



HAL
open science

Modélisation et optimisation d'un système de récupération de l'énergie des vagues électro-actif déformable

Benjamin Gendron

► **To cite this version:**

Benjamin Gendron. Modélisation et optimisation d'un système de récupération de l'énergie des vagues électro-actif déformable. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. École centrale de Nantes, 2017. Français. NNT : 2017ECDN0024 . tel-02981611

HAL Id: tel-02981611

<https://theses.hal.science/tel-02981611>

Submitted on 28 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Benjamin GENDRON

*Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de Docteur de l'École Centrale de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences pour l'Ingénieur, Géosciences et Architecture

Discipline : Mécanique des milieux fluides

Unité de recherche : Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Énergétique et Environnement Atmosphérique

Soutenue le 29 Septembre 2017

Modélisation et optimisation d'un système de récupération de l'énergie des vagues électro-actif déformable

JURY

Président : **Rivoalen Elie**, Professeur des universités, INSA Rouen

Rapporteurs : **Thomas Olivier**, Professeur des universités, ENSAM Lille, LSIS
Scolan Yves-Marie, Professeur des universités, ENSTA Bretagne, IRDL

Examineurs : **Tona Paolino**, Ingénieur recherche - docteur, IFPEN
Verron Erwan, Professeur des universités, ECN, GEM

Invité : **Jean Philippe**, Ingénieur recherche, SBM Offshore

Directeur de thèse : **Ferrant Pierre**, Professeur des universités, ECN, LHEEA

Co-encadrant de thèse : **Babarit Aurélien**, Ingénieur recherche - HDR, ECN, LHEEA

"Réfléchissez au mouvement des vagues,
au flux et reflux, au va-et-vient des marées.

Qu'est-ce que l'océan ? Une énorme force perdue.
Comme la terre est bête ! Ne pas employer l'océan !"

Victor Hugo, 1874

Remerciements

Cette thèse aura été possible grâce à l'ADEME et l'entreprise SBM Offshore que je remercie pour avoir accepté de financer ce travail de recherche.

Cette aventure a débuté il y a maintenant quatre ans, et je souhaite remercier mon directeur de thèse Pierre Ferrant et mon encadrant Aurélien Babarit pour m'avoir offert l'opportunité de travailler sur ce sujet passionnant et pour l'indépendance qu'ils m'ont accordée.

Ce travail de thèse aura été une expérience enrichissante sur le plan technique et surtout sur le plan personnel. Il n'est pas évident de garder en vue les objectifs de recherche lorsque le doute est omni-présent à chaque pas et surtout de garder une confiance solide dans ses propres avancées, un peu comme un alpiniste en plein brouillard. Malgré ces difficultés, le travail de thèse est une période riche en créativité, qui permet de s'épanouir lorsqu'on découvre la physique se mettre en mouvement dans une simulation, après de longues périodes de développements et voir que tout s'assemble comme espéré, tout comme cet alpiniste qui découvre le panorama une fois au sommet, merci ! Mais tous ces moments passés n'auraient pas été possible sans l'aide de plusieurs personnes.

Je souhaite remercier mon ancien maître de stage, Philippe Jean pour m'avoir fait découvrir ce projet hors du commun et m'avoir fait confiance pour entreprendre cette thèse. Son optimisme et toutes ses idées m'ont beaucoup apporté.

Merci à mes rapporteurs Olivier Thomas, rencontré lors d'un colloque et Yves-Marie Scolan pour s'être intéressé au sujet et avoir pris le temps de corriger le manuscrit.

Je souhaite également remercier Erwan Verron, pour être membre du jury, et qui a pris le temps de m'expliquer les fondamentaux de la théorie hyper-élastique et sans qui je ne serais pas allé aussi loin dans le développement des équations.

Et merci aux autres membres du jury, Elie Rivoalen et Paolino Tona.

Merci à Anne, Sonia et Élodie pour toutes les démarches administratives et gérer les ordres de missions pour partir dans ces fameux coins pour colloques.

Je souhaite remercier en particulier Adrien pour sa patience et m'avoir aidé à découvrir Linux avec mes essais ratés d'installation de paquets ainsi qu'à Guillaume pour ses explications techniques sur la gestion des ressources en programmation.

Un grand merci à Anne, Stéphane, Félicien, Matthieu, Sylvain B. et Sylvain H. pour m'avoir fait découvrir les bassins et l'environnement des essais, les coups de pouce lors de ma campagne et des bons moments partagés lors des pauses déjeuners.

Merci à tous ceux du LHEEA, François, Lionel, Yves, Thomas, Virginie, Jean-Christophe, Antoine, Alain, Simon, Brendan, Izan, Christian et les doctorants, nouveaux et anciens, Boris, Romain, Lucas, Camille, Maïté, Vincent et Vincent, Charles, Louis, Marie et Marie, Hélène, Francesc, Corentin pour avoir passé des moments agréables au sein du laboratoire et des nombreuses pauses cafés.

Merci à Baptiste pour ces longues journées à partager le bureau ainsi que ces conversations passionnantes sur le fonctionnement de la société et avoir partagé tes expériences de musique. Merci à Paul-Émile pour ces sessions à décortiquer Nemoh et comment monter une entreprise et faire fortune !

Aussi un grand merci à Xavier, Céline et Chloée pour leur soutien et de bonnes soirées loin du laboratoire.

Et finalement, je remercie du fond du coeur Aurélie pour m'avoir soutenu tous les jours de la thèse, les moments difficiles et me sortir de ces travaux de recherche et me faire profiter de la vie qui continue d'avancer en dehors de ces équations ! Sans toi je ne serais probablement pas parvenu à terminer.



Table des matières

Notations et Symboles	xi
1 Introduction générale	1
1.1 Contexte et acteurs	2
1.1.1 l'ADEME	2
1.1.2 SBM Offshore	3
1.1.3 Objectifs	4
1.2 Les énergies marines renouvelables	5
1.2.1 Les systèmes houlomoteurs	6
1.3 Le système houlomoteur de SBM	10
1.3.1 Fonctionnement du système houlomoteur	10
1.3.2 Campagnes d'essais	12
1.4 État de l'art	13
1.4.1 Modèles vibro-acoustiques	13
1.4.2 Modèles hyper-élastiques	16
1.4.3 Systèmes flexibles en environnement marin	17
1.5 Déroulement de la thèse	18
2 Théorie d'un tube hyper-élastique en présence de houle	21
2.1 Introduction	21
2.2 Dynamique du fluide interne	24
2.2.1 Analyse dimensionnelle	24
2.2.2 Écoulement potentiel	25
2.2.3 Interface fluide-structure	26
2.2.4 Conclusions	26
2.3 Dynamique du fluide externe	27
2.3.1 Houle incidente	28
2.3.2 Houle perturbée	29
2.3.3 Conclusions	30
2.4 Définition des repères	32

2.4.1	Configuration de référence	32
2.4.2	Configuration à l'équilibre statique	33
2.4.3	Configuration à l'état déformé	33
2.5	Contraintes de paroi	35
2.5.1	Effets visco-élastiques	36
2.5.2	Effets non-linéaires	37
2.5.3	Composante isotropique	39
2.5.4	Composante anisotropique	39
2.5.5	Conclusions	41
2.6	Dynamique de la paroi du tube	42
2.6.1	Composante hydrostatique	45
2.6.2	Équilibre statique	46
2.6.3	Profondeur d'immersion	52
2.6.4	Conclusions	54
2.7	Conclusions du chapitre	56
2.7.1	Fluide interne	56
2.7.2	Dynamique du fluide externe	56
2.7.3	Repères	57
2.7.4	Modèle de structure	57
2.7.5	Dynamique du système houlomoteur	58
3	Élaboration d'un modèle numérique	61
3.1	Linéarisation des équations	62
3.1.1	Gradients de déformations	63
3.1.2	Contraintes linéaires de Piola-Kirchhoff	64
3.1.3	Amortissement fréquentiel	69
3.1.4	Écoulement potentiel interne	72
3.1.5	Conclusions	76
3.2	Développement de la base modale	79
3.2.1	Équation de propagation	79
3.2.2	Conditions aux limites	81
3.2.3	Calcul des modes	87
3.2.4	Base Modale	89
3.2.5	Définition du produit scalaire	95
3.2.6	Conclusions	96
3.3	Assemblage du modèle numérique	100
3.3.1	Modèle linéaire	100
3.3.2	Modèle non-linéaire	102

3.3.3	Conclusions	106
3.4	Conclusions du chapitre	108
3.4.1	Linéarisation des équations	108
3.4.2	Développement de la base modale	109
3.4.3	Assemblage du modèle numérique	112
4	Description du modèle numérique	113
4.1	Introduction	113
4.2	Constitution de la base modale	114
4.2.1	Résolution de l'équilibre statique et calcul des coefficients linéaires	114
4.2.2	Détermination des modes	116
4.3	Modèle hydrodynamique	120
4.3.1	Sphère pulsante immergée	123
4.3.2	Analyse des forces de diffraction d'un tube immergé	125
4.4	Modèle linéaire	130
4.5	Modèle non-linéaire	132
4.6	Conclusions du chapitre	137
5	Essais et Validation	139
5.1	Introduction	139
5.2	Étude de la diffraction d'un tube rigide immergé	141
5.2.1	Montage expérimental	141
5.2.2	Méthodologie	144
5.2.3	Analyse des résultats	146
5.2.4	Conclusions	155
5.3	Étude des déformations d'un tube flexible	156
5.3.1	Description de la campagne	156
5.3.2	Paramètres physiques du prototype	157
5.3.3	Modes de déformation	158
5.3.4	Comparaisons avec le modèle numérique	160
5.3.5	Conclusions	167
5.4	Conclusions	168
5.4.1	Étude de diffraction d'un tube immergé	168
5.4.2	Étude des déformations d'un tube flexible	168
6	Conclusions et Perspectives	171
6.1	Conclusions générales	171
6.2	Futurs développements	173

Notations et Symboles

$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes de Cauchy (Pa)
η	Élévation de surface libre (m)
λ_f	Élongation des fibres
λ_i	déformations principales
λ_{θ_s}	Élongation circonférentielle statique
λ_{fs}	Élongation statique des fibres
λ_{xs}	Élongation axiale statique
$[\mathbf{B}_H]$	Matrice d'amortissement hydrodynamique ($N.s/m$)
$[\mathbf{K}_H]$	Matrice de raideur hydrostatique (N/m)
$[\mathbf{K}]$	Matrice de raideur (N/m)
$[\mathbf{M}_\infty]$	Matrice de masse à l'infini (kg)
$[\mathbf{M}_A]$	Matrice de masse ajoutée (kg)
$[\mathbf{M}]$	Matrice de masse (kg)
\mathbf{B}_1	Amortissement linéaire lié aux contraintes de Piola-Kirchhoff ($Pa.s$)
\mathbf{C}	Tenseur droit de Cauchy-Green
\mathbf{F}	Tenseur gradient des déformations
\mathbf{F}_1	Tenseur gradient des déformations linéaires
\mathbf{F}_s	Tenseur gradient des déformations statiques
\mathbf{P}_1	Contraintes linéaires de Piola-Kirchhoff (Pa)
\mathbf{P}_s	Contraintes statiques de Piola-Kirchhoff (Pa)
\mathbf{P}	Contraintes de Piola-Kirchhoff (Pa)
\mathbf{P}^D	Contraintes déviatoriques de Piola-Kirchhoff (Pa)

Ψ_{fibres}	Énergie potentielle anisotrope (J/m^3)
Ψ_{Yeoh}	Énergie potentielle hyperélastique isotrope (J/m^3)
ρ_f	Masse volumique du fluide (kg/m^3)
ρ_t	Masse volumique de la paroi du tube (kg/m^3)
θ	Coordonnée angulaire (rad)
\mathbf{R}	Vecteur de position au repos en coordonnées cylindriques
\mathbf{X}	Vecteur de position au repos en coordonnées cartésiennes
C_{i0}	Coefficients de raideur de Yeoh (Pa)
F_m	Force de prétention des ancrages (N)
g	Accélération gravitationnelle (m/s^2)
H	épaisseur de la paroi du tube à l'état initial (m)
H_s	épaisseur de la paroi du tube à l'équilibre statique (m)
I_i	Invariants des tenseurs de Cauchy-Green
J	Déterminant du tenseur gradient des déformations
k	Nombre d'onde axiale ($1/m$)
K_{Mx}	Raideur des ancrages dans la direction axiale (N/m)
K_{Mz}	Raideur des ancrages dans la direction verticale (N/m)
L	Longueur du tube au repos (m)
m	indice de sommation sur les nombres d'onde axiale
M_{th}	Masse des têtes de tube (kg)
n	indice de sommation sur les nombres d'onde circonférentielle
p	Pression hydrostatique du matériau (Pa)
P_0	Pression de gonflage (Pa)
P_{id}	Pression interne dynamique (Pa)
P_{se}	Pression statique externe (Pa)
P_{si}	Pression statique interne (Pa)
R	Coordonnée radiale (m)
R_0	Rayon du tube au repos (m)

R_s	Rayon du tube à l'équilibre statique (m)
R_{s0}	Fibre neutre du rayon du tube à l'équilibre statique (m)
u	Déplacement axial de la paroi du tube (m)
v	Déplacement tangentiel de la paroi du tube (m)
w	Déplacement radial de la paroi du tube (m)
X	Coordonnée axiale (m)
X_s	Coordonnée axiale à l'équilibre statique (m)
Y	Coordonnée latérale (m)
Z	Coordonnée verticale (m)

Table des figures

1.1	Vers une offre énergétique diversifiée et durable. [3]	3
1.2	SBM Offshore - FPSO	4
1.3	Potentiel houlomoteur en kW/m en Europe du nord	7
1.4	Schémas explicatifs de corps oscillants. Images provenant de l'annuaire EMR [12]	8
1.5	Schémas explicatifs de colonne d'eau oscillante. Images provenant de l'annuaire EMR [12]	9
1.6	Schémas explicatifs de systèmes à déferlement. Images provenant de l'annuaire EMR [12]	9
1.7	Aperçu du système houlomoteur de SBM lors de la campagne d'essai à l'École Centrale de Nantes en 2011.	10
1.8	Configuration déformée d'une membrane cylindrique sous l'action d'un fluide interne en mouvement	11
2.1	Représentation des milieux interagissant dans le système houlomoteur	22
2.2	Schéma de l'équilibre des forces et des conditions cinématiques au niveau de la paroi	23
2.3	Repères dans la base de référence et statique en coordonnées cartésiennes et cylindriques	32
2.4	Représentation du comportement d'un matériau élastique et hyper-élastique	35
2.5	Variables à l'état initial et à l'équilibre statique	47
2.6	Équilibre des forces dans la direction axiale	50
2.7	Variation de l'angle α en fonction de la profondeur d'immersion	53
3.1	Exemple de déformations associées aux différents nombres d'onde circulaire $n = 0, 1, 2$ et pour un nombre d'onde axiale $k = \pi/L$	62
3.2	Exemple de déformations associées aux différents nombres d'onde circulaire $n = 0, 1, 2$ et pour un nombre d'onde axiale $k = 2\pi/L$	63
3.3	Linéarisation de la contrainte radiale autour de l'équilibre statique	72

3.4	Erreur relative entre le potentiel de vitesse interne et la formulation approchée pour différentes valeurs de $ik_{nm}R$ et $n = 0, 1, 2$	75
3.5	Équilibre des forces de pression et de tension axiale aux extrémités du tube	82
4.1	Exemple de fichier d'entrée avec les différents paramètres du tube	115
4.2	Exemple de fichier d'entrée avec les cas de simulation	115
4.3	Maillage utilisé pour le calcul des efforts hydrodynamiques avec des mailles de $dx = 0.08m$ de côté et représentation de la surface libre. . . .	117
4.4	Maillage utilisé pour le calcul des contraintes de Piola-Kirchhoff avec des mailles de $dx = 0.08m$ de côté.	117
4.5	Exemple de nombres d'onde solutions de l'équation de propagation pour différentes valeurs de n	118
4.6	Exemple de déterminant des conditions aux limites pour différentes valeurs de n	119
4.7	Représentation du quart de maillage nécessaire pour le calcul des efforts hydrodynamiques d'une sphère immergée	124
4.8	Masse ajoutée et amortissement adimensionnalisés pour les directions verticale (zz), radiale (rr) et couplés (zr) en fonction du nombre d'onde adimensionnalisé KR . Le ratio entre le rayon de la sphere et la profondeur est $R/h = 0.1$ et le centre de la sphère est immergé à $l/R = 1.5$	124
4.9	Étude de convergence en maillage de l'amortissement et la masse ajoutée radiale d'une sphère pulsante. Le ratio entre le rayon de la sphere et la profondeur est $R/h = 0.1$ et le centre de la sphère est immergé à $l/R = 1.5$	125
4.10	Étude de convergence en maillage pour les différents modes de déformation d'un tube déformable de $10m$ de long et immergé à $1.75R$	126
4.11	Étude de convergence en maillage pour les différents modes de déformation d'un tube déformable de $10m$ de long et immergé à $1.50R$	126
4.12	Étude de convergence en maillage pour les différents modes de déformation d'un tube déformable de $10m$ de long et immergé à $1.375R$	127
4.13	Étude de convergence en maillage pour les différents modes de déformation d'un tube déformable de $10m$ de long et immergé à $1.25R$	127
4.14	Analyses des forces de diffraction pour différents modes de déformation radiale et plusieurs immersions	128
4.15	Analyses des forces de diffraction pour différents modes de déformation axiale et plusieurs immersions	129
4.16	Déformations radiales du tube pour une houle de période $T = 3s$ et d'amplitude $a = 10cm$	135

4.17	Simulation d'un tube de 10m dans une houle régulière de période $T = 2s$ et d'amplitude $a = 10cm$	136
5.1	Photos de la maquette avec les bagues de polymères électro-actif	139
5.2	Photo de la maquette avant immersion	141
5.3	Représentation de la maquette et des sondes à houle lors des essais avec un tube fixe	142
5.4	Disposition des sondes à houle	143
5.5	Signal temporel enregistré par les sondes à houle pour une houle de période $T = 1s$ et de 3% de cambrure	145
5.6	Signal fréquentiel enregistré par les sondes à houle après transformation de Fourier pour une houle de période $T = 1s$ et de 3% de cambrure	146
5.7	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm	147
5.8	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.8s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm	147
5.9	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.0s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm	148
5.10	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.2s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm	148
5.11	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.4s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm	148
5.12	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm	149
5.13	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.0s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm en utilisant la méthode des sources mixtes	149
5.14	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm	150

5.15	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.8s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm	150
5.16	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.0s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm	151
5.17	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.2s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm	151
5.18	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.4s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm	151
5.19	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm	152
5.20	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre	152
5.21	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.8s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre	153
5.22	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.0s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre	153
5.23	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.2s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre	153
5.24	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.4s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre	154
5.25	Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre	154
5.26	Schéma d'assemblage du système houlomoteur	157
5.27	Schéma du tube et des ancrages avec la position des sondes à houle	158
5.28	Comparaison des fonctions de transfert du tube de 10m par sections avec le modèle linéaire et non-linéaire	161

5.29	Fonctions de transfert du tube de 10m obtenues à partir des essais en bassin et du modèle non-linéaire	162
5.30	Fonctions de transfert du tube de 10m obtenues à partir des essais en bassin et du modèle linéaire	162
5.31	Fonctions de transfert du tube de 10m obtenues à partir des essais en bassin et du modèle non-linéaire sans les modes de déformation verticaux	163
5.32	Comparaison des fonctions de transfert du tube de 10m par sections avec le modèle linéaire et non-linéaire sans les déformations verticales	164
5.33	Comparaison des fonctions de transfert du tube de 10m par sections avec le modèle non-linéaire et différents phénomènes physiques	166
6.1	Essais de vibrations en mouvements forcés.	173

Liste des tableaux

- 1.1 Principales caractéristiques des énergies renouvelables marines [2] . . . 6
- 4.1 Paramètres d'hyper-élasticité de Yeoh 117
- 5.1 Étendue des paramètres analysés dans le bassin pour l'étude d'un tube fixe 142
- 5.2 Paramètres d'hyper-élasticité de Yeoh 157
- 5.3 Paramètres des modes de déformation pour n=0 159
- 5.4 Paramètres des modes de déformation pour n=1 159

Chapitre 1

Introduction générale

Depuis plusieurs décennies de nombreux progrès ont été faits dans la mise en place de différents systèmes d'énergies renouvelables afin de répondre à une demande en énergie de plus en plus importante ainsi qu'aux problématiques de changement climatique dues aux énergies fossiles.

L'énergie éolienne, fonctionnant avec la force du vent, est progressivement apparue dans le paysage rural, puis côtier, zones où le vent est le plus stable car présentant moins d'obstacles. Il en est de même pour l'énergie solaire, sous forme photo-voltaïque ou thermique. Plus discret que l'énergie éolienne, les panneaux solaires sont de plus en plus nombreux sur les toits de bâtiments industriels ou de maisons particulières et permettent d'absorber le rayonnement continu du soleil.

Les énergies marines ont incité le même engouement que ces autres énergies renouvelables mais l'environnement marin est difficile à maîtriser. La salinité de l'eau, pouvant rapidement détériorer les matériaux et la force des vagues en période de tempête, rendent compliquées et chères la mise en place et l'entretien des systèmes. Ainsi, les hydroliennes, systèmes houlomoteurs (convertisseur de l'énergie mécanique des vagues en énergie utile) ou autres énergies marines renouvelables sont toujours en phase de développement.

Ce travail de thèse rentre dans cette ligne de progrès et porte sur l'analyse physique d'un système houlomoteur constitué de matériaux élastiques pouvant se déformer, ce qui permet de considérablement réduire son coût d'entretien. L'objectif de cette thèse est de développer un modèle mathématique permettant de prédire son comportement dans tout type d'environnement marin. À partir d'expériences sur modèles réduits, il a été possible d'analyser le comportement de la structure et de construire un modèle numérique qui prenne en compte les différents phénomènes physiques agissant sur

le système houlomoteur. L'innovation de cette thèse est d'être parvenue à associer la théorie hyper-élastique avec la théorie potentielle linéaire pour étudier les déformations d'une structure cylindrique flexible en prenant en compte les trois dimensions.

1.1 Contexte et acteurs

Certains états comme la France ont réagi aux problématiques de changement climatique et de diminution des ressources naturelles en mettant en place des politiques de transition énergétique afin de progressivement remplacer les énergies fossiles et le nucléaire. Grâce aux nouvelles politiques imposées comme l'objectif d'atteindre une production électrique de 23% d'ici 2020, le marché des énergies renouvelables a gagné en ampleur depuis des années. D'abord, le solaire puis l'éolien et depuis peu de temps les énergies marine gagnent en intérêt.

Par rapport aux centrales énergétiques traditionnelles ayant besoin d'une ressource finie, les énergies renouvelables ont l'avantage de fonctionner grâce à une source qui se renouvelle rapidement. Cependant, la densité de la ressource est beaucoup moins élevée. C'est pourquoi de grandes surfaces sont nécessaires pour avoir une exploitation capable d'alimenter l'équivalent de plusieurs foyers. Aussi, il est plus avantageux de varier les sources pour s'assurer une production électrique en continu. Cependant, parvenir à gérer la demande et la production électrique à partir de multiples ressources demande encore beaucoup de recherches.

1.1.1 l'ADEME

Ces différentes thématiques font partie des axes de recherche de l'Agence de Développement et de la Maîtrise de l'Énergie (ADEME), un des principaux acteurs dans ce travail de thèse. Cet organisme national (établissement public à caractère industriel et commercial) a été créé en 1991 suite à la fusion de plusieurs agences préexistantes. Les domaines d'intervention de l'ADEME sont :

- La gestion des déchets
- La préservation des sols et friches
- L'énergie et le climat
- La lutte contre les nuisances sonores
- La production et consommation durable

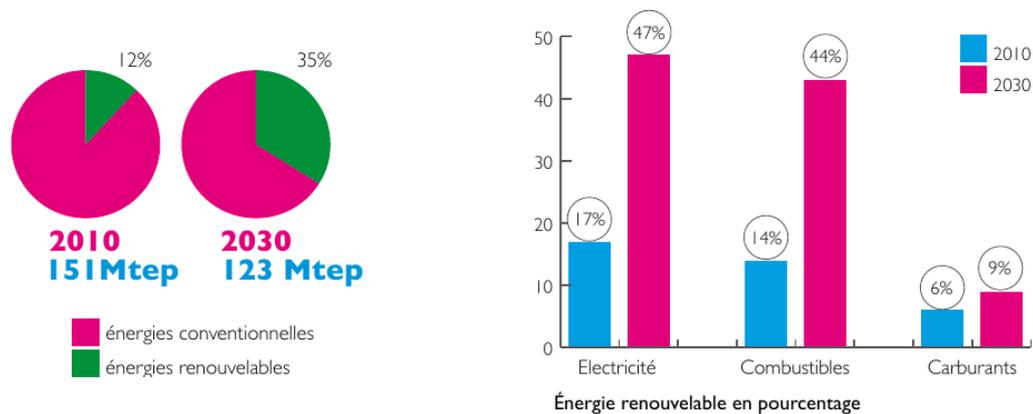


FIGURE 1.1 – Vers une offre énergétique diversifiée et durable. [3]

Depuis 2012, l'ADEME est impliquée dans la lutte contre le changement climatique et travaille sur des stratégies d'adaptation pour réduire l'impact énergétique de la France d'ici les années 2030-2050 [3]. Actuellement les sources d'énergie sont près de 90% d'origine non-renouvelable. Les investissements dans les énergies renouvelables sont donc nécessaires afin d'arriver à une situation où elles contribueront à hauteur de 35% dans le mix énergétique. D'après leurs travaux, cette évolution est possible en mettant en application des technologies et évolutions organisationnelles qui sont déjà existantes.

1.1.2 SBM Offshore

Certaines grandes entreprises en ingénierie profitent de cet élan pour diversifier leur production tout en gardant un savoir-faire précis. C'est le cas de la compagnie SBM-Offshore, entreprise d'ingénierie offshore néerlandaise spécialisée dans la construction para-pétrolière. Leur marché principal est la conception et l'installation de plateformes flottantes pour la production et le stockage de pétrole (FPSO). L'origine de leur succès a été de parvenir à développer un système d'ancrage pour l'acheminement du pétrole et qui permet au navire des rotations complètes au grès des courants sans aucun risque de rupture.

Forte de son savoir-faire dans l'ingénierie offshore dont l'utilisation de flexibles et conception d'ancrages, la société SBM Offshore a entrepris depuis 2009 le développement d'un système houlomoteur radicalement innovant : un système déformable dont la structure est également le convertisseur d'énergie grâce à la mise en oeuvre de matériaux électro-actifs.



FIGURE 1.2 – SBM Offshore - FPSO

Le potentiel de ce système fut démontré lors d'une campagne d'essais en 2010. Il a alors été décidé de poursuivre les recherches en partenariat avec l'ADEME et le laboratoire d'hydrodynamique (LHEEA) de l'Ecole Centrale de Nantes. Ce laboratoire travaille sur les différentes thématiques d'hydrodynamisme et d'architecture navale depuis de nombreuses années et dispose de moyens d'essais importants permettant de tester des maquettes à échelle réduite avant de passer à l'échelle réelle en environnement marin.

1.1.3 Objectifs

Un premier modèle numérique a été développé dans le cadre d'une étude préliminaire réalisée par Philippe Jean [21] pour parvenir à prédire le comportement du système mais les comparaisons entre les prédictions du modèle numérique et des résultats expérimentaux ont mis en évidence des différences significatives. Ces différences peuvent être attribuées à plusieurs phénomènes physiques qui n'étaient pas pris en compte.

L'objectif principal de cette thèse est d'analyser ces différents phénomènes et de développer un modèle numérique permettant de combler ces lacunes, en garantissant une bonne qualité de résultats tout en assurant des temps de simulation acceptables. Il a ainsi été décidé d'utiliser un modèle de diffraction-radiation linéaire fonctionnant

avec les différents degrés de liberté du corps flottant pour calculer les effets hydrodynamiques. Le modèle de structure développé sera donc construit sur une base modale des déformations du système pour coupler les milieux solides et fluides. La modélisation de la paroi sera réalisée à l'aide de la théorie hyper-élastique. Le matériau étant élastique et ne réagissant pas de manière identique en fonction des déformations, la théorie linéaire ne peut pas être suffisante. La théorie hyper-élastique et la théorie potentielle linéaire seront assemblées sous forme d'une base modale dans ce modèle qui permettra par la suite de dimensionner le système houlomoteur pour différents environnements marins en assurant des prédictions fiables et rapides.

Le modèle numérique sera décomposé en deux parties. D'une part une version simplifiée permettant de réaliser des calculs préliminaires rapides. Cette version sera réalisée à l'aide d'une approche fréquentielle. L'autre version, comprendra l'ensemble des phénomènes physiques agissant sur la structure et permettra une analyse plus détaillée du système. Cette version sera dépendante de la première partie et fonctionnera avec une approche temporelle.

1.2 Les énergies marines renouvelables

Avant d'expliquer le principe de fonctionnement du système houlomoteur, un descriptif de l'état actuel des énergies marines est réalisé pour présenter les avantages d'un tel système.

Les énergies marines renouvelables peuvent être classées dans quatre catégories :

- les usines marémotrices et hydroliennes
- les systèmes houlomoteurs
- l'énergie osmotique
- l'énergie thermique des mers

L'éolien flottant est considéré comme étant une variante de l'énergie éolienne et ne fait donc pas partie de cette catégorie.

L'énergie des océans peut être récupérée de différentes manières qui font appel à la composition de l'eau (énergie osmotique et thermique) ou à l'énergie cinétique du fluide (énergie hydrolienne et houlomotrice). L'un des points forts des énergies marines par rapport aux énergies renouvelables classiques est une meilleure prévisibilité.

À ce jour, les énergies marines ne représentent que 0.01% de l'électricité produite à partir d'énergies renouvelables dans le monde [13]. La France dispose d'une surface maritime sous sa juridiction de onze millions de kilomètres carrés notamment par sa Zone Économique Exclusive en outre-mer qui représente un potentiel de valorisation énergétique parmi les plus importants au niveau mondial [3]. Le tableau 1.1 présente les différents potentiels de ces technologies dans le monde et en France.

Mis à part l'énergie marémotrice, aucune technologie n'a été déployée de manière industrielle lors des dernières décennies. Les contraintes environnementales sont beaucoup plus importantes que les énergies renouvelables traditionnelles, ce qui pose de nombreux problèmes pour leurs développements. Leurs stades de maturité sont assez variés. Le développement des autres formes d'énergies marines a accéléré ces dernières années et il est possible que certaines atteignent la maturité nécessaire pour être commercialisées dans les années 2020. Depuis 2010, des systèmes houlomoteurs sont en phase de démonstration tels que le Pelamis, l'Oyster d'Aquamarine ou l'Oceanus de Seatricity au centre d'énergie marine européen (EMEC) et les hydroliennes sont sur le point d'être commercialisées comme celle de DCNS et OpenHydro.

	Ressource mondiale (TWh/an)	Ressource nationale (TWh/an)	Nombres d'heures de fonctionnement à pleine puissance (h)
Hydrolien	1200	5 à 14	3000 - 4000
Houlomoteur	29500	40	2500 - 4500
Énergie thermique	44000	20000	8000

TABLE 1.1 – Principales caractéristiques des énergies renouvelables marines [2]

1.2.1 Les systèmes houlomoteurs

L'énergie houlomotrice est une forme concentrée de l'énergie éolienne. Les vagues se forment sous l'action du vent et transportent son énergie sur de grandes distances. Lorsqu'elles arrivent sur un obstacle flottant ou côtier, elles cèdent une partie de cette énergie qui peut être transformée en courant électrique. Il existe de nombreux dispositifs permettant de convertir l'énergie cinétique des vagues en électricité mais le principe de fonctionnement est le même pour tous ; un élément du système est entraîné par la houle (par rotation ou translation) puis ce mouvement est converti en électricité à l'aide d'un dispositif de conversion. L'acronyme anglais "PTO" (Power Take Off) est employé pour faire référence aux systèmes de conversion d'énergie mécanique en

électricité. Les ressources énergétiques houlomotrices sont importantes en Europe du Nord, en particulier sur la façade Atlantique comme indiqué sur la figure 1.3.

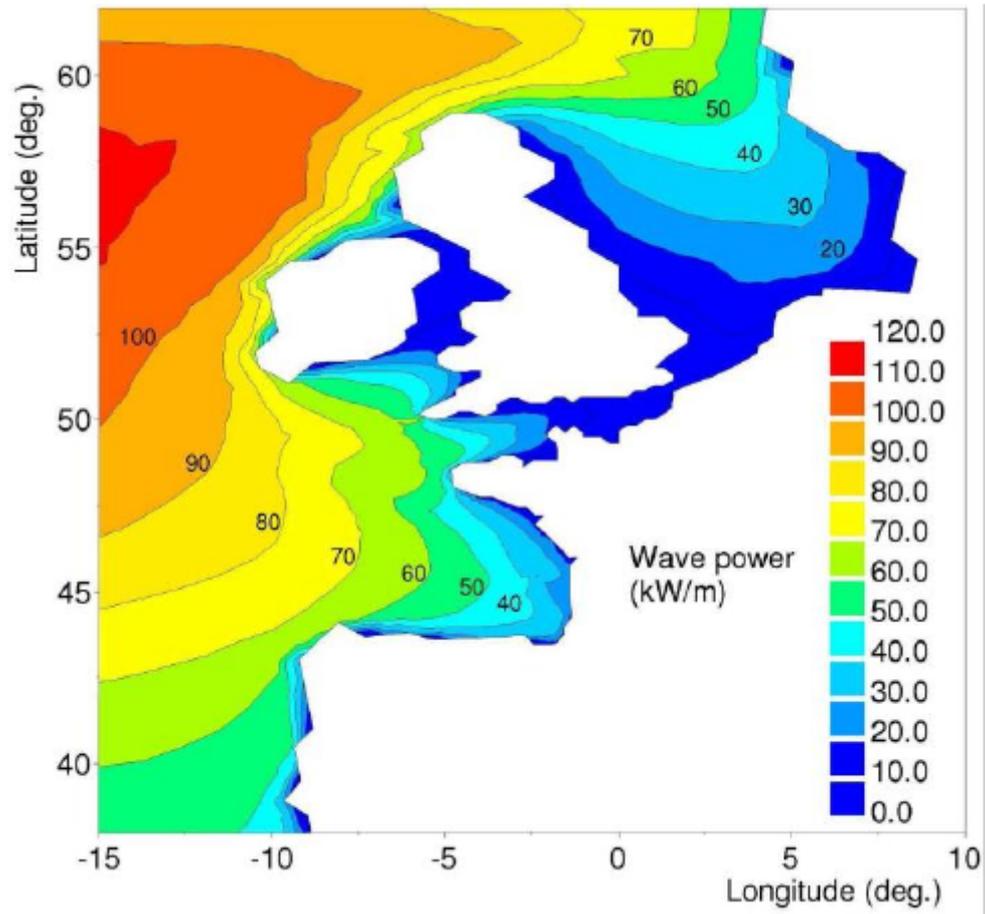


FIGURE 1.3 – Potentiel houlomoteur en kW/m en Europe du nord

Les systèmes houlomoteurs ont été regroupés dans différentes familles. La classification par technologie de Antonio Falcao [14] a été choisie :

Corps Oscillants

Les corps oscillants constituent la plus grande famille de systèmes houlomoteurs, ils peuvent être flottants ou submergés. Ils exploitent la houle incidente afin de générer un mouvement oscillatoire entre les différents éléments de leur structure. Le déplacement résultant entre composants (mouvement relatif en translation ou rotation) entraîne soit un fluide sous pression à travers un moteur hydraulique ou soit un générateur direct. Des exemples connus incluent le Pelamis dont plusieurs prototypes ont pu être testés au large du Portugal, le système Oyster de l'entreprise Aquamarine et Wavebob fonctionnant par un mouvement de tangage pour le deuxième et par pilonnement pour le troisième.

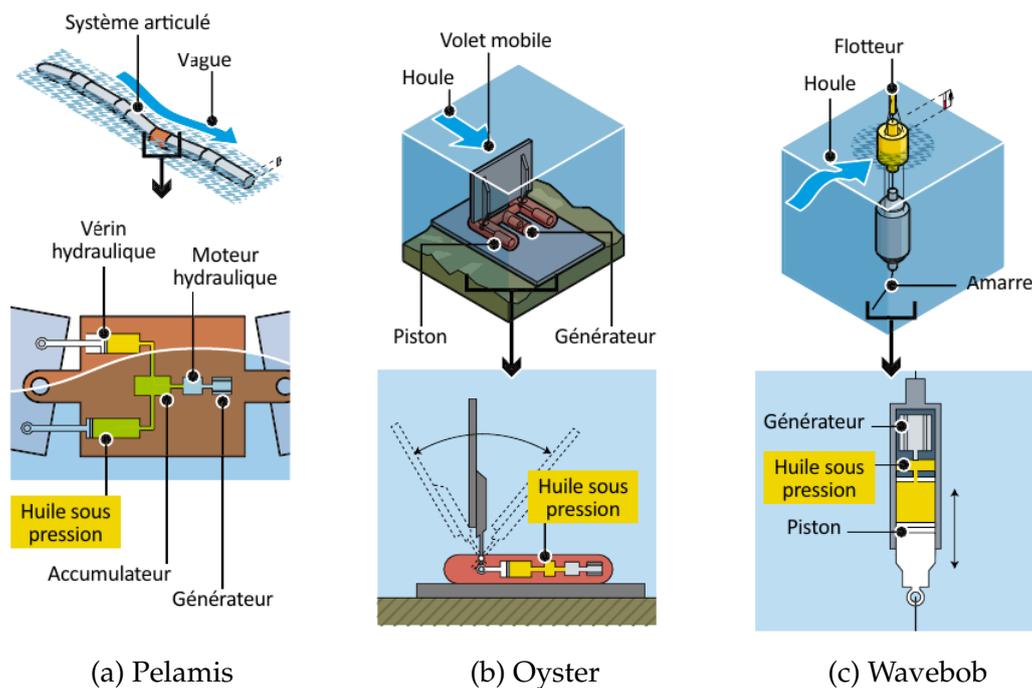


FIGURE 1.4 – Schémas explicatifs de corps oscillants. Images provenant de l'annuaire EMR [12]

Colonnes d'eau oscillante

L'autre famille importante de systèmes houlo-moteurs sont les colonnes d'eau oscillantes qui exploitent le déplacement d'un volume d'air enfermé dans un conduit, induit par les mouvements verticaux de la surface de l'eau. Le déplacement d'air agissant comme un piston entraîne une turbine qui génère directement de l'électricité. Les turbines de colonnes d'eau oscillantes sont conçues pour fonctionner dans les deux sens d'écoulement de l'air. Il en existe des flottantes, comme l'Ocean Energy Buoy et fixes comme la Pico Plant installée sur les côtes Portugaises.

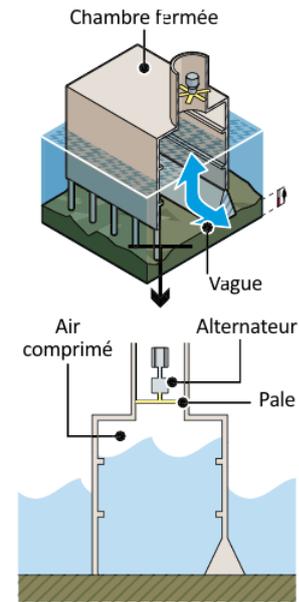


FIGURE 1.5 – Schémas explicatifs de colonne d'eau oscillante. Images provenant de l'annuaire EMR [12]

Systèmes à déferlement

Les systèmes à déferlement forcent la houle à déferler afin de remplir un réservoir en hauteur par rapport à une turbine. Ensuite, l'écoulement du fluide à partir du réservoir provoque la mise en action de la turbine. Ces systèmes peuvent être soit flottants comme le Wave Dragon ou fixes comme la centrale Tapchan.

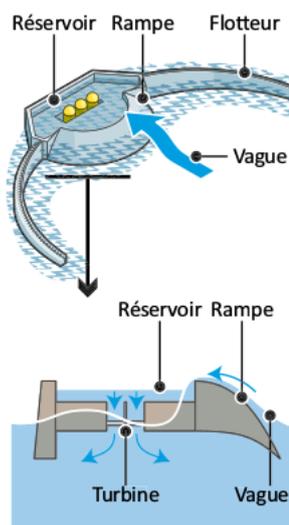


FIGURE 1.6 – Schémas explicatifs de systèmes à déferlement. Images provenant de l'annuaire EMR [12]

1.3 Le système houlomoteur de SBM

Les systèmes classiques présentés précédemment sont composés de parties mécaniques connectées entre elles par des liaisons fragiles. Il faut les dimensionner en fonction de la force des vagues en cas de tempête pour améliorer leur survie. Le renforcement des différentes pièces entraîne des augmentations de leur volume et de leur coût. Il est donc nécessaire de repenser le fonctionnement des technologies houlomotrices.

Le système houlomoteur de la société SBM Offshore, développé au début des années 2010, fait parti de la famille des systèmes oscillants. L'idée est venue d'utiliser un matériau flexible et bon marché pouvant s'adapter aux fortes contraintes de l'environnement marin. Ce système houlomoteur fonctionne par le biais d'ondes de renflement, générées avec la différence de pression entre la houle et un fluide interne dans un tube flexible. Plusieurs campagnes d'essais ont été nécessaires pour tester le concept.

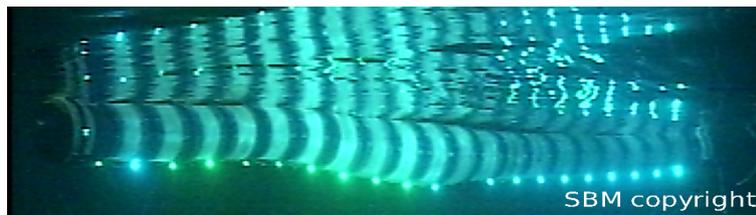


FIGURE 1.7 – Aperçu du système houlomoteur de SBM lors de la campagne d'essai à l'École Centrale de Nantes en 2011.

1.3.1 Fonctionnement du système houlomoteur

L'un des avantages de cette technologie est qu'elle peut être facilement assemblée grâce aux peu d'éléments requis. Le composant principal du système houlomoteur est un tube en caoutchouc pouvant se déformer dans toutes les directions (matériau isotrope) et renforcé par des fibres en aramide. Les fibres d'aramide sont davantage utilisées dans l'industrie aérospatiale ou militaire pour la conception de produits ultra-résistants et légers que dans le milieu offshore. Dans le cas présent, ces fibres vont bloquer les déformations du caoutchouc dans une direction donnée afin d'améliorer les propriétés mécaniques du tube et de protéger les bagues de polymère électro-actif, qui permettent la conversion de l'énergie mécanique en électricité.

Ces bagues sont constituées d'un polymère dont les propriétés électriques vont varier en fonction des déformations du matériau. Par rapport aux céramiques piezo-électriques, ce matériau peut supporter de très grandes déformations. Ainsi, lorsque le

polymère se déforme, les charges électriques vont se déplacer et être récupérées par un réseau de diodes métalliques microscopiques. Ce réseau est conçu pour se déformer mais que dans une seule direction grâce à l'utilisation d'ondulations. Toute déformation dans une autre direction causerait des dommages irréremédiables. Les bagues sont disposées le long du tube. Au passage de vagues, des charges électriques s'accumulent sur chaque bague et sont récupérées grâce au réseau de diodes. Un courant électrique est ainsi généré sur l'ensemble du système houlomoteur qui pourra être transformé avant d'être injecté à un réseau électrique.

Les déformations de la paroi sont causées par les déplacements d'eau à l'intérieur du tube. Avant l'installation du système, le tube est pressurisé avec de l'eau et fermé aux extrémités par des obturateurs gonflables, empêchant tout écoulement de fluide avec le milieu extérieur. Les extrémités sont ancrées afin de maintenir le tube en place. La pression interne du tube est surélevée pour modifier le comportement de la paroi. Le matériau principal étant hyper-élastique, les contraintes agissant au sein du matériau ne sont pas linéaires en fonction des déformations imposées. Ainsi, en changeant la pression statique interne, il est possible de faire varier la réaction du système aux vagues environnantes.

Une vue d'ensemble du système avec ses ancrages est représentée figure 1.8. Au repos le tube est considéré parfaitement cylindrique (traits fins oranges). Lorsque la membrane se déforme, son épaisseur varie afin de respecter la condition d'incompressibilité.

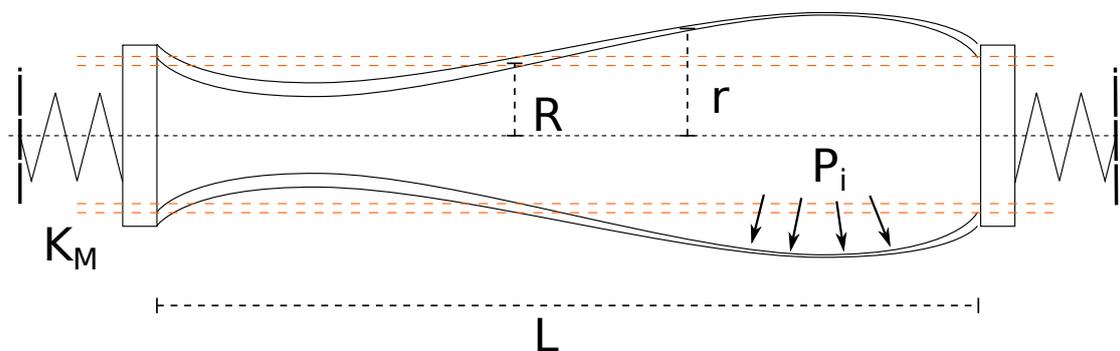


FIGURE 1.8 – Configuration déformée d'une membrane cylindrique sous l'action d'un fluide interne en mouvement

Le principe de fonctionnement est basé sur la différence de pression générée entre

le fluide externe et le fluide interne. La houle force le tube à se déplacer et exerce des zones de surpression sur le système houlomoteur qui viennent entraîner le fluide interne à se déplacer. On observe alors des ondes de pression déformant la paroi (ondes de renflement), qui se déplacent progressivement le long du tube.

Ce phénomène peut être observé ailleurs dans la nature ; les artères présentent le même effet de renflement lors du passage d'une onde suite aux pulsations du cœur. Mais une différence notable dans le cas du système est qu'il est fermé aux extrémités. Ainsi lorsque le système est excité, l'onde interne se réfléchit aux extrémités, générant une onde stationnaire comme sur une corde d'instrument de musique.

Le système étudié est un double système d'interaction fluide-structure. Dans un premier lieu la houle vient déformer le tube et par réaction le tube vient à son tour générer des vagues autour. La deuxième interaction fluide-structure se fait avec le fluide interne. La paroi du tube étant déformée vient déplacer le fluide qui, ne pouvant se comprimer, va agir plus loin sur la paroi. La représentation mathématique de ce système complexe se fait en trois étapes.

1. Chaque milieu est décrit par un système d'équations adéquats.
2. Un couplage fort est réalisé entre le milieu fluide interne et la paroi du tube à l'aide des équations précédentes puis les déformations caractéristiques du système sont décomposées en modes de vibrations.
3. Les efforts hydrodynamiques agissant sur le système houlomoteur sont pris en compte à l'aide de la base modale obtenue et la théorie potentielle avec une surface libre linéaire.

1.3.2 Campagnes d'essais

Une fois le concept mis en place, il a été nécessaire de démontrer le potentiel de ce système. Une première campagne d'essais a été réalisée en 2010 dans le bassin à houle de la société ACRI. L'objectif de ces essais était de s'assurer qu'un tube flexible avec des bagues de polymère électro-actif était bien capable de produire de l'électricité sous l'action de la houle. L'objectif a été atteint et a permis en plus d'établir une première méthodologie sur l'assemblage du système.

Une deuxième campagne d'essais a été réalisée dans le grand bassin à houle de l'école Centrale de Nantes afin de confirmer les connaissances acquises de la première campagne et de générer une base de données pour une étude plus approfondie du sys-

tème houlomoteur. Les déformations du système, un tube de $10m$ puis de $7m$ furent enregistrées et analysées sous l'action de vagues de différentes fréquences et amplitudes. Les données acquises servent de support aux simulations développées dans ce travail de recherche.

À cause de la complexité du système, une troisième campagne d'essais fut réalisée en février 2016 afin d'étudier les effets de diffraction causés par un cylindre horizontal rigide dans le sens de propagation de la houle. L'intérêt était de s'affranchir des déformations du tube pour comparer les mesures avec des outils numériques dans ce cas plus simple.

1.4 État de l'art

Comme il a été décrit dans la section précédente, le système houlomoteur étudié est un problème d'interaction fluide-structure dont la paroi joue un rôle tout aussi important que le fluide contenu dans le tube. Le matériau étant hyper-élastique avec des effets de viscosité non-négligeables, un simple modèle d'élasticité ne peut suffire à décrire son comportement.

Les premières études portant sur la problématique d'un fluide dans un tube ont plus d'un siècle et ont fait appel au fil du temps à des disciplines différentes afin d'obtenir des représentations fidèles à la réalité. Ainsi, les méthodes employées pour la modélisation du système houlomoteur peuvent être séparées en deux disciplines. D'une part l'étude des systèmes vibro-acoustiques (l'étude de la propagation d'ondes dans des milieux continus) et de l'autre l'analyse des matériaux visco-élastiques, discipline plus récente, et différente des problèmes d'interaction fluide-structure. Les deux sections qui suivent vont permettre de situer dans la littérature scientifique ce travail de recherche dans ces deux domaines.

1.4.1 Modèles vibro-acoustiques

Les premières pierres de l'analyse d'un fluide dans une conduite cylindrique ont été posées par le physicien Jean Léonard Marie Poiseuille qui donna son nom à la solution d'un fluide incompressible en écoulement stationnaire laminaire dans une conduite constante.

Un siècle plus tard, James Womersley (1955) [37], en s'intéressant à la différence de pression dans les artères d'animaux, développa une solution exacte pour un fluide

visqueux en déplacement dans une conduite cylindrique soumis à un gradient de pression périodique. Il démontra la présence d'un déphasage entre l'écoulement du fluide et le gradient de pression causant ce déplacement. Dans son étude, il définit le paramètre suivant, dit de Womersley :

$$W_o = R\sqrt{\frac{2\pi f}{\nu}} \quad (1.4.1)$$

Avec R le rayon de la section de tube, f la fréquence des pulsation et $\nu = \mu/\rho$ la viscosité cinématique définie comme le ratio de la viscosité dynamique par la masse volumique. Ce paramètre est utilisé dans de nombreuses études s'intéressant à un écoulement périodique dans des conduites cylindriques. Il définit le rapport entre les forces d'inertie périodiques et les forces de viscosité. Le paramètre de Womersley peut être rattaché au nombre de Reynolds par la relation suivante :

$$Re = \frac{V2R}{\nu} = W_o \frac{2V}{\sqrt{2\pi f\nu}} \quad (1.4.2)$$

Avec V la vitesse caractéristique du fluide.

Sir James Lighthill [35], connu pour ses travaux portant sur la propagation d'ondes dans des fluides en déplacements, s'intéressa en 1975 aux déformations des vaisseaux sanguins au passage d'une pulsation. Il généralise la théorie de Womersley en rajoutant les effets d'élasticité de la paroi des artères, appelé distensibilité et définit la vitesse de propagation d'une onde dans un tube élastique :

$$c = (\rho D)^{-1/2} \quad (1.4.3)$$

En étudiant le comportement des artères, il définit la distensibilité en fonction du module de Young E et de l'épaisseur de leur paroi h :

$$D = \frac{2R}{Eh} \quad (1.4.4)$$

Les travaux de Womersley et Lighthill ont permis d'établir les bases nécessaires à la résolution des écoulements dans des conduites cylindriques élastiques.

En 1974, Jain [20] développa la théorie en considérant des matériaux renforcés par des fibres, passant ainsi d'une à deux dimensions (directions radiale et axiale). Le fluide à l'intérieur du tube est considéré incompressible et irrotationnel. La théorie potentielle est employée afin de calculer le comportement du fluide dans les autres directions. Les déplacements sont considérés périodiques, de pulsation ω et nombre d'onde $\frac{m\pi}{L}$, ce

qui lui permet de résoudre l'ensemble des équations sur une base modale en réalisant l'équilibre des énergies de son système. À l'aide du modèle développé, il analyse le comportement du tube en fonction du ratio entre longueur et rayon.

Dans la même période, en 1972, Païdoussis et Denise [32] développent un modèle tri-dimensionnel pour analyser le comportement d'un tube élastique avec différentes conditions aux limites et un écoulement interne pour identifier le phénomène de battement (*flutter* en anglais). L'écoulement est représenté à l'aide de la théorie potentielle et les équations de Flügge (1957) sont utilisées pour modéliser la paroi. Les déplacements sont considérés périodiques mais dans ce cas, le nombre d'onde est inconnu. Il simplifie la relation de Bessel représentatif de l'écoulement potentiel pour pouvoir calculer une équation de propagation. La méthode employée dans cette thèse est très proche de celle développée par Païdoussis.

En 1991, Lakis et Laveau [22] utilisent des formulations linéaires pour la paroi et modélisent le fluide avec la théorie potentielle. Un écoulement constant est présent dans le tube. L'originalité est qu'ils décomposent la solution sur une multitude de sections de tubes. Pour y parvenir, la formulation des éléments finis est employée avec comme fonction de base, la déformation de la paroi pour un nombre d'onde donné. Chaque section de tube respecte les conditions aux limites de la section suivante, ce qui permet de construire les différentes matrices de masse et de raideur.

En 2009, Sabri et Lakis [33] présentent un article où ils étudient l'effet de précontrainte sur la dynamique d'un tube déformable rempli d'eau. La même approche d'éléments finis projetés sur les modes est utilisée et le nombre d'onde est déterminé à partir des propriétés de la paroi. L'expression du nombre d'onde est obtenue en calculant le déterminant du système d'équations de paroi, générant ainsi un polynôme d'ordre 8 dépendant du nombre circonférentiel. La même méthode est alors utilisée que précédemment pour générer les matrices de masse et de raideur, puis le fluide est ajouté dans le système matriciel en considérant un écoulement potentiel. À l'aide de ce modèle, ils analysent le comportement du tube pour différentes pré-tensions et conditions aux limites. La méthode développée dans ce travail de recherche est en partie inspirée de leurs travaux.

Dans les études portant sur l'écoulement hémodynamique dans le système cardiovasculaire ([16], [7], [4]) les effets de frictions et de tension sur la paroi doivent être pris en compte à cause de la viscosité et la vitesse d'écoulement du fluide. Dans ce cas, pour les modèles axisymétriques, le profil de vitesse doit être estimé au préalable en

fonction du nombre de Womersley et des fonctions de Bessel. L'un des résultats intéressants est que dans les grandes conduites, telles que les artères, où les effets d'inertie sont dominants, les effets de friction sont négligeables. Ceci implique que pour le système houlomoteur où le fluide ne s'écoule pas, mais seuls les effets de pression sont présents, la représentation en fluide potentiel sera suffisante.

Les études parvenant à modéliser le couplage du milieu fluide et solide de manière réaliste font appel à des méthodes numériques telles que des éléments finis couplés avec des volumes finis comme c'est le cas dans la thèse de C. Figueroa [15]. Ces méthodes, permettent d'accéder à de nombreuses informations sur le système mais sont gourmandes en temps. En rappel, l'un des objectifs de ce travail de recherche est d'utiliser des formulations analytiques pour réduire les temps de calcul.

1.4.2 Modèles hyper-élastiques

L'hyper-élasticité est un domaine de recherche indépendant des problèmes de vibro-acoustique. Les premières résolutions de problèmes élastiques datent du *XVII^e* siècle par le physicien Robert Hooke. Sa théorie fut généralisée pour de grandes déformations, à l'aide de fonctions permettant de relier les déplacements aux contraintes, à la place du module de Young E . Ainsi sont apparus les différents modèles d'hyper-élasticité qui décrivent l'énergie potentielle ψ emmagasinée dans le matériau en fonction des déformations imposées. Avec l'énergie potentielle, il est possible de calculer les contraintes résultantes. Parmi les modèles les plus connus est celui d'Ogden [31] dépendant des déformations principales λ_i :

$$\psi = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (1.4.5)$$

Avec N le nombre de termes dans la fonction d'énergie potentielle, μ_n les modules d'élongation et α_n des constantes sans dimension à déterminer par des moyens d'essais. Le modèle Neo-Hookean peut être vu comme un cas particulier du modèle de Ogden avec $N = 1$ et $\alpha_1 = 2$:

$$\psi = \frac{\mu_1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (1.4.6)$$

Le modèle de Mooney-Rivlin ([28]) est souvent utilisé dans la modélisation de matériaux isotropes tels que le caoutchouc :

$$\psi = \frac{\mu_1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \frac{\mu_2}{2} (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) \quad (1.4.7)$$

Le modèle de Yeoh ([38]) est utilisé pour les matériaux incompressibles :

$$\psi = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (1.4.8)$$

Avec $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$. Les coefficients C_{i0} sont déterminés par des essais de traction (en s'assurant les conditions suivantes : $C_{10} > 0$, $C_{20} < 0$ et $C_{30} > 0$). Ce modèle correspond à celui utilisé pour représenter le comportement de la paroi du système houlomoteur, grâce à sa dépendance à un seul invariant I_1 et au fait qu'il soit adapté aux matériaux incompressibles.

Les premiers modèles de visco élasticité en trois dimensions ont été écrits par Christensen [9] puis généralisés par Simo [34] pour la prise en compte de grandes déformations où les effets thermodynamiques agissants dans le matériau sont pris en compte.

Holzapfel et Gasser ([19], [18]) auront beaucoup contribué au développement des théories hyper-visco-élastiques compressibles et incompressibles. Leurs recherches ont porté sur la modélisation de la paroi des artères afin d'étudier leur résistance aux contraintes (sans prendre en compte la présence du fluide). Ils analysèrent également l'effet de la présence de fibres dans la paroi visco-élastique. Le modèle de fibre sera utilisé pour la représentation de la paroi du tube avec le modèle de Yeoh.

Récemment, Amabili et Breslavsky [8] utilisèrent le modèle Neo-Hookean afin de calculer les modes de vibration d'une plaque hyper-élastique. Les équations de la dynamique sont développées à l'aide des équations de Lagrange. Afin d'y parvenir, ils linéarisent l'énergie potentielle élastique autour de l'état statique de la membrane. L'idée de linéariser le modèle hyper-élastique autour de l'équilibre statique sera également utilisée dans les développements pour la modélisation du système houlomoteur.

1.4.3 Systèmes flexibles en environnement marin

Il existe de nombreuses études sur le comportement de matériaux flexibles en présence d'écoulement interne mais les analyses de systèmes flexibles en environnement marin sont plus rares et sont orientées vers des applications de génie civil, tels que des plate-formes flottantes pour des pistes d'atterrissage (VLFS : very large floating structures). Mondal [27] présente des méthodes mathématiques pour la résolution de telles structures en présence de houle. Cependant, ces méthodes ne sont pas applicables dans le cas du système houlomoteur car la structure est considérée plane et parallèle à la surface libre. Des simplifications mathématiques interviennent grâce à la géométrie de la

structure, ce qui n'est pas le cas pour un tube horizontal dont la surface est non plane.

