



HAL
open science

Maîtrise des systèmes industriels : optimisation de la conception des lignes de production

Yassine Ouazene

► **To cite this version:**

Yassine Ouazene. Maîtrise des systèmes industriels : optimisation de la conception des lignes de production. Recherche opérationnelle [math.OC]. Université de Technologie de Troyes, 2013. Français. NNT : 2013TROY0025 . tel-02969073

HAL Id: tel-02969073

<https://theses.hal.science/tel-02969073>

Submitted on 16 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse
de doctorat
de l'UTT

Yassine OUAZENE

**Maîtrise des systèmes industriels :
optimisation de la conception
des lignes de production**

**Spécialité :
Optimisation et Sécurité des Systèmes**

2013TROY0025

Année 2013

THESE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE TROYES

Spécialité : OPTIMISATION ET SURETE DES SYSTEMES

présentée et soutenue par

Yassine OUAZENE

le 29 novembre 2013

**Maîtrise des systèmes industriels :
optimisation de la conception des lignes de production**

JURY

M. M. CARDOSO DE SOUZA	PROFESSOR	Président
M. H. CHEHADE	ENSEIGNANT CHERCHEUR UTT	Directeur de thèse
M. A. DOLGUI	PROFESSEUR ENSM SAINT ETIENNE	Rapporteur
M. M. NOUR EL FATH	PROFESSEUR	Rapporteur
Mme N. SAUER	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Examineur
Mme A. YALAOUI	MAITRE DE CONFERENCES	Directrice de thèse
M. F. YALAOUI	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Examineur

Remerciements

Avant tout propos, j'exprime toute ma gratitude aux membres du jury qui me font l'honneur d'examiner cette thèse : Monsieur Alexandre DOLGUI, professeur des universités à l'École des Mines de Saint-Étienne et Monsieur Mustapha NOUR EL FATH, professeur des universités à l'Université Laval en leur qualité de rapporteurs. Madame Nathalie SAUER professeur des universités à l'Université Paul-Verlaine et Monsieur Mauricio Cardoso DE SOUZA, professeur des universités à l'Universiade Federalde Minas Gerais en leur qualité d'examineurs.

Je tiens à remercier Alice YALAOUI et Hicham CHEHADE, mes directeurs de thèse, pour m'avoir fait confiance et m'avoir permis de réaliser cette thèse dans d'excellentes conditions. Je ne saurais les remercier assez de leur disponibilité et leur soutien qui ont fait de mon travail, au quotidien, un plaisir permanent.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude à l'égard de Farouk YALAOUI, directeur du LOSI, pour son implication et son aide dans la réalisation de cette thèse. Ce fut un immense honneur et très grand plaisir de travailler ensemble au quotidien. Je me permets de dire que vous êtes, pour moi, un exemple.

Un grand merci aussi à mes parents, mes grands-parents et toute ma famille pour leur soutien indéfectible et leur amour inconditionnel. Merci d'avoir cru en moi depuis toujours et d'avoir tout fait pour que ce moment aboutisse. Merci à toi Lydia de faire partie de ma vie.

Mes pensées vont aussi à Julie, la meilleure amie et collègue de bureau qu'on puisse rêver. A Naim et Farah, mes meilleurs amis.

Une énorme pensée à toi Slim, ta place est vide à tout jamais. Mais tu resteras mon plus beau souvenir d'amitié. J'envie les anges qui te côtoient aujourd'hui. Repose en paix mon frère.

Enfin, je tiens à remercier tous mes collègues, du LOSI tout particulièrement et de l'UTT de manière générale.

Table des matières

Notations	14
Introduction générale	15
1 Notions de base sur les lignes de production en série	21
1.1 Définitions	22
1.2 Indicateurs de performance	23
1.3 Modèles d'évaluation de performances	24
1.4 Méthodes analytiques approchées	25
1.4.1 Les méthodes par décomposition	26
1.4.2 Les méthodes par agrégation	27
1.5 Conclusion	28
2 Etude d'une ligne à deux machines et un stock intermédiaire	29
2.1 Introduction et état de l'art	31
2.2 Formulation du problème et analyse des performances	33
2.2.1 Analyse des états du stock intermédiaire	33
2.2.2 Formulation de la disponibilité du système	35
2.2.3 Construction de la machine équivalente	36
2.2.4 Evaluation du taux de production du système	37
2.3 Etude numérique du modèle	40
2.4 Conclusion	43

3	Analyse d'une ligne à deux stations avec machines parallèles	47
3.1	Introduction	49
3.2	Description du problème	51
3.3	Technique de remplacement par une machine équivalente	52
3.3.1	Technique de remplacement d'Ancelin et Semery (ASRM)	52
3.3.2	Technique de remplacement de Patchong and Willaeyts (PWRM)	53
3.3.3	Analyse des deux techniques de remplacement	54
3.4	Analyse du modèle équivalent	56
3.5	Etude numérique	58
3.6	Conclusion	61
4	Généralisation de l'approche par machines équivalentes (<i>EMM</i>)	67
4.1	Introduction et état de l'art	69
4.2	Description du problème	70
4.3	Formulation de la méthode par machines équivalentes (<i>EMM</i>)	72
4.4	Etude des lignes avec des machines ayant de multiples modes de défaillance	77
4.4.1	Hypothèses et notations supplémentaires	78
4.4.2	Transformation des modes de défaillance multiples en un seul mode	78
4.4.3	Algorithme de la méthode par machines équivalentes avec modes de défaillance multiples	80
4.5	Résultats numériques	82
4.5.1	Etude des lignes avec un seul mode de défaillance	82
4.5.2	Etude des lignes avec des modes de défaillance multiples	87
4.6	Conclusion	93
5	Optimisation du dimensionnement des stocks intermédiaires	95
5.1	Introduction et état de l'art	96
5.2	Définitions et hypothèses du problème	98
5.3	Résolution du problème de dimensionnement des stocks intermédiaires	100
5.3.1	Adaptation de la méthode par machines équivalentes	101

<i>Table des matières</i>	7
5.3.2 Evaluation du niveau de stock moyen	103
5.3.3 Modèle de programmation non linéaire	104
5.4 Résultats numériques	106
5.5 Conclusion	109
Conclusion générale	113
Bibliographie	117

Table des figures

1	Classification des systèmes de production	16
2	Différents types de lignes de production	17
1.1	Différents modèles de représentation d'un système [12].	24
1.2	Illustration de la technique de décomposition [12].	26
1.3	Illustration de la technique d'agrégation.	27
2.1	Ligne de production à deux machines et un stock intermédiaire	33
3.1	Ligne de production séries-parallèles avec deux stations	52
3.2	La ligne simple avec deux machines équivalentes	56
4.1	Une ligne de production à K machines et $(K - 1)$ buffers.	71
4.2	Représentation d'une ligne partielle.	73
4.3	Représentation de la superposition des différents processus de naissance et de mort.	74
4.4	Représentation des états de transition du processus de Markov relatif au stock B_j	75
5.1	Processus général de la résolution du problème de dimensionnement des buffers. [22]	97
5.2	Représentation de la ligne de production avec K machines.	99

Liste des tableaux

2.1	Paramètres des différentes configurations test	41
2.2	Performances des différents modèles : instances I.a, I.b et I.c	42
2.3	Performances des différents modèles : instances II.a, II.b et II.c	43
2.4	Performances des différents modèles : instances III.a, III.b et III.c	44
2.5	Performances des différents modèles : instances IV.a, IV.b et IV.c	45
3.1	Les paramètres des deux configurations avec variation de la taille du buffer .	59
3.2	Les paramètres des deux configurations avec variation des taux de défaillances et de réparations	59
3.3	Résultats numériques : configuration 1	60
3.4	Résultats numériques : configuration 2	61
3.5	Résultats numériques : configuration 3	62
3.6	Résultats numériques : configuration 4	63
3.7	Comparaison avec le modèle proposé par Diamantidis <i>et al.</i> [24] : configuration 1	64
3.8	Comparaison avec le modèle proposé par Diamantidis <i>et al.</i> [24] : configuration 2	65
4.1	Les données de l'exemple 1 : cas d'une ligne à trois machines Choong et Gershwin [14].	83
4.2	Les données de l'exemple 2 : cas d'une ligne avec 5 machines présenté par Choong et Gershwin [14].	83
4.3	Les données de l'exemple 3 : cas d'une ligne à sept machines présenté par Choong et Gershwin [14].	84
4.4	Résultats numériques pour les exemples 1, 2 et 3.	85

4.5	Les données de l'exemple 4 : six lignes à cinq machines présenté par Colledani et Gershwin [15] ainsi que Levantesi <i>et al.</i> [43].	86
4.6	Résultats numériques pour les exemples présentés par Colledani et Gershwin [15] ainsi que Levantesi <i>et al.</i> [43].	87
4.7	Les données de la configuration 1 : ligne avec cinq machines [4, 6].	88
4.8	Les données de la configuration 2 : ligne avec dix machines [4, 6].	89
4.9	Les données de la configuration 3 : ligne avec quinze machines [4, 6].	90
4.10	Les données de la configuration 4 : ligne avec vingt machines [4].	91
4.11	Résultats obtenus pour les différentes configurations avec modes de défaillance multiples.	92
5.1	Le design de des différentes configurations de Seong <i>et al.</i> [65].	107
5.2	Quelques résultats comparatifs avec différentes méthodes de la littérature. . .	111
5.3	Quelques résultats comparatifs avec différentes méthodes de la littérature (suite) 5.2.	112

Notations

λ_i	Le taux de défaillance de la machine M_i
λ_{im}	Le taux de défaillance de la machine M_i selon le mode m
$MTTF_i$	Le temps moyen de fonctionnement de la machine M_i
$MTTR_i$	Le temps moyen de réparation de la machine M_i
μ_i	Le taux de réparation de la machine M_i
μ_{im}	Le taux de réparation de la machine M_i selon le mode m
ω_i	La capacité de production de la machine M_i
ξ_i	La disponibilité effective de la machine M_i
ρ_i	Le taux de production de la machine M_i
A_i	la disponibilité de la machine M_i
$p \in \{1, 2\}$	L'indice du poste de travail
ω_{S_p}	La capacité de production du poste de travail p
λ_{S_p}	Le taux de défaillance du poste de travail p
μ_{S_p}	Le taux de réparation du poste de travail p
γ_{S_p}	Le ratio d'efficacité du poste de travail p
N_j	La capacité du buffer B_j
\bar{N}_j	Le niveau de stock moyen dans le stock intermédiaire B_j
α_j	Le rapport des capacités de production du buffer B_j
P_s	la probabilité d'avoir s pièces dans le stock
P_j^s	la probabilité d'avoir s pièces dans le stock B_j
ψ	Le taux de production du système
A_s	La disponibilité du système
\bar{A}	La disponibilité asymptotique du système
f_1	Le profit unitaire
f_2	Le coût de stockage unitaire

Introduction générale

Contexte général

En raison d'une forte concurrence économique, il est devenu impératif d'optimiser la conception des systèmes de production afin de garantir une productivité maximale tout en respectant de nombreuses contraintes telles que : les normes de qualité, la sécurité des processus de fabrication, l'impact environnemental et autres contraintes économiques. Ces contraintes sont liées à la fois aux types de produits, aux types d'outils de fabrication ainsi qu'à l'environnement. C'est pourquoi, lors de la conception d'un système de production, toutes les alternatives fonctionnelles et technologiques doivent être étudiées afin de garantir le ou les meilleurs choix possibles. En effet, une évaluation précise de la performance d'un système de production est nécessaire pour l'optimisation de sa conception ainsi que pour le pilotage de son fonctionnement.

La conception d'un système de production est une problématique très complexe car elle englobe de nombreux sous-problèmes qui nécessitent, souvent, des études spécifiques dédiées à chacun d'entre eux. Une grande partie des ces sous-problèmes est résumée par Rekiek *et al.* [61]. Il s'agit de la sélection de pièces d'équipements à partir d'un ensemble de solutions candidates pour chaque opération de fabrication ; du dimensionnement et l'allocation des stocks intermédiaires et des zones de stockage ; de l'équilibrage de la charge de travail entre les différents postes de travail ; du choix et du dimensionnement des moyens de transport et enfin de la disposition des équipements qui consiste à déterminer les postes de travail qui doivent être adjacents les uns aux autres et la manière dont ils doivent être connectés.

C'est dans cette perspective que nous nous intéressons, dans cette thèse, au développement de modèles analytiques et d'algorithmes de résolution pour tout d'abord évaluer les performances et ensuite optimiser la conception des lignes de production en série. Ce type de systèmes de fabrication est très répandu dans différents domaines de production et spécialement dans les industries manufacturières à gros volumes. Ils sont constitués d'une suite de stations de travail séparées par des zones de stockage intermédiaires. Le transfert

des produits entre les stations est assuré par un système de transport (convoyeur, bande roulante, etc.). La fabrication d'un produit sur une ligne de production nécessite le partitionnement du processus global en un ensemble d'opérations élémentaires appelées tâches. L'exécution d'une tâche nécessite des ressources matérielles et des compétences humaines. En raison des contraintes technologiques et organisationnelles, des conditions de précedence entre les tâches doivent être respectées [63].

Les différentes problématiques, citées ci-avant, sont généralement communes à toute démarche d'optimisation de la conception d'un système de production. Néanmoins, il existe plusieurs types de lignes de production. La figure (1) représente une classification des différentes lignes de production. Cette classification est inspirée par celle présentée par Boysen *et al.* [9] dans leur étude du problème d'équilibrage des lignes d'assemblage. Elle se base sur quatre critères, à savoir : le type du modèle, le mode du transfert des produits entre les stations, le fonctionnement de la ligne et enfin si il s'agit d'une première conception ou d'une reconfiguration d'une ligne déjà existante.

Type de modèle	Modèle simple <i>(Un seul type de produit est traité par le système)</i>	Modèle mixte <i>(Plusieurs types de produits sont traités simultanément par des lots séparés.)</i>	Modèle multiple <i>(Plusieurs types de produits sont traités simultanément sans changement de séries)</i>
Mode de transfert	Synchrone <i>(Les produits sont transférés simultanément d'une station à une autre)</i>	Asynchrone <i>(Chaque type de produit est transféré indépendamment des autres.)</i>	Continu <i>(Les produits sont transférés de façon continue et à vitesse constante)</i>
Fonctionnement	Manuel		Automatisé
Conception	Première installation		Reconfiguration

FIGURE 1: Classification des systèmes de production

En se référant aux différents travaux existants dans la littérature, plusieurs types de lignes de production peuvent être identifiés ou distingués. En effet, plusieurs axes de différenciation sont souvent considérés tels que la fiabilité ou pas des machines, la présence ou pas des stocks intermédiaires et la nature des temps de traitement des pièces.

Dans cette thèse, nous considérons des lignes de production en série asynchrones, constituées

de plusieurs machines non fiables séparées par des stocks intermédiaires à capacités finies. Les temps de traitement des différentes machines sont supposés être des variables aléatoires suivant des lois exponentielles. Nous considérons aussi le cas, plus général, de lignes dites non-homogènes composées de machines ayant des temps de traitement différents. Les lignes homogènes sont considérées comme un cas particulier du premier cas.

La figure 2 présente un schéma qui illustre le positionnement de la problématique étudiée dans cette thèse. Ce schéma est inspiré par la classification des différentes lignes de production proposée par Li *et al.* [46].

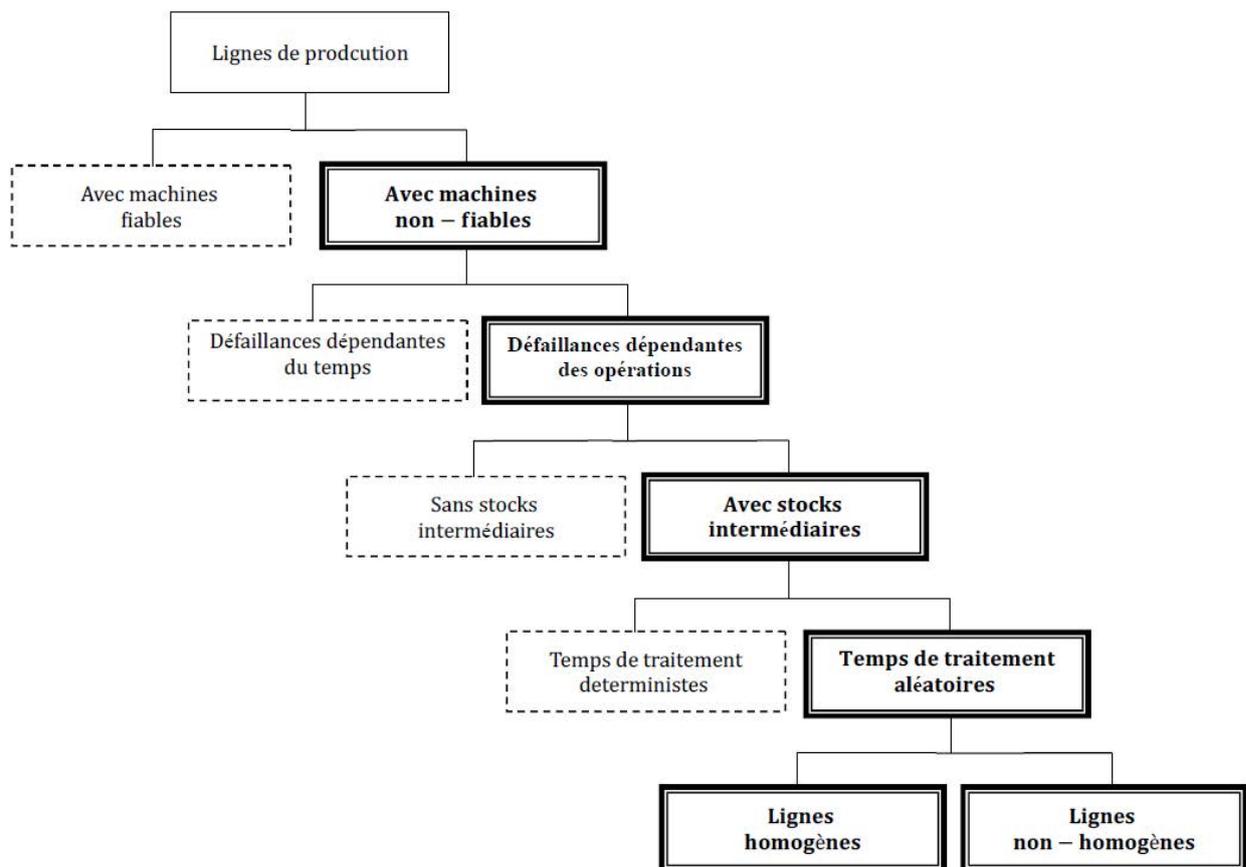


FIGURE 2: *Différents types de lignes de production*

Méthodologie

Les objectifs de cette thèse se résument en deux points principaux. Le premier consiste à proposer une nouvelle approche analytique, dite méthode par machines équivalentes

(*EMM*), pour l'évaluation des performances d'une ligne de production en série composée de machines non fiables séparées par des stocks intermédiaires à capacités finies. Le second s'intéresse au développement d'une méthode d'optimisation pour le dimensionnement de ces stocks intermédiaires.

L'étude d'un tel système de production requiert le développement d'un modèle analytique qui soit une représentation mathématique du comportement du système. Toute la subtilité d'une telle démarche de modélisation est de trouver un modèle à la fois assez réaliste pour qu'il soit représentatif mais suffisamment simple pour qu'il soit résolu et analysé.

Il existe essentiellement deux familles de modèles pour ce type de systèmes : les modèles déterministes et les modèles stochastiques [32]. Pour le système de production que nous considérons dans cette thèse, les modèles stochastiques sont les mieux adaptés, du fait de la présence de phénomènes aléatoires tels que les pannes, les réparations ainsi que les durées de traitement des différentes machines.

De manière générale, l'analyse et l'évaluation de ce type de modèles stochastiques passe par le développement de méthodes approximatives qui consistent à ramener l'étude d'un système complexe à celle d'un système plus simple ou à l'étude d'une combinaison de plusieurs systèmes élémentaires.

Plusieurs variantes de méthodes d'approximation sont développées dans la littérature et elles sont basées soit sur des techniques d'agrégation ou de décomposition. C'est pourquoi, nous nous sommes intéressés, dans cette thèse, au développement d'une nouvelle approche de modélisation et de résolution qui consiste à remplacer les machines originales par des machines équivalentes à deux états : panne et réparation. En effet, l'idée de cette approche consiste à remplacer la ligne de production originale par une ligne composée de machines disposées en série mais sans stocks intermédiaires. Pour ce faire, les probabilités de blocage et de famines, dues aux différents stocks intermédiaires, sont intégrées dans les calculs des disponibilités asymptotiques des machines équivalentes.

Pour le calcul des probabilités de blocage et de famine de chaque machine, les différents états de chaque stock intermédiaire sont représentés par un processus Markovien de naissance et de mort dont les taux de naissance et de mort diffèrent en fonction de la position du stock intermédiaire dans la ligne de production. Cette approche de modélisation nous permet de réduire le nombre d'états à observer ou à calculer. En effet, seuls deux états sont évalués pour chaque stock intermédiaire, à savoir : stock vide et stock plein.

Structure de la thèse

Ce manuscrit est organisé comme suit :

Le chapitre 1 est consacré à la présentation des notions de base nécessaires à la description du sujet d'étude de cette thèse ainsi qu'à la compréhension de la contribution scientifique des travaux réalisés. Il permettra d'introduire les différents concepts et définitions propres à l'évaluation des performances d'une ligne de production en série. Tout d'abord nous nous intéresserons aux études typologiques de ce problème, c'est-à-dire les différentes classifications et variantes déjà identifiées dans la littérature. Ensuite, nous analyserons les approches de résolution bien connues dans la littérature que sont : les méthodes par décomposition et les méthodes par agrégation.

Dans le chapitre 2, nous présentons un modèle analytique pour l'évaluation des performances d'une ligne de production à deux machines et un stock intermédiaire. Ce modèle est basé sur la modélisation et l'analyse des différents états du stock intermédiaire en utilisant un processus Markovien de naissance et de mort afin de calculer les probabilités de blocage et de famine. Ensuite, chacune des deux machines est remplacée par une machine équivalente supposée parfaite. Enfin, le taux de production du système original est défini comme étant le goulet d'étranglement entre les taux de production des deux machines équivalentes ou fictives. Les différentes propriétés théoriques ainsi que les performances numériques de cette formulation sont présentées et discutées.

Dans le chapitre 3, nous étudions le cas d'un système de fabrication de deux postes de travail avec des machines parallèles non fiables dans chaque poste. Les machines parallèles ne sont pas nécessairement identiques. Le système considéré est représenté sous la forme d'un simple modèle à deux machines séparées par un stock intermédiaire en remplaçant les machines parallèles de chaque poste par une machine équivalente. Pour ce faire, deux techniques de remplacement sont présentées et discutées.

Une analyse théorique du modèle nous a permis d'établir quelques propriétés intéressantes. L'efficacité de cette approche est validée par une étude expérimentale basée sur des benchmarks existants dans la littérature.

Le chapitre 4, présente une extension, généralisation, de la méthode par machines équivalentes pour évaluer les performances d'une ligne de production à K machines et $(K - 1)$ stocks intermédiaires. Cette méthode est basée sur l'analyse des différents états des différents buffers en utilisant $(K - 1)$ processus Markoviens de naissance et de mort. Les taux de naissance et de mort de chaque processus sont définis en tenant en compte l'influence des $(K - 2)$ autres processus. Ensuite, chaque machine est remplacée par une machine équivalente

intégrant les indisponibilités dues aux différents buffers ainsi qu'aux différentes pannes et réparations de l'ensemble des machines. Finalement, le taux de production de la ligne est défini comme le goulot d'étranglement entre les taux de production de machines équivalentes. Cette approche considère à la fois le cas d'une ligne homogène ainsi que le cas plus générale avec des machines ayant différentes capacités de production (non-homogène). Une étude comparative basée sur différentes instances issues de la littérature est présentée et discutée.

Dans le chapitre 5, nous étudions le problème de dimensionnement des stocks intermédiaires (buffers) dans le cas d'une ligne de production en série. Cette étude constitue une application directe de la méthode par machines équivalentes présenté dans le chapitre précédent. L'idée consiste à garder la même approche de formulation mais en considérant les capacités de stocks intermédiaires comme des variables à déterminer. Le problème d'optimisation du dimensionnement des buffers est ensuite défini comme un programme non-linéaire. Plusieurs versions du problème sont considérées. Les résultats numériques montrent que cette approche est bien robuste et très compétitive en termes de temps de calcul.

Enfin, une conclusion générale clôture ce manuscrit en résumant les différents travaux réalisés ainsi que des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre 1

Notions de base sur les lignes de production en série

Résumé :

Ce chapitre est consacré à la présentation des notions de base nécessaires à la description du sujet d'étude de cette thèse ainsi qu'à la compréhension de la contribution scientifique des travaux réalisés. Il permettra d'introduire les différents concepts et définitions propres à l'évaluation des performances d'une ligne de production en série. Tout d'abord nous nous intéresserons aux études typologiques de ce problème, c'est-à-dire les différentes classifications et variantes déjà identifiées dans la littérature. Ensuite, nous analyserons les approches de résolution bien connues dans la littérature que sont : les méthodes par décomposition et les méthodes par agrégation.

1.1 Définitions

Dans cette section, nous donnons quelques définitions du vocabulaire souvent utilisé dans l'étude des lignes de production. La liste est loin d'être exhaustive, Néanmoins nous définissons les différents concepts qui reviennent tout au long de ce manuscrit.

Ligne synchrone/asynchrone : si les temps de cycle de toutes les machines sont identiques, le système de production est appelé synchrone sinon il est dit asynchrone [2].

Ligne homogène/non-homogène : une ligne de production est dite homogène si les temps des opérations des machines sont identiques et non-homogène dans le cas contraire [5].

Défaillances dépendant du temps (time-dependent failures)/Défaillances dépendant des opérations (operations-dependent failures) : dans le premier cas les défaillances d'une machine dépendent de son temps passé à l'état de fonctionnement, tandis que pour le deuxième cas, elles dépendent du nombre d'opérations effectuées par la machine. [2]

Le temps de cycle : aussi appelé temps de traitement est la durée dont une machine a besoin pour traiter une pièce. Les temps de cycle des machines peuvent être déterministes, c'est-à-dire exactement identiques pour toutes les pièces de même référence. Ils peuvent être aussi stochastiques quand ils varient aléatoirement d'une pièce à l'autre. Dans ce dernier cas, la distribution du temps de cycle est généralement supposée exponentielle si le modèle est à temps continu et géométrique s'il est à temps discret.

En utilisant cette caractérisation des temps des opérations des machines, Gershwin [35] a décrit trois types de modèles basés sur des processus Markoviens. Cette classification a été ensuite reprise par d'autres travaux tels que ceux de Belmansour [4].

Le modèle déterministe : toutes les machines de la ligne ont des temps d'opération déterministes. Le modèle Markovien associé est caractérisé par un temps et des états discrets.

Le modèle exponentiel : il impose aux machines des temps d'opération aléatoires distribués de manière exponentielle. Le modèle Markovien associé est caractérisé par un temps continu et des états discrets.

Le modèle continu : il approche le flux discret de pièces par un flux continu. Le modèle Markovien associé est caractérisé par un temps continu et des états mixtes : états frontières discrets et états internes continus.

La capacité machine : c'est le nombre de pièces produites par une machine par unité de temps lorsque cette dernière est en état de fonctionnement. Autrement dit, c'est une caractéristique intrinsèque de la machine.

Machine goulet : nous définissons, dans ce travail, la machine goulet comme étant la machine qui a le plus petit taux de production équivalent.

la Famine d'une machine (starvation) : c'est l'arrêt d'une machine (qui fonctionne) à cause d'une rupture d'alimentation due à son stock amont vide.

Le blocage d'une machine : c'est l'arrêt d'une machine (qui fonctionne) à cause d'une indisponibilité de son stock aval (stock plein).

On distingue, dans la littérature, deux mécanismes différents de blocage :

Le blocage avant service : une machine est contrainte à attendre qu'une place se libère au niveau du stock intermédiaire directement en aval avant de lancer le traitement de la prochaine pièce. Avec ce type de mécanisme, une machine peut être bloquée même si une pièce est en cours de traitement.

Le blocage après service : une machine ne peut être bloquée avant qu'elle finisse le traitement de la pièce en cours. Une fois que le traitement de la pièce est terminée, elle est transférée au stock intermédiaire en aval à condition qu'il y ait une place de libre. Sinon, elle attendra sur la machine jusqu'à ce qu'une place se libère.

1.2 Indicateurs de performance

La première étape pour comprendre et analyser le comportement d'un système de production afin d'améliorer sa productivité est l'évaluation de sa performance. Les principaux indicateurs de performance clés sont les suivants :

Le taux de production (Throughput/Production rate) : définit comme étant le nombre de pièces produites par le système par unité de temps. Une autre définition, couramment utilisée, considère aussi le taux de production comme le nombre de pièces produites par la dernière machine par unité de temps .

Li [48] admet une distinction entre les deux définitions : *production rate* et *throughput*. La première désigne le nombre de pièces produites par la dernière machine durant un cycle de production tandis que la deuxième représente le nombre de pièces produite mais par unité de temps. Mais il est évident que les deux définitions sont équivalentes.

Le niveau moyen des stocks intermédiaires (Work-in-process of buffers) : c'est le nombre moyen de pièces contenues dans un stock intermédiaire d'une ligne de production à l'état stationnaire de son fonctionnement.

1.3 Modèles d'évaluation de performances

Commençons par introduire la notion de modèle qui est définie par [12] comme la représentation résumée et simplifiée d'un système du monde réel, construit dans le but d'analyser ou de répondre à des questions spécifiques. Les modèles peuvent être perspectifs et descriptifs. Dans le premier cas, le modèle est utilisé pour définir des variables de décision afin de décrire le système, tandis que dans le second, il est utilisé pour étudier les performances du système en utilisant un ensemble de variables de décision.

Les différentes catégories d'approches de modélisation des systèmes qui peuvent être utilisées lors de la conception et l'analyse d'une configuration d'un système de production représentées par la figure 1.1 sont : les modèles physiques tels que les dessins et prototypes, les modèles analytiques tels que les modèles de files d'attente ou de programmation mathématique et enfin les modèles de simulation tel que la simulation à événements discrets.

