de masse fluide $\boldsymbol{w}^\alpha$ dans l'inégalité (1.189), on obtient après quelques réarrangements :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - s\frac{\mathrm{d}^sT}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s\psi}{\mathrm{d}t} - \psi\mathrm{div}(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{s}}) - \mathrm{div}(g_m^\alpha\boldsymbol{w}^\alpha) + \boldsymbol{w}^\alpha\cdot(\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha)\\ -s_m^\alpha\boldsymbol{w}^\alpha\cdot\mathbf{grad}T - \frac{1}{2}\frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\boldsymbol{v}^{r,\alpha 2} - \frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{grad}T \geq 0\end{aligned} \tag{1.192}$$

L'inégalité de Clausius-Duhem généralisée aux milieux poreux est finalement donnée par :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - g_m^\alpha\mathrm{div}\boldsymbol{w}^\alpha - s\frac{\mathrm{d}^sT}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s\psi}{\mathrm{d}t} - \psi\mathrm{div}(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{s}}) - \boldsymbol{w}^\alpha\cdot\big(s_m^\alpha\mathbf{grad}T + \mathbf{grad}g_m^\alpha - (\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha)\big)\\ -\frac{1}{2}\frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\,\boldsymbol{v}^{r,\alpha 2} - \frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{grad}T \geq 0\end{aligned} \tag{1.193}$$

Identification des dissipations Le terme de gauche de l'inégalité (1.193) représente la dissipation eulérienne du milieu poreux à l'instant t. Elle peut être décomposée comme suit :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_\to + \varphi_2 + \varphi_3 \geq 0 \tag{1.194}$$

avec

$$\varphi_1 + \varphi_\to = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - g_m^\alpha\mathrm{div}\boldsymbol{w}^\alpha - s\frac{\mathrm{d}^sT}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s\psi}{\mathrm{d}t} - \psi\mathrm{div}(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{s}}) - \frac{1}{2}\frac{\dot{m}_{\to\alpha}}{J}\,\boldsymbol{v}^{r,\alpha 2} \tag{1.195a}$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{grad}T \tag{1.195b}$$

$$\varphi_3 = -\boldsymbol{w}^\alpha\cdot\big(s_m^\alpha\mathbf{grad}T + \mathbf{grad}g_m^\alpha - (\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha)\big) \tag{1.195c}$$

24. On utilise la définition de la dérivée particulaire d'une grandeur physique en suivant le squelette (1.31) et l'identité $\mathrm{div}(b\boldsymbol{v}) = b\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\boldsymbol{v}$

25. En fait, p_α est un représentant à l'échelle macroscopique de la pression régnant dans le fluide à l'échelle microscopique

La dissipation $\varphi_1 + \varphi_{\rightarrow}$ donnée en (1.195a) peut être réexprimée en utilisant l'équation de conservation de la masse fluide (1.137), introduisant par là-même un terme supplémentaire comportant le taux de changement de phase $\dot{m}_{\rightarrow\alpha}$:

$$\varphi_1 + \varphi_{\rightarrow} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} + \frac{1}{J} g_m^\alpha \frac{\mathrm{d}^s m_\alpha}{\mathrm{d}t} - s\frac{\mathrm{d}^s T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s \psi}{\mathrm{d}t} - \psi \mathrm{div}(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{s}}) - g_m^\alpha \frac{\dot{m}_{\rightarrow\alpha}}{J} - \frac{1}{2}\frac{\dot{m}_{\rightarrow\alpha}}{J}\boldsymbol{v}^{r,\alpha 2} \quad (1.196)$$

Dans le cas où le changement de phase est négligé, la relation (1.195a) se simplifie et donne :

$$\varphi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - g_m^\alpha \mathrm{div}\boldsymbol{w}^\alpha - s\frac{\mathrm{d}^s T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s \psi}{\mathrm{d}t} - \psi \mathrm{div}(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{s}}) \quad (1.197)$$

La dissipation φ_1 est appelée dissipation intrinsèque volumique. Il est possible de démontrer qu'elle est nécessairement non-négative et ce, indépendamment de la dissipation liée au changement de phase $\varphi_{\rightarrow}$. Cette dernière est donnée par :

$$\varphi_{\rightarrow} = -g_m^\alpha \frac{\dot{m}_{\rightarrow\alpha}}{J} - \frac{1}{2}\frac{\dot{m}_{\rightarrow\alpha}}{J}\boldsymbol{v}^{r,\alpha 2} \quad (1.198)$$

Ces deux dissipations ayant une origine physique différente, il sera supposé par la suite qu'elles sont non-négatives toutes les deux.

Les dissipations φ_2 et φ_3 sont associées au transport de chaleur et de masse fluide à travers le milieu poreux. Il n'est pas possible de conclure quant à la non-négativité des dissipations φ_2 et φ_3 considérées indépendamment.

Formulation lagrangienne de la dissipation intrinsèque Par la suite, le système que l'on considère est composé d'une particule de squelette que l'on suit dans son mouvement et d'une particule de fluide qui coïncide à l'instant t avec la particule de squelette. [26] Compte-tenu du rôle particulier donné à la particule de squelette, il convient de formuler la dissipation intrinsèque à l'aide de grandeurs lagrangiennes.
Commençons par définir la densité volumique lagrangienne de dissipation intrinsèque Φ_1 telle que :

$$\Phi_1 \mathrm{d}\Omega_0 = \varphi_1 \mathrm{d}\Omega_t \quad (1.199)$$

Il est alors clair que l'inégalité suivante est vérifiée, en raison de la non-négativité de φ_1 :

$$\Phi_1 = J\left(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - g_m^\alpha \mathrm{div}\boldsymbol{w}^\alpha - s\frac{\mathrm{d}^s T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s \psi}{\mathrm{d}t} - \psi \mathrm{div}(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{s}})\right) \geq 0 \quad (1.200)$$

On introduit également Ψ la densité volumique lagrangienne d'énergie libre du milieu poreux :

$$\Psi \mathrm{d}\Omega_0 = \psi \mathrm{d}\Omega_t \quad (1.201)$$

Il est aisé de montrer que la dérivée particulaire en suivant le squelette de Ψ est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}^s \Psi}{\mathrm{d}t} = J\left(\frac{\mathrm{d}^s \psi}{\mathrm{d}t} + \psi \mathrm{div}\boldsymbol{v}^s\right) \quad (1.202)$$

On définit encore le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{\Pi}$ (clairement symétrique par définition) :

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{X}, t) = J(\boldsymbol{X}, t)\mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{X}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{F}(\boldsymbol{X}, t), t) \cdot ({}^t\mathbf{F})^{-1}(\boldsymbol{X}, t) \quad (1.203)$$

26. Il résulte de ce choix que la particule de squelette suivie dans le mouvement du milieu poreux est identique quel que soit l'instant auquel on se place et qu'elle coïncide à chaque instant avec des particules fluides qui, *a priori*, sont différentes.

En utilisant la définition du tenseur $\boldsymbol{d}$ ainsi que (1.21), on obtient l'identité suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} = \frac{1}{J}\boldsymbol{\Pi} : \frac{\mathrm{d}^s\boldsymbol{\Delta}}{\mathrm{d}t} \tag{1.204}$$

où $\boldsymbol{\Delta}$ est le tenseur des déformations de Green-Lagrange, défini par :

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}({}^t\mathsf{F} \cdot \mathsf{F} - \mathbf{1}) \tag{1.205a}$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad}\boldsymbol{u} + {}^t\mathbf{Grad}\boldsymbol{u} + {}^t\mathbf{Grad}\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{Grad}\boldsymbol{u}) \tag{1.205b}$$

Tirant parti de ces définitions ainsi que de l'équation de conservation de la masse de chaque phase α, l'expression lagrangienne de la dissipation intrinsèque devient :

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\Pi} : \frac{\mathrm{d}^s\boldsymbol{\Delta}}{\mathrm{d}t} + g_m^\alpha \frac{\mathrm{d}^s m_\alpha}{\mathrm{d}t} - S\frac{\mathrm{d}^s T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s \Psi}{\mathrm{d}t} \tag{1.206}$$

où S désigne la densité volumique lagrangienne d'entropie dans le milieu poreux.

Cette relation permet d'établir les équations d'état du milieux poreux, lesquelles servent de base à la définition de lois de comportement dans le cadre d'une approche macroscopique.

Le terme $g_m^\alpha \frac{\mathrm{d}^s m_\alpha}{\mathrm{d}t}$ est spécifique à la coexistence des différentes phases dans le milieu poreux et provient du fait que le système considéré est ouvert. Il représente la puissance apportée au système par le mouvement relatif des fluides par rapport au squelette.

Il est aisé de montrer que la dissipation lagrangienne liée au changement de phase est donnée par :

$$\Phi_\rightarrow = -g_m^\alpha\, \dot{m}_{\rightarrow\alpha} - \frac{1}{2}\dot{m}_{\rightarrow\alpha}\, \boldsymbol{v}^{r,\alpha 2} \tag{1.207}$$

et qu'elle vérifie la relation suivante en raison de la non-négativité de $\varphi_\rightarrow$:

$$\Phi_\rightarrow \geq 0 \tag{1.208}$$

On montre, de la même façon, que les formulations lagrangiennes des dissipations associées au transport de chaleur et des masses fluides peuvent s'écrire selon :

$$\Phi_2 = -\frac{1}{T}\boldsymbol{Q} \cdot \mathbf{Grad}T \tag{1.209}$$

$$\Phi_3 = -\boldsymbol{M}^\alpha \cdot \left(s_m^\alpha \mathbf{Grad}T + \mathbf{Grad}g_m^\alpha - (\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) \cdot \mathsf{F}\right) \tag{1.210}$$

où $\boldsymbol{Q}$ est l'équivalent lagrangien du vecteur courant de chaleur eulérien $\boldsymbol{q}$.

Lois de conduction de la chaleur et de la masse fluide L'hypothèse de découplage des dissipations est étendue à φ_2 et φ_3 :

$$\varphi_2 \geq 0 \tag{1.211}$$

$$\varphi_3 \geq 0 \tag{1.212}$$

Il est habituel d'adopter des lois de conductions linéaires assurant ainsi de fait la non-négativité de ces dissipations.

En ce qui concerne la conduction de chaleur, la loi de Fourier peut de nouveau être utilisée :

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{grad}T \tag{1.213}$$

avec $\boldsymbol{\kappa}$ la conductivité thermique du milieu poreux.

Pour ce qui est de la conduction des masses fluides, on considérera une généralisation de la loi de Darcy pour les particules de liquide et de gaz (les fluides étant supposés non-miscibles) : [27]

$$\frac{\boldsymbol{w}^\alpha}{\rho^\alpha} = \boldsymbol{k}_\alpha \cdot \big(- \mathbf{grad} p_\alpha + \rho^\alpha (\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) \big) \tag{1.214}$$

avec $\boldsymbol{k}_\alpha$ la perméabilité au fluide α du milieu poreux. Dans le cas d'un milieu isotrope, la perméabilité se réduit à un tenseur isotrope. Il est à noter que les observations expérimentales permettent de décomposer la perméabilité $\boldsymbol{k}_\alpha$ selon la relation :

$$\boldsymbol{k}_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \boldsymbol{k} \tag{1.215}$$

avec $\boldsymbol{k}$ la perméabilité intrinsèque du milieu poreux, $k_{r\alpha}$ sa perméabilité relative au fluide α et μ_α la viscosité du fluide α. Dans le cas de l'eau, à 20°C, on a $\mu_l = 10^{-3}$ Pa·s.

En pratique, les forces volumiques agissant sur le fluide se limitent souvent à la pesanteur $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. De plus, si l'on néglige l'accélération du fluide (cadre quasi-statique), la loi de Darcy généralisée peut être simplifiée en (sans sommation sur les indices répétés) : [28]

$$\frac{\boldsymbol{w}^\alpha}{\rho^\alpha} = \boldsymbol{k}_\alpha (-\mathbf{grad} p_\alpha + \rho^\alpha \boldsymbol{g}) \tag{1.216}$$

Équilibre liquide-vapeur Le changement de phase liquide-vapeur étant réversible, la dissipation lui étant associée est nécessairement nulle quelles que soient les évolutions. Cela permet d'imposer l'égalité des enthalpies libres spécifiques du liquide et de la vapeur : $g_l = g_v$. Cette identité peut être obtenue à partir de l'expression de dissipation liée au changement de phase (1.207) en supposant que les termes quadratiques en $\boldsymbol{v}^{r,\alpha}$ sont négligeables devant ceux concernant l'enthalpie libre spécifique. [29]

L'égalité des enthalpies libres spécifiques du liquide et de la vapeur fournit une relation entre les variables p_l, p_v et T. Celle-ci peut être explicitée si l'on suppose par exemple que la vapeur est un gaz parfait et que le liquide est un fluide standard compressible, ces hypothèses permettant de donner les expressions des enthalpies libres spécifiques de la vapeur et du fluide.

Loi de Fick La loi de Fick permet d'exprimer la diffusion mutuelle d'un gaz dans un autre. Dans le cas où le mélange considéré diffuse dans un milieu poreux, la différence des vitesses des deux gaz est donnée (par l'intermédiaire de leur flux) selon :

$$\boldsymbol{q}_v - \boldsymbol{q}_a = \phi_g \, \tau \, D_{va} \left(-\frac{\mathbf{grad} p_v}{p_v} + \frac{\mathbf{grad} p_a}{p_a} + \frac{M_v - M_a}{RT} \boldsymbol{g} \right) \tag{1.217}$$

27. Cette loi permet bien d'assurer la non-négativité de ϕ_3 : il suffit de démontrer, en s'appuyant sur la définition de l'enthalpie libre spécifique du fluide et les équations d'état (1.227) que l'on a :

$$\mathbf{grad} g_m^\alpha + s_m^\alpha \mathbf{grad} T = \frac{1}{\rho_\alpha} \mathbf{grad} p_\alpha$$

28. En négligeant en outre les variations spatiales de la masse volumique du fluide et en introduisant la charge hydraulique $h_\alpha = p_\alpha + \rho_\alpha g z$, la loi de Darcy s'écrit encore :

$$\frac{\boldsymbol{w}^\alpha}{\rho^\alpha} = -\boldsymbol{k}_\alpha \cdot \mathbf{grad} h_\alpha$$

29. Cette hypothèse peut être rapprochée d'une autre, fréquente en hydraulique qui consiste à assimiler la charge hydraulique à $h_l = p_l + \rho_l g z$, c'est-à-dire à négliger la contribution du terme inertiel $\frac{1}{2}\rho_l v_l^2$ à cette dernière.

Les M_α représentent les masses molaires des constituants. τ est le coefficient de tortuosité, D_{va} le coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air sec et R la constante des gaz parfaites. La relation de Millington peut être utilisée pour l'estimation de ce coefficient à partir de la porosité du milieu et du degré de saturation en liquide :

$$\tau(\phi,\, S_l) = \phi^{1/3}(1 - S_l)^{7/3} \tag{1.218}$$

Lorsque la pression du mélange gazeux n'est pas homogène, il se produit un écoulement du mélange selon la loi de Darcy définie à la section précédente avec un flux de gaz donné par une combinaison barycentrique des flux de vapeur d'eau et d'air sec :

$$\boldsymbol{q}_g = \beta_v\, \boldsymbol{q}_v + \beta_a\, \boldsymbol{q}_a \tag{1.219}$$

avec β_a et β_v positifs et tels que $\beta_a + \beta_v = 1$.

Le calcul de $\boldsymbol{q}_v$ et $\boldsymbol{q}_a$ est alors simple puisque :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{q}_v & = & \boldsymbol{q}_g + \beta_a(\boldsymbol{q}_v - \boldsymbol{q}_a) \\ \boldsymbol{q}_a & = & \boldsymbol{q}_g - \beta_v(\boldsymbol{q}_v - \boldsymbol{q}_a) \end{array} \right. \tag{1.220}$$

et que $\boldsymbol{q}_g$ et $\boldsymbol{q}_v - \boldsymbol{q}_a$ sont donnés respectivement par les relations (1.214) et (1.217).

Pour des raisons liées à la thermodynamique (forme correcte de la dissipation due au transport diffusif), le choix des coefficients de pondération β_α se portera sur les fractions molaires C_α de chaque constituant α.

Pour plus de renseignements, le lecteur pourra se reporter à [Coussy, 1995] ou à [Dangla, 2001].

Équations d'état du squelette On s'attache maintenant à déterminer les équations d'état du squelette à partir de la relation (1.206) exprimant la non-négativité de la dissipation intrinsèque lagrangienne Φ_1. Comme dans le cas saturé, l'hypothèse suivante est effectuée :

Hypothèse *On suppose qu'un nombre fini de variables suffit à caractériser l'état du système considéré.*

Ces variables d'état peuvent être externes (observables) ou internes (cachées), ces dernières caractérisant alors les transformations irréversibles.

Dans le cas présent, l'inégalité (1.206) suggère le choix de ($\boldsymbol{\Delta}$, m_α, T, $\boldsymbol{\chi}$) comme variables d'état [30]. La densité volumique d'énergie libre Ψ est donc une fonction de ces variables.

Faisant intervenir ces variables dans la dérivée matérielle de Ψ relativement au mouvement du squelette, la relation (1.206) devient :

$$\left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\Delta}}\right) : \frac{\mathrm{d}^s \boldsymbol{\Delta}}{\mathrm{d}t} + \left(g_m^\alpha - \frac{\partial \Psi}{\partial m_\alpha}\right) \frac{\mathrm{d}^s m}{\mathrm{d}t} - \left(S + \frac{\partial \Psi}{\partial T}\right) \frac{\mathrm{d}^s T}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \frac{\mathrm{d}^s \boldsymbol{\chi}}{\mathrm{d}t} \geq 0 \tag{1.221}$$

Dans le cas de transformations réversibles, la variable $\boldsymbol{\chi}$ est invariante et l'inégalité ci-dessus devient une égalité vérifiée quelle que soit la transformation envisagée. Il s'en suit que l'on a nécessairement :

$$\boldsymbol{\Pi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\Delta}} \tag{1.222a}$$

$$g_m^\alpha = \frac{\partial \Psi}{\partial m_\alpha} \tag{1.222b}$$

$$S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \tag{1.222c}$$

30. $\boldsymbol{\chi}$ caractérise les variables internes.

Ces trois relations constituent les équations d'état du squelette.

On suppose que ces relations sont toujours vérifiées dans le cas de transformations irréversibles. Dans ce cas, la non-négativité de la dissipation intrinsèque s'exprime simplement en injectant les relations (1.222) dans (1.221) :

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \frac{\mathrm{d}^s \boldsymbol{\chi}}{\mathrm{d}t} \geq 0 \tag{1.223}$$

En introduisant la transformée de Legendre-Fenchel Ψ^* de l'énergie libre Ψ définie par :

$$\Psi^* = \boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{\Delta} + g_m^\alpha m_\alpha - ST - \Psi \tag{1.224}$$

et en tenant compte des relations (1.222), il vient

$$\frac{\mathrm{d}^s \Psi^*}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Delta} : \frac{\mathrm{d}^s \boldsymbol{\Pi}}{\mathrm{d}t} + m \frac{\mathrm{d}^s g_m^f}{\mathrm{d}t} + T \frac{\mathrm{d}^s S}{\mathrm{d}t} \tag{1.225}$$

Il est donc possible d'obtenir une formulation réciproque (totalement équivalente) des relations d'état du squelette (1.222) et qui se révèle nécessaire lorsque l'état du système est défini selon les variables ($\boldsymbol{\Pi}$, g_m^α, S) [31] :

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial \boldsymbol{\Pi}} \tag{1.226a}$$

$$m_\alpha = \frac{\partial \Psi^*}{\partial g_m^\alpha} \tag{1.226b}$$

$$T = \frac{\partial \Psi^*}{\partial S} \tag{1.226c}$$

Équations d'état du fluide Les équations d'état (1.222) ou (1.226) se révèlent peu « pratiques » à l'usage car elles font intervenir des variables difficilement accessibles ou rarement utilisées dans la pratique (c'est le cas notamment de l'enthalpie libre du fluide ou de l'entropie).

Dans l'objectif de travailler avec des variables usuellement rencontrées (en particulier, mesurables), il conviendra de faire intervenir les équations d'état du fluide que l'on introduit maintenant. L'objectif est, en particulier, de faire intervenir la pression des fluides puisqu'elles jouent un rôle fondamental dans le comportement mécanique du milieu poreux.

On suppose que l'enthalpie libre spécifique d'un fluide est une fonction de la pression de ce fluide et de sa température. On suppose également que les équations d'état suivantes sont vérifiées [32] :

$$\frac{\partial g_m^\alpha}{\partial p_\alpha} = \frac{1}{\rho_\alpha} \tag{1.227a}$$

$$\frac{\partial g_m^\alpha}{\partial T} = -s_m^\alpha \tag{1.227b}$$

Il est alors possible de démontrer que la dissipation (1.206) peut alors être exprimée selon [33] :

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\Pi} : \frac{\mathrm{d}^s \boldsymbol{\Delta}}{\mathrm{d}t} + p_\alpha \frac{\mathrm{d}^s \phi_\alpha}{\mathrm{d}t} - S_s \frac{\mathrm{d}^s T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^s \Psi_s}{\mathrm{d}t} \tag{1.228}$$

31. Les transformations de Legendre-Fenchel constituent un outil mathématique permettant de réaliser des changements de variables conduisant à de nouvelles formulations des équations d'état.

32. On considère que le comportement du fluide seul n'est pas modifié dans le milieu poreux *i.e.* qu'il n'y a pas d'interaction à distance entre les molécules du fluide et la matrice du squelette ou entre les fluides eux-mêmes. Ces relations constitutives microscopiques du fluide sont donc supposées valables à l'échelle macroscopique.

33. Il suffit de décomposer l'entropie et l'énergie libre selon $S = S_s + m_\alpha\, s_m^\alpha$ et $\Psi = \Psi_s + m_\alpha\, \psi_m^\alpha$ et de remarquer que les équations d'état du fluide permettent d'écrire $\mathrm{d}g_m^\alpha = \frac{1}{\rho_\alpha}\mathrm{d}p_\alpha - s_m^\alpha \mathrm{d}T$ et donc, en considérant la définition de l'enthalpie libre que $\mathrm{d}\psi_m^\alpha = -p_\alpha \mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right) - s_m^\alpha \mathrm{d}T$.

où Ψ_s et S_s représentent respectivement les densités volumiques d'énergie libre et d'entropie du squelette.

Cette relation montre que p_α, la pression macroscopique du fluide α, est thermodynamiquement associée à $\phi_\alpha = J\, n_\alpha$, la porosité lagrangienne du milieu.

1.3.4 Poroélasticité

Sous l'hypothèse des petites perturbations et dans un cadre isotherme, la dissipation intrinsèque donnée par la relation (1.228) se simplifie en :

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} + p_\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} \tag{1.229}$$

En introduisant les degrés de saturation en phases fluides,

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} + (S_g\, p_g + S_l\, p_l) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi\, p_c \frac{\partial S_l}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} \tag{1.230}$$

avec $p_c = p_g - p_l$ la pression capillaire.

Par définition, la poroélasticité caractérise le comportement selon des évolutions réversibles d'un milieu poreux. Dans le contexte de saturation partielle, ce comportement réversible inclut les écoulements des phases fluides. Il s'en suit que des phénomènes tels que l'hystérésis liée aux effets capillaires ne sont pas pris en compte dans une loi de comportement poroélastique.

Les équations d'état de la poroélasticité dérivent alors d'un potentiel thermodynamique $\Psi_s(\boldsymbol{\epsilon}, \phi, S_l)$ suivant les relations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \tag{1.231a}$$

$$S_g\, p_g + S_l\, p_l = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi} \tag{1.231b}$$

$$\phi\, p_c = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial S_l} \tag{1.231c}$$

Incompressibilité du solide Si l'on néglige la compressibilité du constituant solide devant celle du squelette, il vient $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = \phi - \phi_0$ et l'on peut en déduire que les variables d'état $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}), \phi_l, \phi_g$ sont liées. En choisissant $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}), \phi_l$ comme variables indépendantes, la dissipation intrinsèque donnée en (1.229) peut être récrite selon :

$$(\boldsymbol{\sigma} + p_g \mathbf{1}) : \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} - p_c \frac{\partial \phi_l}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} \geq 0 \tag{1.232}$$

Les lois d'état du squelette deviennent alors :

$$\boldsymbol{\sigma} + p_g \mathbf{1} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \tag{1.233a}$$

$$p_c = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi_l} \tag{1.233b}$$

L'hypothèse qui permet de conclure quant à l'existence d'un tenseur des contraintes effectives dans le cas saturé conduit donc, dans le cas d'une saturation partielle, au fait qu'il est nécessaire d'utiliser deux variables de contrainte indépendantes pour décrire le comportement du milieu poreux.

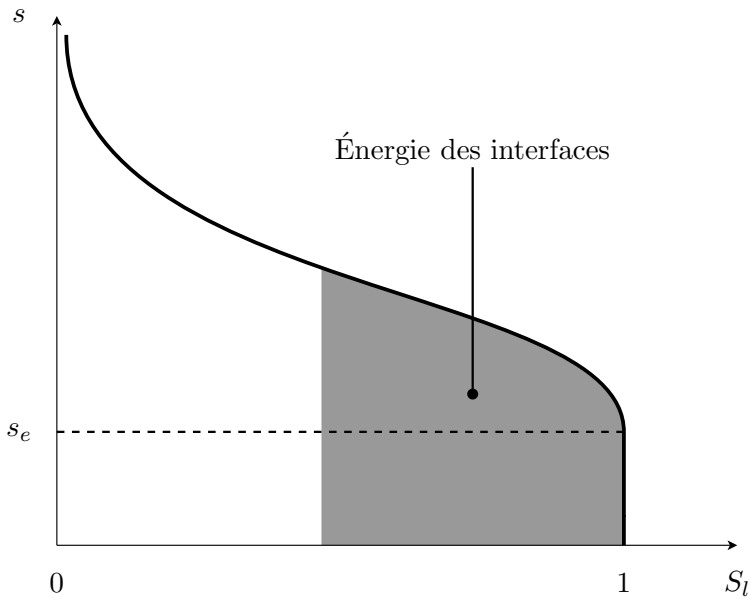


FIGURE 1.7 – Identification de la variation d'énergie des interfaces à partir de la courbe de pression capillaire.

Poroélasticité et courbe de pression capillaire La courbe de pression capillaire relie la pression capillaire au degré de saturation de la phase liquide. Elle dépend *a priori* de la température ainsi que des déformations du squelette. De plus, cette courbe peut présenter un cycle d'hystérésis lorsqu'un cycle de drainage - imbibition est réalisé. Cette possibilité ne sera pas prise en compte ici.

En faisant l'hypothèse de séparation des énergies, l'énergie libre du squelette s'écrit :

$$\Psi_s(\boldsymbol{\epsilon}, \phi, S_l) = \phi U(\phi, S_l) + \psi_s(\boldsymbol{\epsilon}, \phi) \tag{1.234}$$

Dans cette décomposition, le terme ϕU représente la variation d'énergie libre des interfaces (par référence au cas saturé) et le terme ψ_s représente l'énergie élastique du constituant solide. [34]

Les équations d'état (1.231) se décomposent alors en deux systèmes d'équations. Le premier décrit le comportement des interfaces au sein du volume poreux :

$$p_c = -\frac{\partial U}{\partial S_l} \tag{1.235}$$

Dans le cas où la courbe de pression capillaire est déterminée expérimentalement sous la forme $p_c = p_c(\phi, S_l)$, l'énergie U peut être identifiée selon :

$$U(\phi, S_l) = \int_{S_l}^{1} p_c(\phi, S)\mathrm{d}S \tag{1.236}$$

La Figure 1.7 présente la courbe de pression capillaire (on suppose que la succion s est égale à la pression capillaire p_c) ainsi que l'interprétation de l'énergie des interfaces à partir de celle-ci.

34. L'état saturé est pris ici comme référence. Cela implique que ce sont les variations d'énergie libre des interfaces qui sont mesurées par ϕU et que l'énergie libre des interfaces solide-liquide est prise en compte dans l'énergie ψ_s.

Le second système décrit quant à lui le comportement du constituant solide :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi_s}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \tag{1.237a}$$

$$\pi = \frac{\partial \psi_s}{\partial \phi} \tag{1.237b}$$

avec

$$\pi = S_g p_g + S_l p_l - \frac{\partial \phi U}{\partial \phi} \tag{1.238}$$

Dans le cas où la compressibilité du solide est négligeable devant celle du squelette, l'énergie élastique du solide ne dépend plus que du tenseur des déformations. On introduit l'énergie libre w_s telle que :

$$\psi_s(\boldsymbol{\epsilon}, \phi) = w_s(\boldsymbol{\epsilon}) \tag{1.239}$$

Les équations (1.237) conduisent alors à :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{\partial w_s}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \tag{1.240}$$

où $\boldsymbol{\sigma}'$ est définie par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \pi \mathbf{1} \tag{1.241}$$

Cette contrainte jouera par la suite le rôle de contrainte effective pour le milieu non saturé. Notons que ce terme est ambigu (puisque l'on a vu que deux variables étaient nécessaires pour décrire les déformations du squelette) ; nous y reviendrons ultérieurement dans une partie consacrée à cette notion de contrainte effective dans les milieux partiellement saturés.

Une analyse à l'échelle microscopique se fondant sur les méthodes d'homogénéisation permet de montrer que, dans le cas où l'énergie U dépend à la fois du degré de saturation en liquide et de la porosité (donc des déformations), la pression π s'identifie à :

$$\pi = S_g p_g + S_l p_l - \frac{2}{3} U \tag{1.242}$$

où l'énergie U est définie par :

$$U(\phi, S_l) = \int_{S_l}^{1} p_c(\phi, S) \mathrm{d}S \tag{1.243}$$

On se reportera à [Coussy et Dangla, 2002] pour plus de détails sur cette analyse.

En comparant les relations (1.238) et (1.242), il vient :

$$\frac{\partial \phi U}{\partial \phi} = \frac{2}{3} U \tag{1.244}$$

La résolution de cette équation différentielle en U donne :

$$U(\phi, S_l) = \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{-1/3} U_0(S_l) \tag{1.245}$$

avec $U_0(S_l) = U(\phi_0, S_l)$.

La variation d'énergie libre des interfaces, donnée par ϕU, peut donc s'écrire $\phi^{2/3}\phi_0^{1/3} U_0(S_l)$. Il apparaît donc que l'énergie libre des interfaces varie comme une surface lorsque le milieu se

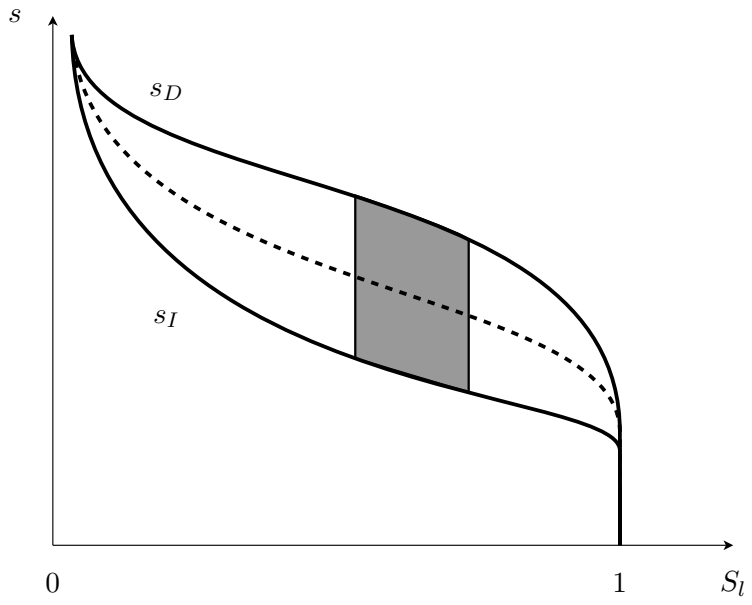


FIGURE 1.8 – Courbes de drainage et d'imbibition.

déforme (exposant de ϕ égal à 2/3) et non comme un volume, contrairement à ce que la relation (1.234) pouvait laisser à penser.[35]

La relation (1.245) permet également de ré-exprimer la pression capillaire en utilisant (1.235) :

$$p_c = -\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{-1/3} \frac{\partial U_0}{\partial S_l} \tag{1.246}$$

Cette relation montre que la pression capillaire varie comme l'inverse d'une longueur lorsque le milieu se déforme à S_l (et T) constant(s) (exposant de ϕ égal à $-1/3$) ce qui rappelle la loi de Laplace qui donne l'énergie des interfaces en $1/r$ avec r le rayon de courbure de l'interface.

Prise en compte de l'hystérésis Lorsque l'on est en présence d'un phénomène d'hystérésis, la courbe de pression capillaire comporte deux branches selon qu'elle est parcourue en phase d'imbibition ou de drainage. Ces deux courbes sont notées respectivement $s_I(\phi, S_l, T)$ et $s_D(\phi, S_l, T)$. La Figure 1.8 illustre ces courbes ainsi que l'énergie dissipée lors d'un cycle drainage-imbibition (partie grisée). La courbe $\dfrac{\partial U}{\partial S_l}$ est représentée en pointillés.
On montre alors que l'énergie $U(\phi, S_l, T)$ peut être encadrée selon :

$$\int_{S_l}^{1} s_I(\phi, S)\mathrm{d}S \leq U(\phi, S_l, T) \leq \int_{S_l}^{1} s_D(\phi, S)\mathrm{d}S \tag{1.247}$$

et un encadrement de la pression interstitielle équivalente peut alors en être déduit en utilisant la définition (1.242).

Il est possible d'expliciter la forme de π dans le cas d'une géométrie particulière de l'espace poreux. On suppose que cet espace peut être modélisé par des pores sphériques, classés par

35. Cela est cohérent puisque ce sont bien les surfaces des interfaces qui interviennent dans le calcul de leur énergie libre.

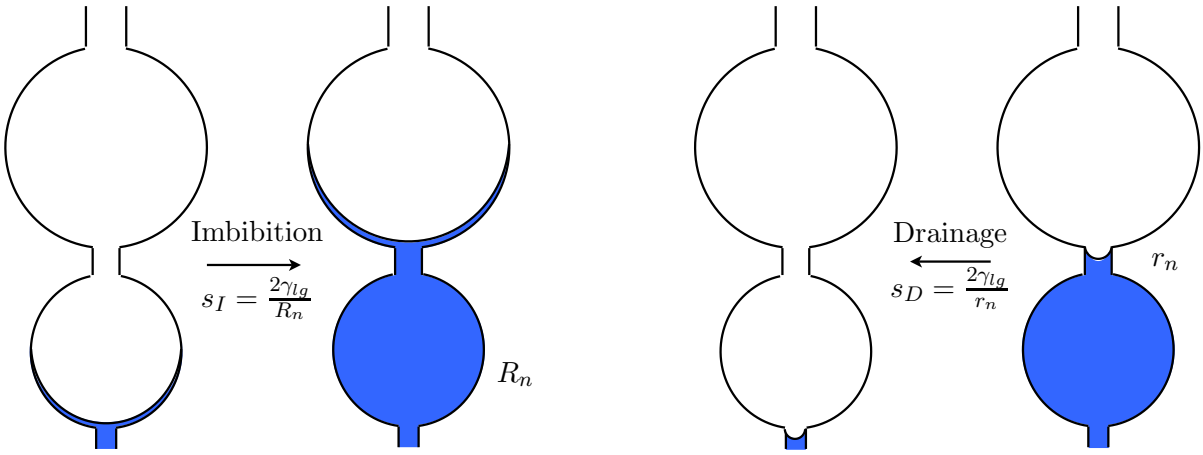


FIGURE 1.9 – Représentation idéalisée du réseau poreux et modélisation d'un cycle d'imbibition - drainage.

rayons décroissants et reliés entre eux par de fins capillaires d'accès. On suppose, d'une part, que ces capillaires d'accès ne participent pas à la saturation en phase liquide et, d'autre part, que l'angle de contact solide-liquide est nul (*i.e.* que le liquide est parfaitement mouillant).

L'hypothèse de mouillage parfait implique que, pour une succion donnée, tous les pores d'une classe de rayons donnée sont soit remplis de liquide ou soit complètement vides. Lorsque la succion est diminuée (imbibition), ce sont les rayons des pores sphériques qui sont déterminants alors qu'au cours d'un drainage (augmentation de la succion), ce sont les rayons des capillaires d'accès qui sont limitants.

En tenant compte de la déformation du réseau poreux (une déformation homothétique est considérée, permettant de relier variation de rayon des pores et variation de la porosité), l'énergie U est donnée par :

$$U(\phi, S_l, T) = \frac{3}{2}\int_{S_l}^{1} s_I(\phi, S)\mathrm{d}S \tag{1.248}$$

et la pression π s'écrit sous la forme :

$$\pi = S_g p_g + S_l p_l - \int_{S_l}^{1} s_I(\phi, S)\mathrm{d}S \tag{1.249}$$

La Figure 1.9 représente la géométrie particulière décrite ici ainsi qu'un cycle d'imbibition - drainage.

1.3.5 Problèmes particuliers

1.3.5.1 Problème de consolidation

Comme dans le cas de milieu saturé, on s'attache ici à poser le problème de la consolidation d'un sol, dans des conditions de saturation partielle cette fois-ci.

On supposera par la suite qu'il n'y a pas de changement de phase liquide-vapeur et que la pression de la phase gazeuse est en équilibre avec la pression atmosphérique. Les inconnues du problème sont alors les champs de déplacement du squelette et de pression de la phase liquide. L'hypothèse des petites perturbations du squelette sera également introduite.

Équation de champ mécanique En utilisant l'équation de la conservation de quantité de mouvement (1.148) ainsi que la définition de la contrainte effective (1.241), la première relation du problème de consolidation peut être exprimée comme suit :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}' - \pi\mathbf{1}) + \rho^s(\boldsymbol{F}^s - \boldsymbol{\gamma}^s) + \rho^\alpha(\boldsymbol{F}^\alpha - \boldsymbol{\gamma}^\alpha) = \mathbf{0} \tag{1.250}$$

Équation de champ hydraulique A partir de l'équation de continuité de la phase liquide (1.138), de la définition de la vitesse relative du liquide, de celle du vecteur courant relatif de masse fluide ainsi que de la loi d'écoulement de la phase fluide, il vient :

$$\frac{n\ S_l}{K_l}\frac{\partial p_l}{\partial t} + S_l \mathrm{div}(\boldsymbol{v_s}) + n\ \frac{\partial S_l}{\partial t} + \mathrm{div}\left[\boldsymbol{k}_l\Big(-\mathbf{grad}p_l + \rho^l\left(\boldsymbol{F}^l - \boldsymbol{\gamma}^l\right)\Big)\right] = 0 \tag{1.251}$$

Les relations (1.250) et (1.251) définissent le problème de consolidation hydromécanique en conditions de saturation partielle tel que nous l'étudierons par la suite.

1.3.5.2 Chargement non drainé

En considérant un chargement tel que le contenu en phase liquide du matériau soit constant (on qualifiera cette condition de chargement « non-drainé »), la condition suivante peut être imposée :

$$\mathrm{d}v_l = 0 \tag{1.252}$$

avec $v_l = 1 + S_l\, e$ le volume spécifique du liquide. L'intérêt de cette variable, notamment souligné par Wheeler [Wheeler, 1996], réside dans le fait qu'elle tende vers le volume spécifique $v = 1 + e$, variable volumique couramment utilisée en mécanique des sols.
Cette relation devient, en tenant compte de la définition de v_l :

$$\frac{\mathrm{d}S_l}{S_l} = -\frac{\mathrm{d}e}{e} \tag{1.253}$$

Cette dernière relation permet alors d'exprimer les variations locales du degré de saturation en liquide en fonction des variations volumiques du squelette (par le biais de l'indice des vides du sol). En introduisant la définition de la courbe de pression capillaire, il est possible de déduire les variations de succion imposées par les déformations volumiques. Cette démarche permet donc de déduire les variations de la pression interstitielle (en supposant que la phase gazeuse est en équilibre avec l'atmosphère) à partir des déformations volumiques du squelette.

Ce chapitre a présenté les principales équations de la mécanique des milieux poreux saturés et partiellement saturés. Il nous a permis de poser les outils et le cadre thermodynamique que nous utiliserons par la suite.

Avant d'aborder les aspects liés à la modélisation théorique et numérique du comportement des sols non-saturés, les chapitres suivants sont consacrés aux observations expérimentales et à différentes propositions de modèles de comportement pour ces sols.

CHAPITRE 2

Observations expérimentales

Ce chapitre est consacré à une synthèse des principales études expérimentales du comportement des sols non-saturés.
Après quelques rappels sur la succion dans les sols, les caractéristiques essentielles du comportement de ces matériaux sur différents chemins de sollicitation sont présentées afin de fournir une base aux modélisations proposées dans les chapitres suivants.

Sommaire

2.1 La succion dans les sols 52
2.1.1 Phénomènes capillaires 52
2.1.2 Définition de la succion 54
2.2 Comportement sous sollicitations hydriques 56
2.3 Comportement mécanique des sols non-saturés 62
2.3.1 Comportement volumique 62
2.3.2 Résistance au cisaillement 64
2.4 Synthèse 67

L'objet de ce chapitre est de décrire les principaux aspects caractérisant le comportement des sols partiellement saturés. La synthèse de ces principales caractéristiques est utile pour avoir une vue d'ensemble afin de proposer un cadre de modélisation du comportement des sols non-saturés ainsi qu'une méthodologie d'adaptation de modèles existants à la description de ces sols particuliers.

Les résultats expérimentaux présentés ici permettent d'illustrer les aspects fondamentaux du comportement des sols non-saturés. Le lecteur souhaitant de plus amples détails pourra, par exemple, se reporter aux travaux de synthèse suivants : [Fredlund et Rahardjo, 1993], [Delage et Cui, 2001] ou [Verbrugge et Fleureau, 2002].

L'existence d'une phase gazeuse dans un sol, en plus des phases solide et liquide, confère à ce dernier un comportement particulier. Ce comportement se distingue de celui des sols saturés et rend inadaptés les outils classiques de la mécanique des sols, développés pour des milieux totalement saturés par la phase liquide. C'est en particulier le cas de la contrainte effective de Terzaghi.

Les variables descriptives des matériaux partiellement saturés ont été présentées au Chapitre 1 mais il est intéressant de revenir sur la succion, celle-ci jouant un rôle fondamental dans la description du comportement de ces sols.

2.1 La succion dans les sols

Cette partie, traitant de la succion dans les sols, commence par une brève description des phénomènes capillaires, ceux-ci constituant une contribution souvent importante à la succion dans le sol. [1]

2.1.1 Phénomènes capillaires

L'interface entre deux milieux est le siège d'une tension superficielle dont l'origine peut être trouvée dans le fait que les molécules constituant cette interface ne subissent pas les mêmes actions de la part des deux milieux. Dans le cas de l'eau et l'air, par exemple, la résultante de ces actions sur une molécule d'eau située à l'interface est dirigée vers la masse d'eau. [2] Cette tension superficielle est alors à l'origine de phénomènes capillaires siégeant à l'interface entre deux milieux. Ces phénomènes sont souvent illustrés par la remontée d'eau dans un tube capillaire (cf. Fig 2.1).

La pression capillaire, donnée par la différence entre les pressions de gaz et de liquide, peut être reliée à la tension de surface γ_{lg} et au rayon de courbure du ménisque séparant les fluides, par la loi de Laplace.

Si l'on considère un ménisque sphérique situé dans un tube cylindrique (cas illustré sur la Fig. 2.1), la loi de Laplace se simplifie en la loi de Jurin et donne :

$$p_g - p_l = \frac{2\,\gamma_{lg}\,\cos\theta}{r} \tag{2.1}$$

avec r le rayon du cylindre capillaire et θ l'angle de contact solide-liquide.

Lorsque la phase liquide est l'eau, la tension superficielle à 20°C vaut $\gamma_{lg} = 72.75\ 10^{-3}$ N·m^{-1}. De plus, l'angle de contact avec le solide peut être supposé nul si bien que la pression capillaire

1. Cela peut ne pas être le cas pour certaines classes de sols comme on le verra par la suite.
2. A l'inverse, la résultante de l'action de ses voisines sur une molécule située loin de l'interface est nulle.

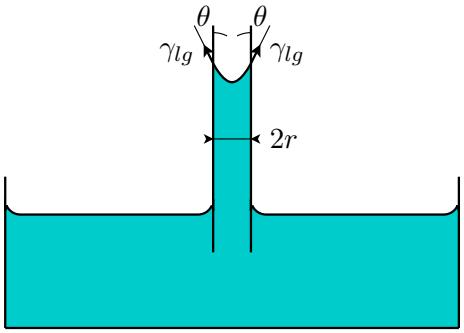


FIGURE 2.1 – Illustration du phénomène de capillarité : remontée capillaire dans un tube cylindrique.

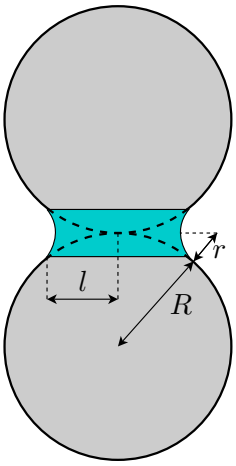


FIGURE 2.2 – Ménisque au point de contact entre deux sphères.

est donnée par :

$$p_g - p_l = \frac{2\,\gamma_{lg}}{r} \tag{2.2}$$

Notons que cette relation entraîne le fait que la pression de l'eau est inférieure à la pression d'air (au voisinage du ménisque). Si l'on suppose que la pression d'air est en équilibre avec la pression atmosphérique, prise comme référence, p_g sera nulle et p_l négative. [3]

Si l'on considère un ménisque situé au point de contact entre deux sphères, la loi de Laplace permet d'écrire :

$$p_g - p_l = \gamma_{lg}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right) \tag{2.3}$$

avec r et l les deux rayons de courbures caractérisant le ménisque, définis sur la Figure 2.2.

La teneur en eau (et donc la succion) d'un sol non-saturé dépend, à l'équilibre, de l'humidité relative (H_R) de l'atmosphère dans laquelle il est placé. L'humidité relative est égale au rapport de la pression partielle de la vapeur d'eau dans l'atmosphère à la pression de vapeur saturante (à 20°C, cette dernière vaut 2.33 kPa). La loi de Kelvin relie, indépendamment du sol, la pression capillaire (exprimée ici en hauteur d'eau, m) et l'humidité relative ambiante selon l'expression suivante :

$$p_g - p_l = -\frac{RT}{M_l\,g}\ln H_R \tag{2.4}$$

3. Cette dernière hypothèse justifie la dénomination de « pression négative » parfois donnée à la pression capillaire (et même à la succion dans le cas où celle-ci est assimilée à sa composante capillaire).

avec R la constante des gaz parfaits ($R = 8.314$ J·mol^{-1}·K^{-1}), T la température absolue, M_l la masse molaire de l'eau ($M_l = 18$ g·mol^{-1}) et g l'accélération de la pesanteur ($g = 9.81$ m·s^{-2}).

2.1.2 Définition de la succion

2.1.2.1 Potentiel de l'eau

D'un point de vue thermodynamique, l'état de l'eau dans un sol peut être décrit à l'aide de son énergie libre, celle de l'eau pure étant prise comme référence.

Le potentiel total de l'eau contenue dans un sol est alors défini comme le travail fourni par unité de volume pour transporter, de façon réversible et isotherme, une quantité infinitésimale d'eau pure depuis un réservoir à une altitude donnée et à la pression atmosphérique vers le sol considéré [Mitchell, 1976].

Selon cette définition, lorsque le potentiel de l'eau est positif (respectivement négatif), le sol aura tendance à expulser (respectivement absorber) de l'eau.

Le potentiel total ψ de l'eau contenue dans un sol non-saturé est la somme de plusieurs composantes :

$$\psi = \psi_p + \psi_g + \psi_m + \psi_o \tag{2.5}$$

Les potentiels de pression externe ψ_p et gravitaire ψ_g sont classiquement rencontrés en mécanique des sols saturés. Ils se retrouvent notamment dans la définition de la charge hydraulique. [4]

Le potentiel matriciel ψ_m regroupe les composantes capillaires et d'adsorption. La composante capillaire provient de la coexistence des deux phases fluides dans le réseau poreux, ce dernier jouant un rôle similaire à celui du tube capillaire évoqué ci-dessus.

La composante d'adsorption est caractéristique des sols fins : elle rend compte du caractère lié d'une partie de l'eau entourant les particules solides (argiles en général). [5] Différents phénomènes physiques sont à l'origine de cette adsorption. Parmi ceux-ci, on peut évoquer ([Mitchell, 1976], [Delage, 1987]) : la liaison hydrogène entre les molécules d'eau et les sites chargés (oxygène, hydroxyde) situés à la surface des feuillets argileux, l'hydration des cations attirés par les sites électronégatifs présents en surface des particules solides, l'attraction osmotique due à la plus forte concentration en cations au voisinage des feuillets, les forces de van der Walls... Cette composante n'est donc pas liée au caractère non-saturé du sol.

En conséquence, le potentiel matriciel pour des sols fins sera effectivement la somme d'un potentiel capillaire et d'un potentiel d'adsorption alors que pour des sols grenus, il pourra se réduire au potentiel capillaire.

Le potentiel osmotique ψ_o est lié à la composition de l'eau du sol. En présence de gradients de concentration en particules dissoutes dans l'eau (c'est le cas, par exemple, lorsque des sels sont dissous dans l'eau interstitielle), les molécules d'eau présentes dans les régions où siègent les moins fortes concentrations seront attirées vers les régions les plus concentrées. Bien que souvent associé aux sols non-saturés, le potentiel osmotique peut jouer un rôle dans le cas de

4. La charge hydraulique H peut s'écrire $H = p + \rho\, g\, z$. Le potentiel ψ_g est donné par $\psi_g = \rho\, g\, z$ et le potentiel ψ_p par $\psi_p = p_g$. Il n'est tenu compte de ce dernier potentiel que lorsque la pression extérieure des gaz p_g diffère de la pression atmosphérique.

5. Cette eau adsorbée ne participe pas à l'écoulement de la phase liquide et son extraction du sol requiert une énergie bien plus importante que pour l'eau libre (en particulier, des températures supérieures à 100°C seront nécessaires pour évacuer cette eau).

sols aussi bien saturés que non-saturés (son origine étant issue de la présence de gradients de concentration en particules dissoutes).

La succion totale d'un sol est définie comme la somme d'une succion matricielle et d'une succion osmotique, ces succions étant égales à l'opposé des potentiels correspondants, si bien que l'on a :

$$-\psi_t = s - \psi_o \tag{2.6}$$

avec $-\psi_t$ la succion totale, $s = -\psi_m$ la succion matricielle et $-\psi_o$ la succion osmotique. Compte-tenu des définitions du potentiel de l'eau, la succion totale représente une mesure de l'énergie libre de l'eau du sol.

Dans le cas de milieux granulaires, en supposant que les contributions osmotiques et d'adsorption sont négligeables devant les phénomènes capillaires, la succion totale se réduit donc à la succion matricielle s et l'on a $s = p_g - p_l$. De plus, lorsque la pression du gaz $p_g = 0$, la pression capillaire vaut $-p_l > 0$ et il y est fait référence en tant que pression d'eau négative.

2.1.2.2 Rôle des différentes composantes de la succion

L'écoulement de l'eau dans le matériau est régi par le potentiel total. De la même façon, la succion totale intervient dans le comportement mécanique des sols. Cependant, chaque composante de la succion possède une influence différente.

Il est généralement accepté que, dans le cas des sols non-saturés, le comportement mécanique est majoritairement affecté par la succion matricielle. [6]

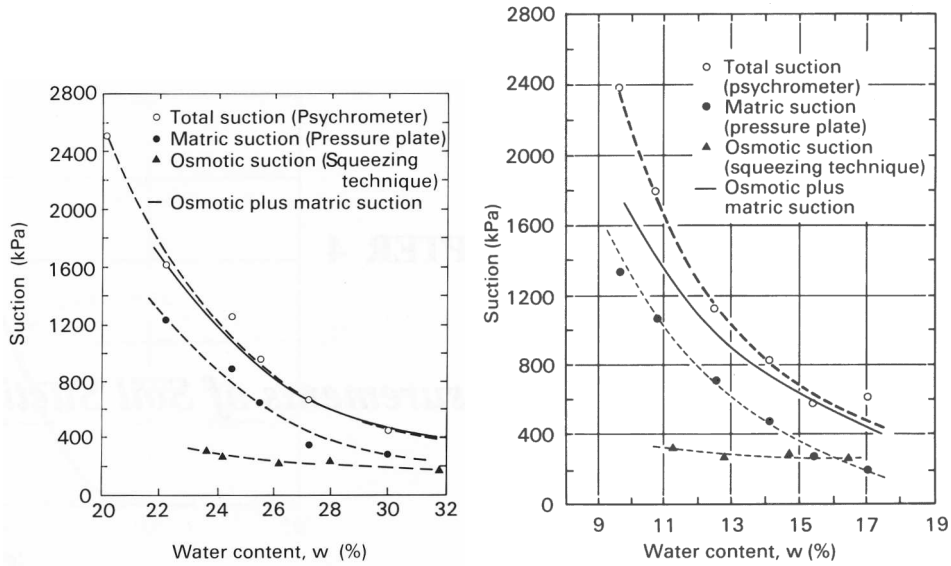
Dans les applications courantes de la géotechnique, le rôle de la composante osmotique est donc peu significatif en comparaison de la contribution matricielle (voir, par exemple, [Delage, 1987] ou [Fleureau et al., 1993]). L'influence de la composante osmotique sur le comportement mécanique concerne plutôt des sols chimiquement réactifs (argiles gonflantes pures ou mélanges à forte teneur en ces argiles) à l'état saturé. En effet, dès lors que le sol est désaturé et que la phase gazeuse devient continue, les écoulements d'eau seront très faibles.

La Figure 2.3 donne l'évolution de la succion totale ainsi que de ses composantes matricielle et osmotique en fonction de la teneur en eau volumique pour deux sols différents (argile de Regina compactée et till glaciaire). Le principal enseignement de cette figure concerne l'importance relative des variations de la succion totale et de ses composantes matricielle et osmotique. On peut ainsi observer que les variations de la succion totale et de la succion matricielle sont similaires, c'est-à-dire que $-\Delta\psi_t \approx \Delta\left(p_g - p_l\right)$.

Notons toutefois que les phénomènes osmotiques peuvent avoir, dans certains cas, une influence significative sur le comportement mécanique. Dans [Fredlund et Rahardjo, 1993], les auteurs indiquent qu'une modification de la concentration en sels dissous dans le fluide interstitiel pourra entraîner des changements de volume ainsi que de la résistance au cisaillement du matériau. En cas de contamination chimique, il sera donc nécessaire de tenir compte de la composante osmotique de la succion et cela, pour des sols saturés et non-saturés.

Dans [Mitchell, 1976], l'auteur indique la possibilité d'une consolidation d'un sol sous l'effet de phénomènes chimico-osmotiques dans le cas de sols fins actifs (comme la montmorillonite) à fortes teneurs en eau.

6. Ajoutons que, dans les applications courantes de l'ingénieur, les évolutions de la succion totale sont souvent le résultat de changements environnementaux (épisodes de forte pluviométrie, évolution du niveau piézométrique...). Ceux-ci affectent principalement la succion matricielle, la succion osmotique n'évoluant alors que de façon moins significative.



(a) Argile de Regina compactée (b) Till glaciaire

FIGURE 2.3 – Évolution de la succion totale et de ses composantes matricielle et osmotique en fonction de la teneur en eau volumique (mesures effectuées sur deux sols différents) [Fredlund et Rahardjo, 1993].

Des données expérimentales concernant l'étude de l'influence de la composition du fluide interstitiel sur le comportement de sols saturés (des argiles) sont fournies dans [Di Maio, 2003a], [Di Maio, 2003b] et [Di Maio, 2003c]. A titre d'exemple, la Figure 2.4 donne les variations de hauteur d'un échantillon d'argile de Milazzo soumis à des bains successifs dans différentes solutions salines ou d'eau distillée lors d'un essai sous conditions œdométriques à contrainte verticale constante. Le lecteur intéressé pourra également trouver dans [Loret et al., 2002] une modélisation élastoplastique des couplages chimico-mécaniques dans des argiles saturées.

2.2 Comportement sous sollicitations hydriques

Dans un premier temps, les caractéristiques du comportement des sols non-saturés sous sollicitations purement hydriques (chargement en succion à contrainte totale nulle) sont présentées.

Les sols, en général, et les ouvrages en terre, en particulier, peuvent être régulièrement soumis à ce type de sollicitations en raison, par exemple, d'événements climatiques (fortes pluies, évolution du niveau piézométrique...) ou liés à l'exploitation de l'ouvrage (variations du niveau de remplissage d'un barrage...).

De plus, le rôle joué par la succion sur la rhéologie des matériaux non-saturés requiert une connaissance précise de l'influence de cette variable sur les propriétés mécaniques mais aussi de rétention d'eau de ces matériaux. Ces aspects sont généralement illustrés par des essais de drainage-imbibition des sols à contrainte totale constante. Ces essais fournissent en particulier la courbe de rétention en eau du matériau ainsi que les déformations volumiques induites par le cycle de chargement.

