



Études d'oscillations non linéaires près d'une caustique

Rémi Carles

► To cite this version:

Rémi Carles. Études d'oscillations non linéaires près d'une caustique. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Rennes 1, 1999. Français. $\langle$ NNT : 1999REN10045 $\rangle$. $\langle$ tel-02933740 $\rangle$

HAL Id: tel-02933740

<https://theses.hal.science/tel-02933740v1>

Submitted on 8 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Rémi CARLES

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale Mathématiques de l'Ouest

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

Études d'oscillations non linéaires près d'une caustique

Soutenue le 10 juin 1999 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

Mr	P. Degond	
Mr	P. Gérard	Président du jury
Mr	G. Lebeau	Rapporteur
Mr	N. Lerner	
Mr	G. Métivier	Directeur de thèse
Mr	G. Velo	Rapporteur

Remerciements

Je suis très heureux d'avoir la possibilité d'exprimer ici ma gratitude envers Guy Métivier pour son encadrement. Toujours disponible et prêt à discuter de façon impromptue, sa patience, sa volonté de faire partager son expérience et ses idées ont été une grande source d'inspiration et de réconfort moral, aspects si souvent étroitement liés dans un tel travail. Sa grande gentillesse, sa décontraction et son soutien constant ont fait de ce cheminement un réel plaisir.

Je remercie Gilles Lebeau et Giorgio Velo pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma thèse en acceptant d'en être rapporteurs, ainsi que pour leur présence dans le jury.

Je suis sensible à la participation dans le jury de Pierre Degond, et je tiens à l'en remercier vivement.

Depuis le début, Patrick Gérard s'est intéressé à mes travaux de recherche. Je lui en suis très reconnaissant, et apprécie beaucoup sa présence dans le jury. Je souhaite profiter de l'occasion pour évoquer le plaisir que j'ai eu, à plusieurs reprises, à suivre ses cours à Orsay. Je ne saurais dire le souvenir que j'en garde sans paraître excessif.

Nicolas Lerner me fait l'honneur d'être présent dans le jury. Je tiens à l'en remercier, ainsi que de l'amabilité avec laquelle il a répondu à mes questions quand je suis venu frapper à la porte de son bureau.

Jeffrey Rauch a suivi ce travail avec intérêt. Ses remarques, en particulier sur la première partie de cette thèse, m'ont beaucoup fait progresser. Je lui suis très reconnaissant pour ses encouragements.

Jean Ginibre a suivi une partie de ce travail, et les discussions que j'ai pu avoir avec lui m'ont été très utiles. Je souhaite le remercier aussi.

Avant mon arrivée à Rennes, Jacques Camus s'est occupé de mon dossier. Je tiens à le remercier pour son action à la direction du CIES, ainsi que pour ses encouragements permanents.

François Castella a relu attentivement une partie de ce travail. Ses remarques et ses questions embarrassantes m'ont été très utiles, et son enthousiasme communicatif fut un plaisir. Merci également aux autres personnes avec qui j'ai partagé à diverses périodes le bureau 234 : Pascale Bergeret, Christophe Cheverry, Marc Dambrine, Éric Dumas, Yannick Gâtel, Frédéric Héreau et Dragoş Iftimie. Les discussions, mathématiques ou non, que nous avons eues, ont été une réelle source d'équilibre.

Les membres de l'équipe de l'IRMAR (Claude Boschet, Danielle Lanneau, Véronique Cohoner, Richard Audebrand. . .), par leurs compétences et leur disponibilité, m'ont été d'une grande aide, qu'ils en soient chaleureusement remerciés.

Je n'oublie pas mes parents pour le soutien constant et généreux qu'ils m'ont apporté à tous égards.

Enfin, je laisserai les douleurs d'une fin de thèse délicate à d'autres, Sophie ayant préféré me rendre ces derniers mois pleins d'éclats.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Contexte	9
1.1.1	Le cas linéaire	11
1.1.2	Des résultats dans un cadre non linéaire	14
1.2	Présentation des résultats	15
1.2.1	Étude d'une famille d'équations des ondes	15
1.2.2	Étude d'une famille d'équations de Schrödinger	18
2	Comportements précisés près d'une caustique	23
2.1	Introduction	24
2.2	Présentation du problème	28
2.2.1	Mise en place et réductions	28
2.2.2	Notations et hypothèses	29
2.3	Définitions et résultats	31
2.3.1	Définitions	31
2.3.2	Hypothèses et énoncés des résultats	32
2.4	Problèmes d'existence et d'unicité	35
2.4.1	La méthode des caractéristiques	35
2.4.2	Unicité dans L^∞	36
2.4.3	Existence de solutions pour les équations non linéaires	37
2.4.4	Résolution des équations linéaires	38
2.4.5	Régularité du premier profil	39
2.5	Justification de l'asymptotique	40
2.5.1	Cas du premier profil	40
2.5.2	Comportement du premier correcteur	47
2.5.3	Asymptotique précisée	49
2.6	Retour à la fonction u	50
2.6.1	Estimations près de la caustique	50
2.6.2	Estimations de ∇u loin de la caustique	51
2.6.3	Comportement de $\partial_t u$ près de la caustique	52
2.6.4	Comportement de $\partial_r u$ près de la caustique	54

3	Traversée de caustique pour NLS. Épisode 1	57
3.1	Introduction	58
3.2	Existence de solutions	63
3.2.1	Cas d'une caustique linéaire	64
3.2.2	Cas d'une caustique non linéaire	65
3.3	Optique géométrique et intégrale lagrangienne	69
3.3.1	La méthode BKW	69
3.3.2	Intégrale lagrangienne : définition	70
3.3.3	Propagation du symbole	71
3.3.4	Solution approchée : cas de la propagation linéaire	74
3.3.5	Cas de l'optique géométrique non linéaire	75
3.3.6	Solution approchée : cas de la propagation non linéaire	76
3.4	Propagation linéaire et caustique linéaire	80
3.4.1	Propagation avant la caustique	81
3.4.2	Traversée de la caustique	86
3.4.3	Propagation après la caustique	90
3.5	Propagation linéaire et caustique non linéaire	90
3.5.1	Propagation avant la caustique	91
3.5.2	Traversée de la caustique	93
3.6	Propagation non linéaire et caustique linéaire	98
3.6.1	Propagation avant la caustique	99
3.6.2	Traversée de la caustique	100
3.6.3	Propagation après la caustique	101
3.7	Propagation et caustique non linéaires	102
3.7.1	Les résultats en scattering non linéaire longue portée	102
3.7.2	Le cas du système	103
4	Traversée de caustique pour NLS. Épisode 2	119
4.1	Introduction	120
4.2	Existence de solutions	122
4.2.1	Cas d'une caustique linéaire	122
4.2.2	Cas d'une caustique non linéaire	124
4.3	Intégrales oscillantes	127
4.3.1	Solution approchée : cas de la propagation linéaire	127
4.3.2	Solution approchée : cas de la propagation non linéaire	129
4.4	Propagation et caustique linéaires	133
4.4.1	Propagation avant la caustique	134
4.4.2	Traversée de la caustique	139
4.4.3	Propagation au-delà de la caustique	141
4.5	Propagation linéaire et caustique non linéaire	142
4.5.1	Propagation avant la caustique	142
4.5.2	Traversée de la caustique et propagation au-delà	143
4.5.3	Description dans $L^2(\mathbb{R}^n)$	145
4.6	Propagation non linéaire et caustique linéaire	146

4.6.1	Propagation avant la caustique	146
4.6.2	Traversée de la caustique et propagation au-delà	148
4.7	Propagation et caustique non linéaires	149
A	Lemme de Gronwall	151
A.1	Lemme de Gronwall	152

Chapitre 1

Introduction

Le but de cette thèse est de comprendre, au moins sur quelques exemples, quels peuvent être les effets typiquement non linéaires rencontrés lorsque des oscillations donnent lieu à une caustique. La première partie de ce chapitre introductif rappelle les résultats antérieurs dans l'étude d'oscillations près d'une caustique (cas linéaire et cas non linéaire), et la seconde présente les résultats de ce travail.

1.1 Contexte

L'article fondateur de l'étude d'oscillations par la méthode de l'optique géométrique est dû à Lax ([Lax57]) : soit $L(y, \partial_y)$ un opérateur différentiel matriciel, où $y = (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$. On considère le problème de Cauchy

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} L(y, \partial_y)u = 0, \\ u|_{t=0} = f(x)e^{i\varphi(x)/\varepsilon}, \end{cases}$$

où ε est un paramètre tendant vers zéro : physiquement, ε peut représenter une longueur d'onde (dont la valeur est petite devant les autres grandeurs physiques, ce qui justifie une étude asymptotique avec $\varepsilon \rightarrow 0$), la constante de Planck (en analyse semi-classique), une viscosité, etc. La méthode de Lax consiste à chercher, tout d'abord formellement, une solution de (1.1.1) sous forme d'un développement asymptotique

$$(1.1.2) \quad u(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} e^{i\psi(t, x)/\varepsilon} (u_0(t, x) + \varepsilon u_1(t, x) + \dots),$$

puis à justifier, par des arguments de stabilité, ces calculs formels.

Cette approche, également appelée méthode, ou développement BKW, fut initialement introduite pour des problèmes de mécanique quantique par Brillouin, Kramers et Wentzel, puis par Jeffreys pour d'autres problèmes. En 1885, Poincaré a prouvé qu'en général, la série ainsi construite diverge. La signification de (1.1.2) est

en fait celle d'une somme asymptotique :

$$(1.1.3) \quad \forall N \geq 0, \quad u^\varepsilon(t, x) - e^{i\psi(t, x)/\varepsilon} \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k(t, x) = o(\varepsilon^N),$$

dans un sens à préciser (dans L^2 ou L^∞ par exemple). On peut lire à ce sujet les exposés introductifs de Keller ([Kel78]) ou Rauch ([Rau95]). La phase ψ est solution de l'équation *eikonale* :

$$(1.1.4) \quad \begin{cases} \det L(y, d\psi) = 0, \\ \psi|_{t=0} = \varphi. \end{cases}$$

Ainsi, pour l'équation des ondes, on trouve

$$(\partial_t \psi)^2 = |\nabla_x \psi|^2,$$

et pour l'équation de Schrödinger,

$$\partial_t \psi + \frac{1}{2} |\nabla_x \psi|^2 = 0.$$

L'équation eikonale est résolue, localement en temps en général, par la méthode de Hamilton-Jacobi. A priori, la phase ψ n'est pas définie globalement en temps : la méthode de Hamilton-Jacobi consiste à travailler sur les bicaractéristiques, qui sont les courbes intégrales du hamiltonien $L(t, x, \tau, \xi)$ issues de la variété caractéristique $\{L(t, x, \tau, \xi) = 0\}$. L'image des bicaractéristiques par la projection sur l'espace des configurations (l'espace (t, x)) forme la famille des *rayons* : lorsque les rayons forment une enveloppe, la méthode de Hamilton-Jacobi échoue. Précisément, l'enveloppe des rayons constitue le lieu singulier appelé *caustique*. D'après ce qui précède, la caustique est l'ensemble des points où la projection de la variété lagrangienne (engendrée par les bicaractéristiques) sur l'espace de configuration est singulière.

Exemples :

1. Des rayons arrivant parallèles sur une parabole, suivant son axe, se rencontrent au foyer de cette courbe : c'est le principe utilisé pour les antennes paraboliques (figure 1.1).

2. Considérons le problème de Cauchy

$$(1.1.5) \quad \begin{cases} \square u = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \partial_t u|_{t=0} = f(x) e^{i\varphi(x)/\varepsilon}, \end{cases}$$

où $\square = \partial_t^2 - \Delta$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\varphi'_x \neq 0$ sur $\text{supp } a$. Grâce à la transformée de Fourier, on a $u^\varepsilon = u_+^\varepsilon - u_-^\varepsilon$, où

$$u_\pm^\varepsilon(t, x) = \iint e^{i((x-y) \cdot \xi \pm t|\xi| + \varphi(y)/\varepsilon)} \frac{f(y)}{2i|\xi|} \frac{dy d\xi}{(2\pi)^n}.$$

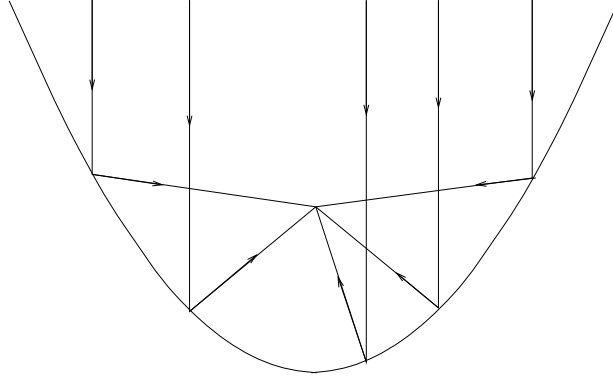


FIG. 1.1 – Focalisation des rayons.

Les points critiques des phases apparaissant dans les intégrales sont non dégénérés en dehors de

$$C_{\pm} = \left\{ (t, x) ; x = y \mp t \frac{\varphi'(y)}{|\varphi'(y)|}, \frac{D}{Dy} \left(y \mp t \frac{\varphi'(y)}{|\varphi'(y)|} \right) = 0 \text{ pour un certain } y \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Les ensembles C_+ et C_- constituent alors la caustique. On voit sur cet exemple que les asymptotiques données par la méthode de la phase stationnaire appliquée sur la lagrangienne perdent leur validité au niveau de la caustique.

1.1.1 Le cas linéaire

Dans le cas d’une équation linéaire, on sait complètement décrire les phénomènes qui se produisent au niveau de la caustique. Le premier résultat permettant d’obtenir de façon uniforme une description de la solution hors de la caustique et près de celle-ci est dû à Ludwig ([Lud66]). Dans l’exemple de l’équation des ondes ci-dessus, la caustique apparaît comme lieu des points critiques dégénérés de la phase : un analogue du lemme de Morse (voir [CFU57]) permet de factoriser une phase φ comme suit.

Soit $\varphi(x, \beta)$ une phase possédant un point critique pour $\beta = \beta_j$,

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \varphi(x, \beta_j) = 0,$$

dégénéré : $\varphi_{\beta\beta}(x, \beta_j) = 0$. Si $\varphi_{\beta\beta\beta}(x, \beta_j) \neq 0$, alors pour φ analytique, il existe des fonctions $\xi(x, \beta)$, $\theta(x)$ et $\rho(x)$ telles qu’on ait la factorisation

$$(1.1.6) \quad \varphi(x, \beta) = \theta + \rho\xi - \frac{1}{3}\xi^3.$$

Dans la formule de la phase stationnaire “usuelle”, on applique les formules de Taylor et Parseval. Pour des phases de la forme (1.1.6), il n’est donc pas étonnant

de rencontrer la transformée de Fourier (inverse) de la fonction $e^{-i\frac{\xi^3}{3}}$. Cette fonction,

$$(1.1.7) \quad \text{Ai}(x) = \int e^{ix\xi - i\frac{\xi^3}{3}} \frac{d\xi}{2\pi} \quad (\text{fonction d'Airy, voir [Hör94], tome I}),$$

fut introduite par Airy ([Air38]) pour décrire les phénomènes de caustique (l'intensité lumineuse est maximale sur l'enveloppe des rayons), notamment dans le cas des arc-en-ciel.

Dans [Lud66], l'auteur étudie l'équation de Helmholtz

$$(1.1.8) \quad \Delta u + k^2 u = 0,$$

où k est un grand paramètre ($k \sim 1/\varepsilon$). En cherchant u comme superposition d'ondes planes

$$(1.1.9) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ik\varphi(x,\beta)} z(x,\beta) d\beta,$$

et en factorisant la phase comme en (1.1.6), on se ramène à

$$(1.1.10) \quad u(x) = e^{ik\theta} \int e^{ik(\rho\xi - \frac{\xi^3}{3})} g(x,\xi) d\xi.$$

Les premiers termes du développement asymptotique d'une telle intégrale font naturellement apparaître la fonction d'Airy et sa dérivée :

$$(1.1.11) \quad u_{app}(x) = e^{ik\theta} \left(k^{-1/3} g_0(x) \text{Ai}(k^{2/3}\rho) + ik^{-2/3} \text{Ai}'(k^{2/3}\rho) \right).$$

Réciproquement, on vérifie qu'une fonction du type (1.1.11) est une solution asymptotique de (1.1.8). La région éclairée (hyperbolique) correspond à $\rho > 0$, la région d'ombre (elliptique) à $\rho < 0$. La caustique, où l'intensité lumineuse est maximale, correspond à $\rho = 0$ (figure 1.2).

Cette description est bien uniforme : pour $\rho > 0$, le développement asymptotique de la fonction d'Airy permet de retrouver les termes oscillants (de taille 1) du développement BKW, et pour $\rho < 0$, le développement asymptotique (décroissance exponentielle) annule l'intensité lumineuse. La transition ombre-lumière dans ce cas a donc lieu dans une couche limite de taille $k^{-2/3}$ et est précisément décrite par la fonction d'Airy.

Pour une dégénérescence plus générale de la phase, Duistermaat ([Dui74]) a montré l'intérêt des intégrales oscillantes, en utilisant également un formalisme plus géométrique, qui permet de décrire l'influence d'une caustique en termes d'indices de Maslov. Rappelons simplement la méthode générale, que nous utiliserons dans la seconde partie de cette thèse (équations de Schrödinger).

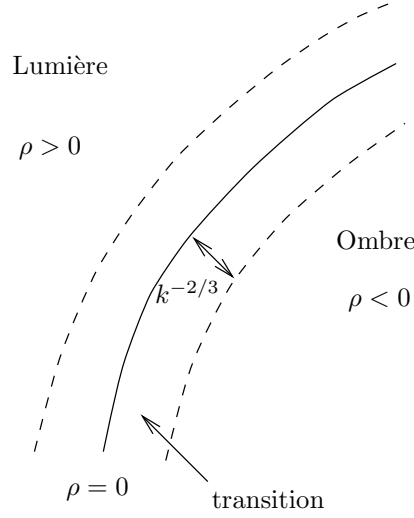


FIG. 1.2 – Caustique : description de Ludwig

On cherche une solution asymptotique à l'équation $Pu = 0$ sur la variété X de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire

$$(1.1.12) \quad P(x, D_x, \varepsilon)u(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^\infty),$$

où ε tend vers zéro et u est de la forme

$$u(x, \varepsilon) \sim e^{i\phi(x)/\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n-\mu} a_n(x).$$

L'opérateur P est de la forme

$$P(x, D_x, \varepsilon) = \sum_{j=0}^m P_{m-j}(x, D_x) \varepsilon^{-j},$$

où P_{m-j} est un opérateur différentiel régulier d'ordre au plus $m - j$. Le terme de plus basse puissance de ε conduit à l'équation eikonale $f(x, d\phi(x)) = 0$, où $f(x, \xi) = \sum_{j=0}^m P_{m-j}^0(x, \xi)$, P_{m-j}^0 étant le symbole principal d'ordre $m - j$ de P_{m-j} .

Cette équation est résolue géométriquement par la méthode de Hamilton-Jacobi, comme nous l'avons déjà signalé. Pour obtenir des solutions globales de l'équation asymptotique (1.1.12), on introduit

$$I(x, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\phi(x, \alpha)/\varepsilon} a(x, \alpha, \varepsilon) d\alpha,$$

avec $a(x, \alpha, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n-\mu} a_n(x, \alpha)$, et on cherche u sous cette forme. Cette approche permet alors de généraliser les résultats de Ludwig à un cadre géométrique plus général, ainsi qu'à d'autres types d'équations.

1.1.2 Des résultats dans un cadre non linéaire

Dans [HK87], les auteurs appliquent formellement l'ansatz de Ludwig pour des lois de conservation. Il ressort de cette approche que selon l'échelle entre l'amplitude et la longueur d'onde de la solution, il convient de distinguer d'une part la nature de la propagation, et d'autre part, la nature de l'influence de la caustique. La nature de la propagation (linéaire ou non linéaire) est celle qui est déterminée par la méthode BKW. Le point de vue de Hunter et Keller consiste ensuite à affirmer que certes l'amplitude de la solution augmente près de la caustique, mais que si la région dans laquelle l'influence de la caustique se fait sentir est trop petite, alors la solution traversera la caustique comme dans le cas linéaire. Ainsi, en qualifiant l'influence de la caustique de linéaire, les auteurs veulent dire que les effets non linéaires *cumulés* au voisinage de la caustique sont négligeables. Au contraire, si les effets non linéaires agissent sur un voisinage trop grand, alors on dit que la caustique a une influence non linéaire. Nous verrons dans la seconde partie de cette thèse que pour une focalisation radiale dans le cas d'équations de Schrödinger, ces distinctions apparaissent naturellement.

L'étude des phénomènes de caustique pour des équations non linéaires a également donné lieu à plusieurs travaux de Joly, Métivier et Rauch ([JMR91], [JMR95a], [JMR95b], [JMR96b], [JMR96a], voir aussi [JMR96c] et [JMR97] pour une présentation générale). Rappelons quelques-uns de ces résultats dans le cas d'une équation particulière, que nous rencontrerons dans la première partie de ce travail :

$$(1.1.13) \quad \begin{cases} \square u^\varepsilon + a|\partial_t u^\varepsilon|^{p-1} \partial_t u^\varepsilon = 0, & (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = \underline{u}_0(x) + \varepsilon U_0\left(x, \frac{|x|}{\varepsilon}\right), \\ \partial_t u^\varepsilon|_{t=0} = U_1\left(x, \frac{|x|}{\varepsilon}\right). \end{cases}$$

Les fonctions $U_i(x, \theta)$ sont périodiques en θ . Supposons par exemple $\underline{u}_0 = 0$ et $U_1 = \partial_\theta U_0$. On a alors

$$u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} U_- \left(t, x, \frac{t + |x|}{\varepsilon} \right),$$

et $V := \partial_\theta U_-$ est solution de

$$(1.1.14) \quad (\partial_t - \partial_r)V - \frac{n-1}{r} + a|V|^{p-1}V = 0.$$

Il apparaît une notion d'indice critique, lié à l'intégrabilité de l'équation (1.1.14) : notons

$$\beta = \frac{(p-1)(n-1)}{2}.$$

Nous ne supposons plus nécessairement $\underline{u}_0 = 0$ et $U_1 = \partial_\theta U_0$. Si $a < 0$ et $\beta \geq 1$, on peut construire des solutions explosant en temps fini. Si $a > 0$, dans le cas sur-critique ($\beta \geq 1$), les oscillations sont absorbées à la caustique ([JMR95b]). Dans le cas sous-critique ($\beta < 1$), l'optique géométrique reste valide dans une famille d'espaces de Lebesgue, qui ne contient pas a priori L^∞ . On constate donc sur cette équation qu'apparaissent des phénomènes vraiment non linéaires dûs à la caustique.

Restent tout de même quelques questions en suspens :

- que se passe-t-il si l'équation n'est pas dissipative ? Nous donnerons une réponse partielle à cette question dans la seconde partie de ce travail, en étudiant des équations de Schrödinger non linéaires conservatives ;
- une question plus générale consiste à se demander quelle validité on peut accorder à l'équation de transport (1.1.14) : dans le cas précédent, elle reste valide dans le cas sous-critique, mais perd sa signification dans le cas sur-critique. Cette question sera également abordée (dans notre cadre de travail) dans la seconde partie de cette thèse ;
- enfin, on n'obtient dans aucun cas une description dans L^∞ : précisément, la première partie de ce travail fournit une famille d'exemples pour lesquels on connaît un développement asymptotique dans L^∞ .

1.2 Présentation des résultats

1.2.1 Étude d'une famille d'équations des ondes

La première partie de ce travail traite également des équations que nous venons de mentionner, dans le cas de solutions radiales en dimension trois, pour des indices p sous-critiques : nous obtenons une description dans L^∞ , qui met en évidence des phénomènes nouveaux, non décelables dans d'autres espaces de Lebesgue. Notons que les résultats qui suivent sont valables pour d'autres non-linéarités, notamment la non-linéarité plus régulière

$$F(\partial_t u^\varepsilon) = a \langle \partial_t u^\varepsilon \rangle^{p-1} \partial_t u^\varepsilon.$$

On suppose plus précisément $1 < p < 2$. Par changement d'inconnue, on se ramène à un système singulier, de la forme

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} (\partial_t - \partial_r) v_-^\varepsilon = -r^{1-p} |v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon|^{p-1} (v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon), \\ (\partial_t + \partial_r) v_+^\varepsilon = -r^{1-p} |v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon|^{p-1} (v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon). \end{cases}$$

La fonction $r \mapsto r^{1-p}$ étant localement intégrable, on obtient des estimations L^∞ pour v_-^ε et v_+^ε , par la méthode des caractéristiques. Il apparaît à ce niveau qu'il faut modifier le développement usuel de l'optique géométrique : on retrouve bien comme

première approximation le profil habituel, mais des termes nouveaux apparaissent, qui viennent s'intercaler entre les termes de taille 1 et de taille ε . Le premier de ces termes a une taille ε^{p-1} , et se concentre sur le cône $\{t \geq r\}$ (plus précisément, ce terme est de taille ε en dehors du cône, ce qui lui ôte son caractère nouveau dans cette région) : on peut donc interpréter ces termes nouveaux comme étant issus de la traversée de la caustique.

En revenant à la fonction initiale u^ε , on souhaite étudier le comportement de ses dérivées : $\partial_t u^\varepsilon$, par exemple, est de taille 1 en dehors de $r = 0$, alors que près de $r = 0$, elle est de taille ε^{-1} . La fonction correspondante, pour le premier profil, est également de taille 1 en dehors de la caustique, et constitue une bonne approximation de la solution exacte. Par contre, à la caustique, le premier profil est singulier, en r^{1-p} . Ainsi, l'optique géométrique n'est pas valide dans L^∞ , dans une couche limite autour de la caustique. Dans les espaces de Lebesgue considérés dans [JMR97], ce phénomène n'apparaît pas, en raison des effets de moyenne.

Si on prend en compte les termes intermédiaires (dont le premier est de taille ε^{p-1} en dehors de la caustique), cette singularité disparaît, et le résultat constitue une approximation valide près de la caustique.

On obtient donc une description uniforme de la solution dans L^∞ , en mettant en évidence des termes intermédiaires nouveaux, typiquement non linéaires.

Théorème 1 *On suppose $1 < p < 2$. Pour des fonctions $\underline{u}_0$ et U_j suffisamment régulières, radiales, le problème (1.1.13) possède une unique solution radiale localement en temps, borne ainsi que son gradient. Comme dans le cas linéaire, on a*

$$\partial_t u^\varepsilon = O\left(\frac{1}{r + \varepsilon}\right).$$

Hors de la caustique, $\partial_t u^\varepsilon$ possède, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, un développement asymptotique de la forme :

$$(1.2.2) \quad \partial_t u^\varepsilon = \sigma_0^\varepsilon + \varepsilon^{2-p} \sigma_1^\varepsilon + \varepsilon^{2-p} \tilde{\sigma}_1^\varepsilon + O\left(\frac{\varepsilon}{r}\right),$$

où $\sigma_0^\varepsilon(t, r) = \mathcal{H}_0\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right)$, $\mathcal{H}_0$ étant une fonction indépendante de ε , périodique en ses deux dernières variables et $\tilde{\sigma}_1^\varepsilon = O(\varepsilon^{(p-1)(2-p)}/r)$. Près de la caustique, il n'y a plus lieu de distinguer σ_0^ε , σ_1^ε et $\tilde{\sigma}_1^\varepsilon$: dans une couche limite de taille $\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$, ils sont tous singuliers (en r^{1-p}) et de même ordre de grandeur. Par contre, la somme de ces trois termes constitue une bonne approximation de $\partial_t u^\varepsilon$:

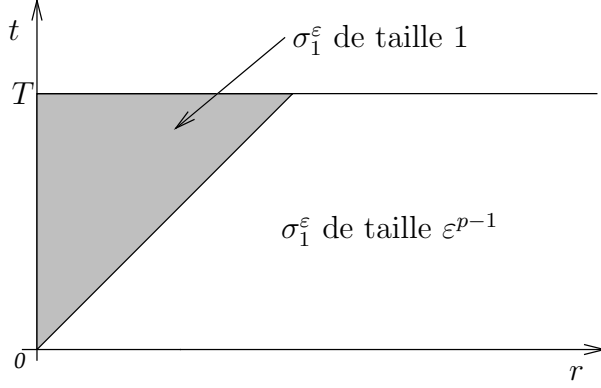
$$(1.2.3) \quad \partial_t u^\varepsilon - (\sigma_0^\varepsilon + \varepsilon^{2-p} \sigma_1^\varepsilon + \varepsilon^{2-p} \tilde{\sigma}_1^\varepsilon) = O(\varepsilon^{p-2}),$$

ce qui est bien négligeable devant ε^{-1} .

On a plus précisément les propriétés suivantes :

- loin de la caustique $\{r = 0\}$, le terme σ_0^ε est celui de l'optique géométrique et approche bien $\partial_t u^\varepsilon$. Près de la caustique, par contre, $\partial_t u^\varepsilon$ est un $O(1/\varepsilon)$, alors que σ_0^ε est singulier, en r^{1-p} . Ainsi, dans une couche limite de taille $\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$, il faut changer la description de la solution exacte ;

- le terme σ_1^ε n'est pas prévu par l'optique géométrique et possède la propriété de concentration évoquée précédemment : c'est un $O(\varepsilon^{p-1})$ uniforme hors de tout voisinage du cône $\{t \geq r\}$, mais de taille 1 (et non identiquement nul) à l'intérieur du cône (figure 1.3). Ce correcteur est nul avant la caustique, et

FIG. 1.3 – Comportement de σ_1^ε .

- naît des oscillations du premier profil à la traversée de $\{r = 0\}$. Le phénomène surprenant est qu'il est propagé "loin de la caustique" ;
- ce premier correcteur possède en outre le même caractère singulier que le premier profil le long de la caustique. Nous verrons qu'à l'intérieur d'une couche limite, il n'y a plus lieu de distinguer ces deux termes : ils sont tous deux singuliers, de même taille ;
- le terme $\tilde{\sigma}_1^\varepsilon$ est plus petit que le premier correcteur loin de la caustique : c'est un $O(\varepsilon^{(2-p)(p-1)}/r)$. Il contient éventuellement d'autres termes non prévus par l'optique géométrique, issus comme le premier correcteur des oscillations du premier profil à la traversée de la caustique ;
- les termes non prévus par l'optique (qui viennent s'insérer entre les termes de taille ε^0 et ε^1 loin de la caustique) compensent la singularités du premier profil près de la caustique : associés au premier profil, ils approchent uniformément $\partial_t u^\varepsilon$.

On a un résultat similaire pour la dérivée selon r de u :

Théorème 2 *La fonction $\partial_r u^\varepsilon$, définie localement en temps, admet un développement asymptotique dans L^∞ de la forme :*

$$\partial_r u^\varepsilon = \rho_0^\varepsilon + \varepsilon^{2-p} \rho_1^\varepsilon + \varepsilon^{2-p} \tilde{\rho}_1^\varepsilon + O\left(\frac{\varepsilon}{r + \varepsilon^{3-p}}\right).$$

Là encore, loin de la caustique, ρ_0^ε est le terme prévu par l'optique géométrique, mais a un comportement différent près de $\{r = 0\}$.

Comme pour le résultat précédent, le terme ρ_1^ε n'est pas prévu par l'optique et possède la propriété de concentration sur le cône d'onde.

Remarque : pour d'autres non-linéarités, on peut calculer les termes suivants du développement. Ainsi, dans le cas où $F(t, r, \partial_t u) = ar^{2-p}(\partial_t u)^2$, toujours avec $1 < p < 2$, on a :

$$\partial_t u^\varepsilon = \sigma_0^\varepsilon + \sum_{1 \leq k < [1/(2-p)]} \varepsilon^{k(2-p)} \sigma_k^\varepsilon + O(\varepsilon/r),$$

$$\partial_r u^\varepsilon = \rho_0^\varepsilon + \sum_{1 \leq k < [1/(2-p)]} \varepsilon^{k(2-p)} \rho_k^\varepsilon + O(\varepsilon/r).$$

Le premier terme correspond encore celui de l'optique géométrique loin de $\{r = 0\}$, mais n'est plus une bonne approximation de la solution exacte dans une couche limite, près de la caustique. On a plus précisément les propriétés suivantes :

- pour $1 \leq k < [1/(2-p)]$, $\partial_t u^\varepsilon - \sum_{0 \leq j \leq k} \varepsilon^{j(2-p)} \sigma_j^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^{(k+1)(2-p)}}{r}\right)$;
- les termes $(\sigma_k^\varepsilon)_{k \geq 1}$ ne sont pas prévus par l'optique géométrique. Ils possèdent en outre la propriété de concentration évoquée précédemment ;
- le premier profil est singulier le long de la caustique, mais si on lui associe le premier correcteur (qui près de la caustique n'est pas plus petit que le premier profil), alors on obtient une approximation uniforme de la solution exacte ;
- pour $1 \leq k < [1/(2-p)]$, $\partial_r u^\varepsilon - \sum_{0 \leq j \leq k} \varepsilon^{j(2-p)} \rho_j^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^{(k+1)(2-p)}}{r}\right)$;
- les termes $(\rho_k^\varepsilon)_{k \geq 1}$ ne sont pas prévus par l'optique et possèdent la même propriété de concentration que les σ_k .

1.2.2 Étude d'une famille d'équations de Schrödinger

La deuxième partie de ce travail concerne des équations conservatives : il s'agit d'équations de Schrödinger non linéaires dont les données initiales oscillent de sorte qu'il y ait focalisation en un point. Dans la plupart des cas, on sait que la solution existe globalement (on donne des contre-exemples quand l'existence n'est pas globale), et en particulier franchit la caustique : comment se passe cette traversée ? Dans un premier temps, on considère le cas monodimensionnel, plus simple techniquement, puis on généralise ces résultats au cas multidimensionnel. On considère le problème de Cauchy

$$(1.2.4) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \lambda \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon, & (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = e^{-i\frac{|x|^2}{2\varepsilon}} f(x), \end{cases}$$

où f est régulière. Pour étudier la solution u^ε , l'utilisation d'intégrales lagrangiennes (introduite dans [Dui74] pour le cas linéaire) se révèle efficace : pour une équation

linéaire ($\lambda = 0$), on représente la solution u^ε sous forme d'une intégrale oscillante

$$(1.2.5) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a_\varepsilon(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

Dans le cas d'une optique géométrique linéaire (cas rencontré pour $\alpha > 1$), on généralise cette écriture (comme dans [JMR97]) en

$$(1.2.6) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a_\varepsilon(t, \xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

Dire que l'optique géométrique linéaire est valide se traduit par le fait que le symbole a_ε converge vers un symbole a solution de l'équation de transport $\partial_t a = 0$.

Pour un régime d'optique géométrique non linéaire, l'équation de transport limite à laquelle on s'attend devient

$$(1.2.7) \quad i\partial_t a(t, \xi) = \frac{\lambda}{|2\pi(1-t)|^{n\beta/2}} |a|^\beta a(t, \xi).$$

Notre approche consiste dans ce cas à changer de fonction inconnue, de sorte de nous ramener à une équation de transport plus simple (la première). Définissons $\tilde{a}_\varepsilon$ par

$$a_\varepsilon(t, \xi) = e^{ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi),$$

où g est solution de

$$(1.2.8) \quad \begin{cases} \partial_t g(t, \xi) = \frac{\lambda}{|1-t|^{n\beta/2}} |f(-\xi)|^\beta, \\ g|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Alors (1.2.7) devient simplement $\partial_t \tilde{a} = 0$. Avec la convention $g \equiv 0$ si $\alpha > 1$, l'écriture suivante généralise la première :

$$(1.2.9) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

La fonction g apparaissant dans l'expression précédente est construite de sorte que le comportement du symbole modifié $\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi)$ soit relativement simple, à savoir

$$\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi),$$

au moins pour $t < 1$. On s'attend donc à ce que l'expression suivante constitue une bonne approximation de la solution exacte u^ε pour $t < 1$:

$$u_{app}^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} a_0(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

Notons qu'en dehors de la caustique (pour $t \neq 1$), la formule de la phase stationnaire appliquée à u_{app}^ε permet de retrouver le premier terme du développement BKW.

On montre que selon les valeurs des paramètres α et β , on peut avoir une optique géométrique linéaire ou non linéaire en dehors de la caustique, et une influence linéaire ou non linéaire de la caustique :

	$\alpha > n\beta/2$	$\alpha = n\beta/2$
$\alpha > 1$	Caustique linéaire, propagation linéaire	Caustique non linéaire, propagation linéaire
$\alpha = 1$	Caustique linéaire, propagation non linéaire	Caustique non linéaire, propagation non linéaire

Ces distinctions vont dans le même sens que l'article [HK87]. Dans le cas d'une propagation linéaire ($\alpha > 1$), la fonction g apparaissant dans (1.2.9) est choisie nulle. Si $\alpha > n\beta/2$ alors on vérifie que comme dans le cas linéaire, le symbole $\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi)$ converge vers un symbole indépendant du temps, continu à la caustique. En revanche, si $\alpha = n\beta/2$, alors la caustique a un effet non linéaire : le symbole $\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi)$ converge vers un symbole indépendant du temps avant la caustique, et vers un autre symbole indépendant du temps après la caustique. Le lien entre ces deux symboles est assuré par l'opérateur de diffusion pour l'équation de Schrödinger non linéaire

$$(1.2.10) \quad i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\Delta \psi = \lambda |\psi|^{2\alpha/n} \psi.$$

Dans le cas d'une propagation non linéaire ($\alpha = 1$) et d'une caustique linéaire ($\beta < 2/n$), la fonction g est choisie de sorte que le symbole $\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi)$ converge vers un symbole indépendant du temps, continu à la caustique. Dans le cas où propagation et caustique sont non linéaires ($\alpha = 1, \beta = 2/n$), on obtient un résultat moins précis, mais qui permet de justifier le tableau précédent. Ce cas est en effet plus délicat : ainsi, on ne sait par exemple pas définir un opérateur de diffusion pour l'équation

$$(1.2.11) \quad i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\Delta \psi = |\psi|^{2/n} \psi,$$

même dans le cas de la dimension un. Faute d'étudier la solution u^ε , on étudie les deux premières itérées du schéma de Picard permettant de construire la solution exacte :

$$(1.2.12) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta v^\varepsilon = 0, \\ i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \varepsilon \lambda |v^\varepsilon|^{2/n} u^\varepsilon, \\ v^\varepsilon|_{t=0} = u^\varepsilon|_{t=0} = e^{i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x), \end{cases}$$

Cette étude se fait par la théorie linéaire de la diffusion ([DG97]). On montre que pour une fonction g convenable, le symbole $\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi)$ converge vers un symbole indépendant du temps avant la caustique, et vers un autre symbole indépendant du

temps après la caustique. Le lien entre ces deux symboles est assuré par l'opérateur de diffusion pour l'équation de Schrödinger linéaire

$$(1.2.13) \quad i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\Delta\psi = V(t, x)\psi,$$

où V est un potentiel longue portée, selon la terminologie de [DG97]. La représentation sous forme d'intégrale lagrangienne permet donc, dans les cas de figures envisagés, d'obtenir une description uniforme de la solution exacte u^ε . Dans tous les cas, cette approximation est valide dans L_x^2 . En dimension un, on montre que dans les trois premiers cas, elle l'est également dans L_x^∞ .

Théorème 3 *Soit $n = 1$. Notons $\Sigma = H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)$, où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier. La donnée initiale du symbole $\tilde{a}_\varepsilon$ converge :*

$$(1.2.14) \quad \tilde{a}_\varepsilon(0, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{i}} f(-\xi) =: a_0(\xi) \text{ dans } \Sigma.$$

Pour $t < 1$, on a

$$(1.2.15) \quad \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi) \text{ dans } \Sigma,$$

et pour $t > 1$,

$$(1.2.16) \quad \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta a_0(\xi) \text{ dans } \Sigma,$$

où l'opérateur ζ est défini par

- $\zeta = I$ dans le cas d'une caustique linéaire ($\alpha > \beta/2$).
- $\zeta = \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1}$ pour une optique géométrique linéaire ($\alpha > 1$) et une caustique non linéaire ($\beta = 2\alpha$), S désignant l'opérateur de diffusion non linéaire. En fait, la convergence (1.2.16) a lieu dans un sens plus faible (dans L^2) si $2 < \beta < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Dans le cas du système ($\beta = 2\alpha = 2$), les convergences ci-dessus (1.2.15) et (1.2.16) ont lieu dans L^2 , et $\zeta = \mathcal{F} \circ \tilde{S} \circ \mathcal{F}^{-1}$, où $\tilde{S}$ est l'opérateur de diffusion linéaire modifié.

Remarques :

- la traversée de la caustique est soit celle du cas linéaire ($\zeta = I$), soit donnée par un opérateur de diffusion. La phase g que nous avons introduite permet de “redresser” le symbole usuel a_ε de sorte que les relations (1.2.15) et (1.2.16) restent vraies ;
- dans la plupart des cas, la description ainsi obtenue a lieu dans Σ , ce qui, en dimension un, nous donne des informations dans L^∞ : ainsi, dans le cas d'une caustique linéaire, la fonction u_{app}^ε constitue une bonne approximation de la solution exacte u^ε dans L^∞ et ce, de façon uniforme.

Théorème 4 Soit $n \geq 2$ et supposons $\beta < \frac{4}{n-2}$. La donnée initiale du symbole $\tilde{a}_\varepsilon$ converge :

$$(1.2.17) \quad \tilde{a}_\varepsilon(0, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2\pi}{i}\right)^{n/2} f(-\xi) =: a_0(\xi) \text{ dans } L_\xi^2.$$

Pour $t < 1$, on a

$$(1.2.18) \quad \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi) \text{ dans } L_\xi^2,$$

et pour $t > 1$,

$$(1.2.19) \quad \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta a_0(\xi) \text{ dans } L_\xi^2,$$

où l'opérateur ζ est défini par

- $\zeta = I$ dans le cas d'une caustique linéaire ($\alpha > n\beta/2$).
- $\zeta = \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1}$ pour une propagation linéaire ($\alpha > 1$) et une caustique non linéaire ($n\beta = 2\alpha$), avec $\beta > \frac{4}{n+2}$, où S désigne l'opérateur de diffusion non linéaire.
- $\zeta = \mathcal{F} \circ \tilde{S} \circ \mathcal{F}^{-1}$ dans le cas du système ($n\beta = 2\alpha = 2$), où $\tilde{S}$ est l'opérateur de diffusion linéaire modifié.

Remarque : dans plusieurs cas, nous obtiendrons une description plus précise, à savoir dans Σ au lieu de L^2 .

Chapitre 2

Comportements précisés près d'une caustique en optique géométrique non linéaire

2.1 Introduction

On étudie ici des exemples d'effet de caustique dans le cadre de solutions haute fréquence d'équations hyperboliques semilinéaires. Dans [JMR95b], [JMR96b], on analyse le phénomène de caustique dans L^2 ou L^p . On obtient ici une description assez précise (dans L^∞) de la solution. Le premier résultat est que de la traversée de la caustique naissent un ou plusieurs termes non prévus par l'optique géométrique. En particulier, on ne peut plus espérer un développement de type optique géométrique en puissances entières de la longueur d'onde après la caustique. Par ailleurs, le premier profil est singulier le long de la caustique, alors que la solution exacte est régulière : il n'y a pas "recollement" comme dans le cas linéaire.

On sait (voir par exemple [Hör94], ou [Kel58] pour une approche plus intrinsèque) donner un développement asymptotique des solutions oscillantes de l'équation des ondes dans le vide loin des caustiques par la méthode de la phase stationnaire ; au niveau de la caustique, la formule de phase stationnaire doit être modifiée. Dans [Lud66], Ludwig propose un ansatz permettant d'obtenir un développement asymptotique uniforme valable à la traversée d'une caustique régulière strictement convexe, dans le cadre d'équations linéaires, à l'aide des fonctions d'Airy.

Le cas non linéaire est abordé dans [HK87] pour des lois de conservation. Les auteurs testent l'ansatz de Ludwig dans ce cadre d'étude : une couche de taille de l'ordre d'une puissance (positive) de la longueur d'onde assure la transition au voisinage de la caustique, et pourvu que les ondes considérées soient d'amplitude assez faible, la théorie linéaire s'applique dans cette couche. Ces calculs reposent en grande partie sur des considérations d'échelles entre amplitude et longueur d'onde. On montre ici que pour une onde d'amplitude 1, la solution exacte et le premier profil ont des comportements totalement différents au voisinage de la caustique. De plus, il y a apparition d'un nouveau terme, non prévu par l'optique géométrique non linéaire, propagé "loin" de la caustique. Ce premier correcteur possède en outre une propriété de concentration à l'intérieur du cône d'onde. Près de la caustique, ce terme n'est pas plus petit que le premier profil, et contribue à compenser la singularité de celui-ci.

Dans [JMR95b], les auteurs étudient les phénomènes de caustique en optique géométrique non linéaire. Rappelons rapidement le contexte : on considère une équation des ondes semilinéaire dans $\mathbb{R}^{1+d}$ de la forme :

$$\square u^\varepsilon + F(t, x, \nabla_{t,x} u^\varepsilon) = 0,$$

où $\square := \partial_t^2 - \Delta_x$ et $F(t, x, v)$ est régulière en ses arguments. On associe à cette équation les données de Cauchy :

$$u|_{t=0}^\varepsilon = h(x) + \varepsilon \mathcal{U}_0(x, \varphi_0(x)/\varepsilon), \quad \partial_t u|_{t=0}^\varepsilon = \mathcal{U}_1(x, \varphi_0(x)/\varepsilon),$$

où les profils $\mathcal{U}_0(x, \theta)$ et $\mathcal{U}_1(x, \theta)$ sont périodiques en θ , et la phase initiale φ_0 est régulière. On a alors une description de la forme :

$$u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \underline{u}(t, x) + \varepsilon \mathcal{U}_+(t, x, \varphi_+(t, x)/\varepsilon) + \varepsilon \mathcal{U}_-(t, x, \varphi_-(t, x)/\varepsilon),$$

où $\varphi_{\pm}$ sont les deux solutions de l'équation eikonale :

$$(\partial_t \varphi)^2 = |\nabla_x \varphi|^2, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0.$$

Dans le cas d'une non-linéarité de la forme $F = F(\partial_t u)$, F impaire et $h = 0$, $\mathcal{U}_1 = \partial_{\theta} \mathcal{U}_0$ impaire en θ , et $\varphi_0(x) = |x|$, on n'a pas de terme $\mathcal{U}_+$ et :

$$u^{\varepsilon}(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon \mathcal{U}_-(t, x, \varphi_-(t, x)/\varepsilon),$$

$\mathcal{V} := \partial_{\theta} \mathcal{U}_-$ vérifiant :

$$2(\partial_t - \partial_r) \mathcal{V} - \frac{d-1}{r} \mathcal{V} + F(\mathcal{V}) = 0, \quad r := |x|.$$

Dans le cas où $F(y) = a|y|^{p-1}y$, $p \geq 1$, apparaît alors une notion d'indice critique :

$$\beta := (d-1)(p-1)/2.$$

Si $a < 0$, on rencontre un phénomène d'explosion. Si $a > 0$, il faut faire intervenir l'indice critique β . Le cas $\beta \geq 1$ est dit "sur-critique" (dissipatif puisque $a > 0$). Dans [JMR95b], on étudie ce cas : il y a absorption des oscillations à la traversée de la caustique. Le cas sous-critique $\beta < 1$ est abordé dans [JMR96b] : l'optique géométrique est valide dans L^{p+1} .

On s'intéresse ici à des équations en dimension trois d'espace, du type :

$$\square u^{\varepsilon} + F(t, r, \partial_t u^{\varepsilon}) = 0.$$

Énonçons le résultat dans le cas $F(t, r, y) = a|y|^{p-1}y$, où a est une constante quelconque et $1 < p < 2$. L'indice critique, en dimension trois, vaut $p-1$: nous sommes donc dans le cas sous-critique, les oscillations traversent la caustique. L'intérêt de cet exemple est qu'il permet d'avoir une description assez explicite du comportement de la solution dans L^{∞} . Nous verrons au paragraphe 2.2.2 qu'on a le même type de résultat pour :

– $F(t, r, y) = a\langle y \rangle^{p-1}y$, où a est encore quelconque, $1 < p < 2$ et

$$\langle y \rangle = \sqrt{1 + y^2};$$

– $F(t, r, y) = ar^{n-p}y^n$, $a \in \mathbb{R}$, $1 < p < 2$ et n entier supérieur ou égal à 2.

Considérons donc le problème de Cauchy :

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} \square u^{\varepsilon} + a|\partial_t u^{\varepsilon}|^{p-1}\partial_t u^{\varepsilon} &= 0 \\ u^{\varepsilon}|_{t=0} &= \varepsilon f_0^{\varepsilon}(r) + h(r) \\ \partial_t u^{\varepsilon}|_{t=0} &= f_1^{\varepsilon}(r) \end{cases}$$

Les données de Cauchy sont supposées de la forme :

$$f_j^{\varepsilon}(r) = F_j\left(r, \frac{r}{\varepsilon}\right),$$

les F_j ($j = 0, 1$) étant 2π -périodiques en leur dernière variable. On supposera les fonctions h et F_j paires.

