



HAL
open science

Modélisation des formes volumiques complexes par des volumes quadriques. Application à la représentation de l'espace poral du sol à partir des images tomographiques 3D

Alain Trésor Kemgue

► **To cite this version:**

Alain Trésor Kemgue. Modélisation des formes volumiques complexes par des volumes quadriques. Application à la représentation de l'espace poral du sol à partir des images tomographiques 3D. Modélisation et simulation. Sorbonne Université; Université de Yaoundé I, 2019. Français. NNT : 2019SORUS158 . tel-03141294

HAL Id: tel-03141294

<https://theses.hal.science/tel-03141294>

Submitted on 15 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
SORBONNE UNIVERSITÉ



ÉCOLE DOCTORALE DE YAOUNDÉ I
Centre de Recherche et de Formation Doctorale en « Sciences, Technologies et Géosciences »
ÉCOLE DOCTORALE INFORMATIQUE, TÉLÉCOMMUNICATION ET
ÉLECTRONIQUE DE PARIS VI
Faculté des Sciences
Unité Mixte Internationale de Modélisation Mathématique et Informatiques des
Systèmes Complexes
ANNÉE : 2019

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Informatique

Option : Vision par ordinateur et modélisation des formes 3D

Présentée par

KEMGUE Alain Tresor

Titre :

Modélisation des formes volumiques complexes par des
volumes quadriques
Application à la représentation de l'espace poral du sol
à partir des images tomographiques 3D.

Sous l'encadrement de

Pr. Monga Olivier, Sorbonne Université

Pr. Ndoundam René, Université de Yaoundé I



DEDICACE

Je dédie ce mémoire à mon cher papa et à ma chère maman. Vous avez toujours été là pour moi du début jusqu'à la fin de cette formation qui aujourd'hui porte ses fruits. Vos bénédictions ont été mon partage. Je vous serez toujours reconnaissant pour ce soutien inconditionnel. Je profite encore pour vous dire que je vous aime.

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce travail n'aurait pas été possible sans l'aide et l'appui de certaines personnes, qui de près ou de loin m'ont soutenues et encourager dans les moments de difficultés et de doutes. C'est grâce à leurs motivations que je n'ai pas abandonnée.

Je tiens notamment à adresser un remerciement chaleureux à l'endroit du **professeur Olivier Monga**, Directeur de recherche à l'**IRD**, pour toute sa patience et les moments passés ensemble dans la réalisation de ce travail. C'est par sa confiance, son enthousiasme et sa détermination que j'ai eu le courage de me lancer sur cette piste qui celle de la recherche. Les nombreuses discussions et échanges que nous avons entretenues durant tous ces années de thèses ont été très bénéfiques.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude au **docteur Serge Moto**, chargé de cours à l'université de Yaoundé I, pour avoir accepté de m'encadrer, pour toute la patience et l'attention qu'il m'a accordé, pour tous les outils mathématiques mis à ma disposition durant toute la phase de mise en œuvre de ce travail. Il m'a accordé beaucoup de son temps depuis le début de ce travail jusqu'à sa rédaction.

Mes sincères remerciements vont également à l'endroit du professeur René Ndoundam, maître de conférences à l'université de Yaoundé I, pour avoir accepté de diriger ce travail de thèse avec le professeur Monga et le docteur Moto. Grâce à ses conseils et ses encouragements, j'ai eu toute la motivation nécessaire pour travailler en toute sérénité.

Je remercie particulièrement l'équipe de recherche de l'INRA Grignon pour l'intérêt manifesté pour ce travail, pour la patience et la pile de données mise à ma disposition afin de tester et appliquer mes modèles. En particulier Mme Valérie Pot, Mme Patricia Garnier, M. Philippe Baveye.

Toute ma reconnaissance va à l'endroit du Programme Doctoral International-Modélisation des Systèmes Complexes(PDI-MSC), en collaboration avec l'Université de Paris 6 et l'Institut

de Recherche pour le Développement, qui a financé une partie de ce travail de thèse et m'a accueilli durant mes séjours en France au Campus de Bondy. Merci à ses coordonnateurs Jean-Daniel Zücker, Christophe Cambier et Edith Perrier.

Je remercie de tout cœur le **professeur Maurice Tchunte**, directeur du laboratoire UM-MISCO Cameroun , pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et pour m'avoir mis en contact avec le professeur Monga par qui j'ai eu ce sujet de thèse et pour tous les équipements mis à notre disposition pour l'élaboration de nos travaux.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance aux départements d'informatique et de mathématique de l'université de Yaoundé I, ainsi que à ses enseignants qui m'ont débloqué sur certaines tâches ponctuelles. Je ne saurais oublier la faculté de sciences de l'université de Paris 6 où beaucoup de mes collègues du PDI et moi avons mené nos recherches durant nos séjours en France. Merci à vous chers collègue pour les bons moments passés ensemble.

Je tiens enfin à exprimer toute ma reconnaissance et témoignage à l'endroit de mes parents papa Kaouo André et maman Makuetché Thérèse , mes frères et mes sœurs (Hermione,Carine,Emmanuel,etc.), mon oncle tonton Sévérin de par leurs précieux conseils, de par leurs prières et de par leur foie en moi. Ces remerciements s'adressent aussi à toutes les personnes qui de près ou de loin ont su me donner leur soutien.

LISTE DES ABRÉVIATIONS

UNIFA	Union des Industries de la Fertilisation
EP	Espace poral
MVEE	Minimum Volume Enclosing Ellipsoïds
CT	Computed Tomography
MAE	Mean Absolute Error
IRD	Institut de Recherche pour le Développement
INRIA	Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique
LBM	Lattice-Boltzmann Methods
PDE	Partial Differential Equations
FEM	Finite Element Methods
PC	Personal Computer
CPU	Central Processing Unit
3D	Three Dimension
ROI-CT	Region Of Interest Computed Tomography
SR-CT	Super Resolution Computed Tomography
IRM	Imagerie à Résonance Magnétique
CAD	Computer Aided Design
CAM	Computer Aided Manufacturing
INRA	Institut National de la Recherche Agronomique
CAO	Conception Assistée par Ordinateur
VO	Vision par Ordinateur
ACP	Analyse en Composantes Principales

Résumé

Les structures naturelles sont constituées de formes complexes qui sont pour la plupart difficiles à modéliser avec de simples équations analytiques. La complexité de la représentation est due à l'hétérogénéité du milieu physique et à la variété des phénomènes impliqués. Nous nous intéressons dans notre étude à la représentation des structures volumiques complexes issues des images tomographiques. Grâce aux récentes avancées technologiques en tomographie assisté par ordinateur, l'acquisition d'images de formes avec les scanners est maintenant possible. Cependant, ces données images, constituées de voxels, ne sont pas directement utilisables pour simuler un certain nombre de phénomènes. Dans cette thèse, nous proposons une approche de modélisation de ces formes qui consiste à effectuer une approximation par morceaux des données images par des volumes quadriques. Nous proposons d'utiliser une stratégie de division-fusion et un algorithme de croissance de régions pour optimiser une fonctionnelle incluant à la fois un terme erreur d'approximation et un facteur d'échelle. Les données en entrée de notre algorithme sont un ensemble brut de voxels qui décrit une forme volumique complexe et le résultat en sortie est un ensemble de volumes quadriques tangents ou disjoints représentant la forme de départ de façon intrinsèque. Nous appliquons notre méthode pour représenter l'espace poral 3D du sol obtenu à partir des capteurs d'images tomographiques. Ainsi, dans ce contexte spécifique, nous validons notre modélisation géométrique en procédant aux simulations du drainage de l'eau et de l'activité de décomposition microbienne sur des données réelles d'échantillons de sol. Cette étude comporte plusieurs enjeux d'ordres écologique, agricole et industriel.

Mots-clés : Scanners CT; Tomographie; Forme complexe; Approximation par morceau; Volume quadrique; Espace poral

Abstract

Most of the natural shapes have complex volume forms that are usually difficult to model using simple analytical equations. The complexity of the representation is due to the heterogeneity of the physical environment and the variety of phenomena involved. In our study, we are interested by the complex volume shapes structures representation from computed tomographic images. Thanks to the technological advances in Computed Tomography scanners, the image acquisition of complex shapes becomes possible. However, these image data are not directly usable for simulation or modeling purposes. In this thesis, we investigate an approach of modeling of such shapes which consists in making a piecewise approximation of the image data by quadric volumes. We propose to use a split-merge strategy and a region growing algorithm to optimize a function that includes both an approximation error term and a scale factor term that is opposed to it. The input of our algorithms is voxel-based shape description and the result is a set of tangent or disjoint quadric volumes representing the shape in an intrinsic way. We apply our method to represent 3D soil pore space obtained from the Computed Tomography scanners. Within this specific context, we validate our geometrical modeling by performing simulations of water draining and microbial decomposition activities on real data soil sample. This study involves several ecological, agricultural and industrial issues.

Keywords : CT Scanner; Tomography; Complex shape; Piecewise approximation; Ellipsoids; Pore space

Table des matières

1	INTRODUCTION GÉNÉRALE	22
1.1	Contexte et motivations	22
1.2	Position du problème	23
1.2.1	Problématique	23
1.2.2	Méthodologie	24
1.2.3	Objectifs	25
1.2.4	Définition formelle du problème	26
1.3	Contributions	28
1.4	Plan de la thèse	29
2	ÉTAT DES CONNAISSANCES	31
2.1	Introduction	31
2.2	Mécanismes de modélisation des formes	32
2.2.0.1	Limites de la tomographie	34
2.2.1	Descripteur des formes	36
2.2.2	Représentation par des modèles volumiques	40
2.2.2.1	Approximation par des morceaux de segments plan	41
2.2.2.2	Approximation par des cyclides de dupin	42
2.2.3	Représentation par un ensemble minimal de boules maximales	46

2.2.3.1	Définition de la représentation de la forme volumique de base	47
2.2.3.2	Calcul de l'ensemble minimal $R_{min}(F)$	51
2.2.3.3	Extraction des boules maximales et du λ - squelette en utilisant la triangulation 3D de Delaunay	53
2.2.4	Représentation par des cylindres généralisés	55
2.2.5	Représentation des formes avec les volumes quadriques autres que les boules	56
2.2.5.1	Quelques modèles de formes avec les volumes quadriques et superquadriques	57
2.2.6	Conclusion	63

3 GENERALITES SUR LES VOLUMES QUADRIQUES, SUPER QUADRIQUES

ET APPROXIMATIONS VOLUMIQUES 65

3.1	Introduction	65
3.2	Les coniques 2D	66
3.2.1	Définition	66
3.2.2	Équations des coniques	67
3.2.2.1	Réduction de l'équation d'une conique	67
3.2.2.2	Équation polaire d'une conique	69
3.3	Les volumes quadriques	71
3.3.1	Définition	71
3.3.2	Forme réduite des quadriques	72
3.3.3	Centre de symétrie d'une quadrique à centre	73
3.3.4	Changement de repère	75
3.3.5	Types de volumes quadriques	77
3.4	Les volumes superquadriques	79

3.4.1	Définition	79
3.4.2	Les super ellipsoïdes	81
3.4.3	Les autre super quadriques	85
3.4.4	Justification du choix des modèles quadriques pour représenter l'espace poral	86
3.5	Approximation des formes	88
3.5.1	Approximation par les moindres carrés	89
3.5.1.1	Rappel du problème des moindres carrés	89
3.5.1.2	Solution du moindre carré par équations normales	89
3.5.1.3	Application aux quadriques	91
3.5.2	Approximation par diagonalisation de matrice de covariance	92
3.5.2.1	Rappel de quelques notions statistiques	93
3.5.2.2	Rappel de l'analyse en composante principale	94
3.5.2.3	Approche par diagonalisation présentée dans [Bricault et al.,1997]	95
3.5.3	Algorithmes	97
3.5.4	Test de nos algorithmes.	98
3.5.5	Approximation d'un nuage de points par un superellipsoïde	103
3.5.5.1	Paramètres initiaux	104
3.5.5.2	Phase de régression des paramètres de A	105

4 MÉTHODOLOGIE DE SEGMENTATION VOLUMIQUE D'UNE FORME COM- PLEXE AVEC LES ELLIPSOÏDES 106

4.1	Introduction	106
4.2	Stratégie de division-fusion et de croissance de régions.	107
4.2.1	Division-fusion en utilisant la structure octree	109
4.2.1.1	Les quadtrees	110

4.2.1.2	Les octrees	113
4.2.1.3	Algorithme	113
4.2.2	Division-fusion utilisant l'algorithme des K-means	115
4.2.2.1	Principe de l'algorithmique de K -means	117
4.2.2.2	Calcul des composantes connexes d'un sous ensemble de boules	120
4.2.2.3	Échantillonnage des points 3D sur un sous ensemble de boules	123
4.2.2.4	Calcul de l'enveloppe convexe d'un sous ensemble de boules	128
4.2.2.5	Approximation d'un sous ensemble de boules par un ellipsoïde	132
4.2.2.6	Algorithme de segmentation initial en ellipsoïdes primaires d'une forme F	132
4.2.3	Regroupement en utilisant l'algorithme de croissance de région optimal	132
4.3	Conclusion	135

5 APPLICATION A LA REPRÉSENTATION DES STRUCTURES POREUSES 3D DU SOL ET AU DRAINAGE DES EAUX 137

5.1	Introduction	137
5.2	Généralités sur les formes volumiques complexes	138
5.2.1	Les milieux poreux	139
5.2.1.1	Réseau interconnecté de pores	143
5.2.1.2	Les différents type de porosité	144
5.2.2	Cas d'étude : Le sol	145
5.3	Le drainage	148
5.4	Préparation des données de sols	150
5.5	Résultats et interprétations	151
5.5.1	Drainage à partir d'une représentation morphologique de l'espace po- ral : Obtention des interface eau-air à partir des ellipsoïdes.	151

5.5.2	Évaluation des modèles de prédiction interfaces eau-air	152
5.5.3	Résultats et discussions	153
6	CONCLUSION GENERALE	171
6.1	Conclusion	171
6.2	Perspectives	172
A	Détail des algorithmes	175
A.1	Description sommaire	175
A.1.1	Algorithme 1	175
A.1.2	Algorithme 2	178
A.1.3	Algorithme 3	179

Table des figures

1.1	Image 3D de voxels. Encore appelés pixels dans les images 2D	26
1.2	Représentation par image de pixels et voxels.	27
2.1	Similarité entre objets. [Mokhtari,2016]	34
2.2	Types de descripteurs de formes 3D. [Mokhtari,2016]	34
2.3	Descripteur du diamètre local. Li dans [Mokhtari,2016].	38
2.4	Descripteur de forme D2. Osada dans [Mokhtari,2016].	38
2.5	Descripteur sac de mots visuels. Lavoué dans [Mokhtari,2016].	39
2.6	Image et nuage de points de la façade d'un bâtiment. [Boulaassal,2010].	41
2.7	Exemple de surfaces canal. (a) surface canal quelconque, (b) surface serpentini- [Druoton et al.,2013]	43
2.8	(a)Cercles caractéristiques d'un cyclide de Dupin de degré 4, (b) Faisceau de plans contenant ces cercles caractéristiques. [Druoton et al.,2013]	45
2.9	Représentation des objets par des boules	48
2.10	L'application de recouvrement minimal de la forme ellipse n'est pas croissante : l'ellipse avec les boules bleues est incluse dans l'ellipse avec les boules grises mais le recouvrement de la grande ellipse ne contient pas celui de la petite ellipse. [Ngom,2010]	50
2.11	Squelette géométrique et boules maximales [Ngom,2010]	51

2.12	Sensibilité du squelette au bruit [Ngom,2010]	52
2.13	Pavage de Voronoï d'un ensemble de points	54
2.14	Exemples de diagrammes de Voronoï naturels [Ngom,2010]	54
2.15	Boule de Delaunay	54
2.16	Ajustement d'une chaîne de boule par des cylindres et des tores. [Ngom,2010] .	56
2.17	Critère d'erreur d'approximation de Solina.	58
2.18	Segmentation de quelques objets avec les deux étapes division et croissance.[?]	60
2.19	Différentes courbes d'ellipsoïdes. Dans la courbe en A en gris, on a les diffé- rents types d'ellipsoïdes.L'ellipsoïde prolata en B est représenté en jaune, l'el- lipsoïde intermédiaire sphérique en C est représenté en rouge et l'ellipsoïde oblate en D est représenté en couleur pourpre.[Doube,2015]	63
3.1	Différentes forme de coniques	67
3.2	Ellipsoïde	78
3.3	Hyperboloïdes à une et à deux nappes	79
3.4	Paraboloïde elliptique	80
3.5	Les superquadriques est une famille de formes qui inclus les superellipsoïdes (a), les superhyperboloïdes à une nappe (b), à deux nappes(c) et les superto- roïdes (d) [Jaklic et al.,2013]	81
3.6	Superellipsoïdes avec différentes valeurs des exposants ϵ_1 et ϵ_2 . Les paramètres de taille a_1, a_2 et a_3 sont constants.[Jaklic et al.,2013]	83
3.7	Ellipsoïde original	100
3.8	Ellipsoïdes résultant des algorithmes d'approximations	103
4.1	Coupes 2D (de 48 à 53) d'une image tomographique 3D de sol p1bkk03a non seuillée, où les pixels de l'espace poral sont en noir et les pixels de la partie solide sont représentés par les autres couleurs	108

4.2	Coupes 2D (de 48 à 53) d'une image tomographique 3D de sol p1bkk03a. On extrait d'abord les voxels décrivant l'espace poral par seuillage grâce à l'estimation de la valeur de porosité. Les pixel des pores sont en noir et les pixels de la partie solide sont en blanc.	108
4.3	Mise en oeuvre de la subdivision d'un quatree pour stocker un ensemble de points.[Berg et al.,2008]	112
4.4	Exemple d'octree avec son cube de subdivision	115
4.5	Exemple de regroupement d'un ensemble de données à l'aide de K -means.	118
4.6	Exemple de partitionnement d'un ensemble de boules en sous ensembles avec notre K -means	121
4.7	Le graphe G est connexe puisqu'il existe une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets distincts. Le graphe H n'est pas connexe ; par exemple, il n'y a pas de chaîne entre les sommets a et d	122
4.8	Couronnes principales et secondaires	126
4.9	l'extraction des couronnes de la boule b_i dépend de la boule b_{i-1}	126
4.10	Exemples d'enveloppes convexes 2D et 3D et de polytope [Berg et al.,2008]	130
4.11	Etape d'approximation d'un sous ensemble de boules connexe par un ellipsoïde	133
5.1	Structure poreuse d'un sol. [Ngom,2010]	140
5.2	Structure poreuse d'un os. @Source : banque d'images 123rf	140
5.3	Structure vaisseaux sanguins. @Source : Jean-Paul BERGER. SVT Emirats Arabes Unis	140
5.4	Structure d'un cerveau. @Source : Google	141
5.5	Image satellite d'une ville. @Source : CNES(Centre National d'Etudes Spatiales)	141
5.6	Image satellite d'un océan. @Source : NASA	142
5.7	Image satellite d'une forêt. @Source : banque d'images 123rf	142

5.8	Différentes couches d'un sol. @source : UNIFA	146
5.9	Constituants principaux d'un sol cultivé. @source : UNIFA	147
5.10	Le carbone dans le sol. @source : UNIFA	148
5.11	Le cycle de l'eau. @source : UNIFA	149
5.12	Comparaison entre la représentation avec les boules et la représentation avec les ellipsoïdes pour le pore ROI p1bkk03a . La première ligne montre la représentation avec les boules. La seconde ligne montre les ellipsoïdes primaires obtenus avec l'algorithme de division fusion à l'aide des <i>K</i> -means et la troisième ligne montre les ellipsoïdes finaux obtenus avec l'algorithme de croissance de régions. Les différentes images à droite représentent les agrandissements respectifs de celles de gauche.	160
5.13	Données images 3D volumiques d'échantillons de sol	161
5.14	Comparaison des coupes 2D des résultats du drainage lorsque le point d'équilibre est atteint. On a les coupes de l'expérience originale (première ligne) et les modèles de simulation de la distribution air-eau dans l'espace poral connecté ROI p1bkk03a à différentes sections verticales pour $z = 18, 24, 34$ et 65 (de gauche à droite). La phase solide est en blanc, l'eau est en gris clair et l'air est en noir. La deuxième ligne correspond à la simulation avec les boules, tandis que les troisième, quatrième et cinquième résultent de la modélisation avec des ellipsoïdes définis respectivement avec le rayon minimal (3e ligne), le rayon maximal (4e ligne) et le rayon moyen (5ème ligne). Le diamètre seuil a été fixé à $73\mu m$	162

-
- 5.15 Comparaison des coupes 2D des résultats du drainage lorsque le point d'équilibre est atteint. On a les coupes de l'expérience originale (première ligne) et les modèles de simulation de la distribution air-eau dans l'espace poral connecté **ROI p1bkk04a** à différentes sections verticales pour $z = 22,64, 106$ et 148 (de gauche à droite). La phase solide est en blanc, l'eau est en gris clair et l'air est en noir. La deuxième ligne correspond à la simulation avec les boules, tandis que les troisième, quatrième et cinquième résultent de la modélisation avec des ellipsoïdes définis respectivement avec le rayon minimal (3e ligne), le rayon maximal (4e ligne) et le rayon moyen (5ème ligne). Le diamètre seuil a été fixé à $400\mu m$ 163
- 5.16 Comparaison des coupes 2D des résultats du drainage lorsque le point d'équilibre est atteint. On a les coupes de l'expérience originale (première ligne) et les modèles de simulation de la distribution air-eau dans l'espace poral connecté **ROI p4bkk03a** à différentes sections verticales pour $z = 30,39,54$ et 63 (de gauche à droite). La phase solide est en blanc, l'eau est en gris clair et l'air est en noir. La deuxième ligne correspond à la simulation avec les boules, tandis que les troisième, quatrième et cinquième résultent de la modélisation avec des ellipsoïdes définis respectivement avec le rayon minimal (3e ligne) et le rayon maximal (4e ligne). Le diamètre seuil a été fixé à $112\mu m$ 164
- 5.17 Visualisation 3D des résultats du drainage au point d'équilibre sur deux angle de vue différents de **ROI p1bkk03a**. La phase solide n'est pas représentée ici. L'eau est en bleu et l'air en rouge. Les images de la première ligne correspondent à l'expérience originale et les images du bas montrent les simulations avec les ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $73\mu m$ 165

5.18	Visualisation 3D des régions d'intérêts de ROI p1bkk04a après drainage vu sur deux points de vue différents. La phase solide n'est pas représentée ici. L'eau est en bleu et l'air en rouge. Les images de la première ligne correspondent aux données CT originale et les images du bas montrent les simulations avec les ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $400\mu m$ pour évaluer leur niveau de saturation.	166
5.19	Visualisation 3D des résultats du drainage au point d'équilibre sur deux angle de vus différents de ROI p4bkk03a . La phase solide n'est pas représentée ici. L'eau est en bleu et l'air en rouge. Les images de la première ligne correspondent à l'expérience originale et les images du bas montrent les simulations avec les ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $112\mu m$	167
5.20	Visualisation 3D sur deux angle de vue différents des interfaces eau-air obtenues après drainage de ROI p1bkk03a . Les images de dessus correspondent aux données de l'expérience originale et les images du bas montrent les simulations en utilisant des ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $73,6\mu m$	168
5.21	Visualisation 3D sur deux angle de vue différents des interfaces eau-air obtenues après drainage de ROI p1bkk04a . Les images de dessus correspondent aux données de l'expérience originale et les images du bas montrent les simulations en utilisant des ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $400\mu m$	169

5.22 Visualisation 3D sur deux angle de vue différents des interfaces eau-air obtenues après drainage de ROI p4bkk03a . Les images de dessus correspondent aux données de l'expérience originale et les images du bas montrent les simulations en utilisant des ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $112\mu m$	170
--	-----

Liste des tableaux

2.1	Avantages et inconvénients de quelques méthodes de représentation	35
5.1	Classification de la porosité	145
5.2	Valeurs de l'erreur de drainage MAE entre l'image segmentée et la représentation géométrique avec les ellipsoïdes et les temps de calcul(en seconde) pour les différents cas de simulations. On a pris un diamètre seuil selon la loi de Young Laplace pour p1bkk04a et selon l'article [Pot et al.,2015] pour les autre ensembles de données	159
5.3	Erreur d'approximation de l'espace poral entre l'image $SR - \mu CT$ segmentée et les modèles géométriques : $\rho_1 = \frac{V_{esp}}{V_{sol}}$ et $\rho_2 = \frac{V_{prim}}{V_{sol}}$. Où V_{esp} est le nombre de voxels de l'espace poral de l'image segmentée $SR - \mu CT$ non inclus dans les primitives; V_{prim} est le nombre de voxels de primitives de l'image segmentée $SR - \mu CT$ non inclus dans l'espace poral; V_{sol} est le nombre total de voxels de l'image segmentée $SR - \mu CT$	159
5.4	Temps de calcul nécessaire pour obtenir les ellipsoïdes. Les ellipsoïdes sont calculés une fois pour toute. Une implémentation en langage C réduirait encore plus ce temps de calcul comparer à l'implémentation Matlab.	165



INTRODUCTION GÉNÉRALE

1.1 Contexte et motivations

Les structures naturelles sont constituées de formes 3D complexes qui sont pour la plupart difficiles à modéliser. On en dénombre une panoplie dans la nature à différentes échelles macroscopiques ou microscopiques. Par ailleurs, beaucoup de systèmes complexes restent encore inexplorés en 3D et s'inscrivent dans ces types de volumes. Nous avons entre autre l'espace poral du sol, les scènes graphiques 3D, les étendues d'eau, les organes vivants, les structures osseuses, les vaisseaux sanguins, etc. Ces structures complexes sont des lieux par excellence de phénomènes physiques et biologiques et dont l'étude suscite de l'intérêt dans de nombreux domaines de recherches. Grâce aux récents progrès technologiques, l'acquisition d'images volumiques haute résolution des formes complexes est désormais possible à l'aide des capteurs ou scanners tomographiques 3D à rayons X [Florez,2006, Gryze,2006, Monga et al.,2008]. Mais la plupart des expériences menées en vision par ordinateurs montrent que la description des formes uniquement à partir des données images est difficile à utiliser à des fins de calculs et de modélisations(simulations). Les raisons de cette complexité proviennent du fait que dans un premier temps, les voxels des images restitués par les capteurs tomographiques 3D, ne correspondent à aucune description analytique. Ils forment des traces discrètes non structurées. La représentation d'une forme par un ensemble brut de voxels ne donne à priori aucune informa-

tion explicite sur ses descripteurs topologiques. Dans un second temps, le nombre de voxels est généralement très élevé et on en dénombre pratiquement des centaines de millions par image. Pour la plupart des applications réelles, il est important de calculer une représentation des structures géométriques qui soit à la fois compacte et stable.

1.2 Position du problème

1.2.1 Problématique

Une partie des problèmes rencontrés en modélisation de formes, en particulier 3D (3D shape modelling) est liée à la segmentation d'images 3D dont l'objectif est de fournir une représentation intrinsèque de formes à partir des données brutes issues de capteurs [Alsallakh,2014, Monga,2007, Ayache et al.,2003, Banegas et al.,2001, Blinn,1982, Caumon et al.,2004, Caumon et al.,2005, Doube,2015, Druoton et al.,2013, Malladi et al.,1995, Terzopoulos,1991]. Un des principes de base de la plupart de ces méthodes de modélisation de formes consiste à rechercher des approximations par morceaux par des surfaces analytiques ou des primitives volumiques. L'approximation par morceaux de primitives géométriques est calculée grâce à l'optimisation explicite ou parfois implicite d'une fonctionnelle non-linéaire intégrant un terme d'erreur d'approximation et un terme d'échelle qui lui est opposé [Monga,2007, Mumford et al.,1989]. Dans le cas des formes complexes, la segmentation d'images 3D reste un problème difficile et ouvert à cause de la difficulté à retrouver une bonne fonction et un schéma de minimisation facile. La raison fondamentale est que les formes naturelles n'ont pas été conçues comme des objets manufacturés à l'aide de surfaces analytiques et de volumes. Ainsi, on doit dans une certaine mesure trouver un algorithme qui calcule de manière significative une représentation de la forme initialement décrite par un ensemble de voxels. Ceci sous-entend que l'approximation finale de la forme doit être compacte et robuste face à des changements mineurs, avoir une sorte de « continuité »

par rapport à la description initiale, et doit pouvoir servir dans la modélisation ou la simulation de processus physiques et biologiques. L'état des connaissances actuel présente des travaux en relation avec la modélisation de formes en général. La plupart de ces travaux présentent des modèles pour décrire des formes précises, à l'instar des objets manufacturés qui sont pour la plupart bien définis ¹[Chevalier et al.,2005, Banegas et al.,2001, Druoton et al.,2013, Boulaassal,2010]. On peut constater au vu de ceci que très peu présentent la modélisation 3D de formes naturelles complexes. Quand bien même cela est fait, la plupart des modèles sont purement théoriques et inutilisables[Ngom et al.,2012, Delerue et al.,2002]. Cela est dû d'abord aux difficultés mathématiques et algorithmiques auxquelles il faut faire face, et ensuite au manque de motivation lié aux contextes d'application spécifiques. Le premier point restera peut-être vrai pendant quelques décennies, mais le second changera de tendance en raison du développement croissant dans les domaines de modélisation des systèmes complexes naturels et en particulier dans les applications des sciences du sol[Shomar et al.,2014, Darwish et al.,2014, Vogel et al.,2001, Wen et al.,1996, Whiffin et al.,2007, Eickhorst et al.,2008, Freije et al.,2015, Kuiper et al.,2015, Vogel et al.,2015].

Toujours dans la perspective de répondre au problème de modélisation de forme 3D complexes, nous explorons une autre piste en proposant un nouveau modèle de représentation de formes qui soit à la fois compacte, stable, robuste et surtout utilisable dans un contexte applicatif réel. Ce travail est une continuité des travaux menés dans [Ngom et al.,2012, Monga,2007, Doube,2015, Chevalier et al.,2005, Druoton et al.,2013, Banegas et al.,2001]

1.2.2 Méthodologie

Nous allons dans notre travail de thèse, développer une méthode originale permettant de représenter les formes 3D complexes en utilisant des primitives géométriques plus évoluées

1. définis par une surface ou un volume analytique

à l'instar des volumes quadriques [Alsallakh,2014, Banegas et al.,2001, Chevalier et al.,2005, Barr,1981, Barr,1984]. Cela nécessite la mise en œuvre des programmes informatiques basés sur une algorithmique complexe prenant en compte la définition mathématique des formes et permettant d'optimiser une fonctionnelle intégrant un terme d'erreur d'approximation et un facteur d'échelle. Nous avons choisi ces primitives à cause des avantages qu'elles présentent. En effet elles ont de bonnes propriétés géométriques et sont modélisables avec peu de paramètres. Elles sont en outre faciles à manipuler et surtout bien adaptées pour la visualisation graphique. L'entrée de notre algorithme est un ensemble brut de voxels qui décrit la forme d'un échantillon réel de sol. La sortie se traduit par une approximation par morceaux de la forme à l'aide des ellipsoïdes. En règle générale, nous représentons plusieurs centaines de millions de voxels au moyen de quelques milliers de primitives. Nous implémentons un schéma original consistant à définir une hiérarchie de représentation par des primitives à l'aide des boules puis de quadriques.