La Figure 2.5 présente les synthèses du comportement d'une argile blanche et du limon de Jossigny sur un chemin de drainage-imbibition. [7] La représentation proposée ici, issue des tra-

7. Sur cette figure, la notation pF représente une mesure logarithmique de la succion exprimée en cm d'eau (*i.e.* $pF = \log(-p_l)$) ; cette notion est souvent rencontrée en pédologie où le domaine de variation de la succion

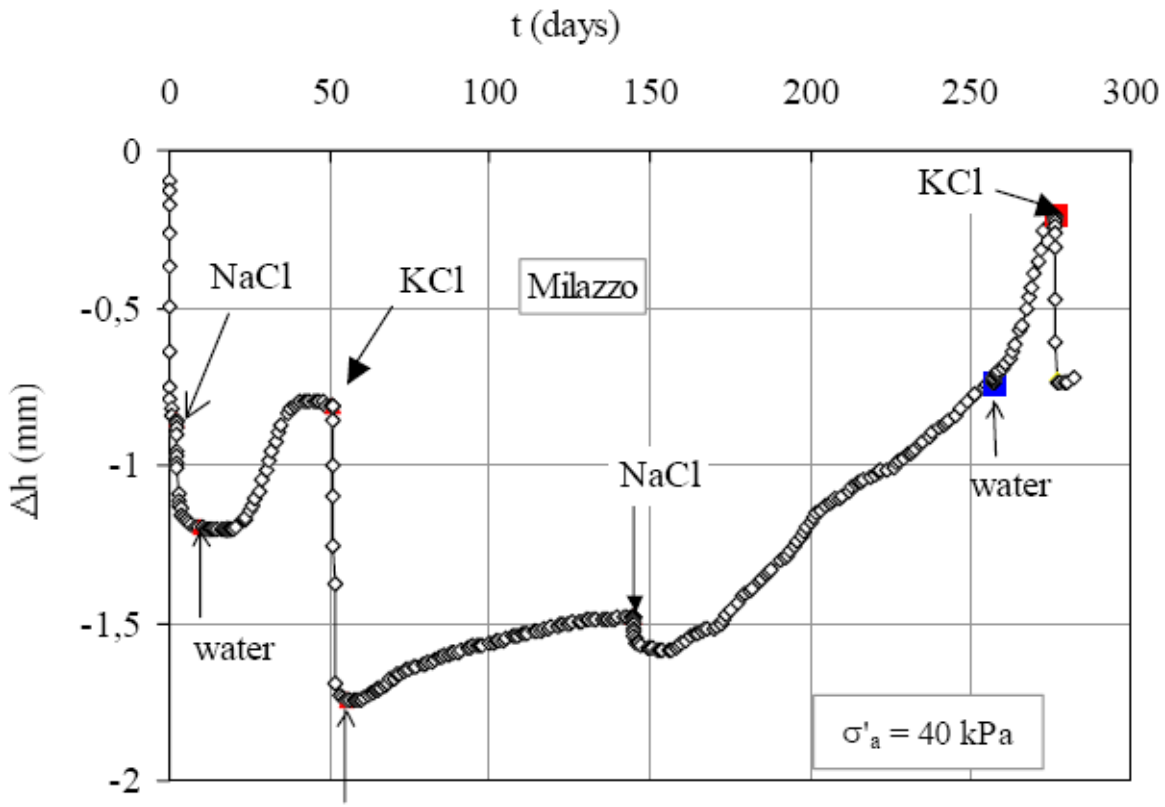


FIGURE 2.4 – Consolidation de l'argile de Milazzo induite par exposition à des solutions de NaCl et KCl saturées et gonflement induit par exposition à de l'eau distillée et une solution de NaCl après l'interaction avec KCl (d'après [Di Maio, 2003a]).

vaux de [Biarez et al., 1987], est particulièrement intéressante puisqu'elle donne une description complète de la courbe de rétention d'eau et des variations de volume du matériau induites par le chargement.

Cette figure illustre quelques observations typiques des courbes de rétention en eau des sols (dans le plan (s, S_l) ou (s, w), avec w la teneur en eau du milieu) : désaturation à partir d'une succion strictement positive en général (appelée succion d'entrée d'air), existence d'un cycle d'hystérésis (la courbe en drainage étant située au dessus de la courbe d'imbibition).

Cette hystérésis est caractéristique d'un réseau poreux constitué de pores de tailles variables interconnectés. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait qu'en drainage, ce sont les pores de dimension caractéristique la plus grande qui sont vidés en premier alors qu'en imbibition, au contraire, les pores les plus petits se remplissent d'abord (selon la loi de Jurin, Eq. (2.2)). Cela se traduit par des degrés de saturation plus élevés en drainage qu'en imbibition pour un même niveau de succion (et donc par le classement relatif observé des courbes de drainage et d'imbibition). Compte-tenu de ces remarques, il est clair cette hystérésis (sa forme, son importance...) dépendra du matériau considéré (en particulier, de la distribution de la taille de ses pores) ; la comparaison entre les représentations (D) de la Figure 2.5(a) et (d) de la Figure 2.5(b) permet de l'illustrer.

Il est également observé que les cycles réalisés après un premier cycle drainage-imbibition sont situés à l'intérieur de la boucle d'hystérésis formée par le premier chargement.

La courbe de rétention d'eau [8] peut présenter une saturation résiduelle pour de fortes valeurs de la succion. Celle-ci est liée à la nécessité d'apporter une quantité de plus en plus importante d'énergie pour extraire l'eau, au fur et à mesure que les ménisques se réduisent aux points de contact intergranulaires (ou que l'eau présente dans un sol argileux se réduit à l'eau liée autour des particules argileuses). Parallèlement, on peut observer que le degré de saturation n'atteint pas nécessairement l'unité lorsque la succion redevient nulle après un cycle de drainage-imbibition.

La forme de la courbe de sorption dépend du sol considéré et, pour un sol donné, elle dépend de sa compacité : un degré de saturation donné sera obtenu pour des succions plus importantes lorsque le sol est plus dense. Un sol préconsolidé présentera ainsi, dans le plan (s, S_l), une courbe de rétention d'eau au dessus de celle d'un sol non consolidé [Rahardjo et Fredlund, 2003]. La courbe de sorption n'est donc pas une donnée intrinsèque du matériau. La Figure 2.6 présente des courbes de rétention pour différents types de sols. Le lecteur intéressé pourra observer d'autres exemples de courbes de sorption dans [Van Damme, 2002].

Il est noter que la courbe de rétention est essentielle pour caractériser le comportement hydromécanique d'un sol et qu'elle est fortement dépendante du sol considéré (la Figure 2.6 présente des courbes de rétention pour différents types de sols). Faute de données expérimentales ou dans un soucis de simplification en première approche, on utilise souvent des modèles analytiques de ces courbes dans la modélisation. On citera par exemple, le modèle de Brooks et Corey (1964) (s_e représente la succion d'entrée d'air et α est un paramètre) :

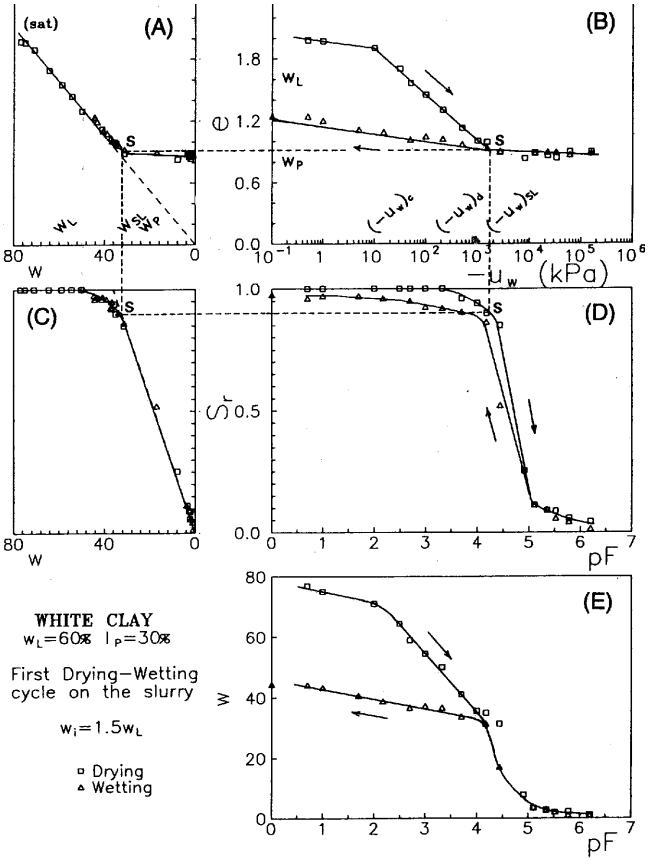
$$S_l(s) = \left(\frac{s_e}{s}\right)^{1/\alpha} \tag{2.7}$$

et le modèle de van Genuchten (1980) (β, m et n sont des paramètres) :

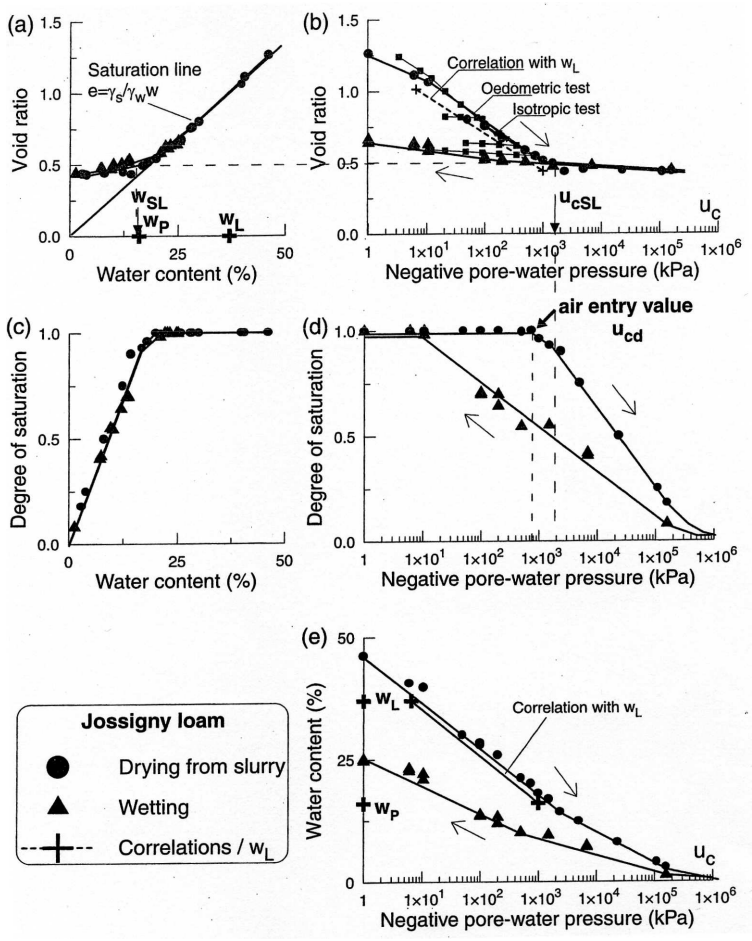
$$S_l(s) = \left(\frac{1}{1 + (\beta\, s)^n}\right)^m \tag{2.8}$$

est généralement très étendu.

8. La courbe de sorption est également appelée courbe de drainage-imbibition ou courbe de rétention d'eau ou encore courbe caractéristique de l'eau (ou d'humidité) du sol (soil water characteristic curve, en anglais).

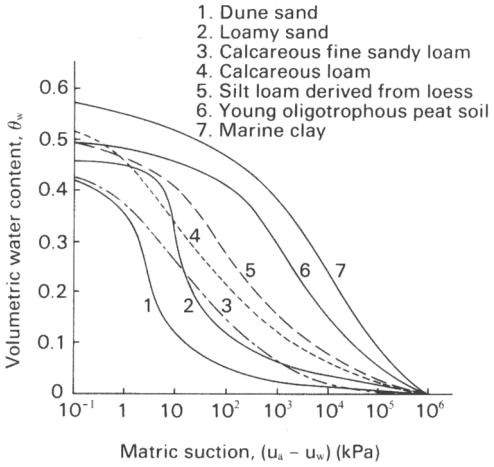


(a) Argile blanche, d'après [Fleureau et al., 1993]

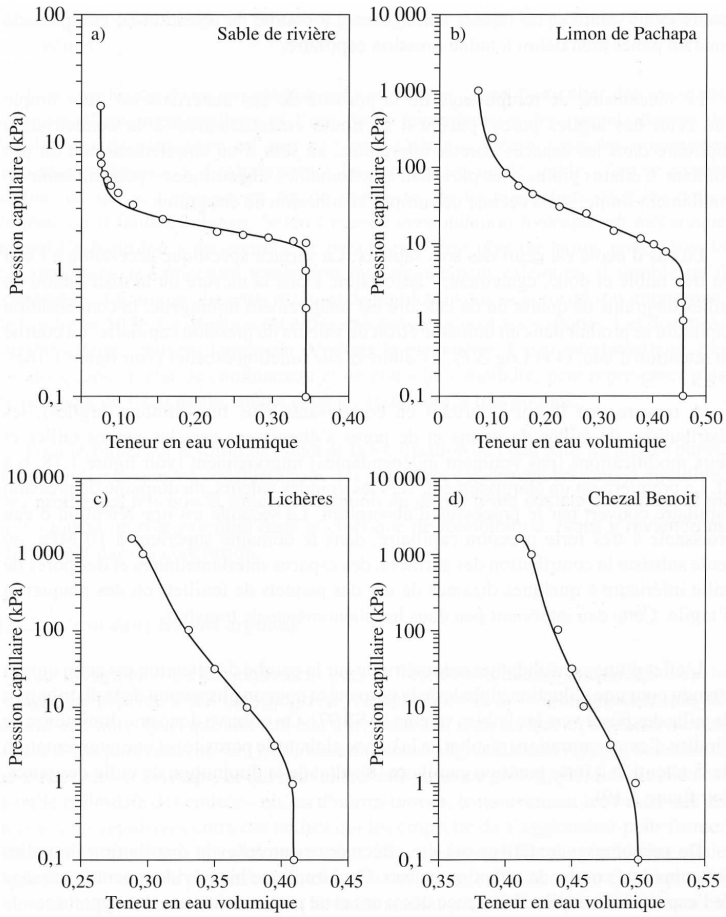


(b) Limon de Jossigny, d'après [Fleureau et al., 2002]

FIGURE 2.5 – Synthèses du comportement de deux matériaux sur un chemin de drainage-imbibition.



(a) d'après [Fredlund et Rahardjo, 1993] (teneur en eau volumique en fonction de la succion matricielle)



(b) d'après [Van Damme, 2002] (succion matricielle en fonction de la teneur en eau volumique)

FIGURE 2.6 – Courbes de rétention d'eau pour différents types de sols.

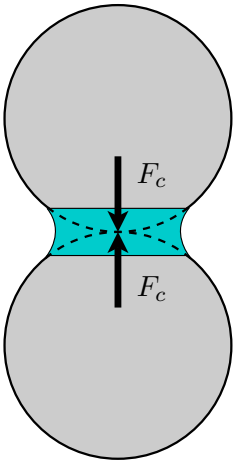


FIGURE 2.7 – Forces capillaires induites par les ménisques capillaires aux points de contacts intergranulaires.

Concernant les déformations volumiques, une contraction est observée lorsque la succion augmente. En phase de drainage, la compressibilité du matériau est relativement forte tant que le sol reste saturé. Des déformations irréversibles peuvent apparaître. Au-delà, les variations de volumes sont moins significatives et réversibles. Cette observation permet de souligner l'équivalence entre la succion d'entrée d'air et la limite de retrait. [9] Pour certains sols, il existe cependant un écart entre la succion d'entrée d'air et la limite de retrait (la première des deux étant la plus faible). C'est le cas, par exemple, du limon de Jossigny ou de l'argile blanche pour laquelle la limite de retrait correspond à un degré de saturation de 90% (cf. Fig. 2.5).

Au-delà de la limite de retrait, les ménisques capillaires sont situés au niveau des contacts intergranulaires (la phase liquide n'est plus continue et son écoulement quasi inexistant) et sont le siège de succions pouvant être très fortes. Ils induisent des efforts intergranulaires perpendiculaires au plan de contact (cf. Fig. 2.7) et limitent ainsi les possibilités de réarrangement des grains. [10] Cela se traduit par une rigidification du matériau et l'inhibition des déformations volumiques du squelette.

Parallèlement, sur le chemin d'humidification, un gonflement (modéré) de l'échantillon apparaît. Notons que l'effet d'hystérésis se retrouve dans les courbes $(-p_l,\, e)$.

Un point important est à noter en ce qui concerne la validité de la contrainte effective de Terzaghi dans le domaine saturé (ou quasi-saturé) à pression d'eau négative ($s > 0$ et $S_l \approx 1$) délimité par la limite de retrait. Il est généralement accepté que le comportement des sols reste gouverné par cette contrainte effective dans ce domaine particulier. Dans [Fleureau et al., 1993], les auteurs soulignent cette équivalence en montrant la proximité des chemins de drainage et de compression œdométrique et isotrope dans le cas d'une argile jaune et une montmorillonite pour des échantillons normalement consolidés (cf. Fig. 2.8). La même comparaison peut être faite entre les chemins d'humidification et de décompression isotrope (surconsolidé) dans le domaine

9. La limite de retrait caractérise la fin des déformations volumiques significatives lors d'un essai de drainage (marquée par la discontinuité de la pente dans le plan $(w,\, e)$ au point de séparation entre la réponse du matériau et la courbe correspondant à la saturation du volume poreux).
La détermination de la limite de retrait peut être réalisée à partir de données expérimentales dans le plan $(w,\, e)$ ou $(s,\, e)$ et la succion d'entrée d'air sera obtenue à partir de données dans le plan $(s,\, S_l)$.

10. La géométrie simplifiée considérée sur la Figure 2.7 permet de donner une valeur de la force capillaire due au ménisque. Celle-ci est égale au produit de la pression capillaire calculée à l'Éq. (2.3) par la section occupée par le ménisque dans le plan tangent.

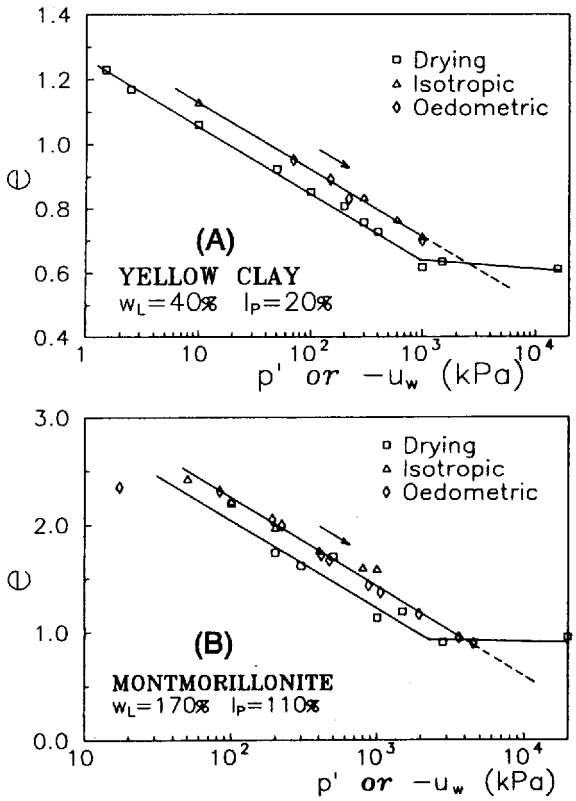


FIGURE 2.8 – Comparaison entre des chemins de drainage et de compression isotrope ou œdométrique sur une argile jaune et une montmorillonite normalement consolidées.

saturé.

Comme cela a déjà été dit, la limite de retrait et la succion d'entrée d'air peuvent différer pour certains sols. C'est pourtant bien la limite de retrait qui délimite le domaine de validité de la contrainte effective de Terzaghi [Fleureau et al., 2002].

2.3 Comportement mécanique des sols non-saturés

Après avoir présenté les principales caractéristiques du comportement des sols non-saturés sur des chemins de drainage-imbibition (en l'absence de sollicitations mécaniques), l'accent est maintenant porté sur leur comportement mécanique sous sollicitations mécaniques et en succion.

2.3.1 Comportement volumique

La Figure 2.9 présente la surface d'état proposée par Matyas et Radhakrishna (1968). Elle présente de façon synthétique les déformations volumiques typiques des sols non-saturés sur des chemins de sollicitation en contrainte nette et/ou en pression capillaire. Notons que l'existence de cette surface d'état repose sur le fait que les chemins de sollicitation doivent être monotones [Verbrugge et Fleureau, 2002].

Des essais de compression (isotrope ou œdométrique) à succion constante montrent que le sol présente un comportement plus rigide lorsque la succion augmente ; cette rigidification concerne les composantes élastiques et plastiques du comportement. L'accroissement de la succion induit en outre une augmentation du domaine d'élasticité. A titre d'exemple, ces caractéristiques sont illustrées sur la Figure 2.10. Ces résultats montrent que les paramètres de compressibilité usuels

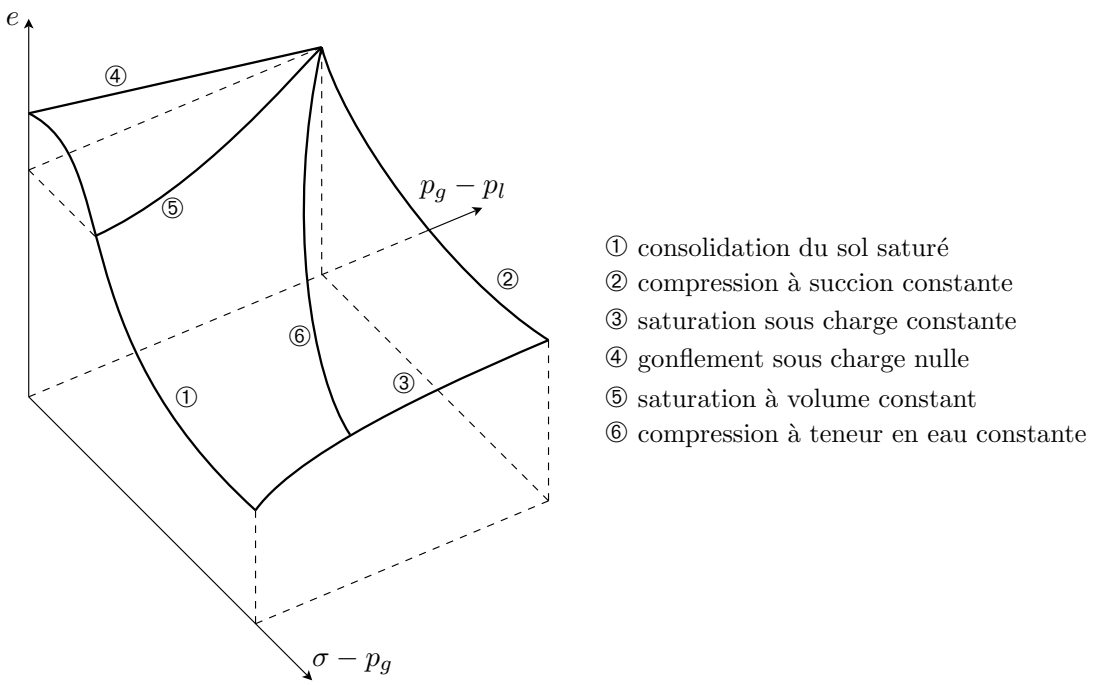


FIGURE 2.9 – Surface d'état de Matyas et Radhakrishna (1968).

λ et κ (qui correspondent aux pentes des parties plastique et élastique des courbes $(\ln(p), e)$) varient en fonction de la succion. En effet, ces deux paramètres diminuent lorsque la succion augmente, cette tendance étant plus marquée pour la composante plastique λ. Il est à noter que la décroissance de la composante élastique κ est limitée et n'est d'ailleurs pas prise en compte par de nombreux auteurs.

Une des caractéristiques essentielles du comportement des sols partiellement saturés concerne le phénomène d'effondrement.

Un matériau non-saturé, soumis à de faibles contraintes, présentera un gonflement (limité) au cours d'une humidification (ce phénomène correspond à ce qui a déjà été indiqué dans la section précédente).

Cependant, lorsque la contrainte à laquelle il est soumis augmente, une humidification peut

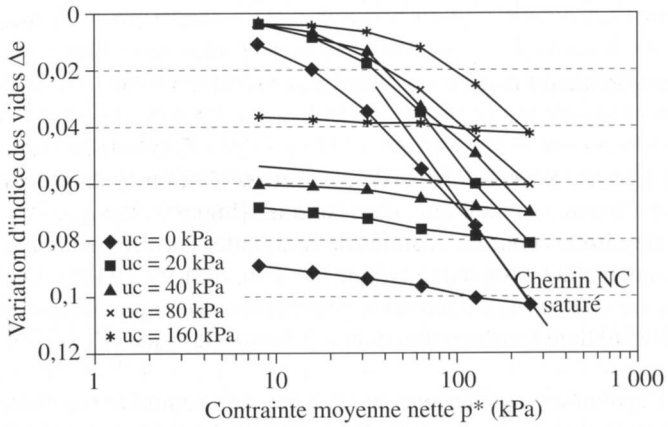


FIGURE 2.10 – Essais œdométriques à pression capillaire constante sur le limon de Sterrebeek remanié [Verbrugge et Fleureau, 2002].

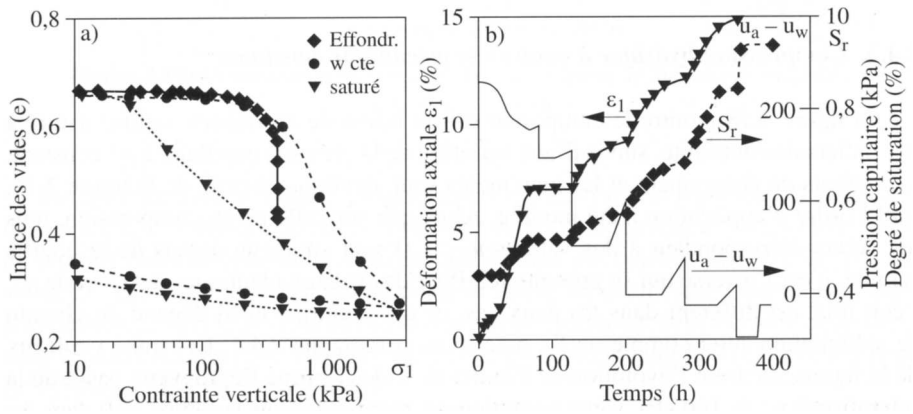


FIGURE 2.11 – Essai d'effondrement en conditions œdométriques sur un silt peu plastique (Maswowe, 1985 cité par [Verbrugge et Fleureau, 2002]).

au contraire se traduire par de larges déformations volumiques de contraction, celles-ci étant irréversibles. Ce phénomène est appelé effondrement et est à l'origine, entre autres, de la remise en cause de la contrainte effective de Terzaghi pour les sols non-saturés.

La Figure 2.11 présente les résultats d'un essai d'effondrement en conditions œdométriques sur un silt peu plastique réalisé par Maswowe (1985) (cité par [Verbrugge et Fleureau, 2002]).

2.3.2 Résistance au cisaillement

Le comportement à la rupture des sols non-saturés ne fait pas apparaître de règle générale pour ce qui est, en particulier, des variations de l'angle de frottement avec l'augmentation de la succion.

On assiste à une augmentation de cet angle pour des sols plutôt plastiques et denses. A l'inverse, des sols peu plastiques et lâches montreront une diminution de l'angle de frottement.

Dans [Cui, 1993], des essais triaxiaux à succion constante sur le limon de Jossigny compacté tendent à montrer la linéarité des critères de résistance maximale dans le plan (p, q) pour chaque valeur de la succion. En outre, ces critères peuvent être considérés comme parallèles au critère du sol saturé. Ces observations laissent à penser que l'angle de frottement est indépendant de la succion et que celle-ci confère au sol une cohésion apparente.

Les résultats expérimentaux montrent également que cette cohésion apparente est une fonction non-linéaire de la succion et qu'elle tend vers une valeur asymptotique pour de fortes valeurs de la succion. Cette non-linéarité, accompagnée d'une valeur maximale de la cohésion, semble plus cohérente que les hypothèses de linéarité parfois rencontrées dans la littérature.

Les Figures 2.12 et 2.13 (tirées de [Fredlund et Rahardjo, 1993]) montrent l'évolution de l'enveloppe de rupture en fonction de la succion matricielle pour des essais triaxiaux à succion constante et pour des essais de cisaillement direct. [11] La première tend à montrer que la résistance à la rupture évolue linéairement mais il convient de remarquer que le domaine de succion étudié est limité.

Des essais de cisaillement triaxial à succion constante (voir, par exemple, la Figure 2.14 tirée de [Cui et Delage, 1996]) montrent que le comportement avant rupture est caractérisé, lorsque la succion appliquée augmente, par :

11. L'angle ϕ'_b caractérise l'augmentation de la résistance à la rupture due à la succion ; il est représenté sur la Figure 2.12(b).

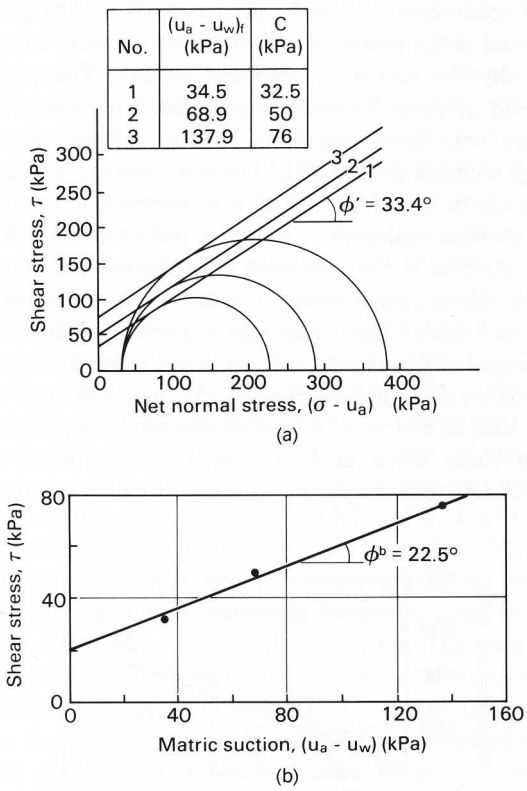


FIGURE 2.12 – Essais triaxiaux à succion contrôlée sur un granite décomposé : (a) enveloppe de rupture dans le plan contrainte nette $\sigma - p_g$, contrainte de cisaillement τ et (b) évolution de la résistance à la rupture à contrainte nette nulle selon la succion [Fredlund et Rahardjo, 1993].

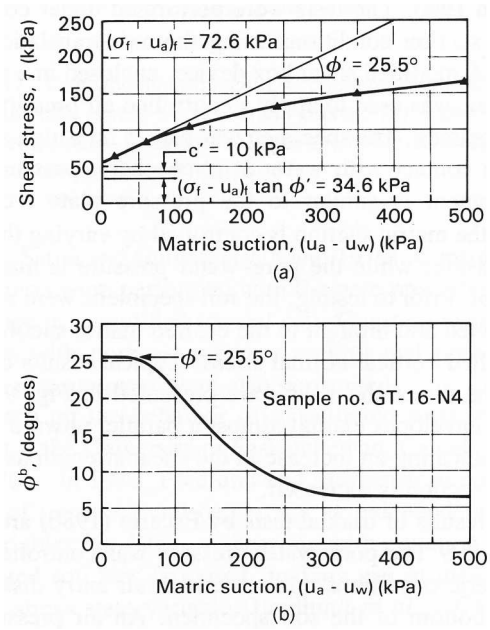


FIGURE 2.13 – Essais de cisaillement direct : (a) évolution de la résistance à la rupture en fonction de la succion matricielle et (b) évolution de l'angle ϕ'_b en fonction de la succion [Fredlund et Rahardjo, 1993].

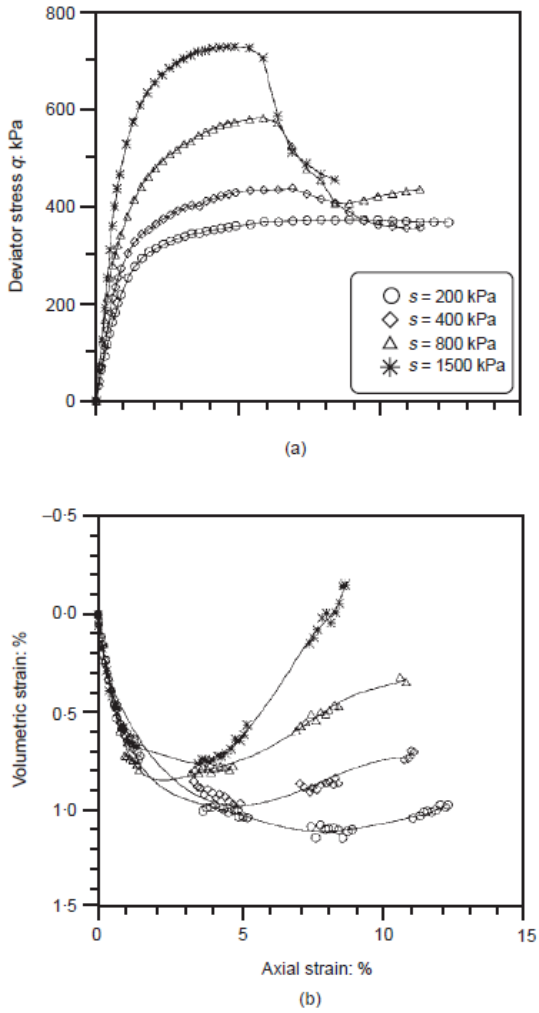


FIGURE 2.14 – Essais de cisaillement triaxial à succion constante sur le limon de Jossigny [Cui et Delage, 1996].

— une augmentation du module initial marquant un raidissement du matériau ;
— de plus faibles contractions caractérisant une tendance vers un comportement plus dilatant (la succion et la contrainte de confinement ont à ce titre des influences opposées) ;
— une augmentation de la résistance à la rupture (la succion et la contrainte de confinement ont dans ce cas des influences similaires) ;
— et une amplification du pic du déviateur traduisant une augmentation de la fragilité.

Certaines observations rapportent que le module de cisaillement augmente avec la succion puis qu'il se stabilise (voire qu'il diminue).

Une interprétation de cette dernière observation (ainsi d'ailleurs que celle concernant l'augmentation non-linéaire et limitée de la cohésion apparente d'un sol partiellement saturé) peut être proposée sur la base de l'évolution des efforts capillaires aux points de contacts intergranulaires. Lorsque la succion augmente à partir de l'état saturé, les efforts normaux intergranulaires augmentent au fur et à mesure que les ménisques se réduisent autour des points de contact. Cela augmente la capacité du squelette granulaire à soutenir des efforts de cisaillement (et d'extension). Lorsque la succion continue d'augmenter, la surface des ménisques en contact avec les grains se trouve de plus en plus réduite, limitant par là-même les efforts capillaires transmis à la structure solide. Cela explique la stabilisation et la diminution du module de cisaillement (ainsi que la stabilisation de la cohésion apparente). La condition limite est représentée par une succion très grande et un degré de saturation quasiment nul. On devrait alors retrouver, à la limite, le module de cisaillement et la cohésion du sol saturé. [12]

L'augmentation de la fragilité avec la succion appliquée peut être expliquée par l'augmentation des efforts intergranulaires : le comportement du sol tend vers celui d'un sol dont les contacts entre grains sont cimentés.

2.4 Synthèse

Après une brève revue des résultats expérimentaux fournis dans la littérature concernant le comportement des sols partiellement saturés, une synthèse des principaux aspects à prendre en compte dans un modèle de comportement est maintenant réalisée :

— présence d'un domaine saturé à succion positive dans lequel la contrainte effective de Terzaghi conserve sa validité. Ce domaine dépend de la nature du sol ainsi que de la compacité et est délimité par la limite de retrait (parfois distincte de la succion d'entrée d'air) ;
— en cours de drainage, un retrait volumique est observé. Des déformations irréversibles peuvent apparaître dans le domaine saturé ; elles sont réversibles ensuite ;
— en cours d'imbibition, à contrainte de confinement faible, un gonflement réversible est observé ; si la contrainte de confinement est plus importante, un effondrement irréversible pourra apparaître ;
— le domaine d'élasticité est augmenté avec la succion (préconsolidation due à la succion) et s'accompagne d'une rigidification du sol ;
— la résistance à la rupture augmente (non linéairement) avec la succion ;
— la fragilité du matériau ainsi que la tendance à la dilatance augmentent avec la succion.

12. Dans certains cas, lorsque des sels sont dissous dans l'eau interstitielle, les contacts intergranulaires peuvent être cimentés par des dépôts de sel après le départ de l'eau, ce qui se traduit par une résistance au cisaillement et une cohésion apparente différentes de celles d'un sol sec ou drainé en l'absence de sels dissous.

CHAPITRE 3

Modèles de comportement

Ce chapitre offre une synthèse des modèles de comportement des sols non-saturés rencontrés dans la littérature. Après une discussion sur le choix des variables d'état, les principales contributions selon différentes approches sont présentées.

Sommaire

3.1 Choix des variables d'état 70
3.1.1 Extension du concept de contrainte effective 70
3.1.2 Utilisation de plusieurs variables d'état 72
3.2 Approches classiques à deux variables 74
3.2.1 Le modèle BBM 74
3.2.2 L'approche de Wheeler et Sivakumar 77
3.2.3 Commentaires 78
3.3 Approches micro-macro 79
3.3.1 Le modèle de Kohgo 79
3.3.2 Le modèle de Abou-Bekr 81
3.4 Approches fondées sur la définition de Bishop 82
3.4.1 Commentaires 82
3.4.2 Modèle de Loret et Khalili 82
3.5 Approche thermodynamique 84
3.6 Conclusions 86

Ce chapitre présente une synthèse de quelques approches importantes proposées dans la modélisation du comportement des sols non saturés. L'intérêt se porte ici plus particulièrement sur le cadre de travail choisi : hypothèses retenues, variables d'état, modèle élastoplastique de référence...

Avant d'aborder la description d'une sélection de contributions majeures à la modélisation élastoplastique du comportement des sols non-saturés, une discussion sur l'historique du choix des variables d'état de contrainte est donnée en guise d'introduction.

3.1 Choix des variables d'état

3.1.1 Extension du concept de contrainte effective

La principale difficulté rencontrée dans la modélisation du comportement des sols partiellement saturés réside dans le fait que le concept de contrainte effective introduit par Terzaghi [Terzaghi, 1943] n'est plus valable pour ces sols particuliers. [1] La contrainte effective $\boldsymbol{\sigma}'$ de Terzaghi est donnée par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_l \mathbf{1} \tag{3.1}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ et p_l représentent respectivement la contrainte totale et la pression interstitielle de la phase liquide saturant le sol.

Cette contrainte est qualifiée d'effective puisqu'elle permet de rendre compte des déformations dues à des variations de la contrainte totale et/ou de la pression interstitielle : « *All the measurable effects of a change of stress, such as compression, distortion and a change in the shearing resistance are exclusively due to changes in the effective stress* » (Terzaghi, 1936) cité par [Bishop et Blight, 1963]. Par définition, c'est également cette contrainte qui intervient dans les critères de plasticité des modèles élastoplastiques pour les sols saturés.

Les premières propositions de modèles de comportement des sols non-saturés ont naturellement tenté d'étendre ce concept de contrainte effective. Ce concept est classiquement utilisé en mécanique des sols et l'objectif de son extension était de permettre la réutilisation sans autre modification des modèles existants de la mécanique des sols saturés.

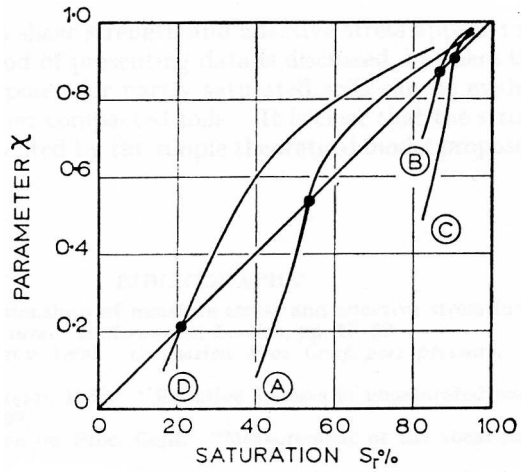
Ce genre d'approche permettrait également d'introduire naturellement une continuité dans la description du comportement à la transition entre conditions de saturation totale et partielle. La gestion de cette transition constitue d'ailleurs, encore aujourd'hui, un enjeu important dans la modélisation du comportement des sols partiellement saturés.

Plusieurs tentatives d'extension de la contrainte effective ont été proposées. La plus célèbre (et celle qui a été retenue par de nombreux auteurs) provient de Bishop [Bishop, 1959]. Une contrainte effective tenant compte de la contribution de la pression capillaire est introduite de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_g \mathbf{1} + \chi \left(p_g - p_l\right) \mathbf{1} \tag{3.2}$$

La fonction χ varie entre 0, dans le cas d'un sol sec, et 1, dans le cas d'un sol saturé. Dans ces deux cas limites, la définition (3.2) se simplifie et permet de retrouver l'expression (3.1) de la contrainte effective de Terzaghi.

1. Comme cela a été vu au Chapitre 2, il est expérimentalement observé que la contrainte effective de Terzaghi reste valable dans un domaine restreint où la succion est positive et le sol saturé ou quasi-saturé. Au-delà, le concept de contrainte effective seul ne suffit plus à décrire certains aspects fondamentaux du comportement des sols non-saturés.



A : Talybont clay
B : Selset clay
C : Mangla shale
D : Vaich moraine

FIGURE 3.1 – Variations du paramètre χ en fonction du degré de saturation en phase liquide pour différents matériaux [Bishop et Blight, 1963].

Il est à noter que la relation (3.2) fait clairement apparaître la contrainte nette $\boldsymbol{\sigma} - p_g\mathbf{1}$, contrainte sur laquelle nous reviendrons par la suite.
L'Équation (3.2) peut être récrite selon :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - (1-\chi)\,p_g\mathbf{1} - \chi\,p_l\mathbf{1} \tag{3.3}$$

montrant ainsi que la fonction χ permet de pondérer les contributions à la contrainte effective des pressions de gaz p_g et de liquide p_l. Le terme $(1-\chi)\,p_g + \chi\,p_l$ peut être considéré, par analogie avec l'expression de la contrainte effective de Terzaghi (Eq. 3.1), comme une pression interstitielle équivalente.

Le point clé dans la proposition de Bishop réside dans l'identification de cette fonction χ. Elle dépend *a priori* principalement de l'état de saturation mais également de la structure du sol et de l'histoire du chargement ayant conduit à l'état de saturation actuel [Bishop et Blight, 1963].

Dans [Bishop et Blight, 1963], les auteurs ont fourni des données expérimentales provenant d'essais triaxiaux réalisés sur différents types de sols. Les variations de χ en fonction du degré de saturation ont été calculées en supposant la validité de l'expression (3.2). La Figure 3.1, tirée de [Bishop et Blight, 1963], présente ce type d'évolutions de χ.

Ces travaux suggèrent la validité de la contrainte effective de Bishop en ce qui concerne la résistance au cisaillement. De plus, la relative proximité entre les valeurs $\chi(S_l)$ calculées et la droite $\chi = S_l$ laisse à penser que l'identification directe du paramètre χ au degré de saturation est acceptable. Dans un souci de simplicité, cette identification a d'ailleurs été réalisée par de nombreux auteurs.

Cette identification de χ à S_l amène plusieurs remarques remettant en cause le bien fondé de ce choix. En premier lieu, elle combine dans une même mesure de contrainte deux variables thermodynamiquement associées (voir [Coussy et Dangla, 2002] ou [Houlsby, 1997], par exemple).

Ensuite, le degré de saturation en liquide représente une caractéristique volumique alors que les effets de la succion sur les efforts intergranulaires sont liés à la surface de contact solide – liquide.

Finalement, pour les fortes succions, où le degré de saturation en liquide est sensiblement constant, il y aurait proportionnalité entre la résistance au cisaillement et la succion ce qui n'est pas vérifié expérimentalement [Loret et Khalili, 2000].

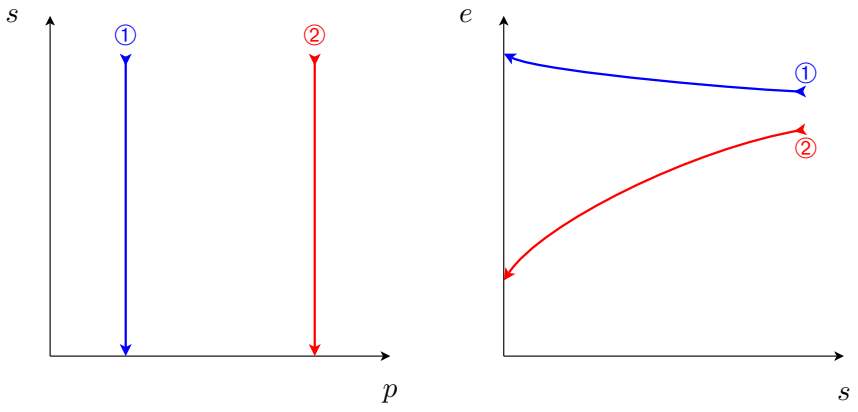


FIGURE 3.2 – Illustration du phénomène d'effondrement : l'imbibition d'un échantillon sous contrainte totale constante produit un gonflement (réversible) si cette dernière est faible (cas ①) ou un effondrement (irréversible) si elle est élevée (cas ②).

Il s'avère par ailleurs que l'approche de Bishop, bien que pertinente à certains égards (pour ce qui est de la résistance au cisaillement par exemple), ne permet cependant pas de décrire certains aspects fondamentaux du comportement des sols non-saturés (notamment leur comportement volumique).

En particulier, les modèles de comportement élastoplastiques classiques utilisant une contrainte effective unique (au sens strict) ne peuvent pas retranscrire le phénomène de gonflement ou d'effondrement d'un sol non saturé lors d'un essai d'imbibition à contrainte totale constante selon que celle-ci est faible ou élevée. La Figure 3.2 illustre ce phénomène remettant en cause l'utilisation d'une contrainte effective comme variable unique pour décrire l'état de contrainte d'un sol non-saturé.

La retranscription de ce type de comportement requiert que le modèle de comportement soit défini dans un autre cadre de travail en ce qui concerne, plus particulièrement, le choix des variables d'état de contrainte.

En effet, s'il était possible de décrire le comportement des sols non-saturés à l'aide d'une contrainte effective unique, alors un échantillon de sol partiellement saturé aurait le même comportement que son homologue saturé soumis à des variations de contrainte effective identiques, à condition que ces échantillons aient connu la même histoire de contrainte effective. Aucune définition de contrainte effective pour les sols non-saturés combinée à un modèle élastoplastique classique n'a pu satisfaire à cette requête [Wheeler et Karube, 1995].

Il est à noter que cette impossibilité de modéliser l'effondrement ne provient pas directement de la contrainte effective mais bien des considérations rhéologiques qui ont été adjointes à la définition d'une telle contrainte. Comme nous le verrons par la suite, la contrainte de Bishop peut être utilisée avec succès, à condition de faire également intervenir la succion dans le modèle élastoplastique utilisé.

3.1.2 Utilisation de plusieurs variables d'état

Devant l'inefficience des approches utilisant la seule contrainte effective comme variable d'état, les modélisations se sont orientées vers l'utilisation de deux variables indépendantes. Cette démarche a d'ailleurs été introduite par Bishop et Blight dans [Bishop et Blight, 1963].

Plusieurs contributions significatives, comme par exemple Fredlund et Morgenstern (1977) (cités par [Fredlund et Rahardjo, 1993]), ont montré que tout couple choisi parmi les trois quan-

tités suivantes constituait un ensemble pertinent de variables d'état : $\boldsymbol{\sigma} - p_l\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\sigma} - p_g\mathbf{1}$ et $s = p_g - p_l$.

Une grande partie des travaux s'inscrivant dans cette démarche utilise la contrainte nette $\boldsymbol{\sigma} - p_g\,\mathbf{1}$ et la succion s. Ce choix présente les avantages suivants :

1. il permet de découpler les effets de la contrainte totale de ceux de la succion ;
2. l'hypothèse d'une phase gazeuse continue dont la pression, uniforme, est en équilibre avec la pression atmosphérique [2] est souvent réalisée dans les applications courantes de l'ingénierie et conduit ainsi à une simplification supplémentaire (les variables d'état se réduisant au couple $(\boldsymbol{\sigma}, -p_l)$) ;
3. dans le cas où l'hypothèse $p_g = 0$ peut être faite, les incertitudes de mesures expérimentales de la pression du liquide ne se reportent que sur l'une des deux variables d'état, ce qui n'est pas le cas si l'on considère $\boldsymbol{\sigma} - p_l\mathbf{1}$ et s.

Dans [Laloui et al., 2001], les auteurs expliquent au contraire l'intérêt d'utiliser la « contrainte effective saturée » $\boldsymbol{\sigma} - p_l\mathbf{1}$ plutôt que la contrainte nette afin, entre autres, de simplifier la transition au passage de conditions de saturation totale à partielle.

Plus récemment, dans un cadre à deux variables d'état, l'utilisation d'une variable définie comme une combinaison de la contrainte totale et de la succion est apparue dans la littérature. Cette variable est généralement associée à la succion pour former le couple de variables décrivant l'état de contrainte du sol. Cette variable combinant contrainte et succion (comme le fait la contrainte de Bishop) est souvent qualifiée de « contrainte effective ».

Il est à noter que l'utilisation du terme de contrainte effective est impropre au sens strict. En effet, il ne s'agit pas, dans ce contexte, d'une variable unique pilotant les déformations du matériau soumis à des variations de contrainte (au sens large). Certains auteurs qualifient d'ailleurs cette contrainte de « contrainte constitutive » (voir [Sheng et al., 2003] par exemple). Dans [Li, 2003a], l'auteur utilise une approche microstructurale pour étudier l'applicabilité du concept de contrainte effective aux sols granulaires non-saturés et conclut que l'on peut bien parler d'une contrainte (appelée « quasi-effective ») pilotant les déformations et la rupture du sol. Cette contrainte est égale à la somme de la contrainte nette et d'un tenseur lié à la succion et à la structure du sol. Ce résultat laisse alors à penser que l'effet de la succion n'est pas isotrope mais tensoriel [Li, 2003b]. Nous ne détaillerons cependant pas ces travaux ici.

La dénomination de contrainte effective sera cependant conservée par la suite, en gardant à l'esprit qu'il ne s'agit pas à proprement parler d'une contrainte effective telle qu'elle a été introduite par Terzaghi.

Les approches utilisant une combinaison de la contrainte totale et de la succion présentent l'avantage, dans un cadre à deux variables d'état, d'offrir une certaine continuité dans la description du comportement : à saturation, la contrainte effective de Terzaghi est retrouvée. La définition d'une telle contrainte effective revêt cependant certaines conditions qui seront discutées au Chapitre 4.

Différentes approches vont maintenant être présentées de façon synthétique. L'objectif n'est pas de décrire en détail tous les aspects des modèles abordés ; il s'agit plutôt de fournir une synthèse permettant, au chapitre suivant, d'établir un modèle cadre pour la description du comportement des sols partiellement saturés. A ce titre, on s'intéressera plus particulièrement à la partie isotrope des modèles de comportement évoqués.

2. Sous cette hypothèse, on peut écrire que $p_g = 0$ si l'on prend la pression atmosphérique comme référence.

3.2 Approches classiques à deux variables

3.2.1 Le modèle BBM

Parmi les travaux utilisant deux variables d'état, le modèle de Barcelone (couramment appelé BBM pour Barcelona Basic Model) fait figure de référence [Alonso et al., 1990]. Dans ces travaux, les auteurs utilisent la contrainte nette et la succion comme variables d'état indépendantes et le modèle élastoplastique choisi comme référence à l'état saturé est le modèle Cam-Clay modifié (voir [Schofield et Wroth, 1968] pour le modèle original, qui a été modifié par Burland en 1965). Ils définissent deux surfaces de charge dans l'espace des contraintes (p, q, s) qui délimitent le domaine d'élasticité du sol. Ces surfaces permettent de modéliser l'apparition de déformations irréversibles lors d'un chargement hydrique et/ou mécanique pour l'une et purement hydrique pour l'autre.

La première surface de charge, notée LC (pour Loading Collapse), est définie dans le plan (p, s) et permet de modéliser le phénomène d'effondrement à l'aide des outils classiques de l'élastoplasticité. Pour tenir compte d'un état de contrainte triaxial, les auteurs considèrent une surface de charge elliptique s'appuyant sur la courbe LC et sur la limite élastique en extension dans tout plan (p, q) à succion constante. Cette limite en extension introduite par les auteurs permet de rendre compte de l'augmentation de la cohésion apparente avec la succion. Ils considèrent en outre que la pente M de la droite d'état critique (CSL) est indépendante de la succion, supposant par là-même que le seul effet de la succion sur la résistance à la rupture provient de l'accroissement de la cohésion apparente.

La deuxième surface de charge, notée SI (pour Suction Increase), introduit l'équivalent d'une contrainte de préconsolidation mais en terme de succion. Elle permet de limiter l'évolution élastique lors d'une augmentation de succion. Il est à noter que le phénomène dont cette surface de charge SI permet de rendre compte est différent de celui évoqué par d'autres auteurs évoquant l'apparition possible de déformations plastiques dans le domaine saturé à succion positive *i.e.* $\forall s \in [0,\ s_e]$ (en particulier, en conditions de consolidation normale).

Dans ces travaux, il n'est pas tenu compte d'une succion d'entrée d'air non nulle mais ce cas peut être incorporé au modèle très aisément.

Par la suite, un état triaxial est considéré : $p = (\sigma_1 + 2\,\sigma_3)/3 - p_g$ et $q = \sigma_1 - \sigma_3$ désignent respectivement la contrainte moyenne nette et le déviateur de contrainte.

3.2.1.1 Surfaces de charge

Les surfaces de charge du modèle BBM sont définies à partir des équations suivantes portant respectivement sur les fonctions f_1 et f_2 :

$$f_1(p,\ q,\ s,\ {p_0}^*) \equiv q^2 - M^2(p + p_s)(p_0 - p) = 0 \tag{3.4}$$

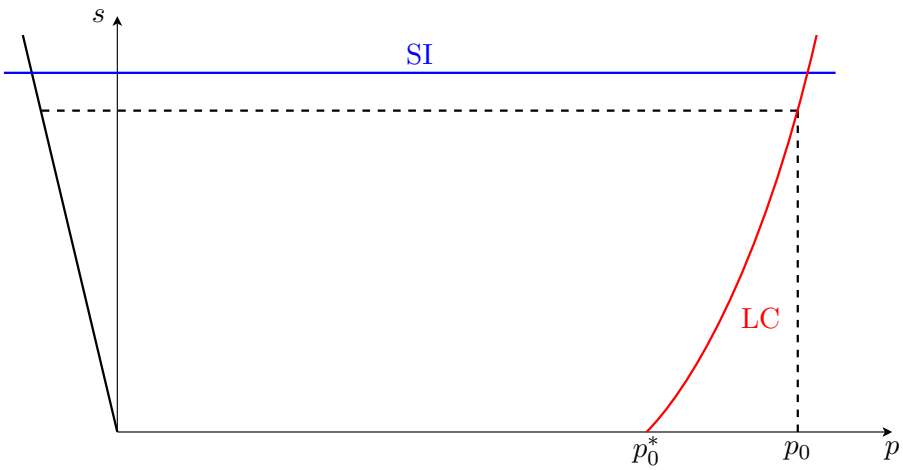
$$f_2(s, s_0) \equiv s - s_0 = 0 \tag{3.5}$$

où

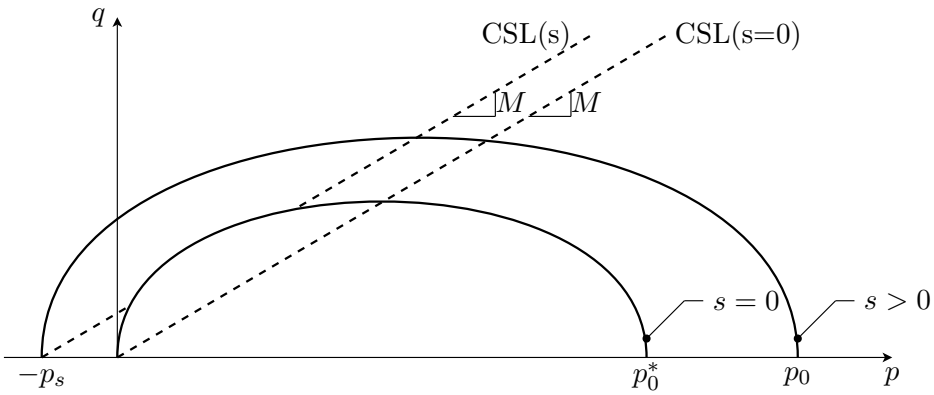
$$p_s = k\,s \tag{3.6}$$

$$\frac{p_0}{p^c} = \left(\frac{{p_0}^*}{p^c}\right)^{\frac{\lambda(0)-\kappa}{\lambda(s)-\kappa}} \tag{3.7}$$

$$\lambda(s) = \lambda(0)\,[(1-r)\exp(-\beta\,s) + r] \tag{3.8}$$



(a) Surfaces SI et LC dans le plan (p, s) (pour $q = 0$).



(b) Surface de charge déviatoire dans le plan (p, q) à une succion nulle et à une succion donnée.

FIGURE 3.3 – Représentation des surfaces de charge du modèle BBM dans les plans (p, s) et (p, q).

L'Équation (3.7) définit la courbe LC dans le plan (p, s) : p_0 et $p_0{}^*$ sont les contraintes nettes de préconsolidation pour, respectivement, une succion s quelconque et pour le matériau saturé. p_s est introduit pour rendre compte d'une augmentation (supposée linéaire) de la cohésion apparente pour des succions croissantes. p^c représente une pression de référence. s_0 permet de définir le critère SI dont la surface de charge est définie par l'équation (3.5) et représente la plus forte succion à laquelle le sol a été soumis.

L'Équation (3.8) donne l'évolution de la pente de la droite de consolidation normale $\lambda(s)$ avec la succion. Cette pente diminue de la valeur $\lambda(0)$ à l'état saturé à la valeur $r\,\lambda(0)$ (avec $r < 1$) lorsque la succion devient élevée.