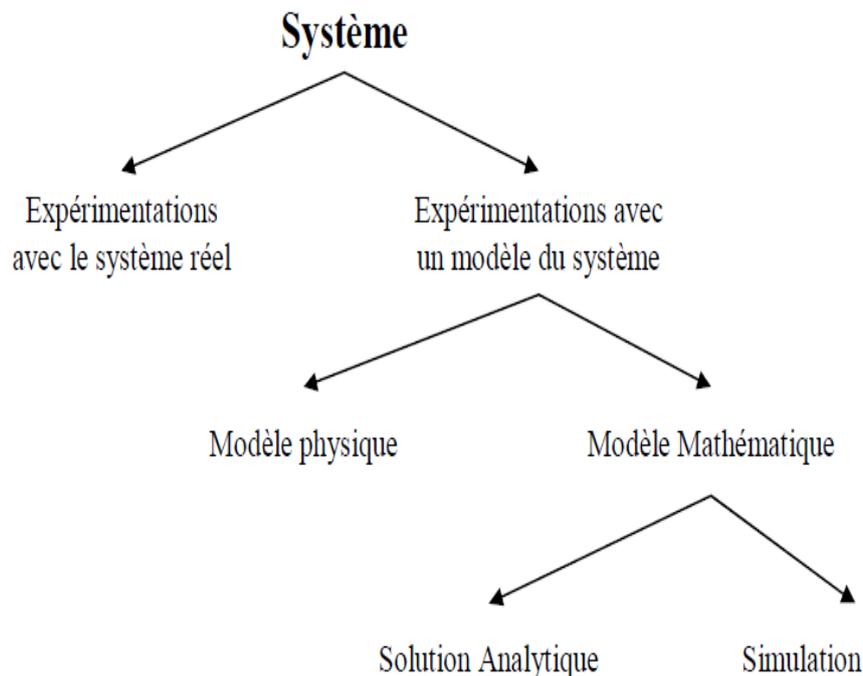


FIGURE 1.1: Différents modèles de représentation d'un système [12].

Les modèles de simulation sont très répandus car ils ne nécessitent pas une connaissance approfondie des théories mathématiques. Ils sont basés sur la construction d'un modèle

représentant le système réel ou proposé afin d'étudier son comportement dans une configuration spécifique.

Le principal avantage de cette technique est la possibilité d'étudier tout type de système de production, avec un niveau de détail requis et en prenant en compte également différentes politiques de gestion et de contrôle [12]. Le principal inconvénient des modèles de simulation est l'effort nécessaire pour leur construction et validation. En effet, la construction des modèles est une tâche ardue et nécessite une formation et de l'expérience. Un autre problème lié à l'utilisation de la simulation, dans les systèmes de production, est que la qualité des résultats dépend fortement du nombre de tests et de la durée de l'horizon de simulation. Ceci fait que cette approche est trop consommatrice de temps et de moyens de calcul.

Les modèles analytiques sont des descriptions simplifiées d'un système basées sur différents outils mathématiques. Ils le représentent en termes de relations logiques et qualitatives qui sont ensuite résolues pour analyser le comportement du système.

Il existe deux types de modèles analytiques : les modèles exacts et les modèles approchés.

Souvent, des simplifications supplémentaires sont introduites pour faire face à la complexité des systèmes réels. Ceci signifie qu'il y a une autre approximation en plus des hypothèses du modèle et les résultats ne sont pas exacts. Cependant, dans de nombreux cas, il est préférable d'augmenter la complexité du modèle en supprimant des hypothèses rigoureuses. En effet, le décideur est parfois obligé d'opter pour un modèle résolu par une manière approchée à cause sa complexité. Néanmoins, accroître l'exhaustivité du modèle et sa précision est un challenge permanent.

Le principal avantage des modèles analytiques approchés, est qu'ils sont capables d'évaluer rapidement et avec précision les performances du système, tels que les taux de production, les niveaux de stock moyens, les taux d'utilisation des machines...etc. L'une des limites des ces modèles analytiques est qu'il est souvent nécessaire d'introduire des hypothèses restrictives pour simplifier leur traitement mathématique.

1.4 Méthodes analytiques approchées

Cette section donne un aperçu sur les techniques de décomposition et d'agrégation, souvent utilisée dans la littérature, pour le développement des différentes méthodes analytiques pour l'évaluation des performances des lignes de production. Ces deux techniques ont un point commun, à savoir l'utilisation de modèles élémentaires comme outils de base pour la construction des modèles d'évaluation globaux.

1.4.1 Les méthodes par décomposition

Les méthodes par décomposition sont des modèles analytiques approchés pour évaluer les performances des lignes de production. L'idée principale de ces approches consiste à décomposer la ligne originale, de manière récursive, en plusieurs sous-systèmes ou sous-lignes de petite taille (généralement des modèles à deux machines) dont la solution exacte est bien connue, pour ensuite calculer le taux de production de la ligne globale. Ainsi, les approches par décomposition peuvent être résumées en trois étapes :

- La caractérisation des sous-systèmes (modèle de base).
- La définition des équations reliant les paramètres inconnus des sous-systèmes décomposés
- Le développement d'un algorithme de résolution de ces équations.

Un exemple illustratif, avec une ligne à cinq machines, est représentée par la figure 1.2.

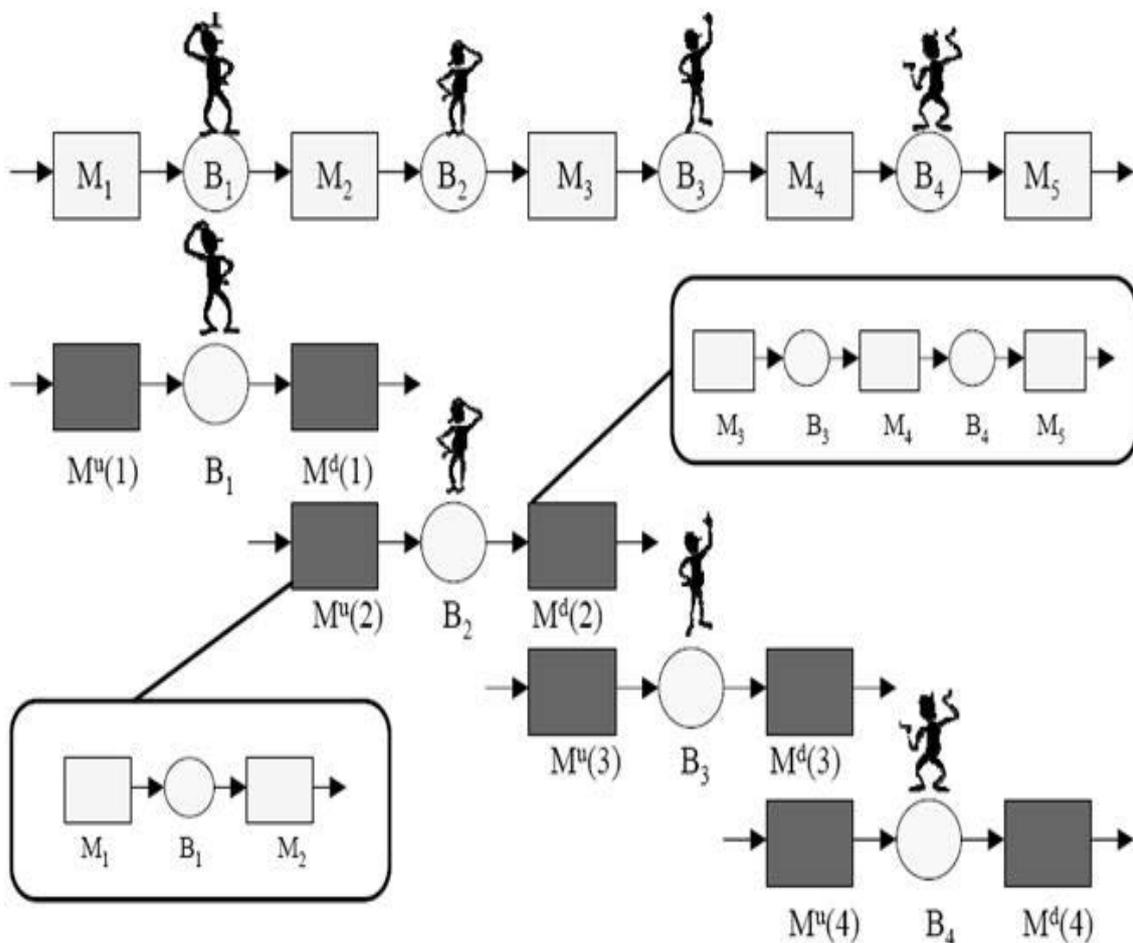


FIGURE 1.2: Illustration de la technique de décomposition [12].

1.4.2 Les méthodes par agrégation

Les approches par agrégation consistent à remplacer étape par étape les sous systèmes à deux machines et un stock intermédiaire par une machine équivalente (voir la figure 1.3). Ces procédures d'agrégation peuvent être déroulées en amont de la première à la dernière machine ou en aval (dans le sens contraire).

Cette technique, introduite par Terracol et David [74], est applicable à tous les types de lignes de production (homogènes, non-homogènes, synchrones, asynchrones).

Contrairement aux techniques de décomposition, les méthodes d'agrégation permettent de formuler des expressions analytiques pour évaluer les paramètres de fiabilité des machines équivalentes. Par conséquent, aucun algorithme itératif n'est requis pour mener une agrégation, ce qui permet d'atteindre les résultats escomptés en un temps de calcul nettement inférieur à celui exigé par la méthode de décomposition [4].

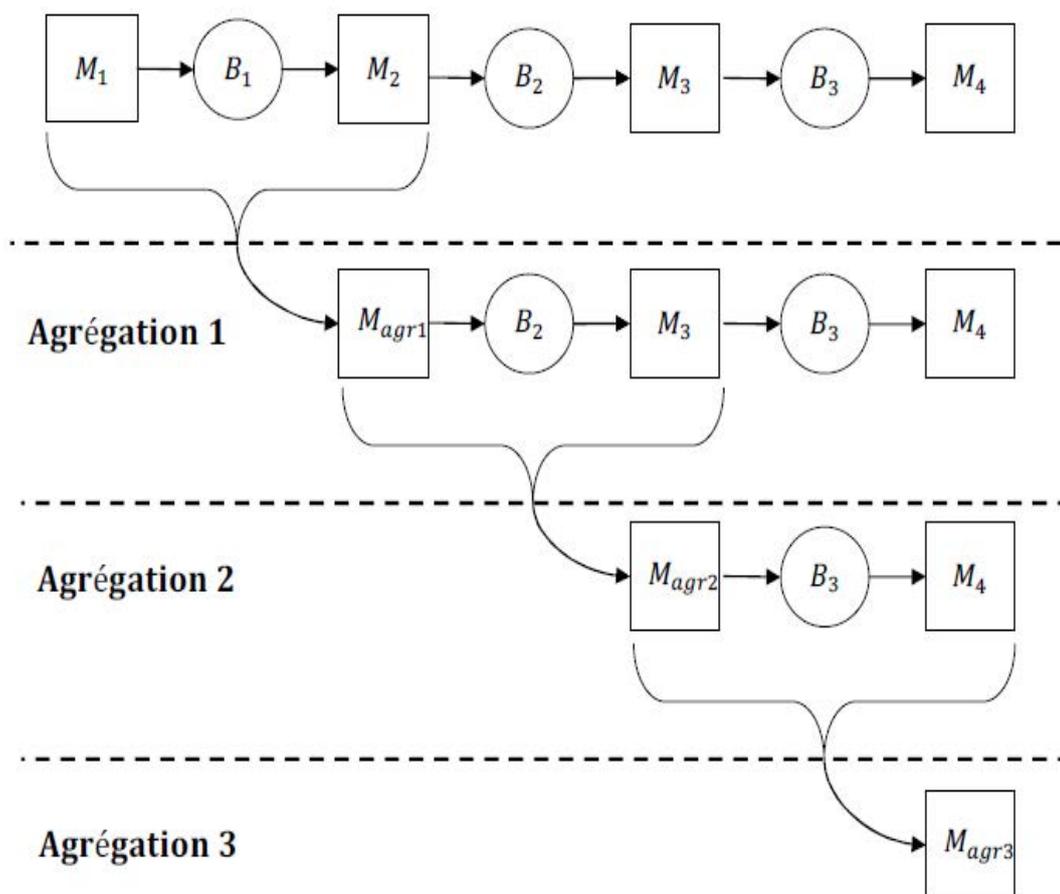


FIGURE 1.3: Illustration de la technique d'agrégation.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelques définitions relatives à l'analyse des performances des systèmes de production. Ces définitions sont nécessaires pour permettre au lecteur de bien comprendre le contexte ainsi que les différentes hypothèses admises dans cette thèse. Ensuite, nous nous sommes intéressés aux principaux modèles d'évaluation de performances des systèmes de production rencontrés dans la littérature ainsi que les caractéristiques propres à chacun d'entre eux.

Comme l'objectif premier de ce travail est de développer une nouvelle méthode analytique, il était important de s'intéresser aussi aux principales méthodes approchées que sont la méthode de décomposition et la méthode d'agrégation.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons un nouveau modèle analytique pour l'évaluation d'une ligne à deux machines et un seul stock intermédiaire. Ce modèle sera utilisé par la suite comme une base de construction d'une nouvelle approche analytique dite méthode par machines équivalentes pour l'évaluation des performances des lignes de production plus grandes.

Chapitre 2

Etude d'une ligne à deux machines et un stock intermédiaire

Résumé :

Dans ce chapitre, nous présenterons un modèle analytique pour l'évaluation des performances d'une ligne de production à deux machines et un stock intermédiaire. Ce modèle est basé sur la modélisation et l'analyse des différents états du stock intermédiaire en utilisant un processus Markovien de naissance et de mort afin de calculer les probabilités de blocage et de famine. Ensuite, chacune des deux machines est remplacée par une machine équivalente supposée parfaite. Enfin, le taux de production du système original est défini comme étant le goulet d'étranglement entre les taux de production des deux machines équivalentes ou fictives. Les différentes propriétés théoriques ainsi que les performances numériques de cette formulation sont présentées et discutées.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet des publications suivantes :

- **Ouazene, Y**, Yalaoui, A and Chehade, H . Analysis of a buffered two-machine production line with unreliable machines. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 2013, acceptée : July 25, 2013 . [80]
- **Y., Ouazene, , A.**, Yalaoui and H., Chehade. Throughput analysis of two-machine-

- one buffer line model : a comparative study, *Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making, Proceeding of the 10th International FLINS Conference*, 1281-1286, 2012. [81]
- **Y., Ouazene**, A., Yalaoui and H. Chehade, A new cost-based mathematical model for a two machine one-buffer design problem, 19th Triennial Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS2011), Melbourne, 2011. [79]
 - **Y., Ouazene**, H., Chehade and A., Yalaoui .Approches mono et multi-objective pour la conception d'un système de production à deux machines et un stock-tampon, *9ème Congrès International de Génie Industriel (CIGI 2011)*, Saint-Sauveur, 2011. [75]
 - **Y., Ouazene**, A., Yalaoui et H., Chehade. Conception des lignes de production : état de l'art, *12ème congrès annuel de la société française de la recherche opérationnelle et d'aide à la décision*, Saint-Etienne, 2011. [78]

2.1 Introduction et état de l'art

L'analyse des performances d'une ligne de production est l'une des étapes principales de la phase d'optimisation de la conception. En effet, la performance d'une ligne de production est souvent exprimée en fonction du taux de production global de la ligne. Dallery et Gershwin [19] ont montré qu'on ne peut avoir une formulation analytique (solution exacte) du taux de production que dans le cas d'une ligne à deux machines. C'est pourquoi le modèle d'une ligne à deux machines est souvent utilisé comme une base de construction pour analyser et développer des méthodes d'approximation pour des lignes de production plus grandes et plus complexes.

La plupart des méthodes d'approximation sont basées soit sur la méthode d'agrégation, soit sur la méthode de décomposition [46]. Comme nous l'avons introduit dans le chapitre précédent, la méthode d'agrégation consiste à remplacer, de manière récursive, chaque deux machines avec une machine équivalente qui a le même taux de production. Pour la méthode de décomposition, dite de Gershwin [34], elle consiste à remplacer une ligne de production à M machines et $(M - 1)$ buffers par $(M - 1)$ systèmes à deux machines et un buffer.

Plusieurs modèles à deux machines et un buffer ont été utilisés, dans la littérature, pour analyser les performances de systèmes plus complexes. A titre d'exemple Dubois et Forestier [16] ont proposé une solution exacte pour l'analyse d'une ligne de production constituée de deux machines séparée par un stock intermédiaire. Les auteurs ont calculé, probablement pour la première fois, les probabilités de blocage et de famine des machines. Ces probabilités sont ensuite largement utilisées dans les méthodes de décomposition et d'agrégation proposée par la suite dans la littérature.

Différents axes de distinction entre ces modèles ont été adoptés. Une distinction selon le type de la ligne de production : synchrone si les produits sont transférés simultanément d'une machine à une autre, asynchrone si chaque type de produit est transféré indépendamment des autres ou continue si les produits sont transférés de façon continue et à vitesse constante. Une distinction selon le mode de défaillance des machines. Deux types de défaillances sont considérés : défaillance dépendante du temps (TDF : time-dependent failures) et défaillance dépendante des opérations (ODF : operation-dependent failures). Dans le premier cas, l'état de panne d'une machine dépend du temps, i.e., une machine peut tomber en panne même si elle est bloquée ou affamée. Par contre, dans le second mode, la machine ne peut tomber en panne si elle est au repos.

L'autre grand axe de classification de ces modèles est la distribution des temps de panne et des temps de réparation des machines. Li *et al.* [45] ont présenté une intéressante étude

comparative entre les différents modèles à deux machines existant dans la littérature. Ils ont identifié huit différents modèles, classés selon le type de la ligne de production (synchrone ou asynchrone), selon le mode de défaillance (Time-dependent-failure ou Operation-dependent-failure) et enfin selon la loi de probabilité des temps de panne et de réparation (Bernoulli, géométrique et géométrique).

Alden [1] a introduit un modèle à deux machines en considérant des états de pannes et de fonctionnement suivants des lois exponentielles. Ce modèle a été également étudié par Li *et al.* [47, 45]. On y considère une hypothèse importante qui stipule que les deux machines ne peuvent tomber en panne simultanément. En effet, si une machine est en réparation, l'autre machine ne peut tomber en panne et sa capacité de production est réduite à son taux de production intrinsèque (en isolement). Cette hypothèse permet d'approximer le taux de production en tenant compte du fait que les deux machines ne peuvent être simultanément en panne. le taux de production intrinsèque (isolé) d'une machine M_i (avec taux de production ω_i) est défini par Gershwin et Schor [36] comme suit :

$$\rho_i = \omega_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \quad (2.1)$$

Le deuxième modèle est celui proposé par Gershwin [35] et repris ensuite par Li *et al.* [45]. Dans ce modèle, outre les hypothèses classiques communes au modèle d'Alden, il est considéré que lorsque le stock tampon est vide, les deux machines sont en état de fonctionnement et que la deuxième machine est plus rapide que la première ($\omega_1 < \omega_2$) alors la capacité de production de la seconde est abaissée à ω_1 . En d'autres termes, quand le buffer est vide ou plein et que les deux machines ont des capacités de production différentes alors la machine la plus rapide doit réduire sa capacité. Ces deux modèles sont comparés et analysés par Li *et al.* [45].

Wijngaard [92] a étudié le même système composé de deux machines non fiables séparées par un stock intermédiaire en utilisant un modèle de minimisation des coûts basé sur des points de régénération. L'auteur a examiné le cas où les stations de production ont des capacités de production différentes, des temps de panne et de réparation suivant des lois exponentielles. Ce dernier modèle n'a pas été considéré dans l'étude comparative proposée par Li *et al.* [45]. C'est pourquoi nous l'intégrons dans notre étude comparative pour la validation du modèle proposé dans ce chapitre.

D'autres modèles à deux machines avec certaines hypothèses particulières ou supplémentaires existent dans la littérature. A titre d'exemples, Suliman [72] a proposé un modèle mathématique pour une cellule de fabrication composée de deux machines séparée par un stock intermédiaire et un robot de transfert pour le chargement, le déchargement et le dé-

placement des pièces. Tolio *et al.* [89] ont considéré le cas avec des machines ayant plusieurs modes de défaillance (chaque machine peut tomber en panne de différentes manières). Ils ont présenté une méthode analytique basée sur la technique de décomposition pour évaluer la performance de la ligne de production en considérant aussi des temps de traitement déterministes. En 2009, Tan et Gershwin [73] ont proposé un modèle pour analyser le même type de lignes de production avec un mode de transfert continu. Dans leur modèle, les auteurs ont décrit les états de chacune des deux machines en utilisant un processus Markovien continu.

2.2 Formulation du problème et analyse des performances

Nous considérons deux machines (stations de travail) reliées par une zone de stockage intermédiaire (voir figure 2.1). Le système est sujet à des indisponibilités en raison de la capacité limitée du buffer ou/et la défaillance et la réparation des machines.

Nous considérons aussi les hypothèses suivantes :

- L'état de panne des machines dépend des opérations. Une machine ne peut tomber en panne si elle est affamée ou bloquée.
- La première machine ne peut être affamée et la seconde ne peut être bloquée.
- Les temps de défaillance et de réparation sont indépendants et distribués suivant une loi exponentielle.
- Le buffer ne peut tomber en panne et les temps de transition entre machines et buffer sont nuls.

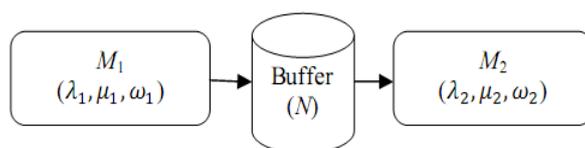


FIGURE 2.1: Ligne de production à deux machines et un stock intermédiaire

Nous adoptons aussi les notations suivantes :

2.2.1 Analyse des états du stock intermédiaire

En Considérant le buffer comme un système isolé entre deux machines fiables, les différents états du système peuvent être modélisés par un processus de naissance et de mort. Pour se faire, on considère un processus de naissance et de mort avec $(N+1)$ états $\{0, 1, \dots, N\}$

λ_i	Le taux de défaillance de la machine M_i
μ_i	Le taux de réparation de la machine M_i
ω_i	La capacité de production de la machine M_i
$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$	Le rapport des capacités de production
ρ_i	Le taux de production de la machine M_i
ψ	Le taux de production du système
A_i	La disponibilité de la machine M_i
A_s	La disponibilité du système
\bar{N}	Le niveau de stock moyen dans le stock tampon
$P_s, s \in \{0, 1, \dots, N\}$	La probabilité d'avoir s pièces dans le stock

et ω_1, ω_2 respectivement les taux de naissance et de mort. On obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_0(t)}{\partial t} = -\omega_1 \times P_0(t) + \omega_2 \times P_1(t) \\ \frac{\partial P_s(t)}{\partial t} = \omega_1 \times P_{s-1}(t) - (\omega_1 + \omega_2) \times P_s(t) + \omega_2 \times P_{s+1}(t) \\ \frac{\partial P_N(t)}{\partial t} = \omega_1 \times P_{N-1}(t) + \omega_2 \times P_N(t) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

A l'état stationnaire du fonctionnement du système, les termes différentiels $\frac{\partial P_0(t)}{\partial t}$ sont égaux à zéro.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\omega_1 \times P_0 + \omega_2 \times P_1 \\ 0 = \omega_1 \times P_{j-1} - (\omega_1 + \omega_2) \times P_j + \omega_2 \times P_{j+1} \\ 0 = \omega_1 \times P_{N-1} + \omega_2 \times P_N \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Sachant que $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$; en simplifiant le système d'équations 2.3 et en considérant $\sum_{s=0}^N P_s = 1$, on obtient :

$$P_s = \begin{cases} \frac{\alpha^s \times (1-\alpha)}{1-\alpha^{N+1}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{N+1} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Le niveau de stock moyen dans le stock-tampon à l'état stationnaire du fonctionnement

du système est calculé comme suit :

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= E[P_s] \\
&= \sum_{s=1}^N s \times P_s \\
&= \begin{cases} \sum_{s=1}^N s \times \frac{\alpha^s \times (1-\alpha)}{1-\alpha^{N+1}} = \frac{N\alpha^{N+2} - (N+1)\alpha^{N+1} + \alpha}{\alpha^{N+2} - \alpha^{N+1} - \alpha + 1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \sum_{s=1}^N s \frac{1}{1+N} = \frac{N}{2} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Ce calcul du stock moyen est basé sur le calcul de série suivant :

$$\sum_{s=1}^N s \times \frac{\alpha^s \times (1-\alpha)}{1-\alpha^{N+1}} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{N+1}} \times \sum_{s=1}^N s \times \alpha^s \tag{2.6}$$

2.2.2 Formulation de la disponibilité du système

En supposant que la réparation rétablit chaque machine comme à son état neuf, la disponibilité A_i ainsi que la disponibilité asymptotique \bar{A}_i de la machine M_i sont données par les équations suivantes [33] :

$$A_i(t) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \times \exp -(\lambda_i + \mu_i)t \tag{2.7}$$

$$\bar{A}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} A_i(t) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \tag{2.8}$$

Comme indiqué par Sorensen et Janssens [70], la disponibilité du système peut être définie en tenant compte seulement de la disponibilité de la dernière machine. Ceci est justifié par le fait que le taux de production soit défini comme étant le nombre moyen de pièces produites par la dernière machine à l'état stationnaire du fonctionnement du système. C'est pourquoi, dans notre cas d'une ligne à deux machines, la disponibilité du système est considérée comme suit :

$$\begin{aligned}
A_s &= P[M_2 \text{ disponible et non-affamée}] \\
&= P[M_2 \text{ disponible}] - P[M_2 \text{ disponible}] \times P[M_2 \text{ affamée}] \\
&= P[M_2 \text{ disponible}] \times (1 - P[M_2 \text{ affamée}]) \\
&= A_2 \times (1 - P_0)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

En remplaçant P_0 par sa valeur, nous obtenons :

$$A_s = \begin{cases} \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \times \frac{\alpha \times (1-\alpha^N)}{1-\alpha^{N+1}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \times \frac{N}{N+1} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.10}$$

La disponibilité du système est croissante en fonction de la taille du tampon et son comportement asymptotique est le suivant :

$$\bar{A} = \lim_{N \rightarrow \infty} A_s = \begin{cases} \frac{\alpha \times \mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} = \alpha \times A_2 & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} = A_2 & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{\mu_2}{\alpha \times (\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{1}{\alpha} \times A_2 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2.3 Construction de la machine équivalente

Gershwin et Schor [70] ont défini le taux de production propre de chaque machine en la considérant comme isolée du reste du système (sans considérer l'influence des autres machines et celle des buffers). Dans le cas présent, on s'intéresse au taux de production global du système qui peut être défini comme étant le nombre moyen de pièces traitées par la deuxième machine à l'état stationnaire du fonctionnement du système. Par conséquent, afin de calculer les taux de production effectifs des deux machines, chacune est remplacée par une machine équivalente sans famine, blocage ni défaillances [69], [68].

L'idée principale est de remplacer chaque machine par une machine équivalente caractérisée par deux états (panne et fonctionnement). L'indisponibilité de la machine originale due aux probabilités de blocage et de famine est intégrée dans l'état de panne de la machine équivalente.

Soient P_{up}^i et P_{down}^i respectivement les probabilités que la machine équivalente EM_i soit en état de fonctionnement ou de panne. cette hypothèse est traduite par l'équation 2.12.

$$P_{up}^i + P_{down}^i = 1 \quad (2.12)$$

La première machine est en état de fonctionnement si et seulement si elle est réellement capable de traiter des pièces c'est-à-dire pas en panne et non bloquée. De même pour la deuxième machine qui est réellement en état de fonctionnement si et seulement si elle n'est ni en panne ni affamée. Ainsi, la disponibilité effective de la machine équivalente P_{up}^{*i} est comme suit :

$$P_{up}^{*i} = \xi_i \times P_{up}^i \quad (2.13)$$

Tels que : $\xi_1 = 1 - P_N$ et $\xi_2 = 1 - P_0$

$$\begin{cases} P_{up}^{*1} = P_{up}^1 \times (1 - P_N) \\ P_{up}^{*2} = P_{up}^2 \times (1 - P_0) \end{cases} \quad (2.14)$$

En considérant à la fois les définitions ci-dessus ainsi que l'état stationnaire du fonctionnement de la machine équivalente, nous obtenons :

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_i \times P_{up}^{*i} + \mu_i \times P_{down}^i \\ 0 = \lambda_i \times P_{up}^{*i} - \mu_i \times P_{down}^i \end{cases} \quad (2.15)$$

En utilisant les équations 2.12, 2.14 et 2.15, la disponibilité de la machine équivalente est formulée par l'équation 2.16

$$P_{up}^{*i} = \frac{\mu_i \times \xi_i}{\mu_i + \xi_i \times \lambda_i} \quad (2.16)$$

2.2.4 Evaluation du taux de production du système

En se basant sur la disponibilité des machines équivalentes détaillée dans la section ci-avant, nous pouvons calculer le taux de production de chacune des machines équivalentes comme suit :

$$\rho_i = \omega_i * P_{up}^{*i} \quad (2.17)$$

En remplaçant P_{up}^{*i} par sa valeur, nous obtenons les deux formulations suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \omega_1 \times \frac{\mu_1 \times (1 - P_N)}{\mu_1 + (1 - P_N) \times \lambda_1} \\ &= \begin{cases} \frac{\omega_1 \times \mu_1 \times \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha^{N+1}}}{\mu_1 + \lambda_1 \times \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha^{N+1}}} = \frac{\omega_1 \times \mu_1 \times (1-\alpha^N)}{\mu_1 \times (1-\alpha^{N+1}) + \lambda_1 \times (1-\alpha^N)} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\omega \times \mu_1 \times \frac{N}{N+1}}{\mu_1 + \lambda_1 \times \frac{N}{N+1}} = \frac{\omega \times \mu_1 \times N}{\mu_1 \times (N+1) + \lambda_1 \times N} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \omega_2 \times \frac{\mu_2 \times (1 - P_0)}{\mu_2 + (1 - P_0) \times \lambda_2} \\ &= \begin{cases} \frac{\omega_2 \times \mu_2 \times \frac{\alpha \times (1-\alpha^N)}{1-\alpha^{N+1}}}{\mu_2 + \lambda_2 \times \frac{\alpha \times (1-\alpha^N)}{1-\alpha^{N+1}}} = \frac{\omega_2 \times \mu_2 \times (1-\alpha^N)}{\mu_2 \times (1-\alpha^{N+1}) + \lambda_2 \times \alpha \times (1-\alpha^N)} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\omega \times \mu_2 \times \frac{N}{N+1}}{\mu_2 + \lambda_2 \times \frac{N}{N+1}} = \frac{\omega \times \mu_2 \times N}{\mu_2 \times (N+1) + \lambda_2 \times N} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Finalement, le taux de production du système ψ est défini comme étant le goulet d'étranglement entre les deux taux de production des deux machines équivalentes.

$$\begin{aligned}
\psi &= \min\{\rho_1, \rho_2\} \\
&= \begin{cases} \omega_1 \times \min\left\{\frac{\mu_1 \times (1-\alpha^N)}{\mu_1 \times (1-\alpha^{N+1}) + \lambda_1 \times (1-\alpha^N)}; \frac{\mu_2 \times (1-\alpha^N)}{\mu_2 \times (1-\alpha^{N+1}) + \lambda_2 \times \alpha \times (1-\alpha^N)}\right\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \omega \times \min\left\{\frac{N \times \mu_1}{N \times \lambda_1 + (N+1) \times \mu_1}, \frac{N \times \mu_2}{N \times \lambda_2 + (N+1) \times \mu_2}\right\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \\
(2.20)
\end{aligned}$$

Pour une meilleure lisibilité, la formulation ci-dessus peut être réécrite comme suit :

$$\psi = \begin{cases} \omega_1 \times \min\left\{\frac{1}{\frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha^N} + \frac{\lambda_1}{\mu_1}}; \frac{1}{\frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha^N} + \alpha \times \frac{\lambda_2}{\mu_2}}\right\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \omega \times \min\left\{\frac{1}{\frac{N}{N+1} + \frac{\lambda_1}{\mu_1}}; \frac{1}{\frac{N}{N+1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}}\right\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Remarque

Le taux de production du système est croissant en fonction de la taille du stock intermédiaire. Son comportement asymptotique peut être décrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\psi_\infty &= \lim_{N \rightarrow \infty} \psi \\
&= \begin{cases} \omega_1 \times \min\left\{\frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_1}; \frac{\mu_2}{\mu_2 + \alpha \times \lambda_2}\right\} & \text{si } \alpha < 1 \\ \omega \times \min\left\{\frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_1}; \frac{\mu_2}{\mu_2 + \lambda_2}\right\} & \text{si } \alpha = 1 \\ \omega_1 \times \min\left\{\frac{\mu_1}{\alpha \times \mu_1 + \lambda_1}; \frac{1}{\alpha} \times \frac{\mu_2}{\mu_2 + \lambda_2}\right\} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \\
(2.22)
\end{aligned}$$

Théorème 1

Sachant les hypothèses considérées pour la construction du présent modèle, pour tout système à deux machines et un stock intermédiaire, la machine goulet peut être identifié par : $\max\left\{\frac{\lambda_1}{\mu_1}; \alpha \times \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right\}$.