1.2.3 Objectifs

Nous allons dans ce travail, développer des modèles de formes complexes 3D, qui seront appliqués pour représenter les milieux poreux. Cette application aux milieux poreux va permettre d'accélérer les simulations de nombreux phénomènes qui ont lieu en son sein. En effet un milieu poreux (Nous y reviendrons plus en détail dans le chapitre 5) est une forme volumique complexe constituée d'un squelette solide et de pores. Dans le contexte du sol en géoscience, ces pores sont le siège d'une activité biologique intense et de beaucoup d'autres processus physiques. A cet effet et selon l'organisation UNIFA, Il fait partir des plus grands réservoirs de carbone de la planète et est responsable de l'effet de serre. L'espace poral du sol est également le siège de l'activité microbienne et de l'écoulement des fluides encore appelé drainage. La simulation de ces processus permet de mieux appréhender notre écosystème et de mettre en œuvre de meilleures méthodes de gestion des ressources. Dans la modélisation 3D que nous

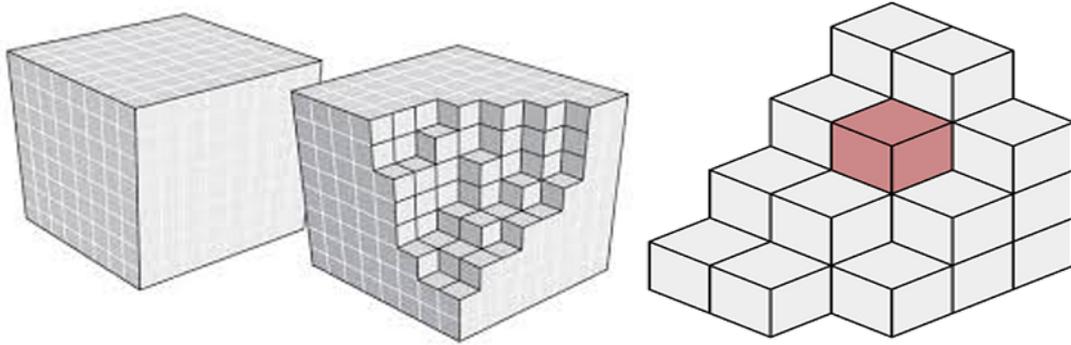


FIGURE 1.1: Image 3D de voxels. Encore appelés pixels dans les images 2D

allons fournir, nos primitives approximent bien les différentes cavités de l'espace poral. En dehors du sol, nos modèles peuvent aussi être utilisés dans de nombreux domaines d'application comme la médecine pour représenter les structures poreuses de certains organes, etc.

Nous présentons des résultats de simulation du drainage avec notre représentation qui portent sur les mêmes données réelles que celles utilisées dans [Pot et al.,2015].

1.2.4 Définition formelle du problème

Soit S une forme volumique définie par un ensemble de voxels comme suit :

Soit $I(i, j, k)$ une image discrète 3D binaire.

S est le volume défini par tous les voxels $M(i, j, k)$ de I positionnés à un :

$$M(i, j, k) \in S \Leftrightarrow I(i, j, k) = 1 \quad (1.1)$$

Dans un espace continu, chaque voxel pourrait être considéré comme un cube, comme le montre la figure 1.1.

Le but consiste à trouver des approximations par morceaux de la forme S en utilisant des primitives ayant de bonnes propriétés de compacité, de robustesse et d'invariance. Bien sûr, comme dans tout schéma d'approximation, la notion d'échelle doit être explicitement exprimée. Étant donné que cette représentation sera utilisée pour simuler des phénomènes spatialisés

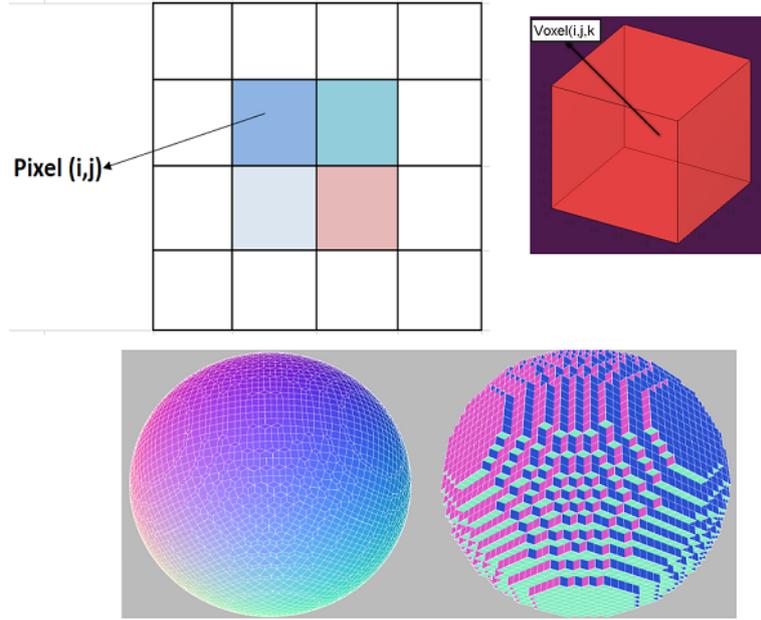


FIGURE 1.2: Représentation par image de pixels et voxels.

complexes se déroulant dans la forme, les descripteurs basés sur le deep learning ne peuvent pas être directement utilisés pour résoudre ce problème.

Soit V l'ensemble des voxels qui définissent la forme volumique :

$$V = v_1, v_2, \dots, v_n \quad (1.2)$$

Soit E un ensemble d'ellipsoïdes tel que chaque paire d'ellipsoïdes soit disjointe ou tangente :

$$E = e_1, e_2, \dots, e_m; \forall (i, j), (e_i \cap e_j = \emptyset) \vee (e_i \cap e_j \in S(E)) \quad (1.3)$$

Où $S(E)$ est l'ensemble des surfaces régulières de l'espace affine E .

En partant du principe de base défini dans [Monga,2007, Mumford et al.,1989], nous définissons la fonctionnelle suivante :

$$C(V, E) = (\Phi(V \Theta E) + \Phi(E \Theta V)) + \lambda \sum_{j=1}^n \rho(e_j) \quad (1.4)$$

où Φ est une fonction qui associe à une forme volumique une valeur numérique de son volume et ρ est une fonction qui associe à une surface une valeur numérique de son aire. Nous recherchons un ensemble d'ellipsoïdes E qui minimise $C(V, E)$ où λ définit l'échelle de la représentation [Monga,2007, Mumford et al.,1989]. Pour résoudre ce problème d'optimisation, nous proposons d'utiliser la stratégie de division-fusion grâce aux algorithmes de clustering et de croissance de régions.

1.3 Contributions

Ce travail constitue une innovation sensible en vision par ordinateur, en ce qui concerne la modélisation et la classification des formes volumique 3D issues d'images tridimensionnelles. Il propose une méthode d'approximation par morceaux, basée sur une fonctionnelle facile à minimiser et qui doit permettre de représenter des formes volumiques complexes avec un nombre réduit de primitives quadriques. La description finale respecte des contraintes topologiques de la forme initiale et permet d'accélérer la simulation des processus avec beaucoup plus de précision. D'autre part, nous proposons une version de l'algorithme des nuées dynamiques encore appelé K-means pour faire la classification non supervisée de certains objets 3D autres que les nuages de points classiques. Dans le cas d'espèce, nous calculons une partition d'un ensemble de boules 3D. Nous fournissons alors des sous-ensembles de boules connexes en fonction d'une mesure de similarité donnée qui est une distance dont nous donnerons la définition un peu plus loin. Par ailleurs, ce travail va susciter un intérêt dans les travaux de modélisation et de simulation des processus qui ont trait à des domaines d'application variés. On recense quelques-uns comme la médecine, la géophysique[Berryman et al.,2000], la pétro physique[Lake,1995], l'hydrologie [Spoler et al., 2004, Marsily,1986], la biotechnologie [Wanner et al ,1995] et les sciences du sol[Shomar et al.,2014, Darwish et al.,2014, Vogel et al.,2001, Wen et al.,1996, Whiffin et al.,2007, Eickhorst et al.,2008, Freije et al.,2015, Kuiper et al.,2015, Vogel et al.,2015]. Beaucoup d'ex-

périences sont menées dans ces domaines pour simuler des phénomènes liés aux systèmes complexes. Les enjeux de ces expériences peuvent être d'ordre écologique dans le contexte de la séquestration du carbone, agricole et industriel. En effet, la géométrie ou la structuration 3D de nombreux systèmes complexes reste encore en majorité inexplorée à de grandes échelles. Il serait possible par exemple grâce à la structure 3D d'un sol, d'étudier ses propriétés physico-chimique afin de mettre en place des processus permettant de suivre son évolution au fur et à mesure qu'il subit des mutations².

1.4 Plan de la thèse

La rédaction de la présente thèse suit le plan suivant : Nous avons un total de 5 chapitres, dont le chapitre 1 qui sert d'introduction générale.

Le chapitre 2 présente l'état des connaissances qui gravitent autour de la modélisation des formes en général et des formes 3D en particulier, à partir de données images. Nous donnons une définition brève des formes volumiques complexes et des milieux poreux en particulier. Nous y revenons de manière plus détaillée dans le chapitre 5. Nous exposons quelques notions qui tournent autour de l'imagerie pour obtenir les voxels d'un objet. Nous discutons de quelques théories et approches proposées dans la littérature pour représenter les formes en général. Nous terminons ce chapitre en introduisant notre proposition pour compléter les travaux existants.

Le chapitre 3 aborde de manière détaillée les notions sur les volumes quadriques et super quadriques qui sont de nouvelles formes de primitives géométriques évoluées qu'on propose pour modéliser les formes complexes. Nous faisons un petit historique de ces primitives et présentons quelques unes de leurs propriétés mathématiques pouvant susciter de l'intérêt pour la modélisation des formes 3D. Nous terminons ce chapitre en exposant quelques méthodes d'approximation de formes à partir de ces primitives.

2. Changements dus à l'ajout des éléments minéraux ou organiques tels que les engrais, les amendements, les pesticides, etc.

Le chapitre 4 introduit notre méthodologie de segmentation volumique de formes complexes à partir des données images ou voxels. Nous exposons un principe de segmentation qui repose sur une approximation par morceau d'une forme par un ensemble quadriques ellipsoïdes. Nous présentons succinctement les différentes étapes de notre méthode depuis l'image tomographique jusqu'à la représentation finale d'une forme volumique complexe. Nous présentons et expliquons le principe de nos algorithmes de segmentation volumique dont certains permettent de faire la division-fusion à l'aide de l'algorithme de nuées dynamiques ou celui de « l'octree » d'une part, et d'autre part la croissance de régions.

Le chapitre 5 présente une application des modèles développés pour représenter les milieux poreux issus de quelques échantillons de sol réels. Nous simulons grâce à la représentation obtenue le processus de drainage de l'eau dans le sol et faisons une comparaison entre les résultats que nous obtenons et ceux proposés par d'autres représentations existantes. Nous présentons une évaluation quantitative chiffrée et qualitative de notre modèle pour montrer sa robustesse et la compacité de sa représentation finale. Mais avant d'y arriver, nous faisons une revue assez détaillée des volumes complexes en général et des milieux poreux en particulier afin de comprendre les différentes notions qui gravitent autour. Nous faisons également une petite étude sur les processus de drainage afin d'en comprendre le fonctionnement. Nous terminons ce mémoire en présentant la conclusion générale, ainsi que les perspectives qui en découlent.

ÉTAT DES CONNAISSANCES

2.1 Introduction

Les descriptions des formes 3D à partir des données voxels issues d'images tomographiques ne sont pas directement utilisables à des fins de calculs, de modélisations ou de simulations. Cette remarque est récurrente dans les cas d'études de nombreux phénomènes qui se déroulent dans les formes complexes. Comme nous l'avons mentionné à l'introduction de ce document, les formes volumiques complexes sont le plus souvent des structures naturelles qui sont pour la plupart difficilement descriptibles géométriquement de manière précise. Dans les milieux poreux, ces formes sont généralement constituées de pores et on en dénombre un grand nombre, que ce soit à l'échelle microscopique ou macroscopique. On peut citer par exemple les structures microscopiques du sol, les vaisseaux sanguins, plusieurs organes vivants comme le cerveau et les os, etc. Nous aborderons plus en détail cette notion dans le chapitre 5 pour décrire précisément les différents scénarios y afférents. Les raisons liées à la difficulté de représenter les formes complexes proviennent du fait que les résultats fournis par les tomographes sont inexploitable. En effet, elles sont constituées d'un nombre très élevé de voxels non structurés et non homogènes; On n'a aucune information sur ces descripteurs topologiques. Ce problème est directement lié à la segmentation 3D des formes qui a pour but de représenter de manière intrinsèque les formes issues d'images [Monga,2007, Doube,2015, Banegas et al.,2001,

Druoton et al.,2013, Ngom et al.,2012, Delerue et al.,2002, Boissonnat et al.,1992]. En effet, on recherche une représentation qui soit utilisable pour différents enjeux. Le principe de base de la plupart des méthodes de modélisation de formes consiste à rechercher des approximations par des surfaces analytiques ou des primitives volumiques. Dans le cas des formes naturelles, on retrouve beaucoup de modèles théoriques dans la littérature qui s'intéressent à cette problématique. Toutefois, la plus part ne sont pas encore utilisables pour simuler ou prédire des phénomènes réels [Shomar et al.,2014, Darwish et al.,2014, Vogel et al.,2001, Wen et al.,1996, Whiffin et al.,2007, Eickhorst et al.,2008, Freije et al.,2015, Kuiper et al.,2015, Vogel et al.,2015]. Nous allons dans ce chapitre faire un état des connaissances sur la modélisation des formes en général et des formes complexes¹ en particulier, issues d'images tomographiques.

2.2 Mécanismes de modélisation des formes

Dans la méthodologie de modélisation et de représentation de formes en général, on distingue dans la littérature plusieurs approches parmi lesquelles les modèles de représentation à l'aide des descripteurs, qui consistent à rassembler les sous-ensembles d'un objet qu'on veut modéliser en déterminant des similarités entre eux[Mokhtari,2016]. Cela passe par l'extraction des caractéristiques bien précises. Nous avons également les modèles de représentation surfaciques[Lorensen et al.,1987, Hoppe et al.,1992] qui s'appuient sur des courbes simples telles que les segments de droite, les cercles, les courbes de Bézier, les B-splines pour représenter les objets. Les maillages de surface sont l'un des principaux modèles de description utilisés dans ce type de représentation. Nous avons d'un autre côté les modèles de représentation volumique qui décrivent les objets à l'aide de primitives volumique simples sur lesquelles on définit des paramètres d'échelle comme la taille, la position et l'orientation. On distingue parmi les modèles de représentation volumique les modèles d'approximation géométriques et

1. Nous allons aborder la problématique de la représentation des objets volumique complexe et en particulier ceux des milieux poreux

les assemblages de primitives. La modélisation à l'aide des primitives géométriques consiste à procéder à une approximation dite par morceaux de la forme à l'aide d'un ensemble de surfaces et de volumes bien définis. Ces approches ont pour but de fournir une représentation de la forme dont on n'a à priori aucune information sur sa structuration géométrie. Nous présentons dans le tableau 2.1 un résumé de quelques modèles de représentation géométriques des formes avec leurs avantages et leurs inconvénients. Pour modéliser des objets à l'aide des descripteurs ou encore pour déterminer la similarité des objets, il est primordial de trouver une représentation simplifiée permettant de les caractériser [Mokhtari,2016]. Cette représentation de formes, appelée descripteur de formes, permet d'extraire des éléments caractéristiques à partir de l'objet. On peut mesurer et utiliser ces caractéristiques pour calculer la similarité de l'objet. Elles peuvent être des primitives géométriques simples telles que le volume de l'objet, sa surface, les courbures aux différents points de la surface de l'objet, la distribution des distances entre les points de la surface, etc. En effet, distinguer la ressemblance de deux objets peut être facile pour un opérateur comme sur la Figure 2.1 ; Mais pas évident pour une machine. Pour que la machine puisse effectuer cette tâche de la façon la plus efficace possible, il est important de prendre en compte une description de formes qui considère toutes les représentations possibles de l'objet². Dans la littérature, nous pouvons distinguer trois grandes familles de descripteurs de formes 3D : les descripteurs géométriques[Thayananthan et al.,2003, Grundmann et al.,2008, Zhang et al.,2003, Ling et al.,2007] qui considèrent des propriétés qui prennent en compte la totalité de la forme, les descripteurs structuraux et topologiques[Fang et al.,2011, Chang et al.,2011, Tung,2005, Chen et al.,2002] qui permettent de décrire un objet par ses composantes, en montrant comment ces dernières sont reliées entre elles et les descripteurs par prise de vues[Lowe,2004, Ohbuchi et al.,2010] qui sont calculés à partir de plusieurs angles de vues de l'objet. La similarité entre objets 3D est calculée entre des silhouettes 2D générées à partir des modèles 3D. La figure 2.2 résume les différents types de descripteurs de formes.

2. changement de postures, transformations géométriques, topologiques, etc.

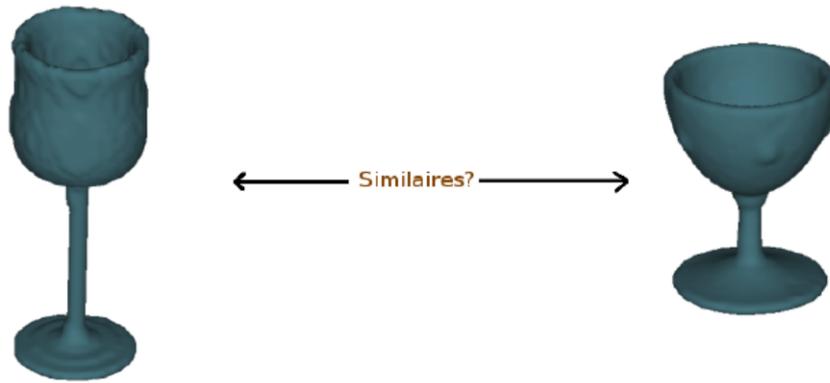


FIGURE 2.1: Similarité entre objets. [Mokhtari,2016]

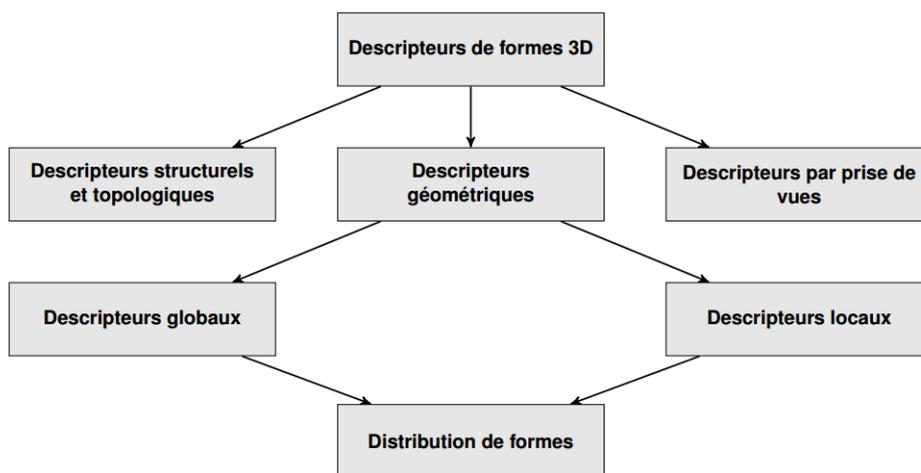


FIGURE 2.2: Types de descripteurs de formes 3D. [Mokhtari,2016]

Dans les sections qui vont suivre, nous allons beaucoup plus nous focaliser sur les représentations à l'aide des descripteurs et des modèles volumiques qui cadrent plus avec notre travail.

2.2.0.1 Limites de la tomographie

La tomographie assistée par ordinateur(3D) de par ses exploits nous permet déjà de résoudre beaucoup de problèmes qu'on arrivait pas à résoudre avec la tomographie conventionnelle(2D). Son but est de reproduire un objet en 3D à partir d'un ensemble de coupes 2D fournies par des capteurs ou scanners CT. On peut ainsi visualiser l'objet dans toutes les directions. Dans l'industrie des processus, c'est d'ailleurs largement utilisé dans les chaînes de montage pour générer et fabriquer des objets mécaniques ou manufacturés. La tomographie fournit donc en

Nom de la représentation	Description	Avantages	Inconvénients
Représentation par descripteurs	Mettre ensemble les objets en déterminant la ressemblance ou la similarité entre eux	Les caractéristiques des objets sont faciles à extraire et à mesurer et utilisables pour calculer leur similarité et application des algorithmes de classification	Difficile à appliquer sur des données de taille élevée.
Représentation surfacique	Décrit la surface d'un objet comme une structure de données composée de sommets, d'arêtes et de faces	Offre une facilité de rendu	Manque d'information sur les propriétés globales de l'objet tel que le volume, la tortuosité et la connectivité.
Approximation géométrique	Calcul de l'approximation d'un objet à travers un problème d'optimisation de formes	Solution exacte	Problèmes d'existence d'une description analytique et de l'existence de solutions.
Assemblage de primitives	Décrit un objet comme un assemblage de primitives volumiques	Produit une approximation qui suit la forme de l'objet et sur lequel des simulations peuvent être effectuées	Fonction de l'application visée.
Représentations à l'aide du squelette	Produisent des représentations fines des objets	Donnent des représentations simplifiées, minces et centrées	Pas possible de faire des calculs à l'échelle de l'objet : par exemple volumique dans un espace 3D.

TABLE 2.1: Avantages et inconvénients de quelques méthodes de représentation

sortie une forme assimilée à un ensemble brut de voxels 3D. En modélisation des formes, la description des objets 3D à partir des voxels uniquement est difficile à manipuler pour faire des calculs et surtout pour des supports de simulations. D'autre part, pour une étude menée sur un grand échantillon, le nombre de voxels peut être très élevé. On peut dénombrer pratiquement des centaines de millions. Par ailleurs on a aucune information sur la topologie et la structure de la forme représentée. Pour une application réelle comme la modélisation des formes volumiques complexes, on constate que cette solution présente beaucoup de limites. Mais on verra dans les sections qui suivent qu'elle constitue tout de même un point de départ important pour la plus part des méthodes de modélisation développées.

2.2.1 Descripteur des formes

Les progrès technologiques dans les domaines de l'acquisition d'images rendent possible l'obtention d'images volumiques des formes, notamment grâce à la tomographie moderne à rayons X. Beaucoup de modèles qui sont développés que ce soit dans le domaine industriel ou médical ont à la base une image 3D constituée essentiellement de voxels. L'image volumique est obtenue par seuillage d'une image tomographique 3D. Certains auteurs proposent des descripteurs de formes pour décrire la structure d'une forme à partir d'images volumiques. [Banegas et al.,2001] ont mis en place un descripteur de forme structurel de haut niveau appelé "squelettes d'ellipsoïdes " pour décrire les structures d'un os représenté sous forme de nuage de points. Le nuage de points représente les points intérieurs de l'objet³. Il peut provenir des techniques de tomographie assistée par ordinateur ou de l'imagerie à résonance magnétique pour le cas des objets médicaux. Le nuage de points est ensuite partitionné en primitives ellipsoïdes⁴. Pour cela, ils utilisent l'algorithme k-means pour trouver la meilleure partition en k -parties⁵ de l'ensemble de points. Pour k donné, on cherche la meilleure partition en k classes :

3. pixels, ou voxels

4. Nous en parlerons en détail dans le chapitre 3

5. régions ou groupe de sous objets

c'est celle qui maximise l'homogénéité des k classes. Le nombre optimal k de classes est le plus petit nombre k pour lequel la variance inter classes est localement maximale. Ce descripteur peut ensuite être utilisé pour la visualisation interactive, la reconnaissance et la reconstruction des formes.

Un exemple de ce type de descripteurs présenté par [Mokhtari,2016] est celui de D2 présenté par Osada en 2001. On échantillonne n points sur la surface de l'objet, et on associe à chaque point une valeur numérique en utilisant une mesure donnée. La mesure peut être la distance par rapport au centre de gravité de l'objet ou l'angle formé entre trois points. La distance entre deux objets est la distance entre leurs histogrammes associés : voir figure 2.4. D'autres descripteurs considèrent le graphe extrait à partir du maillage triangulaire de la forme comme une chaîne de Markov. Pour cela, une certaine probabilité est associée à chaque arête, par exemple pour un arc $u \rightarrow v$, la probabilité peut dépendre de la longueur euclidienne, ou d'une certaine puissance p de la longueur euclidienne $\|uv\|$. Ceci signifie que après la normalisation, la probabilité de l'arc de transition $u \rightarrow v$ est le rapport

$$\frac{\|uv\|^p}{\sum_w \|uw\|^p} \quad (2.1)$$

Le descripteur de distribution local LSD⁶ extrait n points à partir de la surface de l'objet, et caractérise chaque point p par la distribution des distances entre le point p et l'ensemble des points dans son voisinage. Le voisinage du point p est représenté par une sphère de centre p (voir la figure 2.3).

Les descripteurs de sacs de mots visuels présentés également dans [Mokhtari,2016] sont aussi des descripteurs de distribution utilisés pour décrire localement les objets. Il s'agit de produire un dictionnaire de mots visuels à partir des caractéristiques extraites d'une large collection d'objets. Ces caractéristiques sont réparties en différentes classes, dont chacune est représentée par un mot visuel (triangle, carré, etc). Les différents mots visuels calculés pour un objet donné

6. Local Shape Distribution

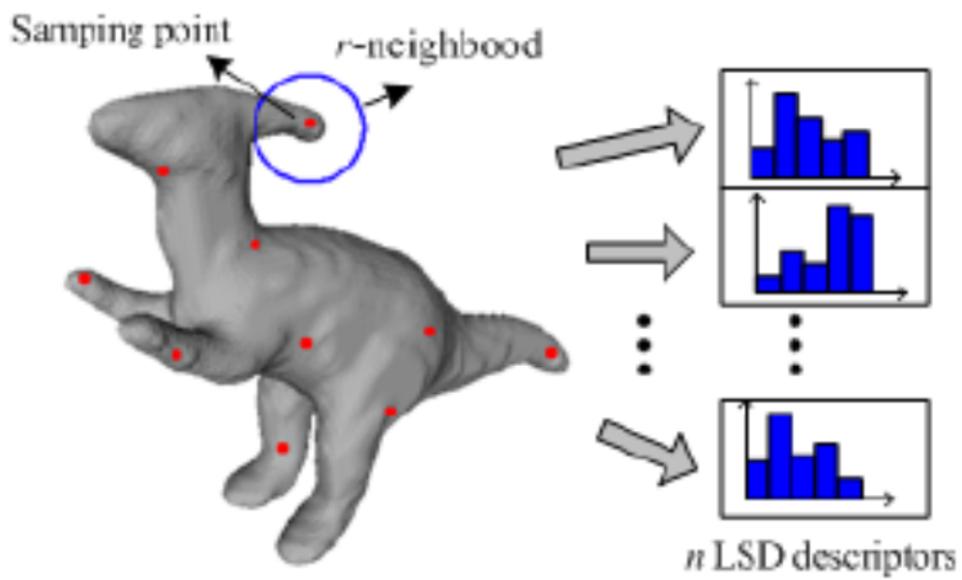


FIGURE 2.3: Descripteur du diamètre local. Li dans [Mokhtari,2016].

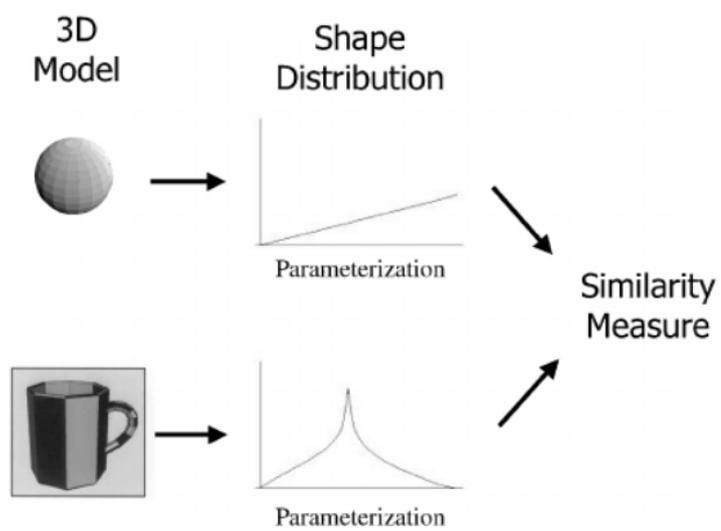


FIGURE 2.4: Descripteur de forme D2. Osada dans [Mokhtari,2016].

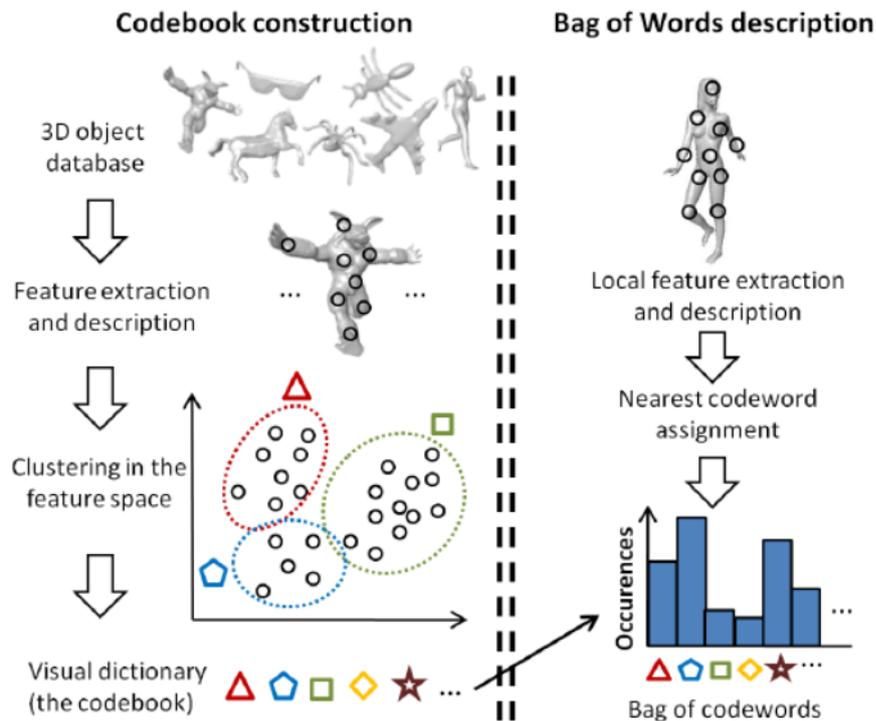


FIGURE 2.5: Descripteur sac de mots visuels. Lavoué dans [Mokhtari,2016].

sont transformés en histogramme (voir figure 2.5), selon le dictionnaire de mots construit au préalable.

Les descripteurs de formes restent un moyen efficace pour indexer et classifier des objets par extraction des caractéristiques mesurables. La méthode fonctionne bien pour les formes de nature purement convexe et sur de petits échantillons de données. Mais pas pour certaines formes naturelles de nature complexe comme les milieux poreux⁷ qui contiennent une grande proportion de courbures concaves et qui varient en fonction de la fraction volumique. La limite vient également du fait que la méthode est directement appliquée sur les voxels initiaux décrivant la forme de départ, ce qui ne garantit toujours pas la conservation des propriétés géométrique de la forme.