3.2.1.2 Règles d'écoulement

L'incrément de déformation plastique $(\mathrm{d}\epsilon_{vp}^p, \mathrm{d}\epsilon_s^p)$ associé à la surface $f_1 = 0$ est donné par :

$$\mathrm{d}\epsilon_{vp}^p = \mathrm{d}\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial p} \tag{3.9}$$

$$\mathrm{d}\epsilon_s^p = \mathrm{d}\lambda_1\, \alpha \frac{\partial f_1}{\partial q} \tag{3.10}$$

avec $\alpha = \dfrac{M\,(9-M)\,(3-M)}{9(6-M)}\dfrac{\lambda(0)}{\lambda(0)-\kappa}$. Ce paramètre confère à la loi d'écrouissage un caractère non-associé.

L'incrément de déformation plastique $(\mathrm{d}\epsilon^p_{vs}, 0)$ associé à la surface $f_2 = 0$ est donné quant à lui par une loi associée :

$$\mathrm{d}\epsilon^p_{vs} = \mathrm{d}\lambda_2 \tag{3.11}$$

Les multiplicateurs plastiques $\mathrm{d}\lambda_1$ et $\mathrm{d}\lambda_2$ peuvent être calculés à l'aide des conditions de consistance.

3.2.1.3 Lois d'écrouissage

Les surfaces de charge sont affectées par un écrouissage isotrope dont l'évolution est contrôlée par p_0^* pour la surface LC et par s_0 pour la surface SI. Cette évolution dépend de la déformation volumique totale $\mathrm{d}\epsilon^p_v = \mathrm{d}\epsilon^p_{vp} + \mathrm{d}\epsilon^p_{vs}$, ce qui introduit un couplage entre les deux mécanismes plastiques.
Les lois d'écrouissage sont définies comme suit :

$$\frac{\mathrm{d}{p_o}^*}{{p_o}^*} = \frac{v}{\lambda(0)-\kappa}\mathrm{d}\epsilon^p_v \tag{3.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}s_0}{s_0 + p_{atm}} = \frac{v}{\lambda_s - \kappa_s}\mathrm{d}\epsilon^p_v \tag{3.13}$$

avec $v = 1 + e$, le volume spécifique du matériau.

3.2.1.4 Comportement élastique

La partie élastique du comportement est définie par les relations suivantes :

$$\mathrm{d}\epsilon^e_v = \frac{\kappa}{v}\frac{\mathrm{d}p}{p} + \frac{\kappa_s}{v}\frac{\mathrm{d}s}{s + p_{atm}} \tag{3.14}$$

$$\mathrm{d}\epsilon^e_s = (1/3G)\,\mathrm{d}q \tag{3.15}$$

Les paramètres du modèle sont $\lambda(0)$, κ, λ_s, κ_s, p^c, M, k, r, β.

Le modèle BBM suppose l'existence d'une pression nette critique p_c telle que, lorsque ${p_0}^* = p_c$, la surface de charge LC définie par (3.7) devienne une droite verticale dans le plan (p, s). Le modèle prévoit en outre que la pente de consolidation normale diminue lorsque la succion croit (pour tendre vers $r\,\lambda(0)$). Dans leurs commentaires sur l'utilisation du modèle BBM [Wheeler et al., 2002], les auteurs évoquent en outre une possible non-convexité de la courbe LC pour certaines valeurs des paramètres du modèle BBM.

Ces auteurs évoquent également l'existence de sols pour lesquels l'évolution de la pente des droites de consolidation normale $\lambda(s)$ n'est pas monotone. Ils proposent donc d'utiliser des valeurs du paramètre r supérieures à l'unité dans les domaines où cette pente augmente avec la succion. Ce choix impose alors de prendre une valeur de la contrainte moyenne nette critique (p^c) supérieure aux valeurs courantes de la contrainte moyenne afin de ne pas obtenir d'allure aberrante pour la courbe LC.

3.2.2 L'approche de Wheeler et Sivakumar

Wheeler et Sivakumar, dans [Wheeler et Sivakumar, 1995] et [Wheeler, 1996] présentent un modèle de comportement élastoplastique également basé sur le modèle de Cam-Clay. Cette alternative au modèle de Barcelone tente d'éviter les limitations du BBM citées plus haut. Concernant le cadre de modélisation, ces deux modèles sont somme toute très similaires : modèle élastoplastique de base, variables utilisées, etc.

Le modèle de Wheeler et Sivakumar ne comporte pas de surface de charge permettant de limiter le domaine élastique lors d'un chargement en succion (drainage) au contraire du modèle précédent (surface SI). Ce choix s'explique par le fait que l'apparition de déformations irréversibles au-delà d'une succion donnée sur un chemin de drainage ne fait pas l'unanimité dans la communauté scientifique (voir également [Blatz et Graham, 2003]).

Concernant la droite d'état critique, les auteurs envisagent également une évolution de sa pente M en fonction de la succion. L'augmentation de la cohésion apparente due à la succion, linéaire dans le modèle BBM, est également identifiée à partir des données expérimentales. Les données issues de la campagne d'essais montrent ainsi que l'hypothèse de linéarité utilisée dans [Alonso et al., 1990] peut ne pas correspondre à une réalité expérimentale.

Le modèle proposé par Wheeler et Sivakumar utilise la volume spécifique en eau ($v_l = 1 + S_l\, e$). Cette variable, que les auteurs assimilent à une cinquième variable d'état (avec p, q, s et v), présente l'avantage de tendre vers v lorsque l'état saturé est atteint et peut s'avérer particulièrement utile lorsqu'il s'agit de modéliser des essais non-drainés (à volume d'eau constant). Des travaux allant dans ce sens sont présentés dans [Wheeler, 1996] où l'auteur présente un modèle incluant v_l et permettant de modéliser ces essais non-drainés (au prix d'une hypothèse relativement forte sur la variation de l'indice des vides remplis d'air en fonction de la succion et de l'écrouissage).

3.2.2.1 Comportement isotrope

L'incrément élastique du volume spécifique est défini par :

$$\mathrm{d}v^e = -\kappa \frac{\mathrm{d}p}{p} - \kappa_s \frac{\mathrm{d}s}{s + p_{atm}} \tag{3.16}$$

avec κ et κ_s deux paramètres élastiques supposés indépendants de la contrainte moyenne nette p et de la succion s.
La droite de compression normale est introduite selon la relation suivante :

$$v = N(s) - \lambda(s)\, \ln\left(\frac{p}{p_{atm}}\right) \tag{3.17}$$

En considérant un chemin élastique joignant deux points de la même surface de charge à différentes succions, les auteurs ont obtenu la forme suivante pour la surface de charge LC :

$$\big(\lambda(s) - \kappa\big)\, \ln\left(\frac{p_0}{p_{atm}}\right) = (\lambda(0) - \kappa)\, \ln\left(\frac{p_0(0)}{p_{atm}}\right) + N(s) - N(0) + \kappa_s\, \ln\left(\frac{s + p_{atm}}{p_{atm}}\right) \tag{3.18}$$

Cette relation relie la contrainte de préconsolidation à une succion donnée p_0 à la contrainte de préconsolidation à succion nulle $p_0(0)$.

Cette formulation ne comporte pas de grandeur similaire à la contrainte critique p^c du modèle BBM, ce qui évite son identification parfois délicate. Les auteurs déclarent d'ailleurs qu'aucune donnée expérimentale ne permet de justifier l'existence d'une telle contrainte.

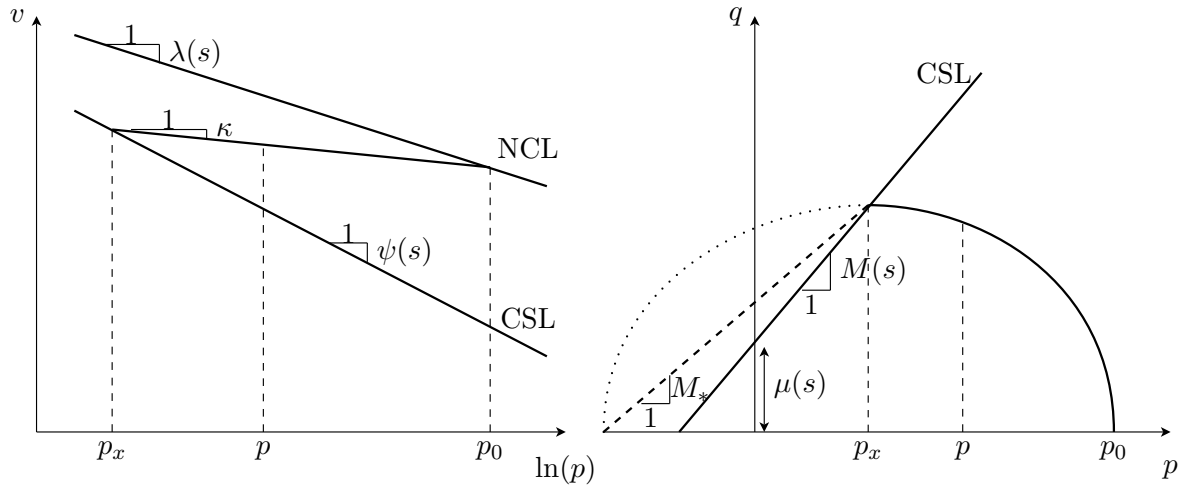


FIGURE 3.4 – Extension du modèle aux états triaxiaux : ligne d'état critique (CSL), ligne de compression normale (NCL) et surface de charge (d'après [Wheeler et Sivakumar, 1995]).

La règle d'écrouissage est donnée par :

$$\mathrm{d}v^p = -(\lambda(0) - \kappa)\,\frac{\mathrm{d}p_0(0)}{p_0(0)} \tag{3.19}$$

3.2.2.2 Extension aux états triaxiaux

Afin d'étendre le modèle aux états triaxiaux, une ligne d'état critique est introduite de la façon suivante :

$$q = M(s)\,p_x + \mu(s) \tag{3.20}$$

$$v = \Gamma(s) - \psi(s)\,\ln\left(\frac{p_x}{p_{atm}}\right) \tag{3.21}$$

où p_x est la valeur de la contrainte moyenne nette à l'état critique et M, μ, Γ et ψ sont des paramètres variant avec la succion.

La surface de charge dans un plan (p, q) à succion donnée est supposée elliptique et définie par la relation suivante :

$$f \equiv q^2 - M_*^2\,(p_0 - p)(p + p_0 - 2p_x) = 0 \tag{3.22}$$

avec M_* donné par :

$$M_* = \frac{M(s)\,p_x + \mu(s)}{p_0 - p_x} \tag{3.23}$$

Les paramètres $N(s)$, $\lambda(s)$, $M(s)$, $\mu(s)$, $\Gamma(s)$ et $\psi(s)$ sont interpolés à partir des données expérimentales disponibles pour différentes succions.

La Figure 3.4 présente les lignes de compression normale et d'état critique dans le plan $(\ln(p), v)$ ainsi que la surface de charge dans le plan (p, q).

3.2.3 Commentaires

Les approches présentées précédemment utilisent deux contraintes indépendantes afin de décrire l'état du sol non saturé. De telles approches semblent modéliser correctement les principaux aspects du comportement des sols non-saturés. En particulier, la cohérence entre les résultats expérimentaux et ceux prédits par les modèles ne paraît pas moindre que celle obtenue

lorsque le comportement des sols saturés est prédit par des modèles aussi simples que ne l'est le modèle de Cam-Clay [Wheeler et Sivakumar, 1995].

Dans le but d'améliorer ces prédictions, l'utilisation de modèles plus avancés semble cependant constituer une suite logique aux premiers modèles développés pour le domaine non-saturé (comme cela avait été le cas dans la modélisation des sols saturés). Cependant, les modèles avancés développés pour les sols saturés utilisent, pour la plupart, la contrainte effective de Terzaghi et leur adaptation au non-saturé en est rendue plus difficile.

Dans le cadre des modélisations à deux variables d'état, des tentatives de définition d'une contrainte effective [3] pour les sols non-saturés sont donc de nouveau apparues. De telles approches permettraient d'obtenir des modèles de comportement généraux, pouvant être exploités dans des conditions à la fois saturées et non-saturées, tout en assurant une transition aisée entre ces conditions.

Dans un premier temps, des modèles simples (Cam-Clay modifié, Hujeux, Drucker-Prager...) sont utilisés en raison du manque de données expérimentales qui permettraient d'identifier des modèles plus avancés. Ils sont toutefois suffisants pour permettre de décrire les principaux aspects du comportement des sols non-saturés (comme c'est le cas pour les résultats obtenus avec, par exemple, les approches du type BBM dans le cadre classique à deux variables de contrainte).

La suite de ce chapitre se consacre aux approches visant à utiliser ce type de contraintes effectives.

3.3 Approches micro-macro

La définition d'une contrainte effective requiert la formulation d'une pression interstitielle équivalente. A cet effet, certaines approches tirent parti d'hypothèses simplificatrices relatives à la microstructure du matériau non-saturé. C'est le cas des modèles de Khogo et d'Abou-Bekr qui sont maintenant abordés.

L'attention du lecteur est attirée sur le fait que les approches présentés ici ne s'apparentent pas à des formulations micro-macro dans le sens classique du terme. Ces formulations constituent bien des approches phénoménologiques (macroscopiques) et les considérations micro-structurales auxquelles elles font appel ne sont là que pour éclairer le choix de leurs auteurs.

3.3.1 Le modèle de Kohgo

Dans [Kohgo et al., 1993a] et [Kohgo et al., 1993b], le modèle Cam Clay modifié sert de base à l'adaptation au non-saturé. Il est à remarquer que les auteurs distinguent trois états de saturation pour le sol selon la succion rencontrée. Une saturation insulaire : lorsque $s < s_e$, l'air est présent sous forme occluse [4]. Une saturation intermédiaire : lorsque $s > s_e$, les plus gros pores sont remplis d'air. La saturation pendulaire : lorsque $s \gg s_e$, l'eau ne subsiste plus que sous forme de ménisques autour des points de contact entre les grains.

Dans ces travaux, une attention particulière est portée sur les aspects microstructuraux liés à la succion (pour une géométrie simplifiée de l'arrangement des grains).

3. On rappelle que ce terme n'est pas à prendre au sens strict.
4. Il pourra être important de tenir compte de cet état en modifiant la rigidité du fluide saturant.

3.3.1.1 Définition de la contrainte effective

A la suite de cette étude à l'échelle microscopique, les auteurs proposent une formulation empirique de la contrainte effective basée sur des essais de résistance au cisaillement en fonction de la succion :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_{eq}\,\mathbf{1} \tag{3.24}$$

avec p_{eq} une pression équivalente définie par :

$$p_{eq} = \begin{cases} p_g - s & \text{pour } s \leq s_e \\ p_g - \left(s_e + \dfrac{s_c - s_e}{s^* + a_e} s^*\right) & \text{pour } s > s_e \end{cases} \tag{3.25}$$

La succion effective s^* est définie comme la partie positive de $s - s_e$:

$$s^* =< s - s_e > \tag{3.26}$$

Sous forme incrémentale, la contrainte effective est définie par :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' = \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} - \mathrm{d}p_g\,\mathbf{1} + \chi\,\mathrm{d}s\,\mathbf{1} \tag{3.27}$$

avec χ donné par :

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{pour } s \leq s_e \\ \dfrac{a_e\,(s_c - s_e)}{(s^* + a_e)^2} & \text{pour } s > s_e \end{cases} \tag{3.28}$$

Les auteurs proposent un modèle d'évolution en fonction de la succion pour λ^*, pente de la courbe de consolidation normale à une succion effective s^* donnée. En supposant que la relation liant l'indice des vides e à la contrainte effective moyenne p' est linéaire dans tout plan $\big(e, \log(p')\big)$ à succion constante, ils écrivent :

$$e = -\lambda^*\,\log(p') + \Gamma^* \tag{3.29}$$

ou, à saturation :

$$e = -\lambda\,\log(p') + \Gamma \tag{3.30}$$

De plus, en approchant ces courbes dans le plan (e, s^*) à p' donné par des hyperboles, ils donnent l'évolution de λ^* en fonction de la succion :

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{1+y} \tag{3.31}$$

$$y = \left(\frac{s^*}{a_s}\right)^{n_s} \tag{3.32}$$

La surface de charge, inspirée du modèle de Cam-Clay modifié, est donnée par :

$$f \equiv q^2 - (M\,p_0)^2 + M^2(p' - p_0)^2 = 0 \tag{3.33}$$

avec $p_0 = p_c/2$ où p_c est la contrainte de préconsolidation à s donnée. p_0 représente l'intersection entre la surface de charge et la droite d'état critique dans tout plan à succion constante.

Comme dans le cas du modèle Cam-Clay modifié, un écrouissage isotrope est intégré dans ce modèle. Il est réalisé par le biais de la contrainte p_c qui est couplée à la déformation volumique

plastique ϵ_v^p (jouant le rôle de variable interne associée à p_c). La relation entre p_c et ϵ_v^p est donnée sous forme intégrée par les auteurs selon :

$$p_c = \exp\left(\frac{B^* + \epsilon_v^p}{A^*}\right) \tag{3.34}$$

où A^* et B^* permettent d'inclure l'écrouissage induit par la succion et sont définis par :

$$A^* = \frac{\lambda^* - \kappa}{\ln(10)(1+e_0)} \tag{3.35}$$

$$B^* = \frac{\lambda^* - \kappa}{(1+e_0)}\log(p_0') - \frac{\Gamma_0^* - \Gamma^*}{1+e_0} \tag{3.36}$$

Les indices 0 repèrent les valeurs à l'état initial de référence.[5] La relation (3.34) intègre dans une seule et même relation les contributions mécanique et hydrique sur l'écrouissage isotrope porté par la contrainte de préconsolidation p_c. Cela différencie donc ce modèle de ceux que nous verrons par la suite dans ce chapitre : en effet, aucune surface de charge de type LC n'y est définie explicitement.

La partie isotrope du comportement élastique est donnée par :

$$\mathrm{d}e^e = -\kappa\frac{\mathrm{d}p'}{p'} \tag{3.37}$$

Les paramètres du modèle sont λ, κ, s_c, s_e, a_e, a_s, n_s.

Il est a remarquer qu'une telle approche en contrainte effective permet de ne définir qu'une seule relation élastique (3.37) puisque les variations de contrainte et de succion sont regroupées dans les variations de la contrainte effective. Ces approches n'utilisent donc pas de paramètre élastique propre aux variations de succion (tel que le paramètre κ_s du modèle BBM).

Cette simplification n'est toutefois qu'apparente puisqu'elle ne fait que reporter la difficulté sur la formulation de la pression interstitielle équivalente et l'identification des paramètres y intervenant. En effet, pour qu'une variation réversible de la succion fournisse la variation volumique observée expérimentalement, la seule liberté restant à la disposition du modélisateur réside dans l'identification de la contrainte effective (le paramètre élastique κ devant à la fois décrire des variations de contrainte totale et de succion). Cette discussion sera reprise plus tard, lorsqu'un cadre de modélisation sera proposé au Chapitre 4.

3.3.2 Le modèle de Abou-Bekr

Dans [Abou-Bekr, 1995], l'auteur propose une adaptation du modèle de Hujeux. Si l'on ne considère que des chemins isotropes, ce modèle est similaire au modèle Cam-Clay modifié.

3.3.2.1 Définition de la contrainte effective

La formulation d'une pression interstitielle équivalente π, nécessaire à la définition d'une contrainte effective, est basée sur une approche microstructurale.

Abou-Bekr fixe trois conditions que doit vérifier cette pression équivalente. Elles sont les suivantes : d'une part, l'allure de la pression interstitielle équivalente en fonction de la succion doit

5. A ce titre, p_0' représente bien la contrainte effective à l'état de référence et ne doit pas être confondue avec $p_0 = p_c/2$.

être similaire à celle donnée par le modèle microstrutural ; d'autre part, il doit y avoir continuité entre les domaines saturés et non-saturés ; finalement, l'existence d'une pression interstitielle maximale π_{max}, atteinte pour de fortes succions, est postulée.

Sous l'hypothèse d'isotropie des effets capillaires, la contrainte effective est alors définie comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \pi \mathbf{1} \tag{3.38}$$

$$\pi = \pi_{max} \tanh\left(\frac{s}{\pi_{max}}\right) \tag{3.39}$$

La pression π_{max} est définie par l'auteur comme étant une fonction de la tension superficielle à l'interface liquide-gaz, de la densité et de la granulométrie du matériau. Elle est cependant basée sur des hypothèses liées à la microstructure du matériau.

Afin d'éviter de formuler des hypothèses fortes sur cette microstructure, il peut être préférable de plutôt considérer π_{max} comme un paramètre à part entière du modèle, paramètre qu'il conviendra d'identifier à partir d'essais expérimentaux.

3.3.2.2 Comportement élastoplastique isotrope

La limite élastique isotrope est supposée augmenter linéairement avec la pression interstitielle équivalente :

$$p_c^{ns} = p_c + k\,\pi \tag{3.40}$$

avec p_c et p_c^{ns} les pressions de préconsolidation à saturation et à une succion donnée. Il est à noter que l'écrouissage induit par la non-saturation n'augmente pas indéfiniment la limite d'élasticité puisque la pression interstitielle introduite dans ce modèle tend vers une valeur limite.

L'écrouissage mécanique est porté par la contrainte p_c. La loi d'écrouissage s'écrit, sous forme incrémentale, selon la relation suivante :

$$\mathrm{d}p_c = K_0^p\, p_{ref} \left(\frac{p_c}{p_{ref}}\right)^n \mathrm{d}\epsilon_v^p \tag{3.41}$$

où K_0^p et n sont des paramètres matériels et p_{ref} une pression de référence.

3.4 Approches fondées sur la définition de Bishop

3.4.1 Commentaires

La contrainte de Bishop s'étant révélée pertinente sur certains aspects, plusieurs contributions proposent une approche à deux variables indépendantes dont l'une est issue de la définition de la contrainte effective de Bishop. En général, le paramètre χ y est pris égal au degré de saturation en liquide. Plusieurs modèles utilisent cette approche ; on pourra citer [Loret et Khalili, 2000] ou [Sheng et al., 2003]. Le modèle de Loret et Khalili est maintenant décrit plus en détail.

3.4.2 Modèle de Loret et Khalili

Dans [Loret et Khalili, 2000] et [Loret et Khalili, 2002], les auteurs développent un modèle adapté au non-saturé à partir du modèle de Cam-Clay modifié en se basant sur la théorie des

mélanges appliquée à un milieu poreux triphasique. La définition de la contrainte effective repose sur la définition donnée par Bishop :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - (1-\chi)\, p_g \mathbf{1} - \chi\, p_l \mathbf{1} \tag{3.42}$$

Le facteur χ définit la contribution de la succion à la contrainte effective. Il peut être considéré, selon les auteurs, comme un facteur d'échelle permettant d'intégrer les effets de la succion entre le niveau des pores et le niveau macroscopique du volume élémentaire représentatif.

Contrairement à la démarche rencontrée régulièrement et selon laquelle ce facteur χ est pris égal au degré de saturation en liquide, les auteurs utilisent une relation unique entre χ et la succion obtenue à partir de l'analyse de données expérimentales sur la résistance au cisaillement de différents sols. Cette étude est présentée dans [Khalili et Khabbaz, 1998].
La contrainte effective définie et utilisée dans le modèle proposé par les auteurs s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_g \mathbf{1} + \chi\, s \mathbf{1} \tag{3.43}$$

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{pour } s \leq s_e \\ \left(\dfrac{s_e}{s}\right)^{\gamma} & \text{pour } s \geq s_e \end{cases} \tag{3.44}$$

Le paramètre γ a été déterminé à partir d'une large campagne expérimentale, présentée dans [Khalili et Khabbaz, 1998] ; la valeur utilisée par les auteurs est $\gamma = 0.55$.

Parallèlement à la méthode d'identification du paramètre χ utilisée par les auteurs, il existe une autre démarche s'appuyant sur l'analyse du comportement élastique du matériau soumis à un chargement en succion à contrainte nette constante. En supposant valable la définition de la contrainte effective (3.42), il est en effet possible d'identifier χ à partir de tels essais.

La pression de préconsolidation est donnée par la relation suivante :

$$p'_\pi = p'_0\, l_1(s) + l_2(s) \tag{3.45}$$

avec les fonctions $l_i(s)$ données par :

$$l_1(s) = 1 + \frac{k_1}{s_e}\,(s\chi - s_e) \tag{3.46}$$

$$l_2(s) = k_2\,(s\chi - s_e) \tag{3.47}$$

où k_1 et k_2 des paramètres matériels.

L'écrouissage mécanique est porté par la contrainte de préconsolidation à saturation p'_0 et la fonction d'écrouissage est définie par :

$$\mathrm{d}p'_0 = \xi p'_0 \mathrm{d}\epsilon_v^p \tag{3.48}$$

avec ξ un paramètre du matériau.

Il est particulièrement intéressant de noter que la définition de la contrainte effective donnée par Bishop avec $\chi = S_l$ permet de retrouver celle proposée par Loret et Khalili si le modèle de Brooks et Corey (cf. Équation (2.7)) est utilisé pour identifier la courbe de sorption. Il suffit alors d'avoir $\gamma = \frac{1}{\alpha}$. Cependant, cette remarque ne peut être faite que sur le plan purement mathématique puisqu'il ne s'agit aucunement de la démarche adoptée par les auteurs pour aboutir à l'identification de χ (obtenue à partir de données expérimentales de résistance au cisaillement).

3.5 Approche thermodynamique

Dans [Dangla, 2001] et [Coussy et Dangla, 2002], une approche énergétique fondée sur la thermodynamique des milieux poreux [Coussy, 1995] est menée. Cette approche débouche sur la formulation d'une pression interstitielle équivalente prenant en compte l'énergie des interfaces séparant les différentes phases du milieu poreux. Cette pression équivalente permet de définir, dans un cadre à deux variables indépendantes, une contrainte effective pour les milieux partiellement saturés. Ces travaux ont été présentés au Chapitre 1 et sont résumés ci-après.

La contrainte effective obtenue selon cette démarche est introduite de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \pi \mathbf{1} \tag{3.49}$$

La pression interstitielle π (comptée positivement dans cette étude) est définie, dans le domaine non-saturé, par la relation :

$$\pi(s) = -p_g + s\, S_l + \frac{2}{3} U \tag{3.50}$$

avec U, la variation de l'énergie des interfaces par rapport à l'état saturé. Cette énergie dépend, par hypothèse, des déformations du squelette (par le biais de la porosité lagrangienne ϕ) et du degré de saturation en liquide. En supposant que la succion est également une fonction de ces variables (*i.e.* $s = s(\phi, S_l)$), l'énergie $U(\phi, S_l)$ est donnée par :

$$U(\phi, S_l) = \int_{S_l}^{1} s(\phi, S)\ \mathrm{d}S \tag{3.51}$$

La formulation de l'énergie des interfaces U (et donc de la pression π) repose sur le fait que la relation entre la succion et le degré de saturation en liquide soit connue.

La Figure 3.5 donne l'allure d'une courbe de sorption expérimentale (à gauche) et une simplification couramment admise (à droite). L'hypothèse généralement réalisée consiste à supposer que la fonction $S_l(s)$ réalise une bijection entre la succion et le degré de saturation.

En première approximation, Dangla [Dangla, 2002] utilise le modèle de Brooks et Corey, qui reprend cette hypothèse :

$$s = s_e\, S_l^{-\alpha} \tag{3.52}$$

Cette relation suppose qu'il n'y a pas d'hystérésis lors d'un cycle de drainage-imbibition et que le degré de saturation ne dépend que de la succion (et non pas des déformations).

Dans le cas où la courbe de sorption ne dépend que de la succion, la pression interstitielle équivalente est donnée par :

$$\pi(s) = \begin{cases} -p_g + s & \text{pour } s \leq s_e \\ -p_g + s\, S_l + \dfrac{2}{3} \displaystyle\int_{S_l}^{1} s(S)\mathrm{d}S & \text{pour } s > s_e \end{cases} \tag{3.53}$$

Il est à noter que le facteur 2/3 provient de l'hypothèse concernant la dépendance de l'énergie U vis-à-vis des déformations du squelette. Il intervient dans $\pi(s)$ même si l'on suppose que la courbe de sorption est indépendante de celles-ci [Dangla, 2001].

La Figure 3.6 illustre l'évolution de la pression interstitielle $\pi(s)$ ainsi que l'influence (non négligeable) du terme intégral dans la définition de celle-ci. Il est à noter que l'omission de ce terme (c'est-à-dire l'identification de π à $\widetilde{\pi} = -p_g + sS_l$) implique le fait que la contrainte

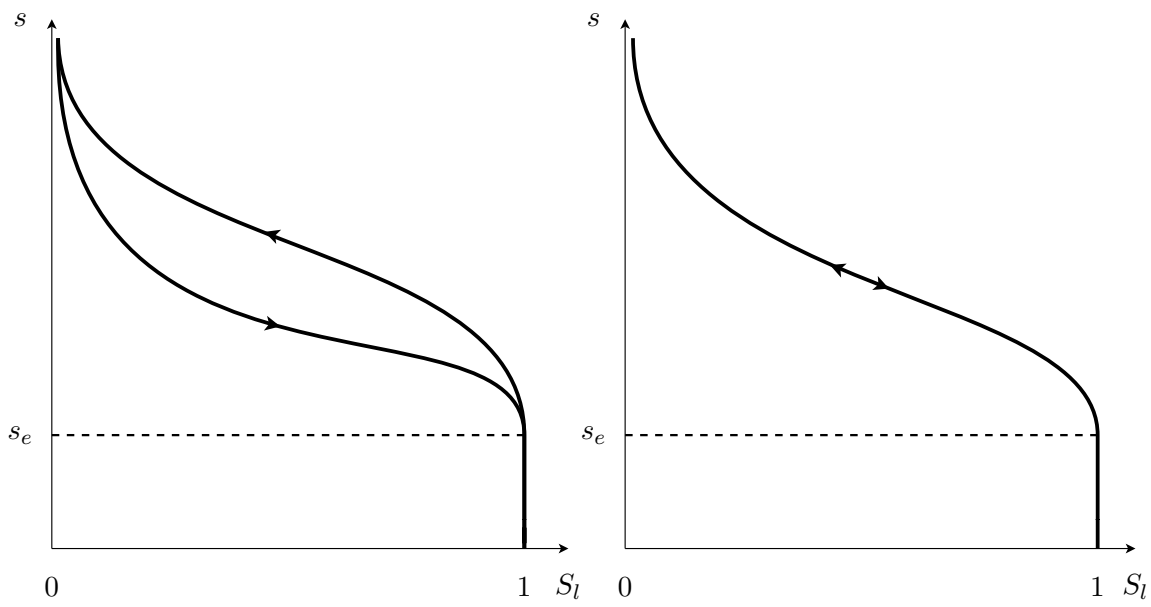


FIGURE 3.5 – Aspect général d'une courbe de sorption : expérimentale (gauche) et simplifiée (droite).

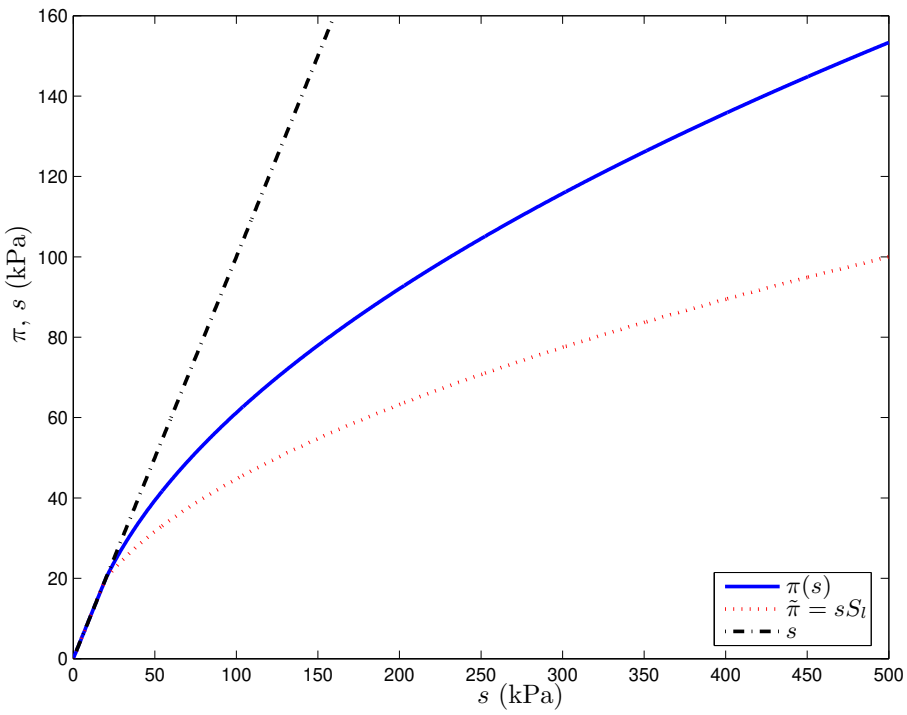


FIGURE 3.6 – Variation de la pression interstitielle équivalente $\pi(s)$ en fonction de la succion avec et sans le terme $2/3\,U$ (utilisation du modèle de Brooks et Corey, $s_e = 20$kPa, $\alpha = 2.0$ et $p_g = 0$kPa).

effective introduite dans le modèle de Coussy et Dangla coïncide avec la proposition de Bishop s'il est supposé dans cette dernière que $\chi = S_l$. En d'autres termes, la proposition de Bishop avec $\chi = S_l$ néglige l'influence de l'énergie des interfaces.

Un modèle élastoplastique utilisant cette approche est proposé dans [Dangla, 2002]. Le modèle Cam-Clay modifié sert de référence dans le domaine saturé.

En ce qui concerne le comportement isotrope, la limite d'élasticité est donnée dans ce modèle de façon formelle en supposant que la règle d'écrouissage doit être équivalente, que celle-ci soit définie par rapport à la pression de préconsolidation à saturation p'_0 ou à la succion actuelle p'_π.[6] Cette démarche conduit à la définition d'une surface de charge LC dans le plan (p', s) dont l'expression générale est donnée par la relation suivante :

$$p'_\pi = p'_0\, l(s) \tag{3.54}$$

La forme générale (3.54) requiert cependant une identification expérimentale de la fonction $l(s)$. En l'absence de telles données, la surface de charge utilisée a été déterminée en utilisant la courbe LC du modèle BBM comme référence. La pression p'_π a donc été évaluée selon l'identification suivante :

$$p'_\pi + \pi = p_g + p_0 \tag{3.55}$$

avec p_0 la contrainte nette de préconsolidation définie par la relation (3.7).

La loi d'écrouissage mécanique, définissant l'évolution de la contrainte p'_0, est définie par la relation (équivalente à celle du modèle BBM) :

$$\mathrm{d}p'_0 = \frac{1+e_0}{\lambda(0)-\kappa}\, p'_0\, \mathrm{d}\epsilon_v^p \tag{3.56}$$

Il est à noter que la formulation de la pression interstitielle équivalente proposée dans ce modèle est très générale et n'est pas restreinte à l'utilisation de courbes de sorption biunivoques (comme l'est le modèle de Brooks et Corey). Il est d'ailleurs relativement aisé d'y introduire un effet d'hystérésis. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [Dangla, 2002] pour plus de détails à ce sujet.

3.6 Conclusions

La Figure 3.7 compare l'allure des pressions interstitielles équivalentes proposées dans les différents modèles en contrainte effective en fonction de la succion. Pour l'ensemble des modèles, la pression $\pi(s)$ coïncide avec l'opposé de la pression d'eau dans le domaine saturé. Cependant, dans le cas du modèle d'Abou-Bekr, cette vérification n'est qu'approchée puisque sa définition de π n'est pas continue par morceaux, contrairement aux autres. Cette figure montre également que les modèles de Dangla et Loret se distinguent des deux autres pour les fortes succions puisque les pressions équivalentes semblent ne pas admettre de valeur asymptotique.

Dans le cas du modèle de Dangla, cette observation est liée au choix de la courbe de sorption réalisé ici. Plus généralement, lorsque la pression capillaire tend vers l'infini, la pression

6. C'est-à-dire que la relation suivante doit être vérifiée :

$$\frac{\mathrm{d}p'_0}{p'_0} = \frac{\mathrm{d}p'_\pi}{p'_\pi}$$

.

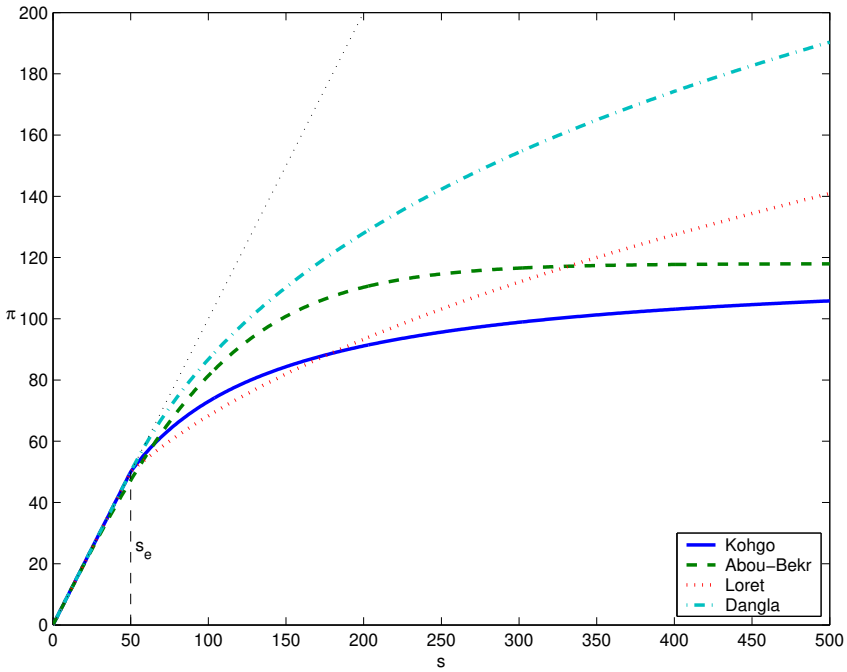


FIGURE 3.7 – Évolution de la pression interstitielle équivalente en fonction de la succion pour les différents modèles présentés.

équivalente $\pi(s)$ tend nécessairement vers une valeur finie [7] :

$$\lim_{s\to\infty} \pi(s) = -p_g + \frac{2}{3}U(\phi, 0) \tag{3.57}$$

Au contraire, la définition de la pression $\pi(s)$ dans le modèle de Loret & Khalili ne prévoit pas de valeur limite finie, ce qui est contradictoire avec les observations expérimentales. Ce modèle peut donc ne plus être valable lorsque les succions rencontrées sont importantes.

Pour conclure ce chapitre, un classement des différentes approches en grandes classes de modèles est proposé. Cette classification est inspirée de [Gens, 2005].

Comme il a été vu, deux variables de contrainte indépendantes sont nécessaires pour pouvoir décrire complètement le comportement des sols partiellement saturés. Plusieurs combinaisons ont été choisies par les auteurs des contributions récentes. Elles présentent chacune des avantages et des inconvénients. Ces combinaisons peuvent être écrites formellement de la façon suivante :

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma} - p_g\,\mathbf{1} + \mu_1(s, S_l)\,\mathbf{1} \tag{3.58}$$

$$\mathbf{\Sigma}_2 = \mu_2(s, S_l)\,\mathbf{1} \tag{3.59}$$

où $\mathbf{\Sigma}_1$ et $\mathbf{\Sigma}_2$ représentent les deux variables de contrainte indépendantes. Les fonctions μ_1 et μ_2 sont des combinaisons plus ou moins complexes de la succion et du degré de saturation en liquide.

Les différentes contributions apportées à la mécanique des sols non-saturés peuvent être réparties en trois classes de modèles. Il est à noter que la fonction μ_2 est couramment identifiée à la succion *i.e.* $\mu_2(s) = s$; la distinction entre ces trois classes ne porte donc que sur le choix de la fonction μ_1.

7. De par sa définition énergétique, la quantité U est en effet intégrable.

Classe I ($\mu_1 = 0$) Cette classe regroupe, par exemple, les travaux de [Alonso et al., 1990] ou de [Wheeler et Sivakumar, 1995]. Elle se caractérise par :
— une représentation simple des chemins de contraintes conventionnels ;
— une modélisation peu aisée de la transition saturation totale – saturation partielle ;
— des difficultés pour introduire des effets d'hystérésis ou hydrauliques ;
— et la nécessaire détermination d'une fonction indépendante pour modéliser l'augmentation de la résistance avec la succion.

Classe II ($\mu_1 = \mu(s)$) Pour illustrer cette classe, citons les modèles de [Kohgo et al., 1993a], [Abou-Bekr, 1995] ou [Loret et Khalili, 2002]. Pour cette classe de modèles :
— la représentation de chemins de contrainte conventionnels n'est pas directe ;
— des difficultés subsistent dans la modélisation de la transition saturation totale - partielle (y compris si une succion d'entrée d'air est considérée) ;
— la prise en compte d'effets d'hystérésis ou hydrauliques n'est pas facile ;
— l'augmentation de la résistance avec la succion résulte directement de la définition de la variable de contrainte $\mathbf{\Sigma}_1$.

Classe III ($\mu_1 = \mu_1(s, S_l)$) Comme la classe II, la classe III introduit une variable de contrainte résultant d'une combinaison complexe de la contrainte totale et des pressions de gaz et de liquide. Cette combinaison inclut en outre dans ce dernier cas le degré de saturation en liquide. Les modèles de [Dangla, 2002], [Gallipoli et al., 2003a], [Gallipoli et al., 2003b] ou [Wheeler et al., 2003] peuvent être cités. Cette classe se distingue par :
— une représentation difficile des chemins de contrainte conventionnels ;
— une modélisation de la transition saturation totale - partielle qui ne pose pas de difficulté particulière ;
— la prise en compte naturelle des effets d'hystérésis et hydrauliques ;
— une augmentation de la résistance qui résulte de la définition de la variable de contrainte $\mathbf{\Sigma}_1$.

Les Figures 4.1(a) et 4.1(b) (au paragraphe 4.2.2.3 du Chapitre 4) illustrent les difficultés mentionnées ci-dessus dans la représentation de chemins de contraintes conventionnels. La première figure représente ce chemin dans un plan constitué de variables de contraintes « simples » (contrainte totale et succion) alors que l'espace de représentation de la seconde figure est constitué d'une combinaison plus complexe des ces deux variables de contrainte et de la succion. Il en résulte que cette dernière introduit une certaine difficulté pour se représenter le chemin de sollicitation dans l'espace des contraintes.

Cette brève revue de différentes contributions récentes maintenant réalisée, la proposition d'un cadre de modélisation fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 4

Cadre général et adaptation du modèle CJS

Ce chapitre présente un cadre général de modélisation élastoplastique des sols non-saturés. Ce cadre se base sur une synthèse des principales contributions récemment apportées dans l'approche en contrainte effective. Il peut être vu comme une méthodologie d'adaptation de modèles élastoplastiques existants aux conditions de saturation partielle.
Un modèle rhéologique avancé, le modèle CJS, est ensuite étendu au domaine non-saturé en utilisant cette démarche. Il s'agit d'un modèle élastoplastique à deux mécanismes plastiques et à écrouissage isotrope et cinématique. Ce modèle tient par ailleurs compte du concept d'état caractéristique, permettant ainsi de simuler, selon l'état de contrainte du matériau, des déformations volumiques contractantes ou dilatantes. La validation de ce modèle clôt le chapitre en montrant les capacités intéressantes du modèle étendu et, plus globalement, du cadre méthodologique proposé.

Sommaire

4.1 Cadre de travail 90
4.1.1 Choix des variables d'état 90
4.1.2 Remarques sur l'utilisation d'une contrainte effective 91
4.2 Formulation générale d'un modèle non-saturé 93
4.2.1 Hypothèses et définitions 93
4.2.2 Modèle isotrope généralisé 94
4.2.3 Comparaison avec les approches récentes 99
4.2.4 Extension à un modèle tridimensionnel 99
4.3 Adaptation du modèle CJS aux états non-saturés 102
4.3.1 Modèle CJS initial 103
4.3.2 Extension du modèle CJS aux états partiellement saturés 110
4.4 Identification des paramètres CJS 115
4.4.1 Paramètres CJS initiaux 115
4.4.2 Paramètres capillaires 116
4.4.3 Paramètres CJS étendu 116
4.5 Validation du modèle CJS étendu 116
4.5.1 Chemins de compression triaxiale 117
4.5.2 Chemins de compression œdométrique 121
4.5.3 Chemins de compression isotrope 123

Dans ce chapitre, un cadre général de modélisation élastoplastique pour des sols non-saturés est d'abord présenté. Ce cadre a pour but d'apporter une méthodologie dans l'adaptation de modèles élastoplastiques existants aux conditions de saturation partielle. L'intérêt est de pouvoir réutiliser les modèles éprouvés de la mécanique de sols (saturés) afin d'étendre leurs avantages et spécificités à la modélisation des sols non-saturés.

Par la suite, les capacités de ce cadre méthodologique seront illustrées par l'adaptation d'un modèle rhéologique avancé, le modèle CJS, au domaine non-saturé. L'extension de ce modèle sera l'occasion d'évaluer l'intérêt d'utiliser des modèles complexes pour modéliser le comportement des matériaux partiellement saturés. En effet, la plupart des modèles récemment proposés se base sur des modèles élastoplastiques plutôt simples (comme le modèle de Cam Clay Modifié). Il est donc particulièrement intéressant d'estimer les avantages apportés par l'adaptation d'un modèle rhéologique avancé et notamment, dans le cas du modèle CJS, en ce qui concerne les possibilités de description fine du comportement volumique des sols sur des chemins de sollicitation complexes.

La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à la validation du modèle CJS ainsi étendu aux conditions de saturation partielle dans le cadre d'essais de laboratoire.

4.1 Cadre de travail

Pour commencer, précisons que la modélisation présentée ici adopte la convention de la mécanique des sols : les contraintes et pressions (respectivement déformations) sont comptées positivement en compression (respectivement contraction).

La modélisation proposée dans ce chapitre s'inscrit dans un cadre élastoplastique : les déformations sont décomposées en une partie élastique et une partie plastique, cette dernière apparaissant lorsque l'état de contrainte atteint la limite élastique du matériau.

Dans cette étude, seuls les couplages de nature hydromécanique sont considérés : les aspects thermiques ou chimiques sont donc ignorés.

Comme il a été vu plus tôt, une modélisation correcte du comportement d'un matériau partiellement saturé requiert l'utilisation de deux variables d'état de contrainte. C'est le choix de ces variables qui est maintenant abordé.

4.1.1 Choix des variables d'état

La formulation générale qui va être présentée par la suite a pour objectif de proposer une méthodologie simple et relativement systématique permettant d'étendre les modèles existants aux conditions de saturation partielle. Il a été choisi d'inscrire ce cadre général dans une approche à deux variables d'état dont l'une est une contrainte effective particulière.

L'avantage est double : d'une part, l'utilisation d'une contrainte effective permet de simplifier la transition entre saturations totale et partielle. D'autre part, le cadre général présenté ici permet de réutiliser un grand nombre de modèles élastoplastiques déjà éprouvés en mécanique des sols saturés puisque ces derniers utilisent une contrainte effective (celle de Terzaghi).

Bien-sûr, les contraintes effectives utilisées dans le domaine saturé et non-saturé doivent être compatibles au sens où la seconde doit se simplifier en la première à la transition vers la saturation complète. C'est la validité (démontrée) de la contrainte effective de Terzaghi dans le domaine saturé qui impose cette condition.

En pratique, toutes les propositions de contraintes effectives pour le domaine non-saturé se simplifient pour coïncider avec la contrainte de Terzaghi lorsque le degré de saturation en liquide atteint l'unité.

Le choix de la seconde variable d'état pour décrire le système se porte naturellement vers la succion s. Dans cette étude, elle sera assimilée à la pression capillaire p_c de telle sorte que la contribution d'origine osmotique à la succion totale ne sera pas considérée par la suite.

4.1.2 Remarques sur l'utilisation d'une contrainte effective

L'utilisation d'une contrainte définie à partir d'une combinaison entre la contrainte totale et la succion (que l'on appelle contrainte effective ici) en tant que variable d'état induit des conditions fortes sur l'expression d'une pression interstitielle équivalente. La formulation d'une contrainte effective passe donc par une définition correcte de cette pression équivalente. Ces conditions sont maintenant discutées (sans toutefois revenir sur la pertinence thermodynamique de cette pression équivalente, vue au chapitre 1).

La pression interstitielle équivalente π d'un milieu poreux non-saturé est définie comme la pression d'un liquide saturant l'espace poreux d'un milieu dont le comportement mécanique serait équivalent à celui du matériau dans l'état actuel de saturation partielle. C'est donc la pression interstitielle d'un fluide fictif qui saturerait l'espace poreux du matériau tout en lui conférant un comportement mécanique identique.

La formulation d'une pression interstitielle équivalente est de la première importance dans l'élaboration d'un modèle de comportement non-saturé utilisant une contrainte effective. C'est d'ailleurs dans cette formulation que la plupart des modèles non-saturés récemment proposés se distinguent. Une fois que la forme de celle-ci est déterminée, ses effets sur le comportement mécanique du matériau sont traités d'un façon similaire dans les différents modèles, par le biais de la contrainte effective.

D'un point de vue théorique, la définition d'une pression de pore équivalente peut être développée à partir de considérations micromécaniques ou thermodynamiques (Coussy et Dangla). Pour être complète, cette définition peut être soumise à l'identification d'une fonction inconnue : la courbe de rétention dans le cas du modèle de Dangla ou le paramètre $\chi(s)$ dans celui de Loret et Khalili. Cependant, l'introduction d'une pression interstitielle équivalente dans un modèle rhéologique *via* une contrainte effective implique des hypothèses implicites et requiert donc une validation expérimentale.

Les approches utilisant une contrainte effective conduisent à une relation constitutive unique liant les variations de la contrainte nette et de la succion aux variations de volume *via* la contrainte effective. Il s'agit bien d'un contraste important par rapport aux autres approches à deux variables qui conduisent à deux relations liant séparément les variables d'état en contrainte à celles en déformation.

Par exemple, dans le modèle BBM [Alonso et al., 1990], ces deux relations s'écrivent :

$$\mathrm{d}e^e = -\kappa \frac{\mathrm{d}\overline{p}}{\overline{p}} \tag{4.1}$$

$$\mathrm{d}e^e = -\kappa_s \frac{\mathrm{d}s}{s + p_{atm}} \tag{4.2}$$

où $\overline{p} = p - p_g$ représente la contrainte nette moyenne, p_{atm} la pression atmosphérique et de^e l'incrément élastique de l'indice des vides. Ces relations indiquent qu'une déformation volumique peut être obtenue indépendamment par une variation de la contrainte nette ou de la succion. Ces variations font intervenir deux paramètres différents, κ et κ_s.

Lorsqu'une contrainte effective est utilisée, une relation unique lie déformations volumiques et variables de contrainte. Elle peut s'écrire formellement de la façon suivante :

$$\mathrm{d}e^e = \xi_m(p')\,\mathrm{d}p' \tag{4.3}$$

où $p' = p + \pi$ est la contrainte effective moyenne et p la contrainte totale moyenne.

Par exemple, dans le cas d'un modèle non-saturé basé sur le modèle de Cam Clay Modifié, la relation élastique suivante est utilisée :

$$\mathrm{d}e^e = -\kappa\frac{\mathrm{d}p'}{p'} \qquad \text{de telle sorte que} \qquad \xi_m(p') = -\frac{\kappa}{p'} \tag{4.4}$$

A partir d'un état arbitraire, une variation de contrainte effective p' peut être obtenue en imposant indépendamment une variation soit de la contrainte totale p soit de la succion s. L'équation (4.3) indique que la variation de volume sera identique dans les deux cas.

Durant un essai à succion constante (l'identité suivante est alors vérifiée $\mathrm{d}p' = \mathrm{d}p$), la relation constitutive (4.3) peut être récrite selon :

$$\mathrm{d}e^e = \xi_m(p + \pi)\,\mathrm{d}p \tag{4.5}$$

Parallèlement, au cours d'un essai à contrainte totale constante ($\mathrm{d}p' = \mathrm{d}\pi = \frac{\partial\pi}{\partial s}\mathrm{d}s$), la relation (4.3) s'écrit cette fois :

$$\mathrm{d}e^e = \xi_m(p + \pi)\,\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \tag{4.6}$$

Parallèlement, l'incrément élastique d'indice des vides peut être exprimé directement en fonction de l'incrément de succion selon la relation formelle suivante :

$$\mathrm{d}e^e = \xi_h(p, s)\,\mathrm{d}s \tag{4.7}$$

où ξ_h, tout comme son pendant mécanique ξ_m, est accessible par l'expérience.

L'hypothèse selon laquelle les déformations de volume ne sont gouvernées que par la contrainte effective induit donc de fortes implications qui doivent être vérifiées. En effet, pour assurer la cohérence entre les relations (4.6) et (4.7), la pression de pore équivalente est sujette à la condition suivante :

$$\xi_h(p, s) = \xi_m(p + \pi)\,\frac{\partial\pi}{\partial s} \tag{4.8}$$

Il s'agit d'une condition particulièrement restrictive sur les formes que peut prendre la pression équivalente $\pi(s)$. D'un autre point de vue, lorsqu'une formulation particulière est obtenue pour π en utilisant une approche théorique, la relation élastique qui résulte de la définition de la contrainte effective à partir de cette pression interstitielle doit être validée sur la base de résultats expérimentaux. Cette vérification doit permettre de valider la cohérence des définitions sur des chemins réversibles de sollicitations à la fois hydriques et mécaniques.

Dans [Dangla, 2001], l'auteur montre ainsi que le comportement réversible d'une argile FoCa peut être décrit par une même contrainte effective pour des essais de compression isotrope (*i.e.*

sous un chargement en contrainte totale) ou de gonflement libre (*i.e.* sous un chargement en succion).

Afin d'illustrer cette idée, explicitons la relation (4.6) dans le cas où le modèle élastoplastique étendu est le modèle de Cam Clay Modifié :

$$\mathrm{d}e^e = -\frac{\kappa}{p+\pi}\frac{\partial \pi}{\partial s}\,\mathrm{d}s \tag{4.9}$$

Il est intéressant de voir que la contrainte totale moyenne p intervient dans (4.9). D'après (4.8), celle-ci intervient donc *a fortiori* dans la fonction ξ_s.

Remarquons qu'elle est absente de la relation liant les déformations volumiques à la succion dans le modèle de Barcelone (cf. Éq. 4.2). Conceptuellement, il paraît réaliste de penser que p puisse intervenir dans cette relation comme c'est le cas dans (4.9). Cependant, d'un point de vue pratique, cette influence de la pression totale moyenne peut ne pas être significative si la gamme de variation de p est restreinte. De plus, le postulat de la relation (4.2) est tout à fait cohérent dans le cadre de la modélisation à deux variables indépendantes adopté par les auteurs.

Dans [Laloui et Nuth, 2005], les auteurs se sont affranchis de la condition (4.8) en utilisant une contrainte effective de type Bishop mais en conservant la succion comme variable à part entière pour décrire les couplages hydromécaniques. En particulier, les variations de volume du sol sous un chargement hydrique (en succion) sont données directement à partir des variations de succion et non pas à partir des variations de la contrainte effective. La finesse de modélisation apportée par ce choix résulte cependant en un plus grand nombre de paramètres à identifier.

4.2 Formulation générale d'un modèle non-saturé

4.2.1 Hypothèses et définitions

Les hypothèses et définitions générales concernant la formulation générale sont maintenant abordées.

A la suite des travaux de Coussy et Dangla [Coussy et Dangla, 2002], les deux points suivants sont considérés :

(i). une pression interstitielle équivalente π est introduite. Elle est définie comme la pression d'un fluide qui, sous condition saturée, aurait induit un comportement équivalent à celui du sol non-saturé dans l'état actuel. Il est à noter que selon les conventions adoptées dans ce travail, la pression π est comptée positive pour des succions positives. [1]

(ii). le tenseur

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \pi\mathbf{1} \tag{4.10}$$

représente une contrainte effective dans le domaine partiellement saturé. La contrainte effective de Terzaghi est supposée valide dans le domaine saturé c'est-à-dire pour des valeurs de succion inférieures à la succion d'entrée d'air s_e.

1. Dans [Coussy et Dangla, 2002, Dangla, 2002], les auteurs ont défini π comme une grandeur négative puisqu'elle représente la pression interstitielle d'un fluide équivalent au mélange saturant le réseau poreux. Ici, il a été choisi de la rendre positive pour ne travailler qu'avec des grandeurs positives comme c'est généralement le cas en mécanique des sols. Ce choix se retrouve dans l'expression de la contrainte effective (4.10) : il apparaît clairement que la contrainte qui pilote les déformations du milieux poreux est la somme des contributions des sollicitations mécaniques et des effets liées à la succion. Il ne s'agit que d'une convention ; la signification physique de π n'est bien-sûr par altérée.

Par la suite, il sera supposé que la pression interstitielle π ne dépend que de la succion (celle-ci pourrait en effet également dépendre des déformations du squelette). Compte-tenu des observations expérimentales, cette pression est une fonction croissante de la succion.

La courbe de sorption sera simplifiée : la relation entre la succion et le degré de saturation en liquide sera supposée bijective. L'hystérésis pouvant apparaître lors d'un cycle drainage-imbibition sera donc négligée (cf. Fig 3.5).

Les formulations de la pression interstitielle équivalente ainsi que d'une courbe de sorption idéalisée seront données ultérieurement, lorsqu'il s'agira d'étendre le modèle CJS au domaine de saturation partielle. Pour l'instant, seul l'hypothèse de l'existence d'une pression interstitielle équivalente π est nécessaire pour la formulation d'un modèle général.