Théorème 1 *Pour des fonctions h et F_j suffisamment régulières, le problème (2.1.1) possède une unique solution radiale localement en temps, borne ainsi que son gradient. De plus, $\partial_t u^\varepsilon$ possède, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, un développement asymptotique de la forme :*

$$(2.1.2) \quad \partial_t u^\varepsilon = \sigma_0^\varepsilon + \varepsilon^{2-p} \sigma_1^\varepsilon + \varepsilon^{2-p} \tilde{\sigma}_1^\varepsilon + O\left(\frac{\varepsilon}{r + \varepsilon^{3-p}}\right),$$

où $\sigma_0^\varepsilon(t, r) = \mathcal{H}_0\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right)$, $\mathcal{H}_0$ étant une fonction indépendante de ε , périodique en ses deux dernières variables. $\tilde{\sigma}_1^\varepsilon = O(\varepsilon^{(p-1)(2-p)}/r)$ est singulier près de la caustique. Pour $\varepsilon \in]0, 1]$ fixé, $\partial_t u^\varepsilon$ est régulier jusqu'à la caustique et se comporte comme dans le cas linéaire :

$$\partial_t u^\varepsilon = O\left(\frac{1}{r + \varepsilon}\right),$$

alors que σ_0^ε est singulier, en r^{1-p} : dans une couche de taille $\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$, il faut changer la description de l'optique géométrique. Les singularités de σ_0^ε , σ_1^ε et $\tilde{\sigma}_1^\varepsilon$ se compensent, il faut donc regrouper ces termes dans la couche limite. Le terme σ_1^ε possède en outre une propriété de concentration sur le cône d'onde : c'est un $o(1)$ hors du cône.

On a plus précisément les propriétés suivantes :

- loin de la caustique $\{r = 0\}$, le terme σ_0^ε est celui de l'optique géométrique et approche bien $\partial_t u^\varepsilon$. Près de la caustique, par contre, $\partial_t u^\varepsilon$ est un $O(1/\varepsilon)$, alors que σ_0^ε est singulier, en r^{1-p} . Ainsi, dans une couche limite de taille $\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$, il faut changer la description de la solution exacte ;
- le terme σ_1^ε n'est pas prévu par l'optique géométrique et possède la propriété de concentration évoquée précédemment : c'est un $O(\varepsilon^{p-1})$ uniforme hors de tout voisinage du cône $\{t \geq r\}$, mais de taille 1 (et non identiquement nul) à l'intérieur du cône. Ce correcteur est nul avant la caustique, et naît des oscillations du premier profil à la traversée de $\{r = 0\}$. Le phénomène surprenant est qu'il est propagé "loin de la caustique" ;
- ce premier correcteur possède en outre le même caractère singulier que le premier profil le long de la caustique. Nous verrons qu'à l'intérieur d'une couche limite, il n'y a plus lieu de distinguer ces deux termes : ils sont tous deux singuliers, de même taille ;
- le terme $\tilde{\sigma}_1^\varepsilon$ est plus petit que le premier correcteur loin de la caustique : c'est un $O(\varepsilon^{(2-p)(p-1)}/r)$. Il contient éventuellement d'autres termes non prévus par l'optique géométrique, issus comme le premier correcteur des oscillations du premier profil à la traversée de la caustique ;
- les termes non prévus par l'optique (qui viennent s'insérer entre les termes de taille ε^0 et ε^1 loin de la caustique) compensent la singularité du premier profil près de la caustique : associés au premier profil, ils approchent uniformément $\partial_t u^\varepsilon$.

On a un résultat similaire pour la dérivée selon r de u :

Théorème 2 *La fonction $\partial_r u^\varepsilon$, définie localement en temps, admet un développement*

asymptotique dans L^∞ de la forme :

$$\partial_r u^\varepsilon = \rho_0^\varepsilon + \varepsilon^{2-p} \rho_1^\varepsilon + \varepsilon^{2-p} \tilde{\rho}_1^\varepsilon + O\left(\frac{\varepsilon}{r + \varepsilon^{3-p}}\right).$$

Là encore, loin de la caustique, ρ_0^ε est le terme prévu par l'optique géométrique, mais a un comportement différent près de $\{r = 0\}$.

Comme pour le résultat précédent, le terme ρ_1^ε n'est pas prévu par l'optique et possède la propriété de concentration sur le cône d'onde.

Remarque : pour d'autres non-linéarités, on peut calculer les termes suivants du développement. Ainsi, dans le cas où $F(t, r, y) = ar^{2-p}y^2$, toujours avec $1 < p < 2$, on a :

$$\partial_t u^\varepsilon = \sigma_0^\varepsilon + \sum_{1 \leq k < [1/(2-p)]} \varepsilon^{k(2-p)} \sigma_k^\varepsilon + O(\varepsilon/r),$$

$$\partial_r u^\varepsilon = \rho_0^\varepsilon + \sum_{1 \leq k < [1/(2-p)]} \varepsilon^{k(2-p)} \rho_k^\varepsilon + O(\varepsilon/r).$$

Le premier terme correspond encore celui de l'optique géométrique loin de $\{r = 0\}$, mais n'est plus une bonne approximation de la solution exacte dans une couche limite, près de la caustique. On a plus précisément les propriétés suivantes :

- pour $1 \leq k < [1/(2-p)]$, $\partial_t u^\varepsilon - \sum_{0 \leq j \leq k} \varepsilon^{j(2-p)} \sigma_j^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^{(k+1)(2-p)}}{r}\right)$;
- les termes $(\sigma_k^\varepsilon)_{k \geq 1}$ ne sont pas prévus par l'optique géométrique. Ils possèdent en outre la propriété de concentration évoquée précédemment ;
- le premier profil est singulier le long de la caustique, mais si on lui associe le premier correcteur (qui près de la caustique n'est pas plus petit que le premier profil), alors on obtient une approximation uniforme de la solution exacte ;
- pour $1 \leq k < [1/(2-p)]$, $\partial_r u^\varepsilon - \sum_{0 \leq j \leq k} \varepsilon^{j(2-p)} \rho_j^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^{(k+1)(2-p)}}{r}\right)$;
- les termes $(\rho_k^\varepsilon)_{k \geq 1}$ ne sont pas prévus par l'optique et possèdent la même propriété de concentration que les σ_k .

Dans un premier temps, on précise l'équation en u à laquelle on s'intéresse, puis on la réduit à un système du premier ordre en dimension 1 d'espace. Après avoir vérifié les résultats d'existence et d'unicité attendus pour ce système, on examine le développement asymptotique de la solution exacte, pour finalement traduire ces résultats en terme de la fonction initiale u .

2.2 Présentation du problème

2.2.1 Mise en place et réductions

En dimension 3 d'espace, on s'intéresse aux solutions du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \square u^\varepsilon + F(t, r, \partial_t u^\varepsilon) &= 0 \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= \varepsilon f_0^\varepsilon(r) + h(r) \\ \partial_t u^\varepsilon|_{t=0} &= f_1^\varepsilon(r) \end{cases}$$

Les données initiales sont de la forme :

$$f_j^\varepsilon(r) = F_j\left(r, \frac{r}{\varepsilon}\right),$$

les F_j ($j = 0, 1$) étant 2π -périodiques et régulières en leur dernière variable. On supposera les fonctions h et F_j paires. On suppose enfin que la fonction h est de classe C^2 et s'annule en 0. Nous préciserons plus loin quel type de non-linéarité notre résultat va pouvoir s'appliquer.

On examine les solutions radiales (oscillantes) du problème :

$$u^\varepsilon(t, x) = U^\varepsilon\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right).$$

U^ε est 2π -périodique en ses deux dernières variables, car les données initiales sont 2π -périodiques en leur dernière variable. On peut aussi considérer w comme une fonction paire de r .

Convention : si F^ε est une fonction de quatre arguments, 2π -périodique en les deux derniers, notés θ_1 et θ_2 , on pose :

$$F^\varepsilon\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right) = f^\varepsilon(t, r).$$

De même, en ce qui concerne les données initiales, on notera, pour F^ε fonction de deux variables, 2π -périodique en la deuxième,

$$F^\varepsilon\left(r, \frac{r}{\varepsilon}\right) = f^\varepsilon(r).$$

Notation : on écrit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

En étudiant $\tilde{u}^\varepsilon := ru^\varepsilon$, on constate que $\tilde{u}$ vérifie une équation en dimension 1 d'espace assez simple :

$$(\partial_t^2 - \partial_r^2) \tilde{u}^\varepsilon + rF(t, r, \partial_t \tilde{u}^\varepsilon / r) = 0.$$

En effet, en dimension 3 d'espace pour une fonction radiale, on a la relation :

$$\Delta\left(\frac{v}{r}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

On peut considérer $\tilde{u}^\varepsilon$ comme une fonction impaire de r , ou étudier le problème sur $[0, T] \times \mathbb{R}_+^*$ (T à préciser) avec pour condition au bord $\tilde{u}|_{r=0} = 0$. On se ramène à un système du premier ordre en posant :

$$v_\pm^\varepsilon := (\partial_t \pm \partial_r) \tilde{u}^\varepsilon.$$

On obtient :

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} (\partial_t - \partial_r)v_-^\varepsilon &= -rF(t, r, (v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)/2r) \\ (\partial_t + \partial_r)v_+^\varepsilon &= -rF(t, r, (v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)/2r), \quad (t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \\ (v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(t, 0) &= 0 \\ v_-^\varepsilon|_{t=0} &= p^\varepsilon(r) \\ v_+^\varepsilon|_{t=0} &= q^\varepsilon(r) \end{cases}$$

avec $p^\varepsilon(r) = P^\varepsilon(r, \frac{r}{\varepsilon})$, $q^\varepsilon(r) = Q^\varepsilon(r, \frac{r}{\varepsilon})$ et

$$\begin{aligned} P^\varepsilon(r, \theta) &= P_0(r, \theta) + \varepsilon P_1(r, \theta), \\ Q^\varepsilon(r, \theta) &= Q_0(r, \theta) + \varepsilon Q_1(r, \theta), \end{aligned}$$

où :

$$\begin{cases} P_0(r, \theta) &= rF_1(r, \theta) + r\partial_\theta F_0(r, \theta) + rh'(r) + h(r) \\ P_1(r, \theta) &= F_0(r, \theta) + r\partial_r F_0(r, \theta) \\ Q_0(r, \theta) &= rF_1(r, \theta) - r\partial_\theta F_0(r, \theta) - rh'(r) - h(r) \\ Q_1(r, \theta) &= -P_1(r, \theta) \end{cases}$$

2.2.2 Notations et hypothèses

Les fonctions apparaissant au second membre sont $-rF(t, r, (v_- + v_+)/2r)$. Notons alors :

$$(2.2.2) \quad G(t, r, y) := -rF(t, r, y/2r).$$

Il est plus pratique d'annoncer les hypothèses sur la non-linéarité en termes de G .

Hypothèse (NL) La fonction G est de classe C^1 de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et il existe $1 < p < 2$, $k \geq p - 1$, $1 \geq k' \geq p - 1$, $C > 0$ tels que :

$$(2.2.3) \quad |G(t, r, y)|, |\partial_t G(t, r, y)| \leq C \left(1 + \frac{|y|^k}{r^{p-1}} \right) |y|,$$

$$(2.2.4) \quad |\partial_y G(t, r, y)| \leq C \left(1 + \frac{|y|^k}{r^{p-1}} \right),$$

$$(2.2.5) \quad |\partial_y G(t, r, y) - \partial_y G(t, r, y')| \leq \frac{C}{r^{p-1}} |y - y'|^{k'},$$

On suppose finalement que la fonction G se comporte en r^{1-p} près de $r = 0$:

$$(2.2.6) \quad (t, r, y) \mapsto r^{p-1}G(t, r, y) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

$$(2.2.7) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^{p-1}G(t, r, y) = \tilde{G}(t, y) \neq 0.$$

Remarque : c'est ce comportement qui donne naissance au premier correcteur et au phénomène de concentration. Nous allons voir dans les exemples qui suivent que ceci n'est pas nécessairement dû à la présence d'une singularité dans l'équation des ondes à laquelle on s'intéresse initialement.

Exemples : p est choisi comme dans l'hypothèse (NL), $1 < p < 2$.

Exemple 2.2.1 : en introduction, nous avons pris $F(t, r, y) = a|y|^{p-1}y$. La fonction G vaut alors $G(t, r, y) = r^{1-p}b|y|^{p-1}y$ et vérifie l'hypothèse (NL) avec $k = k' = p - 1$. La singularité en r^{1-p} dans le système du premier ordre est directement liée à la non-linéarité.

Exemple 2.2.2 : de même, avec $F(t, r, y) = a\langle y \rangle^{p-1}y$, où $\langle y \rangle = (1 + y^2)^{1/2}$, on trouve $G(t, r, y) = r^{1-p}b\langle y \rangle^{p-1}y$, qui vérifie l'hypothèse (NL) avec $k = k' = p - 1$.

Exemple 2.2.3 : cas d'une équation avec singularité : $F(t, r, y) = ar^{n-p}y^n$, où n est un entier supérieur ou égal à 2. Alors $G(t, r, y) = r^{1-p}by^n$ vérifie (NL) avec $k = n - 1$, $k' = 1$. Si $n \geq 3$, C dans 2.2.5 n'est plus une constante, mais un polynôme en y . Nous prendrons en fait y toujours borné, donc ceci ne pose pas problème.

La dépendance en t de la non-linéarité est choisie de sorte qu'elle n'ait aucune influence sur les calculs, nous supposons que G ne dépend que de r et y .

Examinons les conditions initiales des solutions exactes v_-^ε et $v_+^\varepsilon : p^\varepsilon$ et q^ε . Nous avons supposé les fonctions h et F_j paires (pour trouver une solution radiale), et par définition,

$$P^\varepsilon(r, \theta) = P_0(r, \theta) + \varepsilon P_1(r, \theta), \quad Q^\varepsilon(r, \theta) = Q_0(r, \theta) + \varepsilon Q_1(r, \theta),$$

où :

$$\begin{cases} P_0(r, \theta) &= rF_1(r, \theta) + r\partial_\theta F_0(r, \theta) + rh'(r) + h(r) \\ P_1(r, \theta) &= F_0(r, \theta) + r\partial_r F_0(r, \theta) \\ Q_0(r, \theta) &= rF_1(r, \theta) - r\partial_\theta F_0(r, \theta) - rh'(r) - h(r) \\ Q_1(r, \theta) &= -P_1(r, \theta) \end{cases}$$

donc $P^\varepsilon(0, \theta) = P^\varepsilon(0, -\theta)$. D'après les hypothèses, on a aussi :

$$P_0(0, \theta) = Q_0(0, \theta) = 0.$$

Il sera commode pour la suite d'introduire les opérateurs suivants :

$$M_j \begin{cases} L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}^2) & \rightarrow L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}) \\ f & \mapsto (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{T}} f d\theta_j \end{cases} \quad j = 1, 2$$

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $j = 1, 2$, on note

$$M_{j,n} \begin{cases} L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}^2) & \rightarrow L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}) \\ f & \mapsto (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{T}} f(t, r, \theta_1, \theta_2) e^{-in\theta_j} d\theta_j \end{cases}$$

2.3 Définitions et résultats

La majeure partie de l'étude va porter sur les fonctions intermédiaires v_+ et v_- . On commence donc par étudier les premiers termes du développement asymptotique de ces fonctions.

On définit dans cette section le premier profil et le premier correcteur. On énonce ensuite les résultats qui justifient ces définitions, puis on interprète les propriétés de ce développement asymptotique en termes du gradient de la solution exacte, $\nabla_{t,r} u^\varepsilon$.

2.3.1 Définitions

Le premier profil est défini par :

$$(2.3.1) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} (\partial_t - \partial_r)V_{0,-}(t, r, \theta_1) & = & M_2 G(r, V_{0,-} + V_{0,+})(t, r, \theta_1) \\ (\partial_t + \partial_r)V_{0,+}(t, r, \theta_2) & = & M_1 G(r, V_{0,-} + V_{0,+})(t, r, \theta_2) \\ V_{0,-}(t, 0, \theta) + V_{0,+}(t, 0, -\theta) & = & 0 \\ V_{0,-}|_{t=0} & = & P_0(r, \theta_1) \\ V_{0,+}|_{t=0} & = & Q_0(r, \theta_2) \end{array} \right.$$

Ici chaque fonction ne dépend que d'une seule variable rapide :

$$V_{0,-} = V_{0,-}(t, r, \theta_1), \quad V_{0,+} = V_{0,+}(t, r, \theta_2).$$

On remarque que les fonctions $V_{0,-}$ et $V_{0,+}$ sont définies indépendamment de ε : seuls leurs arguments dépendront de ε . C'est le terme prévu par l'optique géométrique.

La définition naturelle du premier correcteur consiste ensuite à linéariser l'équation et à prendre comme terme source la partie écartée dans la définition du premier profil :

$$(2.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\partial_t - \partial_r)v_{1,-}^\varepsilon(t, r) = (v_{1,-}^\varepsilon + v_{1,+}^\varepsilon)\partial_y G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon)(t, r) \\ \quad + \varepsilon^{p-2}(I - M_2)G(r, V_{0,-} + V_{0,+})\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right) \\ (\partial_t + \partial_r)v_{1,+}^\varepsilon(t, r) = (v_{1,-}^\varepsilon + v_{1,+}^\varepsilon)\partial_y G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon)(t, r) \\ \quad + \varepsilon^{p-2}(I - M_1)G(r, V_{0,-} + V_{0,+})\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right) \end{array} \right.$$

Nous verrons plus loin pourquoi la puissance $p - 2$ est la bonne pour le ε du terme source ; ceci nous permet d'avoir un correcteur de taille 1 (dans le cône de lumière). La raison pour laquelle nous avons défini le premier correcteur avec des petites lettres (c'est-à-dire sans introduire les variables rapides) est qu'il dépend des variables rapides de façon non uniquement périodique. Ces variables décrivent également l'amplitude du premier correcteur. Pour les calculs que nous faisons ici, nous avons besoin de connaître assez précisément les oscillations du premier profil uniquement.

Nous allons vérifier que ce terme apparaît dans le développement asymptotique de la solution exacte, multiplié par ε^{2-p} . En particulier, il vient s'insérer entre les

termes ε^0 et ε^1 de l'optique géométrique. Il est naturel de lui associer des conditions initiales nulles.

$$(2.3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\partial_t - \partial_r)v_{1,-}^\varepsilon(t, r) = (v_{1,-}^\varepsilon + v_{1,+}^\varepsilon)\partial_y G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon)(t, r) \\ \quad + \varepsilon^{p-2}(I - M_2)G(r, V_{0,-} + V_{0,+})\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right) \\ (\partial_t + \partial_r)v_{1,+}^\varepsilon(t, r) = (v_{1,-}^\varepsilon + v_{1,+}^\varepsilon)\partial_y G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon)(t, r) \\ \quad + \varepsilon^{p-2}(I - M_1)G(r, V_{0,-} + V_{0,+})\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right) \\ (v_{1,-}^\varepsilon + v_{1,+}^\varepsilon)(t, 0) = 0 \\ v_{1,-}^\varepsilon|_{t=0} = 0 \\ v_{1,+}^\varepsilon|_{t=0} = 0 \end{array} \right.$$

2.3.2 Hypothèses et énoncés des résultats

Les fonctions intermédiaires

NB : on ne s'étonnera pas qu'il y ait des hypothèses sur P_1 et non sur Q_1 , étant donné la relation $Q_1 = -P_1$.

$C_b(I)$ désignera dans toute la suite l'espace des fonctions continues et bornées sur I .

Proposition 2.3.2.1 *Supposons les fonctions P_0 , Q_0 et P_1 bornées. Alors il existe $T_1 > 0$ tel que le système (2.2.1) possède une unique solution*

$$(v_-^\varepsilon, v_+^\varepsilon) \in L^\infty([0, T_1] \times \mathbb{R}_+^*)^2,$$

uniformément en $\varepsilon \in]0, 1]$.

Proposition 2.3.2.2 *Supposons les fonctions P_0 et Q_0 bornées. Alors il existe $T_2 > 0$ tel que le système (2.3.1) possède une unique solution*

$$(V_{0,-}, V_{0,+}) \in L^\infty([0, T_2] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T})^2.$$

Dans la suite, on notera $T = \min(T_1, T_2)$.

Remarque : pour le problème (2.3.1), l'uniformité en ε est évidente puisque ce système ne fait pas apparaître de dépendance en ε .

Pour le calcul du développement asymptotique et le retour à u , on a besoin d'hypothèses de régularité plus fortes pour les données initiales :

(H1) : les données initiales sont C^∞ . En outre, $P_0, Q_0, P_1 \in C^2(\mathbb{T}, W^{2,\infty}(\mathbb{R}))$.

Remarque : on n'a pas vraiment besoin de la régularité C^∞ , mais les calculs sont plus simples dans ce cas. Par ailleurs, cette hypothèse est automatiquement vérifiée si $h = 0$, et si les fonctions F_0 et F_1 sont dans la classe de Schwartz.

Proposition 2.3.2.3 *Supposons l'hypothèse (H1) vérifiée. Notons $r_{0,-}^\varepsilon$ et $r_{0,+}^\varepsilon$ les fonctions définies par :*

$$r_{0,-}^\varepsilon = v_-^\varepsilon - v_{0,-}^\varepsilon ; \quad r_{0,+}^\varepsilon = v_+^\varepsilon - v_{0,+}^\varepsilon.$$

Alors $r_{0,-}^\varepsilon, r_{0,+}^\varepsilon = O(\varepsilon^{2-p})$ dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_+)$ pour $\varepsilon \in]0, 1]$.

Remarque : on obtient en particulier un équivalent dans L^∞ de la solution exacte lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposition 2.3.2.4 *Supposons l'hypothèse (H1) vérifiée. Alors le problème (C) possède une unique solution $(v_{1,-}^\varepsilon, v_{1,+}^\varepsilon) \in C_b([0, T] \times \mathbb{R}_+^*)$, uniformément en $\varepsilon \in]0, 1]$.*

Proposition 2.3.2.5 *Notons $\mathcal{C}$ le cône $\{T \geq t \geq r \geq 0\}$. Hors de $\mathcal{C}$, les fonctions $v_{1,-}^\varepsilon$ et $v_{1,+}^\varepsilon$ sont en $O(\varepsilon^{p-1})$ (uniformément sur tout compact). A l'intérieur de $\mathcal{C}$, par contre, le premier correcteur est de taille 1 et non identiquement nul (figure 2.1).*

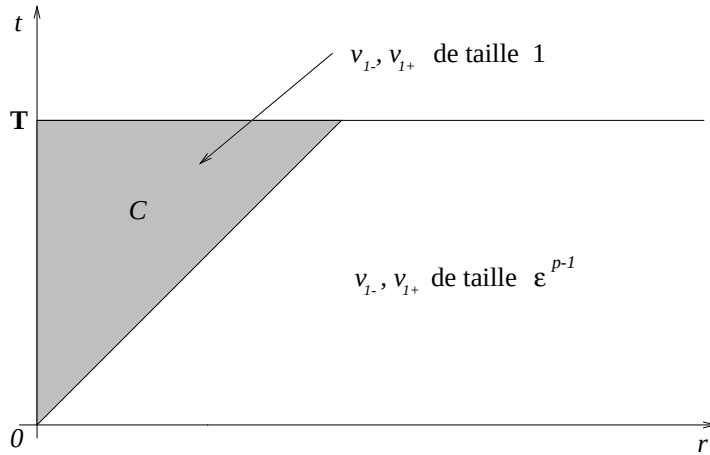


FIG. 2.1 – Proposition 2.3.2.5

Proposition 2.3.2.6 *Supposons l'hypothèse (H1) vérifiée. Soient $r_{1,-}^\varepsilon$ et $r_{1,+}^\varepsilon$ les fonctions définies par :*

$$r_{1,-}^\varepsilon = v_-^\varepsilon - v_{0,-}^\varepsilon - \varepsilon^{2-p} v_{1,-}^\varepsilon ; \quad r_{1,+}^\varepsilon = v_+^\varepsilon - v_{0,+}^\varepsilon - \varepsilon^{2-p} v_{1,+}^\varepsilon.$$

Alors $r_{1,-}^\varepsilon, r_{1,+}^\varepsilon = O(\varepsilon^\beta)$ dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_+^*)$ pour $\varepsilon \in]0, 1]$, o

$$\beta = \min(1, (k' + 1)(2 - p))$$

et k' est la constante de l'hypothèse (NL).

Remarque : dans les exemples 2.2.1 et 2.2.2, la fonction G n'est pas "très" régulière en sa variable y . En effet, la première dérivée est höldérienne, mais pas lipschitzienne. Dans l'exemple 2.2.3, la fonction G est très régulière en y (polynomiale) : comme annoncé dans l'introduction, on peut alors calculer les termes suivants du développement, en puissance de ε^{2-p} .

Retour à la fonction u

Les résultats sur (v_-, v_+) permettent de mieux connaître le comportement du gradient de u . Notons donc $\sigma^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon$ et $\rho^\varepsilon := \partial_r u^\varepsilon$. Alors :

$$\sigma^\varepsilon(t, r) = \frac{1}{2r}(v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(t, r), \quad \rho^\varepsilon = \partial_r \left(\frac{\tilde{u}^\varepsilon}{r} \right).$$

Mais $\tilde{u}^\varepsilon(t, 0) = 0$, donc

$$\tilde{u}^\varepsilon(t, r) = \int_0^r \partial_r \tilde{u}^\varepsilon(t, s) ds = \frac{1}{2} \int_0^r (v_-^\varepsilon - v_+^\varepsilon)(t, s) ds,$$

et

$$\frac{\tilde{u}^\varepsilon(t, r)}{r} = \frac{1}{2} \int_0^1 (v_-^\varepsilon - v_+^\varepsilon)(t, rs) ds,$$

d'où finalement :

$$\sigma^\varepsilon(t, r) = \frac{1}{2} \int_0^1 s \partial_r (v_-^\varepsilon - v_+^\varepsilon)(t, rs) ds.$$

Notons, pour $i = 0, 1$,

$$\sigma_i^\varepsilon := \frac{1}{2r}(v_{i,-}^\varepsilon + v_{i,+}^\varepsilon)(t, r), \quad \rho_i^\varepsilon := \frac{1}{2} \int_0^1 s \partial_r (v_{i,-}^\varepsilon - v_{i,+}^\varepsilon)(t, rs) ds.$$

Proposition 2.3.2.7 *Supposons l'hypothèse (H1) vérifiée.*

$$\sigma^\varepsilon - \sigma_0^\varepsilon, \quad \rho^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^{2-p}}{r}\right).$$

$$\sigma^\varepsilon - \sigma_0^\varepsilon - \varepsilon^{2-p} \sigma_1^\varepsilon, \quad \rho^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon - \varepsilon^{2-p} \rho_1^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^{(k'+1)(2-p)}}{r}\right).$$

Près de la caustique, bien sûr, cette estimation n'a rien d'intéressant. Les solution exacte et premier profil ont en fait des comportements différents : nous préciserons cette analyse dans la dernière section.

2.4 Problèmes d'existence et d'unicité

2.4.1 La méthode des caractéristiques

Dans toute la suite, nous écrirons les équations aux dérivées partielles sous forme intégrale, grâce à la méthode des caractéristiques (voir par exemple [CH62]). Les opérateurs différentiels en jeu sont $\partial_t - \partial_r$ et $\partial_t + \partial_r$, dont les caractéristiques paramétrées par s sont définies respectivement par :

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{r} = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{r} = 1 \end{cases}$$

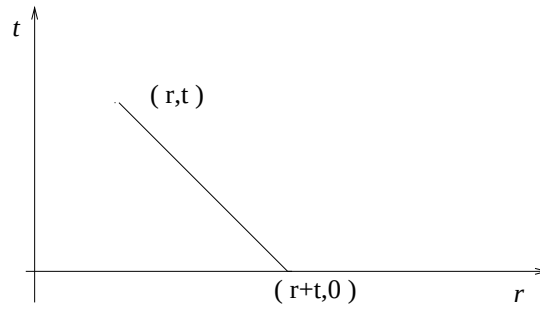


FIG. 2.2 – Caractéristique pour $\partial_t - \partial_r$.

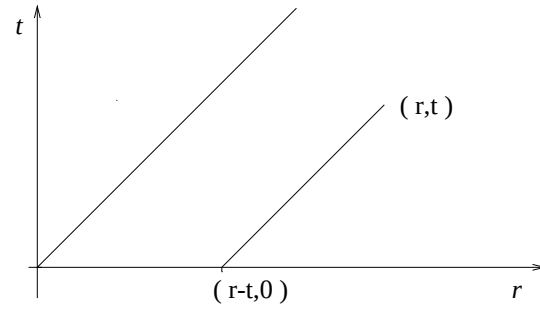


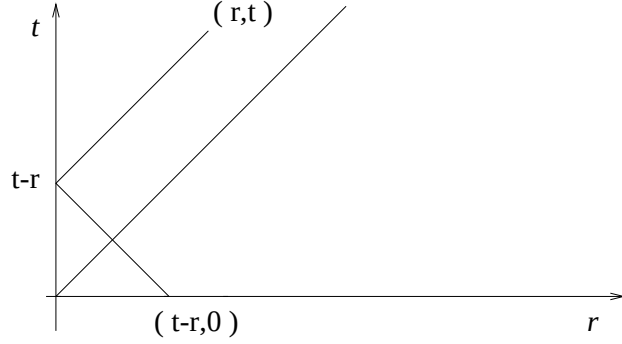
FIG. 2.3 – Caractéristique pour $\partial_t + \partial_r$, avec $r \geq t$.

Nous pouvons alors écrire les équations définissant la solution exacte $(v_-^\varepsilon, v_+^\varepsilon)$ et le premier profil $(V_{0,-}, V_{0,+})$ sous forme intégrale :

$$(2.4.1) \quad v_-^\varepsilon(t, r) = p^\varepsilon(r+t) + \int_r^{r+t} G(s, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(r+t-s, s) ds.$$

Pour $r \geq t$:

$$(2.4.2) \quad v_+^\varepsilon(t, r) = q^\varepsilon(r-t) + \int_{r-t}^r G(s, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(t-r+s, s) ds,$$

FIG. 2.4 – Caractéristique pour $\partial_t + \partial_r$, avec $r \leq t$.

et pour $r \leq t$, d'après la condition au bord :

$$(2.4.3) \quad v_+^\varepsilon(t, r) = \int_0^r G(s, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(t - r + s, s) ds - p^\varepsilon(t - r) \\ - \int_0^{t-r} G(s, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(t - r - s, s) ds.$$

Pour le premier profil :

$$V_{0,-}(t, r, \theta_1) = P_0(r + t, \theta_1) + \int_r^{r+t} M_2 G(s, V_{0,-} + V_{0,+})(r + t - s, s, \theta_1) ds.$$

Pour $r \geq t$:

$$V_{0,+}(t, r, \theta_2) = Q_0(r - t, \theta_2) + \int_{r-t}^r M_1 G(s, V_{0,-} + V_{0,+})(t - r + s, s, \theta_2) ds,$$

et pour $r \leq t$:

$$V_{0,+}(t, r, \theta_2) = \int_0^r M_1 G(s, V_{0,-} + V_{0,+})(t - r + s, s, \theta_2) ds - P_0(t - r, \theta_2) \\ - \int_0^{t-r} M_2 G(s, V_{0,-} + V_{0,+})(t - r - s, s, -\theta_2) ds.$$

2.4.2 Unicité dans L^∞

L'unicité de solutions pour les problèmes (2.2.1) et (2.3.1) repose sur le lemme de Gronwall.

Pour ce qui est du ou des termes suivants dans notre développement, on a affaire à une équation linéaire pour laquelle on a clairement unicité.

2.4.3 Existence de solutions pour les équations non linéaires

Traisons le cas de l'équation (2.2.1), celui de (2.3.1) étant parfaitement semblable. Dans chaque cas, on montre qu'au moins localement en temps, il existe des solutions bornées. La démarche consiste à écrire l'équation sous forme intégrale par la méthode des caractéristiques, puis à en construire la solution par schéma de Picard.

On se convainc facilement que le lemme suivant possède un analogue correspondant au cas de v_+ et qu'ils permettent de conclure, grâce à l'écriture des systèmes sous forme intégrale :

Lemme 2.4.3.1 *Soit p une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. On définit la suite de fonctions (u_n) par :*

$$(2.4.4) \quad \begin{cases} u_0 &= 0, \\ u_{n+1}(t, r) &= p(t+r) + \int_r^{r+t} G(s, u_n)(r+t-s, s)ds. \end{cases}$$

Alors il existe $T > 0$ tel que la suite (u_n) converge dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_+^*)$ vers u vérifiant, pour tout $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^*$:

$$u(t, r) = p(t+r) + \int_r^{r+t} G(s, u)(r+t-s, s)ds.$$

Démonstration : on a tout d'abord les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t, r)| &\leq \|p\|_\infty + \int_r^{r+t} |G(s, u_n)|(r+t-s, s)ds \\ &\leq \|p\|_\infty + C \int_r^{r+t} \left(1 + \frac{|u_n|^k}{s^{p-1}}\right) |u_n|(r+t-s, s)ds, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (NL). Ainsi,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}\|_\infty &\leq \|p\|_\infty + C \int_r^{r+t} \left(1 + \frac{\|u_n\|_\infty^k}{s^{p-1}}\right) \|u_n\|_\infty ds \\ &\leq \|p\|_\infty + CT\|u_n\|_\infty + C\|u_n\|_\infty^{k+1} \int_r^{r+t} s^{1-p} ds \\ &\leq \|p\|_\infty + CT\|u_n\|_\infty + C\|u_n\|_\infty^{k+1} \frac{1}{2-p} T^{2-p}. \end{aligned}$$

Définissons l par :

$$(2.4.5) \quad l = \|p\|_\infty + CTl + Cl^{k+1} \frac{1}{2-p} T^{2-p}$$

Il est clair que pour $T = 0$, cette équation possède une unique solution $l = \|p\|_\infty$, et par le théorème des fonctions implicites, (2.4.5) possède une unique solution $l(T)$, pour T petit, vérifiant en outre, $l > \|p\|_\infty$.

On a alors, pour tout n , $\|u_n\|_\infty \leq l$.

L'étape finale consiste à vérifier que la série de terme général $\|u_{n+1} - u_n\|_\infty$ converge :

$$|u_{n+1} - u_n|(t, r) \leq \int_r^{r+t} \left| G(s, u_n) - G(s, u_{n-1}) \right| (r+t-s, s) ds$$

On applique l'inégalité des accroissements finis en utilisant la relation (2.2.5) :

$$|u_{n+1} - u_n|(t, r) \leq C \|u_n - u_{n-1}\|_\infty \int_r^{r+t} \left(1 + \frac{(2l)^{k'}}{s^{p-1}} \right) ds,$$

et finalement :

$$\|u_{n+1} - u_n\|_\infty \leq C \|u_n - u_{n-1}\|_\infty \left(T + (2l)^{k'} \frac{T^{2-p}}{2-p} \right).$$

Donc pour $T > 0$ assez petit, la série de terme général $\|u_{n+1} - u_n\|_\infty$ converge, ce qui donne le résultat souhaité. $\square$

Ce résultat nous donne donc les propositions 2.3.2.1 et 2.3.2.2, puisque les données initiales sont bornées indépendamment de $\varepsilon \in]0, 1]$.

2.4.4 Résolution des équations linéaires

Lemme 2.4.4.1 *Notons, pour I un intervalle inclus dans $[0, T]$, $\mathcal{E}(I) := C_b(I \times \mathbb{R}_+^*)$. On considère, dans $\mathcal{E}([0, T])$, le problème :*

$$(2.4.6) \quad \begin{cases} L(\partial)x &= r^{1-p}Ax + b \\ x_1 + x_2|_{r=0} &= 0 \\ x|_{t=0} &= y \end{cases}$$

où $x = (x_1, x_2)$, A est une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathcal{E}([0, T])$, $y \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, L est l'opérateur des ondes :

$$L(\partial) = \begin{pmatrix} \partial_t - \partial_r & 0 \\ 0 & \partial_t + \partial_r \end{pmatrix},$$

$y \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et $L^{-1}b \in \mathcal{E}([0, T])$ (on définit L^{-1} en intégrant le long des caractéristiques issues de $\{t = 0\}$).

Alors (2.4.6) possède une unique solution x dans $\mathcal{E}([0, T])$, qui vérifie en outre, pour des constantes c et C universelles, et en notant $\|A\| = \|A\|_{\mathcal{E}([0, T])^4}$,

$$\|x\|_{\mathcal{E}([0, T])} \leq C (\|y\|_{L^\infty} + \|L^{-1}b\|_{\mathcal{E}([0, T])}) \exp \left(cT \|A\|^{1/(2-p)} \right).$$

Démonstration : comme dans la plupart des calculs fait ici, on privilégie une écriture sous forme intégrale. (2.4.6) se met sous la forme :

$$x = L^{-1}(r^{1-p}Ax) + L^{-1}b + y_t,$$

où la première composante de y_t vaut $y_1(r+t)$ et la seconde $y_2(r-t)H(r-t) - y_1(t-r)H(t-r)$. Il est alors facile de vérifier le lemme, puisque la fonction $x \mapsto x^{1-p}$ est localement intégrable. $\square$

Ce résultat va nous permettre de justifier le développement asymptotique et la proposition 2.3.2.4 quant à l'existence du premier correcteur : c'est le terme source intégré le long des caractéristiques qui impose la taille des solutions.

2.4.5 Régularité du premier profil

Le premier profil apparaît comme terme source dans la définition du premier correcteur : ce dernier naît des oscillations du premier profil à la traversée de la caustique. Pour le vérifier, nous aurons besoin de connaître plus précisément le premier profil. Le résultat principal de cette section est la

Proposition 2.4.5.1 *Supposons l'hypothèse (H1) vérifiée. Alors $\partial_t V_{0,-}$ et $\partial_t V_{0,+}$ sont bornées.*

Démonstration : d'après la relation

$$V_{0,-}(t, r, \theta_1) = P_0(t+r, \theta_1) + \int_r^{r+t} M_2 G(s, V_{0,-} + V_{0,+})(r+t-s, s, \theta_1) ds,$$

on vérifie que $V_{0,-}$ est dérivable en t : $V_{0,-}$ et $V_{0,+}$ sont obtenues par itérations de Picard. Chaque itre est drivable en temps, et la suite des drives converge uniformment, vers $\partial_t V_{0,-}$ et $\partial_t V_{0,+}$. A la limite, on trouve :

$$\begin{aligned} \partial_t V_{0,-}(t, r, \theta_1) &= \partial_r P_0(t+r, \theta_1) + M_2 G(r+t, V_{0,-} + V_{0,+})(0, r+t, \theta_1) \\ &+ \int_r^{r+t} M_2 (\partial_y G(s, V_{0,-} + V_{0,+}) \partial_t (V_{0,-} + V_{0,+}))(r+t-s, s, \theta_1) ds. \end{aligned}$$

On le même type de relation pour $\partial_t V_{0,+}$: la condition au bord n'apporte pas de problème. Le terme source vaut :

$$Q_0(r-t, \theta_2)H(r-t) - P_0(t-r, -\theta_2)H(t-r),$$

où H est la fonction de Heavyside. D'après la relation $P_0(0, \theta) = Q_0(0, \theta) = 0$ et la régularité de P_0 et Q_0 , on peut dériver ce terme sans problème. Le terme intégral est de la forme :

$$\int_{(r-t)H(r-t)}^r + H(t-r) \int_0^{t-r},$$

et ne pose pas de problème non plus. Par hypothèse sur G et puisque le premier profil est borné,

$$\partial_y G(s, V_{0,-} + V_{0,+}) = O\left(\frac{1}{s^{p-1}} + 1\right).$$

Le seul terme délicat est donc $M_2 G(r+t, V_{0,-} + V_{0,+})(0, r+t, \theta_1)$, lorsque $r+t$ devient petit. Mais

$$G(r+t, V_{0,-} + V_{0,+})(0, r+t, \theta_1, \theta_2) = G(r+t, P_0(t+r, \theta_1) + Q_0(t+r, \theta_2)),$$

et $P_0(r, \theta), Q_0(r, \theta) = O(r)$, donc ce terme reste partout borné. Il est alors clair que la dérivée en temps du premier profil est bornée. $\square$

On vérifie qu'on a également la :

Proposition 2.4.5.2 *Sous l'hypothèse (H1), $\partial_{\theta_1} V_{0,-}$ et $\partial_{\theta_2} V_{0,+}$ sont bornées. De plus, $\partial_t V_{0,-}$ et $\partial_{\theta_1} V_{0,-}$ sont k' -höldériennes (resp. lipschitziennes si $k' = 1$) en θ_1 . $\partial_t V_{0,+}$ et $\partial_{\theta_2} V_{0,+}$ possèdent la même régularité en θ_2 .*

Démonstration : le caractère borné se démontre comme pour le cas des dérivées en temps. La régularité supplémentaire en les variables rapides se montre facilement à chaque étape du schéma de Picard :

$$\begin{aligned} \partial_t V_{0,-}^{\nu+1}(t, r, \theta_1) &= P_0(t, r, \theta_1) \\ &+ \int_r^{r+t} M_2 (\partial_t (V_{0,-}^\nu + V_{0,+}^\nu) \partial_y G(s, V_{0,-}^\nu + V_{0,+}^\nu)) (r+t-s, s, \theta_1) ds. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a :

$$\begin{aligned} |\partial_t V_{0,-}^\nu(t, r, \theta_1) - \partial_t V_{0,-}^\nu(t, r, \theta'_1)| &\leq C_\nu |\theta_1 - \theta'_1|^{k'}, \\ |\partial_t V_{0,+}^\nu(t, r, \theta_2) - \partial_t V_{0,+}^\nu(t, r, \theta'_2)| &\leq C_\nu |\theta_2 - \theta'_2|^{k'}, \end{aligned}$$

et quitte à prendre une subdivision de $[0, T]$ en intervalles de longueur suffisamment petite, on montre que les constantes C_ν sont bornées indépendamment de $\nu \in \mathbb{N}$. $\square$

2.5 Justification de l'asymptotique

2.5.1 Cas du premier profil

Nous allons montrer la proposition 2.3.2.3. Nous avons noté $r_{0,-}^\varepsilon = v_-^\varepsilon - v_{0,-}^\varepsilon$ et $r_{0,+}^\varepsilon = v_+^\varepsilon - v_{0,+}^\varepsilon$. En soustrayant les équations (2.2.1) et (2.3.1), il vient :

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_r) r_{0,-}^\varepsilon(t, r) &= G(r, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(t, r) - M_2 G(r, V_{0,-} + V_{0,+}) \left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right) \\ (\partial_t + \partial_r) r_{0,+}^\varepsilon(t, r) &= G(r, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(t, r) - M_1 G(r, V_{0,-} + V_{0,+}) \left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

Ceci s'écrit encore :

$$(2.5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\partial_t - \partial_r)r_{0,-}^\varepsilon(t, r) = G(r, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(t, r) - G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon)(t, r) \\ \quad + (I - M_2)G(r, V_{0,-} + V_{0,+})\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right) \\ (\partial_t + \partial_r)r_{0,+}^\varepsilon(t, r) = G(r, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(t, r) - G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon)(t, r) \\ \quad + (I - M_1)G(r, V_{0,-} + V_{0,+})\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right) \\ r_{0,-}^\varepsilon + r_{0,+}^\varepsilon|_{r=0} = 0 \\ r_{0,-}^\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon p_1^\varepsilon(r) \\ r_{0,+}^\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon q_1^\varepsilon(r) \end{array} \right.$$

La formule de Taylor avec reste intégrale donne :

$$(2.5.2) \quad G(r, b) - G(r, a) = (b - a) \int_0^1 \partial_y G(r, a + x(b - a)) dx,$$

donc la première partie de chaque second membre, $G(r, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon) - G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon)$, vaut :

$$(2.5.3) \quad (r_{0,-}^\varepsilon + r_{0,+}^\varepsilon) \int_0^1 \partial_y G(r, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon + x(v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon - v_{0,-}^\varepsilon - v_{0,+}^\varepsilon)) dx.$$

Après avoir intégré le long des caractéristiques, on a un système de la forme :

$$\begin{cases} r_{0,-}^\varepsilon &= L_1^\varepsilon(r_{0,-}^\varepsilon, r_{0,+}^\varepsilon) + Y_1^\varepsilon \\ r_{0,+}^\varepsilon &= L_2^\varepsilon(r_{0,-}^\varepsilon, r_{0,+}^\varepsilon) + Y_2^\varepsilon \end{cases}$$

Pour avoir la proposition (2.3.2.3), il suffit de montrer :

1. au moins pour des temps petits, l'opérateur $L^\varepsilon = (L_1^\varepsilon, L_2^\varepsilon)$ est contractant de $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_+^*)$ dans lui-même ;
2. les termes Y_1^ε et Y_2^ε sont des $O(\varepsilon^{2-p})$.

Commençons par le premier point : d'après l'hypothèse (2.2.4),

$$|\partial_y G(r, y)| \leq C \left(1 + \frac{|y|^k}{r^{p-1}} \right).$$

Les fonctions $v_-^\varepsilon, v_+^\varepsilon, v_{0,-}^\varepsilon$ et $v_{0,+}^\varepsilon$ étant uniformément bornées, on en déduit que le terme (2.5.3) est un $O((1 + r^{1-p})\|r_{0,-}^\varepsilon + r_{0,+}^\varepsilon\|_\infty)$, donc après intégration le long des caractéristiques :

$$\|L\| \leq C \left(T + \frac{T^{2-p}}{2-p} \right),$$

et au moins pour des temps petits, L est contractant : le cas du premier point est résolu. Le second point est plus délicat. On va traiter le cas de Y_1 . A un terme εp_1 près (qui nous donne mieux que le résultat final), on a :

$$\begin{aligned} Y_1^\varepsilon &= \int_r^{r+t} (I - M_2)G(s, V_{0,-} + V_{0,+}) \left(r+t-s, s, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{2s-r-t}{\varepsilon} \right) ds \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \int_r^{r+t} e^{in(2s-r-t)/\varepsilon} M_{2,n}G(s, V_{0,-} + V_{0,+}) \left(r+t-s, s, \frac{r+t}{\varepsilon} \right) ds, \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, écrivons aussi :

$$\begin{aligned} (2.5.4) \quad & \int_r^{r+t} e^{2ins/\varepsilon} M_{2,n}G(s, V_{0,-} + V_{0,+}) \left(r+t-s, s, \frac{r+t}{\varepsilon} \right) ds = \\ &= \int_r^{r+t} \frac{e^{2ins/\varepsilon}}{s^{p-1}} s^{p-1} M_{2,n}G(s, V_{0,-} + V_{0,+}) \left(r+t-s, s, \frac{r+t}{\varepsilon} \right) ds \end{aligned}$$

La motivation de cette écriture repose sur le fait que la fonction G est singulière près de $r = 0$, et se comporte comme r^{1-p} : on a donc “sorti” la singularité. En fait, on n’a pas besoin de faire cette manœuvre “loin” du cône d’onde, pour $r - t \geq 1$ par exemple : par vitesse finie de propagation, la singularité n’agit plus dans cette région. Notons donc :

$$(2.5.5) \quad \mathcal{V} := \{(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^* ; r - t \leq 1\}.$$

Posons, pour n entier non nul et $(t, r) \in \mathcal{V}$:

$$(2.5.6) \quad \varphi_{n,2}(t, r, \theta_1) = \int_{\mathbb{T}} r^{p-1} e^{-in\theta} G(r, V_{0,-} + V_{0,+})(t, r, \theta_1, \theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

Pour (t, r) hors de $\mathcal{V}$, la singularité en r n’apparaît plus, et nous verrons qu’essentiellement dans cette région il n’y a pas grand-chose à dire.

Remarque : pour la fonction $F(y) = |y|^{p-1}y$ évoquée dans l’introduction et reprise dans l’exemple 2.2.1, ceci est simplement :

$$\begin{aligned} \varphi_{n,2}(t, r, \theta_1) &= \int_{\mathbb{T}} e^{-in\theta} |V_{0,-} + V_{0,+}|^{p-1} (V_{0,-} + V_{0,+})(t, r, \theta_1, \theta) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= M_{2,n}(|V_{0,-} + V_{0,+}|^{p-1} (V_{0,-} + V_{0,+}))(t, r, \theta_1), \end{aligned}$$

et c’est essentiellement l’expression qu’il faut avoir en tête dans le cas général.

L’asymptotique repose sur le

Lemme 2.5.1.1 Soient $n \in \mathbb{Z}^*$ et φ une fonction continue, bornée $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dont la dérivée soit localement intégrable. Soient $b \geq a \geq 0$. Notons, pour $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$I_{a,b}^\varepsilon := \int_a^b s^{1-p} e^{2ins/\varepsilon} \varphi(s) ds.$$

Il existe alors $C > 0$ telle que :

$$(2.5.7) \quad |I_{a,b}^\varepsilon| \leq \varepsilon^{2-p} \frac{C}{|n|^{2-p}} \left(2\|\varphi\|_{L^\infty} + \int_a^b |\varphi'| \right).$$

Si de plus $a > 0$,

$$(2.5.8) \quad |I_{a,b}^\varepsilon| \leq \frac{C\varepsilon}{|n|a^{p-1}} \left(2\|\varphi\|_{L^\infty} + \int_a^b |\varphi'| \right).$$

Si au contraire $a = 0$ et $b > 0$, en notant $l_n = \int_0^\infty s^{1-p} e^{2ins} ds$, on a :

$$(2.5.9) \quad I_{0,b}^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon^{2-p} l_n \varphi(0).$$

Démonstration : ce lemme se montre par intégration par parties successives. On “définit” $\phi_{n,\varepsilon}$ par :

$$\phi'_{n,\varepsilon}(s) = s^{1-p} e^{2ins/\varepsilon}.$$

Une intégration par parties permet de constater que $\int_0^{+\infty} x^{1-p} e^{2ix} dx$ converge. On prend alors la primitive de $\phi'_{n,\varepsilon}$ nulle en $+\infty$:

$$\phi_{n,\varepsilon}(s) = \int_{+\infty}^s x^{1-p} e^{2inx/\varepsilon} dx.$$

Par changement de variable, on constate qu’il existe C indépendant de $n \in \mathbb{Z}^*$ tel que :

$$|\phi_{n,\varepsilon}(s)| \leq \frac{C}{|n|^{2-p}} \varepsilon^{2-p}.$$

On calcule $I_{a,b}^\varepsilon$ par intégration par parties :

$$I_{a,b}^\varepsilon = \int_a^b \phi'_{n,\varepsilon}(s) \varphi(s) ds = \phi_{n,\varepsilon}(s) \varphi(s) \Big|_a^b - \int_a^b \phi_{n,\varepsilon}(s) \varphi'(s) ds.$$

On a alors directement la première partie du lemme, concernant le cas général.