Preuve 1

En se basant sur la formulation du taux de production donnée par l'équation 2.22, ψ peut être réécrit comme suit :

$$\psi = \begin{cases} \omega_1 \times \frac{1}{\frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha^N} + \max\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \alpha \times \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \omega \times \frac{1}{\frac{N+1}{N} + \max\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

Par conséquent, il est évident que :

$$- \frac{\lambda_1}{\mu_1} > \alpha \times \frac{\lambda_2}{\mu_2} \implies \psi = \rho_1$$

et

$$- \frac{\lambda_1}{\mu_1} < \alpha \times \frac{\lambda_2}{\mu_2} \implies \psi = \rho_2$$

□

Théorème 2

Sachant les hypothèses considérées pour la construction du présent modèle. Un système à deux machines séparées par un stock intermédiaire est dit équilibré si l'égalité suivante est vérifiée : $\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \alpha \times \frac{\lambda_2}{\mu_2}$.

Preuve 2

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \alpha \times \frac{\lambda_2}{\mu_2} \implies \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha^N} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha^N} + \alpha \times \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

$$\implies \frac{1}{\frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha^N} + \frac{\lambda_1}{\mu_1}} = \frac{1}{\frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha^N} + \alpha \times \frac{\lambda_2}{\mu_2}}$$

$$\implies \rho_1 = \rho_2 = \psi \text{ (voir équation 2.21). } \square$$

Théorème 3

Soient deux configurations différentes c_1 et c_2 d'un système de production à deux machines avec une même taille N des stocks intermédiaires tel que : $\omega_1^{c_1} \geq \omega_1^{c_2}$ et $\alpha^{c_1} \leq \alpha^{c_2}$.

$$\max\left\{\frac{\lambda_1^{c_1}}{\mu_1^{c_1}}, \alpha^{c_1} \times \frac{\lambda_2^{c_1}}{\mu_2^{c_1}}\right\} \leq \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_2}}{\mu_1^{c_2}}, \alpha^{c_2} \times \frac{\lambda_2^{c_2}}{\mu_2^{c_2}}\right\} \implies \psi^{c_1} \geq \psi^{c_2}$$

Preuve 3

Soient ψ^{c_1} et ψ^{c_2} respectivement les taux de production des deux configurations c_1 et c_2 .

$$\psi^{c_1} = \begin{cases} \omega_1^{c_1} \times \frac{1}{\frac{1-(\alpha^{c_1})^{N+1}}{1-(\alpha^{c_1})^N} + \max\left(\frac{\lambda_1^{c_1}}{\mu_1^{c_1}}, \alpha^{c_1} \times \frac{\lambda_2^{c_1}}{\mu_2^{c_1}}\right)} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \omega^{c_1} \times \frac{1}{\frac{N+1}{N} + \max\left(\frac{\lambda_1^{c_1}}{\mu_1^{c_1}}, \frac{\lambda_2^{c_1}}{\mu_2^{c_1}}\right)} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\psi^{c_2} = \begin{cases} \omega_1^{c_2} \times \frac{1}{\frac{1-(\alpha^{c_2})^{N+1}}{1-(\alpha^{c_2})^N} + \max\left(\frac{\lambda_1^{c_2}}{\mu_1^{c_2}}, \alpha^{c_2} \times \frac{\lambda_2^{c_2}}{\mu_2^{c_2}}\right)} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \omega^{c_2} \times \frac{1}{\frac{N+1}{N} + \max\left(\frac{\lambda_1^{c_2}}{\mu_1^{c_2}}, \frac{\lambda_2^{c_2}}{\mu_2^{c_2}}\right)} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

Pour le reste de la démonstration, sans perte de généralité, nous considérons le cas où : $(\alpha^{c_1}, \alpha^{c_2}) \neq (1, 1)$.

$$\begin{aligned}
\alpha^{c_1} \leq \alpha^{c_2} &\implies \frac{1-(\alpha^{c_1})^{N+1}}{1-(\alpha^{c_1})^N} \leq \frac{1-(\alpha^{c_2})^{N+1}}{1-(\alpha^{c_2})^N} \\
\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x^n} \text{ est une fonction croissante par rapport à } x\right) \\
\text{Alors,} \\
(\omega_1^{c_1} \geq \omega_1^{c_2}), (\omega_2^{c_1} \leq \omega_2^{c_2}), \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_1}}{\mu_1^{c_1}}, \alpha^{c_1} \times \frac{\lambda_2^{c_1}}{\mu_2^{c_1}}\right\} &\leq \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_2}}{\mu_1^{c_2}}, \alpha^{c_2} \times \frac{\lambda_2^{c_2}}{\mu_2^{c_2}}\right\} \\
&\implies \frac{1-(\alpha^{c_1})^{N+1}}{1-(\alpha^{c_1})^N} + \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_1}}{\mu_1^{c_1}}, \alpha^{c_1} \times \frac{\lambda_2^{c_1}}{\mu_2^{c_1}}\right\} \leq \frac{1-(\alpha^{c_2})^{N+1}}{1-(\alpha^{c_2})^N} + \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_2}}{\mu_1^{c_2}}, \alpha^{c_2} \times \frac{\lambda_2^{c_2}}{\mu_2^{c_2}}\right\} \\
&\implies \frac{1}{\frac{1-(\alpha^{c_1})^{N+1}}{1-(\alpha^{c_1})^N} + \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_1}}{\mu_1^{c_1}}, \alpha^{c_1} \times \frac{\lambda_2^{c_1}}{\mu_2^{c_1}}\right\}} \geq \frac{1}{\frac{1-(\alpha^{c_2})^{N+1}}{1-(\alpha^{c_2})^N} + \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_2}}{\mu_1^{c_2}}, \alpha^{c_2} \times \frac{\lambda_2^{c_2}}{\mu_2^{c_2}}\right\}} \\
&\implies \omega_1^{c_1} \times \frac{1}{\frac{1-(\alpha^{c_1})^{N+1}}{1-(\alpha^{c_1})^N} + \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_1}}{\mu_1^{c_1}}, \alpha^{c_1} \times \frac{\lambda_2^{c_1}}{\mu_2^{c_1}}\right\}} \geq \omega_1^{c_2} \times \frac{1}{\frac{1-(\alpha^{c_2})^{N+1}}{1-(\alpha^{c_2})^N} + \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_2}}{\mu_1^{c_2}}, \alpha^{c_2} \times \frac{\lambda_2^{c_2}}{\mu_2^{c_2}}\right\}} \\
&\implies \psi^{c_1} \geq \psi^{c_2}. \square
\end{aligned}$$

Corollaire 1

Le théorème ci-avant est vérifié dans le cas où les deux lignes de production sont homogènes ($\alpha^{c_1} = \alpha^{c_2} = 1$). En effet, si $\omega_1^{c_1} \geq \omega_1^{c_2}$, alors :

$$\begin{aligned}
\max\left\{\frac{\lambda_1^{c_1}}{\mu_1^{c_1}}, \frac{\lambda_2^{c_1}}{\mu_2^{c_1}}\right\} \leq \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_2}}{\mu_1^{c_2}}, \frac{\lambda_2^{c_2}}{\mu_2^{c_2}}\right\} &\implies \frac{N+1}{N} + \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_1}}{\mu_1^{c_1}}, \frac{\lambda_2^{c_1}}{\mu_2^{c_1}}\right\} \leq \frac{N+1}{N} + \max\left\{\frac{\lambda_1^{c_2}}{\mu_1^{c_2}}, \frac{\lambda_2^{c_2}}{\mu_2^{c_2}}\right\} \\
&\implies \psi^{c_1} \geq \psi^{c_2}
\end{aligned}$$

2.3 Etude numérique du modèle

Dans cette section, nous présentons une étude expérimentale afin d'évaluer la performance et l'efficacité du modèle proposé. Pour ce faire, l'étude est basée sur différents exemples numériques existant dans la littérature et traduisant plusieurs configurations possibles.

Ces tests ont été présentés par Wijngaard [92] pour l'analyse et la validation des performances de son modèle à deux machines considérant le même contexte que notre modèle. En effet, l'auteur a considéré plusieurs configurations en variant les paramètres de fiabilité des machines, leurs capacités de production ainsi que la taille du buffer. Les paramètres de chaque configuration sont présentés dans le tableau 2.1.

Dans ce benchmark, sans perte de généralité, les paramètres de la première machine sont fixés comme suit : $\lambda_1 = 0.01$, $\mu_1 = 0.09$ et $\omega_1 = 1$. Les paramètres de la deuxième machine sont choisis de telle façon à ce que pour chaque configuration les deux machines aient le même taux de production isolé $\omega_2 \times \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}$ comme indiqué dans le tableau 2.1. Chaque configuration à trois différentes instances en faisant varier les taux de panne, de réparation

et de production de la seconde machine. La taille du stock intermédiaire varie de 10 à 50 pour chaque instance. Pour chaque configuration, les deux premières instances considèrent cas d'une ligne homogène et la troisième considère le cas non homogène.

Le modèle proposé est comparé, à la fois, aux deux modèles proposés par Alden [1] et Wijngaard [92]. Nous avons choisi ces deux modèles car ils considèrent les mêmes hypothèses que celle choisies pour notre modèle et aussi parce que le dernier modèle n'a pas été considéré dans l'étude comparative des différents modèles existant dans la littérature proposée par Li *et al.* [45].

Instances	λ_2	μ_2	ω_2	$\omega_2 \times \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}$
I.a	0.011	0.09	1	0.891
I.b	0.01	0.0817	1	0.891
I.c	0.01	0.09	0.99	0.891
II.a	0.0153	0.09	1	0.855
II.b	0.01	0.059	1	0.855
II.c	0.01	0.09	0.95	0.855
III.a	0.03	0.09	1	0.750
III.b	0.01	0.03	1	0.750
III.c	0.01	0.09	0.83	0.750
IV.a	0.06	0.09	1	0.600
IV.b	0.01	0.015	1	0.600
IV.c	0.01	0.09	0.67	0.600

TABLE 2.1: Paramètres des différentes configurations test

Pour chaque exemple de chaque instance, nous avons comparé les taux de production calculés par les trois différents modèles. Les différents résultats numériques sont rapportés dans les tableaux 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5.

Pour chacun des exemples la comparaison est illustrée par le calcul des différences relatives (gap) entre les taux de production calculés par chaque modèle en utilisant l'équation 2.26.

$$gap(\%) = 100 \times \frac{\psi_i - \psi_j}{\max(\psi_i, \psi_j)} \quad (2.26)$$

ψ_1 Taux de production calculé par le modèle de Wijngaard [92].

ψ_2 Taux de production calculé par le modèle d'Alden.

ψ_3 Taux de production calculé par le modèle proposé .

Instances	Capacité du stock	ψ_1	ψ_2	ψ_3	Gap[ψ_3, ψ_1](%)	Gap[ψ_2, ψ_1](%)
I.a	10	0.833	0.837	0.818	-1.80	0.48
	20	0.849	0.850	0.853	0.47	0.12
	30	0.858	0.858	0.865	0.81	0.00
	40	0.864	0.864	0.872	0.92	0.00
	50	0.869	0.868	0.875	0.69	-0.12
I.b	10	0.832	0.831	0.818	-1.68	-0.12
	20	0.848	0.845	0.853	0.59	-0.35
	30	0.857	0.854	0.865	0.92	-0.35
	40	0.863	0.860	0.871	0.92	-0.35
	50	0.868	0.864	0.875	0.80	-0.46
I.c	10	0.835	-	0.821	-1.664	-
	20	0.850	-	0.856	0.745	-
	30	0.859	-	0.869	1.126	-
	40	0.865	-	0.875	1.152	-
	50	0.870	-	0.879	1.011	-

TABLE 2.2: Performances des différents modèles : instances I.a, I.b et I.c

Le tableau 2.2 présente les résultats des trois modèles pour la première configuration considérant des exemples avec un taux de production isolé de 0.981. On note que les trois modèles obtiennent des performances sensiblement similaires avec des gaps inférieurs à 1%. Dans les cas d'une ligne non-homogène (exemple I.c) le modèle proposé obtient des résultats similaires à ceux de Wijngaard avec un gap maximal inférieur à 2%.

Le tableau 2.3 présente les résultats des trois modèles pour la première configuration considérant des exemples avec un taux de production isolé de 0.855. Nous constatons la même tendance. En fait, le modèle proposé obtient des résultats similaires à ceux du modèle de Wijngaard et le modèle d'Alden spécialement dans les cas II.a et II.b.

Le tableau 2.4 présente les résultats des trois modèles pour la première configuration considérant des exemples avec un taux de production isolé de 0.750. Nous notons que pour les deux instances III.a et III.b à la fois le modèle proposé ainsi que le modèle d'Alden sous-estiment les taux de production comparé avec le model de Wijngaard. La différence par rapport au débit du système calculé par le modèle d'Alden est plus importante, surtout pour la deuxième instance avec des écarts de plus de 10 %.

Le tableau 2.5 présente les résultats des trois modèles pour la première configuration

Instances	Capacité du stock	ψ_1	ψ_2	ψ_3	Gap[ψ_3, ψ_1](%)	Gap[ψ_2, ψ_1](%)
II.a	10	0.804	0.802	0.787	-2.11	-0.25
	20	0.821	0.814	0.820	-0.12	-0.85
	30	0.831	0.822	0.831	0.00	-1.08
	40	0.838	0.827	0.837	-0.12	-1.31
	50	0.842	0.831	0.840	-0.24	-1.31
II.b	10	0.800	0.774	0.788	-1.54	-3.25
	20	0.817	0.790	0.820	0.37	-3.30
	30	0.827	0.801	0.831	0.53	-3.14
	40	0.833	0.808	0.837	0.50	-3.00
	50	0.838	0.814	0.841	0.32	-2.86
II.c	10	0.810	-	0.801	-1.09	-
	20	0.826	-	0.834	0.96	-
	30	0.835	-	0.845	1.14	-
	40	0.841	-	0.849	0.98	-
	50	0.845	-	0.852	0.80	-

TABLE 2.3: Performances des différents modèles : instances II.a, II.b et II.c

considérant des exemples avec un taux de production isolé de 0.600. Nous notons que pour les deux instances IV.a et IV.b à la fois le modèle proposé et le modèle d'Alden sous-estiment le débit du système par rapport au modèle de la Wijngaard. La différence par rapport au débit du système calculé par le modèle d'Alden est plus important, surtout pour la deuxième instance avec des écarts de plus de 20 %.

On peut conclure que le modèle proposé et le modèle de Wijngaard obtiennent des résultats similaires avec des écarts inférieurs à 1% dans les cas de lignes de production homogènes et non-homogènes. Par contre, le modèle d'Alden obtient des résultats sensiblement différents par rapport aux deux autres modèles en particulier pour le cas III.b et IV.b.

Nous notons également que les gaps entre les différents modèles décroissent en fonction de la taille des buffers.

2.4 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, une nouvelle formulation analytique pour évaluer le taux de production d'une ligne à deux machines séparées par un stock intermédiaire.

Instances	Capacité du stock	ψ_1	ψ_2	ψ_3	Gap[ψ_3, ψ_1](%)	Gap[ψ_2, ψ_1](%)
III.a	10	0.714	0.706	0.697	-2.38	-1.12
	20	0.731	0.714	0.723	-1.09	-2.33
	30	0.740	0.720	0.732	-1.08	-2.70
	40	0.744	0.724	0.736	-1.08	-2.69
	50	0.747	0.727	0.739	-1.07	-2.68
III.b	10	0.704	0.622	0.698	-0.85	-11.65
	20	0.720	0.639	0.723	0.41	-11.25
	30	0.730	0.651	0.732	0.27	-10.82
	40	0.737	0.661	0.736	-0.14	-10.31
	50	0.741	0.670	0.739	-0.27	-9.58
III.c	10	0.721	-	0.727	0.77	-
	20	0.737	-	0.744	0.97	-
	30	0.744	-	0.747	0.34	-
	40	0.747	-	0.747	-0.01	-
	50	0.749	-	0.747	-0.27	-

TABLE 2.4: Performances des différents modèles : instances III.a, III.b et III.c

Cette formulation est basée sur l'analyse des différents états du stock intermédiaire en utilisant un processus Markovien de naissance et de mort afin de déterminer les probabilités d'occurrence de chacun des états. Ensuite, chaque machine originale est remplacée par une machine équivalente supposée parfaite et libre de tout blocage ou de famine. Enfin, le taux de production du système est défini comme étant le goulet d'étranglement entre les taux de production des deux machines équivalentes.

En se basant sur un ensemble de tests numérique issus de la littérature, nous avons comparé les performances de ce modèle avec deux autres formulations analytiques bien connues dans la littérature.

Dans le chapitre suivant nous présenterons une première extension de ce modèle. En effet, nous nous intéresserons à l'évaluation des performances d'une ligne de production dite hybride. Il s'agit d'un système séries-parallèles avec deux stations de travail composées chacune de différentes machines pouvant traiter les mêmes tâches.

Instances	Capacité du stock	ψ_1	ψ_2	ψ_3	Gap[ψ_3, ψ_1](%)	Gap[ψ_2, ψ_1](%)
IV.a	10	0.578	0.569	0.566	-2.08	-1.56
	20	0.591	0.574	0.583	-1.35	-2.88
	30	0.597	0.577	0.588	-1.51	-3.35
	40	0.599	0.580	0.591	-1.34	-3.17
	50	0.600	0.582	0.593	-1.17	-3.00
IV.b	10	0.564	0.443	0.566	0.35	-21.45
	20	0.578	0.456	0.583	0.86	-21.11
	30	0.587	0.467	0.588	0.17	-20.44
	40	0.591	0.467	0.591	0.00	-20.98
	50	0.596	0.484	0.593	-0.50	-18.79
IV.c	10	0.584	-	0.600	2.62	-
	20	0.595	-	0.603	1.32	-
	30	0.598	-	0.603	0.83	-
	40	0.600	-	0.603	0.50	-
	50	0.600	-	0.603	0.50	-

TABLE 2.5: Performances des différents modèles : instances IV.a, IV.b et IV.c

Chapitre 3

Analyse d'une ligne à deux stations avec machines parallèles

Résumé :

Ce chapitre présente une nouvelle formulation analytique pour évaluer le taux de production d'un système de fabrication constitué de deux postes de travail avec des machines parallèles non fiables dans chaque poste. Les machines parallèles ne sont pas nécessairement identiques. Les temps de traitement des pièces, les temps de panne et de réparation sont des variables aléatoires exponentiels indépendantes.

Le système considéré est représenté sous la forme d'un simple modèle à deux machines séparées par un stock intermédiaire en remplaçant les machines parallèles de chaque poste par une machine équivalente. Pour ce faire, deux techniques de remplacement sont présentées et discutées. Une analyse théorique du modèle nous a permis d'établir quelques propriétés intéressantes. L'efficacité de cette approche est validée par une étude expérimentale basée sur des benchmarks existants dans la littérature.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet des publications suivantes :

- **Y., Ouazene**, H., Chehade, A., Yalaoui and F., Yalaoui. Throughput evaluation of two-stage production line with unreliable parallel machines. *European Journal of*

- Operational Research*, 2014, en révision. [77]
- **Y., Ouazene, A.**, Yalaoui, H., Chehade and F., Yalaoui. F., A new formulation of buffered two-workstation production line with parallel unreliable machines, *10th Industrial Simulation Conference*, pages 200-206, Brno ,2012. [82]
 - **Ouazene, Y**, Chehade, H, Yalaoui, A and Yalaoui, F . A buffered three-station merge system : performance analysis and comparative study, *Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), 2013 IEEE International Conference on*, pages 154-159, Hammamet, 2013. [84]

3.1 Introduction

La performance d'une ligne de production est souvent exprimée en fonction de son taux de production global ou son débit. Zhang [48] fait une distinction entre ces deux concepts. En effet, il a défini le taux de production du système comme le nombre moyen de pièces produites par la dernière machine, par cycle de temps, à l'état stationnaire du fonctionnement du système. Par ailleurs, il a défini le débit comme le nombre moyen de pièces par unité de temps.

Patchong et Willaeyts [60] ont présenté trois moyens pour augmenter le taux de production d'un système qui sont les suivants : augmentation de la capacité de stockage intermédiaire, amélioration de la disponibilité des machines et augmentation de la capacité de travail des machines. Les effets de ces alternatives possibles sur le débit du système sont limités. La structure composée de machines parallèles est l'une des solutions utilisées pour augmenter à la fois la disponibilité et la capacité de traitement d'un poste de travail.

En comparaison avec la vaste littérature concernant l'analyse des lignes de production avec une machine unique dans chaque poste de travail, les travaux qui considèrent des machines parallèles sur les postes de travail sont moins abondants. Néanmoins, il existe quelques approches analytiques qui traitent des systèmes de production de type séries-parallèles. Par exemple, Bergeron *et al.* [8] ont présenté un état de l'art sur des modèles avec des machines non fiables et en particulier les modèles considérant des systèmes de production en configuration séries-parallèles. Les méthodes d'analyse pour évaluer le taux de production des systèmes parallèles sont relativement limitées (Li [44]). Un des premiers travaux cité dans la littérature est celui de Ignall et Silver [39]. Les auteurs se sont intéressés au taux de production d'un modèle en série-parallèle, où chaque étage est constitué de machines identiques. Ils ont proposé une méthode approchée basée sur le remplacement des machines identiques dans chaque étage par une machine équivalente unique avec une capacité égale à la somme des capacités individuelles des machines parallèles.

Ancelin et Semery [3], Burman [10] et Patchong et Willaeyts [60] ont également étudié des lignes de production en configuration séries-parallèles. Les auteurs ont aussi considéré le remplacement des machines parallèles, dans chaque étage, par une machine équivalente. Dans la première étude, les auteurs ont proposé un modèle à états discrets. Dans le second, Burman [10] a développé un modèle considérant le cas continu avec un mode de défaillance dépendant des opérations. L'auteur a proposé une approximation du flux discret de pièces par un flux continu. La machine équivalente a une capacité de traitement (production) maximale égale à la somme des capacités de production des machines parallèles. Les taux de pannes et de réparations sont calculés en supposant que toutes les machines parallèles fonctionnent

indépendamment les unes des autres. L'auteur a utilisé une méthode basée sur trois équations différentes pour estimer le taux de production, le taux de panne et de réparation de la machine équivalente de chaque station de travail. La première équation établit la variabilité du taux de production de la machine équivalente avec le taux de production effectif de l'ensemble des machines parallèles originales. La seconde équation correspond au taux de production espéré tandis que la troisième correspond à un taux de production maximal.

Patchong et Willaeyts [60] ont proposé une technique similaire à celle de Burman mais plus facile à mettre en œuvre d'un point de vue algorithmique. Les auteurs ont établi que, pour certains exemples numériques, leur approche était plus réaliste que la méthode proposée par Ancelin et Semery [3]. Li [44] a présenté une méthode d'agrégation récursive qui décompose le système parallèle en lignes en série qui se chevauchent afin d'estimer le taux de production de chaque sous-système. L'auteur a prouvé analytiquement l'unicité de la solution obtenue par cette procédure d'agrégation ainsi que sa convergence.

Magazine et Stecke [52] ont considéré des lignes de production de petite taille, avec deux ou trois postes de travail composés de différentes machines parallèles. Ils ont étudié l'impact de la variation des paramètres spécifiques du système comme la répartition des machines entre les postes de travail, l'attribution de la charge de travail pour les postes de travail et l'allocation de stock tampon entre les différents postes de travail. Iyama et Ito [40] ont utilisé une chaîne de Markov pour représenter les différents états d'un système de production avec des machines parallèles ayant des temps de traitement exponentiels. Cette représentation est inutilisable pour des lignes de production avec plus de trois stations.

Diamantidis *et al.* [27] ont étudié une ligne de production avec des machines parallèles fiables identiques sur chaque poste de travail. Initialement, les auteurs se sont intéressés à l'étude analytique d'un modèle simple à deux stations de travail. Ils ont développé un algorithme récursif pour générer la matrice de transition entre les différents états du buffer. Ensuite, ils ont étendu leur méthode pour l'évaluation des performances des lignes plus grandes. Les auteurs ont utilisé un modèle de simulation pour la validation de leur approche. Un autre modèle analytique, basé sur une analyse Markovienne, a été introduit par Diamantidis *et al.* [26] pour l'évaluation du taux de production d'une ligne à deux stations avec machines parallèles. Les états de fonctionnement et de panne des machines sont décrits par des variables binaires. Les équations de transition du modèle sont résolues de manière analytique. Les auteurs ont utilisé la méthode de décomposition LU pour calculer les probabilités des différents événements à l'état stationnaire du fonctionnement du système.

Liu *et al.* [50] ont proposé une étude similaire avec l'examen d'un modèle à trois états pour caractériser les opérations asynchrones indépendants de machines parallèles multiples.

Les auteurs ont illustré l'importance de l'utilisation de plus de deux états (fonctionnement et panne) pour la modélisation des états des machines. Les probabilités des états du système ainsi que le taux de production sont calculés en utilisant un processus de naissance et de mort classique. Ce modèle a été utilisé par Liu *et al.* [49] pour construire une méthode de décomposition pour l'analyse des performances des lignes de production avec plusieurs stations.

3.2 Description du problème

Le système de production considéré dans ce chapitre est illustré dans la figure 3.1. Ce dernier est composé de deux postes de travail séparés par un stock intermédiaire. Chacun des poste $p \in \{1, 2\}$ est constitué S_p de machines parallèles pas forcément identiques.

Les temps de traitement, de pannes et de réparation de chaque machine M_{ip} sont distribués selon des lois exponentielles indépendantes et pas forcément identiques. Les états de pannes des différentes machines dépendent des opérations (operation-dependant-failure).

Nous supposons aussi qu'on dispose d'un nombre illimité de pièces (produits) en amont du premier poste de travail et une capacité de stockage infinie en aval du second. Par conséquent, le premier poste de travail ne peut pas être affamé et le second ne peut pas être bloqué. Les temps de transition des produits entre les postes de travail et la zone de stockage sont négligeables (supposé être égal à zéro). Cela signifie que lorsque l'une des machines parallèles M_{ip} achève une partie, celle-ci est immédiatement placée dans le stock intermédiaire.

Avant de présenter la formulation mathématique, nous introduisons les notations suivantes :

$p \in \{1, 2\}$	L'indice du poste de travail
ω_{S_p}	La capacité de production du poste de travail p
λ_{S_p}	Le taux de défaillance du poste de travail p
μ_{S_p}	Le taux de réparation du poste de travail p
γ_{S_p}	Le ratio d'efficacité du poste de travail p

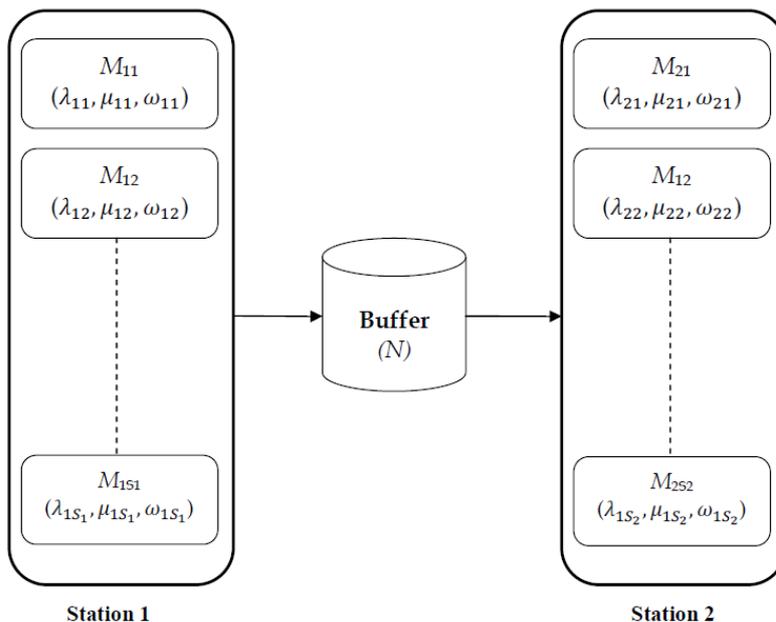


FIGURE 3.1: Ligne de production séries-parallèles avec deux stations

3.3 Technique de remplacement par une machine équivalente

Le remplacement de plusieurs machines parallèles par une seule machine équivalente est l'une des techniques les plus utilisées pour étudier les performances des systèmes de production hybrides (séries-parallèles).

Comme mentionné précédemment, cette technique a été introduite pour la première fois par Ignall et Silver [39]. Les auteurs ont étudié le cas particulier des machines parallèles identiques. Ancelin et Semery [3] ainsi que Patchong et Willaëys [60] ont présenté deux méthodes différentes pour traiter le cas général avec des machines parallèles différentes. Dans la suite de ce chapitre, nous présentons et analysons les différences et les points communs entre ces différentes techniques de remplacement.