Une augmentation de succion intervient selon deux aspects différents. Elle peut d'abord s'assimiler à un chargement qui sera traité par le biais d'un incrément de la contrainte effective selon l'équation (4.10). Ensuite, elle augmente la liaison apparente aux points de contacts du squelette granulaire ce qui accroît la rigidité et le domaine de résistance du matériau. Ce second aspect est pris en compte en supposant que la rigidité dépend de l'état actuel de succion (par le biais de $\boldsymbol{\sigma}'$) ainsi qu'en introduisant un écrouissage par la succion (*i.e.* le domaine élastique, limité par la surface de charge, est étendu lors d'une augmentation de la succion). En d'autres termes, ce dernier point impose que la fonction définissant le critère de plasticité dépende explicitement de la succion. Elle doit donc être de la forme :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}', s, \boldsymbol{X}) \tag{4.11}$$

où $\boldsymbol{X}$ représente les variables d'écrouissage. Celles-ci peuvent être représentées par des grandeurs scalaires et/ou tensorielles selon que l'écrouissage est isotrope et/ou cinématique.

4.2.2 Modèle isotrope généralisé

Pour des raisons de simplicité, seul le comportement isotrope est considéré pour l'instant ; l'extension du modèle aux chargements déviatoires sera présentée par la suite.

4.2.2.1 Pression interstitielle équivalente et contrainte effective

La pression équivalente doit être définie de telle sorte qu'une augmentation de succion produise un accroissement de la contrainte effective. Sa définition doit également tenir compte de la validité de la contrainte effective définie par Terzaghi dans le domaine saturé ($s < s_e$). En supposant en outre la continuité de π à la limite de saturation ($s = s_e$), les conditions suivantes quant à la définition de la pression π peuvent être énoncées :

$$\forall s \leq s_e, \quad \pi(s) = -p_g + s = -p_l \tag{4.12a}$$

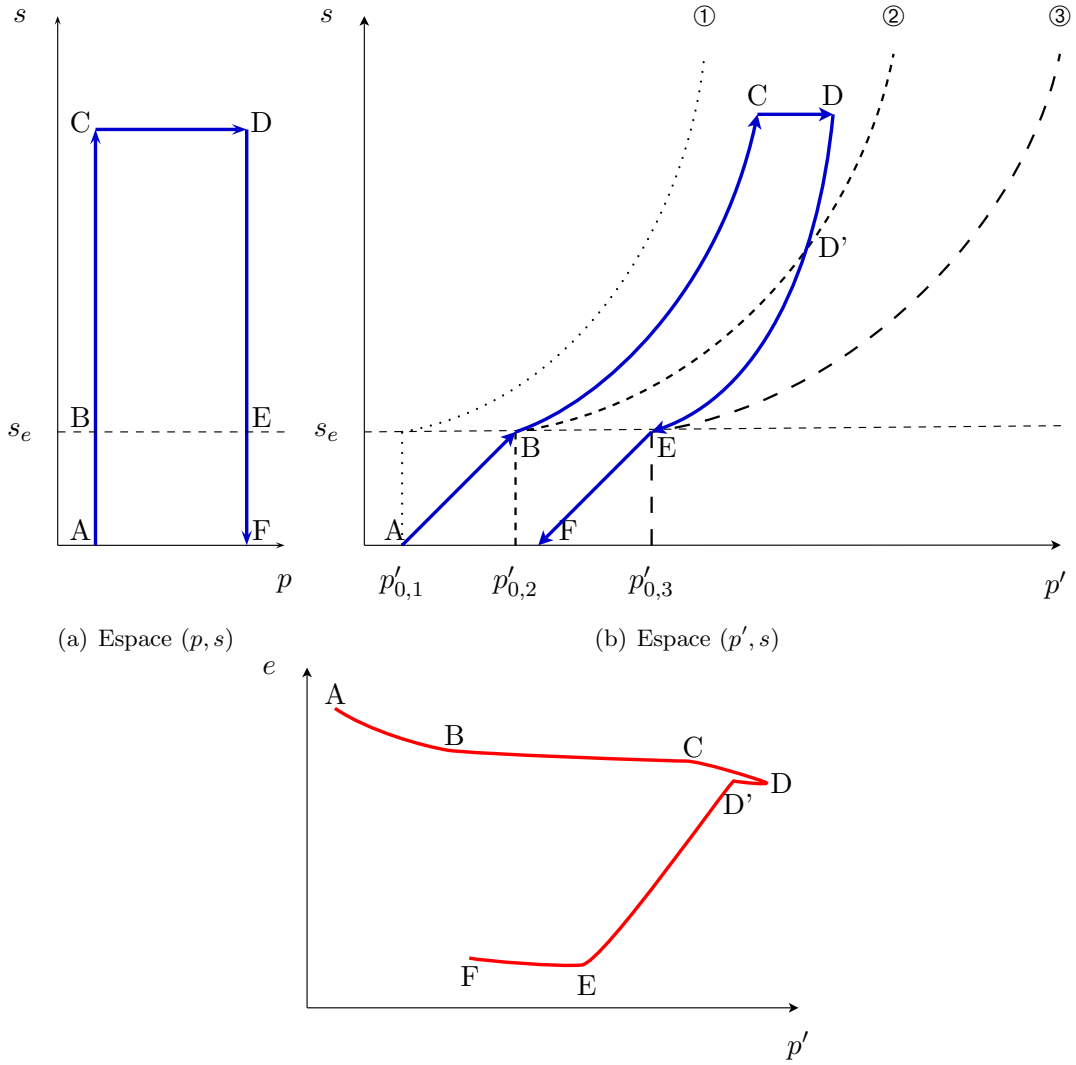
$$\forall s > s_e, \quad \frac{\partial \pi}{\partial s} > 0 \tag{4.12b}$$

$$\pi(s) \text{ continu en } s = s_e, \tag{4.12c}$$

D'après l'équation (4.10), la contrainte effective isotrope p' est définie selon :

$$p' = p + \pi \tag{4.13}$$

où p désigne la contrainte totale isotrope.



(a) Espace (p, s)

(b) Espace (p', s)

(c) Réponse type de l'échantillon

FIGURE 4.1 – Illustration du phénomène d'effondrement : (a), (b) chemins de contrainte et (c) réponse type dans le cas d'un échantillon normalement consolidé.

4.2.2.2 Mécanisme élastique

Le mécanisme élastique peut être défini, de façon générale, selon la relation incrémentale suivante :

$$\mathrm{d}\epsilon_v^e = \frac{1}{K}\,\mathrm{d}p' \tag{4.14}$$

Le module K peut dépendre de l'état de contrainte/déformation dans le cas d'un comportement élastique non linéaire, $\mathrm{d}\epsilon_v^e$ représente l'incrément de déformation volumique élastique.

4.2.2.3 Surface de charge

A un état de succion donnée, le domaine élastique en terme de contrainte effective est limité par une contrainte de préconsolidation notée p'_π. Il sera supposé que cette contrainte p'_π ne dépend que de la contrainte de préconsolidation à saturation p'_0 et de la succion à l'état actuel, c'est-à-dire

$$p'_\pi = p'_\pi(p'_0, s) \tag{4.15}$$

L'intérêt d'une telle formulation réside dans la transition simple qu'elle permet au passage vers la saturation partielle. L'évolution de la contrainte de préconsolidation vis-à-vis de la succion

est sujette à certaines conditions imposées par les observations expérimentales.

Un chemin de contrainte illustrant les principaux aspects que la définition de surface de charge isotrope doit pouvoir retranscrire est représenté sur la Figure 4.1(a) dans le plan (p, s) et sur la Figure 4.1(b) dans le plan (p', s). Un échantillon initialement saturé et normalement consolidé [2] y est soumis. La réponse type (en terme de comportement volumique) de cet échantillon est présentée sur la Figure 4.1(c). Entre les points A et B, une augmentation de la succion entre 0 et s_e induit un comportement irréversible (un écrouissage apparaît ; la contrainte de préconsolidation évolue de $p'_{0,1}$ à $p'_{0,2}$ déplaçant la surface de charge dans l'espace (p', s) de la position ① à la position ②). Entre les points B et C, le comportement devient élastique. Afin de faire apparaître un effondrement, un chargement mécanique (augmentation de la contrainte totale) est appliqué entre les points C et D puis, l'échantillon est soumis à une imbibition, diminuant sa succion. Entre C et D, la réponse de l'échantillon est réversible, conséquence d'une préconsolidation apportée par le chargement en succion. Entre les points D et D', l'imbibition provoque un gonflement de l'échantillon. Au point D', le point représentatif de l'état de contrainte atteint la surface de charge notée ②. L'imbibition qui suit le point D' entraîne un effondrement de l'échantillon, induisant un écrouissage jusqu'à ce que s atteigne s_e et amenant ainsi la surface de charge en position ③. La fin du chargement, entre E et F, est de nouveau élastique.

Notons en outre qu'à partir du point C, si la contrainte totale avait été diminuée (à succion constante), la phase d'imbibition n'engendrerait pas d'effondrement (le point représentatif de l'état de contrainte n'atteignant à aucun moment la limite élastique).

Comme il en a été discuté plus tôt, ces aspects typiques du comportement des sols non-saturés imposent l'intervention de la succion en tant que seconde variable d'état dans la modélisation et, en particulier, dans la définition de la surface de charge. Cela est réalisé par le biais de la caractérisation de la contrainte de préconsolidation dont il a été supposé qu'elle dépendait de la succion.

Au cours d'un chargement hydrique à contrainte totale constante égale à la pression du gaz (comme, par exemple, le long de BC ou de DE sur la Figure 4.1(b)), la contrainte effective et la préconsolidation varient simultanément avec la succion. Le phénomène d'effondrement ne peut donc être modélisé que si la contrainte de préconsolidation varie plus vite que $p_g + \pi$ en fonction de la succion. En d'autres termes, l'expansion de la surface de charge doit être plus rapide que l'augmentation de la contrainte effective (à contrainte totale constante). Cette remarque impose donc la condition suivante sur les évolutions respectives de p'_π et π en fonction de la succion :

$$\forall s \geq s_e, \quad \frac{\partial p'_\pi}{\partial s} > \frac{\partial (p_g + \pi)}{\partial s} \tag{4.16}$$

Dans la mesure où seul le comportement isotrope est évoqué dans cette section, l'expression suivante est proposée pour la surface de charge :

$$f(\sigma', s, p'_0) \equiv p' - p'_\pi = 0 \tag{4.17a}$$

$$p'_\pi = p'_0\, l_1(s) + l_2(s) \tag{4.17b}$$

où p'_0 et p'_π représentent respectivement les contraintes de préconsolidation à l'état saturé et à une succion donnée (et donc à π donnée). La formulation de p'_π donnée ici est inspirée de

2. C'est-à-dire que la contrainte effective isotrope initiale est égale à la contrainte de préconsolidation.

[Loret et Khalili, 2002] ; elle permet d'inclure la plupart des modèles cités plus tôt tout en gardant une expression relativement simple.

Les fonctions l_1 et l_2 permettent de rendre compte de l'augmentation de résistance du matériau (en étendant son domaine d'élasticité). Le choix de la formulation de ces fonctions est particulièrement important puisqu'il détermine la forme de la surface de charge dans le plan (p', s) et conditionne donc les capacités du modèle à rendre compte du phénomène d'effondrement. En outre, comme il sera vu plus tard, la fonction l_1 introduit un couplage entre la succion et l'écrouissage mécanique (voir l'Équation (4.24)) affectant ainsi la vitesse d'expansion de la surface de charge sous chargement plastique.

Pour ce qui concerne le domaine saturé, compte-tenu de la validité de la contrainte effective de Terzaghi et des observations expérimentales, il est supposé que la contrainte de préconsolidation reste constante (égale à la contrainte de préconsolidation saturée) pour les succions comprises entre 0 et s_e. En conséquence, dans ce domaine, la frontière élastique vérifie la relation suivante :

$$\forall s \in [0, s_e], \quad p'_\pi = p'_0 \tag{4.18}$$

Les relations (4.16) et (4.17b) ainsi que les remarques précédentes permettent de formuler les conditions suivantes pour les fonctions l_1 et l_2 :

$$\forall s \leq s_e, \quad l_1(s) = 1 \tag{4.19a}$$

$$\forall s > s_e, \quad \frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}s} > 0 \tag{4.19b}$$

$$\forall s \leq s_e, \quad l_2(s) = 0 \tag{4.19c}$$

$$\forall s > s_e, \quad \frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}s} > 0 \tag{4.19d}$$

$$\forall s > s_e, \quad p'_0 \frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}s} > \frac{\partial(p_g + \pi)}{\partial s} \tag{4.19e}$$

Ces fonctions doivent en outre assurer la convexité du domaine d'élasticité dans l'espace (p', s) (cette condition provient du principe du travail maximum).

La relation (4.18) mérite quelques commentaires. En supposant que la succion agit sur le sol comme un chargement isotrope, une augmentation de succion à contrainte totale constante nulle doit nécessairement approcher le point représentatif de l'état de contrainte de la limite élastique. En effet, le chargement hydrique va mobiliser une partie de la « réserve » élastique du matériau. Cette remarque peut paraître contradictoire avec la relation (4.18) mais il n'en est rien. Comme on peut le voir sur la Figure 4.2, dans le plan (p', s), le point représentatif de l'état de contrainte ne se déplace pas à p' constante mais à p' croissante, ce qui le rapproche de la limite élastique. Dans le plan (p, s), afin de tenir compte du même phénomène, c'est en fait la limite d'élasticité dans le domaine saturé qui décroît. Cette forme apparaît cependant étrange et la représentation dans le plan (p', s) est à ce titre plus « conventionnelle ».

4.2.2.4 Règle d'écoulement

La règle d'écoulement donne l'incrément de déformation plastique induit par l'incrément de chargement. Puisque la formulation du modèle tient compte d'une contrainte effective et par

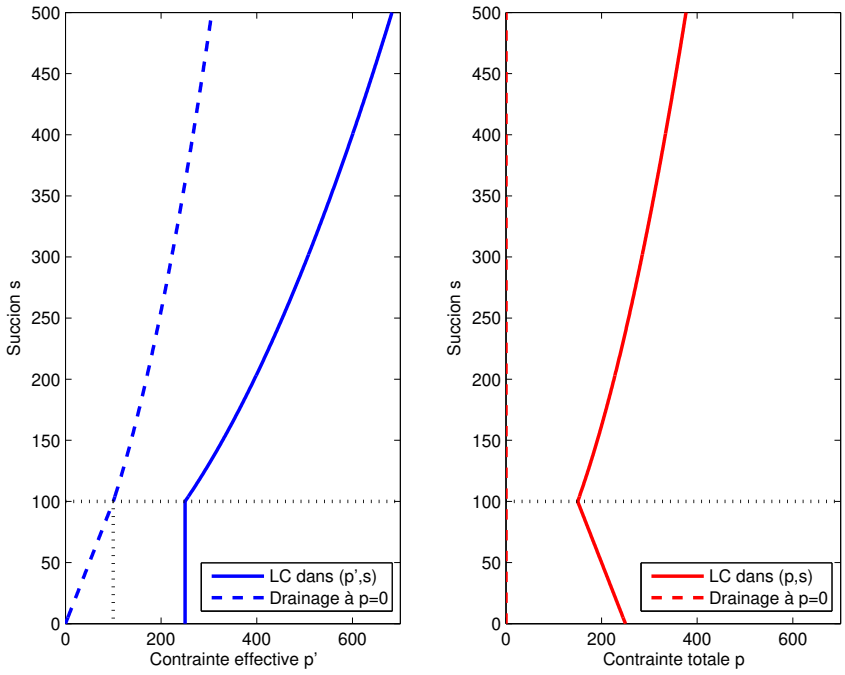


FIGURE 4.2 – Limite du domaine d'élasticité et chemin de drainage sous contrainte totale nulle dans les plan (p', s) et (p, s) (état initial : $p' = s = 0$ et $p'_0 = 250$, succion d'entrée d'air $s_e = 100$).

analogie avec la modélisation dans le cas saturé, la règle d'écoulement s'écrit nécessairement, pour ce qui concerne la partie isotrope, selon :

$$\mathrm{d}\epsilon_v^p = \mathrm{d}\lambda \, \frac{\partial g}{\partial p'} \tag{4.20}$$

avec $\mathrm{d}\epsilon_v^p$ l'incrément de déformation volumique plastique, $\mathrm{d}\lambda$ le multiplicateur plastique et g le potentiel plastique [3]. Le multiplicateur plastique $\mathrm{d}\lambda$ peut être calculé à partir de la condition de consistance : $f = 0$ et $\dot{f} = 0$. Celle-ci exprime le fait qu'au cours d'un chargement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte se situe et reste sur la surface de charge.

4.2.2.5 Loi d'écrouissage

La loi d'écrouissage exprime l'évolution de la variable d'écrouissage (et donc du domaine élastique) au cours d'un incrément de chargement plastique. Celle-ci peut être écrite de façon formelle sous la forme suivante :

$$\mathrm{d}p'_0 = \mathrm{d}\lambda \, \mathcal{H}(p'_0, s) \tag{4.21}$$

La définition de la fonction $\mathcal{H}(p'_0, s)$ dépend du modèle à partir duquel l'extension aux états partiellement saturés doit être menée.

La loi d'écrouissage (4.21) définit l'évolution de la contrainte de préconsolidation à succion nulle p'_0 et non pas de la contrainte à la succion actuelle p'_π. Il s'agit là encore d'obtenir de façon simple un modèle étendu tout en instaurant une transition simple entre conditions de saturation partielle et totale.

Remarquons que la formulation du modèle BBM [Alonso et al., 1990] induit une équivalence entre un écrouissage définit sur p'_π ou sur p'_0 (respectivement, p_0 et p_0^* en utilisant les notations

3. Le potentiel plastique g est différent du critère plastique f dans le cas d'une loi non-associée ; c'est généralement le cas en mécanique des sols.

des auteurs). Dans [Dangla, 2002], l'auteur montre que pour obtenir cette équivalence *i.e.* pour que $\frac{\mathrm{d}p'_\pi}{p'_\pi} = \frac{\mathrm{d}p'_0}{p'_0}$, ces contraintes doivent être reliées selon : $p'_\pi = p'_0\, l(s)$ ce qui fournit une condition sur la forme que la contrainte p'_π peut prendre.

Afin de vérifier l'effet de la fonction l_1 sur l'écrouissage, il est intéressant de calculer le module d'écrouissage, noté H. Par définition, celui-ci vérifie la relation :

$$\frac{\partial f}{\partial p'_0}\mathrm{d}p'_0 = -\mathrm{d}\lambda\, H \tag{4.22}$$

Le terme de gauche de l'équation (4.22) peut être réexprimé en utilisant la définition de la surface de charge (4.17) et la loi d'écrouissage (4.21). Il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial p'_0}\mathrm{d}p'_0 = -\mathrm{d}\lambda l_1(s)\mathcal{H}(p'_0, s) \tag{4.23}$$

L'expression du module d'écrouissage est alors déterminée par identification à partir des relations (4.22) et (4.23) :

$$H = l_1(s)\mathcal{H}(p'_0, s) \tag{4.24}$$

Cette relation montre le rôle particulier que joue la fonction l_1. Au delà de son influence sur la forme et la dimension du domaine élastique dans le plan (p', s) (comme le fait la fonction l_2), l_1 introduit un couplage entre les effets de la succion et l'écrouissage mécanique affectant par là-même la vitesse d'expansion de la limite élastique. [4]

4.2.3 Comparaison avec les approches récentes

Le modèle cadre proposé est maintenant confronté à différentes approches utilisant une contrainte effective et la succion comme variables d'état (voir le Tableau 4.1). On se reportera au Chapitre 3 pour la description de ces modèles.

Cette comparaison montre que le cadre général proposé ici permet d'inclure les différents modèles présentés, tant en ce qui concerne la pression équivalente que la limite d'élasticité isotrope (mis à part pour le modèle de Kohgo dans ce dernier cas).

4.2.4 Extension à un modèle tridimensionnel

L'extension de ce modèle isotrope à un modèle triaxial est relativement directe mais dépend du modèle à partir duquel l'adaptation aux états non-saturés est menée. Dans cette partie, le cas de l'adaptation du modèle Cam Clay Modifié est présenté afin d'illustrer la méthodologie proposée dans le cas de modèles formulés pour des états de contrainte triaxiaux. [5]

En conditions triaxiales, les tenseurs des contraintes et déformations se réduisent aux contraintes et déformations principales : $(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_3)$ et $(\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_3)$.

On introduit la pression moyenne totale $p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)$ et le déviateur de contrainte $q = \sigma_1 - \sigma_3$. La pression moyenne effective est donnée, comme dans le cas isotrope, par $p' = p + \pi$. La déformation volumique est donnée par $\epsilon_v = \epsilon_1 + 2\epsilon_3$ et la distorsion par $\epsilon_s = \frac{2}{3}(\epsilon_1 - \epsilon_3)$.

4. En effet, il est facile de montrer que le multiplicateur plastique $\mathrm{d}\lambda$ dépend du module d'écrouissage si bien que, selon l'équation (4.21), les variations de p'_0 dépendent de H et donc de $l_1(s)$.

5. L'extension à des modèles réellement tridimensionnels est identique mis à part que l'on doive remplacer les contraintes triaxiales par les invariants de contrainte leur correspondant.

Modèle	$\pi(s)$	$p'_\pi = p'_0\, l_1(s) + l_2(s)$
Kohgo *et al.*	$\forall s \leq s_e, \quad \pi = -p_g + s$ $\forall s > s_e, \quad \pi = -p_g + \left(s_e + \dfrac{s_c - s_e}{s^* + a_e} s^*\right)$	$p'_\pi = \mathrm{fct}(s,\, \epsilon_v^p)$
Abou Bekr	$\forall s \geq 0, \quad \pi = -p_g + \pi_{max}\, \tanh\left(\dfrac{s}{\pi_{max}}\right)$	$l_1(s) = 1$ $l_2(s) = k\,\pi$
Loret & Khalili	$\forall s \leq s_e, \quad \pi = -p_g + s$ $\forall s \leq s_e, \quad \pi = -p_g + s\,\chi$ avec $\chi = \left(\dfrac{s_e}{s}\right)^\gamma$ et $\gamma = 0.55$	$l_1(s) = 1 + \dfrac{k_m}{s_e}(s\,\chi - s_e)$ $l_2(s) = k_a(s\,\chi - s_e)$
Dangla	$\forall s \leq s_e, \quad \pi = -p_g + s$ $\forall s \geq s_e, \quad \pi = -p_g + s\,S_l + \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_{S_l}^{1} s(S)\mathrm{d}S$	$l_1(s) = l(s)$ $l_2(s) = 0$

TABLE 4.1 – Confrontation entre le modèle cadre et quelques modèles récents en ce qui concerne les définitions des pressions interstitielles équivalentes et des contraintes de préconsolidation.

Un mécanisme élastique est introduit, sous la forme générale suivante :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{C}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' \tag{4.25}$$

avec $\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^e$ l'incrément de déformation élastique et $\boldsymbol{C}$ le tenseur de souplesse (de dimension 4) pouvant éventuellement être fonction de l'état de contrainte ou de déformation.

Cette forme générale de loi élastique se simplifie, dans le cas triaxial et pour le modèle de Cam Clay Modifié. Les relations suivantes définissent les incréments élastiques des déformations volumiques et de cisaillement :

$$\mathrm{d}\epsilon_v^e = \frac{\kappa}{1+e_0}\frac{\mathrm{d}p'}{p'} \tag{4.26a}$$

$$\mathrm{d}\epsilon_s^e = \frac{1}{3G}\mathrm{d}q \tag{4.26b}$$

où κ et G sont des paramètres matériels et e_0 représente l'indice des vides à l'état initial, pris comme référence.

L'extension aux états non-saturés du modèle Cam Clay Modifié est soumise à trois hypothèses (voir par exemple [Dangla, 2002] ou [Loret et Khalili, 2002]). Dans tout plan (p', q) (*i.e.* à succion donnée), il est supposé que :

(i). la forme de la surface de charge est elliptique (comme c'est le cas à saturation) ;

(ii). la ligne d'état critique $q = M\,p'$ intersecte la surface de charge en son point de symétrie et sa pente M ne dépend pas de la succion ;[6]

(iii). la limite élastique en traction est nulle.

Compte-tenu de ces hypothèses, une formulation adéquate pour la surface de charge peut être donnée :

$$f(\boldsymbol{\sigma}', s, p'_0) \equiv q^2 - M\,p'\,(p'_\pi - p') = 0 \tag{4.27}$$

6. L'hypothèse concernant la pente de la ligne d'état critique est fondée sur certaines observations expérimentales montrant que l'angle de frottement interne ne dépend pas de la succion.

avec M un paramètre du matériau [7] et p'_π la contrainte de préconsolidation telle que définie dans (4.17b).

Il est à noter que la troisième hypothèse donnée ci-dessus concerne la limite en traction dans l'espace des contraintes effectives. Dans l'espace des contraintes totales, la définition même de la contrainte effective introduit bien une cohésion apparente. En effet, à une succion donnée, le critère plastique défini par la relation (4.27) est atteint, en traction, lorsque $p'(s)$ est nul, c'est-à-dire lorsque $p = -\pi$. On peut comparer cette valeur à la limite en traction définie dans le modèle BBM par $p = p_g - p_s = p_g - k\,s$ avec k un paramètre matériel.

On complète maintenant le modèle. Concernant la règle d'écoulement, elle doit également être étendue aux états de contraintes tridimensionnels :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^p = \mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \tag{4.28}$$

où $\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^p$ représente l'incrément de déformation plastique.

La loi d'écoulement peut être réexprimée en utilisant les variables triaxiales. Après avoir utilisé la règle de dérivation suivante :

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \frac{\partial g}{\partial p'}\frac{\mathbf{1}}{3} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{3\boldsymbol{s}}{2q} \tag{4.29}$$

avec $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma}' - (I'_1/3)\,\mathbf{1}$ le déviateur des contraintes et $I'_1 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}')$ le premier invariant du tenseur des contraintes effectives.

La loi (4.28) donne les incréments de déformation plastique volumique $\mathrm{d}\epsilon_v^p$ et de cisaillement $\mathrm{d}\epsilon_s^p$ suivants :

$$\mathrm{d}\epsilon_v^p = \mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial g}{\partial p'} \tag{4.30a}$$

$$\mathrm{d}\epsilon_s^p = \mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial g}{\partial q} \tag{4.30b}$$

$$\tag{4.30c}$$

Pour des raisons de simplicité, le potentiel plastique g peut être pris égal à f. Il est cependant possible d'introduire un potentiel plastique spécifique, comme c'est le cas dans le modèle BBM. Un paramètre α est introduit afin que la loi d'écoulement prédise des déformations latérales nulles pour des états de contraintes K_0. [8] Le potentiel plastique est alors défini de telle sorte que :

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial p} \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial g}{\partial q} = \alpha\frac{\partial f}{\partial q} \tag{4.32}$$

7. M peut être relié à l'angle de frottement interne ϕ selon la relation

$$M = \frac{6\,\sin(\phi)}{3 - \sin(\phi)}$$

8. Le coefficient de Jaky K_0 représente le rapport de la contrainte latérale à la contrainte verticale. Il est également appelé coefficient des terres au repos et est relié à l'angle de frottement interne ϕ selon la relation $K_0 = 1 - \sin(\phi)$. Compte-tenu de la relation entre M et ϕ, on peut exprimer K_0 selon

$$K_0 = \frac{6 - 2M}{6 + M}$$

.

On montre que le paramètre α peut être exprimé en fonction de M selon : [9]

$$\alpha = \frac{M\,(9-M)\,(3-M)}{9(6-M)}\frac{\lambda_0}{\lambda_0-\kappa} \tag{4.33}$$

Compte-tenu des hypothèses sur la surface de charge citées plus haut, l'extension triaxiale présentée ici conserve une variable d'écrouissage unique (p'_0). La loi d'écrouissage (4.21) y est donc reconduite. Afin de conserver la loi d'écrouissage du modèle Cam Clay Modifié original, la fonction d'écrouissage $\mathcal{H}$ suivante peut être utilisée :

$$\mathcal{H}(p'_0) = \frac{1+e_0}{\lambda_0-\kappa}p'_0 \tag{4.34}$$

Il est à noter que cette extension aux états tridimensionnels est rendue relativement simple du fait des trois hypothèses énumérées plus haut. En effet, dès lors que la limite élastique isotrope est définie (c'est-à-dire que la fonction $p'_\pi(s)$ est explicitée) la surface de charge devient complètement caractérisée par le biais de ces hypothèses. Comme il sera vu plus loin, cette simplification n'apparaît plus pour des modèles incluant des surfaces de charge différentes selon que des chemins de chargement isotrope ou déviatoires sont considérés.

En guise de synthèse, rappelons les modifications principales qui doivent être apportées à un modèle élastoplastique existant pour l'étendre aux conditions de saturation partielle :

Variables d'état : Les variables d'état considérées sont une contrainte effective et la succion. La définition de cette contrainte effective requiert la formulation d'une pression interstitielle équivalente.

Comportement élastique : Les relations définissant le comportement élastique sont conservées. Il suffit de remplacer la contrainte effective « saturée » par son homologue « non-saturée ».

Comportement plastique : une modification de la surface de charge pour tenir compte de la préconsolidation induite par la succion doit être effectuée. Les règles d'écoulement et d'écrouissage sont conservées ; elles doivent, le cas échéant, être réévaluées pour tenir compte de la nouvelle définition de la surface de charge (voir par exemple le calcul du multiplicateur plastique présenté ci-dessus).

4.3 Adaptation du modèle CJS aux états non-saturés

Dans la section précédente, une formulation générale permettant d'adapter un modèle élastoplastique donné aux états partiellement saturés a été présentée. Dans cette section, cette formulation est utilisée pour étendre un modèle avancé afin de démontrer les possibilités du cadre général proposé. Le modèle choisi est un modèle initialement développé pour modéliser le comportement des sols granulaires (sables et limons) saturés : le modèle CJS.

L'intérêt d'étendre ce type de modèles avancés aux sols non-saturés réside, entre autres, dans l'opportunité de réutiliser les capacités d'un modèle de comportement éprouvé afin de bénéficier de ses capacités à décrire finement le comportement des sols. Dans le cas du modèle CJS, il s'agit en particulier de tirer parti de ses possibilités de description du comportement volumique des milieux granulaires sous chargements complexes.

9. λ_0 et κ sont les paramètres classiques du modèle de Cam Clay.

4.3.1 Modèle CJS initial

Avant de présenter son extension au domaine non-saturé, le modèle CJS tel qu'utilisé dans ce travail est décrit. Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra se reporter aux références suivantes : [Cambou et Jafari, 1988], [Elamrani, 1992] et [Maleki et al., 2000].

Le modèle CJS (Cambou-Jaffari-Sidoroff) a été développé à l'École Centrale de Lyon pour modéliser le comportement des sols granulaires. Trois mécanismes de déformation sont inclus dans sa formulation : un mécanisme élastique non-linéaire et deux mécanismes plastiques. Ces deux derniers caractérisent le matériau sous chargement isotrope et déviatoire ; ils sont soumis à un écrouissage isotrope dans le cas du mécanisme plastique isotrope et à la fois isotrope et cinématique dans le cas du mécanisme plastique déviatoire.

Les effets visqueux ne sont pas pris en compte dans la version du modèle utilisée ici : le comportement du matériau est supposé indépendant du temps (et de la vitesse de chargement). [10]

La coexistence des trois mécanismes de déformation dans le modèle CJS est la conséquence d'une hypothèse de partition du tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ en trois contributions, l'une élastique $\boldsymbol{\epsilon}^e$ et les deux autres plastiques, $\boldsymbol{\epsilon}^{ip}$ et $\boldsymbol{\epsilon}^{dp}$ pour, respectivement, les mécanismes isotrope et déviatoire :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^{ip} + \boldsymbol{\epsilon}^{dp} \tag{4.35}$$

Les différents mécanismes de déformation, élastique et plastiques, sont maintenant présentés.

N.B. : la contrainte effective qui intervient dans la présentation du modèle CJS faite ici est la contrainte de Terzaghi ($\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_l\mathbf{1}$). La formulation décrite ici concerne le modèle initial, écrit pour des milieux granulaires saturés.

4.3.1.1 Mécanisme élastique

Le mécanisme élastique est non-linéaire et les déformations élastiques sont définies de façon incrémentale selon la relation de type hypoélastique suivante :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^e = \frac{\mathbf{1}}{9\,K^e}\,\mathrm{d}I_1' + \frac{1}{2\,G^e}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{4.36}$$

avec I_1' le premier invariant du tenseur des contraintes et $\boldsymbol{s}$ le déviateur des contraintes. Les modules de rigidité K^e et de cisaillement G^e sont définis comme suit :

$$K^e = K_0^e\left(\frac{I_1'}{3\,p_{atm}}\right)^n \tag{4.37}$$

$$G^e = 3K^e\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} \tag{4.38}$$

Il est à noter que le module de cisaillement est déduit du coefficient de Poisson ν. Les deux modules dépendent non linéairement de la contrainte effective moyenne à l'état actuel.

Les paramètres associés au mécanisme élastique sont donc K_0^e, ν et n.

p_{atm} représente la pression atmosphérique, prise comme référence.

10. Toutefois, dans certaines applications des phénomènes de transport pourront intervenir (écoulement de la (des) phase(s) fluides). La solution du problème fera alors intervenir le temps. C'est le cas, par exemple, pour l'étude de problèmes de consolidation. Il ne s'agit pas, cependant, d'un comportement visqueux mais plutôt d'effets différés dus aux couplages hydromécaniques.

4.3.1.2 Mécanisme plastique isotrope

La surface de charge isotrope est représentée, dans l'espace des contraintes effectives, par un plan orthogonal à l'axe isotrope (OI'_1). Elle est définie par la relation :

$$f^i(\boldsymbol{\sigma}', Q_0) \equiv \frac{I'_1}{3} - Q_0 = 0 \tag{4.39}$$

avec Q_0 la contrainte effective moyenne maximale à laquelle le matériau a été soumis au cours de son histoire. Q_0 joue le rôle de variable d'écrouissage pour le mécanisme plastique isotrope.

Pour ce qui concerne ce mécanisme plastique, une loi d'écoulement associée a été adoptée si bien que le potentiel plastique isotrope g^i s'identifie au critère de plasticité :

$$g^i \equiv f^i \tag{4.40}$$

Ce choix amène à la définition de la règle d'écoulement suivante donnant, de façon classique, l'incrément de déformation plastique isotrope $\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^{ip}$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^{ip} = \mathrm{d}\lambda^i \frac{\partial f^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \tag{4.41}$$

où $\mathrm{d}\lambda^i$ représente le multiplicateur plastique associé au mécanisme plastique isotrope ; il est calculé à partir de la condition de consistance.

La loi d'écrouissage donnant les variations de Q_0 est donnée par la relation :

$$\mathrm{d}Q_0 = K_0^p \left(\frac{Q_0}{p_{atm}}\right)^n \mathrm{d}q^i \tag{4.42}$$

avec q^i une variable interne thermodynamiquement associée à la force Q_0 selon la relation (cette relation représente la loi d'écoulement, associée, de la variable q^i) :

$$\mathrm{d}q^i = -\mathrm{d}\lambda^i \frac{\partial f^i}{\partial Q_0} \tag{4.43}$$

Tenant compte de la définition du critère plastique (cf. Équation (4.39)), il vient :

$$\mathrm{d}q^i = \mathrm{d}\lambda^i \tag{4.44}$$

Par définition, le module d'écrouissage H^i associé au mécanisme plastique est donné par la relation :

$$\mathrm{d}\lambda^i \, H^i = -\frac{\partial f^i}{\partial Q_0} \, \mathrm{d}Q_0 \tag{4.45}$$

Les équations (4.39), (4.42) et (4.43) permettent d'exprimer ce module de la façon suivante :

$$H^i = K_0^p \left(\frac{Q_0}{p_{atm}}\right)^n \tag{4.46}$$

Les paramètres associés au mécanisme plastique isotrope sont K_0^p et n (ce dernier ayant déjà été introduit dans la définition du mécanisme élastique.)

4.3.1.3 Mécanisme plastique déviatoire

La surface de charge associée au mécanisme plastique déviatoire est définie par la relation :

$$f^d(\boldsymbol{\sigma}', R_e, \boldsymbol{X}) \equiv q_{II}\ h(\theta_{\boldsymbol{q}}) - R_e\ I_1' = 0 \tag{4.47}$$

Dans l'espace des contraintes effectives, la surface de charge forme un cône dont l'angle solide moyen au sommet vaut R_e et dont la déviation de l'axe par rapport à l'axe (OI_1') est donnée par le tenseur $\boldsymbol{X}$. Il s'agit d'une surface convexe à symétrie ternaire. Les grandeurs R_e et $\boldsymbol{X}$ jouent le rôle de variables d'écrouissage, isotrope pour R_e et cinématique pour $\boldsymbol{X}$.

Le tenseur $\boldsymbol{q}$ est un représentant du déviateur des contraintes $\boldsymbol{s}$ introduit dans un changement de repère afin de tenir compte de la déviation de l'axe de la surface de charge due à l'écrouissage cinématique. Ce tenseur $\boldsymbol{q}$ est défini par :

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{s} - I_1'\ \boldsymbol{X} \tag{4.48}$$

Les tenseurs $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{X}$ sont des déviateurs. q_{II} et $\theta_{\boldsymbol{q}}$ représentent respectivement le second invariant et l'angle de Lode du tenseur $\boldsymbol{q}$. Pour un tenseur $\boldsymbol{t}$ donné, ils sont définis comme suit :

$$t_{II} = \sqrt{\boldsymbol{t} : \boldsymbol{t}} = \sqrt{t_{ij} t_{ij}} \tag{4.49}$$

$$\cos(3\theta_{\boldsymbol{t}}) = \sqrt{54}\,\frac{\det \boldsymbol{t}}{{t_{II}}^3} \tag{4.50}$$

La fonction $h(\theta_{\boldsymbol{q}})$ permet de rendre compte de la dissymétrie entre le comportement en compression et en extension. Elle est donnée par :

$$h(\theta_{\boldsymbol{q}}) = \Big(1 - \gamma \cos(3\theta_{\boldsymbol{q}})\Big)^{\frac{1}{m}} \tag{4.51}$$

γ est un paramètre matériel influençant la forme de la surface de charge. Il est soumis à certaines conditions : afin de respecter la convexité de la surface de charge, on peut montrer que γ doit appartenir à l'intervalle $\left[-\sqrt{11/15}; \sqrt{11/15}\right]$. De plus, les observations expérimentales imposent que ce paramètre soit positif. On retient donc que γ vérifie la relation $0 < \gamma < \sqrt{11/15}$.
Le paramètre m est pris égal à 6.

La Figure 4.3 représente la surface de charge associée au mécanisme déviatoire dans un plan déviatoire ainsi que les tenseurs $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{X}$. La Figure 4.4 quant à elle montre l'influence de γ sur la forme de la surface de charge.

Pour améliorer la description fournie par le modèle, notamment en ce qui concerne les déformations volumiques, un potentiel plastique est défini afin de prendre en compte le concept d'état caractéristique introduit par Luong (1978). Cet état correspond à des déformations volumiques plastiques nulles sous une sollicitation déviatoire :

$$\mathrm{d}\epsilon_v^{dp} = 0 \tag{4.52}$$

Ce potentiel plastique permet donc de modéliser un comportement volumique dilatant ou, au contraire, contractant selon l'état de contrainte du matériau.

Pour tenir compte de cet état caractéristique, une surface dite caractéristique est introduite ; sa forme est supposée identique à celle de la surface de charge. Elle est définie par l'équation :

$$f^c(\boldsymbol{\sigma}') \equiv s_{II}\ h(\theta_{\boldsymbol{s}}) - R_c\ I_1' = 0 \tag{4.53}$$

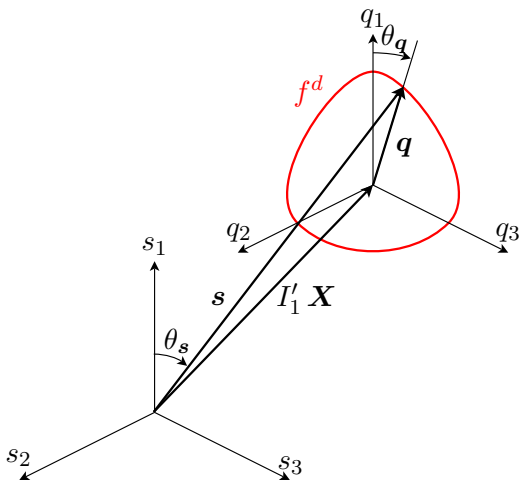
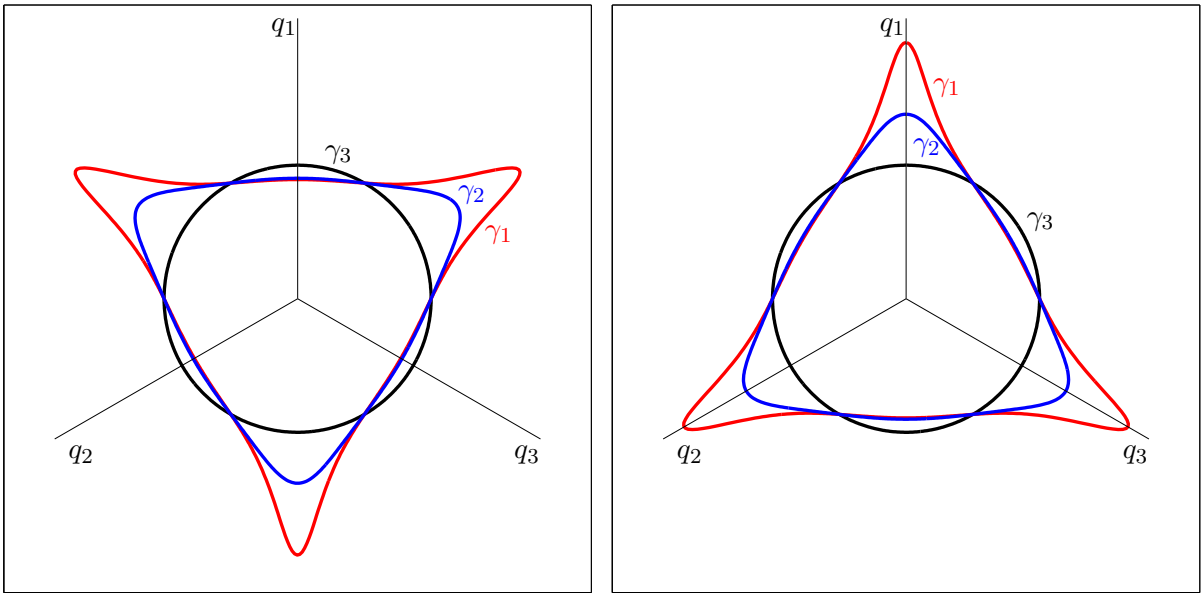


FIGURE 4.3 – Représentation de la surface de charge déviatoire dans un plan déviatoire (à I_1' fixé).



(a) γ négatif ($\gamma_1 = -0.98$, $\gamma_2 = -\sqrt{11/15}$, $\gamma_3 = 0$)

(b) γ positif ($\gamma_1 = 0.98$, $\gamma_2 = \sqrt{11/15}$, $\gamma_3 = 0$)

FIGURE 4.4 – Influence du paramètre γ sur la forme de la surface de charge déviatoire (représentation dans un plan déviatoire à I_1' fixé).

Cette surface n'est pas affectée par l'écrouissage de la surface de charge : la génératrice ainsi que l'angle au sommet du cône qu'elle forme dans l'espace des contraintes sont constants et valent respectivement (OI_1') et R_c. R_c est donc une constante matérielle.

Cette surface délimite le domaine de l'espace des contraintes effectives pour lequel un incrément de chargement entraînera un comportement volumique contractant. A l'extérieur de cette surface caractéristique, le comportement volumique sera dilatant.

Le potentiel plastique déviatoire n'est pas introduit explicitement : il découle implicitement de l'introduction d'une condition cinématique sur l'incrément de déformation volumique plastique engendré par le mécanisme plastique $\mathrm{d}\epsilon_v^{dp}$:

$$\mathrm{d}\epsilon_v^{dp} = \beta_0 \left(\frac{s_{II}}{s_{IIc}} - 1 \right) \frac{\left| \boldsymbol{s} : \mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^{dp} \right|}{s_{II}} \tag{4.54}$$

où

$$s_{IIc} = R_c \frac{I_1'}{h(\theta_{\boldsymbol{s}})} \tag{4.55}$$

et $\theta_{\boldsymbol{s}}$ l'angle de Lode du déviateur des contraintes $\boldsymbol{s}$. Le paramètre β_0 caractérise la dilatance. [11]

Cette condition cinématique introduit un couplage entre les déformations volumiques plastiques associées au mécanisme déviatoire et le déviateur des contraintes. Elle rend le modèle capable de prédire des déformations volumiques sous chargement purement déviatoire.

Cette dernière amène alors à la définition suivante pour le potentiel plastique [Elamrani, 1992] :

$$\frac{\partial g^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \frac{\partial f^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \left[\frac{\partial f^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{n} \right] \boldsymbol{n} \tag{4.56}$$

où

$$\boldsymbol{n} = \frac{\beta' \dfrac{\boldsymbol{s}}{s_{II}} - \mathbf{1}}{\sqrt{\beta'^2 + 3}} \tag{4.57}$$

$$\beta' = \beta_0 \left[\frac{s_{II}}{s_{IIc}} - 1 \right] \mathrm{sign}(\boldsymbol{s} : \mathrm{d}\boldsymbol{e}^{dp}) \tag{4.58}$$

$\boldsymbol{e}^{dp}$ représente le déviateur des déformations associées au mécanisme plastique déviatoire.

L'incrément de déformation associé au mécanisme plastique déviatoire est alors déduit de façon classique à partir du potentiel plastique g^d :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^{dp} = \mathrm{d}\lambda^d \frac{\partial g^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \tag{4.59}$$

où $\mathrm{d}\lambda^d$ correspond au multiplicateur plastique associé au mécanisme déviatoire. Il est déterminé à partir de la condition de consistance sur f^d.

Il reste à définir les lois d'écrouissage liées à ce mécanisme ; elles donnent les variations des grandeurs R_e et $\boldsymbol{X}$.

11. Le paramètre de dilatance β_0 (négatif) est relié à l'angle de dilatance ψ du modèle de Mohr-Coulomb selon :

$$\beta_0 = \frac{-2\sqrt{6}\sin\psi}{3 - \sin\psi}$$

.

La loi d'écrouissage isotrope relie la force thermodynamique R_e à une variable interne p (flux thermodynamique associé) de la façon suivante :

$$\mathrm{d}R_e = \mathcal{G}(p)\mathrm{d}p \tag{4.60a}$$

$$\mathcal{G}(p) = \frac{A}{(1+Bp)^2} \tag{4.60b}$$

avec A et B deux paramètres du modèle. Il est à noter que la relation (4.60a) peut être intégrée (en considérant un état initial pour lequel $R(p=0)=0$) et donne directement R_e en fonction de p :

$$R_e = \frac{Ap}{1+Bp} \tag{4.61}$$

Sous cette forme, il apparaît clairement que R_e tend asymptotiquement vers une limite valant $R_m = A/B$. Cette valeur représente le rayon maximal que peut atteindre la surface de charge au cours d'un chargement plastique. Comme nous le verrons plus tard, le rayon R_m ne doit pas être confondu avec le rayon correspondant à la résistance ultime du matériau.

La loi d'évolution de la variable interne p est donnée par :

$$\mathrm{d}p = -\left(\frac{I_1'}{3p_{atm}}\right)^{-3/2} \mathrm{d}\lambda^d \, \frac{\partial f^d}{\partial R_e} \tag{4.62}$$

Il est à noter que l'introduction du terme $\left(\frac{I_1'}{3p_{atm}}\right)^{-3/2}$ rend la liaison entre p et R_e non-associée.

Concernant l'écrouissage cinématique, la force $\boldsymbol{X}$ est reliée à la variable interne $\boldsymbol{x}$ selon la relation incrémentale suivante :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = a \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4.63}$$

où a est un paramètre.

Les variations de $\boldsymbol{x}$ sont là-encore données dans un formalisme non-standard :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}\lambda^d \, I_1' \left[\boldsymbol{Q} - \phi \, \boldsymbol{X}\right] \left(\frac{I_1'}{3p_{atm}}\right)^{-3/2} \tag{4.64}$$

avec $\boldsymbol{Q}$ étant défini comme la partie déviatoire $\mathrm{dev}(\cdot)$ de $\frac{\partial f^d}{\partial \boldsymbol{q}}$:

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{h^{m-1}(\theta_{\boldsymbol{q}})} \left[\left(1 + \gamma \frac{3-m}{m} \cos(3\theta_{\boldsymbol{q}})\right) \frac{\boldsymbol{q}}{q_{II}} - \frac{\gamma}{m} q_{II} \cos(3\theta_{\boldsymbol{q}}) \mathrm{dev}(\boldsymbol{q}^{-1})\right] \tag{4.65}$$

et ϕ étant donné par (ϕ_1 et ϕ_2 étant des paramètres matériels) :

$$\phi = \phi_0 \, Q_{II} \, h(\theta_{\boldsymbol{s}}) = \left(\phi_1 \frac{I_1'}{3\,p_{atm}} + \phi_2\right) Q_{II} \, h(\theta_{\boldsymbol{s}}) \tag{4.66}$$

On montre que le module d'écrouissage H^d associé au mécanisme déviatoire est donné par la relation suivante :

$$H^d = I_1^2 \left(\frac{I_1'}{3\,p_{atm}}\right)^{-1.5} \left[\mathcal{G}(p) + a\boldsymbol{Q} : (\boldsymbol{Q} - \phi \boldsymbol{X})\right] \tag{4.67}$$

Les paramètres associés au mécanisme plastique déviatoire sont donc les suivants : γ, β_0, R_c, A, B, a, ϕ_1 et ϕ_2.

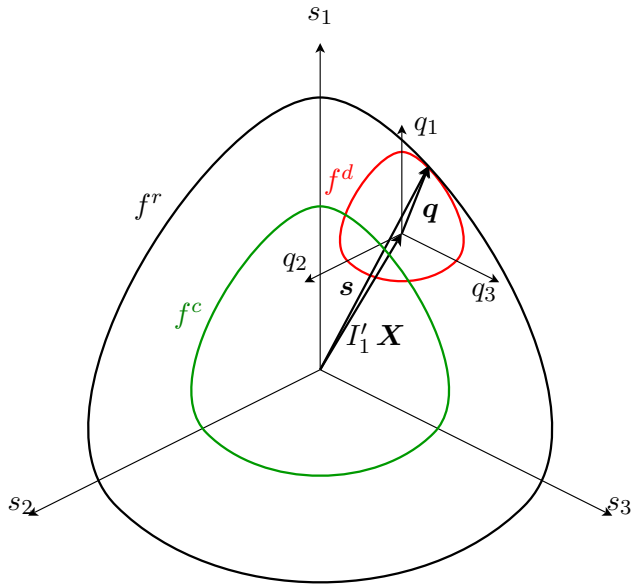


FIGURE 4.5 – Surfaces associées au mécanisme plastique déviatoire : représentation bidimensionnelle dans un plan déviatoire.

Notons que le rayon initial R_e de la surface de charge déviatoire devra être identifié mais qu'il ne s'agit pas à proprement parler d'un paramètre matériel (R_e représente d'ailleurs une variable d'écrouissage du modèle). C'est d'ailleurs le cas pour d'autres « paramètres cachés » tels que l'indice des vides initial ou la valeur initiale du tenseur $\boldsymbol{X}$. Ces grandeurs caractérisent l'état initial du matériau et dépendent de son histoire de sollicitation.

Une dernière surface est introduite dans le modèle CJS. Elle est notée f_r et correspond à la surface de rupture : elle permet de rendre compte d'une rupture pouvant survenir sur certains chemins de sollicitation et délimite les états de contrainte admissibles. En fait, cette surface n'est pas définie explicitement dans le modèle CJS. Son existence provient de la définition des relations contrôlant l'évolution des variables d'écrouissage R_e et $\boldsymbol{X}$: ces deux relations admettent des valeurs limites lorsque les variables internes respectives deviennent grandes.

Comme dans le cas de la surface caractéristique, la surface de rupture possède une forme similaire à celle de la surface de charge. En notant, R_r l'angle solide au sommet, celle-ci est définie par l'équation suivante :

$$f^r(\boldsymbol{\sigma}') \equiv s_{II} h(\theta_{\boldsymbol{s}}) - R_r\, I_1' = 0 \tag{4.68}$$

Il est alors démontré que le rayon moyen de l'enveloppe de rupture est fonction du rayon limite de la surface de charge et de la fonction ϕ_0 [Elamrani, 1992] :

$$R_r = R_m + \frac{1}{\phi_0} \tag{4.69}$$

On a donc, en général, $R_r \neq R_m$.

La Figure 4.5 montre les différentes surfaces associées au mécanisme plastique déviatoire dans un plan déviatoire. La Figure 4.6 présente l'ensemble des surfaces associées aux mécanismes plastiques du modèle CJS dans l'espace des contraintes effectives.

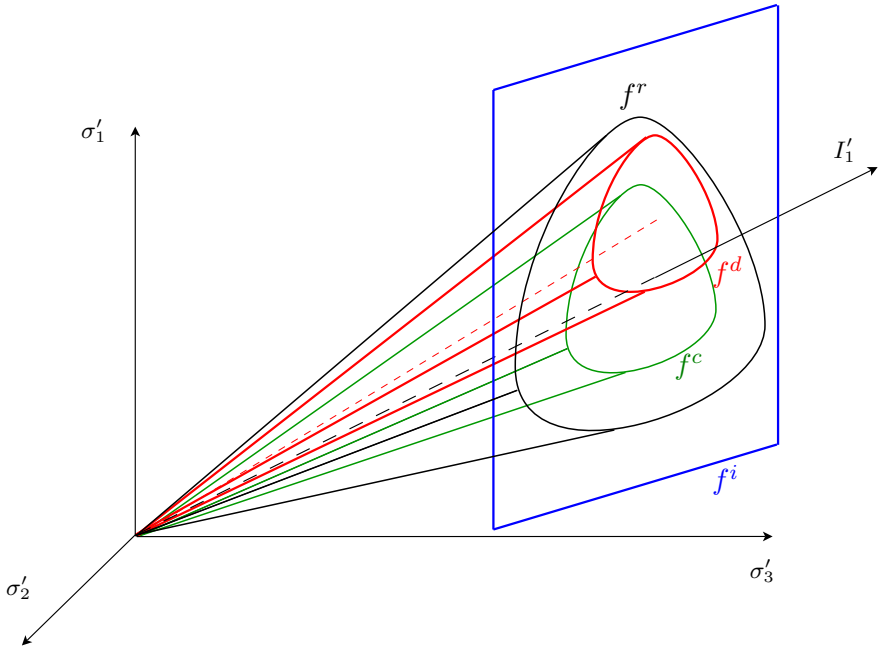


FIGURE 4.6 – Surfaces associées aux mécanismes plastiques du modèle CJS : représentation tridimensionnelle dans l'espace des contraintes effectives.

4.3.2 Extension du modèle CJS aux états partiellement saturés

Le cadre méthodologique présenté plus tôt est maintenant utilisé afin d'étendre le modèle CJS aux états partiellement saturés. En particulier, il sera vu que cette extension peut être réalisée relativement facilement à l'aide du cadre apporté par la formulation générale.

4.3.2.1 Variables d'état

Conformément au cadre de travail déjà évoqué, les variables d'état utilisées sont une contrainte effective (particulière) et la succion. La pression interstitielle équivalente, nécessaire pour définir la contrainte effective en question, est basée sur les travaux de Dangla et Coussy [Dangla, 2001, Coussy et Dangla, 2002] (on pourra également se reporter au Chapitre 1 qui rappelle le cadre thermodynamique permettant d'aboutir à la formulation de cette pression équivalente) :

$$\pi(s) = \begin{cases} -p_g + s & \text{pour } s \leq s_e \\ -p_g + s\,S_l + \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_{S_l}^{1} s(S)\mathrm{d}S & \text{pour } s > s_e \end{cases} \tag{4.70}$$

La fonction $s(S_l)$ qui apparaît dans la définition de $\pi(s)$ (dans le terme intégral représentant l'énergie des interfaces) sera, en première approximation, supposée biunivoque. La relation empirique proposée par Brooks et Corey sera employée par la suite :

$$S_l = \left(\frac{s_e}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{4.71}$$

où $\alpha \geq 1$ est une constante matérielle.
Dans ce cas, pour $s > s_e$, la pression $\pi(s)$ est donnée par :

$$\pi(s) = -p_g + s \times \left(\frac{s_e}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{s_e}{1-\alpha} \times \left(1 - \frac{s_e}{s}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) \qquad (\text{si } \alpha \neq 1) \tag{4.72}$$

$$\pi(s) = -p_g + s \times \left(\frac{s_e}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{s_e}{\alpha} \times \ln(\frac{s_e}{s}) \qquad (\text{si } \alpha = 1) \tag{4.73}$$

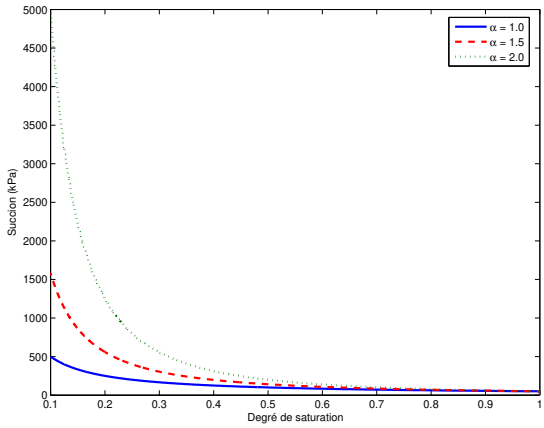
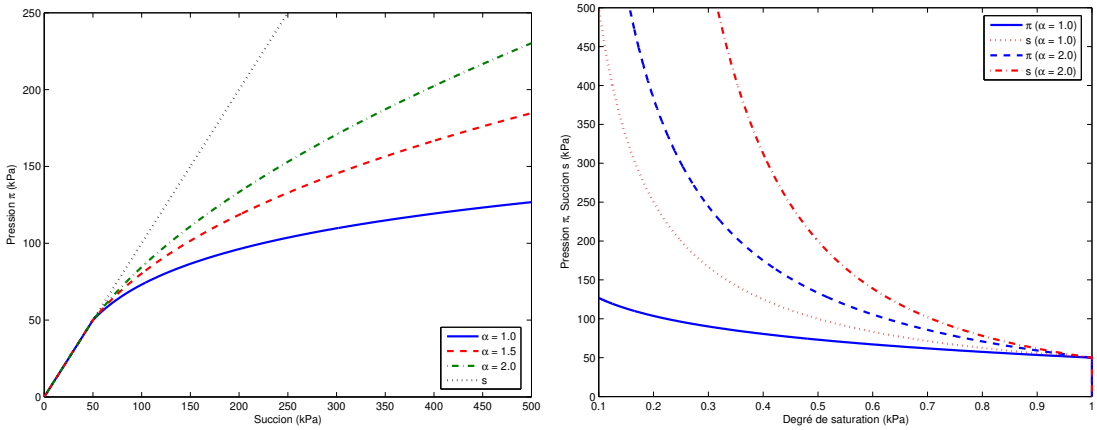


FIGURE 4.7 – Influence du paramètre α sur l'allure des courbes de sorption (modèle de Brooks & Corey, $s_e = 50$ kPa).