Dans le cas où $a > 0$, on utilise une estimation plus précise de $\phi_{n,\varepsilon}$. Un calcul de $\phi_{n,\varepsilon}$ par intégration par parties successives permet de constater que cette fonction possède un développement asymptotique complet lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. En particulier, on a la relation :

il existe $C > 0$ tel que pour tout $x > 0$ on ait

$$\left| \int_x^{+\infty} s^{1-p} e^{is} ds \right| \leq C x^{1-p}.$$

On a alors facilement la deuxième partie.

Dans le cas où $a = 0$ et $b > 0$, on choisit plutôt la primitive de $\phi'_{n,\varepsilon}$ qui s'annule en 0 :

$$\phi_{n,\varepsilon}(s) = \int_0^s x^{1-p} e^{2inx/\varepsilon} dx = \varepsilon^{2-p} \int_0^{s/\varepsilon} x^{1-p} e^{2inx} dx.$$

On a alors la relation, pour tout $s > 0$:

$$\varepsilon^{p-2} \phi_{n,\varepsilon}(s) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty s^{1-p} e^{2ins} ds = l_n.$$

La dernière partie du lemme s'obtient par application du théorème de convergence dominée. $\square$

Remarque : la fonction $x \mapsto \int_0^x s^{1-p} e^{is} ds$ apparaissant dans ce lemme est l'équivalent dans le cadre non linéaire envisagé ici des fonctions d'Airy, rencontrées dans le cas linéaire dans [Lud66].

Nous souhaitons appliquer le lemme 2.5.1.1 à la quantité :

$$(2.5.10) \quad \int_r^{r+t} \frac{e^{2ins/\varepsilon}}{s^{p-1}} \varphi_{n,2}(r+t-s, s, \theta_1) ds,$$

où $\theta_1 = \frac{r+t}{\varepsilon}$. Cette quantité restant constante le long des caractéristiques pour $\partial_t - \partial_r$, nous garderons cette forme condensée. Il s'agit donc d'obtenir un contrôle de $\varphi_{n,2}$ et de ses dérivées en t et r .

La première étape consiste à vérifier que $\varphi_{n,2}$ est bornée : ceci découle de l'hypothèse (2.2.3) et du caractère borné du premier profil (proposition 2.3.2.2).

Dans l'intégration par parties, nous avons besoin de dériver $\varphi_{n,2}$ par rapport à s . Il faut donc contrôler $(\partial_r - \partial_t)\varphi_{n,2}$:

$$\partial_t \varphi_{n,2} = \int_{\mathbb{T}} r^{p-1} e^{-in\theta} \partial_t (V_{0,-} + V_{0,+}) \partial_y G(r, V_{0,-} + V_{0,+})(t, r, \theta_1, \theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

D'après la proposition 2.4.5.1, ceci est borné. Passons donc au cas de $\partial_r \varphi_{n,2}$:

$$\begin{aligned} \partial_r \varphi_{n,2} &= \int_{\mathbb{T}} r^{p-1} e^{-in\theta} \partial_r (V_{0,-} + V_{0,+}) \partial_y G(r, V_{0,-} + V_{0,+})(t, r, \theta_1, \theta) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}} e^{-in\theta} \partial_r (r^{p-1} G(r, V_{0,-} + V_{0,+}))(t, r, \theta_1, \theta) \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (2.2.6), la dernière ligne est bornée. Pour le premier terme, nous utilisons le :

Lemme 2.5.1.2 *Près de $\{r = 0\}$, $\partial_r(V_{0,-} + V_{0,+}) = O(r^{1-p})$. Loin de la caustique, ce terme est borné.*

Démonstration : par définition,

$$(\partial_t - \partial_r)V_{0,-} = M_2 G(r, V_{0,-} + V_{0,+}).$$

Puisque le premier profil est borné, ceci est un $O(r^{1-p})$ près de la caustique, et borné pour $r \geq 1$. De même, $(\partial_t + \partial_r)V_{0,+} = M_1 G(r, V_{0,-} + V_{0,+})$, et la proposition 2.4.5.1 permet de conclure. $\square$

D'après l'hypothèse (NL), on en déduit que $r^{p-1}\partial_r\varphi_{n,2}$ est continue, donc $\nabla\varphi_{n,2}$ est localement intégrable le long des caractéristiques.

Conclusion : on peut appliquer le lemme 2.5.1.1 : chaque terme de la série est un $O\left(\frac{\varepsilon^{2-p}}{|n|^{2-p}}\right)$.

Se pose alors le problème de la convergence de la série ainsi obtenue : le terme tout intégré est un

$$O\left(\frac{\varepsilon^{2-p}}{|n|^{2-p}} \cdot \|\varphi_n\|_{L^\infty}\right).$$

D'après l'hypothèse (NL) et la proposition 2.4.5.2,

$$\|\varphi_n\|_{L^\infty} = O\left(\frac{1}{|n|^{k'+1}}\right),$$

donc le terme tout intégré est un :

$$O\left(\frac{\varepsilon^{2-p}}{|n|^{2-p}} \cdot \frac{1}{|n|^{k'+1}}\right).$$

Or $2-p+k'+1 \geq 2$, donc la série converge uniformément, et la somme est un $O(\varepsilon^{2-p})$. Pour le terme intégral, le calcul est plus délicat : essentiellement, le gradient de φ_n ne décroît pas en $\frac{1}{|n|^{k'+1}}$, mais en $\frac{1}{|n|^{k'}}$. Chaque terme de la série correspondante est donc un :

$$O\left(\frac{\varepsilon^{2-p}}{|n|^{2-p}} \cdot \frac{1}{|n|^{k'}}\right).$$

Par hypothèse, nous avons “seulement” : $2-p+k' \geq 1$, ce qui ne donne pas directement un résultat de convergence uniforme. On a effectivement $2-p+k' = 1$ pour les exemples 2.2.1 et 2.2.2 ; pour l'exemple 2.2.3, $2-p+k' > 1$, donc la convergence est immédiate. Le cas critique $k' = p-1$ ne pose en fait pas de problème : nous pouvons améliorer l'asymptotique (2.5.9), ce qui suffira pour conclure.

Nos conditions d'étude sont les suivantes : $k' = p-1$, puisque pour $k' > p-1$, nous avons suffisamment d'arguments pour conclure. $\varphi(s) = \varphi_n(s)$, avec :

$$\|\varphi_n\|_{L^\infty} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad |\varphi'_n(s)| \leq \frac{C}{(s|n|)^{p-1}}.$$

Reprenons les notations du lemme 2.5.1.1. Nous pouvons supposer $n > 0$:

$$I_b^\varepsilon = \int_0^b \phi'_{n,\varepsilon}(s) \varphi_n(s) ds,$$

$$\phi_{n,\varepsilon}(s) = \int_0^s x^{1-p} e^{2inx/\varepsilon} dx = \frac{\varepsilon^{2-p}}{n^{2-p}} \int_0^{s/\varepsilon} x^{1-p} e^{2ix} dx.$$

Si $b = o(1)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il suffit d'écrire le développement limité de φ_n autour de $s = 0$ dans l'intégrale. Nous supposons donc $b \geq c > 0$, c indépendant de ε . En intégrant par parties, nous avons trouvé :

$$(2.5.11) \quad I_b^\varepsilon - \varepsilon^{2-p} l_n \varphi_n(0) = (\phi_{n,\varepsilon}(b) - \phi_{n,\varepsilon}(+\infty)) \varphi_n(b) - \int_0^b (\phi_{n,\varepsilon}(s) - \phi_{n,\varepsilon}(+\infty)) \varphi'_n(s) ds.$$

Comme souligné précédemment, le premier terme ne pose pas de problème : la majoration

$$(2.5.12) \quad \left| \int_x^{+\infty} s^{1-p} e^{is} ds \right| \leq C x^{1-p}$$

implique :

$$|\phi_{n,\varepsilon}(b) - \phi_{n,\varepsilon}(+\infty)| \leq C \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{2-p} \left(\frac{\varepsilon}{b} \right)^{p-1}.$$

Notons alors :

$$J_\varepsilon(b) = \int_0^b (\phi_{n,\varepsilon}(s) - \phi_{n,\varepsilon}(+\infty)) \varphi'_n(s) ds.$$

Écrivons $J_\varepsilon(b) = \int_0^\delta + \int_\delta^b$, où δ est de la forme ε^α ($\alpha > 0$). La première intégrale se majore par :

$$C \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{2-p} \int_0^{\varepsilon^\alpha} |\varphi'_n(s)| ds \leq C \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{2-p} \int_0^{\varepsilon^\alpha} \frac{ds}{(ns)^{p-1}} \leq \frac{C}{n} \varepsilon^{(2-p)(1+\alpha)}.$$

La seconde se majore par :

$$C \frac{\varepsilon}{n^{2-p}} \int_{\varepsilon^\alpha}^b s^{1-p} |\varphi'_n(s)| ds \leq C \frac{\varepsilon}{n} \int_{\varepsilon^\alpha}^b s^{2-2p} ds.$$

On constate que la valeur $p = 3/2$ joue le rôle de valeur critique : il faut alors distinguer trois cas. Les caractéristiques le long desquelles portent les intégrations étant de longueur inférieure ou égale à T , il faut retenir de ce calcul la majoration :

$$\text{il existe } \beta > 0 \text{ tel que } |I_b^\varepsilon - \varepsilon^{2-p} l_n \varphi_n(0)| \leq \frac{C}{n} \varepsilon^{2-p+\beta}.$$

Par ailleurs, on a évidemment :

$$|I_b^\varepsilon| \leq \frac{C}{n^{1+k'}},$$

donc pour tout $\delta \in [0, 1]$,

$$|I_b^\varepsilon - \varepsilon^{2-p} l_n \varphi_n(0)| \leq C \left(\frac{\varepsilon^{2-p+\beta}}{n} \right)^{1-\delta} \left(\frac{1}{n^{1+k'}} \right)^\delta.$$

Pour δ suffisamment proche de 1, on obtient une majoration de la forme :

$$|I_b^\varepsilon - \varepsilon^{2-p} l_n \varphi_n(0)| \leq C \frac{\varepsilon^{2-p+\alpha'}}{n^{1+\alpha''}},$$

avec $\alpha', \alpha'' > 0$. Ceci améliore donc la dernière partie du lemme 2.5.1.1. En particulier, le terme Y_1^ε est un $O(\varepsilon^{2-p})$, et le premier reste est un $O(\varepsilon^{2-p})$ dans $\mathcal{V}$. $\square$

Hors de $\mathcal{V}$, il est clair qu'on peut faire l'intégration par parties "habituelle", pour trouver que le premier reste est un $O(\varepsilon)$. Ainsi, le voisinage du bord du cône d'onde $\{r - t = 0\}$ assure la transition de la taille du premier reste.

On peut calculer explicitement les nombres l_n :

Lemme 2.5.1.3 *Les coefficients l_n , définis pour $n \in \mathbb{Z}^*$ par $l_n = \int_0^\infty s^{1-p} e^{2ins} ds$ vérifient :*

$$l_n = \pi |2n|^{p-2} \frac{1}{\Gamma(p-1)} e^{i\frac{\pi}{2}(p-1)\text{sgn}(n)}.$$

2.5.2 Comportement du premier correcteur

Le terme ε^{p-2} est le bon pour que le premier correcteur soit de taille 1 : comme pour l'étude du premier reste, d'après la proposition 2.4.4.1, il suffit de vérifier que le terme source dans la définition du correcteur, une fois intégré le long des caractéristiques, est de taille 1. Il s'agit justement, au terme ε^{p-2} près, du terme source pour le premier reste. On applique donc le lemme 2.5.1.1 aux fonctions $\varphi_{n,j}$ ($\varphi_{n,1}$ est obtenue comme $\varphi_{n,2}(x, 0, \theta)$, en échangeant les variables rapides), en y incorporant les améliorations apportées dans la justification de l'asymptotique. La première partie du lemme nous assure que le premier correcteur est un $O(1)$ (c'est la proposition 2.3.2.4), la seconde partie nous dit qu'il est un $O(\varepsilon^{p-1})$, uniformément sur tout compact de $\mathcal{C}^c$, o

$$\mathcal{C} = \{(r, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, T] ; t \geq r\}.$$

La troisième partie du lemme va nous assurer que ce terme a bien lieu d'apparaître ainsi. Avec les notations employées pour l'étude du premier reste, il faut vérifier qu'a priori, $\varphi_{n,j}(x, 0, \theta) \neq 0$. Ceci est dû à l'hypothèse (2.2.7) :

$$(2.5.13) \quad \varphi_{n,j}(x, 0, \theta) = M_{j,n} \tilde{G}(x, V_{0,-} + V_{0,+})(x, 0, \theta).$$

Malgré la condition au bord (dans laquelle on impose $\theta_1 = -\theta_2$), les coefficients de Fourier de $\tilde{G}(x, V_{0,-} + V_{0,+})(x, 0, \theta_1, \theta_2)$ en l'une ou l'autre des deux variables rapides n'ont, en général, aucune raison d'être tous identiquement nuls.

Exemple 5.2.1 : la fonction

$$f(\theta_1, \theta_2) = e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} - e^{2i\theta_1 + \theta_2} - e^{2i\theta_2 + \theta_1}$$

vérifie $f(\theta, -\theta) = 0$, mais ses coefficients de Fourier ne sont pas tous nuls. De plus, $(M_1 - M_2)f(\theta_1, \theta_2) \not\equiv 0$.

Dans l'écriture du système sous forme intégrale, le terme source pour $v_{1,+}^\varepsilon$ vaut, pour $r \leq t$:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^\varepsilon := & -\varepsilon^{p-2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{in\theta} \int_0^{t-r} s^{1-p} e^{2ins/\varepsilon} M_{2,n} s^{p-1} G(s, V_{0,-} + V_{0,+})(t-r-s, s, \theta) ds \\ & + \varepsilon^{2-p} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{-in\theta} \int_0^r s^{1-p} e^{2ins/\varepsilon} M_{1,n} s^{p-1} G(s, V_{0,-} + V_{0,+})(t-r+s, s, \theta) ds. \end{aligned}$$

Nous faisons les calculs pour θ quelconque. Il s'agit ensuite de donner à θ la valeur $(r-t)/\varepsilon$ pour compléter les calculs (les limites deviennent des équivalences). D'après la dernière partie du lemme 2.5.1.1, on a, avec les notations du lemme, pour tout entier n non nul :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{p-2} \int_0^{t-r} s^{1-p} e^{2ins/\varepsilon} M_{2,n} s^{p-1} G(s, V_{0,-} + V_{0,+})(t-r-s, s, \theta) ds \\ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} l_n M_{2,n} \tilde{G}(t-r, V_{0,-} + V_{0,+})(t-r, 0, \theta), \end{aligned}$$

si $t > r$, et

$$\begin{aligned} \varepsilon^{p-2} \int_0^r s^{1-p} e^{2ins/\varepsilon} M_{1,n} s^{p-1} G(s, V_{0,-} + V_{0,+})(t-r+s, s, \theta) ds \\ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} l_n M_{1,n} \tilde{G}(t-r, V_{0,-} + V_{0,+})(t-r, 0, \theta), \end{aligned}$$

si $t \geq r > 0$. On a donc, pour $t > r > 0$, et d'après le lemme 2.5.1.3 :

$$\begin{aligned} \tilde{g}^\varepsilon & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(-e^{in\theta} l_n M_{2,n} K(t-r, 0, \theta) + e^{-in\theta} l_n M_{1,-n} K(t-r, 0, \theta) \right) \\ & = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{in\theta} \left(\bar{l}_n M_{1,n} K(t-r, 0, \theta) - l_n M_{2,n} K(t-r, 0, \theta) \right), \end{aligned}$$

où on a noté $K(x, 0, \theta_1, \theta_2) = \tilde{G}(x, V_{0,-} + V_{0,+})(x, 0, \theta_1, \theta_2)$.

Remarque : on peut penser que la condition au bord implique la nullité des limites ci-dessus. En effet, la condition implique :

$$\tilde{G}(t, V_{0,-} + V_{0,+})(t, 0, \theta, -\theta) = 0.$$

Mais on ne demande pas :

$$\tilde{G}(t, V_{0,-} + V_{0,+})(t, 0, \theta_1, \theta_2) = 0,$$

si bien qu'a priori on n'a aucune raison d'avoir $M_{1,n}\tilde{G}(t, V_{0,-} + V_{0,+})(t, 0, \theta) = 0$ ou $M_{2,n}\tilde{G}(t, V_{0,-} + V_{0,+})(t, 0, \theta) = 0$ (cf contre-exemple précédent). Plus précisément, en revenant à l'écriture intégrale du système définissant le premier profil, on peut vérifier :

$$\begin{aligned} M_{1,n}\tilde{G}(t, V_{0,-} + V_{0,+})(t, 0, \theta) &= 0 \quad \forall t, \theta \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^* \\ &\Rightarrow P_0, Q_0 \text{ indépendants de } \theta, \end{aligned}$$

ce qui ne présente aucun intérêt ici.

2.5.3 Asymptotique précisée

Rappel : on veut montrer que dans L^∞ , on a :

$$(2.5.14) \quad v_-^\varepsilon - v_{0,-}^\varepsilon - \varepsilon^{2-p}v_{1,-}^\varepsilon, \quad v_+^\varepsilon - v_{0,+}^\varepsilon - \varepsilon^{2-p}v_{1,+}^\varepsilon = O(\varepsilon^\beta),$$

où $\beta = \min(1, (k' + 1)(2 - p))$.

Remarque : on a bien un exposant strictement supérieur $2 - p$ pour la taille du reste. Par contre, cet exposant peut être strictement inférieur à 1 : des termes supplémentaires peuvent éventuellement s'insérer entre le premier correcteur et le terme de taille ε^1 dans le développement asymptotique de la solution exacte. Dans le cas de l'exemple 2.2.3, comme annoncé en introduction, selon la valeur de p , on peut vérifier explicitement qu'il faut prendre en compte d'autres termes non prévus par l'optique géométrique. Le cas de l'exemple 2.2.1 ou 2.2.2 est moins explicite, du fait du manque de régularité de la non-linéarité.

En soustrayant l'équation définissant la solution exacte les équations donnant le premier profil et le premier correcteur, on trouve :

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_r)r_{1,-}^\varepsilon &= G(r, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon) - G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon) \\ &\quad - \varepsilon^{2-p}(v_{1,-}^\varepsilon + v_{1,+}^\varepsilon)\partial_y G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon) \\ &= G(r, v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon) - G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon + \varepsilon^{2-p}(v_{1,-}^\varepsilon + v_{1,+}^\varepsilon)) \\ &\quad - G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon) - \varepsilon^{2-p}(v_{1,-}^\varepsilon + v_{1,+}^\varepsilon)\partial_y G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon) \\ &\quad + G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon + \varepsilon^{2-p}(v_{1,-}^\varepsilon + v_{1,+}^\varepsilon)). \end{aligned}$$

Dans cette dernière écriture, la première ligne, grâce à la formule de Taylor avec reste intégral, permet de mettre $r_{1,-}^\varepsilon + r_{1,+}^\varepsilon$ en facteur d'un terme dont l'intégrale le long des caractéristiques reste bornée. Les deux dernières lignes tiennent donc lieu de terme source, et contrôlent la taille de $r_{1,-}^\varepsilon$ et $r_{1,+}^\varepsilon$.

Le lemme suivant permet de conclure :

Lemme 2.5.3.1 *Il existe $C > 0$ telle que pour tous $r > 0$ et $y, y_0 \in \mathbb{R}$,*

$$(2.5.15) \quad |G(r, y) - G(r, y_0) - (y - y_0)\partial_y G(r, y_0)| \leq \frac{C}{r^{p-1}}|y - y_0|^{k'+1}.$$

Il suffit ensuite de prendre $y_0 = v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon$ et $y = v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon + \varepsilon^{2-p}(v_{1,-}^\varepsilon + v_{1,+}^\varepsilon)$ pour affirmer que le terme source est un $O\left(\varepsilon^{(k'+1)(2-p)}r^{1-p}\right)$.

Démonstration : on sait qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$G(r, y) - G(r, y_0) = (y - y_0)\partial_y G(r, y_0 + \theta(y - y_0)),$$

donc il suffit de savoir que pour tous $y, y_0 \in \mathbb{R}$,

$$(2.5.16) \quad |\partial_y G(r, y) - \partial_y G(r, y_0)| \leq \frac{C}{r^{p-1}}|y - y_0|^{k'}.$$

Mais ceci est donné par l'hypothèse (2.2.5). $\square$

En intégrant le long des caractéristiques, cette partie du terme source est donc un $O\left(\varepsilon^{(k'+1)(2-p)}\right)$. Par ailleurs, le terme source contient également les termes $\varepsilon p_1^\varepsilon$ et $\varepsilon q_1^\varepsilon$, qui sont évidemment des $O(\varepsilon)$: la proposition 2.4.4.1 permet alors d'affirmer que $r_{1,u}^\varepsilon$ et $r_{1,v}^\varepsilon$ sont des $O(\varepsilon) + O(\varepsilon^{(k'+1)(2-p)})$, d'où la valeur de β et le résultat. $\square$

2.6 Retour à la fonction u

2.6.1 Estimations près de la caustique

Rappel des notations : la solution u à laquelle on s'intéresse au bout du compte est liée aux fonctions v_- et v_+ par les formules :

$$\begin{cases} \tilde{u}^\varepsilon &= r u^\varepsilon \\ v_-^\varepsilon &= (\partial_t + \partial_r)\tilde{u}^\varepsilon \\ v_+^\varepsilon &= (\partial_t - \partial_r)\tilde{u}^\varepsilon \end{cases}$$

Pour estimer ∇u^ε , on utilise donc les relations

$$\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon &= \frac{\partial_t \tilde{u}^\varepsilon}{r} = \frac{1}{2r}(v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon), \\ \partial_r u^\varepsilon &= \partial_r \left(\frac{\tilde{u}^\varepsilon}{r} \right) = \frac{\partial_r \tilde{u}^\varepsilon}{r} - \frac{\tilde{u}^\varepsilon}{r^2}. \end{aligned}$$

Hors de la caustique $\{r = 0\}$, les estimations sur v_-^ε et v_+^ε déjà vues suffisent. La condition au bord $v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon|_{r=0} = 0$ permet de penser que le terme $1/r$ est compensé : c'est en effet le cas, pour la solution exacte.

Le lemme suivant se montre comme le lemme 2.4.5.1 :

Lemme 2.6.1.1 *Supposons (H1) vérifiée. Alors les dérivées en t de v_-^ε et v_+^ε sont des $O(1/\varepsilon)$.*

Remarque : le terme $1/\varepsilon$ provient de la dérivation en les variables rapides.

D'après la relation $(\partial_t - \partial_r)v_-^\varepsilon = (\partial_t + \partial_r)v_+^\varepsilon$, ceci implique :

$$\partial_r(v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

D'après la condition au bord $(v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(t, 0) = 0$, on a finalement :

$$(v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)(t, r) = O\left(\frac{r}{\varepsilon}\right).$$

Par contre, ce calcul ne se reproduit pas pour le premier profil, essentiellement pour la même raison invoquée pour justifier l'apparition du premier correcteur. En effet, on a cette fois :

$$\partial_r(v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon)(t, r) = \partial_t(v_{0,-}^\varepsilon - v_{0,+}^\varepsilon) + (M_2 - M_1)G(r, V_{0,-} + V_{0,+})\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right).$$

Comme nous l'avons déjà signalé, la condition au bord pour le premier profil n'implique pas, en général, l'annulation en $r = 0$ de :

$$r^{p-1}(M_2 - M_1)G(r, V_{0,-} + V_{0,+})\left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon}\right).$$

L'exemple 5.2.1 permet de s'en convaincre. On a ainsi "seulement" :

$$(v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon)(t, r) = O\left(\frac{r}{\varepsilon} + r^{2-p}\right).$$

Pour $r \geq \varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$, on retrouve la même estimation que pour la solution exacte, mais a priori, pour $r \leq \varepsilon^{\frac{1}{p-1}}$, la solution exacte et le premier profil ont des comportements différents : le premier profil est singulier le long de la caustique, alors que la solution exacte ne l'est pas.

2.6.2 Estimations de ∇u loin de la caustique

Cas de $\partial_t u$

Comme écrit plus haut, $\sigma^\varepsilon = \frac{\partial_t \tilde{u}^\varepsilon}{r} = \frac{1}{2r}(v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)$. Il est alors naturel de poser, pour $j = 0, 1$,

$$\sigma_j^\varepsilon := \frac{1}{2r}(v_{j,-}^\varepsilon + v_{j,+}^\varepsilon).$$

On a alors évidemment :

$$\sigma^\varepsilon - \sigma_0^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^{2-p}}{r}\right), \quad \sigma^\varepsilon - \sigma_0^\varepsilon - \varepsilon^{2-p}\sigma_1^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^\beta}{r}\right),$$

avec $\beta = \min(1, (k' + 1)(2 - p))$. Ceci nous donne la première partie de la proposition 2.3.2.7.

Cas de $\partial_r u$

On a vu dans la partie 2.3 la relation :

$$\rho^\varepsilon = \frac{1}{2r}(v_-^\varepsilon - v_+^\varepsilon) - \frac{1}{2r^2} \int_0^r (v_-^\varepsilon - v_+^\varepsilon)(t, s) ds = \frac{1}{2} \int_0^1 s \partial_r (v_-^\varepsilon - v_+^\varepsilon)(t, rs) ds.$$

Comme précédemment, notons, pour $j = 0, 1$,

$$\rho_j^\varepsilon := \frac{1}{2r}(v_{j,-}^\varepsilon - v_{j,+}^\varepsilon) - \frac{1}{2r^2} \int_0^r (v_{j,-}^\varepsilon - v_{j,+}^\varepsilon)(t, s) ds = \frac{1}{2} \int_0^1 s \partial_r (v_{j,-}^\varepsilon - v_{j,+}^\varepsilon)(t, rs) ds.$$

On a tout de suite :

$$\rho^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^{2-p}}{r}\right), \quad \rho^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon - \varepsilon^{2-p} \rho_1^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon^\beta}{r}\right).$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 2.3.2.7.

2.6.3 Comportement de $\partial_t u$ près de la caustique

Comme nous l'avons remarqué au début de cette section, la description de $\partial_t u^\varepsilon$ doit être modifiée près de la caustique. Nous allons montrer que si on regroupe le premier profil et les termes apparus à la traversée de la caustique, alors on obtient une approximation uniforme de $\partial_t u^\varepsilon$. Ces termes supplémentaires sont le premier correcteur, et éventuellement d'autres fonctions : ils sont singuliers le long de la caustique, viennent s'insérer entre les termes de l'optique à l'intérieur du cône d'onde, et "disparaissent" loin du cône d'onde.

Le manque de régularité de la non-linéarité semble être un obstacle pour déterminer tous ces termes. Nous allons contourner cet obstacle, en regroupant en une seule fonction toutes les contributions des termes non prévus par l'optique. Définissons le correcteur généralisé :

(2.6.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t - \partial_r) \tilde{v}_{1,-}^\varepsilon = (\tilde{v}_{1,-}^\varepsilon + \tilde{v}_{1,+}^\varepsilon) \int_0^1 \partial_y G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon + y \varepsilon^{2-p} (\tilde{v}_{1,-}^\varepsilon + \tilde{v}_{1,+}^\varepsilon))(t, r) dy \\ \quad + \varepsilon^{p-2} (I - M_2) G(r, V_{0,-} + V_{0,+}) \left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon} \right) \\ (\partial_t + \partial_r) \tilde{v}_{1,+}^\varepsilon = (\tilde{v}_{1,-}^\varepsilon + \tilde{v}_{1,+}^\varepsilon) \int_0^1 \partial_y G(r, v_{0,-}^\varepsilon + v_{0,+}^\varepsilon + y \varepsilon^{2-p} (\tilde{v}_{1,-}^\varepsilon + \tilde{v}_{1,+}^\varepsilon))(t, r) dy \\ \quad + \varepsilon^{p-2} (I - M_1) G(r, V_{0,-} + V_{0,+}) \left(t, r, \frac{r+t}{\varepsilon}, \frac{r-t}{\varepsilon} \right) \\ \tilde{v}_{1,-}^\varepsilon + \tilde{v}_{1,+}^\varepsilon = 0 \text{ en } r = 0 \\ \widetilde{v_{1,-}^\varepsilon}|_{t=0} = 0 \\ \widetilde{v_{1,+}^\varepsilon}|_{t=0} = 0 \end{array} \right.$$

On a ici affaire à une équation non linéaire : la construction d'une solution se fait par schéma de Picard, comme dans la section 2.4 ; le terme source est le même que pour le premier correcteur, donc son analyse a déjà été faite. L'unicité est une conséquence du lemme de Gronwall. Alors :

- $v_{1,-}^\varepsilon - \tilde{v}_{1,-}^\varepsilon, v_{1,+}^\varepsilon - \tilde{v}_{1,+}^\varepsilon = O(\varepsilon^{k'(2-p)})$: ce correcteur généralisé contient le premier correcteur déjà étudié ;
- le premier correcteur et le correcteur généralisé ayant le même terme source, ils sont tous deux des $O(\varepsilon^{p-1})$ hors du cône d'onde (et même des $O(\varepsilon)$ loin du cône) ;
- $v_-^\varepsilon - v_{0,-}^\varepsilon - \varepsilon^{2-p}\tilde{v}_{1,-}^\varepsilon, v_+^\varepsilon - v_{0,+}^\varepsilon - \varepsilon^{2-p}\tilde{v}_{1,+}^\varepsilon = O(\varepsilon)$: on a bien pris en compte tous les termes non prévus par l'optique ;
- près de $r = 0$, cette estimation est améliorée en :

$$v_-^\varepsilon - v_{0,-}^\varepsilon - \varepsilon^{2-p}\tilde{v}_{1,-}^\varepsilon, v_+^\varepsilon - v_{0,+}^\varepsilon - \varepsilon^{2-p}\tilde{v}_{1,+}^\varepsilon = O(r\varepsilon^{k'-1}).$$

On a donc “recollé” les termes près de la caustique.

Le premier point se montre comme pour les calculs de restes : $v_{1,-}^\varepsilon - \tilde{v}_{1,-}^\varepsilon$ et $v_{1,+}^\varepsilon - \tilde{v}_{1,+}^\varepsilon$ vérifient les hypothèses du lemme 2.4.4.1, avec un terme source qui, intégré le long des caractéristiques, est un $O(\varepsilon^{k'(2-p)})$. Pour les deux derniers points, il est commode de poser :

$$(2.6.2) \quad \tilde{v}_{0,-}^\varepsilon = v_{0,-}^\varepsilon + \varepsilon^{2-p}\tilde{v}_{1,-}^\varepsilon, \quad \tilde{v}_{0,+}^\varepsilon = v_{0,+}^\varepsilon + \varepsilon^{2-p}\tilde{v}_{1,+}^\varepsilon.$$

On a tout fait pour avoir :

$$(2.6.3) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} (\partial_t - \partial_r)\tilde{v}_{0,-}^\varepsilon & = & G(r, \tilde{v}_{0,-}^\varepsilon + \tilde{v}_{0,+}^\varepsilon) \\ (\partial_t + \partial_r)\tilde{v}_{0,+}^\varepsilon & = & G(r, \tilde{v}_{0,-}^\varepsilon + \tilde{v}_{0,+}^\varepsilon), \quad (t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \\ (\tilde{v}_{0,-}^\varepsilon + \tilde{v}_{0,+}^\varepsilon)(t, 0) & = & 0 \\ \widetilde{v_{-}^\varepsilon}|_{t=0} & = & p_0^\varepsilon(r) \\ \widetilde{v_{+}^\varepsilon}|_{t=0} & = & q_0^\varepsilon(r) \end{array} \right.$$

On retrouve la même définition que pour v_-^ε et v_+^ε (système (2.2.1)) : seules les conditions initiales sont modifiées. En particulier, on a le même type d'estimation près de la caustique :

$$(2.6.4) \quad (\tilde{v}_{0,-}^\varepsilon + \tilde{v}_{0,+}^\varepsilon)(t, r) = O\left(\frac{r}{\varepsilon}\right).$$

Notons alors $\tilde{r}_{0,-}^\varepsilon = v_-^\varepsilon - \tilde{v}_{0,-}^\varepsilon$ et $\tilde{r}_{0,+}^\varepsilon = v_+^\varepsilon - \tilde{v}_{0,+}^\varepsilon$. Ce reste vérifie :

$$(2.6.5) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} (\partial_t - \partial_r)\tilde{r}_{0,-}^\varepsilon & = & (\tilde{r}_{0,-}^\varepsilon + \tilde{r}_{0,+}^\varepsilon) \int_0^1 \partial_y G(r, \tilde{v}_{0,\pm}^\varepsilon + y(v_\pm^\varepsilon - \tilde{v}_{0,\pm}^\varepsilon)) dy \\ (\partial_t + \partial_r)\tilde{r}_{0,+}^\varepsilon & = & (\tilde{r}_{0,-}^\varepsilon + \tilde{r}_{0,+}^\varepsilon) \int_0^1 \partial_y G(r, \tilde{v}_{0,\pm}^\varepsilon + y(v_\pm^\varepsilon - \tilde{v}_{0,\pm}^\varepsilon)) dy \\ \tilde{r}_{0,-}^\varepsilon + \tilde{r}_{0,+}^\varepsilon|_{r=0} & = & 0 \\ \tilde{r}_{0,u}^\varepsilon|_{t=0} & = & \varepsilon p_1^\varepsilon(r) \\ \tilde{r}_{0,v}^\varepsilon|_{t=0} & = & \varepsilon q_1^\varepsilon(r) \end{array} \right.$$

où on a noté $a_{\pm} = a_- + a_+$. Les fonctions $v_-^{\varepsilon}, v_+^{\varepsilon}, \tilde{v}_{0,-}^{\varepsilon}$ et $\tilde{v}_{0,+}^{\varepsilon}$ étant bornées uniformément en $\varepsilon \in]0, 1]$, ce reste généralisé est un $O(\varepsilon)$ uniforme. Pour l'estimation près de la caustique, on peut s'y prendre comme dans le cas de la solution exacte : on estime $\partial_t(\tilde{r}_{0,-}^{\varepsilon}, \tilde{r}_{0,+}^{\varepsilon})$, puis on utilise la relation

$$\partial_r(\tilde{r}_{0,-}^{\varepsilon} + \tilde{r}_{0,+}^{\varepsilon}) = \partial_t(\tilde{r}_{0,-}^{\varepsilon} - \tilde{r}_{0,+}^{\varepsilon}).$$

Pour le premier point, examinons le cas de $\tilde{r}_{0,-}^{\varepsilon}$:

$$(\partial_t - \partial_r)\tilde{r}_{0,-}^{\varepsilon} = G(r, \tilde{r}_{0,-}^{\varepsilon} + \tilde{r}_{0,+}^{\varepsilon} + \tilde{v}_{0,-}^{\varepsilon} + \tilde{v}_{0,+}^{\varepsilon}) - G(r, \tilde{v}_{0,-}^{\varepsilon} + \tilde{v}_{0,+}^{\varepsilon}).$$

Formellement, la dérivée en temps du second membre vaut :

$$\begin{aligned} & \partial_t(\tilde{r}_{0,\pm}^{\varepsilon} + \tilde{v}_{0,\pm}^{\varepsilon})\partial_y G(r, \tilde{r}_{0,\pm}^{\varepsilon} + \tilde{v}_{0,\pm}^{\varepsilon}) - \partial_t\tilde{v}_{0,\pm}^{\varepsilon}\partial_y G(r, \tilde{v}_{0,\pm}^{\varepsilon}) = \\ & = \partial_t\tilde{r}_{0,\pm}^{\varepsilon}\partial_y G(r, \tilde{r}_{0,\pm}^{\varepsilon} + \tilde{v}_{0,\pm}^{\varepsilon}) + \partial_t\tilde{v}_{0,\pm}^{\varepsilon}(\partial_y G(r, \tilde{r}_{0,\pm}^{\varepsilon} + \tilde{v}_{0,\pm}^{\varepsilon}) - \partial_y G(r, \tilde{v}_{0,\pm}^{\varepsilon})). \end{aligned}$$

La dernière ligne est un $O(1/\varepsilon) \times O(\varepsilon^{k'})$ (en ne tenant pas compte de la singularité près de $r = 0$). En reprenant le schéma de Picard comme dans la proposition 2.4.5.1, on obtient :

$$\partial_t(\tilde{r}_{0,-}^{\varepsilon}, \tilde{r}_{0,+}^{\varepsilon}) = O(\varepsilon^{k'-1}).$$

On en déduit alors : $(\tilde{r}_{0,-}^{\varepsilon} + \tilde{r}_{0,+}^{\varepsilon})(t, r) = O(r\varepsilon^{k'-1})$.

Pour revenir à la fonction $\partial_t u$, notons :

$$\tilde{\sigma}_0^{\varepsilon} = \frac{\tilde{v}_{0,-}^{\varepsilon} + \tilde{v}_{0,+}^{\varepsilon}}{2r}.$$

Alors :

$$(2.6.6) \quad \partial_t u^{\varepsilon} - \tilde{\sigma}_0^{\varepsilon} = O\left(\frac{\varepsilon}{r + \varepsilon^{2-k'}}\right).$$

On a donc précisé le comportement de $\partial_t u^{\varepsilon}$ de façon uniforme.

2.6.4 Comportement de $\partial_r u$ près de la caustique

Pour obtenir des estimations pour r petit, il est plus commode d'avoir en tête la formule :

$$\partial_r u^{\varepsilon}(t, r) \equiv \rho^{\varepsilon}(t, r) = \frac{1}{2} \int_0^1 s \partial_r (v_-^{\varepsilon} - v_+^{\varepsilon})(t, rs) ds.$$

D'après la définition de v_-^{ε} et v_+^{ε} , on a :

$$(2.6.7) \quad \partial_r (v_-^{\varepsilon} - v_+^{\varepsilon})(t, r) = \partial_t (v_-^{\varepsilon} + v_+^{\varepsilon})(t, r) - 2G(r, v_-^{\varepsilon} + v_+^{\varepsilon})(t, r).$$

Le premier terme est un $O(1/\varepsilon)$ uniforme d'après le lemme 2.6.1.1. Pour estimer le second, souvenons-nous de la relation :

$$(v_-^{\varepsilon} + v_+^{\varepsilon})(t, r) = O\left(\frac{r}{r + \varepsilon}\right).$$

Ainsi, le dernier terme de (2.6.7) est un :

$$O\left(r^{1-p} \cdot \left(\frac{r}{r+\varepsilon}\right)^{k+1} + \frac{r}{r+\varepsilon}\right).$$

En particulier, on a uniformément :

$$\partial_r(v_-^\varepsilon - v_+^\varepsilon)(t, r) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \text{ et donc } \partial_r u^\varepsilon = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Comme dans le cas de la dérivée en temps, le premier profil étant singulier le long de la caustique, le terme ρ_0^ε ne suffit pas à décrire ρ^ε de manière uniforme. Par contre, en notant

$$(2.6.8) \quad \tilde{\rho}_0^\varepsilon(t, r) := \frac{1}{2} \int_0^1 s \partial_r(\tilde{v}_{0,-}^\varepsilon - \tilde{v}_{0,+}^\varepsilon)(t, rs) ds,$$

on a encore :

$$(2.6.9) \quad \partial_r u^\varepsilon - \tilde{\rho}_0^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon}{r + \varepsilon^{2-k'}}\right).$$

Remarque : comportement de $\partial_t^2 u^\varepsilon$.

Pour l'exemple 2.2.2, la non-linéarité est de classe C^∞ : la singularité en r^{1-p} apparaît lors de la réduction à un système du premier ordre et dans l'écriture de la fonction G , il y a compétition entre la singularité à l'origine et la non-linéarité. Dans l'étude de v_+ , v_- et de leurs dérivées en temps, la non-linéarité l'emporte. Par contre, si on dérive encore une fois en temps, la singularité l'emporte, ce qui fait que $\partial_t^2 u^\varepsilon$ ne se comporte plus comme dans le cas linéaire : ce terme est singulier en $r = 0$.

Dérivons par exemple deux fois la relation (2.4.1) :

$$(2.6.10) \quad \begin{aligned} \partial_t^2 v_-^\varepsilon &= \partial_r^2 p^\varepsilon(r+t) + \partial_r G(r+t, p^\varepsilon + q^\varepsilon)(r+t) \\ &+ 2\partial_r(p^\varepsilon + q^\varepsilon)\partial_y G(r+t, p^\varepsilon + q^\varepsilon)(r+t) \\ &+ \int_r^{r+t} (\partial_t^2(v_- + v_+)\partial_y G(s, v_\pm) + (\partial_t(v_\pm))^2 \partial_y^2 G(s, v_\pm))(r+t-s, s) ds. \end{aligned}$$

Or le terme $\partial_y^2 G$ est très singulier : même si on suppose que $\partial_t(v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon)$ se comporte comme dans le cas linéaire (ce qui n'est sans doute pas le cas), à savoir

$$(2.6.11) \quad \partial_t(v_-^\varepsilon + v_+^\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{r}{r+\varepsilon}\right),$$

$\partial_t^2 v_-^\varepsilon$ et $\partial_t^2 v_+^\varepsilon$ ne peuvent être des $O(1/\varepsilon^2)$ uniformes comme dans le cas linéaire. En effet, en supposant que la relation (2.6.11) soit vraie et que les dérivées secondes $\partial_t^2 v_-^\varepsilon$ et $\partial_t^2 v_+^\varepsilon$ soient des $O(1/\varepsilon^2)$, alors tous les termes de (2.6.10) sont des $O(1/\varepsilon^2)$, sauf éventuellement le dernier. Mais la singularité de $\partial_y^2 G$ est telle que pour la compenser, on perd "trop" de puissances de ε , et ce dernier terme n'est pas un $O(1/\varepsilon^2)$. Donc $\partial_t^2 v_-^\varepsilon$ ne peut avoir un comportement aussi régulier que dans le cas linéaire.

Chapitre 3

Optique géométrique et traversée de caustique pour des équations de Schrödinger non linéaires. Épisode 1

Épisode 1 : le cas monodimensionnel

3.1 Introduction

Nous considérons une famille d'équations de Schrödinger non linéaires, dont les données initiales oscillent de sorte qu'il y ait formation d'une caustique. Nous montrons que selon la "force" de la non-linéarité, on peut parler, pour le régime de l'optique géométrique, de propagation linéaire ou non linéaire et, de façon assez indépendante, de traversée linéaire ou non linéaire de la caustique. Dans le cas d'une traversée non linéaire de la caustique, nous mettons en évidence une couche limite dans laquelle la caustique a effectivement une influence non linéaire : nous montrons plus précisément que dans ce cas, la traversée de cette couche limite est décrite par des opérateurs de scattering.

Lorsque la caustique a effectivement une influence non linéaire, nous décrivons ici le lien entre l'optique géométrique avant, et après la caustique, grâce à la théorie de la diffusion : ce résultat est à rapprocher de celui de [BG97a] (voir aussi [BG97b]). Les auteurs montrent que pour des concentrations en un point dans l'équation des ondes critique en dimension trois, l'influence de la non-linéarité est négligeable loin du point de concentration, et le recollement entre les deux régimes d'optique géométrique est décrit par l'opérateur de diffusion. Dans notre cas, le phénomène de caustique est dû à des oscillations, mais la description reste très semblable.

La méthode de l'optique géométrique permet de décrire les solutions de problèmes de Cauchy de la forme

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} L(\varepsilon, \partial)u^\varepsilon = F(\varepsilon, t, x, u^\varepsilon), \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon \left(x, \frac{\varphi_0(x)}{\varepsilon} \right), \end{cases}$$

où ε est un paramètre tendant vers zéro. On cherche une solution sous la forme

$$(3.1.2) \quad u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon^p u \left(t, x, \frac{\varphi(t, x)}{\varepsilon} \right).$$

La phase φ est déterminée par l'équation eikonale : lorsque se forme une caustique, la description de l'optique géométrique doit être modifiée. La question se pose alors de savoir comment se comporte la solution u^ε près de la caustique, et éventuellement au-delà. La réponse est bien connue dans le cas d'une équation linéaire : [Lud66], [Dui74] montrent qu'une description en termes d'intégrales lagrangiennes permet de suivre le comportement de u^ε de façon uniforme. Dans le cas non linéaire, seules quelques informations sont disponibles : dans [HK87], un calcul formel sur des lois de conservations suggère la nécessité de caractériser, en termes de comportement linéaire ou non linéaire, d'une part la propagation en dehors de la caustique, d'autre part la traversée de la caustique. Dans [JMR95b], [JMR96a], [JMR96b] et [JMR97],

les auteurs abordent le cas d'équations dissipatives, et il apparaît une notion d'indice critique. Dans le cas sous-critique, la caustique a la même influence que dans le cas linéaire (au premier ordre) : le symbole de l'intégrale lagrangienne est continu, et le comportement de la solution u^ε est décrit par l'indice de Maslov ([Dui74]). Dans le cas sur-critique par contre, on constate un effet non linéaire, puisque les oscillations sont absorbées à la traversée de la caustique ([JMR95b], [JMR96a]).

Nous nous intéressons au cas d'équations conservatives : nous mettons ici aussi en évidence une notion d'indice critique pour l'influence de la caustique. Dans le cas sous-critique, la traversée de la caustique est encore linéaire. Dans le cas critique, la traversée de la caustique est décrite par la théorie de la diffusion. Considérons, en dimension 1 d'espace, l'équation de Schrödinger semi-classique

$$(3.1.3) \quad i\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon\partial_x^2 u^\varepsilon = \lambda|u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\beta > 0$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ est un paramètre tendant vers zéro. L'optique géométrique permet de décrire des solutions d'amplitude ε^p par une relation du type

$$u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon^p u\left(t, x, \frac{\varphi(t, x)}{\varepsilon}\right).$$

Si $p > 0$, d'après la relation (3.1.3), on s'attend à ce que le terme non linéaire soit négligeable en dehors de la caustique, et si $p = 0$, la propagation est non linéaire. Le cas $p < 0$ est exclu pour l'étude des solutions en temps $O(1)$. En considérant non pas u^ε , mais $\varepsilon^{-p}u^\varepsilon$, on se ramène à l'équation

$$(3.1.4) \quad i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\partial_x^2 u^\varepsilon = \lambda\varepsilon^\alpha|u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon,$$

où on suppose donc $\alpha = 1 + \beta p \geq 1$, $\beta > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Nous imposons une géométrie simple pour la caustique. Dans le cas d'un pli, plusieurs phases apparaissent ; pour une donnée initiale du type $e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}}$, ce cas est exclu, car il y a focalisation en un point. En effet, les rayons sont définis par le hamiltonien classique

$$p(t, x, \tau, \xi) = \tau + \frac{1}{2}\xi^2,$$

pour lequel les bicaractéristiques sont les courbes intégrales du système

$$\begin{cases} \dot{t} &= 1, \\ \dot{x} &= \xi, \\ \dot{\tau} &= 0, \\ \dot{\xi} &= 0. \end{cases}$$

Avec comme phase initiale $\varphi_0(x) = -x^2/2$, les rayons sont donc les droites

$$x = \xi s + x_0 = x_0(1 - t),$$

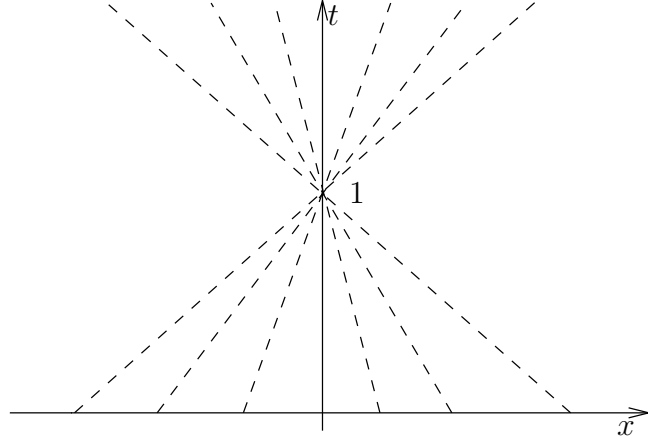


FIG. 3.1 – Focalisation des rayons.

et se rencontrent en $(t, x) = (1, 0)$ (figure 3.1) : il y a focalisation des rayons en ce point.

Nous donc allons étudier les familles d'équations (conservatives)

$$(NLS^\varepsilon) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon &= \lambda \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x), \end{cases}$$

où f est régulière, λ est réel, $\alpha \geq 1$ et $\beta > 0$.

Pour deviner quels peuvent être les indices critiques, étudions l'équation libre :

$$(S^\varepsilon) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon &= 0, \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x). \end{cases}$$

On connaît explicitement la solution de cette équation :

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\varepsilon t}} \int e^{i\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon t} - i\frac{y^2}{2\varepsilon}} f(y) dy.$$

On peut appliquer la formule de la phase stationnaire en dehors de la caustique, avec la phase

$$\phi(y) = \frac{(x-y)^2}{2t} - \frac{y^2}{2}.$$

Si $t \neq 1$, elle possède un unique point critique, $y_c = \frac{x}{1-t}$, qui est non dégénéré. On vérifie ainsi qu'en dehors de $t = 1$, u^ε est de taille 1, et au moment de la focalisation, en $t = 1$,

$$u^\varepsilon(1, x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4} + i\frac{x^2}{2\varepsilon}}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int e^{-i\frac{xy}{\varepsilon}} f(y) dy = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4} + i\frac{x^2}{2\varepsilon}}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \hat{f}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$\widehat{f}$ désignant la transformée de Fourier de f . Dans le cas non linéaire, loin de $t = 1$, l'équation de transport de l'optique géométrique est donnée par les termes en ε^1 . Dans le cas de l'équation libre, le terme $\varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon$ est évidemment de taille ε^α : on s'attend ainsi à avoir une optique linéaire si $\alpha > 1$, non linéaire si $\alpha = 1$.