7. L'intérieur d'un os ou les pores du sol par exemple

2.2.2 Représentation par des modèles volumiques

Les modèles de représentation volumique sont des modèles permettant de représenter des objets plus ou moins complexes avec des primitives bien définies. Les primitives sont considérées ici comme des volumes convexes ou des surfaces géométriques plus ou moins basiques pour certains que pour d'autres. On distingue entre autres les sphères, les cylindres, les plans, les cônes, les pyramides, les volumes quadriques, etc. L'idée ici est de pouvoir décrire les objets complexes sous forme de combinaison d'objets plus simples. Les approches utilisées sont liées à la segmentation volumique basée essentiellement sur les approximations. Les représentations des formes peuvent être définies hiérarchiquement; C'est-à-dire qu'on peut passer d'une représentation à une autre par approximation. La difficulté réside donc sur la recherche et la minimisation d'une fonction qui permet de passer d'une représentation R_1 qui sera dite moins compacte à une autre représentation R_2 dite plus compacte. L'idée est de retrouver la représentation la plus compacte et la plus stable possible qui approche la forme initiale. On a toujours une représentation de base R_0 d'où on part pour obtenir les autres représentations. Tout comme celle des descripteurs, R_0 est une image volumique obtenue par seuillage d'une image tomographique 3D. Elle est essentiellement constituée de données brutes de voxels qu'on peut considérer ici comme des primitives primaires. Comme nous l'avons dit dans les précédentes sections, les données images ne donnent pas une représentation utilisable de la forme et par conséquent ne peuvent être utilisées pour faire des simulations. D'où la nécessité de passer à une autre modélisation plus appropriée avec des primitives plus évoluées que les voxels. Nous allons dans les sections qui suivent présenter les différents types de primitives qui ont été proposées pour modéliser les formes de manière générale.

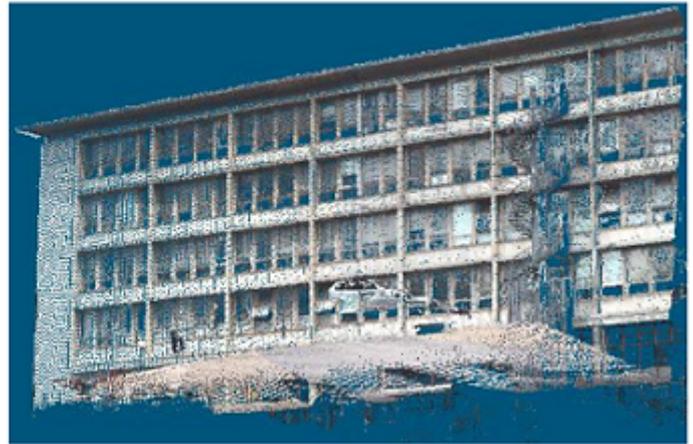


FIGURE 2.6: Image et nuage de points de la façade d'un bâtiment. [Boulaassal,2010].

2.2.2.1 Approximation par des morceaux de segments plan

Dans la littérature, on retrouve quelques propositions de modèles à base de primitives pour approximer les formes issues d'images. [Boulaassal,2010] propose un modèle de primitive géométrique appelé «Segment plan» pour produire des modèles 3D urbains de façades de bâtiments⁸. On entend par « segment plan » ou tout simplement « plan », un ensemble de points situés dans une zone tampon définie autour du plan ou un ensemble de points coplanaires à une tolérance près. La production de modèles 3D urbains est un problème de modélisation de formes qui tient une place prépondérante et grandissante dans le domaine de la photogrammétrie⁹ et de la vision par ordinateur. Les développements récents apportés aux scanners Laser terrestres, tant en termes de rapidité d'acquisition qu'en termes de précision de mesure, laissent envisager de nouvelles problématiques de recherche relatives notamment à la modélisation des façades de bâtiments. Les façades des bâtiments sont fournies sous forme de données issues du scanner, décrites par un ensemble ou nuage de points définis dans un système de coordonnées cartésiennes en 3D (voir la figure 2.6).

La chaîne de traitements répondant à cet objectif est composée d'une étape de segmentation suivie d'une étape de modélisation. La segmentation du nuage de points peut être définie d'une

8. Peut être vu comme un composé de formes mécaniques

9. La photogrammétrie est un ensemble de techniques qui, à partir d'une image photographique, permettent de modifier sa projection, ses dimensions et sa position

manière analogue à la segmentation d'images. Dès lors, on entend par segmentation d'un nuage de point le partage de l'ensemble des points de la scène numérisée en sous ensembles de points homogènes et de taille maximale. Chaque sous ensemble de points est alors approximé par un « segment plan ».

2.2.2.2 Approximation par des cyclides de dupin

On retrouve également des modèles qui notamment utilisent des morceaux dits cyclides de dupin pour faire de la modélisation surfacique et la reconstruction 3D des formes [Druoton et al.,2013]. Les cyclides de dupin sont des modèles mathématiques inventés en 1822 par Dupin et introduits en conception assisté par ordinateur en 1982 par Martin. Ils sont constitués de primitives géométriques simples comme les sphères, les cercles et les coniques. Leurs propriétés mathématiques ont fait l'objet de nombreuses études. Ils sont aujourd'hui largement utilisés pour faire de la modélisation surfacique et en particulier des jointures entre primitives géométriques dans le but de reconstruire des objets en 3D. Les primitives utilisées ici sont des surfaces canal. Toutes les surfaces sont des enveloppes d'une famille à deux paramètres de sphères. Les surfaces canal (Voir figure 2.7) quant à elles sont des enveloppes d'une famille à un paramètre de sphères. Les centres de ces sphères sont situés sur une courbe centrale y_0 . Les surfaces canal sont engendrées par des cercles centrés sur la courbe et contenus dans un plan normal à la courbe y_0 . Ces cercles sont les courbes intersection entre les sphères et la surface enveloppe et sont appelés cercles caractéristiques de la surface. Certaines surfaces de révolution comme le cylindre, le cône, le tore, et d'autres types de surfaces comme par exemple les tubes sont des surfaces canal. Tout comme avec les autres méthodes, pour reconstruire un objet, on part de sa représentation initiale en nuage de points fournies par des scanners dédiés. Les cyclides de dupin sont plus utilisés pour reconstruire des objets dont les surfaces sont des surfaces de révolutions. Les objets sont demi-sphériques et ont des profils caractérisés par des machines de mesure tridimension-

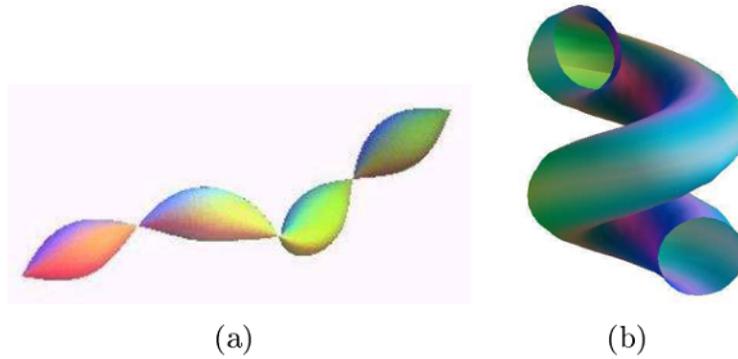


FIGURE 2.7: Exemple de surfaces canal. (a) surface canal quelconque, (b) surface serpentini [Druoton et al.,2013]

nelle.

Equation dans l'espace affine

Un cyclide quartique dépend de trois paramètres réels a, c et μ avec $a, c \neq 0$ et $|a| > |c|$. On considère le repère d'origine le centre des anti-coniques¹⁰ et les trois axes sont les axes des anti-coniques. Pour obtenir les equations d'un cyclide quartique, il suffit de calculer l'enveloppe des sphères la définissant. On considère l'ellipse dans le précédent repère situé dans le plan $P_z : z = 0$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.2)$$

Les sphères $S(\theta)$ de centre :

$$\Omega_1(\theta) = (a \cos(\theta); b \sin(\theta); 0) \quad (2.3)$$

Le point fixe $M(\alpha, 0, \beta)$ appartenant à l'hyperbole par lequel passe toutes les sphères $S_1(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Le point M peut être réel ou imaginaire selon le type de cyclide. l'équation de $S_1(\theta)$ s'écrit

10. Ce sont les coniques ellipse et hyperbole d'un cyclide de dupin de degré 4. Elles sont situées dans deux plans orthogonaux et les foyers de l'un sont les sommets de l'autre.

alors :

$$(x - a\cos(\theta))^2 + (y - b\sin(\theta))^2 + z^2 = (\alpha - a\cos(\theta))^2 + (b\sin(\theta))^2 + (\beta)^2 \quad (2.4)$$

C'est à dire :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(x - \alpha)a\cos(\theta) - 2by\sin(\theta) - \alpha^2 - \beta^2 = 0 \quad (2.5)$$

L'enveloppe des sphères est la réunion des cercles caractéristiques de l'enveloppe (voir figure 2.8) obtenus par intersection des sphères $S_1(\theta)$ avec les plans $P_1(\theta)$ dont les équations dérivées des sphères $S_1(\theta)$ en θ sont définies par :

$$P_1(\theta) : a(x - \alpha)\sin(\theta) - by\cos(\theta) = 0 \quad (2.6)$$

La famille de plan $P_1(\theta)$ forme un faisceau dans lequel nous retrouvons le plan P_y . La droite commune à tous ces plans est la droite d'équation :

$$x = \frac{c\mu}{a}, y = 0 \quad (2.7)$$

A partir des équations 2.5 et 2.6 et quelques calculs, le cyclide de Dupin doit vérifier l'équation :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 = 4a^2(x - \alpha)^2 + 4b^2y^2 \quad (2.8)$$

Pour déterminer α et β , on considère :

l'hyperbole située dans le plan $P_y : y = 0$ d'équation :

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.9)$$

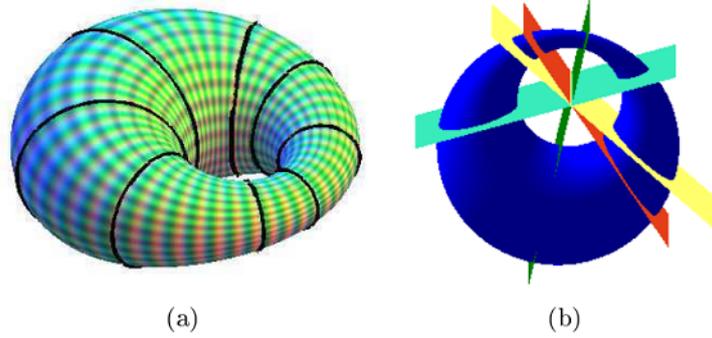


FIGURE 2.8: (a)Cercles caractéristiques d'un cyclide de Dupin de degré 4, (b) Faisceau de plans contenant ces cercles caractéristiques. [Druoton et al.,2013]

Une condition est à ajouter pour que les coniques soient deux anti-coniques :

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (2.10)$$

Les sphères $S_2(\psi)$ de centres

$$\Omega_2(\psi) = \left(\frac{c}{\cos(\psi)}; 0; -b \tan(\psi) \right) \quad (2.11)$$

avec $\psi \in [0, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$ Le point fixe $M'(\gamma; \delta; 0)$ appartenant à l'ellipse par lequel passent toutes les sphères $S_2(\psi)$.

En déterminant les autres cercles caractéristiques, les sections des sphères $S_2(\psi)$ par des plans $P_2(\psi)$ d'équations $S_2'(\psi) = 0$ définis par :

$$P_2(\psi) : c(\gamma - x) \sin(\psi) + bz = 0 \quad (2.12)$$

on a une seconde équation :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 - \delta^2)^2 = 4c^2(x - y)^2 + 4b^2z^2 \quad (2.13)$$

2.2.3 Représentation par un ensemble minimal de boules maximales

Dans le souci de résoudre le problème lié à la représentation d'une forme par un nombre très élevé de primitives primaires, beaucoup d'autres modèles ont été proposés pour représenter plus précisément les formes complexes retrouvées dans la nature. Le problème ne se pose pas pour des formes simples comme les objets manufacturés [Boulaassal,2010, Chevalier et al.,2005, Druoton et al.,2013]. Parmi ces propositions on va retrouver le modèle de représentation avec les boules encore appelées sphères de Delaunay (voir figure 2.9) qui s'inscrit également dans les modèles de représentation volumiques. Ce choix est justifié par la simplicité que présentent les boules. Depuis bien longtemps, la représentation avec les boules a été utilisées dans divers domaines, que ce soient en vision par ordinateur pour des applications précises [Fatt,1956, Halperin et al.,1994, Rajan,1996] ou dans les industries chimiques pour représenter la géométrie d'une molécule qui peut être semblable à une réunion de sphères où chaque sphère correspond à un atome de la molécule [Knowlton et al.,1979, Sanner,1992] comme le montre la figure 2.9b. Certains auteurs [Badler et al.,1978, Rouke et al.,1979] proposent de décomposer un objet complexe en un ensemble de sphères pour par exemple mieux étudier et comprendre la constitution de l'objet[Hubbard,1996, Agarwal et al.,2004] comme on peut le voir sur la figure 2.9a. Ceci se justifie parce que les opérations élémentaires sur les sphères comme l'union, l'intersection entre sphères sont plus faciles et plus rapides à calculer que des opérations sur des objets plus complexes. La représentation par les boules est encore d'autant plus aisée parce qu'il est possible de manipuler les boules dans l'espace physique tridimensionnel, ce qui a encouragé le développement de modèles pour la représentation et la visualisation d'objets naturels à partir de ces primitives. En effet, un modèle de représentation d'objets tridimensionnels par une réunion de boules avec une application pour comparer les volumes des objets a été proposé dans [Rajan,1996]. Ensuite il a été montré dans [Amenta et al.,1999] qu'un ensemble de boules

provenant d'un échantillonnage de la frontière d'une forme est homéomorphe¹¹ à la forme. Suivant la même logique, les graphes de boules ont été proposés pour modéliser les structures microscopiques complexes du sol [Delerue et al.,1999, Delerue et al.,2002, Perrier,1995]. L'échelle de représentation est le rayon de la plus petite boule de l'ensemble et la qualité de la représentation est proportionnelle au nombre de boules. Cependant, une boule peut être incluse dans un groupe de plusieurs autres boules. D'où la nécessité de rechercher une représentation avec le plus petit nombre de boules possibles. On a une illustration sur la figure 2.9c. Une manière d'approcher un objet binaire par un nombre minimal de boules dans un espace bidimensionnel a été proposée dans [Nilsson et al.,1997] dans un espace bidimensionnel. Une autre méthode de représentation d'une forme volumique par un nombre minimal de boules maximales est présentée dans [Monga et al.,2007, Monga,2007]. Aujourd'hui beaucoup de modèles comme le nôtre se basent sur ce dernier pour construire d'autres représentations plus compactes à l'aide des primitives plus évoluées. Nous allons dans les sections qui suivent décrire les étapes pour approximer une forme complexe par un nombre minimal de boules maximales.

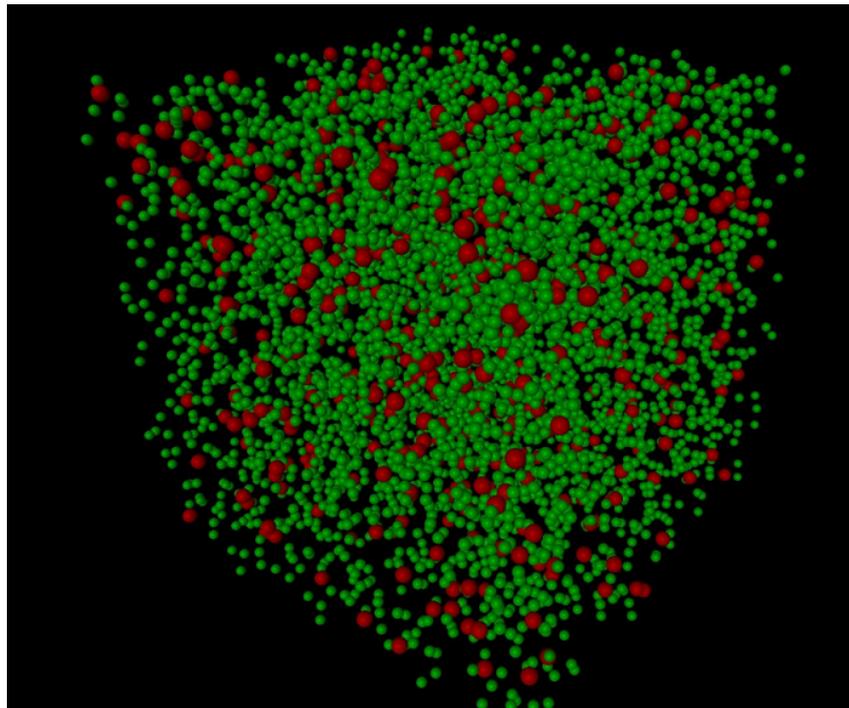
2.2.3.1 Définition de la représentation de la forme volumique de base

Définition 2.2.1. On appelle sphère S de centre Ω et de rayon $R > 0$ l'ensemble des points M de l'espace situés à une même distance R de Ω . Si l'espace est muni d'un repère orthonormé (O_x, O_y, O_z) et M de coordonnées (x,y,z) , l'équation de la sphère S de centre Ω de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et de rayon R est :

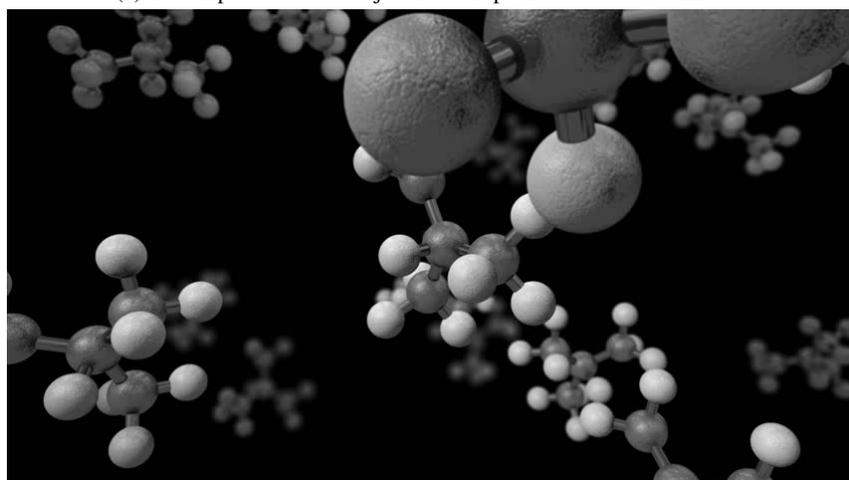
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad (2.14)$$

Le volume de la sphère est alors donné par la formule : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, tandis que son aire latérale totale vérifie : $A = 4\pi R^2$.

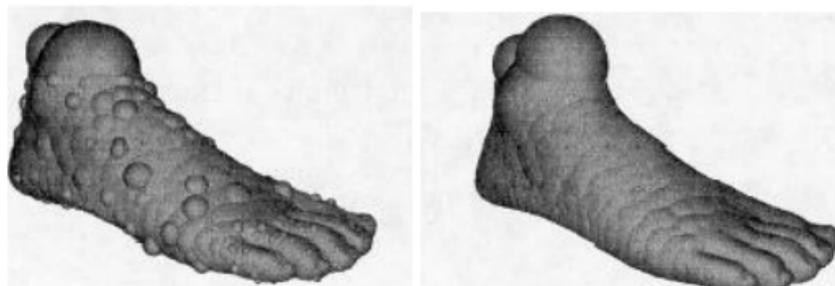
11. En topologie homéomorphisme est une application bijective continue entre deux espaces topologiques dont la réciproque est continue. Dans ce cas, les deux espaces topologiques sont dits homéomorphes. La notion d'homéomorphisme est la bonne notion pour dire que deux espaces topologiques sont « le même » vu différemment



(a) Décomposition d'un objet en boules pour détecter les collisions



(b) Représentation d'une molécule d'atomes par des boules



(c) Représentation avec respectivement 2931 boules et 10093 boules [Ngom,2010]

FIGURE 2.9: Représentation des objets par des boules

Définition 2.2.2. Dans un espace métrique (E, d) quelconque, on peut généraliser la notion de sphère : si $\Omega \in E$, et $R > 0$, on appelle sphère ou boule de centre Ω et de rayon R l'ensemble des points M de E dont la distance à Ω est exactement R :

$$S(\Omega, R) = \{M \in E; d(\Omega, M) = R\} \quad (2.15)$$

Dans un espace métrique, une boule peut ne pas être ronde, et même être un carré. On définit aussi une notion de boule ouverte et de boule fermée :

La boule ouverte de centre Ω et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M de E dont la distance à Ω est inférieure stricte à R :

$$B(\Omega, R) = \{M \in E; d(\Omega, M) < R\} \quad (2.16)$$

La boule fermée de centre Ω et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M de E dont la distance à Ω est inférieure ou égale à R : c'est donc la réunion de la boule ouverte et de sa frontière

Lorsqu'on munit l'espace E de la topologie induite par la distance d , une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé, et la sphère est un fermé.

Définition 2.2.3. Soit F une forme volumique convexe dans l'espace 3D euclidien. F est obtenue après une opération de seuillage sur une image tomographique. Elle est donc constituée d'un ensemble de voxels inclu dans la forme qu'on veut représenter et on la décrit à partir d'une fonction caractéristique qui est mise à 1 lorsqu'on est dans la forme F et à 0 sinon. En considérant la fonction indicatrice de F , on définit une nouvelle caractérisation géométrique de F appelée le squelette. Le squelette de la forme F que nous appellerons $S(F)$ est défini comme l'ensemble des segments joignant les centres de toutes ces boules maximales [Attali et al.,2009, Boissonnat et al.,2006]. Une boule maximale de F est une boule incluse dans F mais non in-

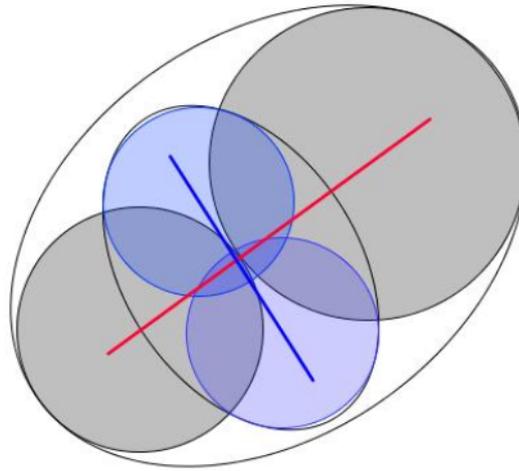


FIGURE 2.10: L'application de recouvrement minimal de la forme ellipse n'est pas croissante : l'ellipse avec les boules bleues est incluse dans l'ellipse avec les boules grises mais le recouvrement de la grande ellipse ne contient pas celui de la petite ellipse. [Ngom,2010]

cluse dans toute autre boule incluse dans F . Le squelette d'une forme est une représentation en dimension inférieure de la forme qui est plus facile à analyser et qui conserve les propriétés topologiques de la forme [Attali et al.,2009, Boissonnat et al.,2006, Chazal et al.,2005]. Si la forme est de dimension n , alors son squelette est de dimension $(n - 1)$. Cette représentation ne peut être directement utilisée pour une approximation de la forme. On propose donc une description de forme primaires qui utilise un ensemble des boules incluses dans la forme et qui recouvre son squelette. La figure 2.11 en montre une illustration.

Définition 2.2.4. Soit $R(F)$ l'ensemble des sous ensembles finis de boules incluses dans F et qui recouvre son squelette. Lorsque $R(F) \neq \emptyset$ n'est pas vide, alors il existe un unique sous ensemble minimal de $R(F)$ de boules qui recouvre son $S(F)$.

Remarque. Une boule maximale n'est incluse dans aucune autre boule incluse dans une forme mais peut être incluse dans l'union de plusieurs autres boules incluses dans la forme. C'est pourquoi nous enlèverons les boules qui n'influent pas sur la topologie de la forme afin d'avoir un ensemble minimum de boules maximales, qui caractérise cette topologie. voir figure 2.10

Définition 2.2.5. Soit F une forme volumique définie par sa fonction indicatrice. Dans le cas

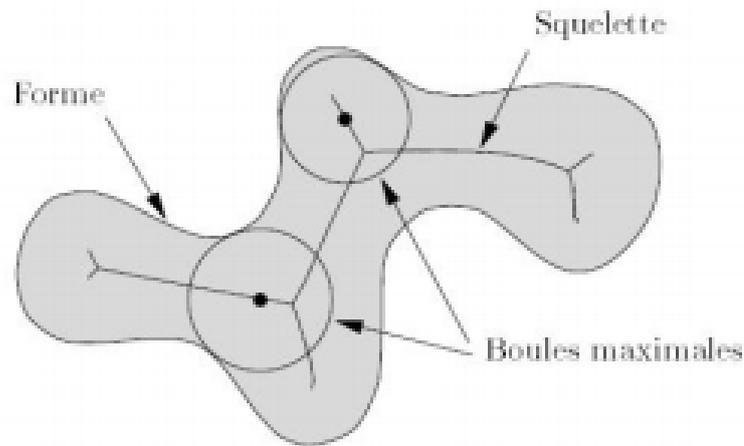


FIGURE 2.11: Squelette géométrique et boules maximales [Ngom,2010]

où $R(F) \neq \emptyset$, nous définissons $R_{min}(F)$ tel que $R_{min}(F) = \{k \in R(F) / (\forall H \in R(F), Card(K) \leq Card(H))\}$. Si $R_{min}(F) \neq \emptyset$ alors elle contient au moins un élément qui est inclus uniquement dans les boules maximales. En effet, toutes les boules d'un élément de $R_{min}(F)$ peuvent être remplacées par leur boules maximales correspondantes. Nous obtenons ainsi un élément de $R_{min}(F)$ qui ne comprend que des boules maximales. En raison de la propriété bien connue qu'un squelette de forme est homotope¹² à la forme [Boissonnat et al.,1998], $R_{min}(F)$ est une méthode compacte pour définir les cavités de la forme dans le cas des sciences du sol.

Remarque. Le nombre de boules maximales extraites de la représentation en voxels est fini.

2.2.3.2 Calcul de l'ensemble minimal $R_{min}(F)$

λ -squelette

La représentation d'une forme uniquement par le squelette n'est pas directement utilisable. Elle est limitée pour plusieurs raisons :

1. Le squelette est très sensible aux bruits. Une petite perturbation du contour d'une forme conduit à l'apparition de nouvelles branches au niveau de son squelette, ce qui par consé-

12. caractérisé par l'homotopie (possibilité de passage d'un espace topologique à un autre par une déformation continue). Se dit de deux chemins ayant même origine et même extrémité tels que l'on puisse passer de l'un à l'autre par une déformation continue. C'est une notion de topologie algébrique. Elle formalise la notion de déformation continue d'un objet à un autre

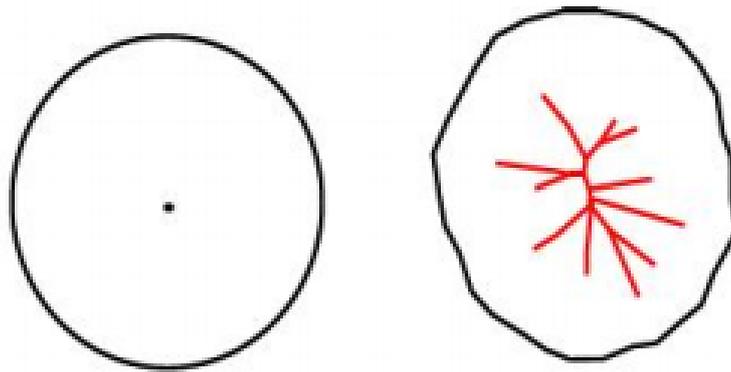


FIGURE 2.12: Sensibilité du squelette au bruit [Ngom,2010]

quent change la topologie de la forme. Ceci est illustré par la Figure 2.12

2. La conservation de l'homotopie n'est pas assurée dans le cas général. En effet, le squelette d'une forme constituée d'un nombre fini de boules tangentes entre elles est réduit à un ensemble fini de points distincts tel que illustré par la figure 2.12. La connexité n'est donc pas conservée.

Pour résoudre ce problème, on introduit la notion de λ -squelette [Attali et al.,2009] qui est plus fréquemment utilisé pour la représentation de forme.

Définition 2.2.6. Le λ -squelette est défini comme le squelette issu des centres de boules maximales dont le rayon est au moins λ . Le squelette et le λ -squelette partagent presque les mêmes propriétés. On montre que le λ -squelette est plus stable par rapport au squelette [Chazal et al.,2005]. En considérant le λ -squelette, nous aboutissons à la notion de $R_{min,\lambda}(F)$ qui correspond au recouvrement minimal du λ -squelette de F formé des boules maximales avec un rayon au moins λ . $R_{min,\lambda}(F)$ est une manière de définir la forme de volume à différentes échelles.

2.2.3.3 Extraction des boules maximales et du λ - squelette en utilisant la triangulation 3D de Delaunay

Pavage de Voronoï et triangulation de Delaunay

La géométrie algorithmique est un domaine récent de l'informatique qui se focalise sur l'étude automatique de données géométriques. l'idée de base ici porte sur la caractérisation géométrique d'une forme géométrique que dessinent les données. On fait donc une triangulation des points de l'espace, qui vise à regrouper les sommets en simplexes¹³ et à approcher ainsi la variété en dessinant une surface à facettes. Cette triangulation est obtenue à partir d'un pavage de Voronoï effectué au préalable.

Définition 2.2.7. Soient Ψ un sous ensemble fini de points de \mathbb{R}^n et P inclus dans Ψ un ensemble fini de points échantillonnant Ψ . Le pavage de Voronoï est une décomposition de Ψ en zones de proximité des points de P . La zone de proximité d'un objet est l'ensemble des points les plus proches de cet objet que de tout autre objet [Anton,2005]. Le lieu des points plus proches d'un point p appartenant à P est défini comme étant la cellule de Voronoï. L'ensemble des cellules des points de P est appelé diagramme de Voronoï.

Définition 2.2.8. Le pavage de Voronoï est un pavage de l'espace en cellules convexes, où chaque cellule est constituée de points de \mathbb{R}^n plus proche d'un point de P que des autres points de P . Ce pavage est illustré par la figure 2.13.

Remarque. On peut observer dans la nature des pavages de Voronoï un peu de partout (le cou d'une girafe, la carapace d'une tortue, un alvéole d'abeilles, les bulles de savon, les molécules chimiques et les cristaux, etc.) . Voir figure ??