(a) $\pi(s)$ en fonction de s.

(b) $\pi(s)$ en fonction de S_l.

FIGURE 4.8 – Influence du paramètre α sur la pression interstitielle équivalente $\pi(s)$ (modèle de Brooks & Corey, $s_e = 50$ kPa).

La Figure 4.7 présente l'influence du paramètre α du modèle de Brooks et Corey sur l'allure des courbes de sorption. Les Figures 4.8 illustrent quant à elles cette influence sur la pression interstitielle équivalente $\pi(s)$.

Dès lors que la pression interstitielle équivalente est définie, la contrainte effective est donnée par la relation (4.10), rappelée ici :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \pi\ \mathbf{1} \tag{4.74}$$

D'une façon générale, la formulation du nouveau modèle doit tenir compte de la modification de la contrainte effective : la contrainte effective « saturée » doit être remplacée par la contrainte modifiée définie en (4.10) dans toutes les relations où elle apparaissait.

Comme il a été montré dans la formulation générale présentée plus tôt, la modification d'un modèle afin de l'étendre aux états de saturation partielle ne concerne, en pratique, que la définition des surfaces de charge (en dehors de la prise en compte de la nouvelle contrainte effective bien-sûr). Les autres équations (règles d'écoulement, lois d'évolution) ne sont pas modifiées par la nouvelle définition des critères de plasticité (du moins en ce qui concerne leur définition propre). Comme nous le verrons par la suite, certaines modifications devront cependant être apportées (aux modules d'écrouissage notamment) mais celles-ci sont directes, dès lors que le formalisme thermodynamique du modèle CJS est respecté.

Les différents mécanismes de déformation du modèle CJS sont maintenant présentés en y intégrant les effets de la saturation partielle du matériau.

4.3.2.2 Mécanisme élastique

Le mécanisme élastique du modèle CJS reste défini par la même équation :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^e = \frac{\mathbf{1}}{9\,K^e}\,\mathrm{d}I_1' + \frac{1}{2\,G^e}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{4.75}$$

On veillera toutefois à utiliser la contrainte effective définie en (4.10) que cela soit dans la relation (4.75) ou dans les définitions des modules K^e et G^e qui restent identiques à celles données aux équations (4.37) et (4.38). Les modules de rigidité dépendant de la contrainte effective, la rigidification du matériau quand la succion augmente sera directement prise en compte par le modèle.

4.3.2.3 Mécanisme plastique isotrope

L'adaptation du mécanisme plastique isotrope ne pose pas de problème particulier puisque la méthodologie présentée plus tôt s'applique tout à fait. Afin de prendre en compte l'écrouissage lié à la succion, la surface de charge est reformulée selon la relation suivante :

$$f^i(\boldsymbol{\sigma}', s, Q_0) \equiv \frac{I_1'}{3} - Q_\pi(s) = 0 \tag{4.76}$$

La contrainte $Q_\pi(s)$ est donc l'équivalent, pour une succion s donnée, de la contrainte Q_0 à l'état saturé. Elles sont liées par la relation suivante :

$$Q_\pi(s) = Q_0\ l_1(s) + l_2(s) \tag{4.77}$$

où la définition des fonctions $l_1(s)$ et $l_2(s)$ est inspirée des travaux de Loret et Khalili :

$$l_1(s) = 1 + \frac{k_1}{p_{atm}}\Big(s\,S_l - s_e\Big) \tag{4.78a}$$

$$l_2(s) = k_2\Big(s\,S_l - s_e\Big) \tag{4.78b}$$

Ces fonctions vérifient la relation (4.18) et assurent ainsi la transition vers le comportement saturé.

Il est à noter que la relation (4.19e), qui impose que la variation en fonction de la succion de la limite élastique soit supérieure à celle de la pression interstitielle, introduit une condition sur les paramètres k_1 et k_2. On peut montrer que la condition $k_1 + k_2 \geq 1$ est suffisante.

Les lois d'écoulement (4.41) et d'écrouissage (4.42) du mécanisme plastique isotrope ne sont pas modifiées. La nouvelle définition de la surface de charge implique cependant de recalculer le module d'écrouissage. Par définition, ce dernier satisfait la relation suivante :

$$\mathrm{d}\lambda^i\, H^i = -\frac{\partial f^i}{\partial Q_0}\,\mathrm{d}Q_0 \tag{4.79}$$

ce qui donne, compte tenu de (4.76) ainsi que des lois d'évolution de Q_0 et d'écoulement de la variable interne q^i :

$$H^i = K_0^p\left(\frac{Q_0}{p_{atm}}\right)^n\; l_1(s)^2 \tag{4.80}$$

Cette relation est à mettre en parallèle avec l'expression du module d'écrouissage obtenue lors de la présentation du cadre général de modélisation (cf. Équation (4.24)). En particulier, on peut remarquer que la fonction $l_1(s)$ n'y apparaissait pas au carré. Dans le cas du mécanisme isotrope du modèle CJS, c'est le formalisme thermodynamique et, en particulier, l'utilisation de la variable interne q^i associée thermodynamiquement à la variable d'écrouissage Q_0 qui introduit cette puissance quadratique de la fonction $l_1(s)$. En effet, la loi d'écoulement qui relie ces deux variables (4.43), ajoute une dépendance vis-à-vis du critère plastique à la fonction d'écrouissage $\mathcal{H}(X, s)$ [12]. Elle s'identifie ici à :

$$\mathcal{H}(Q_0, s) = -K_0^p\left(\frac{Q_0}{p_{atm}}\right)^n\; \frac{\partial f^i}{\partial Q_0} \tag{4.81}$$

alors que dans le cas d'un modèle étendant le modèle de Cam Clay Modifié, cette fonction s'écrit :

$$\mathcal{H}(p_0', s) = \frac{1+e}{\lambda_0 - \kappa}\,p_0' \tag{4.82}$$

4.3.2.4 Mécanisme plastique déviatoire

Compte-tenu des observations expérimentales montrant que l'angle de frottement interne ne varie pas avec la succion, l'angle du cône de la surface de charge dans le modèle adapté doit rester constant lorsque la succion varie. Cependant, afin d'introduire la possibilité d'étendre (lorsque la succion augmente) le domaine élastique délimité par la surface de charge du mécanisme déviatoire, il est proposé de modifier la définition de cette surface comme suit :

$$f^d = q_{II}\; h(\theta_{\boldsymbol{q}}) - R_e\; I_1' - l_3(s) = 0 \tag{4.83}$$

12. Dans le cadre général, cette fonction était notée $\mathcal{H}(p_0', s)$ (voir la relation (4.21)). Le paramètre X représente ici une variable d'écrouissage isotrope quelconque.

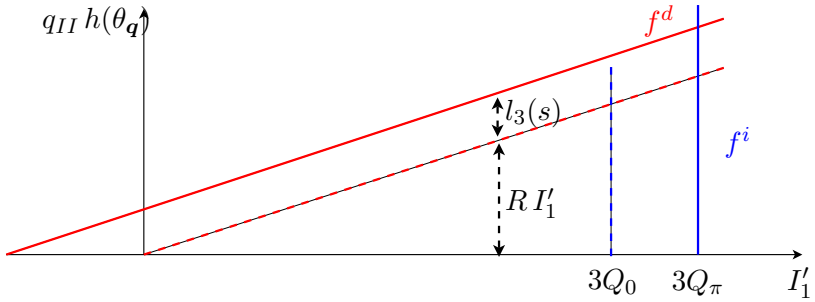


FIGURE 4.9 – Modèle CJS étendu : influence de la fonction $l_3(s)$ sur la surface de charge déviatoire (représentation des surfaces de charge isotrope et déviatoire dans l'espace $(I_1', q_{II}\,h(\theta_{\boldsymbol{q}}))$ à $\theta_{\boldsymbol{q}}$ et s donnés ; les traits pointillés représentent les surfaces de charge à saturation).

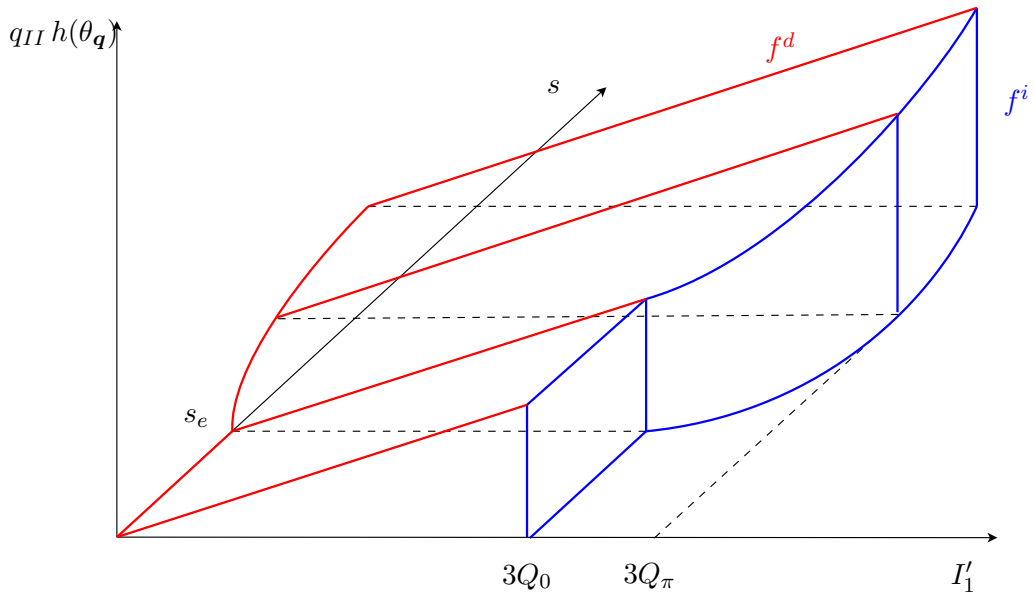


FIGURE 4.10 – Surfaces de charge isotrope et déviatoire du modèle CJS étendu (représentation dans l'espace $(I_1', q_{II}\,h(\theta_{\boldsymbol{q}}), s)$ à $\theta_{\boldsymbol{q}}$ donné).

avec $l_3(s)$ une fonction de la succion, définie de façon similaire à $l_2(s)$, c'est-à-dire :

$$l_3(s) = k_3(s\,S_l - s_e) \tag{4.84}$$

Cette proposition induit une translation de la surface de charge dans la direction des contraintes de traction (voir la Fig. 4.9).

Compte-tenu des modifications apportées à la surface de charge, il est aisé de montrer que le module d'écrouissage associé au mécanisme déviatoire n'est pas modifié par la prise en compte de la non-saturation. Il reste donné par la relation (4.67).
Les surfaces de charge sont représentées dans l'espace $(I_1', q_{II}\,h(\theta_{\boldsymbol{q}}), s)$ sur la Figure 4.10.

L'adaptation du modèle CJS aux milieux partiellement saturée en appliquant de façon stricte la méthodologie présentée plus tôt est maintenant réalisée. Cependant, une modification supplémentaire va être apportée au mécanisme plastique déviatoire. En effet, certaines observations expérimentales montrent que la succion joue un rôle non négligeable sur le comportement volumique sous chargement déviatoire. En particulier, la tendance du sol à présenter un

comportement volumique dilatant est augmentée lorsque la succion imposée est plus importante alors que la surface caractéristique semble ne pas être influencée (voir le Chapitre 2).

L'influence de la succion va donc être étendue à la définition du potentiel plastique par le biais de la dilatance (plus précisément, du paramètre β_0) alors que la définition de la surface caractéristique ne sera pas modifiée. Cette dépendance de la dilatance vis-à-vis de la succion est introduite de la façon suivante :

$$\beta(s) = \beta_0 \; l_4(s) \tag{4.85}$$

où la fonction $l_4(s)$ est définie de façon similaire à la fonction $l_1(s)$:

$$l_4(s) = 1 + \frac{k_4}{p_{atm}}(s\, S_l - s_e) \tag{4.86}$$

Le paramètre matériel $\beta(s)$ correspond maintenant à la dilatance à une succion s donnée (comme β_0 correspondait à la dilatance à saturation). Le potentiel plastique est alors obtenu de façon similaire au cas saturé (éq. (4.56)) mis à part que le coefficient de dilatance $\beta(s)$ se substitue à β_0.

Afin d'assurer la continuité de la description du comportement à la transition entre les domaines de saturation totale et partielle ainsi que la cohérence entre les modèles initial et étendu, les fonctions $l_i(s)$ sont soumises aux conditions suivantes dans le domaine saturé :

$$\forall s \leq s_e, \quad l_1(s) = l_4(s) = 1 \tag{4.87a}$$

$$\forall s \leq s_e, \quad l_2(s) = l_3(s) = 0 \tag{4.87b}$$

Le modèle CJS étendu compte finalement 14 paramètres « saturés », 2 paramètres liés à la courbe de sorption (s_e et α) et 4 paramètres provenant de son extension au domaine non-saturé (les coefficients k_i) de telle sorte que 20 paramètres doivent être identifiés à partir de données expérimentales.

4.4 Identification des paramètres CJS

Une stratégie d'identification des paramètres du modèle CJS étendu est maintenant proposée. Il convient de distinguer trois groupes de paramètres. Les premiers sont issus du modèle initial, les seconds proviennent de la définition de la contrainte effective [13] et les derniers accompagnent l'extension du modèle aux états de saturation partielle.

4.4.1 Paramètres CJS initiaux

Les paramètres CJS du modèle initial doivent être identifiés de la même façon qu'ils l'étaient lorsqu'il s'agissait de modéliser le comportement de sols secs ou saturés. Seules des données expérimentales à succion nulle et suffisamment riches permettront d'identifier à la fois qualitativement et quantitativement ces paramètres. On pourra se reporter à [Elamrani, 1992] et à [Maleki, 1998] pour une description de l'identification de ces paramètres.

13. Plus exactement, ils proviennent de la définition de la pression interstitielle équivalente.

4.4.2 Paramètres capillaires

Les paramètres issus de la définition de la pression interstitielle équivalente peuvent être distingués du reste des paramètres du modèle. En effet, ils n'y interviennent que par le biais de la définition de la courbe de sorption. En outre, compte-tenu des hypothèses faites dans ces travaux (indépendance du degré de saturation vis-à-vis de l'état de déformation), ces paramètres peuvent être déduits à partir d'essais de caractérisation purement hydriques.

Dans le cas de la modélisation de la courbe de sorption retenue ici, seuls les paramètres s_e et α sont concernés. Leur identification peut être menée à partir d'un essai de drainage-imbibition. Dans le cas où un cycle d'hystérésis serait présent dans les résultats expérimentaux, il pourra éventuellement être nécessaire de se caler sur l'une ou l'autre des branches, selon le type d'application à modéliser. Au contraire, la courbe modèle pourra représenter une « courbe moyenne » ne tenant pas compte de l'hystérésis.

Il est à noter que le paramètre s_e joue un rôle particulier et qu'il peut également être identifié à partir d'un essai de retrait : il est admis que la succion pour laquelle un échantillon atteint sa limite de retrait n'est autre que la succion d'entrée d'air (voir [Delage et Cui, 2000] par exemple).

Il convient en outre d'ajouter que ces paramètres, de par leur influence sur la forme de la pression interstitielle et par conséquent sur la contrainte effective, doivent être validés sur des chemins élastiques de chargements en contrainte totale et/ou en succion.

4.4.3 Paramètres CJS étendu

Les paramètres restants concernent l'extension du modèle aux états partiellement saturés. Leur identification nécessite des essais mécaniques réalisés à différentes valeurs de succion imposée.

L'identification la plus simple (et la plus rigoureuse) des paramètres k_1 et k_2 peut être faite à partir de plusieurs essais de compression isotrope afin d'identifier la forme de p'_π dans le plan (p', s). [14] En effet, ces paramètres agissent directement sur l'allure de la courbe de pression de préconsolidation dans le plan (p', s).

De façon générale, l'activation du mécanisme plastique isotrope dans tout essai mécanique peut constituer un moyen d'identification de ces deux paramètres.

Le rôle particulier joué par la fonction l_1 sur la vitesse d'écrouissage permet en outre de distinguer k_1 et k_2 au cours du processus d'identification.

En ce qui concerne le paramètre k_3 qui permet d'étendre le domaine élastique limité par le mécanisme déviatoire, son identification peut être réalisée à partir d'essais triaxiaux à succion imposée en repérant l'apparition de déformations plastiques.

4.5 Validation du modèle CJS étendu

L'objectif de cette partie est de valider le modèle CJS étendu sur divers chemins de sollicitations, correspondant à des essais homogènes [15]. Les prédictions du modèle lors de la simulation

14. Autrement dit, cela revient à identifier la courbe appelée LC dans le modèle de Barcelone.

15. Il est rappelé qu'un essai est dit homogène si, en tout point du chemin de sollicitation, les variables d'état décrivant le système formé par l'échantillon ne varient pas en fonction du point matériel considéré.

de ces essais sont donc analysées. Toutes les simulations présentées ici ont été réalisées à l'aide du logiciel Matlab.

4.5.1 Chemins de compression triaxiale

Des chemins de compression triaxiale sont d'abord considérés. Les contraintes axiale et radiale sont respectivement notées σ_1 et σ_3. Les essais modélisés constituent des chargements mécaniques axiaux (σ_1 est augmentée) à contrainte radiale σ_3 et succion constantes.

Le modèle CJS étendu est identifié sur des données expérimentales obtenues sur le limon de Jossigny. Ces essais ont été réalisés au CERMES (ENPC) et sont présentés dans la thèse de Cui [Cui, 1993]. Les essais expérimentaux retenus pour cette étude ont été réalisés à 5 succions distinctes : $s = 0$, 200, 400, 800, 1500 kPa et sous une contrainte radiale $\sigma_3 = 100$ kPa dans chaque cas.

Les paramètres « mécaniques » du modèle (c'est-à-dire les paramètres provenant de la formulation initiale) ont été identifiés à partir des courbes à succion nulle. En complément, les autres paramètres, directement reliés à la prise en compte de la non-saturation, ont été obtenus d'après les différentes courbes à succion non nulle. Pour l'ensemble des paramètres, cette identification a tenu compte des résultats dans les plans (ϵ_1, q) et (ϵ_1, ϵ_v).

Les résultats fournis par le modèle CJS étendu [16] après identification des paramètres sont confrontés aux données expérimentales sur la Figure 4.11. Cette figure montre un bon accord général entre les prédictions du modèle étendu et les données expérimentales. En outre, il est à noter que seules les courbes pour lesquelles la succion imposée valait $s = 0$ kPa et $s = 1500$ kPa ont été utilisées pour l'identification des paramètres. Les courbes restantes ($s = \{200,\ 400,\ 800\}$ kPa dans le plan (ϵ_1, ϵ_v) permettent donc de vérifier les capacités du modèle à prédire, une fois ses paramètres identifiés, le comportement d'un matériau. Dans le cas présent, il s'avère que cette prédiction est très satisfaisante.

Le modèle présenté ici est capable de rendre compte de l'augmentation globale de la rigidité du matériau, de sa résistance au cisaillement ainsi que de sa tendance à la dilatation lorsque la succion imposée à l'échantillon augmente. Cependant, le modèle CJS tel que présenté ici n'est pas capable de reproduire le comportement post-rupture caractérisé par un radoucissement après un pic du déviateur des contraintes.

Les paramètres identifiés ainsi que la valeur initiale de R_e et l'indice des vides initial e_0 sont donnés dans le Tableau 4.2. Il peut être remarqué que la valeur initiale de R_e a été choisie très faible (proche de zéro). De plus, le paramètre k_3 est pris nul. Ces valeurs impliquent que la surface de charge déviatoire est quasiment fermée dans l'espace des contraintes effectives (R_e faible) et cela, quelle que soit la valeur de la succion (k_3 nul). Ces choix induisent deux hypothèses sous-jacentes concernant le mécanisme déviatoire : il est supposé, d'une part, que le mode de préparation de l'échantillon n'a pas introduit d'écrouissage vis-à-vis du mécanisme plastique déviatoire et, d'autre part, que la succion ne produit pas d'écrouissage déviatoire. [17]

16. Les calculs effectués pour cette identification ne prennent en compte que l'écrouissage cinématique du mécanisme plastique déviatoire (désactivation de l'écrouissage isotrope du mécanisme déviatoire). L'utilisation d'une version restreinte du modèle CJS ne diminue pas les capacités de modèle puisque les chargements considérés sont monotones.

17. Ces hypothèses n'affectent bien sûr pas la présence éventuelle d'un écrouissage lié au mécanisme plastique isotrope.

Paramètre	Unité	Valeurs identifiées sur chemins triaxiaux	Valeurs identifiées sur chemins œdométriques
K_0^e	MPa	8.0	3.5
ν	–	0.125	0.3
γ	–	0.8	0.8
a	kPa^{-1}	0.6	0.6
ϕ_0	–	3.9	3.9
R_c	–	0.26	0.26
β_0	–	-0.2	-0.2
K_0^p	MPa	6.7	3.0
n	–	0.9	0.62
k_1	–	0.73	0.17
k_2	–	1.9	1.0
k_3	–	0.0	0.0
k_4	–	6.0	3.0
s_e	kPa	15.0	30.0
α	–	2.1	6.5
R_e	–	0.01	0.01
e_0	–	0.69	0.88

TABLE 4.2 – Paramètres CJS identifiés à partir des données expérimentales.

Il est intéressant de comparer les résultats du modèle proposé à ceux provenant de l'utilisation d'un modèle de référence pour sols non-saturés. Les résultats obtenus avec le modèle CJS (Figure 4.11) sont donc maintenant comparés à des résultats utilisant le modèle BBM de Barcelone. Cette confrontation est présentée à la Figure 4.12. Les paramètres du modèle BBM utilisés ici sont résumés dans le Tableau 4.3. Cette comparaison montre la capacité des deux modèles à simuler l'accroissement de la rigidité et de la résistance du matériau lorsque sa succion augmente. Le modèle CJS étendu montre cependant certains avantages dès lors qu'un comportement volumique complexe doit être modélisé. En particulier, la Figure 4.12 illustre la capacité du modèle CJS à rendre compte d'une phase de dilatance faisant suite à une phase contractante alors que le modèle BBM ne prédit qu'un comportement contractant tout au long de la sollicitation. Une dépendance de la dilatance vis-à-vis de la succion peut en outre être simulée par le modèle CJS étendu.

Cette comparaison suggère quelques remarques. Tout d'abord, précisons que l'on s'est plutôt intéressé à la prise en compte de la non-saturation par les deux modèles. Ce sont donc les courbes pour $s = 1500$ kPa qui sont significatives ici. Ajoutons ensuite qu'il ne s'agit aucunement de condamner le modèle de Barcelone. Il s'agit d'un modèle plutôt simple,[18] capable de rendre compte des principales caractéristiques du comportement des sols non-saturés. Les avantages présentés par le CJS ont d'ailleurs pour « prix » un plus grand nombre de paramètres à identifier alors que le modèle BBM, avec un nombre de paramètres bien plus petit, simule correctement les données expérimentales dans le plan (ϵ_1, q) ainsi que les déformations volumiques à saturation.[19]

18. Son appellation BBM fait d'ailleurs référence à ce caractère « basic ».
19. Ces bons résultats du modèles BBM proviennent du modèle de Cam Clay, bien adapté pour les sols fins et donc, généralement, pour les sols non-saturés.

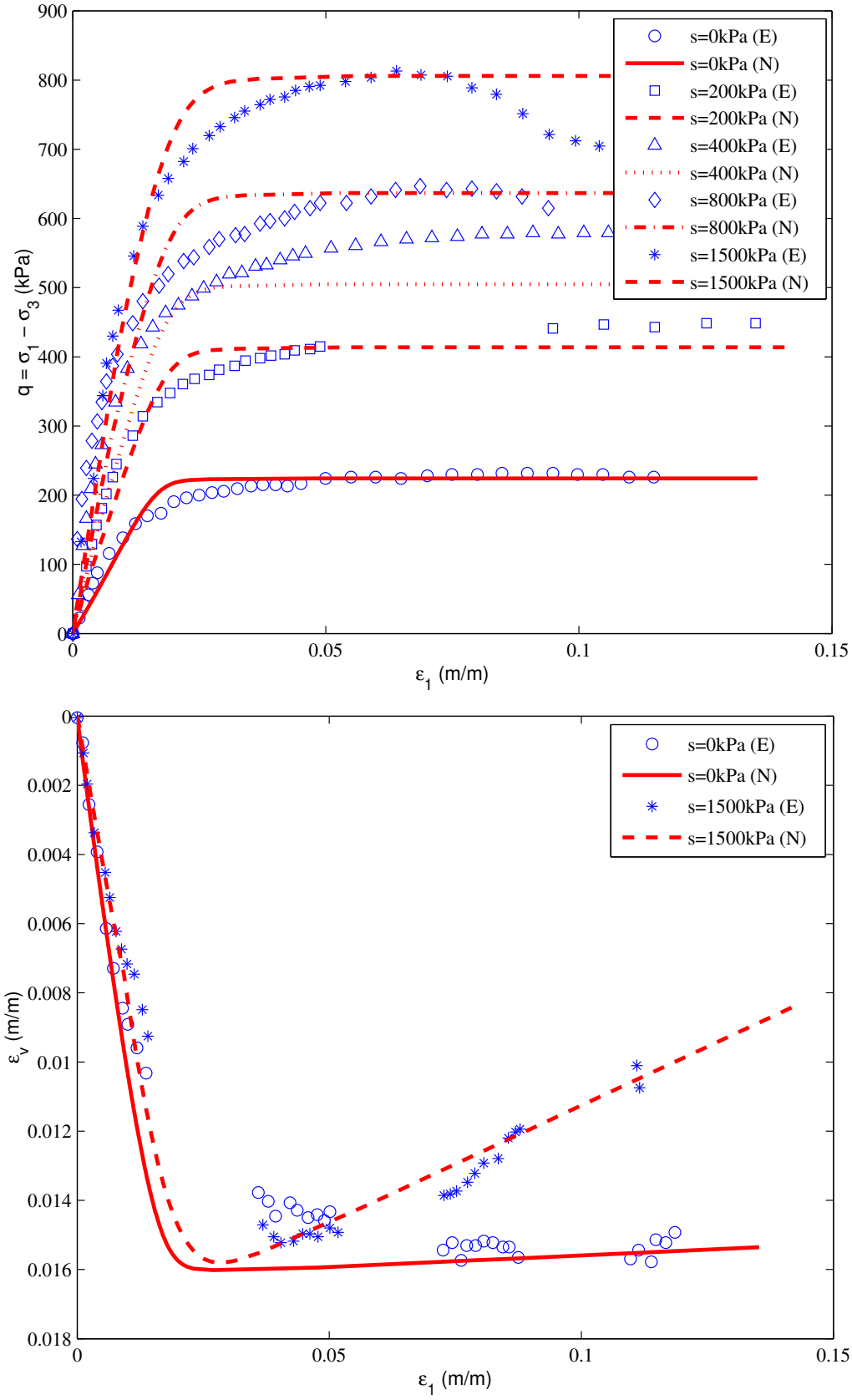


FIGURE 4.11 – Essais de compression triaxiale à $\sigma_3 = 100$ kPa : données expérimentales (E) d'après [Cui, 1993] et numériques (N) utilisant le modèle CJS étendu ; déviateur des contraintes et déformations volumiques en fonction des déformations axiales.

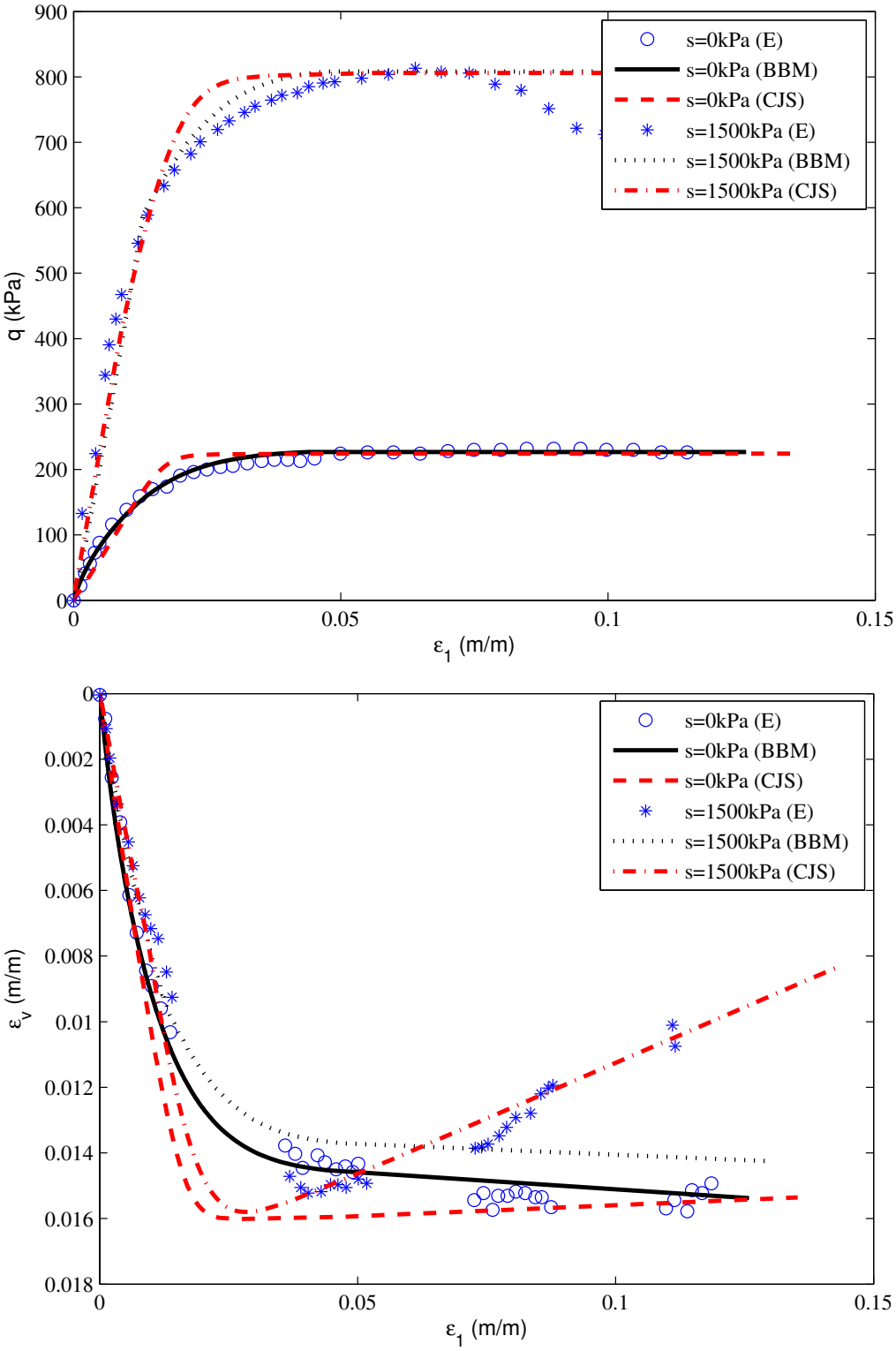


FIGURE 4.12 – Essais de compression triaxiale à σ_3=100kPa : comparaison entre les prédictions des modèles CJS étendu (CJS) et de Barcelone (BBM) et les données expérimentales (E) issues de [Cui, 1993] ; déviateur des contraintes et déformations volumiques en fonction des déformations axiales.

Paramètre	Unité	Valeur
κ	–	0.015
μ	MPa	20
M	–	1.3
λ	–	0.028
β	kPa^{-1}	0.003
r	–	0.87
k	–	0.17
p_c	kPa	0.7

TABLE 4.3 – Paramètres du modèle BBM utilisés pour la comparaison de la Figure 4.12.

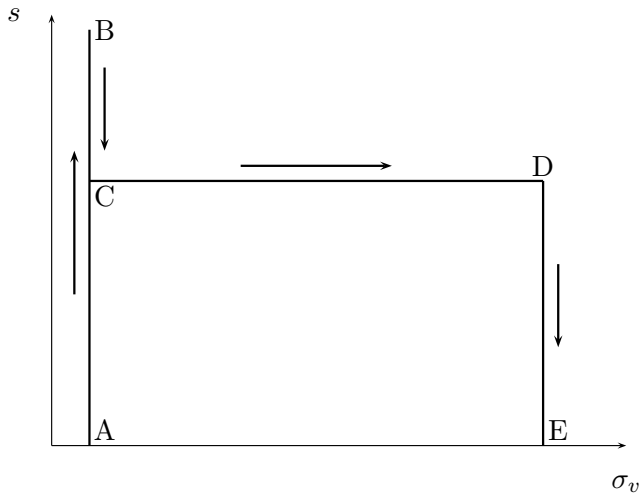


FIGURE 4.13 – Chemin de contrainte suivi durant l'essai d'effondrement sous conditions œdométriques (dans le plan contrainte verticale - succion).

4.5.2 Chemins de compression œdométrique

Afin de démontrer les capacités du modèle à retranscrire le phénomène d'effondrement, un essai est maintenant simulé sous conditions œdométriques (les déplacements radiaux sont empêchés). Les résultats numériques sont comparés à des données expérimentales obtenues sur le limon de Jossigny [Abou-Bekr, 1995]. Le chemin de contrainte suivi est présenté sur la Figure 4.13. La Figure 4.14 compare les simulations numériques et les données expérimentales. Cette figure montre la capacité du modèle à simuler ce phénomène d'effondrement, typique des sols non-saturés.

Les paramètres matériels ont été principalement identifiés pour simuler les deux portions sous contrainte verticale constante (entre les points A et B ainsi qu'entre D et E, cette dernière partie correspondant à l'effondrement proprement dit). Il en résulte une légère différence entre les courbes numérique et expérimentale au cours du chargement mécanique à succion constante (entre les points C et D). Les paramètres utilisés dans cette simulation sont donnés dans le Tableau 4.2.

Le modèle CJS est maintenant utilisé pour simuler plusieurs compressions œdométriques à différentes succions imposées. Il s'agit d'obtenir une réponse qualitative du modèle. L'état initial correspond à un indice des vides de 0.7 à succion nulle ; il est pris comme référence pour tous les échantillons. Ces derniers sont drainés jusqu'à la succion de l'essai sous conditions

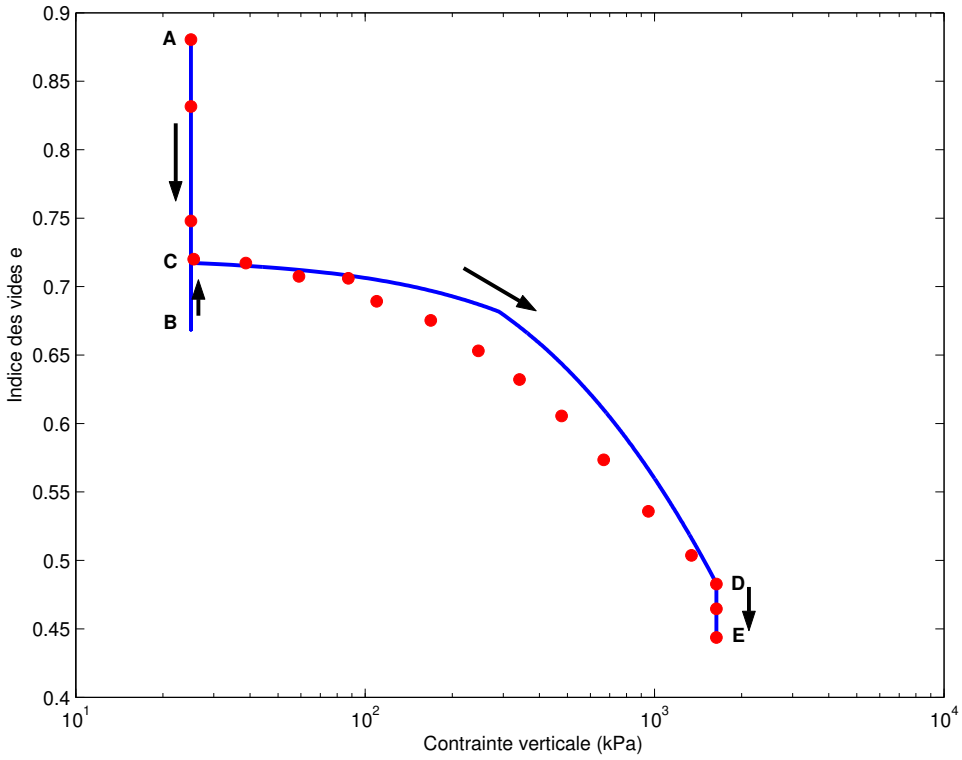


FIGURE 4.14 – Essai d'effondrement sous conditions œdométriques (données expérimentales issues de [Abou-Bekr, 1995]) : indice des vides en fonction de la contrainte verticale.

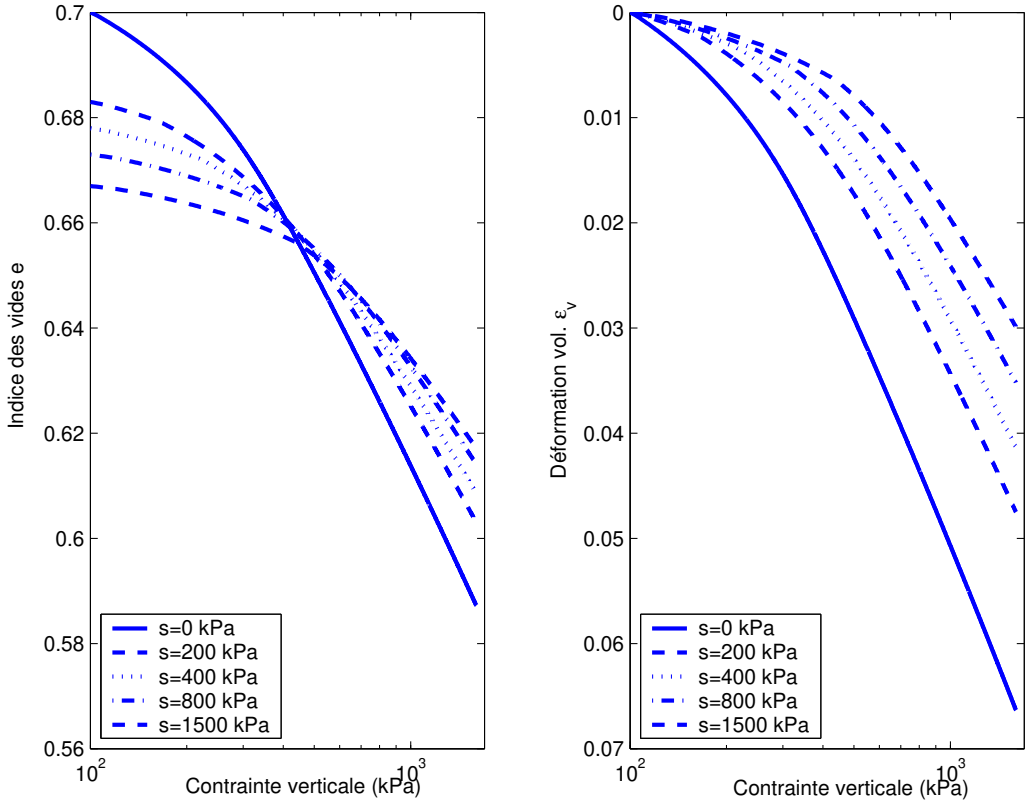


FIGURE 4.15 – Compressions œdométriques à succion imposée : indice des vides en fonction de la contrainte verticale (gauche) et déformation volumique en fonction de la contrainte verticale (droite).

isotropes (contrainte totale moyenne constante) avant que ne leur soit appliquée la compression œdométrique. Ce mode de préparation des échantillons explique la dispersion de l'indice des vides initial.

Les résultats sont présentés sur la Figure 4.15 ; ils correspondent aux observations usuelles du comportement des sols non-saturés. Trois phénomènes concourent à la diminution observée des déformations de l'échantillon lorsque la succion à laquelle il est soumis augmente. Le premier s'explique par une diminution de la compressibilité du matériau lorsque la succion augmente, ce qui diminue globalement les déformations élastiques. Le second réside dans l'augmentation de la contrainte de préconsolidation avec la succion, ce qui retarde l'apparition de déformations irréversibles au cours du chargement mécanique. Enfin, les déformations plastiques sont réduites par le rôle que joue la succion sur l'écrouissage du mécanisme plastique isotrope, comme on l'a vu au Chapitre 4.

4.5.3 Chemins de compression isotrope

L'amplitude de l'effondrement étudié précédemment étant faible, il est proposé de revenir sur un essai d'effondrement afin d'illustrer les capacités réelles du modèle présenté ici en ce qui concerne la simulation de ce phénomène. Un essai d'imbibition réalisé à l'aide d'un appareil triaxial sous conditions isotropes est donc considéré.

Le chemin de contrainte suivi pendant la simulation est donné en Figure 4.16 (une compression isotrope à succion contrôlée est appliquée à l'échantillon avant et après l'imbibition : entre les points A et B sous $s = 800$ kPa et entre E et F à succion nulle). En ce qui concerne l'essai d'imbibition à proprement parler (entre les points B et E), une contrainte totale moyenne de 620 kPa est imposée et la succion est abaissée de 800 à 0 kPa.

Les résultats sont donnés sur les Figures 4.17 et 4.18. Ils inspirent les commentaires suivants : entre les points A et B, l'état de contrainte reste dans le domaine élastique. Au cours du chargement en succion, une phase élastique est observée entre les points B et C (gonflement du matériau lors d'une imbibition) jusqu'à ce que l'état de contrainte atteigne la surface de charge isotrope en C. A ce point, les déformations plastiques de contractance deviennent plus importantes que les déformations élastiques de dilatance de telle sorte qu'un comportement globalement contractant est observé. Au point D, la succion devient inférieure à la succion d'entrée d'air et un comportement dilatant est de nouveau observé, se traduisant par une nouvelle phase de gonflement. Au cours du chargement mécanique qui suit, entre les points E et F, après une phase élastique, des déformations plastiques apparaissent lorsqu'une certaine valeur de la contrainte est atteinte (point Fo sur la Figure 4.18). La phase élastique ayant lieu entre les points E et Fo s'explique par le fait que la décharge élastique en succion entre s_e et 0 a fourni au matériau une surconsolidation qui peut être mobilisée au cours d'un chargement mécanique ultérieur.

Le modèle est maintenant confronté à des données expérimentales sur des essais de compression isotrope à succion contrôlée. Ces données sont issues de [Cui et Delage, 1996], les essais ont été réalisés sur le limon de Jossigny. Les paramètres du modèle utilisés pour la simulation numérique sont les paramètres identifiés sur les chemins de compression triaxiale (cf. Tableau 4.2). Ce sont les capacités de prédiction du modèle qui sont testées (prédictions de classe A *i.e.* « à l'aveugle »).

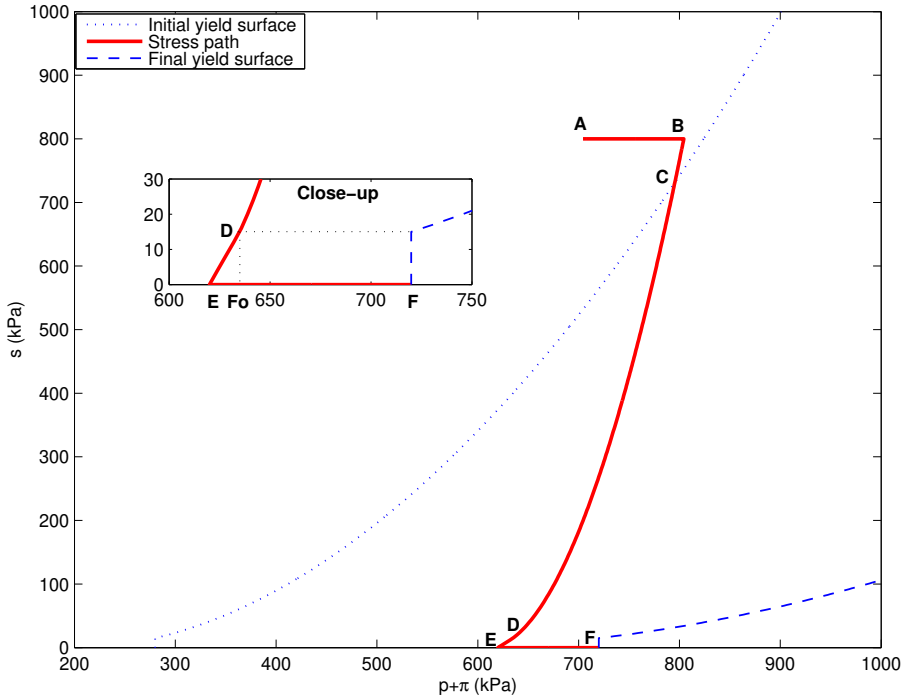


FIGURE 4.16 – Essai d'effondrement en conditions isotropes : chemin de sollicitation dans le plan (p', s) (les surfaces de charge initiale et finale sont représentées en trait discontinu).

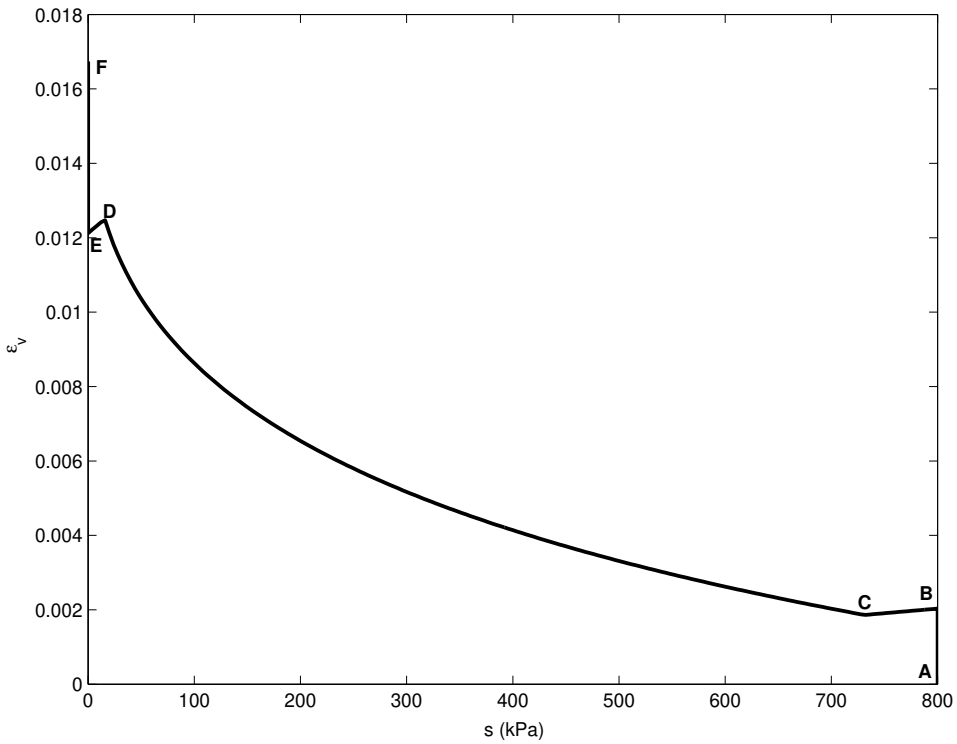


FIGURE 4.17 – Essai d'effondrement en conditions isotropes : déformations volumiques en fonction de la succion.

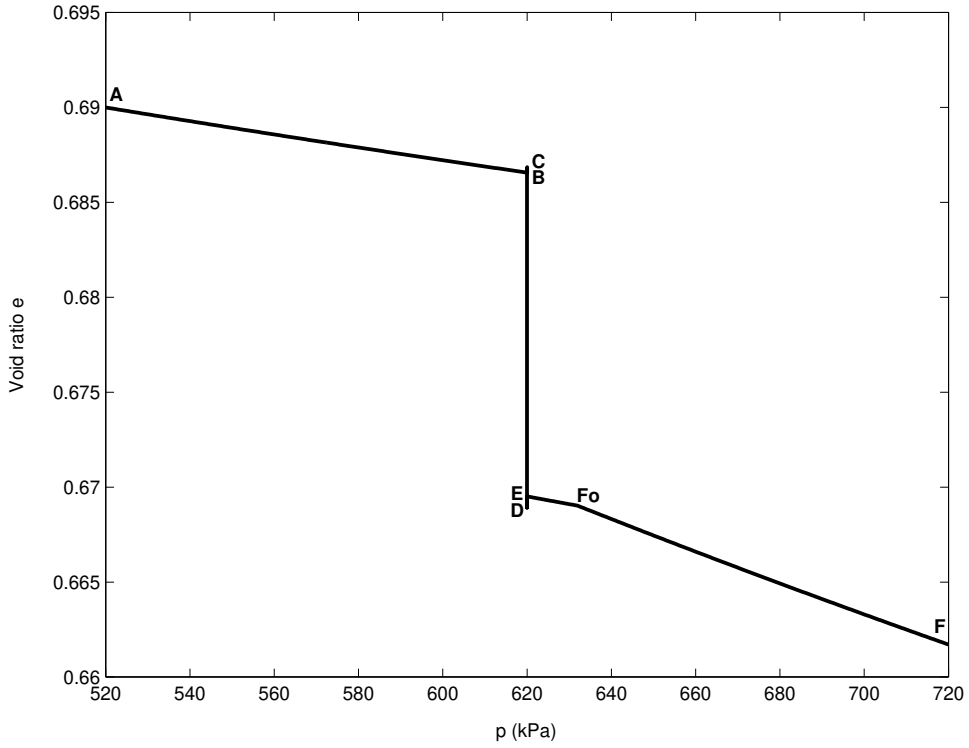


FIGURE 4.18 – Essai d'effondrement en conditions isotropes : indice des vides en fonction de la contrainte totale isotrope.

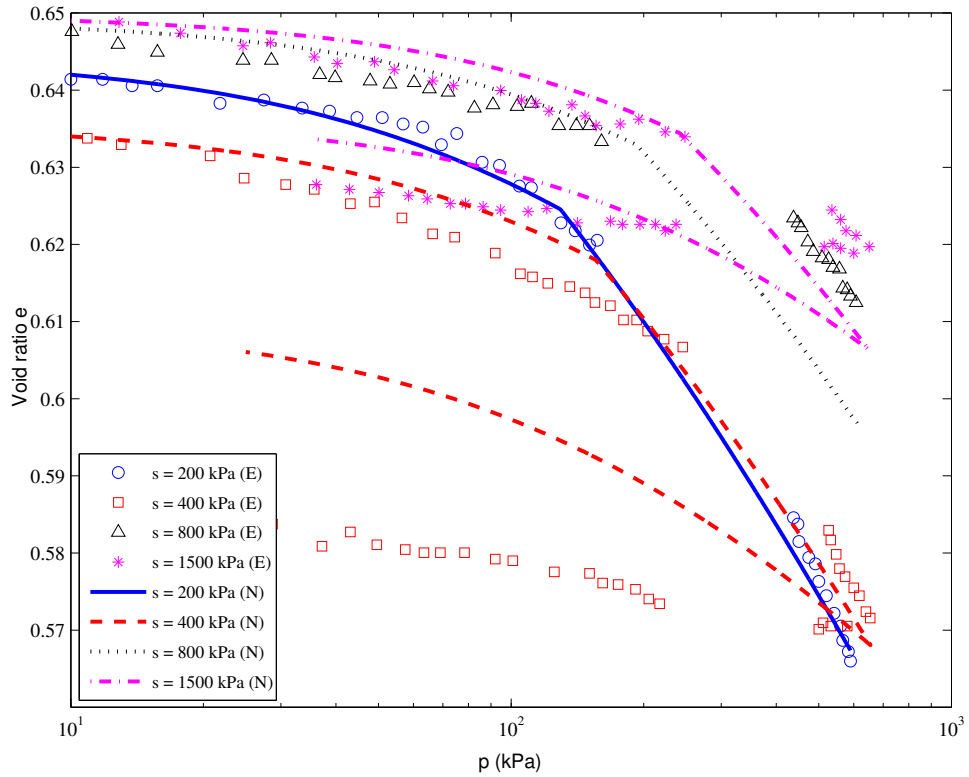


FIGURE 4.19 – Compression isotrope à succion contrôlée (données expérimentales issues de [Cui et Delage, 1996]) : indice des vides en fonction de la contrainte totale moyenne.

La comparaison entre les données expérimentales et celles obtenues numériquement est donnée en Figure 4.19. D'un point de vue qualitatif, les résultats de la simulation sont conformes aux observations expérimentales et montrent une nouvelle fois les capacités du modèle à reproduire les aspects usuels du comportement des sols partiellement saturés sur des chemins de sollicitations variés. D'un point de vue quantitatif, les résultats de la simulation sont globalement satisfaisants et même très bons pendant la phase de chargement pour certaines succions imposées (s = 200 kPa et s = 400 kPa). Les différences apparentes pour les autres succions imposées (s = 800 kPa et s = 1500 kPa) peuvent *a priori* être imputées à une modélisation insatisfaisante de la courbe de sorption (c'est-à-dire de la fonction de $S_l(s)$) pour les succions élevées.

La qualité de ces prédictions est remarquable puisque les paramètres proviennent d'une identification sur des données expérimentales issues d'un autre type de sollicitation (déviatoire pour les essais expérimentaux et isotrope pour les simulations numériques) et que ces derniers n'ont pas été modifiés pour la prédiction de cet essai.

Le cadre méthodologique présenté ici a permis d'adapter le modèle CJS afin de prendre en compte des conditions de saturation partielle. Cette adaptation a ensuite été validée dans le cas d'essais homogènes, montrant ainsi les bonnes capacités du modèle proposé à simuler le comportement de sols partiellement saturés.

Afin de prendre en compte des effets de structure dans le comportement de ce type de sols, des simulations numériques utilisant la méthode des éléments finis sont présentées par la suite.

CHAPITRE 5

Modélisation numérique

Ce chapitre présente l'implémentation du problème de consolidation en condition de saturation partielle dans un code de calcul par éléments finis afin de prendre en compte les effets de structure. Il s'agit d'un code de calcul développé au laboratoire pendant ces travaux. Le problème aux limites considéré est celui de l'expansion d'une cavité cylindrique en milieu isotrope. La géométrie considérée est une géométrie simplifiée (symétrie axiale et déformations planes) afin de ne se consacrer qu'aux aspects rhéologiques et aux couplages hydromécaniques.
La mise sous forme variationnelle et la discrétisation spatiale et temporelle du problème de consolidation est d'abord abordée. Ensuite, la structure du code de calcul avec notamment l'intégration du modèle de comportement ainsi que les méthodes de résolution sont présentées.
Ce chapitre se termine par l'analyse de problèmes particuliers tels que la mise en œuvre d'une condition de non drainage (que ce soit à saturation totale ou partielle) dans un code ne tenant pas compte des écoulements de la phase liquide.

Sommaire

5.1 Formulation du problème global 128
5.2 Formulation variationnelle du problème 130
5.3 Discrétisation spatiale 131
5.4 Discrétisation temporelle 133
5.5 Description du problème aux limites 135
5.6 Présentation du code de calcul par éléments finis 138
5.6.1 Calcul des matrices élémentaires 142
5.6.2 Intégration numérique de la loi de comportement 142
5.6.3 Architecture du programme 145
5.7 Traitement de conditions particulières 146
5.7.1 Cas saturé non-drainé 146
5.7.2 Cas non-saturé non-drainé 147
5.7.3 Implémentation de conditions œdométriques 152
5.7.4 Essai de gonflement empêché 154

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution de problèmes physiques ; elle se fonde sur la théorie des méthodes variationnelles. La formulation variationnelle du problème aux limites à résoudre, obtenue à partir des équations générales de la mécanique, se base sur le principe des travaux virtuels. La solution du problème [1] sera celle qui minimise l'énergie du système mécanique considéré.

En pratique, le domaine d'étude est subdivisé en éléments finis (on parle d'un maillage) délimités par des nœuds. C'est à ces nœuds que sont approximés les champs inconnus.

Cette méthode de résolution est particulièrement répandue de par l'étendue des possibilités qu'elle offre. Initialement développée pour les problèmes linéaires, elle s'applique désormais à de nombreuses situations, pour lesquelles des phénomènes non-linéaires et couplés peuvent être rencontrés. Le lecteur intéressé pourra utilement se reporter à des ouvrages de référence sur cette méthode, comme [Zienkiewicz, 1979], [Owen et Hinton, 1980], [Dhatt et Touzot, 1984] ou [Zienkiewicz et al., 1999]. Plusieurs travaux récents traitant plus particulièrement des sols partiellement saturés peuvent également être cités : [Lewis et Schrefler, 1998], [Li et al., 1999] ou [Sheng et al., 2003] et [Sheng et al., 2003].