Dresser l'état de l'art dans ces différentes disciplines aura permis de découvrir des méthodes qui serviront pour le développement des équations de la dynamique du système houlomoteur. Des méthodes du milieu médical et celui du génie civil, deux environnements distants mais dont les techniques seront rassemblées dans ce système complexe, ce qui constitue l'originalité de ce travail de recherche.

1.5 Déroulement de la thèse

Le premier chapitre de cette thèse est dédié au développement de la théorie permettant de décrire le comportement du système houlomoteur. Les différentes étapes menant aux équations de la dynamique sont décrites. En premier lieu, la dynamique des fluides de part et d'autre de la paroi du tube est présentée à l'aide de la théorie potentielle. Ensuite le comportement de la paroi est détaillé. D'abord les différents référentiels sont définis puis les tenseurs nécessaires (de déformations et de contraintes) pour calculer l'équilibre des forces sont établis. Enfin, avec les contraintes et les pressions des fluides agissant sur la structure, les équations de la dynamique du système houlomoteur sont générées. À l'aide de ces équations, l'équilibre des forces lors de la mise en précontrainte du tube est établi.

Dans le deuxième chapitre, la méthode pour calculer les différents termes du modèle numérique est présentée. Ce chapitre est décomposé en trois parties. Le modèle numérique est réalisé à partir des modes de déformation du système, la première étape est donc de linéariser les équations de la dynamique. Ensuite, avec les contraintes et pressions linéarisées, les modes sont recherchés en considérant les déplacements comme des fonctions harmoniques et en établissant les conditions aux limites aux extrémités du tube. Avec ces informations, la pulsation propre ainsi que les différentes constantes composant l'expression des modes sont calculées. L'orthogonalité des modes est ensuite assurée en les normalisant par leur masse. Avec cette base modale, les matrices de masse et de raideur sont générées et les termes non-linéaires sont rajoutés afin de prendre en compte tous les effets de la dynamique du système houlomoteur.

Le modèle numérique ainsi que le modèle d'éléments de frontière permettant de calculer les effets hydrodynamiques sont présentés dans le troisième chapitre. Les différentes étapes de calcul sont expliqués. La première étape du calcul consiste à établir l'ensemble des modes de déformation et des différents termes linéaires après avoir

importé les données d'entrée. Ensuite, les matrices permettant d'assurer le couplage houle-structure sont calculées à l'aide d'un modèle d'éléments de frontière linéaire. La partie linéaire du code permet de résoudre la dynamique du système dans le domaine fréquentiel et la dernière étape permet de rajouter les effets non-linéaire des équations dans le domaine temporel.

Le quatrième chapitre présente la validation du modèle numérique à l'aide des résultats provenant des campagnes d'essais. Avant de comparer les déformations mesurées avec un modèle réduit, les résultats du modèle hydrodynamique seuls sont vérifiés avec les mesures d'une campagne d'essais où un tube fixe affleurant la surface libre a été testé. Ensuite, les simulations du modèle complet sont comparées aux déformations mesurées avec un tube de 10m dans les bassins de l' cole Centrale de Nantes. Un descriptif de chaque campagne est présenté avant la comparaison des résultats.

Le dernier chapitre permettra de conclure sur la méthode et les résultats obtenus lors de ce travail de recherche. Des suggestions pour la suite des travaux et des idées d'optimisation sont présentées.

Chapitre 2

Théorie d'un tube hyper-élastique en présence de houle

La principale innovation de ce travail de recherche est d'avoir assemblé différents phénomènes physiques, qui constituent des disciplines de recherche à part (écoulement potentiel, comportement hyper-élastique de la paroi), et de les avoir fait fonctionner ensemble dans une symétrie cylindrique. Comme il l'a été mis en évidence dans l'état de l'art au chapitre précédent, ces différentes disciplines sont rarement associées en une seule problématique sauf dans le cas d'analyses d'écoulements sanguin. Cependant, dans l'étude présente, il faut considérer en plus l'action des vagues sur la structure qui entraîne un comportement plus complexe que l'effet des pulsations du coeur.

2.1 Introduction

Ce chapitre porte sur le développement du modèle mathématique permettant de décrire le comportement du système houlomoteur, c'est à dire l'analyse des phénomènes physiques en jeu entraînant les différentes déformations de la structure. Ce système étant un cas complexe d'interaction fluide-structure, plusieurs étapes sont nécessaires au développement du modèle.

Les problèmes d'interaction fluide-structure portent sur l'étude des structures dont la réponse est étroitement liée au milieu fluide qui l'entoure. L'analyse du comportement de la structure seule est différente d'avec la présence du fluide où des effets de couplages interviennent entre les différents milieux. Afin de bien comprendre le comportement du système, les différents milieux doivent être analysés simultanément. Comme il l'a été représenté figure 2.1, le système houlomoteur est constitué de trois milieux continus distincts : la paroi, un fluide interne et un fluide externe qui excite

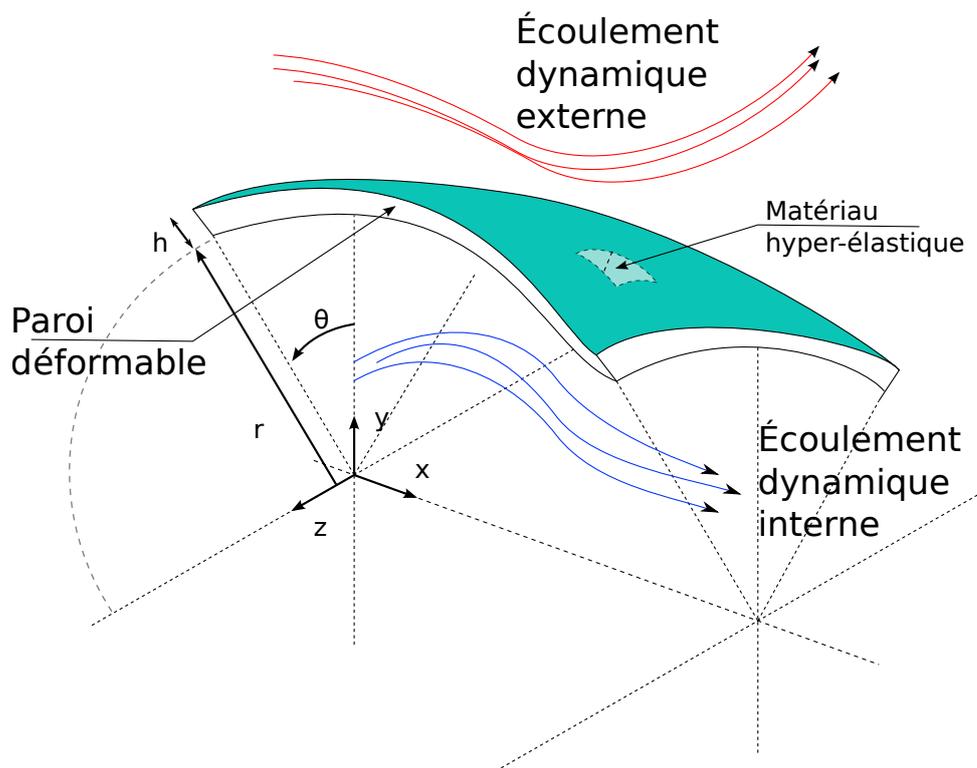


FIGURE 2.1 – Représentation des milieux interagissant dans le système houlomoteur

l'ensemble de la structure (constitué des deux premiers). Toutes les forces et déplacements intervenant dans le système sont calculées au niveau de la paroi afin d'assurer les conditions cinématiques et dynamiques. Il est ainsi possible d'établir l'équilibre des forces et d'en déduire le déplacement résultant.

La figure 2.2 présente les différentes étapes du calcul. Les déplacements de la paroi ($M(r, \theta, x)$) résultent de l'équilibre des forces et des conditions cinématiques qui proviennent des différents champs de pression calculés à partir de la dynamique des fluides de part et d'autre de la paroi et des contraintes internes agissant dans le matériau. Cet équilibre est perturbé par la pression externe qui varie à cause de la houle. Suite à ces variations, un nouvel équilibre doit être obtenu entre les différentes forces, engendrant un déplacement de la paroi. L'objectif de ce chapitre est de décrire le contenu des différents blocs de la figure 2.2 et leur assemblage pour obtenir la dynamique de paroi.

Les deux premières sections de ce chapitre portent sur la dynamique du fluide interne et externe. Une expression pour la pression interne et de l'interface entre le fluide et la paroi du tube est développée à l'aide de la théorie potentielle. Puis, comme pour

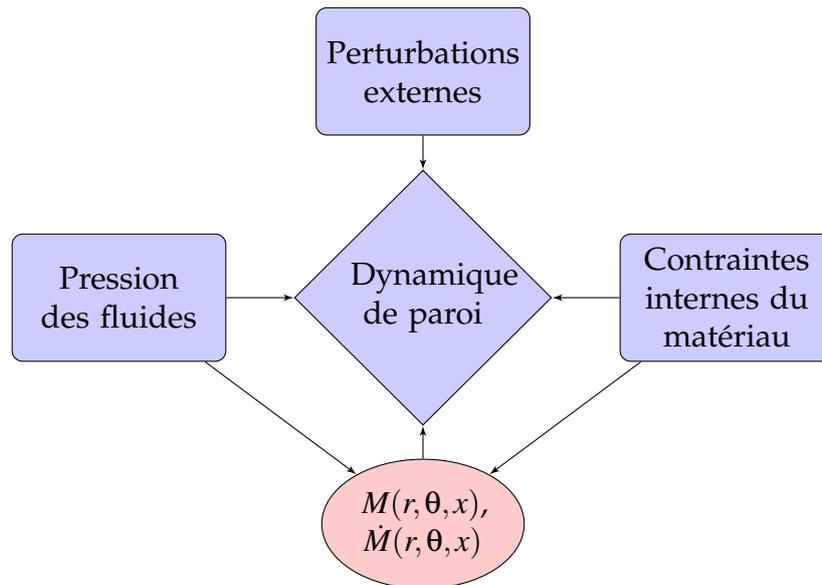


FIGURE 2.2 – Schéma de l'équilibre des forces et des conditions cinématiques au niveau de la paroi

le fluide interne, la théorie potentielle est utilisée pour calculer la pression externe mais par la présence d'une surface libre, des potentiels supplémentaires interviennent pour représenter les perturbations.

Les sections suivantes servent à expliquer la dynamique du tube. La troisième partie décrit la géométrie du système et les relations permettant le passage de l'état au repos du tube à l'état déformé. La résolution de la dynamique du système houlomoteur se fait à l'aide des coordonnées cylindriques, approche plus adaptée à la géométrie du tube.

La quatrième section consiste à établir les relations entre déplacements et contraintes dans la structure du tube car il n'est pas possible d'écrire les équations de la dynamique sans connaître ces relations. Les contraintes dans la base cylindrique sont développées en prenant en compte les effets hyper-visco-élastiques.

Une fois l'expression établie des contraintes, la dernière partie porte sur le développement des équations de la dynamique du système houlomoteur. Le principe fondamental de la dynamique est appliqué avec l'expression de la pression induite par le fluide interne et des contraintes pour obtenir les équations régissant le milieu solide. L'état précontraint du tube, lorsqu'il est en situation d'équilibre statique, est décrit à l'aide des équations obtenues.

2.2 Dynamique du fluide interne

Cette première section décrit le développement des équations permettant de représenter la dynamique du fluide interne. Étant donné que le tube est fermé à chaque extrémité, il n'y a aucun écoulement à l'intérieur. Afin de bien prendre en compte les différents phénomènes physiques, une analyse dimensionnelle est réalisée à partir des équations de Navier-Stokes.

2.2.1 Analyse dimensionnelle

L'écoulement interne est régi par l'équation de continuité et les équations de bilan de quantité de mouvement :

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \underline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \underline{\mathbf{v}} \right) = -\rho_f \underline{\mathbf{g}} - \nabla P_i + \mu \nabla^2 \underline{\mathbf{v}} \quad (2.2.2)$$

Avec $\underline{\mathbf{v}}$ le vecteur des vitesses du fluide, ρ_f la densité, P_i la pression interne, μ la viscosité et $\underline{\mathbf{g}}$ l'accélération gravitationnelle.

Plusieurs paramètres adimensionnels sont définis. D'abord les différentes dimensions du système :

$$x = X_0 \bar{x} ; t = T_{wall} \bar{t} \quad (2.2.3)$$

Avec X_0 une longueur caractéristique du tube et T_{wall} le temps caractéristique de la paroi. Il est considéré que le temps caractéristique de la paroi est plus important que celui du fluide car aucun écoulement n'est présent dans le tube et ce sont les déformations du tube qui induisent le fluide interne à se déplacer. Les différentes vitesses du fluide et de la paroi sont adimensionnalisées :

$$\underline{\mathbf{v}} = V_0 \bar{\underline{\mathbf{v}}} ; c_0 = \frac{X_0}{T_{wall}} \quad (2.2.4)$$

Puis la pression interne, le nombre de Stokes et le nombre de Froude sont défini ainsi :

$$P_i = \rho_f V_0 c_0 \bar{P}_i ; S_T = \frac{\rho_f X_0^2}{\mu T_{wall}} ; F_R^2 = \frac{V_0}{g T_{wall}} \quad (2.2.5)$$

En utilisant les différents variables adimensionnelles (eqs. 2.2.3, 2.2.4 et 2.2.5), l'équation de continuité se ré-écrit ainsi :

$$V_0 \nabla \cdot \bar{\underline{\mathbf{v}}} = 0 \quad (2.2.6)$$

Les équations de bilan de quantité de mouvement sont adimensionnalisées :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{t}} + \frac{V_0}{c_0} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}) = -\frac{1}{F_R^2} \bar{\mathbf{g}} - \nabla \bar{P}_i + \frac{1}{S_T} \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} \quad (2.2.7)$$

Dans le cas présent, $\mu = 1.10^{-3} N.s.m^{-2}$, $\rho_f = 1.10^3 kg.m^{-3}$, $T_{wall} \approx 1s$ et $R_s \approx 1m$, le nombre de Stokes est donc de l'ordre de $O(10^6)$ ce qui implique que les effets de viscosité peuvent être ignorés. Les termes d'advection dépendent du ratio entre la vitesse du fluide et celle de la paroi. Étant difficile d'estimer l'ordre de grandeur de ces deux dimensions, (par intuition $c_0 > V_0$ mais probablement pas dans tous les cas) une autre simplification sera réalisée à l'aide de la théorie potentielle.

2.2.2 Écoulement potentiel

Suite à l'analyse dimensionnelle, la dynamique du fluide interne est décrite à l'aide des équations d'Euler qui correspondent aux équations de Navier-Stokes sans les termes de viscosité :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla P_i + \rho_f \mathbf{g} = 0 \quad (2.2.8)$$

Et la relation de continuité :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2.9)$$

Les effets de vorticité sont négligés ce qui permettra de modéliser plus facilement l'écoulement interne dans la suite des développements :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v})^2 + \cancel{(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}} \right) + \nabla P_i + \rho_f \mathbf{g} = 0 \quad (2.2.10)$$

Le potentiel de vitesse du fluide interne est défini comme suit :

$$\mathbf{v} = \nabla \cdot \phi_i \quad (2.2.11)$$

En injectant l'expression du potentiel de vitesse dans l'équation précédente puis en éliminant le terme de gradient, il en résulte l'équation de Bernoulli instationnaire :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi_i^2 + gz \right) + P_i = cst \quad (2.2.12)$$

Lorsque les termes non linéaires et la dérivée temporelle sont nuls il ne reste que les termes de pression statique provenant de la mise sous pression du tube.

$$P_s = P_0 - \rho_f gz \quad (2.2.13)$$

Avec P_0 la pression de gonflage.

Ainsi, la pression totale agissant dans le tube et l'équation de continuité sont :

$$P_i = -\rho_f \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_i \right) + P_s \quad (2.2.14)$$

$$\nabla^2 \phi_i = 0 \quad (2.2.15)$$

2.2.3 Interface fluide-structure

Au niveau de l'interface entre le fluide interne et la paroi, comme le fluide est considéré non visqueux, la condition aux limites s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = \underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{n}}$$

Avec $\underline{\mathbf{V}}$ la vitesse de déplacement de la paroi et $\underline{\mathbf{n}}$ la normale à la surface. En coordonnées cylindriques, cette relation s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = \frac{\partial w}{\partial t} n_r + \frac{\partial v}{\partial t} n_\theta + \frac{\partial u}{\partial t} n_x \quad (2.2.16)$$

w , v et u correspondent aux déplacements de la paroi dans les directions radiale, tangentielle et axiale. Dans le cas où le tube reste parfaitement cylindrique, seule la composante radiale est non-nulle :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{e}}_r} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.2.17)$$

Cette dernière relation permettra de relier la vitesse du fluide à celle de la paroi dans la suite des développements.

2.2.4 Conclusions

Les équations gouvernant la dynamique du fluide interne sont l'équation de continuité :

$$\nabla^2 \phi_i = 0$$

l'interface fluide-structure :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

Puis la pression dans le fluide interne est obtenue à l'aide de l'équation de Bernoulli non-stationnaire :

$$P_i = -\rho_f \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_i + gz \right) + P_0$$

2.3 Dynamique du fluide externe

De la même manière que pour le fluide interne, les forces induites par le fluide externe sont modélisées à l'aide de la théorie potentielle. Il est considéré que le fluide est incompressible, non visqueux et irrotationnel. La relation de continuité est :

$$\nabla^2 \phi_e = 0 \quad (2.3.1)$$

ϕ_e correspond au potentiel de vitesse du fluide externe.

Comme pour le fluide interne, la pression totale agissant dans le milieu fluide externe est obtenue à l'aide de l'équation de Bernoulli instationnaire :

$$P = -\rho_f \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi_e \cdot \nabla \phi_e + gz \right) + P_a \quad (2.3.2)$$

La pression atmosphérique étant beaucoup plus faible par rapport aux autres termes est négligée.

Au niveau de la surface libre, le potentiel de vitesse respecte la relation suivante [23] :

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_e}{\partial z} + 2 \nabla \phi_e \cdot \nabla \frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi_e \cdot \nabla (\nabla \phi_e \cdot \nabla \phi_e) = 0 \quad (2.3.3)$$

En appliquant cette relation au niveau de la surface libre, il en résulte l'expression de l'élévation :

$$\eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi_e \cdot \nabla \phi_e \right)_{z=\eta} \quad (2.3.4)$$

Les autres conditions aux limites permettent d'assurer la continuité de mouvement au niveau des interfaces fluide et solide :

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (2.3.5)$$

Avec \mathbf{v} le vecteur vitesse de la frontière fluide - solide et \mathbf{n} la normale à la surface. Le fond du domaine fluide est considéré plat et immobile, ce qui implique la relation suivante :

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial z} = 0 \Big|_{z=-h} \quad (2.3.6)$$

Les équations 2.3.4 et 2.3.3 sont non-linéaires. Seul l'utilisation d'un outil numérique adapté permet de les résoudre. Cependant, des solutions existent lorsque ces équations sont linéarisées. En effectuant un développement limité autour de la surface libre moyenne ($z = 0$), le potentiel de vitesse s'écrit de la manière suivante :

$$\phi_e \approx \phi_{e1} + \phi_{e2} + \dots \quad (2.3.7)$$

Ainsi que la surface libre :

$$\eta \approx \eta_1 + \eta_2 + \dots \quad (2.3.8)$$

Les différents termes de la surface libre sont :

$$\eta_1 = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_e}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (2.3.9)$$

et

$$\eta_2 = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_{e2}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi_{e1} \cdot \nabla \phi_{e1} - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi_{e1}}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial z \partial t} \right) \Big|_{z=0} \quad (2.3.10)$$

Après linéarisation du potentiel de vitesse extérieure, les variations de la surface libre sont décomposées suivant différents termes ; un potentiel incident et un potentiel perturbé. Le premier correspond à la houle provenant en amont du corps flottant et le potentiel perturbé aux oscillations générées par les mouvements du corps. La dernière condition aux limites est que les perturbations du potentiel de vitesse ϕ_e doivent se dissiper lorsque la distance parcourue par les ondes tend vers l'infini.

2.3.1 Houle incidente

En utilisant la relation de continuité (eq.2.3.1), la condition aux limites de fond (eq. 2.3.6) et la pression dynamique linéaire :

$$P_1 = -\rho_f \frac{\partial \phi_{eI}}{\partial t} \quad (2.3.11)$$

une solution analytique est obtenue pour le potentiel incident grâce à la méthode de séparation des variables en ne considérant qu'une seule pulsation ω_w du spectre de houle :

$$\phi_{eI} = \Re \left(-Ai \frac{g}{\omega_w} \frac{\cosh(k_w(z+h))}{\cosh(k_w h)} e^{i(k_w x - \omega_w t)} \right) \quad (2.3.12)$$

Avec k_w le nombre d'onde associé à la pulsation ω_w et A l'amplitude de l'onde. Le nombre d'onde et la pulsation assurent la condition de propagation de la houle :

$$\omega_w^2 = g k_w \tanh(k_w h) \quad (2.3.13)$$

Lorsque la profondeur du domaine est considérée infinie, alors l'expression du potentiel de vitesse incident est :

$$\phi_{eI} = \Re \left(-Ai \frac{g}{\omega_w} e^{kz} e^{i(k_w x - \omega_w t)} \right) \quad (2.3.14)$$

En utilisant l'équation ??, l'expression de la surface libre est calculée en $z = 0$:

$$\eta = \Re \left(A e^{i(k_w x - \omega_w t)} \right) \quad (2.3.15)$$

Ce type de houle est appelée vagues d'Airy.

Les vitesses des particules de la houle incidente lorsque la profondeur est considérée finie sont :

$$U = \frac{\partial \phi_{eI}}{\partial x} = \Re \left(A \omega_w \frac{\cosh(k_w(z+h))}{\sinh(k_w h)} e^{i(k_w x - \omega_w t)} \right) \quad (2.3.16)$$

$$W = \frac{\partial \phi_{eI}}{\partial z} = \Im \left(A \omega_w \frac{\sinh(k_w(z+h))}{\sinh(k_w h)} e^{i(k_w x - \omega_w t)} \right) \quad (2.3.17)$$

$\Re(\bullet)$ et $\Im(\bullet)$ correspondent respectivement à la partie réelle et imaginaire de la variable. En utilisant la relation 2.3.11, la pression de la houle incidente linéaire en profondeur finie est :

$$P_1 = \Re \left(A \rho_f g \frac{\cosh(k_w(z+h))}{\cosh(k_w h)} e^{i(k_w x - \omega_w t)} \right) \quad (2.3.18)$$

2.3.2 Houle perturbée

Lorsque la houle rentre en contact avec un objet flottant, le champ de vitesse se déforme à cause de la présence et des oscillations de l'objet. Le champ de vitesse complet intervenant est [10] :

$$\phi_e = \phi_{eI} + \phi_D + \sum_{i=1}^N \phi_{Ri} \quad (2.3.19)$$

Avec ϕ_{eI} le champ incident décrit précédemment, ϕ_D le champ diffracté correspondant à la réflexion de la houle sur l'objet et ϕ_{Ri} le champ rayonné autour de l'objet à cause de ses déplacements. Le champ rayonné est décomposé sur l'ensemble des degrés de liberté de l'objet. Pour un système rigide flottant, les degrés de liberté sont composés de trois translations et trois rotations :

- cavement (déplacement horizontal)
- pilonnement (déplacement vertical)
- embardée (déplacement latéral)
- roulis (rotation sur l'axe horizontal)

- lacet (rotation sur l'axe vertical)
- tangage (rotation sur l'axe latéral)

Cependant, pour un système déformable tel que le système houlomoteur étudié, le nombre de degrés de liberté est infini. Les degrés de liberté sont représentés par les modes de déformations en renflements et verticales.

Chaque composant du potentiel perturbé ($\phi_P = \phi_D + \sum \phi_{Ri}$) satisfait l'équation de Laplace et les conditions aux limites suivantes :

- $\Delta\phi_P = 0$ dans le milieu fluide
- $\frac{\partial\phi_P}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial\phi_I}{\partial\mathbf{n}}$ sur la paroi du système flottant
- $\frac{\partial\phi_P}{\partial z} = 0$ au niveau du fond marin ($z = -h$)
- $\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi_P}{\partial z} \Big|_{z=0}$ à la surface libre
- $\phi_P \rightarrow 0$ lorsque la distance tend vers l'infini

L'expression complète des éléments du potentiel perturbé est obtenue à l'aide des fonctions de Green. Pour un point M se situant dans le milieu fluide (Ω) ou sur la paroi du système flottant (Σ), l'expression des potentiels est [10] :

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \mathcal{G}(M) \frac{\partial\phi_P}{\partial\mathbf{n}} dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial\mathcal{G}(M)}{\partial\mathbf{n}} \phi_P dS = \begin{cases} \phi_P, & M \in \Omega \\ \frac{\phi_P}{2}, & M \in \Sigma \end{cases} \quad (2.3.20)$$

Les fonctions de Green ($\mathcal{G}(M)$ et $\partial\mathcal{G}(M)/\partial\mathbf{n}$) sont définies pour respecter la condition aux limites de surface et de radiation, et sont déterminées à l'aide de méthodes numériques. Dans l'équation 2.3.20, seul le champ ϕ_P est inconnu. La résolution de l'équation 2.3.20 se fait à l'aide d'un outil numérique basé sur les éléments de frontière du domaine. De tels outils ont l'avantage de résoudre les déplacements et pressions du fluide à partir des conditions aux limites du domaine sans avoir à représenter le volume contenu dans le domaine analysé.

Une fois le potentiel perturbé calculé, il est alors possible de déterminer les forces de pression avec l'équation de la dynamique linéarisée 2.3.11.

2.3.3 Conclusions

La dynamique du fluide externe est décrite par la théorie potentielle qui considère le fluide irrotationnel et qui est régie par l'équation de Laplace :

$$\boxed{\nabla^2\phi_e = 0}$$

Le potentiel de vitesse du fluide externe respecte la condition de surface libre :

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_e}{\partial z} + 2\nabla \phi_e \cdot \nabla \frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi_e \cdot \nabla (\nabla \phi_e \cdot \nabla \phi_e) = 0$$

Cette équation non-linéaire ne peut être résolue sans l'aide d'un outil numérique adapté. Des solutions existent lorsque cette équation est linéarisée. En effectuant un développement limité autour de la surface libre moyenne ($z = 0$), l'équation de l'élévation de la surface libre est :

$$\boxed{\frac{\partial \phi_e}{\partial t} = -g\eta \Big|_{z=0}}$$

A partir de ces équations, une solution analytique du potentiel incident lorsque la profondeur est finie est obtenue :

$$\boxed{\phi_{eI} = \Re \left(-Ai \frac{g}{\omega_w} \frac{\cosh(k_w(z+h))}{\cosh(k_w h)} e^{i(k_w x - \omega_w t)} \right)}$$

En poursuivant le développement limité aux ordres supérieurs, il est possible d'obtenir les autres termes du potentiel incident.

Afin de prendre en compte l'interaction entre la houle et le corps flottant, il est nécessaire de prendre en compte les perturbations de la surface libre causées par le corps :

$$\boxed{\phi_e = \phi_{eI} + \phi_P = \phi_{eI} + \phi_D + \sum_{i=1}^N \phi_{Ri}}$$

Ces différents potentiels de vitesse, obtenus à l'aide d'un modèle numérique basé sur les éléments de frontière, respectent les conditions aux limites suivantes :

- $\Delta \phi_P = 0$ dans le milieu fluide
- $\frac{\partial \phi_P}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \phi_I}{\partial \mathbf{n}}$ sur la paroi du système flottant
- $\frac{\partial \phi_P}{\partial z} = 0$ au niveau du fond marin ($z = -h$)
- $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_P}{\partial z} \Big|_{z=0}$ à la surface libre
- $\phi_P \rightarrow 0$ lorsque la distance tend vers l'infini

2.4 Définition des repères

Dans la suite de la thèse, plusieurs repères cylindriques seront utilisés afin de décrire les déformations du système houlomoteur, chacun faisant référence à un état différent : initial, à l'équilibre statique et déformé.

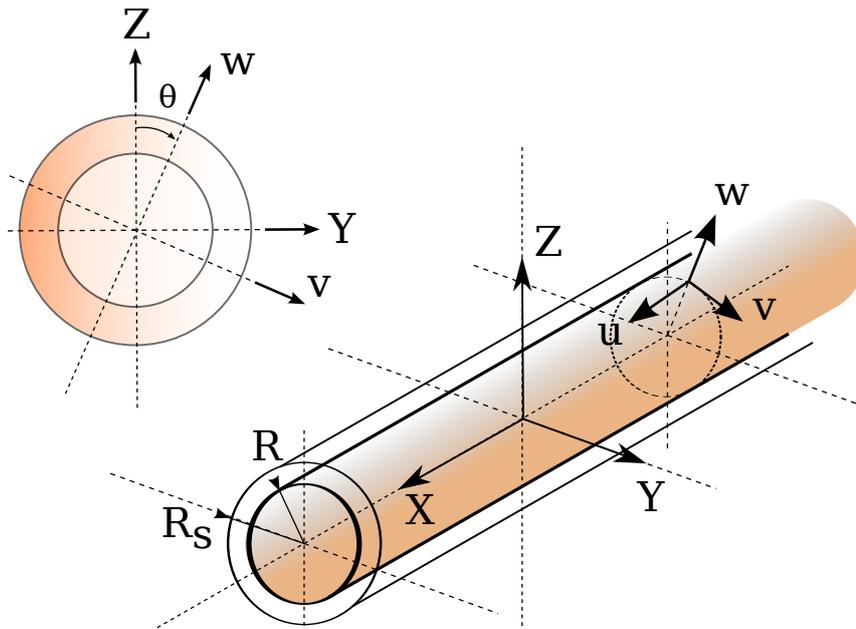


FIGURE 2.3 – Repères dans la base de référence et statique en coordonnées cartésiennes et cylindriques

2.4.1 Configuration de référence

Les variables suivantes correspondent aux coordonnées cartésiennes et cylindriques dans la configuration initiale du système servant de référence.

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{X}} = [X, Y, Z]^T \\ \underline{\mathbf{R}} = [R, \theta, X]^T \end{cases} \quad (2.4.1)$$

La coordonnée X représente l'axe horizontal du système et la coordonnée Z l'axe vertical. Le passage du repère en coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques se fait par les relations suivantes :

$$\begin{cases} Y = R \sin \theta \\ Z = R \cos \theta \end{cases} \quad (2.4.2)$$

2.4.2 Configuration à l'équilibre statique

Les coordonnées cartésiennes et cylindriques lorsque le système houlomoteur est à l'équilibre statique sont :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{X}}_s = [X_s, Y_s, Z_s]^T \\ \underline{\mathbf{R}}_s = [R_s, \theta, X_s]^T \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Les variables R_s et X_s correspondent au rayon statique du tube et à la coordonnée axiale du système une fois sous pression. Il peut être noté que la variable angulaire θ est la même dans ces deux configurations. Le passage d'un repère à l'autre se fait comme avec la relation 2.4.2 mais en utilisant le rayon statique R_s .

$$\begin{cases} X_s = X \lambda_{xs} \\ Y_s = R_s \sin \theta \\ Z_s = R_s \cos \theta \end{cases} \quad (2.4.4)$$

La variable λ_{xs} correspond à l'élongation axiale du tube suite à la précontrainte.

2.4.3 Configuration à l'état déformé

Dans la configuration déformée, les vecteurs de position en coordonnées cartésiennes et cylindriques sont :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}} = [x, y, z]^T \\ \underline{\mathbf{r}} = [r, \beta, x]^T \end{cases} \quad (2.4.5)$$

La configuration déformée s'obtient à partir de la configuration statique où l'on vient imposer un déplacement aux différents points de la paroi du tube. Le passage d'un point P de coordonnées (X_s, Y_s, Z_s) au point P' aux coordonnées (x, y, z) se fait par le vecteur de déplacement dans le repère cylindrique :

$$\underline{\mathbf{u}} = [w, v, u]^t \quad (2.4.6)$$

Les coordonnées cartésiennes dans la configuration déformée s'obtiennent ainsi :

$$\begin{cases} x = X \lambda_{xs} + u(\theta, X, t) \\ y = (R_s + w(\theta, X, t)) \sin \theta + v(\theta, X, t) \cos \theta \\ z = (R_s + w(\theta, X, t)) \cos \theta - v(\theta, X, t) \sin \theta \end{cases} \quad (2.4.7)$$

La relation précédente permettant le passage des coordonnées cylindriques aux co-

ordonnées cartésiennes est ré-écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w + R_s \\ v \\ \lambda_{xs}X + u \end{pmatrix} \quad (2.4.8)$$

2.5 Contraintes de paroi

Tout comme la pression du fluide, des contraintes sont générées dans la paroi du système houlomoteur lorsque le tube se déforme. L'objectif de cette section est de relier les contraintes aux déformations de la structure en prenant en compte l'ensemble des propriétés du matériau.

La paroi du tube est composée d'un matériau composite visco-hyper-élastique renforcée par des fibres d'aramide. Il est considéré incompressible. Cette dernière hypothèse est importante car elle se répercute dans l'expression des contraintes. Le caractère visqueux d'un matériau apparaît lorsque la relation entre les contraintes du matériau et son élongation n'est pas directe. Ce phénomène intervient pour des matériaux de type polymères synthétiques, tissus biologiques et également certains métaux à de très hautes températures [6]. Enfin, les propriétés hyper-élastiques du matériau impliquent que la relation entre contraintes et déformations n'est pas linéaire et requiert l'utilisation d'une fonction d'énergie potentielle. La figure 2.4 représente la différence de comportement entre un matériau élastique et hyperélastique lorsqu'un échantillon est déformé. Le premier présente un ratio constant entre élongation et contrainte alors que pour un matériau hyperélastique ce ratio varie.

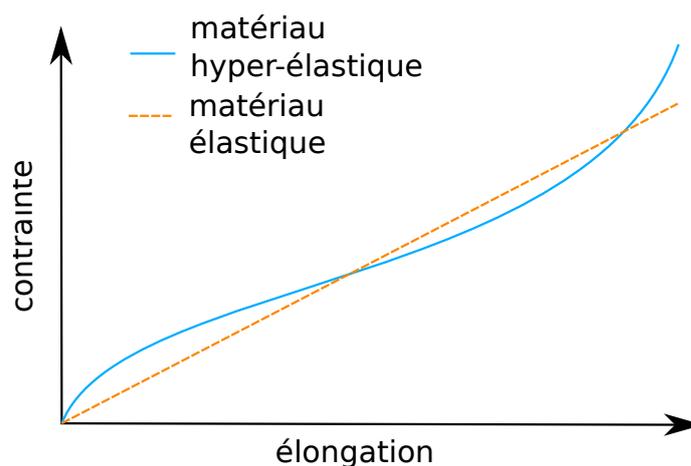


FIGURE 2.4 – Représentation du comportement d'un matériau élastique et hyperélastique

2.5.1 Effets visco-élastiques

La contrainte interne agissant dans un matériau suite à une déformation dépend de sa composition. Pour cette raison, des relations ont été développées permettant de calculer les différentes contraintes à partir des déformations connues ou vice-versa. La relation la plus connue, la loi de Hooke, permet de déterminer les contraintes et déplacements dans le cas linéaire à l'aide du module d'élasticité du matériau.

$$\sigma = \sigma_0 + E\varepsilon \quad (2.5.1)$$

Avec σ la contrainte, σ_0 une contrainte initiale, E le module de Young et ε le déplacement imposé. Le module de Young est obtenu à l'aide d'essais de traction, en effectuant le ratio de la contrainte sur le déplacement mesuré. Une fois le module connu, il est possible de calculer la contrainte pour tout type de déplacement avec le matériau donné.

Les effets de viscosité peuvent être rajoutés à l'aide du modèle de superposition de Boltzman [6]. La formulation des contraintes de Cauchy proposée par Boltzman est considérée comme la somme de toutes les déformations imposées au matériau dans le passé. L'effet mémoire du matériau est pris en compte à l'aide d'un produit de convolution :

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} \varepsilon(t - \tau) d\tau \quad (2.5.2)$$

Avec G une fonction de relaxation propre au matériau.

Après une intégration par parties, en considérant les déformations nulles au départ ($\varepsilon(0) = 0$), la formulation intégrale devient :

$$\sigma(t) = G_0\varepsilon(t) + \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.5.3)$$

Où G_0 correspond au coefficient de raideur initial. La relation visco-élastique est alors constituée d'une partie instantanée :

$$\sigma_0(t) = G_0\varepsilon(t) \quad (2.5.4)$$

et d'une partie représentative du retardement causée par les effets visqueux. Cette équation correspond à l'intégrale visco-élastique isotrope linéaire et permet une généralisation directe vers des déformations élastiques non-linéaires.

2.5.2 Effets non-linéaires

Lorsque les déformations sortent du cadre linéaire, plusieurs tenseurs de contraintes peuvent être employés dans la théorie hyper-élastique. Le plus fréquemment utilisé est le tenseur des contraintes de Cauchy (contraintes vraies), représenté par le symbole $\boldsymbol{\sigma}$, qui fait référence aux forces actuelles dans la configuration déformée mais qui s'avère difficile à calculer dans le cas du système houlomoteur. Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, représenté par la lettre \mathbf{P} , fait référence aux forces actuelles mais par rapport à l'état de référence. Il est utilisé dans le formalisme Lagrangien. La relation d'un tenseur vers l'autre est :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{P} \mathbf{F}^T \\ \mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Avec \mathbf{F} le tenseur des déformations, défini par la suite, et J la variation de volume du matériau. L'exposant $(\bullet)^{-T}$ correspond à l'inverse de la transposée du tenseur. Il existe d'autres tenseurs de contraintes mais ne sont pas utilisés dans ce travail de thèse.

La variation de volume d'un élément de matériau est obtenu à partir du déterminant du tenseur des déformations :

$$J = \det \mathbf{F} \quad (2.5.6)$$

Le matériau utilisé pour la paroi du tube est considéré incompressible, ce qui se traduit par :

$$\boxed{J = 1} \quad (2.5.7)$$

L'expression complète des contraintes de Piola-Kirchhoff pour le cas d'un matériau incompressible est [25] :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^D - pJ\mathbf{F}^{-T} \quad (2.5.8)$$

Le terme \mathbf{P}^D correspond aux composantes déviatoriques. Il inclut les effets instantanés et à retardement des contraintes. Le terme suivant dépendant de la variable p est rajoutée suite à l'hypothèse d'incompressibilité et correspond à la composante hydrostatique.

J. Simo [34] donne une relation plus générale du tenseur de Cauchy en prenant en compte les effets non-linéaires pour un matériau isotrope :

$$\boldsymbol{\sigma}^D(t) = \boldsymbol{\sigma}_0 + dev \left[\int_0^t \frac{\partial G(\tau)}{\partial \boldsymbol{\tau}} \bar{\mathbf{F}}_t^{-1}(t-\tau) \cdot \boldsymbol{\sigma}_0(t-\tau) \cdot \bar{\mathbf{F}}_t^{-T}(t-\tau) d\tau \right] \quad (2.5.9)$$

Avec G une fonction de relaxation propre au matériau et le gradient de déformation dû

à la variation de volume :

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{F}}{J^{1/3}}$$

L'opérateur dev correspondant à $dev[\cdot] \equiv (\cdot) - \frac{1}{3}tr(\cdot)\mathbf{I}$. Les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}^D(t)$ et $\boldsymbol{\sigma}_0(t)$ correspondent respectivement à la composante déviatorique et instantanée du tenseur de Cauchy. Dans le cas présent, étant donné que la matériau est incompressible, donc $J = 1$ alors $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$.

Dans la théorie des grandes déformations, les différents tenseurs des contraintes se calculent à l'aide d'une fonction ψ représentative de l'énergie potentielle interne du matériau. Dans le cas du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, l'expression de la composante déviatorique instantanée est :

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \quad (2.5.10)$$

Et pour les contraintes de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad (2.5.11)$$

La paroi du système houlomoteur étant composée d'un matériau composite, il est possible d'écrire l'énergie potentielle du matériau comme la somme des deux types [18] de composants :

$$\Psi = \Psi_{isotrope} + \Psi_{anisotrope} \quad (2.5.12)$$

En coordonnées cylindriques le tenseur des déformations d'un point $M(R_s, \theta, X)$ dans la paroi du tube précontrainte et subissant un déplacement (w, v, u) s'écrit :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{rR} & F_{r\theta} & F_{rX} \\ F_{\beta R} & F_{\beta\theta} & F_{\beta X} \\ F_{xR} & F_{x\theta} & F_{xX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial(R_s+w)}{\partial \theta} - v \right) & \frac{\partial(R_s+w)}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial R} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + R_s + w \right) & \frac{\partial v}{\partial X} \\ \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial \theta} & \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial X} \end{bmatrix} \quad (2.5.13)$$

Dans le cas du tube, il est considéré que la paroi est mince par rapport aux autres dimensions. Ceci implique qu'il est possible de négliger les termes $F_{\beta R}$ et F_{xR} . Une relation peut alors être établie pour la variation de l'épaisseur du tube à partir de la condition d'incompressibilité :

$$F_{rR} = \frac{\partial r}{\partial R} = \left(\frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + R_s + w \right) \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial X} - \frac{1}{R} \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial X} \right)^{-1} \quad (2.5.14)$$

L'inverse de la transposée du gradient de déformations correspond à la comatrice

du gradient des déformations [30]

$$J\mathbf{F}^{-T} = \begin{bmatrix} F_{\beta\theta}F_{xX} - F_{x\theta}F_{\beta X} & \underline{F_{xR}F_{\beta X}} - \underline{F_{\beta R}F_{xX}} & \underline{F_{\beta R}F_{x\theta}} - \underline{F_{xR}F_{\beta\theta}} \\ F_{x\theta}F_{rX} - F_{r\theta}F_{xX} & F_{rR}F_{xX} - \underline{F_{xR}F_{rX}} & \underline{F_{xR}F_{r\theta}} - F_{rR}F_{x\theta} \\ F_{r\theta}F_{\beta X} - F_{\beta\theta}F_{rX} & \underline{F_{\beta R}F_{rX}} - F_{rR}F_{\beta X} & F_{rR}F_{\beta\theta} - \underline{F_{\beta R}F_{r\theta}} \end{bmatrix} \quad (2.5.15)$$

Les termes barrés sont supprimés suite à l'hypothèse de paroi mince.

2.5.3 Composante isotropique

Le modèle de Yeoh [38], adapté pour les matériaux hyper-élastiques incompressibles, est choisi pour la représentation de la composante isotropique du matériau :

$$\Psi_{Yeoh} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (2.5.16)$$

Avec I_1 le premier invariant et C_{i0} les différents paramètres de Yeoh obtenus à l'aide d'essais de traction. La relation entre le premier invariant et le gradient de déformations est [25] :

$$I_1 = tr(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = tr(\mathbf{C}) \quad (2.5.17)$$

Le tenseur \mathbf{C} appelé tenseur droit de Cauchy-Green est utilisé dans les calculs de cinématique.

En utilisant l'expression de I_1 en fonction des termes du gradient de déformations (eq.2.5.17), la composante de Yeoh dans les contraintes de Piola-Kirchoff s'écrit [25] :

$$\frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F}(C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2) \quad (2.5.18)$$

2.5.4 Composante anisotropique

La contribution anisotropique provenant de l'action des fibres est exprimée avec le modèle suivant [18] :

$$\Psi_{fibres} = \frac{k_1}{k_2} \left(e^{k_2(I_4 - 1)^2} - 1 \right) \quad (2.5.19)$$

Le paramètre I_4 correspond au carré de l'extension des fibres : $I_4 = \lambda_f^2$, ce qui permet de représenter l'anisotropie du matériau. Le coefficient k_1 est un paramètre de raideur représentatif des fibres et k_2 un coefficient adimensionnel, chacun devant être déterminé à l'aide d'essais de traction.

Dans le cas du système houlomoteur, les fibres sont réalisées à partir d'aramide,

matériau dont la raideur est très élevée. Le module d'élasticité est de l'ordre du gigapascal et donc $\lambda_f \approx 1$, ce qui permet de simplifier la relation de l'énergie anisotrope des fibres à l'aide d'un développement limité :

$$\Psi_{fibres} = 4k_1(\lambda_f - 1)^2 \quad (2.5.20)$$

Le quatrième invariant (I_4) est défini par l'orientation des fibres. Il est considéré que les fibres agissent dans le plan de la paroi, dans la direction axiale. Le vecteur définissant la direction des fibres en coordonnées cylindriques est :

$$\underline{\mathbf{n}}_f = \{0, 0, 1\}^T \quad (2.5.21)$$

En utilisant la méthode proposée par Holzapfel [18], le quatrième invariant se calcule ainsi :

$$I_4 = \mathbf{C} : \mathbf{A}_f = \sum_{i=1}^9 C_i A_{fi} \quad (2.5.22)$$

Avec $(:)$ le double produit scalaire, correspondant à la somme des éléments de chaque matrice multipliés terme à terme et \mathbf{A}_f défini comme suit :

$$\mathbf{A}_f = \underline{\mathbf{n}}_f \underline{\mathbf{n}}_f^T \quad (2.5.23)$$

L'expression de I_4 est développée entièrement :

$$I_4 = \left(\frac{\partial(R_s + w)}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\lambda_{xs}X + u)}{\partial X} \right)^2 \quad (2.5.24)$$

Et sa dérivée pour chaque terme du tenseur des déformations résulte en :

$$\frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{F}} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial(R_s + w)}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\lambda_{xs}X + u)}{\partial X} \end{pmatrix} \quad (2.5.25)$$

L'action des fibres dans les contraintes peut alors s'écrire ainsi :

$$\frac{\partial \Psi_{fibres}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \Psi_{fibres}}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{F}} = 8k_1 \frac{\lambda_f - 1}{\lambda_f} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial(R_s + w)}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\lambda_{xs}X + u)}{\partial X} \end{pmatrix} \quad (2.5.26)$$

2.5.5 Conclusions

L'ensemble des équations développées dans cette section permettent d'établir les relations entre différentes contraintes (Cauchy et Piola-Kirchhoff) agissant dans la paroi à partir des déplacements, tous contenus dans le tenseur des déformations :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial(R_s+w)}{\partial \theta} - v \right) & \frac{\partial(R_s+w)}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + R_s + w \right) & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial \theta} & \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial X} \end{bmatrix}$$

Le premier terme $\partial r/\partial R$ est obtenu en utilisant la relation d'incompressibilité :

$$J = \det \mathbf{F} = 1$$

La composante déviatorique instantanée des contraintes, avec les fibres alignées dans la direction axiale, se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 = & 2 \begin{pmatrix} \frac{\partial(R_s+w)}{\partial R} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial(R_s+w)}{\partial \theta} - v \right) & \frac{\partial(R_s+w)}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + R_s + w \right) & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial \theta} & \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial X} \end{pmatrix} (C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2) \\ & + 8k_1 \frac{\lambda_f - 1}{\lambda_f} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial(R_s+w)}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial X} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

Avec I_1 le premier invariant définit equation 2.5.17 et λ_f l'élongation des fibres :

$$\lambda_f = \sqrt{\left(\frac{\partial(R_s+w)}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial X} \right)^2} \quad (2.5.28)$$

Une fois la composante déviatorique instantanée connue, l'effet mémoire du matériau peut être pris en compte avec la relation 2.5.9.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^D - pJ\mathbf{F}^{-T}$$

Dans le cas où il est plus facile d'utiliser les contraintes de Cauchy, la relation de passage à partir des contraintes de Piola-Kirchhoff est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{P} \mathbf{F}^T$$

2.6 Dynamique de la paroi du tube

Pour décrire la dynamique de la paroi du système houlomoteur, il est nécessaire de partir de la deuxième équation de Newton, stipulant que la variation de quantité de mouvement dans un système est égale à la somme des forces agissant dessus. Dans le cas de la mécanique des milieux continus, cette relation s'écrit ainsi :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho_t \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \quad (2.6.1)$$

Avec ρ_t la masse volumique du matériau constituant la paroi du tube, \mathbf{U} le vecteur vitesse d'un point dans la paroi et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy. La dérivée $D(\bullet)/Dt$ correspond à la dérivée temporelle particulaire, utilisée pour décrire l'accélération lagrangienne d'un point et $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\bullet)$ correspondant à la divergence par rapport aux coordonnées actuelles.

L'équation 2.6.1 est écrite en fonction des coordonnées du corps à l'instant présent. Or ces coordonnées sont inconnues ce qui rend impossible l'écriture d'une relation complète du terme $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Afin de contourner le problème, le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est employé permettant de calculer la divergence à partir des coordonnées initiales du système [30] :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} \quad (2.6.2)$$

Dans cette équation, appelée transformée de Piola, l'opérateur $\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\bullet)$ est la divergence par rapport aux coordonnées initiales.

L'équation 2.6.1 peut alors se ré-écrire ainsi :

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} = J\rho_t \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \quad (2.6.3)$$

L'accélération est obtenue en s'aidant des coordonnées cartésiennes :

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \mathbf{e}_x + \frac{\partial^2 (r \sin \beta)}{\partial t^2} \mathbf{e}_y + \frac{\partial^2 (r \cos \beta)}{\partial t^2} \mathbf{e}_z$$

Le repère cartésien exprimé à partir du repère cylindrique dans la configuration déformée est :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_y = \sin \beta \mathbf{e}_r + \cos \beta \mathbf{e}_\beta \\ \mathbf{e}_z = \cos \beta \mathbf{e}_r - \sin \beta \mathbf{e}_\beta \end{cases}$$

Après simplification, l'accélération cylindrique lagrangienne est :

$$\boxed{\frac{DU}{Dt} = (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\beta} + 2\dot{\beta}\dot{r}) \mathbf{e}_\beta + \ddot{x} \mathbf{e}_x} \quad (2.6.4)$$

Le tenseur de Piola-Kirchhoff écrit entièrement est :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{RR} & P_{R\theta} & P_{RX} \\ P_{\theta R} & P_{\theta\theta} & P_{\theta X} \\ P_{XR} & P_{X\theta} & P_{XX} \end{pmatrix} \quad (2.6.5)$$

Lorsque l'équation 2.6.3 est développée suivant les coordonnées cylindriques R, θ, X , il en résulte un système à trois équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial P_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{RX}}{\partial X} + \frac{P_{RR} - P_{\theta\theta}}{R} &= J\rho_t (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2) \\ \frac{\partial P_{\theta R}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{\theta X}}{\partial X} + \frac{P_{R\theta} + P_{\theta R}}{R} &= J\rho_t (r\ddot{\beta} + 2\dot{\beta}\dot{r}) \\ \frac{\partial P_{XR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial P_{X\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{XX}}{\partial X} + \frac{P_{XR}}{R} &= J\rho_t \ddot{x} \end{aligned}$$

Le système d'équations est multiplié puis intégré sur R afin de prendre en compte la pression de part et d'autre de la paroi :

$$[RP_{RR}]_{R_i}^{R_e} + \int_{R_i}^{R_e} \left(\frac{\partial P_{R\theta}}{\partial \theta} + R \frac{\partial P_{RX}}{\partial X} - P_{\theta\theta} \right) dR = \rho_t \int_{R_i}^{R_e} J (\ddot{r} - r\dot{\beta}^2) R dR \quad (2.6.6)$$

$$[RP_{\theta R}]_{R_i}^{R_e} + \int_{R_i}^{R_e} \left(\frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial \theta} + R \frac{\partial P_{\theta X}}{\partial X} + P_{R\theta} \right) dR = \rho_t \int_{R_i}^{R_e} J (r\ddot{\beta} + 2\dot{\beta}\dot{r}) R dR \quad (2.6.7)$$

$$[RP_{XR}]_{R_i}^{R_e} + \int_{R_i}^{R_e} \left(\frac{\partial P_{X\theta}}{\partial \theta} + R \frac{\partial P_{XX}}{\partial X} \right) dR = \int_{R_i}^{R_e} J \rho_t \ddot{x} R dR \quad (2.6.8)$$

Les contraintes de Piola-Kirchhoff doivent être exprimées en fonction de la pression de part et d'autre de la paroi pour parvenir à coupler les différents milieux.

Il est considéré que les effets de viscosité et donc les effets de cisaillement sont négligés. Ainsi, la pression agissant sur la paroi à un instant donné est directement liée aux contraintes de Cauchy et la normale à la surface :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{r=r_i} \mathbf{n} dA = -P_i \mathbf{n} dA \\ \boldsymbol{\sigma}_{r=r_e} \mathbf{n} dA = -P_e \mathbf{n} dA \end{cases} \quad (2.6.9)$$

Or dans les conditions aux limites ci-dessus, la normale à la paroi $\underline{\mathbf{n}}$ est inconnue. Pour contourner le problème, une expression est utilisée permettant de relier les normales à la surface à l'instant présent aux normales à l'instant initial. La relation de Nanson ([30]), définie par l'équation qui suit, permet de passer d'un élément de surface déformé à un élément de surface à l'état initial en fonction de la normale.

$$\underline{\mathbf{n}}dA = J\mathbf{F}^{-T}\underline{\mathbf{n}}_0dA_0 \quad (2.6.10)$$

Avec A et A_0 la surface du système à l'état instantané et initial puis $\underline{\mathbf{n}}$ et $\underline{\mathbf{n}}_0$ leur normale à la surface respectives. En utilisant la relation de Nanson (2.6.10), les conditions aux limites (eq.2.6.9) deviennent :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}J\mathbf{F}^{-T}\underline{\mathbf{n}}_0dA_0 = -P_iJ\mathbf{F}^{-T}\underline{\mathbf{n}}_0dA_0 \quad |_{(R=R_i)} \\ \boldsymbol{\sigma}J\mathbf{F}^{-T}\underline{\mathbf{n}}_0dA_0 = -P_eJ\mathbf{F}^{-T}\underline{\mathbf{n}}_0dA_0 \quad |_{(R=R_e)} \end{cases} \quad (2.6.11)$$

On retrouve l'expression des contraintes de Piola-Kirchhoff dans les termes de gauche :

$$\begin{cases} \mathbf{P}\underline{\mathbf{n}}_0dA_0 = -P_iJ\mathbf{F}^{-T}\underline{\mathbf{n}}_0dA_0 \quad |_{(R=R_i)} \\ \mathbf{P}\underline{\mathbf{n}}_0dA_0 = -P_eJ\mathbf{F}^{-T}\underline{\mathbf{n}}_0dA_0 \quad |_{(R=R_e)} \end{cases} \quad (2.6.12)$$

Le vecteur unitaire radial à l'état initial, $\underline{\mathbf{n}}_0 = \{1, 0, 0\}^T$ est utilisé, ce qui génère trois paires d'équations :

$$\begin{cases} P_{RR}dA_0 = -P_iJF_{RR}^{-T}dA_0 \quad |_{(R=R_i)} \\ P_{\theta R}dA_0 = -P_iJF_{\theta R}^{-T}dA_0 \quad |_{(R=R_i)} \\ P_{XR}dA_0 = -P_iJF_{XR}^{-T}dA_0 \quad |_{(R=R_i)} \end{cases} \quad (2.6.13)$$

$$\begin{cases} P_{RR}dA_0 = -P_eJF_{RR}^{-T}dA_0 \quad |_{(R=R_e)} \\ P_{\theta R}dA_0 = -P_eJF_{\theta R}^{-T}dA_0 \quad |_{(R=R_e)} \\ P_{XR}dA_0 = -P_eJF_{XR}^{-T}dA_0 \quad |_{(R=R_e)} \end{cases} \quad (2.6.14)$$

La différence de chaque équation est calculée et la différentielle dA_0 est éliminée :

$$\begin{cases} [P_{RR}] = (P_iJ_iF_{RRi}^{-T} - P_eJ_eF_{RRe}^{-T}) \\ [P_{\theta R}] = (P_iJ_iF_{\theta Ri}^{-T} - P_eJ_eF_{\theta Re}^{-T}) \\ [P_{XR}] = (P_iJ_iF_{XRi}^{-T} - P_eJ_eF_{XRe}^{-T}) \end{cases} \quad (2.6.15)$$

Suite aux développements précédents, le système d'équations de la dynamique de-

vient :

$$(R_i P_i J_i F_{RRi}^{-T} - R_e P_e J_e F_{RRe}^{-T}) + \int_{R_i}^{R_e} \left(\frac{\partial P_{R\theta}}{\partial \theta} + R \frac{\partial P_{RX}}{\partial X} - P_{\theta\theta} \right) dR = \rho_t \int_{R_i}^{R_e} J \left(\ddot{r} - r \dot{\beta}^2 \right) R dR \quad (2.6.16)$$

$$(R_i P_i J_i F_{\theta Ri}^{-T} - R_e P_e J_e F_{\theta Re}^{-T}) + \int_{R_i}^{R_e} \left(\frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial \theta} + R \frac{\partial P_{\theta X}}{\partial X} + P_{R\theta} \right) dR = \rho_t \int_{R_i}^{R_e} J \left(r \ddot{\beta} + 2\dot{\beta} \dot{r} \right) R dR \quad (2.6.17)$$

$$(R_i P_i J_i F_{XRi}^{-T} - R_e P_e J_e F_{XRe}^{-T}) + \int_{R_i}^{R_e} \left(\frac{\partial P_{X\theta}}{\partial \theta} + R \frac{\partial P_{XX}}{\partial X} \right) dR = \rho_t \int_{R_i}^{R_e} J \ddot{x} R dR \quad (2.6.18)$$

Puis en utilisant l'hypothèse de paroi mince ($R_i = R_e = R_0$) et en simplifiant avec la condition d'incompressibilité ($J = 1$) :

$$J F_{RR}^{-T} \frac{P_i - P_e}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{RX}}{\partial X} - \frac{P_{\theta\theta}}{R_0} = \rho_t \ddot{w} \quad (2.6.19)$$

$$J F_{\theta R}^{-T} \frac{P_i - P_e}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{\theta X}}{\partial X} + \frac{P_{R\theta}}{R_0} = \rho_t \ddot{v} \quad (2.6.20)$$

$$J F_{XR}^{-T} \frac{P_i - P_e}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{X\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{XX}}{\partial X} = \rho_t \ddot{u} \quad (2.6.21)$$

Le système d'équations 2.6.19, 2.6.20 et 2.6.21 avec l'expression des contraintes de Piola-Kirchhoff (eq.2.5.8), permettent de décrire le comportement complet du système houlomoteur pour de grandes déformations non-linéaires et avec une pression extérieure donnée. La pression interne est définie à l'aide de l'équation 2.2.14.