Obtention des boules maximales et du λ – squelette en utilisant la triangulation de Delaunay

13. Un simplexe dans \mathbb{R}^n est l'enveloppe convexe de $n + 1$ points. C'est un triangle dans \mathbb{R}^2 et un tétraèdre dans \mathbb{R}^3

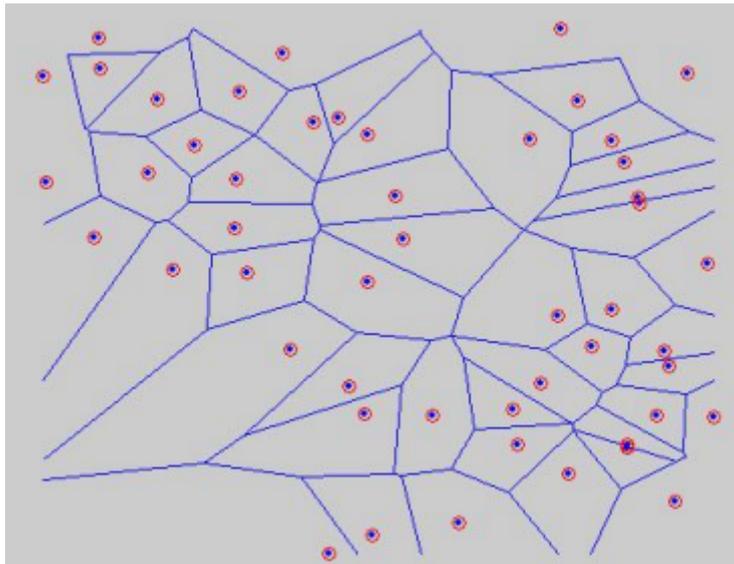


FIGURE 2.13: Pavage de Voronoï d'un ensemble de points

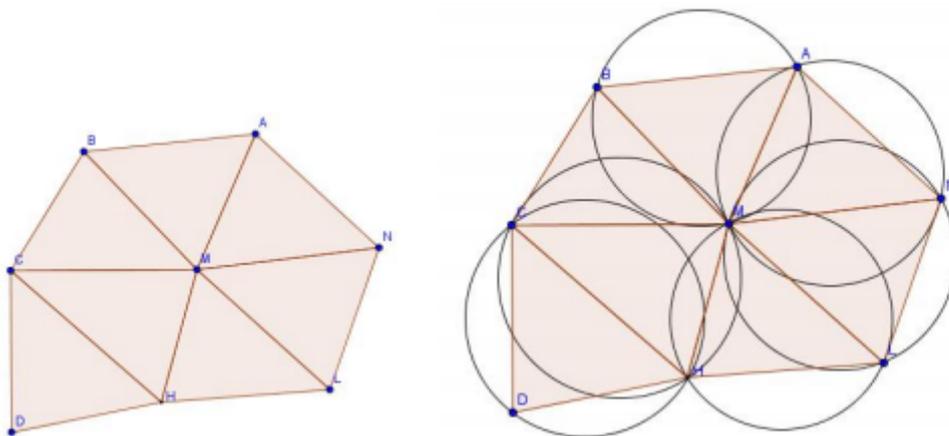


(a) carapace de tortue



(b) Girafe recticulée

FIGURE 2.14: Exemples de diagrammes de Voronoï naturels [Ngom,2010]



La première figure montre la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points et la deuxième, les boules de Delaunay et la triangulation de Delaunay. Une boule passe par les trois sommets d'un triangle et ne contient aucun point de l'échantillonnage.

FIGURE 2.15: Boule de Delaunay

On part de l'hypothèse définie dans [Ngom,2010] Soient I_0 une image définie sur un sous ensemble F de \mathbb{R}^3 . Soit \mathcal{A} l'ensemble des approximations de F par des boules. Le problème de segmentation¹⁴ que l'on cherche à résoudre ici est de trouver un ensemble B appartenant à \mathcal{A} vérifiant les conditions suivantes :

1. Le squelette de F est inclus dans B ,
2. $B \subseteq F$
3. B est composé d'un nombre fini de boules,
4. $\forall A \in \mathcal{A}$, le nombre de boules de A est supérieur au nombre de boules de B ,
5. $\forall A \in \mathcal{A}$, la différence symétrique de F et de la réunion des boules de A est supérieur à la différence symétrique de F et de la réunion des boules de B ,
6. F et $\cup_{B_i \in B}$ ont même type d'homotopie.

Les algorithmes de calcul des boules maximales et de l'ensemble minimal des boules maximales $R_{min,\lambda}(F)$ sont présentés dans [Ngom et al.,2012].

2.2.4 Représentation par des cylindres généralisés

En restant toujours dans le cadre de propositions de modèles pour représenter les formes à partir d'images, on retrouve des modèles constitués des primitives plus ou moins évoluées que les boules. En effet, la représentation avec les boules pose toujours le problème de compacité avec le nombre de primitives élevé. L'idée est de diminuer le nombre de primitives dans la représentation finale de la forme. [Ngom et al.,2012] proposent les cylindres généralisés, les tores, les cônes. Ces nouveaux modèles sont motivés grâce à l'existence de la représentation avec les boules $R_{min,\lambda}(F)$ qui constitue déjà une étape importante dans le processus de modélisation. [Ngom et al.,2012] tentent ainsi de fournir une approximation de l'espace des pores du sol à l'aide de ces primitives. Nous avons vu dans la section précédente comment obtenir

¹⁴. On verra cette notion en détail plus bas

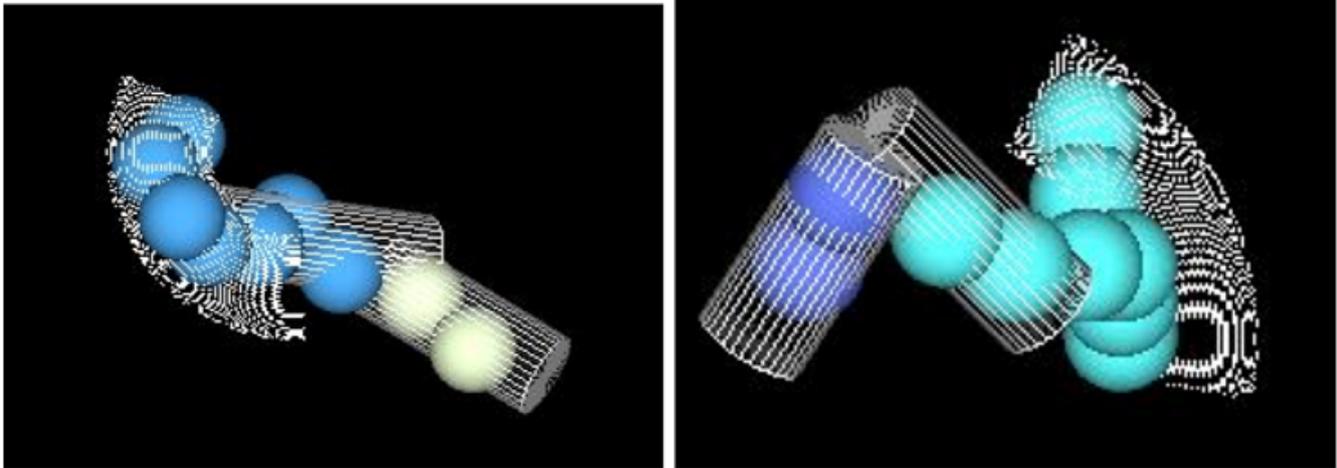


FIGURE 2.16: Ajustement d'une chaîne de boules par des cylindres et des tores. [Ngom,2010]

un nombre minimal de boules maximales recouvrant le squelette de la forme initiale. A partir de l'ensemble minimal $R_{min,\lambda}(F)$, on calcul un ensemble de composantes connexes appelés chaînes de boules simplement connexes, qui vérifient certains critères. Le résultat final est alors obtenu en approximant chaque chaîne simplement connexe par un cylindre, un cône ou un tore.

Les algorithmes et les étapes de ce calcul sont présentés dans [Ngom et al.,2012].

La figure 2.16 illustre un exemple de résultat de segmentation d'une forme avec les cylindres généralisés.

2.2.5 Représentation des formes avec les volumes quadriques autres que les boules

Les primitives utilisées jusqu'à présent pour modéliser les formes posent d'autres problèmes que ce soit en terme de complexité due au nombre de primitives très élevé ou sur les différences observées entre la forme de départ et les résultats de la modélisation. En effet, dans la description avec les boules, les représentations fournies ne sont pas assez compactes et le nombre de primitive reste toujours élevé. Ceci pénalise la complexité de la simulation des processus si la forme modélisée est par exemple un système complexe. Les descriptions avec les tores et

des cylindres généralisés proposées dans les précédentes sections pour décrire les formes complexes sont purement d'ordre théoriques. En effet, on obtient une représentation peu compacte et non utilisable pour simuler des processus réels. Pour diminuer quelques limites, d'autres primitives plus performantes appelées les volumes quadriques et super quadriques ont été introduites pour décrire les objets dans une chaîne de production en conception assistée par ordinateur [Alsallakh,2014, Banegas et al.,2001, Chevalier et al.,2005] et pour modéliser les objets graphiques dans un ordinateur [Barr,1981, Barr,1984]. C'est récemment que [Doube,2015] a proposé une méthode un peu plus avancée pour décrire la structure poreuse complexe d'un os trabéculaires¹⁵ avec des ellipsoïdes¹⁶. C'est dans cette tentative de modélisation des formes volumiques complexes avec les quadriques que nous inscrivons notre travail. Nous allons dans la section qui suit présenter quelques représentations de formes avec les quadriques et les super quadriques. Nous y reviendrons de façon plus détaillée sur ces primitives dans le chapitre 3.

2.2.5.1 Quelques modèles de formes avec les volumes quadriques et superquadriques

Les modèles quadriques furent introduits pour la première fois en informatique graphique par Alan Barr [Barr,1981]. pour représenter les objets. Ces volumes présentent une grande diversité de propriétés géométriques. Quelques années après il proposera des méthodes permettant de déformer les quadriques [Barr,1984] afin d'obtenir un ensemble de formes plus variées. C'est après quelques années que des auteurs vont s'intéresser à l'utilisation de ces formes dans l'industrie et en vision par ordinateur pour générer les objets. Pour cela, [Solina et al.,1990] va proposer une méthode pour approximer les ensembles de points par des super ellipsoïdes. Pour juger de la distance d'un point à la surface, il utilise le critère d'erreur suivant F_1 , qui deviendra l'estimation de la distance la plus généralement utilisée dans le cas d'approximations :

15. L'os se compose de deux types de structures : l'os trabéculaire et l'os cortical, ou os compact. L'os trabéculaire est formé de tiges ou travées de soutien et occupe l'intérieur des vertèbres, du bassin, des os plats et des extrémités des os longs.

16. Nous y reviendrons dans le chapitre 3

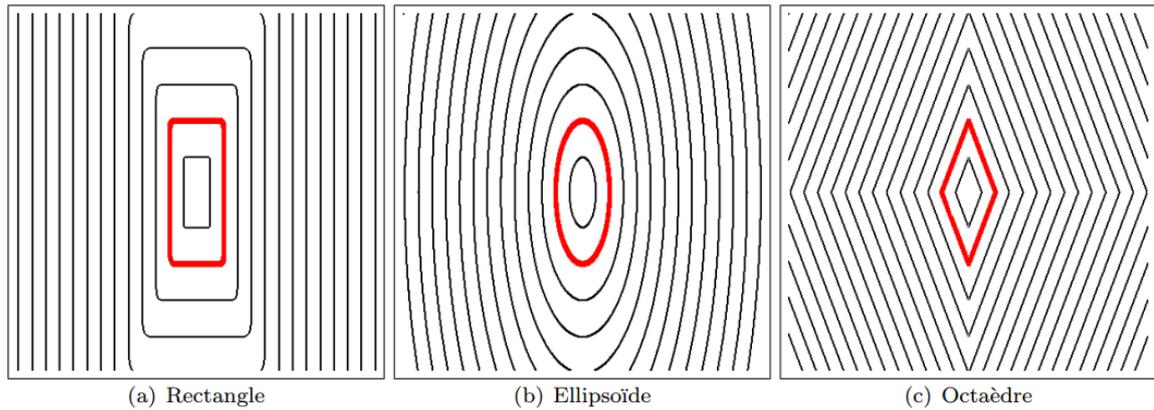


FIGURE 2.17: Critère d'erreur d'approximation de Solina.

$$F_1(x, y, z) = f(x, y, z)^{\frac{\varepsilon_1}{2}} - 1 \quad (2.17)$$

où $f(x, y, z)$ est l'équation du super ellipsoïde dans l'espace, ε_1 est la courbure longitudinale de $f(x, y, z)$. Ce critère d'erreur supprime le problème lié au ε_1 petit. De plus, sa valeur semble la même pour une distance donnée quelque soient les valeurs des coefficients de courbure (2.17). Il a une valeur qui croit de façon linéaire quand on s'éloigne du centre dans une direction donnée. Le seul problème persistant est qu'il ne croit pas à la même vitesse dans toutes les directions. Deux points à même distance euclidienne de la surface n'auront donc pas forcément la même valeur. Plus tard [Chevalier et al., 2005] va utiliser la méthode de [Solina et al., 1990] pour proposer une méthode de modélisation et d'indexation des objets 3D pour décrire des objets issus d'une image 3D de voxels. L'image est décomposée par un nuage de point non organisé ou chaque voxel est représenté par un point qui est défini par ses coordonnées dans l'espace. La méthode essaye donc de décrire l'ensemble des points avec une union de super ellipsoïdes. Il développe deux approches de segmentation à savoir le découpage-fusion et la croissance de régions. La représentation obtenue est compacte et décrite avec moins de primitives et avec moins de paramètres.

Première étape de la segmentation : Phase de division

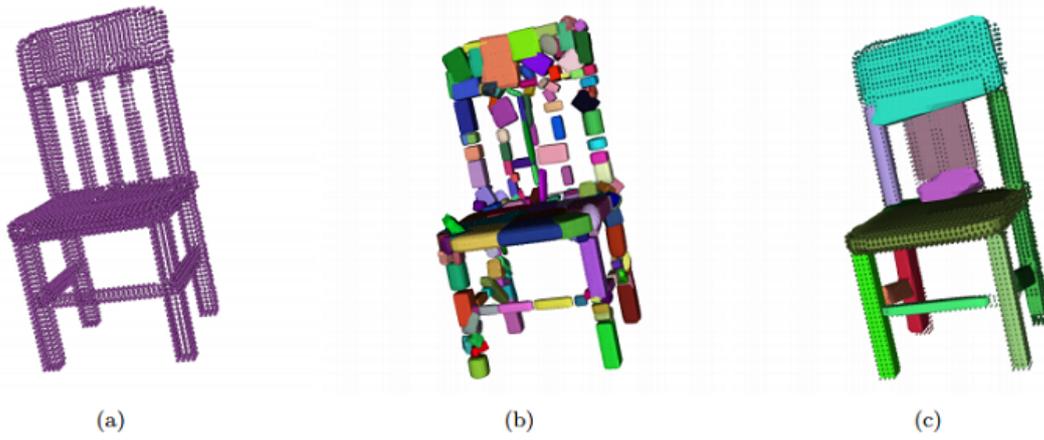
La phase de découpage est récursive. La première approximation du nuage se fait par une seule super quadrique. Si à la suite de cette approximation, l'erreur F_1 normalisée par le nombre de points N est inférieure à un seuil donné, alors le nuage reste intact et la super quadrique résultante est considérée comme un modèle de ce dernier. Dans le cas contraire, le nuage est scindé en deux. Ce partage se fait arbitrairement par le plan orthogonal à un des axes passant par le centre de la région en traitement. Suite à cette scission, on considérera par le même procédé les deux nuages résultants de manière indépendante. Le mécanisme s'arrêtera de lui-même, lorsque pour chaque région, le critère de division ne sera plus respecté.

Deuxième étape de la segmentation : Regroupement de régions similaires

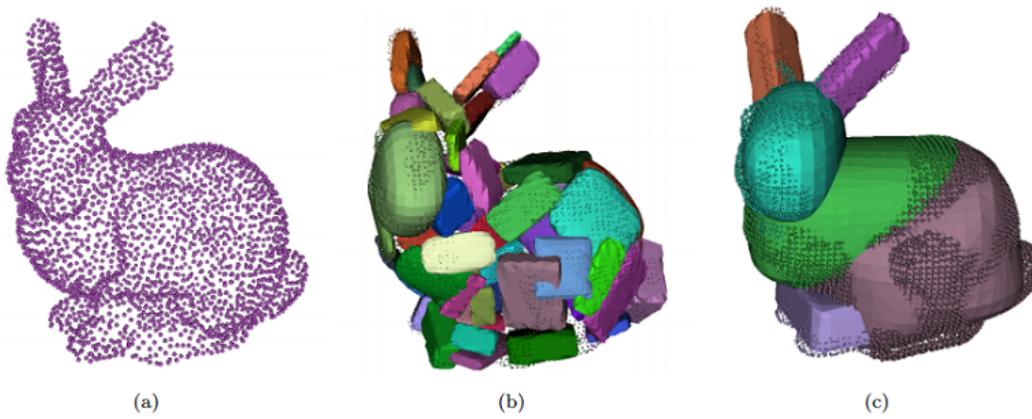
La première étape fournit une partition des données, pour laquelle chaque région est associée à une super quadrique. Le nombre de super quadriques constituant alors le descripteur est souvent très important. En effet, le plan de coupe ne tenant pas compte des relations topologiques entre les points, la scission d'une région contenant une partie d'objet représentable par une seule super quadrique peut conduire à la division de cette même partie d'objet. Dans la seconde étape, on regroupe ces régions. Pour ce faire, la procédure d'approximation est appliquée à la fusion des nuages de chaque couple¹⁷. Si cette approximation est satisfaisante, les régions seront regroupées, sinon, elles resteront indépendantes. Cette étape s'arrête lorsque la partition des données est stable. A la fin de cette deuxième et dernière étape, l'ensemble des superquadriques a été restreint au mieux pour la qualité d'approximation voulue, compte tenu des divers critères utilisés dans la procédure de division. La figure 2.18 illustre les différentes phases de segmentation en image.

Très récemment une autre méthode de modélisation avec les ellipsoïdes est proposée dans [Doubé,2015]. Le problème se rapproche de celui de la structuration d'objets naturels c'est-à-

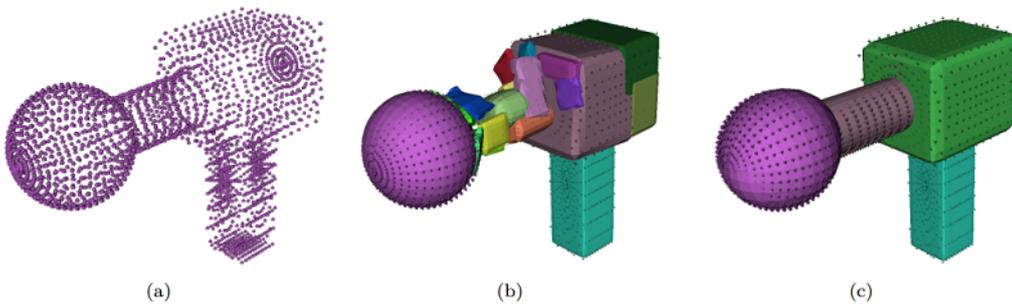
17. région , voisin de cette même région



(a) (a) Données 3D d'une chaise. (b) Après phase de division. (c) après regroupement.



(b) (a) Données 3D d'un lapin. (b) Après phase de division. (c) après regroupement.



(c) (a) Données 3D Pistolet. (b) Après phase de division. (c) après regroupement.

FIGURE 2.18: Segmentation de quelques objets avec les deux étapes division et croissance.[?]

dire des objets qu'on retrouve dans la nature et dont on a aucune caractérisation géométrique. Dans la situation présente il s'agit de la structure porale d'un os trabéculaire. Cette structure fait partir des volumes complexe que nous avons énuméré plus haut. Mais toujours grâce à la tomographie et aux images tridimensionnelles on est déjà capable d'avoir une représentation en voxels des objets. Dans la description des formes complexes, on est confronté à la quantification des formes. Pour le cas de Doube, il s'agit des plaques et des tiges observées à l'intérieur de l'os trabéculaire qui forme une sorte de structure porale. On a donc besoin d'une description permettant d'identifier ces formes de manière significative. La littérature propose des modèles d'indexation des structures qui classifient les surfaces en fonction de leur changement de surface après dilation. La méthode fonctionne bien pour les formes de nature purement convexes comme les sphères et les cylindres. Mais pas pour les formes d'un os réel qui contient une grande proportion de courbures concaves et qui varient en fonction de la fraction volumique osseuse. Pour apporter une piste de solution à ces manquements, l'auteur propose une approche de classification locale des continus tridimensionnels des os trabéculaires basée sur l'ajustement des ellipsoïdes maximales inscrits. Il fournit une solution générale qui à partir de peu d'hypothèse, traite l'os comme un continuum.

Principe de l'approche

On définit 3 types d'ellipsoïdes dans [Doube,2015] pour identifier les formes plaques et tiges d'un os trabéculaire.

Définition 2.2.9. Soit un ellipsoïde ε avec les trois rayons a , b et c de ses axes : Le facteur ellipsoïde :

$$EF = \frac{a}{b} - \frac{b}{c} \quad (2.18)$$

où $a \leq b \leq c$ et $EF \in [-1, +1]$

-
- Si $EF = -1$ alors on a un ellipsoïde extrêmement oblate¹⁸ qui a un axe court et deux long¹⁹
 - Si $EF = 1$ alors on a un ellipsoïde extrêmement prolata²⁰ qui a un axe long et deux axes courts²¹
 - Si $EF = 0$ alors on a un ellipsoïde sphérique compris entre les deux descriptions ci-dessus. La figure 2.19 illustre chaque situation.

Remarque. Le facteur ellipsoïde en un point donné dans la structure est déterminé par compétition entre les ellipsoïdes qui contiennent le point. On choisit l'ellipsoïde qui contient le point et qui a le plus grand volume pour rester cohérent avec la définition locale de l'épaisseur.

La donnée en entrée du modèle est une pile binaire tridimensionnelle. Un amincissement de l'axe médian préservant la topologie est effectué avec le plugin Skeletonize3D d'ImageJ et les points du squelette qui en résultent sont stockés comme des point de départ. Pour chaque point de départ, un petit ellipsoïde sphérique est instancié. On fixe un nombre (par défaut 100) de points sur la surface de l'ellipsoïde et la valeur des coordonnées de chaque point de la surface dans l'image d'entrée est testée. L'ellipsoïde est également gonflé tout le long de ses trois axes jusqu'à ce que au moins un point de sa surface touche un pixel d'arrière-plan. Il est désigné comme un point de contact. L'ellipsoïde est ensuite roté jusqu'à ce qu'un de ses axes s'aligne avec le vecteur unitaire moyen qui pointe vers le ou les points de contact, et contracté pour adhérer à l'avant plan. Les deux autres axes sont alors gonflés de manière égale jusqu'à ce que le nombre de points de contacts soit au moins 1, et l'ellipsoïde roté de telle sorte que le second axe soit aligné avec le vecteur moyen des points de contact. Un cycle itératif de gonflement, rotation, translation et contraction suit après. Au cours de chaque itération, le volume de l'el-

18. forme de disque

19. pour une approximation maximale des formes de nature plaque

20. forme de javelot

21. pour une approximation maximale des formes de nature tige

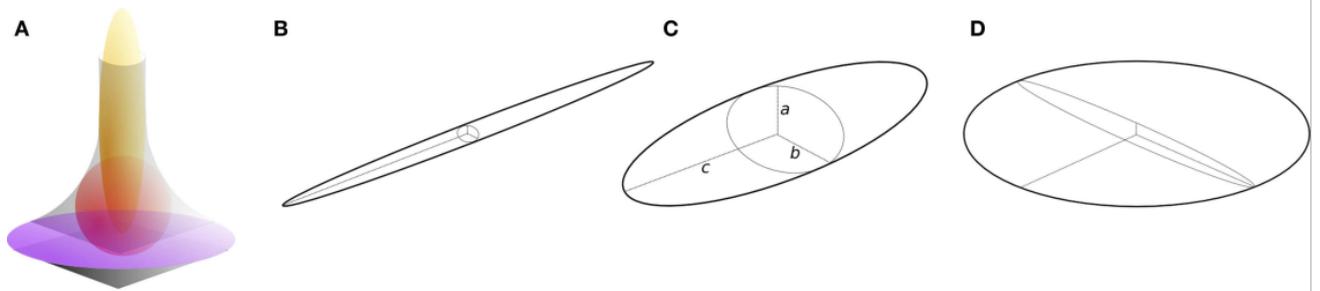


FIGURE 2.19: Différentes courbes d'ellipsoïdes. Dans la courbe en A en gris, on a les différents types d'ellipsoïdes. L'ellipsoïde prolate en B est représenté en jaune, l'ellipsoïde intermédiaire sphérique en C est représenté en rouge et l'ellipsoïde oblate en D est représenté en couleur pourpre. [Doube, 2015]

l'ellipsoïde est calculé et s'il est le volume maximal trouvé à cet instant, il est stocké et utilisé pour l'itération suivante. L'itération continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucune augmentation du volume après le nombre d'itération fixé par l'utilisateur. A chaque itération, chaque axe est gonflé individuellement et l'ellipsoïde est tourné par une petite rotation aléatoire avant d'être contracté jusqu'à ce qu'il soit complètement ajusté à l'avant plan. La translation totale est limitée à l'amplitude afin d'empêcher les ellipsoïdes de déborder de leur point de départ. La direction de translation est la moyenne des vecteurs unitaires des points de contact au centre. La direction de rotation est le produit vectoriel des vecteurs unitaires des points de contact. Les coordonnées en dehors des limites de l'image sont considérées comme arrière-plan.

2.2.6 Conclusion

Malgré l'introduction de nouvelles primitives plus sophistiquées pour modéliser les formes, on constate dans la littérature que peu de travaux sont faits en ce qui concerne la modélisation des formes naturelles. Les mécanismes développés sont beaucoup plus d'ordre théorique et servent à décrire les formes plus ou moins simples. Les méthodes développées dans [Chevalier et al., 2005, Mokhtari, 2016, Mokhtari et al., 2017, Banegas et al., 2001] permettent de décrire des objets moins complexes dont la majorité est basée sur la mécanique des chaînes de montages. Les méthodes développées sont basées sur la partition des voxels primaires qui sont

ensuite approximés par des primitives. A la différence des autres méthodes, [Doube,2015] propose une méthode qui s'attaque à la quantification des structures plus complexes que les objets manufacturés. La méthode consiste à dilater itérativement les primitives de base incluses dans la forme jusqu'à ce qu'elles touchent les points frontières de la forme. Le problème avec la plupart de ces approches vient du fait qu'elles partent directement de l'image des voxels pour approximer la forme. Ce qui peut poser des problèmes de complexités, de compacité et de conservation des propriétés topologiques de la forme initiale. On est donc confronté à un problème de robustesse. On constate également que très peu d'approches sont développées pour représenter les formes naturelles complexes et sur des grands volumes. C'est pour apporter quelques solutions à ces problèmes que nous proposons dans cette thèse de nouveaux algorithmes plus robustes pour représenter les formes volumiques complexes avec les primitives quadriques.

Dans le chapitre qui suit, nous allons aborder de manière détaillée les notions qui portent sur la modélisation avec la famille des volumes quadriques autre que les boules. Ce sont de nouvelles formes de primitives géométriques évoluées qu'on propose pour modéliser les systèmes complexes.

GENERALITES SUR LES VOLUMES QUADRIQUES, SUPER QUADRIQUES ET APPROXIMATIONS VOLUMIQUES

3.1 Introduction

Les primitives géométriques évoluées sont de plus en plus utilisées pour modéliser les formes plus ou moins complexes. L'idée est de pouvoir représenter un ensemble de formes avec des primitives variées. Le problème repose ici sur le choix des primitives en fonction de l'objet qu'on veut modéliser. Dans le cas des formes naturelles complexes, on a besoin d'une représentation géométrique avec un nombre minimal de primitives, qui soit fidèle. Peu de travaux ont été faits dans ce sens [Doube,2015, Ngom et al.,2012, Banegas et al.,2001] et souvent avec des primitives qui ne sont pas appropriées dans la pratique. Pour étudier un phénomène par simulation dans un système complexe comme le sol par exemple, on a besoin d'une description géométrique fidèle du système. Un exemple est la simulation de l'activité microbienne dans l'espace poral du sol pour estimer la quantité de dioxyde de carbone dégagée. Il faut donc approximer de manière compacte chaque cavité de l'espace des pores où sont stockés les organismes vivants, agents responsables de phénomène. Cette étude est en constante évolution

dans les sciences du sol afin de prédire la biomasse microbienne¹ du sol. Nous allons nous pencher dans ce chapitre sur l'étude d'un nouveau modèle de primitives pour représenter de manière compacte les formes complexes en général. Ce sont les volumes quadriques et superquadriques. En effet, ces volumes disposent des propriétés géométriques et topologiques intéressantes par rapport aux autres primitives géométriques utilisées dans la littérature pour approximer les milieux poreux du sol. Nous allons dans un premier temps, aborder les notions importantes qui gravitent autour de ces primitives en commençant par les représentations 2D en coniques [Lebesgue et al., 1942, Rashed, 2009], puis par les représentations 3D en quadriques et superquadriques [Jaklic et al., 2013, Spain et al., 2014, Russell et al., 2012, Surhone et al., 2010]. Nous allons ensuite voir quelques approches d'approximations utilisées pour approximer un nuage de points tridimensionnel par ces volumes. En fait c'est cette approximation qui constitue la base de la segmentation volumique d'une forme en primitives. La plupart des notions sur les volumes quadriques et superquadriques explicitées ici sont tirées de [Jaklic et al., 2013, Spain et al., 2014, Russell et al., 2012, Surhone et al., 2010].