À la caustique, les termes $\varepsilon \partial_t u^\varepsilon$ et $\varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon$ sont de taille $\varepsilon^{-1/2}$, et $\varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon$ de taille $\varepsilon^{\alpha-\beta/2-1/2}$. Supposons que dans le cas non linéaire, u^ε se comporte de la même façon : dire que l'influence de la caustique est linéaire signifiera qu'au moment de la focalisation, le terme non linéaire est négligeable devant les termes linéaires. Ceci se traduit par la condition

$$\alpha > \frac{\beta}{2}.$$

De même, l'influence de la caustique sera non linéaire si

$$\alpha = \frac{\beta}{2}.$$

De toute évidence, le cas $\alpha < \beta/2$ demande à être traité de manière différente : dans ce cas, l'équation du symbole sur la lagrangienne perd son sens, nous n'aborderons pas ce point ici.

Nous allons voir par la suite que ces indices critiques sont effectivement ceux qu'on retrouve dans le cas de l'équation non linéaire (NLS^ε) :

	$\alpha > \beta/2$	$\alpha = \beta/2$
$\alpha > 1$	Caustique linéaire, propagation linéaire	Caustique non linéaire, propagation linéaire
$\alpha = 1$	Caustique linéaire, propagation non linéaire	Caustique non linéaire, propagation non linéaire

Notons que tous les cas de figure peuvent effectivement se présenter : le caractère linéaire ou non linéaire de la propagation d'une part, et celui de la caustique d'autre part, sont assez indépendants.

Pour décrire précisément le comportement de la solution u^ε , l'écriture sous forme d'intégrale lagrangienne se révèle efficace. Dans [Dui74], on introduit cette notion dans le cadre d'équations linéaires pour avoir une représentation uniforme de la solution en dehors de la caustique, et près de la caustique. Dans le cas d'équations non linéaires, cette approche a été utilisée dans [JMR96a], [JMR96b], [JMR97]. Dans notre cas, elle s'écrit

$$(3.1.5) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i \frac{t-1}{2\varepsilon} \xi^2 + i \frac{x\xi}{\varepsilon}} a_\varepsilon(t, \xi) \frac{d\xi}{2\pi}.$$

Pour un régime d'optique géométrique linéaire, l'équation de transport limite pour le symbole a_ε est simplement $\partial_t a = 0$.

Dans le cas d'une optique géométrique non linéaire, l'équation de transport se complique un peu (ce point est abordé au paragraphe 3.3) :

$$(3.1.6) \quad i\partial_t a(t, \xi) = \frac{\lambda}{|2\pi(1-t)|^{n\beta/2}} |a|^\beta a(t, \xi).$$

Notre approche va consister à changer d'inconnue, de sorte de retrouver la première équation de transport. Introduisons $\tilde{a}_\varepsilon$ définie par

$$a_\varepsilon(t, \xi) = e^{ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi),$$

où g est solution de

$$(3.1.7) \quad \begin{cases} \partial_t g(t, \xi) = \frac{\lambda}{|1 - t|^{n\beta/2}} |f(-\xi)|^\beta, \\ g|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Alors (3.1.6) devient simplement $\partial_t \tilde{a} = 0$. Avec la convention $g \equiv 0$ si $\alpha > 1$, l'écriture suivante est assez générale :

$$(3.1.8) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \frac{d\xi}{2\pi}.$$

On a ainsi étendu l'écriture du cas linéaire au cas non linéaire. Notons dès maintenant que dans le cas d'une optique et d'une caustique non linéaires ($\alpha = 1$ et $\beta = 2$), nous étudierons non la solution de l'équation non linéaire, mais le système :

$$(3.1.9) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \partial_x^2 v^\varepsilon = 0, \\ i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon = \varepsilon \lambda |v^\varepsilon|^2 u^\varepsilon, \\ v^\varepsilon|_{t=0} = u^\varepsilon|_{t=0} = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x). \end{cases}$$

On peut maintenant énoncer le résultat principal.

Théorème 3 *La donnée initiale du symbole $\tilde{a}_\varepsilon$ converge :*

$$(3.1.10) \quad \tilde{a}_\varepsilon(0, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} f(-\xi) =: a_0(\xi) \text{ dans } L_\xi^2.$$

Pour $t < 1$, on a

$$(3.1.11) \quad \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi) \text{ dans } L_\xi^2,$$

et pour $t > 1$,

$$(3.1.12) \quad \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta a_0(\xi) \text{ dans } L_\xi^2,$$

l'opérateur ζ étant défini par

- $\zeta = I$ dans le cas d'une caustique linéaire ($\alpha > \beta/2$);
- $\zeta = \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1}$ dans le cas d'une optique linéaire ($\alpha > 1$) et d'une caustique non linéaire ($\beta = 2\alpha$), $\mathcal{F}$ désignant la transformation de Fourier et S l'opérateur de scattering non linéaire;

- $\zeta = \mathcal{F} \circ \tilde{S} \circ \mathcal{F}^{-1}$ dans le cas du système ($\beta = 2\alpha = 2$), $\tilde{S}$ étant l'opérateur de scattering linéaire modifié.

Remarques :

- ceci permet de constater que la traversée de la caustique est soit semblable à celle du cas linéaire ($\zeta = I$), soit donnée par un opérateur de scattering. La phase g que nous avons introduite permet en fait de “redresser” le symbole usuel a_ε de sorte qu'on ait les relations (3.1.11) et (3.1.12) ;
- dans tous les cas sauf celui du système, nous obtiendrons une description plus précise de l'approximation du symbole $\tilde{a}_\varepsilon$ annoncée dans le théorème. Nous montrerons qu'elle peut être valide dans $H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)$, ce qui permet, en dimension 1, de déduire des informations dans L^∞ .

Notre étude s'organise comme suit. Dans un premier temps, nous examinons les problèmes d'existence de ces équations de Schrödinger non linéaires. Nous présentons ensuite de façon heuristique les outils que nous utiliserons (intégrales oscillantes), ainsi que quelques résultats essentiels pour la suite. Enfin, les quatre dernières parties sont consacrées à l'étude des différents cas que nous venons de distinguer.

3.2 Existence de solutions

Pour nous ramener à des équations de Schrödinger plus familières (pour lesquelles l'opérateur différentiel ne dépend pas de ε), introduisons le changement d'échelle, unitaire sur L_x^2 ,

$$(3.2.1) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Le problème de Cauchy (NLS^ε) devient, en termes de la nouvelle fonction ψ_ε :

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi_\varepsilon + \frac{1}{2} \partial_x^2 \psi_\varepsilon = \lambda \varepsilon^{\alpha-\beta/2} |\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon, \\ \psi_\varepsilon|_{t=-1/\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} e^{-i\varepsilon \frac{x^2}{2}} f(\varepsilon x). \end{cases}$$

On constate que si $\alpha > \beta/2$, alors le second membre apparaît comme une petite perturbation du premier (lorsque ε tend vers zéro). Si par contre $\alpha = \beta/2$, le problème paraît “vraiment” non linéaire. Cette distinction est la même que celle faite en introduction pour mesurer l'influence, linéaire ou non linéaire, de la caustique. Une autre façon de retrouver ces distinctions consiste à introduire un autre changement d'échelle, qui fait disparaître toutes les puissances de ε dans l'équation (NLS^ε) : définissons φ_ε par

$$(3.2.3) \quad u^\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-\alpha/\beta} \varphi_\varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

La fonction φ_ε est solution du problème de Cauchy

$$(3.2.4) \quad \begin{cases} i\partial_t \varphi_\varepsilon + \frac{1}{2} \partial_x^2 \varphi_\varepsilon = \lambda |\varphi_\varepsilon|^\beta \varphi_\varepsilon, \\ \varphi_\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon^{\alpha/\beta} e^{-i\varepsilon \frac{x^2}{2}} f(\varepsilon x). \end{cases}$$

En particulier, on a

$$\|\varphi_\varepsilon|_{t=0}\|_{L^2} = \varepsilon^{\alpha/\beta-1/2} \|f\|_{L^2}$$

et

$$\|\partial_x \varphi_\varepsilon|_{t=0}\|_{L^2} \leq \varepsilon^{\alpha/\beta-1/2} \|xf\|_{L^2} + \varepsilon^{\alpha/\beta+1/2} \|f'\|_{L^2}.$$

Si $\alpha > \beta/2$, alors les données initiales pour φ_ε tendent vers zéro, et si $\alpha = \beta/2$, ces données sont de taille 1.

3.2.1 Cas d'une caustique linéaire

Dans ce cas, le signe de λ n'intervient pas de manière fondamentale quant à l'existence globale en temps de la solution u^ε . Rappelons quelques notations propre à l'équation de Schrödinger sans échelle ($\varepsilon = 1$).

Notons $U_0(t)$ le groupe unitaire associé à l'équation de Schrödinger :

$$(3.2.5) \quad \boxed{U_0(t) = e^{i\frac{t}{2}\partial_x^2}}.$$

La formulation intégrale de l'équation

$$(3.2.6) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi + \frac{1}{2} \partial_x^2 \psi = \lambda |\psi|^p \psi, \\ \psi|_{t=0} = \varphi, \end{cases}$$

qui en général est équivalente ([Kat87]), s'écrit :

$$(3.2.7) \quad \psi(t) = U_0(t)\varphi - i\lambda \int_0^t U_0(t-s) |\psi|^p \psi(s) ds.$$

Définition 3.2.1.1 *Un couple (q, r) est admissible si $2 \leq r \leq \infty$ et*

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{r} + \frac{2}{q}.$$

Pour I intervalle et (q_0, r_0) admissible, définissons les espaces

$$(3.2.8) \quad \begin{aligned} X_{loc}^1(I) = & \{ \psi ; \psi \in C(I, H^1), \text{ et} \\ & \psi \in L_{loc}^q(I, W^{1,r}) \text{ pour tout couple } (q, r) \text{ admissible} \}, \end{aligned}$$

et

$$(3.2.9) \quad X_{r_0, loc}^1(I) = C(I, H^1) \cap L_{loc}^{q_0}(I, W^{1, r_0}).$$

Proposition 3.2.1.1 ([Gin95], propositions 5.5 et 5.6)

On suppose $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $p > 0$. Si $\|\varphi\|_{H^1}$ est suffisamment petit, alors le problème de Cauchy (3.2.6) a une solution unique dans $X_{p,loc}^1(\mathbb{R})$. La solution est en fait dans $L^\infty(H^1) \cap X_{loc}^1(\mathbb{R})$, les normes L^2 et d'énergie sont conservées :

$$(3.2.10) \quad \frac{d}{dt} \|\psi(t)\|_{L^2}^2 = 0,$$

$$(3.2.11) \quad \frac{d}{dt} \left(\|\partial_x \psi(t)\|_{L^2}^2 + \frac{4\lambda}{p+2} \|\psi(t)\|_{L^{p+2}}^{p+2} \right) = 0.$$

Remarque : en fait, l'hypothèse de petitesse n'est indispensable que dans le cas où $\lambda < 0$ et $p \geq 4$. Dans les autres cas, on a un résultat d'existence globale dans H^1 sans hypothèse de taille sur la donnée initiale.

Nous pouvons maintenant appliquer ce résultat au problème de Cauchy (NLS^ε) :

Proposition 3.2.1.2 Supposons $f \in H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)$ et $\alpha > \beta/2$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, le problème de Cauchy (NLS^ε) possède une unique solution globale $u^\varepsilon \in H^1$.

Démonstration : montrons que le problème (3.2.4) possède une unique solution globale pour ε suffisamment petit. On a

$$\|\varphi_\varepsilon|_{t=0}\|_{L^2} = \varepsilon^{\alpha/\beta-1/2} \|f\|_{L^2}$$

et

$$\|\partial_x \varphi_\varepsilon|_{t=0}\|_{L^2} \leq \varepsilon^{\alpha/\beta-1/2} \|xf\|_{L^2} + \varepsilon^{\alpha/\beta+1/2} \|f'\|_{L^2}.$$

Ainsi, puisque $\alpha/\beta > 1/2$,

$$\|\varphi_\varepsilon|_{t=0}\|_{H^1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

donc d'après la proposition 3.2.1.1, pour ε suffisamment petit, le problème de Cauchy (3.2.4) possède une unique solution globale H^1 . Il en est alors de même pour le problème (NLS^ε). $\square$

3.2.2 Cas d'une caustique non linéaire

Nous supposons maintenant $\alpha = \beta/2$, si bien que le problème (NLS^ε) s'écrit

$$(3.2.12) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon &= \lambda \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^{2\alpha} u^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x). \end{cases}$$

Contrairement au cas précédent, on ne peut plus se permettre de négliger le signe de λ . Le cas $\lambda > 0$ est dit "défocalisant", et le cas $\lambda < 0$, focalisant" (voir par exemple [CW92], [Caz93], [Gin95], [Gin97]). Pour une puissance $p < 4$ dans le problème

(3.2.6), ce signe n'intervient pas encore pour l'étude dans L^2 : notons, pour I un intervalle,

$$(3.2.13) \quad X(I) = \{ \psi ; \psi \in (C \cap L^\infty)(I, L^2), \text{ et } \psi \in L^q(I, L^r) \text{ pour tout couple } (q, r) \text{ admissible} \},$$

et, pour (q_0, r_0) admissible,

$$(3.2.14) \quad X_{r_0}(I) = (C \cap L^\infty)(I, L^2) \cap L^{q_0}(I, L^{r_0}),$$

$$(3.2.15) \quad X_{r_0, loc}(I) = (C \cap L^\infty_{loc})(I, L^2) \cap L^{q_0}_{loc}(I, L^{r_0}).$$

On peut alors énoncer un résultat d'existence globale dans L^2 :

Proposition 3.2.2.1 ([Gin95], propositions 4.2 et 5.2)

On suppose $p < 4$ et $\varphi \in L^2$. Alors le problème de Cauchy (3.2.6) a une solution unique dans $X_{p, loc}(\mathbb{R})$. La solution est en fait dans $L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$ et satisfait $\|\psi(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, le problème est localement bien posé dans L^2 : pour $-\infty < T_1 \leq 0 \leq T_2 < +\infty$, si

$$\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi \text{ dans } L^2,$$

alors

$$\sup_{t \in [T_1, T_2]} \|\psi_\varepsilon(t) - \psi(t)\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Par contre, on n'a pas de résultat d'existence globale dans le cas focalisant ($\lambda < 0$), pour une puissance $p \geq 4$. Dans (NLS^ε) , prenons $\alpha = 2$, $\beta = 4$ et $\lambda = -1$:

$$(3.2.16) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon = -\varepsilon^2 |u^\varepsilon|^4 u^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x). \end{cases}$$

Nous allons voir que pour ce problème de Cauchy, il peut y avoir explosion à l'approche de la caustique. Cet exemple s'inspire de [Wei86] et [CW89]. Considérons des données initiales particulières :

Lemme 3.2.2.1 *Il existe une solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, non triviale, de l'équation*

$$-\frac{1}{2}f'' + f = f^5.$$

Dans ce cas très précis, on peut calculer explicitement la solution (cette dernière étant unique à translation et signe près, d'après [BL83]) :

$$(3.2.17) \quad f(x) = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{\operatorname{ch}(2x\sqrt{2})}}.$$

On vérifie que pour cette donnée f , la solution de (3.2.16) est

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{i \frac{2\varepsilon^2 t - x^2}{2\varepsilon(1-t)}} f\left(\frac{x}{1-t}\right).$$

En particulier, pour tout couple (q, r) admissible,

$$\|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L_x^r} = (1-t)^{-2/q} \|f\|_{L^r},$$

cette relation donnant une description de l'explosion de la solution au niveau de la caustique : il n'y a pas existence de la solution jusqu'à $t = 1$, et ce phénomène n'est pas dû aux oscillations (prendre $\varepsilon = 1$).

Introduisons l'espace

$$(3.2.18) \quad \Sigma := H^1 \cap \mathcal{F}(H^1) = \{\psi \in H^1 ; x\psi \in L^2\},$$

muni de la norme

$$\|\psi\|_\Sigma = \|\psi\|_{L^2} + \|\partial_x \psi\|_{L^2} + \|x\psi\|_{L^2}.$$

L'introduction de cet espace est motivée par le générateur infinitésimal de Galilée

$$(3.2.19) \quad \boxed{J(t) := x + it\partial_x},$$

qui commute avec l'opérateur $i\partial_t + \frac{1}{2}\partial_x^2$, et vérifie en outre

$$(3.2.20) \quad J(t) = U_0(t)xU_0(-t) = U_0(t-t')J(t')U_0(t'-t).$$

On a également la relation

$$(3.2.21) \quad J(t) = itM(t)\partial_x M(-t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, où $M(t) = e^{i\frac{x^2}{2t}}$.

Un des avantages de l'opérateur de Galilée est qu'il permet d'obtenir des estimations de décroissance en temps :

Lemme 3.2.2.2 (*inégalité de Gagliardo-Nirenberg*)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Il existe une constante C telle que pour tout u dont les normes H_x^1 et $\|J(s)u\|_{L_x^2}$ sont bornés pour $s \in I$, et tout $s \in I$,

$$(3.2.22) \quad \|u(s)\|_{L_x^\infty} \leq C \|u(s)\|_{L^2}^{1/2} \|\partial_x u(s)\|_{L^2}^{1/2},$$

$$(3.2.23) \quad \|u(s)\|_{L_x^\infty} \leq C |s|^{-1/2} \|u(s)\|_{L^2}^{1/2} \|J(s)u\|_{L^2}^{1/2}.$$

La première inégalité est l'inégalité usuelle. La seconde s'en déduit par conjugaison par M .

Notons, pour I intervalle de $\mathbb{R}$,

$$(3.2.24) \quad Y_{loc}^1(I) := \{\psi \in C(I, \Sigma) ; \text{ pour tout compact } K \text{ de } I \text{ et tout couple } (q, r) \text{ admissible, } \psi, \partial_x \psi, J(t)\psi \in L^q(K, L_x^r)\}.$$

On définit de même

$$(3.2.25) \quad Y^1(I) := \{\psi \in C(I, \Sigma) ; \text{ pour tout couple } (q, r) \text{ admissible, } \psi, \partial_x \psi, J(t)\psi \in L^q(I, L_x^r)\},$$

et, pour tout couple (q_0, r_0) admissible,

$$(3.2.26) \quad Y_{r_0}^1(I) := \{\psi \in C(I, \Sigma) ; \psi, \partial_x \psi, J(t)\psi \in L^\infty(I, L^2) \cap L^{q_0}(I, L_x^{r_0})\}.$$

Le résultat principal est alors :

Proposition 3.2.2.2 (*[Gin97], proposition 3.5*)

Supposons $p \geq 4$ et $\lambda > 0$, ou $0 < p < 4$. Le problème de Cauchy (3.2.6) avec donnée initiale $\varphi \in \Sigma$ est globalement bien posé dans $Y_{loc}^1(\mathbb{R})$. Les normes L^2 et d'énergie des solutions sont conservées :

$$(3.2.27) \quad \frac{d}{dt} \|\psi(t)\|_{L^2}^2 = 0,$$

$$(3.2.28) \quad \frac{d}{dt} \left(\|\partial_x \psi(t)\|_{L^2}^2 + \frac{4\lambda}{p+2} \|\psi(t)\|_{L^{p+2}}^{p+2} \right) = 0.$$

L'évolution de la norme L^2 de $J(t)\psi$ est décrite par la loi pseudo-conforme :

$$(3.2.29) \quad \frac{d}{dt} \left(\|J(t)\psi\|_{L^2}^2 + \frac{4\lambda}{p+2} t^2 \|\psi(t)\|_{L^{p+2}}^{p+2} \right) = \frac{2\lambda}{p+2} (4-p)t \|\psi(t)\|_{L^{p+2}}^{p+2}.$$

Cette proposition ne donne malheureusement pas d'estimations globales, en particulier sur la norme L^2 de $J(t)\psi$: on n'a donc pas, a priori, la décroissance maximale en temps. Dans certains cas cependant, cette décroissance optimale peut être obtenue :

Proposition 3.2.2.3 (*[Gin95], proposition 11.2*)

On suppose $\lambda > 0$ et $p > p_0(1) = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$. Soit $\varphi \in \Sigma$ et $\psi \in Y_{loc}^1(\mathbb{R})$ la solution de (3.2.6). Alors $\psi \in Y^1(\mathbb{R})$.

Comme au paragraphe précédent, nous pouvons déduire de ces résultats, l'existence de solutions pour le problème (NLS^ε) :

Proposition 3.2.2.4 *Supposons $f \in \Sigma$, $\alpha > 0$, et $\lambda > 0$ si $\alpha \geq 2$. Alors le problème de Cauchy (3.2.12) possède une unique solution globale $u^\varepsilon \in Y_{loc}^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration : reprenons le changement d'échelle (3.2.1).

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

La fonction ψ_ε est solution du problème de Cauchy

$$(3.2.30) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi_\varepsilon + \frac{1}{2} \partial_x^2 \psi_\varepsilon = |\psi_\varepsilon|^{2\alpha} \psi_\varepsilon, \\ \psi_\varepsilon|_{t=-1/\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} e^{-i\varepsilon \frac{x^2}{2}} f(\varepsilon x). \end{cases}$$

On a alors :

$$(3.2.31) \quad \left\| \psi_\varepsilon \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2},$$

$$(3.2.32) \quad \left\| \partial_x \psi_\varepsilon \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2} \leq \varepsilon \|f'\|_{L^2} + \|xf\|_{L^2},$$

$$(3.2.33) \quad \left\| J \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \psi_\varepsilon \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2} = \|f'\|_{L^2}.$$

D'après la proposition 3.2.2.2, le problème (3.2.30) possède une unique solution globale $\psi_\varepsilon \in Y_{loc}^1(\mathbb{R})$, donc il en est de même pour u^ε . $\square$

3.3 Optique géométrique et intégrale lagrangienne

Notations : nous définissons la transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}v(\xi) = \widehat{v}(\xi) = \int e^{-ix\xi} v(x) dx.$$

En notant $\bar{d}\xi := \frac{d\xi}{2\pi}$, la formule d'inversion de Fourier s'écrit :

$$\mathcal{F}^{-1}v(x) = \int e^{ix\xi} v(\xi) \bar{d}\xi.$$

3.3.1 La méthode BKW

Appliquons cette méthode à l'équation que nous considérons :

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon = \lambda \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x), \end{cases}$$

où λ est un réel et α, β sont des réels strictement positifs. On cherche à approcher u^ε par une fonction de la forme $e^{i\varphi(t,x)/\varepsilon} u_0(t, x)$. La démarche consiste à remplacer dans (3.3.1) u^ε par cette expression et annuler les plus petites puissances de ε :

– le terme en ε^0 :

$$(3.3.2) \quad \partial_t \varphi + \frac{1}{2}(\partial_x \varphi)^2 = 0.$$

C'est l'équation eikonale, à laquelle nous associons la donnée de Cauchy :

$$(3.3.3) \quad \varphi|_{t=0} = -\frac{x^2}{2}.$$

– le terme en ε^1 :

$$(3.3.4) \quad \partial_t u_0 + \partial_x \varphi \partial_x u_0 + \frac{1}{2} u_0 \partial_x^2 \varphi = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ -i\lambda |u_0|^\beta u_0 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

C'est l'équation de transport du premier profil, qui a pour donnée de Cauchy :

$$(3.3.5) \quad u_0|_{t=0} = f(x).$$

Les termes restant sont donc : $\varepsilon^2 e^{i\varphi/\varepsilon} \partial_x^2 u_0$, et, si $\alpha > 1$, $\lambda \varepsilon^\alpha |u_0|^\beta u_0$.

On dira que l'optique géométrique est linéaire si l'équation de transport (3.3.4) est linéaire (cas $\alpha > 1$), et non linéaire dans le cas contraire ($\alpha = 1$).

On dira de même que l'approximation de l'optique géométrique est valable si le reste (différence entre solution exacte et solution approchée) est négligeable devant la solution exacte (ou approchée, c'est équivalent).

L'équation eikonale peut être intégrée explicitement, en dérivant en x et en utilisant la méthode des caractéristiques. Pour $t < 1$, on trouve :

$$(3.3.6) \quad \varphi(t, x) = \frac{x^2}{2(t-1)}.$$

De la même façon, dans le cas linéaire, on peut intégrer l'équation de transport pour $t < 1$:

$$(3.3.7) \quad u_0(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} f\left(\frac{x}{1-t}\right).$$

Notons que dans ce cas, $u_0 e^{i\varphi/\varepsilon}$ est précisément l'asymptotique donnée par le théorème de la phase stationnaire appliqué à la solution de l'équation libre ($\lambda = 0$).

3.3.2 Intégrale lagrangienne : définition

Dans le prolongement du cas linéaire ([Lud66], [Dui74]) et comme dans [JMR96a], [JMR96b], [JMR97], pour le cas non linéaire, on souhaite décrire la solution de (3.3.1) à l'aide d'intégrales lagrangiennes :

$$(3.3.8) \quad \boxed{u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a_\varepsilon(t, \xi) d\xi.}$$

Cette écriture est unique, comme permet de le constater la relation

$$(3.3.9) \quad a_\varepsilon(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{i \frac{t-1}{2\varepsilon} \xi^2} \widehat{u}^\varepsilon \left(t, \frac{\xi}{\varepsilon} \right).$$

Il est facile de vérifier l'efficacité de cette écriture dans le cas de l'équation libre. Considérons le problème de Cauchy

$$(3.3.10) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u_0^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 u_0^\varepsilon = 0, \\ u_0^\varepsilon|_{t=0} = h^\varepsilon. \end{cases}$$

Si la donnée initiale est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier permet de trouver la solution (cf [Rau91] par exemple) :

$$(3.3.11) \quad u_0^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i \frac{t}{2\varepsilon} \xi^2 + i \frac{x\xi}{\varepsilon}} \widehat{h}^\varepsilon(\xi) d\xi.$$

On trouve ainsi une expression très semblable à (3.3.8). La phase n'est apparemment pas la même : la raison en est que la phase apparaissant dans (3.3.8) prend en compte l'oscillation de la donnée initiale $e^{-i \frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x)$, de sorte que le symbole a_ε joue effectivement le rôle d'amplitude sur la lagrangienne. Nous allons voir que la donnée initiale $a_\varepsilon(0, \xi)$ converge en effet vers une fonction non oscillante. Dans le cas d'une optique géométrique linéaire, nous vérifierons également que le symbole a_ε n'a aucune oscillation.

3.3.3 Propagation du symbole

Commençons par montrer que la donnée initiale du symbole a une limite lorsque ε tend vers zéro :

$$(3.3.12) \quad a_\varepsilon(0, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-i \frac{1}{2\varepsilon} \xi^2} \widehat{u}^\varepsilon \left(0, \frac{\xi}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i \frac{(x+\xi)^2}{2\varepsilon}} f(x) dx.$$

D'après le théorème de la phase stationnaire (cf [Hör94]), pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$(3.3.13) \quad a_\varepsilon(0, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} e^{-i \frac{\pi}{4}} f(-\xi) =: a_0(\xi).$$

Dans la suite, nous aurons besoin d'information en termes de ξ de cette convergence, à savoir :

Lemme 3.3.3.1 *Supposons $f \in \Sigma$. Alors $a_\varepsilon(0, \cdot) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\cdot)$ dans Σ .*

Démonstration : d'après la relation (3.3.12), on a

$$a_\varepsilon(0, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i \frac{(x+\xi)^2}{2\varepsilon}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i \frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x - \xi) dx.$$

Par ailleurs,

$$\mathcal{F}\left(e^{i\frac{y^2}{2\varepsilon}}\right)(y) = \sqrt{2\pi\varepsilon}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\varepsilon\frac{y^2}{2}},$$

$$\mathcal{F}(f(x-\xi))(y) = e^{-iy\xi}\hat{f}(y),$$

donc d'après la formule de Parseval,

$$(3.3.14) \quad a_\varepsilon(0, \xi) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iy\xi} e^{-i\varepsilon\frac{y^2}{2}} \hat{f}(y) dy.$$

Ainsi, on obtient l'écriture

$$(3.3.15) \quad \begin{aligned} a_\varepsilon(0, \xi) - a_0(\xi) &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iy\xi} \left(e^{-i\varepsilon\frac{y^2}{2}} - 1 \right) \hat{f}(y) dy \\ &= e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\pi} \left(e^{i\varepsilon\frac{\Delta}{2}} - 1 \right) f(-\xi). \end{aligned}$$

D'après la formule de Plancherel, on a alors la convergence L^2 :

$$(3.3.16) \quad \|a_\varepsilon(0, \cdot) - a_0(\cdot)\|_{L^2_\xi} = \left\| \left(e^{-i\varepsilon\frac{\Delta}{2}} - 1 \right) \hat{f}(y) \right\|_{L^2_y}.$$

Or $|e^{-i\varepsilon\frac{y^2}{2}} - 1| = 2|\sin \varepsilon\frac{y^2}{4}|$, donc d'après le théorème de convergence dominée, $\|a_\varepsilon(0, \cdot) - a_0(\cdot)\|_{L^2} \rightarrow 0$ dès que $f \in L^2$. Les convergences dans les espaces de Sobolev homogène et L^2 à poids se traitent de façon analogue. On a ainsi convergence de $a_\varepsilon(0, \cdot)$ vers a_0 dans Σ dès que $f \in \Sigma$. $\square$

Remarque : cas linéaire. Dans le cas de l'équation de Schrödinger libre (second membre nul), nous avons vu que le symbole a_ε ne dépend pas du temps. On a alors évidemment

$$(3.3.17) \quad a_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi) \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}; \Sigma).$$

On dira que l'optique géométrique linéaire est valable dans Σ (uniformément en temps) lorsque la relation (3.3.17) est vérifiée. On peut vérifier qu'en dehors de la caustique, cette définition est équivalente à celle donnée au paragraphe 3.3.1. En effet, l'extérieur de la caustique correspond à la région où l'unique point critique de la phase de l'intégrale lagrangienne $x\xi - \frac{t-1}{2}\xi^2$, n'est pas dégénéré : en appliquant la formule de la phase stationnaire à l'expression

$$u_{lin}^\varepsilon(t, x) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a_0(\xi) d\xi,$$

on retrouve le premier terme du développement BKW. Ainsi, le symbole lagrangien donne une description plus efficace du comportement de la solution, dans la mesure où cette description reste valable au moment de la traversée de la caustique (cf [Dui74]). En particulier, en appliquant la formule de la phase stationnaire pour

$t > 1$, on trouve une approximation qui diffère de celle pour $t < 1$ d'un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$:

$$u_{lin}^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t-1}} f\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)}}.$$

La propagation du symbole est bien sûr donnée par l'équation (3.3.1), qui s'écrit aussi, en termes de a_ε :

$$(3.3.18) \quad i\partial_t a_\varepsilon(t, \xi) = \lambda \varepsilon^{-3/2} e^{i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2} \varepsilon^\alpha \widehat{|u^\varepsilon|^\beta} u^\varepsilon\left(t, \frac{\xi}{\varepsilon}\right).$$

Cette relation nous permettra de vérifier que dans le cas d'une caustique linéaire, l'influence de la focalisation est partout négligeable, et que dans le cas d'une caustique linéaire, cette influence ne s'exerce que sur un petit voisinage (une couche limite) de la caustique.

Dans le cas d'une caustique non linéaire ($\beta = 2\alpha$), il sera commode de travailler dans les variables éclatées $T = \frac{t-1}{\varepsilon}$ et $X = \frac{x}{\varepsilon}$. Ces variables sont naturelles dans notre contexte, car elles transforment l'opérateur de Schrödinger semi-classique que nous considérons en l'opérateur usuel ($\varepsilon = 1$). De plus, nous verrons que dans le cas d'une caustique non linéaire, la variable T est bien celle qui permet de mesurer l'influence de la focalisation, grâce aux opérateurs d'ondes. Nous considérons donc le changement d'échelle (3.2.1),

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi_\varepsilon\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

on lui associe l'équation sans échelle, dont la donnée initiale dépend de ε :

$$(3.3.19) \quad i\partial_t \psi_\varepsilon + \frac{1}{2} \partial_x^2 \psi_\varepsilon = \lambda |\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon.$$

La relation (3.3.9) devient, en terme de ψ :

$$(3.3.20) \quad a_\varepsilon(t, \xi) = e^{i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2} \widehat{\psi_\varepsilon}\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \xi\right) = \mathcal{F}\left(e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\Delta} \psi_\varepsilon\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right)(\xi).$$

On a donc

$$(3.3.21) \quad a_\varepsilon(t, \xi) = \mathcal{F}\left(U_0\left(\frac{1-t}{\varepsilon}\right) \psi_\varepsilon\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right)(\xi).$$

On retrouve donc une expression proche de $U_0(-T)\psi(T)$, qui est l'expression que l'on rencontre dans la théorie de la diffusion : la suite du travail consiste à vérifier que dans le cas d'une caustique non linéaire, la traversée est effectivement décrite à l'aide d'opérateurs d'ondes.

3.3.4 Solution approchée : cas de la propagation linéaire

Nous avons vu que dans le cas précis de l'équation libre, la solution peut être décrite de manière uniforme à l'aide de l'intégrale oscillante

$$u_{lin}^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a_0(\xi) d\xi.$$

Dans le cas d'une propagation linéaire, on s'attend donc à ce que cette intégrale donne une bonne description de la solution exacte, au moins avant la caustique. Notons donc

$$(3.3.22) \quad u_{app}^\varepsilon(t, x) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a_0(\xi) d\xi.$$

La fonction u_{app}^ε est solution de l'équation libre, et est aussi régulière que $\hat{f}$. En particulier, la régularité du symbole a_0 nous permet de déduire, pour u_{app}^ε , des informations dans L^∞ :

Lemme 3.3.4.1 *Soit $s > 1/2$ et $f \in H^s(\mathbb{R})$. Il existe une constante $C_s > 0$ ne dépendant pas de f , ni de ε , telle que*

$$(3.3.23) \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} f(\xi) d\xi \right\|_{L_x^\infty} \leq \frac{C_s}{|1-t|^{1/2}} \|f\|_{H^s}.$$

Démonstration : on a

$$(3.3.24) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} f(\xi) d\xi &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2} f(\xi) \right) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} U_0 \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) \mathcal{F}^{-1} f \left(\frac{x}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On a par ailleurs la relation classique (qui revient à appliquer la formule de Parseval à l'intégrale que nous considérons)

$$(3.3.25) \quad \|U_0(t)\psi\|_{L_x^\infty} \leq \frac{C}{|t|^{1/2}} \|\psi\|_{L^1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} f(\xi) d\xi \right\|_{L_x^\infty} &\leq \frac{C}{|1-t|^{1/2}} \|\mathcal{F}^{-1} f\|_{L^1} \\ &\leq \frac{C_s}{|1-t|^{1/2}} \|f\|_{H^s}, \end{aligned}$$

la dernière majoration résultant du fait qu'en dimension n , $\mathcal{F}(H^s) \subset L^1$ pour $s > n/2$. $\square$

Près de la caustique, cette majoration n'est plus intéressante, et on n'obtient pas mieux que

$$(3.3.26) \quad \|u_{app}^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|f\|_{L^1} \leq \frac{C_s}{\sqrt{\varepsilon}} \|f\|_{\mathcal{F}(H^s)}.$$

3.3.5 Cas de l'optique géométrique non linéaire

Dans le cas d'une propagation linéaire ($\alpha > 1$), on a, d'après la relation (3.3.18),

$$\|\partial_t a_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L_\xi^2} \leq C\varepsilon^{\alpha-1} \left\| |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon(t) \right\|_{L_x^2} \leq C\varepsilon^{\alpha-1} \|u^\varepsilon(t)\|_{L_x^\infty}^\beta \|u^\varepsilon\|_{L_x^2}.$$

Si on montre que comme dans le cas linéaire, u^ε est de taille 1 en dehors de la caustique, on pourra en déduire que la dérivée en temps du symbole converge vers 0 et que l'optique linéaire est valide. Par contre, si $\alpha = 1$, $\partial_t a_\varepsilon$ n'a aucune raison de tendre vers 0. Un calcul formel va nous montrer qu'il faut effectivement s'attendre à des modifications.

Dans l'écriture (3.3.8), oublions la dépendance en ε (!) du symbole a_ε . La formule de la phase stationnaire donne alors

$$(3.3.27) \quad u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi|1-t|}} e^{i\frac{\pi}{4}\text{sgn}(1-t) + i\frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)}} a\left(t, \frac{x}{t-1}\right).$$

On a donc, toujours formellement :

$$|u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{|2\pi(1-t)|^{\frac{\beta+1}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}\text{sgn}(1-t) + i\frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)}} |a|^\beta a\left(t, \frac{x}{t-1}\right).$$

Si maintenant nous calculons la transformée de Fourier au point ξ/ε du second membre, on trouve

$$\frac{1}{|2\pi(1-t)|^{\frac{\beta+1}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}\text{sgn}(1-t)} \int e^{-i\frac{x\xi}{\varepsilon} + i\frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)}} |a|^\beta a\left(t, \frac{x}{t-1}\right) dx.$$

En appliquant à nouveau la formule de la phase stationnaire, il vient

$$\widehat{|u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon}\left(t, \frac{\xi}{\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{|2\pi(1-t)|^{\frac{\beta}{2}}} \sqrt{\varepsilon} e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2} |a|^\beta a(t, \xi).$$

Ce passage à la limite formel dans l'équation (3.3.18) donne donc comme équation de transport limite :

$$(3.3.28) \quad i\partial_t a(t, \xi) = \frac{\lambda}{|2\pi(1-t)|^{\frac{\beta}{2}}} |a|^\beta a(t, \xi),$$

avec pour donnée de Cauchy $a|_{t=0} = a_0(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} f(-\xi)$. En multipliant l'équation (3.3.28) par $\bar{a}$, on constate que le module de a est constant. En écrivant $a = a_0 e^{ig(t, \xi)}$, l'équation sur g s'écrit :

$$(3.3.29) \quad \begin{cases} \partial_t g(t, \xi) = -\frac{\lambda}{|1-t|^{\frac{\beta}{2}}} |f(-\xi)|^\beta, \\ g|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Pour obtenir comme équation de transport limite la relation $\partial_t \tilde{a} = 0$, il semble alors naturel de définir un symbole modifié $\tilde{a}_\varepsilon$ par

$$(3.3.30) \quad \boxed{u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) d\xi.}$$

Comme annoncé dans l'introduction, cette formule généralise la formule (3.3.8) au cas de l'optique non linéaire. En effet, elle permet de conserver une description assez simple du symbole $\tilde{a}_\varepsilon$, à savoir la même que pour le symbole a_ε dans le cas d'une propagation linéaire.

En particulier, cette approche rejoint celle de [Gre98], qui simplifiait les calculs de la méthode BKW en faisant dépendre la phase de ε . Dans notre cas, nous avons remplacé l'écriture usuelle du type

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{i\frac{\phi(t, x, \xi)}{\varepsilon}} a_\varepsilon(t, \xi) d\xi$$

par une écriture du type

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{i\frac{\phi_\varepsilon(t, x, \xi)}{\varepsilon}} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) d\xi.$$

Ainsi, l'ancienne phase vaut

$$\phi(t, x, \xi) = -\frac{t-1}{2}\xi^2 + x\xi,$$

et la phase modifiée

$$\phi_\varepsilon(t, x, \xi) = -\frac{t-1}{2}\xi^2 + x\xi + \varepsilon g(t, \xi).$$

3.3.6 Solution approchée : cas de la propagation non linéaire

D'après les deux paragraphes précédents, il paraît naturel, dans le cas d'une propagation non linéaire, de prendre pour solution approchée

$$(3.3.31) \quad u_{app}^\varepsilon(t, x) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} a_0(\xi) d\xi.$$

Notons qu'avec la convention $g = 0$ dans le cas d'une propagation linéaire (convention déjà prise en introduction), cette écriture est parfaitement cohérente avec la relation (3.3.22), puisqu'elle la prolonge. Contrairement au cas de la propagation linéaire, si $\alpha = 1$, alors la fonction u_{app}^ε n'est plus solution de l'équation libre, mais vérifie :

$$\begin{aligned} i\varepsilon \partial_t u_{app}^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \partial_x^2 u_{app}^\varepsilon &= -\sqrt{\varepsilon} \int \partial_t g(t, \xi) e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} a_0(\xi) d\xi \\ &= \lambda\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \frac{|f(-\xi)|^\beta}{|1-t|^{\beta/2}} a_0(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

En effet, on a construit u_{app}^ε dans l'attente d'obtenir une solution approchée de

$$(3.3.32) \quad i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon = \lambda \varepsilon |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon.$$

On doit donc avoir

$$(3.3.33) \quad |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i \frac{t-1}{2\varepsilon} \xi^2 + i \frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \frac{|f(-\xi)|^\beta}{|1-t|^{\beta/2}} a_0(\xi) d\xi,$$

au moins en dehors de la caustique. Cette relation découle de la méthode de la phase stationnaire : pour $t \neq 1$, la phase

$$\phi(t, x, \xi) = -\frac{t-1}{2} \xi^2 + x\xi$$

possède un unique point critique en ξ ,

$$\xi_c = \frac{x}{t-1},$$

qui est non dégénéré. On a alors

$$u_{app}^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{i \frac{\pi}{4} (\text{sgn}(1-t)-1)}}{|1-t|^{1/2}} e^{i \frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)} + ig(t, \frac{x}{t-1})} f\left(\frac{x}{1-t}\right),$$

donc

$$|u_{app}^\varepsilon(t, x)|^\beta u_{app}^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{i \frac{\pi}{4} (\text{sgn}(1-t)-1)}}{|1-t|^{(\beta+1)/2}} e^{i \frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)} + ig(t, \frac{x}{t-1})} |f|^\beta f\left(\frac{x}{1-t}\right).$$

En appliquant la formule de la phase stationnaire au terme de source pour u_{app}^ε , on obtient le même équivalent, ce qui justifie (3.3.33), et permet de penser que u_{app}^ε , avant la caustique, est effectivement une solution approchée de (3.3.32). Dans la suite, nous aurons besoin d'informations plus précises quant à la relation (3.3.33) : notons $\Delta^\varepsilon(t, x)$ la différence des deux termes,

$$(3.3.34) \quad \Delta^\varepsilon(t, x) := |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i \frac{t-1}{2\varepsilon} \xi^2 + i \frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \frac{|f(-\xi)|^\beta}{|1-t|^{\beta/2}} a_0(\xi) d\xi.$$

Lemme 3.3.6.1 *Supposons $0 < \beta < 2$ et $f \in \Sigma$. Soit $C_0 > 0$. Alors*

$$(3.3.35) \quad \|\Delta^\varepsilon\|_{L^1(0, 1-C_0\varepsilon; L_x^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

et

$$(3.3.36) \quad \|\Delta^\varepsilon\|_{L^1(1+C_0\varepsilon, 2; L_x^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Démonstration : nous allons montrer la première relation, la seconde étant très semblable. Comme suggéré par le calcul précédent, nous allons comparer chacun des deux termes à

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}(\operatorname{sgn}(1-t)-1)}}{|1-t|^{(\beta+1)/2}} e^{i\frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)} + ig(t, \frac{x}{t-1})} |f|^\beta f \left(\frac{x}{1-t} \right).$$

Notons donc

$$(3.3.37) \quad u_1^\varepsilon(t, x) := \frac{e^{i\frac{\pi}{4}(\operatorname{sgn}(1-t)-1)}}{|1-t|^{1/2}} e^{i\frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)} + ig(t, \frac{x}{t-1})} f \left(\frac{x}{1-t} \right).$$

Remarque : ce terme n'est autre que le premier terme donné par le développement BKW. Là encore, on vérifie que l'écriture sous forme d'intégrale lagrangienne a du sens uniformément (c'est-à-dire, y compris à la traversée de la caustique), et lorsque l'on peut appliquer la méthode de la phase stationnaire, cette dernière permet de retrouver les résultats de la méthode BKW.

Notons $I_\varepsilon = (0, 1 - C_0\varepsilon)$ et montrons que

$$\left\| |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon(t, \cdot) - |u_1^\varepsilon|^\beta u_1^\varepsilon(t, \cdot) \right\|_{L^1(I_\varepsilon; L_x^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

L'autre limite est en fait un peu plus facile à montrer. Notons

$$\tilde{\Delta}^\varepsilon(t, x) := |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon(t, x) - |u_1^\varepsilon|^\beta u_1^\varepsilon(t, x).$$

On a alors évidemment

$$\left\| \tilde{\Delta}^\varepsilon(t, \cdot) \right\|_{L_x^2} \leq C \left(\|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta + \|u_1^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta \right) \|u_{app}^\varepsilon(t) - u_1^\varepsilon(t)\|_{L^2}.$$

Puisque $f \in L^\infty$, on a

$$\|u_1^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta \leq \frac{C}{|1-t|^{\beta/2}}.$$

D'après le lemme 3.3.4.1, on a aussi

$$\|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta \leq \frac{C}{|1-t|^{\beta/2}} \left\| e^{ig(t, \cdot)} a_0(\cdot) \right\|_{H^1}.$$

Puisqu'on a supposé $\beta < 2$, l'équation (3.3.29) définissant g s'intègre pour tout t en :

$$(3.3.38) \quad g(t, \xi) = |f(-\xi)|^\beta \frac{\lambda}{1-\beta/2} \left(\operatorname{sgn}(1-t) |1-t|^{1-\beta/2} - 1 \right).$$

Ceci permet de vérifier que pour $f \in \Sigma$ (ce qui implique $|f|^\beta f' \in L^2$), on a bien $e^{ig(t, \cdot)} a_0(\cdot) \in H_\xi^1$. On a ainsi

$$(3.3.39) \quad \left\| \tilde{\Delta}^\varepsilon(t, \cdot) \right\|_{L_x^2} \leq \frac{C}{|1-t|^{\beta/2}} \|u_{app}^\varepsilon(t) - u_1^\varepsilon(t)\|_{L^2},$$

ce qui ramène notre étude à celle de la dernière norme dans L^2 .

Notons donc

$$F(t, y) = f(y)e^{ig(t, -y)}$$

et

$$\Delta_1^\varepsilon(t, x) := u_{app}^\varepsilon(t, x) - u_1^\varepsilon(t, x).$$

Lemme 3.3.6.2 *Soit $\sigma(t, \xi)$ une fonction localement bornée en temps à valeurs dans L_x^2 . Si*

$$H^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} \sigma(t, \xi) d\xi,$$

alors il existe une fonction $h \in C(\mathbb{R})$, avec $h(0) = 0$, telle que

$$\left\| H^\varepsilon(t, x) - e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon(1-t)}} \sqrt{\frac{i}{2\pi(1-t)}} \sigma\left(t, \frac{x}{1-t}\right) \right\|_{L_x^2} = h\left(\frac{\varepsilon}{1-t}\right).$$

Démonstration du lemme 3.3.6.2 : d'après la définition de H , on a

$$\begin{aligned} H^\varepsilon(t, x) &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon(1-t)}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{i\frac{1-t}{2\varepsilon}(\xi + \frac{x}{1-t})^2} \sigma(t, \xi) d\xi \\ &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon(1-t)}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{i\frac{1-t}{2\varepsilon}\xi^2} \sigma\left(t, \xi - \frac{x}{1-t}\right) d\xi, \end{aligned}$$

donc d'après la formule de Parseval,

$$\begin{aligned} H^\varepsilon(t, x) &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon(1-t)}} \sqrt{\frac{i}{2\pi(1-t)}} \int e^{i\frac{\varepsilon}{2(1-t)}y^2} e^{i\frac{xy}{1-t}} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow y}^{-1} \sigma(t, y) dy \\ &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon(1-t)}} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \sigma\left(\frac{x}{1-t}\right) \\ &\quad + e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon(1-t)}} \sqrt{\frac{i}{2\pi(1-t)}} \int \left(e^{i\frac{\varepsilon}{2(1-t)}y^2} - 1 \right) e^{i\frac{xy}{1-t}} \mathcal{F}^{-1} \sigma(t, y) dy, \end{aligned}$$

le dernier terme s'écrivant également

$$e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon(1-t)}} \sqrt{\frac{i}{2\pi(1-t)}} \mathcal{F} \left(\left(e^{i\frac{\varepsilon}{2(1-t)}y^2} - 1 \right) \mathcal{F}^{-1} \sigma \right) \left(\frac{x}{1-t} \right).$$

D'après le théorème de Plancherel, on a finalement

$$\left\| H^\varepsilon(t, x) - e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon(1-t)}} \sqrt{\frac{i}{2\pi(1-t)}} \sigma\left(t, \frac{x}{1-t}\right) \right\|_{L_x^2} = h\left(\frac{\varepsilon}{1-t}\right),$$

avec

$$h(z) = \left\| \left(e^{i\frac{z}{2}y^2} - 1 \right) \mathcal{F}^{-1} \sigma \right\|_{L_y^2}.$$

Les propriétés $h \in C(\mathbb{R})$ et $h(0) = 0$ résultent alors du théorème de convergence dominée. $\square$

Prenons $\sigma = F$: d'après le lemme précédent, on a

$$\|\Delta_1^\varepsilon(t, \cdot)\| L^2 = h\left(\frac{\varepsilon}{1-t}\right),$$

avec $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$. D'après la relation (3.3.39), on a alors

$$\|\tilde{\Delta}^\varepsilon(t, \cdot)\| L^2 \leq C \frac{1}{(1-t)^{\beta/2}} h\left(\frac{\varepsilon}{1-t}\right).$$

Le lemme 3.3.6.1 résulte alors de l'intégrabilité locale de $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{\beta/2}}$ et de la relation $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{1-C_0\varepsilon} \frac{1}{(1-t)^{\beta/2}} h\left(\frac{\varepsilon}{1-t}\right) dt &= \int_{C_0\varepsilon}^1 \frac{1}{s^{\beta/2}} h\left(\frac{\varepsilon}{s}\right) ds \\ &= \int_{C_0\varepsilon}^{C_0\sqrt{\varepsilon}} h\left(\frac{\varepsilon}{s}\right) \frac{ds}{s^{\beta/2}} + \int_{C_0\sqrt{\varepsilon}}^1 h\left(\frac{\varepsilon}{s}\right) \frac{ds}{s^{\beta/2}}. \end{aligned}$$

La première intégrale se majore par

$$\sup_{z \in [0, 1/C_0]} h(z) \int_{C_0\varepsilon}^{C_0\sqrt{\varepsilon}} \frac{ds}{s^{\beta/2}} \leq C \varepsilon^{(1-\beta/2)/2} \sup_{z \in [0, C_0]} h(z),$$

et la seconde par

$$C \sup_{z \in [0, \sqrt{\varepsilon}/C_0]} h(z).$$

Ces deux termes tendant vers zéro, ceci achève la preuve du lemme 3.3.6.1. $\square$

3.4 Propagation linéaire et caustique linéaire

D'après la présentation heuristique de l'influence de la caustique faite en introduction, on s'attend à avoir les distinctions suivantes :

	$\alpha > \beta/2$	$\alpha = \beta/2$
$\alpha > 1$	Caustique linéaire, propagation linéaire	Caustique non linéaire, propagation linéaire
$\alpha = 1$	Caustique linéaire, propagation non linéaire	Caustique non linéaire, propagation non linéaire

Par propagation linéaire (resp. non linéaire), on entend que l'optique géométrique linéaire (resp. non linéaire) est valable en dehors de la caustique. En qualifiant la caustique de linéaire, on veut dire qu'au premier ordre, l'influence de la caustique

est nulle : l'optique reste valable y compris au moment de la traversée de la caustique. Par contre, en qualifiant la caustique de non linéaire, on met l'accent sur une influence de la caustique, qui ne s'exerce qu'au voisinage de celle-ci.