3.3.1 Technique de remplacement d'Ancelin et Semery (ASRM)

La capacité de production de la machine équivalente est définie comme étant la somme des capacités de production de l'ensemble des machines.

$$\omega_{S_p} = \sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \quad (3.1)$$

Le taux de panne équivalent du poste de travail j est donné par l'équation suivante :

$$\lambda_{S_p} = \sum_{i=1}^{S_p} (\lambda_i \times \prod_{k=1, k \neq i}^{S_p} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}) \quad (3.2)$$

Le taux de réparation équivalent du poste de travail p est déduit des équations 3.2 et 3.3.

$$\frac{\mu_{S_p}}{\lambda_{S_p} + \mu_{S_p}} = \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i} \quad (3.3)$$

Après simplification, on obtient :

$$\mu_{S_p} = \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}} \times \sum_{i=1}^{S_p} (\lambda_i \times \prod_{k=1, k \neq i}^{S_j} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}) \quad (3.4)$$

3.3.2 Technique de remplacement de Patchong and Willaey (PWRM)

Patchong et Willaey [60] ont affirmé que les paramètres de la machine équivalente proposée par Ancelin et Semery sont souvent loin d'être réalistes et peu significatifs. C'est pourquoi, ils ont présenté une autre méthode qui intègre les états d'oisiveté des machines lors du calcul des taux de pannes et de défaillances équivalents. En fait, il est supposé que la machine équivalente est considérée comme étant en panne si au moins une des machines parallèles est en panne. Cette hypothèse est introduite pour tenir compte du ralentissement de la vitesse de traitement de la machine équivalente en cas de panne d'une ou de plusieurs machines dans un même poste de travail. Cela signifie qu'en cas de panne d'une machine dans le poste de travail j , ce dernier ne sera pas considéré comme étant en panne, mais la vitesse de traitement de la machine équivalente sera réduite.

Le comportement de la machine équivalente est caractérisé par une chaîne de Markov à trois états : fonctionnement, panne et ralenti. Considérant les équations d'équilibre à l'état stationnaire du fonctionnement du système, nous obtenons la relation suivante :

$$\lambda_{S_p} \times P_{w_j} = \mu_{S_p} \times P_{d_p} \quad (3.5)$$

Tels que :

$$P_{w_p} = \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i} \quad (3.6)$$

$$P_{d_p} = \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i} \quad (3.7)$$

P_{w_p} : est la probabilité que la machine équivalente du poste p soit en état de fonctionnement.

P_{d_p} : est la probabilité que la machine équivalente du poste p soit en état de panne.

Le taux de traitement (la capacité de production) équivalent d'un ensemble de machines parallèles est défini comme la somme des taux de traitement de toutes les machines parallèles supposées travaillant normalement (sans défaillance) :

$$\omega_{S_p} = \sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \quad (3.8)$$

En se basant sur les hypothèses décrites ci-avant, le taux de défaillance équivalent λ_{S_j} est donné par l'équation 3.9.

$$\begin{aligned} \lambda_{S_p} &= \frac{1}{P_{w_p}} \times \sum_{i=1}^{S_p} \left(\lambda_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \times \prod_{k=1, k \neq i}^{S_p} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}} \times \sum_{i=1}^{S_p} \left(\lambda_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \times \prod_{k=1, k \neq i}^{S_p} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le taux de réparation équivalent μ_{S_j} est donné par l'équation 3.10.

$$\begin{aligned} \mu_{S_p} &= \lambda_{S_p} \times \frac{P_{w_p}}{P_{d_p}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}} \times \sum_{i=1}^{S_p} \left(\lambda_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \times \prod_{k=1, k \neq i}^{S_p} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.3.3 Analyse des deux techniques de remplacement

Dans le cas particulier de S_p machines parallèles identiques ($\lambda_i = \lambda, \mu_i = \mu$ et $\omega_i = \omega$), la simplification des équations développées ci-avant montre que les deux techniques de remplacement sont parfaitement équivalentes. Elles produisent les mêmes taux de pannes et de réparation ainsi que la même capacité de production (voir équation 3.11).

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{S_p} = S_p \times \omega \\ \lambda_{S_p} = S_p \times \lambda \times \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{S_p - 1} \\ \mu_{S_p} = S_p \times \mu \times \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{S_p - 1} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Proposition 1

Considérons un poste de travail p composé de S_p machines parallèles pas forcément identiques. Les deux techniques de remplacement d'Ancelin et Semery et de Patchong et Willaëys produisent des machines équivalentes avec la même capacité de production $\omega_{S_p} = \sum_{i=1}^{S_p} \omega_i$ (en référence aux équations 3.1 and 3.8) et le même ratio d'efficacité $\gamma_{S_p} = \frac{\lambda_{S_p}}{\mu_{S_p}}$.

Preuve 1

En utilisant les deux équations 3.2 et 3.4 de la méthode de remplacement d'Ancelin et Semery, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_{S_p} &= \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}} \times \sum_{i=1}^{S_p} \left(\lambda_i \times \prod_{k=1, k \neq i}^{S_p} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}} \times \lambda_{S_p} \end{aligned} \quad (3.12)$$

\Rightarrow

$$\frac{\lambda_{S_p}}{\mu_{S_p}} = \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}} = \gamma_{S_p} \quad (3.13)$$

De la même manière, en utilisant les deux équations 3.9 et 3.10 de la méthode de remplacement de Patchong et Willaëys, on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{S_p} &= \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}} \sum_{i=1}^{S_p} \left(\lambda_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \prod_{k \neq i}^{S_p} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \right) \\ \mu_{S_p} &= \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}} \sum_{i=1}^{S_p} \left(\lambda_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \prod_{k \neq i}^{S_p} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \right) \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

\Rightarrow

$$\frac{\lambda_{S_p}}{\mu_{S_p}} = \frac{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}}{\sum_{i=1}^{S_p} \omega_i \times \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}} = \gamma_{S_p} \quad (3.15)$$

Enfin, les équations 3.13 et 3.15 montrent que les deux méthodes de remplacement donnent le même ratio d'efficacité. \square

3.4 Analyse du modèle équivalent

Le remplacement des différentes machines parallèles, dans chacun des deux postes de travail, nous permet d'utiliser la méthode d'évaluation d'un modèle simple à deux machines formulée dans le chapitre précédent. En effet, on obtient un système équivalent avec deux machines M_{S_1} et M_{S_2} caractérisées respectivement par des capacités de production ω_{S_1} , ω_{S_2} , des taux de défaillances λ_{S_1} , λ_{S_2} et des taux de réparations μ_{S_1} , μ_{S_2} . Le système équivalent en question est illustré par la figure 3.2.

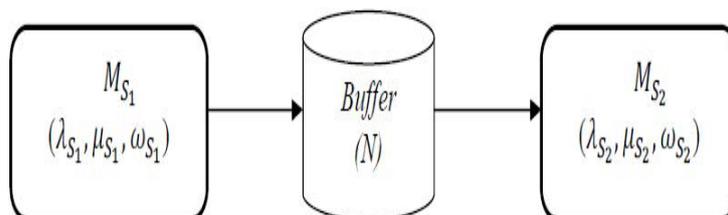


FIGURE 3.2: La ligne simple avec deux machines équivalentes

L'évaluation du taux de production de cette ligne à deux machines est détaillée dans le chapitre précédent. C'est pourquoi, nous donnons ici directement la formulation mathématique du taux de production en intégrant les notations propres aux deux machines équivalentes. Comme établi précédemment, le taux de production de la ligne est défini comme étant le goulet entre les capacités effectives des deux machines ρ_{S_1} et ρ_{S_2} .

$$\rho_{S_1} = \omega_{S_2} \times \frac{\mu_{S_1} \times (1 - P_N)}{\mu_{S_1} + (1 - P_N) \times \lambda_{S_1}}$$

$$= \begin{cases} \frac{\omega_{S_1} \times \mu_{S_1} \times \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha^{N+1}}}{\mu_1 + \lambda_{S_1} \times \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha^{N+1}}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\omega \times \mu_{S_1} \times \frac{N}{N+1}}{\mu_{S_1} + \lambda_{S_1} \times \frac{N}{N+1}} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\rho_{S_2} = \omega_{S_2} \times \frac{\mu_{S_2} \times (1 - P_0)}{\mu_{S_2} + (1 - P_0) \times \lambda_{S_2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{\omega_{S_2} \times \mu_{S_2} \times \frac{\alpha(1-\alpha^N)}{1-\alpha^{N+1}}}{\mu_{S_2} + \lambda_{S_2} \times \frac{\alpha \times (1-\alpha^N)}{1-\alpha^{N+1}}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\omega \times \mu_{S_2} \times \frac{N}{N+1}}{\mu_{S_2} + \lambda_{S_2} \times \frac{N}{N+1}} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\psi = \min\{\rho_{S_1}, \rho_{S_2}\}$$

$$= \begin{cases} \omega_{S_1} \times \min\left\{\frac{1}{\frac{(1-\alpha^{N+1})}{(1-\alpha^N)} + \frac{\lambda_{S_1}}{\mu_{S_1}}}, \frac{1}{\frac{(1-\alpha^{N+1})}{(1-\alpha^N)} + \alpha \times \frac{\lambda_{S_2}}{\mu_{S_2}}}\right\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \omega \times \min\left\{\frac{1}{\frac{\lambda_{S_1} + \frac{N+1}{N}}{\mu_{S_1}}}, \frac{1}{\frac{\lambda_{S_2} + \frac{N+1}{N}}{\mu_{S_2}}}\right\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Proposition 2

Le taux de production du système série-parallèle, calculé en utilisant la méthode par machines équivalentes, est indépendant de la technique de remplacement utilisée : $\psi^{ASRM} = \psi^{PW RM}$.

Preuve 2

En considérant l'équation 3.18, le taux de production du système est réécrit comme suit :

$$\psi = \begin{cases} \omega_{S_1} \times \frac{1}{\frac{1-(\alpha)^{N+1}}{1-(\alpha)^N} + \max\left(\frac{\lambda_{S_1}}{\mu_{S_1}}, \alpha \times \frac{\lambda_{S_2}}{\mu_{S_2}}\right)} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \omega \times \frac{1}{\frac{N+1}{N} + \max\left(\frac{\lambda_{S_1}}{\mu_{S_1}}, \frac{\lambda_{S_2}}{\mu_{S_2}}\right)} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

Plus implicitement :

$$\psi = \begin{cases} \omega_{S_1} \times \frac{1}{\frac{1-(\alpha)^{N+1}}{1-(\alpha)^N} + \max(\gamma_{S_1}, \alpha \times \gamma_{S_2})} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \omega \times \frac{1}{\frac{N+1}{N} + \max(\gamma_{S_1}, \gamma_{S_2})} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

Or, d'après la proposition 1, nous avons :

$$\begin{cases} (\omega_{S_j})_{ASRM} = (\omega_{S_j})_{PW RM} \\ (\gamma_{S_j})_{ASRM} = (\gamma_{S_j})_{PW RM} \end{cases} \quad (3.21)$$

Ce qui implique que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1-\alpha^{(N+1)}}{1-\alpha^{(N)}} \right)_{ASRM} = \left(\frac{1-\alpha^{(N+1)}}{1-\alpha^N} \right)_{PWRM} \\ (max(\gamma_{S_1}, \alpha \times \gamma_{S_2}))_{ASRM} = (max(\gamma_{S_1}, \alpha \times \gamma_{S_2}))_{PWRM} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Donc, nous pouvons conclure que : $\psi^{ASRM} = \psi^{PWRM}$. \square

3.5 Etude numérique

Afin d'évaluer les performances et l'efficacité de la méthode proposée, nous avons testé plusieurs exemples numériques pour différentes configurations de lignes de production à deux étages avec des machines parallèles. Ces exemples sont les mêmes que ceux présentés par Diamantidis et Papadopoulos [26] pour tester leur méthode analytique proposé pour l'évaluation du taux de production d'une ligne de production série-parallèle à deux étages. Nous avons choisi, tout particulièrement, ces exemples pour rendre possible la comparaison entre les deux méthodes d'évaluation.

Pour la première partie de ces expériences, nous évaluons le taux de production du système compte tenu de la variation de la taille du stock intermédiaire en considérant deux configurations différentes (voir le tableau 3.1).

La première configuration consiste en un système avec deux machines identiques dans le premier étage et une machine dans le second avec une variation de la taille du buffer de 1 à 10. Pour la deuxième configuration, chacun des étages est composé de 3 machines identiques avec une variation de la taille du buffer de 10 à 100.

Dans la deuxième partie des expérimentations, nous testons deux nouvelles configurations 3 et 4 considérant la variation des taux de panne et de réparation. Pour les deux configurations, chaque station est composée de trois machines. La taille du stock est fixée à 5 unités et les capacités de production de toutes les machines sont égales à 1. Pour la configuration 3, le taux de réparation de la machine M_{12} varie de 0,01 à 0,1. Pour la configuration 4, le taux de défaillance de la machine M_{23} varie de 0,001 à 0,01. Les paramètres de ces deux configurations sont rapportés dans le tableau 3.2.

Pour les deux premières configurations, avec variation de la taille du stock intermédiaire, nous comparons les deux modèles avec un modèle de simulation réalisé sur ARENA avec un horizon de simulation de 50 000 unités de temps et un temps de warm-up de 10 000 unités de temps.

Configuration 1		Configuration 2	
Etage 1	Etage 2	Etage 1	Etage 2
$S_1 = 2$	$S_2 = 1$	$S_1 = 3$	$S_2 = 3$
$\omega_{11} = \omega_{12} = 1$	$\omega_{21} = 1$	$\omega_{1i} = 1$	$\omega_{2i} = 1$
$\lambda_{11} = \lambda_{12} = 0.01$	$\lambda_{21} = 0.01$	$\lambda_{1i} = 0.01$	$\lambda_{2i} = 0.01$
$\mu_{11} = \mu_{12} = 0.1$	$\mu_{11} = 0.1$	$\mu_{1i} = 0.1$	$\mu_{2i} = 0.1$

TABLE 3.1: Les paramètres des deux configurations avec variation de la taille du buffer

Configuration 3		Configuration 4	
Etage 1	Etage2	Etage 1	Etage 2
$S_1 = 3$	$S_2 = 3$	$S_1 = 3$	$S_2 = 3$
$\omega_{1i} = 1$	$\omega_{2i} = 1$	$\omega_{1i} = 1$	$\omega_{2i} = 1$
$\lambda_{1i} = 0.01$	$\lambda_{2i} = 0.01$	$\lambda_{1i} = 0.01$	$\lambda_{2,i \neq 3} = 0.01, \lambda_{23} = 0.001 \sim 0.01$
$\mu_{1,i \neq 3} = 0.1, \mu_{12} = 0.01 \sim 0.1$	$\mu_{2i} = 0.1$	$\mu_{1i} = 0.1$	$\mu_{2i} = 0.1$

TABLE 3.2: Les paramètres des deux configurations avec variation des taux de défaillances et de réparations

L'évaluation est faite en comparant le taux de production du système calculé par le modèle que nous proposons (ψ_{EMM}) avec celui présenté par Diamantidis et Papadopoulos [26] (ψ_{DP}).

Cette comparaison est illustrée par le calcul des écarts relatifs (gap) de chaque modèle analytique par rapport aux résultats obtenus par la simulation. Nous présentons aussi les temps de calcul de chacun des deux modèles analytiques.

Les tableaux 3.3 et 3.4 présentent les taux de production ainsi que les temps de calcul de chacun des deux modèles pour les deux premières configurations (avec variation de la taille du buffer). Nous présentons aussi les différences relatives des deux approches par rapport aux résultats du modèle de simulation. Nous constatons que pour les deux configurations, le modèle proposé obtient des résultats plus proche de ceux du modèle de simulation. Nous constatons aussi que l'écart relatif est décroissant en fonction de la taille du buffer.

L'autre remarque importante est que les temps de calcul de notre approche sont constants et quasiment négligeables en comparaison avec le modèle de Diamantidis et Papadopoulos [26]. Ceci peut être expliqué par le fait que leur modèle dépend de la génération d'une matrice de transition pour tous les états du buffer ce qui n'est pas le cas de notre

N	ψ_{DP}	Temps (sec)	$Gap_{DP}(\%)$	ψ_{EMM}	Temps(sec)	$Gap_{EMM}(\%)$	$Gap_{(\psi_{EMM}, \psi_{DP})}(\%)$
2	0.8374	0.219	2.99	0.7895	0.015	8.54	5.72
3	0.8458	0.219	3.61	0.8537	0.015	2.71	0.93
4	0.8502	0.234	4.64	0.8824	0.015	1.03	3.65
5	0.8526	0.234	5.82	0.8960	0.015	1.02	4.84
6	0.8540	0.219	6.05	0.9026	0.015	0.70	5.38
7	0.8549	0.219	5.95	0.9058	0.015	0.35	5.62
8	0.8554	0.234	5.90	0.9075	0.015	0.17	5.74
9	0.8558	0.250	5.85	0.9083	0.015	0.08	5.78
10	0.8561	0.250	5.82	0.9087	0.015	0.03	5.79

TABLE 3.3: Résultats numériques : configuration 1

modèle. En effet, seuls les deux états *buffer plein* et *buffer vide* sont considérés.

Les tables 3.5 et 3.6 présentent les résultats obtenus avec les configurations 3 et 4. Ces résultats confirment également la pertinence du modèle proposé avec un écart maximal, entre les deux modèles, inférieur à 6%.

Nous avons aussi considéré une comparaison avec un modèle analytique développé par Diamantidis *et al.* [24] pour l'évaluation des performances d'un système non linéaire dit de fusion (merge system). Ce dernier est constitué d'un premier poste de travail composé de deux machines parallèles et un second poste contenant une seule machine. Ce type de structure ressemble à un système d'assemblage. Néanmoins, il existe une différence fondamentale entre les deux systèmes de production. Dans le premier cas, la machine en aval n'a besoin que d'un seul type de pièces, produites soit par une des deux machines en amont. Dans le second cas, la machine en aval, également appelée machine d'assemblage, est alimentée par deux pièces différentes produites par les deux machines en amont. Ce modèle, proposé par Diamantidis *et al.* [24], est basé par une représentation des différents états du système par une chaîne de Markov. Les auteurs ont développé un algorithme récursif pour générer les matrices de transition afin d'examiner toutes les équations de transition de chaque état du stock intermédiaire.

Nous présentons, dans ce chapitre, les différents résultats obtenus par les deux modèles en se basant sur les instances proposées par Diamantidis *et al.* [24]. Il s'agit de deux configurations différentes. Pour la première configuration, les trois machines sont identiques avec un taux de panne égal à 0.01, un taux de réparation égal à 0.1 et une capacité de production égale 1. Pour la deuxième configuration, nous considérons une variation du taux de panne

N	ψ_{DP}	Temps (sec)	$Gap_{DP}(\%)$	ψ_{EMM}	Temps (sec)	$Gap_{EMM}(\%)$	$Gap_{(\psi_{EMM}, \psi_{DP})}(\%)$
10	2.4607	14.485	9.77	2.5000	0.031	8.32	1.57
20	2.5355	58.125	7.02	2.6087	0.031	4.34	2.81
30	2.5747	152.453	5.58	2.6471	0.031	2.93	2.74
40	2.5998	320.140	4.66	2.6667	0.031	2.21	2.51
50	2.6175	613.437	4.02	2.6786	0.031	1.77	2.28
60	2.6306	1089.910	3.54	2.6866	0.031	1.48	2.08
70	2.6408	1710.000	3.16	2.6923	0.031	1.27	1.91
80	2.6490	3003.130	2.86	2.6966	0.031	1.11	1.77
90	2.6556	5389.390	2.62	2.7000	0.031	0.99	1.64
100	2.6612	9166.800	2.41	2.7027	0.031	0.89	1.54

TABLE 3.4: Résultats numériques : configuration 2

de la machine en amont. Chacune des deux instances est testée pour différentes capacités du stock intermédiaire.

Les résultats obtenus sont résumés dans les tableaux 3.7 et 3.8.

Nous constatons que les deux modèles analytiques obtiennent quasiment les mêmes résultats pour les deux configurations. Il est à noter aussi que l'écart relatif entre les taux de production calculés par les deux approches est décroissant en fonction de la taille du stock intermédiaire. Ceci peut être expliqué par le fait que le rôle du stock intermédiaire est de réduire les aléas dus aux défaillances des différentes machines.

Une autre remarque importante est que les temps de calcul de la méthode proposée par Diamantidis *et al.* [24] croient en fonction de la capacité du stock intermédiaire. En effet, plus la taille est importante, plus la génération de la matrice de transition est plus longue. Par contre, dans le cas de la méthode par machines équivalentes, les temps de calcul sont quasiment nuls et indépendants de la capacité du stock.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié une autre configuration de lignes de production dite séries-parallèles. L'objectif de cette étude était de proposer une adaptation de la méthode par machines équivalentes pour évaluer le taux de production d'une ligne constituée de deux stations avec différentes machines parallèles dans chacune des stations.

La démarche consiste à transformer la ligne originale en une ligne simple composée de deux

μ_{12}	ψ_{DP}	Temps (sec)	ψ_{EMM}	Temps (sec)	$Gap_{(\psi_{EMM}, \psi_{DP})}(\%)$
0.01	2.1275	31.578	2.0079	0.015	5.62
0.02	2.2340	30.938	2.1317	0.015	4.58
0.03	2.2854	30.985	2.1928	0.015	4.05
0.04	2.3157	31.031	2.2291	0.015	3.74
0.05	2.3356	31.110	2.2532	0.015	3.53
0.06	2.3496	31.203	2.2704	0.015	3.37
0.07	2.3601	32.468	2.2832	0.015	3.26
0.08	2.3682	31.750	2.2932	0.015	3.17
0.09	2.3746	30.797	2.3012	0.015	3.09
0.1	2.3799	31.703	2.3077	0.015	3.03

TABLE 3.5: Résultats numériques : configuration 3

machines séparées par un stock intermédiaire en utilisant différentes techniques de remplacement proposées dans la littérature.

Une étude détaillée des formulations mathématiques de ces techniques de remplacement et de la méthode *EMM* nous a permis d'établir que l'évaluation du taux de production du système, en utilisant la méthode par machines équivalentes, est indépendante du choix de la technique de remplacement.

Nous avons aussi présenté une étude numérique basée sur une comparaison avec un modèle de simulation et une autre méthode analytique proposée dans la littérature. Ceci nous a permis d'établir la pertinence et l'efficacité de notre méthode comme approche d'évaluation du taux de production d'une ligne en configuration séries-parallèles.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons à la généralisation de la méthode par machines équivalentes (*EMM*) afin d'évaluer le taux de production d'une ligne composée de K machines et $(K - 1)$ stocks intermédiaires.

λ_{23}	ψ_{DP}	Temps (sec)	ψ_{EMM}	Temps (sec)	$Gap_{(\psi_{EMM}, \psi_{DP})}(\%)$
0.001	2.4188	31.578	2.3077	0.015	4.59
0.002	2.4142	30.938	2.3077	0.015	4.41
0.003	2.4097	30.985	2.3077	0.015	4.23
0.004	2.4053	31.031	2.3077	0.015	4.06
0.005	2.4009	31.110	2.3077	0.015	3.88
0.006	2.3966	31.203	2.3077	0.015	3.71
0.007	2.3923	32.468	2.3077	0.015	3.54
0.008	2.3881	31.750	2.3077	0.015	3.37
0.009	2.3840	30.797	2.3077	0.015	3.20
0.01	2.3799	31.703	2.3077	0.015	3.03

TABLE 3.6: Résultats numériques : configuration 4

TABLE 3.7: Comparaison avec le modèle proposé par Diamantidis et al. [24] : configuration 1

N	$\psi_{[24]}$	ψ_{EMM}	Gap(%)	Temps [24] (sec)	Temps EMM (sec)
6	0.90727	0.90258	0.5171	0.05	0.00
7	0.90761	0.90585	0.1940	0.05	0.00
8	0.90789	0.90747	0.0459	0.06	0.00
9	0.90812	0.90828	0.0179	0.05	0.00
10	0.90830	0.90869	0.0426	0.06	0.00
11	0.90845	0.90889	0.0483	0.06	0.00
12	0.90857	0.90899	0.0462	0.05	0.00
13	0.90867	0.90904	0.0408	0.05	0.00
14	0.90875	0.90906	0.0347	0.05	0.00
15	0.90881	0.90908	0.0295	0.05	0.00
16	0.90886	0.90908	0.0247	0.05	0.00
17	0.90891	0.90909	0.0196	0.11	0.00
18	0.90894	0.90909	0.0164	0.11	0.00
19	0.90897	0.90909	0.0132	0.11	0.00
20	0.90899	0.90909	0.0111	0.17	0.00
25	0.909056088	0.909090897	0.0038	0.39	0.00
30	0.909078602	0.909090909	0.0014	0.50	0.00
35	0.909086555	0.909090909	0.0005	0.77	0.00
40	0.909089365	0.909090909	0.0002	1.32	0.00
45	0.909090358	0.909090909	0.0001	1.65	0.00
50	0.909090841	0.909090909	0.0000	2.25	0.00

TABLE 3.8: Comparaison avec le modèle proposé par Diamantidis et al. [24] : configuration 2

λ_{21}	N	$\psi_{[24]}$	ψ_{EMM}	Gap(%)	Temps [24] (sec)	Temps EMM (sec)
0.02	10	0.83273625	0.832994056	0.0309	0.01	0.00
0.03	10	0.7687724755	0.768941672	0.0220	0.01	0.00
0.04	20	0.7142501962	0.714285471	0.0049	0.03	0.00
0.05	20	0.6666407	0.666666455	0.0039	0.03	0.00
0.06	30	0.6249983	0.625000000	0.0003	0.10	0.00
0.07	30	0.5882341657	0.588235294	0.0002	0.10	0.00
0.08	40	0.555555549	0.555555556	0.0000	0.23	0.00
0.09	40	0.5263157426	0.526315790	0.0000	0.23	0.00
0.1	40	0.4999999	0.500000000	0.0000	0.23	0.00

Chapitre 4

Généralisation de l'approche par machines équivalentes (*EMM*)

Résumé :

Ce chapitre présente une extension ou plutôt une généralisation de la méthode par machines équivalentes, proposée dans le chapitre 2, pour évaluer les performances d'une ligne de production à K machines et $(K - 1)$ stocks intermédiaires. Cette méthode est basée sur l'analyse des différents états des différents buffers en utilisant $(K - 1)$ processus Markoviens de naissance et de mort. Les taux de naissance et de mort de chaque processus sont définis en tenant compte de l'influence des $(K - 2)$ autres processus. Ensuite, chaque machine est remplacée par une machine équivalente intégrant les indisponibilités dues aux différents buffers ainsi qu'aux différentes pannes et réparations de l'ensemble des machines. Finalement, le taux de production de la ligne est défini comme le goulot d'étranglement entre les taux de production de ces machines équivalentes. Cette approche considère à la fois les cas de lignes homogènes et non-homogènes.

Une étude comparative basée sur différentes instances issues de la littérature est présentée et discutée. Les résultats obtenus prouvent l'efficacité et la précision de la méthode proposée en comparaison avec des modèles de simulation ainsi que les différentes approches existantes dans la littérature.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet des publications suivantes :

- **Y., Ouazene, A., Yalaoui, H., Chehade and F., Yalaoui.** Equivalent machine method for approximate evaluation of buffered unreliable production lines, *In Proceedings of the 2013 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Production and Logistics Systems (CIPLS), 2013 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*, pages 33-39, Singapore, 2013. [85]
- **Y., Ouazene, A., Yalaoui, H., Chehade and F., Yalaoui.** Throughput evaluation of buffered unreliable production lines with machines having multiple failure modes. In D. Pacino, S. Voß, and R.M. Jensen, editors, *Computational Logistics, 4th International Conference on Computational Logistics ICCL'13, volume 8197 of Lecture Notes in Computer Science*, pages 229-241. Springer Berlin Heidelberg, 2013.[87]
- **Y., Ouazene, A., Yalaoui et H., Chehade.** Evaluation et analyse des performances d'une ligne de production avec machines non fiables, *14ème congrès annuel de la société française de la recherche opérationnelle et d'aide à la décision*, Troyes, 2013. [86]
- **Y., Ouazene, A., Yalaoui, H., Chehade, and F., Yalaoui.** New method to analyze production lines with unreliable machines and finite buffers, *INFORMS Annual Meeting 2012*, Phoenix, 2012. [83]

4.1 Introduction et état de l'art

Les systèmes de production en série sont utilisés dans de nombreuses organisations manufacturières en particulier dans les industries de fabrication à gros volumes. Ils sont souvent composés d'un ensemble de machines ou postes de travail séparés par des zones de stockage intermédiaires. Le flux des produits se fait selon une séquence bien déterminée en passant sur les différentes machines successives.

La performance de ce type de systèmes de production est fortement influencée par les indisponibilités dues soit aux défaillances des machines soit aux limitations des capacités de stockage. Souvent, l'évaluation analytique de cette performance pose d'importantes difficultés que ce soit d'un point de vue formulation mathématique ou d'un point de vue résolution algorithmique.

Les méthodes analytiques exactes pour l'évaluation des performances de ce type de lignes de production sont limitées aux systèmes avec moins de trois stations [94]. Ces modèles simples sont souvent utilisés comme des blocs de construction pour développer des méthodes approximatives afin d'analyser des lignes plus grandes. Pour simple exemple, Buzacott et Hanifin [11] ont utilisé la représentation par une chaîne de Markov pour comparer un modèle d'approximation avec une solution exacte dans le cas d'un système à deux machines. Ils ont analysé les différents états du système : de fonctionnement, de réparation et d'inactivité due soit au blocage de la première machine soit à la famine de la deuxième machine. Ils ont également montré que le temps de cycle moyen du système est décroissant en fonction de la capacité du stock intermédiaire.

Li *et al.* [46] ont présenté une intéressante revue de la littérature dans laquelle ils ont résumé les récentes études consacrées au développement de méthodes analytiques pour évaluer les performances des systèmes de production. En général, la plupart de ces méthodes sont basées sur des techniques d'agrégation ou de décomposition. La première technique consiste à remplacer de manière récursive chaque deux machines par une seule machine équivalente ayant le même taux de production en fonctionnement isolé [46]. Ensuite, cette dernière est combinée avec la machine suivante de la ligne pour obtenir une nouvelle machine agrégée. Cette technique peut être déroulée en amont ou en aval de la ligne. La seconde technique consiste à décomposer la ligne de production en plusieurs sous-ensembles à deux machines et un buffer. L'ensemble des ces sous-systèmes élémentaires est supposé avoir un comportement équivalent à la ligne de production initiale. Une méthode de décomposition bien connue est celle proposée par Gershwin [34]. Cette approche a été proposée pour l'analyse d'un modèle discret de longues lignes de productions homogènes. Par la suite, Dallery *et al.* [17, 18] ont présenté un algorithme amélioré connu sous le nom DDX-Algorithm plus facile à program-

mer (complexité de calcul plus faible) et garantissant la convergence de cette approche de décomposition.

Hassett et Dietrich [37] ont présenté une méthode efficace et stable pour calculer les probabilités des états stationnaires du modèle théorique de Gershwin pour des lignes de production à trois, quatre et cinq machines. Les auteurs ont également développé un modèle de régression linéaire pour prévoir les effets des variations des disponibilités des machines ainsi que les tailles des stocks intermédiaires sur la disponibilité de la ligne de production. Burman [10] a développé une autre méthode de décomposition pour évaluer analytiquement le taux de production de lignes non-homogènes avec des délais de traitement déterministes et des pannes dépendantes du nombre de pièces produites. Cette méthode a été utilisée avec succès dans la conception de grandes lignes de production automatisées. L'auteur a également présenté une extension de cette approche pour analyser des lignes de types séries-parallèles.