2.6.1 Composante hydrostatique

Les conditions aux limites développées précédemment sont rappelées et les composantes des contraintes de Piola-Kirchhoff sont séparées (déviatorique et hydrostatique) :

$$\begin{cases} P_{RR}^D - p J F_{RR}^{-T} = -P_i J F_{RR}^{-T} & |(R=R_i) \\ P_{RR}^D - p J F_{RR}^{-T} = -P_e J F_{RR}^{-T} & |(R=R_e) \end{cases} \quad (2.6.22)$$

Le terme de pression hydrostatique est isolé :

$$\begin{cases} p = P_i + \frac{1}{J F_{RR}^{-T}} P_{RR}^D & |(R=R_i) \\ p = P_e + \frac{1}{J F_{RR}^{-T}} P_{RR}^D & |(R=R_e) \end{cases} \quad (2.6.23)$$

En utilisant la relation de l'inverse de la transposée du gradient des déformations (eq2.5.15), il en résulte :

$$\begin{cases} p = P_i + (F_{\beta\theta}F_{xX} - F_{x\theta}F_{\beta X})^{-1} P_{RR}^D \big|_{(R=R_i)} \\ p = P_e + (F_{\beta\theta}F_{xX} - F_{x\theta}F_{\beta X})^{-1} P_{RR}^D \big|_{(R=R_e)} \end{cases} \quad (2.6.24)$$

Ainsi, la pression hydrostatique est exprimée en fonction de la pression de part et d'autre de la paroi et de la contrainte radiale de Piola-Kirchhoff :

$$\begin{cases} p = P_i + F_{RR}P_{RR}^D \big|_{(R=R_i)} \\ p = P_e + F_{RR}P_{RR}^D \big|_{(R=R_e)} \end{cases} \quad (2.6.25)$$

2.6.2 Équilibre statique

Le système d'équations 2.6.19 à 2.6.21 est employé pour déterminer l'équilibre des forces lorsque le tube est mis sous précontrainte. L'intérêt de mettre le tube en précontrainte est de changer la sensibilité du système au passage des ondes. Étant donné que le matériau est hyperélastique, la réaction de la paroi du tube (sa distensibilité) varie suivant son taux d'allongement. Ainsi, en faisant varier la pression interne, il est possible de changer la réponse du système houlomoteur par rapport aux vagues environnantes.

Rayon statique

Lors de la mise sous pression il est considéré que le tube reste parfaitement droit et que le rayon est identique en tout point. Ces hypothèses entraînent les simplifications suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial R_s}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial R_s}{\partial X} = 0 \end{cases} \quad (2.6.26)$$

Les effets de cisaillement sont également négligés.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \lambda_{xs} X}{\partial \theta} = 0 \quad (2.6.27)$$

Dans le cas de l'équilibre statique, le gradient des déformations est :

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_s}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \lambda_{xs} X}{\partial X} \end{bmatrix} \quad (2.6.28)$$

Le matériau composant la paroi du tube est considéré incompressible, ce qui se traduit par :

$$J_s = \det \mathbf{F}_s = 1$$

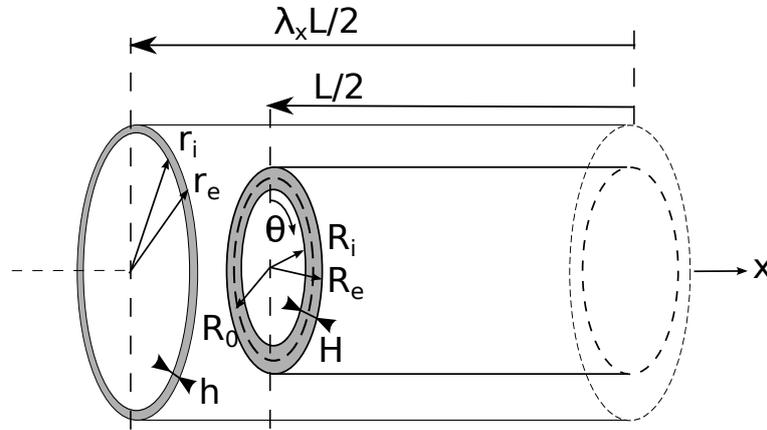


FIGURE 2.5 – Variables à l'état initial et à l'équilibre statique

Cette relation est utilisée pour obtenir une définition du rayon statique R_s en fonction du rayon au repos [19] :

$$\frac{\partial R_s}{\partial R} = \frac{R}{\lambda_{xs} R_s} = \lambda_{rs} = \frac{H_s}{H} \quad (2.6.29)$$

Avec H l'épaisseur initiale de la paroi et H_s l'épaisseur après la mise sous pression.

Après intégration il en résulte :

$$\lambda_{xs} \frac{R_s^2}{2} = \frac{R^2}{2} + Cst$$

Et donc :

$$R_s(R) = \sqrt{\frac{R^2}{\lambda_{xs}} + Cst} \quad (2.6.30)$$

Pour déterminer la constante, on définit le rayon statique interne en fonction du rayon interne au repos $R_s(R_i)$. Lorsque $R = R_0 - H/2 = R_i$ avec R_0 le rayon de la fibre neutre du tube au repos et H l'épaisseur de la paroi alors :

$$R_s(R_i) = \lambda_{\theta s} R_0 - H_s/2 \quad (2.6.31)$$

Avec $\lambda_{\theta s}$ le ratio d'allongement circonférentiel définie par $\lambda_{\theta s} = R_{s0}/R_0$. L'épaisseur H_s

est définie à l'aide de la condition d'incompressibilité :

$$H_s = H\lambda_{rs} = \frac{H}{\lambda_{xs}\lambda_{\theta s}} \quad (2.6.32)$$

Les relations 2.6.31 et 2.6.32 sont injectées dans l'équation 2.6.30 puis élevé au carré :

$$Cst = \left(\lambda_{\theta s} R_0 - H_s/2 \right)^2 - \frac{(R_0 - H/2)^2}{\lambda_{xs}}$$

Finalement, la relation entre R_s et R est :

$$R_s(R) = \sqrt{\frac{R^2 - (R_0 - H/2)^2}{\lambda_{xs}} + \left(\lambda_{\theta s} R_0 - \frac{H}{2\lambda_{xs}\lambda_{\theta s}} \right)^2} \quad (2.6.33)$$

Contraintes de Piola-Kirchhoff

Afin de savoir quelles contraintes interviennent lors de l'équilibre des forces, l'expression de la composante déviatorique est utilisée en fonction du gradient de déformations défini précédemment 2.6.28. Les effets visqueux ne sont pas pris en compte lors de la mise sous pression du tube. Il est considéré que le temps d'inflation du tube est supérieur au retardement causé par les effets visqueux. L'expression du calcul des contraintes de Piola-Kirchhoff en fonction du gradient de déformation statique est :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_s^D &= \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial \mathbf{F}_s} + \frac{\partial \Psi_{fibres}}{\partial \mathbf{F}_s} \quad (2.6.34) \\ &= 2(C_{10} + 2C_{20}(I_{1s} - 3) + 3C_{30}(I_{1s} - 3)^2) \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{bmatrix} + 8k_1 \frac{\lambda_{fs} - 1}{\lambda_{fs}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Avec le premier invariant à l'équilibre statique :

$$I_{1s} = tr(\mathbf{F}_s^T \mathbf{F}_s) = \left(\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right)^2 + \left(\frac{R_s}{R} \right)^2 + \lambda_{xs}^2 \quad (2.6.35)$$

L'expression de l'élongation des fibres est obtenue à partir de la relation du quatrième invariant (eq.2.5.24) :

$$\lambda_{fs} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial X} \right)^2} = \lambda_{xs} \quad (2.6.36)$$

Ainsi, à partir du gradient des déformations, il apparaît que seules les contraintes principales (diagonale du tenseur) interviennent dans le calcul de l'équilibre des forces.

Pression statique et allongement axial

La définition du rayon statique dépend des ratios d'allongement circonférentiel λ_{θ_s} et axial λ_{x_s} . Le premier ratio λ_{θ_s} est imposé pour déterminer la précontrainte du tube mais λ_{x_s} est une résultante de cette contrainte initiale. Afin de déterminer l'élongation axiale, on établit l'équilibre des forces agissant dans le tube. La relation avec les contraintes de Cauchy est utilisée car les coordonnées dans la configuration statique sont connues d'avance et elle permet de faciliter les développements en annulant la composante hydrostatique des contraintes :

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{P} = \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.6.37)$$

Le calcul des contraintes de Cauchy se fait à l'aide de la relation de passage 2.5.5 et en utilisant le gradient de déformations pour l'équilibre statique.

$$\boldsymbol{\sigma}_s^D = \left(2 \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \begin{bmatrix} \frac{R}{R_s \lambda_{x_s}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x_s} \end{bmatrix} + 8k_1 \frac{\lambda_{x_s} - 1}{\lambda_{x_s}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x_s} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{R}{R_s \lambda_{x_s}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x_s} \end{bmatrix} \quad (2.6.38)$$

Les termes d'accélération sont nuls et les seules contraintes intervenant dans l'équilibre statique sont la contrainte radiale σ_{rr} , circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ et axiale σ_{xx} . Les équations intervenant dans l'équilibre des forces sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rrs}}{\partial R_s} + \frac{\sigma_{rrs} - \sigma_{\theta\theta s}}{R_s} = 0 \\ \frac{1}{R_s} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta s}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{x_s s}}{\partial x_s} = 0 \end{cases} \quad (2.6.39)$$

Les conditions aux limites au niveau de la paroi sont :

$$\begin{cases} \sigma_{rrs}(R = R_{si}) = -P_0 - P_{es}(\theta) \\ \sigma_{rrs}(R = R_{se}) = -P_{es}(\theta) \end{cases} \quad (2.6.40)$$

Avec P_0 la pression requise pour atteindre le taux d'inflation souhaité et P_{es} la pression externe hydrostatique.

La pression interne est obtenue en intégrant la première équation 2.6.39 et en utili-

sant les conditions aux limites 2.6.40 :

$$P_0 = \int_{R_{si}}^{R_{se}} \frac{\sigma_{\theta\theta s}^D - p_s - \sigma_{rrs}^D + p_s}{R_s} dR_s \quad (2.6.41)$$

Les composantes hydrostatiques s'annulent mutuellement. Puis en utilisant la condition de paroi mince :

$$P_0 = \frac{\sigma_{\theta\theta s}^D - \sigma_{rrs}^D}{R_{s0}} H_s \quad (2.6.42)$$

La troisième équation du système 2.6.39 indique que la contrainte axiale est identique dans toute la longueur du tube. Ainsi, il en résulte que l'élongation axiale λ_{xs} ne varie pas en fonction de x .

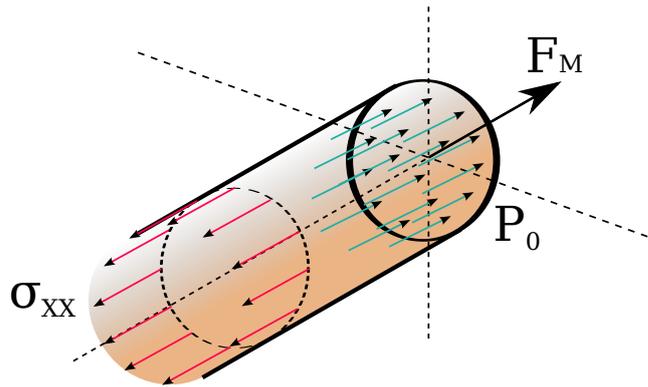


FIGURE 2.6 – Équilibre des forces dans la direction axiale

Aux extrémités du tube, la tension axiale reprend la force de pré-tension des ancrages et du différentiel de pression.

$$F_m + \pi R_{si}^2 P_0 = 2\pi \int_{R_{si}}^{R_{se}} \sigma_{x xs} R_s dR_s \quad (2.6.43)$$

On souhaite exprimer les forces de pression dans l'équation précédente en fonction des contraintes radiales et tangentielles. Pour y parvenir, l'équation radiale de l'équilibre statique des forces dans le tube (eq. 2.6.39) est modifiée ainsi :

$$2R_s \sigma_{rr} + R_s^2 \frac{\partial \sigma_{rrs}}{\partial R_s} = (\sigma_{\theta\theta s} + \sigma_{rrs}) R_s$$

Le terme $2R_s$ est ré-écrit sous forme différentielle ce qui donne après avoir rassemblé les termes de gauche :

$$\frac{\partial R_s^2 \sigma_{rrs}}{\partial R_s} = (\sigma_{\theta\theta s} + \sigma_{rr}) R_s$$

En utilisant les conditions aux limites et en intégrant il en résulte la relation recherchée :

$$R_{si}^2 P_0 = \int_{R_{si}}^{R_{se}} (\sigma_{\theta\theta s} + \sigma_{rrs}) R_s dR_s \quad (2.6.44)$$

On en déduit l'équilibre global des forces en combinant les équations 2.6.43 et 2.6.44 :

$$F_m = \pi \int_{R_{si}}^{R_{se}} (2\sigma_{xxs} - \sigma_{\theta\theta s} - \sigma_{rrs}) R_s dR_s \quad (2.6.45)$$

En décomposant l'expression des contraintes suivant leur composante déviatorique et avec la pression hydrostatique, l'équilibre des forces devient :

$$F_m = \pi \int_{R_{si}}^{R_{se}} (2\sigma_{xxs}^D - 2p_s - \sigma_{\theta\theta s}^D + p_s - \sigma_{rrs}^D + p_s) R_s dR_s \quad (2.6.46)$$

Au final, avec la condition de paroi mince, l'équation 2.6.46 se simplifie ainsi :

$$F_m = \pi (2\sigma_{xxs}^D - \sigma_{\theta\theta s}^D - \sigma_{rrs}^D) R_{s0} H_s \quad (2.6.47)$$

La pression hydrostatique du matériau s'annule dans l'équation 2.6.46. En utilisant l'expression des différentes contraintes de Cauchy (eq.2.6.38) et celle du rayon statique (eq.2.6.33) seul l'allongement axial λ_{xs} est inconnu. Cette équation est résolue numériquement jusqu'à ce que l'équilibre des forces soit vérifié pour la valeur correspondante du ratio d'allongement. Une fois λ_{xs} connu, il est possible de calculer la pression interne requise (eq. 2.6.42) pour le renflement désiré $\lambda_{\theta s}$ puis la pression hydrostatique du matériau.

Le calcul de la pression hydrostatique du matériau est réalisée à partir de la première équation de l'équilibre des forces 2.6.39 et en séparant la composante déviatorique :

$$\frac{\partial}{\partial R_s} (\sigma_{rrs}^D - p_s) + \frac{\sigma_{rrs}^D - \sigma_{\theta\theta s}^D}{R_s} = 0 \quad (2.6.48)$$

L'équation est intégrée radialement à partir du rayon interne :

$$p_s = \int_{R_{si}}^r \left(\frac{\partial \sigma_{rrs}^D}{\partial R_s} + \frac{\sigma_{rrs}^D - \sigma_{\theta\theta s}^D}{R_s} \right) dR_s + Cst \quad (2.6.49)$$

La constante d'intégration est obtenue en utilisant les conditions aux limites (eq.2.6.40)

$$p_s(r = R_{si}) = \sigma_{rrs}^D(r = R_{si}) + P_0 \quad (2.6.50)$$

Ainsi, l'expression complète de la composante hydrostatique du matériau après la mise sous pré-contrainte est :

$$p_s = \sigma_{rrs}^D + \int_{R_{si}}^r \left(\frac{\sigma_{rrs}^D - \sigma_{\theta\theta s}^D}{R_s} \right) dR_s + P_0 \quad (2.6.51)$$

Avec la condition de paroi mince, la pression hydrostatique se simplifie ainsi :

$$p_s \approx \sigma_{rrs}^D \quad (2.6.52)$$

2.6.3 Profondeur d'immersion

Le calcul des pré-contraintes dans le tube permet aussi d'accéder au volume occupé par le système houlomoteur après la mise sous pression et donc à la profondeur d'immersion une fois mis à l'eau. Le poids du fluide et de la structure est compensé par la pression hydrostatique externe qui varie en fonction de la profondeur :

$$P_h(z_f) = -\rho_f g z_f \quad (2.6.53)$$

Avec ρ_f la masse volumique du fluide, g l'accélération gravitationnelle et z_f la profondeur d'immersion. Ceci implique que la pression est plus importante au niveau de la section inférieure du tube. De part la configuration circulaire du système houlomoteur, la pression externe force le tube à remonter mais le poids de la structure l'entraîne vers le bas.

La force linéique équivalente agissant sur la paroi du tube est :

$$F_{P_h} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_f g z_f \mathbf{n} R_{se} d\theta \quad (2.6.54)$$

Avec α l'angle correspondant à la profondeur d'immersion du tube et \mathbf{n} la normale à

la surface du tube.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{z_0 - \eta}{R_{se}}\right) \quad (2.6.55)$$

z_0 correspond au centre du tube et η la hauteur de la surface libre. $\eta = 0$ lorsque la surface libre est considérée immobile. Ainsi, lorsque le tube est sous la surface libre, $\alpha = \pi$

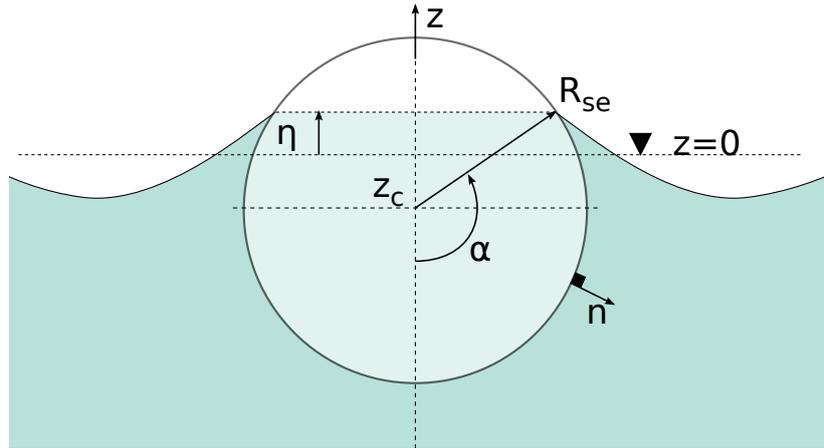


FIGURE 2.7 – Variation de l'angle α en fonction de la profondeur d'immersion

La coordonnée z_f est exprimée en fonction des coordonnées cylindriques :

$$F_{P_h} = -\rho_f g \int_{-\alpha}^{\alpha} (z_0 - R_{se} \cos \theta) (\underline{e}_{z_f} \cos \theta + \underline{e}_{y_f} \sin \theta) R_{se} d\theta$$

Les effets dans la direction latérale s'annulent par symétrie. L'équation devient :

$$F_{P_h} = \rho_f g (R_{se}^2 \alpha + R_{se} \sin(\alpha) (-2z_0 + R_{se} \cos(\alpha))) \underline{e}_{z_f} \quad (2.6.56)$$

L'expression du poids du fluide à l'intérieur du tube avec celui de la paroi est :

$$F_g = (\rho_f g \pi R_{si}^2 + \rho_t g \pi H_s (H_s + 2R_{si})) \underline{e}_{z_f} \quad (2.6.57)$$

Ainsi, l'équilibre entre les deux forces linéiques F_{P_h} et F_g dépend de la masse volumique des différents milieux. La densité du matériau étant légèrement plus élevée que celle de l'eau, il est nécessaire d'avoir un dispositif permettant d'alléger la masse volumique totale du tube pour l'empêcher de couler. La profondeur d'immersion du système hou-lomoteur est obtenue lorsque l'équilibre des forces est vérifié.

2.6.4 Conclusions

La dynamique du système houlomoteur est régie par trois équations différentielles qui prennent en compte les variations de pression de part et d'autre de la paroi par les milieux fluides :

$$\begin{cases} F_{RR}^{-T} \frac{P_i - P_e}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{RX}}{\partial X} - \frac{P_{\theta\theta}}{R_0} & = \rho_t \ddot{w} \\ F_{\theta R}^{-T} \frac{P_i - P_e}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{\theta X}}{\partial X} + \frac{P_{R\theta}}{R_0} & = \rho_t \ddot{v} \\ F_{XR}^{-T} \frac{P_i - P_e}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{X\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{XX}}{\partial X} & = \rho_t \ddot{u} \end{cases}$$

Avec P_{IJ} les différents termes du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff qui dépendent des déplacements de la paroi.

Ensuite les conditions à l'équilibre statique sont déterminées en émettant les hypothèses que le tube reste parfaitement cylindrique et que les effets de torsion sont négligés, afin de développer le gradient de déformations. Seuls les termes principaux interviennent :

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_s}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \lambda_{xs} X}{\partial X} \end{bmatrix}$$

En utilisant la condition d'incompressibilité :

$$J_s = \det(\mathbf{F}_s) = 1$$

Une relation pour le rayon statique en fonction du rayon au repos est développé :

$$R_s(R) = \sqrt{\frac{R^2 - (R_0 - H/2)^2}{\lambda_{xs}} + \left(\lambda_{\theta s} R_0 - \frac{H}{2\lambda_{xs}\lambda_{\theta s}} \right)^2}$$

L'équilibre des forces est réalisé avec les contraintes de Cauchy, ce qui permet de faciliter les développements.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rrs}}{\partial R_s} + \frac{\sigma_{rrs} - \sigma_{\theta\theta s}}{R_s} & = 0 \\ \frac{1}{R_s} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta s}}{\partial \theta} & = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xxs}}{\partial x_s} & = 0 \end{cases}$$

A partir de la première équation de l'équilibre statique, il en résulte une expression

pour la pression interne requise pour la mise en pré-contrainte du tube :

$$P_0 = \int_{R_{si}}^{R_{se}} \frac{\sigma_{\theta\theta s}^D - \sigma_{rrs}^D}{R_s} dR_s$$

Ensuite, en combinant la première et la troisième équation ainsi que les conditions aux limites aux extrémités du tube, il en résulte l'expression de l'équilibre des forces global :

$$F_m = \pi \int_{R_{si}}^{R_{se}} (2\sigma_{xxs}^D - \sigma_{\theta\theta s}^D - \sigma_{rrs}^D) R_s dR_s$$

La résolution de cette équation permet de déterminer le ratio d'allongement du tube, constant sur toute la longueur d'après la troisième équation de l'équilibre des forces.

Dernièrement, les forces de pressions agissant sur le tube au repos après immersion sont calculées.

$$F_{P_h} = \rho_f g (R_{se}^2 \alpha + R_{se} \sin(\alpha) (-2z_0 + R_{se} \cos(\alpha))) \mathbf{e}_{z_f}$$

L'expression du poids du fluide à l'intérieur du tube avec celui de la paroi est :

$$F_g = (\rho_f g \pi R_{si}^2 + \rho_t g \pi H_s (H_s + 2R_{si})) \mathbf{e}_{z_f}$$

L'équilibre entre ces deux forces permet de déterminer la ligne de flottaison du tube au repos.

2.7 Conclusions du chapitre

Ce chapitre a permis d'établir les équations qui permettent de décrire la dynamique du système houlomoteur. Les différentes étapes et résultats importants sont rappelés.

2.7.1 Fluide interne

La dynamique du fluide interne a été analysé dans la deuxième section. De par les propriétés de l'écoulement du fluide interne (aucun échange avec l'extérieur, incompressible et sans viscosité), la théorie potentielle a été choisie pour modéliser son comportement. Les équations gouvernant la dynamique du fluide interne sont :

$$\nabla^2 \phi = 0$$

dans le domaine fluide interne et :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

au niveau de l'interface fluide-structure. La pression dans le fluide interne est obtenu à l'aide de l'équation de Bernoulli non-stationnaire :

$$P_t = -\rho_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi^2 \right) + P_s$$

2.7.2 Dynamique du fluide externe

Le fluide externe est modélisé avec la théorie potentielle, régie par l'équation de Laplace. Avec la condition de surface libre, des équations supplémentaires interviennent par rapport au fluide interne pour modéliser les perturbations. L'équation de la dynamique de surface libre linéaire est :

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial t} = -g\eta \Big|_{z=0}$$

Afin de modéliser l'interaction entre le système houlomoteur et le fluide externe, le potentiel externe (ϕ_e) est décomposé suivant une partie incidente (ϕ_{eI}), diffractée (ϕ_D) et rayonnée (ϕ_{Ri}).

$$\phi_e = \phi_{eI} + \phi_D + \sum_{i=1}^N \phi_{Ri}$$

Une fois le potentiel perturbé calculé à l'aide d'un modèle hydrodynamique, il est alors possible de déterminer les forces de pression avec l'équation de la dynamique linéarisée.

$$P_e = -\rho_f \frac{\partial \phi_e}{\partial t}$$

2.7.3 Repères

Cette section a servi à établir les différents repères en coordonnées cylindriques et les relations permettant le passage entre l'état au repos et déformé du système. Les coordonnées cartésiennes dans la configuration déformée s'obtiennent ainsi :

$$\begin{cases} x = X \lambda_{xs} + u(\theta, X, t) \\ y = R_s \sin \theta + \sin \theta w(\theta, X, t) + \cos \theta v(\theta, X, t) \\ z = R_s \cos \theta + \cos \theta w(\theta, X, t) - \sin \theta v(\theta, X, t) \end{cases}$$

2.7.4 Modèle de structure

Ensuite, les propriétés du matériau ont été analysées afin de pouvoir mettre en place un modèle représentatif. Le matériau est hyperélastique avec des effets visqueux et est considéré incompressible. Le modèle de Yeoh a été utilisé pour représenter les effets hyperélastiques et a été complété par un modèle de fibres. Il en résulte une fonction d'énergie anisotrope (Ψ) qui a permis d'établir l'expression des contraintes agissant dans le matériau.

$$\Psi = \Psi_{Yeoh} + \Psi_{Fibres}$$

Les contraintes de Piola-Kirchhoff sont directement liées aux déplacements de la structure grâce à l'utilisation de cette fonction d'énergie.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} + \mathbf{P}_i^D - p \mathbf{J} \mathbf{F}^{-T}$$

Avec \mathbf{P}_i^D la composante déviatorique des contraintes prenant en compte les effets de viscosité et \mathbf{F} le gradient des déformations de la paroi du tube.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(R_s+w)}{\partial R} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial(R_s+w)}{\partial \theta} - v \right) & \frac{\partial(R_s+w)}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + R_s + w \right) & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial \theta} & \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial X} \end{bmatrix}$$

La composante déviatorique instantanée des contraintes se calcule ainsi :

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F}(C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2) + 8k_1 \frac{\lambda_f - 1}{\lambda_f} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial(R_s+w)}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\lambda_{xs}X+u)}{\partial X} \end{pmatrix}$$

Avec I_1 le premier invariant défini équation 2.5.17 et λ_f , l'élongation des fibres définie équation 2.5.28. Une fois la composante déviatorique instantanée connue, l'effet mémoire du matériau peut être pris en compte avec la relation 2.5.9.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^D - \rho \mathbf{J} \mathbf{F}^{-T}$$

Dans le cas où il est plus facile d'utiliser les contraintes de Cauchy, la relation de passage à partir des contraintes de Piola-Kirchhoff est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{P} \mathbf{F}^T$$

Enfin, la composante hydrostatique dynamique, nécessaire pour avoir une expression complète des contraintes, est obtenue à l'aide des contraintes de Cauchy dans la direction radiale :

$$p_d = P_{RRd}^D F_{RRd}$$

2.7.5 Dynamique du système houlomoteur

La dernière section a permis de présenter les différentes étapes pour obtenir un système d'équations qui permette de décrire les déformations du système houlomoteur en fonction de la pression de part et d'autre de la paroi et des contraintes de Piola-Kirchhoff. Le système résultant avec la condition de paroi mince est :

$$\begin{cases} F_{RR}^{-T} \frac{P_i - P_e}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{RX}}{\partial X} - \frac{P_{\theta\theta}}{R_0} & = \rho_t \ddot{w} \\ F_{\theta R}^{-T} \frac{P_i - P_e}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{\theta X}}{\partial X} + \frac{P_{R\theta}}{R_0} & = \rho_t \ddot{v} \\ F_{XR}^{-T} \frac{P_i - P_e}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{X\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{XX}}{\partial X} & = \rho_t \ddot{u} \end{cases}$$

À partir de ces équations, l'équilibre des forces pour la mise sous pression du tube est établi. Une expression pour le rayon statique est développée en fonction du rayon initial ainsi que pour la pression interne du tube en fonction de l'allongement radial

souhaité.

$$R_s(R) = \sqrt{\frac{R^2 - (R_0 - H/2)^2}{\lambda_{xs}} + \left(\lambda_{\theta s} R_0 - \frac{H}{2\lambda_{xs}\lambda_{\theta s}}\right)^2}$$

$$P_0 = \int_{R_{si}}^{R_{se}} \frac{\sigma_{\theta\theta s}^D - \sigma_{rrs}^D}{R_s} dR_s$$

Une expression pour la pression hydrostatique après la mise sous pression est obtenue à l'aide des conditions aux limites :

$$p_s \approx \sigma_{rrs}^D$$

Chapitre 3

Élaboration d'un modèle numérique

Ce deuxième chapitre porte sur la mise en place d'une méthode numérique permettant la résolution des équations de la dynamique du chapitre précédent. Il existe de nombreuses méthodes de résolution d'équations dépendant de la géométrie du système telles que les différences finies ou éléments finis. Dans le cas du système houlomoteur, de par sa forme allongée, la méthode de résolution choisie est basée sur la décomposition des équations sous forme d'une base modale. Cette méthode, étant plus adaptée à la géométrie du système, permet de s'affranchir d'un maillage numérique et d'avoir des simulations beaucoup plus rapides.

Pour définir les modes de déformation du système, les équations de la dynamique sont linéarisées en considérant ses déformations comme étant une somme de signaux harmoniques. Du fait que le matériau constituant le système houlomoteur est hyperélastique et que le système est au préalable pré-contraint, de nombreux termes apparaissent lors de cette linéarisation. La méthode pour obtenir chaque terme est présentée en première partie.

La section suivante porte sur le développement de la base modale. Les conditions aux limites à chaque extrémité du tube sont déterminées pour pouvoir établir les modes de vibration du système. Après avoir linéarisé les équations de la dynamique, chaque équation est projetée sur l'ensemble des déformations modales et intégrée sur la surface du tube. Grâce à cette projection, il est possible d'injecter les conditions aux limites du tube dans les équations de la dynamique, et de générer la base modale propre au système houlomoteur.

Enfin, grâce à la base modale, les matrices de masse, de raideur et d'amortissement nécessaires pour l'établissement du modèle numérique sont directement obtenues. Cette dernière section est décomposée en deux sous-parties. D'une part le modèle

numérique linéaire, où sont décrites les matrices et les forces extérieures discrétisées puis le modèle numérique non-linéaire. Dans la deuxième sous partie, les équations de la dynamique sont reprises et modifiées afin de n'avoir que les effets non-linéaires. Ainsi des forces non-linéaires sont rajoutées au modèle linéaire pour inclure les effets d'ordre supérieur de la paroi.

3.1 Linéarisation des équations

Les équations du chapitre précédent constituent la base de la dynamique du système houlomoteur et sont non-linéaires, en particulier les termes du tenseur de Piola-Kirchhoff. La résolution du système d'équations 2.6.19 à 2.6.21 et de l'écoulement interne se fait en passant par une base modale ce qui implique de linéariser toutes les équations. Ce travail de linéarisation a été fait dans des études telles que Altenbach ([5]) ou Tuzel ([36]) mais aucune avec un matériau anisotrope et en utilisant le modèle hyper-élastique de Yeoh.

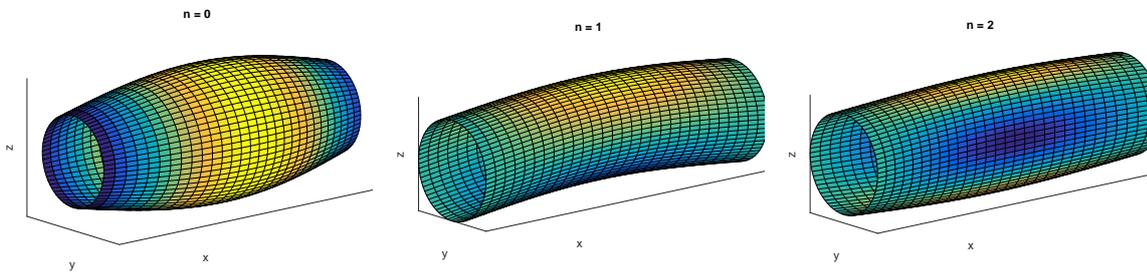


FIGURE 3.1 – Exemple de déformations associées aux différents nombres d'onde circconférentielle $n = 0, 1, 2$ et pour un nombre d'onde axiale $k = \pi/L$

Les déplacements u , v et w sont définis comme étant des fonctions symétriques avec l'axe vertical. Ces fonctions périodiques en θ et X s'écrivent de la manière suivante [33] :

$$\begin{aligned}
 w(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(X, t) \cos(n\theta) \\
 v(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(X, t) \sin(n\theta) \\
 u(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(X, t) \cos(n\theta)
 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

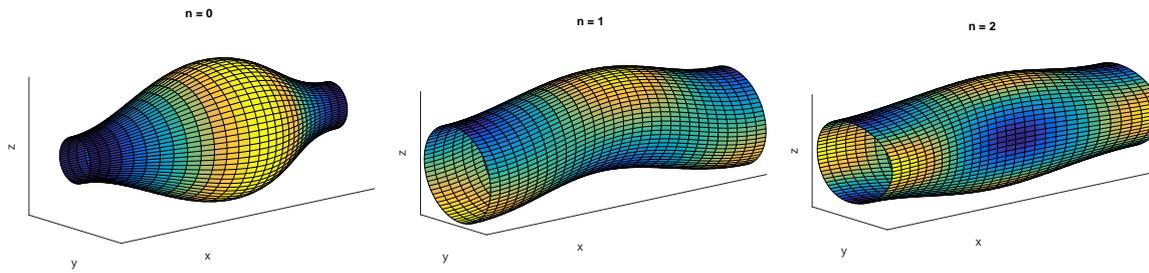


FIGURE 3.2 – Exemple de déformations associées aux différents nombres d’onde circconférentielle $n = 0, 1, 2$ et pour un nombre d’onde axiale $k = 2\pi/L$

Avec n le nombre d’onde circconférentielle et u_n, v_n, w_n les amplitudes des déplacements qui dépendent de la variable X et du temps t . Les déplacements représentés figures 3.1 et 3.2 correspondent à $n = 0, 1, 2$, pour un nombre d’onde axiale égale à $k = \pi/L$ et $k = 2\pi/L$.

Les autres déplacements possibles, non symétriques avec l’axe vertical, tels que les mouvements en lacets ne sont pas pris en compte.

Les solutions recherchées sont de type :

$$\begin{aligned}
 w_n(X, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} w_{mn} e^{ik_{nm}X\lambda_{xs}} e^{-i\omega_{nm}t} \\
 v_n(X, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} v_{mn} e^{ik_{nm}X\lambda_{xs}} e^{-i\omega_{nm}t} \\
 u_n(X, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} u_{mn} e^{ik_{nm}X\lambda_{xs}} e^{-i\omega_{nm}t}
 \end{aligned}$$

Avec k_{nm} et ω_{nm} le nombre d’onde axiale et la pulsation des mouvements périodiques pour un nombre d’onde circconférentielle donné. La sommation en n concerne le nombre d’onde circconférentielle et en m le nombre d’onde axiale.

3.1.1 Gradients de déformations

Les premiers éléments devant être linéarisés sont les différents gradients de déformation (gradient et inverse de la transposée du gradient) nécessaires pour le calcul des contraintes et des pressions dans les équations de la dynamique. L’expression du gra-

dient des déformations (2.5.13) est décomposé suivant une partie statique et linéaire :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{R}{\lambda_{xs}R_s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{rR1} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & \frac{\partial w}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial u}{\partial X} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_1 \quad (3.1.2)$$

L'expression de F_{rR1} est obtenue à l'aide de la condition d'incompressibilité :

$$\det(\mathbf{F}) = \left(\frac{R}{\lambda_{xs}R_s} + F_{rR1} \right) \left(\frac{1}{R} \left(R_s + w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left(\lambda_{xs} + \frac{\partial u}{\partial X} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial X} \right) = 1$$

Après avoir isolé F_{rR1} et développé les différents termes :

$$F_{rR1} = - \frac{R}{\lambda_{xs}R_s} \frac{w\lambda_{xs} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\lambda_{xs} + \frac{\partial u}{\partial X}R_s + w\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial X}}{\left(R_s + w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left(\lambda_{xs} + \frac{\partial u}{\partial X} \right) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial X}}$$

Cette relation est ensuite linéarisée :

$$F_{rR1} \approx - \frac{R}{(\lambda_{xs}R_s)^2} \left(w\lambda_{xs} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\lambda_{xs} + \frac{\partial u}{\partial X}R_s \right) \quad (3.1.3)$$

L'inverse de la transposée du gradient des déformations linéarisé est obtenue à partir des relations 2.5.15 et 3.1.3 en gardant seulement les termes du premier ordre :

$$\mathbf{JF}_1^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{R} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\lambda_{xs}}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_{xs}}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & -\frac{R}{R_s^2} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) & -\frac{1}{R_s\lambda_{xs}} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ -\frac{R_s}{R} \frac{\partial w}{\partial X} & -\frac{R}{R_s\lambda_{xs}} \frac{\partial v}{\partial X} & -\frac{1}{\lambda_{xs}^2} \frac{\partial u}{\partial X} \end{bmatrix} \quad (3.1.4)$$

Les termes statiques sont :

$$\mathbf{JF}_s^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{R_s\lambda_{xs}}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R}{R_s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_{xs}} \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

3.1.2 Contraintes linéaires de Piola-Kirchhoff

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est décomposé suivant une partie statique et une partie linéaire.

$$\mathbf{P} \approx \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_1 + \mathbf{B}_1(\omega) \quad (3.1.6)$$

La partie statique des contraintes de Piola-Kirchhoff est obtenue avec les contraintes calculées lors de la mise sous pression du tube (eq.2.6.38) et la relation de passage entre

les tenseurs des contraintes (eq.2.5.5).

$$\mathbf{P}_s = J\boldsymbol{\sigma}_s\mathbf{F}_s^{-T}$$

La partie linéaire est obtenue en calculant les termes du premier ordre des contraintes de Piola-Kirchhoff. Le tenseur des contraintes se décompose suivant sa composante hydrostatique et déviatorique, puis pour la composante déviatorique, suivant les deux types d'énergie ; isotrope et anisotrope. On rappelle l'équation du tenseur :

$$\mathbf{P} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}} - pJ\mathbf{F}^{-T} = \frac{\partial\psi_{Yeoh}}{\partial\mathbf{F}} + \frac{\partial\psi_{fibres}}{\partial\mathbf{F}} - pJ\mathbf{F}^{-T}$$

Les paragraphes suivants expliquent la méthode pour linéariser les différentes composantes.

Composante isotrope

Les termes dépendant du modèle de Yeoh sont développés :

$$\frac{\partial\psi_{Yeoh}}{\partial\mathbf{F}} = \frac{\partial\psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{F}} = 2 \frac{\partial\psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \mathbf{F}$$

L'équation précédente est linéarisée autour de l'équilibre statique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_{Yeoh}}{\partial\mathbf{F}} &\approx 2 \left(\left. \frac{\partial\psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \right|_s + \left. \frac{\partial\psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \right|_{O(1)} \right) (\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_1) \\ &\approx 2 \left(\left. \frac{\partial\psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \right|_s (\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_1) + \left. \frac{\partial\psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \right|_{O(1)} \mathbf{F}_s \right) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Les tenseurs \mathbf{F}_s et \mathbf{F}_1 correspondent aux gradients des déformations statique et du premier ordre définis précédemment (eq.3.1.2). La dérivée de l'énergie potentielle isotrope à l'équilibre statique est :

$$\left. \frac{\partial\psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \right|_s = C_{10} + 2C_{20}(I_{1s} - 3) + 3C_{30}(I_{1s} - 3)^2 \quad (3.1.8)$$

et le premier invariant à l'équilibre statique :

$$I_{1s} = \left(\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right)^2 + \left(\frac{R_s}{R} \right)^2 + \lambda_{xs}^2$$

Un développement limité est réalisé par rapport au premier invariant pour le calcul

de la dérivée de l'énergie isotrope linéaire :

$$\frac{\partial \psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_{O(1)} = \frac{\partial^2 \psi_{Yeoh}}{\partial I_1^2} (I_{1O(1)} - 0)$$

En rappel, le premier invariant est : $I_1 = tr(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$, qui peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} I_1 &\approx tr((\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_1)^T (\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_1)) \\ &\approx tr(\mathbf{F}_s^T \mathbf{F}_s) + 2tr(\mathbf{F}_s^T \mathbf{F}_1) \end{aligned}$$

Donc au premier ordre, l'expression devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_{O(1)} &= \frac{\partial^2 \psi_{Yeoh}}{\partial I_1^2} 2tr(\mathbf{F}_s^T \mathbf{F}_1) \\ &= \frac{\partial^2 \psi_{Yeoh}}{\partial I_1^2} 2 \left(F_{rR1} \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} + \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \frac{R_s}{R} + \frac{\partial u}{\partial X} \lambda_{xs} \right) \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Avec

$$\frac{\partial^2 \psi_{Yeoh}}{\partial I_1^2} = 2C_{20} + 6C_{30}(I_{1s} - 3) \quad (3.1.10)$$

En assemblant les différentes relations, l'expression de la composante isotrope linéaire est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{Yeoh}}{\partial \mathbf{F}} &\approx 2 \frac{\partial \psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s \begin{pmatrix} F_{rR1} + \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & \frac{\partial w}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \left(R_s + w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} & \lambda_{xs} + \frac{\partial u}{\partial X} \end{pmatrix} \\ &+ 4 \frac{\partial^2 \psi_{Yeoh}}{\partial I_1^2} \left(F_{rR1} \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} + \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \frac{R_s}{R} + \frac{\partial u}{\partial X} \lambda_{xs} \right) \begin{pmatrix} \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

On peut constater que pour un matériau isotrope, les contraintes de Piola-Kirchhoff dépendent linéairement du tenseur des déformations et de la trace de ce dernier.

Composante anisotrope

La même approche est utilisée pour la linéarisation de la composante anisotrope en utilisant l'équation 2.5.26, rappelée ici. L'action des fibres dans les contraintes est :

$$\frac{\partial \psi_{fibres}}{\partial \mathbf{F}} = 8k_1 \frac{\lambda_f - 1}{\lambda_f} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\lambda_{xs} X + u)}{\partial X} \end{pmatrix}$$

Et λ_f le ratio d'élongation des fibres :

$$\lambda_f = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 + \left(\lambda_{xs} + \frac{\partial u}{\partial X}\right)^2} \quad (3.1.12)$$

L'équation 2.5.26 est linéarisée autour de l'équilibre statique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{fibres}}{\partial \mathbf{F}} &\approx 8k_1 \left(\frac{\lambda_{fs} - 1}{\lambda_{fs}} + \frac{\lambda_f - 1}{\lambda_f} \Big|_{O(1)} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial X} + \lambda_{xs} \end{pmatrix} \\ &\approx 8k_1 \left(\frac{\lambda_{fs} - 1}{\lambda_{fs}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial X} + \lambda_{xs} \end{pmatrix} + (\lambda_{fs} - 1) \frac{1}{\lambda_f} \Big|_{O(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{pmatrix} + \frac{\lambda_{f1}}{\lambda_{fs}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

En rappel, le ratio d'élongation statique des fibres λ_{fs} est identique à l'élongation axiale du tube λ_{xs} de par la disposition des fibres. Après un développement limité l'élongation des fibres au premier ordre est :

$$\begin{aligned} \lambda_{fs} &= \lambda_{xs} \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_{xs}} \frac{\partial w}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_{xs}} \frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 + 1 + \frac{2}{\lambda_{xs}} \frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{1}{\lambda_{xs}} \frac{\partial u}{\partial X}\right)^2} \\ &\approx \lambda_{xs} + \frac{\lambda_{xs}}{2} \left(\left(\frac{1}{\lambda_{xs}} \frac{\partial w}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_{xs}} \frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 + \frac{2}{\lambda_{xs}} \frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{1}{\lambda_{xs}} \frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 \right) \\ &\approx \lambda_{xs} + \frac{\partial u}{\partial X} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

et l'inverse linéaire après un développement limité de la relation précédente :

$$\frac{1}{\lambda_f} \Big|_{O(1)} = \frac{1}{\lambda_{xs}} \left(-\frac{1}{\lambda_{xs}} \frac{\partial u}{\partial X} \right) \quad (3.1.14)$$

En assemblant les différentes relations, de nombreux termes s'annulent. La composante anisotropique linéaire est :

$$\frac{\partial \psi_{fibres}}{\partial \mathbf{F}} \approx 8k_1 \left(\frac{\lambda_{xs} - 1}{\lambda_{xs}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial X} \end{pmatrix} \right) \quad (3.1.15)$$

Composante hydrostatique

L'expression de la pression hydrostatique des contraintes est rappelée :

$$\begin{cases} p = P_i + F_{RR}P_{RR}^D & |(R=R_i) \\ p = P_e + F_{RR}P_{RR}^D & |(R=R_e) \end{cases}$$

Pour calculer les termes linéaires de la pression hydrostatique, les pressions de part et d'autre de la paroi sont négligés, ce qui résulte en :

$$p \approx F_{RR}P_{RR}^D \quad (3.1.16)$$

Le terme complet comprenant la composante hydrostatique dans les contraintes de Piola-Kirchhoff est :

$$p\mathbf{F}^{-T} = F_{RR}P_{RR}^D\mathbf{F}^{-T}$$

En utilisant le premier terme de l'équation 3.1.11 et en ne conservant que les termes linéaires, la contrainte radiale dans la direction radiale est :

$$\begin{aligned} P_{RR}^D F_{RR} &\approx 2 \left(\frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s \left(\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} + F_{rR1} \right) + \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_{O(1)} \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right) \left(\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} + F_{rR1} \right) \\ &\approx 2 \left(\frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s F_{rR1} + \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_{O(1)} \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right) \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} + 2 \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} F_{rR1} \end{aligned}$$

Ensuite en prenant en compte l'inverse de la transposée des déformations :

$$P_{RR}^D F_{RR} \mathbf{F}^{-T} \approx P_{RR}^D F_{RR} \mathbf{F}_s^{-T} \quad (3.1.17)$$

Seuls les termes statiques sont utilisés pour l'inverse de la transposé des déformations étant donné que la composante hydrostatique des contraintes ne comporte que des termes linéaires. Cependant, lorsque la composante statique est rajoutée, l'équation complète est :

$$p\mathbf{F}^{-T} \approx P_{RR}^D F_{RR} \mathbf{F}_s^{-T} + p_s \mathbf{F}_1^{-T} + p_s \mathbf{F}_s^{-T} \quad (3.1.18)$$

Assemblage des composantes et égalités

A partir des développements précédents, le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff linéarisé est ré-écrit de la manière suivante en isolant les différents termes du tenseur

des déformations.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} P_{11vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{11ux} \frac{\partial u}{\partial X} & P_{12vw} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & P_{13wx} \frac{\partial w}{\partial X} \\ P_{21vw} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & P_{22vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{22ux} \frac{\partial u}{\partial X} & P_{23vx} \frac{\partial v}{\partial X} + P_{23ut} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ P_{31wx} \frac{\partial w}{\partial X} & P_{32vx} \frac{\partial v}{\partial X} + P_{32ut} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} & P_{33vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \end{pmatrix} \quad (3.1.19)$$

Plusieurs égalités apparaissent qui seront utiles pour le développement de la base modale. Les différents termes sont les suivants :

$$P_{12vw} = P_{32ut} = 2 \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s \quad (3.1.20)$$

$$P_{13wx} = P_{23vx} = 2 \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s + 8k_1 \frac{\lambda_{xs} - 1}{\lambda_{xs}} \quad (3.1.21)$$

$$P_{32vx} = P_{23ut} = p_s \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \quad (3.1.22)$$

$$P_{22ux} = P_{33vw} = 4 \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s \left(\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right)^3 + 4 \frac{\partial^2 \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1^2} \Big|_s \left(\left(\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right)^2 - \left(\frac{R_s}{R} \right)^2 \right) \left(\left(\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right)^3 - \frac{\lambda_{xs} R}{R_s} \right) \quad (3.1.23)$$

$$P_{22vw} = 2 \left(\frac{R}{R_s} \right)^2 \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s \left(\left(\frac{R_s}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right)^2 \right) + 4 \left(\frac{R}{R_s} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1^2} \Big|_s \left(\left(\frac{R_s}{R} \right)^2 - \left(\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{R}{R_s} \right)^2 p_s \quad (3.1.24)$$

$$P_{33ux} = 2 \left(\frac{1}{\lambda_{xs}} \right)^2 \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s \left(\lambda_{xs}^2 + 2 \left(\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right)^2 \right) + 4 \left(\frac{1}{\lambda_{xs}} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1^2} \Big|_s \left(\lambda_{xs}^2 - \left(\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_{xs}} \right)^2 p_s + 8k_1 \quad (3.1.25)$$

Les termes P_{11} , P_{21} et P_{31} ne sont pas présentés car ils n'interviennent pas dans le calcul de la dynamique du système houlomoteur.

3.1.3 Amortissement fréquentiel

Il est considéré que les contraintes linéaires de Piola-Kirchhoff ont la forme suivante :

$$\mathbf{P} \approx \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_1 + \mathbf{B}_1(\omega) \quad (3.1.26)$$

On suppose que le tenseur d'amortissement linéaire de Piola-Kirchoff $\mathbf{B}_1(\omega)$ est constitué des mêmes variables que le tenseur des contraintes linéaire (eq.3.1.19) :

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} B_{11vw} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + B_{11ux} \frac{\partial u}{\partial X} & B_{12vw} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & B_{13ux} \frac{\partial w}{\partial X} \\ B_{21vw} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & B_{22vw} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + B_{22ux} \frac{\partial u}{\partial X} & B_{23vx} \frac{\partial v}{\partial X} + B_{23ut} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ B_{31wx} \frac{\partial w}{\partial X} & B_{32vx} \frac{\partial v}{\partial X} + B_{32ut} \frac{\partial u}{\partial \theta} & B_{33vw} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + B_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \end{pmatrix} \quad (3.1.27)$$

Et que les mêmes égalités doivent être respectées :

$$\begin{aligned} B_{12vw} &= B_{32ut} \\ B_{13wx} &= B_{23vx} \\ B_{32vx} &= RB_{23ut} \\ B_{22ux} &= RB_{33vw} \end{aligned}$$

L'approche unidimensionnelle est utilisée pour linéariser les effets visco-élastiques. Le modèle de visco-élasticité linéaire employé est celui de Kelvin-Voigt [6]. Ce modèle est constitué d'un amortissement et d'un ressort monté en parallèle. La contrainte de ce modèle correspond à la somme de ces deux éléments :

$$\sigma = \kappa \varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \varepsilon_0 (\kappa \sin \omega t + \eta \omega \cos \omega t) \quad (3.1.28)$$

On considère un échantillon de matériau de longueur l et de section a soumis à des déformations sinusoïdales :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t \quad (3.1.29)$$

Tout matériau visco-élastique présente un décalage dans la contrainte par rapport à l'élongation imposée, que l'on appellera δ . La contrainte est ré-écrite avec la formulation suivante :

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) = \sigma_0 (\sin(\omega t) \cos(\delta) + \cos(\omega t) \sin(\delta)) \quad (3.1.30)$$

Avec l'utilisation du modèle de Kelvin-Voigt, le déphasage est exprimé ainsi :

$$\sin(\delta) = \omega \eta \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \quad (3.1.31)$$

La variable $\tan(\delta)$ est obtenue en faisant le ratio entre les termes de viscosité par les termes d'élasticité. Cette variable permet d'estimer le comportement du matériau, s'il est a dominante élastique ou visqueuse :

$$\tan(\delta) = \frac{\omega \eta}{\kappa} \quad (3.1.32)$$

Lors d'un cycle complet, le travail réalisé par l'échantillon de matériau est :

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^{2\pi/\omega} a\sigma(t)l \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt \\
 &= al\sigma_0\varepsilon_0\omega \left(\cos(\delta) \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt + \sin(\delta) \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t) \cos(\omega t) dt \right) \quad (3.1.33) \\
 &= \pi al\sigma_0\varepsilon_0 \sin(\delta)
 \end{aligned}$$

Il est à noter que le travail réalisé par le matériau lors d'un cycle de déformation est causé par les termes qui sont en déphasage. Ce travail correspond à l'énergie dissipée lors d'un cycle. Pour un matériau purement élastique, il n'y aurait aucune dissipation d'énergie.

Ce qui résulte pour l'expression de l'amortissement linéaire en fonction de la pulsation ω lors d'un cycle (eq.3.1.33) :

$$\eta = \frac{W}{\pi al\varepsilon_0^2\omega} \quad (3.1.34)$$

Pour calculer les coefficients d'amortissement B_{ij} , les neuf variables (u, v, w puis leur dérivées $\partial(\bullet)/\partial X$ et $\partial(\bullet)/\partial\theta$) constituant le tenseur des déformations \mathbf{F} sont excitées individuellement autour de l'équilibre statique d'une amplitude ε_0 . L'énergie dissipée par les composantes du tenseur de Piola-Kirchhoff est calculée pour ensuite obtenir les différents coefficients d'amortissement avec la relation 3.1.34 pour une unité de volume.

Cette méthode permet une bonne estimation de l'amortissement et de la raideur autour de l'équilibre statique (fig.3.3) mais présente l'inconvénient de dépendre de l'amplitude du déplacement qui est inconnu. Il est considéré que l'amplitude des déformations ε_0 est de 50% des déformations statiques : $\varepsilon_0 = R_0(\lambda_{\theta_s} - 1)/2$.

La figure 3.3 montre la variation de contrainte résultante $N_{\theta\theta} = \int P_{\theta\theta} dR$ lorsque les déformations radiales w sont imposées autour de l'équilibre statique, d'une amplitude :

$$\varepsilon_0 = 0.21(1.3 - 1)/2 = 0.0315$$

La courbe des contraintes non-linéaires démarre à l'équilibre statique avec $N_{\theta\theta_s} = 1925 Pa.m$. En imposant les déformations ε_0 sur plusieurs cycles, la courbe s'écarte de l'équi-

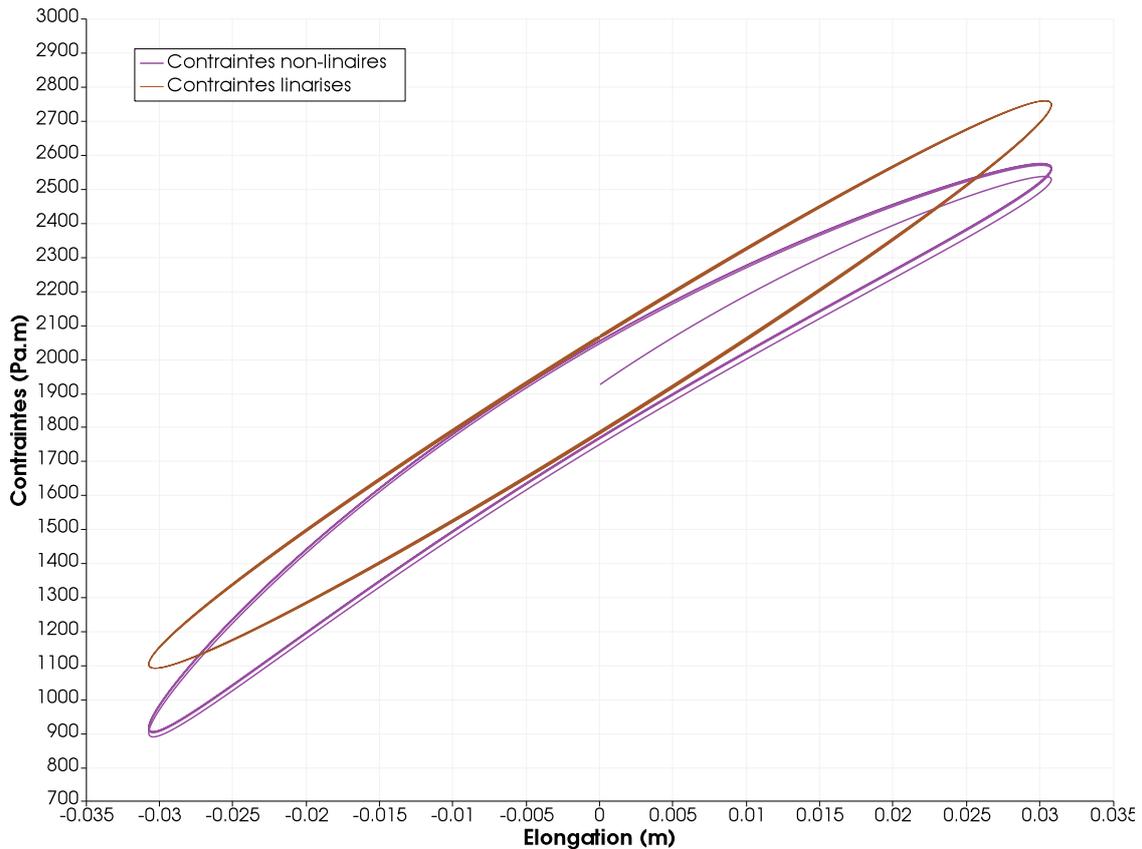


FIGURE 3.3 – Linéarisation de la contrainte radiale autour de l'équilibre statique

libre et oscille autour dû aux effets de viscosité. La deuxième courbe correspond aux contraintes après linéarisation. Le volume contenue dans les deux courbes, représentatif de l'énergie dissipée est identique, seul l'effet de courbure non-linéaire n'est pas repris mais une raideur linéaire équivalente est estimée. Lorsque les effets de viscosité ne sont pas pris en compte alors la raideur linéaire estimée est égale aux coefficients 3.1.20 à 3.1.25 calculés précédemment. Cette approche numérique aurait pu être utilisée au lieu d'établir les relations des contraintes au premier ordre mais cette méthode à le défaut de ne pas générer exactement les mêmes résultats pour les égalités du tenseur. Or pour la base modale, il est indispensable de vérifier ces différentes égalités pour s'assurer d'avoir des modes orthogonaux.

3.1.4 Écoulement potentiel interne

La condition aux limites entre le fluide et la paroi (eq.2.3.5) est linéarisée en considérant les déformations autour de l'équilibre statique. Étant donné que le tube est par-

faitement cylindrique dans ce cas, seules les déformations radiales interviennent.

$$\left. \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right|_{r=R_s} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.1.35)$$

La solution du potentiel de vitesse est obtenue en utilisant la méthode de séparation des variables. On pose :

$$\phi_i(r, \theta, X, t) = A(r)B(\theta, X, t) \quad (3.1.36)$$

En utilisant la condition aux limites 3.1.35, on obtient :

$$B(\theta, X, t) = \frac{1}{A'(R_s)} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.1.37)$$

Le potentiel de vitesse peut donc s'écrire ainsi :

$$\phi_i(r, \theta, X, t) = \frac{A(r)}{A'(R_s)} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.1.38)$$

Afin de trouver la fonction $A(r)$ et sa dérivée à $r = R_s$, la relation obtenue précédemment est injectée dans l'équation de continuité :

$$\nabla^2 \phi_i = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \quad (3.1.39)$$

En utilisant la définition des déplacement radiaux w (eq.3.1.1) et pour un nombre circonferentiel n donné, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} \frac{1}{A'(R_s) r^2} (r^2 A''(r) + r A'(r) + A(r) (i^2 k_{nm}^2 r^2 - n^2)) = 0 \quad (3.1.40)$$

La solution de l'équation précédente est :

$$A(r) = c_1 J_n(ik_{nm}r) \quad (3.1.41)$$

Avec c_1 une constante, J_n la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n (le nombre circonferentiel) et sa dérivée qui est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_n(ik_{nm}r)}{\partial r} &= \frac{ik}{2} (J_{n-1}(ik_{nm}r) - J_{n+1}(ik_{nm}r)) \\ &= \frac{1}{r} (ik_{nm}r J_{n-1}(ik_{nm}r) - n J_n(ik_{nm}r)) \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

La fonction potentielle décrivant l'écoulement interne s'écrit donc :

$$\phi_i(r, \theta, X, t) = R_s \frac{J_n(ik_{nm}r)}{ik_{nm}R_s J_{n-1}(ik_{nm}R_s) - nJ_n(ik_{nm}R_s)} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.1.43)$$

Dans la suite du développement, après avoir linéarisé les équations de la dynamique, il en résulte un système de trois équations à trois inconnues correspondant aux déplacements w , v et u . Le déterminant de ce système matriciel correspond à l'équation de propagation du système houlomoteur et les racines du déterminant constituent les nombres d'ondes pour une pulsation donnée. Il aurait été possible de déterminer les racines du déterminant à l'aide d'un algorithme adapté mais il a été préféré d'avoir un déterminant sous forme polynômial.