3.2 Les coniques 2D

3.2.1 Définition

Les premiers travaux significatifs sur les coniques remontent à Euclide d'Alexandrie² vers le milieu du IV^{ème} siècle avant J.C. Ses travaux seront très largement développés par Apollonius de Perge dans son livre "Les coniques". Apollonius étudie et nomme les trois types de coniques à savoir l'ellipse³, la parabole⁴ et l'hyperbole⁵. Il décrit leur construction à partir d'un cône de révolution coupé par un plan comme on peut voir sur la figure 3.1

1. La biomasse microbienne représente la quantité de "carbone vivant" contenue dans les microbes du sol, essentiellement bactéries et champignons

2. C'est l'un des mathématiciens les plus célèbres de l'Antiquité, connu pour son traité de géométrie Les Eléments.

3. Du grec elleipein : manquer

4. Du grec parabolê : para = à côté ; ballein = lancer

5. du grec huperbolê : huper = au dessus ; ballein = lancer

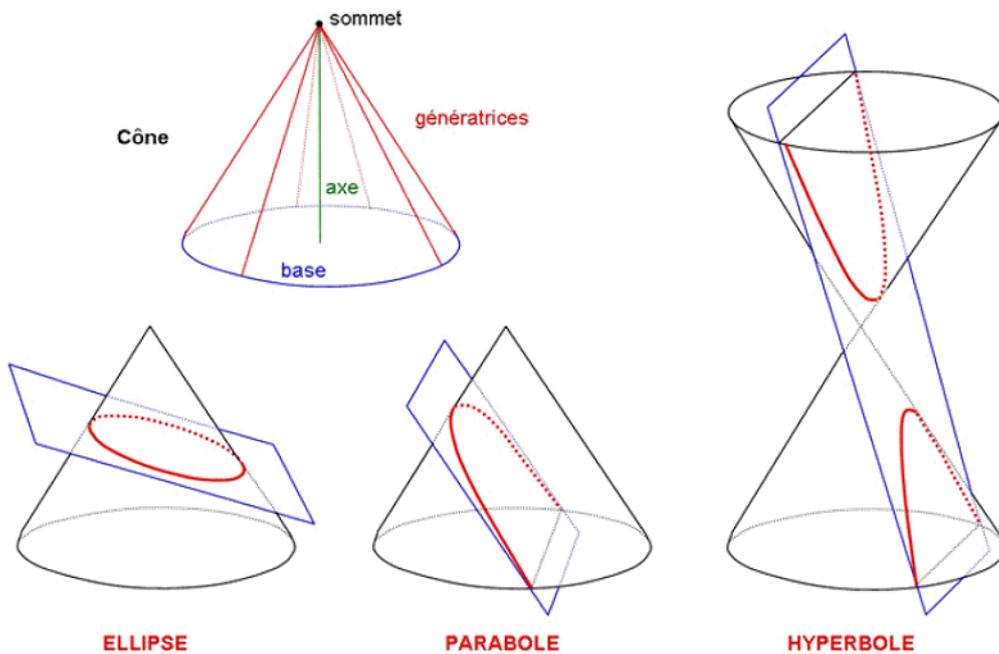


FIGURE 3.1: Différentes forme de coniques

3.2.2 Équations des coniques

Une conique peut être définie sur deux formes à savoir la forme générale et la forme réduite qui permet d'identifier le type de conique. Dans le plan de \mathbb{R}^2 , une conique est définie par son équation générale :

$$p(x,y) = 0 \leftrightarrow p(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.1)$$

avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^*$

3.2.2.1 Réduction de l'équation d'une conique

En considérant l'équation 3.1 de p comme une équation de second degré, on calcule le discriminant de la conique pour déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques :

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (3.2)$$

On distingue alors 3 cas :

1. $\Delta < 0$: (p) est une ellipse, ou un point, ou l'ensemble vide.
2. $\Delta > 0$: (p) est une hyperbole ou la réunion de deux droites concourantes.
3. $\Delta = 0$: (p) une parabole, ou la réunion de deux droites parallèles, ou une droite, ou l'ensemble vide.

Pour déterminer l'équation réduite, on effectue d'abord un changement de repère par rotation qui élimine les termes en xy . Pour cela, on considère θ défini comme suit :

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \text{ si } a = c \\ \tan(2\theta) = \frac{b}{a-c} \text{ sinon.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Si un point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère initial et (X, Y) dans le repère obtenu après rotation d'angle θ , alors on a la relation suivante :

$$\begin{cases} x = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y \\ y = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y \end{cases} \quad (3.4)$$

Dans le nouveau repère XY , la conique p a pour équation :

$$AX^2 + BY^2 + PX + QY + R = 0 \text{ avec } A, B, P, Q, R \in \mathbb{R}^* \quad (3.5)$$

On distingue alors plusieurs cas :

1. Si le produit $AC \neq 0$ (ellipse ou hyperbole), on a deux fois le début d'un trinôme du second degré :

$$\begin{cases} AX^2 + PX = A\left(X + \frac{P}{2A}\right)^2 - \frac{P^2}{4A} \\ CY^2 + QY = C\left(Y + \frac{Q}{2C}\right)^2 - \frac{Q^2}{4C} \end{cases} \quad (3.6)$$

En procédant à un changement de repère par translation, c'est à dire en posant :

$$\begin{cases} X' = X + \frac{P}{2A} \\ Y' = Y + \frac{Q}{2C} \end{cases} \quad (3.7)$$

On obtient l'équation réduite :

$$A'X'^2 + C'Y'^2 = R' \quad (3.8)$$

2. Si le produit $AC = 0$, par exemple $A=0$, et qu'on effectue seulement une translation sur l'ordonnée, alors on trouve une équation réduite sous la forme :

$$CY'^2 + DX'^2 = F \quad (3.9)$$

3.2.2.2 Équation polaire d'une conique

Soit (p) une conique de foyer F , d'excentricité e et de directrice D . Cette conique admet une équation polaire dans un repère orthonormé de centre son foyer F . Soit K le projeté orthogonal de F sur la directrice D . On note :

$$\begin{cases} \phi = (\vec{e}, \vec{FK}) \\ \delta = e * FK \end{cases} \quad (3.10)$$

D'où l'équation polaire définie par :

$$\rho(\theta) = \frac{\delta}{1 + e \cos(\theta - \phi)} \quad (3.11)$$

On peut donc résumer nos trois type de coniques comme suit :

Parabole

— Equation réduite : soit H le projeté orthogonal de F sur la directrice D et notons $\delta =$

FH . Dans le repère orthonormé de centre le milieu de $[FH]$ et où F a pour coordonnées $F(\frac{\delta}{2}, 0)$, l'équation de la parabole est $y^2 = 2\delta x$.

— Foyer, directrice, sommet : dans le repère précédent, le foyer a pour coordonnées $F(\frac{\delta}{2}, 0)$, la directrice a pour équation $x = -\delta/2$, et le sommet de la parabole est le centre du repère.

— Tangente : l'équation de la tangente en un point (x_0, y_0) de la parabole est $yy_0 = \delta(x + x_0)$.

— Paramétrage de la parabole : dans le repère précédent, la parabole peut se décrire par la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2\delta} \\ y(t) = t \end{cases} \quad (3.12)$$

Ellipse

— Equation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

— Liens entre les différents paramètres :

$$\begin{cases} c^2 = a^2 - b^2 \\ e = \frac{c}{a} \\ a = \frac{\delta}{1-e^2} \\ b = \frac{\delta}{\sqrt{1-e^2}} \end{cases} \quad (3.13)$$

— Foyers, directrices, sommets : dans le repère précédent, les foyers ont pour coordonnées $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, les directrices ont pour équation $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = \frac{-a^2}{c}$. Les sommets sont les points $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ et $(0, -b)$.

— Tangente : l'équation de la tangente en un point (x_0, y_0) de l'ellipse est $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

— Paramétrage de l'ellipse : dans le repère précédent, l'ellipse peut se décrire par la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases} \quad (3.14)$$

Hyperbole

— Equation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

— Liens entre les différents paramètres :

$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \\ a = \frac{\delta}{e^2 - 1} \\ b = \frac{\delta}{\sqrt{e^2 - 1}} \end{cases} \quad (3.15)$$

— Foyers, directrices, sommets, asymptotes : dans le repère précédent, les foyers ont pour coordonnées $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, les directrices ont pour équation $x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$ et $x = \frac{-a^2}{c} = \frac{-a}{e}$. Les sommets sont les points $(a, 0)$, $(-a, 0)$. Les asymptotes ont pour équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$

— Tangente : l'équation de la tangente en un point (x_0, y_0) de l'hyperbole est $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

— Paramétrage de l'hyperbole : dans le repère précédent, l'hyperbole peut se décrire par la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \pm a \cosh(t) \\ y(t) = b \sinh(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

3.3 Les volumes quadriques

3.3.1 Définition

Les volumes quadriques sont les extensions des coniques en dimension 3. Soit \mathbf{E} un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $R = (\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $X = (x \ y \ z)$, le vecteur de coordonnées d'un point M de E . Un volume quadrique de \mathbf{E} est le sous ensemble C de E défini dans R par une équation générale du type

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (3.17)$$

où $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \mathbb{R}$ et $(A, B, C, D, E, F) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. On note q la forme quadratique de C définie sur E par :

$$q(\overrightarrow{OM}) = q(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz \quad (3.18)$$

de matrice $Q = \begin{pmatrix} A & D/2 & F/2 \\ D/2 & B & E/2 \\ F/2 & E/2 & C \end{pmatrix}$, l la forme linéaire de C définie sur E par :

$$l(\overrightarrow{OM}) = l(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = Gx + Hy + Iz \quad (3.19)$$

de matrice $L = \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix}$. La quadrique admet donc pour équation :

$$q(\overrightarrow{OM}) + l(\overrightarrow{OM}) + J = 0 \quad (3.20)$$

. On peut également l'écrire sous la forme :

$$X^t Q X + L X + I = 0. \quad (3.21)$$

3.3.2 Forme réduite des quadriques

Définition 3.3.1. Soit E un espace vectoriel euclidien ou hermitien⁶ et u un endomorphisme de E . On dit que u est auto-adjoint si $u = u^*$, i.e. si $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle$.

Remarque. Si l'espace vectoriel est euclidien, on parle aussi d'endomorphisme symétrique et si l'espace vectoriel est hermitien, on parle d'endomorphisme hermitien. D'ailleurs, la matrice d'un endomorphisme auto-adjoint dans une base orthonormale est symétrique/hermitienne sui-

6. En mathématiques, un espace hermitien est un espace vectoriel sur le corps commutatif des complexes de dimension finie et muni d'un produit scalaire hermitien

vant le corps de base.

Le théorème suivant caractérise les endomorphismes auto-adjoints.

Théorème 3.3.1. *Soit \mathbf{E} un espace vectoriel euclidien ou hermitien et u un endomorphisme de \mathbf{E} . Alors u est auto-adjoint si et seulement s'il existe une base orthonormée de \mathbf{E} de vecteurs propres pour u , les valeurs propres étant réels.*

Corollaire. *Soit u l'endomorphisme auto-adjoint de \mathbf{E} tel $\forall e \in \mathbf{E}, \varphi(e) = \langle u(e); e \rangle$. Comme u est auto-adjoint, il est diagonalisable dans une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives λ_1, λ_2 et λ_3 de u . Dans le repère $R' = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Si on note (x', y', z') les composantes de M' , alors il existe $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et j dans R tel qu'une équation de C dans R' soit :*

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' + j = 0 \quad (3.22)$$

Cette forme est appelée forme réduite de la quadrique C

3.3.3 Centre de symétrie d'une quadrique à centre

Les quadrique à centre sont des quadrique qui admettent un centre de symétrie.

Définition 3.3.2. Soient $\Omega \in \mathbf{E}$ et S_Ω la symétrie centrale de \mathbf{E} de centre Ω . On dit que Ω est le centre de symétrie de C si pour tout point M de C , $M' = S_\Omega(M)$ appartient à C .

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point de l'espace soit le centre de symétrie d'une quadrique.

Proposition 3.3.2. *Soit Ω un point et ses coordonnées $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix}$ dans le repère R .*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Ω est centre de symétrie de C

$$2. QX_0 = -L^t/2 \Leftrightarrow QX_0 = \begin{pmatrix} -G/2 \\ -H/2 \\ -I/2 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{cases} \delta C / \delta x(x_0, y_0, z_0) = 0 & Ax + D/2y + F/2z = -G/2 \\ \delta C / \delta y(x_0, y_0, z_0) = 0 & \Leftrightarrow \{ D/2x + By + E/2z = -H/2 \\ \delta C / \delta z(x_0, y_0, z_0) = 0 & F/2x + E/2y + Cz = -I/2 \end{cases}$$

Démonstration. Soit R_0 le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point M de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ dans le repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a pour coordonnées dans le repère R_0 , $Y = X - X_0$. On détermine une équation de C dans le repère R_0 ainsi : $M \in C \Leftrightarrow X^t QX + LX + j = 0 \Leftrightarrow (X_0 + Y)^t Q(X_0 + Y) + L(X_0 + Y) + j = 0 \Leftrightarrow Y^t QY + (2X_0^t Q + L)Y + X_0^t QX_0 + LX_0 + j = 0$. \square

Donc une équation de C dans R_0 est :

$$Y^t QY + (2X_0^t Q + L)Y + X_0^t QX_0 + LX_0 + j = 0 \quad (3.23)$$

D'autre part, $M' = S_\Omega(M)$ a pour coordonnées $Y' = -Y$ dans le repère R_0 . On a donc

$$Y'^t QY' + (2X_0^t Q + L)Y' + X_0^t QX_0 + LX_0 + j = Y^t QY - (2X_0^t Q + L)Y + X_0^t QX_0 + LX_0 + j \quad (3.24)$$

Si en plus $M \in C$, alors

$$Y'^t QY' + (2X_0^t Q + L)Y' + X_0^t QX_0 + LX_0 + j = 0 \quad (3.25)$$

D'où

$$Y^t QY - (2X_0^t Q + L)Y + X_0^t QX_0 + LX_0 + j = Y^t QY + (2X_0^t Q + L)Y + X_0^t QX_0 + LX_0 + j = 0 \quad (3.26)$$

En simplifiant membre par membre, on a $2(2X_0^t Q + L)Y = 0$. Ce qui est équivalent à : $(2X_0^t Q + L)Y = 0$ Dans ce cas Ω est centre de symétrie de C si et seulement si M' appartient à C et si

$$\text{seulement si } QX_0 = B^t/2, \text{ i.e. coordonnée par coordonnée } \begin{cases} Ax + D/2y + F/2z = -G/2 \\ D/2x + By + E/2z = -H/2 \\ F/2x + E/2y + Cz = -I/2 \end{cases}$$

Remarque. Il existe un unique centre de la quadrique C si et seulement si la matrice quadratique Q est de rang 3, i.e.

$$\det(Q) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$$

3.3.4 Changement de repère

Soient C une surface quadrique définie dans le repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une équation de la forme :

$$\phi(X) = X^t Q X + L X + j \quad (3.27)$$

et $R' = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un nouveau repère orthonormé dans lequel on notera $\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point générique et X' le vecteur colonne qui lui est associé. Si P est la matrice

de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et si $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix}$ est la matrice

colonne des coordonnées du point Ω dans le repère R , alors, on a la relation suivante : $X = P X' + X_0$. Dès lors :

$$X^t Q X + L X + j = (P X' + X_0)^t Q (P X' + X_0) + L (P X' + X_0) + j$$

$$= X'^t P^t Q P X' + X'^t P^t Q X_0 + X_0^t Q P X' + X_0^t Q X_0 + L P X' + L X_0 + j$$

$$= X'^t (P^t Q P) X' + (X_0^t Q P + L P) X + X_0^t Q X_0 + L X_0 + j$$

car $X'^t P^t Q X_0 = (X'^t P^t Q X_0)^t = X_0^t Q P X'$ puisque $X'^t P^t Q X_0$ est réel et Q est symétrique. On en

déduit donc l'équation de C dans le repère R' : $\psi(X') = {}^t X' Q' X' + L' X' + j'$ où $Q' = P^t Q P$, $L' = X_0^t Q P + L P$ et $j' = X_0^t Q X_0 + L X_0 + j = \phi(\Omega) = \phi(x_0, y_0, z_0)$. On peut ressortir cette équation sous une forme plus explicite à partir de la forme réduite trouvée dans le repère $R_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Dans ce repère, notre quadrique était définie par :

$$\phi_{R_1}(X) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + j$$

où $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ représentait un point dans le repère R_1 , $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ les valeurs propres de Q associées aux vecteurs \vec{e}_i . $V = \sum_{i=1}^3 \beta_i \vec{e}_i$ est le vecteur correspondant de X dans le nouveau repère. si la quadrique admet un centre, alors il est unique et est donné par :

$$\overrightarrow{O\Omega} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i}{2\lambda_i} \vec{e}_i \quad (3.28)$$

. La représentation ϕ_{R_2} de la quadrique dans le repère $R_2 = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est donnée par :

$$\phi_{R_2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \lambda_1 \varepsilon_1^2 + \lambda_2 \varepsilon_2^2 + \lambda_3 \varepsilon_3^2 + j' \quad (3.29)$$

où $j' = \phi_{R_0}(\Omega) \in \mathbb{R}$. En effet, le calcul du centre de la quadrique se fait comme mentionné plus haut en annulant ses trois dérivées partielles dans le repère $R_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Une transformation directe de ϕ_{R_1} en mettant les trinômes sous la forme canoniques donne :

$$\phi_{R_1}(X) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \left(x_i + \frac{\beta_i}{2\lambda_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i^2}{4\lambda_i} \vec{e}_i + j \quad (3.30)$$

Si $\varepsilon_i (i = 1, 2, 3)$ sont les coordonnées d'un point M dans le repère R_2 , il vient que

$$\varepsilon_i = x_i + \frac{\beta_i}{2\lambda_i}$$

d'où la forme voulue :

$$j' = j - \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i^2}{4\lambda_i} \vec{e}_i = \phi_{R_0}(\Omega) \quad (3.31)$$

3.3.5 Types de volumes quadriques

Proposition 3.3.3. *Toute section plane d'une quadrique (i.e. toute intersection d'une quadrique avec un plan) est une conique.*

— L'ellipsoïde (Voir figure 3.2)

C'est tout volume quadrique donné dans un repère orthonormé $R_2 = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par une équation de la forme :

$$\phi_{R_2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \quad (3.32)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Elle admet la paramétrisation :

$$[\theta, \varphi] \in [0, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto (a \cos \theta \cos \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, c \sin \theta) \quad (3.33)$$

Son intersection avec une section plane donne une ellipse.

— Hyperboloïde à une et à deux nappes (voir figure 3.3)

C'est tout volumes quadrique donné dans un repère orthonormé $R_2 = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par une équation de la forme :

$$\phi_{R_2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 \quad (3.34)$$

pour une hyperboloïde à une nappe et

$$\phi_{R_2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 \quad (3.35)$$

pour une hyperboloïde à deux nappes avec $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Elles admettent les paramétrisations

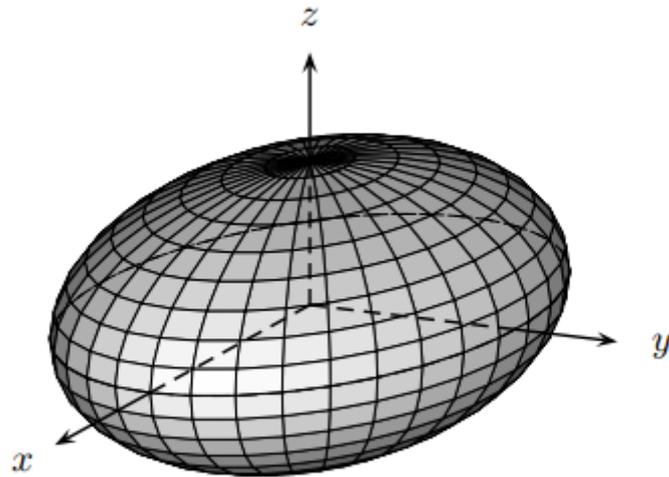


FIGURE 3.2: Ellipsoïde

respectives :

$$[\theta, \varphi] \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mapsto (a \cos \theta \operatorname{ch} \varphi, b \sin \theta \operatorname{ch} \varphi, c \operatorname{sh} \varphi) \quad (3.36)$$

$$[\theta, \varphi] \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mapsto (a \cos \theta \operatorname{sh} \varphi, b \sin \theta \operatorname{sh} \varphi, c \operatorname{ch} \varphi) \quad (3.37)$$

leur intersections avec une section plane ($y = 0$ par exemple) donne des hyperboles d'équations respectives

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.38)$$

et

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (3.39)$$

— Paraboloïde elliptique (voir figure 3.4)

C'est tout volume quadrique donné dans un repère orthonormé $R_2 = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par une équation de la forme :

$$\phi_{R_2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z \quad (3.40)$$

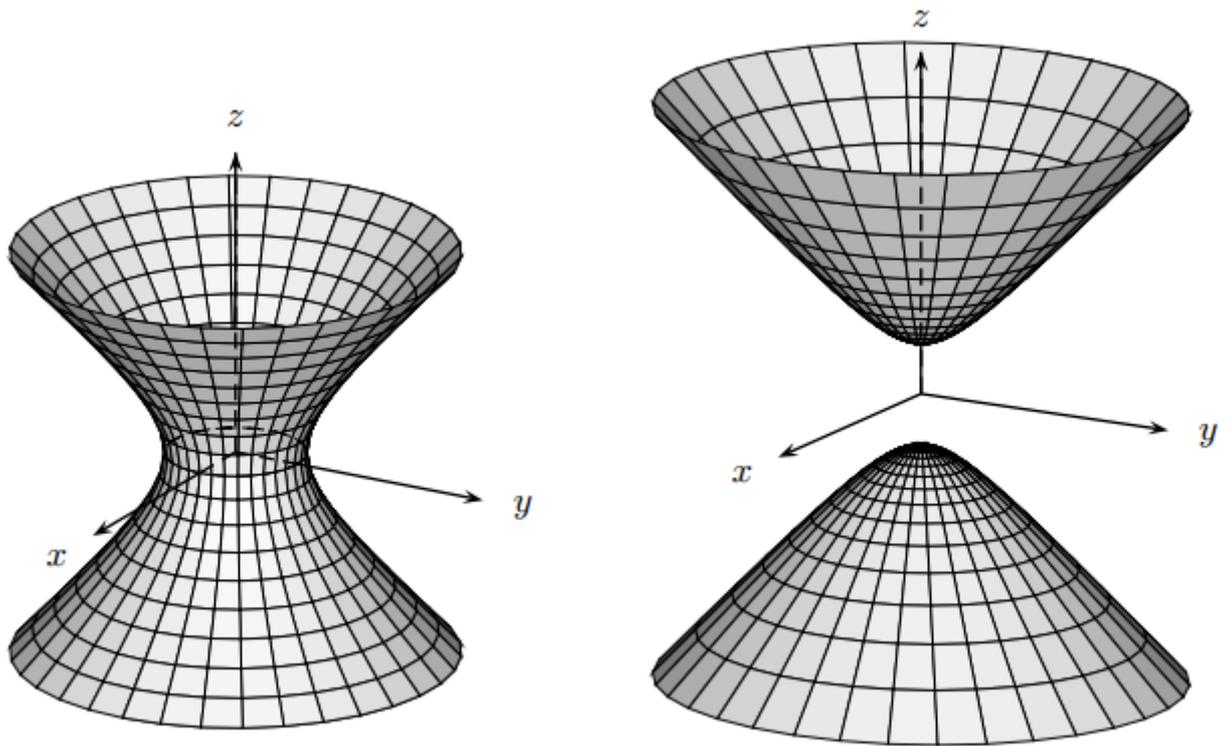


FIGURE 3.3: Hyperboïdes à une et à deux nappes

avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. C'est le graphe l'application :

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (3.41)$$

Son intersection avec une section plane donne une parabole.

3.4 Les volumes superquadriques

3.4.1 Définition

Les superquadriques sont une famille de formes paramétriques, qui sont présentés comme des primitives géométriques évoluées et utilisées pour la représentation de formes. Ce sont des évolutions des quadriques et des superellipses. Ils ont été introduits pour la première fois en informatique graphique par Alan Barr [Barr,1981]. C'est Barr qui met en évidence l'importance de ces modèles en particulier pour la vision par ordinateur et pour la conception tridimension-

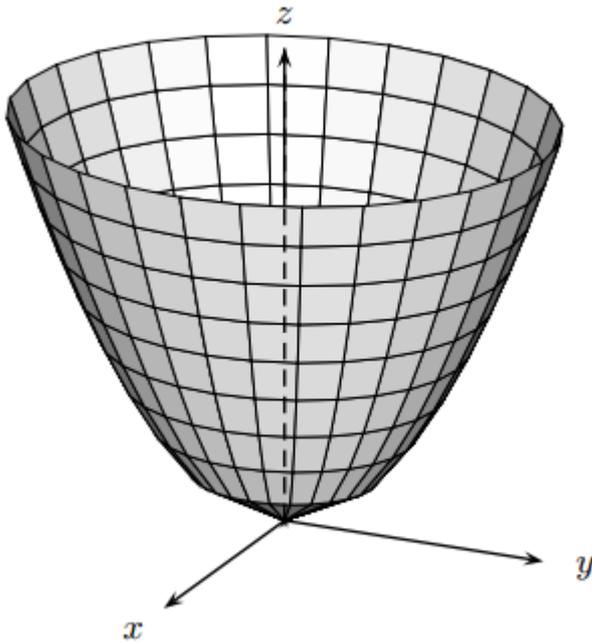


FIGURE 3.4: Paraboloïde elliptique

nelle afin de représenter de manière compacte et visualiser des continuums. Les superquadriques jouent donc le rôle de parties prototypiques et peuvent être davantage déformées en introduisant des paramètres supplémentaires [Barr,1984]et collées ensemble dans des modèles réalistes. On différencie quatre classes de superquadriques (voir la figure 3.5) dont les superparaboloïdes, les superhyperboloïdes, les superellipsoïdes et les supertoroïdes. Parmi ces classes, nous nous focaliserons beaucoup plus sur les superellipsoïdes qui regroupent un nombre varié de formes. Généralement en vision on utilise le terme superellipsoïde pour désigner les superquadrique. Ce sera également le cas dans ce document.

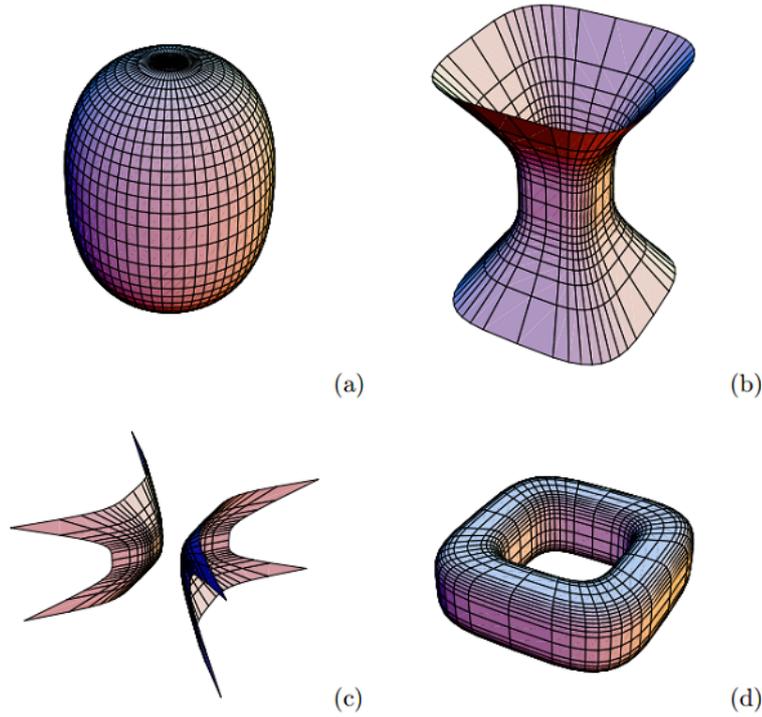


FIGURE 3.5: Les superquadriques est une famille de formes qui inclus les superellipsoïdes (a), les superhyperboloïdes à une nappe (b), à deux nappes(c) et les supertoroïdes (d) [Jaklic et al.,2013]

3.4.2 Les super ellipsoïdes

Une surface 3D peut être obtenue par produit sphérique de deux courbes 2D. La sphère unité par exemple est le produit d'un demi cercle dans un plan orthogonal au plan xy :

$$m(\eta) = \begin{pmatrix} \cos(\eta) \\ \sin(\eta) \end{pmatrix}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.42)$$

et un cercle dans le plan xy :

$$h(\omega) = \begin{pmatrix} \cos(\omega) \\ \sin(\omega) \end{pmatrix}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (3.43)$$

Le produit sphérique $m(\eta)$ et $h(\omega)$ noté $r(\eta, \omega)$ est défini par :

$$r(\eta, \omega) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\eta)\cos(\omega) \\ \cos(\eta)\sin(\omega) \\ \sin(\eta) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\pi \leq \omega \leq \pi \end{matrix} \quad (3.44)$$

Ainsi , un superellipsoïde est considéré comme le produit sphérique de deux superellipse 2D.

En effet , comme un cercle, la forme paramétrique d'un superellipse d'équation :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{\varepsilon}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{\varepsilon}} \quad (3.45)$$

est :

$$s(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos^{\varepsilon}(\theta) \\ b\sin^{\varepsilon}(\theta) \end{pmatrix}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (3.46)$$

où l'exponentiation avec ε est une fonction signé telle que $\cos^{\varepsilon}(\theta) = \text{signe}(\cos(\theta))|\cos(\theta)|^{\varepsilon}$.

Un superellipsoïde est donc le produit sphérique de deux superellipse $s_1(\eta)$ et de $s_2(\omega) =$

$$r(\eta, \omega) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\cos^{\varepsilon_1}(\eta)\cos^{\varepsilon_2}(\omega) \\ a_2\cos^{\varepsilon_1}(\eta)\sin^{\varepsilon_2}(\omega) \\ a_3\sin^{\varepsilon_1}(\eta) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\pi \leq \omega \leq \pi \end{matrix} \quad (3.47)$$

Où a_1 , a_2 et a_3 sont les facteurs d'échelles de la primitive sur ses trois axes respectifs. ε_1 et ε_2 sont dérivés des deux exposants des superellipses de départ. ε_2 détermine la forme du superellipsoïde à travers la section plan parallèle au plan xy tandis que ε_1 détermine la forme du superellipsoïde à travers la section du plan perpendiculaire au plan xy et contenant l'axe z. On peut voir une illustration sur la figure 3.6.