Dallery et Le Bihan [20] ont proposé une version améliorée de cette méthode de décomposition pour l'analyse d'une ligne de production avec des machines sujettes à des défaillances. La différence fondamentale entre cette nouvelle méthode de décomposition et celle de Gershwin est que les temps de réparation des machines équivalentes sont supposés être distribués selon des lois exponentielles généralisées. Li et Meerkov [47] ont proposé une autre méthode analytique en considérant que les temps de défaillance et de réparation suivaient des lois aléatoires uni-modales. Les auteurs ont testé leur approche en utilisant les lois de Weibull, Gamma et Lognormale.

La majeure partie des méthodes d'approximation relevées dans la littérature considèrent des analyses du fonctionnement des lignes de production à leurs états stationnaires. Dincer et Deler [28] se sont intéressés à l'analyse des états transitoires. Ils ont étudié le comportement transitoire de lignes de transfert relativement courtes et formulé la distribution du taux de production de ces systèmes à l'état transitoire.

Dans la suite de ce chapitre, nous détaillerons une nouvelle méthode analytique pour évaluer le taux de production d'une ligne composée de plusieurs machines sujettes à des temps de traitement et de défaillance aléatoires. Cette nouvelle approche est une généralisation de la méthode par machines équivalentes introduite dans le chapitre 2.

4.2 Description du problème

La ligne de production en série considérée dans le présent chapitre est illustrée par la figure 4.1. Elle se compose de K machines séparées par $(K - 1)$ stocks intermédiaires

ou buffers. Les temps de panne et de réparation de chaque machine M_i sont supposés être exponentiels et indépendants. Les pannes de machines dépendent des opérations, autrement dit du nombre de pièces que la machine en question a produit. Cela signifie aussi que la machine ne peut tomber en panne quand elle est au repos (bloquée ou affamée).

Les délais de traitement des différentes machines sont supposés être exponentiels et pas nécessairement identiques.

Nous supposons aussi une disponibilité infinie du nombre de produits en amont de la première machine et une capacité de stockage illimitée en aval de la dernière machine. Par conséquent, la première machine ne peut pas être affamée et la dernière ne peut pas être bloquée. Les temps de transition entre les zones de stockages et les machines et vice-versa sont négligeables (supposés être égaux à zéro). Si aucun produit n'est disponible dans le buffer B_{i-1} , alors la machine M_i sera affamée. La même machine sera bloquée lorsque le buffer en aval B_i est plein.

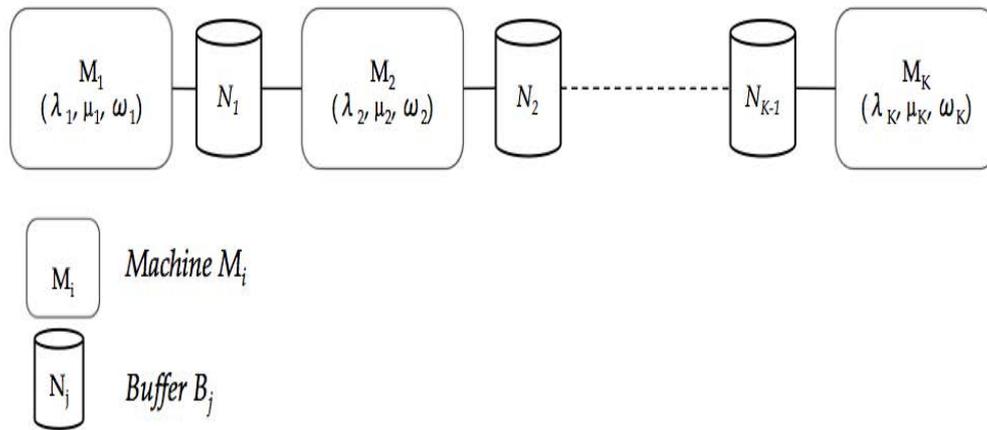


FIGURE 4.1: Une ligne de production à K machines et $(K-1)$ buffers.

Avant de développer la formulation mathématique de la nouvelle méthode, nous introduisons les différentes notations utilisées dans ce chapitre.

- $N_j, j \in \{1 \dots K-1\}$ La capacité du buffer B_j
- $\xi_i, i \in \{1 \dots K\}$ La disponibilité effective de la machine M_i
- $\alpha_j, j \in \{1 \dots K-1\}$ Le rapport des capacités de production du buffer B_j
- $\rho_i, i \in \{1 \dots K\}$ Le taux de production de la machine M_i
- $P_j^s, s \in \{0 \dots N_j\}$ La probabilité d'avoir s pièces dans le buffer B_j

Remarque :

Afin de faciliter la lecture des différentes équations, nous distinguerons les notations des

paramètres et variables relatives aux machines par l'indice $i = 1 \dots K$ et celles relatives aux stocks par l'indice $j = 1 \dots K - 1$. Mais, il faut bien noter que nous aurions pu utiliser un seul indice.

4.3 Formulation de la méthode par machines équivalentes (EMM)

Cette nouvelle approche dite méthode par machines équivalentes (**E**quivalent **M**achine **M**ethod) est une généralisation du modèle simple à deux machines présentée dans les chapitre précédents. L'idée principale de cette méthode consiste à superposer $(K - 1)$ processus Markoviens de naissance et de mort pour l'analyse des différents états des $(K - 1)$ stocks intermédiaires.

La résolution des équations d'équilibre de chaque processus Markovien à l'état stationnaire permet de calculer les probabilités de blocage et de famine de chacune des K machines. Ensuite, chacune de ces machines est remplacée par une machine équivalente à deux états : fonctionnement et panne. Les indisponibilités dues au blocage et à la famine de chaque machine originale sont intégrées dans son état de panne et prises en compte dans le calcul de la disponibilité asymptotique de sa machine équivalente.

Pour ce faire, les états de chaque stock intermédiaire B_j sont représentés et analysés par un processus Markovien de naissance et de mort dédié. Ces processus Markoviens diffèrent en termes de nombre d'états parce que les stocks intermédiaires n'ont pas forcément la même capacité. Ils diffèrent également en termes de taux de naissance et de mort. En effet, ces derniers varient en fonction de la position du stock intermédiaire dans la ligne de production. Dans le cas du modèle simple avec deux machines et un stock intermédiaire, chaque machine en état de fonctionnement produit ω_i pièces par unité de temps. En effet, il n'existe pas de contrainte particulière car on dispose d'un nombre de pièces infini en amont de la première machine et une capacité de stockage également infinie en aval de la seconde machine. C'est pourquoi, les taux de naissance et de mort du processus Markovien ne sont autre que les capacités de production ω_1 et ω_2 .

Par contre, dans le cas général avec K machines, la capacité de production effective ω_i d'une machine M_i est conditionnée par le taux de production de la ligne de partielle composée des machines $(M_1 \dots M_{i-1})$ qui la précèdent et par les machines $(M_{i+1} \dots M_K)$ qui lui succèdent.

Par conséquent, on peut dire que la capacité de production effective de la machine M_i est

directement affectée par la disponibilité des stocks intermédiaires B_{i-1} et B_i qui lui sont directement reliés (voir figure 4.2). En effet, la machine en question est automatiquement affamée si le stock B_{i-1} est vide et bloquée si le stock B_i est plein.

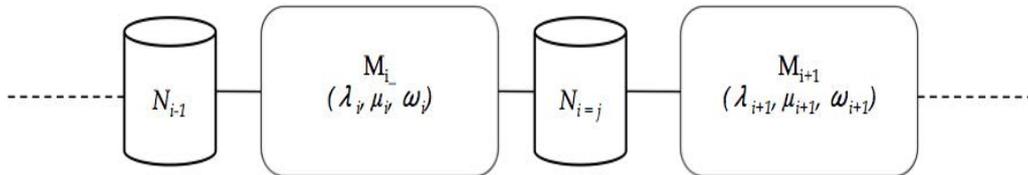


FIGURE 4.2: Représentation d'une ligne partielle.

La figure 4.3 décrit une représentation des $(K - 1)$ processus de naissance et de mort relatifs aux $(K - 1)$ stocks intermédiaires. Le taux de naissance du processus Markovien relatif au stock intermédiaire B_j est défini comme étant le taux de production de la ligne partielle composée des machines en amont du stock en question ($\min_{i=1\dots j} \rho_i$).

De la même façon, le taux de mort est défini comme étant le taux de production de la ligne partielle composée des machines en aval du stock en question ($\min_{i=j+1\dots K} \rho_i$).

La figure 4.4 représente les différents états de transition du processus Markovien décrivant les états du stock intermédiaire B_j tenant compte de la définition des taux de naissance et de mort donnée ci-dessous.

Le ratio des capacités de production α_j de chaque processus Markovien est défini comme étant le rapport entre le taux de naissance et le taux de mort de chaque processus (voir équation 4.1).

$$\alpha_j = \frac{\min_{i=1\dots j} \rho_i}{\min_{i=j+1\dots K} \rho_i} \quad (4.1)$$

Par analogie avec les formulations mathématiques présentées dans le chapitre 2, consacré à l'étude d'un modèle simple, et en considérant les probabilités de transitions de chaque processus stochastique à son état stationnaire, les probabilités d'avoir un stock vide ou plein sont respectivement données par les équations suivantes 4.2 et 4.3.

$$P_j^0 = \begin{cases} \frac{1-\alpha_j}{1-\alpha_j^{N_j+1}} & \text{si } \alpha_j \neq 1 \\ \frac{1}{N_j+1} & \text{si } \alpha_j = 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

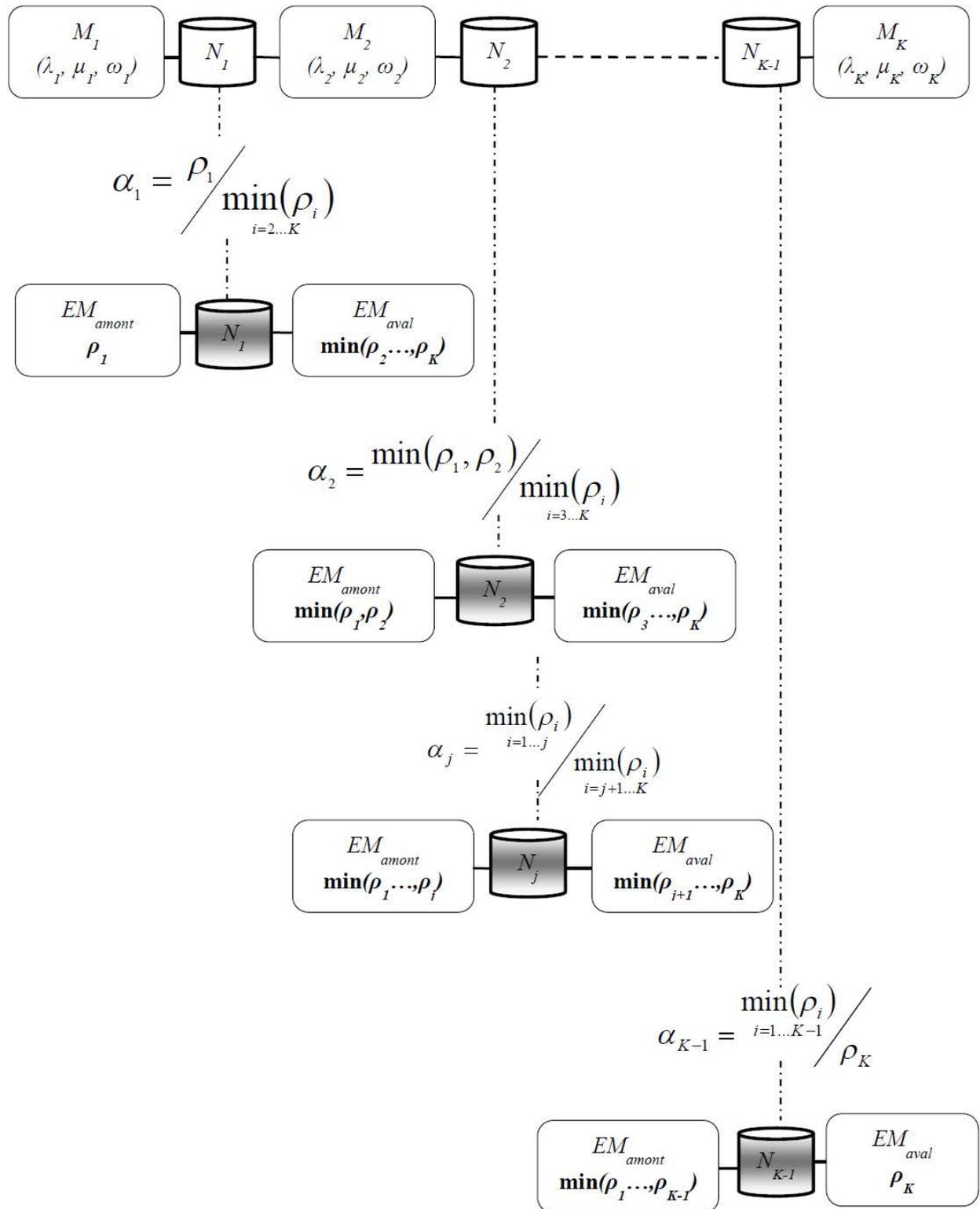


FIGURE 4.3: Représentation de la superposition des différents processus de naissance et de mort.

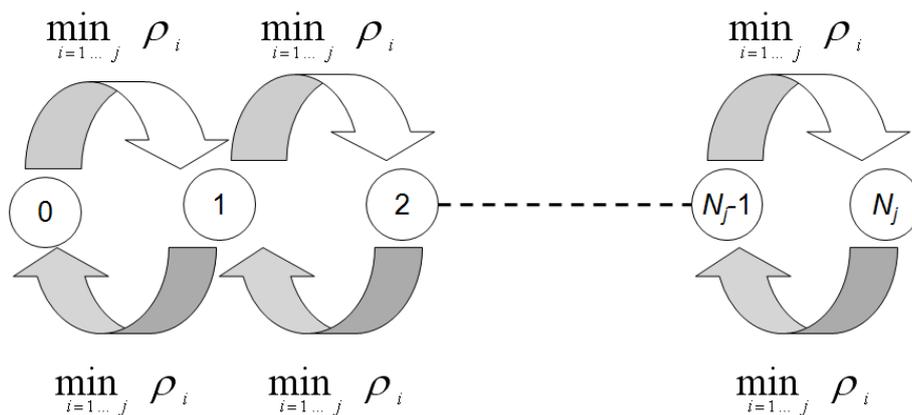


FIGURE 4.4: Représentation des états de transition du processus de Markov relatif au stock B_j .

$$P_j^{N_j} = \begin{cases} \frac{\alpha_i^{N_j} \times (1 - \alpha_j)}{1 - \alpha_i^{N_j+1}} & \text{si } \alpha_j \neq 1 \\ \frac{1}{N_j+1} & \text{si } \alpha_j = 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Par conséquent, on peut calculer le taux de production effectif de chaque machine en la remplaçant par une machine équivalente qui tient compte des indisponibilités dues aux blocages et à la famine de la machine originale. Ceci est traduit par le coefficient de disponibilité effective de chaque machine ξ_i .

Pour le calcul de ce coefficient, on doit considérer deux cas particuliers, à savoir le cas de la première et de la dernière machine. En effet, la première machine ne peut être affamée et la dernière ne peut pas être bloquée. Par contre, les autres machines peuvent être sujettes aux deux phénomènes. Les disponibilités effectives de chaque machine sont données par l'équation 4.4.

$$\begin{cases} \xi_1 = 1 - P_1^{N_1} \\ \xi_K = 1 - P_{K-1}^0 \\ \forall i = 2 \dots K - 1, \xi_i = (1 - P_{j-1}^0) \times (1 - P_j^{N_j}), j = i \end{cases} \quad (4.4)$$

Les taux de production des machines équivalentes ρ_i sont donnés par l'équation 4.5.

$$\forall i = 1 \dots K, \rho_i = \omega_i \times \frac{\mu_i \times \xi_i}{\mu_i + \xi_i \times \lambda_i} \quad (4.5)$$

Une fois que les indisponibilités dues aux capacités de stockage sont intégrées dans le calcul des taux de production des machines équivalentes, le taux de production de toute la

ligne peut être défini comme étant le taux de production de la machine la plus lente (la machine goulet).

$$\begin{aligned}\psi &= \min_{i=1\dots K} \left\{ \omega_i \times \frac{\mu_i \times \xi_i}{\mu_i + \xi_i \times \lambda_i} \right\} \\ &= \min_{i=1\dots K} \left\{ \omega_i \times \frac{1}{\frac{1}{\xi_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i}} \right\}\end{aligned}\tag{4.6}$$

La méthode par machines équivalentes proposée dans ce chapitre pour évaluer le taux de production d'une ligne de production en série est formulée comme un algorithme de programmation non linéaire (voir algorithme 1). Pour la partie résolution, cet algorithme a été implémenté sur le solveur LINGO 13.0, Windows 32, x86.

Algorithme 1 Méthode par Machines Equivalentes (EMM)

	K	Nombre de machines
	$K - 1$	Nombre de stocks intermédiaires
Pré-conditions :	λ_i	Taux de défaillance de la machine M_i
	μ_i	Taux de réparation de la machine M_i
	ω_i	Capacité de production de la machine M_i
	N_j	Capacité du stock intermédiaire B_j

pour tout Stock B_j **faire**

pour tout machine M_i **faire**

$P_0^j \leftarrow$ Calculer la probabilité que le stock B_j soit vide

$P_{N_j}^j \leftarrow$ Calculer la probabilité que le stock B_j soit plein

$\alpha_j \leftarrow$ Calculer le ratio des capacités de production relatif au stock B_j

$\rho_i \leftarrow$ Calculer le taux de production de la machine équivalente M_j

fin pour

fin pour

retourner $\psi = \min\{\rho_i; i = 1\dots K\}$

Il est facile de noter, à partir de l'équation 4.6, que le taux de production du système est décroissant en fonction du rapport $(\frac{\lambda_i}{\mu_i})$ et croissant en fonction des disponibilités effectives des machines (ξ_i) .

L'une des limites majeures des méthodes basées sur la technique de décomposition de Gershwin est leur complexité en termes de modélisation et par conséquent en termes de temps de calcul. En effet, en considérant une ligne de production avec (K) machines et $(K - 1)$ stocks intermédiaires tel que : chacune des machines a deux états différents (fonctionnement et panne) et chacun des stocks a $(N_j + 1)$ états, Gershwin [34] a établi que la cardinalité

de l'ensemble des états d'une représentation par une chaîne de Markov est de l'ordre de $2^k \times \prod_{j=1}^{K-1} (N_j + 1)$ états.

Il est donc établi que la complexité de cette technique dépend à la fois de la taille de la ligne (nombre de machines) et des capacités des différents stocks intermédiaires.

Contrairement aux approches par décomposition, la complexité de la méthode par machines équivalentes, proposée dans ce chapitre, est indépendante des capacités des stocks intermédiaires. En effet, pour chaque stock, seul deux états sont pris en considération à savoir les états : *stock vide* et *stock plein*.

L'autre contribution majeure de cette approche est que le nombre de variables nécessaires pour l'évaluation du taux de production d'une ligne est linéairement dépendant du nombre de machines composant cette dernière. En effet, en supposant une ligne à K machines et $(K - 1)$ stocks intermédiaires, il faut $2 \times (K - 1)$ variables pour calculer les états P_0^j et $P_{N_j}^j$ de chaque stock, $(K - 1)$ variables pour calculer les ratios de capacités de production α_j de chaque stock, K variables pour calculer le taux de production ρ_i de chacune des machines équivalentes et enfin une variable pour calculer le taux de production de la ligne ($\psi = \min_{i=1 \dots K} \rho_i$).

Par conséquent, pour évaluer le taux production d'une ligne composée de K machines, il suffit de résoudre un système d'équations non linéaires à $(4 \times k - 2)$ variables.

4.4 Etude des lignes avec des machines ayant de multiples modes de défaillance

Dans de nombreux cas pratiques, les machines peuvent être sujettes à différents types de défaillances qui se produisent à des fréquences différentes et qui nécessitent des temps de réparation différents. Levantesi *et al.* [43] ont proposé une méthode analytique pour évaluer les performances des lignes de production composées de machines pouvant avoir plusieurs modes de défaillances. Cette méthode, qui considère le cas général avec des lignes non homogènes et un flux de pièces discret, est inspirée de la méthode de décomposition introduite par Gershwin [34]. Cette méthode est également une extension de la technique de décomposition considérant des modes de défaillance multiples précédemment proposée par Tolio *et al.* [90] pour l'analyse des lignes exponentielles.

Une autre méthode basée sur une technique d'agrégation a été proposée par Belmansour et Nourelfath [6, 7]. Cette approche est une méthode récursive qui remplace chaque dipôle (un sous-système à deux machines et un stock intermédiaire) par une seule machine ayant

de caractéristiques équivalentes. En se basant sur une étude comparative avec un modèle de simulation ainsi qu'avec une approche d'agrégation simple, les auteurs ont établi que l'évaluation du taux de production est plus précise en distinguant entre les différents modes de défaillance de chaque machine.

Dans cette section, nous nous intéressons à la pertinence de l'approche par machines équivalentes dans le cas de lignes avec des machines ayant de multiple modes de défaillance. La démarche consiste à combiner cette approche avec la technique d'agrégation proposée par Belmansour et Nourelfath [6, 7].

4.4.1 Hypothèses et notations supplémentaires

Bien que les différentes étapes de la méthode par agrégation soient d'ordre général, Belmansour et Nourelfath [6, 7] se sont intéressés au cas particulier de lignes de production homogènes avec des machines ayant le même nombre de modes de défaillances. Ils ont considéré cette hypothèse particulière afin de faciliter la génération des différents états du système. Pour des raisons de cohérence dans l'étude comparative avec notre approche, nous supposons, sans perte de généralité, la même hypothèse.

Nous supposons aussi que chaque machine M_i possède F_i modes de défaillance. Tous les temps de défaillances et de pannes sont exponentiels. Une machine peut être en fonctionnement, bloquée, affamée ou défaillante selon un certain mode. λ_{im} et μ_{im} sont respectivement les taux de défaillance et de réparation de la machine M_i selon le mode m . Une machine peut tomber en panne selon un seul mode de défaillance à la fois et elle ne peut changer de mode de défaillance avant qu'elle soit réparée.

Les temps de traitement des pièces par les machines sont supposés être déterministes dans la méthode d'agrégation initiale. Or, nous proposons une relaxation de cette contrainte, pour supposer des temps de traitements exponentiels.

4.4.2 Transformation des modes de défaillance multiples en un seul mode

L'idée consiste à remplacer une machine ayant plusieurs modes de défaillance par une machine équivalente ayant un seul mode de défaillance. Ensuite, les paramètres de fiabilité de cette machine sont déterminés en respectant la même disponibilité asymptotique que la machine originale.

Le taux de défaillance équivalent, en supposant qu'une machine ne peut tomber en panne que selon un seul mode à la fois, est défini comme étant la somme des taux de défaillance selon les différents modes :

$$\forall i = 1 \dots K, \lambda_i = \sum_{m=1}^{F_i} \lambda_{im} . \quad (4.7)$$

Le taux de réparation équivalent est directement déduit de l'équation assurant la conservation de la disponibilité asymptotique entre la machine originale et la machine équivalente :

$$\forall i = 1 \dots K, \mu_i = \frac{1}{\sum_{m=1}^{F_i} \frac{\lambda_{im}}{\lambda_i} \times \frac{1}{\mu_{im}}} . \quad (4.8)$$

Afin de donner une idée sur la démonstration des relations précédentes, on considère, sans perte de généralité, le cas d'une machine ayant deux modes de défaillance. La démonstration est inspirée par celle présentée par Chadi El Ouazzani [13] pour l'étude de la disponibilité des lignes en série sans stocks intermédiaires.

Pour déterminer les paramètres de fiabilité de la machine équivalente, la machine originale peut être remplacée par un système à deux machines en série ayant chacune un seul mode de défaillance.

Donc, il s'agit d'établir que : $\lambda_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2}$ et $\mu_i = \frac{1}{\frac{1}{\mu_{i1}} \times \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1} + \lambda_{i2}} + \mu_{i2} \times \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i1} + \lambda_{i2}}}$.

Soient λ_{i1} , λ_{i2} les deux taux de pannes et μ_{i1} , μ_{i2} de la machine en question.

Soit n_e le nombre de défaillances du système sur un horizon T et soient n_1 et n_2 le nombre de défaillances de la première et de la deuxième machine sur le même horizon de temps.

En supposant que la probabilité de défaillances simultanées soit nulle, le nombre de pannes du système n'est que la somme des pannes des deux machines le composant (voir 4.9).

$$n_e = n_1 + n_2 \quad (4.9)$$

Soient T_e , T_1 et T_2 respectivement les temps totaux de la réparation de la machine équivalente, de la première machine et de la deuxième machine. Le temps moyen de réparation de la machine équivalente ($MTTR_e$) est défini comme suit :

$$\begin{aligned} MTTR_e &= \frac{T_e}{n_e} \\ &= \frac{T_1 + T_2}{n_e} \\ &= \frac{T_1}{n_1} \times \frac{n_1}{n_e} + \frac{T_2}{n_2} \times \frac{n_2}{n_e} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} MTTR_e &= MTTR_1 \times \frac{n_1}{n_e} + MTTR_2 \times \frac{n_2}{n_e} \\ &= MTTR_1 \times \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1}} + MTTR_2 \times \frac{1}{1 + \frac{n_1}{n_2}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sachant que nous considérons un contexte de défaillance dépendant des opérations, à chaque instant une machine peut se trouver dans l'un des trois états suivants :

En opération : pendant un intervalle de temps $n_i \times MTBF_i$.

En réparation : pendant un intervalle de temps $n_i \times MTTR_i$.

En blocage à cause de la défaillance de l'autre machine : pendant un intervalle de temps $n_j \times MTTR_j$.

C'est pourquoi, sur un horizon T , nous pouvons écrire :

$$T = n_1 \times MTBF_1 + n_1 \times MTTR_1 + n_2 \times MTTR_2 \quad (4.12)$$

et

$$T = n_2 \times MTBF_2 + n_2 \times MTTR_2 + n_1 \times MTTR_1 \quad (4.13)$$

Des équations 4.12 et 4.13, nous pouvons en déduire que :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{MTBF_2}{MTBF_1} \quad (4.14)$$

En combinant les équations 4.11 et 4.14 on obtient :

$$MTTR_e = MTTR_1 \times \frac{1}{1 + \frac{MTBF_1}{MTBF_2}} + MTTR_2 \times \frac{1}{1 + \frac{MTBF_2}{MTBF_1}} \quad (4.15)$$

Par une simple simplification, nous aboutissons à la démonstration de la relation du taux de réparation équivalent énoncée dans le début de cette section.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_i} &= \frac{1}{\mu_{i1}} \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1}}} + \frac{1}{\mu_{i1}} \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i2}}} \\ &= \frac{1}{\mu_{i1}} \times \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1} + \lambda_{i2}} + \frac{1}{\mu_{i2}} \times \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i1} + \lambda_{i2}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.4.3 Algorithme de la méthode par machines équivalentes avec modes de défaillance multiples

Cet algorithme est composé de deux étapes complètement distinctes. La première, consiste à transformer les machines avec des modes de défaillance multiples en machine ayant un seul mode de défaillance en se basant sur les équations développées ci-avant. Ensuite, le taux de production du système est évalué en utilisant l'algorithme de la méthode par machines équivalentes développée dans ce chapitre (voir algorithme 2).

Algorithme 2 Méthode par machines équivalentes avec modes de défaillance multiples

	K	Nombre de machines
	$K - 1$	Nombre de stocks intermédiaires
	N_j	Taille du stock intermédiaire B_j
Pré-conditions :	ω_i	Capacité de production de la machine M_i
	F_i	Nombre de modes de défaillance de la machine M_i
	λ_{im}	Taux de défaillance de la machine M_i selon le mode m
	μ_i	Taux de réparation de la machine M_i selon le mode m

pour tout machine M_i **faire**

$$\lambda_i \leftarrow \sum_{m=1}^{M(i)} \lambda_{im}$$

$$\mu_i \leftarrow \frac{1}{\sum_{m=1}^{M(i)} \frac{\lambda_i}{\lambda_{im}} \times \frac{1}{\mu_{im}}}$$

fin pour

pour tout stock B_j **faire**

pour tout machine M_i **faire**

$P_0^j \leftarrow$ Calculer la probabilité que le stock B_j soit vide

$P_{N_j}^j \leftarrow$ Calculer la probabilité que le stock B_j soit plein

$\alpha_j \leftarrow$ Calculer le ratio des capacités de production relatif au stock B_j

$\rho_i \leftarrow$ Calculer le taux de production de la machine équivalente M_i

fin pour

fin pour

retourner $\psi = \min\{\rho_i; i = 1 \dots K\}$

4.5 Résultats numériques

Nous proposons, dans cette section, d'étudier les performances de la nouvelle approche par machine équivalentes (EMM) par comparaison avec des modèles de simulation ainsi que d'autres méthodes analytiques existant dans la littérature. Pour ce faire, nous nous basons sur différents exemples numériques déjà étudiés et publiés dans la littérature.

Cette étude numérique est composée de deux parties distinctes. Dans la première partie, nous considérons des exemples de lignes de production homogènes et non-homogènes avec des machines ayant un seul mode de défaillance. Dans la deuxième partie, nous traitons le cas de lignes composées de machines ayant de multiples modes de défaillance.

4.5.1 Etude des lignes avec un seul mode de défaillance

Pour cette première partie, nous considérons une comparaison basée sur des exemples numériques bien connus dans la littérature. Tout d'abord, ceux initialement présentés par Choong et Gershwin [14] pour l'étude de la première version de la méthode de décomposition. Ces exemples considèrent des lignes de production avec respectivement 3, 5 et puis 7 machines différentes. Pour chaque exemple, deux versions différentes sont étudiées en faisant varier les paramètres de fiabilité ainsi que les capacités de production des différentes machines. La validation de la méthode proposée dans ce chapitre est faite en calculant les écarts relatifs par rapport aux résultats de la simulation ainsi que la méthode de décomposition présentée par Choong et Gershwin [14] (voir équation 4.17).

Afin d'assurer une plus grande cohérence de notre étude comparative, nous considérons aussi un ensemble de tests numériques récemment adoptés dans la littérature par Levantesi *et al.* [43] ainsi que Colledani et Gershwin [15]. Ces derniers ont utilisé ce benchmark pour comparer les différents modèles analytiques pour l'évaluation des performances des lignes de production en série. Ce benchmark consiste en six versions différentes d'une ligne de production à cinq machines non-identiques. Les auteurs ont considéré une variation des capacités de production des différentes machines afin de changer l'emplacement des postes goulets sur les lignes. Les paramètres de fiabilité ainsi que les capacités des stocks intermédiaires des différents exemples sont résumés dans les tables 4.1, 4.2, 4.3 et 4.5.

$$gap(\%) = 100 \times \left| \frac{\psi_{EMM} - \psi_{Simulation}}{\psi_{Simulation}} \right| \quad (4.17)$$

Le tableau 4.4 résume les résultats obtenus par les modèles de simulation, de décomposition présentés par Choong et Gershwin [14] ainsi que l'approche par machines équivalentes

TABLE 4.1: Les données de l'exemple 1 : cas d'une ligne à trois machines Choong et Gershwin [14].