Un code de calcul « maison », utilisant la méthode des éléments finis, a été entièrement développé durant ces travaux de thèse afin de valider les choix rhéologiques effectués. Ce code permet d'intégrer les effets de structure liés à la géométrie du problème modélisé. Les effets d'une saturation partielle du matériau peuvent ainsi être étudiés à l'échelle d'un ouvrage et du massif hôte dans lequel il est réalisé.

Dans un premier temps, la formulation du problème global à résoudre sera rappelée et sa mise sous forme variationnelle réalisée. Dans un second temps seront abordées les différentes discrétisations (temporelle et spatiale) du problème permettant sa résolution numérique.

5.1 Formulation du problème global

On considère un milieu poreux Ω, continu, triphasique. Ce milieu est régi pas une loi de comportement de type élastoplastique, écrite en contraintes effectives. Ce milieu est soumis à des actions mécaniques à distance (par unité de masse [2] $\boldsymbol{b}$), des actions mécaniques et hydrauliques en surface (contraintes [3] $\boldsymbol{T}$ sur Γ_σ et débits $\boldsymbol{q}_\alpha$ sur Γ_q imposés), des contraintes cinématiques et de pression (déplacements sur Γ_u et pressions sur Γ_p imposés). La Figure 5.1 représente les actions auxquelles sont soumis le milieu poreux et un fluide donné. On s'intéresse ici à l'évolution de ce milieu Ω sur un intervalle de temps donné $[0, T]$. A cet effet, il s'agira de déterminer, en tout point de Ω et à tout instant dans l'intervalle de temps considéré, les champs inconnus de déplacements et de pression des fluides saturant le réseau poreux connecté.

Les hypothèses prises en compte dans la formulation du problème quasi-statique à trois champs (problème de consolidation) sont maintenant rappelées :

— on considère que la phase gazeuse est en équilibre permanent avec l'atmosphère, ce qui implique que sa pression est constante et égale à la pression atmosphérique, prise comme référence (*i.e.* $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0, T],\ p_g = 0$) ;

1. Il s'agit en général du champ de déplacement auquel s'ajoutent le(s) champs de pression dans le cas de problèmes hydromécaniques couplés.

2. Par la suite, on supposera que les actions à distances se réduisent à la gravité *i.e.* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}$.

3. Il est à noter que les contraintes imposées en surface sont effectivement des contraintes totales et qu'elles agissent donc globalement sur le milieu poreux : squelette et fluides réunis.

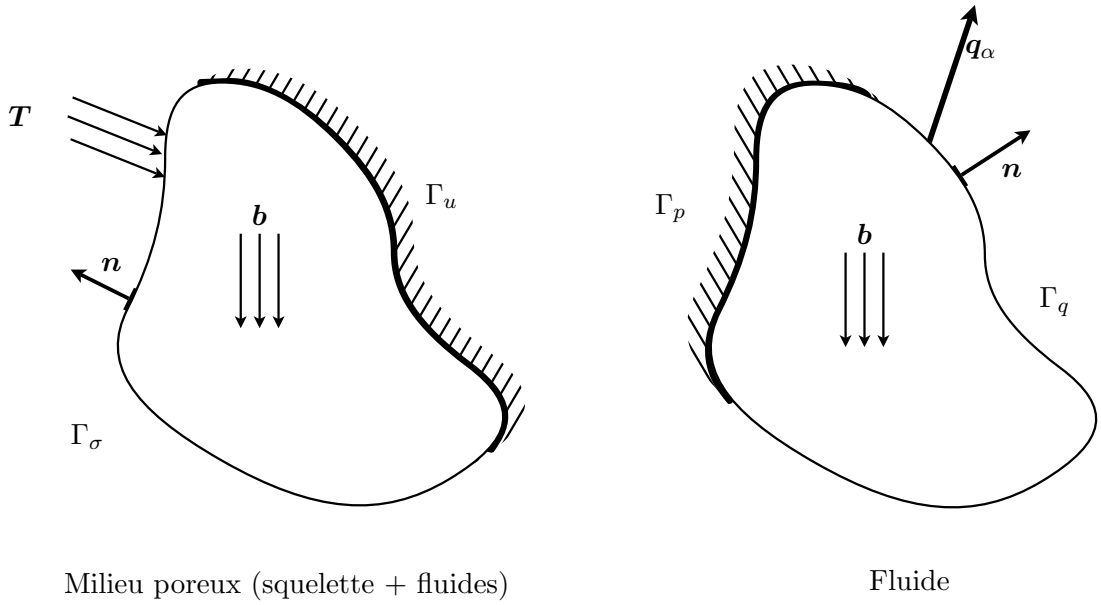


FIGURE 5.1 – Représentation du milieu avec les conditions aux frontières.

— les changements de phase liquide – vapeur sont négligés ;
— le cadre de l'hypothèse des petites perturbations du squelette est adopté ;
— les phénomènes d'origine thermique ou chimique ne sont, en outre, pas pris en compte dans cette étude.

Les variables considérées sont le déplacement du squelette et la pression des phases fluides saturant l'espace poreux connecté. Compte-tenu des hypothèses formulées ci-dessus, seuls deux champs seront donc inconnus puisque la pression de la phase gazeuse est supposée constante et nulle.

Compte-tenu des Équations (1.250) et (1.251) et des hypothèses formulées ci-dessus, le problème à résoudre est le suivant [4] :

Trouver $\boldsymbol{u} : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ *et* $p_l : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \rho\,\boldsymbol{g} = \mathbf{0} \\[2ex] \dfrac{n\ S_l}{K_l}\dfrac{\partial p_l}{\partial t} + S_l\,\mathrm{div}(\boldsymbol{v_s}) + n\,\dfrac{\partial S_l}{\partial t} + \mathrm{div}\left[\boldsymbol{k}_l\Big(-\mathbf{grad}p_l + \rho^l\,\boldsymbol{g}\Big)\right] = 0 \\[2ex] {}^t\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \end{array}\right. \tag{5.1}$$

$\rho = (1-n)\rho_s + n\ S_l\ \rho_l$ désigne la masse volumique apparente du milieu. [5]

La loi de comportement du squelette granulaire, exprimée en contraintes effectives, peut s'écrire sous la forme incrémentale (du fait d'un comportement éventuellement non-linéaire) suivante :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{D}_T\ \mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon} \tag{5.2}$$

Le tenseur $\boldsymbol{D}_T$ est le tenseur de rigidité tangent ; c'est un tenseur d'ordre quatre.

4. On suppose que les champs de déplacements et de pressions introduits ici (qu'ils soient les champs inconnus ou les champs virtuels utilisés par la suite) possèdent de bonnes propriétés de continuité et de différentiabilité.
5. Dans cette définition, la masse de la phase gazeuse est négligée.

La contrainte effective $\boldsymbol{\sigma}'$ est définie par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \pi \mathbf{1} \tag{5.3}$$

où π représente la pression interstitielle équivalente. [6]

En utilisant la définition de la contrainte effective (5.3) et en dérivant l'équilibre mécanique par rapport au temps, on obtient la relation d'équilibre suivante :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial t} - \frac{\partial \pi}{\partial t}\mathbf{1}\right) - \frac{\partial \rho\, \boldsymbol{g}}{\partial t} = \mathbf{0} \tag{5.4}$$

L'intérêt de cet écriture est de pouvoir intégrer la loi de comportement non-linéaire, écrite sous forme incrémentale, dans cette relation d'équilibre lorsqu'il s'agira d'exprimer le problème en fonction des champs inconnus (et, en particulier, du champ de déplacement du squelette).

5.2 Formulation variationnelle du problème

La mise sous forme variationnelle du problème consiste à intégrer les équations gouvernant le problème sur le domaine Ω. Cette formulation correspond au théorème des travaux virtuels ; la résolution du problème ainsi formulé revient donc à trouver le doublet $(\boldsymbol{u}, p_l)$ minimisant l'énergie du système matériel constitué par le milieu poreux.

Des champs de déplacement $\boldsymbol{v}$ et de pression q_l, cinématiquement admissibles, sont considérés. Les champs $\boldsymbol{v}$ sont pris dans l'espace des champs cinématiquement admissibles contenant les fonctions définies sur $[0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ et telles que $\forall t \in [0,T], \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_u,\ \boldsymbol{v} = 0$. Les champs q_l appartiennent à l'espace des champs cinématiquement admissibles contenant les fonctions définies sur $[0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ et telles que $\forall t \in [0,T], \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_p,\ q_l = 0$.

Le produit scalaire des équations d'équilibre mécanique et d'écoulement de la phase liquide est effectué avec, respectivement, les champs virtuels de déplacement et de pression. Après intégration de ces produits scalaires sur l'ensemble du domaine Ω et utilisation du théorème de Green-Ostrogradski, le nouveau problème à résoudre est obtenu :

Trouver $\boldsymbol{u} : [0,T]\times\Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ *et* $p_l : [0,T]\times\Omega \mapsto \mathbb{R}$ *tels que* $\forall \boldsymbol{v}$ *et* $\forall q_l$ *cinématiquement admissibles :*

$$\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\int_\Omega {}^t\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega {}^t\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) : \frac{\partial \pi}{\partial t}\mathbf{1}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \rho \boldsymbol{g}}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial(\overline{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{n})}{\partial t}\,\mathrm{d}\Gamma \\[2ex]
\displaystyle\int_\Omega q_l\left(\frac{n\ S_l}{K_l} + n\frac{\partial S_l}{\partial p_l}\right)\frac{\partial p_l}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \mathbf{grad} q_l\, \boldsymbol{k}_l\, \mathbf{grad} p_l\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega q_l\cdot S_l \operatorname{div}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\Omega \\
\qquad\qquad\qquad

où $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\overline{\boldsymbol{q}}$ représentent les valeurs des contraintes et débits du liquide imposés aux limites.

Pour obtenir la première des équations de (5.5) (correspondant à la partie mécanique du problème à résoudre), la propriété de symétrie du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ (et donc de $\boldsymbol{\sigma}'$) a été utilisée et l'on a noté $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v})$ le tenseur définit par :

$$2\,\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}(\boldsymbol{v}) + {}^t\mathbf{grad}(\boldsymbol{v}) \tag{5.6}$$

Ce problème est continu en temps et en espace. Sa mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis repose sur une double discrétisation, en espace et en temps.

5.3 Discrétisation spatiale

La résolution du problème par la méthode des éléments finis est basée sur une discrétisation du domaine Ω en sous-domaines élémentaires. La résolution numérique fournit alors une approximation de la solution (toujours continue en temps) sous la forme des valeurs des champs inconnus aux nœuds de ces éléments.

Il n'est pas naturel de restreindre les valeurs d'un champ aux seuls nœuds d'un maillage. Afin d'obtenir la valeur d'une inconnue en tout point du domaine maillé, il est fait appel à des fonctions d'interpolation utilisant les valeurs nodales de cette inconnue.

Les matrices d'interpolation des valeurs nodales des déplacements et des pressions sont notées [7] respectivement $\boldsymbol{N}_e^u$ et $\boldsymbol{N}_e^p$. Les matrices constituées des dérivées spatiales des fonctions d'interpolation sont notées $\boldsymbol{B}_e^u$ et $\boldsymbol{B}_e^p$. A un instant t donné, les déplacements et pressions en un point $\boldsymbol{x}$ d'un sous-domaine Ω_e de Ω sont donnés, à partir des valeurs aux nœuds (mécaniques ou hydrauliques selon le cas) de l'élément e correspondant, par les relations suivantes :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{n_e^u} \boldsymbol{N}_{e,k}^u\, \widetilde{\boldsymbol{u}}_{e,k}(t) \tag{5.7}$$

$$p_l(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{n_e^p} \boldsymbol{N}_{e,k}^p\, \widetilde{p}_{l\,e,k}(t) \tag{5.8}$$

où les vecteurs $\widetilde{\boldsymbol{u}}_e$ et $\widetilde{\boldsymbol{p}}_{l\,e}$ représentent les valeurs nodales des déplacements et pressions. A ce stade de la discrétisation, les éléments de ces deux vecteurs sont des fonctions continues du temps.
Les déformations sont quant à elles données par :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{n_e^u} \boldsymbol{B}_{e,k}^u\, \widetilde{\boldsymbol{u}}_{e,k}(t) \tag{5.9}$$

Les entiers n_e^u et n_e^p représentent respectivement le nombre de nœuds par élément mécanique et hydraulique.

Selon la méthode de Galerkin, l'espace des fonctions test (contenant les champs cinématiquement admissibles $\boldsymbol{v}$ et q_l introduits plus tôt) est remplacé par celui des fonctions de forme (fonctions d'interpolation).

7. Les indices $_e$ des matrices $\boldsymbol{N}_e^u$, $\boldsymbol{N}_e^p$, $\boldsymbol{B}_e^u$ et $\boldsymbol{B}_e^p$ rappellent la nature élémentaire de ces matrices.

On considère maintenant le problème, non plus au niveau d'un élément, mais au niveau global en considérant l'ensemble des éléments (mécaniques et hydrauliques) du maillage. On procède donc classiquement à l'assemblage des différentes matrices élémentaires. On note donc $\boldsymbol{N}^u$, $\boldsymbol{N}^p$, $\boldsymbol{B}^u$ et $\boldsymbol{B}^p$ les matrices obtenues après assemblage des matrices élémentaires correspondantes. Les vecteurs élémentaires des inconnues nodales sont également assemblés ; on note les vecteurs obtenus $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ et $\widetilde{\boldsymbol{p}}_l$.

Après assemblage, le problème mécanique peut être récrit selon la relation :

$$\mathbb{K}\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} - \mathbb{Q}\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{p}}_l}{\partial t} = \frac{\partial \mathbb{F}^u}{\partial t} \tag{5.10}$$

Les matrices de rigidité $\mathbb{K}$, de couplage $\mathbb{Q}$ et le vecteur de chargement mécanique $\mathbb{F}^u$ sont donnés [8] par les relations suivantes :

$$\mathbb{K} = \int_\Omega {}^t\boldsymbol{B}^u\, \boldsymbol{D}_T\, \boldsymbol{B}^u \,\mathrm{d}\Omega \tag{5.11}$$

$$\mathbb{Q} = \int_\Omega -{}^t\boldsymbol{B}^u\, \boldsymbol{m}\, \frac{\partial \pi}{\partial p_l}\, \boldsymbol{N}^p \mathrm{d}\Omega \tag{5.12}$$

$$\mathbb{F}^u = \int_\Omega {}^t\boldsymbol{N}^u \cdot \rho \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} {}^t\boldsymbol{N}^u \cdot (\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\Gamma \tag{5.13}$$

où le vecteur $\boldsymbol{m}$ est défini de telle sorte que ses éléments soient unitaires aux emplacements correspondant aux valeurs diagonales du tenseur des contraintes et nuls ailleurs.

Ainsi, pour un problème tridimensionnel, le tenseur des contraintes sera représenté sous la forme vectorielle suivante : $\boldsymbol{\sigma} = {}^t\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{31}\end{pmatrix}$; le vecteur $\boldsymbol{m}$ s'écrira alors $\boldsymbol{m} = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Dans le cas particulier d'un problème isotrope, le tenseur des contraintes est diagonal et peut être représenté par le vecteur $\boldsymbol{\sigma} = {}^t\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$. Le vecteur $\boldsymbol{m}$ sera alors simplifié en $\boldsymbol{m} = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Le problème hydraulique discrétisé spatialement s'obtient de façon similaire. Il s'écrit :

$$\mathbb{H}\widetilde{\boldsymbol{p}}_l + \mathbb{S}\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{p}}_l}{\partial t} - \mathbb{R}\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} = \mathbb{F}^p \tag{5.14}$$

Les matrices d'écoulement de la phase liquide $\mathbb{H}$, de comportement de cette même phase $\mathbb{S}$, de

8. La démarche adoptée ici considère d'abord l'assemblage des matrices d'interpolation et de déformation élémentaires afin d'introduire les matrices $\mathbb{K}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{F}^u$. Un autre choix est bien sûr possible : ces matrices peuvent être définies au niveau élémentaire et être assemblées ensuite. Par exemple, pour un élément e donné, la matrice de rigidité $\mathbb{K}_e$ serait définie par :

$$\mathbb{K}_e = \int_{\Omega_e} {}^t\boldsymbol{B}_e^u\, \boldsymbol{D}_T\, \boldsymbol{B}_e^u \,\mathrm{d}\Omega_e$$

et la matrice de rigidité, assemblée, par :

$$\mathbb{K} = \sum_e \mathbb{K}_e$$

où l'opérateur $\sum_e$ désigne le processus d'assemblage.

couplage $\mathbb{R}$ ainsi que le vecteur de chargement hydraulique $\mathbb{F}^p$ sont donnés par :

$$\mathbb{H} = \int_\Omega {}^t\boldsymbol{B}^p\, \boldsymbol{k}_l\, \boldsymbol{B}^p \,\mathrm{d}\Omega \tag{5.15}$$

$$\mathbb{S} = \int_\Omega {}^t\boldsymbol{N}^p \left(\frac{n\, S_l}{K_l} + n\frac{\partial S_l}{\partial p_l}\right) \boldsymbol{N}^p \,\mathrm{d}\Omega \tag{5.16}$$

$$\mathbb{R} = -\int_\Omega {}^t\boldsymbol{N}^p\, \boldsymbol{m}\, S_l\, \boldsymbol{B}^u \mathrm{d}\Omega \tag{5.17}$$

$$\mathbb{F}^p = -\int_\Omega {}^t\boldsymbol{B}^p\, \boldsymbol{k}_l\, \rho^l \boldsymbol{g}\, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_q} {}^t\boldsymbol{N}^p \cdot (\overline{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}\Gamma \tag{5.18}$$

Comme pour leurs homologues mécaniques, ces matrices correspondent au problème assemblé.

L'ensemble des matrices $\mathbb{K}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{S}$ dépendent de l'état actuel (que cela soit par l'intermédiaire de la succion ou du degré de saturation pour $\mathbb{H}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{S}$ ou de l'état de contraintes/déformations pour $\mathbb{K}$ et $\mathbb{H}$) [9]. Du fait de ces diverses dépendances, le problème à résoudre est fortement non-linéaire.

La dépendance de la perméabilité vis-à-vis des déformations du squelette sera introduite dans le code en utilisant la relation de Kozeny-Carman :

$$k = k_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^3 \left(\frac{1-n_0}{1-n}\right)^2 \tag{5.19}$$

avec k, la perméabilité intrinsèque du milieu et n sa porosité (les indices $_0$ marquent l'état de référence) (voir la relation (1.215) qui présente la décomposition de la perméabilité). On supposera le matériau homogène, si bien que le tenseur $\boldsymbol{k}_l$ dans (5.15) sera isotrope.
La perméabilité relative à l'eau sera donnée par le modèle de Brooks et Corey :

$$k_{rl} = S_l^{3+2\alpha} \tag{5.20}$$

Le problème constitué des relations (5.10) et (5.14) est maintenant discret en espace mais reste continu en temps.

5.4 Discrétisation temporelle

Il reste maintenant à décomposer ce problème spatialement discret en une succession de problèmes également discrets en temps qui seront résolus par récurrence. Pour cela l'intervalle d'étude $[0, T]$ est subdivisé et une suite croissante d'instants est considérée : $(t_i)_{i=\{0..N\}}$ avec [10] $t_0 = 0$ et $t_N = T$.

Le schéma numérique utilisé pour la résolution temporelle est un θ-schéma. Un instant t_i, avec $i \in \{0..N-1\}$, est pris comme référence et l'on se place à un instant $t_i + \theta\Delta t$ avec θ un scalaire tel que $\theta \in [0, 1]$ et $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. Par commodité, cet instant est noté $i + \theta$. Une

9. La matrice $\mathbb{H}$ dépend à la fois des états de déformations et de saturation par le biais respectivement des perméabilités intrinsèque et relative.

10. L'instant initial peut être pris nul puisque le temps n'intervient dans le problème considéré que par les dérivées ; toute translation de l'axe des temps est donc permise.

grandeur et sa dérivée temporelle sont alors évaluées à l'instant $i+\theta$ à partir de leurs valeurs aux instants i et $i+1$ pondérées par θ :

$$X_{i+\theta} = (1-\theta)\, X_i + \theta\, X_{i+1} \tag{5.21}$$

$$\dot{X}_{i+\theta} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta t} \tag{5.22}$$

Selon les valeurs de θ utilisées, le schéma numérique correspond au schéma d'Euler explicite ($\theta = 0$), au schéma de Crank-Nicholson ($\theta = 1/2$) ou au schéma d'Euler implicite ($\theta = 1$). On peut montrer que le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable ; il sera utilisé dans les simulations numériques présentées par la suite. Pour plus de détails sur ces questions de convergence et stabilité, le lecteur intéressé pourra se reporter à [Lewis et Schrefler, 1998].

Les conditions initiales sont supposées connues. Le problème est supposé résolu à l'instant t_i ; il est alors écrit à l'instant $t_{i+\theta}$. Après avoir multiplié par Δt l'équation régissant l'équilibre mécanique, il vient :

$$\mathbb{K}_{i+\theta}\, \Delta\widetilde{\boldsymbol{u}} - \mathbb{Q}_{i+\theta}\, \Delta\widetilde{\boldsymbol{p}}_l = \Delta\, \mathbb{F}^u \tag{5.23}$$

$$(\mathbb{S}_{i+\theta} + \theta\Delta t\mathbb{H}_{i+\theta})\Delta\widetilde{\boldsymbol{p}}_l - \mathbb{R}_{i+\theta}\, \Delta\widetilde{\boldsymbol{u}} = \Delta t\mathbb{F}^p - \Delta t\mathbb{H}_{i+\theta}\, \widetilde{\boldsymbol{p}_{l,i}} \tag{5.24}$$

Il est possible de récrire ces équations sous la forme généralisée suivante (après avoir multiplié la seconde relation par -1) :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} & -\mathbb{Q} \\ \mathbb{R} & -\mathbb{S} - \theta\, \Delta t\, \mathbb{H} \end{pmatrix}_{i+\theta} \begin{Bmatrix} \Delta\widetilde{\boldsymbol{u}} \\ \Delta\widetilde{\boldsymbol{p}}_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbb{F}^u \\ -\Delta t\, \mathbb{F}^p \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta t\, \mathbb{H} \end{pmatrix}_{i+\theta} \begin{Bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{u}} \\ \widetilde{\boldsymbol{p}}_l \end{Bmatrix}_i \tag{5.25}$$

soit, sous une forme expansée faisant apparaître les différents blocs de matrices ainsi que les dimensions de chacun d'eux (les entiers n^u et n^p désignent le nombre total de nœuds mécaniques et hydrauliques utilisés dans la discrétisation de Ω) :

$$\begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n^u} & -Q_{11} & \cdots & -Q_{1n^p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n^u1} & \cdots & K_{n^un^u} & -Q_{n^u1} & \cdots & -Q_{n^un^p} \\ R_{11} & \cdots & R_{1n^u} & -S_{11} - \theta\, \Delta t\, H_{11} & \cdots & -S_{1n^p} - \theta\, \Delta t\, H_{1n^p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n^u1} & \cdots & R_{n^un^u} & -S_{n^u1} - \theta\, \Delta t\, H_{n^u1} & \cdots & -S_{n^un^p} - \theta\, \Delta t\, H_{n^un^p} \end{pmatrix}_{i+\theta} \begin{Bmatrix} \Delta\widetilde{u}_1 \\ \vdots \\ \Delta\widetilde{u}_{n^u} \\ \Delta\widetilde{p}_{l1} \\ \vdots \\ \Delta\widetilde{p}_{ln^p} \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} \Delta F_1^u \\ \vdots \\ \Delta F_{n^u}^u \\ -\Delta t F_1^p \\ \vdots \\ -\Delta t F_{n^p}^p \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta t\, H_{11} & \cdots & \Delta t\, H_{1n^p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta t\, H_{n^u1} & \cdots & \Delta t\, H_{n^un^p} \end{pmatrix}_{i+\theta} \begin{Bmatrix} \widetilde{u}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{u}_{n^u} \\ \widetilde{p}_{l1} \\ \vdots \\ \widetilde{p}_{ln^p} \end{Bmatrix}_i \tag{5.26}$$

Il est intéressant de comparer ce système d'équations avec celui obtenu dans le cas saturé. Dans ce dernier cas, le système suivant est obtenu de façon similaire à partir des relations [11] (1.107) et (1.112) régissant le problème de consolidation en conditions de saturation totale [12] :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}_s & \mathbb{Q}_s \\ {}^t\mathbb{Q}_s & -\mathbb{S} - \theta\, \Delta t\, \mathbb{H}_s \end{pmatrix}_{i+\theta} \begin{Bmatrix} \Delta\widetilde{\boldsymbol{u}} \\ \Delta\widetilde{\boldsymbol{p}}_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbb{F}_s^u \\ -\Delta t\, \mathbb{F}_s^p \end{Bmatrix}_{i+\theta} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta t\, \mathbb{H}_s \end{pmatrix}_{i+\theta} \begin{Bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{u}} \\ \widetilde{\boldsymbol{p}}_l \end{Bmatrix}_i \tag{5.27}$$

11. On considère la contrainte effective de Terzaghi (*i.e.* $\boldsymbol{B} = \mathbf{1}$).
12. L'indice $_s$ marquant les différentes matrices fait référence aux conditions de saturation totale.

Les matrices rencontrées dans ce dernier système sont définies par :

$$\mathbb{K}_s = \int_\Omega {}^t\boldsymbol{B}^u\, \boldsymbol{D}_T\, \boldsymbol{B}^u \,\mathrm{d}\Omega \tag{5.28}$$

$$\mathbb{Q}_s = -\int_\Omega {}^t\boldsymbol{B}^u\, \boldsymbol{m}\, \boldsymbol{N}^p \,\mathrm{d}\Omega \tag{5.29}$$

$$\mathbb{F}_s^u = \int_\sigma {}^t\boldsymbol{N}^u \cdot \rho\boldsymbol{g} \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} {}^t\boldsymbol{N}^u \,(\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}) \,\mathrm{d}\Gamma \tag{5.30}$$

$$\mathbb{H}_s = \int_\Omega {}^t\boldsymbol{B}^p\, \boldsymbol{k}_l\, \boldsymbol{B}^p \,\mathrm{d}\Omega \tag{5.31}$$

$$\mathbb{S}_s = \int_\Omega {}^t\boldsymbol{N}^p\, \frac{n}{K_l}\, \boldsymbol{N}^p \,\mathrm{d}\Omega \tag{5.32}$$

$$\mathbb{F}_s^p = \int_\Omega -{}^t\boldsymbol{B}^p\, \boldsymbol{m}\, \boldsymbol{K} \cdot \rho^l \boldsymbol{g} \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma^q} {}^t\boldsymbol{N}^p\, \overline{\boldsymbol{q_l}} \,\mathrm{d}\Gamma \tag{5.33}$$

La comparaison de ces systèmes inspire les remarques suivantes :

— la prise en compte d'une saturation partielle entraîne la perte de symétrie du problème : les matrices de couplages $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont plus les transposées l'une de l'autre en raison du choix de la contrainte effective [13]. La symétrie du système peut toutefois être retrouvée si $\dfrac{\partial \pi}{\partial p_l} = -S_l$;

— le fait d'avoir multiplié la seconde équation du système, dans le cas partiellement saturé, par -1 permet de faciliter la programmation d'un code de calcul pouvant à la fois modéliser des sols saturés et non-saturés ainsi que la transition d'un état à l'autre. Ainsi, le système dans le cas non-saturé se simplifie pour redonner le système précédant du cas saturé (qui en est un cas limite) ; il suffit de s'assurer que la définition de la pression interstitielle équivalente π vérifie la condition suivante dans le domaine saturé : $\forall s \leq s_e,\ \dfrac{\partial \pi}{\partial p_l} = -1$ (ce qui est le cas si la contrainte effective en non-saturé se simplifie pour donner la contrainte de Terzaghi dans ce domaine).

5.5 Description du problème aux limites

La discrétisation du problème de consolidation en conditions de saturation partielle étant présentée, le cas d'un problème aux limites particulier est maintenant abordé.

Le problème considéré est celui de l'expansion d'une cavité cylindrique dans un milieu infini. Pour des raisons pratiques évidentes, le problème est immédiatement ramené à celui d'un cylindre épais soumis à une contrainte radiale en paroi interne (voir la Fig. 5.2). Pour ce qui est de la paroi externe, afin de pouvoir simuler la dimension infinie du massif, deux conditions limites mécaniques peuvent être imposées, la première imposant un déplacement nul, la seconde une contrainte radiale égale à la contrainte initiale.

En outre, le milieu est supposé homogène et non pesant. [14]

Afin de simplifier davantage la modélisation, il est supposé que la cavité cylindrique est de longueur infinie dans la direction axiale et que le problème admet l'axe de la galerie comme axe

13. En fait, la perte de symétrie vient plutôt du choix de la pression interstitielle équivalente que de celui de la contrainte effective.

14. Une des conséquences liées au fait de négliger les effets de la gravité est que le même code de calcul permet de simuler des galeries horizontales et verticales.

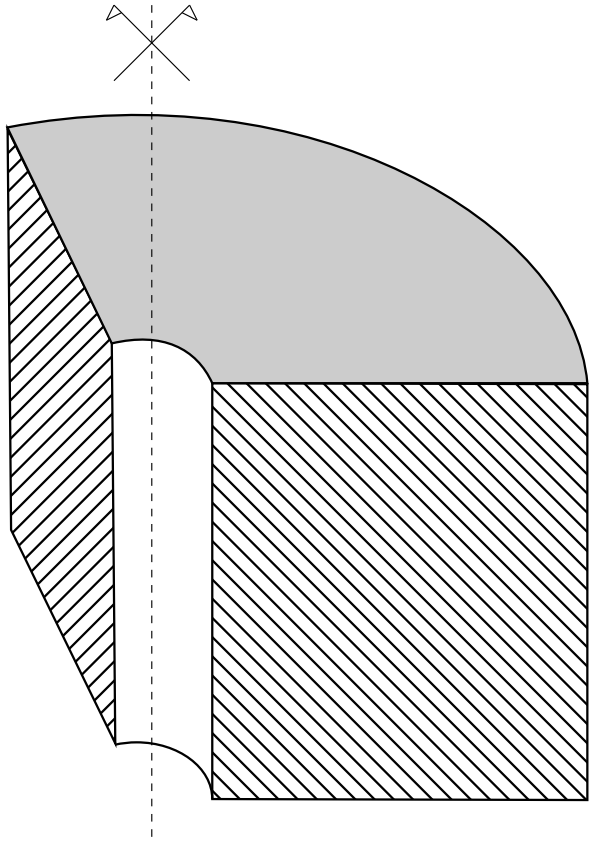


FIGURE 5.2 – Le problème considéré : un cylindre épais.

de symétrie.[15] On se place dans un repère cylindrique d'axe l'axe de la cavité. Le problème est alors résolu dans un plan orthogonal à cet axe. En d'autres termes, les hypothèses suivantes sont effectuées :

(i). les déformations sont supposées planes ;

(ii). le problème est axisymétrique.

Sous ces hypothèses, les variables du problème ne dépendent que de la coordonnée radiale (distance à l'axe de la cavité) et le vecteur déplacements est réduit à une composante, radiale. La géométrie modélisée est donc unidimensionnelle.

Compte-tenu des symétries considérées, les tenseurs des contraintes et des déformations sont diagonaux dans le repère lié à la galerie. La Figure 5.3 représente les différentes variables de contraintes dans le cas du pressiomètre (axe de symétrie vertical et augmentation de la pression en paroi).

La discrétisation spatiale du problème simplifié peut donc être réalisée à l'aide d'éléments unidimensionnels. Une représentation schématique en est donnée sur la Figure 5.4 où r_0 et r_∞ représentent respectivement le rayon de la paroi de la sonde pressiométrique et le rayon extérieur du cylindre modélisé.

15. Cette symétrie doit bien sûr concerner la géométrie mais également les conditions aux limites et initiales.

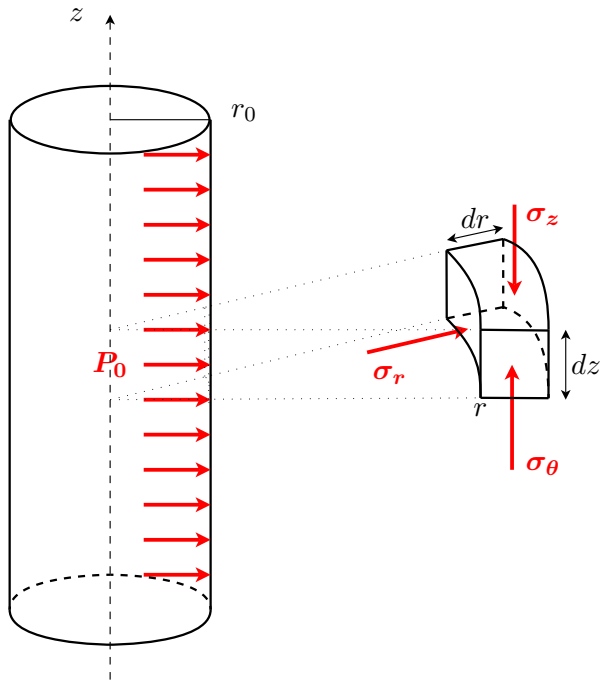


FIGURE 5.3 – Le pressiomètre : une cavité en expansion.

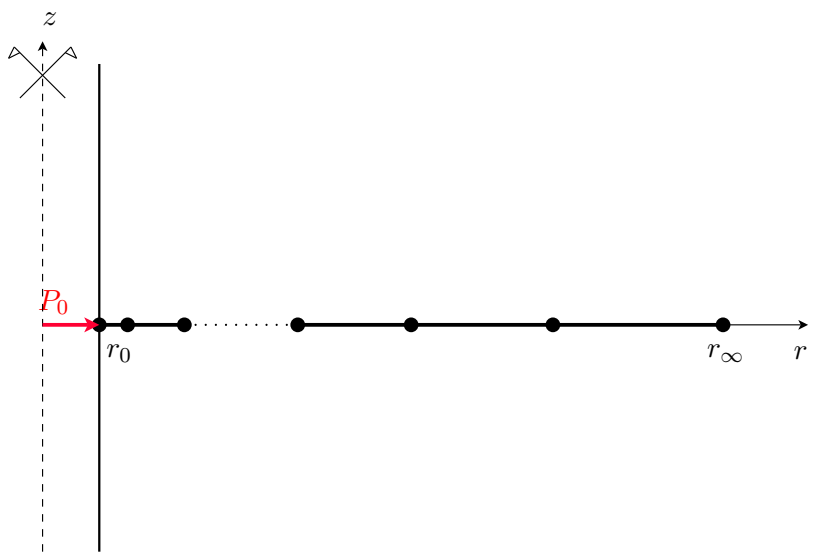


FIGURE 5.4 – Le maillage du problème simplifié 1D.

5.6 Présentation du code de calcul par éléments finis

Le code de calcul développé au cours de ces travaux de thèse est maintenant présenté. Ce code modélise le problème aux limites décrit dans la section précédente ; il s'agit donc d'un code unidimensionnel. Le langage de programmation utilisé est le langage orienté objet C++. Plusieurs modèles de comportement y ont été implémentés : CJS, Mohr-Coulomb et Cam-Clay Modifié. [16]

Le choix du type d'élément pour la discrétisation spatiale est essentiel dans l'approche numérique considérée. Il est montré [Zienkiewicz et al., 1999] que le degré d'interpolation pour les éléments mécaniques (interpolation des déplacements) doit être strictement supérieur à celui des éléments hydrauliques (interpolation des pressions).

Le choix du type des éléments (et donc de leur nombre de nœuds) dépend du degré d'interpolation souhaité. La Figure 5.5 présente un élément à deux nœuds (interpolation linéaire du champ inconnu à partir des valeurs nodales) ainsi qu'un élément à trois nœuds (interpolation quadratique).

Le problème mécanique est discrétisé spatialement à l'aide d'éléments quadratiques et le problème hydraulique à l'aide d'éléments linéaires. Ce choix, qui consiste à travailler avec un degré d'interpolation mécanique strictement supérieur au degré d'interpolation hydraulique, permet d'améliorer la convergence du schéma numérique. De même, pour faciliter la résolution du système matriciel donné en (5.25), il est important de construire les matrices et vecteurs en plaçant toutes les inconnues en déplacement aux lignes supérieures et celles en pression aux lignes inférieures (comme cela est représenté à l'Éq. (5.6)).
Les fonctions de forme sont données, en coordonnées de référence, par les relations :

$$N_{11}(x) = \frac{1}{2}(1-\xi) \tag{5.34}$$

$$N_{12}(x) = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{5.35}$$

pour ce qui est des éléments linéaires et

$$N_{21}(\xi) = \frac{1}{2}\xi\,(\xi-1) \tag{5.36}$$

$$N_{22}(\xi) = (1+\xi)(1-\xi) \tag{5.37}$$

$$N_{23}(\xi) = \frac{1}{2}\xi\,(1+\xi) \tag{5.38}$$

pour les éléments quadratiques. Ces fonctions sont données sur la Figure 5.6. Le passage des coordonnées de référence aux coordonnées réelles est donné par le changement de variable :

$$\xi = \frac{2r - r_i - r_f}{r_f - r_i} \tag{5.39}$$

avec r_i et r_f les coordonnées des extrémités de l'élément.

Le domaine modélisé est donc représenté par un segment compris entre le rayon r_0 de la cavité et le rayon r_∞. Ce segment est subdivisé en éléments de longueur croissante en fonction

16. Cette implémentation est simplifiée par l'utilisation des classes du C++. Le code contient une classe `modele` virtuelle à laquelle se substitue, si besoin, les classes héritées contenant les modèles élastoplastiques proprement dits.

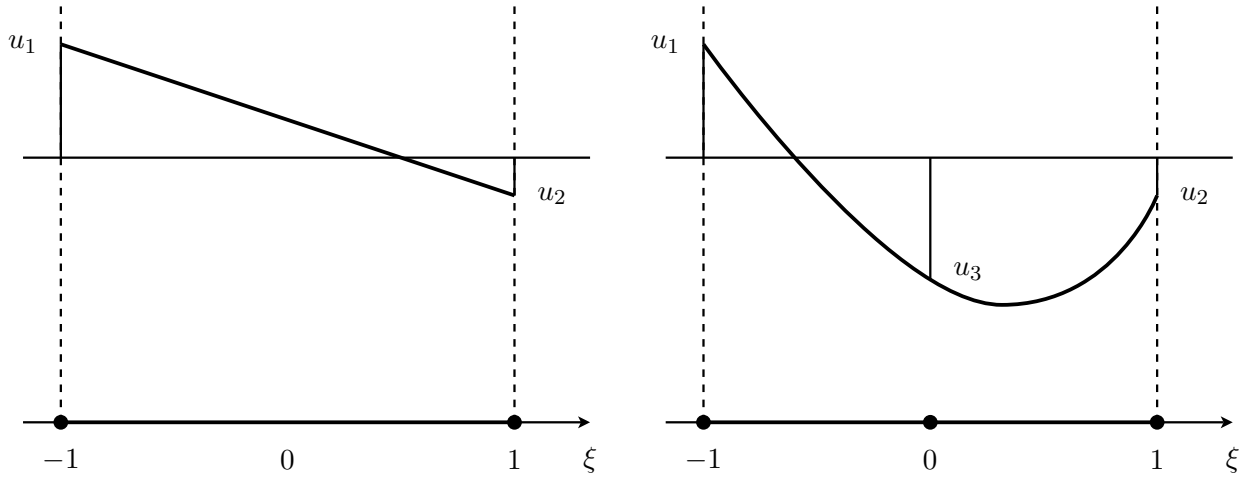
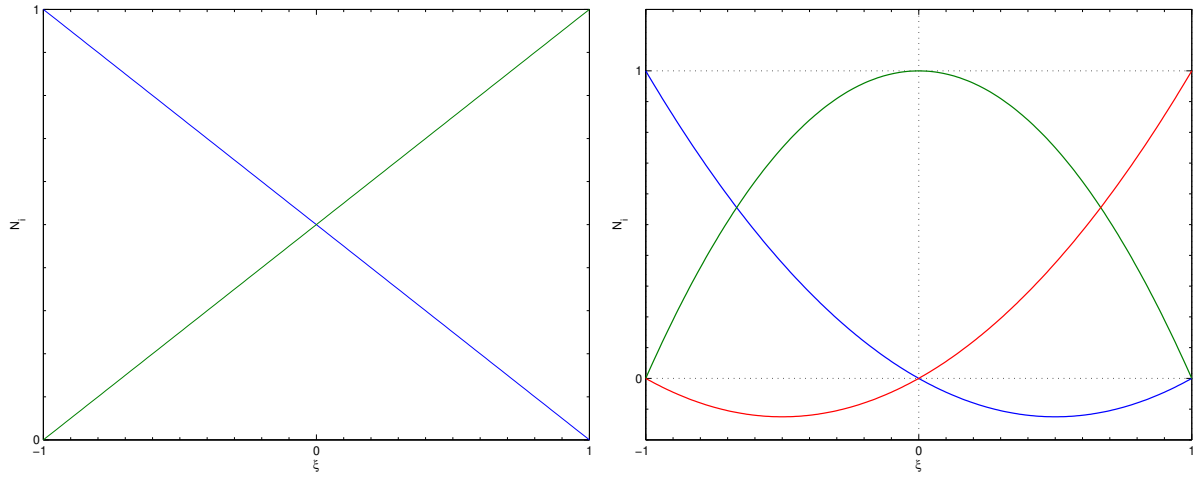


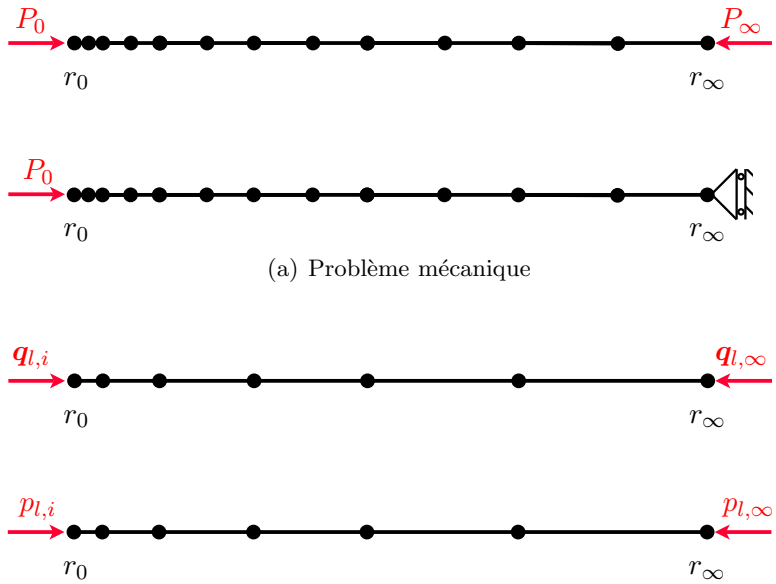
FIGURE 5.5 – Exemple d'éléments linéaire (à droite) et quadratique (à gauche).



(a) Élément linéaire

(b) Élément quadratique

FIGURE 5.6 – Fonctions d'interpolation pour des éléments linéaire et quadratique.



(a) Problème mécanique

(b) Problème hydraulique

FIGURE 5.7 – Représentation du maillage du domaine matériel et des conditions aux limites des problèmes mécaniques et hydrauliques.

de la distance à la paroi de la cavité. Cette répartition des nœuds permet de décrire plus finement les phénomènes se produisant à proximité de la cavité. En particulier, cette zone pour laquelle la longueur des éléments sera plus faible est le siège de forts gradients (de déplacements et pressions mais aussi de contraintes et déformations) qu'il convient de modéliser avec précision.

Il a été choisi de réaliser un maillage pour lequel la longueur des éléments augmente selon une progression géométrique. L'importance de la taille de la première maille est à ce titre très significative et elle sera considérée comme un paramètre, au même titre que la longueur du domaine modélisé et le nombre d'éléments. La raison géométrique δ est alors déterminée à partir des ces trois quantités. Si les coordonnés des noeuds d'un élément i donné sont notées r_i et r_{i+1} et sa longueur l_i alors l'élément $i+1$ est défini comme suit :

$$r_{i+2} = r_{i+1} + \delta\left(r_{i+1} - r_i\right) \tag{5.40}$$

Le maillage du domaine ainsi que les conditions aux limites pour les problèmes mécanique et hydraulique sont schématiquement représentés sur la Figure 5.7. Dans chaque cas sont données les conditions de type Dirichlet (inconnue imposée) et Neumann (flux imposé). Pour le problème hydraulique, chacune des quatre combinaisons possibles de conditions aux limites peut être prise en compte dans le code de calcul.

Compte-tenu des hypothèses et simplifications apportées au problème modélisé, les déplacements et les pressions peuvent être représentés par des scalaires, les tenseurs des contraintes (totale ou effective) et des déformations par des vecteurs de dimension 3 puisque ces tenseurs sont diagonaux.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{pmatrix} \tag{5.41}$$

L'approximation des champs inconnus sur un élément à partir de leurs valeurs aux nœuds du maillage est donnée par :

$$u(r,t) = \boldsymbol{N}_e^u \, \widetilde{\boldsymbol{u}}_e(t) \tag{5.42}$$

$$p_l(r,t) = \boldsymbol{N}_e^p \, \widetilde{\boldsymbol{p}_l}_e(t) \tag{5.43}$$

avec (les fonctions N_{2i} étant données par les Équations (5.36), (5.37) et (5.38)) :

$$\boldsymbol{N}_e^u = \begin{pmatrix} N_{21} & N_{22} & N_{23} \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

et (les fonctions N_{1i} étant données par les relations (5.34) et (5.35)) :

$$\boldsymbol{N}_e^p = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \end{pmatrix} \tag{5.45}$$

Le vecteur des déplacements aux nœuds d'un élément e fixé est donné par :

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_e = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \tag{5.46}$$

et le vecteur des pressions de la phase liquide aux nœuds d'un élément e fixé s'écrit :

$$\widetilde{\boldsymbol{p}_{l,e}} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \tag{5.47}$$

Pour ce qui est des déformations, leur approximation est donnée par : [17]

$$\boldsymbol{\epsilon}_e(r,t) = -\boldsymbol{B}_e^u \, \widetilde{\boldsymbol{u}}_e(t) \tag{5.48}$$

avec $\boldsymbol{B}_e^u$ définie par [18] :

$$\boldsymbol{B}_e^u(r,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_{21}}{\partial r} & \dfrac{\partial N_{22}}{\partial r} & \dfrac{\partial N_{23}}{\partial r} \\ \dfrac{N_{21}}{r} & \dfrac{N_{22}}{r} & \dfrac{N_{23}}{r} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.49}$$

Le signe '$-$' dans la relation (5.48) est lié à la convention de signe de la mécanique des sols adoptée dans ces travaux : les déformations sont comptées positivement en contraction (négativement en extension) et les contraintes en compression (négativement en traction).
La matrice gradient pour les éléments linéaires (du problème hydraulique) est définie par :

$$\boldsymbol{B}_e^p(r,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_{11}}{\partial r} & \dfrac{\partial N_{12}}{\partial r} \\ \dfrac{N_{11}}{r} & \dfrac{N_{12}}{r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.50}$$

17. Il est rappelé que les déformations sont reliées aux déplacements, sous l'hypothèse des petites perturbations, par :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{u} + {}^t\mathbf{grad}\,\boldsymbol{u}\right)$$

.

18. La troisième ligne nulle est la conséquence de l'hypothèse de déformations planes.

5.6.1 Calcul des matrices élémentaires

Les matrices de comportement élémentaires présentes dans le système à résoudre numériquement (cf. Équations (5.23) et (5.24)) sont calculées en utilisant la méthode de la quadrature de Gauss pour réaliser l'intégration sur l'élément. [19]

Ces matrices sont calculées à chaque pas de temps et supposées constantes au cours de ce dernier. En particulier, la détermination de la matrice de perméabilité du milieu à la phase liquide est réalisée en supposant que le degré de saturation est constant pendant l'intervalle de temps. Cette hypothèse est raisonnable si l'on travaille avec des pas de temps faibles ou si les variations des différentes grandeurs intervenant dans le calcul sont faibles.

Une fois que ces matrices élémentaires sont calculées puis assemblées, le système global est résolu numériquement, fournissant les valeurs des incréments de déplacement et de pression engendrés pendant l'intervalle de temps actuel.

5.6.2 Intégration numérique de la loi de comportement

Les schémas de discrétisation spatiale et temporelle étant présentés, il reste à décrire le schéma d'intégration de la loi de comportement élastoplastique.

Le schéma utilisé pour la résolution du problème non-linéaire est celui du module initial. Il s'agit d'un cas particulier de la méthode de Newton-Raphson.

Après résolution du système matriciel décrit précédemment, les incréments aux nœuds des champs de déplacements et pressions sont déterminés. Il convient alors de déterminer le nouvel état de contrainte induit par l'incrément de chargement. Pour cela, l'incrément de contrainte est supposé élastique : une prédiction élastique est réalisée. Une première estimation de l'état de contrainte, qu'il conviendra éventuellement de corriger par la suite, est ainsi obtenue à partir de l'incrément de déformation déduit de l'incrément de déplacement :

$$\boldsymbol{\sigma}'_* = \boldsymbol{\sigma}'_n + \boldsymbol{D}_T \, \Delta\boldsymbol{\epsilon} \tag{5.51}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}'_*$ la contrainte issue de la prédiction élastique, $\boldsymbol{\sigma}'_n$ la contrainte obtenue après convergence à l'incrément précédent n et $\boldsymbol{D}_T$ le tenseur d'élasticité (éventuellement non-linéaire).

S'il apparaît que cette prédiction élastique induit un état de contrainte se situant en dehors du domaine élastique du matériau (*i.e.* si le chargement induit une plastification du matériau), une correction de contrainte doit être calculée afin de ramener l'état de contrainte sur la frontière du domaine élastique (celui-ci pouvant évoluer dans le même temps lorsque le matériau s'écrouît).

5.6.2.1 Correction de contrainte

La surestimation de la contrainte lors de la prédiction élastique est due à la non prise en compte des déformations plastiques et de l'écrouissage du matériau lors de l'incrément de chargement en cours. La correction de contrainte est calculée en retirant la contribution des déformations plastiques à la contrainte prédite de façon purement élastique. Cette correction

19. Il est montré que l'utilisation de k points de Gauss permet d'intégrer de façon exacte un polynôme de degré au plus égal à $2k + 1$.

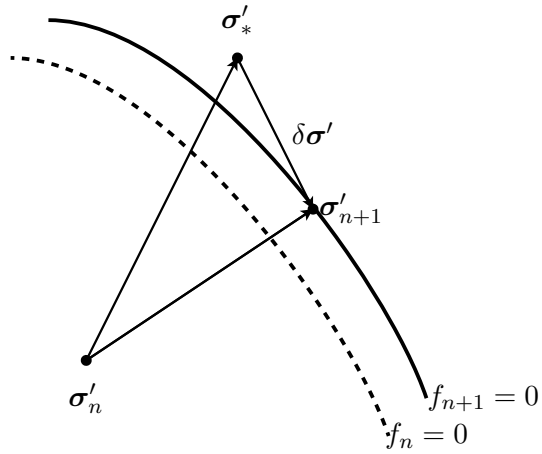


FIGURE 5.8 – Correction de la prédiction élastique dans le cas où un seul mécanisme plastique est activé.

permettra d'obtenir, *in fine*, l'état de contrainte (et de déformation) de l'incrément $n+1$, c'est-à-dire que l'on aura :

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_* - \delta\boldsymbol{\sigma}' \tag{5.52}$$

Dans le cas d'un modèle élastoplastique à simple mécanisme (voir la Figure 5.8), cette correction s'écrit simplement :

$$\delta\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{D}_T \mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^p = \mathrm{d}\lambda \boldsymbol{D}_T \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \tag{5.53}$$

Le calcul de cette correction de contrainte repose sur la condition de consistance qui exprime le fait qu'au cours d'un chargement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte demeure sur la surface de charge au cours d'un chargement plastique. En d'autres termes, cette condition de consistance permet d'écrire :

$$f = 0 \qquad \& \qquad \mathrm{d}f = 0 \tag{5.54}$$

Dans des conditions de saturation partielle, la surface de charge dépend de la succion en plus de la contrainte effective et des éventuelles variables d'écrouissage. Cette dépendance ajoute un terme supplémentaire à la condition de consistance (qui a tendance a être omis comme l'indiquent les auteurs dans [Sheng et al., 2003]) :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' + \frac{\partial f}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}}\mathrm{d}\boldsymbol{\chi} = 0 \tag{5.55}$$

On écrit le critère de plasticité à l'incrément $n+1$; la condition de consistance permet d'imposer sa nullité :

$$f(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}, s_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_{n+1}) \quad = \quad 0 \tag{5.56}$$

En faisant alors intervenir la correction de contrainte ainsi que les incréments de succion et des variables d'écrouissage, il vient :

$$f(\boldsymbol{\sigma}'_* - \delta\boldsymbol{\sigma}', s_n + \mathrm{d}s, \boldsymbol{\chi}_n + \mathrm{d}\boldsymbol{\chi}) = 0 \tag{5.57}$$

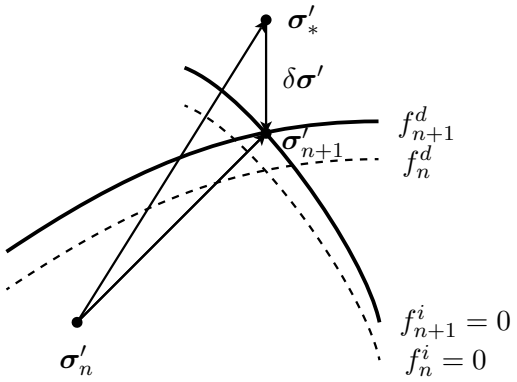


FIGURE 5.9 – Correction de la prédiction élastique dans le cas où deux mécanismes plastiques sont activés.

Un développement limité de f autour de $(\boldsymbol{\sigma}'_*, s_n, \boldsymbol{\chi}_n)$ permet alors d'écrire :

$$f(\boldsymbol{\sigma}'_*, s_n, \boldsymbol{\chi}_n) - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\delta\boldsymbol{\sigma}' + \frac{\partial f}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}}\mathrm{d}\boldsymbol{\chi} \approx 0 \tag{5.58}$$

En utilisant la définition du module plastique H :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}}\mathrm{d}\boldsymbol{\chi} = -\mathrm{d}\lambda\, H \tag{5.59}$$

ainsi que celle de la correction de contrainte (5.53), l'équation (5.58) permet de déduire l'expression du multiplicateur plastique $\mathrm{d}\lambda$:

$$\mathrm{d}\lambda \approx \frac{f(\boldsymbol{\sigma}'_*, s_n, \boldsymbol{\chi}_n) + \dfrac{\partial f}{\partial s}\mathrm{d}s}{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\boldsymbol{D}_T\dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + H} \tag{5.60}$$

La correction de contrainte $\delta\boldsymbol{\sigma}'$ peut alors être calculée en injectant l'Équation (5.60) dans (5.53). En pratique, cette correction ne sera pas obtenue en une étape unique mais au terme de plusieurs itérations.

Lorsque deux mécanismes sont activés simultanément (voir la Figure 5.9), il convient de corriger l'état de contrainte issu de la prédiction élastique de telle sorte que la condition de consistance soit vérifiée simultanément par les deux critères plastiques.

Dans ce cas, la correction de contrainte est donnée par :

$$\delta\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{D}_T\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^{ip} + \boldsymbol{D}_T\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^{dp} \tag{5.61}$$

où $\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^{ip}$ et $\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^{dp}$ représentent les incréments de déformations plastiques associés à chacun des mécanismes plastiques. Ces déformations sont calculées classiquement à partir du potentiel plastique correspondant au mécanisme concerné si bien que la correction de contrainte peut être exprimée comme suit :

$$\delta\boldsymbol{\sigma}' = \mathrm{d}\lambda^i\boldsymbol{D}_T\frac{\partial g^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \mathrm{d}\lambda^d\boldsymbol{D}_T\frac{\partial g^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \tag{5.62}$$

Le calcul des deux multiplicateurs plastiques est réalisé de la même façon que dans le cas d'un seul mécanisme appliqué. En imposant une condition de consistance à chacun des deux

mécanismes et en réalisant des développement limités de f^i autour de $(\boldsymbol{\sigma}'_*, s_n, \boldsymbol{\chi}^i_n)$ et de f^d autour de $(\boldsymbol{\sigma}'_*, s_n, \boldsymbol{\chi}^d_n)$, le système suivant, d'inconnues $\mathrm{d}\lambda^i$ et $\mathrm{d}\lambda^d$, est obtenu :

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\boldsymbol{D}_T\frac{\partial g^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + H^i\right)\mathrm{d}\lambda^i + \frac{\partial f^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\boldsymbol{D}_T\frac{\partial g^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\mathrm{d}\lambda^d = f^i(\boldsymbol{\sigma}'_*, s_n, \boldsymbol{\chi}^i_n) + \frac{\partial f^i}{\partial s}\mathrm{d}s \tag{5.63}$$

$$\frac{\partial f^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\boldsymbol{D}_T\frac{\partial g^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\mathrm{d}\lambda^i + \left(\frac{\partial f^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\boldsymbol{D}_T\frac{\partial g^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + H^d\right)\mathrm{d}\lambda^d = f^d(\boldsymbol{\sigma}'_*, s_n, \boldsymbol{\chi}^d_n) + \frac{\partial f^d}{\partial s}\mathrm{d}s \tag{5.64}$$

La résolution de ce système fournit les multiplicateurs plastiques et donc la correction de contrainte. Il peut apparaître que l'un de ces multiplicateurs soit négatif[20] auquel cas il lui sera affecté une valeur nulle [Elamrani, 1992].

5.6.3 Architecture du programme

Le système (5.25) à résoudre est constitué de deux problèmes non-linéaires et couplés. Plusieurs stratégies de résolution du système permettant de découpler ou non les problèmes considérés peuvent être envisagées.