La forme ci dessus est la forme explicite de l'ellipsoïde définie par son équation paramétrique. Il y a une autre méthode pour extraire la forme implicite à partir de la forme explicite en

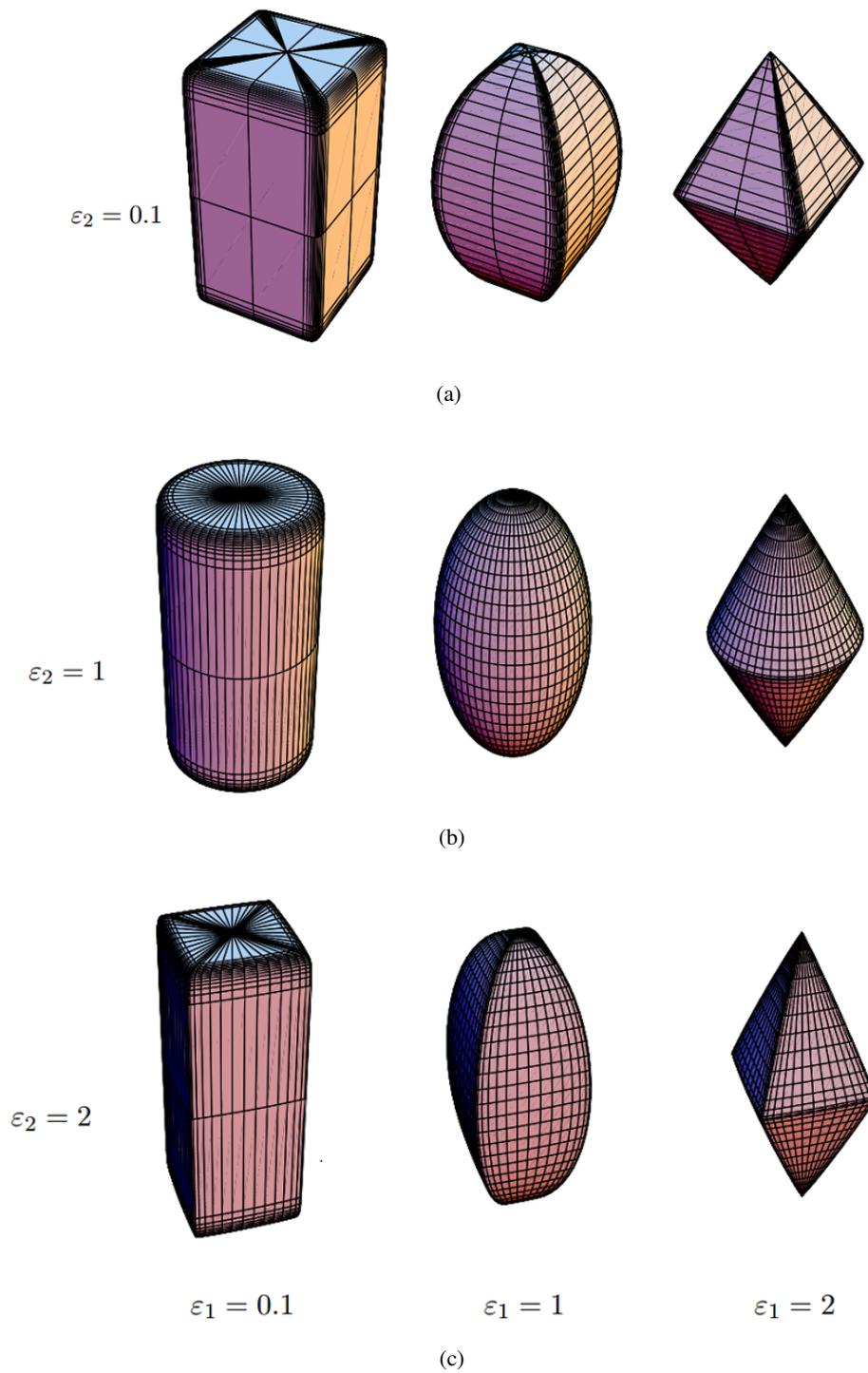


FIGURE 3.6: Superellipsoïdes avec différentes valeurs des exposants ε_1 et ε_2 . Les paramètres de taille a_1, a_2 et a_3 sont constants. [Jaklic et al., 2013]

utilisant l'égalité $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$. On réécrit l'équation 3.47 comme suit :

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 = \cos^{2\varepsilon_1}(\eta)\cos^{2\varepsilon_2}(\omega), \quad (3.48)$$

$$\left(\frac{y}{a_2}\right)^2 = \cos^{2\varepsilon_1}(\eta)\sin^{2\varepsilon_2}(\omega), \quad (3.49)$$

$$\left(\frac{z}{a_3}\right)^2 = \sin^{2\varepsilon_1}(\eta). \quad (3.50)$$

Lorsqu'on élève les cotés des équations 3.48 et 3.49 à la puissance $\frac{1}{\varepsilon_2}$ et que ensuite on les additionne, on obtient :

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}} + \left(\frac{y}{a_2}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}} = \cos^{\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}(\eta). \quad (3.51)$$

On élève les deux cotés de l'équation 3.50 à la puissance $\frac{1}{\varepsilon_1}$ et les deux cotés de l'équation 3.51 à la puissance $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. Lorsqu'on additionne les cotés des deux équations, on obtient la forme implicite de la superquadrique :

$$\left(\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}} + \left(\frac{y}{a_2}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}}\right)^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \left(\frac{z}{a_3}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_1}} = 1. \quad (3.52)$$

Tout point de coordonnées (x,y,z) qui vérifie l'équation ci-dessus est situé sur la surface du superellipsoïde. La fonction :

$$(F(x,y,z) = \left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}} + \left(\frac{y}{a_2}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}})^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} + \left(\frac{z}{a_3}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_1}}. \quad (3.53)$$

est encore appelée fonction interne-externe parce qu'elle permet de vérifier si un point est à l'extérieur ou à l'intérieur de la superquadrique.

- Si $F < 1$ alors le point de coordonnées (x,y,z) est à l'intérieur de la superquadrique
- Si $F = 1$ alors le point de coordonnées (x,y,z) est à sur la surface de la superquadrique
- Si $F > 1$ alors le point de coordonnées (x,y,z) est à l'extérieur de la superquadrique

3.4.3 Les autre super quadriques

En dehors des superellipsoïdes, il existe bien d'autres types de superquadriques comme nous l'avons mentionné plus haut à la figure 3.5. On distingue comme ça :

1. Les superhyperboloïdes à une nappe définis par l'équation explicite suivantes :

$$r(\eta, \omega) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos^{\varepsilon_1}(\eta) \cos^{\varepsilon_2}(\omega) \\ a_2 \cos^{\varepsilon_1}(\eta) \sin^{\varepsilon_2}(\omega) \\ a_3 \tan^{\varepsilon_1}(\eta) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\pi \leq \omega \leq \pi \end{matrix} \quad (3.54)$$

et l'équation implicite :

$$(F(x, y, z) = \left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}} + \left(\frac{y}{a_2}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}})^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} - \left(\frac{z}{a_3}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_1}}. \quad (3.55)$$

2. Les superhyperboloïdes à deux nappes définis par l'équation explicite suivante :

$$r(\eta, \omega) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos^{\varepsilon_1}(\eta) \cos^{\varepsilon_2}(\omega) \\ a_2 \cos^{\varepsilon_1}(\eta) \tan^{\varepsilon_2}(\omega) \\ a_3 \tan^{\varepsilon_1}(\eta) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \text{ (nappe1)} \\ \frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{3\pi}{2} \text{ (nappe2)} \end{matrix} \quad (3.56)$$

et l'équation implicite :

$$(F(x, y, z) = \left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}} - \left(\frac{y}{a_2}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}})^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} - \left(\frac{z}{a_3}\right)^{\frac{2}{\varepsilon_1}}. \quad (3.57)$$

3. Les supertoroïdes définis par l'équation explicite suivante :

$$r(\eta, \omega) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(a_4 + \cos^{\varepsilon_1}(\eta)) \cos^{\varepsilon_2}(\omega) \\ a_2(a_4 + \cos^{\varepsilon_1}(\eta)) \sin^{\varepsilon_2}(\omega) \\ a_3 \sin^{\varepsilon_1}(\eta) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} -\pi \leq \eta \leq \pi \\ -\pi \leq \omega \leq \pi \end{matrix} \quad (3.58)$$

et l'équation implicite :

$$(F(x, y, z) = ((\frac{x}{a_1})^{\frac{2}{\varepsilon_2}} - (\frac{y}{a_2})^{\frac{2}{\varepsilon_2}} - a_4)^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} + (\frac{z}{a_3})^{\frac{2}{\varepsilon_1}}, \quad (3.59)$$

où a_4 est un réel positif lié au rayon du supertoroïde : $a_4 = \frac{R}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$

3.4.4 Justification du choix des modèles quadriques pour représenter l'espace poral

Beaucoup de primitives sont proposées pour modéliser les objets plus ou moins complexes qu'on retrouve dans la nature. Nous avons vu que peu d'entre elles fournissent une représentation exploitable dans la pratique. Dans cette thèse nous nous intéressons à une problématique précise qui porte sur la modélisation des formes naturelles. Nous appliquons nos résultats pour représenter le réseau des pores du sol dans le but de simuler un certain nombre de processus. Nous avons opté pour les volumes quadriques parce qu'elles regorgent un beaucoup d'avantages par rapport aux autres primitives géométriques utilisées dans la littérature, telles que les cylindres généralisés, les tores, les cônes, etc. Nous avons validé nos assertions en procédant à une évaluation globale des résultats obtenus, d'abord en faisant une approximation par morceaux de l'espace poral avec les ellipsoïdes, ensuite en faisant le drainage sur nos modèles et enfin en montrant qu'on peut utiliser ces résultats dans d'autres domaines en dehors des sciences du sol. En effet,

- L'approximation avec les ellipsoïdes nous permettent de caractériser la géométrie de l'espace poral pour classifier les différents types d'espace poral. Ceci est visible en calculant l'erreur d'approximation globale ρ^7 qu'on obtient après approximation.
- Les visualisations en coupes 2D et en 3D des résultats du drainage⁸ montrent que le

7. Nous en parlerons de l'évaluation de cette erreur dans le chapitre 5

8. Nous aborderons la notion du processus de drainage en détaille dans le chapitre 5

drainage avec les ellipsoïdes fonctionne au moins aussi bien que le drainage boule⁹. L'effet « boules » aux frontières observé sur les résultats du drainage disparaît plus ou moins sur les résultats du drainage avec les ellipsoïdes. Avec un ensemble de boules connexes, on a plus de chance d'avoir certaines boules qui contiennent de l'eau et d'autre de l'air et vice versa alors qu'avec les ellipsoïdes ce n'est pas le cas. En effet, pour chaque boule de l'ensemble de boules connexes, on doit comparer son diamètre avec le diamètre seuil de Young Laplace alors qu'avec un seul ellipsoïde qui approxime tout l'ensemble connexe de boules, une seule comparaison est suffisante. Donc à une comparaison, soit l'ellipsoïde est pleine d'eau, soit pleine d'air.

- Le calcul des MAE¹⁰ donne une performance "chiffrée" des méthodes avec de meilleurs résultats avec les ellipsoïdes qu'avec les autres représentations. Nous présenterons une illustration dans le chapitre 5 en comparant nos résultats avec ceux obtenus dans [Pot et al.,2015]
- Le temps de calcul est un aspect important des performances des méthodes. En effet, le temps de calcul que mets l'algorithme de drainage avec les ellipsoïdes est considérablement réduit par rapport à celui avec les autres représentations. La représentation de l'espace poral avec une approximation par morceaux d'ellipsoïdes diminue considérablement le nombre de primitives, ce qui diminue la complexité de l'algorithme de drainage. Généralement dans un cas pratique, si $O(v)$ est la complexité de l'algorithme avec les ellipsoïdes où v est le volume total des ellipsoïdes et $O(w)$ la complexité avec les autres primitives, w est le volume total des autre primitives, alors le ratio $\frac{w}{v}$ est entre 5 et 100 en fonction des données.
- Les ellipsoïdes donnent une approximation par morceaux relativement intrinsèque de l'espace poral pouvant être utilisée pour d'autres applications par exemple la simulation des dynamiques biologiques dans le sol et aussi l'indexation de formes 3D qui n'a

9. Qui sont plus lent en complexité et donne une représentation moins compacte de l'espace poral

10. Erreur qu'on commet en faisant le drainage avec une représentation boules ou ellipsoïdes,etc.

rien à voir avec les sciences du sol. En effet, Cette assertion est soutenue par le premier point. Car on arrive à avoir une approximation d'un volume complexe avec un nombre réduit d'ellipsoïdes. L'utilisation des résultats de l'approximation obtenue pour faire du drainage, nous donne de bons résultats qui se rapprochent plus ou moins de l'expérience. Il est important de noter que contrairement aux autres applications, le drainage exige beaucoup plus de contraintes (compacité, connexité, faible taux d'erreur d'approximation) sur la structure géométrique de la forme. Donc si on arrive à faire du drainage avec nos ellipsoïdes, on peut facilement les utiliser pour faire la simulation des dynamiques biologiques et aussi modéliser d'autres structures complexes.

- Enfin, les ellipsoïdes donnent des informations compactes sur la nature de la forme à approximer. Ils sont simples à utiliser et facilement malléables. Ils sont identifiables avec peu de paramètres, surtout lorsqu'elles sont sous la forme réduite.

3.5 Approximation des formes

Nous allons dans cette partie commencer avec les notions qui on traits avec nos travaux. Nous allons voir quelques méthodes d'approximations de formes à partir d'un nuage de points tridimensionnels à l'aide des volumes quadriques et superquadriques. Nous allons ensuite voir quelques notions de bases qui gravitent autour ces primitives. Cette étape d'approximation est une étape cruciale dans le développement de nos méthodes et qui sera abordée dans le chapitre 4.

3.5.1 Approximation par les moindres carrés

3.5.1.1 Rappel du problème des moindres carrés

Il arrive souvent qu'un système d'équations se mettant sous la forme $Ax = b$ où A est une matrice de dimension $m \times n$, x est un vecteur colonne de dimension n , représentant les inconnues à retrouver et b est un vecteur colonne de dimension m , n'admet pas de solution. La raison cruciale est que ce système possède un nombre considérable d'équations. La matrice A possède plus de lignes que de colonnes. Il y a plus d'équations qu'il n'y a d'inconnues i.e. $m > n$. On ne peut pas dans ce cas obtenir une erreur :

$$\varepsilon = \|Ax - b\|_2 \quad (3.60)$$

qui est égale à 0. Quand ε est égal à 0, alors x est une solution exacte du système $Ax = b$. Mais quand ε possède une valeur qui est la plus petite possible, \tilde{x} est la solution au sens des moindres carrés du système $Ax = b$. Il existe plusieurs méthodes [Charles et al., 1995] de résolution au sens des moindres carrés d'un tel système :

1. Résolution par équations normales (peu coûteux et moins précis)
2. Résolution par décomposition QR
3. Résolution par SVD (plus coûteux et plus précis)

La première méthode est la plus utilisée parmi les 3. C'est cette méthode que nous allons présenter dans cette section, puisque c'est celle la plus utilisée pour les approximations des formes par des primitives.

3.5.1.2 Solution du moindre carré par équations normales

L'objectif ici est de minimiser le carré de la norme euclidienne du vecteur résidu : $\|r\|_2^2 = r^t r$ où le résidu $r = b - Ax$.

Théorème 3.5.1. *L'ensemble solution au sens des moindres carrés $Ax = b$ est solution du système*

$$A^t Ax = A^t b \quad (3.61)$$

. C'est un système linéaire de $n \times n$ d'équations connues sous le nom d'équations normales de la matrice A .

Démonstration. $\|r\|_2^2 = (b - Ax)^t(b - Ax) = b^t b - 2x^t A^t b + x^t A^t Ax$ □

Minimiser cette expression revient à la dériver suivant le vecteur x et égaliser le résultat à 0
On obtient donc :

$$-2A^t b + 2A^t Ax = 0$$

qui se réduit à un système linéaire $n \times n$ d'équations connues sous le nom d'équations normales de la matrice A : $A^t Ax = A^t b$ Pour fournir une preuve plus détaillée de cette solution, il est important d'avoir de bonnes notions de bases sur les dérivées matricielles disponibles dans la littérature.

Corollaire. *Le système $Ax = b$, admet une unique solution au sens des moindres carrés si et seulement si*

$$A^t A$$

est inversible et dans ce cas, la solution des moindres carrés est donnée par :

$$x = (A^t A)^{-1} A^t b \quad (3.62)$$

Exemple On s'intéresse à une quantité physique z qui varie selon un paramètre physique t .
On pose le modèle :

$$z = f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$$

. La variable expliquée est z , les variables explicatives sont t, t^2, t^3 et $\ll 1 \gg$ et les paramètres du modèle, que l'on cherche, sont a, b, c et d . On réalise une série de m mesures $(t_i; z_i)_{1 \leq i \leq m}$. La

forme standard du problème de moindres carrés correspondant est : on cherche $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

réalisant $\min_{x \in \mathbb{R}^4} \|Ax - b\|$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & t_m^3 \end{pmatrix} \in M_{m,n} \text{ et } b = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

3.5.1.3 Application aux quadriques

Nous allons dans cette section, montrer comment transformer un problème d'approximation de quadrique par un nuage de points tridimensionnels en un problème des moindres carrés. Ainsi, une solution à notre problème sera une solution au sens des moindres carrés comme vu plus haut.

Problème Nous posons notre problème comme suit : On a un nuage de points en dimension 3

$(x_i, y_i, z_i)_{1 \leq i \leq n}$. On veut avec la méthode des moindres carrés, trouver la surface quadrique donnée par l'équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (3.63)$$

et qui approxime au mieux ces points. Pour que notre problème soit un problème au sens des moindres carrés, nous devons poser l'un des paramètres $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ et j à une constante k . Nous avons choisi dans notre implémentation de poser le paramètre j comme cette constante car il n'influencera pas sur la nature de notre résultat. Nous voulons rechercher

les valeurs des paramètres $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ constituant le vecteur solution x qui réalise $\min_{x \in \mathbb{R}^{10}} \|Ax - b\|$ où A est une matrice de dimension $n \times 9$ et b est un vecteur de dimension 9. Le vecteur b composé de la constante $k = j$ i.e.

$$b = \left(k \ k \ k \ k \ k \ k \ k \ k \ k \right)^t$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 y_1 & y_1 z_1 & x_1 z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2 y_2 & y_2 z_2 & x_2 z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n^2 & y_n^2 & z_n^2 & x_n y_n & y_n z_n & x_n z_n & x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$$

En résolvant notre système avec la méthode vue précédemment, on obtient

$$x = (A^t A)^{-1} A^t b$$

contenant les 9 coefficients $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ de notre quadrique plus la constante $j = k$. La quadrique obtenue sur cette forme générale, ne donne aucune information sur son type. Pour la visualiser, il faudra d'abord l'étudier et selon le type, mettre sous sa forme réduite avec les notions que nous avons invoquées plus haut en opérant des changements de repère. Car la quadrique est visualisée dans son repère orthonormé dont le centre est le centre de la quadrique et les vecteurs de bases sont les vecteurs propres obtenus en diagonalisant la matrice quadratique de sa forme générale

3.5.2 Approximation par diagonalisation de matrice de covariance

L'idée ici pour approximer une forme à partir d'un nuage de points donné est de diagonaliser la matrice de covariance obtenue à partir de ces points. Ceci permet de minimiser la somme des distances euclidiennes entre les points d'approximation et la forme à approximer. Dans le

cas des surfaces quadriques, on minimise la somme des distances algébriques. L'une de ces techniques est l'analyse en composante principale dont nous ferons un petit rappel, avant de présenter la méthode illustrée dans [Bricault et al.,1997]. C'est cette approche que nous allons implémenter. Nous commençons d'abord par rappeler quelques notions de statistique de bases utilisées.

3.5.2.1 Rappel de quelques notions statistiques

Remarque. Il est important de rappeler que notre étude porte dans un espace discret.

Variable aléatoire discrète

Soit Ω l'univers des éventualités associées à une expérience aléatoire. Une variable aléatoire réelle X est une fonction qui à tout élément ω de Ω associe un réel $X(\omega)$.

Espérance

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_i avec les probabilités p_i . L'espérance de X , notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs pondérées par leur probabilité.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (3.64)$$

C'est l'équivalent de la moyenne en statistiques.

Variance

La variance d'une variable aléatoire X est $V(X) = E[(X - E(X))^2]$, E désignant l'espérance.

C'est l'équivalent de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne en statistiques. Plus formellement, pour toute variable aléatoire X ,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (3.65)$$

. Covariance

La covariance de deux variables aléatoires X et Y est :

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad (3.66)$$

, E désignant l'espérance. Plus formellement, pour toute variables aléatoires X et Y ,

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (3.67)$$

. Notons aussi que $Cov(X, X) = V(X)$.

Matrice de covariance

Soit $X = \left\{ X_1, X_2, \dots, X_n \right\}$ un vecteur aléatoire de vecteur moyen $\mu = \left\{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \right\}$.

La matrice de covariance associée aux variables aléatoires de X est la matrice notée Σ telle que :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} = E[(X - \mu)(X - \mu)^t] \quad (3.68)$$

où $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ et $\sigma_{ii} = V(X_i) = \sigma_i^2$

Plus formellement,

$$\Sigma = E[(XX^t) - \mu\mu^t] \quad (3.69)$$

3.5.2.2 Rappel de l'analyse en composante principale

C'est l'une des techniques existantes dans la littérature permettant également d'obtenir une quadrique et plus particulièrement un ellipsoïdes à partir d'un nuage de points. Elle permet de déterminer les principales directions vers lesquelles les données varient le plus. Dans notre cas, ces directions seront les axes de notre quadrique. La quadrique est obtenue par cette méthode directement sous sa forme réduite et directement visualisable. Notre nuage de points à approxi-

mer est organisé en trois variables aléatoires X, Y et Z telle qu'un point p_i de l'approximation a pour coordonnées $(X(i), Y(i), Z(i))$ dans le repère $R_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On calcule la matrice de covariance Σ et le vecteur Ω des moyennes des variables aléatoires à partir des variables X, Y et Z . Les composantes de Ω représenteront les coordonnées du centre de notre quadrique dans le repère initial R_0 . On diagonalise ensuite Σ et on obtient les vecteurs propres $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 qui seront les vecteurs directeurs des axes de la quadrique. On note la matrice $P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la matrice de passage du repère R_0 au repère de notre quadrique $R_1 = (\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ telle que

$$M = PM' - \Omega$$

. où M est un point du repère R_0 et M' son image dans le repère R_1 On a ainsi notre quadrique de centre Ω et de rayons a, b, c respectivement pour le demi-petit axe, le demi-moyen axe et le demi-grand axe de la quadrique telle que : $a = n * \sqrt{\lambda_1}, b = n * \sqrt{\lambda_2}, c = n * \sqrt{\lambda_3}$

3.5.2.3 Approche par diagonalisation présentée dans [Bricault et al.,1997]

Nous présentons ici une approche d'approximation que nous allons implémenter et que nous allons utiliser dans l'étape d'approximation de l'espace poral avec les quadriques. C'est une methode présentée dans [Bricault et al.,1997] Cette méthode nous retourne l'équation générale d'une quadrique

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz + gx + hy + iz + j = 0$$

On se donne une équation générale de quadrique définie par une matrice A de dimension 3×3 , un point P de dimension 3, vecteur V de dimension 4 et un vecteur W de dimension 4 $A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \text{ telle que :}$$

$$P^t A P + W.V = 0 \quad (3.70)$$

Si on développe cette expression, on trouvera les coefficients de notre quadrique

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad h \quad i \quad j$$

tels que $a = a_{11}$, $b = a_{22}$, $c = a_{33}$, $d = a_{12} + a_{21}$, $e = a_{13} + a_{31}$, $f = a_{23} + a_{32}$, $g = v_1$, $h = v_2$, $i = v_3$, $j = v_4$. Soit un ensemble de point $P_i = \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq n}$ que nous voulons approximer dans l'espace 3D. On définit les matrices :

$$B = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & \sqrt{2}x_i y_i & \sqrt{2}y_i z_i & \sqrt{2}x_i z_i \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & \sqrt{2}x_i y_i & \sqrt{2}y_i z_i & \sqrt{2}x_i z_i \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

de dimension 6×6

$$C = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & \sqrt{2}x_i y_i & \sqrt{2}y_i z_i & \sqrt{2}x_i z_i \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

de dimension 6×4

$$D = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

de dimension 4×4 Les matrices peuvent être mises à jour au fur et à mesure que de nouveaux points sont ajoutés Soit le vecteur

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 \end{pmatrix}$$

^t le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre obtenue en diagonalisant la matrice de covariance donnée par :

$$\Sigma = B - CD^{-1}C^t \quad (3.74)$$

de dimension 6×6 . La quadrique définie par la matrice A et le vecteur V qui minimise le plus le critère défini par :

$$\sum_{i=1}^n (P_i^t A P_i + \begin{pmatrix} P_i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot V)^2$$

est donné par :

$$A = \begin{pmatrix} T_1 & T_4/\sqrt{2} & T_5/\sqrt{2} \\ T_4/\sqrt{2} & T_2 & T_6/\sqrt{2} \\ T_5/\sqrt{2} & T_6/\sqrt{2} & T_3 \end{pmatrix}$$

$$V = -D^{-1}C^t T \quad (3.75)$$

On peut donc retrouver les paramètres de notre quadrique comme indiqué ci-dessus. La quadrique retournée est sous sa forme générale. Comme avec la solution par les moindres carrés, il faut mettre la quadrique sous sa forme réduite avec les méthodes qu'on a décrites plus haut afin de pouvoir la visualiser.

3.5.3 Algorithmes

Nous présentons ici les algorithmes implémentés pour les approximations.

- Approximation par les Moindres Carrés (Voir l'algorithme 1)
- Approximation par diagonalisation de matrice de covariance (Voir l'algorithme 2)

Pour visualiser la quadrique résultante de nos algorithmes, il faudra étudier le type, le mettre sous sa forme réduite et le représenter dans son repère réduit. Nous avons également imple-

Algorithm 1: Approximation d'une quadrique par les moindres carrés. Cet algorithme retourne une matrice de taille 10×1 contenant tous les coefficients de notre quadrique.

- 1: Début
 - 2: - Lire le nuage de points 3D dans un fichier et mettre dans un vecteur *Data* de taille $n \times 3$
 - 3: - Fixer $j = k$
 - 4: - Pour chaque point $(x_i \ y_i \ z_i)$ de *Data*, construire la matrice *A* de taille $n \times 9$ où chaque ligne *i* contient un vecteur

$$\left(x_i^2 \ y_i^2 \ z_i^2 \ x_i y_i \ y_i z_i \ x_i z_i \ x_i \ y_i \ z_i \right)$$
 - 5: - Calculer les matrices

$$P_1 = (A^t A)^{-1}$$
 de taille 9×9 et

$$P_2 = A^t b$$
 de taille 3×1
 - 6: - Créer un vecteur vide de taille 10×1
 - 7: - Calculer la matrice

$$y = P_1 P_2$$
 de taille 9×1
 - 8: - Pour chaque élément *k* de *y*,

$$x(k) = y(k)$$
 - 9: - $x(10) = j$
 - 10: - Retourner le vecteur *x*
 - 11: Fin
-

menté la méthode appelé MVEE¹¹ qui est un peu plus complexe et qui est présentée dans [Todda1 et al.,2007] permettant d'approximer de manière efficace un nuage de point par un ellipsoïde. L'algorithme retourne cette fois les caractéristique de l'ellipsoïde sous la forme réduite. L'algorithme détermine l'ellipsoïde minimal qui contient au mieux le nuage de point qui le décrit.

3.5.4 Test de nos algorithmes.

Pour tester nos algorithmes afin de s'assurer qu'ils fonctionnent correctement, nous avons pris un exemple de quadrique dont le type est bien connu à l'avance : équation générale d'un ellipsoïde. Considérons l'ellipsoïde d'équation générale :

$$\phi_{R_1}(x, y, z) = 7x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 2yz - 4xz - 4x + 5y + 4z + 4$$

11. Minimum Volume Enclosing Ellipsoid

Algorithm 2: Approximation d'une quadrique par diagonalisation de matrice de covariance. Cet algorithme, comme la précédente, retourne une matrice de taille 10×1 contenant tous les coefficients de notre quadrique.

- 1: Début
- 2: - Lire le nuage de points 3D dans un fichier et mettre dans un vecteur $Data$ de taille $n \times 3$
- 3: - Créer les matrices contenant des 0 : B , C et D de taille respectives 6×6 , 6×4 et 4×4
- 4: - Pour chaque point $(x_i \ y_i \ z_i)$ de $Data$, faire les affectations suivantes

$$B = B + \begin{pmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & \sqrt{2}x_i y_i & \sqrt{2}y_i z_i & \sqrt{2}x_i z_i \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & \sqrt{2}x_i y_i & \sqrt{2}y_i z_i & \sqrt{2}x_i z_i \end{pmatrix}$$

$$C = C + \begin{pmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & \sqrt{2}x_i y_i & \sqrt{2}y_i z_i & \sqrt{2}x_i z_i \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = D + \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{pmatrix}$$

- 5: - Calculer la matrice de covariance

$$\Sigma = B - CD^{-1}C^t$$

de taille 6×6

- 6: - Diagonaliser la matrice Σ et mettre ses vecteurs propres dans une matrice P de taille 6×6 et ses valeurs propres dans un vecteur Q de taille 6×1 telles que $Q(k)$ représente la valeur propre associée au vecteur propre

$$P(j, k)_{1 \leq j \leq 6}$$

- 7: - Calculer la plus petite valeur propre de Q qui se trouve à la position k_1
- 8: - Créer un vecteur T de taille 6×1 et le remplir comme suit :

$$T = P(j, k_1)_{1 \leq j \leq 6}$$

- 9: - Créer la matrice A de taille 3×3 et le remplir comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} T(1) & T(4)/\sqrt{2} & T(5)/\sqrt{2} \\ T(4)/\sqrt{2} & T(2) & T(6)/\sqrt{2} \\ T(5)/\sqrt{2} & T(6)/\sqrt{2} & T(3) \end{pmatrix}$$

- 10: - Créer le vecteur V de taille 4×1 , et le remplir comme suit :

$$V = -D^{-1}C^t T$$

- 11: Créer le vecteur x de taille 10×1 et lui remplir comme suit :

- $x(1) = A(1, 1)$
- $x(2) = A(2, 2)$
- $x(3) = A(3, 3)$
- $x(4) = A(1, 2) + A(2, 1)$
- $x(5) = A(1, 3) + A(3, 1)$
- $x(6) = A(2, 3) + A(3, 2)$
- $x(7) = V(1)$
- $x(8) = V(2)$
- $x(9) = V(3)$
- $x(10) = V(4)$

- 12: - Retourner le vecteur x

- 13: - Fin
-

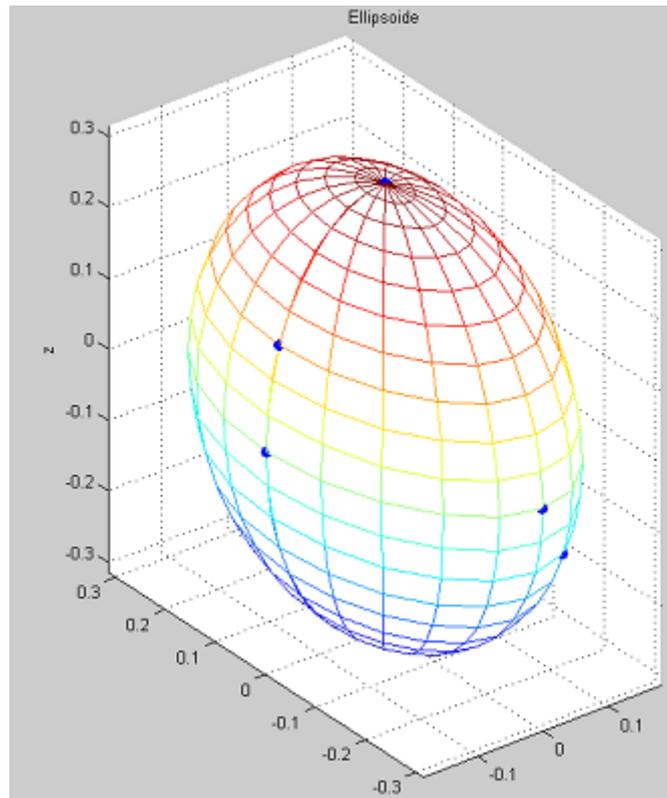


FIGURE 3.7: Ellipsoïde original

Nous avons , grâce à certaines techniques, extrait quelques points 3D appartenant à l'ellipsoïde dans son repère réduit $R_1 = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ que nous avons stocké dans un fichier. Nous avons également sauvegardé la matrice de passage P du repère $R_0 = (\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ au repère réduit $R_1 = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ qui nous permettra lors de l'approximation , de récupérer les points 3D du repère réduit R_1 et les faire passer dans le repère initial R_0 avant d'effectuer l'approximation. Puisque c'est dans ce repère que s'effectue l'approximation et l'équation générale obtenue est dans ce même repère. Les matrices quadratique et linéaire de cette quadrique sont données par :

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$L = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On diagonalise Q qui est une matrice symétrique et on obtient ses vecteurs propres $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.1458 \\ -0.8300 \\ -0.5384 \end{pmatrix}$

, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -0.5586 \\ 0.3800 \\ -0.7372 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -0.8165 \\ -0.4082 \\ 0.4082 \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$,

$\lambda_3 = 9$. Le centre de la quadrique dans le repère R_0 est

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{11}{27} \\ \frac{-26}{27} \\ \frac{-29}{54} \end{pmatrix}$$