	M_i	λ_i	μ_i	ω_i	N_i
cas A	1	0.03	0.05	0.5	10
	2	0.04	0.06	0.1	10
	3	0.03	0.05	0.5	-
cas B	1	0.03	0.05	0.5	10
	2	0.04	0.06	0.2	10
	3	0.03	0.05	0.5	-

TABLE 4.2: Les données de l'exemple 2 : cas d'une ligne avec 5 machines présenté par Choong et Gershwin [14].

	M_i	λ_i	μ_i	ω_i	N_i
cas A	1	0.01	0.1	0.25	4
	2	0.02	0.3	0.20	4
	3	0.04	0.5	0.30	4
	4	0.02	0.5	0.20	4
	5	0.04	0.5	0.30	-
cas B	1	0.02	0.3	0.20	4
	2	0.05	0.4	0.23	4
	3	0.01	0.1	0.30	4
	4	0.07	0.4	0.26	4
	5	0.02	0.3	0.21	-

proposée pour les exemples 1, 2 et 3.

Nous notons que pour les quatre exemples avec trois et sept machines, les deux méthodes analytiques obtiennent sensiblement les mêmes résultats que le modèle de simulation avec un écart maximal de 4.31% pour la méthode de décomposition et de 2.63% pour la méthode proposée.

TABLE 4.3: Les données de l'exemple 3 : cas d'une ligne à sept machines présenté par Choong et Gershwin [14].

	M_i	λ_i	μ_i	ω_i	N_i
cas A	1	0.02	0.3	0.20	4
	2	0.05	0.4	0.23	4
	3	0.01	0.1	0.30	6
	4	0.07	0.4	0.26	4
	5	0.03	0.3	0.21	4
	6	0.03	0.1	0.27	6
	7	0.06	0.4	0.26	-
cas B	1	0.02	0.3	0.20	4
	2	0.05	0.4	0.23	4
	3	0.01	0.1	0.30	5
	4	0.07	0.4	0.26	4
	5	0.02	0.3	0.21	4
	6	0.06	0.5	0.23	5
	7	0.01	0.1	0.27	-

TABLE 4.4: Résultats numériques pour les exemples 1, 2 et 3.

Exemples	Simulation		Méthode de décomposition		Gap MD (%)	Méthode EMM	Gap EMM (%)
	Choong et Gershwin[14]		Choong et Gershwin[14]				
Ex1.cas A	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	0.00	0.0600	0.00
Ex1.cas B	0.1140	0.1150	0.1150	0.1170	0.88	0.1170	2.63
Ex2.cas A	0.1439	0.1377	0.1377	0.1351	4.31	0.1351	6.11
Ex2.cas B	0.1407	0.1385	0.1385	0.1424	1.56	0.1424	1.21
Ex3.cas A	0.1304	0.1333	0.1333	0.1329	2.22	0.1329	1.92
Ex3.cas B	0.1371	0.1376	0.1376	0.1359	0.64	0.1359	0.87

Pour les exemples avec cinq machines, les écarts des deux modèles sont inférieurs à 2% pour un des deux cas et respectivement de 4.31% et 6.11% pour l'autre cas de figure. Les écarts relatifs des méthodes approchées peuvent s'expliquer, dans le cas particulier de ces exemples, par l'influence des petites tailles des différents stocks intermédiaires. En effet, il est avéré que la précision des méthodes approchées pour l'évaluation du taux de production des lignes de production croit en fonction de la taille des stocks qui absorbent les aléas dû à l'indisponibilité des machines.

TABLE 4.5: Les données de l'exemple 4 : six lignes à cinq machines présenté par Colledani et Gershwin [15] ainsi que Levantesi et al. [43].

-	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
λ_i	0.0125	0.0050	0.0200	0.0100	0.0100
μ_i	0.2000	0.0500	0.2000	0.1000	0.0800
N_j	15	20	10	15	-
ω_i (cas 1)	1.111	1.667	1.000	1.428	1.250
ω_i (cas 2)	1.250	1.111	1.667	1.000	1.428
ω_i (cas 3)	1.428	1.250	1.111	1.667	1.000
ω_i (cas 4)	1.000	1.428	1.250	1.111	1.667
ω_i (cas 5)	1.667	1.000	1.428	1.250	1.111
ω_i (cas 6)	2.000	10.00	3.000	1.000	5.000

L'approche par machines équivalentes est aussi comparée aux différentes méthodes analytiques rapportées par Levantesi *et al.* [43] et Colledani et Gershwin [15]. Ces différentes méthodes sont connues pour être les plus précises et performantes dans la littérature. La première méthode appelée *ADDX* et développée par Burman [10] est une version améliorée de la méthode de décomposition de Gershwin. La seconde méthode est basée sur une technique d'homogénéisation (*RSA/CTA/GE*) proposée par Dallery et Le Bihan [20]. Les deux dernières approches et les plus récentes sont celles présentées par Levantesi *et al.* [43] (*LMT*) et Colledani et Gershwin [15] (*CG*).

Le tableau 4.6 résume les résultats obtenus par chacune des approches ainsi que les écarts relatifs de chaque modèle par rapport à la simulation.

D'après les résultats, nous constatons que l'approche par machines équivalentes obtient les meilleurs résultats dans quatre cas sur six et présente des écarts relatifs inférieurs à 0.9%.

Les différents résultats numériques présentés ci-avant nous permettent de juger de la fiabilité et de la pertinence de la méthode d'évaluation proposée dans ce chapitre.

TABLE 4.6: Résultats numériques pour les exemples présentés par Colledani et Gershwin [15] ainsi que Levantesi et al. [43].

-	cas 1	cas 2	cas 3	cas 4	cas 5	cas 6
Simulation	0.8570	0.8582	0.8573	0.8938	0.8748	0.8978
ADDX	0.8620	0.8680	0.8730	0.9120	0.8930	-
Gap (ADDX %)	0.5834	1.1419	1.8313	2.0362	2.0804	-
RSA/CTA/GE	0.8596	0.8597	0.8618	0.8986	0.8794	0.8963
Gap (RSA/CTA/GE %)	0.3034	0.1748	0.5249	0.5370	0.5258	0.1671
LMT	0.8590	0.8580	0.8610	0.8990	0.888	0.8980
Gap (LMT %)	0.2334	0.0233	0.4316	0.5818	1.5089	0.0223
CG	0.8581	0.8603	0.8606	0.8985	0.8815	0.8980
Gap (CG %)	0.1283	0.2447	0.3826	0.5281	0.7613	0.0178
EMM	0.8581	0.8509	0.8551	0.8939	0.8804	0.9029
Gap (EMM %)	0.1283	0.8506	0.2566	0.0111	0.6401	0.5680

4.5.2 Etude des lignes avec des modes de défaillance multiples

Dans cette seconde partie, nous nous intéressons à l'application de la méthode par machines équivalentes pour l'évaluation du taux de production des lignes homogènes et non homogènes avec des machines ayant plusieurs modes de défaillance. Comme indiqué ci-avant, l'idée consiste à remplacer les différents modes de défaillance de chaque machine par un seul mode équivalent pour ensuite appliquer la méthode *EMM*.

L'étude numérique, présentée ici, est basée sur les mêmes instances que celles étudiées par Belmansour and Nourelfath [6, 7] pour le cas des lignes homogènes et par Belmansour [4] pour le cas des lignes non homogènes.

Ces exemples consistent en 4 configurations avec des lignes de production composées respectivement de 5, 10, 15 et 20 machines. Pour les trois premières configurations, nous considérons à la fois le cas d'une ligne homogène et le cas d'une ligne non homogène. Par

TABLE 4.7: Les données de la configuration 1 : ligne avec cinq machines [4, 6].

	M_i	λ_{i1}	μ_{i1}	λ_{i2}	μ_{i2}	ω_i	N_i
Ligne homogène	Machine 1	0.0120	0.2200	0.0050	0.0400	1.1000	55
	Machine 2	0.0100	0.0400	0.0800	0.1500	1.1000	40
	Machine 3	0.1000	0.2000	0.0400	0.0900	1.1000	40
	Machine 4	0.0100	0.0870	0.1160	0.2971	1.1000	55
	Machine 5	0.1000	0.2500	0.0500	0.0800	1.1000	-
Ligne homogène	Machine 1	0.0071	0.2323	0.0029	0.0422	1.030	20
	Machine 2	0.0022	0.0696	0.0178	0.2611	1.103	20
	Machine 3	0.0071	0.2024	0.0029	0.0910	1.178	20
	Machine 4	0.0032	0.0698	0.0368	0.2383	1.041	20
	Machine 4	0.0200	0.4273	0.0100	0.1366	0.956	-

contre, pour la dernière instance, il s'agit d'une seule ligne non-homogène. Pour chacune des instances, toutes les machines sont caractérisées par deux modes de défaillance. Les différents paramètres de ces exemples d'application sont reportés dans les tableaux 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10.

TABLE 4.8: Les données de la configuration 2 : ligne avec dix machines [4, 6].

	M_i	λ_{i1}	μ_{i1}	λ_{i2}	μ_{i2}	ω_i	N_i
Ligne homogène	Machine 1	0.0120	0.2200	0.0050	0.0400	1.1000	55
	Machine 2	0.0100	0.0400	0.0800	0.1500	1.1000	40
	Machine 3	0.1000	0.2000	0.0400	0.0900	1.1000	40
	Machine 4	0.0100	0.0870	0.1160	0.2971	1.1000	55
	Machine 5	0.1000	0.2500	0.0500	0.0800	1.1000	50
	Machine 6	0.0141	0.2323	0.0059	0.0422	1.1000	50
	Machine 7	0.0011	0.0348	0.0089	0.1306	1.1000	65
	Machine 8	0.0143	0.1350	0.0057	0.0607	1.1000	55
	Machine 9	0.0008	0.0349	0.0092	0.1192	1.1000	35
	Machine 10	0.0133	0.1709	0.0067	0.0546	1.1000	-
Ligne non homogène	Machine 1	0.0190	0.3700	0.0079	0.0673	3.3977	80
	Machine 2	0.0035	0.0679	0.0280	0.2546	3.5041	65
	Machine 3	0.0346	0.2958	0.0138	0.1330	3.07	60
	Machine 4	0.0063	0.1354	0.0735	0.4621	3.3826	70
	Machine 5	0.0140	0.3387	0.0070	0.1083	3.4279	70
	Machine 6	0.0104	0.5064	0.0044	0.0921	3.5796	70
	Machine 7	0.0019	0.0540	0.0153	0.2026	3.6137	85
	Machine 8	0.0063	0.3462	0.0025	0.1557	3.8469	80
	Machine 9	0.0009	0.0678	0.0104	0.2313	3.7465	45
	Machine 10	0.0034	0.3184	0.0017	0.1018	3.828	-

TABLE 4.9: Les données de la configuration 3 : ligne avec quinze machines [4, 6].

	M_i	λ_{i1}	μ_{i1}	λ_{i2}	μ_{i2}	ω_i	N_i
Ligne homogène	Machine 1	0.0120	0.2200	0.0050	0.0400	1.3000	55
	Machine 2	0.0100	0.0400	0.0800	0.1500	1.3000	40
	Machine 3	0.1000	0.2000	0.0400	0.0900	1.3000	40
	Machine 4	0.0100	0.0870	0.1160	0.2971	1.3000	55
	Machine 5	0.1000	0.2500	0.0500	0.0800	1.3000	50
	Machine 6	0.0141	0.2323	0.0059	0.0422	1.3000	50
	Machine 7	0.0011	0.0348	0.0089	0.1306	1.3000	65
	Machine 8	0.0143	0.1350	0.0057	0.0607	1.3000	55
	Machine 9	0.0008	0.0349	0.0092	0.1192	1.3000	35
	Machine 10	0.0133	0.1709	0.0067	0.0546	1.3000	40
	Machine 11	0.0296	0.2323	0.0124	0.0422	1.3000	55
	Machine 12	0.0074	0.0696	0.0596	0.2611	1.3000	40
	Machine 13	0.0429	0.2024	0.0171	0.0910	1.3000	50
	Machine 14	0.0037	0.0698	0.0423	0.2383	1.3000	55
	Machine 15	0.0080	0.4273	0.0040	0.1366	1.3000	-
Ligne non homogène	Machine 1	0.0943	0.4968	0.0393	0.0904	2.7256	70
	Machine 2	0.0038	0.0525	0.0306	0.1969	3.7054	50
	Machine 3	0.0234	0.3051	0.0093	0.1372	3.5206	45
	Machine 4	0.0035	0.0547	0.0409	0.1866	3.0724	60
	Machine 5	0.0206	0.3189	0.0103	0.1020	3.6719	67
	Machine 6	0.0090	0.2876	0.0037	0.0523	3.6520	65
	Machine 7	0.0017	0.0552	0.0139	0.2072	4.2079	75
	Machine 8	0.0134	0.1874	0.0054	0.0843	3.6295	65
	Machine 9	0.0007	0.0414	0.0087	0.1412	4.006	40
	Machine 10	0.0055	0.1666	0.0027	0.0533	4.1955	45
	Machine 11	0.0042	0.2021	0.0017	0.0368	3.9554	60
	Machine 12	0.0005	0.0824	0.0042	0.3092	4.2889	67
	Machine 13	0.1271	0.2401	0.0508	0.1080	2.1252	65
	Machine 14	0.0003	0.0276	0.0031	0.0943	4.1519	65
	Machine 15	0.0053	0.2106	0.0027	0.0673	4.0276	-

TABLE 4.10: Les données de la configuration 4 : ligne avec vingt machines [4].

	M_i	λ_{i1}	μ_{i1}	λ_{i2}	μ_{i2}	ω_i	N_i
	Machine 1	0.0120	0.2200	0.0050	0.0400	1.000	55
	Machine 2	0.0100	0.0400	0.0800	0.1500	1.200	40
	Machine 3	0.1000	0.2000	0.0400	0.0900	1.100	40
	Machine 4	0.0100	0.0870	0.1160	0.2971	1.400	55
	Machine 5	0.1000	0.2500	0.0500	0.0800	1.200	50
	Machine 6	0.0141	0.2323	0.0059	0.0422	1.000	50
	Machine 7	0.0011	0.0348	0.0089	0.1306	1.200	65
	Machine 8	0.0143	0.1350	0.0057	0.0607	1.100	55
	Machine 9	0.0008	0.0349	0.0092	0.1192	1.400	35
Ligne	Machine 10	1.200	0.0133	0.1709	0.0067	0.0546	40
non homogène	Machine 11	0.0296	0.2323	0.0124	0.0422	1.000	55
	Machine 12	0.0074	0.0696	0.0596	0.2611	1.200	40
	Machine 13	0.0429	0.2024	0.0171	0.0910	1.100	55
	Machine 14	0.0037	0.0698	0.0423	0.2383	1.400	55
	Machine 15	0.0080	0.4273	0.0040	0.1366	1.200	65
	Machine 16	0.0071	0.2323	0.0029	0.0422	1.030	55
	Machine 17	0.0022	0.0696	0.0178	0.2611	1.103	35
	Machine 18	0.0071	0.2024	0.0029	0.0910	1.178	40
	Machine 19	0.0032	0.0698	0.0368	0.2383	1.041	55
	Machine 20	0.0200	0.4273	0.0100	0.1366	0.956	-

TABLE 4.11: Résultats obtenus pour les différentes configurations avec modes de défaillance multiples.

Méthodes	Configuration 1		Configuration 2		Configuration 3		Configuration 4	
	homogène	non homogène						
Simulation	0.56508	0.794	0.52239	2.315	0.60723	1.029	0.523	
Agrégation 1	0.52748	0.804	0.48617	2.361	0.56691	1.059	0.493	
Gap 1 (%)	6.65%	1.26%	6.93%	1.99%	6.64%	2.92%	5.74%	
Agrégation 2	0.54350	0.797	0.49911	2.298	0.58498	1.048	0.511	
Gap 2 (%)	3.82%	0.38%	4.46%	0.73%	3.66%	1.85%	2.29%	
EMM	0.56838	0.795	0.53259	2.510	0.62519	1.043	0.521	
Gap 3 (%)	0.58%	0.13%	1.95%	8.42%	2.96%	1.36%	0.38%	

Simulation : résultats du modèle de simulation proposé par Belmansour et Noureiffath [6, 7] pour le cas des lignes homogènes et par Belmansour [4] pour les lignes non homogènes.

Agrégation 1 : résultats de la méthode d'agrégation en considérant un seul mode de défaillance (équivalent) proposé par Belmansour et Noureiffath [6, 7] pour le cas des lignes homogènes et par Belmansour [4] pour les lignes non homogènes.

Agrégation 2 : résultats de la méthode d'agrégation en considérant deux modes de défaillance proposé par Belmansour et Noureiffath [6, 7] pour le cas des lignes homogènes et par Belmansour [4] pour les lignes non homogènes.

EMM : résultats de la méthode par machines équivalentes proposée dans ce chapitre.

Pour chaque configuration, les taux de production calculés par chacune des méthodes analytiques : agrégation 1, agrégation 2 et méthode par machines équivalentes (*EMM*) sont comparés avec les résultats de simulation proposés par Belmansour et Nourelfath [6, 7] pour le cas des lignes homogènes et Belmansour [4] pour le cas des lignes non homogènes. Les différents résultats sont résumés dans le tableau 4.11.

Nous constatons que pour les quatre exemples, les deux méthodes d'agrégation ont tendance à sous-estimer le taux de production des lignes en considération tandis que l'approche proposée a tendance à le surestimer. Néanmoins, il est évident que les approches par agrégation et par machines équivalentes obtiennent de meilleurs résultats que l'approche par agrégation classique. En fait, les écarts relatifs absolus de la méthode *EMM* sont inférieurs à ceux des deux méthodes d'agrégation.

L'intérêt de cette étude numérique est d'établir, moyennant quelque exemples, la pertinence de l'approche par machines équivalentes, proposée dans ce chapitre, pour évaluer le taux de production d'une ligne avec des machines ayant plusieurs mode de défaillance.

4.6 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, une nouvelle méthode dite par machines équivalentes (*EMM*) pour évaluer le taux de production d'une ligne en série avec des défaillances des machines dépendantes des opérations. Cette nouvelle approche consiste à remplacer chacune des machines originales par une machine équivalente dont le taux de production individuel intègre les indisponibilités dues à l'influence des zones de stockage ainsi que les autres machines. Pour ce faire, les états des différents stocks intermédiaires sont analysés en utilisant des processus Markovien de naissance et de mort dédiés afin de déterminer les probabilités de blocage et de famine des différentes machines.

Nous avons aussi présenté une adaptation de cette approche pour l'évaluation des performances des lignes de production avec des machines ayant des modes de défaillance multiples. La validité et la pertinence de cette approche ont été investiguées en se basant sur différents tests numériques issus de la littérature.

L'une des originalités majeures de cette méthode est son nombre réduit de variables nécessaire pour la modélisation des états du système. En effet, pour évaluer le taux de production d'une ligne à K machines et $(K - 1)$ stocks intermédiaires, il suffit de résoudre un programme mathématique à $(4K - 2)$ équations non linéaires.

Par conséquent, deux remarques importantes sont à souligner :

- La complexité de l'approche par machines équivalentes est indépendante des capaci-

tés des stocks intermédiaires .

- Le nombre de variables nécessaires pour la modélisation du système est linéairement croissant en fonction du nombre de machines constituant la ligne de production.

L'autre originalité de cette approche, conséquente à la première, est que les temps de calcul sont quasiment négligeables comparés aux autres approches basées sur les techniques de décomposition et d'agrégation.

Dans ce chapitre consacré à l'évaluation des performances d'une ligne de production, nous avons supposé une étude d'un contexte existant avec des caractéristiques fixées. En effet, l'une des hypothèses de l'étude est basée sur la connaissance des capacités des différents stocks intermédiaires. Dans le chapitre suivant, nous présentons une application directe de cette nouvelle approche en étudiant la problématique de l'optimisation du dimensionnement des stocks intermédiaires.

Chapitre 5

Optimisation du dimensionnement des stocks intermédiaires

Résumé :

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de dimensionnement des stocks intermédiaires (buffers) dans le cas d'une ligne de production en série. Cette étude constitue une application directe de la méthode par machines équivalentes présentée dans le chapitre précédent. L'idée consiste à garder la même approche de formulation tout en considérant que les capacités de stocks intermédiaires soient des variables à déterminer. Ensuite, le problème d'optimisation du dimensionnement des buffers est résolu par un algorithme de programmation non linéaire.

Bien que la méthode proposée soit d'ordre général et valable pour différentes variantes du problème de dimensionnement des buffers, nous présentons une résolution du problème dit dual. En effet, nous nous intéressons tout particulièrement à la résolution du problème avec l'objectif de maximiser le taux de production de la ligne et en respectant une limitation de la capacité de stockage totale.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de la publication suivante :

- **Y., Ouazene, A., Yalaoui, H., Chehade and F., Yalaoui.** Non-linear programming approach for buffer allocation in unreliable production line, *21st International Conference on Analytical & Stochastic Modelling Techniques & Applications*, Budapest, 2014, soumise. [88]

5.1 Introduction et état de l'art

L'optimisation du dimensionnement des stocks intermédiaires (allocation des buffers) est l'une des problématiques majeures dans la conception des systèmes de production. Ceci est dû au rôle primordial que peuvent jouer les buffers sur l'amélioration de la disponibilité du système et par conséquent sur sa performance globale. En effet, le rôle primaire de ces stocks intermédiaires, dans le cas de lignes en série, est de permettre aux différentes machines de fonctionner le plus indépendamment possible les unes des autres. Ils permettent aussi de réduire les temps de repos ou d'oisiveté du système engendrés par les blocages et les ruptures d'alimentation (famines) des différentes machines. Cependant, l'utilisation de ces stocks intermédiaires engendre des coûts d'investissements soit en termes d'espace occupé ou d'autres moyens matériels. Ils augmentent aussi les encours de production tout au long de la ligne. C'est pourquoi, trouver le ou les meilleurs compromis possibles pour le dimensionnement des stocks intermédiaires est l'une des problématiques qui a intéressé et qui intéresse à la fois les industriels ainsi que les chercheurs.

Le problème d'allocation ou de dimensionnement des buffers est bien connu pour être un problème d'optimisation NP-difficile (Huang *et al.* [38], Macgregor et Cruz [51] et Dolgui *et al.* [30]). En raison de son importance et de sa complexité, ce dernier a largement été étudié dans la littérature. Plusieurs travaux ont considéré différentes variantes de ce problème avec différentes techniques de modélisation et approches de résolution.

L'un des premiers travaux traitant cette problématique a été présenté par Koenigsberg [42] il y a plus d'une cinquantaine d'année. L'auteur a proposé une analyse des problèmes fondamentaux combinant l'allocation des zones de stockage et l'efficacité des systèmes de production. D'autres études, telles que celles proposées par Dallery et Gershwin [19] ou Papadopoulos et Heavey [58], se sont intéressés à l'analyse des différents modèles mathématiques et méthodes analytiques décrivant les effets des stocks intermédiaires sur différents types de systèmes de production. Plus récemment, Papadopoulos *et al.* [57] ont proposé une classification des différentes méthodes et techniques d'optimisation en tenant compte de la longueur (taille) de la ligne de production.

Afin de faciliter la lisibilité et la compréhension des différentes avancées qu'a connu ce problème en particulier, plusieurs revues de littérature ont été publiées. La plus récente de ces revues est celle proposée par Demir *et al.* [22] en 2012. Les auteurs ont examiné les différentes études portant sur les problèmes d'allocation de buffers dans les systèmes de production publiés depuis 1998. Pour ce faire, ils ont adopté une classification de ces travaux basée sur trois axes différents :

La typologie de la ligne de production : lignes en série, ligne séries-parallelles, systèmes en ré-

seaux, lignes d'assemblage, systèmes flexibles et systèmes cellulaires.

La ou les fonctions-objectifs : maximisation du taux de production, minimisation des tailles de buffer et/ou des encours, minimisation des coûts, maximisation du profit, maximisation du taux de satisfaction des clients, minimisation des temps de cycle, etc.

La méthodologie de résolution : méthodes basées sur des techniques d'évaluation et les méthodes basées sur la génération des solutions.

Dans notre étude, dans ce chapitre, nous nous intéressons particulièrement aux différentes approches de résolution traitant la problématique d'allocation des stocks dans le cas des lignes de production composées de machines réparables (sujettes à des défaillances).

De manière générale, les méthodes de résolution du problème d'allocation des buffers sont des combinaisons entre des techniques d'évaluation de performances et des méthodes d'optimisation mathématiques comme illustrée par la figure 5.1. En effet, la méthode d'évaluation permet de déterminer la valeur de la fonction-objectif pour une configuration donnée du système. Par ailleurs, la technique d'optimisation ou la méthode générative (algorithme de recherche) permettent de proposer de nouvelles configurations candidates à être évaluées. L'efficacité de l'ensemble du processus dépend autant de la pertinence et de l'efficacité de la méthode d'évaluation de performances que de la méthode d'optimisation ou de génération de solutions.

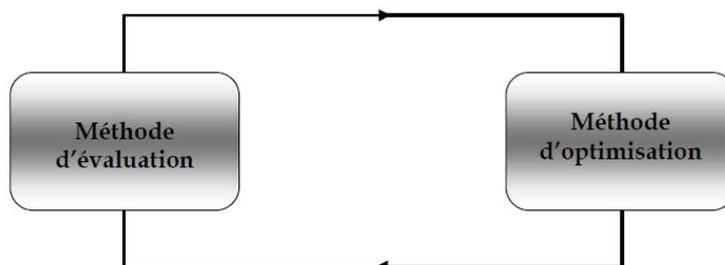


FIGURE 5.1: *Processus général de la résolution du problème de dimensionnement des buffers. [22]*

Les méthodes d'évaluation de performances sont souvent basées sur des approches d'agrégation, de décomposition, de modèles Markoviens ou de modèles de simulation. En revanche, les méthodes d'optimisation sont très variées. La programmation dynamique est l'une de ces approches généralement utilisées pour résoudre le problème d'allocation des buffers dans les lignes de production avec des machines parfaitement fiables [25]. Elle a été aussi adoptée par plusieurs auteurs, tels que Yamashita et Suzuki [93] et Jafari et Shanthikumar [41], pour traiter les cas de lignes de petites tailles. Par contre, ces approches sont

limitées du fait de la complexité de la génération des relations récursives pour l'évaluation des fonctions-objectifs.

D'autres approches de résolution sont basées sur le concept de gradient. Ce sont généralement des techniques d'exploration de voisinage adoptant différentes techniques de recherche local telles que les concepts d'échange de vecteurs standard ou méthode de pseudo-gradient proposés par Seong *et al.* [65, 66] ou l'algorithme de grand déluge étendu de Nahas *et al.* [54]. Vouros et Papadopoulos [91] ont combiné une approche par simulation avec un système à base de connaissances pour résoudre le problème d'allocation de buffers avec comme fonction-objectif la maximisation du taux de production.

Un autre type de méthodes de résolution a été aussi largement étudié. Il s'agit des méta-heuristiques telles que le recuit simulé (Spinellis et Papadopoulos [71]), les algorithmes génétiques (Dolgui *et al.* [29, 31]) et l'optimisation de colonie de fourmis (Nourelfath *et al.* [56] et Nahas *et al.* [55]) et l'algorithme du système immunitaire (Massim *et al.* [53]). Récemment, Demir *et al.* [21, 23] quant à eux, ont opté pour des algorithmes de recherche tabou pour traiter le cas de lignes de production non-homogènes. Les auteurs se sont focalisés sur le paramétrage des algorithmes ainsi que sur le choix de la solution initiale. Shi et Gershwin [67] ont proposé une approche par programmation non linéaire et sans contrainte avec comme objectif la maximisation du profit en considérant à la fois le taux de production ainsi que les coûts de stockage des encours.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode basée sur un modèle de programmation non linéaire pour résoudre le problème de dimensionnement des stocks intermédiaires applicable dans les cas de lignes homogènes et non-homogènes. Cette approche est inspirée par la méthode par machines équivalentes proposée dans le chapitre précédent. Les différentes hypothèses considérées sont introduites dans la section suivante.

5.2 Définitions et hypothèses du problème

Nous considérons la même ligne de production que celle décrite dans le chapitre précédent (voir figure 5.2). Elle est composée de K stations de travail (machines). Chaque machine alimente un stock intermédiaire en amont et s'alimente elle-même à partir d'un autre stock intermédiaire en aval.

Nous considérons aussi les mêmes hypothèses que celle décrite précédemment à savoir que :

- Les temps de traitement de panne et de réparation des machines sont des variables aléatoires exponentielles et statistiquement indépendantes.

- Les défaillances des machines dépendent des opérations, c'est-à-dire qu'une machine bloquée ou affamée ne peut tomber en panne.
- Il existe un nombre infini de pièces en aval de la première machine et une capacité de stockage en amont de la dernière machine.
- Les temps de transition des pièces entre les machines et les zones de stockage ou entre les zones de stockage et les machines sont nuls.

Par contre, l'hypothèse supplémentaire, est que les capacités des différents stocks intermédiaires sont finies mais inconnues. L'objectif, de ce chapitre, est de proposer une méthode d'optimisation afin de déterminer les valeurs de ces capacités qui maximisent le taux de production de la ligne sachant que nous disposons d'une capacité de stockage total limitée.

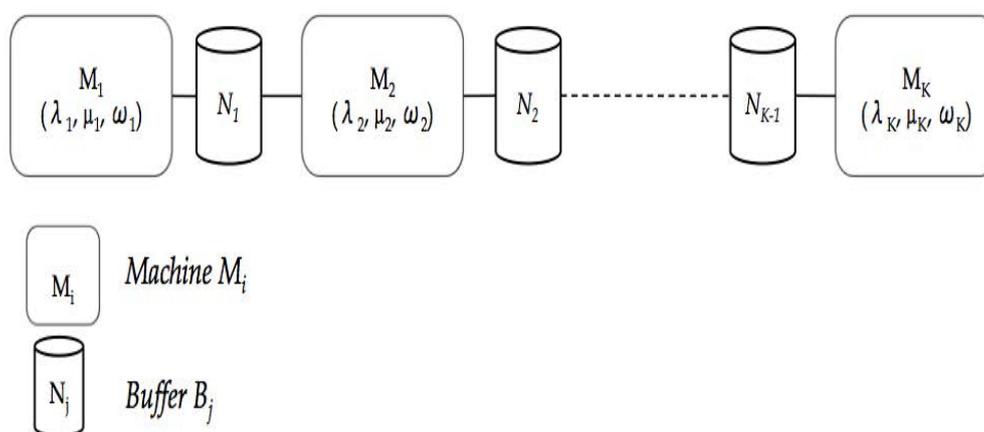


FIGURE 5.2: Représentation de la ligne de production avec K machines.

Gershwin et Schor [36] ont défini deux variantes du problème de dimensionnement des stocks intermédiaires (buffers) : le problème dual et le problème primal.