Les équations de Bessel sont donc simplifiées et seul les premiers termes sont pris en compte. La même méthode a été utilisée par Païdoussis [32]. Les fonctions de Bessel de première espèce sont définies par la série suivante :

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} \quad (3.1.44)$$

En utilisant que les deux premiers termes de la série, la fonction potentielle (eq. 3.1.43) se simplifie ainsi :

$$\begin{aligned} \phi(R_s, \theta, X, t) &\approx \frac{R_s \left(\frac{1}{n!} \left(\frac{ik_{nm}R_s}{2}\right)^n - \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{ik_{nm}R_s}{2}\right)^{2+n} \right)}{ik_{nm}R_s \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{ik_{nm}R_s}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{n!} \left(\frac{ik_{nm}R_s}{2}\right)^{n+1} \right) - n \left(\frac{1}{n!} \left(\frac{ik_{nm}R_s}{2}\right)^n - \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{ik_{nm}R_s}{2}\right)^{2+n} \right)} \frac{\partial w}{\partial t} \\ &\approx R_s \frac{4(n+1) + (k_{nm}R_s)^2}{4n(n+1) + (n+2)(k_{nm}R_s)^2} \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned}$$

Cette manipulation revient à estimer que la variable $k_{nm}R_s$ est proche de zéro.

En ne gardant que les termes linéaires de l'équation de Bernoulli (eq.2.2.14), on en déduit la relation pour la pression dynamique linéaire agissant sur la paroi du tube :

$$P_{id} = -\rho_f R_s \frac{4(n+1) + (k_{nm}R_s)^2}{4n(n+1) + (n+2)(k_{nm}R_s)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho_{vf} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.1.45)$$

Avec la variable de densité virtuelle du fluide définie ainsi :

$$\rho_{vf} = \rho_f R_s \frac{4(n+1) + (k_{nm}R_s)^2}{4n(n+1) + (n+2)(k_{nm}R_s)^2} \quad (3.1.46)$$

Lorsque $n = 0$ la relation est :

$$\rho_{vf} = \rho_f R_s \left(\frac{2}{(k_{nm} R_s)^2} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.1.47)$$

et lorsque $n > 0$, étant donné que le rayon est considéré faible devant les nombres d'onde, la relation est simplifiée :

$$\rho_{vf} = \rho_f \frac{R_s}{n} \quad (3.1.48)$$

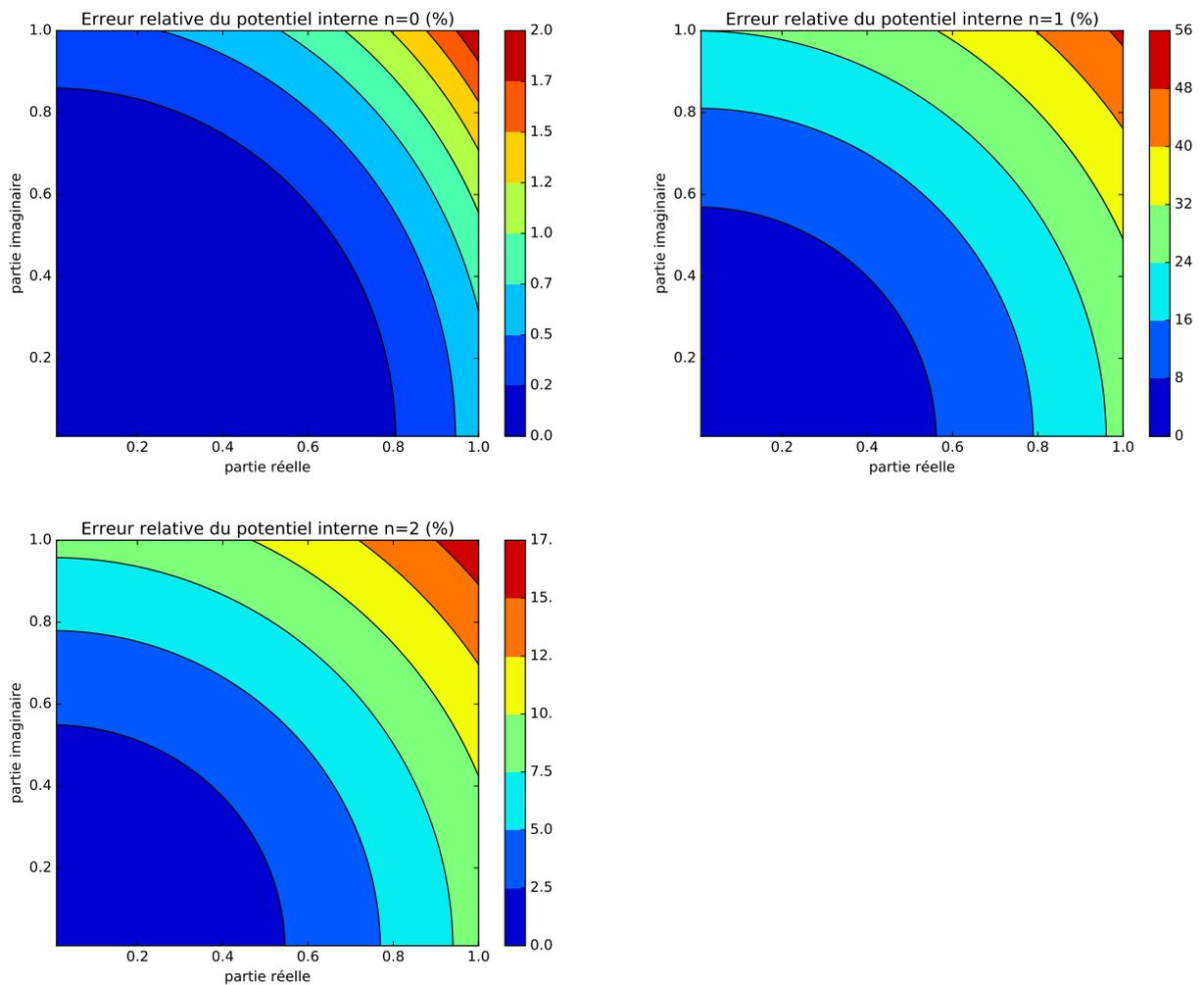


FIGURE 3.4 – Erreur relative entre le potentiel de vitesse interne et la formulation approchée pour différentes valeurs de $ik_{nm}R_s$ et $n = 0, 1, 2$

La figure 3.4 montre l'erreur relative entre les formulations approchées et la forme complète du potentiel de vitesse interne (eq.3.1.43) pour des valeurs de $ik_{nm}R_s$ inférieures ou égale à 1. Lorsque $n = 0$, l'erreur relative n'est que de 2%. Cependant l'erreur monte jusqu'à 56% pour $n = 1$ et 17% pour $n = 2$. Ceci implique que le nombre d'onde

axiale k_{nm} devra être inférieur à $1/R_s$ pour $n = 0$ et qu'il faudra le limiter à $k_{nm} = 0.5/R_s$ afin de ne pas avoir plus de 10% d'erreur. Si l'on considère la longueur d'onde axiale $L_{nm} = 2\pi/k_{nm}$ alors la valeur minimale pour $n > 0$ devra être de :

$$L_{nm} \geq 4\pi R_s \quad (3.1.49)$$

et pour $n = 0$:

$$L_{0m} \geq 2\pi R_s \quad (3.1.50)$$

3.1.5 Conclusions

Cette section aura permis de linéariser tous les différents termes requis pour le développement de la base modale. Les déplacements de la paroi du tube sont considérés de la forme suivante :

$$\begin{aligned} w(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(X, t) \cos(n\theta) \\ v(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(X, t) \sin(n\theta) \\ u(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(X, t) \cos(n\theta) \end{aligned}$$

Les premiers termes à être linéarisés sont ceux du gradient de déformation, requis pour le développement des contraintes :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{R}{\lambda_{xs} R_s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{rR1} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & \frac{\partial w}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial u}{\partial X} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_1$$

En utilisant la condition d'incompressibilité et en linéarisant l'expression résultante, le terme F_{rR1} est écrit comme suit :

$$F_{rR1} \approx -\frac{R}{(\lambda_{xs} R_s)^2} \left(w \lambda_{xs} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \lambda_{xs} + \frac{\partial u}{\partial X} R_s \right)$$

Ensuite, les termes de l'inverse de la transposé du gradient des déformations sont linéarisés :

$$\mathbf{JF}_1^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{R} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\lambda_{xs}}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_{xs}}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & -\frac{R}{R_s^2} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) & -\frac{1}{R_s \lambda_{xs}} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ -\frac{R_s}{R} \frac{\partial w}{\partial X} & -\frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \frac{\partial v}{\partial X} & -\frac{1}{\lambda_{xs}^2} \frac{\partial u}{\partial X} \end{bmatrix}$$

Les termes statiques sont :

$$\mathbf{JF}_s^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{R_s \lambda_{xs}}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R}{R_s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_{xs}} \end{bmatrix}$$

Avec ces différents tenseurs, les contraintes de Piola-Kirchhoff sont linéarisées suivant les différentes composantes. La composante isotrope :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial \mathbf{F}} &\approx 2 \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s \begin{pmatrix} F_{rR1} + \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & \frac{\partial w}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \left(R_s + w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} & \lambda_{xs} + \frac{\partial u}{\partial X} \end{pmatrix} \\ &+ 4 \frac{\partial^2 \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1^2} \left(F_{rR1} \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} + \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \frac{R_s}{R} + \frac{\partial u}{\partial X} \lambda_{xs} \right) \begin{pmatrix} \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La composante anisotrope :

$$\frac{\partial \Psi_{fibres}}{\partial \mathbf{F}} \approx 8k_1 \begin{pmatrix} \lambda_{xs} - 1 & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial X} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial X} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Et la pression hydrostatique du matériau.

$$p \mathbf{F}^{-T} \approx P_{RR}^D F_{RR} \mathbf{F}_s^{-T} + p_s \mathbf{F}_1^{-T} + p_s \mathbf{F}_s^{-T}$$

$$P_{RR}^D F_{RR} \approx 2 \left(\frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s F_{rR1} + \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_{O(1)} \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} \right) \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} + 2 \frac{\partial \Psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \Big|_s \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} F_{rR1}$$

Ensuite tous les termes sont assemblés afin d'obtenir le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff linéaires :

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} P_{11vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{11ux} \frac{\partial u}{\partial X} & P_{12vw} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & P_{13wx} \frac{\partial w}{\partial X} \\ P_{21vw} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & P_{22vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{22ux} \frac{\partial u}{\partial X} & P_{23vx} \frac{\partial v}{\partial X} + P_{23ut} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ P_{31wx} \frac{\partial w}{\partial X} & P_{32vx} \frac{\partial v}{\partial X} + P_{32ut} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} & P_{33vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \end{pmatrix}$$

Ensuite les effets de viscosité du matériau sont linéarisés en utilisant le modèle de Kelvin-Voigt qui représente un matériau visco-élastique comme un ressort et un amortisseur en parallèle. Les contraintes visco-élastiques après linéarisation sont décrites

ainsi :

$$\mathbf{P} \approx \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_1 + \mathbf{B}_1(\omega)$$

Il est considéré que le tenseur d'amortissement linéaire de Piola-Kirchoff $\mathbf{B}_1(\omega)$ est constitué des mêmes variables que le tenseur des contraintes linéaire :

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} B_{11vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + B_{11ux} \frac{\partial u}{\partial X} & B_{12vw} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & B_{13ux} \frac{\partial w}{\partial X} \\ B_{21vw} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & B_{22vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + B_{22ux} \frac{\partial u}{\partial X} & B_{23vx} \frac{\partial v}{\partial X} + B_{23ut} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ B_{31wx} \frac{\partial w}{\partial X} & B_{32vx} \frac{\partial v}{\partial X} + B_{32ut} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} & B_{33vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + B_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \end{pmatrix}$$

Puis le tenseur des contraintes statique est obtenue avec la relation de transfert à partir des contraintes de Cauchy :

$$\mathbf{P}_s = J \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{F}_s^{-T}$$

Enfin, la pression interne calculée à partir de fonctions de Bessel est également linéarisée, ce qui résulte en :

$$P_{id} = -\rho_f R_s \left(\frac{2}{(k_{nm} R_s)^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Lorsque $n = 0$ et lorsque $n > 0$:

$$P_{id} = -\rho_f \frac{R_s}{n} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

3.2 Développement de la base modale

Après avoir linéarisé les déplacements et conditions aux limites, les relations nécessaires au développement de la base modale sont décrites. Les équations du bilan de quantité de mouvement (2.6.19 à 2.6.21) sont ré-écrites avec les termes du premier ordre des contraintes de Piola-Kirchhoff et de la dynamique du fluide interne.

$$\begin{aligned}
& JF_{RR1}^{-T} \frac{P_{is}}{H} + \frac{\rho_{vf}}{H} \omega^2 w \frac{R_{s0} \lambda_{xs}}{R_0} + \frac{P_{12vw}}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) \\
& + P_{13wx} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} - \frac{1}{R_0} \left(\frac{P_{22vw}}{R_0} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{22ux} \frac{\partial u}{\partial X} \right) = -\rho_t \omega^2 w
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}
& JF_{\theta R1}^{-T} \frac{P_{is}}{H} + \frac{1}{R_0} \left(\frac{P_{22vw}}{R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{22ux} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial X} \right) \\
& + P_{23vx} \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{P_{23ut}}{R_0} \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{P_{12vw}}{R_0^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) = -\rho_t \omega^2 v
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$\begin{aligned}
& JF_{XR1}^{-T} \frac{P_{is}}{H} + \frac{1}{R_0} \left(P_{32vx} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{P_{32ut}}{R_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \\
& + P_{33ux} \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{P_{33vw}}{R_0} \frac{\partial}{\partial X} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = -\rho_t \omega^2 u
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Avec P_{ij} les termes linéaires du tenseur de Piola-Kirchhoff obtenus précédemment (eqs.3.1.20 à 3.1.25).

3.2.1 Équation de propagation

La méthode qui suit vient des développements de Païdoussis ([32]) et Sabri [33]. Les trois équations de la dynamique (eqs.3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3) sont rassemblées pour former un système matriciel :

$$[\mathbf{H}] \begin{pmatrix} W_n \\ V_n \\ U_n \end{pmatrix} = 0 \tag{3.2.4}$$

Afin d'avoir une solution non-triviale de l'équation 3.2.4, le déterminant de la matrice $[\mathbf{H}]$ doit être égal à zéro. Il en résulte un polynôme d'ordre 3, appelé équation de propagation, dont chaque racine correspond au carré du nombre d'onde axiale, qui est

solution du système d'équations linéaires.

$$a_6k^6 + a_4k^4 + a_2k^2 + a_0 = 0 \quad (3.2.5)$$

La solution complète est obtenue en sommant chaque solution particulière avec leurs constantes W_{jmn} , V_{jmn} et U_{jmn} ($j = 1, 2, 3$) associées :

$$\begin{aligned} w_{mn}(X, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 W_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn}X\lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn}X\lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm}t} \\ v_{mn}(X, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 V_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn}X\lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn}X\lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm}t} \\ u_{mn}(X, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn}X\lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn}X\lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm}t} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Pour chaque famille de mode circonférentiel n , il existe une infinité de mode axiaux m satisfaisant l'équation de propagation (eq.3.2.4) et les conditions aux limites de la structure. Chacun de ces modes est constitué de 3 constantes et 3 nombre d'onde axiale.

Les constantes V_{jmn} et U_{jmn} peuvent être exprimées en fonction de W_{jmn} :

$$V_{jmn} = \alpha_{jmn}W_{jmn} ; U_{jmn} = \beta_{jmn}W_{jmn} \quad (3.2.7)$$

Les constantes α_{jmn} et β_{jmn} sont des nombres complexes dépendant du nombre d'onde k_{jmn} . En injectant la relation 3.2.7 dans le système 3.2.4 alors les constantes α_{jmn} et β_{jmn} peuvent être obtenues pour tout W_{jmn} par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} H_{22} & H_{23} \\ H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{jmn} \\ \beta_{jmn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{21} \\ -H_{31} \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

Où les termes H_{ij} correspondent aux éléments de la matrice $[\mathbf{H}]$ de l'équation 3.2.4.

Les différents termes du système matriciel réduit sont analysés afin de déterminer

la forme de α_{jmn} et β_{jmn} en fonction de k_{jmn} .

$$\begin{aligned} H_{22} &= \rho_t \omega^2 - \frac{P_{12vw}}{R_0^2} + \frac{P_{22vw}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + P_{23vx} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\lambda_{xs} P_{is} - P_{es}}{R_0 H} \\ H_{23} &= \frac{P_{22ux}}{R_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial X} + \frac{P_{23ut}}{R_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial X} \\ H_{32} &= \frac{P_{32vx}}{R_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial X} + \frac{P_{33vw}}{R_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial X} \\ H_{33} &= \rho_t \omega^2 + \frac{P_{32ut}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + P_{33ux} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \end{aligned}$$

Et les termes de droite :

$$\begin{aligned} H_{21} &= \frac{P_{12vw}}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{P_{22vw}}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\lambda_{xs} P_{is} - P_{es}}{R_0 H} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ H_{31} &= \frac{P_{33vw}}{R_0} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{R_{s0} (P_{is} - P_{es})}{R_0 H} \frac{\partial}{\partial X} \end{aligned}$$

Les dérivées par rapport à X indiquent le comportement de chaque terme par rapport à k_{jmn} . Ainsi les termes H_{22} , H_{33} et H_{21} dépendent de k_{jmn}^2 . Ce sont donc des fonctions paires et les autres termes (H_{23} , H_{32} et H_{31}) qui dépendent de k_{jmn} sont des fonctions impaires. Après inversion du système matriciel réduit, l'expression des constantes est :

$$\begin{cases} \alpha_{jmn} \\ \beta_{jmn} \end{cases} = \frac{1}{H_{22}H_{33} - H_{23}H_{32}} \begin{bmatrix} H_{33} & -H_{23} \\ -H_{32} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -H_{21} \\ -H_{31} \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

Il en résulte que la constante α_{jmn} est paire par rapport à k_{jmn} , donc $\alpha_{jmn}(k_{jmn}) = \alpha_{jmn}(-k_{jmn})$ et β_{jmn} est impaire ; $\beta_{jmn}(k_{jmn}) = -\beta_{jmn}(-k_{jmn})$. Ces propriétés seront nécessaires pour la construction des modes.

Cette étape permet de déterminer le nombre d'onde k_{jmn} , qui est fonction de la pulsation ω_{nm} . Or, cette dernière ainsi que et les différents coefficients α_{jmn} et β_{jmn} dépendent des 6 inconnues qui seront déterminées grâce aux conditions aux limites.

3.2.2 Conditions aux limites

Le tube est fermé par des obturateurs de masse M_{th} qui sont reliés aux ancrages qui servent à maintenir le système houlomoteur en place. Chaque extrémité présente les mêmes conditions aux limites qui permettront de fermer le problème. Ainsi, de chaque côté, trois conditions sont nécessaires afin de former 6 équations qui serviront à déterminer les 6 inconnues.

Au niveau de chaque tête de tube, l'équilibre des forces est :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{R_{si}} P_i R_s dR_s d\theta \mathbf{n} + F_M - \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} \mathbf{P} \mathbf{n} R dR d\theta = \pm (M_{th} \ddot{\mathbf{u}} + K_M \mathbf{u}) \Big|_{X=\pm L/2} \quad (3.2.10)$$

Avec F_M , K_M la prétention et la raideur d'ancrage et \mathbf{n} la normale par rapport à la surface au niveau des têtes de tube. Le vecteur des contraintes agissant à chaque extrémité est :

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{e}_x = \{P_{RX}, P_{\beta X}, P_{XX}\}^T \quad (3.2.11)$$

Chaque terme est exprimé avec les éléments du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff linéarisé (eq.3.1.19).

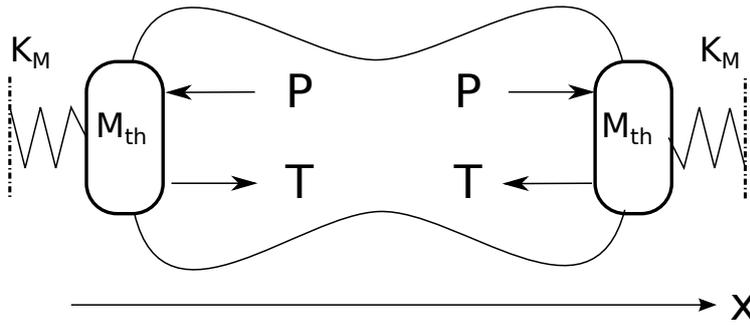


FIGURE 3.5 – Équilibre des forces de pression et de tension axiale aux extrémités du tube

Afin de simplifier la résolution du problème, les conditions aux limites sont réparties suivant le nombre d'onde circonférentielle n .

$n=0$

Lorsque le nombre d'onde circonférentielle est égal à zéro, ce sont les effets de renflement couplés avec le déplacement axial qui sont modélisés. Les déplacements circonférentiels (v) sont nuls sur toute la longueur du tube. Ceci implique que les termes $H_{12} = H_{21} = H_{22} = H_{23} = H_{32} = 0$ sont nuls et que le problème est axisymétrique. Dans ce cas particulier, $\alpha_{jmn} = 0$. Cependant, de par le couplage avec le fluide interne, le nombre d'inconnues à déterminer suite au calcul du déterminant (eq.3.2.4) est de 6 au lieu de 4 comme il aurait été le cas pour un tube vide.

Les obturateurs à chaque extrémité du tube empêchent toute déformation radiale, ce qui se traduit par :

$$w_{\pm L/2} = 0 \quad (3.2.12)$$

Dans le cas où $n = 0$, seuls les déplacements horizontaux interviennent en bout de tube, ainsi, l'équilibre des forces (eq.3.2.10) se fait que dans la direction axiale et peut se réécrire de manière plus condensée après intégration et en retirant les termes provenant de l'équilibre statique :

$$\pi R_{s0}^2 P_{id} = \pm (M_{th} \ddot{u} + K_{Mx} u) + 2\pi R_0 H P_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \Big|_{X=\pm L/2} \quad (3.2.13)$$

L'expression de la pression interne dynamique (P_{id}) pour un écoulement potentiel linéaire (eq.3.1.45) lorsque le nombre d'onde circonférentielle est nul est réécrit différemment en utilisant une double intégrale sur la longueur du tube :

$$P_{id} = \rho_f \left(\frac{2\lambda_{xs}^2}{R_{s0}} \iint \ddot{w} dX dX - \frac{R_{s0}}{2} \ddot{w} \right) \quad (3.2.14)$$

En prenant en compte le fait que les déplacements radiaux sont bloqués aux extrémités, le deuxième terme de la pression interne s'annule au niveau des têtes de tube.

$$P_{id}(X = \pm L/2) = \rho_f \frac{2\lambda_{xs}^2}{R_{s0}} \iint \ddot{w} dX dX \quad (3.2.15)$$

Après avoir réalisé l'équilibre des forces au niveau des têtes de tube, la troisième condition aux limites est obtenue par la continuité du mouvement entre les deux milieux. Aux extrémités du tube, les déplacements axiaux du fluide et de la paroi du tube doivent être identiques :

$$u_f|_{\pm L/2} = u|_{\pm L/2} \quad (3.2.16)$$

L'expression pour le déplacement horizontal du fluide est obtenue à partir du potentiel de vitesse :

$$\ddot{u}_f|_{\pm L/2} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x} \Big|_{\pm L/2} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial P_{id}}{\partial X} \Big|_{\pm L/2} = -\frac{2\lambda_{xs}}{R_{s0}} \int \ddot{w} dX \quad (3.2.17)$$

Les conditions aux limites (eqs. 3.2.12, 3.2.13 et 3.2.17) sont additionnées ou soustraites. Avec l'expression des déplacements (eqs.3.2.6) et en convertissant les fonctions exponentielles en fonctions trigonométriques ainsi que la parité des constantes α_{jmn} et

β_{jmn} , il en résulte trois paires d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^3 \cos\left(\frac{L}{2}\lambda_{xs}k_{jm0}\right) W_{jm0}^+ = 0 \\ \sum_{j=1}^3 \left(\frac{K_{Mx} - \omega^2 M_{th}}{2\pi} \beta_{jm0} \sin\left(\frac{L}{2}\lambda_{xs}k_{jm0}\right) \right. \\ \left. + \left(\lambda_{xs}k_{jm0} R_0 HP_{33ux} \beta_{jm0} + \frac{i\rho_f \omega^2 R_{s0}^2}{R_{s0} k_{jm0}^2} \right) \cos\left(\frac{L}{2}\lambda_{xs}k_{jm0}\right) \right) W_{jm0}^+ = 0 \\ \sum_{j=1}^3 \left(\frac{2}{k_{jm0} R_{s0}} + i\beta_{jm0} \right) \sin\left(\frac{L}{2}\lambda_{xs}k_{jm0}\right) W_{jm0}^+ = 0 \end{array} \right. \quad (3.2.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^3 \sin\left(\frac{L}{2}\lambda_{xs}k_{j0m}\right) W_{jm0}^- = 0 \\ \sum_{j=1}^3 \left(\frac{K_{Mx} - \omega^2 M_{th}}{2\pi} \beta_{jm0} \cos\left(\frac{L}{2}\lambda_{xs}k_{jm0}\right) \right. \\ \left. - \left(\lambda_{xs}k_{jm0} R_0 HP_{33ux} \beta_{jm0} + \frac{i\rho_f \omega^2 R_{s0}^2}{R_{s0} k_{jm0}^2} \right) \sin\left(\frac{L}{2}\lambda_{xs}k_{jm0}\right) \right) W_{jm0}^- = 0 \\ \sum_{j=1}^3 \left(\frac{2}{k_{jm0} R_{s0}} + i\beta_{jm0} \right) \cos\left(\frac{L}{2}\lambda_{xs}k_{jm0}\right) W_{jm0}^- = 0 \end{array} \right. \quad (3.2.19)$$

Avec comme variables :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 W_{jm0}^+ &= (W_1 + W_2) + (W_3 + W_4) + (W_5 + W_6) \\ \sum_{j=1}^3 W_{jm0}^- &= (W_1 - W_2) + (W_3 - W_4) + (W_5 - W_6) \end{aligned}$$

Deux groupes distincts apparaissent formant chacun un système matriciel. Dans un cas les variables sont W_{jm0}^+ et dans l'autre W_{jm0}^- . Les racines du déterminant de chaque système correspondent aux fréquences d'excitation des modes du système houlomoteur. Le premier système matriciel décrit les déformations symétriques et le deuxième système les déformations antisymétriques. Le nombre de fréquences étant solution du déterminant de chaque matrice est infini. Ainsi, l'intervalle de recherche des fréquences doit être limité à un intervalle donné afin d'avoir un nombre de modes suffisant pour recomposer les déformations de la structure.

n=1

Lorsque le nombre d'onde circonférentielle est égal à 1, les sections de tube se déplacent verticalement. Les déformations latérales sont bloquées et il est considéré que les têtes de tube sont libres (le moment d'inertie des têtes de tube est négligé). A partir de ces simplifications et des équations 2.4.7 on en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} y_{\pm L/2} = (w \sin \theta + v \cos \theta)_{\pm L/2} = 0 \\ P_{33\pm L/2} = \left(P_{33vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \right)_{\pm L/2} = 0 \end{cases}} \quad (3.2.20)$$

Les autres directions de l'équilibre des forces sur chaque manchon du tube (eq.3.2.10) sont prises en compte :

$$\begin{cases} \mp (M_{th}\ddot{w} + K_{Mz}w) = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} P_{RX} R dR d\theta \Big|_{X=\pm L/2} \\ \mp (M_{th}\ddot{v} + K_{Mz}v) = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} P_{\theta X} R dR d\theta \Big|_{X=\pm L/2} \end{cases} \quad (3.2.21)$$

Les relations sont multipliées par $\cos \theta$ pour l'équation en w et $\sin \theta$ pour l'équation en v , puis soustraites, et les contraintes sont exprimées à l'aide des termes du premier ordre (eq.3.1.19) :

$$\begin{aligned} \mp (M_{th}\ddot{w} + K_{Mz}w) \sin \theta \pm (M_{th}\ddot{v} + K_{Mz}v) \cos \theta = \\ 2\pi R_0 H \left(P_{13wx} \frac{\partial w}{\partial X} \sin \theta - \left(P_{23vx} \frac{\partial v}{\partial X} + P_{23ut} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \cos \theta \right) \Big|_{X=\pm L/2} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

L'équation 3.2.22 est ensuite simplifiée par $\cos \theta \sin \theta$. Comme précédemment les conditions aux limites sont additionnées ou retranchées. Les systèmes matriciels obtenus sont :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 (1 + \alpha_{jm1}) \cos \left(\frac{L}{2} k_{jm1} \lambda_{xs} \right) W_{jm1}^+ = 0 \\ \sum_{j=1}^3 (P_{33vw} (1 + \alpha_{jm1}) + iP_{33ux} k_{jm1} \lambda_{xs} \beta_{jm1}) \cos \left(\frac{L}{2} k_{jm1} \lambda_{xs} \right) W_{jm1}^+ = 0 \\ \sum_{j=1}^3 \left((K_{Mz} - M_{th} \omega^2) \frac{(1 - \alpha_{jm1})}{2\pi} \cos \left(\frac{L}{2} k_{jm1} \lambda_{xs} \right) \right. \\ \left. - R_0 H (k_{jm1} \lambda_{xs} (P_{13wx} - P_{23vx} \alpha_{jm1}) - iP_{23ut} \beta_{jm1}) \sin \left(\frac{L}{2} k_{jm1} \lambda_{xs} \right) \right) W_{jm1}^+ = 0 \end{cases} \quad (3.2.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{j=1}^3 (1 + \alpha_{jm1}) \sin\left(\frac{L}{2}k_{jm1}\lambda_{xs}\right) W_{jm1}^- = 0 \\
 \sum_{j=1}^3 (P_{33vw}(1 + \alpha_{jm1}) + iP_{33ux}k_{jm1}\lambda_{xs}\beta_{jm1}) \sin\left(\frac{L}{2}k_{jm1}\lambda_{xs}\right) W_{jm1}^- = 0 \\
 \sum_{j=1}^3 \left((K_{Mz} - M_{th}\omega^2) \frac{(1 - \alpha_{jm1})}{2\pi} \sin\left(\frac{L}{2}k_{jm1}\lambda_{xs}\right) \right. \\
 \left. + R_0 H(k_{jm1}\lambda_{xs}(P_{13wx} - P_{23vx}\alpha_{jm1}) - iP_{23ur}\beta_{jm1}) \cos\left(\frac{L}{2}k_{jm1}\lambda_{xs}\right) \right) W_{jm1}^- = 0
 \end{array} \right. \quad (3.2.24)$$

$n > 1$

Il est considéré que les têtes de tube sont indéformables, ainsi lorsque le nombre d'onde circonférentielle est supérieur à 1, il en résulte les conditions aux limites suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} w_{\pm L/2} = 0 \\ v_{\pm L/2} = 0 \\ u_{\pm L/2} = 0 \end{cases}} \quad (3.2.25)$$

Les systèmes matriciels associés sont :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{j=1}^3 \beta_{jmn>1} \sin\left(\frac{L}{2}k_{jmn>1}\lambda_{xs}\right) W_{jmn>1}^+ = 0 \\
 \sum_{j=1}^3 \alpha_{jmn>1} \cos\left(\frac{L}{2}k_{jmn>1}\lambda_{xs}\right) W_{jmn>1}^+ = 0 \\
 \sum_{j=1}^3 \cos\left(\frac{L}{2}k_{jmn>1}\lambda_{xs}\right) W_{jmn>1}^+ = 0
 \end{array} \right. \quad (3.2.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{j=1}^3 \beta_{jmn>1} \cos\left(\frac{L}{2}k_{jmn>1}\lambda_{xs}\right) W_{jmn>1}^- = 0 \\
 \sum_{j=1}^3 \alpha_{jmn>1} \sin\left(\frac{L}{2}k_{jmn>1}\lambda_{xs}\right) W_{jmn>1}^- = 0 \\
 \sum_{j=1}^3 \sin\left(\frac{L}{2}k_{jmn>1}\lambda_{xs}\right) W_{jmn>1}^- = 0
 \end{array} \right. \quad (3.2.27)$$

3.2.3 Calcul des modes

Dans les deux sous-sections précédentes, la méthode pour calculer le nombre d'onde des modes ainsi que leur fréquence associée a été décrite. Ensuite, afin de calculer les différents modes, il est nécessaire de connaître les différentes constantes W_i . En rappel, l'expression des modes est la suivante :

$$\begin{aligned}
 w_{mn}(X,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 W_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn}X\lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn}X\lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm}t} \\
 v_{mn}(X,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 V_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn}X\lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn}X\lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm}t} \\
 u_{mn}(X,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn}X\lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn}X\lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm}t}
 \end{aligned}$$

Les constantes V_{jmn} et U_{jmn} sont reliées à W_{jmn} par la relation 3.2.7.

Les conditions aux limites dans la section précédente peuvent être ré-écrites sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_1^+ \\ W_2^+ \\ W_3^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_1^- \\ W_2^- \\ W_3^- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Afin de s'assurer que la solution des systèmes matriciels ne soit pas triviale ; que le vecteur W_i^+ ou W_i^- soit différent de zero, il en résulte les égalités suivantes dans le cas W_i^+ :

$$\begin{cases} W_1 = W_2 \\ W_3 = W_4 \\ W_5 = W_6 \end{cases} \quad (3.2.28)$$

et dans le cas W_i^- :

$$\begin{cases} W_1 = -W_2 \\ W_3 = -W_4 \\ W_5 = -W_6 \end{cases} \quad (3.2.29)$$

De la même manière qu'il a été calculé précédemment, pour les constantes V_{jmn} et U_{jmn} en fonction de W_{jmn} , il est possible de calculer les constantes W_3 , W_4 , W_5 et W_6 en fonction de W_1 et W_2 .

$$\begin{pmatrix} W_2^+ \\ W_3^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.2.30)$$

$$\begin{pmatrix} W_2^- \\ W_3^- \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} B_{22} & B_{23} \\ B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.2.31)$$

Ainsi, utilisant les parités des constantes α_{jmn} et β_{jmn} les modes peuvent être décrits à une constante près dans le cas des modes paires :

$$\begin{cases} u_{mn} = \sum_j (e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X}) W_{jmn} \beta_{jmn} \\ v_{mn} = \sum_j (e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X}) W_{jmn} \alpha_{jmn} \\ w_{mn} = \sum_j (e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X}) W_{jmn} \end{cases} \quad (3.2.32)$$

Et pour les modes impaires :

$$\begin{cases} u_{mn} = \sum_j (e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X}) W_{jmn} \beta_{jmn} \\ v_{mn} = \sum_j (e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X}) W_{jmn} \alpha_{jmn} \\ w_{mn} = \sum_j (e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}X}) W_{jmn} \end{cases} \quad (3.2.33)$$

Pour $j = 2, 4, 6$.

Cette formulation présente le défaut de diverger très vite lorsque X prend des valeurs importantes à cause de la fonction exponentielle. Une ré-écriture de l'expression des modes est nécessaire.

Chaque équation des différents systèmes est divisée par $\cos(\frac{L}{2}k_{jmn}\lambda_{xs})$. Ainsi, chaque système se retrouve divisé par $\prod_{j=1}^3 \cos(\frac{L}{2}k_{jmn}\lambda_{xs})$. Cette manipulation ne change en rien l'expression des modes étant donné que leur amplitude est définie à une variable

près. Après simplification, il en résulte :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \beta_{jmn} \\ v_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \alpha_{jmn} \\ w_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \end{array} \right. \quad (3.2.34)$$

Et pour les modes impaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \beta_{jmn} \\ v_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \alpha_{jmn} \\ w_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \end{array} \right. \quad (3.2.35)$$

Pour $j = 2, 4, 6$.

L'étape suivante consiste à normaliser l'amplitude des modes afin de résoudre la dernière inconnue. Cette normalisation est réalisée à partir de la matrice de masse de la base modale du système.

3.2.4 Base Modale

Le développement de la base modale se fait à partir des équations de la dynamique linéaire du tube que l'on vient projeter sur les différents déplacements :

$$\iiint_{\Omega_0} (\nabla \cdot \mathbf{P}_1)_m^T \mathbf{u}_l dV = \iiint_{\Omega_0} \rho_t \ddot{\mathbf{u}}_m^T \mathbf{u}_l dV \quad (3.2.36)$$

Avec Ω_0 le domaine définie par le volume V . Les indices m et l correspondent aux différents modes du système houlomoteur.

Le système précédent écrit entièrement est :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \mathbf{JF}_{RR1m}^{-T} \frac{P_{is}}{H} + \frac{\rho_{vf}}{H} \ddot{w}_m \frac{R_{s0} \lambda_{xs}}{R_0} + \frac{P_{12vw}}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - v_m \right) \right. \\
 & \quad \left. + P_{13wx} \frac{\partial^2 w_m}{\partial X^2} - \frac{1}{R_0} \left(\frac{P_{22vw}}{R_0} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) + P_{22ux} \frac{\partial u_m}{\partial X} \right) \right\} w_l dX d\theta \\
 & + \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \mathbf{JF}_{\theta R1m}^{-T} \frac{P_{is}}{H} + \frac{1}{R_0} \left(\frac{P_{22vw}}{R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) + P_{22ux} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial u_m}{\partial X} \right) \right. \\
 & \quad \left. + P_{23vx} \frac{\partial^2 v_m}{\partial X^2} + \frac{P_{23ut}}{R_0} \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial u_m}{\partial \theta} + \frac{P_{12vw}}{R_0^2} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - v_m \right) \right\} v_l dX d\theta \\
 & + \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \mathbf{JF}_{XR1m}^{-T} \frac{P_{is}}{H} + \frac{1}{R_0} \left(P_{32vx} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial v_m}{\partial X} + \frac{P_{32ut}}{R_0} \frac{\partial^2 u_m}{\partial \theta^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + P_{33ux} \frac{\partial^2 u_m}{\partial X^2} + \frac{P_{33vw}}{R_0} \frac{\partial}{\partial X} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) \right\} u_l dX d\theta \\
 & = \rho_t \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} (\ddot{w}_m w_l + \ddot{v}_m v_l + \ddot{u}_m u_l) dX d\theta \tag{3.2.37}
 \end{aligned}$$

Plusieurs intégrations par parties sont réalisées sur les dérivées en θ et X . Les termes supplémentaires provenant des intégrations sur θ s'annulent car les variables sont identiques en 0 et 2π . Après simplifications, et en prenant en compte les termes de l'inverse de la transposée du gradient des déformations au premier ordre (eq. 3.1.4),

l'équation devient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \frac{P_{is}}{H} \left(\frac{R_{s0}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} + \frac{\lambda_{xs}}{R_0} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) \right) w_l + \frac{R_{s0} \lambda_{xs}}{R_0 H} \rho_{vf} \ddot{w}_m w_l - \frac{P_{12vw}}{R_0^2} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - v_m \right) \frac{\partial w_l}{\partial \theta} \right. \\
& \quad \left. - P_{13wx} \frac{\partial w_m}{\partial X} \frac{\partial w_l}{\partial X} - \frac{P_{22vw}}{R_0^2} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) w_l - \frac{P_{22ux}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} w_l \right\} dX d\theta \\
& + \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ - \frac{P_{is} \lambda_{xs}}{H R_0} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - v_m \right) v_l - \frac{P_{22vw}}{R_0^2} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) \frac{\partial v_l}{\partial \theta} - \frac{P_{22ux}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} \frac{\partial v_l}{\partial \theta} \right. \\
& \quad \left. - P_{23vx} \frac{\partial v_m}{\partial X} \frac{\partial v_l}{\partial X} - \frac{P_{23ut}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial \theta} \frac{\partial v_l}{\partial X} + \frac{P_{12vw}}{R_0^2} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - v_m \right) v_l \right\} dX d\theta \\
& + \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ - \frac{P_{is} R_{s0}}{H R_0} \frac{\partial w_m}{\partial X} u_l - \frac{P_{32vx}}{R_0} \frac{\partial v_m}{\partial X} \frac{\partial u_l}{\partial \theta} - \frac{P_{32ut}}{R_0^2} \frac{\partial u_m}{\partial \theta} \frac{\partial u_l}{\partial \theta} \right. \\
& \quad \left. - P_{33ux} \frac{\partial u_m}{\partial X} \frac{\partial u_l}{\partial X} - \frac{P_{33vw}}{R_0} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u_l}{\partial X} \right\} dX d\theta \\
& + \int_0^{2\pi} \left[P_{13wx} \frac{\partial w_m}{\partial X} w_l \right]_{-L/2}^{L/2} d\theta + \int_0^{2\pi} \left[P_{23vx} \frac{\partial v_m}{\partial X} v_l + \frac{P_{23ut}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial \theta} v_l \right]_{-L/2}^{L/2} d\theta \\
& + \int_0^{2\pi} \left[P_{33ux} \frac{\partial u_m}{\partial X} u_l + \frac{P_{33vw}}{R_0} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) u_l \right]_{-L/2}^{L/2} d\theta \\
& = \rho_t \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} (\ddot{w}_m w_l + \ddot{v}_m v_l + \ddot{u}_m u_l) dX d\theta \tag{3.2.38}
\end{aligned}$$

L'intégration sur θ simplifie grandement l'équation de la base modale grâce aux égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos(a\theta) \cos(b\theta) d\theta \\ 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin(a\theta) \sin(b\theta) d\theta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } a \neq b \\ 2\pi \text{ si } a = b = 0 \\ \pi \text{ si } a = b \neq 0 \end{array} \right\} \tag{3.2.39}$$

Ceci implique qu'une base modale différente sera écrite en fonction du nombre d'onde circonférentielle et que les effets de couplage entre modes de différents nombres d'onde circonférentielle sont inexistantes au premier ordre avec les déformations considérées.

$n = 0$

Lorsque $n = 0$, les déplacements tangentiels (v) s'annulent, et en prenant en compte l'expression de la pression dynamique linéarisée, l'équation complète de la base modale est :

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \frac{P_{is}}{H} \left(\frac{R_{s0}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} + \frac{\lambda_{xs}}{R_0} w_m \right) w_l + \frac{R_{s0} \lambda_{xs}}{R_0 H} \rho_f \left(\frac{2\lambda_{xs}^2}{R_{s0}} \iint \ddot{w}_m dX dX - \frac{R_{s0}}{2} \ddot{w}_m \right) w_l \right. \\
 & \quad \left. - P_{13wx} \frac{\partial w_m}{\partial X} \frac{\partial w_l}{\partial X} - \frac{P_{22vw}}{R_0^2} w_m w_l - \frac{P_{22ux}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} w_l \right\} dX \\
 & + 2\pi \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ - \frac{P_{is} R_{s0}}{H R_0} \frac{\partial w_m}{\partial X} u_l - P_{33ux} \frac{\partial u_m}{\partial X} \frac{\partial u_l}{\partial X} - \frac{P_{33vw}}{R_0} w_m \frac{\partial u_l}{\partial X} \right\} dX \\
 & \quad + 2\pi \left[P_{13wx} \frac{\partial w_m}{\partial X} w_l \right]_{-L/2}^{L/2} + 2\pi \left[P_{33ux} \frac{\partial u_m}{\partial X} u_l + \frac{P_{33vw}}{R_0} w_m u_l \right]_{-L/2}^{L/2} \\
 & = \rho_t 2\pi \int_{-L/2}^{L/2} (\ddot{w}_m w_l + \ddot{u}_m u_l) dX \tag{3.2.40}
 \end{aligned}$$

Les termes dépendant de P_{13wx} et P_{33vw} entre crochets s'annulent par le fait que les extrémités du tube ne peuvent se déformer radialement. En rappel, les conditions aux limites sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} w|_{\pm L/2} = 0 \\ 2\pi R_0 H P_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \Big|_{X=\pm L/2} = \pi R_{s0}^2 \rho_f 2 \frac{\lambda_{xs}^2}{R_{s0}} \iint \ddot{w} dX dX \mp (M_{th} \ddot{u} + K_{Mx} u) \\ u_f|_{\pm L/2} = - \frac{2\lambda_{xs}}{R_s} \int w dX = u|_{\pm L/2} \end{array} \right.$$

La double intégrale provenant de l'expression de la pression interne est développée à l'aide d'une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
 \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{2\lambda_{xs}^2}{R_{s0}} \iint \ddot{w}_m dX dX \right) w_l dX &= \frac{2\lambda_{xs}^2}{R_{s0}} \left[\iint \ddot{w}_m dX dX \int w_l dX \right]_{-L/2}^{L/2} \\
 & - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\lambda_{xs}^2}{R_{s0}} \left(\int \ddot{w}_m dX \int w_l dX \right) dX \tag{3.2.41}
 \end{aligned}$$

Le terme entre crochets est modifié à l'aide de la relation liant les déplacements hori-

zontaux du fluide et des bouts du tube :

$$\int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{2\lambda_{xs}^2}{R_{s0}} \iint \ddot{w}_m dX dX \right) w_l dX = -\lambda_{xs} \left[\iint \ddot{w}_m dX dX u_l \right]_{-L/2}^{L/2} \quad (3.2.42)$$

$$- \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\lambda_{xs}^2}{R_{s0}} \left(\int \ddot{w}_m dX \int w_l dX \right) dX$$

En utilisant les différentes relations développées précédemment, l'équation de la base modale devient :

$$2\pi \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \frac{P_{is}}{H} \left(\frac{R_{s0}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} + \frac{\lambda_{xs}}{R_0} w_m \right) w_l - P_{13wx} \frac{\partial w_m}{\partial X} \frac{\partial w_l}{\partial X} - \frac{P_{22vw}}{R_0^2} w_m w_l - \frac{P_{22ux}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} w_l \right\} dX$$

$$+ 2\pi \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ -\frac{P_{is}}{H} \frac{R_{s0}}{R_0} \frac{\partial w_m}{\partial X} u_l - P_{33ux} \frac{\partial u_m}{\partial X} \frac{\partial u_l}{\partial X} - \frac{P_{33wv}}{R_0} w_m \frac{\partial u_l}{\partial X} \right\} dX \quad (3.2.43)$$

$$+ 2\pi \left[P_{33ux} \frac{\partial u_m}{\partial X} u_l \right]_{-L/2}^{L/2} - 2\pi \frac{R_{s0} \lambda_{xs}}{R_0 H} \rho_f \lambda_{xs} \left[\iint \ddot{w}_m dX dX u_l \right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \rho_t 2\pi \int_{-L/2}^{L/2} (\ddot{w}_m w_l + \ddot{u}_m u_l) dX + 2\pi \frac{R_{s0} \lambda_{xs}}{R_0 H} \rho_f \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\lambda_{xs}^2}{R_{s0}} \left(\int \ddot{w}_m dX \int w_l dX \right) dX + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{R_{s0}}{2} \ddot{w}_m w_l dX \right\}$$

Au final, les termes entre crochets sont exprimés à l'aide de l'équilibre des forces en bout de tube :

$$\int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \frac{P_{is}}{H} \left(\frac{R_{s0}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} + \frac{\lambda_{xs}}{R_0} w_m \right) w_l - P_{13wx} \frac{\partial w_m}{\partial X} \frac{\partial w_l}{\partial X} - \frac{P_{22vw}}{R_0^2} w_m w_l - \frac{P_{22ux}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} w_l \right\} dX$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \left\{ -\frac{P_{is}}{H} \frac{R_{s0}}{R_0} \frac{\partial w_m}{\partial X} u_l - P_{33ux} \frac{\partial u_m}{\partial X} \frac{\partial u_l}{\partial X} - \frac{P_{33wv}}{R_0} w_m \frac{\partial u_l}{\partial X} \right\} dX \quad (3.2.44)$$

$$- \frac{M_{th} \ddot{u}_m + K_{Mx} u_m}{2\pi R_0 H} u_l \Big|_{-L/2} - \frac{M_{th} \ddot{u}_m + K_{Mx} u_m}{2\pi R_0 H} u_l \Big|_{L/2}$$

$$= \rho_t \int_{-L/2}^{L/2} (\ddot{w}_m w_l + \ddot{u}_m u_l) dX + \frac{R_{s0} \lambda_{xs}}{R_0 H} \rho_f \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\lambda_{xs}^2}{R_{s0}} \left(\int \ddot{w}_m dX \int w_l dX \right) dX + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{R_{s0}}{2} \ddot{w}_m w_l dX \right\}$$

$n = 1$

Lorsque $n > 0$, l'expression de la pression interne dynamique est la suivante :

$$\frac{R_{s0}\lambda_{xs}}{R_0H} \int_{-L/2}^{L/2} P_{id}w_l dX = -\frac{R_{s0}\lambda_{xs}}{R_0H} \frac{R_{s0}}{n} \rho_f \int_{-L/2}^{L/2} \frac{R_{is}}{n} \ddot{w}_m w_l dX$$

Les autres conditions aux limites sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{33}|_{\pm L/2} = 0 \\ R_0H\Delta P_{13wx} \frac{\partial w}{\partial X} = -\frac{(M_{th}\ddot{w} + K_{Mz}w)}{2\pi} \Big|_{L/2} - \frac{(M_{th}\ddot{w} + K_{Mz}w)}{2\pi} \Big|_{-L/2} \\ R_0H\Delta \left(P_{23vx} \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{P_{23ut}}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\frac{(M_{th}\ddot{v} + K_{Mz}v)}{2\pi} \Big|_{L/2} - \frac{(M_{th}\ddot{v} + K_{Mz}v)}{2\pi} \Big|_{-L/2} \end{array} \right. \quad (3.2.45)$$

L'expression de la base modale est alors :

$$\begin{aligned} & \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \frac{P_{is}}{H} \left(\frac{R_{s0}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} + \frac{\lambda_{xs}}{R_0} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) \right) w_l - \frac{P_{12vw}}{R_0^2} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - v_m \right) \frac{\partial w_l}{\partial \theta} \right. \\ & \quad \left. - P_{13wx} \frac{\partial w_m}{\partial X} \frac{\partial w_l}{\partial X} - \frac{P_{22vw}}{R_0^2} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) w_l - \frac{P_{22ux}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} w_l \right\} dX \\ & + \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ -\frac{P_{is}}{H} \frac{\lambda_{xs}}{R_0} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - v_m \right) v_l - \frac{P_{22vw}}{R_0^2} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) \frac{\partial v_l}{\partial \theta} - \frac{P_{22ux}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} \frac{\partial v_l}{\partial \theta} \right. \\ & \quad \left. - P_{23vx} \frac{\partial v_m}{\partial X} \frac{\partial v_l}{\partial X} - \frac{P_{23ut}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial \theta} \frac{\partial v_l}{\partial X} + \frac{P_{12vw}}{R_0^2} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - v_m \right) v_l \right\} dX \\ & + \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ -\frac{P_{is}}{H} \frac{R_{s0}}{R_0} \frac{\partial w_m}{\partial X} u_l - \frac{P_{32vx}}{R_0} \frac{\partial v_m}{\partial X} \frac{\partial u_l}{\partial \theta} - \frac{P_{32ut}}{R_0^2} \frac{\partial u_m}{\partial \theta} \frac{\partial u_l}{\partial \theta} \right. \\ & \quad \left. - P_{33ux} \frac{\partial u_m}{\partial X} \frac{\partial u_l}{\partial X} - \frac{P_{33wv}}{R_0} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u_l}{\partial X} \right\} dX \\ & \quad - \frac{(M_{th}\ddot{w}_m + K_{Mz}w_m)}{2\pi R_0H} w_l \Big|_{L/2} - \frac{(M_{th}\ddot{w}_m + K_{Mz}w_m)}{2\pi R_0H} w_l \Big|_{-L/2} \\ & \quad - \frac{(M_{th}\ddot{v}_m + K_{Mz}v_m)}{2\pi R_0H} v_l \Big|_{L/2} - \frac{(M_{th}\ddot{v}_m + K_{Mz}v_m)}{2\pi R_0H} v_l \Big|_{-L/2} \\ & = \rho_t \int_{-L/2}^{L/2} \left(\ddot{w}_m w_l + \ddot{v}_m v_l + \ddot{u}_m u_l + \frac{R_{s0}\lambda_{xs}}{R_0H} \frac{R_{s0}}{n} \ddot{w}_m w_l \right) dX \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

$n > 1$

Enfin, lorsque $n > 1$, les extrémités sont considérées fixes :

$$\begin{cases} u|_{\pm L/2} = 0 \\ v|_{\pm L/2} = 0 \\ w|_{\pm L/2} = 0 \end{cases}$$

Tous les termes provenant des extrémités du tube disparaissent dans ce cas :

$$\begin{aligned} & \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \frac{P_{is}}{H} \left(\frac{R_{s0}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} + \frac{\lambda_{xs}}{R_0} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) \right) w_l - \frac{P_{12vw}}{R_0^2} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - v_m \right) \frac{\partial w_l}{\partial \theta} \right. \\ & \quad \left. - P_{13wx} \frac{\partial w_m}{\partial X} \frac{\partial w_l}{\partial X} - \frac{P_{22vw}}{R_0^2} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) w_l - \frac{P_{22ux}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} w_l \right\} dX \\ & + \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ - \frac{P_{is}}{H} \frac{\lambda_{xs}}{R_0} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - v_m \right) v_l - \frac{P_{22vw}}{R_0^2} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) \frac{\partial v_l}{\partial \theta} - \frac{P_{22ux}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial X} \frac{\partial v_l}{\partial \theta} \right. \\ & \quad \left. - P_{23vx} \frac{\partial v_m}{\partial X} \frac{\partial v_l}{\partial X} - \frac{P_{23ut}}{R_0} \frac{\partial u_m}{\partial \theta} \frac{\partial v_l}{\partial X} + \frac{P_{12vw}}{R_0^2} \left(\frac{\partial w_m}{\partial \theta} - v_m \right) v_l \right\} dX \\ & + \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ - \frac{P_{is}}{H} \frac{R_{s0}}{R_0} \frac{\partial w_m}{\partial X} u_l - \frac{P_{32vx}}{R_0} \frac{\partial v_m}{\partial X} \frac{\partial u_l}{\partial \theta} - \frac{P_{32ut}}{R_0^2} \frac{\partial u_m}{\partial \theta} \frac{\partial u_l}{\partial \theta} \right. \\ & \quad \left. - P_{33ux} \frac{\partial u_m}{\partial X} \frac{\partial u_l}{\partial X} - \frac{P_{33wv}}{R_0} \left(w_m + \frac{\partial v_m}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u_l}{\partial X} \right\} dX \\ & = \rho_t \int_{-L/2}^{L/2} \left(\ddot{w}_m w_l + \ddot{v}_m v_l + \ddot{u}_m u_l + \frac{R_{s0} \lambda_{xs}}{R_0 H} \frac{R_{s0}}{n} \ddot{w}_m w_l \right) dX \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

3.2.5 Définition du produit scalaire

Un produit scalaire propre au système qui garantit l'orthogonalité des modes et ainsi une base modale qui soit génératrice peut être obtenu à partir de l'équation 3.2.38 et des simplifications provenant des différentes conditions pour chaque nombre d'onde circonférentielle.

Le système matriciel est transposé, puis soustrait du système initial. Grâce à la symétrie de plusieurs termes, et les égalités obtenues lors de la linéarisation des contraintes de Piola-Kirchhoff, le système se simplifie, ne laissant que les termes de masse et les conditions aux limites.

$$\begin{aligned}
 & (\omega_m^2 - \omega_l^2) \frac{M_{th}}{2\pi R_0 H} \left(w_m w_l \Big|_{L/2} + w_m w_l \Big|_{-L/2} + v_m v_l \Big|_{L/2} + v_m v_l \Big|_{-L/2} + u_m u_l \Big|_{L/2} + u_m u_l \Big|_{-L/2} \right) \\
 & + (\omega_m^2 - \omega_l^2) \left(\rho_t \int_{-L/2}^{L/2} (w_m w_l + v_m v_l + u_m u_l) dX - \frac{R_{s0} \lambda_{xs}}{R_0 H} \int_{-L/2}^{L/2} \rho_{vf} w_l dX \right) = 0 \quad (3.2.48)
 \end{aligned}$$

En normalisant les modes par les termes de masse lorsque $m = l$, l'orthogonalité des modes est assurée. Le produit scalaire 3.2.48 est défini pour tout nombre d'onde circonférentielle. Les différentes conditions aux limites s'annulent suivant le nombre d'onde circonférentielle n choisi et la fonction ρ_{vf} est définie pour tout n .