Car on a à faire à un ellipsoïde qui est une quadrique à centre. On calcul les rayons a , b et c de l'ellipsoïde comme suit :

$$a = \sqrt{-\phi_{R_1}(\Omega)/\lambda_1}, b = \sqrt{-\phi_{R_1}(\Omega)/\lambda_2}, c = \sqrt{-\phi_{R_1}(\Omega)/\lambda_3}$$

D'où l'équation de notre quadrique dans le repère R_1 :

$$\phi_{R_2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1$$

i.e.

$$\phi_{R_2} = \frac{X^2}{0.0988^2} + \frac{Y^2}{0.0988^2} + \frac{Z^2}{0.0329^2} - 1$$

Voir la figure 3.7 montrant la représentation de cette quadrique. Nous avons extraire de cette quadrique 10 points que nous avons utiliser pour effectuer les approximations :

$$Data = \begin{pmatrix} 0.3143 & 0 & 0 \\ -0.3143 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3143 & 0 \\ 0 & -0.3143 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1814 \\ 0 & 0 & -0.1814 \\ -0.094 & 0.300 & 0 \\ 0.094 & -0.300 & 0 \\ -0.170 & -0.200 & -0.100 \\ 0.170 & -0.200 & -0.100 \end{pmatrix}$$

Lors de l'exécution de nos algorithmes d'approximation, pour chaque points

$$M' = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$$

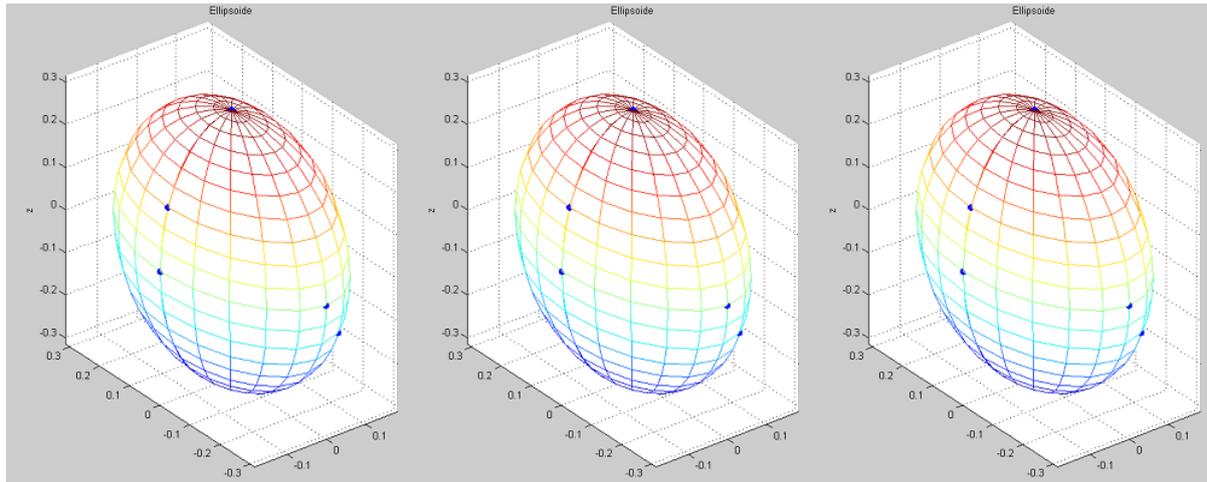
de $Data$ du repere R_1 , on calcule

$$M = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

dans le repère R_0 , tel que :

$$M = PM' + \Omega$$

On obtient donc pour chaque algorithmes les résultats suivants classés dans le tableau ci-dessous :



Dans l'ordre, l'ellipsoïde original, l'ellipsoïde obtenu par moindres carrés et ellipsoïde obtenu par diagonalisation de matrice de covariance

FIGURE 3.8: Ellipsoïdes résultant des algorithmes d'approximations

	Équation générale	Équation réduite
Originale	$7x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 2yz - 4xz - 4x + 5y + 4z + 4 = 0$	$\frac{x^2}{0.0988^2} + \frac{y^2}{0.0988^2} + \frac{z^2}{0.0329^2} = 1$
Moindres carrés	$6.9x^2 + 3.9y^2 + 3.9z^2 + 3.9xy - 1.9yz - 3.9xz - 3.9x + 4.9y + 3.9z + 3.9 = 0$	$\frac{x^2}{0.0988^2} + \frac{y^2}{0.0988^2} + \frac{z^2}{0.0329^2} = 1$
Diagonalisation	$0.7x^2 + 0.4y^2 + 0.4z^2 + 0.4xy - 0.2yz - 0.4xz - 0.4x + 0.5y + 0.4z + 0.4 = 0$	$\frac{x^2}{0.0988^2} + \frac{y^2}{0.0988^2} + \frac{z^2}{0.0329^2} = 1$

Voir les représentations dans la figure 3.8 montrant en 1 la quadrique originale, la 2 montrant celle obtenue avec les moindres carrés et la 3 montrant celle obtenue par diagonalisation de matrice de covariance. On peut observer tour à tour les points de contrôle représentant les points utilisés pour effectuer l'approximation

3.5.5 Approximation d'un nuage de points par un superellipsoïde

Tout comme avec les ellipsoïdes, pour décrire une forme à base de superellipsoïdes, il faut d'abord savoir approximer un ensemble de points 3D par un superellipsoïde. On doit être à mesure de déterminer les paramètres permettant de définir la superquadrique qui modélise le mieux ces données. Nous présentons ici une méthode proposée dans [Chevalier et al., 2005]. On considère que le superellipsoïde qui approche le plus vraisemblablement les données est celui dont la somme des distances au carré de chaque point à sa surface est la plus faible. Pour

un ensemble de n points tridimensionnels, il s'agit de trouver le vecteur des 11 paramètres $A = [a_1, a_2, a_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \phi, \theta, \psi]$ qui minimise :

$$\Gamma(A) = (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} \sum_{i=1}^n d(x_i, A)^2 \quad (3.76)$$

où d est la distance d'un point à le superellipsoïde, a_1, a_2, a_3 sont les facteurs d'agrandissement, et ϕ , θ et ψ sont les angles de rotation, suivant les axes x , y et z respectivement. Ce problème d'optimisation nous amène à avoir un système non linéaire qui ne peut être résolu directement. D'où la nécessité d'utiliser un algorithme de régression. La méthode se décompose alors en deux étapes. La première est de trouver un ensemble de paramètres initiaux pour le vecteur a , suivie d'une seconde étape de minimisation itérative.

3.5.5.1 Paramètres initiaux

L'estimation des paramètres initiaux du vecteur a consiste à déterminer l'ellipsoïde d'inertie. C'est l'ellipsoïde de départ qui approxime au mieux le nuage de points de départ. On peut donc utiliser les méthodes d'approximation par les ellipsoïdes que nous avons vu plus haut [Todda1 et al.,2007, Bricault et al.,1997]. L'ellipsoïde d'inertie E ici est obtenu par la méthode MVEE qui retourne r_x qui est le rayon de E sur l'axe x , r_y qui est le rayon de E sur l'axe y , r_z qui est le rayon de E sur l'axe z , G qui est le centre de E de coordonnées (x_0, y_0, z_0) , v_1, v_2, v_3 qui sont les vecteurs de rotation de E . Les paramètres initiaux A' de A sont donc fixés comme suit :

$\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 1$; $a_1 = r_x$; $a_2 = r_y$; $a_3 = r_z$; $t_x = x_0$; $t_y = y_0$; $t_z = z_0$; $\phi = \text{atan2}(v_2(3), v_3(3))$;
 $\theta = \text{atan2}(-v_1(3), \sqrt{v_2(3)v_2(3) + v_3(3)v_3(3)})$; $\psi = \text{atan2}(v_1(2), v_1(1))$.

3.5.5.2 Phase de régression des paramètres de A

Pour la phase de régression, l'algorithme de régression à l'instar de celui de Levenberg-Marquardt ¹² est utilisé. On trouve beaucoup d'implémentations de cet algorithme pouvant être utilisées que ce soit en C, C++ ou sur scilab. Sur Scilab, on a le sous programme lsqcurvefit. On lui passe A' et le nombre d'itération. A la fin de cette phase, on a notre vecteur A qui contient les 8 paramètres de notre superellipsoïde.

12. L'algorithme de Levenberg-Marquardt peut être vu comme une régularisation de l'algorithme de Gauss-Newton, en particulier lorsque la jacobienne de la fonction à minimiser n'est pas de rang plein. Toutefois il existe un lien étroit avec les méthodes dites de région de confiance.

MÉTHODOLOGIE DE SEGMENTATION VOLUMIQUE D'UNE FORME COMPLEXE AVEC LES ELLIPSOÏDES

4.1 Introduction

Dans cette thèse, nous continuons avec l'amélioration des travaux présentés dans [Ngom et al.,2012, Monga,2007, Doube,2015]. D'une manière générale, notre modélisation prend en entrée un échantillon de sol décrit par une image tomographique 3D et retourne en sortie une approximation par morceaux à l'aide d'une réunion d'ellipsoïdes, en passant par une représentation intermédiaire constituée de boules. On réussit ainsi à représenter des centaines de millions de voxels au moyen de quelques milliers de primitives seulement. Notre méthode se rassure que les résultats contiennent des propriétés géométriques fortes par rapport aux axes de symétrie et à la surface de la forme. Nous commençons par aborder le cadre théorique du calcul de l'approximation par morceaux d'une forme à l'aide de volumes quadriques[Banegas et al.,2001, Chevalier et al.,2005, Jaklic et al.,2013]. Cela passe par la définition d'un ensemble de représentations hiérarchisés qui part des voxels, puis des boules [Delerue et al.,1999, Delerue et al.,2002, Perrier,1995, Monga et al.,2007] et enfin aux volumes quadriques. Nous pouvons voir sur les figures 4.1 et 4.2 des exemples de représentation de milieux poreux de sols en 2D p1bkk03a¹.

1. C'est un échantillon de sol que nous avons utilisé. Nous y reviendrons dans le chapitre 5

Dans les sections qui vont suivre, nous allons détailler les différentes étapes de notre méthode. Nous calculons dans la première étape une segmentation "initiale" qui consiste à partitionner notre ensemble de boules en "ellipsoïdes primaires". Nous utilisons dans cette étape la méthode de l'octree qui va consister à effectuer une division récursive de l'ensemble de boules sur la base d'un critère donné. Pour apporter plus de précision à nos résultats, nous avons également utilisé des méthodes statistiques [Alsallakh,2014, Banegas et al.,2001] pour trouver les ensembles de boules connectées et compactes. Les méthodes statistiques sont des variantes de la méthode de clustering dynamique, aussi appelée K-means qui consiste à rechercher fondamentalement la meilleure partition d'un nuage de points donné en K classes. Dans la seconde étape, nous appliquons la fusion en utilisant un algorithme de croissance de régions sur les ellipsoïdes primaires obtenus à la première étape. Ceci va permettre de réduire considérablement le nombre de primitives. Nous obtenons donc un ensemble final d'ellipsoïdes (« ellipsoïdes terminaux ») représentant de manière robuste et intrinsèque la forme [Monga,2007]. Nous avons validé notre approche au moyen d'études de sensibilité sur des données de milieux poreux synthétiques et réelles. Nous l'avons également validé en simulant le drainage².

4.2 Stratégie de division-fusion et de croissance de régions.

Dans cette partie, nous donnons le principe des algorithmes que nous avons développés. Ces algorithmes ont pour but le partitionnement de nos données organisées sous forme d'objet 3D en sous ensembles d'objets 3D connexes et compacts qui seront approximés par des volumes quadriques. Nos algorithmes sont organisés en deux grandes phases que nous allons détailler ici. Nous avons utilisé deux stratégies bien connues en segmentation. Il s'agit de la stratégie de Division-Fusion. Nous avons appelé l'algorithme de cette phase l'algorithme de segmentation initiale qui nous permet de déterminer les volumes quadriques primaires. Nous procédons à la

2. Nous y reviendrons dans le chapitre 5 lorsque nous parlerons du drainage

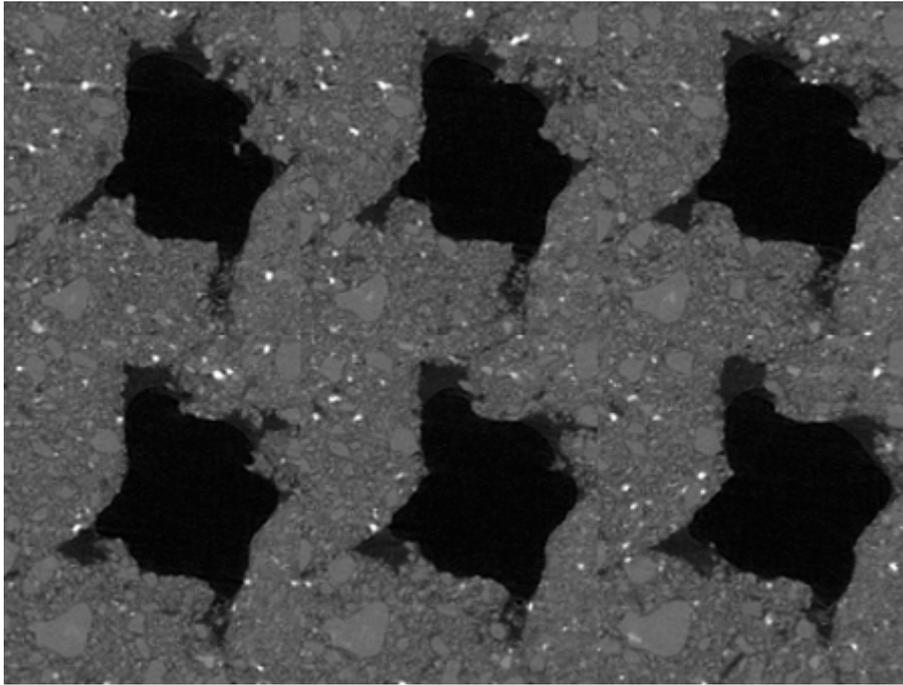


FIGURE 4.1: Coupes 2D (de 48 à 53) d'une image tomographique 3D de sol p1bkk03a non seuillée, où les pixels de l'espace poral sont en noir et les pixels de la partie solide sont représentés par les autres couleurs

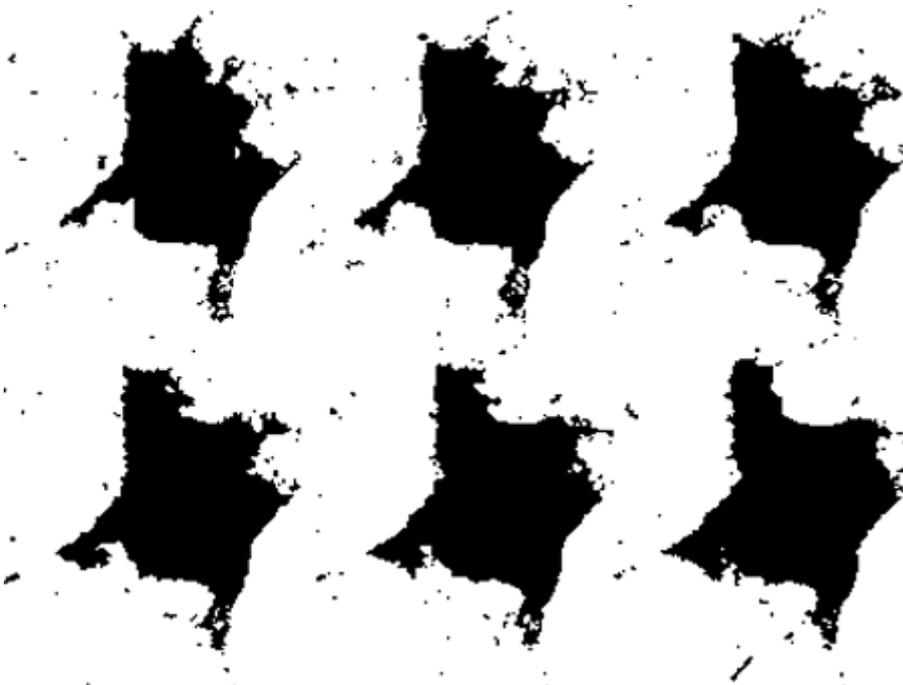


FIGURE 4.2: Coupes 2D (de 48 à 53) d'une image tomographique 3D de sol p1bkk03a. On extrait d'abord les voxels décrivant l'espace poral par seuillage grâce à l'estimation de la valeur de porosité. Les pixel des pores sont en noir et les pixels de la partie solide sont en blanc.

segmentation des ensembles d'objets 3D en suivant le principe de l'algorithme des K-means ou de l'octree. Nous avons adapté l'algorithme des K-means à nos données qui sont sous forme de graphe d'objets 3D interconnectés. Notre seconde stratégie est la croissance de régions encore appelée phase de regroupement qui consiste à fusionner les ellipsoïdes primaires en fonction de certains critères bien définis pour obtenir des ellipsoïdes finaux. Nous utilisons une algorithmique essentiellement basée sur les structures de graphes. Nous nous basons sur une structure de données efficace qui a fait ses preuves en segmentation d'images 3D [Wrobel et al.,1987] et que nous avons légèrement enrichie.

4.2.1 Division-fusion en utilisant la structure octree

La plupart des méthodes de segmentation basées sur les approches de division-fusion utilisent les structures de données quadtree (cas 2D) et octree(cas 3D) pour partitionner un objets complexes en ensemble de sous régions ou groupes. Cette situation est très souvent observée dans la segmentation d'images où l'objectif de l'approche est de partitionner de façon automatique une image en un ensemble de régions en fonction d'un critère d'homogénéité. Ce critère est le plus souvent un prédicat que chaque région de la partition doit vérifier. Deux grandes étapes définissent l'approche, à savoir une division qui se fait en un premier temps et dont le but est de détecter toutes les régions initiales de l'image ; et la fusion dans un second temps qui permet de regrouper les régions connexes et homogènes du point de vue du prédicat qu'on s'est donné. Il peut arriver qu'un prédicat différent soit utilisé à chacune des étapes. L'algorithme de division se déroule comme suit : au début, l'image entière est considérée comme une région entière. Pour chaque région R_i ne vérifiant pas le prédicat, R_i est divisée en plusieurs sous régions. L'algorithme est répété sur chaque sous région et l'on s'arrête lorsqu'il ne reste plus de région qui satisfasse le prédicat d'homogénéité. L'algorithme est réalisé par la méthode de l'arbre quaternaire quadtree ou l'arbre octal octree. Ici chaque région ne vérifiant pas le critère est divisée

respectivement en quatre pour constituer quatre fils et en huit pour constituer huit fils. Nous allons dans cette section parler du quadtree et nous allons généraliser par la suite avec l'octree. Nous présenterons pour terminer notre algorithme de division-fusion à base de l'octree.

4.2.1.1 Les quadtrees

Définition 4.2.1. Un quadtree est un arbre quaternaire ayant une racine et dans lequel chaque noeud interne a quatre fils. Chaque noeud du quadtree correspond à un carré. Si un noeud v a des fils, alors leurs carrés correspondants sont les quatre quadrants du carré de v . Cela implique que les carrés des feuilles forment ensemble une subdivision du carré de la racine. Cette subdivision est appelée subdivision quadtree.

La figure 4.3a montre un quadtree et la subdivision correspondante. Les fils de la racine sont étiquetés par NE , NO , SO et SE pour indiquer à quel quadrant ils correspondent. NE représente le quadrant Nord-Est, NO pour le quadrant Nord-Ouest, et ainsi de suite. Les faces d'une subdivision en quadtree ont la forme des carrés, bien qu'ils puissent souvent avoir plus de quatre sommets. Les quatre sommets aux coins du carré sont appelés sommets d'angle. Les segments reliant les sommets consécutifs sont les côtés du carré. Les quadtrees peuvent être utilisés pour stocker différents types de données. Nous décrivons ici une variante qui stocke un ensemble de points dans le plan. Dans ce cas, on applique une subdivision récursive des carrés tant qu'il y a plus d'un point dans un carré. Ainsi, on définit un quadtree pour un ensemble de points P à l'intérieur d'un carré δ comme suit : soit $\delta = [I I'] \times [J J']$.

- Si $\text{card}(P) \leq 1$ alors le quadtree est une seule feuille où sont stockées l'ensemble des points P et le carré δ
- Sinon, notons δ_{NE} , δ_{NO} , δ_{SO} et δ_{SE} les quatre quadrants de δ . notons $x_m = \frac{(I+I')}{2}$ et

$$p_{NE} = \{p \in P : p_x > x_m \text{ et } p_y > y_m\},$$

$$p_{NO} = \{p \in P : p_x \leq x_m \text{ et } p_y > y_m\},$$

$$p_{SO} = \{p \in P : p_x \leq x_m \text{ et } p_y \leq y_m\},$$

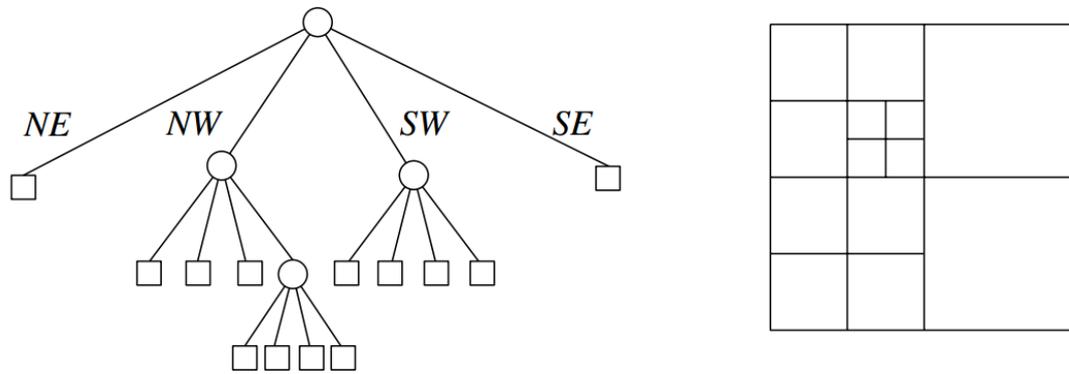
$$p_{SE} = \{p \in P : p_x > x_m \text{ et } p_y \leq y_m\}.$$

$y_m = \frac{(J+J')}{2}$. On définit

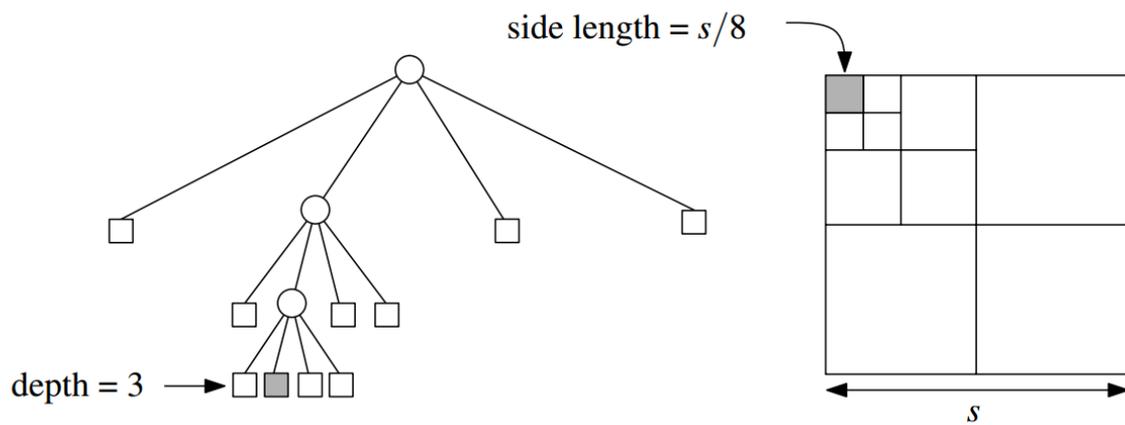
Le quadtree est maintenant un nœud racine v où le carré δ est stocké. On note $\delta(v)$ le carré stocké dans le nœud v . v aura également quatre fils comme on peut le voir dans la figure 4.3c :

- le fils NE est la racine d'un quadtree pour l'ensemble des points P_{NE} à l'intérieur du carré δ_{NE} ,
- le fils NO est la racine d'un quadtree pour l'ensemble des points P_{NO} à l'intérieur du carré δ_{NO} ,
- le fils SO est la racine d'un quadtree pour l'ensemble des points P_{SO} à l'intérieur du carré δ_{SO} ,
- le fils SE est la racine d'un quadtree pour l'ensemble des points P_{SE} à l'intérieur du carré δ_{SE} .

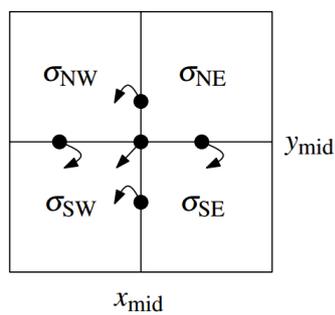
La définition récursive d'un quadtree se traduit par un algorithme récursif dont le principe consiste à diviser le carré courant en quatre quadrants, répartir l'ensemble des points dans les différents quadrants en fonction d'un critère et construire récursivement les quadtrees pour chaque quadrant avec son ensemble de points associé. La récursivité s'arrête lorsque l'ensemble de points contient moins de deux points. La récursivité commence avec un carré qui est le carré associé au nœud racine du quadtree et qui contient l'ensemble de tous les points. A chaque étape de la construction du quadtree, le carré contenant les points est divisé en quatre plus petits carrés. Cela ne signifie pas que l'ensemble de points est divisé car il peut arriver que tous les points soient dans le même quadrant. Par conséquent on peut avoir des quadtrees déséquilibrés comme indiqué dans la figure 4.3d. Il n'est donc pas possible d'exprimer la taille et la profondeur d'un quadtree en fonction du nombre de points qu'il stocke. Cependant, la profondeur d'un



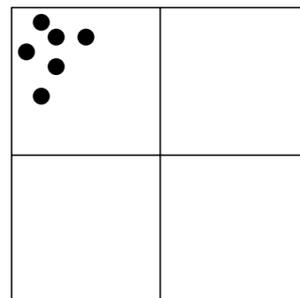
(a) Exemple de quadtree avec son carré de subdivisions correspondantes



(b) Taille et profondeur d'un quadtree



(c) Quatre carrés fils d'un quadtree



(d) Carré d'un quadtree déséquilibré

FIGURE 4.3: Mise en oeuvre de la subdivision d'un quadtree pour stocker un ensemble de points.[Berg et al.,2008]

quadtree est liée à la distance entre les points et la taille de le carré initial. Ceci est précisé dans les théorème ci-dessous. Voir également une illustration dans la figure 4.3b.

Théorème 4.2.1. *La profondeur d'un quadtree pour un ensemble P de points dans le plan est au plus $\log(\frac{s}{c}) + \frac{3}{2}$, où c est la plus petite distance entre deux points quelconques de P et s est la longueur latérale du carré initial qui contient P .*

Théorème 4.2.2. *Un quadtree de profondeur d stockant un ensemble de n points a $O((d+1)n)$ noeuds et peut être construit en temps $O((d+1)n)$.*

La figure 4.3 montre une illustration de la subdivision d'un quadtree.

4.2.1.2 Les octrees

Les octrees à la figure 4.4, sont une généralisation des quadtrees en 3D et possèdent exactement les mêmes propriétés que ces derniers. Les nœuds sont représentés par des cubes. A chaque étape de la récursivité, le cube courant est divisé en 8 cubes, chacun associé à un nœud fils. Nous avons divisé le grand cube de départ en un ensemble de sous cubes. Les boules sont ensuite réparties dans les cubes en fonction d'un critère définit. On construit enfin l'octree qui va stocker toutes les boules de départ. Avec cette méthode nous obtenons à la fin un ensemble de sous-ensembles de boules connexes qu'on va approximer par un ellipsoïde. Ces ellipsoïdes seront les ellipsoïdes primaires. Nous donnons ci-dessous l'algorithme de division-fusion avec l'octree.

4.2.1.3 Algorithme

L'algorithme 3 décrit les différentes étapes.

La méthode de l'octree génère un grand nombre d'ellipsoïdes primaires et on a pas une précision chiffrée sur les résultats obtenus. Nous avons donc opté pour l'utilisation des méthodes

Algorithm 3: Segmentation Initiale : le programme prend en paramètre un fichier de boules retourne un ensemble d'ellipsoïdes.

- 1: Début
 - 2: Structures de données
Seuil : Seuil de subdivision (seuil d'approximation)
ImagePoint : structure de données avec 2 champs :
nbre : pour le nombre de boules dans le point images
etiq : pour les étiquettes de toutes les boules dans le point images
M : matrice de *ImagePoint* ou image 3D de dimension $DIM \times DIM \times DIM$
B : tableau de dimension N boules et 4 colonnes. Encore appelé tableau de caractéristiques des boules
 $B[l, 1]$ =coordonnée x de la boule l
 $B[l, 2]$ =coordonnée y de la boule l
 $B[l, 3]$ =coordonnée z de la boule l
 $B[l, 4]$ =rayon r de la boule l
E : Contiendra l'ensemble de tous les ellipsoïdes qui approximent l'ensemble de toutes les boules.
 - 3: Lecture du fichier de boules et initialisation des structures de données : *B* et l'image 3D *M*.
 - 4: Pour chaque boule $b \in B$ de coordonnées i, j, k et de rayon r , $M[i, j, k].nbre = 1$; $M[i, j, k].etiq[1] = l$; //
 $M[i, j, k].nbre = 1 \Rightarrow$ le point images est une boule et $M[i, j, k].nbre = 0$ sinon, $1 \leq i \leq DIM, 1 \leq j \leq DIM, 1 \leq k \leq DIM$
 - 5: Construction de l'octree à partir de l'image 3D de *DIM ImagePoint* en Top-Down. La profondeur = $\log_2(DIM)$.
 Au départ la racine de l'octree stocke toute l'image *M* de toutes les boules. $N = \text{card}M[i, j, k].nbre = 1, 1 \leq i \leq DIM, 1 \leq j \leq DIM, 1 \leq k \leq DIM$
 - 6: On procède à la subdivision récursive du cube image.
 FUNCTION *SubdivisionRecursive(M, DIM)*
 Debut fonction
 On approxime l'ensemble de N boules de l'image *M* par un ellipsoïde e et on obtient une erreur d'approximation ε .
 Si l'erreur d'approximation ε vérifie le seuil, alors on garde l'ellipsoïde et on arrête la division récursive.
 Ajouter e à *E*
 Aller à *FINFUNCTION*
 On divise l'image *M* en 8 sous-images M_1, \dots, M_8 fils de dimension chacune $DIM/2 \times DIM/2 \times DIM/2$
 Pour chaque sous image $M_t, 1 \leq t \leq 8$, faire un appel récursif de *SubdivisionRecursive*($M_t, DIM/2$);
FINFUNCTION
 - 7: FIN : Le programme s'arrête s'il n'y a plus de subdivision possible. L'ensemble des ellipsoïdes se trouve en ce moment dans la structure *E*.
-

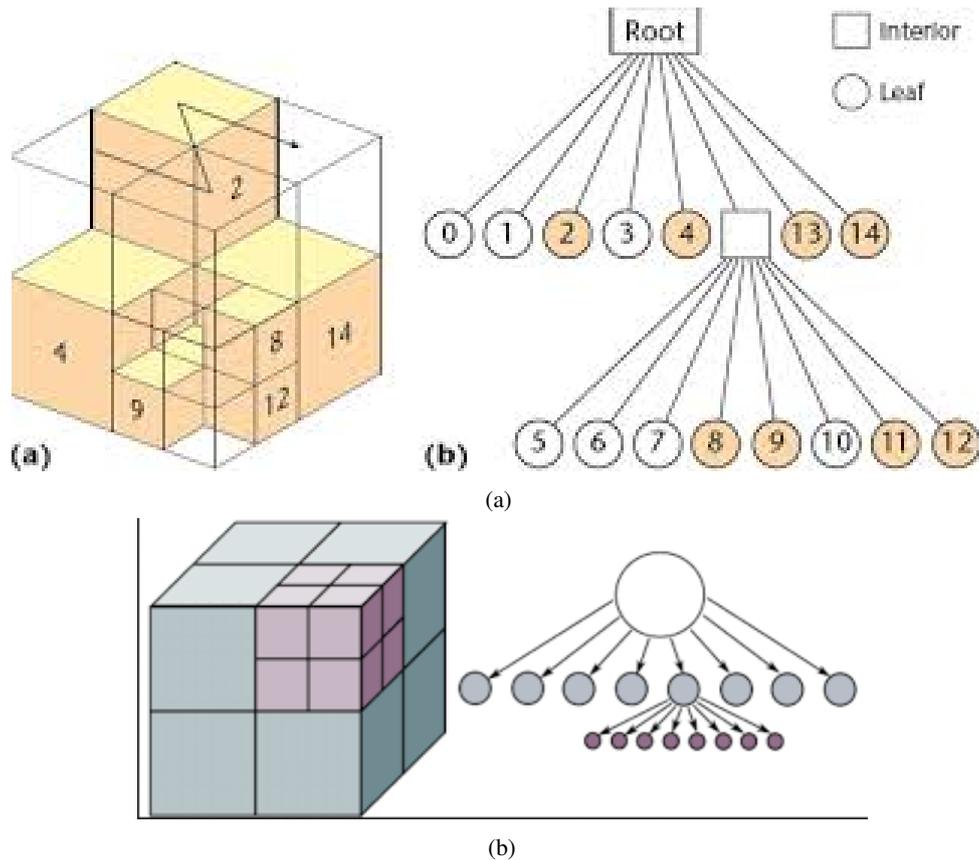


FIGURE 4.4: Exemple d'octree avec son cube de subdivision

statistiques pour avoir plus de précision sur les résultats. Une variante est la méthode de clustering K-means qui est un algorithme assez connu pour sa stabilité et son efficacité.