L'objectif du problème dual est de maximiser le taux de production réalisable avec une capacité de stockage totale donnée. Ceci est approprié dans les cas où la capacité totale de stockage est limitée et où le nombre d'emplacements des buffers est fixé. Le problème, dans ce cas, est de savoir comment disposer les machines pour obtenir le maximum de profits de l'utilisation des stocks intermédiaires.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad \psi \\ \text{Contraintes :} \\ \sum_{j=1}^{K-1} N_j \leq N_{total} \quad N_{total} \text{ la capacité de stockage totale maximale} \\ N_j \in N, \forall j = 1 \dots K - 1 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

L'objectif du problème primal est de minimiser la capacité totale des buffers requise pour la ligne pour atteindre ou dépasser un taux de production moyen donné. Généralement,

cette formulation est appropriée si l'espace au sol ou le mécanisme de mise en stock est coûteux et que le taux de production de la ligne est fixé.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \sum_{j=1}^{K-1} N_j \\ \text{Contraintes :} & \\ \psi \geq \psi_{requis} & \psi_{requis} \text{ est un taux de production requis} \\ N_j \in N, \forall j = 1 \dots K - 1 & \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Il existe une autre version du problème de dimensionnement des buffers dite généralisée (Seong *et al.* [66]). Cette version combine les deux versions précédentes. Elle a pour objectif la maximisation de la différence entre le profit généré par le taux de production et le coût généré par le stockage des encours.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & f_1 \times \psi - f_2 \times \sum_{j=1}^{K-1} \overline{N}_j \\ \text{Contraintes :} & \\ \sum_{j=1}^{K-1} N_j \leq N_{total} & N_{total} \text{ la capacité de stockage totale maximale} \\ N_j \in N, \forall j = 1 \dots K - 1 & \\ \overline{N}_j & \text{le niveau du stock moyen à l'état stationnaire} \\ f_1 & \text{le profit unitaire} \\ f_2 & \text{le coût de stockage unitaire} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme de programmation non linéaire inspiré par la méthode par machines équivalentes (*EMM*) afin de résoudre la version duale du problème de dimensionnement de stocks intermédiaires. Bien que la méthode proposée soit applicable aux trois versions du problème, nous avons fait le choix de détailler le premier cas.

5.3 Résolution du problème de dimensionnement des stocks intermédiaires

On considère un problème de dimensionnement des stocks intermédiaires (allocation des buffers) dans une ligne de production à K machines avec une capacité de stockage totale de $\sum_{j=1}^{K-1} N_j$. Il est bien établi, dans la littérature, que le nombre de solutions faisables (possibles) croît en fonction du nombre de machines ainsi qu'en fonction de la capacité de stockage à allouer.

En effet, une approche de résolution par énumération complète est obligée d'examiner $(K-2)$

combinaisons parmi $(\sum_{j=1}^{K-1} N_j + K - 2)$ configurations possibles.

$$Nb_{solutions} = \frac{(\sum_{j=1}^{K-1} N_j + 1) \times (\sum_{j=1}^{K-1} N_j + 2) \dots \times (\sum_{j=1}^{K-1} N_j + K - 2)}{(K - 2)!} \quad (5.4)$$

Pour exemple, il existe 10626 façons possibles d'allouer une capacité de stockage totale de 20 unités à 5 buffers (une ligne de production à 6 machines).

La méthode que nous proposons dans ce chapitre pour résoudre ce problème de dimensionnement de buffer s'inspire directement de l'approche par machines équivalentes pour l'évaluation des performances des lignes de production proposée précédemment.

5.3.1 Adaptation de la méthode par machines équivalentes

Comme nous l'avons décrit dans le chapitre précédent, cette approche d'évaluation de performances se base sur l'analyse des états des différents stocks intermédiaires en utilisant des processus Markovien de naissances et de mort dédiés. Le nombre d'états de chaque processus stochastique est connu du fait que les capacités de chacun des stocks intermédiaires soient fixées à l'avance.

L'idée dans ce chapitre, est d'intégrer cette méthode par machines équivalentes dans un algorithme d'optimisation pour le dimensionnement des différents stocks. Ceci se fait en utilisant la même démarche de modélisation mais à un détail prêt. En effet, cette fois, les tailles des différents stocks intermédiaires ($N_1, N_2 \dots N_{K-1}$) sont considérées comme des variables à déterminer. Nous intégrons une dimension de variabilité supplémentaire à la méthode par machines équivalentes.

Les différents états possibles de chaque stock intermédiaire B_j sont représentés par un processus de naissance et de mort à espaces variables mais de taille finie N_j .

L'analyse des différents états, à l'état stationnaire du fonctionnement du système, est faite de la même façon qu'avec des capacités de stockage déterminées. La seule différence est que les probabilités des différents états sont exprimées en fonction des tailles des buffers qui sont elles-mêmes des variables à déterminer.

Par conséquent, comme établi précédemment, les probabilités d'avoir un stock vide ou plein sont respectivement données par les équations suivantes 5.5 et 5.6.

$$P_j^0 = \begin{cases} \frac{1-\alpha_j}{1-\alpha_j^{N_j+1}} & \text{si } \alpha_j \neq 1 \\ \frac{1}{N_j+1} & \text{si } \alpha_j = 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

$$P_j^{N_j} = \begin{cases} \frac{\alpha_i^{N_j} \times (1 - \alpha_j)}{1 - \alpha_i^{N_j+1}} & \text{si } \alpha_j \neq 1 \\ \frac{1}{N_j+1} & \text{si } \alpha_j = 1 \end{cases} \quad (5.6)$$

α_j étant le ratio des capacités de production de chaque processus Markovien est défini comme étant le rapport entre le taux de naissance et le taux de mort de chaque processus (voir équation 5.7).

$$\alpha_j = \frac{\min_{i=1\dots j} \rho_i}{\min_{i=j+1\dots K} \rho_i} \quad (5.7)$$

En considérant, sans perte de généralité, le cas d'une ligne non-homogène ($\alpha_j \neq 1$), le taux de production effectif de chaque machine équivalente ρ_i est exprimé en fonction des variables α_{j-1} , α_j , N_{j-1} et N_j comme suit :

$$\begin{cases} \rho_1 = \omega_1 \times \frac{\mu_1 \times (1 - P_1^{N_1})}{\mu_1 + (1 - P_1^{N_1}) \times \lambda_1} \\ \rho_K = \omega_K \times \frac{\mu_K \times (1 - P_{K-1}^0)}{\mu_K + (1 - P_{K-1}^0) \times \lambda_K} \\ \forall i = 2 \dots K - 1, \rho_i = \omega_i \times \frac{\mu_i \times (1 - P_{j-1}^0) \times (1 - P_j^{N_j})}{\mu_i + (1 - P_{j-1}^0) \times (1 - P_j^{N_j}) \times \lambda_i} \end{cases} \quad (5.8)$$

En combinant les équations 5.5, 5.6 et 5.8, nous obtenons :

$$\begin{cases} \rho_1 = \omega_1 \times \frac{\mu_1 \times \left(\frac{1 - \alpha_1^{N_1}}{1 - \alpha_1^{N_1+1}} \right)}{\mu_1 + \left(\frac{1 - \alpha_1^{N_1}}{1 - \alpha_1^{N_1+1}} \right) \times \lambda_1} \\ \rho_K = \omega_K \times \frac{\mu_K \times \left(\frac{\alpha^{(K-1)} - \alpha^{N_{(K-1)}+1}}{1 - \alpha^{(K-1)}} \right)}{\mu_K + \left(\frac{\alpha^{(K-1)} - \alpha^{N_{(K-1)}+1}}{1 - \alpha^{(K-1)}} \right) \times \lambda_K} \\ \forall i = 2 \dots K - 1, \rho_i = \omega_i \times \frac{\mu_i \times \left(\frac{\alpha^{(j-1)} - \alpha^{N_{(j-1)}+1}}{1 - \alpha^{(j-1)}} \right) \times \left(\frac{1 - \alpha_j^{N_j}}{1 - \alpha_j^{N_j+1}} \right)}{\mu_i + \left(\frac{\alpha^{(j-1)} - \alpha^{N_{(j-1)}+1}}{1 - \alpha^{(j-1)}} \right) \times \left(\frac{1 - \alpha_j^{N_j}}{1 - \alpha_j^{N_j+1}} \right) \times \lambda_i} \end{cases} \quad (5.9)$$

Comme indiqué précédemment, les taux de production effectif de la première et de la dernière machine sont exprimés différemment pour tenir compte de l'hypothèse qui stipule que la première machine ne peut être affamée et la dernière ne peut être bloquée.

Enfin, le taux de production de la ligne défini comme étant le taux de production de la machine la plus lente (la machine goulet) est donné par l'équation .

$$\psi = \min_{i=1\dots K} \{\rho_i\}$$

$$= \min \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \omega_1 \times \frac{1}{\frac{\lambda_1 + \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1} N_1^{N_1+1}}{\mu_1}} \\ \rho_K = \omega_K \times \frac{1}{\frac{\lambda_K + \frac{1-\alpha_{K-1}}{1-\alpha_{K-1}} N_{(K-1)}^{N_{(K-1)}+1}}{\mu_K}} \\ \forall i = 2\dots K-1, \rho_i = \omega_i \times \frac{1}{\frac{\lambda_i + \frac{(1-\alpha_{(j-1)}^{N_{(j-1)}+1}) \times (1-\alpha_j^{N_j+1})}{(\alpha_{(j-1)} - \alpha_{(j-1)}) \times (1-\alpha_j^{N_j})}}{\mu_i}} \end{array} \right. \quad (5.10)$$

5.3.2 Evaluation du niveau de stock moyen

Les autres caractéristiques importantes, en plus du taux de production d'une ligne en série, est le niveau du stock moyen qui s'accumule dans tous les buffers intermédiaires. Ce dernier peut être défini comme étant la somme des stocks moyens de tous les buffers (voir équation).

$$\bar{N} = \sum_{j=1}^{K-1} \bar{N}_j \quad (5.11)$$

Or, le niveau de stock moyen de chaque buffer B_j , à l'état stationnaire du fonctionnement du système, peut être défini comme étant l'espérance mathématique de la variable associée aux différents états du buffer en question (voir équation 5.12).

$$\begin{aligned} \bar{N}_j &= E[P_{B_j}] \\ &= \sum_{s=1}^{N_j} s \times P_j^s \\ &= \begin{cases} \sum_{s=1}^{N_j} s \times \frac{\alpha_j^s \times (1-\alpha_j)}{1-\alpha_j^{N_j+1}} & \text{si } \alpha_j \neq 1 \\ \sum_{s=1}^{N_j} s \times \frac{1}{1+N_j} & \text{si } \alpha_j = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Par un simple calcul de la somme d'une série, nous aboutissons à la formulation suivante :

$$\bar{N}_j = \begin{cases} \frac{N_j \times \alpha_j^{N_j+2} - (N_j+1) \times \alpha_j^{N_j+1} + \alpha_j}{\alpha_j^{N_j+2} - \alpha_j^{N_j+1} - \alpha_j + 1} & \text{si } \alpha_j \neq 1 \\ \frac{N_j}{2} & \text{si } \alpha_j = 1 \end{cases} \quad (5.13)$$

Remarque :

Le passage de l'équation 5.12 à l'équation 5.13 est obtenu en considérant le calcul de la somme de la série suivante :

$$\sum_{s=1}^{N_j} s \times \frac{\alpha_j^s (1 - \alpha_j)}{1 - \alpha_j^{N_j+1}} = \frac{1 - \alpha_j}{1 - \alpha_j^{N_j+1}} \times \sum_{s=1}^{N_j} s \times \alpha_j^s \quad (5.14)$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_j} s \times \alpha_j^s &= \alpha_j \times \frac{\partial \sum_{s=1}^{N_j} \alpha_j^s}{\partial \alpha_j} \\ &= \alpha_j \times \frac{\partial \frac{\alpha_j \times (1 - \alpha_j^{N_j})}{1 - \alpha_j}}{\partial \alpha_j} \\ &= \frac{\alpha_j - (N_j + 1) \times \alpha_j^{N_j+1} + N_j \times \alpha_j^{N_j+2}}{(1 - \alpha_j)^2} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \overline{N_j} &= \frac{1 - \alpha_j}{1 - \alpha_j^{N_j+1}} \times \frac{\alpha_j - (N_j + 1) \times \alpha_j^{N_j+1} + N_j \times \alpha_j^{N_j+2}}{(1 - \alpha_j)^2} \\ &= \frac{N_j \times \alpha_j^{N_j+2} - (N_j + 1) \times \alpha_j^{N_j+1} + \alpha_j}{\alpha_j^{N_j+2} - \alpha_j^{N_j+1} - \alpha_j + 1} \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.3.3 Modèle de programmation non linéaire

Bien que la méthode, décrite ci-avant, soit valable pour les trois versions de la formulation du problème de dimensionnement de buffers, nous considérons, dans cette section, le cas du problème dual. En effet, le problème est formulé comme un modèle de programmation non linéaire ayant pour objectif de maximiser le taux de production de la ligne tout en respectant une contrainte linéaire de capacité de stockage totale disponible. Il s'agit d'identifier le meilleur profil des différents stocks intermédiaires $(N_1, N_2, \dots, N_{k-1})$ qui maximise le taux de production du système. Ce dernier est exprimé en fonction des capacités de production, des paramètres de fiabilité des différentes machines ainsi que les capacités de stockage de chaque buffer.

Les différentes capacités des différents stocks sont les variables à déterminer. Les caractéristiques technologiques de chaque machines $(\omega_i, \lambda_i, \mu_i)$ sont supposées être connues.

Ainsi, le problème d'optimisation du dimensionnement des stocks intermédiaires dans une ligne en série, en utilisant l'adaptation de l'approche par machines équivalentes (*EMM*),

est formulé comme un problème de programmation non linéaire comme suit :

$$\begin{aligned} \max \psi &= \min_{i=1\dots K} \{\rho_i\} \\ &= \min \left\{ \omega_1 \times \frac{1}{\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{1-\alpha_1^{N_1+1}}{1-\alpha_1^{N_1}}}; \omega_K \times \frac{1}{\frac{\lambda_K}{\mu_K} + \frac{1-\alpha_{K-1}^{N_{K-1}+1}}{\alpha_{(K-1)} - \alpha_{(K-1)}^{N_{(K-1)}+1}}}; \omega_i \times \frac{1}{\frac{\lambda_i}{\mu_i} + \frac{(1-\alpha_{(i-1)}^{N_{(j-1)}+1}) \times (1-\alpha_i^{N_{j+1}})}{(\alpha_{(j-1)} - \alpha_{(j-1)}^{N_{(j-1)}+1}) \times (1-\alpha_j^{N_j})}} \right\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\alpha_j = \frac{\min_{i=1\dots j} \rho_i}{\min_{i=j+1\dots K} \rho_i}, \forall j = 1\dots K - 1 \quad (5.18)$$

$$\sum_{j=1}^{K-1} N_j \leq N_{total} \quad (5.19)$$

$$N_j \in \mathbb{N}, \forall j = 1\dots K - 1 \quad (5.20)$$

$$N_j \neq 0, \forall j = 1\dots K - 1 \quad (5.21)$$

L'équation 5.17 représente la fonction-objectif qui n'est autre que le taux de production évalué par la méthode *EMM*. L'équation 5.18 permet le calcul des différents ratios α_j nécessaires pour le calcul de la fonction-objectif. L'équation 5.19 est la contrainte linéaire du modèle. Elle assure la limitation de la capacité de stockage totale.

Les deux dernières contraintes (équations 5.20 et 5.21) sont très importantes dans la construction de notre modèle. En effet, ce dernier est basé sur une analyse de différents processus stochastiques à espaces d'états discrets. C'est pourquoi, les capacités des différents buffers doivent être entières et non nulles.

Pour la résolution de ce programme non linéaire, nous avons utilisé le solveur Lingo (version 12.0).

Bien que les temps de calcul ne soient pas la performance première recherchée dans les problématiques de conception des lignes de production du fait de leur caractère stratégique, il est important de signaler que la résolution du modèle proposé avec le solveur Lingo est capable de traiter les cas de lignes de production de tailles importantes (plus que 25 machines) et ceci avec des temps compétitifs avec les différentes méthodes existantes dans la littérature. Plus de détails sur les performances algorithmiques seront développés dans la section suivante.

5.4 Résultats numériques

Cette section présente une étude numérique dans le but de valider les performances de la méthode par programmation non-linéaire proposée dans ce chapitre. Comme la littérature concernant la problématique de dimensionnement des stocks intermédiaires est vaste et variée, le choix des instances ou du benchmark à utiliser est primordiale pour la pertinence de cette démarche de validation. En effet, plusieurs instances traitant différentes variantes de ce problème existent dans la littérature. Mais dans notre étude, nous nous intéressons au cas des lignes de production avec des machines ayant des paramètres de fiabilité ainsi que des temps de traitement suivant des lois exponentielles. Par conséquent, nous adoptons les instances, référencées dans la littérature, proposées par Seong *et al.* [65],

Ce benchmark a été largement repris par différents auteurs, tels que Gershwin et Schor [36], Papadopoulos et Vidalis [59] et Sabuncuoglu *et al.* [62], pour la validation de leurs travaux sur les problématiques d'allocation de buffers. Il est composé de dix instances différentes représentant des lignes de production avec 4, 5, 6, 8, 9 et 10 machines et des capacités de stockage totales qui varient de 10 à 315 unités. Chacune des configurations considère le cas général d'une ligne non-homogène asynchrone avec des machines ayant des paramètres de fiabilité ainsi que des temps de traitement différents. Les données relatives à chaque instance sont reportées dans le tableau 5.1.

En se basant sur ces instances, nous comparons la méthode de programmation non linéaire proposée dans ce chapitre à six autres différentes méthodes décrites dans la littérature. Pour des raisons de lisibilité et de pertinence des résultats, nous adoptons le même schéma de comparaison déjà utilisé dans les études précédentes. En effet, les résultats obtenus par les algorithmes développés par Seong *et al.* [65] sont utilisés comme référence pour la validation des autres approches, c'est pourquoi nous reprenons la même démarche.

Nous présentons, pour chaque instance, la solution obtenue par chaque algorithme, le taux de production correspondant ainsi que les temps de calcul. Cette comparaison est synthétisée par le calcul de la différence relative en termes de taux de production obtenue par chaque méthode en comparaison avec les résultats proposés par Seong *et al.* [65] (voir équation 5.22

$$gap(\%) = 100 \times \left| \frac{\psi - \psi_{[65]}}{\psi_{[65]}} \right| \quad (5.22)$$

Les différentes méthodes considérées dans cette étude comparative sont les suivantes :

SEVA, **Non-SEVA1** et **Non-SEVA2** proposées par Seong *et al.* [65]. Les auteurs ont formulé le problème d'optimisation de l'allocation des buffers sous forme d'un problème non-

TABLE 5.1: Le design de des différentes configurations de Seong et al. [65].

Cas	K	$\sum_{j=1}^{K-1} N_j$	$(\lambda_i, \mu_i, \omega_i)$
1	4	10	(0.07,0.17,3.7) ; (0.11,0.37,1.5) ; (0.49,0.78,1.1) ; (0.19,0.50,3.0)
2	4	30	(0.38,0.45,3.0) ; (0.30,0.55,1.0) ; (0.35,0.50,2.0) ; (0.45,0.40,3.6)
3	5	10	(0.10,0.30,1.2) ; (0.30,0.50,1.0) ; (0.50,0.20,3.0) ; (0.40,0.30,2.0) ; (0.20,0.10,1.8)
4	5	15	(0.30,0.64,2.8) ; (0.40,0.83,1.7) ; (0.45,0.75,2.5) ; (0.35,0.85,3.4) ; (0.10,0.74,1.9)
5	6	115	(0.08,0.40,2.6) ; (0.24,0.40,3.0) ; (0.20,0.60,3.4) ; (0.17,0.50,4.7) ; (0.10,0.30,1.5)
6	6	130	(0.30,0.20,3.0) ; (0.50,0.50,1.0) ; (0.10,0.30,1.2) ; (0.20,0.10,1.8) ; (0.30,0.20,1.5) ; (0.40,0.30,2.0)
7	8	125	(0.25,0.52,1.0) ; (0.18,0.48,3.6) ; (0.23,0.58,1.7) ; (0.32,0.50,1.4) ; (0.19,0.47,2.8) ; (0.35,0.46,2.7) ; (0.26,0.66,1.6) ; (0.20,0.41,1.2)
8	9	200	(0.20,0.70,2.5) ; (0.10,0.60,1.5) ; (0.30,0.80,2.8) ; (0.20,0.80,3.6) ; (0.10,0.70,2.1) ; (0.10,0.60,1.9) ; (0.30,0.80,2.7) ; (0.20,0.50,3.0) (0.30,0.60,2.0)
9	10	310	(0.20,0.70,2.5) ; (0.10,0.60,1.5) ; (0.30,0.80,2.8) ; (0.20,0.80,3.6) ; (0.10,0.70,2.1) ; (0.10,0.60,1.9) ; (0.30,0.80,2.7) ; (0.20,0.50,3.0) (0.30,0.60,2.0) ; (0.10,0.70,2.1)
10	10	315	(0.365,0.465,2.4) ; (0.215,0.565,1.7) ; (0.305,0.485,2.8) ; (0.375,0.455,2.2) ; (0.340,0.455,2.1) ; (0.390,0.390,2.5) ; (0.265,0.500,1.1) ; (0.285,0.490,1.3) (0.255,0.495,1.6) ; (0.240,0.505,0.8)

linéaire de recherche multidimensionnel. Les auteurs ont développé deux algorithmes appelés SEVA (standard exchange vector algorithm) et Non-SEVA (non-standard exchange vector algorithm). Ces deux méthodes sont basées sur le principe de la recherche locale en explorant un voisinage spécifique. Pour le premier algorithme, le voisinage de recherche est identifié selon le concept d'échange de vecteurs standard tandis que pour le deuxième algorithme, les auteurs ont introduit les concepts de pseudo-gradient et de projection de gradient afin d'accélérer l'exploration de l'espace de recherche. Les auteurs ont considéré deux versions différentes de cet algorithme : Non-SEVA1 et Non-SEVA2 qui diffèrent en termes d'heuristique utilisée pour l'approximation du gradient de la fonction objectif. En effet, le taux de production n'étant pas une fonction différentielle, il a fallu une approximation de la fonction gradient.

LIBA qui est une heuristique basée sur la simulation proposée par Selvi [64] et reprise ensuite par Sabuncuoglu *et al.* [62]. L'idée principale de cette méthode consiste à diviser la ligne de production en deux sous-systèmes amont et aval autour de chaque buffer et de minimiser la différence entre les taux de production de ces deux sous-systèmes. Ensuite, le buffer est réaffecté au sous-système goulet. Cette procédure est déroulée de manière récursive tant qu'il y a une amélioration du taux de production de la ligne globale.

H-1 et **H-2** sont deux heuristiques proposés par Sabuncuoglu *et al.* [62] pour la résolution du problème d'allocation des buffers dans des lignes de production asynchrones et non-homogènes avec une ou plusieurs machines goulets. La différence entre les deux heuristiques réside dans la nature de la solution initiale. En effet, la méthode H-1 commence avec une solution initiale uniforme générée en identifiant la machine goulet à partir de son taux de production en isolement. La solution initiale de l'heuristique H-2 est générée par la méthode LIBA.

Enfin, la méthode **EMM-Opt** désigne l'adaptation de l'approche par machine équivalentes au problème de dimensionnement ou d'allocation de buffer proposée dans ce chapitre.

Les résultats numériques des différentes méthodes sont résumés dans les tableaux 5.2 et 5.3. Pour chaque instance, nous présentons le profil de la solution obtenue par chaque méthode et le taux de production correspondant. Pour les temps de calcul, la méthode proposée EMM est comparée uniquement aux algorithmes SEVA, Non-SEVA1 et Non-SEVA2 car seuls ces temps sont publiés dans la littérature.

La dernière colonne de chacun des deux tableaux représente les écarts relatifs en termes de taux de production en comparaison avec le meilleur des trois algorithmes proposés par Seong *et al.* [65].

Nous remarquons aussi que les résultats de la méthode SEVA ne sont pas présentés pour les instances avec des lignes de plus de trois machines. Ceci s'explique par le fait que la complexité de cet algorithme ne permet pas la résolution des instances avec plus de trois machines.

La première remarque évidente est que les temps de calcul, de la méthode proposée dans ce chapitre, sont quasiment négligeables en comparaison avec les méthodes SEVA, Non-SEVA1 et Non-SEVA2. En effet, pour les dix instances considérées, les temps de résolution du programme non-linéaire par le solveur Lingo (version 12.0) sont inférieurs à 10 secondes. Nous constatons que pour la première instance, la méthode EMM obtient une solution différente des autres méthodes. Les différentes méthodes proposent des solutions avec un premier stock intermédiaire nul, or dans le cas de la méthode EMM cette solution est considérée

comme infaisable. Néanmoins, la solution proposée assure un écart de taux de production de 0.56% par rapport au taux calculé par la méthode SEVA.

Pour les instances avec quatre et cinq machines (cas 2, 3 et 4), la méthode EMM obtient les mêmes solutions que les méthodes SEVA, Non-SEVA-1, Non-SEVA2 et LIBA. Les heuristiques H-1 et H-2 obtiennent des solutions différentes.

Nous remarquons que pour le reste des instances, les différentes méthodes obtiennent des solutions différentes mais ces dernières assurent des taux de production quasi équivalents. En effet l'écart relatif du taux de production de la méthode EMM est inférieur à 1%. Les méthodes obtiennent des solutions différentes car les capacités de stockage totales à allouer, pour ces instances, sont assez importantes et le problème d'allocation des buffers n'admet pas forcément une solution unique.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de programmation non-linéaire pour optimiser le dimensionnement ou l'allocation des stocks intermédiaires dans une ligne de production en série. Le problème consiste à identifier les capacités optimales de chacun de ces stocks avec comme objectif la maximisation du taux de production de la ligne avec une contrainte de limitation de la capacité de stockage totale disponible.

Cette méthode est une adaptation de l'approche par machines équivalentes (*EMM*), proposée dans le chapitre précédent, comme technique d'évaluation de performances de ce type de lignes de production. L'idée consiste à transformer l'algorithme d'évaluation de performances en un algorithme d'optimisation non linéaire en intégrant la variabilité des capacités de stockage des différents buffers. En effet, la méthode *EMM* originale a pour objectif l'évaluation d'une configuration bien déterminée (unique) tandis que dans son adaptation comme algorithme d'optimisation, l'objectif est d'identifier la meilleure configuration possible.

Le principe fondamental reste le même que pour la méthode *EMM*, c'est-à-dire, remplacer chacune des machines originales par une machine équivalente dont le taux de production individuel intègre les indisponibilités dues aux phénomènes de blocage et de famine. Par contre, les processus Markoviens de naissance et de mort utilisés pour analyser les différents états de stocks intermédiaires sont à espaces d'états variables mais finis.

Un des résultats importants de cette approche est son applicabilité pour les trois différentes variantes du problème d'allocation des buffers : primal, dual et généralisée. Seule la nature de la fonction-objectif est amenée à changer.

La partie consacrée à la validation numérique de cette méthode est basée sur un bench-

mark bien étudié dans la littérature. Ce dernier, présente différentes versions de lignes de productions asynchrones et non-homogènes avec une variation du nombre de machines ainsi que de la capacité de stockage totale à allouer. Le choix de ces instances a permis la comparaison de notre méthode avec six méthodes différentes. Les résultats obtenus, montrent la pertinence et l'efficacité de cette approche pour optimiser le dimensionnement des stocks intermédiaires dans les lignes de production en série.

L'un des autres intérêts majeurs de cette méthode est ses temps de calcul quasi négligeables en comparaison avec les autres approches considérées dans cette étude.

TABLE 5.2: Quelques résultats comparatifs avec différentes méthodes de la littérature.

Cas	Méthodes	Allocation des buffers	ψ	min :sec	Gap %
1	SEVA (Seong <i>et al.</i> [65])	(0,7,3)	0.6363	00 :06	-
	Non-SEVA1 (Seong <i>et al.</i> [65])	(0,6,4)	0.6363	00 :03	-
	Non-SEVA2 (Seong <i>et al.</i> [65])	(0,7,3)	0.6363	00 :04	-
	LIBA (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(0,7,3)	0.6258	-	1.65
	H-1 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(0,7,3)	0.6258	-	1.65
	H-2 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(0,7,3)	0.6258	-	1.65
	EMM-Opt	(2,5,3)	0.6327	00 :00	0.56
2	SEVA (Seong <i>et al.</i> [65])	(11,16,3)	0.6394	02 :53	-
	Non-SEVA1 (Seong <i>et al.</i> [65])	(11,16,3)	0.6394	01 :06	-
	Non-SEVA2 (Seong <i>et al.</i> [65])	(11,16,3)	0.6394	00 :38	-
	LIBA (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(11,16,3)	0.6384	-	0.16
	H-1 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(11,15,4)	0.6384	-	0.16
	H-2 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(11,15,4)	0.6384	-	0.16
	EMM-Opt	(11,16,3)	0.6460	00 :00	1.03
3	SEVA (Seong <i>et al.</i> [65])	(1,3,4,2)	0.3484	00 :13	-
	Non-SEVA1 (Seong <i>et al.</i> [65])	(1,3,4,2)	0.3484	00 :13	-
	Non-SEVA2 (Seong <i>et al.</i> [65])	(1,3,4,2)	0.3484	00 :13	-
	LIBA (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(1,3,4,2)	0.3468	-	0.46
	H-1 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(1,3,3,3)	0.3475	-	0.25
	H-2 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(1,3,3,3)	0.3475	-	0.25
	EMM-Opt	(1,3,4,2)	0.3662	00 :01	5.11
4	SEVA (Seong <i>et al.</i> [65])	(4,6,3,2)	0.9460	00 :14	-
	Non-SEVA1 (Seong <i>et al.</i> [65])	(4,6,4,1)	0.9439	00 :15	-
	Non-SEVA2 (Seong <i>et al.</i> [65])	(4,6,4,1)	0.9439	00 :15	-
	LIBA (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(4,7,3,1)	0.9714	-	2.68
	H-1 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(4,7,3,1)	0.9714	-	2.68
	H-2 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(4,7,3,1)	0.9714	-	2.68
	EMM-Opt	(4,6,3,2)	0.9940	00 :04	5.07
5	Non-SEVA1 (Seong <i>et al.</i> [65])	(29,15,29,42)	1.1250	00 :43	-
	Non-SEVA2 (Seong <i>et al.</i> [65])	(22,11,22,60)	1.1250	00 :35	-
	LIBA (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(17,17,22,59)	1.1248	-	0.02
	H-1 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(21,27,16,51)	1.1248	-	0.02
	H-2 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(20,31,11,53)	1.1248	-	0.02
	EMM-Opt	(17,22,4,56)	1.1250	00 :01	0.00

TABLE 5.3: Quelques résultats comparatifs avec différentes méthodes de la littérature
(suite) 5.2.