Commençons par montrer que dans le cas où $\alpha > \max(1, \beta/2)$, l'optique géométrique linéaire est partout valable.

La démarche dans ce cas rejoint le vocabulaire employé ci-dessus : on montre que l'optique géométrique est valable en dehors d'une couche limite autour de la caustique (propagation linéaire), puis que la caustique n'a aucune influence (au premier ordre) dans cette couche limite (caustique linéaire). Pour cela, nous comparons la solution exacte u^ε (qui existe globalement dans H^1 d'après le paragraphe 3.2.1) et la solution approchée définie par (3.3.22),

$$u_{app}^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a_0(\xi) d\xi,$$

où a_0 est défini au paragraphe 3.3 par $a_0(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} f(-\xi)$. D'après les résultats du paragraphe 3.3,

$$a_\varepsilon(0, \cdot) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0 \text{ dans } \Sigma,$$

donc en particulier $\|u^\varepsilon(0, \cdot) - u_{app}^\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^2} = o(1)$.

3.4.1 Propagation avant la caustique

Notons $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon$. D'après les définitions des symboles lagrangiens, on a

$$(3.4.1) \quad w^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} (a_\varepsilon(t, \xi) - a_0(\xi)) d\xi.$$

Nous allons montrer qu'avant la caustique,

$$\|a_\varepsilon(t, \xi) - a_0(\xi)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

En retranchant à l'équation vérifiée par la solution exacte, celle vérifiée par u_{app}^ε , on a :

$$(3.4.2) \quad i\varepsilon \partial_t w^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \partial_x^2 w^\varepsilon = \lambda \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon.$$

En multipliant par $\overline{w^\varepsilon}$, en intégrant en espace et en prenant la partie imaginaire du résultat, il vient :

$$(3.4.3) \quad \varepsilon \partial_t \|w^\varepsilon\|_{L_x^2}^2 \leq C \varepsilon^\alpha \| |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon \|_{L_x^2} \|w^\varepsilon\|_{L_x^2},$$

d'où on déduit

$$(3.4.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon \partial_t \|w^\varepsilon\|_{L_x^2} &\leq C \varepsilon^\alpha \| |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon \|_{L_x^2} \\ &\leq C \varepsilon^\alpha \|u^\varepsilon\|_{L_x^\infty}^\beta \|u^\varepsilon\|_{L_x^2} \\ &\leq C \varepsilon^\alpha \|u^\varepsilon\|_{L_x^\infty}^\beta, \end{aligned}$$

par conservation de la norme L^2 . On a donc :

$$(3.4.5) \quad \partial_t \|w^\varepsilon\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{\alpha-1} \left(\|u_{app}^\varepsilon\|_{L_x^\infty}^\beta + \|w^\varepsilon\|_{L_x^\infty}^\beta \right).$$

On veut montrer que l'optique géométrique linéaire est valable dans L^2 en dehors de toute couche limite de taille ε .

Proposition 3.4.1.1 *On suppose $f \in \Sigma$, $\alpha > 1$ et $\alpha \geq \beta/2$. Si $\alpha > \beta/2$, alors pour toute constante C_0 , l'optique géométrique linéaire est valable avant la couche limite de taille $C_0\varepsilon$: si on note $t_\varepsilon = 1 - C_0\varepsilon$,*

$$(3.4.6) \quad \sup_{t \in [0, t_\varepsilon]} \|a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Si $\alpha = \beta/2$, alors l'optique géométrique est valable en dehors d'une couche limite plus large :

$$(3.4.7) \quad \text{si } t < 1 \text{ est tel que } \frac{\varepsilon}{1-t} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \text{ alors } \sup_{s \in [0, t]} \|a_\varepsilon(s, \cdot) - a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Remarque : dans l'énoncé précédent, nous avons supposé $\alpha \geq \beta/2$ et non $\alpha > \beta/2$, car la démonstration qui suit nous servira également dans le cas d'une propagation linéaire ($\alpha > 1$) et d'une caustique non linéaire ($\alpha = \beta/2$).

Démonstration : pour estimer la norme L^∞ de w^ε dans les inégalités d'énergie, nous pouvons estimer sa norme dans H_ε^1 . Cet espace, muni de la norme

$$\|w\|_{H_\varepsilon^1} = \|w\|_{L^2} + \|\varepsilon \partial_x w\|_{L^2},$$

est introduit dans [Guè93]. On peut également consulter [Rau95]. Son usage est motivé par le fait qu'en présence d'oscillations de taille ε , les dérivées ne sont plus bornées indépendamment de ε , mais les ε -dérivées le sont.

Nous utiliserons, plutôt que l'opérateur $\varepsilon \partial_x$, l'opérateur

$$(3.4.8) \quad J^\varepsilon(t) := \frac{x}{\varepsilon} + i(t-1)\partial_x,$$

qui est l'analogue de l'opérateur de Galilée pour notre cadre d'étude. Il permet d'obtenir des estimations L^∞ plus fines que celles obtenues grâce à $\varepsilon \partial_x$. Ces opérateurs sont réellement ceux dont nous avons besoin pour montrer la proposition. En effet, si

$$v^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} b_\varepsilon(t, \xi) d\xi,$$

alors l'opérateur $J^\varepsilon(t)$ agit sur v^ε comme la dérivation en ξ sur le symbole b_ε :

$$(3.4.9) \quad J^\varepsilon(t)v^\varepsilon(t, x) = \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} \partial_\xi b_\varepsilon(t, \xi) d\xi.$$

D'après la relation (3.4.1), on a alors

$$\begin{aligned} \|a_\varepsilon(t) - a_0\|_\Sigma &\equiv \|a_\varepsilon(t) - a_0\|_{L^2} + \|\partial_\xi(a_\varepsilon(t) - a_0)\|_{L^2} + \|\xi(a_\varepsilon(t) - a_0)\|_{L^2} \\ &= \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} + \|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t)\|_{L^2} + \|\varepsilon\partial_x w^\varepsilon(t)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

L'opérateur J^ε vérifie des propriétés semblables à celles de J :

Lemme 3.4.1.1 *L'opérateur J^ε vérifie :*

– la relation de commutation

$$(3.4.10) \quad \left[J^\varepsilon(t), i\varepsilon\partial_t + \frac{1}{2}\varepsilon^2\partial_x^2 \right] = 0 ;$$

– si on note $M^\varepsilon(t) = e^{i\frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)}}$, alors $J^\varepsilon(t)$ s'écrit

$$(3.4.11) \quad J^\varepsilon(t) = i(t-1)M^\varepsilon(t)\partial_x M^\varepsilon(2-t) ;$$

– l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg modifiée :

$$(3.4.12) \quad \|w(t)\|_{L^\infty} \leq C \frac{1}{\sqrt{|1-t|}} \|w(t)\|_{L^2}^{1/2} \|J^\varepsilon(t)w(t)\|_{L^2}^{1/2} ;$$

– pour toute fonction $F \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifiant la condition d'invariance de jauge

$$\exists G \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad F(z) = zG'(|z|^2),$$

on a

$$(3.4.13) \quad J^\varepsilon(t)F(w) = \partial_z F(w)J^\varepsilon(t)w - \partial_{\bar{z}} F(w)\overline{J^\varepsilon(t)w}.$$

La vérification de ce lemme est immédiate. Nous souhaitons obtenir une estimation de la norme L^2 de $J^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t)$, afin de contrôler la norme uniforme du reste w^ε . D'après la relation de commutation (3.4.10), on a

$$(3.4.14) \quad i\varepsilon\partial_t J^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\partial_x^2 J^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t) = \lambda\varepsilon^\alpha J^\varepsilon(t)F(u^\varepsilon),$$

où $F(z) = z|z|^\beta$. En multipliant cette équation par $\overline{J^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t)}$, puis en prenant la partie imaginaire du résultat intégré en espace, il vient :

$$(3.4.15) \quad \partial_t \|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{\alpha-1} \|J^\varepsilon(t)F(u^\varepsilon)(t)\|_{L^2}.$$

D'après le lemme 3.4.1.1 (F vérifie la condition d'invariance de jauge), ceci entraîne

$$\begin{aligned} (3.4.16) \quad \partial_t \|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon\|_{L^2} &\leq C\varepsilon^{\alpha-1} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta \|J^\varepsilon(t)u^\varepsilon(t)\|_{L^2} \\ &\leq C\varepsilon^{\alpha-1} \left(\|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta + \|w^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta \right) \|J^\varepsilon(t)u^\varepsilon\|_{L^2}. \end{aligned}$$

La première étape de notre démarche consiste à estimer u_{app}^ε dans L_x^∞ , ce qui se fait par le lemme 3.3.4.1 : puisque $a_0 \in H^1$, il existe une constante C_1 telle que

$$(3.4.17) \quad \|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C_1}{|1-t|^{1/2}}.$$

La seconde étape consiste à travailler en supposant que le reste w^ε vérifie la même inégalité, puis à vérifier que cette condition est réalisée en dehors de la couche limite définie dans la proposition 3.4.1.1. Tant que

$$(3.4.18) \quad \sup_{0 \leq s \leq t} \|w^\varepsilon(s)\|_{L^\infty} \leq \frac{C_1}{|1-t|^{1/2}},$$

on peut simplifier les inégalités (3.4.5) et (3.4.16) pour avoir :

$$(3.4.19) \quad \partial_t \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{|1-t|^{\beta/2}},$$

$$(3.4.20) \quad \partial_t \|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon\|_{L^2} \leq C \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{|1-t|^{\beta/2}} \left(\|J^\varepsilon(t)u_{app}^\varepsilon\|_{L^2} + \|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon\|_{L^2} \right).$$

En intégrant la relation (3.4.19), on trouve alors :

$$(3.4.21) \quad \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \|w^\varepsilon(0)\|_{L^2} + C\varepsilon^{\alpha-1} \int_0^t \frac{1}{|1-s|^{\beta/2}} ds.$$

Or nous avons vérifié que $\|w^\varepsilon(0)\|_{L^2} = o(1)$. On a par ailleurs, pour $t < 1$,

$$\int_0^t \frac{1}{|1-s|^{\beta/2}} ds \leq \begin{cases} \frac{1}{1-\beta/2} & \text{si } \beta < 2, \\ -\ln(1-t) & \text{si } \beta = 2, \\ \frac{1}{\beta/2-1}(1-t)^{1-\beta/2} & \text{si } \beta > 2. \end{cases}$$

Dans le cas $\alpha > \beta/2$ et $1-t \geq C_0\varepsilon$, on a alors

$$(3.4.22) \quad \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq o(1).$$

Dans le cas $\alpha = \beta/2$, si $\frac{\varepsilon}{1-t} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, on obtient encore cette relation. Estimons à présent la norme L^2 de $J^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t)$. On vérifie que puisque f (donc a_0) appartient à H^1 , la norme L^2 de $J^\varepsilon(t)u_{app}^\varepsilon(t)$ est constante et indépendante de ε , d'après la relation (3.4.9).

Par ailleurs, la relation

$$J^\varepsilon(0)w^\varepsilon(0) = \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{i\frac{\xi^2}{2\varepsilon} + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} \partial_\xi(a_\varepsilon(0, \xi) - a_0(\xi)) d\xi$$

permet d'affirmer, grâce au lemme 3.3.3.1, que

$$\|J^\varepsilon(0)w^\varepsilon(0)\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

En appliquant le lemme de Gronwall à la relation (3.4.20) et en raisonnant comme pour $\|w^\varepsilon\|_{L^2}$, on trouve que sous les hypothèses de la proposition 3.4.1.1, et tant que la condition (3.4.18) est vérifiée,

$$(3.4.23) \quad \|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t)\|_{L^2} = o(1).$$

D'après la relation (3.4.12), on en déduit, sous ces mêmes hypothèses,

$$(3.4.24) \quad \|w^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}} o(1).$$

Ainsi, la relation (3.4.18) est toujours vérifiée sous les hypothèses de la proposition 3.4.1.1 (pourvu que ε soit suffisamment petit), donc il en est de même pour les relations (3.4.22) et (3.4.23). D'après la relation (3.4.1), on a ainsi montré que dans les conditions de la proposition,

$$\|a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_{H^1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

La dernière estimation dont nous avons besoin pour prouver la proposition est celle de la norme de $a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)$ dans $\mathcal{F}(H^1)$. D'après les définitions, on a

$$(3.4.25) \quad \|\xi(a_\varepsilon(t, \xi) - a_0(\xi))\|_{L_\xi^2} = \|\varepsilon \partial_x w^\varepsilon(t)\|_{L_x^2}.$$

Quitte à procéder par régularisation, dérivons la relation (3.4.2) par rapport à x et intégrons le résultat multiplié par $\partial_x \overline{w^\varepsilon}$: la partie imaginaire du résultat donne

$$(3.4.26) \quad \begin{aligned} \partial_t \|\varepsilon \partial_x w^\varepsilon(t)\|_{L_x^2} &\leq C\varepsilon^{\alpha-1} \| |u^\varepsilon(t)|^\beta \varepsilon \partial_x u^\varepsilon(t) \|_{L_x^2} \\ &\leq C\varepsilon^{\alpha-1} \|u^\varepsilon(t)\|_{L_x^\infty}^\beta (\|\varepsilon \partial_x u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L_x^2} + \|\varepsilon \partial_x w^\varepsilon(t)\|_{L_x^2}) \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que $\|\varepsilon \partial_x u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L_x^2} = cste = O(1)$, et on conclut par exemple grâce au lemme de Gronwall qu'avant la caustique,

$$(3.4.27) \quad \|\varepsilon \partial_x w^\varepsilon(t)\|_{L_x^2} = o(1).$$

Ceci achève la preuve de la proposition 3.4.1.1. □

3.4.2 Traversée de la caustique

Il s'agit maintenant de "recoller" la solution à la traversée de la caustique. Nous allons plus précisément montrer que l'optique linéaire reste valable dans une couche limite autour de la caustique.

Reprenons le changement d'échelle

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Lemme 3.4.2.1 *Supposons $\alpha > \beta/2$. Alors la suite ψ_ε est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}; H^1)$.*

Démonstration : ψ_ε est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} i\partial_t \psi_\varepsilon + \frac{1}{2} \partial_x^2 \psi_\varepsilon = \lambda \varepsilon^{\alpha-\beta/2} |\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon \\ \psi_\varepsilon|_{t=-1/\varepsilon} = \varphi_\varepsilon(x) \equiv \sqrt{\varepsilon} e^{-i\varepsilon \frac{x^2}{2}} f(\varepsilon x). \end{cases}$$

Par conservation de l'énergie,

$$\frac{d}{dt} \left(\|\partial_x \psi_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \frac{4\lambda}{\beta+2} \varepsilon^{\alpha-\beta/2} \|\psi_\varepsilon(t)\|_{L^{\beta+2}}^{\beta+2} \right) = 0.$$

A l'instant $t = -1/\varepsilon$, on a

$$\|\partial_x \psi_\varepsilon(-1/\varepsilon)\|_{L^2} = O(1) ; \|\psi_\varepsilon(t)\|_{L^{\beta+2}}^{\beta+2} = O(\varepsilon^{\beta/2}),$$

donc l'énergie $E_\varepsilon(t) := \|\partial_x \psi_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \frac{4\lambda}{\beta+2} \varepsilon^{\alpha-\beta/2} \|\psi_\varepsilon(t)\|_{L^{\beta+2}}^{\beta+2}$ reste bornée. Si $\lambda > 0$, on en déduit alors que ψ_ε est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_t; H^1)$, donc par injection de Sobolev, dans $L^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)$.

Si par contre $\lambda < 0$, on montre que ψ_ε reste encore bornée dans H^1 . D'après les inégalités de Gagliardo-Nirenberg,

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon(t)\|_{L^{\beta+2}}^{\beta+2} &\leq \|\psi_\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta \cdot \|\psi_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 \\ (3.4.28) \quad &\leq C \|\partial_x \psi_\varepsilon(t)\|_{L^2}^{\beta/2} \cdot \|\psi_\varepsilon(t)\|_{L^2}^{2+\beta/2}. \end{aligned}$$

On a alors, par conservation de la norme L^2 ,

$$\begin{aligned} \|\partial_x \psi_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 &= E_\varepsilon(-1/\varepsilon) + \frac{4|\lambda| \varepsilon^{\alpha-\beta/2}}{\beta+2} \|\psi_\varepsilon(t)\|_{L^{\beta+2}}^{\beta+2} \\ (3.4.29) \quad &\leq C_0 + C_1 \varepsilon^{\alpha-\beta/2} \|\partial_x \psi_\varepsilon(t)\|_{L^2}^{\beta/2}. \end{aligned}$$

Si $\beta \leq 4$, on en déduit immédiatement que $\|\partial_x \psi_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ reste bornée, et on conclut alors comme dans le cas $\lambda > 0$.

Si $\beta > 4$, il faut travailler un peu plus : de l'inégalité précédente, on déduit qu'il existe des constantes a et b telles que

$$(3.4.30) \quad \|\partial_x \psi_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq a + b\varepsilon^{\alpha-\beta/2} \|\partial_x \psi_\varepsilon(t)\|_{L^2}^{\beta/4},$$

et cette inégalité est de la forme

$$(3.4.31) \quad y(t) \leq a + b\varepsilon^{\alpha-\beta/2} y(t)^{\beta/4}.$$

Si les deux courbes $z = y$ et $z = a + b\varepsilon^{\alpha-\beta/2} y^{\beta/4}$ se coupent et si $y(0)$ est dans la composante connexe de l'origine de la région (3.4.31), $y(t)$ (qui est continue en t) reste dans cette composante connexe pour tout t . La condition d'intersection est que

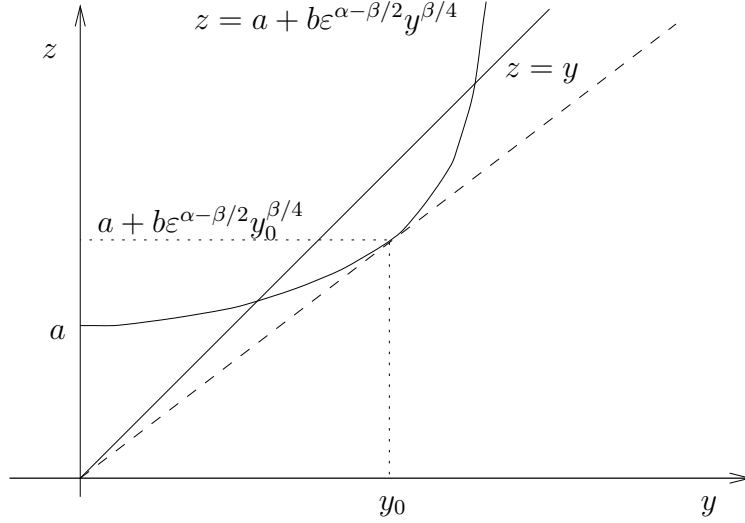


FIG. 3.2 – Estimations de y satisfaisant $y \leq a + b\varepsilon^{\alpha-\beta/2} y^{\beta/4}$.

$y_0 > a + b\varepsilon^{\alpha-\beta/2} y_0^{\beta/4}$, où y_0 est l'abscisse du point de contact de la tangente issue de l'origine à la courbe $z = a + b\varepsilon^{\alpha-\beta/2} y^{\beta/4}$, donnée par $by_0^{\beta/4} = \frac{4a}{\beta-4}$ (figure 3.2). Cette condition devient

$$a < \frac{\beta-4}{4} \left(\frac{\beta}{4} \right)^{-\frac{\beta}{\beta-4}} \left(b\varepsilon^{\alpha-\beta/2} \right)^{-\frac{4}{\beta-4}},$$

qui pour ε suffisamment proche de 0 est toujours vérifiée. On a alors plus précisément

$$y(t) \leq a \frac{\beta}{\beta-4},$$

ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

La formule de Taylor appliquée au symbole a_ε donne, pour $1 - \varepsilon \leq t \leq 1 + \varepsilon$:

$$a_\varepsilon(t, \xi) = a_\varepsilon(1 - \varepsilon, \xi) + \int_{1-\varepsilon}^t \partial_t a_\varepsilon(s, \xi) ds.$$

En particulier,

$$\|a_\varepsilon(t) - a_0\|_{L^2} \leq \|a_\varepsilon(1 - \varepsilon) - a_0\|_{L^2} + \int_{1-\varepsilon}^t \|\partial_t a_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds.$$

D'après la proposition 3.4.1.1, le premier terme du membre de droite tend vers 0, et d'après la relation (3.3.18), le second se majore par

$$\begin{aligned} & C\varepsilon^{\alpha-\beta/2} \int_{-1}^{\frac{t-1}{\varepsilon}} \left\| |\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon(s) \right\|_{L^2} ds \\ & \leq C\varepsilon^{\alpha-\beta/2} \int_{-1}^{\frac{t-1}{\varepsilon}} \|\psi_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}^\beta \|\psi_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\ & \leq C\varepsilon^{\alpha-\beta/2} \left(\frac{t-1}{\varepsilon} + 1 \right) \\ & \leq C\varepsilon^{\alpha-\beta/2}. \end{aligned}$$

De même, on a une estimation pour le moment de $\partial_t a_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \|\xi \partial_t a_\varepsilon(t, \xi)\|_{L^2} &= C\varepsilon^{\alpha-\beta/2-1} \left\| \partial_x \left(|\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon \right) \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq C\varepsilon^{\alpha-\beta/2-1} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty}^\beta \left\| \partial_x \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \|\xi \partial_t a_\varepsilon(s, \xi)\|_{L^2} ds &\leq C\varepsilon^{\alpha-\beta/2-1} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \left\| \partial_x \psi_\varepsilon \left(\frac{s-1}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2} ds \\ &\leq C\varepsilon^{\alpha-\beta/2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc énoncer un résultat intermédiaire :

Lemme 3.4.2.2 *Supposons $\alpha > \beta/2$. Alors dans la région $1 - \varepsilon \leq t \leq 1 + \varepsilon$, la caustique a , dans l'ensemble, une influence linéaire dans $\mathcal{F}(H^1)$ (côté symbole) :*

$$(3.4.32) \quad \left\| \partial_t a_\varepsilon \right\|_{L^1(1-\varepsilon, 1+\varepsilon; \mathcal{F}(H^1))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Remarques :

- d'après ce lemme, la caustique a éventuellement un effet non linéaire, mais dans une région trop petite pour que cet effet puisse être perçu. Cette propriété rejoint l'idée de [HK87], où les auteurs qualifient de non linéaire une caustique dont les effets non linéaires *cumulés* sont finalement négligeables.

- on peut en fait étendre le résultat de ce lemme à une région plus grande. En effet, si $\alpha > \beta/2$, il existe $\gamma > 0$ tel que $\alpha > \beta/2 + \gamma$: en répétant les calculs précédents, on peut montrer que le lemme 3.4.2.2 reste vrai pour $|t-1| \leq \varepsilon^{1-\gamma}$, qui est une région “grande” devant $|t-1| \leq \varepsilon$.

Nous avons donc montré que l’optique linéaire est toujours valide dans $\mathcal{F}(H^1)$ à la traversée de la zone $|t-1| \leq \varepsilon$. Nous allons vérifier que cette validité subsiste dans un sens plus fort, à savoir que les symboles restent proches dans Σ . Pour ceci, nous pouvons répéter le calcul ci-dessus en remplaçant les normes $\mathcal{F}(H^1)$ par des normes dans Σ : d’après la proposition 3.4.1.1, on est ramené à estimer $\|\partial_t a_\varepsilon(s)\|_\Sigma$.

Toujours d’après les relations (3.3.18) et (3.3.20), on a une majoration de la forme

$$(3.4.33) \quad \int_{1-\varepsilon}^t \|\partial_t a_\varepsilon(s)\|_\Sigma ds \leq C\varepsilon^{\alpha-\beta/2} \int_{-1}^{\frac{t-1}{\varepsilon}} \|\psi_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}^\beta \|U_0(-s)\psi_\varepsilon(s)\|_\Sigma ds.$$

Il nous reste à montrer, d’après la relation (3.2.20), que $J(t)\psi_\varepsilon(t)$ reste borné dans L^2 . Mais d’après la loi pseudo-conforme (3.2.29),

$$\frac{d}{dt} \left(\|J(t)\psi_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{4\lambda\varepsilon^{\alpha-\beta/2}}{\beta+2} t^2 \|\psi_\varepsilon(t)\|_{L^{\beta+2}}^{\beta+2} \right) = \frac{2\lambda\varepsilon^{\alpha-\beta/2}}{\beta+2} (4-\beta)t \|\psi_\varepsilon(t)\|_{L^{\beta+2}}^{\beta+2}.$$

D’après la relation $\|J^\varepsilon(t)u^\varepsilon(t)\|_{L^2} = \|J(\frac{t-1}{\varepsilon})\psi_\varepsilon(\frac{t-1}{\varepsilon})\|_{L^2}$ et la proposition 3.4.1.1,

$$\|J(-1)\psi_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{4\lambda\varepsilon^{\alpha-\beta/2}}{\beta+2} \|\psi_\varepsilon(-1)\|_{L^{\beta+2}}^{\beta+2} = O(1).$$

En effet, on a montré

$$\|J^\varepsilon(1-\varepsilon)w^\varepsilon(1-\varepsilon)\|_{L^2} = \|J^\varepsilon(1-\varepsilon)(u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon)(1-\varepsilon)\|_{L^2} = o(1),$$

et on a évidemment $\|J^\varepsilon(1-\varepsilon)u_{app}^\varepsilon(1-\varepsilon)\|_{L^2} = O(1)$.

Par ailleurs, $\|\psi_\varepsilon(-1)\|_{L^{\beta+2}}$ est borné puisque ψ_ε est bornée dans H^1 . Ainsi, pour $t \in [-1, 1]$, $J(t)\psi_\varepsilon$ reste borné dans L^2 . On a donc montré la

Proposition 3.4.2.1 *Pour $\alpha > \max(1, \beta/2)$, la traversée de la caustique est linéaire dans Σ :*

$$\sup_{1-\varepsilon \leq t \leq 1+\varepsilon} \|a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

D’après la proposition 3.4.1.1, ceci suffit pour affirmer que l’optique linéaire reste valide entre les instants $t = 0$ et $t = 1 + \varepsilon$.

3.4.3 Propagation après la caustique

On peut reprendre les calculs faits à la première étape : la solution approchée u_{app}^ε est la même, le seul changement étant la donnée de Cauchy pour le reste. Mais d'après la seconde étape, cette donnée de Cauchy est petite, donc on peut répéter les calculs de la première étape. Le seul point à vérifier est donc la petitesse de w^ε à l'instant, par exemple, $t = 1 + \varepsilon$.

Or d'après l'étape précédente, $\|a_\varepsilon(1+\varepsilon) - a_0\|_\Sigma$ tend vers 0. On peut donc répéter les calculs de la première étape pour montrer que l'optique géométrique linéaire est valide après la caustique. On a donc montré la proposition suivante :

Proposition 3.4.3.1 *On suppose $\alpha > \max(1, \beta/2)$. Alors, en termes de symbole, l'optique géométrique linéaire reste valide, localement uniformément en temps, dans Σ :*

$$(3.4.34) \quad a_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi) \text{ dans } L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \Sigma).$$

Remarques :

- d'après le lemme 3.3.4.1, ceci nous permet de déduire qu'en termes de solution exacte u^ε , l'optique linéaire est valide dans L^∞ en dehors de la caustique.
- à la caustique, u_{app}^ε constitue également une bonne approximation de la solution exacte dans L^∞ . En effet,

$$u_{app}^\varepsilon(1, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} a_0\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right),$$

donc u_{app}^ε est de taille $\varepsilon^{-1/2}$, et par ailleurs,

$$(3.4.35) \quad \begin{aligned} |u^\varepsilon(1, x) - u_{app}^\varepsilon(1, x)| &= |w^\varepsilon(t, x)| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|a_\varepsilon(1, \cdot) - a_0(\cdot)\|_{L^1} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|a_\varepsilon(1, \cdot) - a_0(\cdot)\|_{\mathcal{F}(H^1)} \\ &\leq \frac{o(1)}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Ainsi, u_{app}^ε est une approximation uniforme de la solution exacte u^ε dans L^∞ .

3.5 Propagation linéaire et caustique non linéaire

Nous traitons ici le cas de l'équation (3.2.12) :

$$\begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon &= \lambda \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^{2\alpha} u^\varepsilon, \\ u|_{t=0} &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x), \end{cases}$$

avec $f \in \Sigma$. L'exposant α est supposé strictement supérieur à 1, et la constante λ est positive si $\alpha \geq 2$ (cf contre-exemple du paragraphe 3.2.2). D'après le paragraphe 3.2.2, il y a alors existence globale de la solution u^ε dans $Y_{loc}^1(\mathbb{R})$. Le résultat dans ce cas est que l'optique géométrique linéaire est valable en dehors d'une couche limite, la transition étant décrite par l'opérateur de scattering non linéaire.

3.5.1 Propagation avant la caustique

Reprenons l'écriture usuelle de la solution sous forme d'intégrale lagrangienne

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a_\varepsilon(t, \xi) d\xi.$$

D'après la proposition 3.4.1.1, l'optique géométrique linéaire est valide dans Σ avant la traversée de la caustique : si $t < 1$ est tel que $\frac{\varepsilon}{1-t} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, alors

$$\|a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

La théorie de la diffusion va nous donner des résultats plus précis. Rappelons quelques résultats sur les opérateurs d'ondes. Si ψ est une solution de

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\partial_x^2 \psi = F(\psi),$$

elle vérifie la relation

$$(3.5.1) \quad \psi(t) = U_0(t - t_0)\psi(t_0) - i \int_{t_0}^t U_0(t - s)F(\psi(s)) ds.$$

Une solution ψ_0 de l'équation libre vérifie simplement

$$(3.5.2) \quad \psi_0(t) = U_0(t - t_1)\psi_0(t_1).$$

Pour définir les opérateurs d'ondes, on souhaite comparer les évolutions de ψ et de ψ_0 , avec $\psi_0(t) = U_0(t)\psi_\pm$. L'équation intégrale à résoudre pour définir l'opérateur d'onde W_+ s'écrit donc, pour t_0 grand :

$$(3.5.3) \quad \psi(t) = U_0(t)\psi_+ + i \int_t^{t_0} U_0(t - s)F(\psi(s)) ds.$$

On suppose $F(z) = \lambda|z|^p z$, avec $\lambda > 0$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.5.1.1 ([CW92], proposition 4.6, [Gin95], proposition 10.6)

On suppose $p > 2$. Alors pour tout $\psi_+ \in \Sigma$, il existe $T < \infty$ tel que

1. pour tout $t_0 \in \bar{I}$, où $I = [T, \infty[$, l'équation (3.5.3) a une unique solution dans $Y_p^1(I)$. La solution est en fait dans $Y^1(I)$.
2. La solution ψ est fortement continue de $(\psi_+, t_0) \in \Sigma \times \bar{I}$ dans $Y^1(I)$.

En adaptant de façon évidente, les mêmes résultats sont vrais pour un état asymptotique en $-\infty$, $\psi_- \in \Sigma$.

On vérifie alors que l'opérateur ainsi construit est effectivement un opérateur d'onde sur Σ : la fonction que l'on souhaite comparer à ψ_+ étant $U_0(-t)\psi(t)$, notons

$$\tilde{\psi}(t) = U_0(-t)\psi(t).$$

Proposition 3.5.1.2 ([Gin95], proposition 10.7)

On suppose $p > 2$. Soit I un intervalle, $t_0 \in I$, $\psi_+ \in \Sigma$, et $\psi \in Y_{p+1}^1(I)$ solution de (3.5.3). Alors $\tilde{\psi} \in C(\bar{I}, \Sigma)$. En particulier, si $I = [T, \infty[$, la limite suivante existe :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}_+$$

comme limite forte dans Σ . Si $t_0 = \infty$, alors $\tilde{\psi}_+ = \psi_+$. On a le même résultat en remplaçant ψ_+ par $\psi_- \in \Sigma$, et $+\infty$ par $-\infty$.

Remarque : dans les énoncés ci-dessus, on ne fait pas d'hypothèses sur le signe de λ . En effet, pour le problème local près de $+\infty$, la décroissance optimale donnée par l'opérateur de Galilée suffit pour trouver T fini dans les propositions précédentes. Par contre, T peut être grand : pour prolonger la solution sur un intervalle plus grand (éventuellement $\mathbb{R}$ tout entier), l'hypothèse de signe apparaît.

Notons $\psi_- := \mathcal{F}^{-1}a_0$. À ψ_- , les propositions 3.5.1.1 et 3.5.1.2 (avec $t_0 = -\infty$) associent ψ définie sur $] -\infty, -T]$ solution de

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\partial_x^2 \psi = \lambda|\psi|^{2\alpha}\psi,$$

unique, telle que

$$(3.5.4) \quad \|\psi_- - U_0(-t)\psi(t)\|_{\Sigma} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0.$$

Reprenons le changement d'échelle (3.2.1) :

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

La fonction ψ_ε vérifie l'équation de Schrödinger sans échelle (3.3.19),

$$i\partial_t \psi_\varepsilon + \frac{1}{2}\partial_x^2 \psi_\varepsilon = \lambda|\psi_\varepsilon|^{2\alpha}\psi_\varepsilon,$$

c'est-à-dire la même que ψ . Il s'agit alors de montrer que la fonction ψ_ε converge vers ψ dans $L^\infty(\mathbb{R}; \Sigma)$. Par définition de ψ_- , d'après la relation (3.3.21) et le lemme 3.3.3.1 ($t_0 = -\infty$),

$$U_0 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \psi_\varepsilon \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_- \quad \text{dans } \Sigma.$$

D'après la seconde partie de la proposition 3.5.1.1 et puisque $-\frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty$, on a alors

$$(3.5.5) \quad \sup_{t \leq -T} \|U_0(-t)(\psi - \psi_\varepsilon)(t)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

D'après la relation (3.3.21), on a aussi

$$(3.5.6) \quad \begin{aligned} a_\varepsilon(t, \xi) &= \mathcal{F} \left(U_0 \left(\frac{1-t}{\varepsilon} \right) \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) \right) (\xi) \\ &= \mathcal{F} \left(U_0 \left(\frac{1-t}{\varepsilon} \right) (\psi_\varepsilon - \psi) \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) \right) (\xi) \\ &\quad + \mathcal{F} \left(U_0 \left(\frac{1-t}{\varepsilon} \right) \psi \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) \right) (\xi). \end{aligned}$$

On en déduit, grâce aux relations (3.5.5) et (3.5.4), que si $\frac{t-1}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty$, alors

$$\|a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

On retrouve ainsi le résultat donné par la proposition 3.4.1.1. La relation (3.5.5) donne donc un résultat plus précis que celui de la proposition 3.4.1.1 : elle permet de se débarrasser, pour la fonction ψ , de la dépendance en ε , ce qui constitue une approximation intéressante. Malheureusement, ce résultat n'est pas forcément facile à interpréter : il ramène simplement notre étude à celle de l'équation de Schrödinger sans paramètre, ce qui ne lève pas toutes les indéterminations. La théorie de la diffusion peut tout de même nous permettre de comprendre un peu mieux la traversée de la caustique.

3.5.2 Traversée de la caustique

Comme annoncé précédemment, la traversée de la caustique dans le cas $\alpha = \beta/2$ prend en compte des effets non linéaires, mesurés par l'opérateur de diffusion. Rappelons donc quelques résultats à ce sujet.

Existence de l'opérateur de diffusion dans Σ

D'après la proposition 3.5.1.2, il existe un opérateur

$$W_+ : \begin{cases} \Sigma \rightarrow \Sigma, \\ \psi_+ \mapsto \varphi, \end{cases}$$

tel que si ψ est solution du problème de Cauchy (3.2.6) avec donnée initiale $\varphi = W_+\psi_+$, alors

$$\|U_0(-t)\psi(t) - \psi_+\|_\Sigma \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

On définit de même l'opérateur $W_- : \psi_- \mapsto \varphi$. La question qui se pose alors est celle de la complétude asymptotique : à $\psi_- \in \Sigma$, W_- associe φ . Peut-on trouver ψ_+

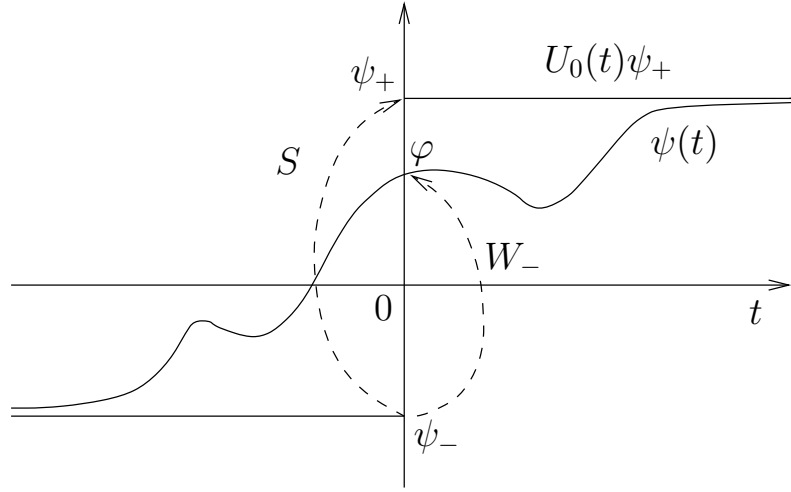


FIG. 3.3 – Existence de l'opérateur de diffusion.

telle que $\varphi = W_+ \psi_+$? Dans ce cas, on note $S = W_+^{-1} W_-$ l'opérateur de diffusion permettant de relier les instants $-\infty$ et $+\infty$ (figure 3.3). Pour montrer la complétude asymptotique dans Σ , on a besoin des estimations optimales pour la décroissance en temps de la solution $\psi(t)$. Il n'est donc pas étonnant de retrouver les hypothèses de la proposition 3.2.2.3 :

Proposition 3.5.2.1 ([HT87])

On suppose $\lambda > 0$ et $p > p_0(1) = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

- Pour tout $\psi_+ \in \Sigma$ (resp. $\psi_- \in \Sigma$), il existe un unique $\varphi \in \Sigma$ tel que

$$\|\psi_+ - U_0(-t)\psi(t)\|_{\Sigma} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{resp. } \|\psi_- - U_0(-t)\psi(t)\|_{\Sigma} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0),$$

où $\psi(t)$ est la solution de (3.2.6).

- Pour tout $\varphi \in \Sigma$, il existe un unique couple $(\psi_+, \psi_-) \in \Sigma^2$ tel que la solution de (3.2.6) vérifie

$$\|\psi_{\pm} - U_0(-t)\psi(t)\|_{\Sigma} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

- Les opérateurs d'onde $W_{\pm} : \psi_{\pm} \mapsto \varphi$ sont des homéomorphismes de Σ sur lui-même.

Corollaire 3.5.2.1 Sous les hypothèses de la proposition 3.5.2.1, l'opérateur de diffusion $S = W_+^{-1} W_- : \psi_- \mapsto \psi_+$ est un homéomorphisme de Σ sur lui-même.

Dans [CW92], [Gin95], on montre que pour $2 < p < \infty$, l'opérateur de diffusion existe sur un voisinage de l'origine dans Σ . Ainsi, pour une donnée en $-\infty$ de faible énergie, on obtient un résultat plus fort que dans la proposition précédente :

Proposition 3.5.2.2 ([CW92], corollaire 4.3)

On suppose $p > 2$. Alors l'opérateur de diffusion est défini d'un voisinage de 0 dans Σ sur un voisinage de 0 dans Σ .

Remarque : à faible énergie, on n'a pas besoin de faire d'hypothèse de signe sur λ , car dans ces conditions, l'énergie

$$E(t) = \|\partial_x \psi(t)\|_{L^2}^2 + \frac{4\lambda}{p+2} \|\psi(t)\|_{L^{p+2}}^{p+2},$$

qui est conservée, est toujours positive, ce qui exclut les phénomènes d'explosion.

Description dans Σ de la traversée de la caustique

Dans le cas où $2\alpha > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, on a la complétude asymptotique dans Σ (proposition 3.5.2.1), ce qui permet de décrire assez précisément la solution exacte u^ε après la caustique.

D'après la proposition 3.5.2.1, il existe $\psi_+ \in \Sigma$ tel que

$$\|\psi_+ - U_0(-t)\psi(t)\|_\Sigma \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après le caractère bien posé dans $Y_{loc}^1(\mathbb{R})$ de l'équation de Schrödinger (proposition 3.2.2.2), la relation (3.5.5) et la proposition 3.5.2.1, on a alors :

$$(3.5.7) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|U_0(-t)(\psi(t) - \psi_\varepsilon(t))\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Ceci permet en particulier de décrire la focalisation à l'instant $t = 1$. Comme dans le cas de l'équation des ondes étudié dans [BG97a], on a mis en évidence un profil de concentration, ψ , qui permet de décrire la focalisation par le changement d'échelle

$$\tilde{u}_\varepsilon^\varepsilon(t, x) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Le même raisonnement que dans le paragraphe 3.5.1 permet d'aboutir à la proposition suivante :

Proposition 3.5.2.3 On suppose $\lambda > 0$, $2\alpha = \beta > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. Alors pour les symboles, l'optique géométrique linéaire est valable dans Σ avant et après la caustique, et la transition est décrite par l'opérateur de diffusion S :

– si $t < 1$, alors

$$(3.5.8) \quad \|a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 ;$$

– si $t > 1$, alors

$$(3.5.9) \quad \|a_\varepsilon(t, \cdot) - \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1} a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De plus, pour tout $\delta > 0$, les convergences ci-dessus sont uniformes pour $t \leq 1 - \delta$ (premier cas) et pour $t \geq 1 + \delta$ (deuxième cas).

Les relations (3.5.6) et (3.5.7) permettent en outre de constater que l'influence (non linéaire) de la caustique ne s'exerce pas dans la région $\frac{\varepsilon}{1-t} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. On a ainsi mis en évidence une couche limite, d'épaisseur ε , au voisinage de $t = 1$, en dehors de laquelle l'influence de la caustique est négligeable. On peut donc dire que l'influence de la caustique est non linéaire à l'intérieur de cette couche limite : dans les variables écartées $\frac{t-1}{\varepsilon}$ et $\frac{x}{\varepsilon}$, la traversée de cette couche limite correspond à passer des instants $-\infty$ à $+\infty$, ce qui rend naturelle la présence de l'opérateur de diffusion S (figure 3.4).

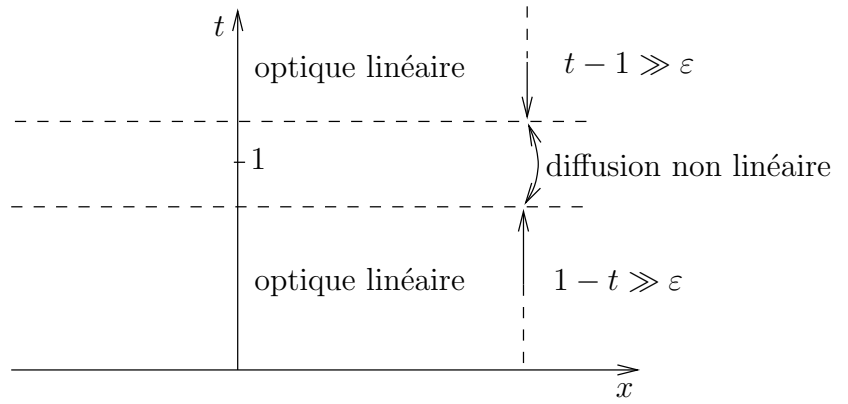


FIG. 3.4 – Propagation linéaire, caustique non linéaire.

Remarques :

- puisque $S \circ \mathcal{F}^{-1}a_0 = \psi_+ \in \Sigma$, le lemme 3.3.4.1 permet de déduire de cette proposition, une description dans L^∞ de la solution exacte u^ε . L'optique géométrique linéaire est ainsi valide dans L^∞ en dehors de tout voisinage de la caustique, et la transition est décrite par l'opérateur de diffusion.
- contrairement au cas où la caustique a une influence linéaire, on peut dire que dans le cas présent, les effets non linéaires au voisinage de la caustique se manifestent dans une région trop grande pour qu'on puisse négliger leur accumulation.

Existence de l'opérateur de diffusion dans L^2

Supposons $\lambda > 0$. Dans les résultats rappelés ci-dessus, il apparaît un intervalle pour la puissance p dans lequel on sait qu'il existe des opérateurs d'ondes, mais on ne sait pas montrer qu'il y a complétude asymptotique. Ainsi, pour $p \in]2, p_0(1)]$, seuls W_- et W_+ sont connus. D'après la proposition 3.5.2.2, si ψ_- (donc f) est petit dans Σ , cette indétermination est levée, et les résultats du paragraphe précédent sont toujours valables (on peut même, dans ce cas, se débarrasser de l'hypothèse de

signe sur λ). Dans le cas d'une donnée de taille quelconque, on peut tout de même relier ψ_- et ψ_+ , mais dans un sens plus faible que précédemment :

Proposition 3.5.2.4 ([Gin95], proposition 11.4)

On suppose $p > 2$ et $\lambda > 0$. Soit $\varphi \in \Sigma$ et $\psi \in Y_{loc}^1(\mathbb{R})$ la solution du problème de Cauchy (3.2.6). Alors il existe $\psi_{\pm} \in H^1$ satisfaisant

$$(3.5.10) \quad U_0(-t)\psi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \psi_{\pm} \text{ fortement dans } L^2 \text{ et faiblement dans } H^1.$$

Nous appliquerons ces résultats comme suit : à $\psi_- \in \Sigma$, l'opérateur d'onde W_- associe $\varphi \in \Sigma$. Il existe alors $\psi_+ \in H^1$ telle que

$$\|U_0(-t)\psi(t) - \psi_+\|_{L^2} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0.$$

On a donc en quelque sorte un opérateur de diffusion de Σ dans H^1 , pour lequel les convergences ont lieu dans L^2 .

Grâce à cette proposition et au caractère bien posé localement dans L^2 du problème (3.2.6), on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.5.2.2 On suppose $2 < p < 4$. Soient φ (resp. φ_{ε}) dans Σ et ψ (resp. ψ_{ε}) $\in Y_{loc}^1(\mathbb{R})$ la solution associée. Si les données initiales convergent dans Σ ,

$$\|\varphi - \varphi_{\varepsilon}\|_{\Sigma} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0,$$

alors la suite ψ_{ε} converge vers ψ dans L^2 , uniformément en temps :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\psi(t) - \psi_{\varepsilon}(t)\|_{L^2} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0.$$

Remarque : dans l'énoncé ci-dessus, on peut supposer $p < 4$, car le cas $p \geq 4$ est bien mieux connu (complétude asymptotique).

Démonstration : soit $\delta > 0$. D'après la proposition 3.5.2.4, il existe $t(\delta)$ tel que pour $t_2 \geq t_1 \geq t(\delta)$ (ou $t_2 \leq t_1 \leq -t(\delta)$),

$$(3.5.11) \quad \|\psi(t_2) - \psi(t_1)\|_{L^2} \leq \delta$$

et

$$(3.5.12) \quad \|\psi_{\varepsilon}(t_2) - \psi_{\varepsilon}(t_1)\|_{L^2} \leq \delta,$$

l'uniformité en ε résultant du fait que seule la norme de φ dans Σ intervient dans les constantes apparaissant dans la preuve de la proposition 3.5.2.4. La proposition 3.2.2.1 permet d'affirmer que

$$(3.5.13) \quad \sup_{t \in [-t(\delta), t(\delta)]} \|\psi(t) - \psi_{\varepsilon}(t)\|_{L^2} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0.$$

Soit $|t_2| > t(\delta)$. On a évidemment, pour tout t_1 ,

$$(3.5.14) \quad \begin{aligned} \|\psi(t_2) - \psi_\varepsilon(t_2)\|_{L^2} &\leq \|\psi(t_2) - \psi(t_1)\|_{L^2} + \|\psi(t_1) - \psi_\varepsilon(t_1)\|_{L^2} + \\ &\quad + \|\psi_\varepsilon(t_1) - \psi_\varepsilon(t_2)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Prenons alors $t_1 = t(\delta)$ si $t_2 > 0$ et $t_1 = -t(\delta)$ si $t_2 < 0$. D'après les relations (3.5.11) et (3.5.12), les premier et dernier termes du membre de droite sont majorés par δ . Le terme restant est plus petit que δ dès que ε est suffisamment petit, grâce à la relation (3.5.13), ce qui prouve le corollaire. $\square$

Description dans L^2 de la traversée de la caustique

Si $\lambda > 0$ et $2 < 2\alpha \leq \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, on obtient toujours une description uniforme de la solution exacte, mais dans un sens plus faible, à savoir L^2 . D'après la relation (3.5.5) et le corollaire 3.5.2.2, la relation (3.5.7) devient

$$(3.5.15) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\psi(t) - \psi_\varepsilon(t)\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

En raisonnant comme dans le cas de Σ , on a la proposition suivante :

Proposition 3.5.2.5 *On suppose $4 > 2\alpha = \beta > 2$. Alors pour les symboles, l'optique géométrique linéaire est valable dans L^2 avant et après la caustique, et la transition est décrite par l'opérateur de diffusion S donné par la proposition 3.5.2.4 :*

– si $t < 1$, alors

$$(3.5.16) \quad \|a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 ;$$

– si $t > 1$, alors

$$(3.5.17) \quad \|a_\varepsilon(t, \cdot) - \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1} a_0(\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De plus, pour tout $\delta > 0$, les convergences ci-dessus sont uniformes pour $t \leq 1 - \delta$ (premier cas) et pour $t \geq 1 + \delta$ (deuxième cas).