3.2.6 Conclusions

Cette section a permis de présenter les différentes étapes nécessaires au développement de la base modale du système houlomoteur. Avec les termes linéarisés du tenseur de Piola-Kirchhoff, les équations de la dynamique sont rassemblées pour former un système matriciel ne dépendant que des déplacements élémentaires de la paroi.

$$\boxed{[\mathbf{H}] \begin{pmatrix} W_n \\ V_n \\ U_n \end{pmatrix} = 0}$$

La résolution du déterminant du système matriciel permet d'obtenir l'équation de propagation des ondes dans la paroi du tube. Les racines de cette équation correspondent aux nombres d'ondes en fonction des pulsations.

$$\boxed{a_6 k^6 + a_4 k^4 + a_2 k^2 + a_0 = 0}$$

La solution complète des déplacements est obtenue en sommant chaque solution particulière avec leurs constantes W_{jmn} , V_{jmn} et U_{jmn} ($i = 1, 2, 3$) associées :

$$\begin{aligned}
 w_{mn}(X, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 W_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn} X \lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn} X \lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm} t} \\
 v_{mn}(X, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 V_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn} X \lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn} X \lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm} t} \\
 u_{mn}(X, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 U_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn} X \lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn} X \lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm} t}
 \end{aligned}$$

Chaque mode est constitué de 3 constantes qui doivent être déterminées à l'aide des

conditions aux limites qui dépendent du nombre d'onde circonférentielle n et du nombre d'onde axiale m .

n=0

Les obturateurs à chaque extrémités du tube empêchent toute déformation radiale, ce qui se traduit par :

$$w_{\pm L/2} = 0$$

Dans le cas où $n = 0$, l'équilibre des forces est :

$$\pi R_{s0}^2 P_{id} = \pm (M_{th}\ddot{u} + K_{Mx}u) + 2\pi R_0 H P_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \Big|_{X=\pm L/2}$$

la troisième condition aux limites est obtenue par la continuité du mouvement entre les deux milieux. Aux extrémités du tube, les déplacements axiaux du fluide et de la paroi du tube doivent être identiques :

$$u_f|_{\pm L/2} = u|_{\pm L/2}$$

n=1

Lorsque le nombre d'onde circonférentielle est égal à 1, les sections du tube se déplacent verticalement. Les moments d'inertie des têtes de tube sont négligés et les déformations latérales sont bloquées.

$$\begin{cases} y_{\pm L/2} = (w \sin \theta + v \cos \theta)_{\pm L/2} = 0 \\ P_{33\pm L/2} = \left(P_{33vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \right)_{\pm L/2} = 0 \end{cases}$$

Après avoir réalisé l'équilibre des forces sur chaque tête de tube suivant la direction verticale et en combinant les relations, la troisième condition aux limites est :

$$\mp (M_{th}\ddot{w} + K_{Mz}w) \sin \theta \pm (M_{th}\ddot{v} + K_{Mz}v) \cos \theta = 2\pi R_0 H \left(P_{13wx} \frac{\partial w}{\partial X} \sin \theta - \left(P_{23vx} \frac{\partial v}{\partial X} + P_{23ut} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \cos \theta \right) \Big|_{X=\pm L/2} \quad (3.2.49)$$

n>1

Il est considéré que les têtes de tube sont indéformables, ainsi lorsque le nombre d'onde circonférentielle est supérieur à 1, il en résulte les conditions aux limites sui-

vantes :

$$\begin{cases} w_{\pm L/2} = 0 \\ v_{\pm L/2} = 0 \\ u_{\pm L/2} = 0 \end{cases}$$

Assemblage des modes

Chaque paire d'équation est soit soustraite soit additionnée. Pour chaque nombre d'onde circonférentielle les équations résultantes sont assemblées en deux systèmes matriciels. Chaque système correspond aux modes de déformations soit pair ou soit impair. La résolution du déterminant des systèmes permet de trouver les pulsations qui sont solutions à l'ensemble des conditions aux limites et qui correspondent aux pulsations propres des modes. Ensuite, chaque système matriciel est utilisé pour trouver 5 des 6 inconnues qui composent les modes. Les modes sont alors définis à une constante près qui est obtenue en normalisant chaque mode et qui permet d'assurer leur orthogonalité.

Avant la normalisation, les modes paires sont :

$$\begin{cases} u_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \beta_{jmn} \\ v_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \alpha_{jmn} \\ w_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \end{cases} \quad (3.2.50)$$

Et les modes impaires :

$$\begin{cases} u_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \beta_{jmn} \\ v_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \alpha_{jmn} \\ w_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \end{cases} \quad (3.2.51)$$

Pour $j = 2, 4, 6$.

La base modale permettant de normaliser les modes par la suite, est définie en projetant les différents déplacements sur les équations de la dynamique. Des simpli-

fications apparaissent dû à l'intégration sur la circonférence du tube, ce qui permet d'avoir une base modale pour chaque nombre d'onde circonférentielle. Les conditions aux limites à chaque extrémité de tube sont prises en compte à l'aide d'intégrations par parties. Le système résultant est simplifié puis soustrait par sa transposée. Il en résulte le système suivant :

$$\begin{aligned}
 & (\omega_m^2 - \omega_l^2) \frac{M_{th}}{2\pi R_0 H} \left(w_m w_l \Big|_{L/2} + w_m w_l \Big|_{-L/2} + v_m v_l \Big|_{L/2} + v_m v_l \Big|_{-L/2} + u_m u_l \Big|_{L/2} + u_m u_l \Big|_{-L/2} \right) \\
 & + (\omega_m^2 - \omega_l^2) \left(\rho_t \int_{-L/2}^{L/2} (w_m w_l + v_m v_l + u_m u_l) dX - \frac{R_{s0} \lambda_{xs}}{R_0 H} \int_{-L/2}^{L/2} \rho_{vf} w_l dX \right) = 0
 \end{aligned}$$

En normalisant les modes par les termes de masse lorsque $m = l$, l'orthogonalité des modes est assurée, ce qui permet d'obtenir une base modale qui soit génératrice.

3.3 Assemblage du modèle numérique

La section précédente était consacrée au développement de la base modale qui permet de décrire la dynamique du système houlomoteur. Dans cette section, la théorie développée dans le chapitre précédent est décomposée sur cette base modale afin de constituer le modèle numérique permettant de calculer le comportement du système houlomoteur. Le modèle numérique est constitué de deux versions, une linéaire dans le domaine fréquentiel et une non-linéaire dans le domaine temporel.

Dans un premier lieu, l'assemblage du modèle numérique linéaire est expliqué. Cette version linéaire contient les matrices qui constituent la base du modèle. Ensuite, les forces agissant sur le système houlomoteur sont rajoutées.

La deuxième sous-section décrit comment le modèle numérique non-linéaire est constituée. Pour y parvenir, les équations complètes de la dynamique du système houlomoteur sont reprises puis projetées sur les différents modes. Des termes de correction sont rajoutés afin d'éviter de calculer deux fois les termes du premier ordre, inclus dans le modèle linéaire.

3.3.1 Modèle linéaire

La base modale et la définition du produit scalaire des modes du système houlomoteur (eq.3.2.48) vont permettre de décomposer la dynamique du système en autant d'équations qu'il y a de modes. Comme il l'a été défini équation 3.1.1, chaque déplacement est composé de la somme des solutions dépendant des nombres d'ondes. Cette définition est généralisée en prenant en compte tous les modes de différentes fréquences :

$$\begin{aligned}
 w(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \sum_{m=1}^{\infty} \Re \left\{ \sum_{j=1}^3 W_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn}X\lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn}X\lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm}t} \right\} \\
 v(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n\theta) \sum_{m=1}^{\infty} \Re \left\{ \sum_{j=1}^3 W_{jmn} \alpha_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn}X\lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn}X\lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm}t} \right\} \\
 u(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \sum_{m=1}^{\infty} \Re \left\{ \sum_{j=1}^3 W_{jmn} \beta_{jmn} \left(e^{-ik_{jmn}X\lambda_{xs}} + e^{ik_{jmn}X\lambda_{xs}} \right) e^{-i\omega_{nm}t} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Matrices

L'ensemble des équations de la dynamique linéaire (eq.3.2.38) avec la prise en compte des efforts hydrodynamiques sont regroupées en matrices. Le modèle numérique linéaire s'écrit ainsi :

$$\{-\omega^2([\mathbf{M}] + [\mathbf{M}_A]) - i\omega([\mathbf{B}] + [\mathbf{B}_H]) + [\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_H]\}\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}_e \quad (3.3.2)$$

Avec $[\mathbf{M}]$ et $[\mathbf{M}_A]$ les matrices de masse de la structure et de masse ajoutée du fluide. $[\mathbf{B}]$ et $[\mathbf{B}_H]$ correspondent aux matrices d'amortissement de la paroi et d'amortissement hydrodynamique. $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{K}_H]$ sont les matrices de raideur de paroi et la matrice de raideur hydrostatique. Le vecteur $\underline{\mathbf{C}}$ correspond aux coefficients d'amplitude des modes, l'ensemble des inconnues du système. Ces différentes matrices permettent d'assurer le couplage entre la houle et la structure flottante.

Grâce à la normalisation des modes, la matrice de masse $[\mathbf{M}]$ est une matrice unitaire et la matrice de raideur $[\mathbf{K}]$ est diagonale et constituée de la fréquence propre de chaque mode au carré.

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} ; [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{n2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{nm}^2 \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

La matrice d'amortissement $[\mathbf{B}]$ est obtenue à l'aide de l'équation 3.1.26 après projection sur les différents déplacements.

Efforts hydrodynamiques

Les forces extérieures représentées par le vecteur $\underline{\mathbf{F}}_e$ et les matrices de coefficients hydrodynamiques $[\mathbf{M}_A]$, $[\mathbf{B}_H]$ et $[\mathbf{K}_H]$ correspondent aux effets hydrodynamiques agissant sur la structure, projetés sur les différents modes de déformation. Les forces d'excitations sont obtenus en intégrant la pression dynamique externe P_e sur toute la surface du tube à l'équilibre statique :

$$\underline{\mathbf{F}}_e = - \int_0^{2\pi} \left(R_{s0} \lambda_{xs} \int_{-L/2}^{L/2} P_e w_m dX + \frac{R_{s0}^2}{2} \Delta(P_e u_m) \right) d\theta \quad (3.3.4)$$

L'intégration sur θ représente une difficulté de calcul car les forces d'excitation dépendent de la profondeur d'immersion (z) (eqs 2.3.11 et 2.3.12) qui est indirectement

liée à l'angle θ . Il est plus facile d'intégrer les forces en discrétisant la surface du tube en facettes planes et d'utiliser la vitesse par rapport à la normale :

$$\underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \frac{\partial \underline{\phi}_R}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = w n_r + u n_x \quad (3.3.5)$$

Avec n_r la composante radiale de la normale et n_x la composante axiale lorsque le tube est au repos. Les pressions externes P_e sont obtenues à partir des différents potentiels de vitesse.

La matrice de raideur hydrostatique ($[\mathbf{K}_H]$) ne dépend que de la géométrie de la structure et peut être calculée directement sans l'aide du modèle hydrodynamique :

$$[\mathbf{K}_H] = -\rho_f g \iint_{\Sigma} (\underline{\phi}_i \cdot \underline{\mathbf{e}}_z) \frac{\partial \underline{\phi}_j}{\partial \underline{\mathbf{n}}} d\Sigma \quad (3.3.6)$$

À partir de l'équation 2.3.20 et des fonctions de Green, les différents termes provenant du champ perturbé sont calculés à l'aide d'un modèle hydrodynamique en discrétisant la surface du tube. Les conditions aux limites sont déterminées en utilisant la vitesse à la paroi du système par rapport à la normale (eq.3.3.5). Avec les différents potentiels du champ perturbé, trois matrices sont générées correspondant à la masse ajoutée du fluide externe sur la structure ($[\mathbf{M}_A]$) et l'amortissement hydrodynamique ($[\mathbf{B}_H]$) ainsi que les forces d'excitation ($\underline{\mathbf{F}}_e$).

$$[\mathbf{M}_A] = \rho_f \iint_{\Sigma} \underline{\phi}_{Ri} \frac{\partial \underline{\phi}_{Rj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} d\Sigma \quad (3.3.7)$$

$$[\mathbf{B}_H] = \omega \rho_f \iint_{\Sigma} \underline{\phi}_{Ri} \frac{\partial \underline{\phi}_{Rj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} d\Sigma \quad (3.3.8)$$

$$\underline{\mathbf{F}}_e = i\omega \rho_f \iint_{\Sigma} (\underline{\phi}_I + \underline{\phi}_D) \frac{\partial \underline{\phi}_{Rj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} d\Sigma \quad (3.3.9)$$

Avec Σ la surface du corps immergé, $\underline{\phi}_{Ri}$ le potentiel rayonné pour chaque mode de déformation, $\underline{\phi}_D$ le potentiel diffracté et $\underline{\phi}_I$ le potentiel incident.

3.3.2 Modèle non-linéaire

Par rapport au modèle linéaire, le modèle non-linéaire fonctionne dans le domaine temporel, ce qui permet de prendre en compte l'intégralité des contraintes au niveau de la paroi. Cependant, les matrices hydrodynamiques sont définies en considérant de faibles déplacements autour de la position d'équilibre. Il n'est pas possible de prendre

en compte les déplacements de la structure et de recalculer l'ensemble des perturbations de la surface libre. Il est donc considéré que le tube reste quasi-immobile pour les efforts hydrodynamiques mais les déplacements de la paroi seront pris en compte pour le calcul des contraintes hyper-élastiques. Cependant en négligeant les perturbations de la surface libre (potentiel diffracté et les différents potentiels rayonnés) il est possible de prendre en compte les déplacements de la structure car le potentiel incident est défini en tout point du volume fluide.

Le modèle non-linéaire se compose de la matrice de masse du modèle linéaire mais sans la matrice de raideur. Le passage d'un modèle à l'autre se fait en rajoutant des termes d'ordre supérieur par le biais de forces supplémentaires. Le système matriciel permettant de calculer la dynamique non-linéaire du système houlomoteur est :

$$([\mathbf{M}] + [\mathbf{M}_\infty]) \ddot{\mathbf{C}} + ([\mathbf{K}_H] + [\mathbf{K}_M]) \mathbf{C} + \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_{NL} = \mathbf{F}_e \quad (3.3.10)$$

Avec en rappel, $[\mathbf{M}]$ la matrice de masse du système houlomoteur égale à une matrice unitaire, $[\mathbf{M}_\infty]$ la matrice de masse ajoutée du fluide externe lorsque la fréquence tend vers l'infini, $[\mathbf{K}_H]$ et $[\mathbf{K}_M]$ sont les matrices de raideur hydrostatique et de raideur d'ancrage. \mathbf{F}_{NL} et \mathbf{F}_R sont la force non-linéaire de paroi et la force dû aux effets de radiation puis \mathbf{F}_e les forces d'excitation de la houle.

Force non-linéaire

La force non-linéaire \mathbf{F}_{NL} est développée ici. Les termes dépendant des pressions et contraintes dans les équations de la dynamique du tube (2.6.19, 2.6.20 et 2.6.21), sont repris et projetés sur chaque déformations w_l , v_l et u_l puis sommés comme pour le développement de la base modale.

$$\begin{aligned} F_{NL} = & \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left(JF_{RR}^{-T} \frac{P_i}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{RX}}{\partial X} - \frac{P_{\theta\theta}}{R_0} \right) w_l R_0 d\theta dX \\ & + \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left(JF_{\theta R}^{-T} \frac{P_i}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{\theta X}}{\partial X} + \frac{P_{R\theta}}{R_0} \right) v_l R_0 d\theta dX \\ & + \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left(JF_{XR}^{-T} \frac{P_i}{H} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial P_{X\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{XX}}{\partial X} \right) u_l R_0 d\theta dX \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Cette équation représente la force contenant les effets linéaires et non-linéaires agissant sur la paroi du tube.

Les intégrales de chaque force sont réalisées de manière discrétisée sur le maillage du tube au repos. Afin d'éviter de dériver les contraintes à l'aide de méthodes numériques et étant donné que les dérivées des déplacements sont connues, plusieurs intégrations par parties sont réalisées :

$$\begin{aligned}
 F_{NL} = & \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left(JF_{RR}^{-T} R_0 \frac{P_i}{H} w_l - P_{R\theta} \frac{\partial w_l}{\partial \theta} - R_0 P_{RX} \frac{\partial w_l}{\partial X} - P_{\theta\theta} w_l \right) d\theta dX \\
 & + \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left(JF_{\theta R}^{-T} R_0 \frac{P_i}{H} v_l - P_{\theta\theta} \frac{\partial v_l}{\partial \theta} - R_0 P_{\theta X} \frac{\partial v_l}{\partial X} + P_{R\theta} v_l \right) d\theta dX \\
 & + \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left(JF_{XR}^{-T} R_0 \frac{P_i}{H} u_l - P_{X\theta} \frac{\partial u_l}{\partial \theta} - R_0 P_{XX} \frac{\partial u_l}{\partial X} \right) d\theta dX \\
 & + R_0 \int_0^{2\pi} \left[P_{RX} w_l + P_{\theta X} v_l + P_{XX} u_l \right]_{-L/2}^{L/2} d\theta
 \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Cette équation peut être implémentée directement dans le modèle numérique mais afin d'être cohérent avec les développements précédents, il est nécessaire de modifier les conditions aux limites en éliminant les termes du premier ordre pour rajouter les raideurs d'ancrage définies ainsi :

$$[\mathbf{K}_H] = \mathbf{K}_{Mz} \left(w_m w_l \Big|_{L/2} + w_m w_l \Big|_{-L/2} + v_m v_l \Big|_{L/2} + v_m v_l \Big|_{-L/2} \right) + \mathbf{K}_{Mx} \left(u_m u_l \Big|_{L/2} + u_m u_l \Big|_{-L/2} \right) \tag{3.3.13}$$

Ainsi, l'équation non-linéaire de paroi est :

$$\begin{aligned}
 F_{NL} = & \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left(JF_{RR}^{-T} R_0 \frac{P_i - P_e}{H} w_l - P_{R\theta} \frac{\partial w_l}{\partial \theta} - R_0 P_{RX} \frac{\partial w_l}{\partial X} - P_{\theta\theta} w_l \right) d\theta dX \\
 & + \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left(JF_{\theta R}^{-T} R_0 \frac{P_i - P_e}{H} v_l - P_{\theta\theta} \frac{\partial v_l}{\partial \theta} - R_0 P_{\theta X} \frac{\partial v_l}{\partial X} + P_{R\theta} v_l \right) d\theta dX \\
 & + \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left(JF_{XR}^{-T} R_0 \frac{P_i - P_e}{H} u_l - P_{X\theta} \frac{\partial u_l}{\partial \theta} - R_0 P_{XX} \frac{\partial u_l}{\partial X} \right) d\theta dX
 \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Chaque terme des contraintes de Piola-Kirchhoff peut être reconstitué à l'aide des

relations écrites dans la section portant sur les contraintes (eq.2.5.8) sauf leur composante visqueuse (eq.2.5.9) qui dépend d'un module de relaxation, représentatif des efforts internes du matériau. Ce module peut être exprimé en séries de Prony, ce qui permet de considérablement simplifier le produit de convolution nécessaire au calcul de la composante déviatorique des contraintes. La méthode décrite ici provient de la théorie visco-élastique du logiciel industriel Abaqus [1]. Le module de relaxation $G(\tau)$ est écrit comme suit :

$$G(\tau) = G_0 \left(g_\infty + \sum_{i=1}^{N_G} g_i e^{-\tau/\tau_i^G} \right) \quad (3.3.15)$$

Avec τ_i et g_i les temps caractéristiques d'amortissement et leurs coefficients. Ces différents paramètres sont déterminés expérimentalement.

Le module d'élasticité instantané est relié à celui de long terme par la relation suivante :

$$G_i^0 = G_i^\infty / g_\infty \quad (3.3.16)$$

Avec :

$$g_\infty + \sum_{k=1}^N \bar{g}_k^P = 1$$

En utilisant cette modification, l'intégrale de viscosité devient :

$$\boldsymbol{\sigma}^D(t) = \boldsymbol{\sigma}_0^D + dev \left[\sum_{i=1}^{N_G} \frac{g_i}{\tau_i} \int_0^t \bar{\mathbf{F}}_t^{-1}(t-\tau) \cdot \boldsymbol{\sigma}_0^D(t-\tau) \cdot \bar{\mathbf{F}}_t^{-T}(t-\tau) e^{-\tau/\tau_i^G} d\tau \right] \quad (3.3.17)$$

Les éléments de la contrainte déviatorique interne de Cauchy sont définis par :

$$\boldsymbol{\sigma}_i^D(t) = \frac{g_i}{\tau_i} \int_0^t \bar{\mathbf{F}}_t^{-1}(t-\tau) \cdot \boldsymbol{\sigma}_0^D(t-\tau) \cdot \bar{\mathbf{F}}_t^{-T}(t-\tau) e^{-\tau/\tau_i^G} d\tau \quad (3.3.18)$$

Au temps $t + \Delta t$, chaque élément de la contrainte interne est :

$$\boldsymbol{\sigma}_i^D(t + \Delta t) = \frac{g_i}{\tau_i} \int_0^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{F}}_t^{-1}(t+\Delta t-\tau) \cdot \boldsymbol{\sigma}_0^D(t+\Delta t-\tau) \cdot \bar{\mathbf{F}}_t^{-T}(t+\Delta t-\tau) e^{-\tau/\tau_i^G} d\tau \quad (3.3.19)$$

Après plusieurs simplifications, il en résulte :

$$\boldsymbol{\sigma}_i^D(t + \Delta t) = \frac{g_i}{\tau_i} e^{-\Delta t/\tau_i^G} \int_{-\Delta t}^0 \boldsymbol{\sigma}_0^D(t-\tau) e^{-\tau/\tau_i^G} d\tau + e^{-\Delta t/\tau_i^G} \boldsymbol{\sigma}_i^D(t) \quad (3.3.20)$$

Au final, la contrainte interne s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_i^D(t + \Delta t) = \alpha_i g_i \boldsymbol{\sigma}_0^D(t + \Delta t) + \beta_i g_i \boldsymbol{\sigma}_0^D(t) + \gamma_i \boldsymbol{\sigma}_i^D(t) \quad (3.3.21)$$

avec

$$\gamma_i = e^{-\Delta\tau/\tau_i}, \quad \alpha_i = 1 - \frac{\tau_i}{\Delta\tau}(1 - \gamma_i), \quad \beta_i = \frac{\tau_i}{\Delta\tau}(1 - \gamma_i) - \gamma_i$$

Et le tenseur de Cauchy complet est :

$$\boldsymbol{\sigma}^D(t + \Delta t) = \boldsymbol{\sigma}_0^D(t + \Delta t) - \sum_{i=1}^{N_G} \boldsymbol{\sigma}_i^D(t + \Delta t) \quad (3.3.22)$$

Ensuite, le passage du tenseur des contraintes de Cauchy aux contraintes de Piola-Kirchhoff se fait par la relation 2.5.5 : $\mathbf{P} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$

Pression Externe et efforts hydrodynamiques

La pression extérieure est calculée à l'aide des différents potentiels de vitesse dont l'équation est rappelée ici :

$$\phi_e = \phi_{eI} + \phi_D + \sum_{i=1}^N \phi_{Ri}$$

Le potentiel incident est connu analytiquement ϕ_{eI} , ce qui permet de calculer sa valeur en tout point de l'espace et du temps avec l'équation 2.3.12 pour les termes du premier ordre. Le potentiel diffracté est rajouté aux forces d'excitation comme pour le modèle linéaire (eq.3.3.1).

Avec la matrice d'amortissement hydrodynamique, la réponse impulsionnelle du système est constituée afin de prendre en compte l'effet mémoire de la propagation des ondes.

$$L_{ij}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \Re(B_{Hij}(\omega)e^{-i\omega t}) d\omega \quad (3.3.23)$$

La force résultante des potentiels rayonnés est obtenue par un produit de convolution avec la réponse impulsionnelle :

$$\underline{\mathbf{F}}_R = \int_{-\infty}^t \mathbf{L}(t - \tau) \underline{\dot{\mathbf{C}}}(\tau) dt \quad (3.3.24)$$

3.3.3 Conclusions

Cette section a permis de décrire comment le modèle numérique est assemblé à partir de la base modale développée précédemment et des équations de la dynamique. Le modèle numérique est constitué de deux versions, une linéaire dans le domaine fréquentiel et une non-linéaire dans le domaine temporel. L'équation de la dynamique

pour le modèle linéaire est :

$$\{-\omega^2([\mathbf{M}] + [\mathbf{M}_A]) - i\omega([\mathbf{B}] + [\mathbf{B}_H]) + [\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_H]\} \underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}_e$$

Et pour le modèle non-linéaire :

$$([\mathbf{M}] + [\mathbf{M}_\infty]) \ddot{\underline{\mathbf{C}}} + ([\mathbf{K}_H] + [\mathbf{K}_M]) \underline{\mathbf{C}} + \underline{\mathbf{F}}_R + \underline{\mathbf{F}}_{NL} = \underline{\mathbf{F}}_e$$

Grâce à la normalisation des modes, les matrices de masse et de raideur sont diagonales :

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} ; [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{n2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{nj}^2 \end{bmatrix}$$

Les matrices $[\mathbf{M}_A]$, $[\mathbf{B}_H]$ et $[\mathbf{K}_H]$ correspondent respectivement aux matrices de masse ajoutée, d'amortissement hydrodynamique et de raideur hydrostatique. La matrice $[\mathbf{M}_\infty]$ correspond à la masse ajoutée lorsque la pulsation tend vers l'infini. Les forces $\underline{\mathbf{F}}_e$, $\underline{\mathbf{F}}_R$, $\underline{\mathbf{F}}_{NL}$ correspondent aux forces d'excitation de la houle, les forces non-linéaires agissant sur le tube et les efforts de radiation. Cette dernière est l'équivalent des matrices hydrodynamiques transcrit dans le domaine temporel. Les amplitudes modales $\underline{\mathbf{C}}$ sont les inconnues du système matriciel.

3.4 Conclusions du chapitre

L'objectif de ce chapitre était de développer un modèle numérique afin de pouvoir calculer la dynamique du système houlomoteur décrite dans le chapitre précédent. Le modèle numérique est basé sur une approche modale, ce qui permet d'éviter d'utiliser un maillage mais requiert d'utiliser des relations linéaires. La première étape de ce chapitre était donc de linéariser les équations de la dynamique. L'étape suivante a été de développer la base modale servant de support au modèle numérique puis en dernière étape, l'assemblage du modèle numérique et sa résolution.

3.4.1 Linéarisation des équations

Afin de linéariser les équations de la dynamique, il est considéré que les déplacements autour de l'équilibre statique sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} w(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(X, t) \cos(n\theta) \\ v(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(X, t) \sin(n\theta) \\ u(\theta, X, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(X, t) \cos(n\theta) \end{aligned}$$

Ces signaux harmoniques permettent de définir des déformations en renflement ($n = 0$), des déformations verticales ($n = 1$) et toutes les autres déformations symétriques avec l'axe z . Chaque terme composant l'expression des contraintes est linéarisé ainsi que l'écoulement interne. Au final, le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff linéarisé avec les effets visco-élastiques est de la forme suivante :

$$\mathbf{P} \approx \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_1 + \mathbf{B}_1(\omega)$$

Avec \mathbf{P}_S les contraintes à l'équilibre statique. Les effets de raideur des contraintes est :

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} P_{11vw} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{11ux} \frac{\partial u}{\partial X} & P_{12vw} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & P_{13ux} \frac{\partial w}{\partial X} \\ P_{21vw} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & P_{22vw} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{22ux} \frac{\partial u}{\partial X} & P_{23vx} \frac{\partial v}{\partial X} + P_{23ut} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ P_{31wx} \frac{\partial w}{\partial X} & P_{32vx} \frac{\partial v}{\partial X} + P_{32ut} \frac{\partial u}{\partial \theta} & P_{33vw} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \end{pmatrix}$$

et les effets de viscosité représentés comme un tenseur d'amortissement linéaire :

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} B_{11vw} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + B_{11ux} \frac{\partial u}{\partial X} & B_{12vw} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & B_{13ux} \frac{\partial w}{\partial X} \\ B_{21vw} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) & B_{22vw} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + B_{22ux} \frac{\partial u}{\partial X} & B_{23vx} \frac{\partial v}{\partial X} + B_{23ut} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ B_{31wx} \frac{\partial w}{\partial X} & B_{32vx} \frac{\partial v}{\partial X} + B_{32ut} \frac{\partial u}{\partial \theta} & B_{33vw} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + B_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \end{pmatrix}$$

P_{ij} et B_{ij} sont les différents coefficients obtenus suite à la linéarisation.

Enfin, la pression interne calculée à partir de fonctions de Bessel est également linéarisée, ce qui résulte en :

$$P_{id} = -\rho_f \left(\frac{2r}{(kr)^2} + \frac{r}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Lorsque $n = 0$ et :

$$P_{id} = -\rho_f \frac{r}{n} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Lorsque $n > 0$

3.4.2 Développement de la base modale

Le système d'équations de la dynamique du tube, équations 2.6.19 à 2.6.21 est ré-écrit à l'aide du tenseur des contraintes linéaire et de la pression interne linéarisée. Lorsque le déterminant du système matriciel est calculé, il en résulte une équation, un polynôme d'ordre 3, permettant de calculer les nombres d'onde des modes. Trois conditions aux limites sont ensuite définies à chaque extrémité du tube afin de résoudre le reste des inconnues du système matriciel ; la pulsation propre de chaque mode dépendant des ancrages et les trois coefficients d'amplitude de chaque solution des modes. Les conditions aux limites sont différentes pour chaque nombre d'onde circulaire.

n=0

Les obturateurs à chaque extrémité du tube empêchent toute déformation radiale, ce qui se traduit par :

$$w_{\pm L/2} = 0$$

L'équilibre des forces est :

$$\pi R_{s0}^2 P_{id} = \pm (M_{th}\ddot{u} + K_{Mx}u) + 2\pi R_0 H P_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \Big|_{X=\pm L/2}$$

Aux extrémités du tube, les déplacements axiaux du fluide et de la paroi du tube doivent être identiques :

$$u_f|_{\pm L/2} = u|_{\pm L/2}$$

n=1

Les moment d'inertie des têtes de tube sont négligées et les déformations latérales sont bloquées.

$$\begin{cases} y_{\pm L/2} = (w \sin \theta + v \cos \theta)|_{\pm L/2} = 0 \\ P_{33\pm L/2} = \left(P_{33vw} \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + P_{33ux} \frac{\partial u}{\partial X} \right)_{\pm L/2} = 0 \end{cases}$$

L'équilibre des forces sur chaque tête de tube lorsque $n = 1$ est :

$$\begin{aligned} \mp (M_{th}\ddot{w} + K_{Mz}w) \sin \theta \pm (M_{th}\ddot{v} + K_{Mz}v) \cos \theta = \\ 2\pi R_0 H \left(P_{13wx} \frac{\partial w}{\partial X} \sin \theta - \left(P_{23vx} \frac{\partial v}{\partial X} + P_{23ut} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \cos \theta \right) \Big|_{X=\pm L/2} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

n>1

Il est considéré que les têtes de tube sont indéformables.

$$\begin{cases} w_{\pm L/2} = 0 \\ v_{\pm L/2} = 0 \\ u_{\pm L/2} = 0 \end{cases}$$

Assemblage des modes

Chaque paire d'équation est soit soustraite soit additionnée. Pour chaque nombre d'onde circonférentielle les équations résultantes sont assemblées en deux systèmes matriciels. Chaque système matriciel correspond aux modes de déformations soit pair ou soit impair. La résolution du déterminant des systèmes permet de trouver les pulsations qui sont solutions à l'ensemble des conditions aux limites et qui correspondent aux pulsations propres des modes. Ensuite, chaque système matriciel est utilisé pour trouver 5 des 6 inconnues qui composent les modes. Les modes sont alors définis à

une constante près qui est obtenue en normalisant chaque mode et qui permet d'assurer leur orthogonalité.

Avant la normalisation, les modes paires sont :

$$\begin{cases} u_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \beta_{jmn} \\ v_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \alpha_{jmn} \\ w_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Et les modes impaires :

$$\begin{cases} u_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} + e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \beta_{jmn} \\ v_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \alpha_{jmn} \\ w_{mn} = \sum_j \frac{e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2+X)} - e^{ik_{jmn}\lambda_{xs}(L/2-X)}}{1 + e^{ik_{jmn}L\lambda_{xs}}} W_{jmn} \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Pour $j = 2, 4, 6$.

La base modale permettant de normaliser les modes par la suite, est définie en projetant les différents déplacements sur les équations de la dynamique. Des simplifications apparaissent due à l'intégration sur la circonférence du tube ce qui permet d'avoir une base modale pour chaque nombre d'onde circonférentielle. Les conditions aux limites à chaque extrémité du tube sont prises en compte à l'aide d'intégrations par parties. Le système résultant est simplifié puis soustrait par sa transposée. Il en résulte le système suivant :

$$\begin{aligned} & (\omega_i^2 - \omega_j^2) \frac{M_{th}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(w_i w_j|_{L/2} + w_i w_j|_{-L/2} + v_i v_j|_{L/2} + v_i v_j|_{-L/2} + u_i u_j|_{L/2} + u_i u_j|_{-L/2} \right) d\theta \\ & + (\omega_i^2 - \omega_j^2) \left(\rho_t R_0 H \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} (w_i w_j + v_i v_j + u_i u_j) dA_0 - \lambda_{xs} R_s \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \rho_{vf} w_j dA_0 \right) = 0 \end{aligned}$$

En normalisant les modes par les termes de masse lorsque $i = j$, l'orthogonalité des

modes est assurée, ce qui permet d'obtenir une base modale qui soit génératrice.

3.4.3 Assemblage du modèle numérique

La définition des modes et des différentes matrices permet un développement direct du modèle numérique linéaire. Grâce à la normalisation des modes, la matrice de masse est une matrice unitaire et la matrice de raideur une matrice diagonale dépendant des fréquences au carré de chaque mode.

Pour le modèle linéaire, seules les forces extérieures sont requises afin de pouvoir calculer la réponse du système houlomoteur suite à l'excitation des vagues.

$$\{-\omega^2([\mathbf{M}] + [\mathbf{M}_A]) - i\omega([\mathbf{B}] + [\mathbf{B}_H]) + [\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_H]\}\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}_e$$

A l'aide d'un modèle hydrodynamique, les interactions entre la houle et la structure sont pris en compte par le biais des matrices de masse ajoutée et d'amortissement hydrodynamique $[\mathbf{M}_A]$ et $[\mathbf{B}]$.

La prise en compte des termes non-linéaire des contraintes de Piola-Kirchhoff est réalisée en reprenant les équations de la dynamique du tube et en projetant chaque équation sur l'ensemble des déplacements. Le système à résoudre prenant en compte les effets non-linéaires est :

$$([\mathbf{M}] + [\mathbf{M}_\infty])\ddot{\underline{\mathbf{C}}} + ([\mathbf{K}_H] + [\mathbf{K}_M])\underline{\mathbf{C}} + \underline{\mathbf{F}}_R + \underline{\mathbf{F}}_{NL} = \underline{\mathbf{F}}_e$$

L'objectif de ce chapitre était de développer un modèle numérique qui soit rapide à exécuter tout en prenant en compte les différents phénomènes physiques intervenant dans la dynamique du système houlomoteur. Ce travail a été réalisé et seuls les effets représentatifs ont été conservés. Le chapitre suivant portera sur l'analyse du modèle numérique et la façon dont les équations développées dans ce chapitre ont été implémentées.

Chapitre 4

Description du modèle numérique

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de décrire le fonctionnement du modèle numérique. Les différentes étapes du modèle sont présentées en détail et en faisant référence aux équations développées dans le chapitre précédent. Le modèle numérique est composé de quatre grandes étapes distinctes dont une facultative. Les étapes sont les suivantes :

1. Constitution de la base modale
2. Calcul des coefficients hydrodynamiques
3. Résolution dans l'espace fréquentiel
4. Résolution dans l'espace temporel

La première étape fait appel aux données d'entrées et permet de calculer tous les paramètres nécessaires pour la constitution des modes. Ensuite, la deuxième étape qui est facultative (si l'utilisateur le souhaite) est dédiée au calcul des matrices hydrodynamiques : masse ajoutée, amortissement et forces de diffraction. L'étape suivante est consacrée au calcul de la dynamique linéaire du système houlomoteur grâce aux différentes matrices et forces calculées précédemment. Enfin, la dernière étape reprend les matrices du domaine fréquentiel et les convertit dans le domaine temporel pour inclure les effets non-linéaires dans la dynamique du système. Chaque étape est détaillée dans la suite de ce chapitre.

4.2 Constitution de la base modale

La constitution de la base modale fait partie du coeur du modèle numérique car c'est à l'aide de cette base que tous les éléments de la dynamique du système houlomoteur pourront être déterminés. Cette section du modèle peut à son tour être divisée en différentes étapes :

1. lecture des données d'entrées
2. résolution de l'équilibre statique
3. calcul des coefficients linéaires
4. calcul du nombre d'onde sur l'intervalle de fréquences données
5. recherche des fréquences propres satisfaisant les conditions aux limites
6. normalisation des amplitudes modales
7. construction des modes

Les données d'entrée (fig.4.1) du modèle numérique sont les différentes dimensions du tube au repos (rayon et longueur), tous les paramètres permettant de décrire le matériau (paramètres de Yeoh, paramètres de viscosité, épaisseurs, densités et nombre de couches) puis les paramètres d'ancrage (raideur des lignes, angles par rapport à l'horizontal et la direction axiale du tube).

Un autre fichier d'entrée (fig.4.2) est appelé contenant les différentes options de calcul et les différents cas de simulation à générer.

4.2.1 Résolution de l'équilibre statique et calcul des coefficients linéaires

Avec les données d'entrée, les différentes contraintes de Cauchy à l'équilibre statique sont calculées en utilisant l'expression 2.6.38.

$$\sigma_s^D = \left(2 \frac{\partial \psi_{Yeoh}}{\partial I_1} \begin{bmatrix} \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{bmatrix} + 8k_1 \frac{\lambda_{xs} - 1}{\lambda_{xs}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{R}{R_s \lambda_{xs}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xs} \end{bmatrix}$$

L'élongation axiale λ_{xs} est obtenue à l'aide d'un algorithme de recherche de solutions en utilisant l'équation de l'équilibre des forces statiques 2.6.47.

$$F_m = \pi (2\sigma_{xxs}^D - \sigma_{\theta\theta s}^D - \sigma_{rrs}^D) R_{s0} H_s$$

```

----- Inputs -----
1000.0          !Water density (kg/m3)
10.00          !Tube Deflated Length (m)
0.21           !Tube Deflated radius (m)
0.08           !Mesh resolution (m)
2              !Number of Layers
5              !Number of prony series
1.0e9          !Fibers Young Modulus (Pa)
50             !Number of fibers
1.0e-3         !Fibers diameter (m)
1.30           !Radial static inflation ratio
--- Layers Thickness, Density ---
2.50e-03 1.08e+03
7.50e-03 1.08e+03
----- Hyperparameters(Pa) -----
248445.00 -34805.00 7916.00
95970.00 -18002.00 7091.00
----- gvisco, tauvisco -----
1.500e-01 1.000e-01 3.000e-02 2.550e-14 2.356e-06
1.000e-01 5.000e-01 1.000e+00 5.000e+00 1.000e+01
----- Mooring Inputs -----
294.00        !Static Mooring force (N)
-49.29        !X-Y angle (°)
1.66          !Z angle (°)
300.00        !Stiffness coefficient (N/m)
200.00        !Axial Damping (N.s/m)
0.00          !Vertical Damping (N.s/m)

```

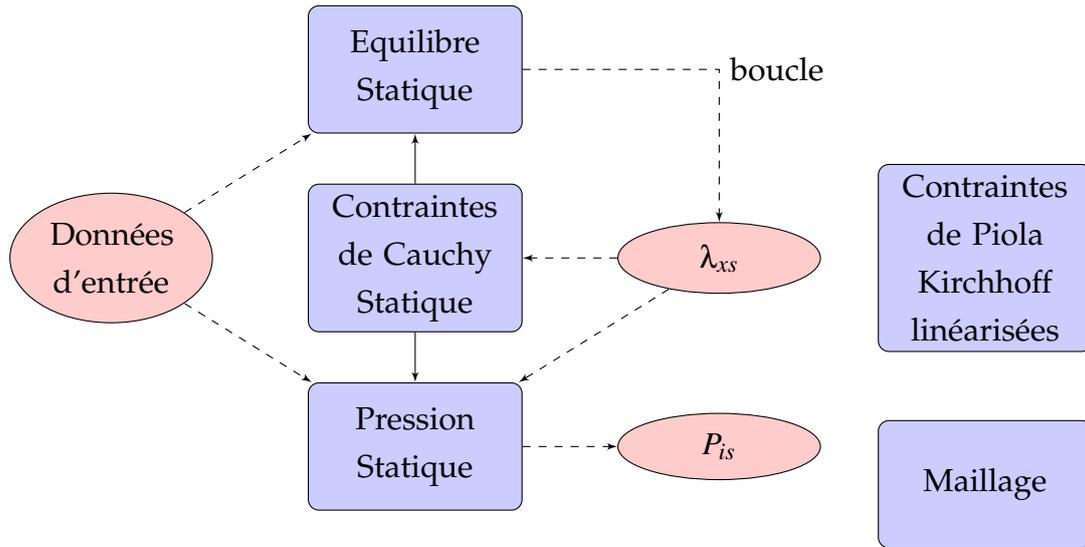
FIGURE 4.1 – Exemple de fichier d’entrée avec les différents paramètres du tube

```

----- Wave Inputs -----
5.0           !Water depth (m)
64            !NwWave
1.2 10.0      !Wave Frequencies
0.0           !Wave Direction
15.0 4.0      !Basin length & width (m)
0.2           !Surface dx (m)
true          !Calculate hydrodynamic effects
----- Time signal -----
true          !Create 3D frames
false         !irregular waves(true) or regular(false)
70.0         !Tmax
20.0         !Ramp time
0.1          !dt (s)
40.0         !IRF max time
SEMREV.dat   !Scatter diagram name

```

FIGURE 4.2 – Exemple de fichier d’entrée avec les cas de simulation



Lorsque l'équilibre des forces est vérifiée la pression interne statique est obtenue avec l'équation 2.6.42 et les différents termes des contraintes de Piola-Kirchhoff linéarisés (eqs. 3.1.20 à 3.1.25).

$$P_0 = \frac{\sigma_{\theta\theta s}^D - \sigma_{rrs}^D}{R_{s0}} H_s$$

Puis connaissant les ratios d'élongations du tube, le maillage est construit lorsque le tube est à l'équilibre statique.

Deux différents maillage sont utilisés ; un pour le calcul des contraintes de Piola-Kirchhoff basé sur la configuration initiale et un pour le calcul des efforts hydrodynamiques basé sur la situation à l'équilibre statique. La figure 4.3 montre un exemple de maillage avec des mailles de 8cm de côté avec la surface libre, utilisé pour le calcul des efforts hydrodynamiques. Pour les calculs hydrodynamiques, seule la partie immergée est représentée. La figure 4.4 montre un exemple de maillage dans la configuration initiale. Dans ce cas, l'ensemble du tube est utilisé.

4.2.2 Détermination des modes

Cette section regroupe les étapes (4 à 7) requises pour la détermination des modes.

Avec les coefficients des contraintes linéaires de Piola-Kirchhoff calculés, l'équation de propagation (eq.3.2.4) peut être construite. Cette équation permet de lier la fréquence d'excitation du système ω_{nm} au nombre d'onde k_{nm} . L'équation de propagation étant un polynôme d'ordre 3, les solutions complexes du polynôme ont directement pu être écrites avec des formulations analytiques. La figure 4.5 montre les différentes racines de l'équation de propagation pour des pulsations allant de 0rad.s^{-1} à 10rad.s^{-1} et pour un tube de 10m dont les données sont définies dans le tableau 4.1.

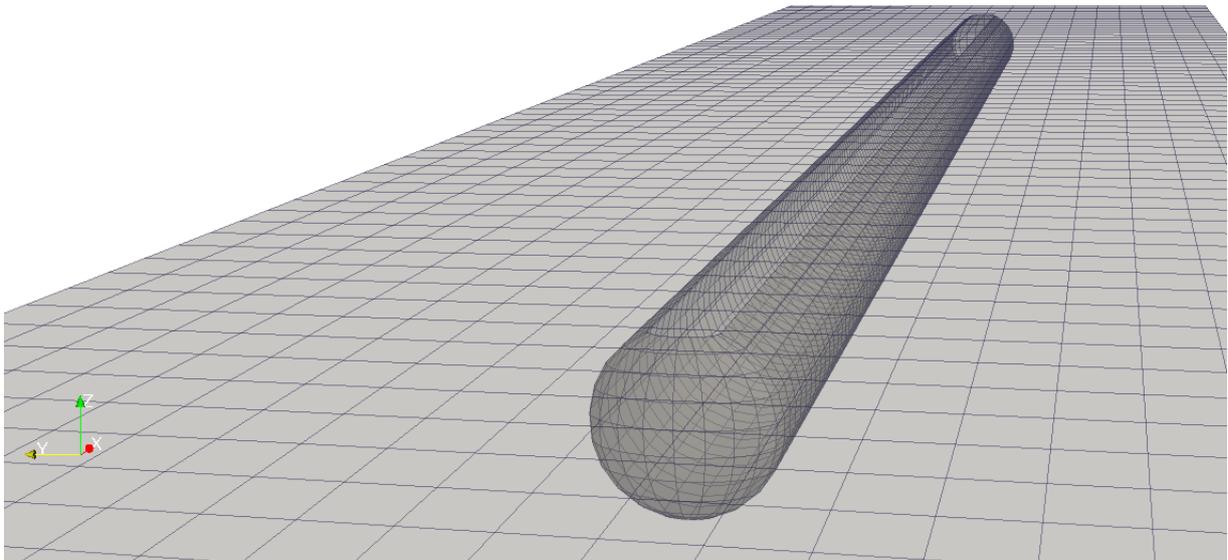


FIGURE 4.3 – Maillage utilisé pour le calcul des efforts hydrodynamiques avec des mailles de $dx = 0.08m$ de côté et représentation de la surface libre.

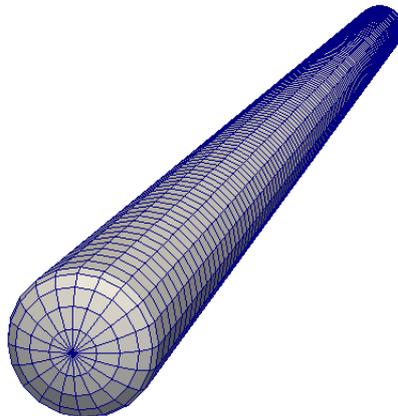


FIGURE 4.4 – Maillage utilisé pour le calcul des contraintes de Piola-Kirchhoff avec des mailles de $dx = 0.08m$ de côté.

	EAP	Silicone
$h_0(mm)$	7.5	2.5
$C_{10}(Pa)$	95970	248445
$C_{20}(Pa)$	-18002	-34805
$C_{30}(Pa)$	7091	7916

TABLE 4.1 – Paramètres d'hyper-élasticité de Yeoh

Pour $n = 0$ et $n = 1$, une racine réelle évolue avec la pulsation alors que ce n'est pas le cas pour $n = 2$. Cette racine réelle permettra de calculer directement la longueur d'onde dominante des modes. Pour $n = 2$ aucun mode ne pourra être déterminé dans cet intervalle de fréquences car toutes les racines sont imaginaires.

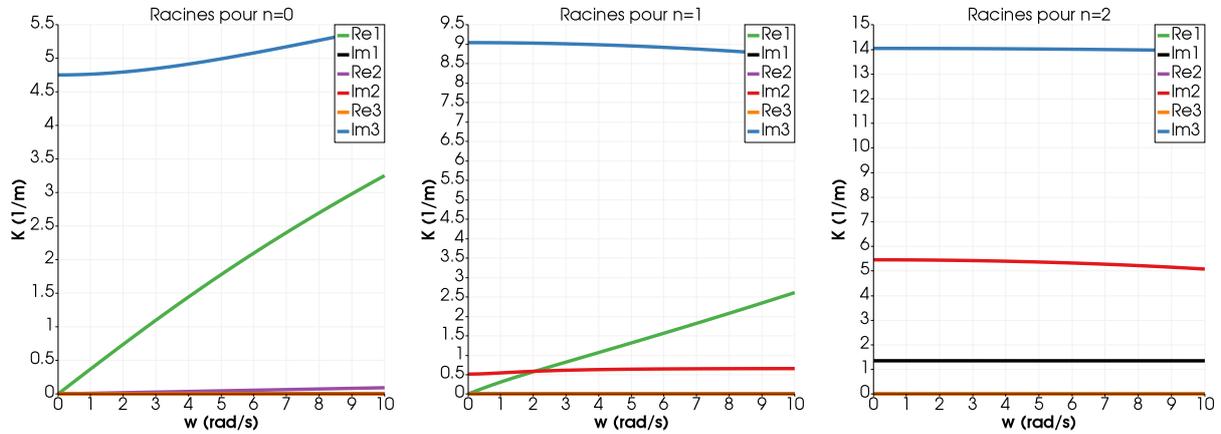
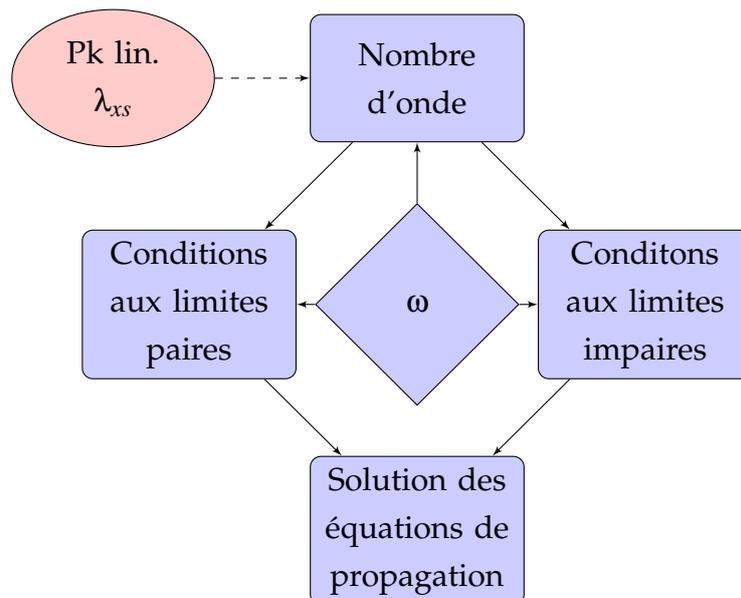


FIGURE 4.5 – Exemple de nombres d’onde solutions de l’équation de propagation pour différentes valeurs de n

Le calcul des fréquences propres se fait en deux étapes. Les conditions aux limites, assemblées sous forme matricielle et différentes en fonction du nombre d’onde circonférentielle (eqs. 3.2.18 et 3.2.19 pour $n = 0$, eqs 3.2.23 et 3.2.24 pour $n = 1$, eqs 3.2.26 et 3.2.27 pour $n > 1$), dépendent du nombre d’onde et de la fréquence d’excitation. Les fréquences propres au système sont obtenues en cherchant les racines du déterminant des matrices constituées des équations décrivant les conditions aux limites.



La figure 4.6 montre les courbes provenant du calcul du déterminant des conditions aux limites paires et impaires pour le même tube de 10m. Les solutions qui satisfont

l'équation de propagation et les conditions aux limites sont celles où le déterminant est nul. De nombreuses solutions existent dans l'intervalle choisi pour $n = 0$ et $n = 1$ mais aucune pour $n = 2$.

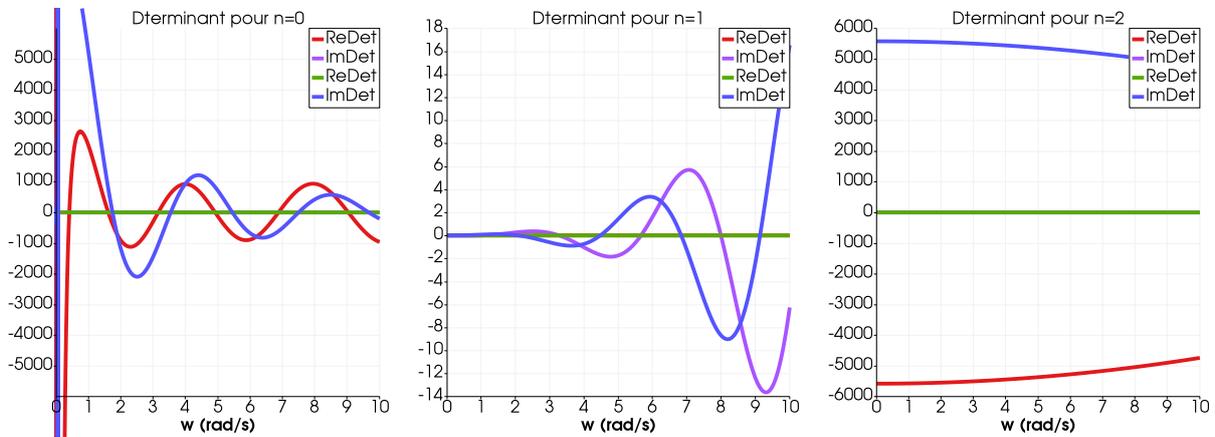
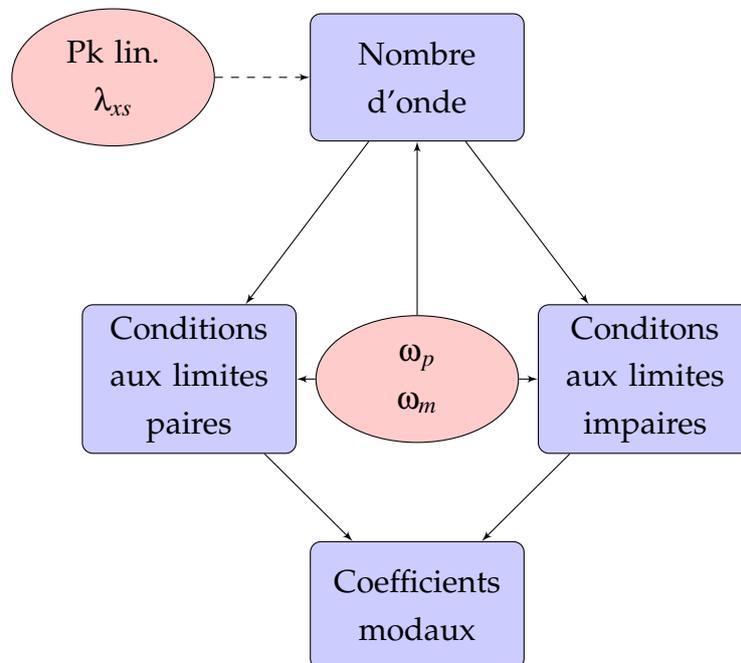


FIGURE 4.6 – Exemple de déterminant des conditions aux limites pour différentes valeurs de n

Lorsque les fréquences pour chaque type (paire ou impaire) de conditions aux limites ont été trouvées, les coefficients constituant les conditions aux limites sont réutilisés afin de calculer les différents coefficients modaux à une variable près (eqs.3.2.30 et 3.2.31).



Finalement, l'amplitude des modes est normalisée par les termes de masse de la base modale (eq.3.2.48) puis les différents modes sont construits grâce aux expressions 3.2.34 et 3.2.35.

4.3 Modèle hydrodynamique

Avec les différents modes de déformation du système houlomoteur, il est possible de prendre en compte l'interaction houle-structure entre le système et le milieu marin qui l'entoure grâce à la décomposition en différents potentiels de la théorie linéaire (eq 2.3.19). Un modèle hydrodynamique a été spécialement développé à partir des travaux de Delhommeau([10] et[11]) pour calculer avec efficacité les différents coefficients hydrodynamiques du système houlomoteur.

Le premier avantage de la théorie potentielle linéaire est de pouvoir retranscrire la dynamique du système en fonction de ses degrés de liberté. Un autre avantage des modèles utilisant les éléments de frontière avec une surface libre linéarisée est qu'il n'y a pas besoin de représenter cette dernière avec un maillage. Les déplacements de la surface libre sont pris en compte à l'aide de fonctions de Green qui respectent toutes les conditions aux limites du domaine fluide externe. De plus, des symétries existent lors du calcul des potentiels de vitesse qui permettent de représenter qu'une partie du corps flottant.

La résolution d'un problème hydrodynamique linéaire par la méthode de singularité est brièvement expliquée. Le détail de la théorie est expliquée dans [10] et [23]. Avec la troisième formule de Green, l'expression des potentiels d'un point M se situant dans le milieu fluide (Ω) ou sur la paroi du système flottant (Σ) est :

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \mathcal{G}(M) \frac{\partial \phi_P}{\partial \underline{n}} dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathcal{G}(M)}{\partial \underline{n}} \phi_P dS = \begin{cases} \phi_P, & M \in \Omega \\ \frac{\phi_P}{2}, & M \in \Sigma \end{cases} \quad (4.3.1)$$

En profondeur finie, la fonction de Green $\mathcal{G}(M)$ respectant les conditions aux limites du domaine fluide est :

$$\mathcal{G}(M) = \frac{1}{MM'_0} + \frac{1}{MM'_1} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} dk \frac{(k+k_0) \cosh k(z+h) \cosh k(z'+h)}{k \sinh kh - k_0 \cosh kh} e^{-kh} \quad (4.3.2)$$

Avec MM'_0 la distance entre le point influencé M et le point sur la facette influançante M' , MM'_1 la distance entre le même point M et le miroir de la facette par rapport au fond défini ainsi :

$$MM'_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'+2h)^2} \quad (4.3.3)$$

Des fonctions analytiques existent pour les relations en $1/MM'$ dans le cas de facettes planes mais la difficulté du problème réside dans le calcul de l'intégrale. Pour y par-

venir, des méthodes numériques ont été développées par Newman [29] ou Guevel [17].

A l'aide des différentes méthodes développées, l'influence entre chaque facette sur l'ensemble des points (le centre des autres facettes) est calculée afin de déterminer les matrices de coefficients d'influence. Afin d'accélérer les temps de calcul, les bibliothèques OpenMP ont été utilisées pour paralléliser les opérations sur chaque facette. Une fois que ces matrices ont été calculées, le système linéaire suivant est obtenu :

$$\sum_{j=1}^N D_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^N S_{ij} \frac{\partial \phi_j}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \quad (4.3.4)$$

La somme a lieu sur toutes les facettes du corps flottant. Dans l'équation 4.3.4, D_{ij} correspond à l'influence de doublets (la dérivée des fonctions de Green par rapport à la normale intégrées sur la surface de la facette j) et S_{ij} aux sources sur chaque facette (les fonctions de Green intégrées sur la surface de la facette j). Dans le modèle hydrodynamique Aquaplus développé par Delhommeau [10], les distributions de sources seules ont été utilisées car elle permettent de calculer directement les efforts de dérive. Il s'agit des termes sources et de leurs dérivées spatiales. Dans le cas présent la distribution mixte des sources (sources avec doublets) de Green à été choisie car elle offre une meilleure précision. Les différents termes sources sont décrits dans Delhommeau [10] et [11].

Les termes de droite de l'équation 4.3.4 sont connus, seuls les potentiels au niveau de la surface du corps flottant sont inconnus. Le système est résolu à l'aide d'une méthode de décomposition L-U provenant des routines Lapack.

$$\phi_j = D_{ij}^{-1} \left(S_{ij} \frac{\partial \phi_j}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \right) \quad (4.3.5)$$

Grâce à la symétrie des coefficients d'influence, il est possible de résoudre qu'une portion du problème linéaire précédent et de gagner en rapidité de calcul par le nombre de symétries sur le corps. La figure 4.7 montre un exemple de maillage utile pour calculer les efforts hydrodynamiques sur une sphère immergée. En prenant en compte les symétries par rapport au plan XZ et YZ , le système linéaire est décomposé en 4 sous

problèmes :

$$\begin{cases} \mu_{Aj} = D_{ij}^{-1} \left[S_{ij} \left(\frac{\partial \phi_{Aj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} + \frac{\partial \phi_{Bj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} + \frac{\partial \phi_{Cj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} + \frac{\partial \phi_{Dj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \right) \right] \\ \mu_{Bj} = D_{ij}^{-1} \left[S_{ij} \left(\frac{\partial \phi_{Aj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} + \frac{\partial \phi_{Bj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} - \frac{\partial \phi_{Cj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} - \frac{\partial \phi_{Dj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \right) \right] \\ \mu_{Cj} = D_{ij}^{-1} \left[S_{ij} \left(\frac{\partial \phi_{Aj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} - \frac{\partial \phi_{Bj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} + \frac{\partial \phi_{Cj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} - \frac{\partial \phi_{Dj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \right) \right] \\ \mu_{Dj} = D_{ij}^{-1} \left[S_{ij} \left(\frac{\partial \phi_{Aj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} - \frac{\partial \phi_{Bj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} - \frac{\partial \phi_{Cj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} + \frac{\partial \phi_{Dj}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \right) \right] \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Avec les indices A, B, C et D les différentes parties symétriques du corps et μ une portion du potentiel. Les indices i et j vont de 1 à $N/4$. Le potentiel de chaque section est recomposé ainsi :

$$\begin{cases} \phi_A = \frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) \\ \phi_B = \frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4) \\ \phi_C = \frac{1}{4}(\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 - \mu_4) \\ \phi_D = \frac{1}{4}(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4) \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Ainsi, avec 2 plans de symétrie, seulement un quart du problème a besoin d'être résolu.