Deux schémas découplés usuels sont décrits ici [Zienkiewicz et al., 1999], [Guellouz, 1995]. Leur principe est d'utiliser des estimations des inconnues intervenant dans les termes de couplage de chacun des problèmes à résoudre. Ces estimations proviennent de la solution obtenue à l'incrément précédent après convergence. Les deux schémas présentés sont à résoudre itérativement à chaque pas de temps et permettent de travailler avec des systèmes découplés plus petits.

Schéma découplé parallèle Ce schéma consiste à utiliser les valeurs des inconnues déterminées à l'itération précédente dans les termes réalisant le couplage dans chacun des problèmes.

Schéma découplé séquentiel Dans ce schéma, le problème mécanique est d'abord résolu en utilisant les pressions issues de l'itération précédente puis les déplacements obtenus sont injectés dans le terme de couplage du problème hydraulique pour sa résolution.

Schéma couplé Lorsque tous les termes inconnus sont déterminés au même instant, le problème à résoudre est entièrement couplé. Sa mise en œuvre peut être lourde dans le cas où un schéma implicite d'intégration en temps est utilisé. En contrepartie, le schéma obtenu est stable.

Compte-tenu de la géométrie simplifiée utilisée pour modéliser le problème faisant l'objet de cette étude, le système à inverser est de taille relativement faible et sa résolution directe (sans procédure de découplage) a été choisie. Ce choix permet de ne pas alourdir inutilement l'algorithme du code de calcul, ce qui aurait été le cas si une méthode itérative avait été utilisée. La mise en œuvre du schéma couplé utilisant la θ-méthode pour la discrétisation temporelle, comme décrite plus tôt, a ainsi été réalisée.

Le Figure 5.10 présente l'architecture globale du programme de calcul. La procédure de résolution locale qui y est mentionnée comprend l'assemblage des matrices élémentaires, la résolution du système (5.25) pour le pas de temps en cours ainsi que les éventuelles corrections de contrainte au niveau des éléments.

20. Cela traduit une désactivation du mécanisme plastique concerné.

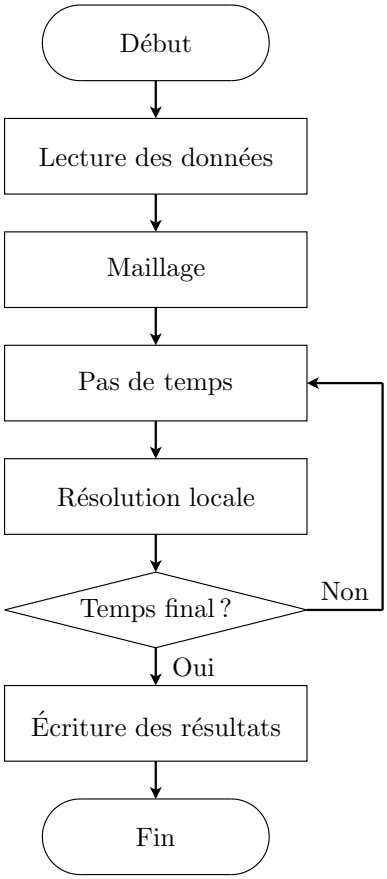


FIGURE 5.10 – Architecture globale du programme de calcul.

5.7 Traitement de conditions particulières

Dans cette partie est présenté le traitement de conditions de non-drainage dans un code « monophasique » (*i.e.* ne prenant pas en compte les écoulements des phases fluides). Ces conditions permettent de modéliser des cas particuliers (chargements rapides, milieu de perméabilité très faible) à l'aide d'un code monophasique. En outre, la mise en œuvre de ces conditions dans un code existant est particulièrement simple.

5.7.1 Cas saturé non-drainé

La condition de non-drainage dans le cas d'un milieu saturé est réalisée en imposant une vitesse apparente du fluide (vitesse de Darcy) nulle. Afin d'éviter de se retrouver confronté à un problème d'incompressibilité globale du milieu poreux (à la fois du constituant solide et du fluide), l'hypothèse d'incompressibilité de la phase liquide n'est pas adoptée et sa loi d'état est considérée. [21]

En pratique, cette condition de non drainage est réalisée au niveau local en couplant les déformations volumiques du squelette aux évolutions de la pression du fluide interstitiel en utilisant la relation suivante (démontrée au Chapitre 1) :

$$\frac{n}{K_l}\frac{\partial p_l}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \tag{5.65}$$

21. En mécanique des sols, ces hypothèses d'incompressibilité du constituant solide et de la phase liquide sont généralement adoptées puisque les rigidités de ces phases sont très grandes devant celle du squelette granulaire lui-même. La pression de la phase liquide est alors déterminée à partir de l'équation d'équilibre mécanique.

Les Figures 5.11 et 5.12 présentent les algorithmes utilisés dans le cas monophasique.

5.7.2 Cas non-saturé non-drainé

Dans le cas d'un milieu partiellement saturé, la condition de non-drainage peut porter à confusion. Elle peut porter sur les deux fluides à la fois ou sur la phase liquide uniquement [Fredlund et Rahardjo, 1993]. Dans cette partie, il a été choisi une condition portant sur le volume d'eau spécifique qui sera supposé constant dans une transformation non-drainée. Physiquement, ceci revient à dire que la quantité d'eau liquide attachée à un ensemble donné de particules solides reste constante.[22] Il s'agit d'un condition locale (comme dans le cas saturé). Cette condition s'exprime comme suit :

$$\mathrm{d}v_l = 0 \tag{5.66}$$

avec $v_l = 1 + S_l e$. L'intérêt de cette variable, notamment souligné par Wheeler [Wheeler, 1996], réside dans le fait qu'elle tende vers le volume spécifique $v = 1 + e$, variable volumique couramment utilisée en mécanique des sols.

La relation (5.66) devient, en tenant compte de la définition de v_l :

$$\frac{\mathrm{d}S_l}{S_l} = -\frac{\mathrm{d}e}{e} \tag{5.67}$$

Cette dernière relation permet alors d'exprimer les variations locales du degré de saturation en liquide en fonction des variations volumiques du squelette (par le biais de l'indice des vides du sol). En introduisant la définition de la courbe de pression capillaire, il est possible de déduire les variations de succion imposées par les déformations volumiques (cette démarche peut donc être mise en parallèle de la précédente, permettant de déduire les variations de la pression interstitielle à partir des déformations volumiques du squelette dans le cas saturé).

Les Figures 5.13 et 5.14 présentent les algorithmes locaux (prédiction élastique et correction de contrainte) dans les cas non-saturé drainé[23] et non-drainé dans le cas d'un modèle élastoplastique de type Cam Clay Modifié.

22. Cette condition de non-drainage impose donc que le milieu considéré n'échange pas d'eau avec l'extérieur ; la phase gazeuse quant à elle est supposée rester en équilibre avec l'atmosphère : $p_g = p_{atm}$.

23. Il s'agit comme dans le cas non-drainé d'un code monophasique (*i.e.* sans écoulements des phases fluides) ; drainé s'entend au sens où la succion est contrôlée et imposée constante.

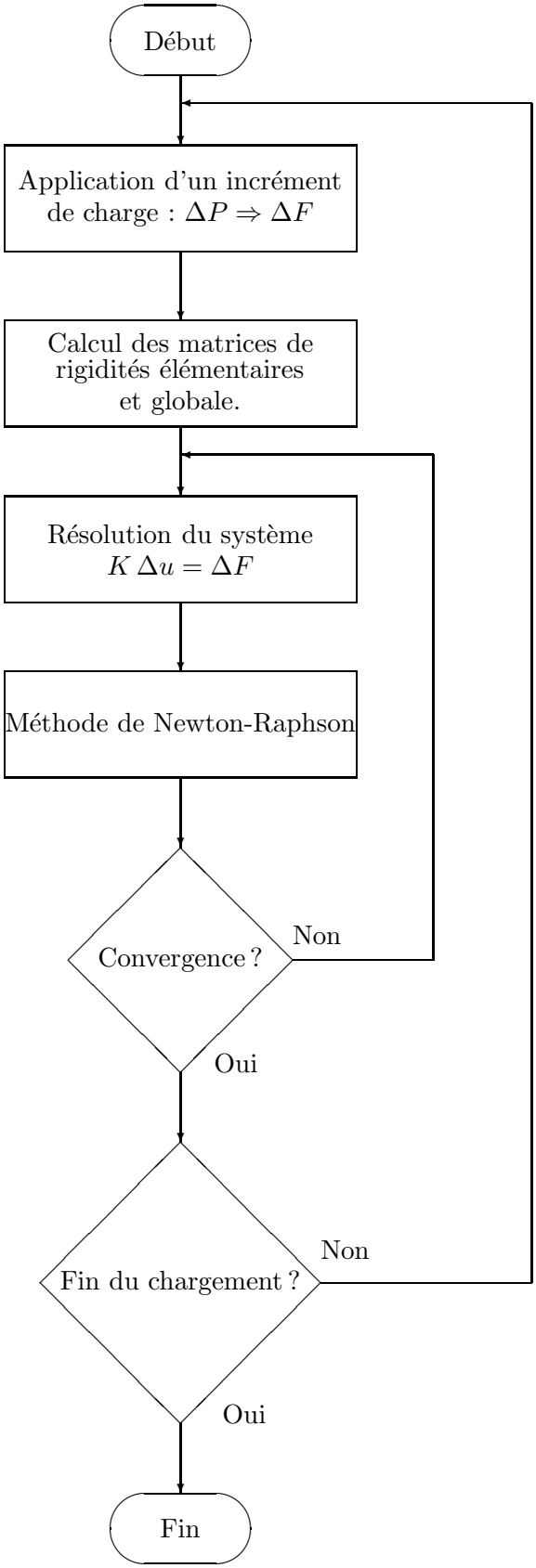


FIGURE 5.11 – Algorithme général : cas monophasique.

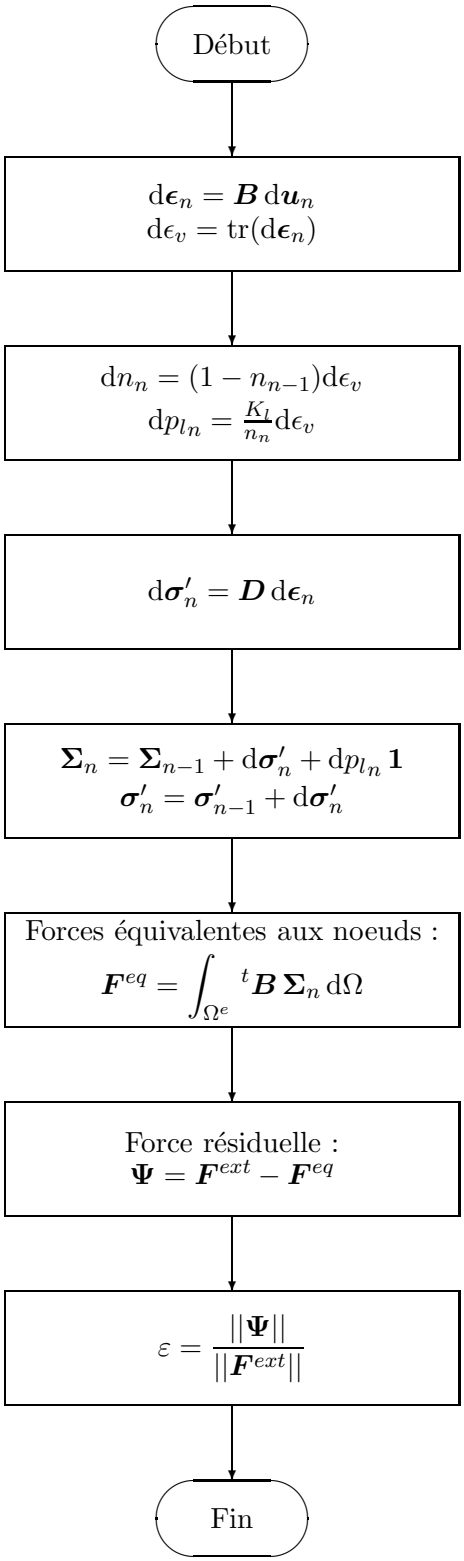


FIGURE 5.12 – Algorithme local : cas saturé non-drainé.

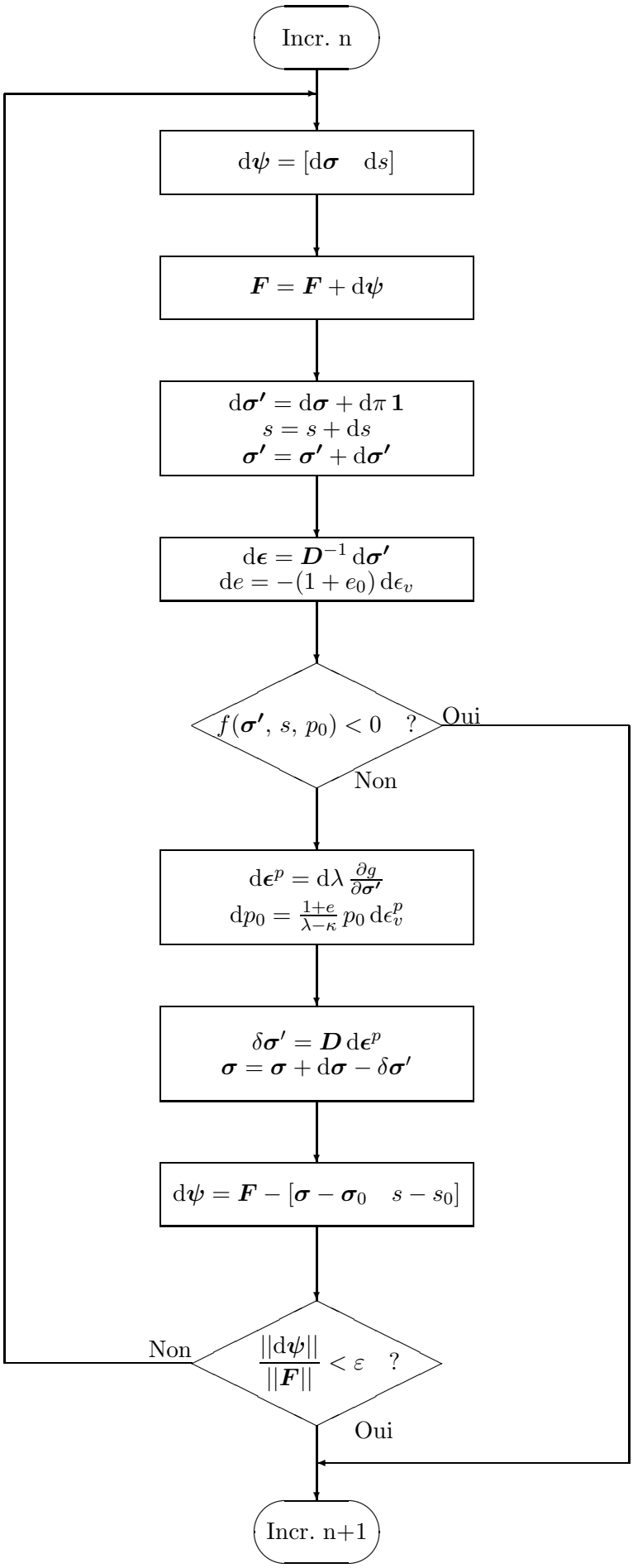


FIGURE 5.13 – Algorithme local : cas non-saturé drainé (modèle de type CCM).

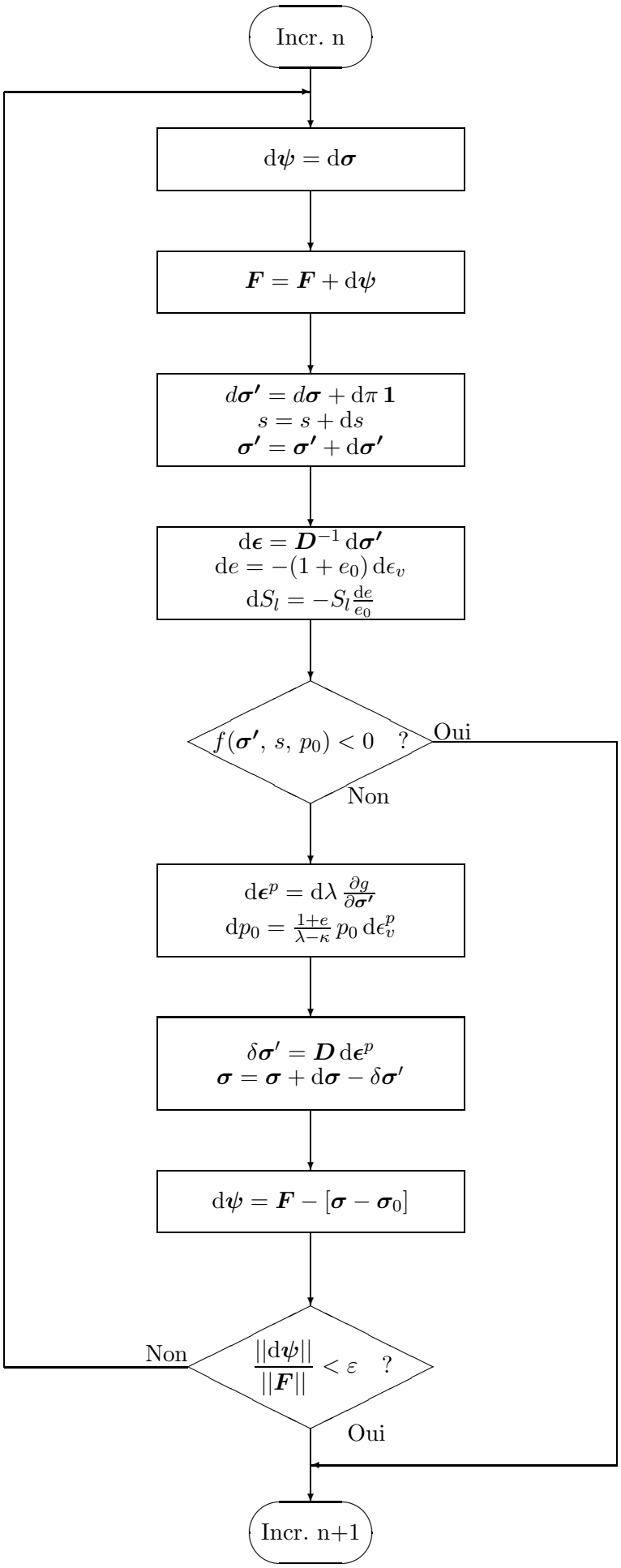


FIGURE 5.14 – Algorithme local : cas non-saturé non-drainé (modèle de type CCM).

Les sections 5.7.3 et 5.7.4 suivantes traitent d'algorithmes en conditions « homogènes », c'est-à-dire que des calculs au niveau local (*i.e.* au niveau du point de contrainte) sont considérés. Il n'y est donc plus fait appel au code de calcul par éléments finis.

5.7.3 Implémentation de conditions œdométriques

Cette section s'attache à présenter l'implémentation d'un code « homogène » dans des conditions œdométriques. L'algorithme présenté permet de modéliser des chargements en succion et/ou en contrainte totale verticale tout un imposant des déformations radiales nulles. La sollicitation est pilotée en contrainte totale et/ou en succion. Il est donc nécessaire, pour un incrément donné, de déterminer l'incrément de contrainte radiale qui permettra de vérifier à la fois la condition œdométrique et la (les) condition(s) de consistance sur le(s) mécanisme(s) plastique(s).

Un modèle élastoplastique ne comptant qu'un mécanisme plastique est d'abord considéré. L'objectif est de déterminer pour un incrément de contrainte verticale donné, l'incrément de contrainte radiale tenant compte de la condition de déformations latérales nulles.

La direction axiale est indiquée dénotée par les indices 1, les directions lui étant orthogonales sont notées 2 et 3 (une symétrie d'axe 1 est supposée). Les tenseurs de contraintes et de déformations incrémentales sont représentés sous la forme vectorielle suivante :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\sigma_1 \\ \mathrm{d}\sigma_2 \\ \mathrm{d}\sigma_2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\epsilon_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.68}$$

La définition de la contrainte effective est également rappelée :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \pi \mathbf{1} \tag{5.69}$$

avec π la pression interstitielle équivalente (fonction de la succion uniquement, en première approximation).

Un incrément de contrainte verticale (totale) $\mathrm{d}\sigma_1$ et un incrément de succion $\mathrm{d}s$ sont fixés. La définition de la pression interstitielle π ainsi que celle de la contrainte effective $\boldsymbol{\sigma}'$ permettent d'en déduire l'incrément de contrainte effective $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$. Les données en entrée sont donc $\mathrm{d}\sigma'_1$ et $\mathrm{d}s$ imposés. Il convient de déterminer $\mathrm{d}\sigma'_2$ de telle sorte que les conditions suivantes soient réalisées $\mathrm{d}\epsilon_2 = \mathrm{d}\epsilon_3 = 0$ et $\mathrm{d}\sigma'_2 = \mathrm{d}\sigma'_3$ tout en tenant compte d'un éventuelle plastification du matériau (et donc de la condition de consistance).

La surface de charge est notée f. Ses dérivées par rapport à la contrainte effective et la succion sont notées respectivement $\boldsymbol{F} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}$ et $F_s = \frac{\partial f}{\partial s}$. Le potentiel plastique est noté g et sa dérivée par rapport à la contrainte effective est notée $\boldsymbol{G} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}$. La condition de consistance est donnée par :

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{\sigma}', s, \boldsymbol{\chi}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' + \frac{\partial f}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}}\mathrm{d}\boldsymbol{\chi} = 0 \tag{5.70}$$

et permet de déterminer le multiplicateur plastique[24] :

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{H}\left(\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' + F_s \mathrm{d}s\right) \tag{5.71}$$

24. On rappelle que H est défini de telle sorte que $\mathrm{d}\lambda\, H = -\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}}\mathrm{d}\boldsymbol{\chi}$.

Le tenseur des déformations est alors donné par :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon} = \mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^e + \mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^p = \boldsymbol{D}_T^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' + \mathrm{d}\lambda\boldsymbol{G} \tag{5.72}$$

En injectant la relation (5.71), l'incrément de déformation est donné par :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon} = \left(\boldsymbol{D}_T^{-1} + \frac{1}{H}\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{F}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' + \frac{1}{H}F_s\boldsymbol{G}\mathrm{d}s \tag{5.73}$$

La condition œdométrique ($\mathrm{d}\epsilon_2 = 0$) peut alors être exprimée comme suit :

$$\mathrm{d}\epsilon_2 = \left(\frac{1}{H}G_2\,F_1 + D_{21}^{-1}\right)\mathrm{d}\sigma_1' + \left(\frac{1}{H}G_2\,(F_2+F_3) + D_{22}^{-1} + D_{23}^{-1}\right)\mathrm{d}\sigma_2' + \frac{1}{H}F_s\,G_2\mathrm{d}s = 0 \tag{5.74}$$

Pour un incrément de contrainte verticale donné, il est donc possible d'exprimer l'incrément de contrainte radiale permettant de vérifier à la fois la condition de déformations radiales nulles et celle de consistance :

$$\mathrm{d}\sigma_2' = -\frac{\left(\frac{1}{H}G_2\,F_1 + D_{21}^{-1}\right)\mathrm{d}\sigma_1' + \frac{1}{H}F_s\,G_2\mathrm{d}s}{\frac{1}{H}G_2\,(F_2+F_3) + D_{22}^{-1} + D_{23}^{-1}} \tag{5.75}$$

Un modèle élastoplastique à deux mécanismes de plasticité (notés a et b) est maintenant considéré. Les surfaces de charge associées à chacun des mécanismes sont notées f^a et f^b. Pour un mécanisme $x \in \{a, b\}$ donné, les dérivées par rapport à la contrainte effective et la succion sont notées respectivement $\boldsymbol{F}^x = \frac{\partial f^x}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}$ et $F_s^x = \frac{\partial f^x}{\partial s}$. Le potentiel plastique associé à ce mécanisme x est noté g^x et sa dérivée par rapport à la contrainte effective est noté $\boldsymbol{G}^x = \frac{\partial g^x}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}$.

Dans ce cas, la relation (5.72) est remplacée par :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon} = \mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^e + \mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}_a^p + \mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}_b^p = \boldsymbol{D}_T^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' + \mathrm{d}\lambda^a\boldsymbol{G}^a + \mathrm{d}\lambda^b\boldsymbol{G}^b \tag{5.76}$$

où les multiplicateurs plastiques sont calculés en imposant la condition de consistance aux deux mécanismes, ce qui donne des relations analogues à (5.71) :

$$\mathrm{d}\lambda^a = \frac{1}{H^a}\left(\boldsymbol{F}^a\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' + F_s^a\mathrm{d}s\right) \tag{5.77}$$

$$\mathrm{d}\lambda^b = \frac{1}{H^b}\left(\boldsymbol{F}^b\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' + F_s^b\mathrm{d}s\right) \tag{5.78}$$

Le tenseur des déformations peut alors être exprimé comme suit :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon} = \left(\boldsymbol{D}_T^{-1} + \frac{1}{H^a}\boldsymbol{G}^a\otimes\boldsymbol{F}^a + \frac{1}{H^b}\boldsymbol{G}^b\otimes\boldsymbol{F}^b\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' + \left(\frac{1}{H^a}F_s^a\boldsymbol{G}^a + \frac{1}{H^b}F_s^b\boldsymbol{G}^b\right)\mathrm{d}s \tag{5.79}$$

De la même façon que précédemment, la condition sur les déformations radiales nulles permet de déterminer l'incrément de contraintes radiales devant être appliqué :

$$\mathrm{d}\sigma_2' = -\frac{\left(\frac{1}{H^a}G_2^a\,F_1^a + \frac{1}{H^b}G_2^a\,F_1^b + D_{21}^{-1}\right)\mathrm{d}\sigma_1' + \left(\frac{1}{H^a}F_s^a\,G_2^a + \frac{1}{H^b}F_s^b\,G_2^b\right)\mathrm{d}s}{\frac{1}{H^a}G_2^a\,(F_2^a+F_3^a) + \frac{1}{H^b}G_2^b\,(F_2^b+F_3^b) + D_{22}^{-1} + D_{23}^{-1}} \tag{5.80}$$

Cet algorithme a été utilisé dans le Chapitre 4 pour modélisation l'essai d'effondrement en conditions œdométriques.

5.7.4 Essai de gonflement empêché

On souhaite maintenant pouvoir simuler un essai de gonflement empêché. L'échantillon est soumis à une diminution de sa succion (imbibition) en conditions de déformations nulles.

Un tel essai a pour but de simuler la pression de gonflement que le matériau appliquera au cours de l'essai sur l'enceinte qui le confine. Cette évaluation peut être utile, par exemple, pour le dimensionnement du dispositif de soutènement d'un ouvrage de stockage de déchets radioactifs. En effet, lors de la resaturation de la barrière ouvragée ayant lieu après sa mise en place, celle-ci connaîtra un chargement similaire puisqu'elle sera confinée (par exemple, entre le massif hôte ou la structure de soutènement et les colis).

L'algorithme utilisé s'inspire de celui présenté ci-dessus pour l'implémentation de conditions œdométriques. Partant de l'Équation (5.79), on impose cette fois la condition $\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$. Sachant que $\mathrm{d}s$ correspond à l'incrément de succion imposé, il ne reste plus alors qu'à résoudre le système suivant, dont les inconnues sont les composantes de l'incrément de contrainte effective $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$:

$$\left(\boldsymbol{D}_T^{-1} + \frac{1}{H^a}\boldsymbol{G}^a \otimes \boldsymbol{F}^a + \frac{1}{H^b}\boldsymbol{G}^b \otimes \boldsymbol{F}^b\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' + \left(\frac{1}{H^a}F_s^a\boldsymbol{G}^a + \frac{1}{H^b}F_s^b\boldsymbol{G}^b\right)\mathrm{d}s = \mathbf{0} \tag{5.81}$$

Bien-sûr, dans le cas considéré ici, les conditions isotropes de l'essai simulé permettent de ne résoudre qu'une équation en $\mathrm{d}p' = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}')$, qui s'obtient trivialement à partir de (5.81).

Les deux conditions précédentes (essai œdométrique et de gonflement empêché) ont été implémentées dans un programme Matlab.

CHAPITRE 6

Résultats numériques

Ce chapitre est consacré à l'utilisation du modèle rhéologique proposé dans ces travaux. Dans un premier temps, la validation de ce modèle est présentée sur la base de modélisations d'essais homogènes (compressions œdomètrique, triaxiale, essais d'effondrement). Dans un second temps, l'utilisation du code de calcul par éléments finis est illustrée dans le cas de chargements pressiométriques ou de la modélisation du creusement d'une galerie souterraine. L'apport de la prise en compte des effets de non-saturation est discuté dans chaque cas.

Sommaire

6.1 Essais pressiométriques 156
6.1.1 Conditions non-drainées 156
6.1.2 Prise en compte de l'écoulement de la phase liquide 165
6.2 Essai de déconfinement d'une cavité souterraine 168
6.3 Essai de gonflement empêché 170

Ce chapitre présente des résultats de simulations numériques utilisant, entre autres, le modèle CJS étendu aux états de saturation partielle. Après avoir mené une identification des paramètres sur la base de résultats expérimentaux d'essais homogènes afin de valider les choix rhéologiques effectués lors de l'extension du modèle, des simulations numériques incluant des effets de structure sont maintenant présentées. En particulier, il sera procédé à des simulations d'ouvrages souterrains ou d'essais *in situ* tels que l'essai pressiométriques.

6.1 Essais pressiométriques

Cette étude numérique commence par la simulation de l'essai pressiométrique. L'intérêt porté à cet essai se justifie par les états de contrainte réellement tridimensionnels qui y sont rencontrés et qui légitiment ainsi l'utilisation de modèles de comportement évolués. En outre, l'exploitation des résultats expérimentaux issus de cet essai *in situ* donne accès à des propriétés à la fois de déformabilité (module pressiométrique) et de résistance à la rupture (pression limite).

Dans toutes les simulations pressiométriques qui suivent, un rayon en paroi de 3cm est considéré. La longueur du domaine maillé est de 10m.

6.1.1 Conditions non-drainées

Dans un premier temps, le cas particulier de conditions de chargement non-drainées est considéré. Dans ce qui suit, la phase gazeuse est considérée en équilibre avec l'atmosphère, dont la pression est prise comme référence (si bien que $p_g = 0$ kPa en permanence).

Des essais pressiométriques ont été simulés à différentes succions initiales (0, 20, 100, 200, 300, 400 et 500 kPa) sous conditions de non-drainage telle que définie au Chapitre 5. En particulier, la condition (5.67) liant degré de saturation et indice des vides est imposée.

On s'intéresse à l'influence du drainage d'un sol sur les résultats d'essais pressiométriques et, notamment, sur les propriétés mécaniques du sol. Pour cela, la contrainte totale initiale est la même pour tous les essais (100 kPa) et les indices des vides initiaux sont calculés pour tenir compte des augmentations de succion (sous conditions isotropes) à partir d'un indice des vides de référence de 0.7 à succion nulle (le Tableau 6.2 donne les indices initiaux pour chacun des essais).

Le modèle CJS étendu aux états de saturation partielle tel que présenté au Chapitre 4 est pris en compte. Les paramètres matériels utilisés sont donnés au Tableau 6.1 : ils sont issus de l'identification des essais triaxiaux sur le limon de Jossigny présentée au Chapitre 4.

Les Figures 6.1 et 6.2 présentent les résultats de ces différentes simulations réalisées à l'aide du code de calcul par élément finis présenté au Chapitre 5. La Figure 6.1 compare plus particulièrement les courbes pressiométriques (variations relatives du volume de la sonde en fonction de la pression dans la cellule) pour les différentes succions étudiées. Il y est observé une augmentation de la rigidité du sol (les déplacements de la paroi de la cellule sont plus faibles lorsque la succion croît). Il peut également y être remarqué que les différences entre deux succions successives diminuent lorsque la succion augmente : un même incrément de succion a un impact plus faible à des succions élevées.

Cette tendance se retrouve sur la Figure 6.2 qui présente quant à elle l'évolution de la pression limite en fonction de la succion initiale (voir également le Tableau 6.2). L'augmentation de la succion initiale s'accompagne d'une augmentation de la pression limite. Cette augmentation devient cependant de moins en moins importante, en particulier au-delà de la succion d'entrée

Table 6.1 – Paramètres du modèle CJS utilisés dans les simulations numériques.

Paramètre	Unité	Valeur
K_0^e	MPa	8.0
ν	–	0.125
γ	–	0.8
A	kPa^{-1}	0.27
B	kPa^{-1}	1.0
R_c	–	0.26
β_0	–	-0.2
K_0^p	MPa	6.7
n	–	0.9
k_1	–	0.18
k_2	–	1.8
k_3	–	0.0
k_4	–	0.9
s_e	kPa	15.0
α	–	2.1

d'air. Il est à noter que la pression limite évoquée ici a été arbitrairement choisie comme la pression de la cellule nécessaire pour obtenir une augmentation de 20% du volume de la cellule. Il ne s'agit donc pas de la pression limite définie usuellement qui correspond à un doublement de volume de la sonde. Les valeurs présentées ici permettent cependant d'illustrer l'influence de la succion sur ce paramètre caractérisant la rupture du sol.

Les différents essais pressiométriques simulés dans cette étude sont réalisés sur des sols ne présentant pas la même contrainte effective (contrainte totale identique mais succions initiales différentes). Cette différence de contrainte effective peut largement expliquer la diminution des déplacements observés pour des succions croissantes puisque les modules élastiques et plastiques du modèle CJS utilisé ici dépendent directement de la contrainte effective ou de la succion. Des contraintes effectives initiales plus importantes impliquent donc une plus grande rigidité du matériau.

TABLE 6.2 – Essais pressiométriques non-drainés (contrainte totale initiale constante) : indices des vides initiaux et pression limite en fonction de la succion initiale.

Succion initiale s	Indice des vides initial	Pression limite
kPa	–	kPa
0	0.700	315
20	0.693	405
100	0.687	484
200	0.683	545
300	0.680	590
400	0.678	626
500	0.677	658

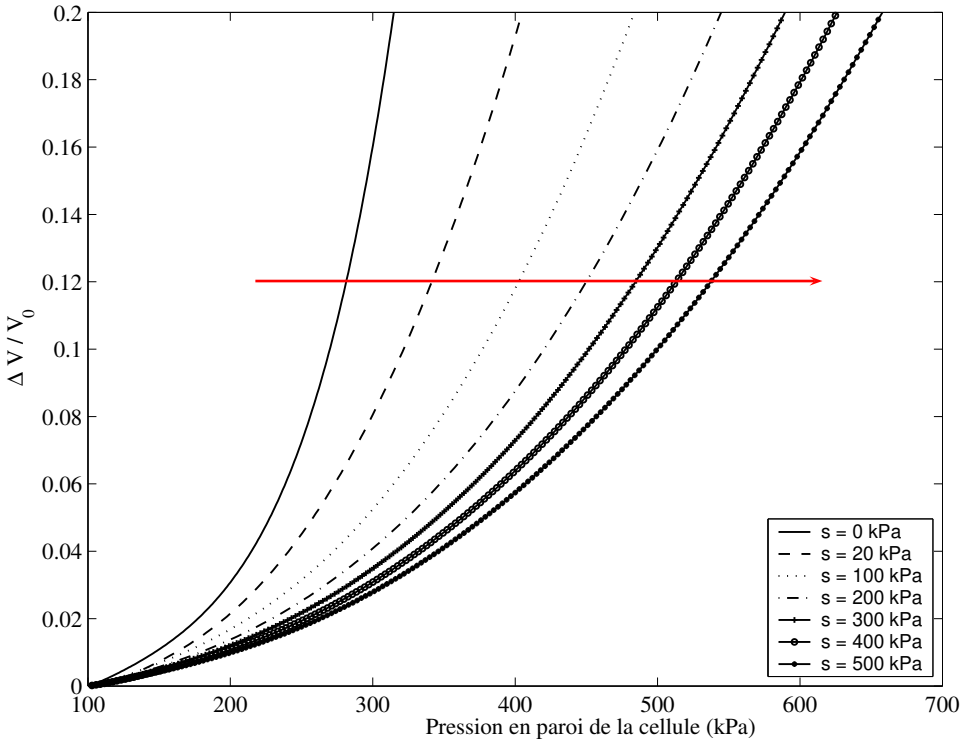


FIGURE 6.1 – Essais pressiométriques en conditions non-drainées à différentes succion initiales (contrainte initiale totale constante, modèle CJS).

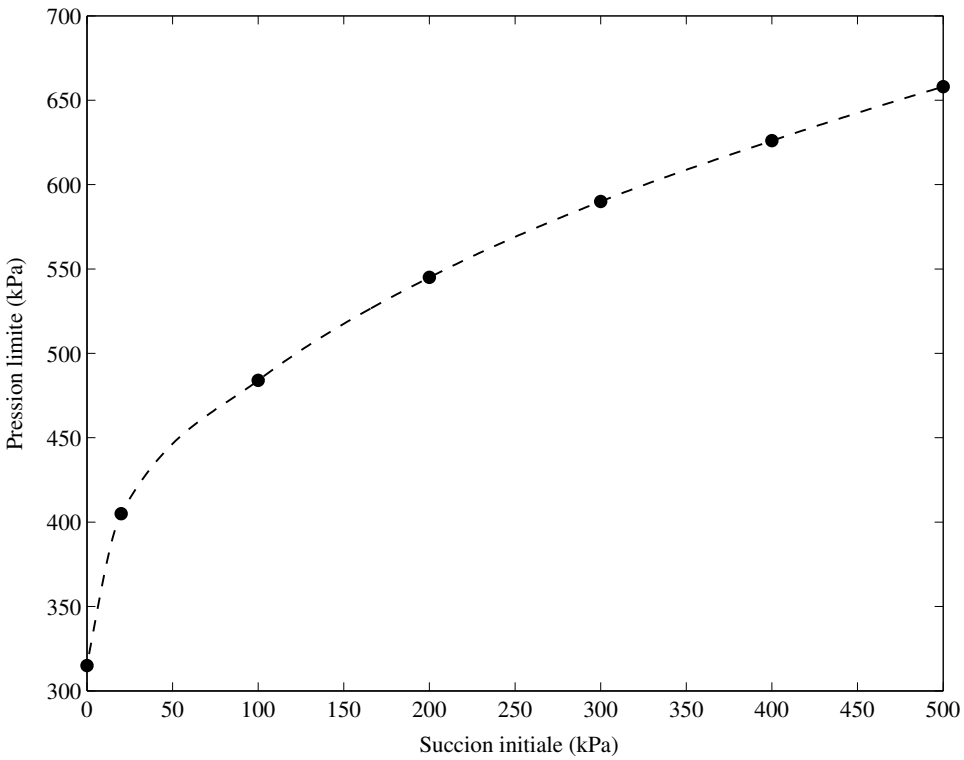


FIGURE 6.2 – Évolution de la pression limite en fonction de la succion initiale (contrainte initiale totale constante, modèle CJS).

Une autre série d'essais pressiométriques a été réalisée en considérant une même contrainte effective initiale pour tous les essais (voir Figure 6.3). Le modèle élastoplastique est basé sur le modèle de Cam-Clay Modifié en l'étendant aux domaines partiellement saturés selon le cadre présenté précédemment. Les constante matérielles sont issues de [Loret et Khalili, 2002] (mis à part α, k_1 et k_2 qui ont été choisis arbitrairement et ne reposent donc pas sur une validation expérimentale) ; elles sont résumées dans le Tableau 6.3.

La Figure 6.4 montre l'évolution relative de l'indice des vides, de la succion et du degré de saturation en paroi de la cellule en fonction de la pression de celle-ci (la succion initiale considérée dans cette simulation est de 150 kPa). Un plateau, correspondant au comportement élastique avant plastification, est observé pour les charges faibles. En effet, sous les conditions de symétrie cylindrique présentes ici, le comportement élastique est caractérisé par un champ de contrainte purement déviatoire ; aucune déformation volumique n'est observée ce qui induit que la succion et le degré de saturation ne sont pas modifiés pendant cette phase élastique. Une fois que l'état de contrainte atteint la surface de charge, une contractance plastique [1] apparaît et conduit à une augmentation du degré de saturation et donc, en retour, à une diminution de la succion.

Il apparaît particulièrement intéressant d'étudier la différence de comportement entre les cas saturé et non-saturé puisque les essais pressiométriques ont principalement été exploités dans un contexte de saturation du sol. La Figure 6.5 présente des courbes pressiométriques simulées dans quatre cas différents. Le sol est saturé dans le premier cas (A) (noté SU dans la légende) alors qu'il ne l'est que partiellement dans les trois autres. Les trois succions initiales sont choisies de

1. Le degré de surconsolidation étant faible, la surface de charge est atteinte sur le côté humide (≪ wet side ≫).

telle sorte que le sol n'atteigne pas la saturation totale au cours du chargement. Il a également été choisi d'initier les chargements dans les cas A (saturé) et B ($s_0 = 150$ KPa) à partir du même coefficient de surconsolidation ; la pression de préconsolidation p'_0 du cas A a donc été déterminée en conséquence. Il est à noter que la surconsolidation pour des succions strictement positives est définie dans cette étude comme le rapport entre la pression limite élastique p'_π et la contrainte effective isotrope p'. Le Tableau 6.4 donne les valeurs décrivant l'état initial des quatre cas étudiés ici. Ces états de contraintes initiaux sont représentés dans le plan (p', s) sur la Figure 6.3. Cette figure montre également les limites du domaine élastique (en pointillé pour le cas A et en trait continu pour les cas B, C et D).

Les résultats peuvent paraître surprenants et méritent quelques commentaires. Excepté une première phase où le chargement reste faible et les quatre simulations présentent la même rigidité initiale, le comportement saturé se distingue complètement du comportement non-saturé. En particulier, le cas A ne semble pas être un cas limite du cas B, cas avec lequel il est pourtant le plus aisément comparable. A partir d'un certain niveau de chargement, les variations de volume de A deviennent plus faibles que celles de B. Cependant, au cours du chargement, la concavité de la courbe du cas saturé augmente plus vite que celle du cas B et les deux courbes se croisent de nouveau. Lorsque le chargement devient important, le volume de la cellule dans le sol saturé augmente bien plus rapidement que dans les sols partiellement saturés.

Le fait que la rigidité initiale soit identique pour tous les essais est dû au caractère purement déviatoire, déjà évoqué plus tôt, du champ de contrainte pendant la phase élastique du chargement. La succion restant constante pendant cette phase, les modules non-drainés de rigidité K_{uu} et de cisaillement G_{uu}, qui ne dépendent que de la contrainte effective, sont identiques pour tous les essais.

Le positionnement respectif des courbes pressiométriques des cas A et B (en particulier, la double intersection de celles-ci) provient d'une interaction entre différents mécanismes. Durant la phase initiale de comportement élastique, le chemin de contrainte est vertical dans le plan (p', q) et réduit à un point dans le plan (p', s) (voir la Figure 6.7). Le domaine élastique est limité par une surface de charge elliptique de même dimension dans les deux cas saturé (A) et $s_0 = 150$ kPa (B). La plastification débute ainsi au même instant dans les deux cas et les chemins de contrainte bifurquent par la suite.

Dans le cas saturé, la condition de non-drainage induit des déformations volumiques très faibles (quasi-incompressibilité de la phase liquide) et, en conséquence, l'écrouissage mécanique est pratiquement nul : la surface de charge reste quasiment inchangée au cours du chargement. Dans un premier temps, c'est donc la condition de non-drainage qui entraîne des déformations plus faibles dans le cas saturé que dans le cas non-saturé (ce dernier n'étant pas concerné par cette quasi-incompressibilité).

L'état de contrainte approche alors l'état critique en suivant l'ellipse (diminution de la contrainte effective p' et augmentation de la contrainte de cisaillement q). Ce chemin vers l'état critique s'accompagne d'une augmentation de la pression de la phase liquide. L'état de contrainte dans le plan (p', s) se dirige donc dans le sens décroissant de p' et de s à la fois. Dans le cas non-saturé, l'état de contrainte se dirige au contraire dans le sens des p' croissantes et des succions décroissantes en raison du comportement volumique contractant.

La résistance à l'expansion de la cellule ne provient pas (du moins, pas principalement) de la compression volumique du massif de sol mais plutôt du développement de contraintes de cisaillement. Lorsque le chargement devient important, le chemin de contrainte (A) devient rapidement limité par la surface de charge dont la taille reste (quasiment) inchangée alors que le chemin (B) continue de se diriger dans la direction de q croissante. De plus importantes

Table 6.3 – Essais pressiométriques non-drainés (contrainte effective initiale constante) : paramètres du modèle Cam-Clay.

Paramètre	Unité	Valeur
G	MPa	3.3
M	–	0.85
λ	–	0.124
κ	– 0.015	
p'_0	kPa	200
s_e	kPa	85
α	–	2.5
k_1	–	1.0
k_2	–	0.1
e_0	–	1.2

Table 6.4 – Description de l'état initial des quatre cas étudiés (unité : kPa).

Cas	s_0	$\pi(s_0)$	p'_0	p'_π
A	0	0	341	341
B	150	143	200	341
C	200	180	200	433
D	250	214	200	516

déformations plastiques apparaissent donc dans le cas (A) afin de mobiliser la résistance du massif sur un anneau de plus large épaisseur, ce qui explique pourquoi la courbe pressiométrique (A) finit par repasser au-dessus de la courbe (B). On notera d'ailleurs que l'état critique est atteint très tôt (du moins en paroi) dans le cas A (voir Figure 6.6).

Afin d'illustrer les effets de la condition de non-drainage (volume spécifique de la phase liquide constant), les variations de volume de la cellule dans le cas où la succion est maintenue constante (ΔV_{ud}) sont comparés au cas non-saturé non-drainé (ΔV_{uu}). Le rapport de ces variations est tracé sur la Figure 6.8 en fonction de la succion initiale de l'essai. Dans le cas étudié ici (faible degré de surconsolidation), il apparaît logiquement que les déplacements de la cellule sont plus importants dans le cas non-drainé. Cela s'explique par la diminution de la succion, induite par les déformations volumiques contractantes, qui ralentit l'augmentation des contraintes déviatoire et accélère donc l'apparition de déformations plastiques.

Lorsque la succion initiale devient importante, la différence entre les deux conditions tend à disparaître ($\Delta V_{ud}/\Delta V_{uu} \to 1$). Cette observation est cohérente avec le fait qu'à des succions plus élevées, la phase liquide tend à rester confinée au niveau des points de contact intergranulaires et devient donc quasiment immobile.

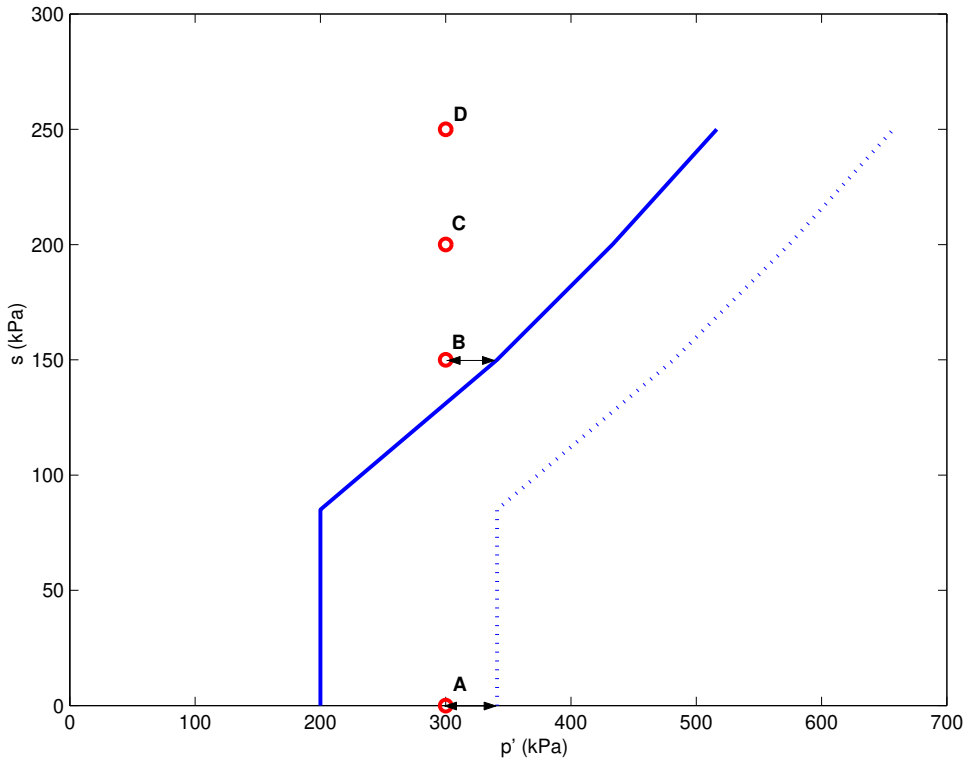


FIGURE 6.3 – Représentation des états de contraintes initiaux dans le plan (p', s).

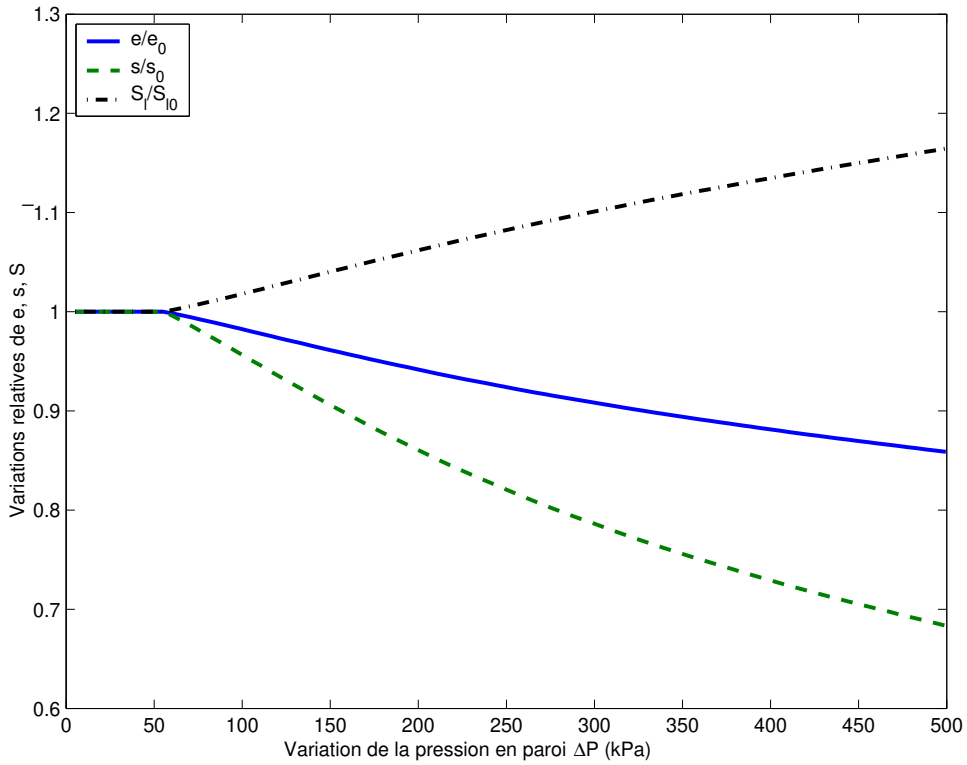


FIGURE 6.4 – Variations relatives de e, s et S_l en paroi en fonction de la pression dans la cellule ($s_0 = 150$ kPa) (modèle Cam-Clay).

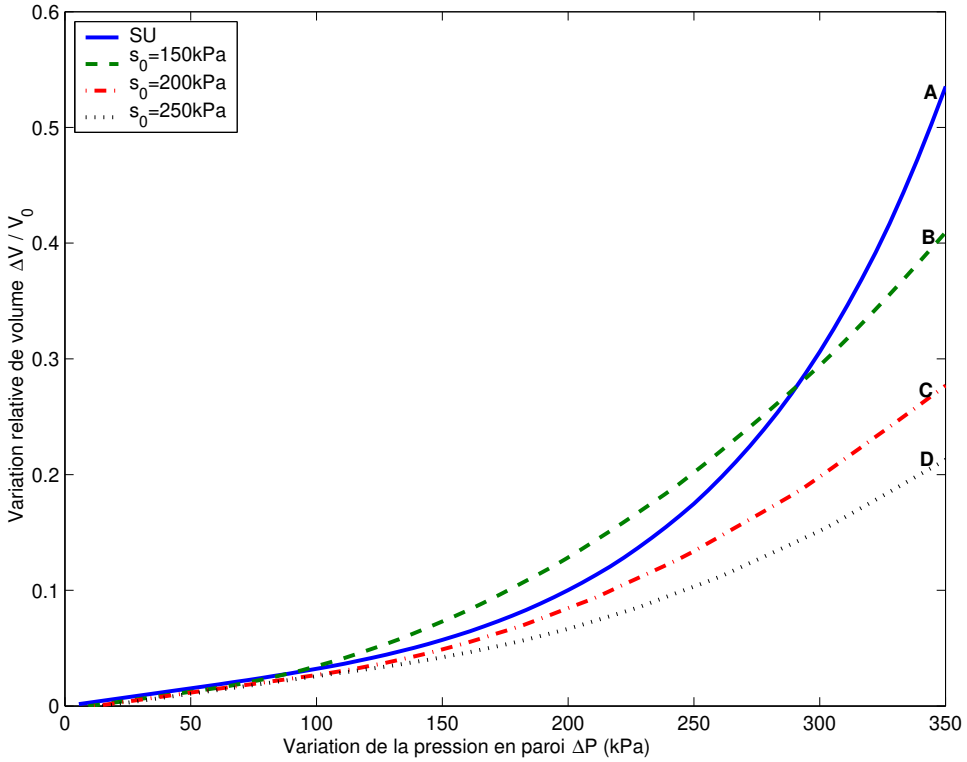


FIGURE 6.5 – Essais pressiométriques non-drainés : influence de la succion sur les courbes pressiométriques (modèle Cam-Clay).

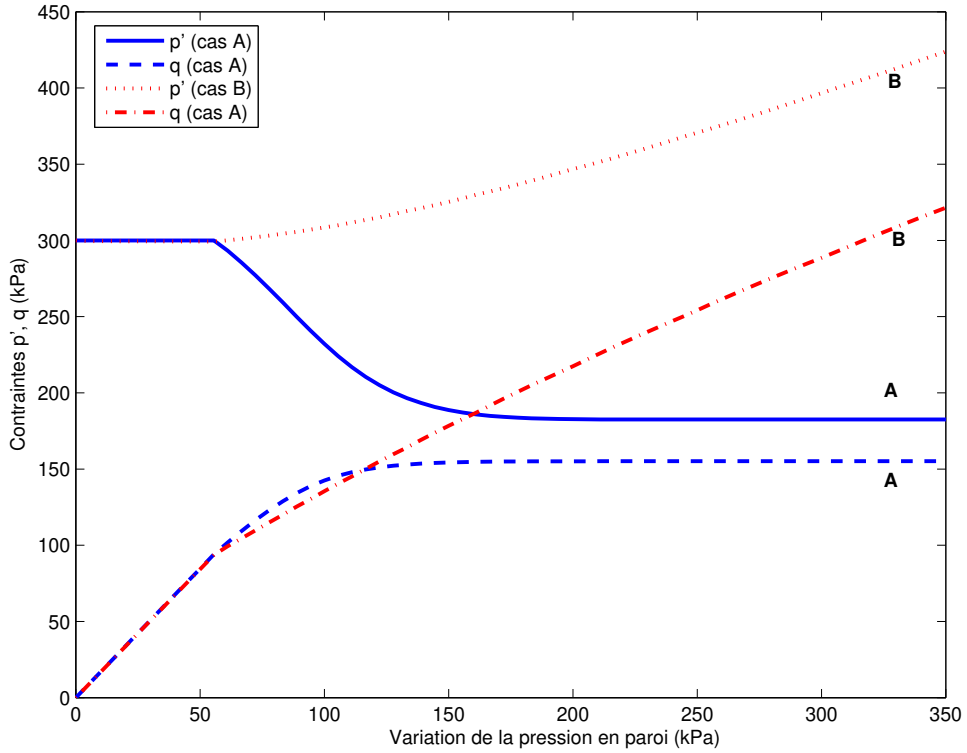


FIGURE 6.6 – Évolution de la contrainte effective isotrope et du déviateur de contrainte en paroi en fonction de la pression en paroi, cas A et B (modèle Cam-Clay).

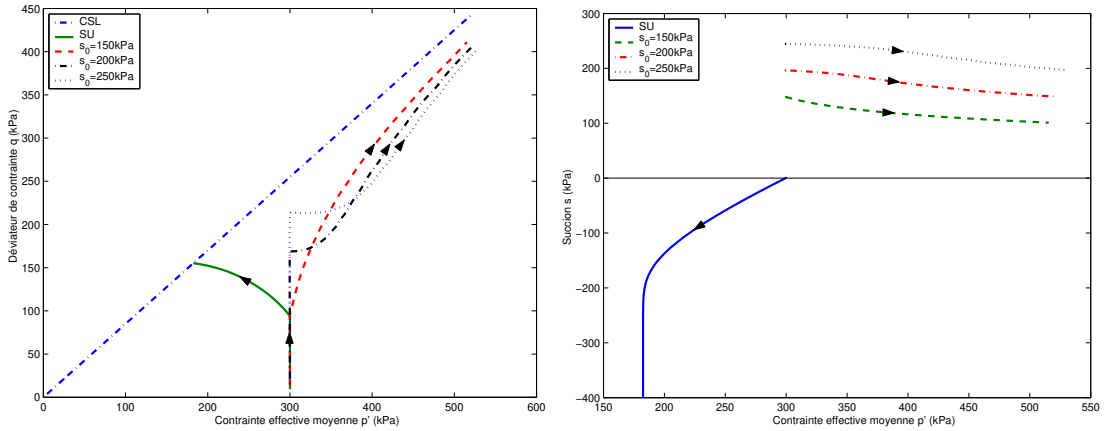


FIGURE 6.7 – Essais pressiométriques non-drainés : chemins de contraintes dans les plans (p', q) et (p', s) (modèle Cam-Clay).