Comme dans le cas plus favorable où on a une description dans Σ , l'influence de la caustique s'exerce dans une couche limite de taille ε (figure 3.4). Par contre, d'après la proposition 3.5.2.4, on n'a pas mieux que $S \circ \mathcal{F}^{-1} a_0 = \psi_+ \in H^1$ (si on avait $\psi_+ \in \Sigma$, on aurait complétude asymptotique dans Σ), donc en particulier, on n'a pas $\mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1} a_0 \in H^s$ pour un $s > 1/2$, ce qui interdit l'application du lemme 3.3.4.1. Ainsi, dans le cas $2\alpha = \beta \in]2, p_0(1)]$, on ne sait a priori pas décrire la solution exacte u^ε dans L^∞ après la caustique.

3.6 Propagation non linéaire et caustique linéaire

D'après notre classification du paragraphe 3.4, ce cas est obtenu lorsque $\alpha = 1$ et $\beta < 2$. Nous allons adopter la même démarche qu'au paragraphe 3.4 : elle consiste à montrer que l'optique géométrique non linéaire est valide en dehors de la caustique, et que les effets non linéaires cumulés de la caustique sont négligeables.

3.6.1 Propagation avant la caustique

Notons encore

$$w^\varepsilon := u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon.$$

D'après le paragraphe 3.3.6, le reste w^ε est solution du problème de Cauchy

$$(3.6.1) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t w^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \partial_x^2 w^\varepsilon = \varepsilon \left(|u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon - |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon \right) + \varepsilon \Delta^\varepsilon(t, x), \\ w^\varepsilon|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta^\varepsilon(t, x) &:= |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon(t, x) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \frac{|f(-\xi)|^\beta}{|1-t|^{\beta/2}} a_0(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

En procédant comme dans le cas linéaire, on trouve les inégalités d'énergie :

$$(3.6.2) \quad \begin{aligned} \partial_t \|w^\varepsilon\|_{L^2} &\leq C \left(\|w^\varepsilon\|_{L^\infty}^\beta + \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^\infty}^\beta \right) \|w^\varepsilon\|_{L^2} + \|\Delta^\varepsilon\|_{L^2}, \\ \partial_t \|\varepsilon \partial_x w^\varepsilon\|_{L^2} &\leq C \left(\|w^\varepsilon\|_{L^\infty}^\beta + \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^\infty}^\beta \right) \|\varepsilon \partial_x w^\varepsilon\|_{L^2} + \|\varepsilon \partial_x \Delta^\varepsilon\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Comme dans le paragraphe 3.3.6, nous supposons $0 < \beta < 2$ et $f \in \Sigma$. Dans la preuve du lemme 3.3.6.1, nous avons vu qu'il existe une constante C_1 telle que

$$(3.6.3) \quad \|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C_1}{|1-t|^{1/2}}.$$

Pour intégrer les inégalités d'énergies (3.6.2), on procède par le même argument qu'en 3.4.1. Tant que

$$(3.6.4) \quad \sup_{0 \leq s \leq t} \|w^\varepsilon(s)\|_{L^\infty} \leq \frac{C_1}{|1-t|^{1/2}},$$

on peut appliquer le lemme de Gronwall dans la première partie de (3.6.2). En effet, soit C_0 : pour $t \leq 1 - C_0\varepsilon$,

$$(3.6.5) \quad \partial_t \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C(1-t)^{-\beta/2} \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} + \|\Delta^\varepsilon(t)\|_{L^2}.$$

La fonction $t \mapsto |1-t|^{-\beta/2}$ étant localement intégrable ($\beta < 2$), le lemme de Gronwall permet d'affirmer, avec le lemme 3.3.6.1,

$$(3.6.6) \quad \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} = o(1).$$

Pour poursuivre les calculs, nous pouvons utiliser une version plus forte du lemme 3.3.6.1 :

Lemme 3.6.1.1 *Supposons $0 < \beta < 2$ et $f \in \Sigma$. Soit $C_0 > 0$. Alors*

$$(3.6.7) \quad \|J^\varepsilon \Delta^\varepsilon\|_{L^1(0,1-C_0\varepsilon;L_x^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad \text{et} \quad \|J^\varepsilon \Delta^\varepsilon\|_{L^1(1+C_0\varepsilon,2;L_x^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De même,

$$(3.6.8) \quad \|\varepsilon \partial_x \Delta^\varepsilon\|_{L^1(0,1-C_0\varepsilon;L_x^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad \text{et} \quad \|\varepsilon \partial_x \Delta^\varepsilon\|_{L^1(1+C_0\varepsilon,2;L_x^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Ce lemme se montre de la même façon que le lemme 3.3.6.1 : ainsi, d'après la relation (3.4.13), on a

$$\left\| J^\varepsilon(t) \tilde{\Delta}^\varepsilon(t, \cdot) \right\|_{L_x^2} \leq C \left(\|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta + \|u_1^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta \right) \|J^\varepsilon(t)(u_{app}^\varepsilon - u_1^\varepsilon)(t)\|_{L^2}.$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 3.3.6.2, avec non plus $\sigma = F$, mais $\sigma = \partial_y F$ (pour le premier cas, d'après la relation (3.4.9)), qui est toujours une fonction dans $L_{loc}^\infty(L^2)$ pour $f \in \Sigma$, puis pour $\sigma = yF$ (deuxième cas). $\square$

On a alors, en appliquant l'opérateur J^ε à l'équation vérifiée par le reste w^ε , et en utilisant la relation (3.4.13),

$$\partial_t \|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon\|_{L^2} \leq C \left(\|w^\varepsilon\|_{L^\infty}^\beta + \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^\infty}^\beta \right) \|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon\|_{L^2} + \|J^\varepsilon(t)\Delta^\varepsilon\|_{L^2}.$$

En procédant comme ci-dessus, on déduit du lemme 3.6.1.1 que tant que (3.6.4) est vraie, et pour $t \leq 1 - C_0\varepsilon$,

$$\|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon\|_{L^2} = o(1).$$

D'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (3.4.12), ceci entraîne que la relation (3.6.4) est toujours vérifiée pour $t \leq 1 - C_0\varepsilon$ et ε suffisamment petit.

La deuxième partie de (3.6.2) entraîne finalement, grâce au lemme 3.6.1.1 et au lemme de Gronwall,

$$(3.6.9) \quad \|\varepsilon \partial_x w^\varepsilon\|_{L^2} = o(1).$$

Nous avons donc montré le résultat suivant :

Proposition 3.6.1.1 *On suppose $0 < \beta < 2$ et $f \in \Sigma$. L'optique géométrique non linéaire est valide avant la caustique : pour toute constante $C_0 > 0$,*

$$\sup_{0 \leq t \leq 1-C_0\varepsilon} \|\tilde{a}_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_\Sigma = o(1).$$

3.6.2 Traversée de la caustique

Nous allons montrer comme dans la partie 3.4 que le comportement du symbole lagrangien est linéaire dans une couche limite de taille ε . D'après le lemme 3.4.2.2,

$$(3.6.10) \quad \left\| \partial_t a_\varepsilon \right\|_{L^1(1-\varepsilon, 1+\varepsilon; \mathcal{F}(H^1))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

En particulier, $a_\varepsilon(t, \xi)$ reste borné dans $\mathcal{F}(H^1)$ pour $1 - \varepsilon \leq t \leq 1 + \varepsilon$.

Montrons qu'on a le même résultat dans Σ : il reste à vérifier

$$(3.6.11) \quad \left\| \partial_t a_\varepsilon \right\|_{L^1(1-\varepsilon, 1+\varepsilon; H^1)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

D'après le paragraphe précédent, la fonction $J^\varepsilon(t)u^\varepsilon(t)$ reste borné dans L_x^2 pour $0 \leq t \leq 1 - \varepsilon$: $J^\varepsilon(t)u_{app}^\varepsilon(t)$ reste borné de façon évidente, et $J^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t)$ reste petit d'après la proposition 3.6.1.1. On peut alors reprendre la preuve de la proposition 3.4.2.1 pour conclure de même que

$$\left\| \partial_t a_\varepsilon \right\|_{L^1(1-\varepsilon, 1+\varepsilon; H^1)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

On a finalement montré que $a_\varepsilon(t, \xi)$ reste borné dans Σ pour $t \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Or, par construction de $\tilde{a}_\varepsilon$,

$$(3.6.12) \quad a_\varepsilon(t, \xi) = \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) e^{ig(t, \xi)},$$

donc

$$\partial_t \tilde{a}_\varepsilon = e^{-ig(t, \xi)} \partial_t a_\varepsilon - i \partial_t g e^{-ig(t, \xi)} a_\varepsilon.$$

Notons $I_\varepsilon = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Puisque $\Sigma \subset L^\infty$, et

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} |1 - t|^{-\beta/2} dt = o(1),$$

on en déduit que

$$(3.6.13) \quad \left\| \partial_t \tilde{a}_\varepsilon \right\|_{L^1(I_\varepsilon; \Sigma)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

La traversée de la caustique se passe donc de façon linéaire, et l'introduction de la phase g ne paraît pas cruciale dans l'intervalle I_ε .

Remarques :

- là encore, on ne montre pas que la caustique a une influence non linéaire partout négligeable, mais que cette influence est dans l'ensemble sans conséquence.
- comme au paragraphe 3.4.2, on peut montrer le résultat précédent dans une couche limite plus large, du type $|t - 1| \leq \varepsilon^{1-\gamma}$, avec $\gamma > 0$ et $1 > \beta/2 + \gamma$.

3.6.3 Propagation après la caustique

Après la traversée de la caustique, on peut montrer comme précédemment que l'optique géométrique non linéaire est valide : comme au paragraphe 3.4, il suffit de reproduire la preuve faite pour la propagation avant la caustique.

Nous avons donc montré que dans le cas $\alpha = 1$, $2 > \beta > 0$, la propagation était non linéaire, et la traversée de la caustique, linéaire, ce que résume la proposition suivante :

Proposition 3.6.3.1 *Considérons le problème de Cauchy*

$$(3.6.14) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon = \varepsilon |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x), \end{cases}$$

avec $0 < \beta < 2$ et $f \in \Sigma$. Avec la représentation

$$(3.6.15) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) d\xi,$$

le symbole modifié $\tilde{a}_\varepsilon$ converge vers un symbole indépendant du temps :

$$(3.6.16) \quad \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi) \text{ dans } L_{loc}^\infty(\Sigma).$$

Remarque : en particulier, la fonction u_{app}^ε constitue une approximation de la solution exacte u^ε , uniformément dans L^∞ .

3.7 Propagation et caustique non linéaires

Nous abordons maintenant le cas $\alpha = 1$ et $\beta = 2$:

$$(3.7.1) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon = \lambda \varepsilon |u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x). \end{cases}$$

Nous avons vu au paragraphe 3.2.1 que pour ε suffisamment petit, (3.7.1) possède une unique solution globale dans H^1 . L'équation sans échelle qui lui est associée est :

$$(3.7.2) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi_\varepsilon + \frac{1}{2} \partial_x^2 \psi_\varepsilon = \lambda |\psi_\varepsilon|^2 \psi_\varepsilon, \\ \psi_\varepsilon|_{t=-1/\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} e^{-i\varepsilon\frac{x^2}{2}} f(\varepsilon x). \end{cases}$$

La puissance de la non-linéarité considérée ici est critique en ce qui concerne la théorie de la diffusion : on ne peut plus comparer une trajectoire associée à (3.7.2) à une trajectoire de l'évolution libre. Dans [Str74], [Str81], [Bar84], [Gin95] (proposition 10.11), on montre qu'il n'existe pas d'opérateurs d'onde : si $\psi_+ \in L^2$ et $\psi(t) - U_0(t)\psi_+ \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ dans L^2 , alors $\psi = \psi_+ = 0$. Il faut alors prendre en compte l'interaction longue portée à l'aide d'un opérateur d'évolution libre modifié.

3.7.1 Les résultats en scattering non linéaire longue portée

Dans [Oza91], l'auteur aborde précisément l'équation sans échelle à laquelle nous nous intéressons, et montre que l'effet longue portée peut être pris en compte grâce à l'introduction d'un déphasage.

Soit $H^{m,s}$ l'espace de Sobolev à poids défini par

$$H^{m,s} := \{\psi \in \mathcal{S}' ; \|\psi\|_{m,s} = \|\langle x \rangle^s (1 - \partial^2)^{m/2} \psi\|_{L^2} < \infty\}, \quad m, s \in \mathbb{R}.$$

On considère l'équation

$$(3.7.3) \quad i\partial_t \psi + \frac{1}{2} \partial_x^2 \psi = \lambda |\psi|^2 \psi,$$

λ étant un réel non nul quelconque. Pour $\phi_- \in L^2$, on définit la phase S^- par

$$(3.7.4) \quad S^-(t, x) := \frac{\lambda}{2\pi} \left| \widehat{\phi}_- \left(\frac{x}{t} \right) \right|^2 \log |t|.$$

Le résultat qui nous intéresse est alors le suivant :

Proposition 3.7.1.1 ([Oza91]) *Il existe δ_1 et δ_2 tels que l'on ait :*

1. *Pour toute $\phi_- \in H^{0,2}$ avec $\|\widehat{\phi}_-\|_\infty < \delta_1$, (3.7.3) a une unique solution $\psi \in C(\mathbb{R}; L^2) \cap L_{loc}^4(\mathbb{R}; L^\infty)$ telle que pour tout α vérifiant $1/2 < \alpha < 1$, on a, lorsque $t \rightarrow -\infty$,*

$$\begin{aligned} \|\psi(t) - \exp(iS^-(t))U_0(t)\phi_-\|_{L_x^2} &= O(|t|^{-\alpha}), \\ \left(\int_{-\infty}^t \|\psi(\tau) - \exp(iS^-(\tau))U_0(\tau)\phi_-\|_{L_x^\infty}^4 d\tau \right)^{1/4} &= O(|t|^{-\alpha}). \end{aligned}$$

2. *Pour toute $\phi_- \in H^{0,3} \cap H^{1,2}$ avec $\|\widehat{\phi}_-\|_\infty < \delta_2$, (3.7.3) a une unique solution $\psi \in C(\mathbb{R}; H^{1,0}) \cap L_{loc}^4(\mathbb{R}; W^{1,\infty})$ telle que pour tout α vérifiant $1/2 < \alpha < 1$,*

$$\begin{aligned} \|\psi(t) - \exp(iS^-(t))U_0(t)\phi_-\|_{1,0} &= O(|t|^{-\alpha}), \\ \left(\int_{-\infty}^t \|\psi(\tau) - \exp(iS^-(\tau))U_0(\tau)\phi_-\|_{W^{1,\infty}}^4 d\tau \right)^{1/4} &= O(|t|^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Remarques :

- les hypothèses sont beaucoup plus restrictives que dans le cas courte portée : on demande plus de régularité, ainsi qu'une condition de petitesse sur $\widehat{\phi}_-$ dans L^∞ ;
- on n'a pas ici de notion de complétude asymptotique.

3.7.2 Le cas du système

Alors que les éléments de théorie du scattering non linéaire longue portée ne nous permettront pas de décrire la traversée de la caustique, les calculs sur les deux premières itérées du schéma de Picard permettant de construire la solution non linéaire peuvent être menés à terme. Considérons donc le système

$$(3.7.5) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 v^\varepsilon = 0, \\ i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_x^2 u^\varepsilon = \varepsilon \lambda |v^\varepsilon|^2 u^\varepsilon, \\ v^\varepsilon|_{t=0} = u^\varepsilon|_{t=0} = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x). \end{cases}$$

Le rôle de λ étant négligeable dans ce cas, nous travaillerons avec $\lambda = 1$. Nous supposons également que la fonction f est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La première équation peut s'intégrer explicitement :

$$(3.7.6) \quad v^\varepsilon(t, x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\varepsilon t}} \int e^{i\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon t} - i\frac{y^2}{2\varepsilon}} f(y) dy.$$

Conservons le changement d'échelle

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Le terme $\varepsilon|v^\varepsilon|^2$ tient lieu de potentiel pour l'équation linéaire vérifiée par u^ε . Notons alors

$$(3.7.7) \quad p^\varepsilon(t, x) = \varepsilon|v^\varepsilon|^2(t, x) = Q^\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Lemme 3.7.2.1 Notons $T = \frac{t-1}{\varepsilon}$ et $X = \frac{x}{\varepsilon}$.

$$(3.7.8) \quad |v^\varepsilon(t, x)| = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon|T|}} \left| \int e^{-i\xi^2 \frac{1+\varepsilon T}{2} - i\xi \frac{X}{T}} \hat{f}(\xi) d\xi \right|.$$

Démonstration : d'après ci-dessus et avec le changement de variable du lemme, on a

$$\begin{aligned} |v^\varepsilon(t, x)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon|1+\varepsilon T|}} \left| \int e^{\frac{i}{2} \frac{(\varepsilon X - y)^2}{\varepsilon(1+\varepsilon T)}} e^{-i\frac{y^2}{2\varepsilon}} f(y) dy \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon|1+\varepsilon T|}} \left| \int e^{-\frac{i}{1+\varepsilon T} \left(\frac{Ty^2}{2} + yX \right)} f(y) dy \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon|1+\varepsilon T|}} \left| \int e^{-\frac{i}{1+\varepsilon T} \frac{Ty^2}{2}} f \left(y - \frac{X}{T} \right) dy \right| \end{aligned}$$

Or

$$\widehat{e^{-\frac{i}{1+\varepsilon T} \frac{Ty^2}{2}}}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi|1+\varepsilon T|}{|T|}} e^{i\sigma\pi/4} e^{-i\xi^2 \frac{(1+\varepsilon T)}{2T}},$$

et $\widehat{f \left(\cdot - \frac{X}{T} \right)}(\xi) = e^{-i\xi \frac{X}{T}} \hat{f}(\xi)$, donc le lemme découle de la formule de Parseval. $\square$

Approximation du potentiel

Par changement d'échelles, l'équation sur u^ε devient :

$$(3.7.9) \quad i\partial_T \psi_\varepsilon - \frac{1}{2} \partial_X^2 \psi_\varepsilon = Q^\varepsilon \psi_\varepsilon,$$

avec, d'après la démonstration du lemme 3.7.2.1,

$$Q^\varepsilon(T, X) = \frac{1}{2\pi(1 + \varepsilon T)} \left| \int e^{-\frac{i}{1+\varepsilon T} \left(\frac{Ty^2}{2} + yX \right)} f(y) dy \right|^2.$$

Notons

$$(3.7.10) \quad \begin{aligned} Q(T, X) &:= \frac{1}{2\pi} \left| \int e^{-i \left(\frac{Ty^2}{2} + yX \right)} f(y) dy \right|^2 \\ &= \frac{1}{|T|} \left| \int e^{-i \frac{\xi^2}{2T} - i \xi \frac{X}{T}} \hat{f}(\xi) d\xi \right|^2. \end{aligned}$$

Le potentiel Q_ε converge vers Q : le lemme suivant précise en quel sens cette convergence a lieu.

Lemme 3.7.2.2 *Pour $f \in \mathcal{S}$, il existe des constantes C_0 et C_1 telles que*

$$(3.7.11) \quad \|\partial_X^n (Q - Q_\varepsilon)(T, \cdot)\|_{L_x^\infty} \leq C_n \varepsilon \langle T \rangle^{-1-n}, \quad n = 0, 1.$$

Démonstration : rappelons les expressions des potentiels Q et Q_ε .

$$\begin{aligned} Q(T, X) &= \frac{1}{2\pi} \left| \int e^{-i \left(\frac{Ty^2}{2} + yX \right)} f(y) dy \right|^2 \\ &= \frac{1}{|T|} \left| \int e^{-i \frac{\xi^2}{2T} - i \xi \frac{X}{T}} \hat{f}(\xi) d\xi \right|^2, \\ Q_\varepsilon(T, X) &= \frac{1}{2\pi(1 + \varepsilon T)} \left| \int e^{-\frac{i}{1+\varepsilon T} \left(\frac{Ty^2}{2} + yX \right)} f(y) dy \right|^2 \\ &= \frac{1}{|T|} \left| \int e^{-i \frac{\xi^2}{2} \frac{1+\varepsilon T}{T} - i \xi \frac{X}{T}} \hat{f}(\xi) d\xi \right|^2. \end{aligned}$$

La première expression de chacun des potentiels permet de montrer que pour T borné, en intégrant par parties,

$$\|(Q - Q_\varepsilon)(T, \cdot)\|_{L^\infty} = O(\varepsilon).$$

De la seconde expression, on déduit, encore par intégration par parties,

$$\|(Q - Q_\varepsilon)(T, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C \frac{\varepsilon}{|T|},$$

la combinaison de ces deux relations achevant la preuve du lemme pour $n = 0$. La preuve pour $n = 1$ est analogue. $\square$

Nous allons faire les calculs avec le potentiel Q , puis vérifier que cette approximation donne une bonne description pour ψ_ε . Considérons donc l'équation

$$(3.7.12) \quad i\partial_T \psi + \frac{1}{2}\partial_X^2 \psi = Q\psi.$$

Pour envisager, comme on l'attend, une description de la traversée de la caustique à l'aide de la théorie du scattering, nous avons besoin d'estimations sur la décroissance du potentiel Q . Pour l'analyse des équations de Schrödinger avec potentiel dépendant du temps, nous utiliserons les résultats de [DG97]. On a évidemment

$$(3.7.13) \quad |Q(T, X)| \leq \frac{C}{\langle T \rangle},$$

cette estimation étant uniforme en X . En particulier, $Q \notin L_T^1(L_X^\infty)$ en général. Donc le potentiel Q n'est pas dans la classe des potentiels courte portée (cf [DG97]) : on ne peut alors pas comparer la dynamique libre (potentiel nul) et la dynamique engendrée par Q . Comme dans le cas non linéaire abordé dans [Oza91], il faut alors modifier la dynamique à laquelle on compare l'évolution de ψ . Dans [DG97], on montre que cette adaptation est réalisable si le potentiel se comporte comme un symbole en (X, T) . Nous sommes dans un cadre encore plus favorable :

Lemme 3.7.2.3 *Pour tout couple d'entiers $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, il existe une constante $C_{n,m}$ telle que pour tout $X \in \mathbb{R}$,*

$$(3.7.14) \quad |\partial_T^m \partial_X^n Q(T, X)| \leq C_{n,m} \langle T \rangle^{-1-n-m}.$$

Démonstration : lorsque T est astreint à rester borné, cette estimation est claire d'après la première écriture de Q dans (3.7.10). Lorsque T tend vers l'infini, on préfère la seconde expression de Q . Notons

$$G(T, X) = \int e^{-i\frac{\xi^2}{2T} - i\xi\frac{X}{T}} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

On a alors $Q = \frac{1}{|T|} |G|^2$, et pour tout entier $n \geq 0$,

$$\partial_X^n G(T, X) = \int \left(-i\frac{\xi}{T} \right)^n e^{-i\frac{\xi^2}{2T} - i\xi\frac{X}{T}} \hat{f}(\xi) d\xi = O(|T|^{-n}),$$

le O étant uniforme en X . En remarquant la relation

$$\frac{\partial}{\partial T} e^{-i\xi\frac{X}{T}} = -\frac{\xi}{T} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-i\xi\frac{X}{T}},$$

on obtient de même des estimations pour les dérivées en T . On a donc, pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$\partial_T^m \partial_X^n G(T, X) = O(|T|^{-n-m}),$$

et le lemme s'en déduit facilement. $\square$

Lien optique géométrique-scattering longue portée

On peut alors définir des opérateurs d'ondes modifiés en “redressant” la dynamique libre à l'aide d'une phase ϕ solution de l'équation ([DG97], théorème 3.5.1)

$$(3.7.15) \quad \partial_T \phi(T, \xi) = -\frac{1}{2} \xi^2 - Q(T, -\partial_\xi \phi).$$

Nous allons voir qu'une autre approche suggère également l'introduction d'un déphasage pour décrire la solution u^ε . En effet, l'équation de transport pour le premier profil, dans la méthode BKW, devient dans ce cas

$$(3.7.16) \quad \partial_t u_0 + \frac{x}{1-t} \partial_x u_0 + \frac{1}{2(1-t)} u_0 = -i|v^\varepsilon|^2 u_0.$$

Cette équation s'intègre pour $t < 1$ en

$$(3.7.17) \quad u_0^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} f\left(\frac{x}{1-t}\right) e^{ig^\varepsilon(t, x)},$$

où le déphasage g^ε est la solution de

$$(3.7.18) \quad \begin{cases} \partial_t g^\varepsilon + \frac{x}{1-t} \partial_x g^\varepsilon = -|v^\varepsilon|^2, \\ g^\varepsilon|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Pour $t < 1$, la formule de la phase stationnaire donne

$$v^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}} f\left(\frac{x}{1-t}\right),$$

et on a

$$g^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} g(t, x),$$

où g est la solution de

$$(3.7.19) \quad \begin{cases} \partial_t g + \frac{x}{1-t} \partial_x g = -\frac{1}{1-t} f\left(\frac{x}{1-t}\right)^2, \\ g|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Avec le changement de variables $(t, y) = \left(t, \frac{x}{1-t}\right)$, on trouve :

$$(3.7.20) \quad g(t, x) = f\left(\frac{x}{1-t}\right)^2 \ln(1-t).$$

En termes de symbole lagrangien, ceci équivaut au système

$$(3.7.21) \quad \begin{cases} i\partial_t a = \frac{1}{1-t} f(-\xi)^2 a(t, \xi), \\ a|_{t=0} = \sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} f(-\xi), \end{cases}$$

que l'on intègre en

$$(3.7.22) \quad a(t, \xi) = \sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} f(-\xi) e^{-if(-\xi)^2 \ln(1-t)}.$$

Intégrale lagrangienne modifiée

Nous allons voir que ces deux approches (scattering et développement BKW) sont réellement très voisines, en modifiant la description usuelle en terme d'intégrale lagrangienne. Remplaçons l'écriture (3.3.8) par

$$(3.7.23) \quad \boxed{u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{i\phi(\frac{t-1}{\varepsilon}, \xi) + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) d\xi.}$$

Les résultats de [DG97] et [Yaf80], [Yaf95], [Yaf97], suggèrent de définir ϕ comme étant une solution exacte ou approchée de l'équation eikonale (3.7.15). Comme dans [Yaf80], [Yaf95], [Yaf97], choisissons plutôt une solution approchée : l'idée sous-jacente consiste à dire qu'après suffisamment d'itérations dans la construction de la solution exacte, le résultat ainsi obtenu est une solution approchée qui permet de se ramener au cas courte portée.

La première approximation s'écrit

$$(3.7.24) \quad -\partial_T \phi_1 = \frac{1}{2} \xi^2,$$

que l'on intègre en

$$(3.7.25) \quad \phi_1(T, \xi) = -\frac{1}{2} T \xi^2.$$

La seconde étape donne :

$$(3.7.26) \quad -\partial_T \phi_2 = Q(T, -\partial_\xi \phi_1).$$

Pour recoller avec l'optique géométrique, on souhaite que la valeur à $t = 0$ du symbole modifié $\tilde{a}_\varepsilon$ soit la même que celle du symbole initial a_ε : on impose donc comme condition de Cauchy pour ϕ_2 ,

$$\phi_2|_{T=-1/\varepsilon} = 0.$$

On peut alors intégrer la relation (3.7.26) en :

$$(3.7.27) \quad \phi_2(T, \xi) = - \int_{-1/\varepsilon}^T Q(s, s\xi) ds.$$

On retrouve alors la construction de Dollard (cf [DG97] par exemple). Nous allons voir que cette approximation suffit pour décrire la solution uniformément : posons

$$(3.7.28) \quad \boxed{\begin{aligned} \phi(T, \xi) &= \phi_{app}(T, \xi) = \phi_1(T, \xi) + \phi_2(T, \xi) \\ &= -\frac{1}{2} T \xi^2 - \int_{-1/\varepsilon}^T Q(s, s\xi) ds. \end{aligned}}$$

Remarque : cette phase ϕ dépend manifestement de ε . Par commodité pour la suite, nous ne soulignons pas cette dépendance ici.

Étudions alors, pour $t < 1$, la phase apparaissant dans l'intégrale modifiée (3.7.23) :

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \xi\right) &= -\frac{1}{2} \frac{t-1}{\varepsilon} \xi^2 - \int_{-1/\varepsilon}^{(t-1)/\varepsilon} Q(s, s\xi) ds \\ &= -\frac{1}{2} \frac{t-1}{\varepsilon} \xi^2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^{t-1} Q\left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{s\xi}{\varepsilon}\right) ds.\end{aligned}$$

D'après la forme du potentiel Q (relation (3.7.10)), on a

$$(3.7.29) \quad \frac{1}{\varepsilon} Q\left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{s\xi}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{|s|} \left| \int e^{i\varepsilon \frac{x^2}{2s} - ix\xi} \hat{f}(x) dx \right|^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|s|} |f(-\xi)|^2.$$

D'après les relations

$$\int e^{i\varepsilon \frac{x^2}{2s} - ix\xi} \hat{f}(x) dx - f(-\xi) = \int \left(e^{i\varepsilon \frac{x^2}{2s}} - 1 \right) e^{-ix\xi} \hat{f}(x) dx$$

et

$$\left| e^{i\varepsilon \frac{x^2}{2s}} - 1 \right| = 2 \left| \sin \frac{\varepsilon}{4s} x^2 \right|,$$

cette limite est uniforme en ξ et en toute suite δ_ε tendant vers 0 telle que $\varepsilon/|s| \leq \delta_\varepsilon$. On a ainsi, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(3.7.30) \quad \phi\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \xi\right) = -\frac{1}{2} \frac{t-1}{\varepsilon} \xi^2 - |f(-\xi)|^2 \ln(1-t) + o(1),$$

le o étant uniforme en ξ et sur toute région où $1-t \gg \varepsilon$. La relation (3.7.22) suggère alors qu'à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, le symbole modifié $\tilde{a}$ ne dépend plus de t : ceci revient à vérifier que l'optique géométrique est valide.

L'équation vérifiée par u^ε devient, en termes de $\tilde{a}_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}(3.7.31) \quad & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int Q\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{t-1}{\varepsilon} \xi\right) e^{i\phi(\frac{t-1}{\varepsilon}, \xi) + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) d\xi + \\ & + i\sqrt{\varepsilon} \int e^{i\phi(\frac{t-1}{\varepsilon}, \xi) + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} \partial_t \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) d\xi = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} Q\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \int e^{i\phi(\frac{t-1}{\varepsilon}, \xi) + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) d\xi.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\|\partial_t \tilde{a}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L_\xi^2} = \frac{C}{\varepsilon} \left\| \left(Q\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) - Q\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, (t-1)D\right) \right) u^\varepsilon(t, \cdot) \right\|_{L_x^2}.$$

D'après la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} & Q\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) - Q\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, (t-1)D\right) = \\ &= \int_0^1 \partial_x Q\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, (t-1)D + s\left(\frac{x}{\varepsilon} - (t-1)D\right)\right) ds \left(\frac{x}{\varepsilon} - (t-1)D\right). \end{aligned}$$

Or

$$\left\| \left(\frac{x}{\varepsilon} - (t-1)D\right) u^\varepsilon \right\|_{L_x^2} = \left\| J\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right) \psi_\varepsilon \right\|_{L_x^2},$$

donc,

$$(3.7.32) \quad \|\partial_t \tilde{a}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L_\xi^2} \leq C \sup_{s \in [0,1]} \left\| a_s\left(\frac{t-1}{\varepsilon}, X, D_X\right) \right\|_{\mathcal{L}(L_X^2)} \left\| J\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right) \psi_\varepsilon \right\|_{L_X^2},$$

où on a noté

$$(3.7.33) \quad a_s(t, x, \xi) = \partial_x Q(t, t\xi + s(x - t\xi)).$$

Le lemme suivant permet d'estimer l'action de l'opérateur $a_s(t, x, D)$:

Lemme 3.7.2.4 *Il existe une constante C telle que pour tout $s \in [0, 1]$, on ait*

$$(3.7.34) \quad \|a_s(t, x, D)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \frac{C}{\langle t \rangle^2}.$$

Démonstration : pour tous indices n et m , on a

$$\partial_x^n \partial_\xi^m a_s(t, x, \xi) = s^n (1-s)^m t^m \partial_X^{1+n+m} Q(t, t\xi + s(x - t\xi)).$$

D'après le lemme 3.7.2.3, on a donc

$$|\partial_x^n \partial_\xi^m a_s(t, x, \xi)| \leq C_{n,m} s^n (1-s)^m \langle t \rangle^{-2-n} \leq C_{n,m} \langle t \rangle^{-2}.$$

On a donc un symbole en (x, ξ) , dépendant des paramètres s et t , dans la classe $S_{0,0}^0$ (cf [Hör94]). D'après le théorème de Calderón-Vaillancourt ([CV72], [Hwa87], [Hör94]), il existe un ensemble fini I de $\mathbb{N}^2$ tel qu'on ait

$$(3.7.35) \quad \|a_s(t, x, D)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \sum_{(n,m) \in I} \sup_{x, \xi} |\partial_x^n \partial_\xi^m a_s(t, x, \xi)|.$$

Le lemme se déduit alors facilement. □

Grâce à ce lemme, on obtient finalement :

$$(3.7.36) \quad \|\partial_t \tilde{a}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L_\xi^2} \leq C \frac{\varepsilon}{(1-t)^2} \left\| J\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right) \psi_\varepsilon \right\|_{L_x^2}.$$

On montre alors que $\|J(T)\psi_\varepsilon\|_{L^2}$ reste borné pour de “bons” T .
Notons $U(t, s)$ le propagateur associé au hamiltonien

$$(3.7.37) \quad H(t) = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + Q(t, x),$$

qui vérifie

$$(3.7.38) \quad \begin{cases} i\frac{d}{dt}U(t, s) = H(t)U(t, s), \\ i\frac{d}{ds}U(t, s) = -U(t, s)H(s), \\ U(t, t) = I. \end{cases}$$

En particulier, le potentiel Q étant réel, le propagateur U est unitaire sur L^2 .

Lemme 3.7.2.5 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors*

$$(3.7.39) \quad \frac{d}{dt}(U(t_0, t)J(t)U(t, t_0)) = U(t_0, t)t\partial_x Q(t, x)U(t, t_0).$$

Démonstration : il suffit d'utiliser la définition du propagateur U (relation (3.7.38)).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(t_0, t)J(t)U(t, t_0) &= U(t_0, t)(iH(t)J(t) + i\partial_x - iJ(t)H(t))U(t, t_0) \\ &= iU(t_0, t)(\partial_x + [H(t), J(t)])U(t, t_0). \end{aligned}$$

D'après les définitions de $J(t)$ et $H(t)$, on a

$$\begin{aligned} [H(t), J(t)] &= -\frac{1}{2}[\partial_x^2, x] + it[Q, \partial_x] \\ &= -\partial_x - it\partial_x Q(t, x), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat annoncé. $\square$

D'après la relation

$$\begin{aligned} U(t_0, t_1)J(t_1)U(t_1, t_0)\psi(t_0) &= J(t_0)\psi(t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{ds}U(t_0, s)J(s)U(s, t_0)\psi(t_0)ds \end{aligned}$$

appliquée à ψ_ε avec $t_0 = -\frac{1}{\varepsilon}$ et $t_1 = \frac{t-1}{\varepsilon}$, on déduit du lemme précédent :

$$\begin{aligned} \left\| J\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\psi_\varepsilon \right\|_{L_x^2} &\leq \left\| J\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\psi_\varepsilon \right\|_{L_x^2} + \int_{-1/\varepsilon}^{(t-1)/\varepsilon} \frac{ds}{\langle s \rangle} \\ &\leq C + \int_{-1/\varepsilon}^{(t-1)/\varepsilon} \frac{ds}{\langle s \rangle} \\ &\leq C + \begin{cases} |\ln(1-t)| & \text{si } t < 1, \\ \ln \frac{1}{\varepsilon} + \left| \ln \frac{t-1}{\varepsilon} \right| & \text{si } t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $t < 1$, on a donc

$$(3.7.40) \quad \|\partial_t \tilde{a}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L_\xi^2} \leq C \frac{\varepsilon}{(1-t)^2} |\ln(1-t)|,$$

et pour $t > 1$

$$(3.7.41) \quad \|\partial_t \tilde{a}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L_\xi^2} \leq C \frac{\varepsilon}{(1-t)^2} \left(|\ln(t-1)| + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Soit alors $\delta \in]0, 1[$: pour $t \leq \delta$, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) &= \tilde{a}_\varepsilon(0, \xi) + \int_0^t \partial_t \tilde{a}_\varepsilon(s, \xi) ds \\ &= a_\varepsilon(0, \xi) + \int_0^t \partial_t \tilde{a}_\varepsilon(s, \xi) ds. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.3.3.1, on a alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_{L_\xi^2} &\leq \|a_\varepsilon(0, \cdot) - a_0(\cdot)\|_{L_\xi^2} + \left\| \int_0^t \partial_t \tilde{a}_\varepsilon(s, \cdot) ds \right\|_{L_\xi^2} \\ &\leq o(1) + \int_0^t \|\partial_t \tilde{a}_\varepsilon(s, \cdot)\|_{L_\xi^2} ds \\ &\leq o(1) + C\varepsilon \int_0^\delta \frac{1}{(s-1)^2} |\ln(1-s)| ds. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\int_y^1 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{\ln y}{y} - 1 + \frac{1}{y} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln y}{y}.$$

Pour tout $\delta_\varepsilon \in]0, 1[$ tel que

$$(3.7.42) \quad \varepsilon \frac{\ln \delta_\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

le symbole modifié tend alors vers un symbole constant :

$$\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi) \text{ dans } L^\infty(0, 1 - \delta; L^2).$$

On a donc en quelque sorte redressé le symbole lagrangien usuel en un symbole $\tilde{a}$, en dehors d'une couche limite (définie par (3.7.42)), dont la largeur est grande devant ε . En particulier, il semble que l'influence (non linéaire) de la caustique s'exerce sur un voisinage plus grand que dans le cas étudié au paragraphe 3.5, où on avait mis en évidence une couche limite de taille ε .

Nous pouvons préciser la taille de la couche limite donnée par (3.7.42). En cherchant un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction réciproque de

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x},$$

on trouve $f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln y}{y}$, donc la couche limite que nous venons de mettre en évidence est de taille $\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}$.

Conclusion : en dehors d'une couche limite de taille $\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}$, le symbole modifié converge vers un symbole indépendant du temps, c'est-à-dire pour $\delta_\varepsilon \gg \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}$,

$$(3.7.43) \quad \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi) \text{ dans } L^\infty(0, 1 - \delta; L^2).$$

Scattering modifié

L'étape suivante consiste à vérifier que la phase ϕ que nous avons construite permet de définir des opérateurs d'ondes modifiés.

Proposition 3.7.2.1 Dans $L^2(\mathbb{R})$, les limites

$$(3.7.44) \quad s - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-i\phi(t, D)} U(t, 0),$$

$$(3.7.45) \quad s - \lim_{t \rightarrow -\infty} U(0, t) e^{i\phi(t, D)}$$

existent et sont unitaires.

Démonstration : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\langle x \rangle)$. Appliquons la méthode de Cook :

$$(3.7.46) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{-i\phi(t, D)} U(t, 0) \varphi \right) &= e^{-i\phi(t, D)} (-i\partial_t \phi(t, D) - iH(t)) U(t, 0) \varphi \\ &= ie^{-i\phi(t, D)} (Q(t, tD) - Q(t, x)) U(t, 0) \varphi \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.7.2.5,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (U(0, t)(tD - x)U(t, 0)) &= -U(0, t)(t\partial_x Q)U(t, 0) \\ &= O(\langle t \rangle^{-1}) \text{ dans } L^2. \end{aligned}$$

En intégrant cette relation entre les instants 0 et t , on trouve, dans L_x^2 :

$$(3.7.47) \quad (tD - x)U(t, 0)\langle x \rangle^{-1} = O(\ln \langle t \rangle).$$

D'après la formule de Taylor,

$$(3.7.48) \quad Q(t, tD) - Q(t, x) = \int_0^1 \partial_x Q(t, x + s(tD - x)) ds(tD - x),$$

donc d'après ci-dessus,

$$(3.7.49) \quad \|(Q(t, tD) - Q(t, x)) U(t, 0) \varphi\|_{L_x^2} \leq C \ln t \langle t \rangle^{-2} \|\langle x \rangle \varphi\|_{L^2}.$$

Le second membre étant intégrable, cette estimation implique l'intégrabilité de

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-i\phi(t,D)} U(t,0) \varphi \right),$$

c'est-à-dire l'existence d'une limite forte pour $e^{-i\phi(t,D)} U(t,0)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

De la même façon,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(U(0,t) e^{i\phi(t,D)} \right) &= iU(0,t) (Q(t,x) - Q(t,tD)) e^{i\phi(t,D)}, \\ \frac{d}{dt} \left(e^{-i\phi(t,D)} (tD - x) e^{i\phi(t,D)} \right) &= -e^{-i\phi(t,D)} t \partial_x Q(t,tD) e^{i\phi(t,D)}, \end{aligned}$$

et la même méthode donne l'existence de la seconde limite apparaissant dans la proposition. $\square$

Il reste à vérifier que l'approximation faite au paragraphe 3.7.2 est valable.

Continuité des opérateurs d'ondes modifiés

Notons ϕ_ε la phase associée au potentiel Q_ε dans notre construction :

$$(3.7.50) \quad \phi_\varepsilon(t, \xi) = -\frac{1}{2} t \xi^2 - \int_{-1/\varepsilon}^t Q_\varepsilon(s, s\xi) ds.$$

Notons enfin $H_\varepsilon(t)$ le hamiltonien associé au potentiel Q_ε , et $U_\varepsilon(t, s)$ son propagateur.

Proposition 3.7.2.2 (continuité des opérateurs d'ondes modifiés)

Il existe une constante C telle que

$$(3.7.51) \quad \begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} \left(e^{-i\phi(t,D)} U(t,0) - e^{-i\phi_\varepsilon(t,D)} U_\varepsilon(t,0) \right) \varphi \right\|_{L^2} &\leq \\ &\leq C\varepsilon \frac{\ln \langle t \rangle}{\langle t \rangle^2} \left(\ln \langle t \rangle + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \| \langle x \rangle \varphi \|_{L^2}. \end{aligned}$$

Démonstration : pour $\varphi \in \Sigma$, notons

$$\Delta_\varepsilon(t) = \left(e^{-i\phi(t,D)} U(t,0) - e^{-i\phi_\varepsilon(t,D)} U_\varepsilon(t,0) \right) \varphi.$$

D'après les définitions des phases et des hamiltoniens, on trouve, comme dans la preuve de l'existence d'opérateurs d'ondes modifiés :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta_\varepsilon(t) &= i e^{-i\phi(t,D)} (Q(t,tD) - Q(t,x)) U(t,0) \varphi \\ &\quad - i e^{-i\phi_\varepsilon(t,D)} (Q_\varepsilon(t,tD) - Q_\varepsilon(t,x)) U_\varepsilon(t,0) \varphi. \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor (relation (3.7.48)), et les estimations uniformes en espace pour les potentiels, on peut faire les calculs en considérant

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Delta_\varepsilon(t) &= ie^{-i\phi(t,D)}\partial_x Q.(tD-x)U(t,0)\varphi \\ &\quad - ie^{-i\phi_\varepsilon(t,D)}\partial_x Q_\varepsilon.(tD-x)U_\varepsilon(t,0)\varphi. \end{aligned}$$

Écrivons alors

$$\begin{aligned} (3.7.52) \quad \frac{d}{dt}\Delta_\varepsilon(t) &= i \left(e^{-i\phi(t,D)} - e^{-i\phi_\varepsilon(t,D)} \right) \partial_x Q.(tD-x)U(t,0)\varphi \\ &\quad + ie^{-i\phi_\varepsilon(t,D)}(\partial_x Q - \partial_x Q_\varepsilon).(tD-x)U(t,0)\varphi \\ &\quad + ie^{-i\phi_\varepsilon(t,D)}\partial_x Q_\varepsilon.(tD-x)(U(t,0) - U_\varepsilon(t,0))\varphi. \end{aligned}$$

Estimons la première ligne :

$$\begin{aligned} &\left\| \left(e^{-i\phi(t,D)} - e^{-i\phi_\varepsilon(t,D)} \right) \partial_x Q.(tD-x)U(t,0)\varphi \right\|_{L^2} \leq \\ &\leq \| e^{-i\phi(t,\cdot)} - e^{-i\phi_\varepsilon(t,\cdot)} \|_{L^\infty} \| \partial_x Q.(tD-x)U(t,0)\varphi \|_{L^2} \\ &\leq \| \phi_\varepsilon(t,\cdot) - \phi(t,\cdot) \|_{L^\infty} \frac{\ln\langle t \rangle}{\langle t \rangle^2} \| \langle x \rangle \varphi \|_{L^2} \\ &\leq C\varepsilon \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^t \frac{ds}{\langle s \rangle} \times \frac{\ln\langle t \rangle}{\langle t \rangle^2} \| \langle x \rangle \varphi \|_{L^2} \\ &\leq C\varepsilon \left(\ln\langle t \rangle + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\ln\langle t \rangle}{\langle t \rangle^2} \| \langle x \rangle \varphi \|_{L^2}. \end{aligned}$$

De la même façon, on a, pour la seconde ligne :

$$\begin{aligned} &\left\| e^{-i\phi_\varepsilon(t,D)}(\partial_x Q - \partial_x Q_\varepsilon).(tD-x)U(t,0)\varphi \right\|_{L^2} \leq \\ &\leq \| \partial_x Q - \partial_x Q_\varepsilon \|_{L_x^\infty} \| (tD-x)U(t,0)\varphi \|_{L^2} \\ &\leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-2} \ln\langle t \rangle \| \langle x \rangle \varphi \|_{L^2}. \end{aligned}$$

Pour terminer le calcul, nous aurons besoin du

Lemme 3.7.2.6 *Il existe une constante C telle que :*

$$(3.7.53) \quad \|(U - U_\varepsilon)(t,0)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C\varepsilon \ln\langle t \rangle.$$

Démonstration du lemme 3.7.2.6 : pour $\varphi \in L^2$, notons $\psi(t) = U(t,0)\varphi$ et $\psi_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t,0)\varphi$. On a alors

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\partial_x^2\psi &= Q\psi, \\ i\partial_t\psi_\varepsilon + \frac{1}{2}\partial_x^2\psi_\varepsilon &= Q_\varepsilon\psi_\varepsilon. \end{aligned}$$

La différence de ces deux relations donne :

$$i\partial_t(\psi - \psi_\varepsilon) + \frac{1}{2}\partial_x^2(\psi - \psi_\varepsilon) = Q(\psi - \psi_\varepsilon) + (Q - Q_\varepsilon)\psi_\varepsilon.$$

En multipliant par $\overline{\psi - \psi_\varepsilon}$ et en prenant la partie imaginaire du résultat intégré en espace, il vient :

$$\partial_t \|\psi - \psi_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|Q - Q_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\psi_\varepsilon\|_{L^2},$$

soit encore

$$\begin{aligned} \partial_t \|(U(t, 0) - U_\varepsilon(t, 0))\varphi\|_{L^2} &\leq \|Q - Q_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^2} \\ &\leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-1} \|\varphi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

On prouve alors le lemme en intégrant cette relation entre les instants 0 et t . $\square$

On termine les calculs en écrivant

$$UJ(t)(U - U_\varepsilon)\varphi = UJ(t)U\varphi - U_\varepsilon J(t)U_\varepsilon\varphi - (U - U_\varepsilon)J(t)U_\varepsilon\varphi.$$

D'après les calculs déjà faits, le dernier terme se majore par

$$C\varepsilon \ln \langle t \rangle \|\langle x \rangle \varphi\|_{L^2}.$$

En calculant la dérivée en temps de $UJ(t)U\varphi - U_\varepsilon J(t)U_\varepsilon\varphi$, on montre de même

$$\|J(t)(U - U_\varepsilon)\varphi\|_{L^2} \leq C\varepsilon \ln \langle t \rangle \|\langle x \rangle \varphi\|_{L^2}.$$

On en déduit finalement

$$\left\| e^{-i\phi_\varepsilon(t, D)} \partial_x Q_\varepsilon \cdot (tD - x)(U(t, 0) - U_\varepsilon(t, 0))\varphi \right\|_{L^2} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-2} \ln \langle t \rangle \|\langle x \rangle \varphi\|_{L^2},$$

ce qui achève la preuve de la proposition 3.7.2.2. $\square$

On a alors

$$\begin{aligned} \left(e^{-i\phi(t, D)} U(t, 0) - e^{-i\phi_\varepsilon(t, D)} U_\varepsilon(t, 0) \right) \varphi &= \left(e^{-i\phi(0, D)} - e^{-i\phi_\varepsilon(0, D)} \right) \varphi \\ &\quad + \int_0^t \frac{d}{ds} \left(e^{-i\phi(s, D)} U(s, 0) - e^{-i\phi_\varepsilon(s, D)} U_\varepsilon(s, 0) \right) \varphi ds, \end{aligned}$$

donc en particulier, on a, uniformément en t ,

$$(3.7.54) \quad \left\| \left(e^{-i\phi(t, D)} U(t, 0) - e^{-i\phi_\varepsilon(t, D)} U_\varepsilon(t, 0) \right) \varphi \right\|_{L^2} \leq C\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \|\langle x \rangle \varphi\|_{L^2}.$$

Traversée de la caustique

Pour décrire la traversée de la caustique, nous utilisons le symbole modifié $\tilde{a}_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) &= \mathcal{F} \left(e^{-i\phi(\frac{t-1}{\varepsilon}, D)} \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) \right) (\xi) \\ &= \mathcal{F} \left(e^{-i\phi(\frac{t-1}{\varepsilon}, D)} U_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, 0 \right) \psi_\varepsilon(0) \right) \\ &= \mathcal{F} \left(e^{-i\phi(\frac{t-1}{\varepsilon}, D)} U_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{1-t}{\varepsilon} \right) e^{i\phi(\frac{1-t}{\varepsilon}, D)} \right) \mathcal{F}^{-1} \tilde{a}_\varepsilon(2-t, \xi).\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, le fait de considérer la phase ϕ ou ϕ_ε ne modifie cette description que de façon négligeable. Nous avons déjà vu que pour $t > 1$,

$$\tilde{a}_\varepsilon(2-t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi) \text{ dans } L_\xi^2,$$

et $a_0 \in \Sigma$. D'après le paragraphe précédent, et puisque l'opérateur

$$e^{-i\phi(\frac{t-1}{\varepsilon}, D)} U_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{1-t}{\varepsilon} \right) e^{i\phi(\frac{1-t}{\varepsilon}, D)}$$

est unitaire sur L^2 , on déduit que pour $t > 1$ en dehors de la couche limite déjà invoquée,

$$\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F} \tilde{S} \mathcal{F}^{-1} a_0(\xi) \text{ dans } L_\xi^2,$$

où $\tilde{S}$ est l'opérateur de scattering associé aux opérateurs d'ondes modifiés. On a donc montré la proposition suivante :

Proposition 3.7.2.3 *Soient v^ε et u^ε les solutions du problème de Cauchy (3.7.5). En écrivant u^ε sous la forme*

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int e^{i\phi(\frac{t-1}{\varepsilon}, \xi) + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) d\xi,$$

avec

$$\phi(T, \xi) = -\frac{1}{2} T \xi^2 - \int_{-1/\varepsilon}^T Q(s, s\xi) ds,$$

on vérifie que l'optique géométrique est valable avant et après la caustique, la transition étant assurée par l'opérateur de scattering linéaire modifié $\tilde{S}$:

- pour $t < 1$, $\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi)$ dans L_ξ^2 ;
- pour $t > 1$, $\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F} \circ \tilde{S} \circ \mathcal{F}^{-1} a_0(\xi)$ dans L_ξ^2 .