Dans le cas où la surface libre doit être maillée, l'équation 4.3.4 s'écrit avec des termes en plus :

$$\sum_{j=1}^{N_H} D_{ij} \phi_j - \sum_{j=1}^{N_F} S_{ij} \frac{\partial \phi_j}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = \sum_{j=1}^{N_H} S_{ij} \frac{\partial \phi_j}{\partial \underline{\mathbf{n}}} - \sum_{j=1}^{N_F} D_{ij} \phi_j \quad (4.3.8)$$

Dans ce cas, le potentiel de vitesse et sa dérivée par rapport à la normale au niveau de la surface libre sont inconnus. Les deux inconnues peuvent être reliées grâce aux conditions cinématique et dynamique linéaires de la surface libre.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (4.3.9)$$

Lorsque les déplacements de la surface libre sont linéarisés, la dérivée normale du potentiel est égale à la dérivée par rapport à l'axe z .

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4.3.10)$$

Pour un signal harmonique de pulsation ω_w , l'équation 4.3.9 s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega_w^2}{g} \phi \quad (4.3.11)$$

En mettant les inconnu sur la gauche, l'équation 4.3.8 devient :

$$\sum_{j=1}^{N_H} D_{ij}\phi_j + \sum_{j=1}^{N_F} \left(D_{ij} - \frac{\omega_w^2}{g} S_{ij} \right) \phi_j = \sum_{j=1}^{N_H} S_{ij} \frac{\partial \phi_j}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \quad (4.3.12)$$

Ensuite, les différentes symétries s'appliquent comme pour le cas sans la surface libre. Cependant, cette méthode est peu précise pour le calcul des potentiels de la surface libre. Il est préférable d'utiliser la méthode avec les sources seules en calculant les coefficients d'influence des panneaux de la structure. Deux équations sont à résoudre dans le cas des sources seules :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N_H} K_{ij}\sigma_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \\ \sum_{j=1}^{N_H} S_{ij}\sigma_j = \phi_j \end{array} \right. \quad (4.3.13)$$

La variable σ correspond aux coefficients d'influence de la structure. Une fois que le premier système est résolu, il est possible de déterminer le potentiel de vitesse n'importe où dans le domaine avec la deuxième égalité.

4.3.1 Sphère pulsante immergée

Afin de vérifier les résultats du modèle hydrodynamique, un cas test est réalisé. Il s'agit d'une sphère pulsante proche de la surface libre. L'intérêt de cette étude est de vérifier que le code hydrodynamique est capable de calculer les effets pour un corps entièrement immergé et proche de la surface libre. Les résultats sont comparés à ceux de Lopes [24].

Les figures 4.8 montrent les masses ajoutées et amortissements hydrodynamiques pour une sphère pulsante et se déplaçant en pilonnement. Les coefficients hydrodynamiques sont identiques dans les deux cas, ce qui permet de s'assurer de la méthode développée.

Le code de diffraction-radiation converge lentement, la figure 4.9 montre la valeur de la masse ajoutée et de l'amortissement hydrodynamique radiale au niveau des valeurs maximales et minimales ($kR = 0.85$ pour μ_{rr} et $kR = 0.34$ pour ν_{rr}). Les valeurs n'ont toujours pas convergé sur la figure mais semblent tendre vers 2.465 pour l'amortissement et 0.899 pour la masse ajoutée. Pour atteindre ces valeurs, un maillage avec des mailles inférieures à 4cm serait nécessaire mais le temps de calcul devient trop important.

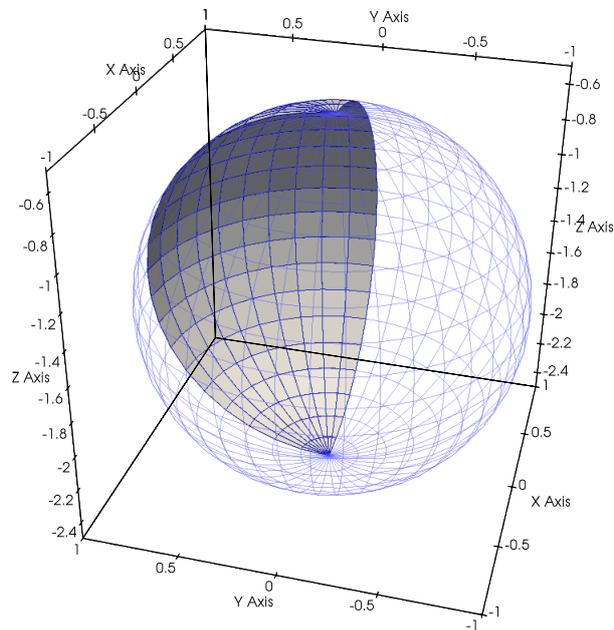


FIGURE 4.7 – Représentation du quart de maillage nécessaire pour le calcul des efforts hydrodynamiques d’une sphère immergée

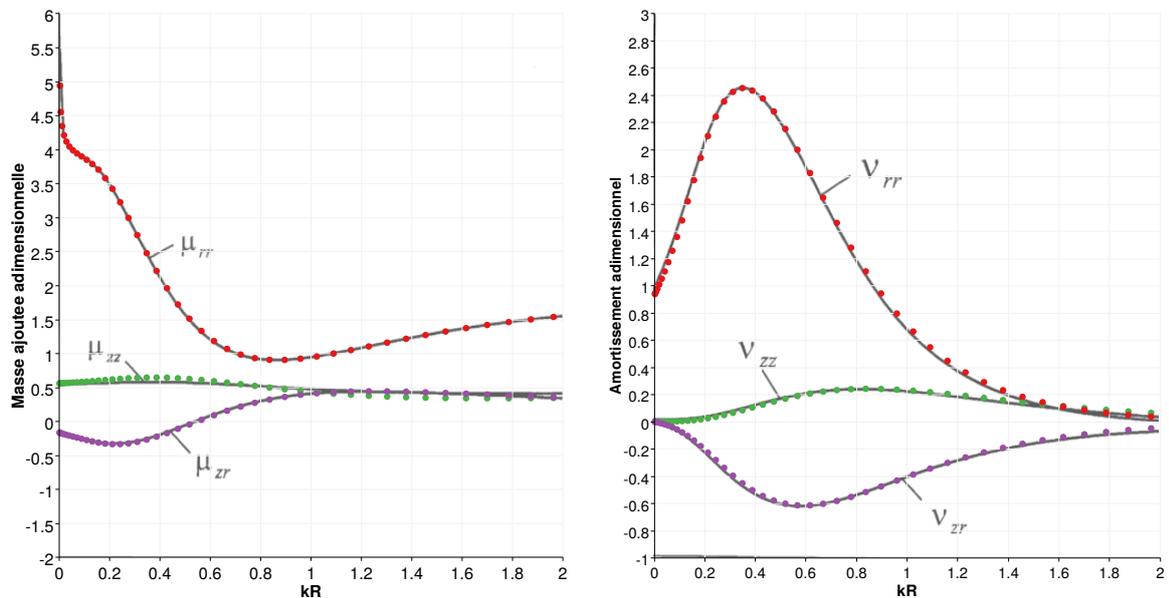


FIGURE 4.8 – Masse ajoutée et amortissement adimensionnalisés pour les directions verticale (zz), radiale (rr) et couplés (zr) en fonction du nombre d’onde adimensionné KR . Le ratio entre le rayon de la sphere et la profondeur est $R/h = 0.1$ et le centre de la sphere est immergé à $l/R = 1.5$.

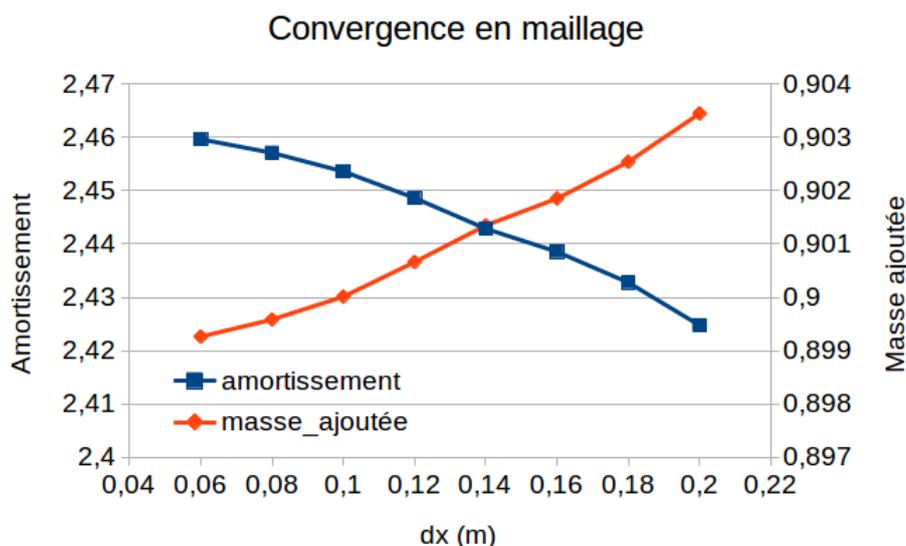


FIGURE 4.9 – Étude de convergence en maillage de l’amortissement et la masse ajoutée radiale d’une sphère pulsante. Le ratio entre le rayon de la sphère et la profondeur est $R/h = 0.1$ et le centre de la sphère est immergé à $l/R = 1.5$.

4.3.2 Analyse des forces de diffraction d’un tube immergé

D’autres analyses sont réalisées avec un tube horizontal de $10m$ et de $55cm$ de diamètre. Les figures 4.10 à 4.13 correspondent à des études de convergence en maillage avec les forces de diffractions pour différents modes et différentes profondeurs d’immersion. Les deux premières courbes correspondent à des modes de déformation verticale et les deux autres courbes à des modes de déformation radiale. Dans chaque cas, les forces de diffraction convergent rapidement. Les différents maillages sont représentés par des courbes en pointillés puis en traits pleins. Lorsque le tube est éloigné de la surface libre (fig.4.10), les forces de diffraction sont quasiment de la même amplitude. En passant d’une profondeur d’immersion de $1,75R$ à $1,5R$ (fig.4.11), l’amplitude des forces augmente de moitié et les pics se décalent de $1rad/s$. La tendance est identique en passant d’une immersion de $1,5R$ à $1,375R$ (fig.4.12). Cependant, lorsque le tube est proche de la surface libre, avec une profondeur d’immersion de $1.25R$ (fig.4.13), la tendance est conservée pour les modes de déformation verticale mais pas pour les modes de déformation radiale. Par exemple, pour le mode $9, n = 0$, un pic serait attendu à $5rad/s$ avec une amplitude autour de $1000N$. Au lieu de cela, deux pics apparaissent autour de $4,6rad/s$ et $5.4rad/s$ et avec une amplitude autour de $600N$, ce qui est plus faible que le cas précédent.

Il n’est actuellement pas possible de déterminer si ce phénomène est physique ou si c’est une erreur numérique mais il semble être lié à la longueur d’onde des modes.

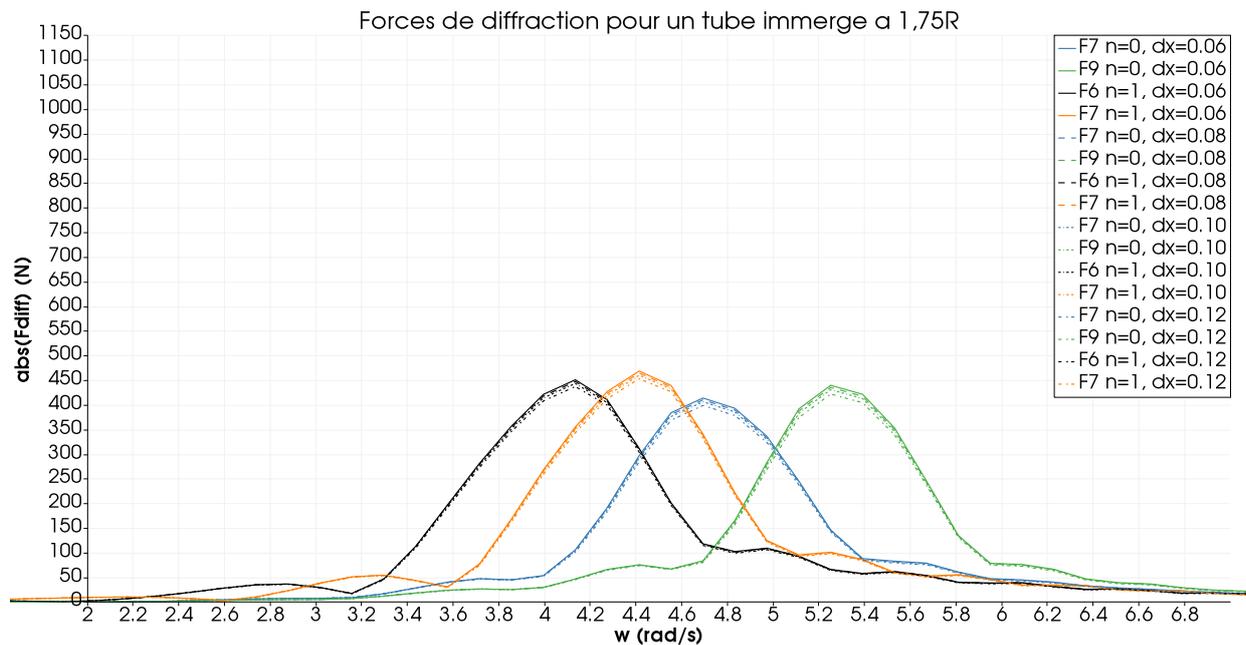


FIGURE 4.10 – Étude de convergence en maillage pour les différents modes de déformation d’un tube déformable de 10m de long et immergé à 1.75R

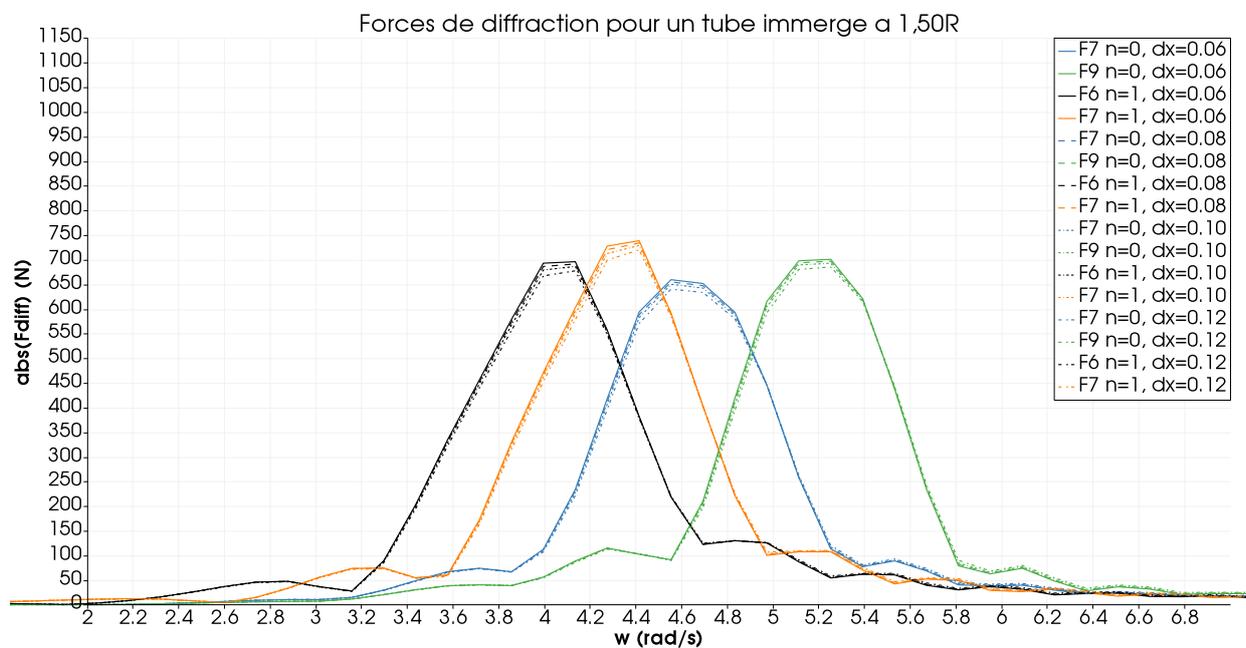


FIGURE 4.11 – Étude de convergence en maillage pour les différents modes de déformation d’un tube déformable de 10m de long et immergé à 1.50R

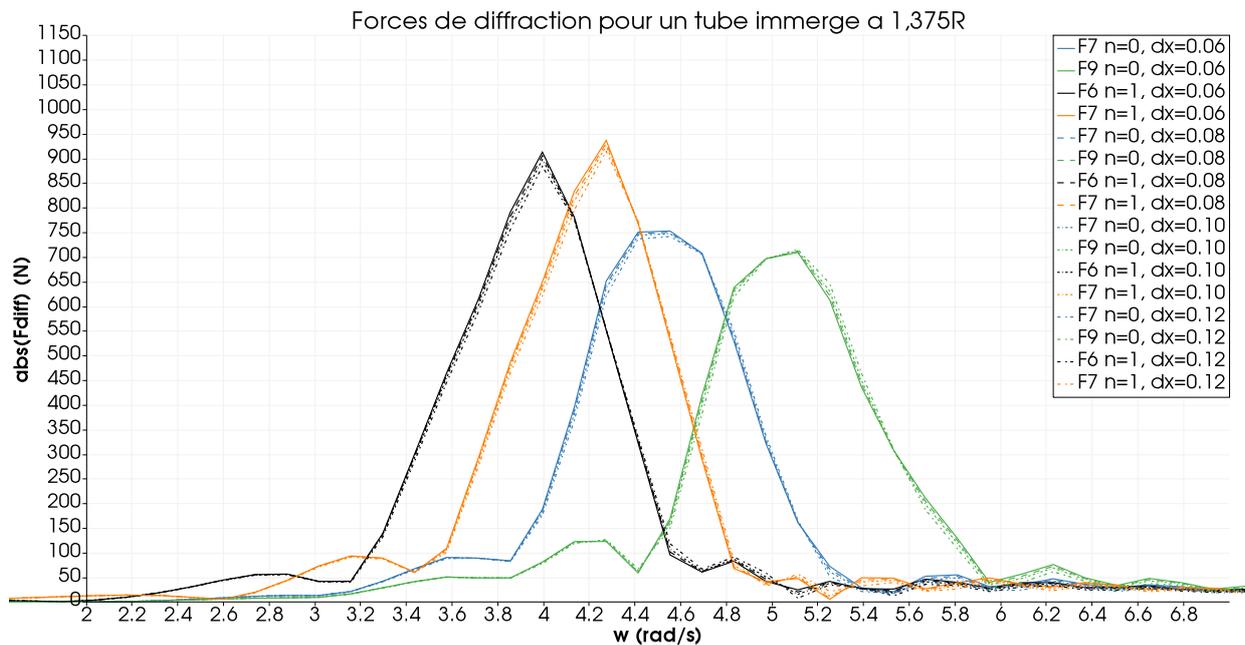


FIGURE 4.12 – Étude de convergence en maillage pour les différents modes de déformation d'un tube déformable de 10m de long et immergé à 1.375R

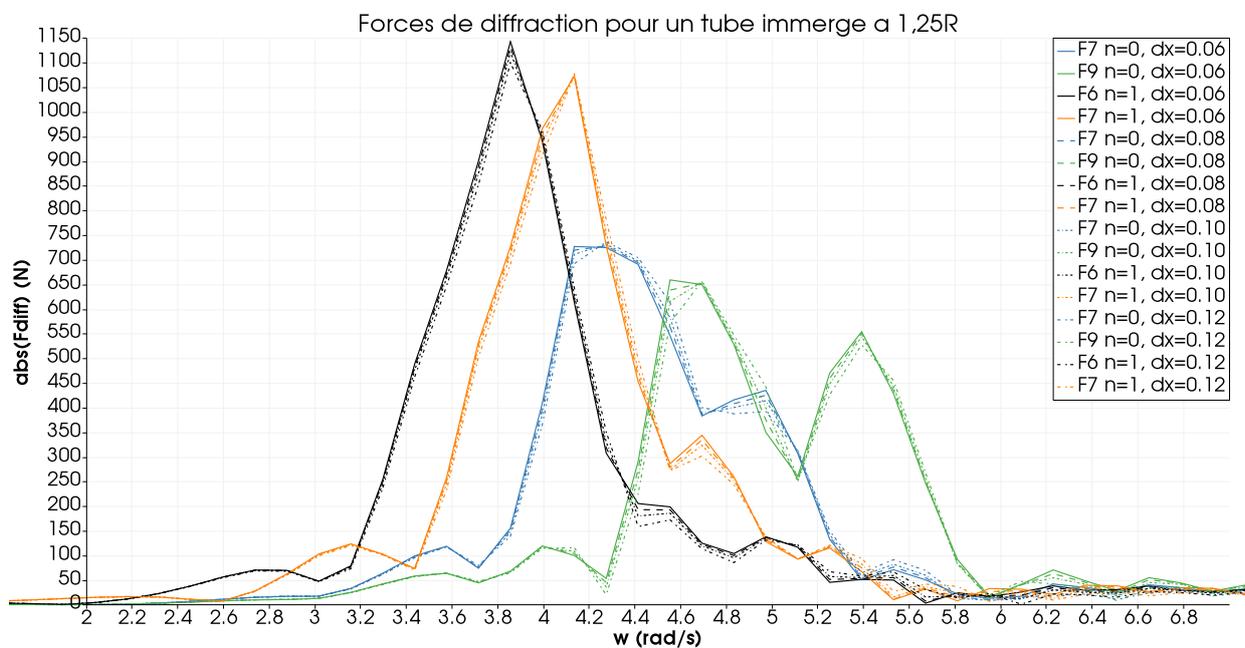


FIGURE 4.13 – Étude de convergence en maillage pour les différents modes de déformation d'un tube déformable de 10m de long et immergé à 1.25R

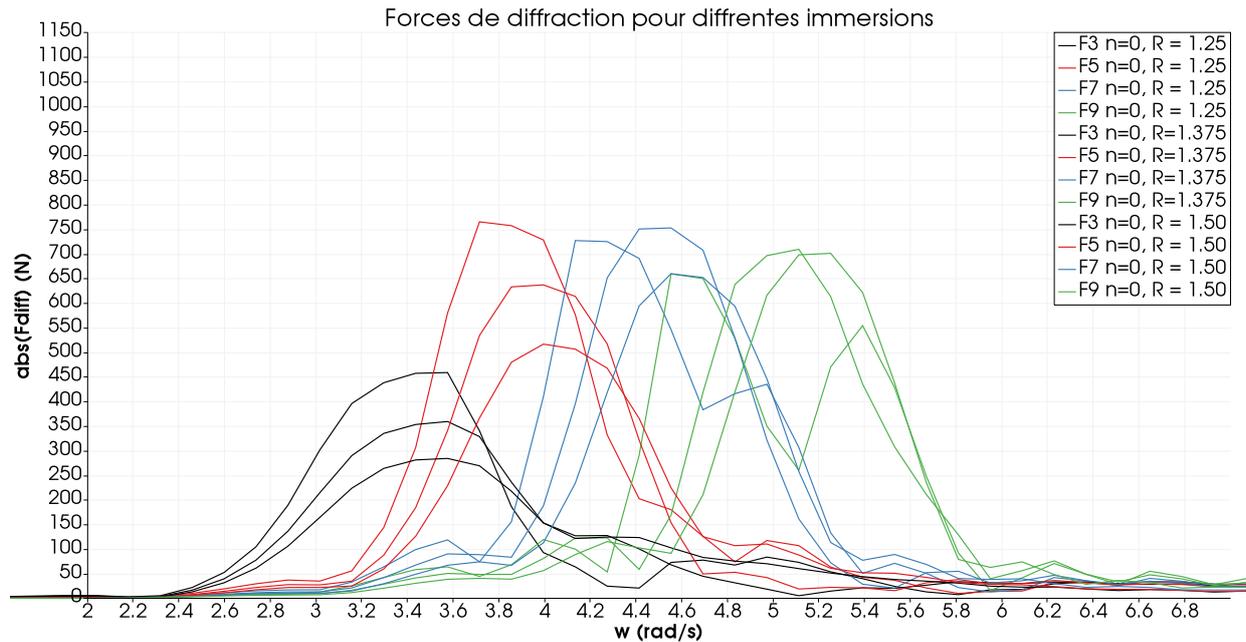


FIGURE 4.14 – Analyses des forces de diffraction pour différents modes de déformation radiale et plusieurs immersions

La figure 4.14 montre plusieurs forces de diffractions liées aux modes de déformation radiale uniquement. Il apparaît que seuls les modes avec une petite longueur d'onde présentent cet effet d'affaissement lorsque le tube se rapproche de la surface libre. Les modes 7 et 9 ont des longueurs d'onde de $2.65m$ et $2.10m$ alors que le mode 5 a une longueur d'onde de $3.58m$. Il en est de même en analysant les modes de déformation verticale (fig. 4.15), ce phénomène apparaît sur le mode 8 dont la longueur d'onde est de $2.65m$.

Après cette analyse et avoir décrit la méthode pour calculer les efforts hydrodynamiques et que les modes ont été déterminés, l'étape suivante du modèle numérique est d'assembler les différentes matrices et de calculer la réponse du système à une houle régulière à différentes fréquences.

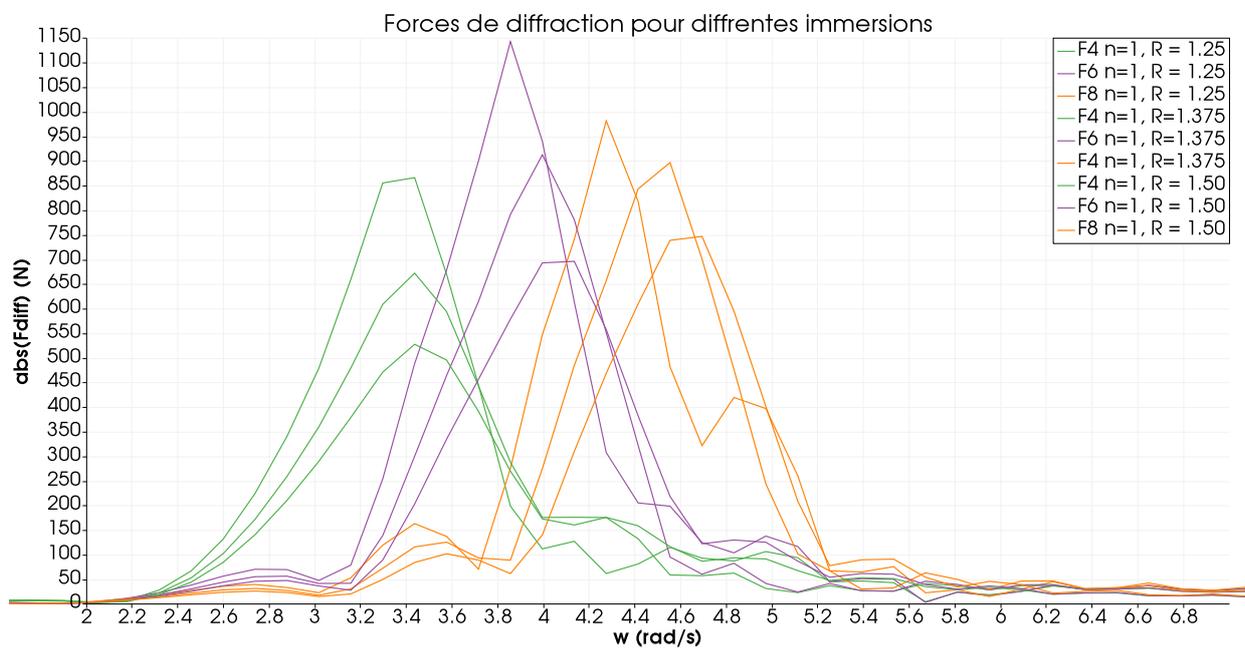


FIGURE 4.15 – Analyses des forces de diffraction pour différents modes de déformation axiale et plusieurs immersions

4.4 Modèle linéaire

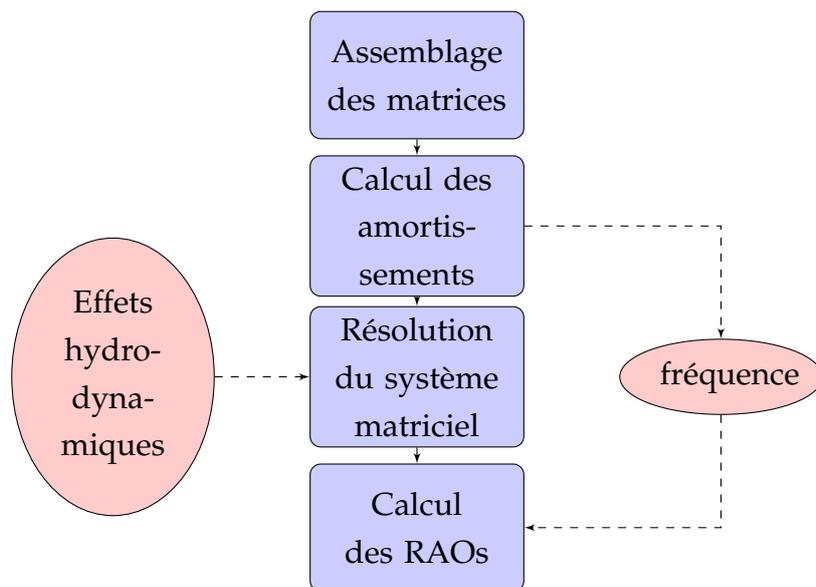
Le modèle linéaire permet de calculer les déformations du système houlomoteur dans le domaine fréquentiel. L'intérêt de cette version du code est de pouvoir générer des résultats préliminaires de façon très rapide une fois que les coefficients hydrodynamiques sont connus.

Grâce à la normalisation des modes, les matrices de masse et de raideur sont diagonales (eq.3.3.3). Cependant, pour s'assurer qu'il n'y a pas d'erreur dans le modèle numérique, il est possible de vérifier si l'assemblage des matrices avec l'expression complète de la base modale (eq. 3.2.38) donne les matrices attendues. Ce test a été fait et la différence entre les termes de la matrice de raideur assemblée avec la base modale, et la matrice diagonale des carrés des fréquences est de l'ordre de $O(10^{-12})$, ce qui correspond à l'erreur de la machine. Il en est de même pour la matrice de masse. Ce test confirme qu'il n'y a pas d'erreur dans la détermination des modes

Ensuite, le système est résolu pour chaque fréquence avec l'équation 3.3.2 rappelée ici.

$$\{-\omega^2([\mathbf{M}] + [\mathbf{M}_A]) - i\omega([\mathbf{B}] + [\mathbf{B}_H]) + [\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_H]\}\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}_e$$

Les forces d'excitations ont été définies à l'aide du modèle hydrodynamique. Toutes les matrices sont présentes sauf la matrice d'amortissement de paroi $[\mathbf{B}]$. Cette dernière est construite à l'aide des termes de déplacement constituant la base modale (eq. 3.2.38) et en utilisant les coefficients d'amortissement pour chaque variable (eq. 3.1.27).



Le vecteur d'amplitude modale $\underline{\mathbf{C}}$ est obtenue en inversant la matrice d'impédance

$[\mathbf{Z}]$:

$$[\mathbf{Z}] = -\omega^2([\mathbf{M}] + [\mathbf{M}_A]) - i\omega([\mathbf{B}] + [\mathbf{B}_H]) + [\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_H] \quad (4.4.1)$$

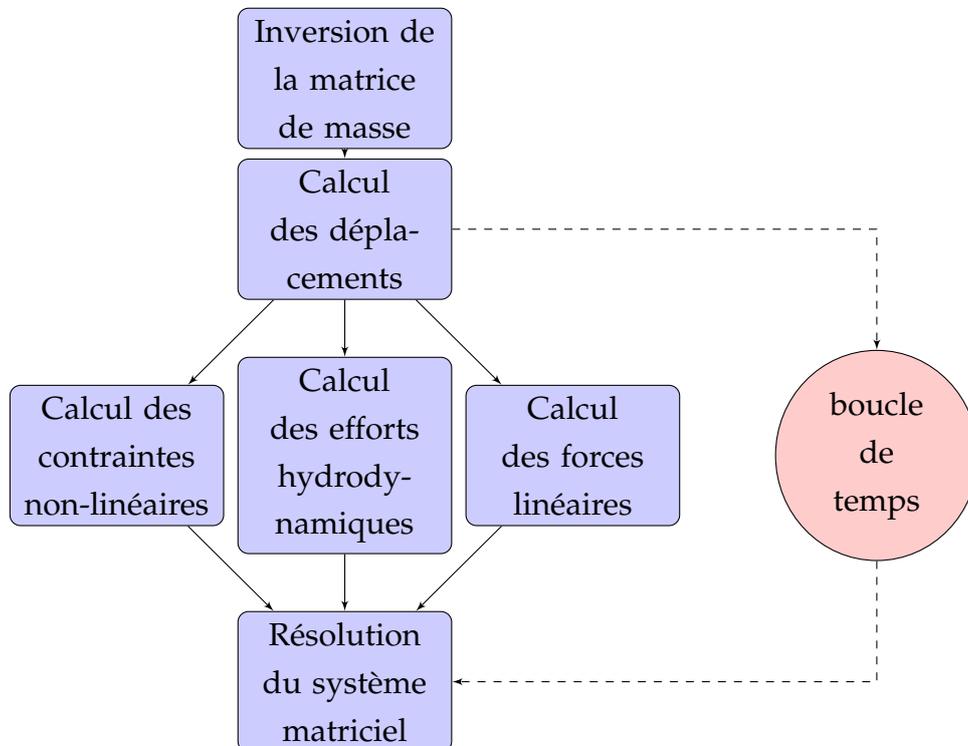
L'inversion de cette matrice complexe se fait à l'aide des routines de résolution de système Lapack. Une fois que les amplitudes modales sont connues, les déformations de la structure peuvent être calculés. Les résultats sont générés pour des forces d'amplitude unitaire. Il est ainsi possible d'en déduire des fonctions de transfert. Lorsque la résolution dans le domaine fréquentiel est réalisée, il est possible de visualiser les déformations du système à l'aide d'un logiciel de visualisation scientifique comme ParaView ou TecPlot.

4.5 Modèle non-linéaire

Dans cette dernière étape, la dynamique du système houlomoteur est résolue dans le domaine temporel, ce qui permet de prendre en compte les effets non-linéaires de paroi. Cependant, il est à noter que les effets hydrodynamiques ont été calculés avec un modèle linéaire considérant de faibles déplacements de la structure. Ainsi, pour les forces hydrodynamiques, le tube est considéré au repos mais les contraintes de Piola-Kirchhoff sont calculées pour chaque déplacement de la paroi, à tout moment. Le modèle non-linéaire reprend les matrices du modèle linéaire.

$$([\mathbf{M}] + [\mathbf{M}_\infty]) \ddot{\mathbf{C}} + [\mathbf{K}_M] \mathbf{C} + \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_{NL} = \mathbf{F}_e$$

Les matrices de masse et de masse ajoutée à l'infini sont additionnées et inversées avant la simulation car elles restent constantes tout le temps. La réponse impulsionnelle du système pour chaque mode de déformation est calculée à l'aide des matrices de coefficients hydrodynamiques (eq.3.3.23), permettant ainsi de calculer les forces de radiation. Les effets de raideur hydrostatique sont inclus dans les forces d'excitation en calculant la pression statique à tout instant et en prenant en compte l'évolution de la surface immergée.



Pour chaque pas de temps, les déplacements sont estimés permettant de calculer les différentes forces intervenant dans la physique du système. Une fois les forces calculées, le système matriciel est résolu en faisant la somme des forces et en utilisant

l'inverse de la matrice de masse.

$$\underline{\ddot{\mathbf{C}}} = \frac{\underline{\mathbf{F}}_e - \underline{\mathbf{F}}_R - \underline{\mathbf{F}}_{NL} - ([\mathbf{K}_H] + [\mathbf{K}_M]) \underline{\mathbf{C}}}{([\mathbf{M}] + [\mathbf{M}_\infty])} \quad (4.5.1)$$

La résolution de ce système matriciel est réalisée à l'aide d'un schéma d'intégration temporelle. Il existe plusieurs méthodes (Euler, Newmark, Adams-Bashforth ...) et celle employée ici est le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). C'est une méthode couramment utilisée dans les problèmes physiques et est simple à implémenter tout en permettant une bonne convergence par rapport aux méthodes d'ordre 2 type Euler. Quatre itérations sont nécessaires pour chaque pas de temps avant de calculer les déplacements au temps suivant.

Première étape :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{C}}_1 = \underline{\mathbf{C}}(t) \\ \underline{\dot{\mathbf{C}}}_1 = \underline{\dot{\mathbf{C}}}(t) \\ \underline{\ddot{\mathbf{C}}}_1 = \mathcal{E}(t, \underline{\mathbf{C}}_1, \underline{\dot{\mathbf{C}}}_1) \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Avec $\mathcal{E}(t, \underline{\mathbf{C}}, \underline{\dot{\mathbf{C}}})$ l'équation de la dynamique 4.5.1.

Deuxième étape :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{C}}_2 = \underline{\mathbf{C}}(t) + \frac{dt}{2} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_1 \\ \underline{\dot{\mathbf{C}}}_2 = \underline{\dot{\mathbf{C}}}(t) + \frac{dt}{2} \underline{\ddot{\mathbf{C}}}_1 \\ \underline{\ddot{\mathbf{C}}}_2 = \mathcal{E}(t + dt/2, \underline{\mathbf{C}}_2, \underline{\dot{\mathbf{C}}}_2) \end{cases} \quad (4.5.3)$$

Troisième étape :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{C}}_3 = \underline{\mathbf{C}}(t) + \frac{dt}{2} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_2 \\ \underline{\dot{\mathbf{C}}}_3 = \underline{\dot{\mathbf{C}}}(t) + \frac{dt}{2} \underline{\ddot{\mathbf{C}}}_2 \\ \underline{\ddot{\mathbf{C}}}_3 = \mathcal{E}(t + dt/2, \underline{\mathbf{C}}_3, \underline{\dot{\mathbf{C}}}_3) \end{cases} \quad (4.5.4)$$

Quatrième étape :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{C}}_4 = \underline{\mathbf{C}}(t) + dt \underline{\dot{\mathbf{C}}}_3 \\ \underline{\dot{\mathbf{C}}}_4 = \underline{\dot{\mathbf{C}}}(t) + dt \underline{\ddot{\mathbf{C}}}_3 \\ \underline{\ddot{\mathbf{C}}}_4 = \mathcal{E}(t + dt, \underline{\mathbf{C}}_4, \underline{\dot{\mathbf{C}}}_4) \end{cases} \quad (4.5.5)$$

Les amplitudes et vitesses modales au temps suivant sont :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{C}}(t+1) = \underline{\mathbf{C}}(t) + \frac{dt}{6} (\underline{\dot{\mathbf{C}}}_1 + 2\underline{\dot{\mathbf{C}}}_2 + 2\underline{\dot{\mathbf{C}}}_3 + \underline{\dot{\mathbf{C}}}_4) \\ \underline{\dot{\mathbf{C}}}(t+1) = \underline{\dot{\mathbf{C}}}(t) + \frac{dt}{6} (\underline{\ddot{\mathbf{C}}}_1 + 2\underline{\ddot{\mathbf{C}}}_2 + 2\underline{\ddot{\mathbf{C}}}_3 + \underline{\ddot{\mathbf{C}}}_4) \end{cases} \quad (4.5.6)$$

Une fois que les amplitudes modales ont été calculées, les déplacements et les contraintes agissant dans le tube peuvent être estimés. Pour calculer les opérateurs de fonction de transfert (RAO), le comportement de la structure est analysé sur une houle périodique. Une transformée de Fourier est réalisée sur plusieurs périodes une fois que le système houlomoteur est rentré dans un régime régulier, après la phase transitoire. Afin d'éviter d'avoir une phase de transition trop importante, l'amplitude de la houle est augmentée progressivement. Cette manipulation permet d'extraire l'amplitude des déformations au premier ordre et de calculer les RAOs pour une amplitude de houle donnée. La figure 4.16 montre un exemple de réponse du système houlomoteur. Il s'agit de l'amplitude des déformations radiales :

$$\lambda_R = w/R_0$$

L'amplitude de la houle est augmentée jusqu'au temps $t = 20s$ puis le système rentre dans la phase de régime régulier. La transformée de Fourier est alors calculée sur un nombre de périodes entier jusqu'à la fin de la simulation, soit 10 périodes dans cet exemple. La procédure est réalisée sur l'ensemble du tube et répétée pour des houles de différente période afin de générer la carte de réponse du système houlomoteur.

La figure 4.17 montre un aperçu d'une simulation d'un tube de $10m$ de long dans une houle régulière. L'échelle de couleur correspond à l'amplitude des déformations radiales du tube à l'instant présent de la simulation. Les effets hydrodynamiques sont pris en compte mais n'ont pas été calculés au niveau de la surface libre dans ce cas.

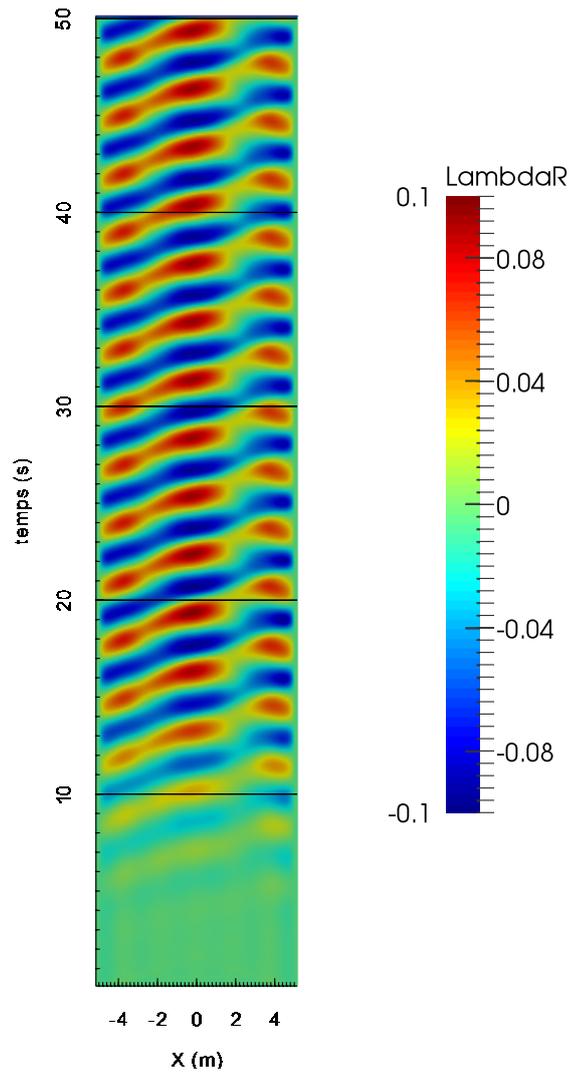


FIGURE 4.16 – Déformations radiales du tube pour une houle de période $T = 3s$ et d'amplitude $a = 10cm$

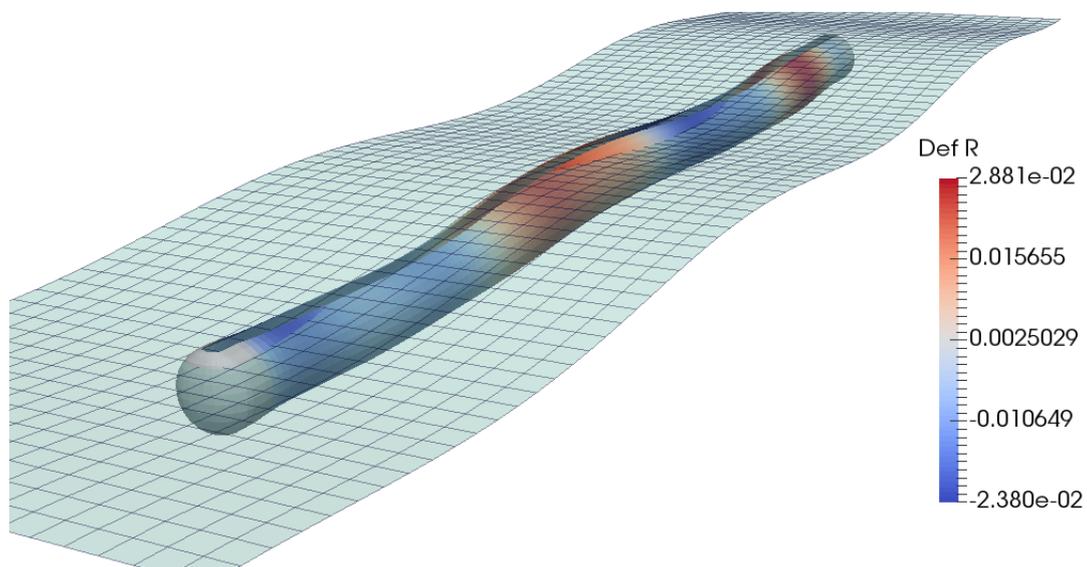


FIGURE 4.17 – Simulation d'un tube de $10m$ dans une houle régulière de période $T = 2s$ et d'amplitude $a = 10cm$

4.6 Conclusions du chapitre

Les quatre différentes étapes du modèle numérique ont été décrites dans ce chapitre. Les étapes sont les suivantes :

1. Constitution de la base modale
2. Calcul des coefficients hydrodynamiques
3. Résolution dans l'espace fréquentiel
4. Résolution dans l'espace temporel

La première étape permet de définir la base modale à partir des données d'entrée et après avoir calculé l'équilibre des forces dans la configuration statique. Dans un premier lieu les solutions de l'équation de propagation, qui correspond au déterminant des équations de conditions aux limites, sont déterminées dans un intervalle de fréquence donné. Puis à partir des différentes solutions, les coefficients des modes sont déterminés, toujours à partir des équations de conditions aux limites puis normalisés.

Grâce aux modes de déformation de la structure, les coefficients hydrodynamiques sont calculés. Ces différents coefficients qui sont les matrices de masse ajoutée, amortissement hydrodynamique et raideur hydrostatique permettent de réaliser le couplage entre la houle et la structure. Un modèle a spécialement été conçu à partir des travaux de Delhommeau afin d'avoir un outil rapide et performant avec l'utilisation des bibliothèques OpenMP pour accélérer les temps de calcul. Des sources mixtes ont été utilisées pour calculer les fonctions de Green sur chaque panneau du maillage et le système à résoudre a été allégé grâce à l'utilisation des symétries. Une analyse a été réalisée d'une sphère pulsante immergée pour tester les résultats du modèle et les prédictions obtenues sont identiques à celle de Lopes [24]. Mais il est apparu que le modèle demande un maillage particulièrement fin pour avoir des résultats convergés. Ensuite une autre étude est réalisée pour analyser l'effet de la profondeur d'immersion sur un tube de 10m de long. Il est apparu que les forces évoluent proportionnellement avec la profondeur d'immersion mais qu'un phénomène d'affaissement apparaît sur les forces de diffraction lorsque le tube se rapproche de plus en plus proche de la surface libre. Ce phénomène n'apparaît que pour les modes de déformation dont la longueur d'onde est faible mais aucune explication n'a pu être établie à l'origine de ce phénomène.

Avec les matrices hydrodynamiques, l'étape suivante consiste à résoudre la dynamique du système houlomoteur dans le domaine fréquentiel. La réponse du système à différentes forces d'excitation est obtenue en calculant les amplitudes modale en inversant la matrice d'impédance $[Z]$. Les forces étant d'amplitude unitaire, on obtient

ainsi les fonctions de transfert du système.

Enfin, la dernière étape du modèle numérique est la résolution de la dynamique du système houlomoteur dans le domaine temporel, ce qui permet de prendre en compte les effets non-linéaires de paroi. Le tube est considéré au repos pour les efforts hydrodynamiques mais les déformations de la paroi sont prises en compte pour le calcul des contraintes. La résolution de la dynamique du système houlomoteur se fait à l'aide du schéma d'intégration temporel de Runge-Kutta d'ordre 4 après avoir fait la somme des forces et inversé la matrice de masse.

Après avoir établi les équations de la dynamique linéaire et non-linéaire du système houlomoteur et qu'un modèle numérique a été développé, la prochaine étape est de comparer les simulations à des cas réels qui ont pu être testés à échelle réduite. Le prochain chapitre permettra de vérifier le modèle hydrodynamique seul puis l'intégralité du modèle numérique.

Chapitre 5

Essais et Validation

5.1 Introduction

Ce chapitre porte sur la vérification du modèle numérique développé dans ce travail de thèse. Les résultats des simulations seront comparés à des mesures obtenues lors d'essais en bassin à houle. Plusieurs campagnes d'essais ont été menées afin de comprendre le fonctionnement du système houlomoteur. La première campagne réalisée en 2010 a permis de valider le concept du système houlomoteur puis en 2011, dans les bassins de l'École Centrale de Nantes, une nouvelle campagne a permis de générer une base de données sur le comportement du système en fonction de plusieurs paramètres tels que la période et l'amplitude de la houle. C'est à partir de cette base de donnée que les résultats des simulations seront comparés. Dans les deux campagnes, le même prototype expérimental a été utilisé. Il s'agit d'un tube en caoutchouc renforcé par des fibres, de 10m de long et 55cm de diamètre, recouvert de bagues de polymères électro-actifs (EAP) disposées à intervalles réguliers. La figure 5.1 montre le prototype lors des premiers essais en 2010.



FIGURE 5.1 – Photos de la maquette avec les bagues de polymères électro-actif

Les différents éléments du système houlomoteur peuvent être distingués sur la fi-

gure 5.1). Le composant principal étant le tube bleu sur lequel reposent les bagues de polymère électro-actif couleur argenté. Le tube est bouché à chaque extrémité par des obturateurs dont un est visible sur la photo de gauche. L'ensemble du système est mis sous pression, ce qui permet de maintenir les bagues en place juste par effet de friction.

Une troisième campagne d'essais a été réalisée en février 2016 pour analyser les effets de diffraction d'un tube fixe affleurant la surface libre. Le premier objectif de cette campagne était de vérifier si le modèle linéaire hydrodynamique employé dans la simulation du système houlomoteur est apte à représenter ce cas simplifié. L'autre objectif était de quantifier la part des effets non-linéaires dans les phénomènes de diffraction.

Ce chapitre est divisé en deux sections. Dans un premier lieu, les résultats du modèle hydrodynamique sont comparés aux mesures de la dernière campagne avec un tube fixe. Ensuite, dans un second lieu, les validations du modèle numérique complet et linéaire sont réalisés avec les mesures obtenues à partir du tube de 10m provenant de la campagne d'essais de 2011.



FIGURE 5.2 – Photo de la maquette avant immersion

5.2 Étude de la diffraction d'un tube rigide immergé

Les études d'écoulement de fluide autour d'un cylindre fixe font partie des cas régulièrement étudiés dans le milieu académique afin de connaître la pression pour différentes vitesses d'écoulement. Cependant, il existe très peu d'études analysant l'effet de la présence d'un tube proche d'une surface libre. Oshkai et Rockwell (1999) [?] ont étudié l'interaction de la surface libre avec un cylindre mais dans leur cas, le cylindre est perpendiculaire aux vagues. L'objectif de cette campagne d'essais était de mesurer les perturbations de la surface libre pour différentes profondeurs d'immersion d'un tube proche surface libre et parallèle à la propagation de la houle.

Après avoir expliqué le montage expérimental, les résultats entre les mesures et les simulations du modèle hydrodynamique seront comparés pour différentes immersions et différentes périodes.

5.2.1 Montage expérimental

Les essais avec le tube fixe ont eu lieu dans le petit bassin de l'École Centrale de Nantes. Il s'agit d'un bassin de 15m de long sur 9.6m de large et 0.9m de fond, équipé d'un batteur à houle capable de générer de la houle régulière. La figure 5.2 correspond à une photo prise avant immersion de la maquette. Il s'agit d'un tube avec une demi-sphère à chaque extrémité de $L = 1.4m$ de longueur et de $D = 20cm$ de diamètre. Le montage expérimental avec les différentes sondes à houle est représenté figure 5.3.

La maquette était fixée sur un châssis immobile et les sondes à houle sur une barre

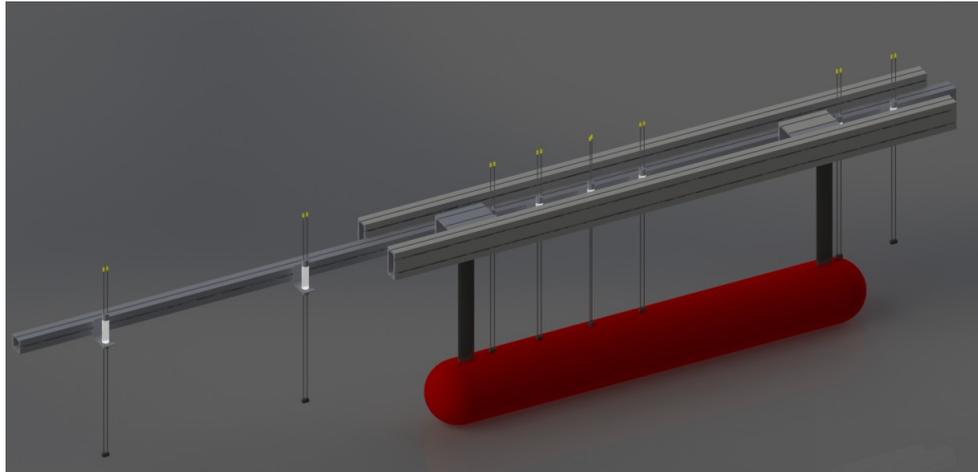


FIGURE 5.3 – Représentation de la maquette et des sondes à houle lors des essais avec un tube fixe

Profondeur d’immersion du cylindre (cm)	Distance des sondes à houle du centre (cm)	Cambrure (%)	Periodes (s)
0	0	1	0.6
5	10	2	0.8
10	20	3	1.0
	30	4	1.2
	50	5	1.4
		6	1.6

TABLE 5.1 – Étendue des paramètres analysés dans le bassin pour l’étude d’un tube fixe

indépendante mobile. Ainsi il était possible de mesurer l’élévation de la surface libre à différents points au-dessus du tube (comme c’est le cas représenté sur la figure 5.3) et latéralement en éloignant la barre maintenant les sondes à houle. Les sondes étaient déplacées latéralement de 1, 2, 3 et 5 rayons de distance du centre du tube (10cm, 20cm, 30cm, 50cm). La disposition des sondes à houle est représentée figure 5.4.

Les différentes séries de tests qui ont été réalisées sont représentées dans le tableau 5.1. Il peut être noté que différentes cambrures de vagues ont été testées. Mais dans le cas du modèle hydrodynamique, étant donné que c’est un modèle linéaire, seuls les tests avec une cambrure faible seront comparés. De par la sensibilité des sondes à houle, les résultats avec une houle d’une cambrure de 3% ont été choisis car les perturbations de la surface libre sont trop faibles pour les sondes avec des cambrures plus petites. Au-delà de cette cambrure, des effets d’ordre supérieur au niveau de la surface libre risquent d’apparaître.

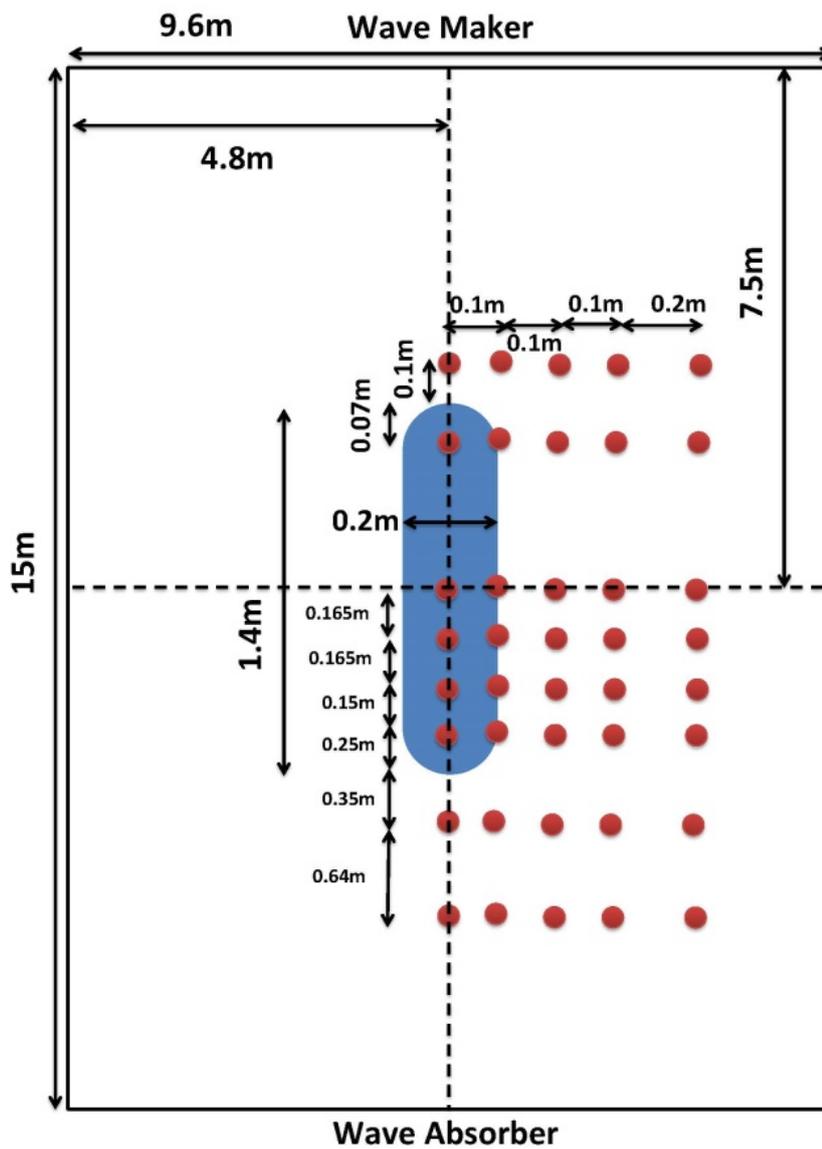


FIGURE 5.4 – Disposition des sondes à houle

5.2.2 Méthodologie

Les signaux enregistrés en volts par les sondes à houle sont convertis en *mm* après les avoir calibrés. Ensuite, ces signaux reconvertis sont analysés à l'aide de transformées de Fourier afin d'obtenir l'amplitude des différentes fréquences qui constituent le signal. Pour chaque analyse de Fourier, les données temporelles sont traitées afin d'obtenir un signal fréquentiel satisfaisant. Afin d'y parvenir, trois critères sont pris en compte :

1. L'analyse doit débiter une fois que l'amplitude de la houle est au maximum. Ce temps où l'amplitude augmente progressivement afin d'éviter les effets de transition est fixé à 8s.
2. Le temps de l'analyse doit prendre en compte l'arrivée des vagues sur les sondes et éviter les effets de réflexion.
3. Les vagues d'ordres supérieurs causées par les perturbations du générateur à houle ne doivent pas être prises en compte. Il est donc nécessaire d'estimer leur temps de propagation pour atteindre les différentes sondes.