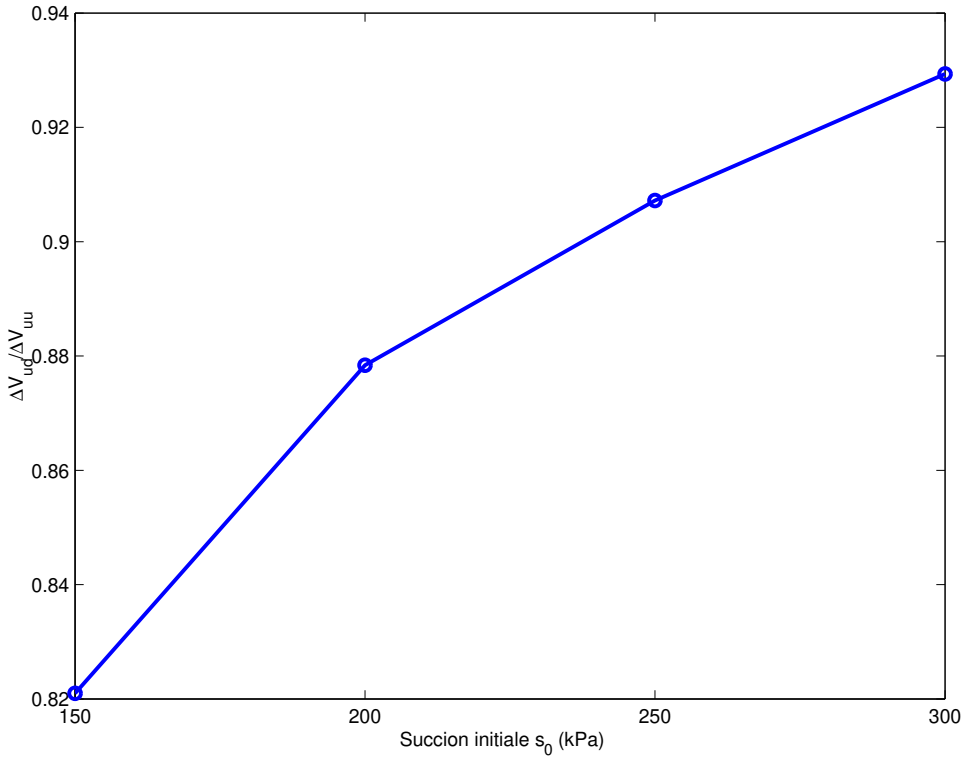


FIGURE 6.8 – Essais pressiométriques non-drainés : influence de la condition de non-drainage (modèle Cam-Clay).

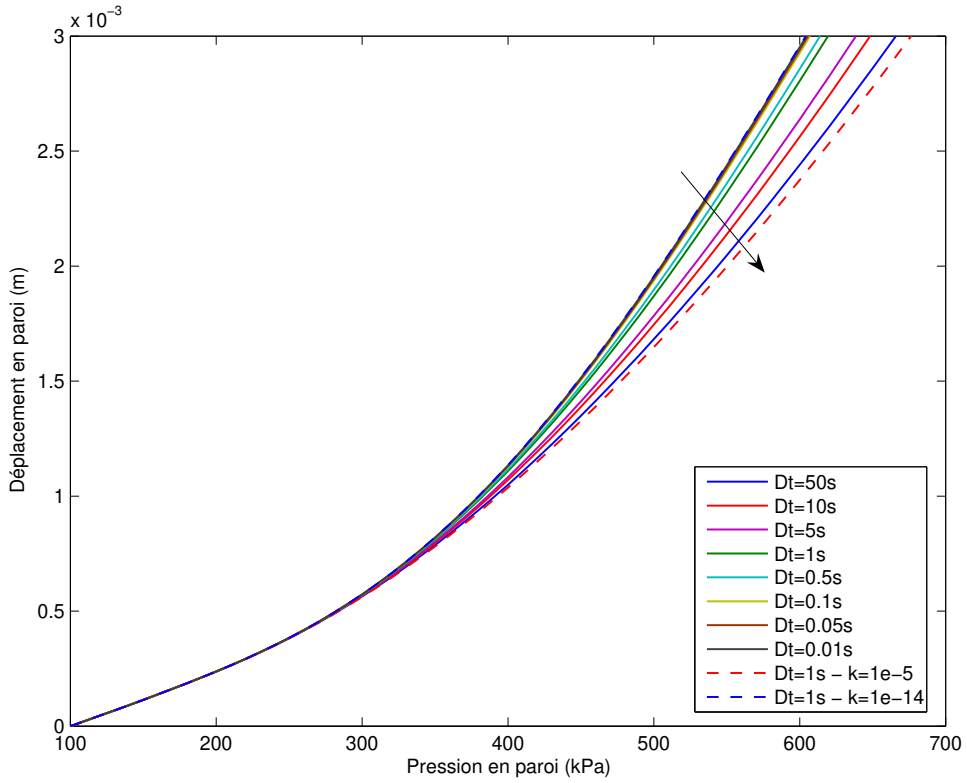


FIGURE 6.9 – Essai pressiométrique : influence de la vitesse de chargement ($k = 1e^{-9}\mathrm{m}^2/\mathrm{Pa.s}$) – modèle CJS.

6.1.2 Prise en compte de l'écoulement de la phase liquide

Après cette étude de l'essai pressiométrique en conditions non-drainées, des simulations tenant compte de l'écoulement de la phase liquide sont présentées. Les simulations considèrent un chargement mécanique divisé en 100 incréments dont la durée est notée Dt. A la différence du cas non-drainé présenté plus tôt, durant ce chargement mécanique, la phase fluide peut s'écouler. Les paramètres matériels utilisés précédemment sont conservés (Tableau 6.1). Il est à noter que dans toutes les simulations qui suivent, le paramètre θ du schéma d'intégration numérique est pris égal à 1 (le schéma utilisé est donc implicite).

Les Figures 6.9 et 6.10 présentent, dans le cas saturé, différentes simulations d'essais pressiométriques afin d'illustrer l'influence de la vitesse de chargement et de la perméabilité du sol. Ces figures présentent le déplacement en paroi en fonction de la pression appliquée en paroi. On peut observer une équivalence entre l'augmentation de la vitesse de chargement et la diminution de la perméabilité du sol (ces deux actions ont tendance à faire tendre la réponse du matériau vers celle qu'il aurait sous un chargement non-drainé).

La Figure 6.11 montre les profils de la pression de la phase liquide dans le massif à différents instants. On peut observer que le chargement mécanique induit, en premier lieu, une augmentation de la pression interstitielle et que celle-ci n'apparaît que dans un domaine restreint autour de la sonde (environ 30cm). Ces courbes mettent également en avant l'influence du comportement dilatant du sol, qui est responsable d'une répartition non monotone des pressions le long du domaine. Ce phénomène tend en effet à diminuer les surpressions générées par l'expansion de la sonde. Alors que la valeur du pic de pression interstitielle se stabilise rapidement (elle n'évolue guère après 70s), la diminution de la succion est de plus en plus importante en paroi au fur et à

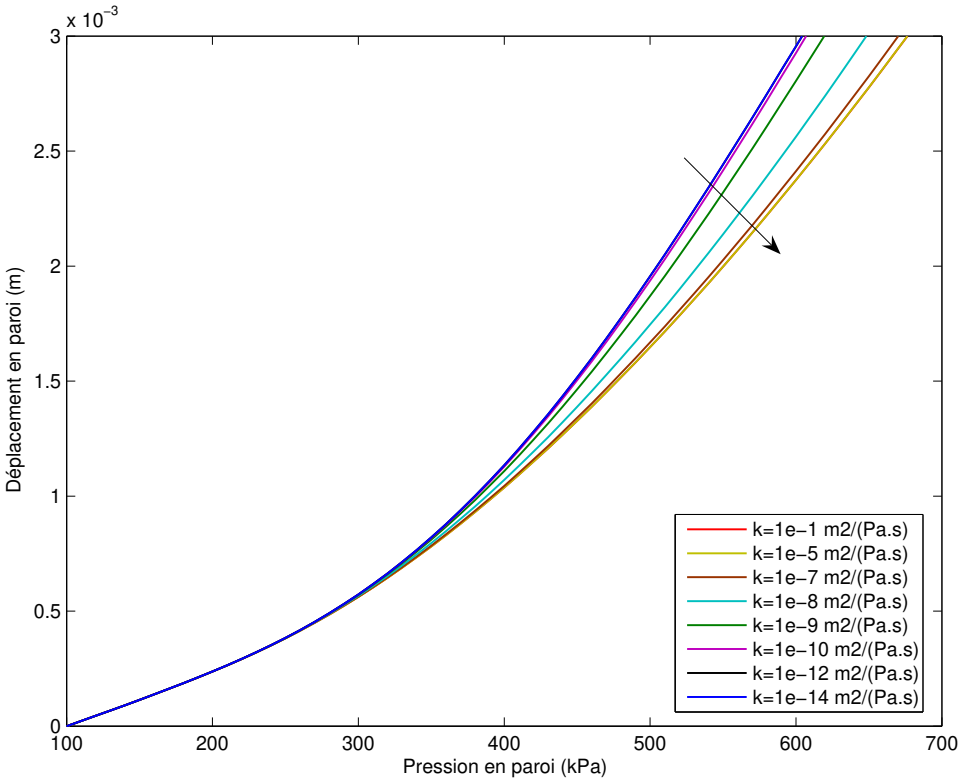
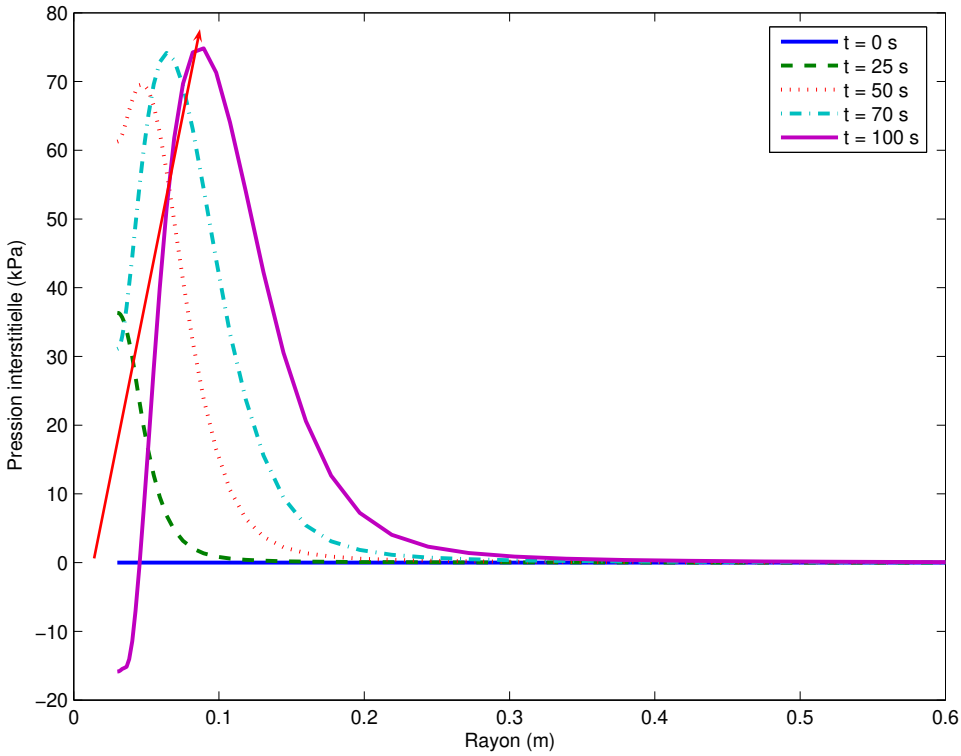


FIGURE 6.10 – Essai pressiométrique : influence de la perméabilité ($\Delta t = 1$s) – modèle CJS.

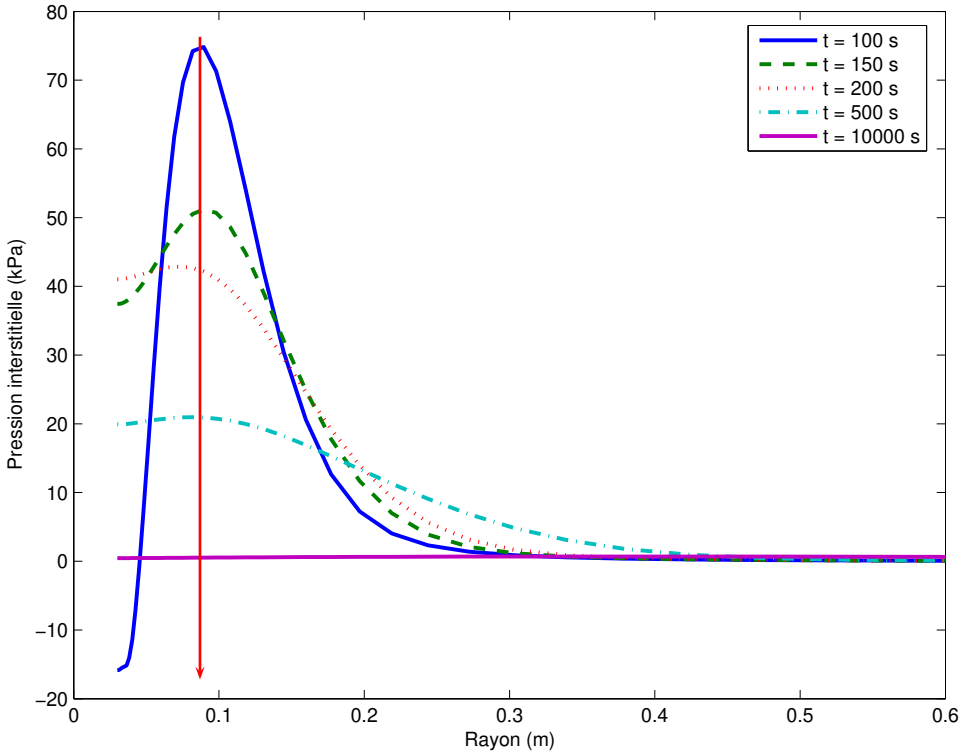
mesure du chargement mécanique. A la fin de celui-ci ($t = 100$s), la dilatance est d'ailleurs telle que la pression est devenue négative à proximité de la paroi (montrant à cette occasion que le code de calcul est capable de franchir sans difficulté la transition entre conditions de saturation totale et partielle).

La prise en compte de l'écoulement de la phase liquide permet d'observer les phénomènes suivants. Au cours du chargement mécanique, le pic de pression se déplace dans le sens des rayons croissants. Une fois ce chargement terminé (ce phénomène persiste bien sûr) mais le phénomène prépondérant consiste en une homogénéisation des pressions le long de l'axe radial. Pendant cette phase, le pic diminue rapidement alors que les pressions plus faibles en paroi augmentent. Dans le même temps, le domaine où l'on observe des pressions positives s'étend vers de plus grands rayons. Ces évolutions traduisent des écoulements d'eau depuis les régions connaissant de fortes pressions vers celles où la pression est plus faible (à la fois vers la paroi et vers l'extérieur du domaine).

La Figure 6.12 illustre de façon synthétique ces différentes tendances en représentant dans le plan (rayon r, temps t) les isovaleurs de la pression interstitielle.



(a) Pendant le chargement mécanique.



(b) Après le chargement mécanique.

FIGURE 6.11 – Profils de répartition de la pression de la phase liquide en fonction de la distance radiale à différents instants (succion initiale nulle dans le massif, $k = 1e^{-9}\mathrm{m}^2/\mathrm{Pa.s}$, $\Delta t = 1\mathrm{s}$) – modèle CJS.

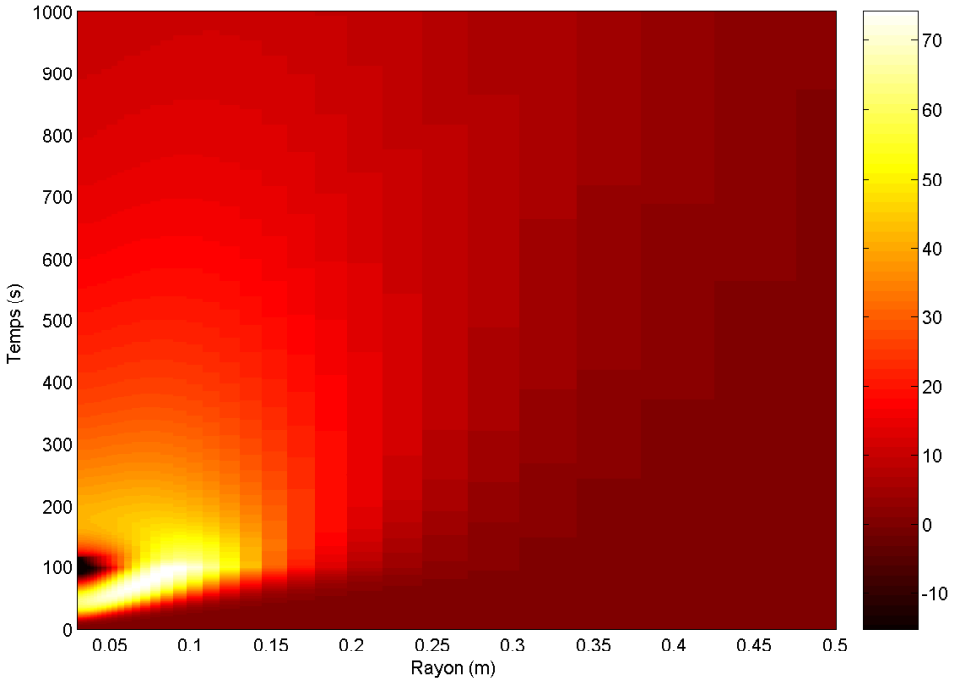


FIGURE 6.12 – Isovaleurs de la pression interstitielle dans le plan (r, t) – modèle CJS.

6.2 Essai de déconfinement d'une cavité souterraine

On considère ici une cavité souterraine et l'on simule l'effet de son creusement. La pression en paroi est ainsi diminuée à partir de la pression *in situ*. La Figure 6.13 présente les résultats fournis par notre code de calcul et illustre l'influence de la succion initiale (supposée homogène dans le massif) sur la convergence du massif. Les paramètres matériels utilisés sont ceux du Tableau 6.1. Il apparaît logiquement qu'une succion initiale plus importante tend à diminuer la convergence en paroi.

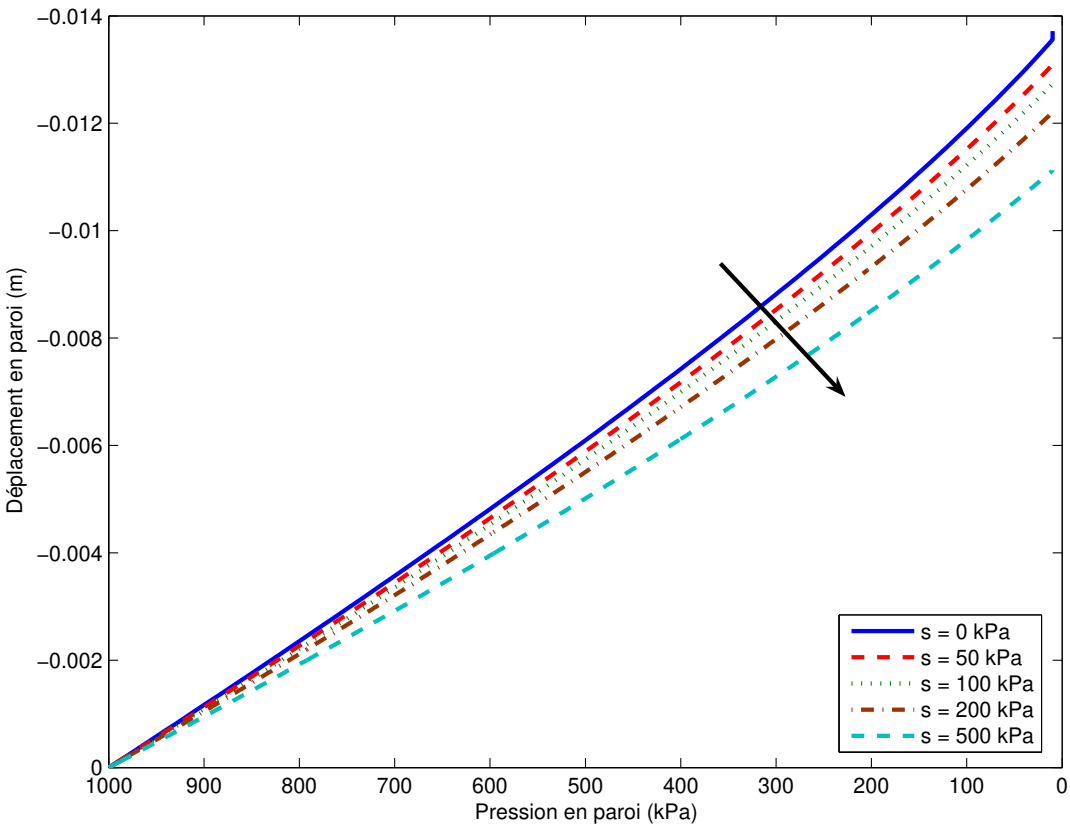


FIGURE 6.13 – Essai de déconfinement d'une cavité souterraine : influence de la succion initiale dans le massif (modèle CJS).

6.3 Essai de gonflement empêché

Afin d'illustrer les capacités du modèle, un essai de gonflement empêché, à l'œdomètre, est réalisé : l'imbibition d'un échantillon de sol est simulée en empêchant les déformations de celui-ci. L'algorithme utilisé pour modéliser l'essai œdométrique a été modifié pour tenir compte de ces nouvelles conditions de chargement (voir la présentation de ces conditions au Chapitre 5). Les paramètres utilisés pour cette étude sont issus de l'essai d'effondrement à l'œdomètre simulé précédemment. Une étude paramétrique sur l'influence de k_1 est menée (voir le Tableau 4.2).

La Figure 6.14 présente les courbes LC (pour chaque valeur de k_1 prise en compte) limitant le domaine d'élasticité initial ainsi que le point représentatif de l'état de contrainte initial dans le plan (p', s). Les résultats sont présentés sur les Figures 6.15 et 6.16. Une simulation élastique non-linéaire (obtenue en désactivant les mécanismes plastiques du modèle) a été ajoutée aux simulations élastoplastiques utilisant le modèle CJS.

Ces résultats montrent que la simulation élastique présente la plus grande pression de gonflement. Les pression de gonflement, dès lors que l'on tient compte des mécanismes plastiques, sont bien moindres. Les pression finales augmentent (bien que faiblement) avec la taille du domaine élastique initial. La génération de cette contrainte de gonflement passe par un pic dès que le trajet du chemin de contrainte dans la zone élastique est suffisamment important (à partir de $k_1 = 0.1$ dans les cas traités). Cette diminution de la pression de gonflement est bien-sûr liée à l'apparition des déformations plastiques engendrées par le phénomène d'effondrement, ce dernier ayant tendance à contrebalancer le gonflement élastique induit par la diminution de la succion. Si la frontière élastique est atteinte alors qu'un gonflement élastique significatif a pu se développer, celui-ci est d'abord ralenti avant que ses effets ne deviennent moins importants que ceux issus de l'effondrement.

La succession des mécanismes antagonistes que sont le gonflement et l'effondrement explique l'allure des courbes pour lesquelles l'état initial était éloigné de la courbe LC : la contrainte verticale augmente rapidement dans un premier temps, de façon moindre au moment de la plastification du sol puis diminue lorsque le gonflement devient prédominant. Lorsque la valeur de k_1 devient grande, il n'est d'ailleurs pas observé de ralentissement dans l'augmentation de la contrainte verticale, celle-ci diminue dès la plastification. Il est à noter que lorsque la succion devient inférieure à la succion d'entrée d'air (symbolisée par les traits pointillés fins sur les figures), le comportement du matériau est de nouveau élastique, ce qui se traduit par une augmentation de la contrainte de gonflement.

La Figure 6.16 présente les chemins de contrainte simulés dans le plan (p', s). Le cas élastique s'illustre par le fait que la contrainte effective isotrope y est constante au cours de l'essai (la diminution de la succion étant compensée par l'augmentation de la contrainte de gonflement). Pour les autres essais, l'apparition de déformations plastiques entraîne une diminution de la contrainte effective, celle-ci étant d'autant plus rapide que la courbe LC est atteinte plus tard au cours de l'essai.

La Figure 6.17 représente de façon schématique un chemin de contrainte type dans le plan (p', s). Les phases A-B et C-D sont caractérisées par un comportement élastique alors que la phase B-C est le siège de déformations plastiques liées à l'effondrement. Cette figure montre également les positions initiale (en trait continu) et finale (en trait pointillé) de la limite du domaine élastique.

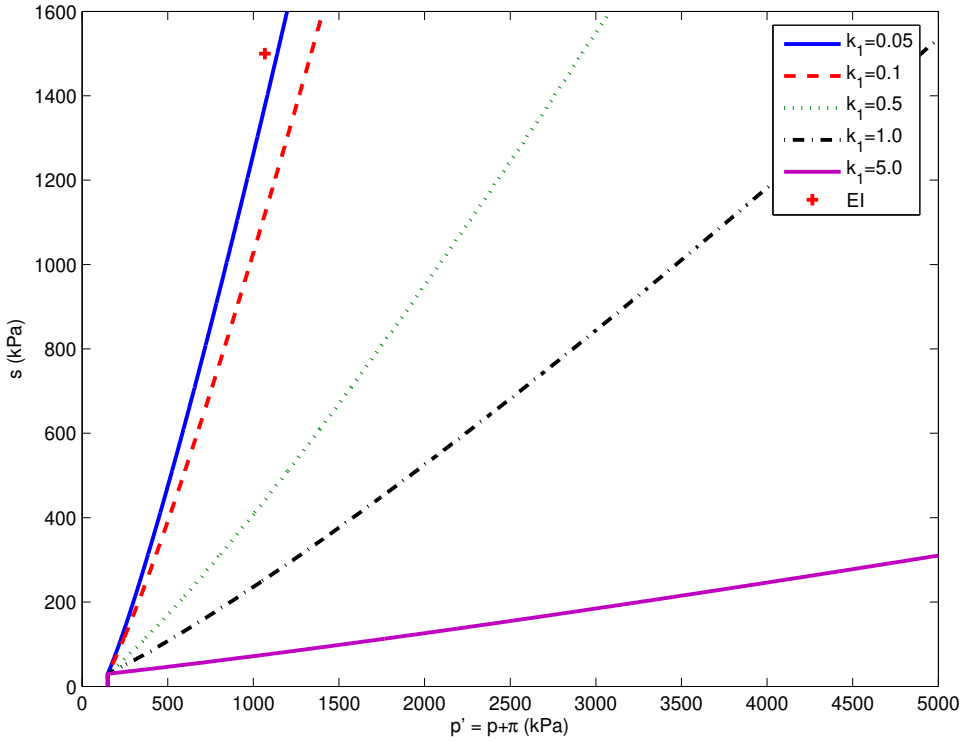


FIGURE 6.14 – Essai de gonflement empêché : courbes LC initiales (le symbole + (EI) représente l'état initial de contrainte du matériau).

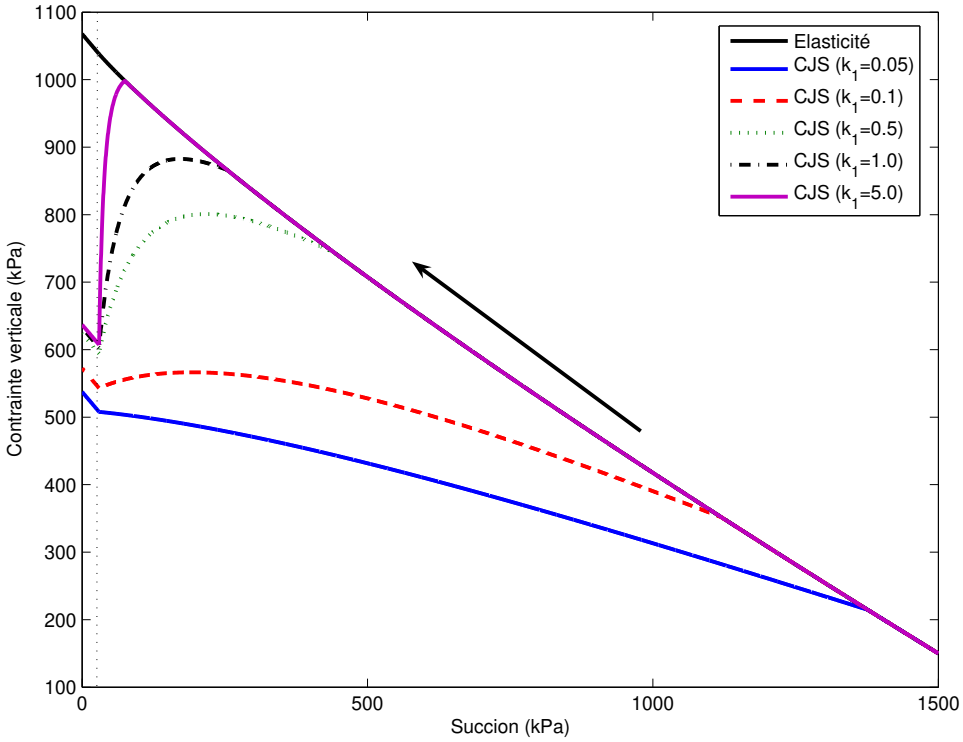


FIGURE 6.15 – Essai de gonflement empêché : influence du domaine élastique initial (paramètre k_1 de la courbe LC) – modèle CJS.

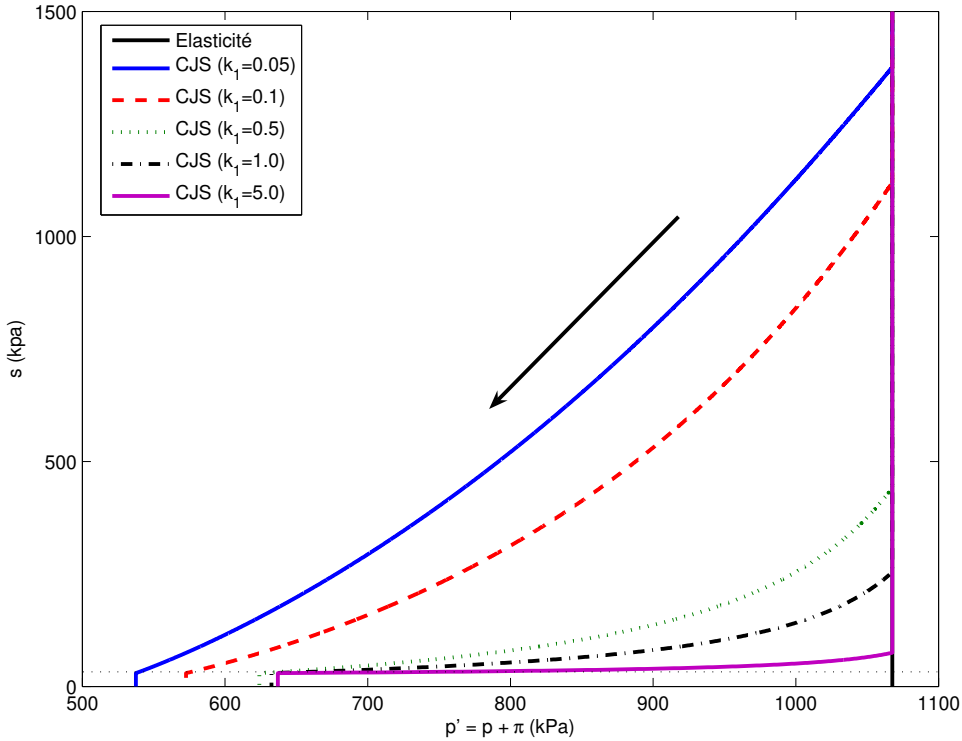


FIGURE 6.16 – Essai de gonflement empêché : chemins de contrainte dans le plan (p', s) – modèle CJS.

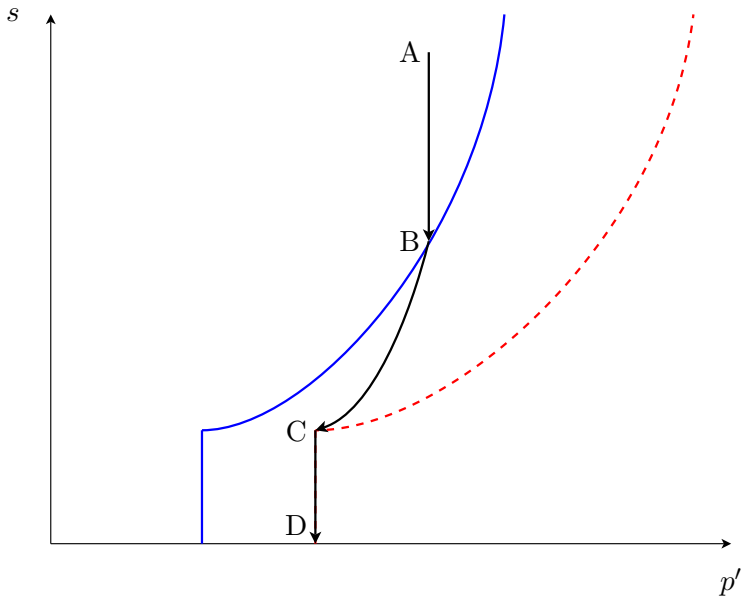


FIGURE 6.17 – Représentation schématique du chemin de contrainte et des limites initiale et finale du domaine élastique dans le plan (p', s).

Conclusions et perspectives

Synthèse des travaux présentés

L'étude des couplages hydromécaniques et des effets d'une saturation partielle dans les géomatériaux a été abordée dans ce travail. Le cadre théorique de la mécanique des milieux poreux totalement ou partiellement saturés a été rappelé. Les équations d'état ainsi que le comportement poroélastique ont été présentés dans les deux domaines de saturation. La formulation thermodynamique d'une contrainte pouvant être qualifiée d'effective est également exposée.

Après une synthèse des principales caractéristiques du comportement des matériaux non-saturés ainsi que des contributions récentes dans la modélisation de ce comportement, un modèle cadre a été défini.

Ce cadre de modélisation élastoplastique utilise deux variables de contrainte indépendantes : outre la succion, une combinaison de la contrainte totale et de la succion a été choisie. La définition de cette dernière variable de contrainte, souvent appelée contrainte effective ou parfois contrainte constitutive, demeure un point clé dans ce type de démarche. Ce sujet fait d'ailleurs l'objet d'une discussion dans ce travail.

Il a été montré que le cadre de modélisation proposé permet d'englober différents modèles élastoplastiques récemment présentés. L'objectif de cette proposition est cependant plus large et s'inscrit dans une démarche méthodologique permettant de simplifier l'extension de modèles élastoplastiques existants, initialement formulés pour des matériaux saturés, aux états de saturation partielle. Une telle proposition permet d'envisager l'extension de modèles rhéologiques complexes afin de modéliser plus finement le comportement de matériaux non-saturés tout en bénéficiant de la richesse de modèles éprouvés et validés.

Le modèle CJS, un modèle de comportement complexe à deux mécanismes plastiques et double écrouissage, isotrope et cinématique, formulé pour des matériaux granulaires saturés a été étendu aux états de non-saturation dans ce cadre méthodologique. Le modèle étendu ainsi obtenu a été validé sur la base d'essais de laboratoire, montrant par là-même l'intérêt que revêt le cadre de modélisation proposé.

La confrontation entre les prédictions du modèle et les données expérimentales provenant de différents types d'essais s'est révélée très prometteuse. Cette validation montre en particulier

que le modèle CJS étendu est capable de rendre compte des principales caractéristiques du comportement des sols partiellement saturés (en particulier, du phénomène d'effondrement). Les résultats présentés justifient en outre l'utilisation de modèles aussi avancés que ne l'est le CJS. En effet, le concept d'état caractéristique pris en compte dans le modèle CJS initial permet naturellement à son extension de pouvoir simuler des comportements volumiques complexes sous sollicitations déviatoriques et ainsi, de prévoir un comportement contractant ou dilatant selon l'état de contrainte.

Ce travail s'est en outre largement intéressé à l'aspect numérique de la modélisation. Un code de calcul par éléments finis (programmé en langage orienté objet C++) a été entièrement développé pendant ces travaux. Celui-ci permet de modéliser l'expansion (ou le déconfinement) de cavités souterraines en tenant compte d'hypothèses simplificatrices (une symétrie axiale et des déformations planes sont ainsi considérées). L'objectif de ce développement était, tout en se concentrant sur les aspects rhéologiques, d'étudier les effets de structure en plus des effets plus directement liés à la non-saturation du matériau.

Ce code de calcul tient compte des écoulements de la phase liquide et peut modéliser le comportement du matériau sur l'ensemble du domaine saturé – non-saturé en assurant la transition au moment de la désaturation (ou resaturation). La pression de la phase gazeuse quant à elle est supposée en équilibre permanent avec la pression atmosphérique. Plusieurs modèles de comportement élastoplastiques (les modèles CJS, Cam Clay Modifié et Mohr Coulomb), étendus au domaine de saturation partielle selon le cadre méthodologique présenté plus tôt, ont été implémentés dans ce code. Des conditions particulières de chargement peuvent en outre être prises en compte dans les simulations : il s'agit de conditions de non-drainage.

Après avoir formulé la discrétisation par éléments finis du problème à résoudre, les résultats de simulations à l'aide de cet outil numérique sont présentés et analysés. Ces simulations numériques concernent des essais pressiométriques en conditions drainées et non-drainées ou de déconfinement d'une cavité souterraine. Ils permettent de mieux appréhender les effets d'une saturation partielle du matériaux à l'échelle du massif dans lequel un ouvrage est présent.

Perspectives

Le cadre de modélisation proposé dans ce travail fournit un outil méthodologique particulièrement intéressant dans une perspective d'extension plus aisée et systématique de modèles existants au domaine non-saturé.

Plusieurs pistes peuvent être évoquées quant à l'extension de ce cadre. La première concerne sa confrontation à des modèles de comportement spécifiques qu'ils aient été formulés pour des matériaux particuliers (tels que les argiles gonflantes [Gens et Alonso, 1992]) ou selon des formalismes différents de l'élastoplasticité classique (par exemple, les modèles incrémentaux non-linéaires [Darve et Labanieh, 1982]).

La seconde s'oriente plutôt vers l'origine physique des couplages considérés. Le modèle cadre doit être étendu à des couplages de nature plus large que les seuls couplages hydromécaniques abordés dans cette étude. On pense en particulier à l'intégration des effets d'origine thermique mais également chimique et de leur interaction avec les phénomènes hydrauliques et mécaniques.

Les enjeux pour la société d'une modélisation intégrant l'ensemble de ces couplages sont très importants : ils concernent le développement durable (étude de la migration de polluants

dans un sol et sa dépollution, stockage de déchets radioactifs ou de CO_2 en sous-sol...) ou la gestion des risques (liés à la stabilité d'ouvrages géotechniques, aux carrières abandonnées, à la sécheresse...).

Le phénomène d'hystérésis doit également être pris en compte dans la modélisation de la courbe de sorption, cette dernière jouant un rôle important sur la définition de la contrainte effective adoptée. L'influence des déformations sur cette courbe est en outre à envisager.

Au delà de ces extensions du cadre méthodologique, la question de sa finalité doit être posée. Le cadre proposé ici apporte une certaine facilité dans l'extension de modèles vers le domaine non-saturé. Il devrait, à l'avenir, évoluer vers un outil d'aide à la décision quant au choix du modèle de départ. Il convient donc de définir une stratégie de choix du modèle à étendre en fonction de la situation rencontrée.

Pour ce qui est du code de calcul, les choix effectués quant à la géométrie simplifiée modélisable méritent d'être réexaminés. Il est en effet nécessaire de pouvoir modéliser des applications bi- voire tridimensionnelles. Auparavant, il sera probablement utile d'optimiser les procédures de résolution numérique, cet aspect n'ayant pas été approfondi du fait de la grande rapidité d'exécution du code monodimensionnel. Le passage aux dimensions supérieures posera inévitablement la question des optimisations numériques. L'implémentation dans le code de calcul des aspects thermique et chimique doit également être envisagée.

Pour finir, du point de vue de la validation du modèle CJS étendu, il serait intéressant de pouvoir disposer, pour un même matériau, de données expérimentales couvrant à la fois des essais de laboratoire (permettant d'identifier les paramètres matériels) et des essais en place, de type pressiométrique par exemple afin d'estimer plus en avant les capacités de prédiction du modèle.

Bibliographie

[Abou-Bekr, 1995] Abou-Bekr, N. (1995). *Modélisation du comportement mécanique et hydraulique des sols partiellement saturés*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris.

[Ajdour et al., 2003] Ajdour, M., Pereira, J.-M., Wong, H. et Dubujet, P. (2003). Simulation de l'expansion de cavité cylindrique dans un sol en conditions drainée et non drainée: comparaison de deux approches numériques. Dans *6ème Congrès Marocain de Mécanique*, volume 1 - Mécanique des solides, pages 211–212, Université Abdelmalek Essaadi, Faculté des Sciences et Techniques de Tanger.

[Alonso et al., 1999] Alonso, E., Vaunat, J. et Gens, A. (1999). Modelling the mechanical behaviour of expansive clays. *Engineering Geology Proceedings of the 1998 Symposium on Microstructural Modelling of Natural and Artificially Prepared Clay Soils with Special Emphasis on the Use of Clays for Waste Isoaltion, Oct 12-Oct 14 1998*, 54(1-2):173–183.

[Alonso et al., 1990] Alonso, E. E., Gens, A. et Josa, A. (1990). A constitutive model for partially saturated soils. *Géotechnique*, 40(3):405–430.

[Biarez et al., 1987] Biarez, J., Fleureau, J.-M., Zerhouni, M.-I. et Soepandji, B. (1987). Variations de volume des sols argileux lors de cycles de drainage-humidification. *Revue Française de Géotechnique*, 41:63–71.

[Biot, 1941] Biot, M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12(2):155–164.

[Biot, 1955] Biot, M. A. (1955). Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*, 26(2):182–185.

[Biot, 1977] Biot, M. A. (1977). Variational lagrangian-thermodynamics of nonisothermal finite strain mechanics of porous solids and thermomolecular diffusion. *International Journal of Solids and Structures*, 13:579–597.

[Bishop, 1959] Bishop, A. W. (1959). The principle of effective stress. *Teknisk Ukeblad*, 106(39):859–863.

[Bishop et Blight, 1963] Bishop, A. W. et Blight, G. E. (1963). Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils. *Géotechnique*, 13(3):177–197.

[Blatz et Graham, 2003] Blatz, J. A. et Graham, J. (2003). Elastic-plastic modelling of unsaturated soil using results from a new triaxial test with controlled suction. *Géotechnique*, 53(1):113–122.

[Bourgeois, 1997] Bourgeois, E. (1997). *Mécanique des milieux poreux en transformation finie : Formulation des problèmes et méthodes de résolution.* Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

[Cambou et Jafari, 1988] Cambou, B. et Jafari, K. (1988). Modèle de comportement des sols non cohérents. *Revue Française de Géotechnique*, 44:43–55.

[Coussy, 1995] Coussy, O. (1995). *Mechanics of porous continua.* John Wiley & Sons, Chichester.

[Coussy et Dangla, 2002] Coussy, O. et Dangla, P. (2002). Approche énergétique du comportement des sols non saturés. Dans Coussy, O. et Fleureau, J.-M., éditeurs, *Mécanique des sols non saturés.* Lavoisier, Paris.

[Cui, 1993] Cui, Y. J. (1993). *Etude du comportement d'un limon compacté non saturé et de sa modélisation dans un cadre élasto-plastique.* Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

[Cui et Delage, 1996] Cui, Y. J. et Delage, P. (1996). Yielding and plastic behaviour of an unsaturated compacted silt. *Géotechnique*, 46(2):291–311.

[Dangla, 2001] Dangla, P. (2001). Introduction à la mécanique des milieux poreux. Cours de DEA mécanique des solides, des matériaux et des structures, ecole doctorale modes, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

[Dangla, 2002] Dangla, P. (2002). Plasticité et hystérésis. Dans Coussy, O. et Fleureau, J.-M., éditeurs, *Mécanique des sols non saturés.* Lavoisier, Paris.

[Darve et Labanieh, 1982] Darve, F. et Labanieh, S. (1982). Incremental constitutive laws for sands and clays : simulations of monotonic and cyclic tests. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 6(2):243–275.

[Delage, 1987] Delage, P. (1987). Aspects du comportement des sols non saturés. *Revue Française de Géotechnique*, 40:33–43.

[Delage et Cui, 2000] Delage, P. et Cui, Y. J. (2000). L'eau dans les sols saturés. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume Structures et gros oeuvre, pages C301 : 1–20.

[Delage et Cui, 2001] Delage, P. et Cui, Y. J. (2001). Comportement mécanique des sols non saturés. Dans *Techniques de l'ingénieur*, volume Structures et gros oeuvre, pages C302 : 1–19.

[Dhatt et Touzot, 1984] Dhatt, G. et Touzot, G. (1984). *Une présentation de la méthode des éléments finis.* Maloine S.A. Editeur, Paris, édition deuxième édition.

[Di Maio, 2003a] Di Maio, C. (2003a). Consolidation, swelling and swelling pressure induced by exposure of clay soils to fluids different from the pore fluid. Dans Loret, B. et Huyghe, J. M., éditeurs, CISM Courses and Lectures, *Chemo-Mechanical Couplings in Porous Media Geomechanics and Biomechanics* n°462, Udine, Italie. Springer Wien New York (2004).

[Di Maio, 2003b] Di Maio, C. (2003b). Influence of pore fluid composition on volume change behaviour of clays exposed to the same fluid as the pore fluid. Dans Loret, B. et Huyghe, J. M., éditeurs, CISM Courses and Lectures, *Chemo-Mechanical Couplings in Porous Media Geomechanics and Biomechanics* n°462, Udine, Italie. Springer Wien New York (2004).

[Di Maio, 2003c] Di Maio, C. (2003c). Shear strength of clays and clayey soils: the influence of pore fluid composition. Dans Loret, B. et Huyghe, J. M., éditeurs, CISM Courses and Lectures, *Chemo-Mechanical Couplings in Porous Media Geomechanics and Biomechanics* n°462, Udine, Italie. Springer Wien New York (2004).

[Elamrani, 1992] Elamrani, K. (1992). *Contributions à la validation du modèle CJS pour les matériaux granulaires.* Thèse, Ecole Centrale de Lyon.

[Fleureau et Indarto, 1993] Fleureau, J.-M. et Indarto, T. (1993). Comportement du limon de Jossigny remanié soumis à une pression interstitielle négative. *Revue Française de Géotechnique*, 62:59–66.

[Fleureau et al., 1993] Fleureau, J.-M., Kheirbek-Saoud, S., Soemitro, R. et Taibi, S. (1993). Behavior of clayey soils on drying-wetting paths. *Canadian Geotechnical Journal*, 30(2):287–296.

[Fleureau et al., 2002] Fleureau, J.-M., Verbrugge, J.-C., Huergo, P. J., Gomes Correia, A. et Kheirbek-Saoud, S. (2002). Aspects of the behaviour of compacted clayey soils on drying and wetting paths. *Canadian Geotechnical Journal*, 39(6):1341–1357.

[Fredlund et Rahardjo, 1993] Fredlund, D. G. et Rahardjo, H. (1993). *Soils mechanics for unsaturated soils*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[Gallipoli et al., 2003a] Gallipoli, D., Gens, A., Sharma, R. et Vaunat, J. (2003a). An elastoplastic model for unsaturated soil incorporating the effects of suction and degree of saturation on mechanical behaviour. *Géotechnique*, 53(1):123–135.

[Gallipoli et al., 2003b] Gallipoli, D., Wheeler, S. J. et Karstunen, M. (2003b). Modelling the variation of degree of saturation in a deformable unsaturated soil. *Géotechnique*, 53(1):105–112.

[Gens, 2005] Gens, A. (2005). Effective stresses. Dans *1st MUSE School: Fundamentals of Unsaturated Soils*, UPC, Barcelone, Espagne.

[Gens et Alonso, 1992] Gens, A. et Alonso, E. E. (1992). A framework for the behaviour of unsaturated expansive clays. *Canadian Geotechnical Journal*, 29:1013–1032.

[Guellouz, 1995] Guellouz, L. (1995). *Modélisation du couplage hydraulique mécanique dans les sols non saturés. Application aux barrages en terre*. Thèse, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II.

[Houlsby, 1997] Houlsby, G. (1997). The work input to an unsaturated granular material. *Géotechnique*, 47(1):193–196.

[Khalili et Khabbaz, 1998] Khalili, N. et Khabbaz, M. H. (1998). A unique relationship for χ for the determination of the shear strength of unsaturated soils. *Géotechnique*, 48(5):681–687.

[Kohgo et al., 1993a] Kohgo, Y., Nakano, M. et Miyazaki, T. (1993a). Theoretical aspects of constitutive modelling for unsaturated soils. *Soils and Foundations*, 33(4):49–63.

[Kohgo et al., 1993b] Kohgo, Y., Nakano, M. et Miyazaki, T. (1993b). Verification of the generalized elastoplastic model for unsaturated soils. *Soils and Foundations*, 33(4):64–73.

[Laloui et al., 2001] Laloui, L., Geiser, F. et Vulliet, L. (2001). Constitutive modelling of unsaturated soils. *Revue Française de Génie Civil*, 5:797–807.

[Laloui et Nuth, 2005] Laloui, L. et Nuth, M. (2005). An introduction to the constitutive modelling of unsaturated soils. *Revue Européenne de Génie Civil*, 9(5-6):651–669.

[Lemaitre et Chaboche, 1985] Lemaitre, J. et Chaboche, J.-L. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris.

[Lewis et Schrefler, 1998] Lewis, R. et Schrefler, B. A. (1998). *The Finite Element Method in Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley & sons, Chichester, édition second.

[Li et al., 1999] Li, X., Thomas, H. R. et Fan, Y. (1999). Finite element method and constitutive modelling and computation for unsaturated soils. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 169:135–159.

[Li, 2003a] Li, X. S. (2003a). Effective stress in unsaturated soil: a microstructural analysis. *Géotechnique*, 53(2):273–277.

[Li, 2003b] Li, X. S. (2003b). Tensorial nature of suction in unsaturated granular soil. Dans *16th ASCE Engineering Mechanics Conference*, University of Washington, Seattle, USA.

[Loret et al., 2002] Loret, B., Hueckel, T. et Gajo, A. (2002). Chemo-mechanical coupling in saturated porous media: elastic-plastic behaviour of homoionic expansive clays. *International Journal of Solids and Structures*, 39:2773–2806.

[Loret et Khalili, 2000] Loret, B. et Khalili, N. (2000). A three-phase model for unsaturated soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 24(11):893–927.

[Loret et Khalili, 2002] Loret, B. et Khalili, N. (2002). An effective stress elastic-plastic model for unsaturated porous media. *Mechanics of Materials*, 34(2):97–116.

[Maleki, 1998] Maleki, M. (1998). *Modélisation hiérarchisée du comportement des sols.* Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.

[Maleki et al., 2000] Maleki, M., Cambou, B. et Dubujet, P. (2000). Modélisation hiérarchisée du comportement des sols. *Revue Française de Génie Civil*, 4(7-8):895–928.

[Mitchell, 1976] Mitchell, J. (1976). *Fundamentals of Soil Behaviour.* John Wiley & Sons, New York.

[Owen et Hinton, 1980] Owen, D. R. J. et Hinton, E. (1980). *Finite elements in plasticity Theory and practice.* Pineridge Press, Swansea.

[Pereira et al., 2003a] Pereira, J.-M., Dubujet, P. et Wong, H. (2003a). Numerical modeling of unsaturated soils in a pressuremeter test. Dans *16th ASCE Engineering Mechanics Conference*, University of Washington, Seattle, USA.

[Pereira et al., 2003b] Pereira, J.-M., Wong, H. et Dubujet, P. (2003b). A general framework for constitutive models adaptation to unsaturated states. Dans Di Benedetto, H., Doanh, T., Geoffroy, H. et Sauzéat, C., éditeurs, *Deformation Characteristics of Geomaterials, IS-Lyon03*, pages 1269–1276, Lyon, France. Balkema.

[Pereira et al., 2005a] Pereira, J.-M., Wong, H. et Dubujet, P. (2005a). Unsaturated behaviour of soils: a refined theoretical model with complex volumetric mechanisms. Dans Abousleiman, Y., Cheng, A.-D. et Ulm, F.-J., éditeurs, *Poromechanics III - Biot Centennial (1905-2005)*, pages 473–479, University of Oklahoma, Norman, Oklahoma, USA. Balkema publishers.

[Pereira et al., 2005b] Pereira, J.-M., Wong, H., Dubujet, P. et Dangla, P. (2005b). Adaptation of existing behaviour models to unsaturated states: Application to CJS model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29(11):1127–1155.

[Rahardjo et Fredlund, 2003] Rahardjo, H. et Fredlund, D. G. (2003). K_0-volume change characteristics of an unsaturated soil with respect to various loading paths. *Geotechnical Testing Journal*, 26(1):79–91.

[Royis, 2000] Royis, P. (2000). Mécanique des milieux poreux. Cours de l'ENTPE.

[Salençon, 2002] Salençon, J. (2002). *Mécanique des milieux continus, Tome I - Concepts généraux.* Paris.

[Schofield et Wroth, 1968] Schofield, A. et Wroth, P. (1968). *Critical State Soil Mechanics.* McGraw-Hill, London, édition 310.

[Sheng et al., 2003] Sheng, D., Sloan, S., Gens, A. et Smith, D. (2003). Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. part i: Theory. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 27:745–765.

[Terzaghi, 1943] Terzaghi, K. (1943). *Theoretical soil mechanics.* Wiley, New-York.

[Van Damme, 2002] Van Damme, H. (2002). L'eau et sa représentation. Dans Coussy, O. et Fleureau, J.-M., éditeurs, *Mécanique des sols non saturés.* Lavoisier, Paris.

[Verbrugge et Fleureau, 2002] Verbrugge, J.-C. et Fleureau, J.-M. (2002). Bases expérimentales du comportement des sols non saturés. Dans Coussy, O. et Fleureau, J.-M., éditeurs, *Mécanique des sols non saturés.* Lavoisier, Paris.

[Wheeler, 1996] Wheeler, S. J. (1996). Inclusion of specific water volume within an elasto-plastic model for unsaturated soil. *Canadian Geotechnical Journal*, 33:42–57.

[Wheeler et al., 2002] Wheeler, S. J., Gallipoli, D. et Karstunen, M. (2002). Comments on use of the barcelona basic model of unsaturated soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26:1561–1571.

[Wheeler et Karube, 1995] Wheeler, S. J. et Karube, D. (1995). Constitutive modelling. Dans Alonso, E. E. et Delage, P., éditeurs, *Unsaturated Soils/Sols Non Saturés - Proc. 1st Int. Conf. on Unsaturated Soils, UNSAT 95*, Paris, France. Balkema.

[Wheeler et al., 2003] Wheeler, S. J., Sharma, R. S. et Buisson, M. S. R. (2003). Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils. *Géotechnique*, 53(1):41–54.

[Wheeler et Sivakumar, 1995] Wheeler, S. J. et Sivakumar, V. (1995). An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soil. *Géotechnique*, 45(1):35–53.

[Zienkiewicz, 1979] Zienkiewicz, O. C. (1979). *La méthode des éléments finis.* McGraw-Hill Inc., Paris, édition third.

[Zienkiewicz et al., 1999] Zienkiewicz, O. C., Chan, A. H. C., Schrefler, B. A. et Shiomi, T. (1999). *Computational geomechanics with special reference to earthquake engineering.* John Wiley & Sons, New-York.

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : **PEREIRA** DATE de SOUTENANCE : **09/12/2005**
Prénom : **Jean-Michel**

TITRE :
ETUDE DES COUPLAGES HYDROMÉCANIQUES ET EFFETS DE NON-SATURATION DANS LES GÉOMATÉRIAUX. APPLICATION AUX OUVRAGES SOUTERRAINS

NATURE : **Doctorat** Numéro d'ordre : **2005-ISAL-00109**

École doctorale : **MEGA - Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**
Spécialité : **Génie civil**

Cote B.I.U.-Lyon : T 50/210/ / et bis CLASSE :

RÉSUMÉ :
La prise en compte des effets de non-saturation dans la modélisation du comportement des géomatériaux revêt des enjeux importants dans de nombreuses applications du génie civil. Après une synthèse des principales caractéristiques du comportement des sols non-saturés ainsi que de plusieurs propositions récentes de modèles de comportement, un cadre général de modélisation est proposé. Ce cadre constitue un outil méthodologique permettant une extension plus aisée des modèles élastoplastiques existants vers le domaine de saturation partielle. Un modèle élastoplastique évolué (CJS) est ensuite étendu selon cette méthodologie. Le modèle ainsi obtenu est alors validé sur la base d'essais de laboratoire. Parallèlement à cette contribution rhéologique, un code de calcul par éléments finis a été développé. La discrétisation du problème à résoudre est présentée. Des simulations d'essais pressiométriques et de déconfinement d'une cavité souterraine utilisant cet outil numérique sont fournies et analysées. Celles-ci permettent d'évaluer les effets d'une saturation partielle sur le comportement du massif dans lequel un ouvrage souterrain est présent.

MOTS-CLÉS :
sols non-saturés, modèle de comportement, contrainte effective, élastoplasticité, couplages hydromécaniques, éléments finis, pressiomètre, expansion de cavité

Laboratoire de recherche :
Laboratoire Géomatériaux
Département Génie Civil et Bâtiment (URA CNRS 1652)
École Nationale des Travaux Publics de l'État,
rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin Cedex

Directeurs de Thèse : **Henry WONG & Philippe DUBUJET**

Président de jury : Hervé DI BENEDETTO

Composition du jury :
Félix DARVE, Pierre DELAGE, Hervé DI BENEDETTO,
Irini DJERAN-MAIGRE, Philippe DUBUJET, Henry WONG