Conclusion : on constate sur l'étude du système que le comportement de u^ε est non linéaire à la fois en dehors de la caustique (introduction d'une nouvelle phase ϕ), et au moment de sa traversée (opérateur de scattering). Les indices critiques devinés en introduction sont donc les bons, pour distinguer le caractère linéaire ou non linéaire, du régime d'optique géométrique d'une part, de la traversée de la caustique d'autre part.

Chapitre 4

Optique géométrique et traversée de caustique pour des équations de Schrödinger non linéaires. Épisode 2

Épisode 2 : le cas multidimensionnel

Et les indices se multiplient...

4.1 Introduction

Dans l'épisode précédent, le fait de considérer des équations monodimensionnelles ne paraît pas crucial, au moins pour les raisonnements heuristiques. En revanche, il est évident que les calculs ont très souvent reposé sur l'inclusion

$$(4.1.1) \quad H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R}),$$

si bien que l'on peut se demander si oui ou non les calculs peuvent s'étendre aux cas de dimensions supérieures, pour une focalisation radiale. Nous allons voir que les difficultés dans cette généralisation sont effectivement d'ordre uniquement technique, avec toutefois les mêmes restrictions que celles rencontrées dans l'étude générale des équations de Schrödinger non linéaires (ainsi, des bornes supérieures apparaissent pour la puissance β de la non-linéarité, dans les questions d'existence). Essentiellement, en dimension $n \geq 2$, on ne peut plus estimer la non-linéarité aussi facilement que dans le cas monodimensionnel, puisque l'on n'a plus d'estimations dans L^∞ . Les inégalités de Strichartz permettent de passer outre cette difficulté de calcul, dans certains cas tout du moins. Considérons donc, pour $n \geq 2$, le problème de Cauchy

$$(NLS^\varepsilon)_n \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon &= \lambda \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon, & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x), \end{cases}$$

où f est régulière, λ est réel, $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ est un paramètre tendant vers zéro. Comme dans le cas monodimensionnel, les oscillations que nous considérons sont telles que tous les rayons se rencontrent en un point : il y a focalisation au point $(t, x) = (1, 0)$. Nous nous attendons également à distinguer des régimes linéaires ou non linéaires pour ce qui y est de la propagation d'une part, de l'influence de la caustique d'autre part. Là encore, l'étude de l'équation de Schrödinger va nous guider efficacement :

$$(S^\varepsilon) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon &= 0, \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x). \end{cases}$$

On connaît explicitement la solution de cette équation :

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{(2i\pi\varepsilon t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon t} - i\frac{y^2}{2\varepsilon}} f(y) dy.$$

On peut appliquer la formule de la phase stationnaire en dehors de la caustique, avec la phase

$$\phi(y) = \frac{(x-y)^2}{2t} - \frac{y^2}{2}.$$

Si $t \neq 1$, elle possède un unique point critique, $y_c = \frac{x}{1-t}$, qui est non dégénéré. On vérifie ainsi qu'en dehors de $t = 1$, u^ε est de taille 1, et au moment de la focalisation, en $t = 1$, u^ε est de taille $\varepsilon^{-n/2}$.

Supposons que dans le cas non linéaire, u^ε se comporte de la même façon : l'influence de la caustique sera la même que dans le cas linéaire si

$$\alpha > n\frac{\beta}{2}.$$

De même, l'influence de la caustique sera non linéaire si

$$\alpha = n\frac{\beta}{2}.$$

Nous n'aborderons pas le cas $\alpha < n\frac{\beta}{2}$. Nous allons voir par la suite que ces indices critiques sont effectivement ceux qu'on retrouve dans le cas de l'équation non linéaire :

	$\alpha > n\beta/2$	$\alpha = n\beta/2$
$\alpha > 1$	Caustique linéaire, propagation linéaire	Caustique non linéaire, propagation linéaire
$\alpha = 1$	Caustique linéaire, propagation non linéaire	Caustique non linéaire, propagation non linéaire

Pour décrire précisément le comportement de la solution u^ε , conservons l'écriture sous forme d'intégrale oscillante :

$$(4.1.2) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a_\varepsilon(t, \xi) d\xi,$$

où nous avons noté $d\xi = \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$.

Pour couvrir le cas d'une propagation non linéaire, nous adopterons à nouveau une écriture légèrement différente, de la forme

$$(4.1.3) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) d\xi.$$

La fonction g sera nulle dans le cas d'une optique géométrique linéaire ($\alpha > 1$), et dans le cas d'une propagation non linéaire ($\alpha = 1$), elle sera solution de

$$(4.1.4) \quad \begin{cases} \partial_t g(t, \xi) = \frac{\lambda}{|1-t|^{n\beta/2}} |f(-\xi)|^\beta, \\ g|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Dans le cas d'une optique et d'une caustique non linéaires ($\alpha = 1$ et $\beta = \frac{2}{n}$), nous étudierons non pas la solution de l'équation non linéaire, mais le système :

$$(4.1.5) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta v^\varepsilon = 0, \\ i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = \varepsilon \lambda |v^\varepsilon|^{2/n} u^\varepsilon, \\ v^\varepsilon|_{t=0} = u^\varepsilon|_{t=0} = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x). \end{cases}$$

On peut maintenant énoncer un résultat semblable à celui de la dimension 1.

Théorème 4 *Supposons $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$ et $\beta < \frac{4}{n-2}$ (β quelconque si $n = 2$). La donnée initiale du symbole $\tilde{a}_\varepsilon$ converge :*

$$(4.1.6) \quad \tilde{a}_\varepsilon(0, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2\pi}{i}\right)^{n/2} f(-\xi) =: a_0(\xi) \text{ dans } L_\xi^2.$$

Pour $t < 1$, on a

$$(4.1.7) \quad \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi) \text{ dans } L_\xi^2,$$

et pour $t > 1$,

$$(4.1.8) \quad \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta a_0(\xi) \text{ dans } L_\xi^2,$$

l'opérateur ζ étant défini par

- $\zeta = I$ dans le cas d'une caustique linéaire ($\alpha > n\beta/2$);
- $\zeta = \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1}$ dans le cas d'une optique linéaire ($\alpha > 1$) et d'une caustique non linéaire ($n\beta = 2\alpha$), si $\beta > \frac{4}{n+2}$, $\mathcal{F}$ désignant la transformation de Fourier et S l'opérateur de scattering non linéaire;
- $\zeta = \mathcal{F} \circ \tilde{S} \circ \mathcal{F}^{-1}$ dans le cas du système ($n\beta = 2\alpha = 2$), $\tilde{S}$ étant l'opérateur de scattering linéaire modifié.

Remarque : dans plusieurs cas, nous obtiendrons une description plus précise de l'approximation du symbole $\tilde{a}_\varepsilon$ décrite dans le théorème. Nous montrerons qu'elle peut être valide dans $H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)$, mais contrairement au cas de la dimension 1, ceci ne permet pas de déduire des informations dans L^∞ .

4.2 Existence de solutions

Comme dans le cas monodimensionnel, la focalisation peut éventuellement être un obstacle à l'existence globale de solutions et ce, uniquement dans le cas d'une caustique non linéaire.

4.2.1 Cas d'une caustique linéaire

Dans le cas $\alpha > n\beta/2$, le signe de λ importe peu, comme permet de le constater le changement d'échelle

$$(4.2.1) \quad u^\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-\alpha/\beta} \varphi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

La fonction φ_ε est solution du problème de Cauchy

$$(4.2.2) \quad \begin{cases} i\partial_t \varphi_\varepsilon + \frac{1}{2} \Delta \varphi_\varepsilon = \lambda |\varphi_\varepsilon|^\beta \varphi_\varepsilon, \\ \varphi_\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon^{\alpha/\beta} e^{-i\varepsilon \frac{x^2}{2}} f(\varepsilon x). \end{cases}$$

En particulier, on a

$$\|\varphi_{\varepsilon}|_{t=0}\|_{L^2} = \varepsilon^{\alpha/\beta-n/2} \|f\|_{L^2}$$

et

$$\|\partial_x \varphi_{\varepsilon}|_{t=0}\|_{L^2} \leq \varepsilon^{\alpha/\beta-n/2} \|xf\|_{L^2} + \varepsilon^{\alpha/\beta+1-n/2} \|\nabla f\|_{L^2}.$$

Si $\alpha > n\beta/2$, alors les données initiales pour φ_{ε} tendent vers zéro. Introduisons dès maintenant quelques notations usuelles dans l'étude des équations de Schrödinger non linéaires. Le groupe unitaire $U_0(t)$ associé à l'équation de Schrödinger est

$$(4.2.3) \quad \boxed{U_0(t) = e^{i\frac{t}{2}\Delta}.}$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons $n \geq 2$. Nous rencontrerons fréquemment des relations du type $p < \frac{c}{n-2}$ ou $p \leq \frac{c}{n-2}$, avec $c > 0$: nous conviendrons que dans le cas $n = 2$, ceci signifie $p < +\infty$.

Définition 4.2.1.1 *Un couple (q, r) est admissible si $2 \leq r < \frac{2n}{n-2}$ et*

$$\frac{2}{q} = \delta(r) \equiv n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right).$$

Pour I intervalle et (q_0, r_0) admissible, définissons les espaces

$$(4.2.4) \quad \begin{aligned} X_{loc}^1(I) = & \{ \psi ; \psi \in C(I, H^1), \text{ et} \\ & \psi \in L_{loc}^q(I, W^{1,r}) \text{ pour tout couple } (q, r) \text{ admissible} \}, \end{aligned}$$

et

$$(4.2.5) \quad X_{r_0, loc}^1(I) = C(I, H^1) \cap L_{loc}^{q_0}(I, W^{1, r_0}).$$

L'équation sans échelle qui correspond à notre problème est :

$$(4.2.6) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi + \frac{1}{2} \Delta \psi = \lambda |\psi|^p \psi, \\ \psi|_{t=0} = \psi_0. \end{cases}$$

Proposition 4.2.1.1 *([Gin95], propositions 5.5 et 5.6)*

On suppose $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $0 < p < \frac{4}{n-2}$. Si $\|\psi_0\|_{H^1}$ est suffisamment petit, alors le problème de Cauchy (4.2.6) a une solution unique dans $X_{p, loc}^1(\mathbb{R})$. La solution est en fait dans $L^\infty(H^1) \cap X_{loc}^1(\mathbb{R})$, les normes L^2 et d'énergie sont conservées :

$$(4.2.7) \quad \frac{d}{dt} \|\psi(t)\|_{L^2}^2 = 0,$$

$$(4.2.8) \quad \frac{d}{dt} \left(\|\nabla_x \psi(t)\|_{L^2}^2 + \frac{4\lambda}{p+2} \|\psi(t)\|_{L^{p+2}}^{p+2} \right) = 0.$$

Remarque : l'hypothèse de petitesse de la donnée initiale n'est indispensable que si $\lambda < 0$ et $p \geq 4/n$.

Nous en déduisons immédiatement le résultat suivant pour u^ε :

Proposition 4.2.1.2 *Supposons $f \in H^1 \cap \mathcal{F}(H^1)$, $\alpha > n\beta/2$ et $\beta < \frac{4}{n-2}$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, le problème de Cauchy $(NLS^\varepsilon)_n$ possède une unique solution globale $u^\varepsilon \in H^1$.*

4.2.2 Cas d'une caustique non linéaire

Nous supposons maintenant $\alpha = n\beta/2$, si bien que le problème (NLS^ε) s'écrit

$$(4.2.9) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon &= \lambda \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^{2\alpha/n} u^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x). \end{cases}$$

Notons, pour I un intervalle,

$$(4.2.10) \quad X(I) = \left\{ \psi ; \begin{array}{l} \psi \in (C \cap L^\infty)(I, L^2), \text{ et} \\ \psi \in L^q(I, L^r) \text{ pour tout couple } (q, r) \text{ admissible} \end{array} \right\},$$

et, pour (q_0, r_0) admissible,

$$(4.2.11) \quad X_{r_0}(I) = (C \cap L^\infty)(I, L^2) \cap L^{q_0}(I, L^{r_0}),$$

$$(4.2.12) \quad X_{r_0, loc}(I) = (C \cap L^\infty_{loc})(I, L^2) \cap L^{q_0}_{loc}(I, L^{r_0}).$$

On peut alors énoncer un résultat d'existence globale dans L^2 :

Proposition 4.2.2.1 ([Gin95], propositions 4.2 et 5.2)

On suppose $p < 4/n$ et $\varphi \in L^2$. Alors le problème de Cauchy (4.2.6) a une solution unique dans $X_{p, loc}(\mathbb{R})$. La solution est en fait dans $L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$ et satisfait $\|\psi(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, le problème est localement bien posé dans L^2 : pour $-\infty < T_1 \leq 0 \leq T_2 < +\infty$, si

$$\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi \text{ dans } L^2,$$

alors

$$\sup_{t \in [T_1, T_2]} \|\psi_\varepsilon(t) - \psi(t)\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Par contre, on n'a pas de résultat d'existence globale dans le cas focalisant ($\lambda < 0$), pour une puissance $p \geq 4/n$. Dans (NLS^ε) , prenons $\alpha = 2$, $\beta = 4/n$ et $\lambda = -1$:

$$(4.2.13) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon &= -\varepsilon^2 |u^\varepsilon|^{4/n} u^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x). \end{cases}$$

Nous allons voir que pour ce problème de Cauchy, il peut y avoir explosion à l'approche de la caustique. Considérons des données initiales particulières :

Lemme 4.2.2.1 *Il existe une solution dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, non triviale, de l'équation*

$$-\frac{1}{2}\Delta f + f = |f|^{\frac{4}{n}} f.$$

Pour démontrer ce lemme, on peut procéder par minimisation de la fonctionnelle énergie sous la contrainte $\|g\|_{L^q} = 1$ avec $q = 2 + \frac{4}{n}$, dans l'espace des fonctions H^1 radiales. Essentiellement, en dimension $n \geq 2$, cette symétrie radiale permet d'avoir des estimations de décroissance, et donc de contrôler la localisation d'une suite bornée de fonctions de H^1 radiales, ce qui donne la compacité d'une suite minimisante (voir par exemple [Str77a]).

On vérifie que pour cette donnée f , la solution de (4.2.13) est

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{(1-t)^{n/2}} e^{i \frac{2\varepsilon^2 t - x^2}{2\varepsilon(1-t)}} f\left(\frac{x}{1-t}\right).$$

En particulier, pour tout couple (q, r) admissible,

$$\|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L_x^r} = (1-t)^{-2/q} \|f\|_{L^r},$$

cette relation donnant une description de l'explosion de la solution au niveau de la caustique : il n'y a pas existence de la solution jusqu'à $t = 1$, et ce phénomène n'est pas dû aux oscillations (prendre $\varepsilon = 1$).

Introduisons à nouveau l'espace

$$(4.2.14) \quad \Sigma := H^1 \cap \mathcal{F}(H^1) = \{\psi \in H^1 ; x\psi \in L^2\},$$

ainsi que le générateur infinitésimal de Galilée

$$(4.2.15) \quad \boxed{J(t) := x + it\nabla_x.}$$

L'opérateur J commute avec l'opérateur $i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta$, et vérifie en outre

$$(4.2.16) \quad J(t) = U_0(t)xU_0(-t) = U_0(t-t')J(t')U_0(t'-t).$$

On a également la relation

$$(4.2.17) \quad J(t) = itM(t)\nabla_x M(-t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, où $M(t) = e^{i \frac{x^2}{2t}}$.

Lemme 4.2.2.2 (*inégalité de Gagliardo-Nirenberg*)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $r \in [2, \frac{2n}{n-2}]$. Il existe une constante C_r telle que pour tout u dont les normes H_x^1 et $\|J(s)u\|_{L_x^2}$ sont bornés pour $s \in I$, et tout $s \in I$,

$$(4.2.18) \quad \|u(s)\|_{L_x^r} \leq C_r \|u(s)\|_{L^2}^{1-\delta(r)} \|\nabla_x u(s)\|_{L^2}^{\delta(r)},$$

$$(4.2.19) \quad \|u(s)\|_{L_x^r} \leq C_r |s|^{-\delta(r)} \|u(s)\|_{L^2}^{1-\delta(r)} \|J(s)u\|_{L^2}^{\delta(r)}.$$

Pour I intervalle de $\mathbb{R}$, notons à nouveau

$$(4.2.20) \quad Y_{loc}^1(I) := \{\psi \in C(I, \Sigma) ; \text{ pour tout compact } K \text{ de } I \text{ et tout couple } (q, r) \text{ admissible, } \psi, \partial_x \psi, J(t)\psi \in L^q(K, L_x^r)\}.$$

On définit de même

$$(4.2.21) \quad Y^1(I) := \{\psi \in C(I, \Sigma) ; \text{ pour tout couple } (q, r) \text{ admissible, } \psi, \partial_x \psi, J(t)\psi \in L^q(I, L_x^r)\},$$

et, pour tout couple (q_0, r_0) admissible,

$$(4.2.22) \quad Y_{r_0}^1(I) := \{\psi \in C(I, \Sigma) ; \psi, \partial_x \psi, J(t)\psi \in L^\infty(I, L^2) \cap L^{q_0}(I, L_x^{r_0})\}.$$

Le résultat principal est alors :

Proposition 4.2.2.2 ([Gin97], proposition 3.5)

Supposons $\frac{4}{n} \leq p < \frac{4}{n-2}$ et $\lambda > 0$, ou $0 < p < 4/n$. Le problème de Cauchy (4.2.6) avec donnée initiale $\varphi \in \Sigma$ est globalement bien posé dans $Y_{loc}^1(\mathbb{R})$. Les normes L^2 et d'énergie des solutions sont conservées :

$$(4.2.23) \quad \frac{d}{dt} \|\psi(t)\|_{L^2}^2 = 0,$$

$$(4.2.24) \quad \frac{d}{dt} \left(\|\nabla_x \psi(t)\|_{L^2}^2 + \frac{4\lambda}{p+2} \|\psi(t)\|_{L^{p+2}}^{p+2} \right) = 0.$$

L'évolution de la norme L^2 de $J(t)\psi$ est décrite par la loi pseudo-conforme :

$$(4.2.25) \quad \frac{d}{dt} \left(\|J(t)\psi\|_{L^2}^2 + \frac{4\lambda}{p+2} t^2 \|\psi(t)\|_{L^{p+2}}^{p+2} \right) = \frac{2\lambda}{p+2} (4 - np) t \|\psi(t)\|_{L^{p+2}}^{p+2}.$$

Cette proposition ne donne malheureusement pas d'estimations globales, en particulier sur la norme L^2 de $J(t)\psi$: on n'a donc pas, a priori, la décroissance maximale en temps. Dans certains cas cependant, cette décroissance optimale peut être obtenue :

Proposition 4.2.2.3 ([Gin95], proposition 11.2)

On suppose $\lambda > 0$ et $p_0(n) < p < \frac{4}{n-2}$, $p_0(n)$ étant défini par

$$(4.2.26) \quad p_0(n) := \frac{2 - n + \sqrt{n^2 + 12n + 4}}{2n}.$$

Soit $\varphi \in \Sigma$ et $\psi \in Y_{loc}^1(\mathbb{R})$ la solution de (4.2.6). Alors $\psi \in Y^1(\mathbb{R})$.

Comme au paragraphe précédent, nous pouvons déduire de ces résultats, l'existence de solutions pour le problème (NLS^ε) :

Proposition 4.2.2.4 Supposons $f \in \Sigma$, $0 < \alpha < \frac{2n}{n-2}$, et $\lambda > 0$ si $\alpha \geq 2/n$. Alors le problème de Cauchy (4.2.9) possède une unique solution globale $u^\varepsilon \in Y_{loc}^1(\mathbb{R})$.

4.3 Intégrales oscillantes

Comme annoncé en introduction, l'écriture de la solution u^ε à l'aide d'une intégrale oscillante devient, en dimension n :

$$(4.3.1) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a_\varepsilon(t, \xi) d\xi.$$

Le symbole a_ε est essentiellement la transformée de Fourier de u^ε :

$$(4.3.2) \quad a_\varepsilon(t, \xi) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} e^{i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2} \widehat{u^\varepsilon} \left(t, \frac{\xi}{\varepsilon} \right).$$

En procédant comme dans le cas monodimensionnel, on a encore convergence de la donnée initiale du symbole : notons

$$(4.3.3) \quad a_0(\xi) := (2\pi)^{n/2} e^{-in\frac{\pi}{4}} f(-\xi).$$

Lemme 4.3.0.3 *Supposons $f \in \Sigma$. Alors $a_\varepsilon(0, \cdot) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\cdot)$ dans Σ .*

La propagation du symbole est décrite par la relation :

$$(4.3.4) \quad i\partial_t a_\varepsilon(t, \xi) = \lambda \varepsilon^{\alpha-n/2-1} e^{i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2} \widehat{|u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon} \left(t, \frac{\xi}{\varepsilon} \right).$$

Il sera utile de travailler à l'aide des variables éclatées $T = \frac{t-1}{\varepsilon}$ et $X = \frac{x}{\varepsilon}$: introduisons le changement d'échelle, unitaire sur L_x^2 ,

$$(4.3.5) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

On a alors

$$(4.3.6) \quad a_\varepsilon(t, \xi) = e^{i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2} \widehat{\psi_\varepsilon} \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \xi \right) = \mathcal{F} \left(U_0 \left(\frac{1-t}{\varepsilon} \right) \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) \right) (\xi),$$

et comme précédemment, la fonction ψ_ε vérifie une équation de Schrödinger sans échelle dans le cas d'une caustique non linéaire ($2\alpha = n\beta$).

4.3.1 Solution approchée : cas de la propagation linéaire

Dans le cas de l'équation libre, on a

$$a_\varepsilon(t, \xi) \equiv a_\varepsilon(0, \xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0(\xi),$$

d'après le lemme 4.3.0.3. Comme dans le cas de la dimension 1, il est donc naturel, dans le cas d'une propagation linéaire ($\alpha > 1$), de comparer la solution exacte u^ε à la solution approchée

$$(4.3.7) \quad u_{app}^\varepsilon(t, x) := \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a_0(\xi) d\xi.$$

Nous aurons besoin d'estimer cette solution approchée dans des espaces de Lebesgue : contrairement au cas monodimensionnel, on n'a plus d'inclusion de H^1 dans L^∞ , ce qui nous interdit a priori d'estimer u_{app}^ε dans L^∞ pour $f \in \Sigma$. Par contre, nous pouvons estimer u_{app}^ε dans les espaces de Lebesgue dans lesquels s'injecte H^1 :

Lemme 4.3.1.1 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour tout $r \in [2, \frac{2n}{n-2}[$, il existe une constante C_r telle que*

$$(4.3.8) \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x \cdot \xi}{\varepsilon}} f(\xi) d\xi \right\|_{L_x^r} \leq \frac{C_r}{|1-t|^{\delta(r)}} \|f\|_{H^1}.$$

Démonstration : nous avons déjà vu dans le cas monodimensionnel que l'écriture ci-dessus peut être remplacée par

$$(4.3.9) \quad \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x \cdot \xi}{\varepsilon}} f(\xi) d\xi = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} U_0 \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) \mathcal{F}^{-1} f \left(\frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Par interpolation entre l'action du groupe unitaire $U_0 : L^2 \rightarrow L^2$ et $L^1 \rightarrow L^\infty$, on a de façon classique

$$(4.3.10) \quad \|U_0(t)\psi\|_{L^r} \leq \frac{C}{|t|^{\delta(r)}} \|\psi\|_{L^{r'}}.$$

On a ainsi

$$(4.3.11) \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x \cdot \xi}{\varepsilon}} f(\xi) d\xi \right\|_{L_x^r} \leq \frac{C_r}{|1-t|^{\delta(r)}} \|\mathcal{F}^{-1} f\|_{L^{r'}}.$$

Par ailleurs,

$$(4.3.12) \quad \mathcal{F}(H^1) \subset L^p, \quad \text{pour } \frac{2n}{n+2} < p \leq 2.$$

En effet, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \int |f|^p &= \int \langle x \rangle^{-p} \langle x \rangle^p |f|^p \\ &\leq \left(\int \langle x \rangle^{-pq'} \right)^{1/q'} \left(\int \langle x \rangle^{pq} |f|^{pq} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Avec $pq = 2$, la première intégrale converge si $pq' > n$, c'est-à-dire si $\frac{2n}{n+2} < p \leq 2$.

La condition $\frac{2n}{n+2} < r' \leq 2$ équivaut à la condition $2 \leq r < \frac{2n}{n-2}$, donc ceci achève la preuve du lemme. $\square$

Corollaire 4.3.1.1 *Soit $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Pour tout couple (q, r) admissible et tout $t < 1$, on a*

$$(4.3.13) \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x \cdot \xi}{\varepsilon}} f(\xi) d\xi \right\|_{L^q(0,t;L_x^r)} \leq \frac{C_r}{|1-t|^{1/q}} \|f\|_{H^1}.$$

À la focalisation, on retrouve l'estimation du cas de l'introduction :

Lemme 4.3.1.2 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour tout $r \in [2, \frac{2n}{n-2}]$, il existe une constante C_r telle que*

$$(4.3.14) \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} f(\xi) d\xi \right\|_{L_x^r} \leq \frac{C_r}{\varepsilon^{\delta(r)}} \|f\|_{\mathcal{F}(H^1)}.$$

4.3.2 Solution approchée : cas de la propagation non linéaire

Nous supposons dans ce paragraphe $\alpha = 1$. Reprenons le calcul formel fait dans le cas monodimensionnel, qui nous avait conduit à introduire une phase g , nous ramenant essentiellement à conduire les calculs de la même façon que dans le cas d'une propagation linéaire. Pour

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} a(t, \xi) d\xi,$$

la formule de la phase stationnaire donne, en dehors de $t = 1$,

$$u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{(2i\pi(1-t))^{n/2}} e^{i\frac{x^2}{2\varepsilon(1-t)}} a\left(t, \frac{x}{t-1}\right),$$

et

$$\widehat{|u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon}\left(t, \frac{\xi}{\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\varepsilon^{n/2}}{|2\pi(1-t)|^{n\beta/2}} e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2} |a|^\beta a(t, \xi).$$

On s'attend donc, à la limite, à trouver pour le symbole a l'équation de transport

$$(4.3.15) \quad i\partial_t a(t, \xi) = \frac{\lambda}{|2\pi(1-t)|^{n\beta/2}} |a|^\beta a(t, \xi),$$

avec pour donnée de Cauchy

$$a|_{t=0}(\xi) = a_0(\xi).$$

Ceci implique la constance du module de a (égal à celui de a_0), et nous suggère d'introduire une phase g solution de

$$(4.3.16) \quad \begin{cases} \partial_t g(t, \xi) = -\frac{\lambda}{|1-t|^{\frac{n\beta}{2}}} |f(-\xi)|^\beta, \\ g|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Dans le cas d'une caustique linéaire ($\frac{n\beta}{2} < 1$), l'équation (4.3.16) s'intègre pour tout temps en

$$(4.3.17) \quad g(t, \xi) = |f(-\xi)|^\beta \frac{\lambda}{1 - n\frac{\beta}{2}} \left(\operatorname{sgn}(1-t) |1-t|^{1-n\frac{\beta}{2}} - 1 \right).$$

Il est alors naturel de préférer à l'écriture (4.3.1), la formulation

$$(4.3.18) \quad u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) d\xi.$$

Nous nous sommes en quelque sorte ramené au cas précédent ($\alpha > 1$) dans la mesure où pour montrer que l'optique géométrique non linéaire est valide, il nous suffit maintenant de montrer que le symbole modifié $\tilde{a}_\varepsilon(t, \xi)$ converge vers le symbole indépendant du temps $a_0(\xi)$.

Ceci revient exactement à montrer que u_{app}^ε constitue une bonne approximation de la solution exacte u^ε , où u_{app}^ε est défini par

$$(4.3.19) \quad u_{app}^\varepsilon(t, x) := \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} a_0(\xi) d\xi.$$

Comme dans le cas monodimensionnel, l'équation vérifiée par u_{app}^ε peut paraître un peu lointaine de celle vérifiée par u^ε :

$$\begin{aligned} i\varepsilon \partial_t u_{app}^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta u_{app}^\varepsilon &= -\varepsilon^{1-\frac{n}{2}} \int \partial_t g(t, \xi) e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} a_0(\xi) d\xi \\ &= \lambda \varepsilon^{1-\frac{n}{2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \frac{|f(-\xi)|^\beta}{|1-t|^{n\beta/2}} a_0(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

La formule de la phase stationnaire nous indique que le terme $\varepsilon |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon(t, x)$ est équivalent, lorsque ε tend vers zéro, au membre de droite de l'équation précédente. Comme dans le cas monodimensionnel, appelons Δ^ε la différence des deux expressions :

$$(4.3.20) \quad \begin{aligned} \Delta^\varepsilon(t, x) &:= |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon(t, x) \\ &- \varepsilon^{-n/2} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \frac{|f(-\xi)|^\beta}{|1-t|^{n\beta/2}} a_0(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

On souhaite alors énoncer un résultat analogue au lemme 3.3.6.1 du cas monodimensionnel. Nous allons recourir à des hypothèses beaucoup plus forte que dans le premier cas : dans les calculs tels que nous allons les mener, ceci semble indispensable, en raison de l'absence d'estimations dans L^∞ . Notons à nouveau

$$(4.3.21) \quad F(t, \xi) := e^{ig(t, -\xi)} f(\xi).$$

(H1) La transformée de Fourier inverse de F en sa seconde variable est localement bornée à valeurs dans l'espace de Lebesgue $L^{\frac{\beta+2}{\beta+1}}$:

$$(4.3.22) \quad \mathcal{F}_{\xi \rightarrow y}^{-1} F(t, y) \in L_{loc}^\infty \left(L^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \right).$$

Remarque : puisque $\frac{2n}{n+2} < \frac{\beta+2}{\beta+1} \leq 2$, cette hypothèse est vérifiée si $F \in L_{loc}^\infty(H^1)$. Pour $f \in \Sigma$, il est facile de vérifier que cela revient à faire en outre l'hypothèse $|f|^\beta \nabla f \in L^2$. Ainsi, toute fonction f dans la classe de Schwartz vérifie l'hypothèse (H1).

Lemme 4.3.2.1 *Supposons $0 < \beta < \frac{2}{n}$, $f \in \Sigma$ et l'hypothèse (H1) vérifiée. Alors*

$$(4.3.23) \quad \|\Delta^\varepsilon\|_{L^1(0,1-\varepsilon;L_x^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

et

$$(4.3.24) \quad \|\Delta^\varepsilon\|_{L^1(1+\varepsilon,2;L_x^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Démonstration : par la symétrie par rapport à $t = 1$, les relations (4.3.23) et (4.3.24) sont semblables. Nous montrons la première, la vérification de la seconde étant parfaitement analogue.

Comme dans la preuve du lemme 3.3.6.1, introduisons, pour $t < 1$, la fonction intermédiaire

$$(4.3.25) \quad u_1^\varepsilon(t, x) := \frac{1}{|1-t|^{n/2}} e^{i\frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)} + ig(t, \frac{x}{t-1})} f\left(\frac{x}{1-t}\right),$$

qui apparaît par application de la formule de la phase stationnaire à u_{app}^ε . Comme dans le cas monodimensionnel, nous ne faisons le calcul que sur la partie $|u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon - |u_1^\varepsilon|^\beta u_1^\varepsilon$, car le calcul sur l'autre partie est très semblable et plus facile. Notons encore

$$\tilde{\Delta}^\varepsilon(t, x) = |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon(t, x) - |u_1^\varepsilon|^\beta u_1^\varepsilon(t, x)$$

et

$$\Delta_1^\varepsilon(t, x) := u_{app}^\varepsilon(t, x) - u_1^\varepsilon(t, x).$$

Nous utiliserons l'analogie du lemme 3.3.6.2 du cas monodimensionnel :

Lemme 4.3.2.2 *Soit $r \in [2, \frac{2n}{n-2}]$. Soit $\sigma(t, \xi)$ une fonction telle que sa transformée de Fourier en sa seconde variable soit localement bornée en temps à valeurs dans $L^{r'}$. Si*

$$H^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon}} \sigma(t, \xi) d\xi,$$

alors en notant

$$H_0^\varepsilon(t, x) = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon(1-t)}} \left(\frac{i}{2\pi(1-t)} \right)^{n/2} \sigma\left(t, \frac{x}{1-t}\right),$$

il existe une fonction $h_r \in C(\mathbb{R})$, avec $h_r(0) = 0$, telle que

$$(4.3.26) \quad \|H^\varepsilon(t, \cdot) - H_0^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L_x^r} = \frac{1}{|1-t|^{\delta(r)}} h_r\left(\frac{\varepsilon}{1-t}\right).$$

Remarque : comme nous l'avons déjà remarqué l'hypothèse sur σ est vérifiée dès que σ est localement bornée à valeurs dans H^1 .

Démonstration du lemme 4.3.2.2 : comme dans le lemme 3.3.6.2, la formule de Parseval implique

$$(4.3.27) \quad H^\varepsilon(t, x) = e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon(1-t)}} \left(\frac{i}{2\pi(1-t)} \right)^{n/2} \int e^{i\frac{\varepsilon}{2(1-t)}y^2} e^{i\frac{xy}{1-t}} \mathcal{F}^{-1}\sigma(t, y) dy.$$

Notons

$$h_r(z) := \left\| \left(e^{i\frac{z}{2}y^2} - 1 \right) \mathcal{F}^{-1}\sigma(t, y) \right\|_{L_y^{r'}}.$$

On a alors immédiatement la relation (4.3.26). Par hypothèse, $\mathcal{F}^{-1}\sigma \in L^{r'}$. Le lemme 4.3.2.2 découle alors du théorème de convergence dominée. $\square$

Revenons maintenant à la preuve du lemme 4.3.2.1. La technique pour achever la démonstration est classique en ce qui concerne les équations de Schrödinger non linéaires : elle repose sur l'utilisation de l'inégalité de Hölder en espace et en temps, avec des espaces de Lebesgue suggérés par les inégalités de Strichartz (que nous rappellerons plus loin). Soit donc (q, r) un couple admissible (nous prendrons en fait $(q, r) = (\infty, 2)$). D'après l'inégalité de Hölder, en espace puis en temps,

$$\left\| \tilde{\Delta}^\varepsilon \right\|_{L^{q'}(0, t; L_x^{r'})} \leq C \left(\|u_{app}^\varepsilon\|_{L^k(0, t; L^s)}^\beta + \|u_1^\varepsilon\|_{L^k(0, t; L^s)}^\beta \right) \|\Delta_1^\varepsilon\|_{L^{q_1}(0, t; L^{r_1})},$$

avec

$$(4.3.28) \quad \begin{cases} \frac{1}{r'} = \frac{1}{r_1} + \frac{\beta}{s}, \\ \frac{1}{q'} = \frac{1}{q_1} + \frac{\beta}{k}. \end{cases}$$

Choisissons maintenant $(q, r) = (\infty, 2)$ et $r_1 = \beta + 2$: ce choix est permis puisqu'alors on a, d'après (4.3.28), $s = 2(\beta + 2)$, qui est strictement inférieur à l'indice critique $\frac{2n}{n-2}$ (car $\beta < 2/n < 2/(n-2)$). Choisissons maintenant

$$q_1 = \beta + 2, \quad k = \frac{\beta + 2}{\beta + 1}.$$

On a alors

$$\frac{1}{q_1} > \delta(s), \quad \frac{1}{k} > \delta(s),$$

donc d'après le lemme 4.3.1.1,

$$(4.3.29) \quad \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^k(0, t; L^s)}^\beta \leq C,$$

et u_1^ε vérifie de façon évidente la même estimation. D'après le lemme 4.3.2.2, on a également

$$(4.3.30) \quad \|\Delta_1^\varepsilon\|_{L^{q_1}(0, t; L_x^{r_1})} \leq C \int_0^t \frac{1}{(1-s)^{q_1\delta(r_1)}} h_{r_1} \left(\frac{\varepsilon}{1-s} \right) ds.$$

En particulier, avec $t = 1 - \varepsilon$, on a

$$(4.3.31) \quad \|\Delta_1^\varepsilon\|_{L^{q_1}(0, 1-\varepsilon; L_x^{r_1})} \leq C \int_\varepsilon^1 \frac{1}{s^{q_1\delta(r_1)}} h_{r_1} \left(\frac{\varepsilon}{s} \right) ds.$$

Puisque $q_1\delta(r_1) < 1$, on peut procéder comme dans le cas monodimensionnel : en coupant l'intégrale en $\int_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1$, on montre que cette quantité tend vers zéro avec ε . $\square$

4.4 Propagation et caustique linéaires

Nous supposons dans ce paragraphe $\alpha > \max(1, n\beta/2)$. Dans le cas monodimensionnel, nous avons souvent utilisé, pour estimer les termes non linéaires, l'inclusion $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$. Évidemment, cette approche demande à être modifiée dans le cas $n \geq 2$. Pour estimer les termes non linéaires, nous aurons recours à l'inégalité de Hölder (comme dans le paragraphe précédent) et aux inégalités de Strichartz (voir par exemple [Str77b], [GV85], [Kat87], [Yaj87], [Caz93], [Gin95], [Gin97]) :

Proposition 4.4.0.1 (*inégalités de Strichartz*)

1. Pour tout couple admissible (q, r) , il existe C_r tel que

$$(4.4.1) \quad \|U_0(t)u\|_{L^q(\mathbb{R}; L^r)} \leq C_r \|u\|_{L^2}.$$

2. Pour tous couples admissibles (q_1, r_1) et (q_2, r_2) , et tout intervalle I de $\mathbb{R}$, il existe C_{r_1, r_2} tel que

$$(4.4.2) \quad \left\| \int_{I \cap \{s \leq t\}} U_0(t-s)F(s)ds \right\|_{L^{q_1}(I; L^{r_1})} \leq C_{r_1, r_2} \|F\|_{L^{q'_2}(\mathbb{R}; L^{r'_2})}.$$

Les constantes C_{r_1, r_2} sont indépendantes de I .

Pour travailler dans notre cadre d'étude, nous aurons besoin d'adapter ces inégalités aux échelles considérées. Pour une équation de la forme

$$\begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = f, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

la formulation intégrale s'écrit

$$(4.4.3) \quad u^\varepsilon(t, x) = U^\varepsilon(t)u_0 - i\varepsilon^{-1} \int_0^t U^\varepsilon(t-s)F(s)ds,$$

avec

$$(4.4.4) \quad U^\varepsilon(t) = e^{i\varepsilon \frac{t}{2} \Delta}.$$

Par changement de variable, on obtient donc les inégalités de Strichartz :

1. Pour tout couple admissible (q, r) , il existe C_r tel que

$$(4.4.5) \quad \varepsilon^{\frac{1}{q}} \|U^\varepsilon(t)u\|_{L^q(\mathbb{R}; L^r)} \leq C_r \|u\|_{L^2}.$$

2. Pour tous couples admissibles (q_1, r_1) et (q_2, r_2) , et tout intervalle I de $\mathbb{R}$, il existe C_{r_1, r_2} tel que

$$(4.4.6) \quad \varepsilon^{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}} \left\| \int_{I \cap \{s \leq t\}} U^\varepsilon(t-s)F(s)ds \right\|_{L^{q_1}(I; L^{r_1})} \leq C_{r_1, r_2} \|F\|_{L^{q'_2}(\mathbb{R}; L^{r'_2})}.$$

Les constantes ne dépendent ni de ε , ni de I .

4.4.1 Propagation avant la caustique

Le résultat principal de ce paragraphe est essentiellement le même que dans le cas monodimensionnel : nous montrons qu'avant une couche limite de taille ε , l'optique géométrique linéaire reste valide dans Σ . La méthode est très semblable elle aussi, et repose sur l'utilisation de l'opérateur de Galilée J . Notons dès maintenant

$$(4.4.7) \quad J^\varepsilon(t) := \frac{x}{\varepsilon} + i(t-1)\nabla_x.$$

Cet opérateur tient toujours lieu de dérivation en ξ pour les symboles lagrangiens : si

$$v^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon}} b_\varepsilon(t, \xi) d\xi,$$

alors

$$J^\varepsilon(t)v^\varepsilon(t, x) = \frac{i}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon}} \nabla_\xi b_\varepsilon(t, \xi) d\xi.$$

On a de même :

Lemme 4.4.1.1 *L'opérateur J^ε vérifie :*

– *la relation de commutation*

$$(4.4.8) \quad \left[J^\varepsilon(t), i\varepsilon\partial_t + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta \right] = 0 ;$$

– *si on note $M^\varepsilon(t) = e^{i\frac{x^2}{2\varepsilon(t-1)}}$, alors $J^\varepsilon(t)$ s'écrit*

$$(4.4.9) \quad J^\varepsilon(t) = i(t-1)M^\varepsilon(t)\nabla_x M^\varepsilon(2-t) ;$$

– *l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg modifiée : pour tout $r \in [2, \frac{2n}{n-2}[$, il existe C_r tel que*

$$(4.4.10) \quad \|w(t)\|_{L^r} \leq \frac{C_r}{|1-t|^{\delta(r)}} \|J^\varepsilon(t)w(t)\|_{L^2}^{\delta(r)} \|w(t)\|_{L^2}^{1-\delta(r)} ;$$

– *pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifiant la condition d'invariance de jauge*

$$\exists G \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad F(z) = zG'(|z|^2),$$

on a

$$(4.4.11) \quad J^\varepsilon(t)F(w) = \partial_z F(w)J^\varepsilon(t)w - \partial_{\bar{z}} F(w)\overline{J^\varepsilon(t)w}.$$

Comme dans le cas monodimensionnel, on a :

Proposition 4.4.1.1 *On suppose $f \in \Sigma$, $\alpha \geq n\beta/2$ et $\frac{4}{n+2} < \beta < \frac{4}{n-2}$ (donc $\alpha > 1$). Si $\alpha > n\beta/2$, alors pour toute constante C_0 , l'optique géométrique linéaire est valable avant la couche limite de taille $C_0\varepsilon$: si on note $t_\varepsilon = 1 - C_0\varepsilon$,*

$$(4.4.12) \quad \sup_{t \in [0, t_\varepsilon]} \|a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Si $\alpha = n\beta/2$, alors l'optique géométrique est valable en dehors d'une couche limite plus large :

$$(4.4.13) \quad \text{si } t < 1 \text{ est tel que } \frac{\varepsilon}{1-t} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \text{ alors } \sup_{s \in [0, t]} \|a_\varepsilon(s, \cdot) - a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Remarque : dans l'énoncé ci-dessus, il apparaît une restriction un peu inattendue ($\beta > \frac{4}{n+2}$). Nous verrons plus loin que cette restriction n'est apparemment que technique, et que nous pouvons nous en passer, quitte à avoir une description dans L^2 seulement, et plus dans Σ .

Démonstration : la démarche est celle que nous avons déjà employée. Elle consiste à montrer que le reste vérifie (avec de la marge) les mêmes estimations que la solution approchée dans les régions apparaissant dans l'énoncé. Notons à nouveau w^ε le reste

$$(4.4.14) \quad w^\varepsilon(t, x) = u^\varepsilon(t, x) - u_{app}^\varepsilon(t, x),$$

où u_{app}^ε est la solution approchée définie par (4.3.7). Le reste vérifie

$$(4.4.15) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t w^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta w^\varepsilon = \lambda \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon, \\ w^\varepsilon|_{t=0} = o(1) \text{ dans } \Sigma. \end{cases}$$

D'après le lemme 4.3.1.1, pour tout $s \in [2, \frac{2n}{n-2}[$, il existe $C_s > 0$ tel que la solution approchée vérifie

$$(4.4.16) \quad \|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L_x^s} \leq \frac{C_s}{(1-t)^{\delta(s)}}.$$

Pour ε et t_0 suffisamment petits, le reste w^ε vérifie ces estimations pour $t \in [0, t_0]$. Montrons que pour ε suffisamment petit, w^ε vérifie ces estimations sur les intervalles de temps apparaissant dans la proposition. En fait, nous n'aurons besoin de cette estimation que pour une seule valeur de s , qui sera déterminée plus loin. Tant que

$$(4.4.17) \quad \|w^\varepsilon(t)\|_{L_x^s} \leq \frac{C_s}{(1-t)^{\delta(s)}},$$

procédons comme dans le cas monodimensionnel. D'après la formulation intégrale de l'équation vérifiée par le reste, on a, pour (q_2, r_2) couple admissible et $t_0 < 1$:

$$(4.4.18) \quad \begin{aligned} \|w^\varepsilon\|_{L^{q_2}(0, t_0; L^{r_2})} &\leq \left\| U^\varepsilon(t) w^\varepsilon|_{t=0} \right\|_{L^{q_2}(0, t_0; L^{r_2})} \\ &+ C\varepsilon^{\alpha-1} \left\| \int_0^t U^\varepsilon(t-s) |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon(s) ds \right\|_{L^{q_2}(0, t_0; L^{r_2})}. \end{aligned}$$

D'après les inégalités de Strichartz (4.4.5) et (4.4.6), on en déduit : pour tout couple admissible (q, r) , il existe des constantes telles que

$$\begin{aligned}
 \|w^\varepsilon\|_{L^{q_2}(0, t_0; L^{r_2})} &\leq C\varepsilon^{-\frac{1}{q_2}} \|w^\varepsilon_{|t=0}\|_{L^2} + C\varepsilon^\rho \| |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon \|_{L^{q'}(0, t_0; L^{r'})} \\
 (4.4.19) \quad &\leq C\varepsilon^{-\frac{1}{q_2}} \|w^\varepsilon_{|t=0}\|_{L^2} + C\varepsilon^\rho \| |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon \|_{L^{q'}(0, t_0; L^{r'})} \\
 &\quad + C\varepsilon^\rho \| |w^\varepsilon|^\beta w^\varepsilon \|_{L^{q'}(0, t_0; L^{r'})},
 \end{aligned}$$

où on a noté $\rho = \alpha - 1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{q_2}$. Nous allons montrer que le terme en w^ε du second membre peut être absorbé par le premier membre (pour ε petit et t_0 comme dans l'énoncé de la proposition), de sorte que w^ε vérifie les mêmes estimations que si on remplace u^ε par u_{app}^ε dans l'équation vérifiée par le reste. D'après l'inégalité de Hölder, on a (exactement comme au paragraphe précédent) :

$$(4.4.20) \quad \| |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon \|_{L^{q'}(0, t_0; L^{r'})} \leq \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^k(0, t_0; L^s)}^\beta \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^{q_1}(0, t_0; L^{r_1})},$$

avec

$$(4.4.21) \quad \begin{cases} \frac{1}{r'} = \frac{1}{r_1} + \frac{\beta}{s}, \\ \frac{1}{q'} = \frac{1}{q_1} + \frac{\beta}{k}. \end{cases}$$

Le terme en w^ε vérifie évidemment la même inégalité. Nous souhaitons dans un premier temps choisir des indices tels que la condition (4.4.21) soit vérifiée avec :

- les couples (q, r) et (q_1, r_1) sont admissibles ;
- $0 < \frac{1}{k} < \delta(s) < 1$.