Le temps de départ du premier critère est :

$$t_1 = \frac{x_p}{c_g} + T_{ramp} \quad (5.2.1)$$

Dans cette équation x_p est la position des sondes à houle et c_g la vitesse de déplacement des vagues :

$$c_g(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{g}{2\omega} \left(\tanh(kh) + \frac{kh}{\cosh(kh)^2} \right) \quad (5.2.2)$$

Le temps de fin d'analyse est considéré comme étant la valeur la plus petite entre le temps requis pour la réflexion de la houle jusqu'aux sondes ou le temps de propagation de la houle de deuxième ordre causé par les perturbations du générateur. Le temps de la houle réfléchi pour atteindre les sondes est :

$$t_2 = \frac{2L - x_p}{c_g} \quad (5.2.3)$$

Avec L la longueur du bassin. Le temps requis pour la houle de deuxième ordre est obtenue en utilisant l'équation 5.2.2 et avec une pulsation $\omega_2 = 2\omega$.

La figure 5.5 montre les différents signaux enregistrés par les sondes à houle pour une houle de période $T = 1s$ et de 3% de cambrure. Chaque signal correspond à une sonde. Le décalage temporel dû à la position des sondes est clairement visible au début de chaque signal. Ensuite la phase d'élévation de l'amplitude de la houle de 8s est

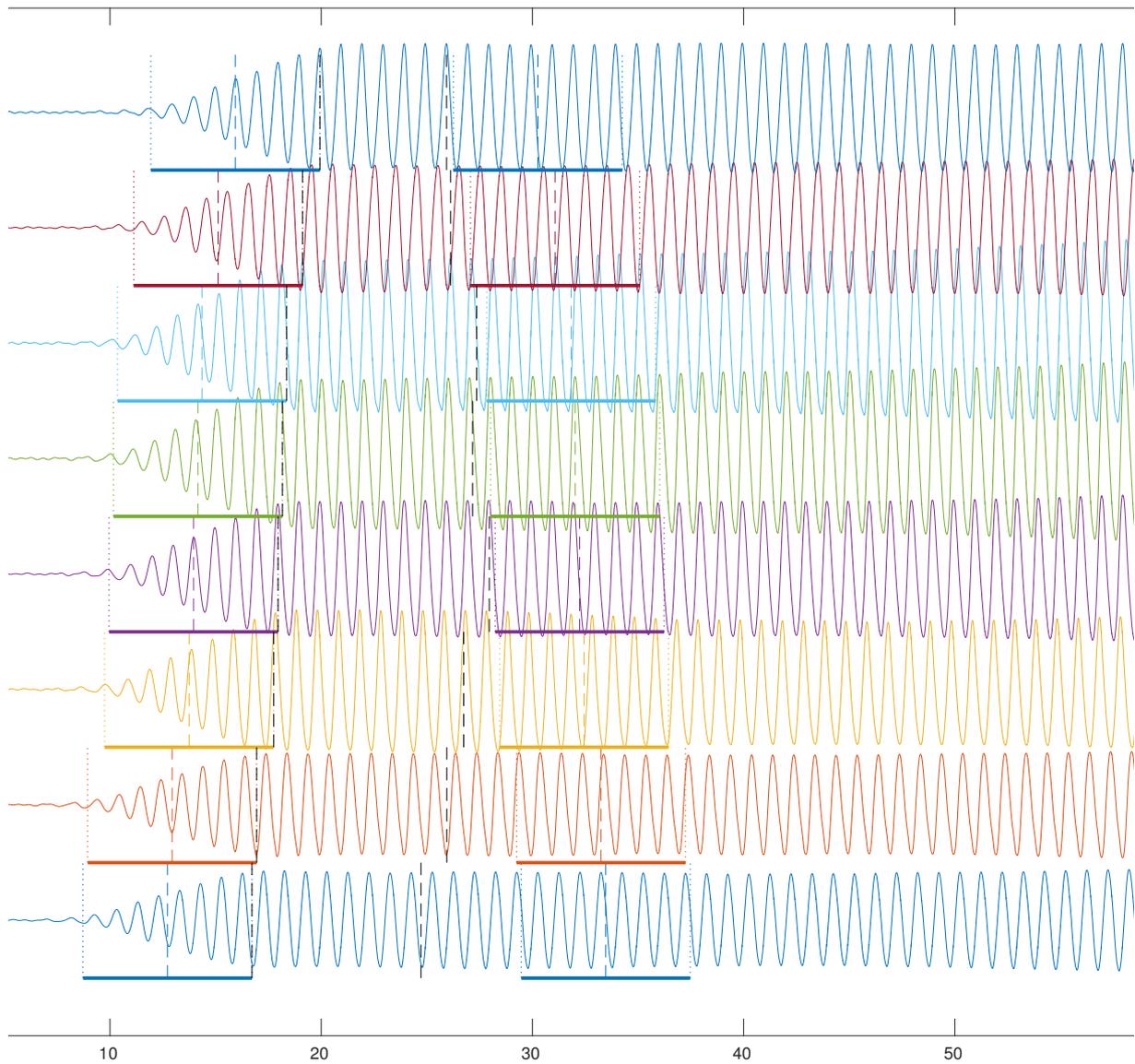


FIGURE 5.5 – Signal temporel enregistré par les sondes à houle pour une houle de période $T = 1s$ et de 3% de cambrure

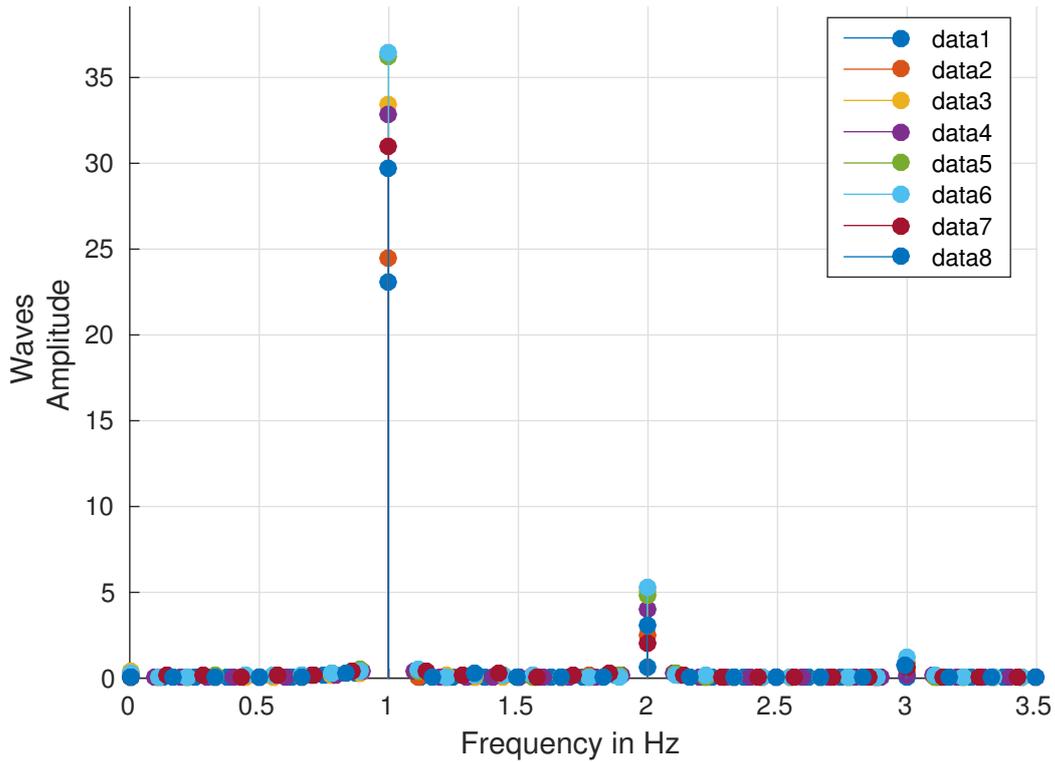


FIGURE 5.6 – Signal fréquentiel enregistré par les sondes à houle après transformation de Fourier pour une houle de période $T = 1s$ et de 3% de cambrure

indiquée par un trait gras horizontal. Le deuxième trait gras horizontal correspond à la réflexion de la houle sur les sondes. La période utilisée pour la transformation de Fourier est comprise entre les deux traits verticaux en pointillés gras.

La figure 5.6 correspond l'amplitude des différentes fréquences suite à la transformation de Fourier. Le fondamental et les différents harmoniques apparaissent clairement. Les effets d'ordre supérieur sont présents mais dans la suite du rapport, seuls les effets du premier ordre seront comparés avec les simulations obtenus par le modèle de diffraction linéaire.

5.2.3 Analyse des résultats

Les signaux enregistrés par les sondes à houle ont été analysés à l'aide de transformées de Fourier afin de n'avoir que le premier ordre. L'amplitude du signal traité est alors comparée avec celle calculée par le modèle hydrodynamique en utilisant la méthode des sources seules. Les perturbations de la surface libre incluent la houle incidente et diffractée. Ce travail est réalisé pour différentes périodes puis pour différentes immersions.

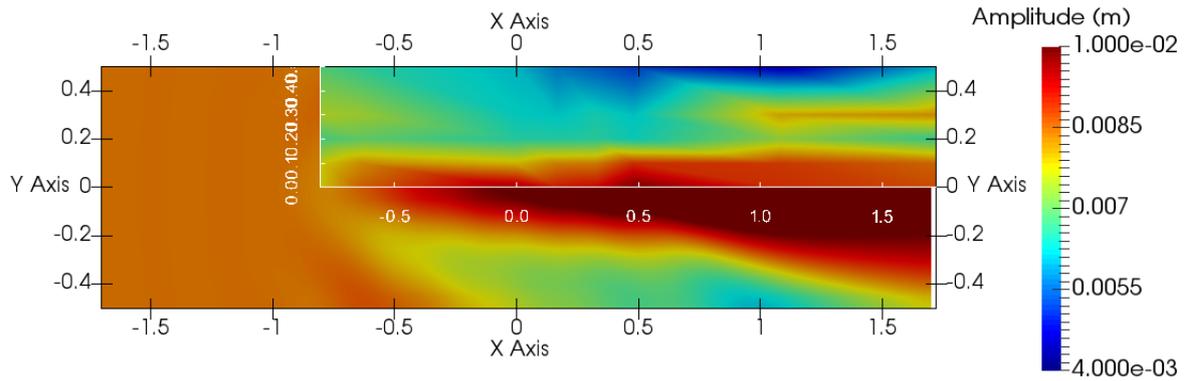


FIGURE 5.7 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm

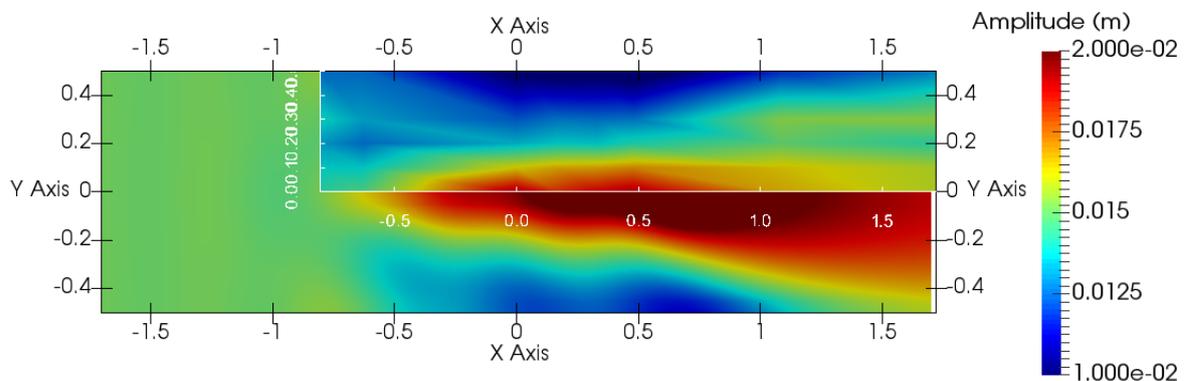


FIGURE 5.8 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.8s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm

Immersion de 1 rayon

Les figures 5.7 à 5.12 montrent l'amplitude de la surface libre provenant du modèle hydrodynamique et les mesures des sondes à houle lorsque le tube est immergé de un rayon et avec une cambrure de vague de 3% pour les périodes allant de $T = 0.6s$ à $T = 1.6s$. Dans chaque figure, les mesures provenant des essais sont représentées dans le quadrant supérieur droit.

Dans l'ensemble, les résultats entre simulations et mesures sont proches. Les perturbations de la houle sont similaires dans les deux cas. La différence la plus importante apparaît à proximité du tube où l'amplitude est sur-estimée et cet effet augmente en même temps que la période. Bien que le tube soit immergé d'un rayon, il est possible que des effets d'ordre supérieur permettent d'atténuer l'amplitude de ces perturbations proches du tube. Des perturbations apparaissent à l'arrière du tube dans les me-

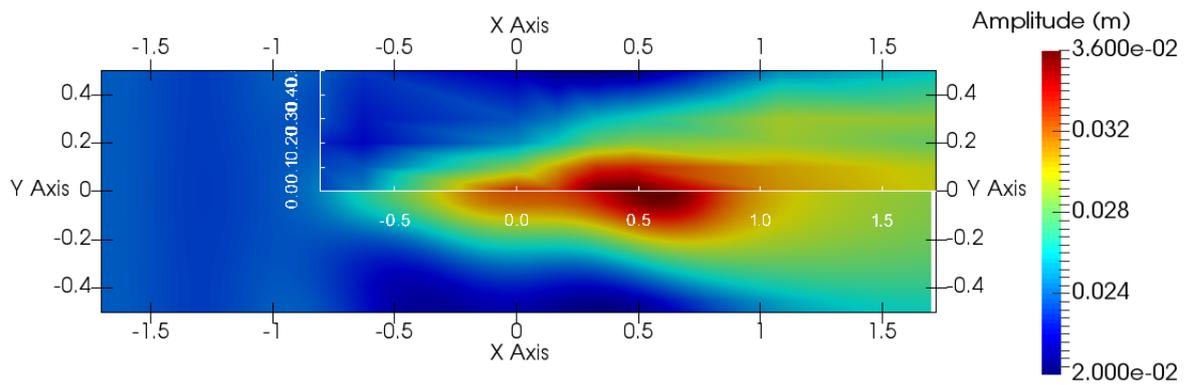


FIGURE 5.9 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.0s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm

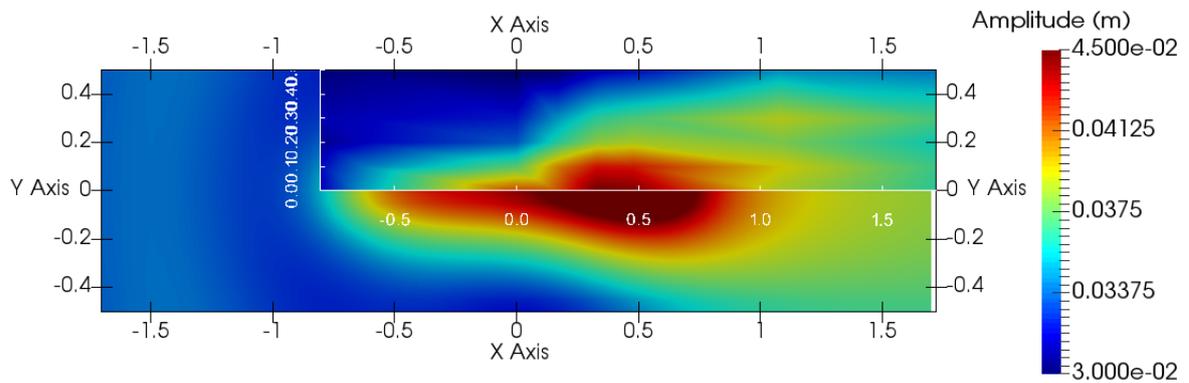


FIGURE 5.10 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.2s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm

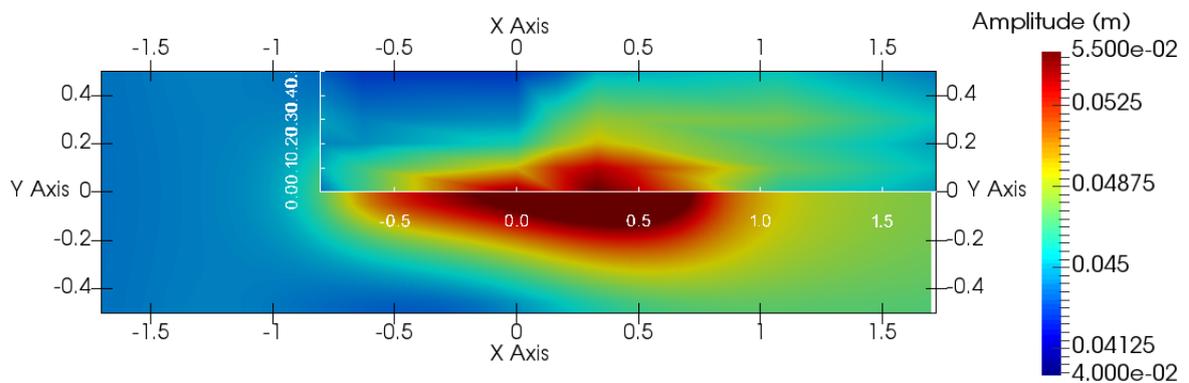


FIGURE 5.11 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.4s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 10cm

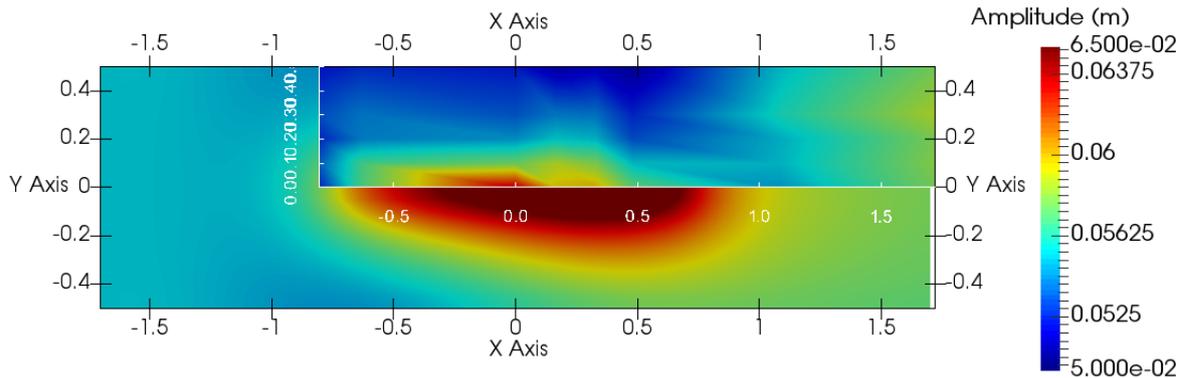


FIGURE 5.12 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de $10cm$

sure, cependant il est probable que ces perturbations soient liées à des problèmes des sondes à houle.

Les comparaisons sont refaites cette fois-ci avec le modèle hydrodynamique développé en utilisant les termes de sources mixtes. Le cas avec une période de $T = 1s$ est choisi car il présente une bonne similarité aux mesures lorsque les simulations sont réalisées avec la méthode des sources seules. Les résultats sont visibles figure 5.13 et il apparaît que l'amplitude est largement sur-estimée avec cette méthode. Ce qui confirme le manque de précision du calcul des potentiels de la surface libre avec la méthode des sources mixtes proposée equation 4.3.12.

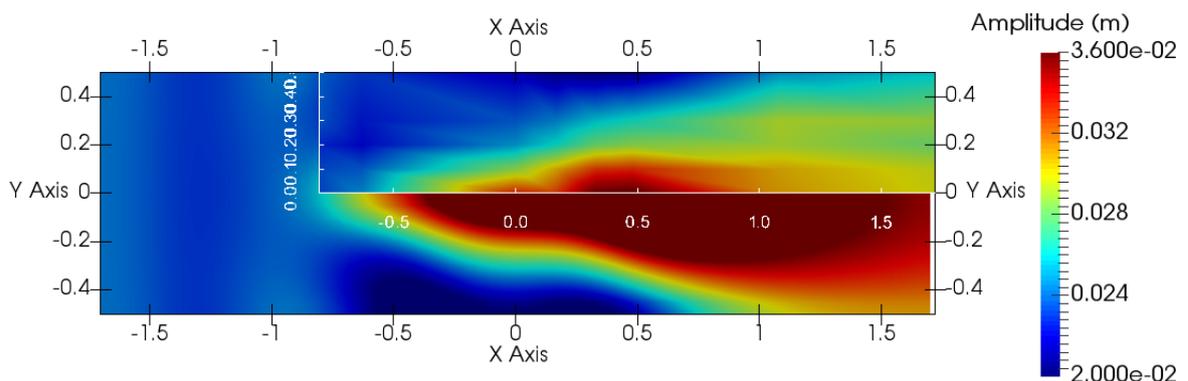


FIGURE 5.13 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.0s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de $10cm$ en utilisant la méthode des sources mixtes

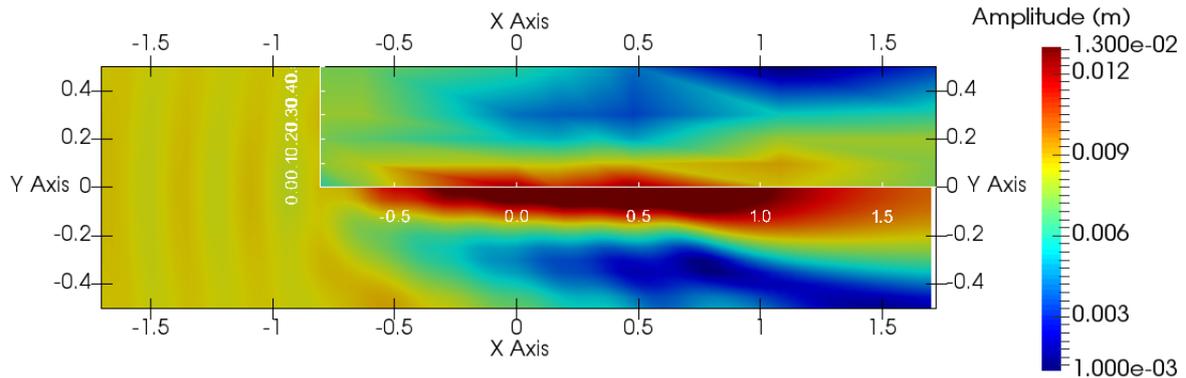


FIGURE 5.14 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm

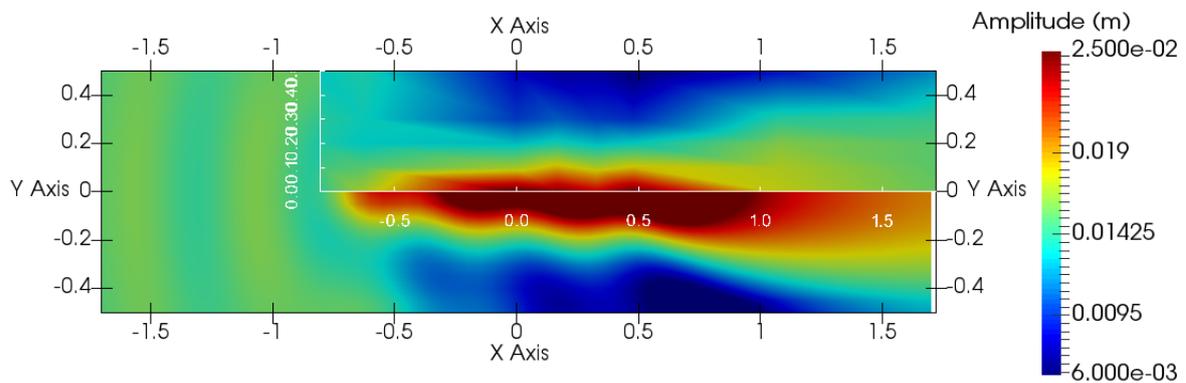


FIGURE 5.15 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.8s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm

Immersion d'un demi rayon

Les figure 5.14 à 5.19 montrent l'amplitude de la surface libre provenant du modèle hydrodynamique et les mesures des sondes à houle lorsque le tube est immergé de un demi rayon et avec une cambrure de vague de 3%.

Dans certains cas, les mesures au-dessus du tube n'ont pu être enregistrées car les sondes à houle se retrouvaient hors de l'eau. La différence entre les deux séries de résultats est très proche aux petites périodes mais l'écart s'agrandit pour de plus grandes périodes comme pour le cas précédent. Cette fois-ci, la différence est visible à partir des vagues avec une période de $T = 1s$.

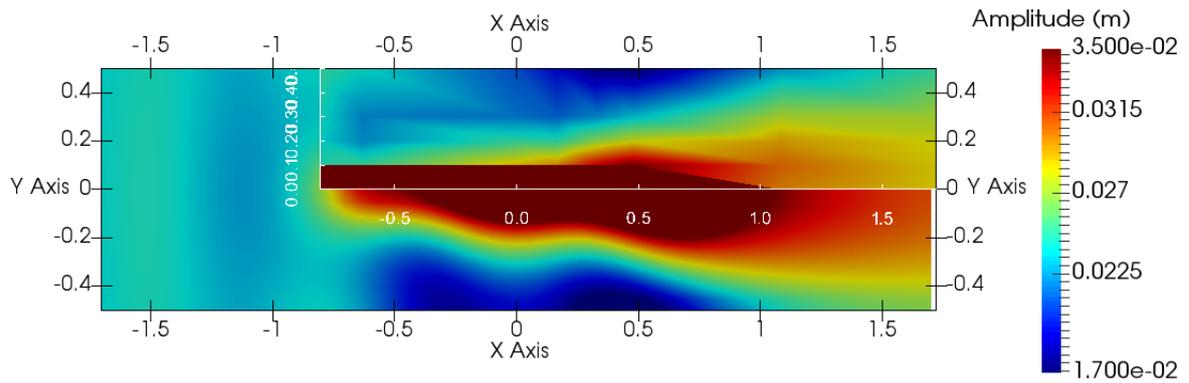


FIGURE 5.16 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.0s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm

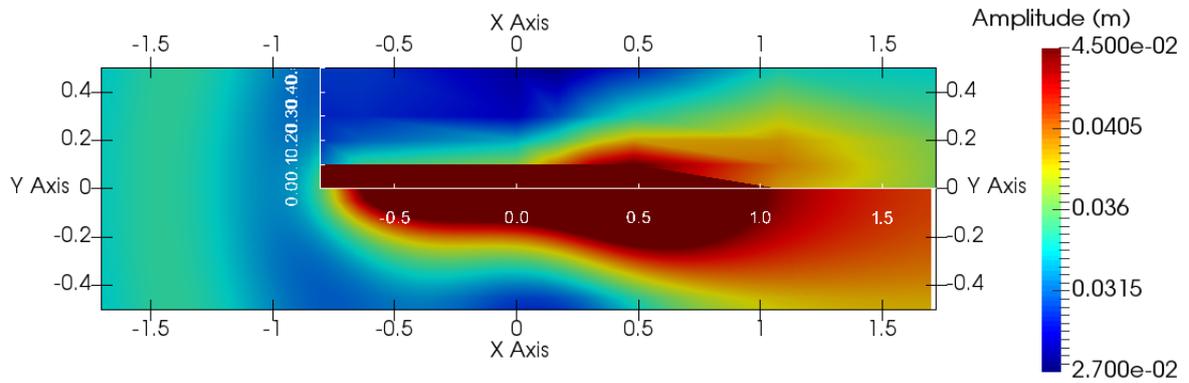


FIGURE 5.17 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.2s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm

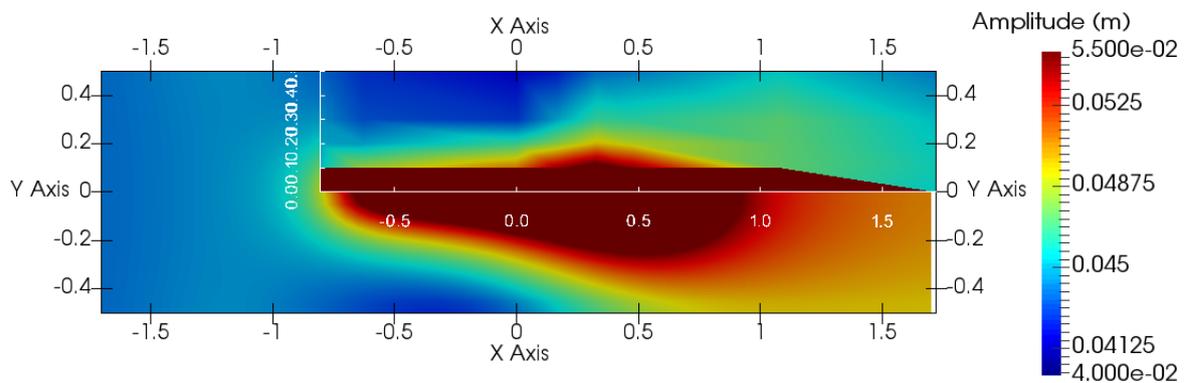


FIGURE 5.18 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.4s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm

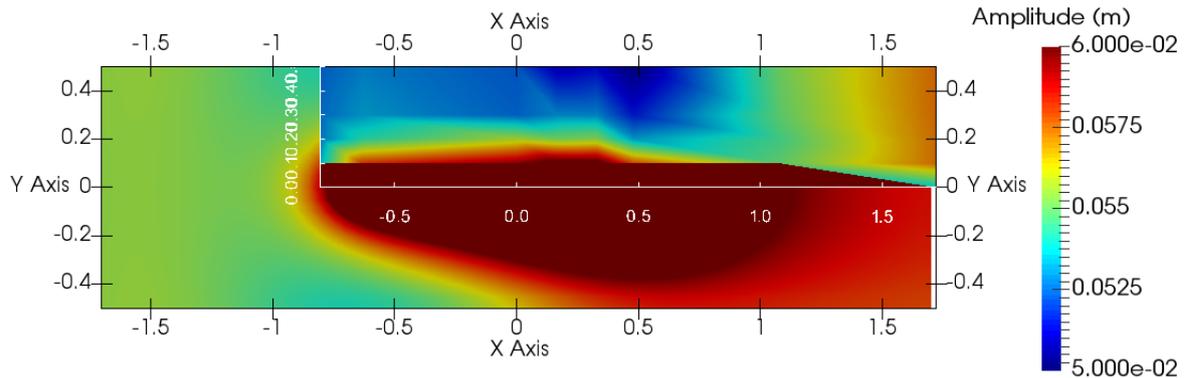


FIGURE 5.19 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube est immergé de 5cm

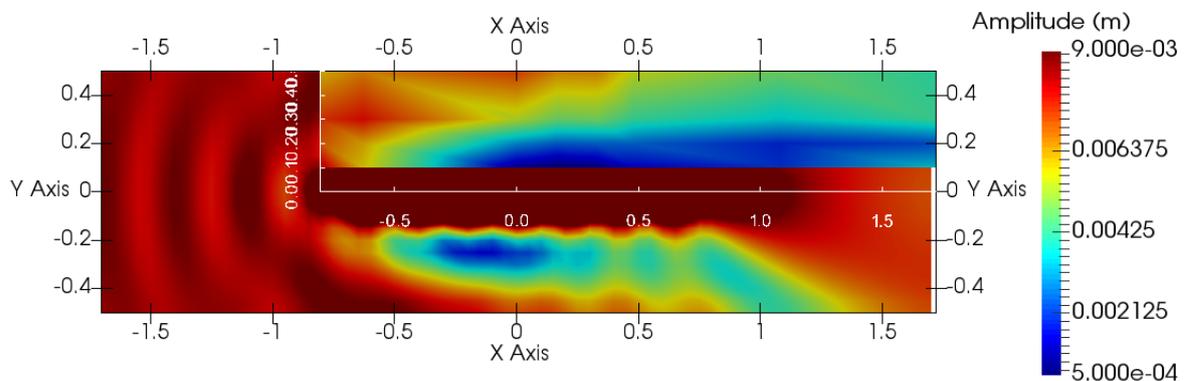


FIGURE 5.20 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre

Tube affleurant la surface libre

Les figure 5.20 à 5.25 montrent l'amplitude de la surface libre entre les résultats provenant du modèle hydrodynamique et les mesures des sondes à houle lorsque le tube affleure la surface libre et avec une cambrure de vague de 3%. Dans ce cas, étant donné que le tube touche la surface libre, il n'était pas possible d'installer les sondes à houle au-dessus du centre du tube.

La différence entre le modèle hydrodynamique et les mesures de surface libre sont encore plus importantes que précédemment. Comme pour les autres cas, pour les périodes de $T = 0.6s$ à $T = 1.0s$ les simulations sont en accord avec les mesures. Le modèle prévoit des perturbations de grande amplitude au-dessus du tube et sur ses côtés. Lors des essais des vagues déferlaient sur le tube, ce qui n'est pas possible de prendre en compte par un modèle linéaire.

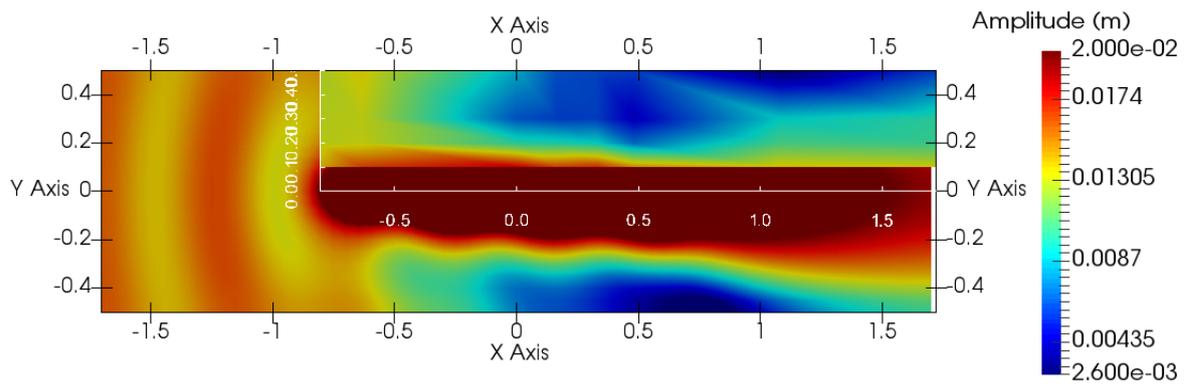


FIGURE 5.21 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 0.8s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre

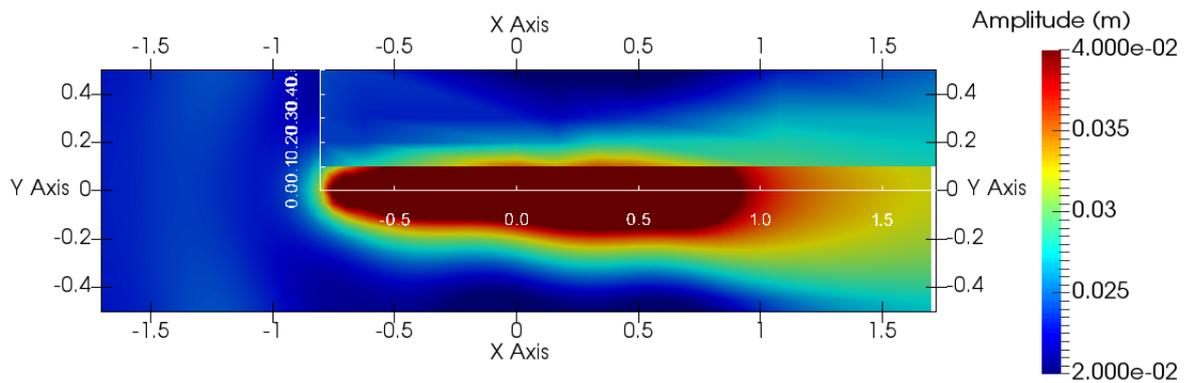


FIGURE 5.22 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.0s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre

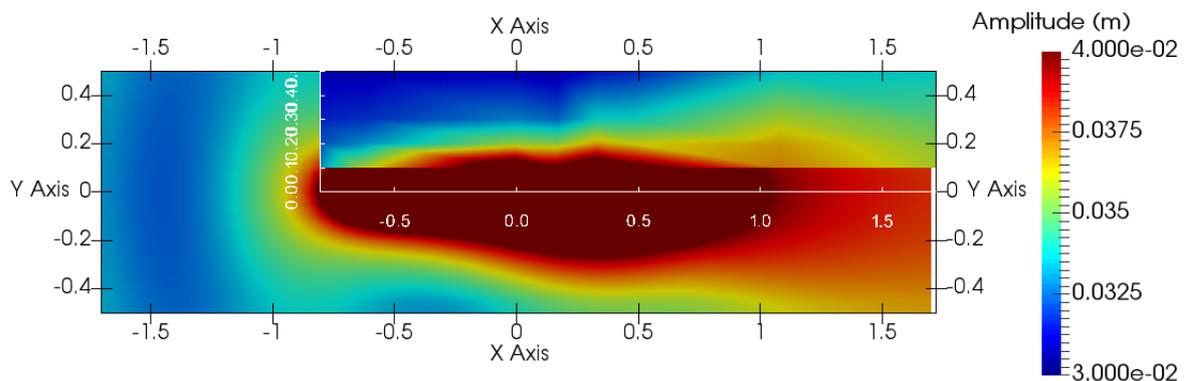


FIGURE 5.23 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.2s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre

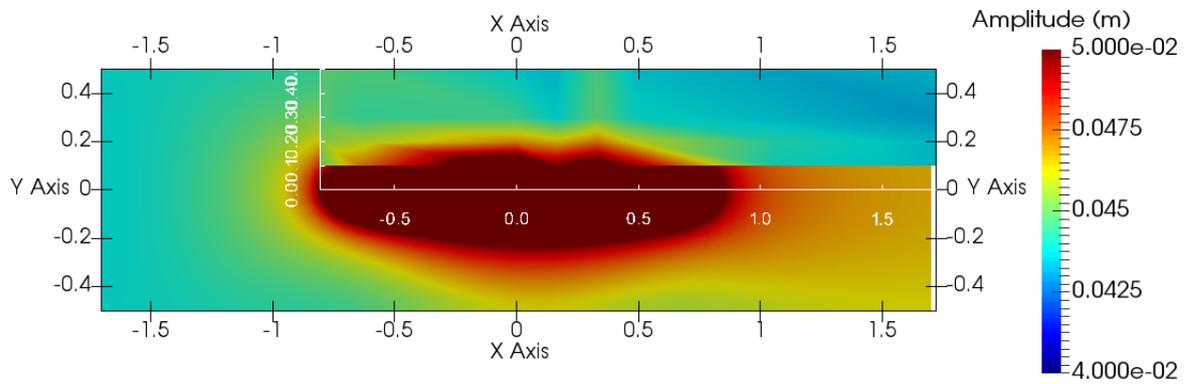


FIGURE 5.24 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.4s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre

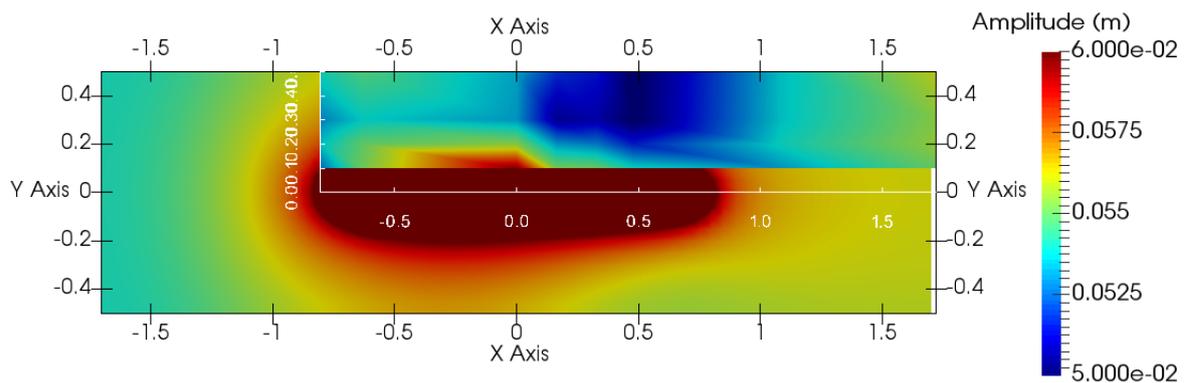


FIGURE 5.25 – Comparaison entre les simulations du modèle hydrodynamique et les mesures en bassin pour une houle de période de $T = 1.6s$ et une cambrure de 3% lorsque le tube affleure la surface libre

5.2.4 Conclusions

Une campagne d'essais a été menée afin d'étudier les effets de diffraction d'un tube horizontal immergé sous la surface libre et parallèle à la propagation de la houle. Les mesures obtenues lors de cette campagne ont été comparées aux résultats générés par un modèle hydrodynamique linéaire de diffraction-radiation. Les simulations sont en bon accord avec les essais, en particulier aux petites périodes. Aux périodes supérieures à $T = 1s$, le modèle hydrodynamique ne parvient pas à bien prédire les perturbations de la surface libre comme il se doit, l'amplitude prédite est beaucoup plus élevée que celle mesurée. Le modèle hydrodynamique, étant linéaire, n'est pas capable de prendre en compte les effets d'ordre supérieur tels que les phénomènes de déferlement ce qui explique les amplitudes des perturbations de la surface libre au niveau et à proximité du tube.

5.3 Étude des déformations d'un tube flexible

Dans cette section, le modèle développé dans les chapitres précédents couplé avec le modèle hydrodynamique basé sur la méthode des sources mixtes sera analysé avec les résultats de la campagne d'essais réalisée en 2011 aux bassins de l'École Centrale de Nantes.

Le montage expérimental est décrit dans un premier lieu, suivi par les paramètres physiques du prototype et les différents modes de déformation du tube de 10m. Ensuite, les déformations seront comparées entre les mesures provenant des essais en bassin et les prévisions du modèle développé. Les différents phénomènes du modèle numérique seront testés pour observer leur influence sur le comportement du système houlomoteur.

5.3.1 Description de la campagne

Le prototype assemblé par l'entreprise SBM Offshore est constitué d'un tube central en silicone renforcé par des fibres, de 20 bagues d'EAP et de 21 sections permettant d'assurer l'immobilité des bagues d'EAP et de fixer l'électronique du système (rapport SBM 2011). La figure 5.26 montre la disposition des différents composants ainsi que les aimants à l'intérieur du tube permettant de fixer les capteurs de position. Chaque extrémité du tube a ensuite été bouchée par un obturateur gonflable.

Les bagues de polymère électro-actif ont servi de capteur pour mesurer les déformations et n'ont pas été utilisées pour convertir les déformations en l'électricité. Afin d'y parvenir, chaque bague a été calibrée pour convertir les signaux électriques générés en taux de déformations.

Le tube était placé dans le grand bassin à houle de l'École Centrale de Nantes, faisant face aux batteurs, et ancré avec quatre lignes d'ancrage aériennes, dont deux à l'avant et deux à l'arrière. La figure 5.27 montre la disposition du tube avec les ancres ainsi que des sondes à houles pouvant mesurer l'élévation de la surface libre.

Les différentes périodes de houle testées vont de $T = 1.0s$ à $T = 5.0s$ et avec des hauteurs de $H = 20cm$ et $H = 40cm$.

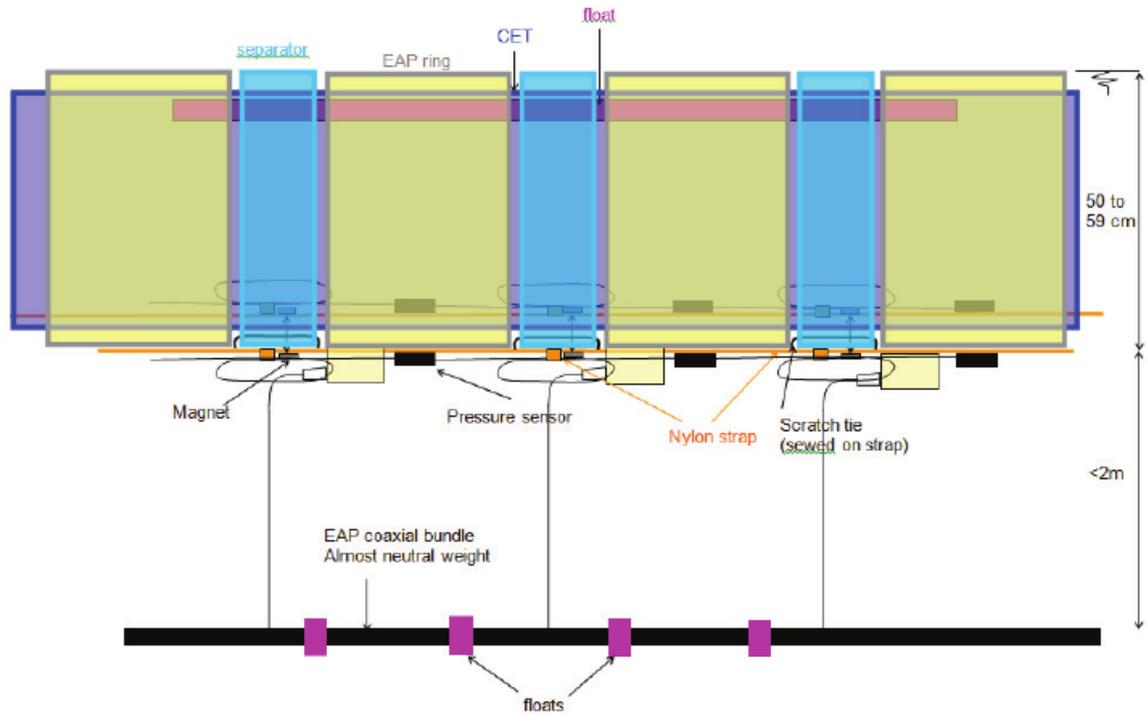


FIGURE 5.26 – Schéma d'assemblage du système houlomoteur

	EAP	Silicone
$h_0(mm)$	7.5	2.5
$C_{10}(Pa)$	95970	248445
$C_{20}(Pa)$	-18002	-34805
$C_{30}(Pa)$	7091	7916

TABLE 5.2 – Paramètres d'hyper-élasticité de Yeoh

5.3.2 Paramètres physiques du prototype

Le diamètre du tube au repos est de $R_0 = 21cm$ et est mis sous pression jusqu'à ce que le ratio entre rayon statique et le rayon au repos soit de $\lambda_{\theta_s} = 1.3$, donc $R_s = 27.3cm$. Les paramètres de matériau nécessaires pour le modèle d'hyper-élasticité de Yeoh ont été déterminés dans une étude précédente (Jean 2012) et sont donnés dans le tableau 5.2. La pression nécessaire pour obtenir le rayon souhaité à l'équilibre statique ainsi que les contraintes principales, après intégration sur le rayon sont :

- $P_s = 7711Pa$
- $N_{\theta\theta} = 2098Pa.m$
- $N_{xx} = 1219Pa.m$

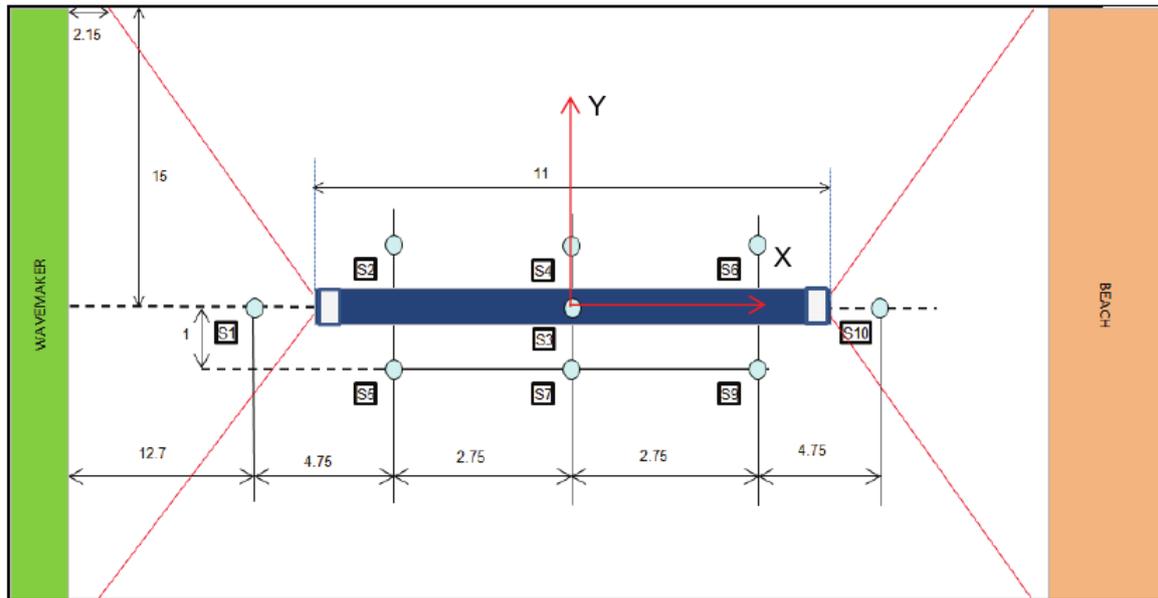


FIGURE 5.27 – Schéma du tube et des ancrages avec la position des sondes à houle

Chaque ligne d'ancrage est constituée d'aramide et d'un ressort. La raideur des lignes a été adaptée afin que l'ensemble du système oscille en cavalement sur une période de 15s. Les paramètres de raideur des ancrages et la masse des têtes de tube sont :

- $K_x = 255N.m^{-1}$
- $K_z = 0.5N.m^{-1}$
- $M_{th} = 85.2kg$

5.3.3 Modes de déformation

Les premiers modes de déformation du tube de 10m sont représentés en annexe. Les fréquences et longueurs d'onde des premiers modes dont la fréquence est inférieure à $\omega_n = 10rad.s^{-1}$, pour chaque nombre d'onde circonférentielle n , sont présentées dans les tableaux 5.3 et 5.4.

Il peut être remarqué que les premiers modes de $n = 0$ et $n = 1$ correspondent aux degrés de libertés d'un tube rigide en cavalement et pilonnement. Pour un tube rigide de volume identique ($L = 10m$, $R_s = 27.3cm$) avec des ancrages à chaque extrémité avec une masse, la pulsation est :

$$\omega_{x0}^2 = \frac{2K_x}{2M_{th} + M_{tube} + M_{fluide}} \quad (5.3.1)$$

m	type	$\omega(\text{rad.s}^{-1})$	T (s)	L (m)
0	impair	0.39	15.91	38.48
1	impair	1.47	4.25	10.37
2	pair	1.58	3.96	9.67
3	impair	2.87	2.18	5.42
4	pair	3.24	1.94	4.85
5	impair	4.51	1.39	3.58
6	pair	5.03	1.25	3.25
7	impair	6.36	0.99	2.65
8	pair	6.98	0.90	2.45
9	impair	8.43	0.74	2.10
10	pair	9.09	0.69	1.97

TABLE 5.3 – Paramètres des modes de déformation pour n=0

m	type	$\omega(\text{rad.s}^{-1})$	T (s)	L (m)
0	pair	0.015	418.5	925
1	impair	0.92	6.81	18.29
2	pair	1.91	3.28	10.34
3	impair	3.04	2.06	7.12
4	pair	4.23	1.48	5.37
5	impair	5.43	1.15	4.29
6	pair	6.63	0.95	3.56
7	impair	7.81	0.80	3.04
8	pair	8.96	0.70	2.65

TABLE 5.4 – Paramètres des modes de déformation pour n=1

$$\omega_{z0}^2 = \frac{2K_z}{2M_{th} + M_{tube} + M_{fluide}} \quad (5.3.2)$$

Avec M_{tube} et M_{fluide} la masse totale de la paroi du tube et du fluide interne. Il en résulte comme périodes :

$$T_x = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_{x0}^2}} = 14.3s \quad (5.3.3)$$

$$T_z = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_{z0}^2}} = 322s \quad (5.3.4)$$

Et en comparaison, la période des premiers modes obtenue avec le modèle linéaire sont :

$$T_{0,n=0} = 15.9s \quad (5.3.5)$$

$$T_{0,n=1} = 418 \quad (5.3.6)$$

5.3.4 Comparaisons avec le modèle numérique

Après avoir déterminé les paramètres de matériau, les simulations du système houlomoteur pour différents types de vagues sont effectuées. Les résultats provenant des campagnes d'essais seront comparés avec les deux modèles différents. Dans un premier lieu avec l'ensemble des modes de déformation puis après avec juste les modes de déformation radiale pour tester l'influence des déformations verticales. Ensuite le modèle temporel uniquement est utilisé pour analyser l'effet des différents phénomènes physiques tels que le modèle de visco-élasticité et le couplage hydrodynamique.

Comparaison modèle linéaire et modèle non-linéaire

En rappel, le modèle linéaire ne prend pas en compte les effets d'ordre supérieur des déformations hyper-élastiques. L'amortissement dû aux effets visco-élastiques est estimé au préalable puis linéarisé mais sans être corrigé par la suite car ils dépendent de l'amplitude des déformations. Le modèle non-linéaire est calculé dans le domaine temporel ; le comportement du système houlomoteur est estimé à chaque pas de temps en fonction des différentes forces agissant sur la structure et de ses déplacements.

Les graphes figure 5.28 correspondent aux fonctions de transfert pour différentes sections de tube. Les résultats des deux modèles sont représentés avec les mesures provenant des essais en bassin. Il apparaît que les simulations sont assez proches des résultats mais présentent encore des écarts. Les deux modèles proposent des résultats en bon accord mais le modèle linéaire sur-estime l'amplitude des déformations aux périodes à $T = 2s$. Les différents écarts sont probablement dûs aux coefficients visco-élastiques qui auraient été mal calibrés.

Les figures 5.29 et 5.30 correspondent aux fonctions de transfert en 2D afin d'avoir une vue plus globale des déformations. On peut noter le décalage en période du modèle non-linéaire. Le modèle semble manquer de raideur pour bien recaler les pics à $T = 3.5s$. Pour la fonction de transfert du modèle linéaire, la différence d'amplitude au niveau des petites périodes est très prononcée et on peut aussi constater le même décalage en période.