Cas	Méthodes	Allocation des buffers	ψ	min :sec	Gap %
6	Non-SEVA1 (Seong <i>et al.</i> [65])	(26,45,26,16,17)	0.4995	07 :37	-
	Non-SEVA2 (Seong <i>et al.</i> [65])	(23,38,47,14,8)	0.4989	09 :19	-
	LIBA (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(23,38,47,14,8)	0.4797	-	3.96
	H-1 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(23,38,47,14,8)	0.4799	-	3.92
	H-2 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(23,38,47,14,8)	0.4801	-	3.88
	EMM-Opt	(21,78,9,15,7)	0.4999	0 :01	0.08
7	Non-SEVA1 (Seong <i>et al.</i> [65])	(33,2,18,0,21,19,32)	0.6756	83 :49	-
	Non-SEVA2 (Seong <i>et al.</i> [65])	(33,2,18,0,21,19,32)	0.6756	92 :22	-
	LIBA (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(57,8,17,17,5,8,13)	0.6755	-	0.02
	H-1 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(48,2,18,0,21,19,32)	0.6755	-	0.02
	H-2 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(54,13,18,15,4,10,17)	0.6755	-	0.02
	EMM-Opt	(87,6,18,17,5,8,17)	0.6753	00 :05	0.04
8	Non-SEVA1 (Seong <i>et al.</i> [65])	(42,42,8,25,25,25,8,25)	1.2857	61 :26	-
	Non-SEVA2 (Seong <i>et al.</i> [65])	(70,44,15,17,16,16,6,16)	1.2857	01 :36	-
	LIBA (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(28,47,20,15,21,20,22,27)	1.2780	-	0.60
	H-1 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(25,44,4,18,18,24,18,49)	1.2783	-	0.57
	H-2 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(28,41,12,10,20,25,18,46)	1.2784	-	0.56
	EMM	(29,108,2,4,7,8,2,40)	1.2818	00 :05	0.30
9	Non-SEVA1 (Seong <i>et al.</i> [65])	(34,34,34,2,34,34,34,70)	0.9864	24 :12	-
	Non-SEVA2 (Seong <i>et al.</i> [65])	(20,15,16,18,25,15,20,112,69)	0.9863	89 :20	-
	LIBA (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(6,22,15,15,21,20,41,112,58)	0.9860	-	0.04
	H-1 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(6,25,14,22,22,20,39,110,52)	0.9860	-	0.04
	H-2 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(6,25,14,20,25,23,39,106,52)	0.9860	-	0.04
	EMM-Opt	(5,10,4,23,8,6,25,174,55)	0.9863	00 :07	0.01
10	Non-SEVA1 (Seong <i>et al.</i> [65])	(35,35,35,35,18,52,118,35,52)	0.5423	05 :28	-
	Non-SEVA2 (Seong <i>et al.</i> [65])	(65,20,5,5,5,65,5,5,140)	0.5423	03 :18	-
	LIBA (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(29,18,26,31,30,38,49,40,54)	0.5417	-	0.06
	H-1 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(35,22,35,35,35,35,35,48)	0.5417	-	0.06
	H-2 (Sabuncuoglu <i>et al.</i> [62])	(29,24,26,31,30,38,49,40,48)	0.5417	-	0.06
	EMM-Opt	(4,11,7,13,21,42,110,23,94)	0.5423	00 :08	0.00

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'analyse et l'optimisation de la conception des lignes de production en série en présence de stocks intermédiaires à capacités finies. Les différentes machines sont caractérisées par des temps de traitement, de panne et de réparation aléatoires. Nous avons aussi fait le choix de nous intéresser à une étude globale qui considère à la fois des lignes homogènes et des lignes non-homogènes.

La première contribution de ce travail consistait à développer une nouvelle méthode analytique pour l'évaluation des performances de ce genre de lignes de production. Ce choix de travailler sur une nouvelle approche analytique est motivé par le fait que la plupart des méthodes d'évaluation de performance, existantes dans la littérature, sont basées soit sur de la simulation soit sur des techniques de décomposition et d'agrégation. Bien que la pertinence de ces méthodes soit bien établie par différentes études et applications, elles présentent, néanmoins, certaines limites telles que les temps de calcul importants, la complexité de la modélisation, et la convergence des algorithmes de résolutions en ce qui concerne les approches par décomposition.

Comme première étape de notre démarche de développement d'une nouvelle approche, nous avons commencé par l'étude d'une ligne de production simple composée de deux machines séparées par un seul stock intermédiaire. L'idée était de proposer une analyse détaillée d'un modèle simple et de le valider pour ensuite s'intéresser à l'étude d'une version généralisée.

Cette étape fait l'objet du chapitre 2. Dans ce dernier, nous détaillons la nouvelle approche dite méthode par machines équivalentes pour évaluer la disponibilité, le taux de production de la ligne ainsi que le niveau de stock moyen. Cette méthode est basée sur le remplacement des machines originales par des machines équivalentes dont les disponibilités asymptotiques intègrent les probabilités de blocage et de famine dues à la limitation de la capacité du stock intermédiaire. Ces probabilités sont déterminées par la modélisation des différents états du stock intermédiaire en utilisant un processus Markovien de naissance et de mort. La validation de ce modèle est faite en se basant sur une étude comparative avec

différents modèles existant dans la littérature.

Dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés à l'étude des performances de cette approche dans le cas d'une ligne de production composée de deux stations de travail avec différentes machines parallèles dans chacune des stations. La démarche consiste à remplacer chaque bloque de machines parallèles par une machine équivalente en utilisant différentes techniques connues dans la littérature pour ensuite utiliser la modélisation proposée dans le chapitre 2. En plus de la validation de cette approche par une étude numérique, nous avons établi d'importantes propriétés théoriques concernant la méthode par machines équivalentes. En effet, nous avons établi que le calcul du taux de production d'une ligne composée de machines parallèles en utilisant la méthode *EMM* est indépendant du choix de la méthode de remplacement des machines parallèles par une seule machine.

La version généralisée de la méthode par machines équivalentes, développée dans cette thèse, est présentée dans le chapitre 4. En s'inspirant de la modélisation proposée dans le chapitre 2, nous avons développé une méthode analytique pour l'évaluation des performances d'une ligne de production composée de K machines séparées par $(K - 1)$ stocks intermédiaires. L'idée de remplacer chaque machine originale par une machine équivalente en tenant compte des indisponibilités dues aux phénomènes de blocage et de famine reste inchangée. Néanmoins, il a fallu considérer l'influence des différentes machines et des différents stocks intermédiaires pour la construction de chaque machine équivalente. Pour ce faire, nous avons considéré une superposition de plusieurs processus de naissance et de mort pour l'évaluation des états des différents stocks. Ainsi les taux de naissance et de mort de chaque processus Markovien diffèrent en fonction de la position du stock intermédiaire dans la ligne de production.

L'avantage majeur de cette méthode est la réduction de la complexité de la modélisation du problème d'évaluation du taux de production d'une ligne en série. Par conséquent l'approche de résolution est plus rapide que les méthodes basées sur des techniques de décomposition ou d'agrégation. En effet, dans le cas de la méthode *EMM*, il s'agit de résoudre un système d'équations non linéaires dont le nombre de variables est linéairement dépendant de la taille de la ligne.

Nous nous sommes aussi intéressés, dans ce chapitre, à l'adaptation de cette nouvelle approche (*EMM*) au cas d'une ligne de production composée de machines ayant plusieurs modes de défaillances. La démarche consiste à ramener l'étude de ce genre de lignes de production à l'étude d'une ligne avec des machines ayant un seul mode de défaillance.

La dernière contribution de cette thèse, faisant l'objet du chapitre 5, concerne la problématique de l'optimisation du dimensionnement des différents stocks intermédiaires dans

une ligne de production en série. Nous nous sommes intéressés dans cette partie, à l'étude de la version duale de ce problème à savoir la maximisation du taux de production de la ligne tout en respectant une limitation de la capacité de stockage totale. Pour aborder ce problème d'optimisation, nous avons considéré la même approche de modélisation que celle développée pour la construction de la méthode par machines équivalentes afin d'exprimer le taux de production de la ligne. La différence est que les capacités des stocks intermédiaires sont des inconnues à déterminer. C'est pourquoi nous avons considéré, pour l'analyse des possibles états de chaque stock, un processus de naissance et de mort à espace d'états variable mais à dimension finie. Ceci nous a permis de développer une méthode d'optimisation par programmation non-linéaire pour la résolution du problème dit de dimensionnement ou d'allocation de buffers.

Les différents travaux présentés dans cette thèse mettent en perspective plusieurs possibilités de recherche future. Ces dernières peuvent être résumées en deux axes principaux à savoir : l'évaluation des performances des systèmes de production et l'optimisation de leur conception.

En ce qui concerne la partie évaluation de performances, l'étude des lignes en série fournit une compréhension fondamentale des systèmes de production. C'est pourquoi, il serait judicieux de s'intéresser à la possibilité d'adapter la méthode par machines équivalentes pour l'évaluation des performances d'autres structures de systèmes de production tels que les lignes d'assemblage, les systèmes en boucle fermée ou les lignes de production flexibles pouvant traiter plusieurs types de produits.

Une autre possibilité d'extension peut porter sur la généralisation des différentes propriétés théoriques développée dans les chapitres 2 et 3. Elles peuvent être utilisées en tant que relations de domination pour aborder des problématiques de dimensionnement et de choix des équipements lors de la conception des lignes de production.

Pour la partie résolution du problème de conception des lignes de production dont nous avons considéré un seul aspect, dans cette thèse, il serait intéressant de se pencher sur d'autres problématiques telles que la sélection des équipements.

Dans ce contexte et en se basant sur les différentes propriétés théoriques concernant l'évaluation du taux de production d'une ligne en série, développées dans cette thèse, nous avons proposé une nouvelle méthode d'optimisation dite d'énumération restrictive pour résoudre de manière multi-objective un problème de dimensionnement de stock et de choix d'équipements pour une ligne de production à deux machines (Ouazene *et al.* [76]).

L'objectif de cette méthode est d'identifier les meilleures configurations parmi un ensemble de solutions possibles afin de maximiser le taux de production du système et de

minimiser la capacité du stock intermédiaire tout en respectant un niveau de disponibilité minimal exigé et un budget d'investissement fixé au préalable. Le challenge immédiat est de travailler sur la généralisation de cette méthode pour traiter des lignes grandes.

Bibliographie

- [1] J.M. Alden. Estimating performance of two workstations in series with downtime and unequal speeds. *General Motors Research and Development Center, Report RD-9434*, 2002.
- [2] S.M. Ambani. *Analytical estimation of throughput distribution for serial manufacturing systems with multi-state machines and its application*. Phd-Thesis Mechanical Engineering, University of Michigan, USA, 2011.
- [3] B. Ancelin and A. Semery. Calcul de la productivité d'une ligne intégrée de fabrication : CALIF, une méthode analytique industrielle. *RAIRO APII*, 21(3) :209–238, 1987.
- [4] A.T. Belmansour. *Évaluation du taux de production d'une ligne avec stocks intermédiaires et machines à deux modes de défaillances par la technique d'agrégation*. Mémoire de la maîtrise en ingénierie, Université du Québec à Chicoutimi, 2007.
- [5] A.T. Belmansour. *Evaluation de l'efficacité de lignes de production avec machines multi-états et stocks intermédiaires*. Thèse de doctorat en génie mécanique, Faculté Des Sciences et de Génie, Université Laval, 2011.
- [6] A.T. Belmansour and M. Nourelfath. An aggregation method for performance evaluation of a tandem homogenous production line with machines having multiple failure modes. *CIRRELT-2008-53*, 2008.
- [7] A.T. Belmansour and M. Nourelfath. An aggregation method for performance evaluation of a tandem homogenous production line with machines having multiple failure modes. *Reliability Engineering & System Safety*, 95(11) :1193 – 1201, 2010.
- [8] D. Bergeron, M.A. Jamali, and H. Yamamoto. Modelling and analysis of manufacturing systems : a review of existing models. *International Journal of Product Development*, 1/2/3 :46–61, 2010.
- [9] N. Boysen, M. Fliedner, and A. Scholl. Assembly line balancing : wich model to use when ? *International Journal of Production Economics*, 111 :509–528, 2008.
- [10] M.H. Burman. *New Results in Flow Line Analysis*. Phd-Thesis Electrical, Massachusetts Institute of Tecnology, USA, 1995.

- [11] J.A. Buzaeott and L.E. Hanifin. Models of automatic transfer lines with inventory banks : A review and comparison. *AIIE Transactions*, 10(2) :197–207, 1978.
- [12] D. Calcagno. *Performance evaluation of transfer lines with shared repair capacity analytical models and application to scania d12 line*. Master Thesis in Management Engineering, Politecnico Di Milano, 2008.
- [13] R. Chahdi El Ouazzani. *Modélisation et analyse des performances des systèmes de production utilisant des stocks tampons à capacités finies*. Thèse de doctorat en génie mécanique, Université Laval, oai :theses.ulaval.ca :2007/24544, 2007.
- [14] Y.F. Choong and S.B. Gershwin. A decomposition method for the approximate evaluation of capacited transfer lines with unreliable machines and random processing times. *IIE Transactions*, 19 :150–159, 1987.
- [15] M. Colledani and S.B. Gershwin. A decomposition method for approximate evaluation of continuous flow multi-stage lines with general markovian machines. *Annals of Operations Research*, pages 1–36, 2011.
- [16] Dubois D. and J.P. Forestier. Productivité et en-cours moyens d’un ensemble de deux machines séparées par une zone de stockage. *R.I.A.R.O. Autom. Syst. Analysis and Control*, 16(2) :105–132, 1982.
- [17] Y. Dallery, R. David, and X.L. Xie. An efficient algorithm for analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers. *IIE Transactions*, 20(3) :280–283, 1988.
- [18] Y. Dallery, R. David, and X.L. Xie. Approximate analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(9) :943–953, 1989.
- [19] Y. Dallery and S.B. Gershwin. Manufacturing flow line systems : a review of models and analytical results. *Queueing Systems*, 12(1-2) :3–94, 1992.
- [20] Y. Dallery and H. Le Bihan. An improved decomposition method for the analysis of production lines with unreliable machines and finite buffers. *International Journal of Production Research*, 37(5) :1093–1117, 1999.
- [21] L. Demir, S. Tunali, and D.T. Eliiyi. An adaptive tabu search approach for buffer allocation problem in unreliable non-homogenous production lines. *Computers & Operations Research*, 39(7) :1477 – 1486, 2012.
- [22] L. Demir, S. Tunali, and D.T. Eliiyi. The state of the art on buffer allocation problem : a comprehensive survey. *Journal of Intelligent Manufacturing*, pages 1–22, 2012.
- [23] L. Demir, S. Tunali, D.T. Eliiyi, and A. Løkketangen. Two approaches for solving the buffer allocation problem in unreliable production lines. *Computers & Operations Research*, 40(10) :2556 – 2563, 2013.

- [24] A.C. Diamantidis, C.T. Papadopoulos, and M.I. Vidalis. Exact analysis of a discrete material three-station one-buffer merge system with unreliable machines. *International Journal of Production Research*, 42(4) :651–675, 2004.
- [25] A.C. Diamantidis and H.T. Papadopoulos. A dynamic programming algorithm for the buffer allocation problem in homogeneous asymptotically reliable serial production lines. *Mathematical Problems in Engineering*, 2004(3) :209–223, 2004.
- [26] C.A. Diamantidis and T.C. Papadopoulos. Exact analysis of a two-workstation one-buffer flow line with parallel unreliable machines. *European Journal of Operational Research*, 197 :572–580, 2009.
- [27] C.A. Diamantidis, T.C. Papadopoulos, and C. Heavy. Approximate analysis of serial flow lines with multiple parallel-machine stations. *IIE Transactions*, 39 :361–375, 2007.
- [28] C. Dincer and B. Deler. On the distribution of throughput of transfer lines. *Journal of the Operational Research Society*, 51 :1170–1178, 2000.
- [29] A. Dolgui, A. Ereemeev, A. Kolokolov, and V. Sigaev. A genetic algorithm for the allocation of buffer storage capacities in a production line with unreliable machines. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 1(2) :89–104, 2002.
- [30] A. Dolgui, A. Ereemeev, M.Y. Kovalyov, and V. Sigaev. Complexity of buffer capacity allocation problems for production lines with unreliable machines. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms in Operations Research*, 12(2) :155–165, 2013.
- [31] A. Dolgui, A. Ereemeev, and V. Sigaev. Hbba : hybrid algorithm for buffer allocation in tandem production lines. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 18(3) :411–420, 2007.
- [32] D. Douard. *Méthodes de décomposition pour l'analyse des performances des systèmes de production manufacturières en boucle fermée et de topologies générales*. Thèse de doctorat en informatique, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003.
- [33] C.E. Ebeling. *An introduction to reliability and maintainability engineering*. McGraw-Hill, USA, 1997.
- [34] S.B. Gershwin. An efficient decomposition method for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking. *Operations Research*, 35(2) :291–305, 1987.
- [35] S.B. Gershwin. *Manufacturing systems Engineering*. PTR Prentice-Hall, 1994.
- [36] S.B. Gershwin and J.E. Schor. Efficient algorithms for buffer space allocation. *Annals of Operations research*, 93 :117–144, 2000.
- [37] T.F. Hassett and D.L. Dietrich. Availability/reliability engineering analysis of three, four, and five-stage unreliable series transfer lines. *Journal of Manufacturing Systems*, 14(6) :427–438, 1995.

- [38] M.G. Huang, P.L. Chang, and Y.C. Chou. Buffer allocation in flow-shop-type production systems with general arrival and service patterns. *Computers & Operations Research*, 29(2) :103–121, 2002.
- [39] E. Ignall and A. Silver. The output of a two-stage system with unreliable machines and limited storage. *AIIE Transactions*, 9 :183–188, 1977.
- [40] T. Iyama and S. Ito. The maximum production rate for an unbalanced multi-server flow line system with finite buffer storage. *International Journal of Production Research*, 25 :1157–1170, 1987.
- [41] M.A. Jafari and J.G. Shanthikumar. Determination of optimal buffer storage capacities and optimal allocation in multistage automatic transfer lines. *IIE Transactions*, 21(2) :130–135, 1989.
- [42] E. Koenigsberg. Production lines and internal storage-a review. *Management Science*, 5(4) :410–433, 1959.
- [43] R. Levantesi, A. Matta, and T. Tolio. Performance evaluation of continuous production lines with machines having different processing times and multiple failure modes. *Performance Evaluation*, 51(2-4) :247–268, 2003.
- [44] J. Li. Modeling and analysis of manufacturing systems with parallel lines. *IEEE Transactions on automatic control*, 49(10) :1824–1829, 2004.
- [45] J. Li, D.E. Blumenfeld, N. Huang, and J.M. Alden. comparisons of two-machine line models in throughput analysis. *International Journal of Production Research*, 44(7) :1375–1398, 2006.
- [46] J. Li, D.E. Blumenfeld, N. Huang, and J.M. Alden. Throughput analysis of production systems : recent advances and future topics. *International Journal of Production Research*, 47(14) :3823–3851, 2009.
- [47] J. Li and S.M. Meerkov. Approximate analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers. In *Control and Optimization of Complex Dynamic Systems*, E.K Boukas and R. Malhame (eds), pages 55–82, 2005.
- [48] Z. Liang. *System-theoretic properties of production lines*. Phd-Thesis Electrical Engineering : Systems, 2009.
- [49] J. Liu and A. Wu. Analytical anlysis of production lines with parallel machines. In *30th Chinese Control Conference*, pages 5480–5483, July 2011.
- [50] J. Liu, S. Yang, A. Wu, and S.J. Hu. Multi-state throughput analysis of a two-stage manufacturing system with parallel unreliable machines and a finite buffer. *European Journal of Operational Research*, 219 :296–304, 2012.

- [51] S.J. Macgregor and F. Cruz. The buffer allocation problem for general finite buffer queueing networks. *IIE Transactions*, 37(4) :343–365, 2005.
- [52] M.J. Magazine and K.E. Stecke. Throughput for production lines with serial work stations and parallel service facilities. *Performance Evaluation*, 25 :211–232, 1996.
- [53] Y. Massim, F. Yalaoui, L. Amodeo, E. Chatelet, and A. Zeblah. Efficient combined immune-decomposition algorithm for optimal buffer allocation in production lines for throughput and profit maximization. *Computers & Operations Research*, 37(4) :611–620, 2010.
- [54] N. Nahas, D. Ait-Kadi, and M. Nourelfath. A new approach for buffer allocation in unreliable production lines. *International Journal of Production Economics*, 103(2) :873 – 881, 2006.
- [55] N. Nahas, M. Nourelfath, and D. Ait-Kadi. Selecting machines and buffers in unreliable series-parallel production lines. *International Journal of Production Research*, 47(14) :3741–3774, 2009.
- [56] M. Nourelfath, D. Ait-Kadi, and N. Nahas. Optimal design of series production lines with unreliable machines and finite buffers. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 11(2) :121 – 138, 2005.
- [57] C.T. Papadopoulos, M.J. Vidalis, M.E. J. OKelly, and D. Spinellis. The buffer allocation problem. In *Analysis and Design of Discrete Part Production Lines*, volume 31 of *Springer Optimization and Its Applications*, pages 131–159. Springer New York, 2009.
- [58] H.T. Papadopoulos and C. Heavey. Queueing theory in manufacturing systems analysis and design : A classification of models for production and transfer lines. *European Journal of Operational Research*, 92(1) :1 – 27, 1996.
- [59] H.T. Papadopoulos and M.I. Vidalis. A heuristic algorithm for the buffer allocation in unreliable unbalanced production lines. *Computers & Industrial Engineering*, 41(3) :261–277, 2001.
- [60] A. Patchong and D. Willaeyts. Modeling and analysis of an unreliable flow line composed of parallel-machine stages. *IIE Transactions*, 33 :559–568, 2001.
- [61] B. Rekiek, A. Dolgui, A. Delchambre, and A. Bractu. State of art of optimization methods for assembly line design. *Annual Reviews in control*, 26 :163–174, 2002.
- [62] I. Sabuncuoglu, E. Erel, and Y. Gocgun. Analysis of serial production lines : characterisation study and a new heuristic procedure for optimal buffer allocation. *International Journal of Production Research*, 44(13) :2499–2523, 2006.

- [63] A. Scholl and C. Becker. State-of-art exact and heuristic solution procedures for simple assembly line balancing. *European Journal of Operational Research*, 168(3) :666–693, 2006.
- [64] O. Selvi. *The line balancing algorithm for optimal buffer allocation in production lines*. MS thesis, Bilkent University, Turkey, 2002.
- [65] D. Seong, S. Y. Chang, and Y. Hong. Heuristic algorithms for buffer allocation in a production line with unreliable machines. *International Journal of Production Research*, 33(7) :1989–2005, 1995.
- [66] D. Seong, S. Y. Chang, and Y. Hong. An algorithm for buffer allocation with linear resource constraints in a continuous-flow unreliable production line. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 17 :169–180, 2000.
- [67] C. Shi and S.B. Gershwin. An efficient buffer design algorithm for production line profit maximization. *International Journal of Production Economics*, 122(2) :725 – 740, 2009.
- [68] S. Songgui and J. Changjun. Modeling and analysis of capacitated transfer lines with unreliable machines and deterministic processing times. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 6(1) :53–60, 1997.
- [69] S. Songgui and Z.Q. Yao. The modeling an analysis of the multiple stage repairable cims with finite buffers. In *Prirprints of IFAC/IFORS/IMACS Symposium Large Scale System. Theory and Application*, August 1992.
- [70] K. Sorensen and G.K. Janssens. Buffer allocation and required availability in a transfer line with unreliable machines. *International journal of Production Economics*, 74 :163–173, 2001.
- [71] D.D. Spinellis and C.T. Papadopoulos. A simulated annealing approach for buffer allocation in reliable production lines. *Annals of Operations Research*, 93(1-4) :373–384, 2000.
- [72] S.M.A. Suliman. A mathematical model for a buffered two-stage manufacturing cell with an unreliable transfer device. *International Journal of Production Economics*, 63 :69–81, 2000.
- [73] B. Tan and S.B. Gershwin. Analysis of a general markovian two-stage continuous-flow production system with a finite buffer. *International Journal of Production Economics*, 120 :327–339, 2009.
- [74] C. Terracol and R. David. Performances d’une ligne composée de machines et de stocks intermédiaires. *Automatique-productique informatique industrielle*, 21(3) :239–262, 1987.

- [75] Y. **Ouazene**, H. Chehade, and A. Yalaoui. Approches mono et multi-objective pour la conception d'un système de production à deux machines et un stock-tampon. In *9ème Congrès International de Génie Industriel (CIGI 2011)*, Saint-Sauveur, October 2011.
- [76] Y. **Ouazene**, H. Chehade, and A. Yalaoui. New restricted enumeration method for production line design optimization. In *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, volume 14, pages 1347–1352, 2012.
- [77] Y. **Ouazene**, H. Chehade, A. Yalaoui, and F. Yalaoui. Throughput analysis of a two workstation production line with parallel unreliable machines : new analytical formulation. *European Journal of Operational Research*, 2012.
- [78] Y. **Ouazene**, A. Yalaoui, and H. Chehade. Conception des lignes de production : état de l'art. In *12ème congrès annuel de la société française de la recherche opérationnelle et d'aide à la décision*, Saint-Etienne, April 2011.
- [79] Y. **Ouazene**, A. Yalaoui, and H. Chehade. A new cost-based mathematical model for a two machine one-buffer design problem. In *19th Triennial Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS2011)*, Melbourne, July 2011.
- [80] Y. **Ouazene**, A. Yalaoui, and H. Chehade. Exact analysis of a buffered two unreliable-machine production line : new formulation. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 2012.
- [81] Y. **Ouazene**, A. Yalaoui, and H. Chehade. Throughput analysis of two-machine-one-buffer line model : a comparative study. In C. Kahraman, E.E. Kerre, and F.T. Bozbura, editors, *Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making*, volume 7 of *World Scientific Proceedings Series on Computer Engineering and Information Science*, chapter 207, pages 1281–1286. World Scientific, 2012.
- [82] Y. **Ouazene**, A. Yalaoui, H. Chehade, and F. Yalaoui. A new formulation of buffered two-workstation production line with parallel unreliable machines. In *10th Industrial Simulation Conference*, pages 200–206, Brno, June 2012.
- [83] Y. **Ouazene**, A. Yalaoui, H. Chehade, and F. Yalaoui. New method to analyze production lines with unreliable machines and finite buffers. In *INFORMS Annual Meeting 2012*, Phoenix, October 2012.
- [84] Y. **Ouazene**, A. Yalaoui, H. Chehade, and F. Yalaoui. A buffered three-station merge system : performance analysis and comparative study. In *Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), 2013 IEEE International Conference on*, pages 154–159, Hammamet, May 2013.

- [85] Y. **Ouazene**, A. Yalaoui, H. Chehade, and F. Yalaoui. Equivalent machine method for approximate evaluation of buffered unreliable production lines. In *Proceedings of the 2013 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Production and Logistics Systems, CIPLS 2013 - 2013 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence, SSCI 2013*, pages 33–39, Singapore, April 2013.
- [86] Y. **Ouazene**, A. Yalaoui, H. Chehade, and F. Yalaoui. Evaluation et analyse des performances d'une ligne de production avec machines non fiables. In *14ème congrès annuel de la société française de la recherche opérationnelle et d'aide à la décision*, Troyes, April 2013.
- [87] Y. **Ouazene**, A. Yalaoui, H. Chehade, and F. Yalaoui. Throughput evaluation of buffered unreliable production lines with machines having multiple failure modes. In D. Pacino, S. Voß, and R.M. Jensen, editors, *Computational Logistics*, volume 8197 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 229–241. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [88] Y. **Ouazene**, F. Yalaoui, A. Yalaoui, and H. Chehade. Non-linear programming approach for buffer allocation in unreliable production line. Budapest, 2014.
- [89] T. Tolio, A. Matta, and S.B. Gershwin. Analysis of two-machine lines with multiple failure modes. *IIE Transactions*, 34 :51–62, 2002.
- [90] T. Tolio, A. Matta, and F. Jovane. A method for performance evaluation of automated flow lines. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 47(1) :373 – 376, 1998.
- [91] G.A. Vouros and H.T. Papadopoulos. Buffer allocation in unreliable production lines using a knowledge based system. *Computers & Operations Research*, 25(12) :1055 – 1067, 1998.
- [92] J. Wijngaard. The effect of interstage buffer storage on the output of two unreliable production units in series, with different production rates. *AIIE Transactions*, 11(1) :42–47, 1979.
- [93] H. Yamashitah and S. Suzuki. An approximate solution method for optimal buffer allocation in serial n-stage automatic production lines. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series*, 53(487) :807–814, 1987.
- [94] S. Yeralan and B. Tan. Analysis of multistation production systems with limited buffer capacity part 1 : the subsystem model. *Mathematical and Computer Modelling*, 25(7) :109–122, 1997.

Yassine OUAZENE

Doctorat : Optimisation et Sûreté des Systèmes

Année 2013

Maîtrise des systèmes industriels : optimisation de la conception des lignes de production

Lors de la phase de conception d'un système de production, toutes les alternatives fonctionnelles et technologiques doivent être étudiées afin de proposer la ou les meilleures solutions possibles. Ceci se traduit souvent par une conjugaison de plusieurs sous-problèmes tels que: la sélection de pièces d'équipements à partir d'un ensemble de solutions candidates pour chaque opération de fabrication; l'équilibrage et le dimensionnement des postes de travail; le dimensionnement des zones de stockage; le dimensionnement des systèmes de transport et l'aménagement des emplacements.

Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à l'évaluation des performances ainsi qu'à l'optimisation de la conception d'un système de production très répandus dans l'industrie manufacturière à gros volume à savoir les lignes de production en série.

Nous avons proposé une nouvelle méthode analytique d'évaluation de performances dite « Méthodes par Machines Equivalentes ». Cette méthode présente les avantages d'être plus précise et plus rapide que les approches existantes dans la littérature.

Nous avons aussi montré la pertinence de cette méthode pour l'évaluation du taux de production des systèmes en configuration séries-parallèles ainsi que les lignes avec des machines ayant plusieurs modes de défaillance.

Nous avons aussi développé un nouvel algorithme de programmation non linéaire afin d'optimiser le dimensionnement des stocks intermédiaires.

Mots clés : systèmes de production - systèmes, analyse de - processus de naissance et de mort (processus stochastiques) - prise de décision, modèles mathématiques - programmation non linéaire.

Mathematical Modeling, Analysis and Optimization of Production Lines Design

During the design phase of a production system, all functional and technological alternatives should be explored in order to propose the best possible solutions. This often results in a combination of several sub-problems such as: selection of pieces of equipments from a set of candidate solutions for each manufacturing operation, dimensioning and allocation of buffers and storage areas, balancing workload among the different workstations, the specification of the type and capacity of the material handling system and the layout of equipments which consists of determining which workstations should be adjacent to each other and how they should be connected.

In this context, we were interested in performance evaluation and optimization of serial production lines which are very common in high volume production systems.

We have proposed a new analytical method, known as « Equivalent Machines Method» to evaluate the production line throughput. This method has the advantages to be more accurate and faster than the existing approaches in the literature.

We have also established the relevance of this method for evaluating the production rate of series-parallel systems and other serial lines with machines having multiple failure modes.

We have also developed a new algorithm based on nonlinear programming approach to solve the buffer allocation problem.

Keywords: production systems - system analysis - birth and death processes (stochastic processes) - decision making, mathematical models – nonlinear programming.

Thèse réalisée en partenariat entre :