Prenons $r = r_1$ et $\delta(s) \lesssim 1$. Ceci est possible, car avec $\delta(s) = 1$ et $r = r_1$, la première partie de (4.4.21) devient

$$\delta(r) = \frac{\beta}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right),$$

et cette expression est bien strictement inférieure à 1 pour $\beta < \frac{4}{n-2}$. Toujours avec $\delta(s) = 1$ et $r = r_1$, la seconde partie de (4.4.21) donne

$$\frac{2}{k} = 1 - \frac{n}{2} + \frac{2}{\beta},$$

qui est bien dans l'intervalle $]0, 2[$ pour $\frac{4}{n+2} < \beta < \frac{4}{n-2}$. Par continuité, les conditions recherchées sont encore vérifiées pour $\delta(s)$ proche de 1 et $\delta(s) < 1$. Fixons alors un indice s ainsi construit : ces conditions étant purement algébriques, nous pouvons choisir ce s pour la condition (4.4.17). Prenons alors $r = r_1 = r_2$. Dans ce cas, le terme non linéaire en w se majore par :

$$\begin{aligned}
 (4.4.22) \quad \varepsilon^\rho \| |w^\varepsilon|^\beta w^\varepsilon \|_{L^{q'}(0, t_0; L^{r'})} &\leq C \frac{\varepsilon^\rho}{(1 - t_0)^{\beta(\delta(s) - \frac{1}{k})}} \|w^\varepsilon\|_{L^{q_1}(0, t_0; L^{r_1})} \\
 &\leq C\varepsilon^{\alpha - n\beta/2} \left(\frac{\varepsilon}{1 - t_0} \right)^{\beta(\delta(s) - \frac{1}{k})} \|w^\varepsilon\|_{L^q(0, t_0; L^r)}.
 \end{aligned}$$

Le facteur du terme $\|w^\varepsilon\|_{L^q(0,t_0;L^r)}$ tend vers zéro avec ε dans la région considérée, donc ce terme peut être absorbé par le premier membre : pour ε suffisamment proche de zéro, le reste vérifie

$$(4.4.23) \quad \begin{aligned} \|w^\varepsilon\|_{L^q(0,t_0;L^r)} &\leq C\varepsilon^{-\frac{1}{q}} \|w|_{t=0}^\varepsilon\|_{L^2} \\ &\quad + C\varepsilon^{\alpha-n\beta/2} \left(\frac{\varepsilon}{1-t_0}\right)^{\beta(\delta(s)-\frac{1}{k})} \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^q(0,t_0;L^r)}. \end{aligned}$$

En injectant cette inégalité dans la relation (4.4.19) avec maintenant $r_2 = 2$ (donc $q_2 = \infty$), on a

$$(4.4.24) \quad \begin{aligned} \|w^\varepsilon\|_{L^\infty(0,t_0;L^2)} &\leq C \|w|_{t=0}^\varepsilon\|_{L^2} + C\varepsilon^{\alpha-1-\frac{1}{q}} \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^k(L^s)}^\beta \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^q(L^r)} \\ &\quad + C \frac{\varepsilon^{\alpha-1-\frac{1}{q}}}{(1-t_0)^{\beta(\delta(s)-\frac{1}{k})}} \left(\varepsilon^{-\frac{1}{q}} \|w|_{t=0}^\varepsilon\|_{L^2} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{\alpha-n\beta/2} \left(\frac{\varepsilon}{1-t_0}\right)^{\beta(\delta(s)-\frac{1}{k})} \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^q(L^r)} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons déjà utilisé la relation

$$\alpha - 1 - \frac{2}{q} = \alpha - n\frac{\beta}{2} + \beta \left(\delta(s) - \frac{1}{k} \right).$$

Finalement, puisque u_{app}^ε est solution de l'équation de Schrödinger libre, on a

$$u_{app}^\varepsilon(t, x) = U^\varepsilon(t) \left(e^{-i\frac{x^2}{2\varepsilon}} f(x) \right),$$

et d'après l'inégalité de Strichartz (4.4.5),

$$(4.4.25) \quad \varepsilon^{\frac{1}{q}} \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r)} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

Ainsi, on a montré que dans la région considérée (avant la caustique), et tant que la relation (4.4.17) est vraie,

$$(4.4.26) \quad \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} = o(1).$$

En appliquant l'opérateur J^ε à l'équation vérifiée par le reste w^ε , on peut répéter les calculs ci-dessus pour montrer qu'on a dans les mêmes conditions

$$(4.4.27) \quad \|J^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t)\|_{L^2} = o(1).$$

D'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (4.4.10), on a alors

$$(4.4.28) \quad \|w^\varepsilon(t)\|_{L^s} \leq \frac{C_s}{(1-t)^{\delta(s)}} o(1),$$

et la relation (4.4.17) est toujours vraie dans la région apparaissant dans l'énoncé de la proposition 4.4.1.1.

Pour finalement montrer que $\varepsilon \nabla_x w^\varepsilon$ reste petit, on procède encore à la manière du cas monodimensionnel : prenons le gradient de la relation (4.4.15). La relation (4.4.18) devient alors

$$(4.4.29) \quad \begin{aligned} \|\varepsilon \nabla_x w^\varepsilon\|_{L^{q_2}(0,t_0;L^{r_2})} &\leq \left\| U^\varepsilon(t) \varepsilon \nabla_x w|_{t=0}^\varepsilon \right\|_{L^{q_2}(0,t_0;L^{r_2})} \\ &\quad + C\varepsilon^{\alpha-1} \left\| \int_0^t U^\varepsilon(t-s) |u^\varepsilon|^\beta \varepsilon \nabla_x u^\varepsilon(s) ds \right\|_{L^{q_2}(0,t_0;L^{r_2})}. \end{aligned}$$

On montre alors comme dans l'estimation de w^ε dans L^2 qu'avant la caustique,

$$\|\varepsilon \nabla_x w^\varepsilon\|_{L^2} = o(1).$$

Comme dans le cas monodimensionnel, ceci achève la preuve de la proposition 4.4.1.1. $\square$

Dans le cas $\beta \leq \frac{4}{n+2}$, on peut encore montrer que la propagation reste linéaire, mais dans un sens beaucoup plus faible. L'idée consiste à utiliser des estimations dans L^∞ sur la solution approchée, ce qui exige plus de régularité que la seule hypothèse $f \in \Sigma$, dès que l'on se place en dimension strictement supérieure à 1. En reprenant les calculs faits pour le cas monodimensionnel, il vient immédiatement

$$(4.4.30) \quad \|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|1-t|^{n/2}} \|\hat{f}\|_{L^1}.$$

Nous supposons donc dans la suite du paragraphe 4.4.1

$$(4.4.31) \quad f \in \Sigma \cap \mathcal{F}(L^1).$$

Remarque : cette hypothèse est vérifiée si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ pour un $s > n/2$.

Il s'agit ensuite, grâce à ces estimations dans L^∞ , de tirer avantage de l'invariance de jauge de la non-linéarité pour prouver la validité de l'optique géométrique linéaire grâce au lemme de Gronwall. Afin d'englober le cas $\beta \leq \frac{4}{n+2}$, nous supposons dans la suite $\beta \leq 1$. Réécrivons l'équation vérifiée par le reste :

$$(4.4.32) \quad i\varepsilon \partial_t w^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta w^\varepsilon = \lambda \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon.$$

Factorisons la non-linéarité comme suit :

$$\begin{aligned} |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon &= |u^\varepsilon|^\beta (u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon) + \left(|u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right) u_{app}^\varepsilon + |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon \\ &= |u^\varepsilon|^\beta w^\varepsilon + \left(|u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right) u_{app}^\varepsilon + |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon. \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (4.4.32) par $\overline{w^\varepsilon}$, puis en prenant la partie imaginaire du résultat intégré en espace, le terme $|u^\varepsilon|^\beta w^\varepsilon$ disparaît, et il reste :

$$\begin{aligned} \partial_t \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq C\varepsilon^{\alpha-1} \left\| \left(|u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right) u_{app}^\varepsilon(t) \right\|_{L^2} \\ &\quad + C\varepsilon^{\alpha-1} \left\| |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon(t) \right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Pour nous débarrasser du terme u^ε , fixons $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et distinguons deux cas :

1^{er} cas : $|u^\varepsilon|(t, x) \leq |u_{app}^\varepsilon|(t, x)$.

Dans ce cas, on a évidemment

$$\left| |u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right| \leq 2|u_{app}^\varepsilon|^\beta.$$

2^e cas : $|u^\varepsilon|(t, x) \geq |u_{app}^\varepsilon|(t, x)$.

Dans ce cas, par concavité de la fonction $x \mapsto x^\beta$ (on a supposé $\beta \leq 1$),

$$\left| |u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right| \leq C_\beta \left| |u^\varepsilon| - |u_{app}^\varepsilon| \right| |u_{app}^\varepsilon|^{\beta-1}.$$

Il existe donc une constante C indépendante de (t, x) telle que

$$\left| |u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right| \leq C |u_{app}^\varepsilon|^{\beta-1} \max(|u_{app}^\varepsilon|, |w^\varepsilon|) \leq C |u_{app}^\varepsilon|^{\beta-1} (|u_{app}^\varepsilon| + |w^\varepsilon|),$$

et on n'a plus besoin de connaître une estimation sur le terme u^ε dans l'inégalité d'énergie :

$$\begin{aligned} \partial_t \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq C\varepsilon^{\alpha-1} \|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} + C\varepsilon^{\alpha-1} \|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta \|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^2} \\ &\leq C \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{(1-t)^{n\beta/2}} \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} + C \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{(1-t)^{n\beta/2}}. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall permet alors de conclure :

Proposition 4.4.1.2 *On suppose $f \in \Sigma \cap \mathcal{F}(L^1)$, $\beta \leq 1$, $\beta < \frac{4}{n-2}$, $\alpha > 1$ et $\alpha \geq n\beta/2$. Alors l'optique géométrique linéaire est valide dans L^2 avant la caustique :*

- si $\alpha > n\beta/2$, pour $t \leq 1 - C_0\varepsilon$, pour tout $C_0 > 0$;
- si $\alpha = n\beta/2$, pour $\frac{1-t}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$.

4.4.2 Traversée de la caustique

Montrons que dans le cas $\alpha > n\beta/2$, les effets non linéaires cumulés de la caustique sont négligeables au premier ordre. Comme dans le cas monodimensionnel, nous allons voir que le symbole a_ε tend à ne plus varier dans une couche limite de taille ε autour de $t = 1$. L'équation de transport pour a_ε s'écrit :

$$i\partial_t a_\varepsilon(t, \xi) = \lambda \varepsilon^{\alpha-1-n\beta/2} \mathcal{F} \left(U_0 \left(\frac{1-t}{\varepsilon} \right) |\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon} \right) \right) (\xi).$$

Soient alors $1 - \varepsilon \leq t_1 \leq t_2 \leq 1 + \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_1}^{t_2} \partial_t a_\varepsilon(t, \cdot) dt \right\|_{L^2} &= |\lambda| \varepsilon^{\alpha-1-n\beta/2} \left\| \int_{t_1}^{t_2} U_0 \left(\frac{1-t}{\varepsilon} \right) |\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon \left(\frac{t-1}{\varepsilon}, \cdot \right) dt \right\|_{L^2} \\ &= |\lambda| \varepsilon^{\alpha-n\beta/2} \left\| \int_{\frac{t_1-1}{\varepsilon}}^{\frac{t_2-1}{\varepsilon}} U_0(s) |\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} \\ &= |\lambda| \varepsilon^{\alpha-n\beta/2} \left\| \int_{\frac{t_1-1}{\varepsilon}}^{\frac{t_2-1}{\varepsilon}} U_0(t-s) |\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Fixons maintenant $t_1 = 1 - \varepsilon$ et notons $I_\varepsilon = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. D'après les inégalités de Strichartz,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{I_\varepsilon} \partial_t a_\varepsilon(t) dt \right\|_{L^2} &\leq C \varepsilon^{\alpha-n\beta/2} \left\| \int_{-1}^t U_0(t-s) |\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon(s, \cdot) ds \right\|_{L^\infty(-1,1;L^2)} \\ &\leq C_r \varepsilon^{\alpha-n\beta/2} \left\| |\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon \right\|_{L^{q'}(-1,1;L^{r'})} \\ &\leq C_r \varepsilon^{\alpha-n\beta/2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^k(-1,1;L^s)}^\beta \|\psi_\varepsilon\|_{L^{q_1}(-1,1;L^{r_1})}, \end{aligned}$$

où (q, r) est un couple admissible et

$$(4.4.33) \quad \begin{cases} \frac{1}{r'} = \frac{1}{r_1} + \frac{\beta}{s}, \\ \frac{1}{q'} = \frac{1}{q_1} + \frac{\beta}{k} + \theta, \end{cases}$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$. Prenons alors $r = r_1 = s = \beta + 2$ (qui est bien un nombre strictement inférieur à $\frac{2n}{n-2}$ pour $\beta < \frac{4}{n-2}$), $q = q_1 = \frac{2}{\delta(\beta+2)}$ et $k = \infty$. D'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg et l'étude du problème de Cauchy pour ψ , il existe $C = C(\|f\|_\Sigma) > 0$ tel que

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(-1,1;L^{\beta+2})} \leq C,$$

et

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^{q_1}(-1,1;L^{r_1})} \leq C.$$

Proposition 4.4.2.1 *Supposons $\alpha > n\beta/2$, $\beta < \frac{4}{n-2}$. Alors la traversée de la caustique est linéaire, dans L^2 :*

$$(4.4.34) \quad \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \|\partial_t a_\varepsilon(t)\|_{L^2} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

D'après la proposition 4.4.1.2, on en déduit :

Corollaire 4.4.2.1 *Supposons $\alpha > \max(1, n\beta/2)$, $\beta \leq \frac{4}{n+2}$ et $f \in \Sigma \cap \mathcal{F}(L^1)$. Alors l'optique géométrique linéaire est valide dans L^2 jusqu'à la sortie de la couche limite de taille ε autour de la caustique :*

$$(4.4.35) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1+\varepsilon} \|a_\varepsilon(t) - a_0\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

On a de même, d'après l'étude avant la caustique :

Lemme 4.4.2.1 *Supposons $\alpha > \max(1, n\beta/2)$, $\frac{4}{n+2} < \beta < \frac{4}{n-2}$ et $f \in \Sigma$. Alors pour*

$$(q_1, r_1) = (\infty, 2) \text{ ou } \left(\frac{2}{\delta(\beta+2)}, \beta+2 \right),$$

ψ_ε , $\nabla_x \psi_\varepsilon$ et $J(t)\psi_\varepsilon$ sont bornés dans $L^{q_1}(-1, 1; L^{r_1})$.

Démonstration : d'après la proposition 4.4.1.1, avec par exemple $C_0 = 1$, la famille $(\psi_\varepsilon(-1))_{0 < \varepsilon \leq 1}$ est bornée dans Σ . D'après la conservation de l'énergie et la loi pseudo-conforme, on en déduit comme dans le cas monodimensionnel que ψ_ε , $\nabla_x \psi_\varepsilon$ et $J(t)\psi_\varepsilon$ sont bornés dans $L^\infty(-1, 1; L^2)$.

L'écriture intégrale du problème de Cauchy pour ψ_ε devient :

$$\psi_\varepsilon(t) = U_0(t+1)\psi_\varepsilon(-1) - i\lambda\varepsilon^{\alpha-n\beta/2} \int_{-1}^t U_0(t-s)|\psi_\varepsilon|^\beta \psi_\varepsilon(s) ds.$$

On a donc, en répétant les calculs faits ci-dessus, pour $(q_1, r_1) = \left(\frac{2}{\delta(\beta+2)}, \beta+2 \right)$,

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^{q_1}(-1,1;L^{r_1})} \leq C \|\psi_\varepsilon(-1)\|_{L^2} + C\varepsilon^{\alpha-n\beta/2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(-1,1;L^{\beta+2})}^\beta \|\psi_\varepsilon\|_{L^{q_1}(-1,1;L^{r_1})}.$$

En dérivant l'équation intégrale vérifiée par ψ_ε et en appliquant l'opérateur $J(t)$, on a exactement les mêmes estimations en remplaçant successivement $\|\psi_\varepsilon\|_{L^{q_1}(-1,1;L^{r_1})}$ par $\|\nabla_x \psi_\varepsilon\|_{L^{q_1}(-1,1;L^{r_1})}$ et $\|J(t)\psi_\varepsilon\|_{L^{q_1}(-1,1;L^{r_1})}$.

D'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg et la première partie du lemme, le terme $\|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(-1,1;L^{\beta+2})}^\beta$ se majore indépendamment de ε , et puisque $\alpha > n\beta/2$, pour ε suffisamment petit, le dernier terme du second membre est absorbé par le premier membre. $\square$

On en déduit alors comme pour la proposition 4.4.2.1 :

Proposition 4.4.2.2 *Supposons $\alpha > \max(1, n\beta/2)$, $\frac{4}{n+2} < \beta < \frac{4}{n-2}$ et $f \in \Sigma$. Alors l'optique géométrique linéaire est valide dans Σ jusqu'à la sortie de la couche limite de taille ε autour de la caustique :*

$$(4.4.36) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1+\varepsilon} \|a_\varepsilon(t) - a_0\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

4.4.3 Propagation au-delà de la caustique

Après la traversée de la caustique, on peut reprendre les calculs faits avant la couche limite :

Proposition 4.4.3.1 *Supposons $\alpha > \max(1, n\beta/2)$, $\frac{4}{n+2} < \beta < \frac{4}{n-2}$ et $f \in \Sigma$. Alors l'optique géométrique linéaire est valide dans Σ , localement uniformément en temps :*

$$(4.4.37) \quad a_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0 \text{ dans } L_{loc}^\infty(\Sigma).$$

Proposition 4.4.3.2 *Supposons $\alpha > \max(1, n\beta/2)$, $\beta \leq \frac{4}{n+2}$, $\beta < \frac{4}{n-2}$ et $f \in \Sigma \cap \mathcal{F}(L^1)$. Alors l'optique géométrique linéaire est valide dans L^2 , localement uniformément en temps :*

$$(4.4.38) \quad a_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} a_0 \text{ dans } L_{loc}^\infty(L^2).$$

4.5 Propagation linéaire et caustique non linéaire

Dans cette section, on suppose $\alpha = n\beta/2 > 1$ et $\beta < \frac{4}{n-2}$.

4.5.1 Propagation avant la caustique

D'après la section précédente, l'optique géométrique linéaire est valide avant la couche limite d'épaisseur ε

- dans Σ , si $\beta > \frac{4}{n+2}$;
- dans L^2 , si $\beta \leq \frac{4}{n+2}$ et $f \in \Sigma \cap \mathcal{F}(L^1)$.

Comme dans le cas monodimensionnel, la première convergence se retrouve par l'existence d'opérateurs d'ondes pour l'équation de Schrödinger non linéaire.

Pour définir les opérateurs d'ondes, on souhaite comparer les évolutions de ψ et de ψ_0 , avec $\psi_0(t) = U_0(t)\psi_\pm$. L'équation intégrale à résoudre pour définir l'opérateur d'onde W_+ s'écrit donc, pour t_0 grand :

$$(4.5.1) \quad \psi(t) = U_0(t)\psi_+ + i \int_t^{t_0} U_0(t-s)F(\psi(s)) ds.$$

On suppose $F(z) = \lambda|z|^p z$, avec $\lambda > 0$ si $p \geq 4/n$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 4.5.1.1 *([CW92], proposition 4.6, [Gin95], proposition 10.6)*

Soit $n \geq 2$. On suppose $\frac{4}{n+2} < p < \frac{4}{n-2}$. Alors pour tout $\psi_+ \in \Sigma$, il existe $T < \infty$ tel que

1. *pour tout $t_0 \in \bar{I}$, où $I = [T, \infty[$, l'équation (4.5.1) a une unique solution dans $Y_p^1(I)$. La solution est en fait dans $Y^1(I)$.*
2. *La solution ψ est fortement continue de $(\psi_+, t_0) \in \Sigma \times \bar{I}$ dans $Y^1(I)$.*

En adaptant de façon évidente, les mêmes résultats sont vrais pour un état asymptotique en $-\infty$, $\psi_- \in \Sigma$.

On vérifie alors que l'opérateur ainsi construit est effectivement un opérateur d'onde sur Σ : la fonction que l'on souhaite comparer à ψ_+ étant $U_0(-t)\psi(t)$, notons

$$\tilde{\psi}(t) = U_0(-t)\psi(t).$$

Proposition 4.5.1.2 *([Gin95], proposition 10.7)*

On suppose $\frac{4}{n+2} < p < \frac{4}{n-2}$. Soit I un intervalle, $t_0 \in I$, $\psi_+ \in \Sigma$, et $\psi \in Y_{p+1}^1(I)$

solution de (4.5.1). Alors $\tilde{\psi} \in C(\bar{I}, \Sigma)$. En particulier, si $I = [T, \infty[$, la limite suivante existe :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}_+$$

comme limite forte dans Σ . Si $t_0 = \infty$, alors $\tilde{\psi}_+ = \psi_+$. On a le même résultat en remplaçant ψ_+ par $\psi_- \in \Sigma$, et $+\infty$ par $-\infty$.

Notons alors à nouveau

$$\psi_- := \mathcal{F}^{-1}a_0.$$

Nous supposons désormais $\beta > \frac{4}{n+2}$. À ψ_- , les propositions 4.5.1.1 et 4.5.1.2 associent ψ définie sur $] -\infty, -T]$, solution de

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\Delta \psi = \lambda |\psi|^\beta \psi,$$

unique, telle que

$$\|\psi_- - U_0(-t)\psi(t)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Comme dans le cas monodimensionnel, la continuité des opérateurs d'ondes implique

$$(4.5.2) \quad \sup_{t \leq -T} \|U_0(-t)(\psi - \psi_\varepsilon)(t)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

ce qui permet de retrouver le résultat de propagation linéaire rappelé ci-dessus.

4.5.2 Traversée de la caustique et propagation au-delà

Comme dans le cas monodimensionnel, on s'attend à ce que la traversée de la couche limite mise en évidence autour de la caustique soit décrite par des opérateurs de diffusion. Contrairement au cas monodimensionnel par contre, les éléments de théorie pour l'équation de Schrödinger non linéaire sont insuffisants pour traiter tous les indices souhaités, y compris dans L^2 : nous devons supposer $\beta > p_0(n)$, et éventuellement $\beta > \frac{4}{n+2}$ (pour des données petites, ou pour une description moins précise). En particulier, dès que $n \geq 3$, on ne sait pas décrire la traversée comme dans le cas monodimensionnel jusqu'à $\beta > 2/n$.

Proposition 4.5.2.1 ([HT87], [CW92])

On suppose $\lambda > 0$, $p_0(n) < p < \frac{4}{n-2}$ et seulement $p_0(n) \leq p < \frac{4}{n-2}$ si $n \geq 3$.

- Pour tout $\psi_+ \in \Sigma$ (resp. $\psi_- \in \Sigma$), il existe un unique $\varphi \in \Sigma$ tel que

$$\|\psi_+ - U_0(-t)\psi(t)\|_\Sigma \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{resp. } \|\psi_- - U_0(-t)\psi(t)\|_\Sigma \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0),$$

où $\psi(t)$ est la solution de (4.2.6).

- Pour tout $\varphi \in \Sigma$, il existe un unique couple $(\psi_+, \psi_-) \in \Sigma^2$ tel que la solution de (3.2.6) vérifie

$$\|\psi_\pm - U_0(-t)\psi(t)\|_\Sigma \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

- Les opérateurs d'onde $W_\pm : \psi_\pm \mapsto \varphi$ sont des homéomorphismes de Σ sur lui-même.

Corollaire 4.5.2.1 *Sous les hypothèses de la proposition 4.5.2.1, l'opérateur de diffusion $S = W_+^{-1}W_- : \psi_- \mapsto \psi_+$ est un homéomorphisme de Σ sur lui-même.*

Dans [CW92], [Gin95], on montre que pour $\frac{4}{n+2} < p < \frac{4}{n-2}$, l'opérateur de diffusion existe sur un voisinage de l'origine dans Σ . Ainsi, pour un état asymptotique en $-\infty$ de faible énergie, on obtient un résultat plus fort que dans la proposition précédente :

Proposition 4.5.2.2 ([CW92], corollaire 4.3)

On suppose $\frac{4}{n+2} < p < \frac{4}{n-2}$. Alors l'opérateur de diffusion est défini d'un voisinage de 0 dans Σ sur un voisinage de 0 dans Σ .

Remarque : dans [CW92], on montre que si $\lambda < 0$ et $p < \frac{4}{n+2}$, on peut construire des données initiales φ ne possédant pas d'état asymptotique ψ_+ dans Σ (ni même dans L^2).

Comme dans le cas monodimensionnel, supposons $\lambda > 0$. On a alors

$$(4.5.3) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|U_0(-t)(\psi - \psi_\varepsilon)(t)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

- si $p_0(n) < \beta < \frac{4}{n-2}$ ou $p_0(n) \leq \beta < \frac{4}{n-2}$ si $n \geq 3$;
- si $\frac{4}{n+2} < \beta < \frac{4}{n-2}$ et $\|f\|_\Sigma$ petit.

Dans ce cas, on peut décrire la traversée de la caustique, et la propagation au-delà est à nouveau linéaire :

Proposition 4.5.2.3 *Supposons $\lambda > 0$, $f \in \Sigma$, $\alpha = n\beta/2$ et $p_0(n) < \beta < \frac{4}{n-2}$ ($p_0(n) \leq \beta < \frac{4}{n-2}$ si $n \geq 3$). Alors la propagation est linéaire en dehors de la caustique, et la traversée est décrite par l'opérateur de diffusion non linéaire :*

– si $t < 1$, alors

$$(4.5.4) \quad \|a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 ;$$

– si $t > 1$, alors

$$(4.5.5) \quad \|a_\varepsilon(t, \cdot) - \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1} a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De plus, pour tout $\delta > 0$, les convergences ci-dessus sont uniformes pour $t \leq 1 - \delta$ (premier cas) et pour $t \geq 1 + \delta$ (deuxième cas).

Proposition 4.5.2.4 *Supposons $f \in \Sigma$ de norme suffisamment petite, $\alpha = n\beta/2$ et $\frac{4}{n+2} < \beta < \frac{4}{n-2}$. Alors la propagation est linéaire en dehors de la caustique, et la traversée est décrite par l'opérateur de diffusion non linéaire :*

– si $t < 1$, alors

$$(4.5.6) \quad \|a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 ;$$

– si $t > 1$, alors

$$(4.5.7) \quad \|a_\varepsilon(t, \cdot) - \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1} a_0(\cdot)\|_\Sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De plus, pour tout $\delta > 0$, les convergences ci-dessus sont uniformes pour $t \leq 1 - \delta$ (premier cas) et pour $t \geq 1 + \delta$ (deuxième cas).

4.5.3 Description dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

Comme dans le cas monodimensionnel, le manque d'information quant à la complétude asymptotique nous prive de résultats attendus : on ne sait pas, a priori, s'il existe un opérateur de diffusion pour des non-linéarités du type $|z|^p z$ pour $2/n < p < p_0(n)$. Par contre, si les opérateurs d'ondes existent sur Σ , on peut encore définir un opérateur de diffusion dans un sens plus faible :

Proposition 4.5.3.1 ([Gin95], proposition 11.4)

On suppose $\frac{2}{n} < p < \frac{4}{n-2}$ et $\lambda > 0$. Soit $\varphi \in \Sigma$ et $\psi \in Y_{loc}^1(\mathbb{R})$ la solution du problème de Cauchy (4.2.6). Alors il existe $\psi_{\pm} \in H^1$ satisfaisant

$$(4.5.8) \quad U_0(-t)\psi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \psi_{\pm} \text{ fortement dans } L^2 \text{ et faiblement dans } H^1.$$

Grâce à cette proposition et au caractère bien posé localement dans L^2 du problème (4.2.6), on déduit comme dans le cas monodimensionnel :

Corollaire 4.5.3.1 On suppose $2/n < p < 4/n$. Soient φ (resp. φ_{ε}) dans Σ et ψ (resp. ψ_{ε}) $\in Y_{loc}^1(\mathbb{R})$ la solution associée. Si les données initiales convergent dans Σ ,

$$\|\varphi - \varphi_{\varepsilon}\|_{\Sigma} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

alors la suite ψ_{ε} converge vers ψ dans L^2 , uniformément en temps :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\psi(t) - \psi_{\varepsilon}(t)\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

On a alors comme dans le cas monodimensionnel, une version plus faible de la relation (4.5.3) : si les opérateurs d'ondes existent (proposition 4.5.1.2), on a, pour un certain $T > 0$,

$$(4.5.9) \quad \sup_{t \leq -T} \|U_0(-t)(\psi - \psi_{\varepsilon})(t)\|_{\Sigma} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

donc d'après la proposition 4.2.2.2,

$$(4.5.10) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_-} \|U_0(-t)(\psi - \psi_{\varepsilon})(t)\|_{\Sigma} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

D'après le corollaire 4.5.3.1, on a encore

$$(4.5.11) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|U_0(-t)(\psi - \psi_{\varepsilon})(t)\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

À $\psi_- \in \Sigma$, la proposition 4.5.1.1 associe $\varphi \in \Sigma$ et ψ solution globale de l'équation de Schrödinger non linéaire. Comme dans le cas monodimensionnel, si on note $S\psi_-$ la fonction ψ_+ associée à ψ par la proposition 4.5.3.1, on a

$$(4.5.12) \quad U_0\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\psi_{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} S\psi_- \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^n).$$

On a donc montré le résultat suivant :

Proposition 4.5.3.2 *On suppose $\lambda > 0$ et $4/n > 2\alpha = \beta > \frac{4}{n+2}$. Alors pour les symboles, l'optique géométrique linéaire est valable dans L^2 avant et après la caustique, et la transition est décrite par l'opérateur de diffusion S donné par la proposition 4.5.3.1 :*

– si $t < 1$, alors

$$(4.5.13) \quad \|a_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 ;$$

– si $t > 1$, alors

$$(4.5.14) \quad \|a_\varepsilon(t, \cdot) - \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F}^{-1} a_0(\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De plus, pour tout $\delta > 0$, les convergences ci-dessus sont uniformes pour $t \leq 1 - \delta$ (premier cas) et pour $t \geq 1 + \delta$ (deuxième cas).

Remarque : dans le cas $n = 2$, ceci permet de montrer que les indices critiques mis en évidence en introduction sont les bons, et de décrire les comportements non linéaires par un opérateur de diffusion. Dans le cas $n \geq 3$, il subsiste un intervalle d'indices pour lequel on ne sait pas décrire la traversée de la caustique : cet intervalle ($\frac{2}{n} < \beta \leq \frac{4}{n+2}$) correspond exactement à la zone d'incertitude rencontrée dans l'étude de l'équation de Schrödinger non linéaire.

4.6 Propagation non linéaire et caustique linéaire

Nous supposons ici $\alpha = 1$ et $\beta < \frac{2}{n}$. Nous allons voir que l'optique géométrique non linéaire est valide en dehors de la caustique, et que la traversée de la couche limite dans laquelle la caustique a éventuellement un effet non linéaire s'effectue comme dans le cas linéaire.

4.6.1 Propagation avant la caustique

Notons encore w^ε le reste défini par

$$w^\varepsilon = u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon,$$

avec

$$u^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi) d\xi,$$

$$u_{app}^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \int e^{-i\frac{t-1}{2\varepsilon}\xi^2 + i\frac{x\xi}{\varepsilon} + ig(t, \xi)} a_0(\xi) d\xi,$$

où le déphasage g est défini par (4.3.16), et est déterminé par (4.3.17). Avec les notations du paragraphe 4.3.2, le reste vérifie

$$(4.6.1) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t w^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta w^\varepsilon = \lambda \varepsilon \left(|u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon - |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon \right) + \varepsilon \Delta^\varepsilon(t, x), \\ w|_{t=0} = o(1) \text{ dans } \Sigma. \end{cases}$$

Comme précédemment, nous allons voir que l'optique géométrique non linéaire est valide avant une (toute) couche limite de taille ε autour de $t = 1$. Comme dans le cas monodimensionnel, cette propriété va résulter du lemme de Gronwall. Toutefois, le manque de régularité de la non-linéarité $z \mapsto |z|^\beta z$ ($\beta < 2/n$) et l'absence d'estimations L^∞ nous obligent à renforcer les hypothèses sur la donnée initiale f , pour avoir une description dans L^2 (et pas mieux a priori). Cette approche consiste essentiellement à reprendre le calcul fait dans le cas d'une propagation linéaire, pour $\beta \leq 1$. Comme dans la seconde partie du paragraphe 4.4.1, nous avons besoins d'estimations L^∞ de la solution approchée,

$$(4.6.2) \quad \|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{|1-t|^{n/2}},$$

que l'on obtient par le théorème de Parseval si $\mathcal{F}(e^{ig}a_0) \in L^1$: supposons donc

$$(4.6.3) \quad e^{i|f(\xi)|^\beta} f(\xi) \in \mathcal{F}^{-1}(L^1).$$

Notons que cette hypothèse est vérifiée si $e^{i|f(\xi)|^\beta} f(\xi) \in H^s(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $s > n/2$, et en particulier pour toute fonction f gaussienne.

Il s'agit à nouveau d'estimer la norme L^2 du reste grâce aux estimations dans L^∞ de la solution approchée, en évitant de garder des termes en u^ε . Dans le paragraphe 4.4.1, notre estimation d'énergie revient à écrire :

$$(4.6.4) \quad \left\| |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon - |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon \right\|_{L^2} \leq C \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^\infty}^\beta \max(\|w^\varepsilon\|_{L^2}, \|u_{app}^\varepsilon\|_{L^2}).$$

Toutefois, une telle estimation ne nous permettrait pas de conclure ici, essentiellement parce qu'un terme en $|u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon$ ne donne pas quelque chose de petit après application du lemme de Gronwall. Il s'agit simplement de reprendre la factorisation des termes non linéaires :

$$\begin{aligned} |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon - |u_{app}^\varepsilon|^\beta u_{app}^\varepsilon &= \left[\left(|u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right) u^\varepsilon + |u_{app}^\varepsilon|^\beta (u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon) \right] \mathbf{1}_{|u^\varepsilon| \leq |u_{app}^\varepsilon|} \\ &\quad + \left[\left(|u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right) u_{app}^\varepsilon + |u^\varepsilon|^\beta (u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon) \right] \mathbf{1}_{|u^\varepsilon| > |u_{app}^\varepsilon|} \\ &= \left[\left(|u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right) u^\varepsilon + |u_{app}^\varepsilon|^\beta w^\varepsilon \right] \mathbf{1}_{|u^\varepsilon| \leq |u_{app}^\varepsilon|} \\ &\quad + \left[\left(|u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right) u_{app}^\varepsilon + |u^\varepsilon|^\beta w^\varepsilon \right] \mathbf{1}_{|u^\varepsilon| > |u_{app}^\varepsilon|}. \end{aligned}$$

En multipliant par $\overline{w^\varepsilon}$ l'équation vérifiée par w^ε , puis en prenant la partie imaginaire du résultat intégré en espace, les termes $|u_{app}^\varepsilon|^\beta w^\varepsilon$ et $|u^\varepsilon|^\beta w^\varepsilon$ disparaissent, et il reste :

$$(4.6.5) \quad \begin{aligned} \partial_t \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq C \left\| \left(|u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right) u^\varepsilon \mathbf{1}_{|u^\varepsilon| \leq |u_{app}^\varepsilon|} \right\|_{L^2} \\ &\quad + C \left\| \left(|u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right) u_{app}^\varepsilon \mathbf{1}_{|u^\varepsilon| > |u_{app}^\varepsilon|} \right\|_{L^2} \\ &\quad + C \|\Delta^\varepsilon(t)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Fixons maintenant $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$: si $|u^\varepsilon| \leq |u_{app}^\varepsilon|$, on a, par concavité,

$$\left| |u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right| |u^\varepsilon| \leq C_\beta \left| |u^\varepsilon| - |u_{app}^\varepsilon| \right| |u^\varepsilon|^\beta \leq C_\beta \left| |u^\varepsilon| - |u_{app}^\varepsilon| \right| |u_{app}^\varepsilon|^\beta,$$

et si $|u^\varepsilon| > |u_{app}^\varepsilon|$, on a directement

$$\left| |u^\varepsilon|^\beta - |u_{app}^\varepsilon|^\beta \right| |u^\varepsilon| \leq C_\beta \left| |u^\varepsilon| - |u_{app}^\varepsilon| \right| |u_{app}^\varepsilon|^\beta.$$

On peut donc simplifier l'estimation (4.6.5) en :

$$\begin{aligned} \partial_t \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq C \|u_{app}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}^\beta \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} + C \|\Delta^\varepsilon(t)\|_{L^2} \\ (4.6.6) \quad &\leq \frac{C}{(1-t)^{n\beta/2}} \|w^\varepsilon(t)\|_{L^2} + C \|\Delta^\varepsilon(t)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Puisque $\beta < 2/n$, la fonction $t \mapsto |1-t|^{-n\beta/2}$ est localement intégrable. Par ailleurs, si l'hypothèse (H1) (paragraphe 4.3.2) est vérifiée (c'est le cas si f est dans la classe de Schwartz), on a d'après le lemme 4.3.2.1,

$$\|\Delta^\varepsilon(t)\|_{L^1(0,1-\varepsilon;L^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

D'après le lemme de Gronwall, on a alors le résultat suivant :

Proposition 4.6.1.1 *On suppose $\alpha = 1$ et $\beta < 2/n$. Prenons $f \in \Sigma$ telle que*
– l'hypothèse (H1) soit vérifiée ;
– $e^{i|f(\xi)|^\beta} f(\xi) \in \mathcal{F}^{-1}(L^1)$.

Alors l'optique géométrique non linéaire est valide dans L^2 avant la couche limite de taille ε :

$$(4.6.7) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1-\varepsilon} \|\tilde{a}_\varepsilon(t, \cdot) - a_0(\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

4.6.2 Traversée de la caustique et propagation au-delà

Nous pouvons directement utiliser les premiers résultats du paragraphe 4.4.2, où nous avons seulement supposé $\alpha > n\beta/2$. D'après la proposition 4.4.2.1,

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \|\partial_t a_\varepsilon(t)\|_{L^2} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

On a par ailleurs $a_\varepsilon(t, \xi) = e^{ig(t, \xi)} \tilde{a}_\varepsilon(t, \xi)$, donc

$$\|\partial_t \tilde{a}_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \|\partial_t a_\varepsilon(t)\|_{L^2} + \|a_\varepsilon(t) \partial_t g(t)\|_{L^2}.$$

Puisque nous avons supposé $e^{i|f(\xi)|^\beta} f(\xi) \in \mathcal{F}^{-1}(L^1)$, on a en particulier $f \in L^\infty$, et une majoration du type (d'après (4.3.16))

$$\|\partial_t \tilde{a}_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \|\partial_t a_\varepsilon(t)\|_{L^2} + \frac{C}{|1-t|^{n\beta/2}}.$$

D'après l'intégrabilité locale de $t \mapsto |1 - t|^{-n\beta/2}$ et la proposition 4.4.2.1,

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \|\partial_t \tilde{a}_\varepsilon(t) dt\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Au-delà de la couche limite de taille ε , on peut reprendre les calculs effectués avant, pour obtenir le résultat suivant :

Proposition 4.6.2.1 *On suppose $\alpha = 1$ et $\beta < 2/n$. Prenons $f \in \Sigma$ telle que*

- *l'hypothèse (H1) soit vérifiée ;*
- *$e^{i|f(\xi)|^\beta} f(\xi) \in \mathcal{F}^{-1}(L^1)$.*

Alors l'optique géométrique non linéaire est valide dans L^2 , localement uniformément en temps :

$$(4.6.8) \quad \tilde{a}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_0 \text{ dans } L_{loc}^\infty(L^2).$$

4.7 Propagation et caustique non linéaires

Dans le cas de diffusion longue portée ($\beta \leq 2/n$), très peu de résultats sont disponibles pour l'équation de Schrödinger non linéaire : [Oza91] aborde le cas monodimensionnel, comme nous l'avons déjà vu, et en dimensions supérieures, on a quelques résultats préliminaires également ([GO93] pour l'équation de Schrödinger en dimension $n = 2$ et $n = 3$, [GO93] et [GV98] pour l'équation de Hartree). En particulier, les arguments heuristiques de [GO93] conduisent à introduire une dynamique modifiée qui généralise de façon naturelle celle introduite par [Oza91]. De même que dans le cas monodimensionnel, nous avons pu mener un parallèle entre d'une part les résultats de scattering pour l'équation non linéaire ([Oza91]), et d'autre part, les résultats obtenus sur le système, il est facile de voir que les calculs faits sur le système en dimension 1 se généralisent au cas multidimensionnel, de sorte qu'on retrouve le même type de dynamique modifiée que dans [GO93]. Le fait de travailler sur le système nous permet d'éviter les problèmes techniques, et en particulier ne nécessite pas de restriction quant à la dimension d'espace ou la taille des données.

Une difficulté technique apparaît tout de même, liée à la régularité de la non-linéarité. En effet, dans le cas monodimensionnel, le potentiel est aussi régulier que la solution libre v^ε , puisqu'il s'agit de son module au carré ; en dimension supérieure, la puissance considérée du module n'est jamais un entier pair ($2/n$), si bien qu'en général, on ne peut pas dériver le potentiel. Cet écueil est évité si ce potentiel est une gaussienne, cas apparaissant pour f gaussienne. Ainsi, dans ce cas particulier au moins, on peut répéter sans problème les calculs du cas monodimensionnel.

Annexe A

Lemme de Gronwall

A.1 Lemme de Gronwall

Juste histoire de ne pas se faire mal à la tête :

Lemme A.1.0.1 *Si pour $0 \leq t \leq t_0$, on a*

$$(A.1.1) \quad f'(t) \leq a(t)f(t) + b(t),$$

avec a, b des fonctions positives, localement intégrables, et f une fonction positive dérivable, alors en notant

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds,$$

on a, pour $0 \leq t \leq t_0$,

$$(A.1.2) \quad f(t) \leq f(0)e^{A(t)} + \int_0^t b(s)e^{A(t)-A(s)}ds.$$

Bibliographie

- [Air38] G. B. Airy. *On the intensity of light in the neighborhood of a caustic*. Trans. Cambr. Philos. Soc., **6**, 1838, pp. 379–403.
- [Bar84] J. E. Barab. *Nonexistence of asymptotically free solutions for nonlinear Schrödinger equation*. J. Math. Phys., **25**, 1984, pp. 3270–3273.
- [BG97a] H. Bahouri et P. Gérard. *Concentration effects in critical nonlinear wave equation and scattering theory*. In : Geometrical Optics and Related Topics, éd. par F. Colombini et N. Lerner, pp. 17–30. Birkäuser, 1997.
- [BG97b] H. Bahouri et P. Gérard. *Optique géométrique généralisée pour les ondes non linéaires critiques*. In : Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1996–1997, pp. Exp. No. VIII, 17. Palaiseau, École Polytech., 1997.
- [BL83] H. Berestycki et P.-L. Lions. *Nonlinear scalar field equations I, existence of a ground state*. Arch. Rat. Mech. Anal., **82**, 1983, pp. 313–345.
- [Caz93] T. Cazenave. *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*. Univ. Fed. Rio de Jan., 1993, **26** of Text. Met. Mat.
- [CFU57] C. Chester, B. Friedman et F. Ursell. *An extension of the method of steepest descents*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **53**, 1957, pp. 599–611.
- [CH62] R. Courant et D. Hilbert. *Methods of mathematical physics II*. Interscience Publishers, 1962.
- [CV72] A.P. Calderón et R. Vaillancourt. *A class of bounded pseudo-differential operators*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **69**, 1972, pp. 1185–1187.
- [CW89] T. Cazenave et F. Weissler. *Some remarks on the nonlinear Schrödinger equation in the critical case*. In : Lect. Notes in Math., **1394**, pp. 18–29. 1989.
- [CW92] T. Cazenave et F. Weissler. *Rapidly Decaying Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation*. Commun. Math. Phys., **147**, 1992, pp. 75–100.
- [DG97] J. Dereziński et C. Gérard. *Scattering theory of quantum and classical N-particle systems*. Texts and Monographs in Physics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [Dui74] J.J. Duistermaat. *Oscillatory integrals, Lagrangian immersions and unfolding of singularities*. Comm. Pure Appl. Math., **27**, 1974, pp. 207–281.

- [Gin95] J. Ginibre. *Introduction aux équations de Schrödinger non linéaires*. Cours de DEA, 1995. Paris Onze Édition.
- [Gin97] J. Ginibre. *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*. In : Nonlinear waves (Sapporo, 1995), éd. par R. Agemi, Y. Giga et T. Ozawa, GAKUTO International Series, Math. Sciences and Appl., pp. 85–133. Tokyo, Gakkōtoshō, 1997.
- [GO93] J. Ginibre et T. Ozawa. *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geq 2$* . Comm. Math. Phys., **151**, n° 3, 1993, pp. 619–645.
- [Gre98] E. Grenier. *Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time*. Proc. Amer. Math. Soc., **126**, n° 2, 1998, pp. 523–530.
- [Guè93] O. Guès. *Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilinéaires*. Asym. Anal., **6**, 1993, pp. 241–269.
- [GV85] J. Ginibre et G. Velo. *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations*. J. Math. Pures Appl., **64**, n° 4, 1985, pp. 363–401.
- [GV98] J. Ginibre et G. Velo. *Long range scattering and modified wave operators for some Hartree type equations*. Prépublication. Disponible à : <http://qcd.th.u-psud.fr>, 1998.
- [HK87] J. Hunter et J. Keller. *Caustics of nonlinear waves*. Wave motion, **9**, 1987, pp. 429–443.
- [Hör94] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators*. Berlin, Springer-Verlag, 1994.
- [HT87] N. Hayashi et Y. Tsutsumi. *Remarks on the scattering problem for nonlinear Schrödinger equations*. In : Lectures Notes in Math., **1285**, pp. 162–168. 1987.
- [Hwa87] I. L. Hwang. *The L^2 -boundedness of pseudodifferential operators*. Trans. Amer. Math. Soc., **302**, n° 1, 1987, pp. 55–76.
- [JMR91] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. *Remarques sur l'optique géométrique non linéaire multidimensionnelle*. In : Séminaire équations aux dérivées partielles de l'Ecole Polytechnique, numéro 1, 1990-91.
- [JMR95a] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. *Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics*. Ann. Sc. de l'Ecole Normale Sup., **28**, 1995, pp. 51–113.
- [JMR95b] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. *Focusing at a point and absorption of nonlinear oscillations*. Trans. Amer. Math. Soc., **347**, n° 10, 1995, pp. 3921–3969.
- [JMR96a] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. *Caustics for dissipative semilinear oscillations*. Preprint, à paraître, 1996.
- [JMR96b] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. *Nonlinear oscillations beyond caustics*. Comm. Pure Appl. Math., **49**, n° 5, 1996, pp. 443–527.

- [JMR96c] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. *Several recent results in nonlinear geometric optics*. In : Partial differential equations and mathematical physics (Copenhagen, 1995 ; Lund, 1995), pp. 181–206. Boston, MA, Birkhäuser Boston, 1996.
- [JMR97] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. *Caustics for dissipative semilinear oscillations*. In : Geometrical Optics and Related Topics, éd. par F. Colombini et N. Lerner, pp. 245–266. Birkhäuser, 1997.
- [Kat87] T. Kato. *Nonlinear Schrödinger equations*. Ann. IHP (Phys. Théor.), **46**, 1987, pp. 113–129.
- [Kel58] Joseph B. Keller. *A geometrical theory of diffraction*. In : Calculus of variations and its applications. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 8, pp. 27–52. For the American Mathematical Society : McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1958.
- [Kel78] J. B. Keller. *Rays, waves and asymptotics*. Bull. Amer. Math. Soc., **84**, n° 5, 1978, pp. 727–750.
- [Lax57] P. D. Lax. *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems*. Duke Math. J., **24**, 1957, pp. 627–646.
- [Lud66] D. Ludwig. *Uniform asymptotic expansions at a caustic*. Comm. Pure Appl. Math., **19**, 1966, pp. 215–250.
- [Oza91] T. Ozawa. *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*. Comm. in Math. Phys., **139**, 1991, pp. 479–493.
- [Rau91] J. Rauch. *Partial Differential Equations*. New York, Springer-Verlag, 1991, **128** of Graduate Texts in Math.
- [Rau95] J. Rauch. *Lectures on Geometric Optics*. Disponible à : www.math.lsa.umich.edu/~rauch, 1995.
- [Str74] W. A. Strauss. *Nonlinear scattering theory*. In : Scattering theory in mathematical physics, éd. par J. Lavita et J. P. Marchand. Reidel, 1974.
- [Str77a] W. A. Strauss. *Existence of solitary waves in higher dimensions*. Comm. Math. Phys., **55**, n° 2, 1977, pp. 149–162.
- [Str77b] Robert S. Strichartz. *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*. Duke Math. J., **44**, n° 3, 1977, pp. 705–714.
- [Str81] W. A. Strauss. *Nonlinear scattering theory at low energy*. J. Funct. Anal., **41**, 1981, pp. 110–133.
- [Wei86] M. I. Weinstein. *On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive evolution equations*. Comm. in Partial Diff. Eq., **11**, n° 5, 1986, pp. 545–565.
- [Yaf80] D. Yafaev. *Wave operators for the Schrödinger equation*. Teoret. Mat. Fiz., **45**, n° 2, 1980, pp. 224–234.

- [Yaf95] D. Yafaev. *New channels of scattering for long-range potentials*. In : Partial differential operators and mathematical physics (Holzhau, 1994), pp. 405–419. Basel, Birkhäuser, 1995.
- [Yaf97] D. Yafaev. *New Channels in the Two-Body Long-Range Scattering*. St. Petersburg Math. J., **8**, n° 1, 1997, pp. 165–182.
- [Yaj87] K. Yajima. *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*. Comm. in Math. Phys., **110**, 1987, pp. 415–426.