Simulations sans les déformations verticales

Ensuite, le même calcul est réalisé en ne prenant en compte que les modes de renflement. Lorsque les déformations verticales ne sont pas prises en compte (figures

5.3. Étude des déformations d'un tube flexible

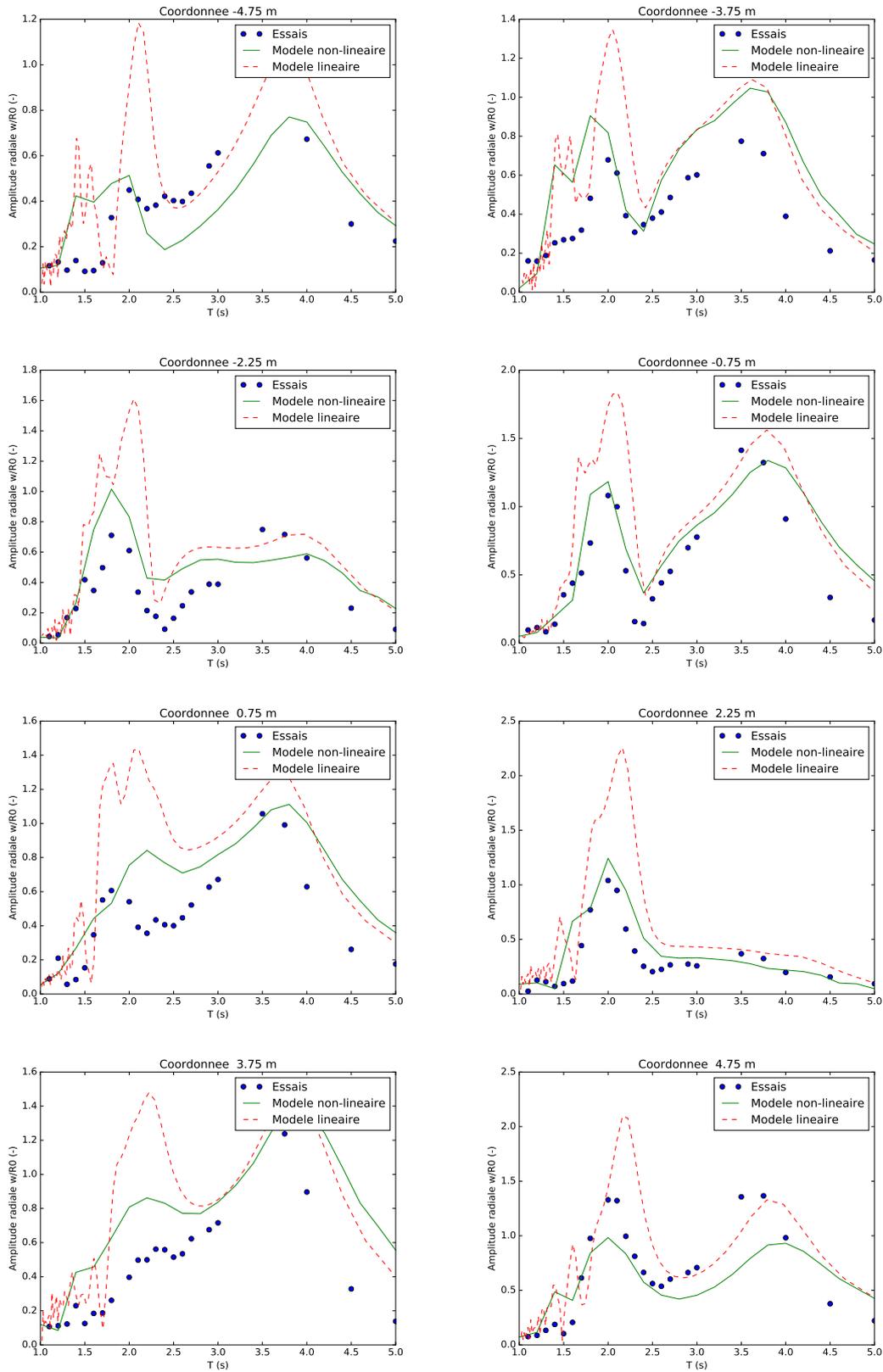


FIGURE 5.28 – Comparaison des fonctions de transfert du tube de 10m par sections avec le modèle linéaire et non-linéaire

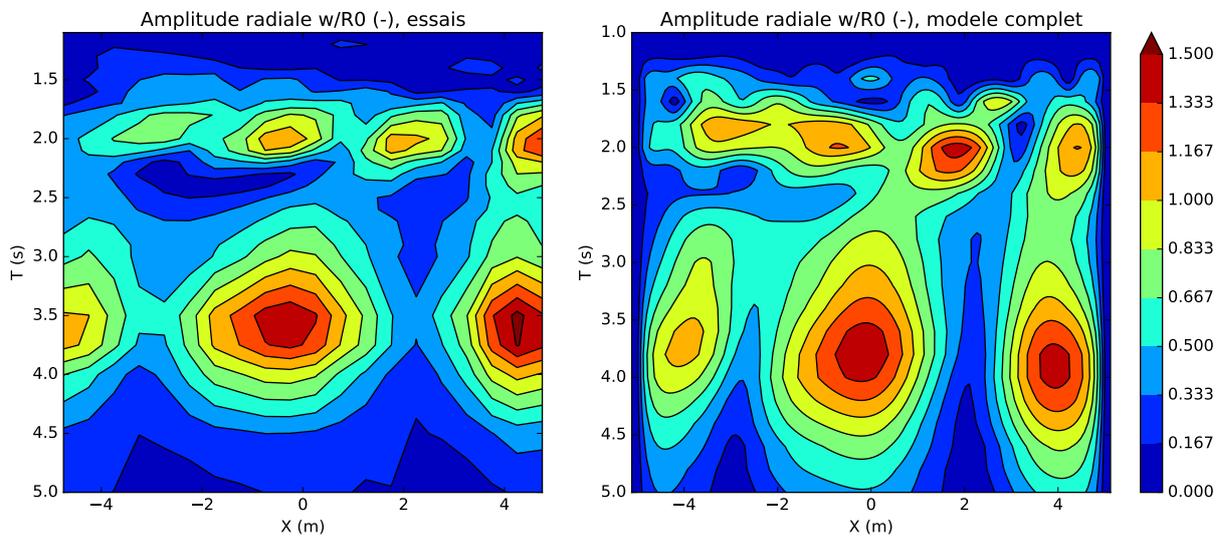


FIGURE 5.29 – Fonctions de transfert du tube de 10m obtenues à partir des essais en bassin et du modèle non-linéaire

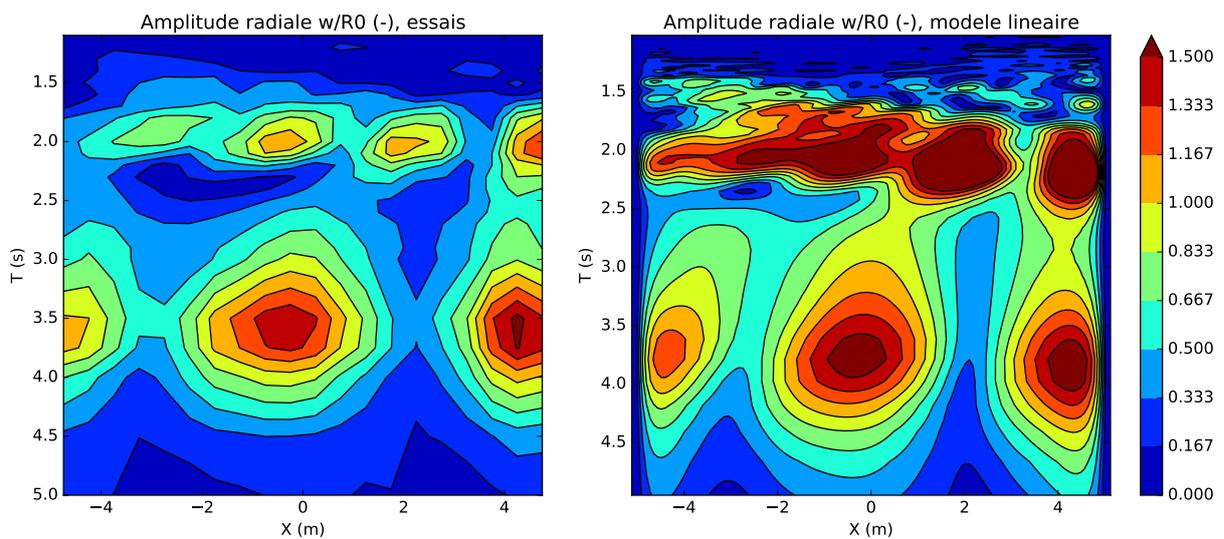


FIGURE 5.30 – Fonctions de transfert du tube de 10m obtenues à partir des essais en bassin et du modèle linéaire

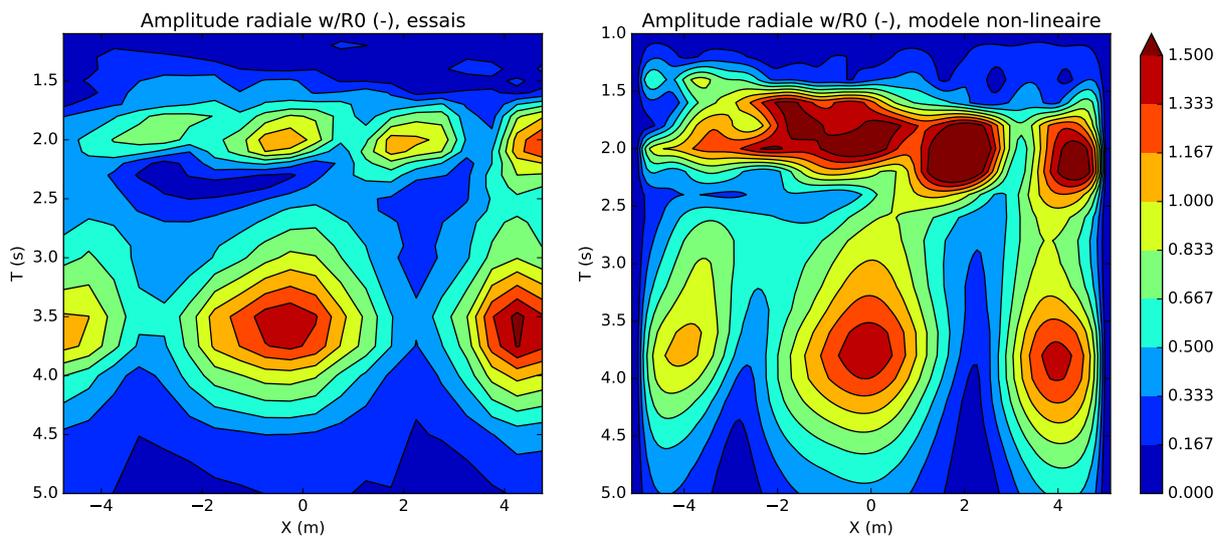


FIGURE 5.31 – Fonctions de transfert du tube de 10m obtenues à partir des essais en bassin et du modèle non-linéaire sans les modes de déformation verticaux

5.32), les deux modèles proposent des simulations proches. Le comportement du tube aux petites périodes est difficilement capturé. L'amplitude des déformations est sur-estimées. Les modes de déformation verticale ont donc un rôle important à ces périodes-ci. Au-delà de $T = 2.5s$, les prédictions des modèles sont proches des mesures.

La fonction de transfert 5.31 ressemble beaucoup à la figure 5.30. Ceci implique que les déformations verticales n'interviennent quasiment pas dans le modèle linéaire avec tous les modes de déformation.

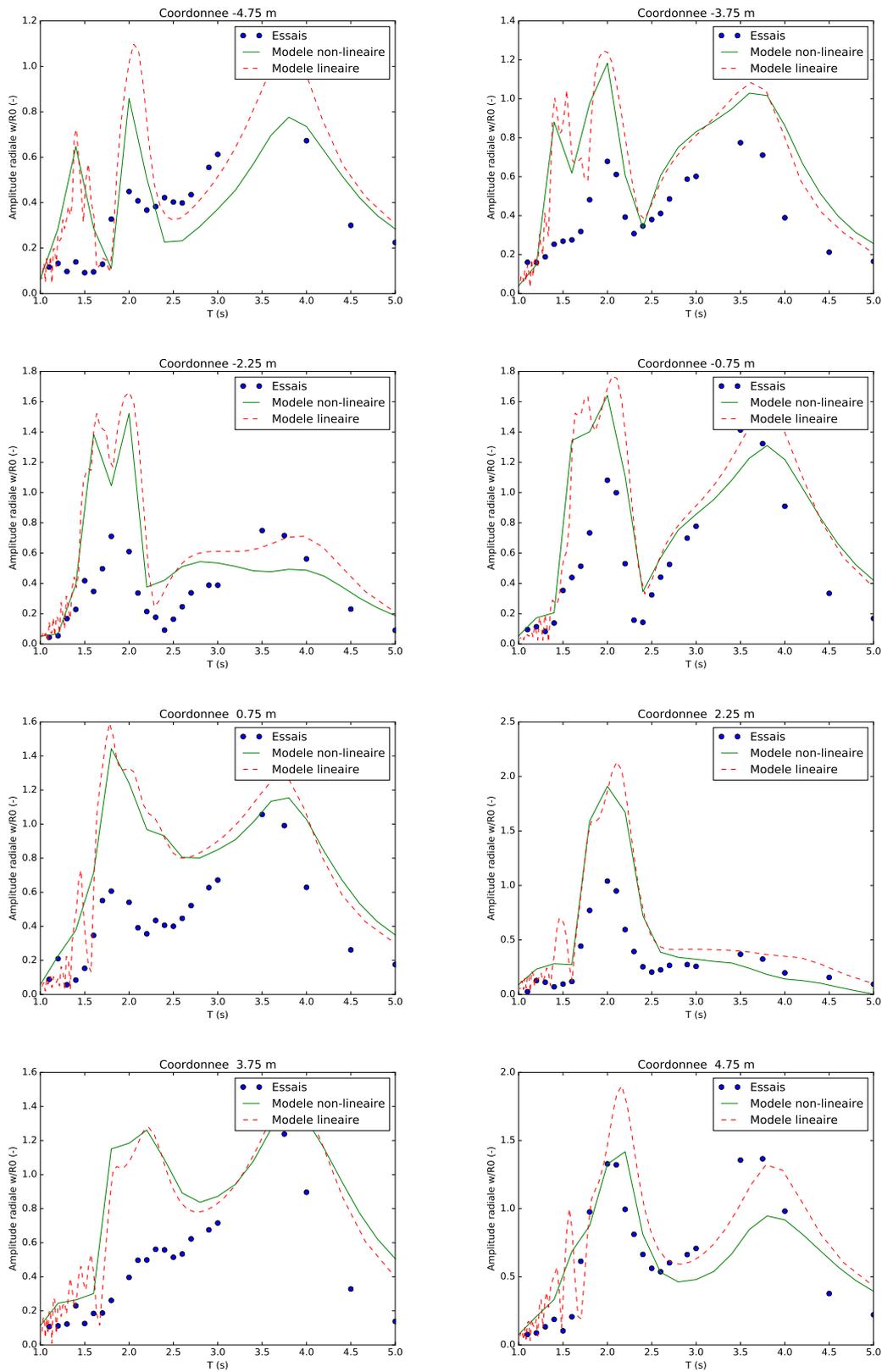


FIGURE 5.32 – Comparaison des fonctions de transfert du tube de 10m par sections avec le modèle linéaire et non-linéaire sans les déformations verticales

Analyse des différents phénomènes physiques

La dernière série de courbes (figure 5.33) correspond aux simulations avec le modèle non-linéaire mais sans prendre en compte les effets de viscosité (courbe tirets bleus) ou sans le couplage hydrodynamique (courbe tirets rouges). Ce qui surprend le plus est l'importance des effets visco-élastiques. Les effets de radiation ne sont pas suffisamment importants pour absorber les déformations du tube. Alors qu'à l'inverse, il semblerait que le modèle pourrait se passer des effets hydrodynamiques sauf aux petites périodes. Il peut aussi être remarqué, lorsque le modèle de viscosité n'est pas pris en compte dans la physique du système, les pics apparaissent à des périodes plus grandes que pour les essais. Ce phénomène est causé par la masse ajoutée du fluide qui alourdi le système houlomoteur. Le phénomène inverse est observable dans le cas où les effets hydrodynamiques ne sont pas pris en compte, par exemple pour $x = 2.25m$ à $T = 2s$, le système est trop raide.

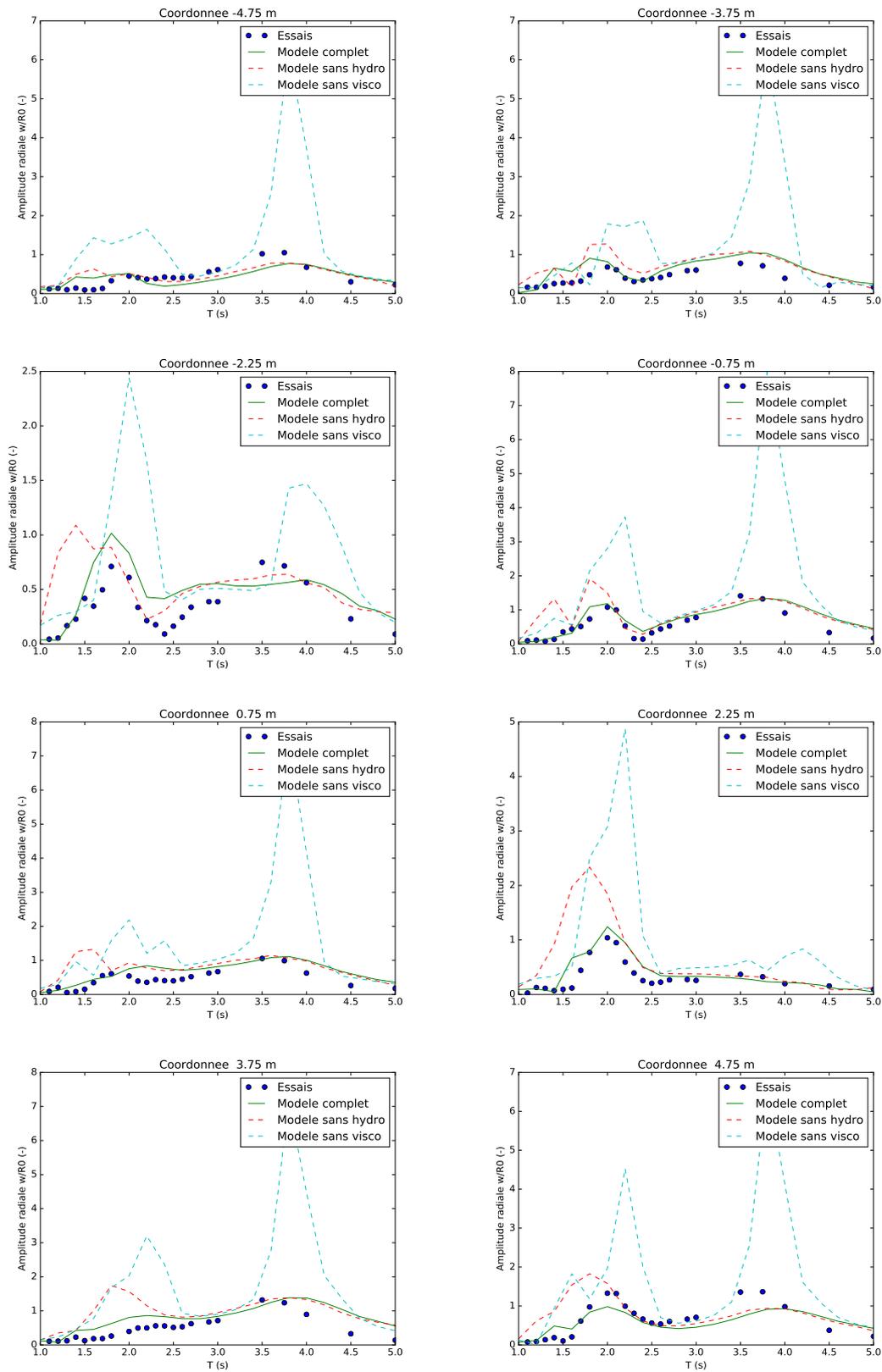


FIGURE 5.33 – Comparaison des fonctions de transfert du tube de 10m par sections avec le modèle non-linéaire et différents phénomènes physiques

5.3.5 Conclusions

La base de données générée lors de la campagne d'essais en 2011 dans les bassins de l'École Centrale de Nantes aura permis d'évaluer les prévisions faites par le modèle numérique. Le modèle expérimental était un tube de 10m de long couvert de 20 bagues de polymère électroactif permettant de mesurer les déformations du tube. Les propriétés des matériaux ont été mesurées afin de pouvoir calculer les contraintes à l'aide du modèle hyperélastique de Yeoh et la pression statique requise pour mettre le système en précontrainte. Les déformations du tube furent ensuite mesurées en présence de houle régulière.

Les mesures obtenues lors des essais ont été comparées au modèle linéaire et non-linéaire. Il est ressortit des comparaisons que le modèle non-linéaire parvient à bien reproduire le comportement du système houlomoteur mais présente des écarts avec les mesures. Ces écarts sont probablement dû à une mauvaise calibration des coefficients de viscosité. Le modèle linéaire prévoit les mêmes tendances que le modèle non-linéaire mais sur-estime les déformations aux périodes en dessous de $T = 2.5s$.

Les modes de déformation verticales ont ensuite été négligés. Cette modification a permis de voir que les deux modèles prévoient quasiment le même comportement pour le tube. Les simulations sont en bon accord avec les mesures sauf aux petites périodes où l'amplitude est sur-estimée comme précédemment avec le modèle linéaire.

Enfin les effets visco-élastiques et hydrodynamiques ont été négligés à tour de rôle pour analyser leur importance. Il est apparu que les effets visco-élastiques sont le plus important dans la simulation et qu'il n'est pas possible de les négliger. À l'inverse, les simulations pourraient fonctionner sans les effets hydrodynamiques, sauf aux petites périodes où le couplage houle-structure permet de réduire l'amplitude des pics.

Il semble que le comportement du système houlomoteur puisse être décomposé en deux parties. Lorsque la période de houle est supérieure à $T = 2,5s$, le système réagit de manière très linéaire ; les déformations verticales peuvent être négligées ainsi que les effets de diffraction-radiation. Il s'agit du domaine à grandes longueurs d'onde par rapport à la dimension du tube. En dessous de cette période, tous les phénomènes physiques doivent rentrer en compte pour bien capturer le comportement du système. Dans ce cas, la longueur d'onde de la houle est du même ordre de grandeur que le tube. Bernard Molin [26] parle en effet de différence de physique pour les petits corps qui perturbent peu la houle incidente et les grands corps qui la modifient.

5.4 Conclusions

Ce chapitre aura permis de tester le modèle développé précédemment. Le système houlomoteur étant un tube flexible affleurant la surface de l'eau, présente des difficultés pour calculer son comportement. Ainsi dans un premier lieu le modèle de diffraction-radiation a été analysé avec des essais en bassin d'un tube rigide. Ensuite les prévisions du modèle complet non-linéaire et le modèle linéaire ont été comparées avec des mesures obtenues lors d'essais réalisés aux bassins de l'École Centrale de Nantes.

5.4.1 Étude de diffraction d'un tube immergé

La campagne d'essais avec un tube rigide affleurant la surface de l'eau était nécessaire pour vérifier que le modèle de diffraction radiation soit bien capable de simuler l'écoulement autour d'un tel objet. Le tube a été immergé à différentes profondeurs (10cm, 5cm et 0cm) et la surface libre a été mesurée autour du cylindre avec des vagues régulières de faible cambrure pour s'approcher au plus de l'hypothèse de houle linéaire. Ces résultats ont ensuite été comparés aux prévisions de surface libre du modèle hydrodynamique.

Lorsque le tube est immergé de 10cm, les prévisions du modèle numérique sont en bon accord avec les mesures, en particulier aux petites périodes. L'écart le plus important apparaît à proximité du cylindre lorsque la période de houle augmente. Cette erreur devient importante lorsque la profondeur d'immersion est réduite mais les simulations aux petites périodes restent cohérentes avec les mesures. Les différences aux périodes plus grandes est probablement dû à des effets d'ordre supérieur. Enfin, lorsque le tube affleure la surface libre, les tendances sont en accord avec les mesures mais les effets non-linéaires tel que le déferlement sur le tube ne peuvent être pris en compte par le modèle hydrodynamique, ce qui rend les comparaisons difficiles.

5.4.2 Étude des déformations d'un tube flexible

L'objectif de la deuxième section de ce chapitre était de vérifier l'intégralité du modèle numérique avec des mesures obtenues lors d'essais en bassins à l'École Centrale de Nantes. Les résultats du modèle linéaire et non-linéaire ont été comparés aux fonctions de transfert provenant des mesures. Le modèle non-linéaire parvient à bien retrouver le comportement du système houlomoteur, les modes apparaissent aux bonnes périodes et avec une amplitude proche. Après plusieurs analyses, il est apparu que les

déformations verticales ainsi que les effets hydrodynamiques sont importants aux périodes inférieures à $T = 2.5s$. Au-dessus de cette période le système perturbe moins à la houle incidente et les effets hydrodynamiques ainsi que les déformations verticales peuvent être négligées. Mais dans tous les cas, les effets visco-élastiques sont indispensables car ils absorbent directement les déformations radiales.

Chapitre 6

Conclusions et Perspectives

6.1 Conclusions générales

L'objectif de ce travail de thèse était de développer un modèle numérique qui soit capable de prédire avec efficacité le comportement du système houlomoteur inventé par l'entreprise SBM Offshore. Un modèle précédent existait [21] mais présentait des écarts dans les prédictions par rapports aux mesures obtenues lors d'essais en bassin. Il était donc nécessaire de revoir la dynamique du système pour trouver des phénomènes physiques qui auraient pu être négligés.

Ce système houlomoteur est radicalement différent des systèmes traditionnels car il ne présente aucune partie rigide et sa structure constitue le moyen de conversion d'énergie mécanique en électricité. Il est constitué d'un tube en silicone renforcé par des fibres, remplis d'eau et recouvert à intervalles réguliers de bagues de polymère électroactif. Des obturateurs gonflables permettent de boucher le tube de chaque côté. Étant formé d'un tube principal pouvant subir de grandes déformations, il a été nécessaire de développer un modèle numérique à partir de la théorie des déformations finies et qui prenne en compte les effets de viscosité du matériau. La théorie potentielle a été utilisée pour représenter l'écoulement à l'intérieur et à l'extérieur du tube. Il a été considéré que les effets de viscosité des fluides étaient négligeables.

La théorie des déformations finies permet l'utilisation de matériaux complexes tels que celui du système houlomoteur. Le matériau étant hyper-élastique, il ne réagit pas de manière constante lorsque les élongations varient et est considéré incompressible. Ainsi le modèle hyper-élastique de Yeoh a été employé. En connaissant la relation liant la pression induite par les fluides de part et d'autre de la paroi et les contraintes agissant dans le matériau, les équations de la dynamique ont été écrites en partant de l'équilibre des moments. Ces équations ont été utilisées pour déterminer la pression

statique requise pour mettre le système en précontrainte.

Après avoir écrit les équations de la dynamique du système houlomoteur il a été nécessaire de les linéariser pour développer le modèle numérique. De par la forme cylindrique et allongée du système, il a été préféré de décomposer les équations de la dynamique sur une base modale afin d'éviter d'utiliser un maillage. Ce choix de modélisation permet d'accélérer les calculs en réduisant le nombre d'inconnus numériques. Afin de garantir l'orthogonalité de la base modale, les différents modes ont été normalisés par la masse du système. À partir de la base modale, les équations de la dynamique linéaire ont été ré-écrites sous forme matricielle. Les termes non-linéaires ont été rajoutés en projetant les modes sur l'expression des contraintes de paroi. Ainsi, deux modèles ont été développés, un linéaire fonctionnant dans le domaine fréquentiel et un non-linéaire dans le domaine temporel.

Plusieurs campagnes d'essai ont été réalisées pour comprendre et mesurer le comportement du système houlomoteur. En 2011 une série de tests fut réalisée dans les bassins de l'École Centrale de Nantes permettant de générer une base de données sur les déformations du tube en fonction de différentes périodes de houle régulière. En 2016 une autre campagne a eu lieu pour mesurer les effets de diffraction sur un tube rigide affleurant la surface libre. La deuxième campagne a permis de tester le modèle hydrodynamique. Il en a été déduit que des non-linéarités apparaissent lorsque le tube touche la surface de l'eau et que le modèle employé parvient difficilement à retrouver les mêmes effets dans ce cas. Mais les résultats sont en bon accord avec les simulations lorsque le tube est immergé. Ensuite, les résultats obtenus à partir du modèle numérique complet ont été comparés avec la base de données des déformations du système houlomoteur. Après plusieurs analyses, il est apparu que les déformations verticales ainsi que les effets hydrodynamiques sont importants aux périodes inférieures à $T = 2.5s$. Au-dessus de cette période le système perturbe moins à la houle incidente mais dans tous les cas, les effets visco-élastiques sont nécessaires.

Les apports de ce travail de thèse par rapport au modèle précédent [21] sont la prise en compte des effets visco-élastiques et le couplage entre les déformations radiales et verticales avec leurs coefficients hydrodynamiques associés. Précédemment, deux modèles existaient ; un modèle axisymétrique pour étudier les déformations radiales et un modèle de poutre pour les déformations verticales, chacun nécessitant des données d'entrée différentes. Ainsi, grâce au modèle développé ici, les différentes déformations sont calculées avec un même jeu de données correspondant aux paramètres de matériau de Yeoh. Les coefficients hydrodynamiques ont pu alors être estimés pour chaque

type de déformation alors que seul le couplage hydrodynamique avec les modes de renflement a été réalisé dans le modèle précédent. Les efforts de ce travail de recherche ont été orientés sur l'amélioration du modèle de structure et de matériau. Aussi, à l'aide des travaux réalisés par Delhommeau, un modèle d'éléments de frontières a été développé et parallélisé pour calculer avec rapidité les coefficients hydrodynamiques.

6.2 Futurs développements

Pour la suite des développements, une première étape serait de mettre au point un moyen d'essai pour tester le modèle de structure seul et valider les modes de déformations ainsi que leur période propre. Il s'agirait d'un tube élastique remplis d'eau avec une extrémité ancrée sur un plateau mobile et l'autre extrémité fermée par un obturateur et rattachée par des ressorts représentatifs des ancrages. La figure 6.1 montre la disposition du système. Le plateau mobile pourrait exciter la structure dans différentes directions. Aussi le système peut être placé dans un caisson remplis d'eau pour avoir les effets de masse ajoutée du fluide et sans les effets de surface libre. Les résultats de ces essais pourraient être comparés rapidement avec le modèle actuel en modifiant les conditions aux limites.

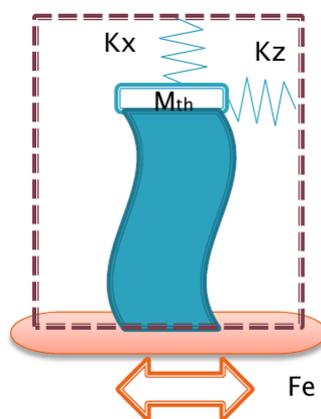


FIGURE 6.1 – Essais de vibrations en mouvements forcés.

Une autre piste pour les développements du modèle numérique devra porter sur les phénomènes hydrodynamiques. Des simulations dans le domaine temporel, avec un modèle faiblement non-linéaire (ex : Weak Scatterer) capable de prendre en compte les perturbations d'un corps affleurant la surface libre, permettraient de vérifier les phénomènes observés avec le modèle actuel et de prendre en compte les effets d'ordre supérieur. A l'inverse, une autre méthode que les éléments de frontière, si possible ana-

lytique devrait être développée. L'objectif de l'entreprise SBM Offshore est de construire des systèmes de plusieurs centaines de mètres de long. Le calcul des effets hydrodynamiques risque de devenir très vite laborieux avec de telles géométries. Ainsi, une formulation analytique des effets hydrodynamiques permettrait de conserver des temps de calcul rapide.

L'étape suivante sera de rajouter un modèle pouvant calculer l'énergie produite en fonction des déformations obtenues. Finalement, avec un nouveau modèle hydrodynamique et de conversion d'énergie, une étude paramétrique pourra être réalisée pour déterminer la forme optimale du système houlomoteur pour un site marin donné. Aussi, une stratégie de contrôle des bagues d'EAP pourra être établie.

En plus des améliorations à apporter au modèle numérique, différents aspects de structure peuvent être expérimentés pour le système houlomoteur. L'avantage par rapport aux autres systèmes est l'utilisation de matériaux flexibles qui constituent le moyen de conversion d'énergie. Ainsi une surface plus importante devrait fournir une plus grande quantité d'énergie, d'où l'intérêt d'analyser des géométries plus larges. Mais la surface utile pour la conversion d'énergie peut être augmentée en considérant une multitude de tubes plus petits, d'où la nécessité de réaliser une étude paramétrique.

Une deuxième piste à analyser serait d'orienter les fibres dans une autre direction pour avoir des effets de couplage dans les directions axiale et radiale, les déformations pourraient être plus importantes que de les limiter à la direction radiale. Le modèle mathématique actuel permet une telle modification en recalculant les coefficients de raideur avec un nouvel angle de fibres. Cependant, il serait nécessaire de revoir la technologie de récupération des charges électriques dans le matériau pour ne pas l'endommager lorsqu'il se déforme dans plusieurs directions. L'utilisation de diodes en graphène serait une solution.

Bibliographie

- [1] ABAQUS. Abaqus 6.14 Documentation, 2014.
- [2] ADEME. Note stratégique sur les énergies marines renouvelables. Technical report, 2013.
- [3] ADEME. L 'exercice de prospective de l 'ADEME. Technical report, 2015.
- [4] Jordi Alastruey, Ashraf W Khir, Koen S Matthys, Patrick Segers, Spencer J Sherwin, Pascal R Verdonck, Kim H Parker, and Joaquim Peiró. Pulse wave propagation in a model human arterial network : Assessment of 1-D visco-elastic simulations against in vitro measurements. *Journal of biomechanics*, 44(12) :2250–8, aug 2011.
- [5] H. Altenbach and V. A. Eremeyev. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45(10) :976–981, 2010.
- [6] Harvey Thomas Banks, Shuhua Hu, and Zackary R Kenz. A Brief Review of Elasticity and Viscoelasticity for Solids. 3(1) :1–51, 2011.
- [7] David Bessems, Marcel Rutten, and Frans Van De Vosse. A wave propagation model of blood flow in large vessels using an approximate velocity profile function. *Journal of Fluid Mechanics*, 580 :145, 2007.
- [8] Ivan D. Breslavsky, Marco Amabili, and Mathias Legrand. Physically and geometrically non-linear vibrations of thin rectangular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 58 :30–40, jan 2014.
- [9] R.M. Christensen. Viscoelastic Stress Strain Constitutive Relations. In *Theory of Viscoelasticity*, pages 1–34. Elsevier, 1982.
- [10] Gérard Delhommeau. *Les problèmes de diffraction-radiation et de résistance des vagues*. Nantes, 1988.

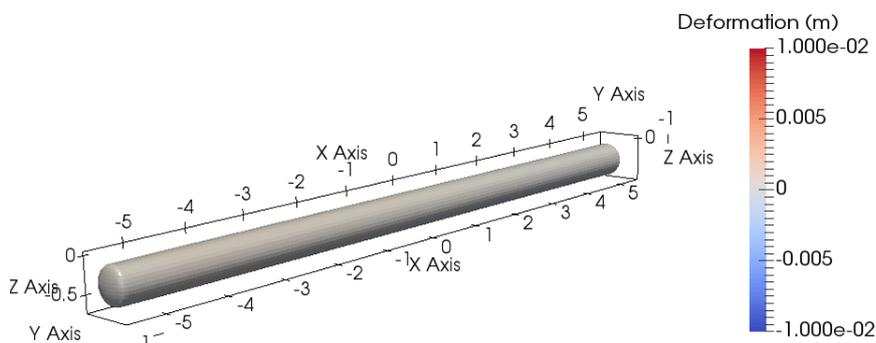
- [11] Gérard Delhommeau. Amélioration des performances des codes de calcul de diffraction-radiation au premier ordre, 1989.
- [12] Syndicat des énergies Renouvelables. énergies marines renouvelables 2013. Technical report, 2013.
- [13] Ernst & Young. Rising Tide : Global trends in the emerging ocean energy market. page 44, 2013.
- [14] António F. de O. Falcão. Wave energy utilization : A review of the technologies. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 14(3) :899–918, apr 2010.
- [15] Carlos Alberto Figueroa. *A coupled-momentum method to model blood flow and vessel deformation in human arteries : applications in disease research and simulation based medical planning*. PhD thesis, Stanford university, 2006.
- [16] L. Formaggia, J.F. Gerbeau, F. Nobile, and A. Quarteroni. On the coupling of 3D and 1D Navier–Stokes equations for flow problems in compliant vessels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(6-7) :561–582, dec 2001.
- [17] P. Guevel, Gérard Delhommeau, and J. C. Daubisse. Méthode rapide de calcul des efforts dus à la diffraction- radiation de la houle sur des structures entièrement immergées.
- [18] Gerhard A Holzapfel and Thomas C Gasser. A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains : Continuum basis, computational aspects and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(34) :4379–4403, may 2001.
- [19] Gerhard A Holzapfel, Thomas C Gasser, and Ray W Ogden. A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models. *Journal of Elasticity*, pages 1–48, 2000.
- [20] R.K. Jain. Vibration of fluid-filled, orthotropic cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 37(3) :379–388, 1974.
- [21] Philippe Jean, Ambroise Watzet, Guillaume Ardoise, C. Melis, R. Van Kessel, A. Fourmon, E. Barrabino, J. Heemskerk, and J. P. Queau. Standing wave tube electro active polymer wave energy converter. pages 83400C–83400C–21, apr 2012.
- [22] Aouni A. Lakis and André Laveau. Non-linear dynamic analysis of anisotropic cylindrical shells containing a flowing fluid. *International Journal of Solids and Structures*, 28(9) :1079–1094, jan 1991.

-
- [23] C.H. Lee. Wamit theory manual. Technical report, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1995.
- [24] D.B.S. Lopes and a.J.N.a. Sarmiento. Hydrodynamic coefficients of a submerged pulsating sphere in finite depth. *Ocean Engineering*, 29(11) :1391–1398, sep 2002.
- [25] G. Marckmann and E. Verron. Comparison of Hyperelastic Models for Rubber-Like Materials. *Rubber Chemistry and Technology*, 79(5) :835–858, nov 2006.
- [26] Bernard Molin. *Hydrodynamique des structures offshore*. 2002.
- [27] R. Mondal, S. Mandal, and T. Sahoo. Surface gravity wave interaction with circular flexible structures. *Ocean Engineering*, 88 :446–462, sep 2014.
- [28] M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11(9) :582–592, 1940.
- [29] John Nicholas Newman. The evaluation of free-surface green functions. In Justin H. McCarthy, editor, *Numerical Ship Hydrodynamics*, page 570, Washington, D.C., 1985.
- [30] J Tinsley Oden. *Nonlinear Continuum Mechanics*. Technical report, 2008.
- [31] R. W. Ogden. Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 326(1567) :565–584, 1972.
- [32] M.P. Païdoussis and J.-P. Denise. Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 20(1) :9–26, jan 1972.
- [33] Farhad Sabri and Aouni a. Lakis. Hydroelastic vibration of partially liquid-filled circular cylindrical shells under combined internal pressure and axial compression. *Aerospace Science and Technology*, 15(4) :237–248, jun 2011.
- [34] J.C. Simo. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : Formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60(2) :153–173, feb 1987.
- [35] James Sir Lighthill. Pulse Propagation Theory. In *Mathematical Biofluidynamics*, chapter 12, pages 227–252. 1975.
- [36] V. H. Tüzel and H. a. Erbay. The dynamic response of an incompressible nonlinearly elastic membrane tube subjected to a dynamic extension. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39(4) :515–537, 2004.
-

- [37] J.R. R WOMERSLEY. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *Journal of Physiology*, 127(127) :553–563, dec 1955.
- [38] O. H. Yeoh. Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 66(5) :754–771, nov 1993.

Annexes : Modes de déformation

Cet annexe contient les modes de déformation pour les nombres d'onde circonférentielle $n = 0$ et $n = 1$.

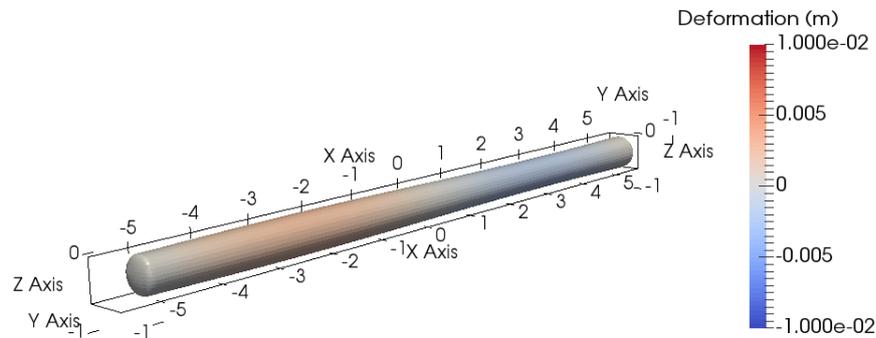


Mode 0, n=0

Cavalement seul

$T = 15.9s$

$L = 38.5m$

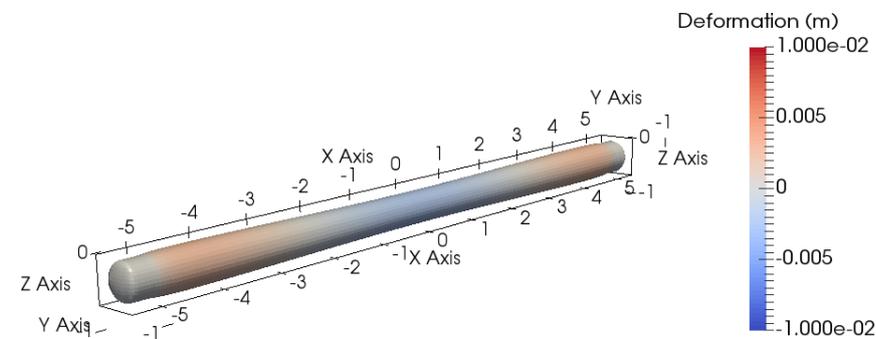


Mode 1, n=0

Cavalement et Renflement

$T = 4.25s$

$L = 10.4m$

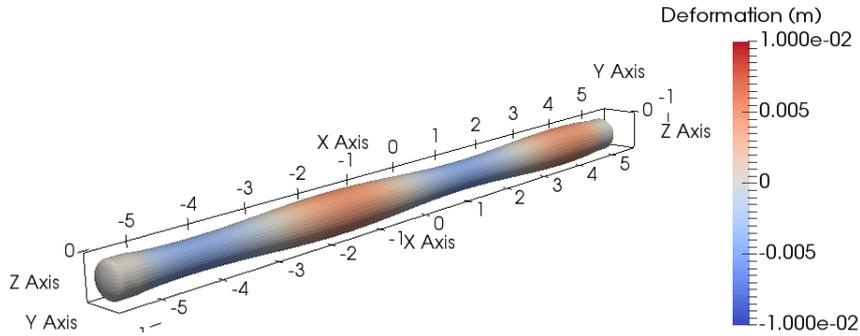


Mode 2, n=0

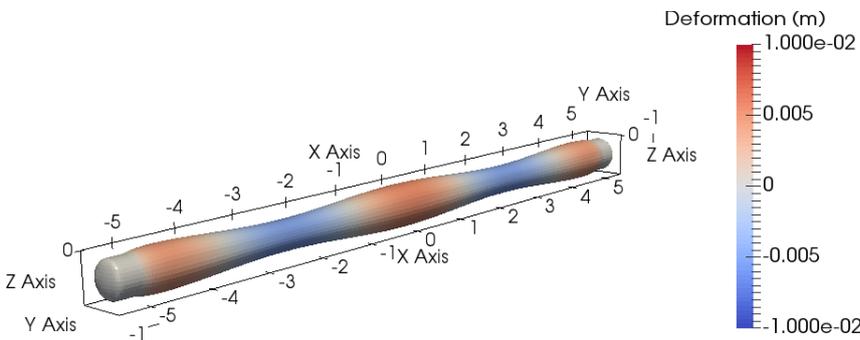
Renflement seul

$T = 3.96s$

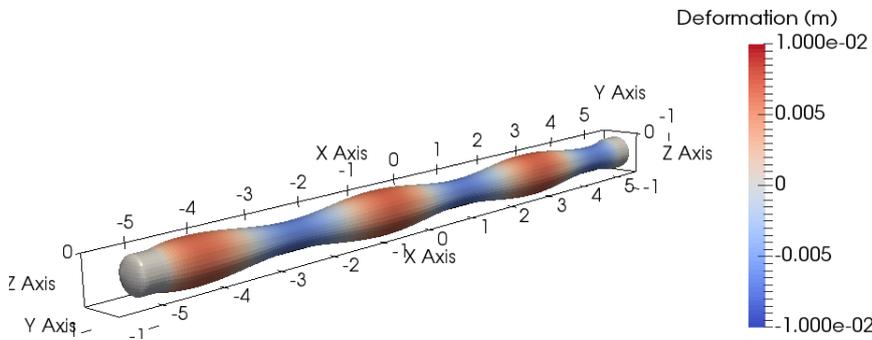
$L = 9.67m$



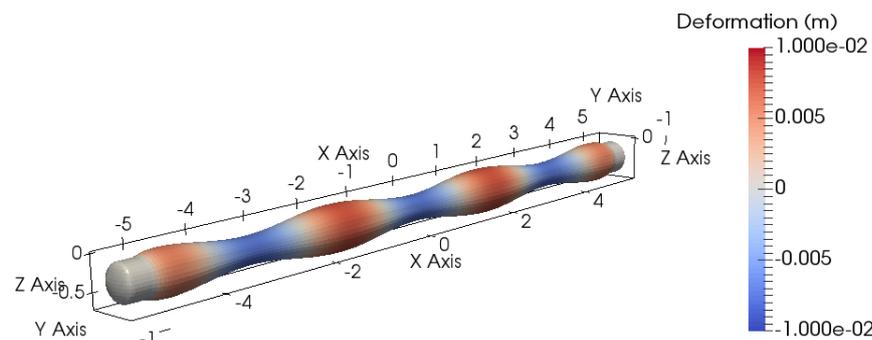
Mode 3, n=0
Cavalement et Renflement
$T = 2.18s$
$L = 5.42m$



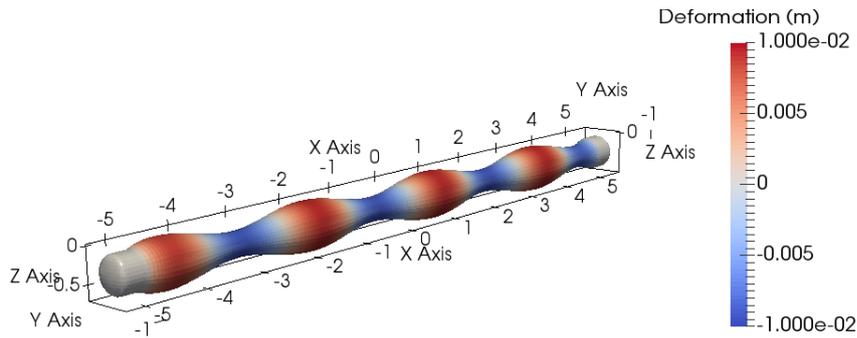
Mode 4, n=0
Renflement seul
$T = 1.93s$
$L = 4.85m$



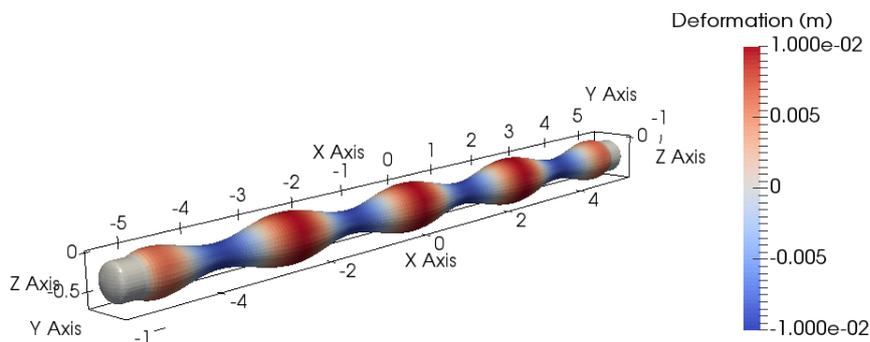
Mode 5, n=0
Cavalement et Renflement
$T = 1.39s$
$L = 3.57m$



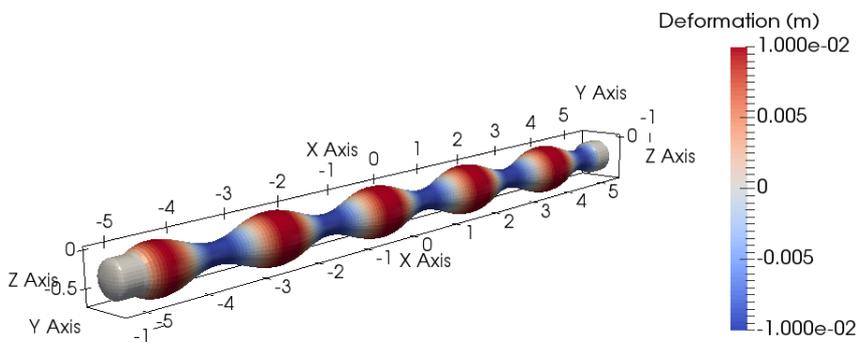
Mode 6, n=0
Renflement seul
$T = 1.25s$
$L = 3.25m$



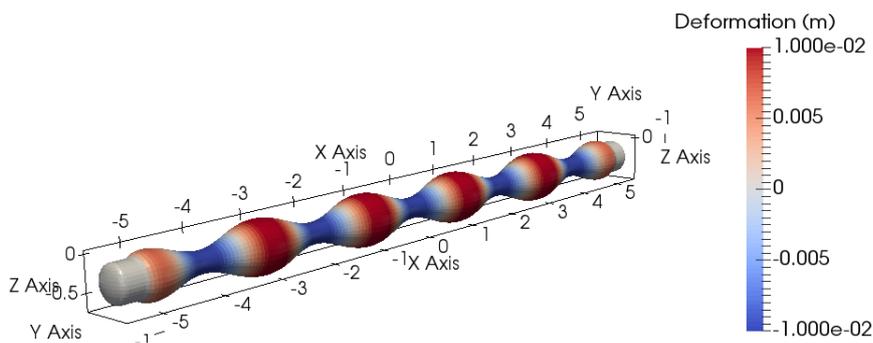
Mode 7, n=0
Cavalement et Renflement
$T = 0.99s$
$L = 2.65m$



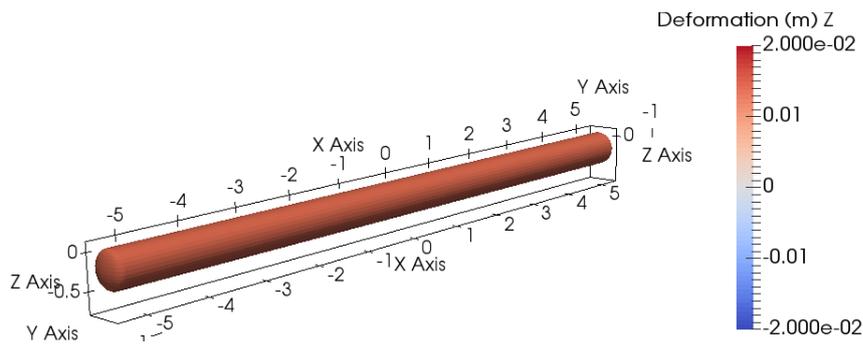
Mode 8, n=0
Renflement seul
$T = 0.90s$
$L = 2.45m$



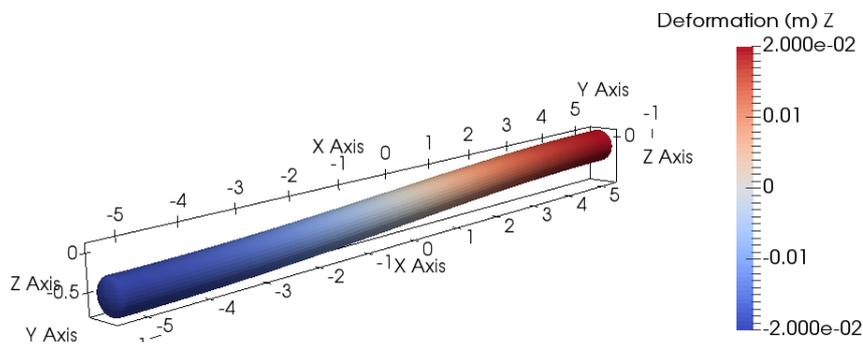
Mode 9, n=0
Cavalement et Renflement
$T = 0.74s$
$L = 2.10m$



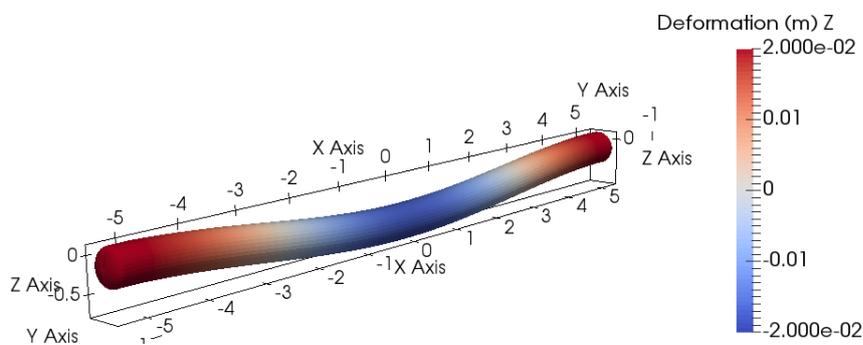
Mode 10, n=0
Renflement seul
$T = 0.69s$
$L = 1.97m$



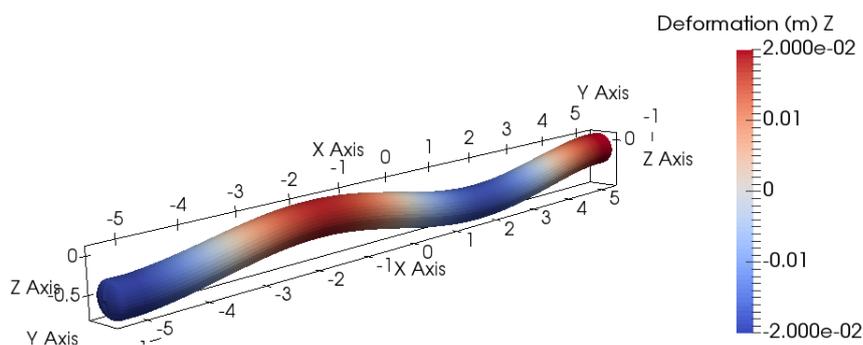
Mode 0, n=1
 Pilonnement
 $T = 418s$
 $L = 925m$



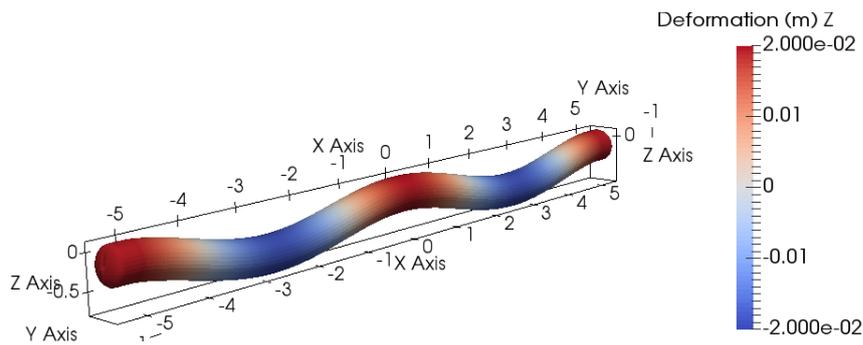
Mode 1, n=1
 Tangage
 $T = 6.8s$
 $L = 18.3m$



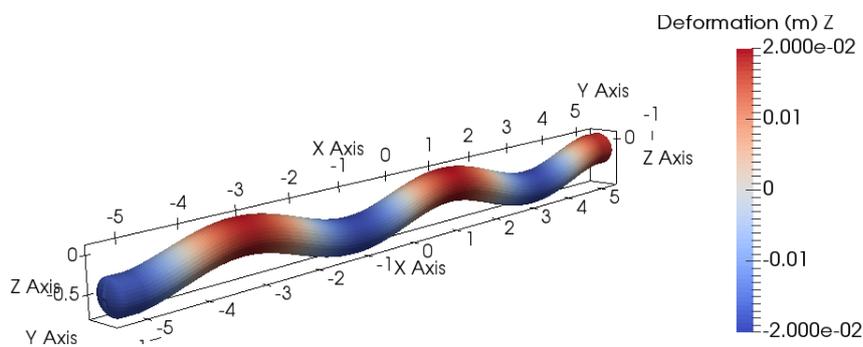
Mode 2, n=1
 Pair
 $T = 3.28s$
 $L = 10.3m$



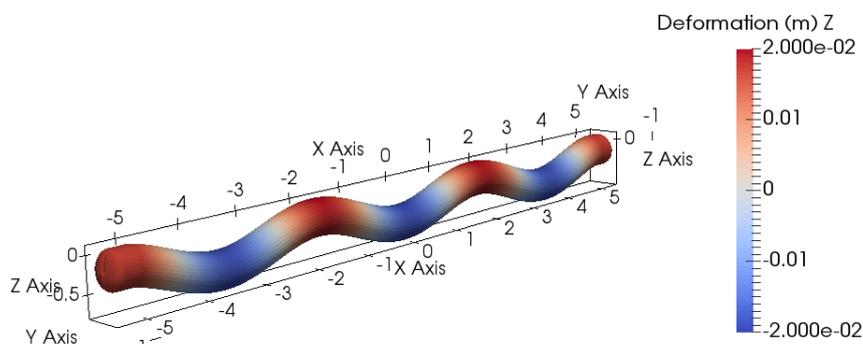
Mode 3, n=1
 Impair
 $T = 2.06s$
 $L = 7.12m$



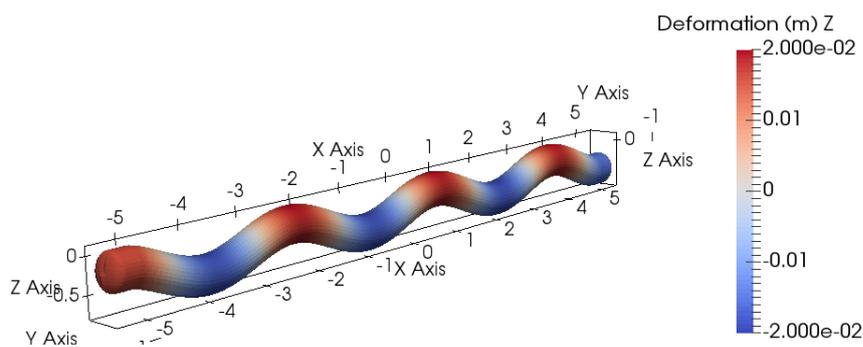
Mode 4, n=1
Pair
$T = 1.48s$
$L = 5.37m$



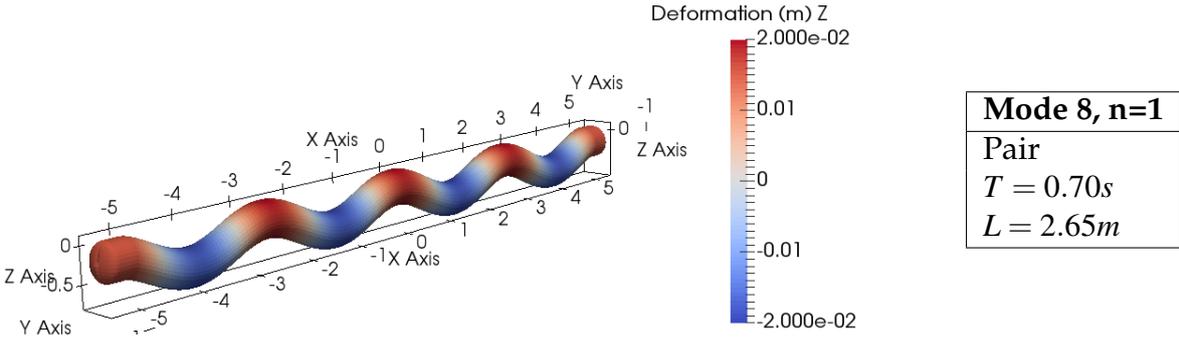
Mode 5, n=1
Impair
$T = 1.15s$
$L = 4.29m$



Mode 6, n=1
Pair
$T = 0.95s$
$L = 3.56m$



Mode 7, n=1
Impair
$T = 0.80s$
$L = 3.05m$



Thèse de Doctorat

Benjamin Gendron

Titre de la thèse : Modélisation et optimisation d'un système de récupération de l'énergie des vagues électro-actif déformable

Title of thesis: Simulation and optimisation of a flexible electro-active wave energy converter

Résumé

Les convertisseurs d'énergie des vagues ont beaucoup évolué depuis les premiers prototypes dans les années 1970. D'abord rigides et composés de sections articulées, de nouveaux systèmes houlomoteurs sont maintenant entièrement flexibles comme le S3 développé par l'entreprise SBM Offshore. Ce système est composé d'un tube élastique fermé et rempli d'eau dont les déformations radiales sont directement converties en électricité grâce à l'utilisation de bagues en polymère électro-actif. L'objectif de cette thèse est de développer un modèle numérique qui soit capable de prédire le comportement du système houlomoteur déformable dans tout type d'environnement marin.

À partir d'expériences sur modèles réduits, il a été possible d'analyser le comportement de la structure et de construire un modèle numérique qui prend en compte les différents phénomènes physiques agissant sur le convertisseur. Le modèle est développé à partir d'une décomposition modale des déformations du tube. Le comportement non-linéaire du matériau est pris en compte grâce à la théorie hyperélastique et l'interaction houle-structure est réalisée à l'aide de la méthode d'éléments de frontières linéaires. Deux versions ont été développées, une fonctionnant dans le domaine fréquentiel linéaire et une autre dans le domaine temporel afin de prendre en compte les effets non-linéaires. Au final, les simulations fournies par le modèle développé sont comparées aux mesures réalisées en bassin afin de valider les résultats.

Mots clés :

Houlomoteur, tube déformable, matériau hyper-visco-élastique, décomposition modale, écoulement potentiel

Abstract

Wave energy converters have greatly improved since the first generation in the 1970s. At first rigid with articulated sections, new wave energy converters are now entirely flexible like the S3 developed by the company SBM Offshore. The device is made of a water filled elastic tube closed at both ends and the radial deformations are directly converted into electricity by the use of electro-active polymere rings. The objective of this thesis is to develop a numerical model that can predict the behaviour of this flexible wave energy converter in any kind of environment.

After performing scaled model tests, it has been possible to analyse the behaviour of the device and build a numerical model that takes into account the different physical effects acting on the wave energy converter. The numerical model is based on a modal decomposition of the tube deformations. The wall non-linear effects are taken into account with the use of the hyper-elastic theory and the wave-structure interaction is made possible with the linear boundary element method. Two different versions have been developed. One based on the linear frequency domain and the other working in the time domain in order to take into account the non-linear effects. Finally, The simulations are compared with the measures from the basin tests to validate the results.

Key Words :

Wave energy converter, flexible tube, hyper-visco-elastic material, modal analysis, potential flow