4.2.2 Division-fusion utilisant l'algorithme des K-means

Dans un premier temps, nous appliquons l'algorithme des K-means à l'ensemble des boules où chaque boule est attachée à un poids définissant son volume. Nous introduisons des heuristiques basées sur le calcul des erreurs d'approximation en ajustant les ellipsoïdes aux sous-ensembles de boules. Pratiquement nous considérons soit l'ensemble de toutes les boules maximales incluses dans la forme ou l'ensemble minimal. Nous avons mis k à une valeur initiale égale à un pourcentage donné du nombre de boules par exemple 20 ou 30%. Nous fixons également une valeur maximale pour l'erreur d'approximation d'un ensemble de boules par un ellipsoïde, par exemple de 0,7 ou 0,8. L'algorithme des K-means fournit K sous-ensembles de

boules compacts. Pour chaque sous-ensemble de boules, nous déterminons les composantes connexes, généralement une par sous-ensemble. Chaque composante connexe est ensuite approximée au moyen d'un ellipsoïde. Pour calculer la meilleure approximation d'un ensemble de boules par un ellipsoïde, nous procédons par la méthode suivante :

- Echantillonnage des points 3D sur les sphères correspondantes aux boules
- Calcul de l'enveloppe convexe des points échantillonnés. Si le taux d'échantillonnage est suffisant et uniforme alors cette enveloppe convexe correspond à l'enveloppe convexe de l'ensemble de boules de départ.
- Calcul du meilleur ellipsoïde qui approxime au mieux les points de l'enveloppe convexe à l'aide de la méthode MVEE décrit dans [Todda1 et al.,2007] ou de la méthode classique basée sur la matrice de covariance en [Bricault et al.,1997].
- Calcul de l'erreur d'approximation en se servant des voxels initiaux ; nous comptons le nombre de voxels de l'ellipsoïde inclus dans la forme initiale, puis calculons le rapport entre le volume de la forme dans l'ellipsoïde et le volume de l'ellipsoïde ; ce rapport ne caractérise pas strictement l'erreur d'approximation de l'ensemble de boules par l'ellipsoïde mais donne une estimation de la façon dont l'ellipsoïde est inclus dans la forme

Ainsi, nous obtenons un ellipsoïde avec une erreur d'approximation égale au pourcentage de voxels de l'ellipsoïde inclus dans la forme initiale. Nous conservons l'ellipsoïde si l'erreur d'approximation est inférieure à un seuil donné. Nous itérons ce processus pour chaque composante connexe des k classes fournies par l'algorithme k -means. Nous obtenons finalement un ensemble d'ellipsoïdes, chacun approximant un sous ensemble de boules. Nous retirons de l'ensemble des boules à traiter celles qui sont déjà dans un ellipsoïde. Nous obtenons ainsi un premier ensemble d'ellipsoïdes primaires et un ensemble de boules que nous n'avons pas pu approcher. Ensuite, nous itérons le schéma ci-dessus en utilisant l'ensemble des boules restantes, jusqu'à ce que plus aucun ellipsoïde ne puisse être obtenu. Ainsi, nous obtenons un ensemble

d'ellipsoïdes et un ensemble de boules maximales "non approximées". Pour l'ensemble des boules maximales "non approximées", nous calculons les composantes connexes. Pour chaque composante connexe, nous calculons un autre k-means où k est fixé à un pourcentage du nombre de boules de la composante. Nous faisons cette étape une seule fois et gardons les ellipsoïdes « corrects » et les boules restantes sont conservées comme ellipsoïdes. Par conséquent, nous obtenons un ensemble d'ellipsoïdes où un petit nombre sont des boules. Pratiquement cet ensemble d'ellipsoïdes est faiblement connecté et forme une approximation par morceaux de la forme. La figure 4.11 résume ces étapes.

4.2.2.1 Principe de l'algorithmique de K -means

Le terme K -means a été utilisé pour la première fois par MacQueen en 1967 et est un algorithme d'apprentissage non supervisé qui permet de regrouper ou de partitionner un ensemble de données non étiquetées³ en clusters⁴. Le but de cet algorithme est de trouver des groupes dans les données, avec le nombre de groupes représentés par la variable K . L'algorithme fonctionne itérativement pour affecter chaque point de données à l'un des K groupes en fonction des caractéristiques fournies. Les points de données sont regroupés en fonction de la similarité des différentes entités. Les résultats de l'algorithme de clustering K -means sont :

- Les centroïdes des K groupes , qui peuvent être utilisés pour étiqueter de nouvelles données.
- Les étiquettes pour les données d'apprentissage(chaque point de données est affecté à un seul cluster ou groupe)

La figure 4.5 montre une illustration. L'idée principale est de définir K centroïdes, un pour chaque cluster. Ces centroïdes doivent être placés de manière astucieuse, car à chaque placement effectué, on a un résultat différent. Donc, le meilleur choix est de les placer le plus loin possible

3. Les données ne sont dans aucune catégorie ou groupe défini à l'avance

4. groupes, classes

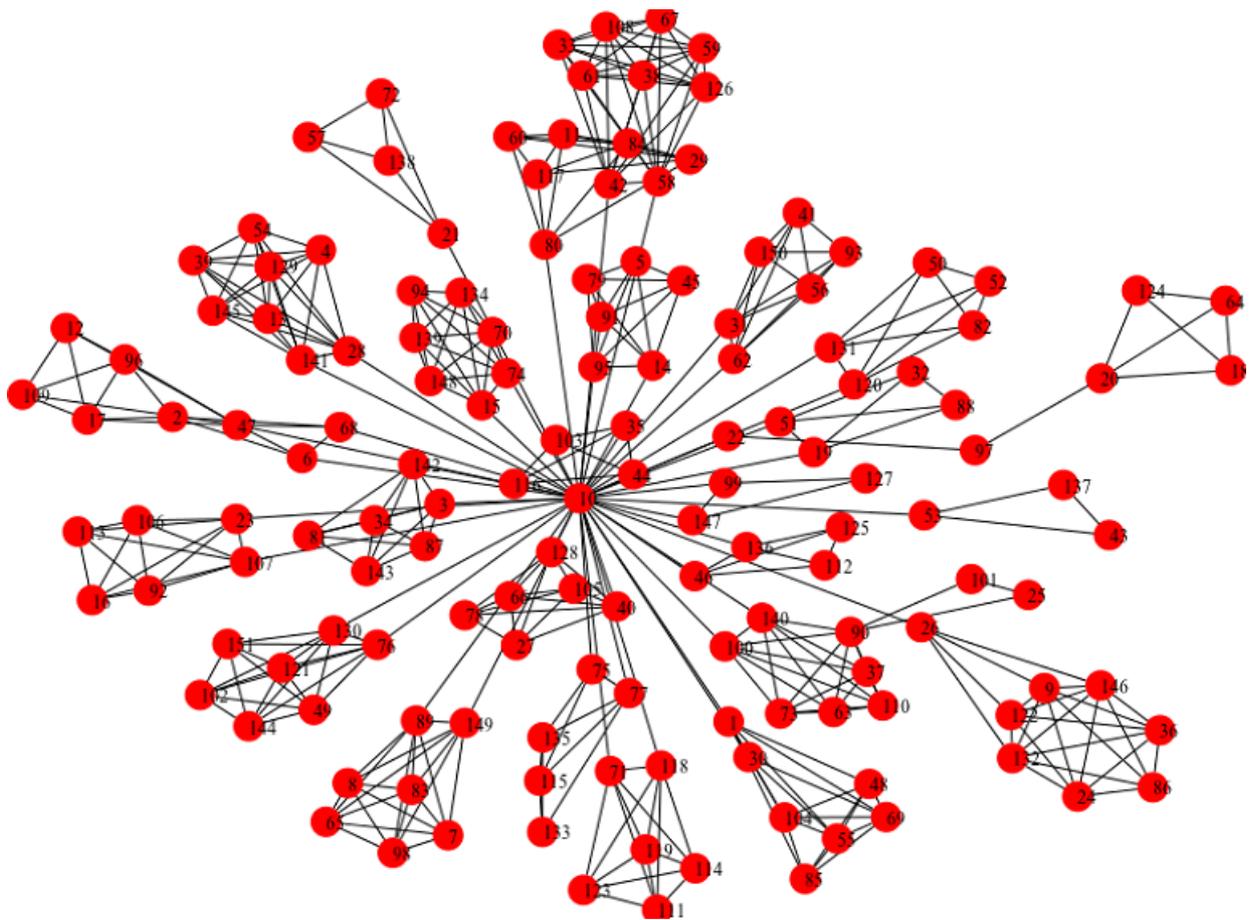


FIGURE 4.5: Exemple de regroupement d'un ensemble de données à l'aide de K -means.

les uns des autres. L'étape suivante consiste à prendre chaque point de données et à l'associer au centroïde le plus proche. Lorsqu'il ne reste plus aucun point de données, la première étape est terminée et un premier regroupement est effectué. A cette étape, nous devons recalculer K nouveaux centroïdes définis comme les barycentres des groupes de l'étape précédente. Une fois les K nouveaux centroïdes calculés, une nouvelle répartition des mêmes points de données est effectuée dans les nouveaux centroïdes les plus proches. On réitère le processus dans une boucle. A la suite de cette boucle, nous pouvons remarquer que les K centroïdes changent leur emplacement pas à pas jusqu'à ce que plus aucun changement ne soit effectué. En d'autres termes, les centroïdes ne bougent plus. Enfin, cet algorithme vise à minimiser la variance intra-groupe définie comme suit :

$$V = \sum_k \frac{1}{|C_k|} \sum_{x \in C_k} \text{dist}(C_k, x)^2 \quad (4.1)$$

où dist est la distance d'un point de donnée x à un centroïde C_k . La distance euclidienne est plus utilisée quand les données sont des nuages de points. i.e $\text{dist}(C_k, x)^2 = \|x - \mu_k\|^2$ Donc pour la valeur de K donnée, on doit chercher à repartir les points de données $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en K groupes $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de telle sorte que :

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{|C_j|} \sum_{x \in C_j} \|x - (\frac{1}{|C_j|} \sum_{x \in C_j} x)\|^2 \quad (4.2)$$

soit minimale. Plusieurs implémentations de l'algorithme des K -means existent dans la littérature. L'une des plus utilisée est celle proposée par Stuart Lloyd en 1957. Nous avons modifié l'algorithme des K -means classique pour l'adapter à nos données représentées ici par un ensemble d'objets boules. Au lieu de faire une partition d'un ensemble de points, nous allons créer une partition de K sous ensembles de boules. Nous avons défini la manière de calculer les centroïdes et nous avons intégré un critère de similarité qui sera défini par une distance que nous allons appelée Δ . Notre ensemble de données sera donc assimilé à un ensemble de n

points 3D $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ (centres des boules) de coordonnées $(x_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3}$ pondérés des coefficients $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. Un centroïde C_k de coordonnées $(x_{c_k}, y_{c_k}, z_{c_k})$ sera calculé comme suit :

$$\begin{cases} x_{c_k} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_{i1}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \\ y_{c_k} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_{i2}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \\ z_{c_k} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_{i3}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \end{cases} \quad (4.3)$$

La distance $\Delta(B_i, C_k)$ d'une boule B_i de centre $\Omega(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ et de rayon R_{B_i} à un centroïde $C_k(c_{k1}, c_{k2}, c_{k3})$ est calculé comme suit :

$$\Delta(B_i, C_k) = (\sum_{j=1}^3 (c_{kj} - x_{ij})^2) - R_{B_i} \quad (4.4)$$

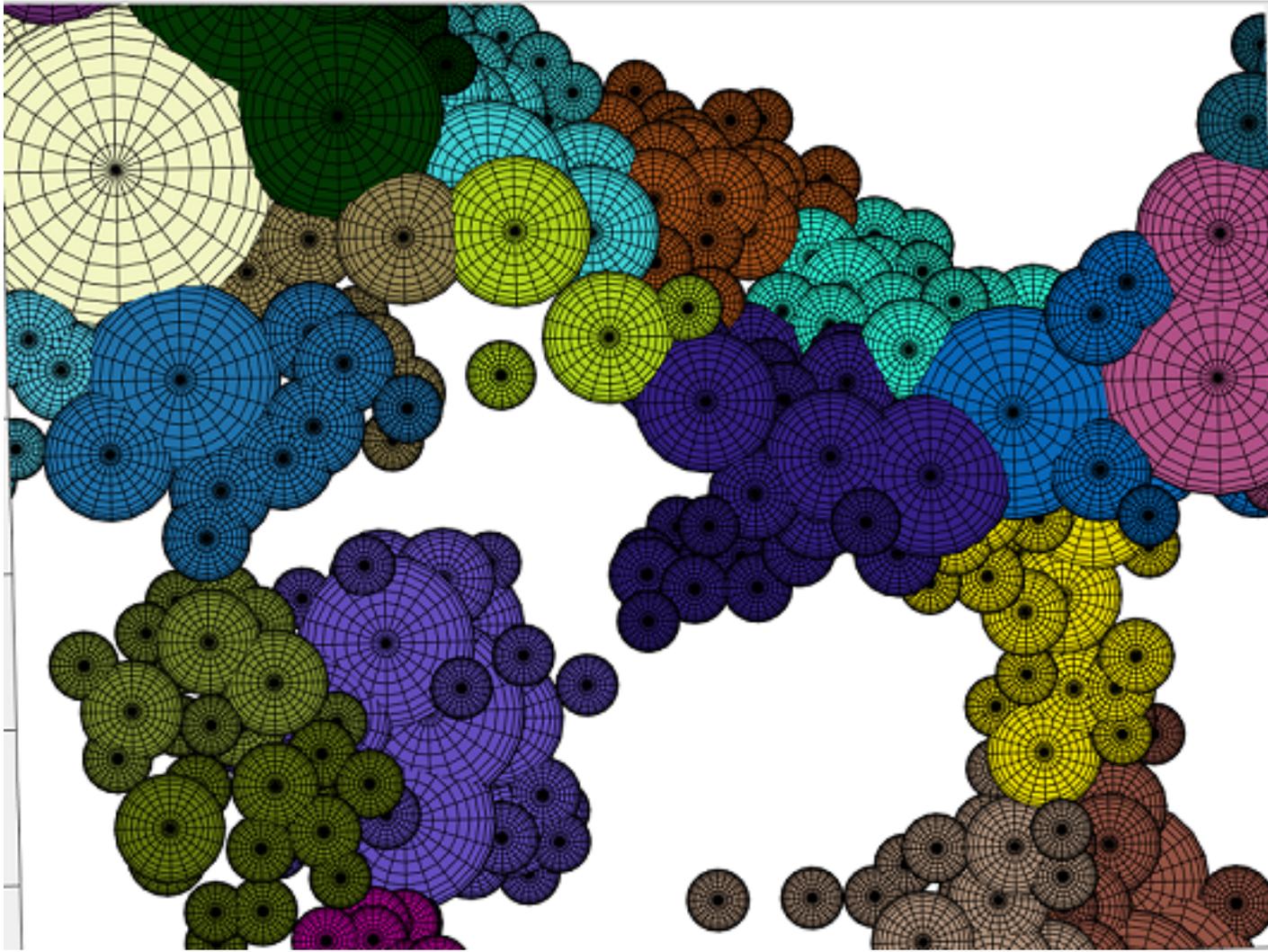
avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq K$. Donc notre K -means modifié doit chercher à minimiser :

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{|C_j|} (\sum_{b \in C_j} (b - (\frac{1}{|C_j|} \sum_{b \in C_j} b))^2) - R_b \quad (4.5)$$

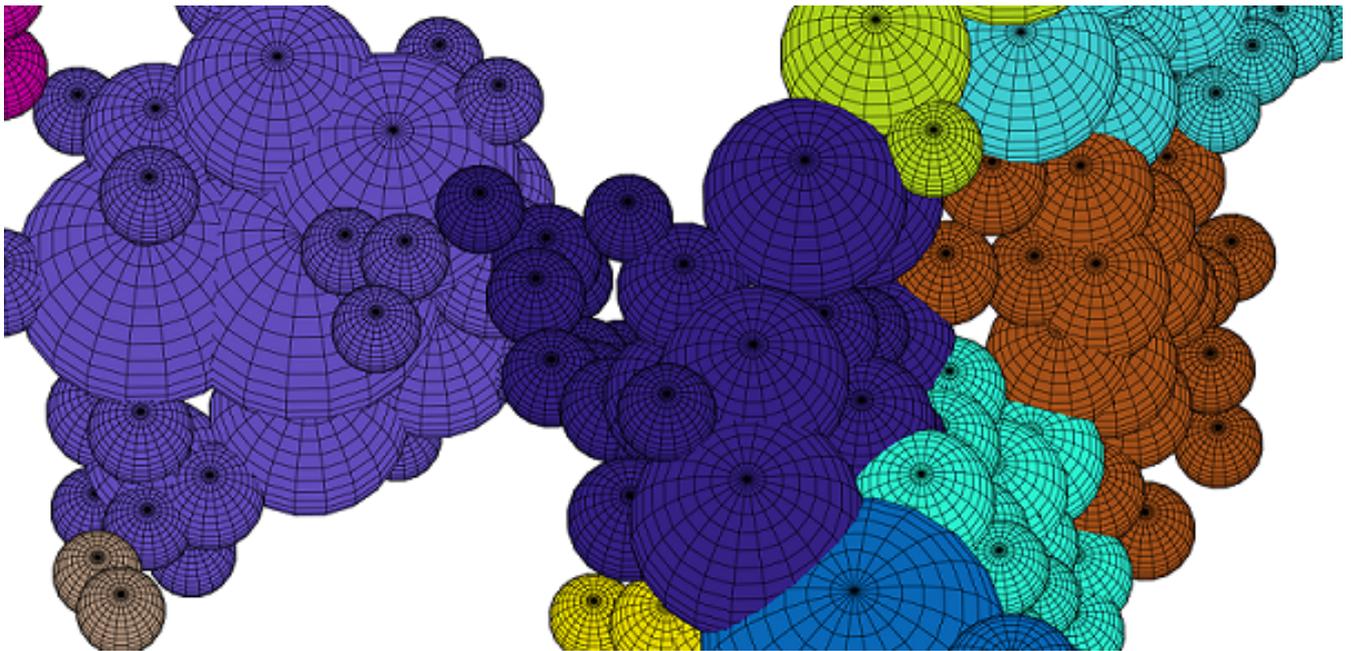
La figure 4.6 montre un exemple de répartition de boules effectué avec notre K -means sur un ensemble quelconque de boules.

4.2.2.2 Calcul des composantes connexes d'un sous ensemble de boules

Les données d'échantillons de sol sur lesquelles nous travaillons sont représentées par un ensemble de boules $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ qu'on peut assimiler à un graphe $G < S, A >$ non orienté et donc les sommets S sont les boules $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ et l'ensemble des arêtes A est défini telle que il existe une arête entre une boule B_i et une boule B_j si l'intersection des deux boules est non vide. Donc $S = B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ et $A = \{(i, j), \text{dist}(B_i, B_j) \leq (R_{B_i} + R_{B_j}) + \varepsilon\}$ où dist est la distance euclidienne entre les centres des boules B_i et B_j , R_{B_i} et R_{B_j} sont respectivement les rayons des boules B_i et B_j , ε définie ici le degré d'intersection de l'arête. Il est fixé à 0 par défaut et peut changer en fonction du degré de connexité recherché dans les données.



(a) Les boules d'un même cluster ont la même couleur



(b) En agrandissant on peut remarquer le rapprochement entre les boules du même cluster

FIGURE 4.6: Exemple de partitionnement d'un ensemble de boules en sous ensembles avec notre K -means

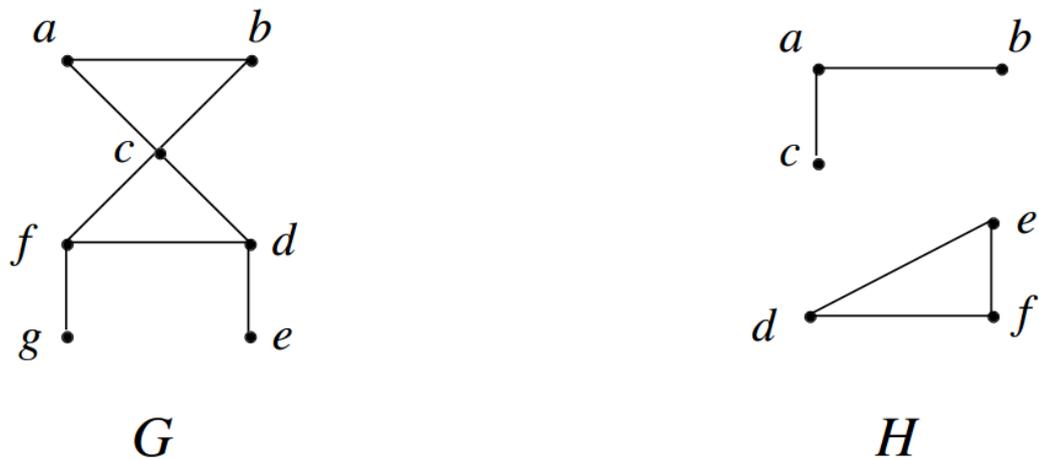


FIGURE 4.7: Le graphe G est connexe puisqu'il existe une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets distincts. Le graphe H n'est pas connexe ; par exemple, il n'y a pas de chaîne entre les sommets a et d .

Définition 4.2.2. Un graphe non orienté est connexe s'il existe une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets distincts du graphe.

Définition 4.2.3. Un graphe qui n'est pas connexe est l'union de deux ou de plusieurs sous-graphes connexes, chaque paire de ceux-ci n'ayant pas de sommet en commun. Les sous-graphes connexes disjoints sont les composantes connexes du graphe.

Dans la figure 4.7, le graphe H contient deux composantes connexes : H_1 formé des sommets a , b et c et H_2 formé des sommets d , e et f .

Remarque. Un sous-graphe connexe maximal d'un graphe non orienté quelconque est une composante connexe de ce graphe. Pour un graphe orienté, on parle de connexité si en oubliant l'orientation des arêtes, le graphe est connexe. On parle de forte connexité s'il existe un chemin depuis tout noeud a vers tout noeud b quelconques.

Nos données sont donc organisées en graphe de boules. Une fois notre ensemble de boules partitionné avec K -means, on obtient des sous ensembles ou sous-graphes de boules. Notre objectif est de calculer pour chaque sous ensemble de boules les composantes connexes qui le constituent. Ce sont ces composantes connexes qui seront échantillonnées puis approximées par des ellipsoïdes.

Remarque. Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe connexe de ce graphe. Un graphe connexe à n sommets possède au moins $(n - 1)$ arêtes.

Pour déterminer la composante connexe contenant un sommet w donné, on a recours à un parcours en profondeur qui consiste à explorer les sommets du graphe en allant d'abord le plus loin possible. Ceci s'implante par l'intermédiaire d'un ensemble S_1 des sommets "déjà visités" et d'une pile S_2 des sommets "à visiter". L'algorithme 4.

Algorithm 4: Calcul de la composante connexe à partir d'un sommet s donné dans un graphe G .

- 1: $S_1 = []$; $S_2 = [s]$
 - 2: Tant que S_1 n'est pas vide faire
 - 3: Choisir un élément y de S_2
 - 4: Retirer y de S_2 et le mettre dans S_1
 - 5: Pour chaque voisin z de y qui n'est pas dans S_2 ni dans S_1 faire
 - 6: Mettre z dans S_2
 - 7: fin Pour
 - 8: fin Tant que
 - 9: Retourner S_1
-

4.2.2.3 Échantillonnage des points 3D sur un sous ensemble de boules

Nous allons voir dans cette section comment on extrait les points tridimensionnels sur les sous ensembles de boules retournés par les K-means et après calcul des composantes connexes. Chaque boule b_i de notre sous ensemble est représentée par une sphère dont le centre et le rayon sont donnés et seront notés respectivement par $\Omega_i = (x_{0i}, y_{0i}, z_{0i})$ dans le repère $R_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et de rayon r_i .

Si $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ est un sous ensemble de boules, notre objectif est d'échantillonner des points sur les boules du sous ensemble afin de calculer son enveloppe convexe. Il est également important de noter que le plus petit sous ensemble de boules contient au moins 2 boules. Nous allons extraire sur chaque boule de B , des points disposés en couronnes. On pourra extraire des couronnes dites couronnes principales et d'autres dites couronnes secondaires (Voir la figure 4.8). La couronne principale d'une boule b_i , sera l'intersection de la boule et d'un plan principal qui passe par son centre et dont le vecteur normal est le vecteur $\overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}$ où Ω_1 est le centre de

la boule et Ω_2 est le centre de la boule voisine qui la suit ou qui la précède directement. Cette intersection nous donne un cercle dont le centre et le rayon sont ceux de la boule. C'est sur ce cercle que nous allons échantillonner les points de la couronne. une couronne secondaire d'une boule b_i sera l'intersection de la boule et d'un plan secondaire parallèle au plan principal et dont le vecteur normal est colinéaire au vecteur normal du plan principal. Cette intersection est un cercle dont le centre et le rayon seront calculé en utilisant des propriétés de géométrie de base et dont la distance entre son centre et le centre de la couronne principale est proportionnelle au rayon de la boule, i.e. la couronne obtenue est contenue dans la boule. On note qu'une boule peut avoir plusieurs couronnes secondaires et une seule principale. Comme nous allons voir, pour extraire les points d'une couronne, il nous faudra faire varier un angle t de 0 à 360 degrés selon un pas d'angle α qui sera défini. Chaque point de la couronne formera ainsi un angle α avec le point de la couronne qui le suit directement.

Extraction des couronnes principales

Considérons toujours notre ensemble de boules connexes $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ Considérons le plan principal p_1 de la boule b_{i-1} de vecteur normal $\vec{n} = \overrightarrow{\Omega_{i-1}\Omega_i} = (a, b, c)$ et pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Le centre $\Omega_{i-1} = (x_{0(i-1)}, y_{0(i-1)}, z_{0(i-1)})$ de b_{i-1} est un point appartenant à p_1 d'où $d = -(ax_{0(i-1)} + by_{0(i-1)} + cz_{0(i-1)})$. Nous allons chercher un autre point A appartenant à p_1 tel que le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega_{i-1}A}$ soit un vecteur directeur de p_1 et orthogonal au vecteur \vec{n} . $A = (x_A, y_A, z_A)$ tel que : $x_A = cte_1$ et $y_A = cte_2$ et nous calculons $z_A = -(ax_A + by_A + d)/c$. D'où le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega_{i-1}A}$. Nous allons maintenant calculer un troisième vecteur $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{n}$, vecteur directeur du plan p_1 et orthogonal à \vec{u} et \vec{n} . Pour extraire la couronne principale de la boule b_i , on considère le repère orthonormé :

$$R_1 = (\Omega_i, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}, \frac{\vec{u} \wedge \vec{n}}{\|\vec{u} \wedge \vec{n}\|}) = (\Omega_i, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \quad (4.6)$$

où la couronne principale de b_i est définie par les équations cartésiennes

$$\left\{ \begin{array}{l} (x' - 0)^2 + (y' - 0)^2 = 0 \\ z' = 0 \end{array} \right. , \text{ d'équation paramétrique } \left\{ \begin{array}{l} x' = r_i \cos t \\ y' = r_i \sin t \\ z' = 0 \end{array} \right. .$$

Notons $P = (\vec{n}, \vec{v}, \vec{u})$, la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. Les points $X'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$ de la couronne principale de b_i dans le repère R_1 telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_i = r_i \cos t \\ y'_i = r_i \sin t \\ z'_i = 0 \end{array} \right. , t \in [0, 2\pi] \quad (4.7)$$

avec un pas α donné, ont leurs représentants dans le repère R_0 , les $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ tels que $X_i = PX'_i + \Omega_i$. Si la boule b_{i-1} de l'ensemble connexe est la première boule, alors les points de sa couronne principale sont donnés par les X_{i-1} tels que $X_{i-1} = PX'_{i-1} + \Omega_{i-1}$ avec les $X'_{i-1} = (x'_{i-1}, y'_{i-1}, z'_{i-1})$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_{i-1} = r_{i-1} \cos t \\ y'_{i-1} = r_{i-1} \sin t \\ z'_{i-1} = 0 \end{array} \right. , t \in [0, 2\pi] \quad (4.8)$$

Ces relations permettent de montrer que le calcul des points de la couronne principale de la boule b_i , dépend de la boule b_{i-1} (Voir les figures 4.8 et 4.9)

Extraction des couronnes secondaire

Nous avons dit qu'une couronne secondaire d'une boule était l'intersection de la boule et du plan secondaire parallèle au plan principal tel que son vecteur normal est colinéaire au vecteur normal du plan principal. Cette intersection donne lieu à un cercle qui est contenu dans la boule i.e. la distance entre son centre et le centre du cercle principal est proportionnelle au rayon

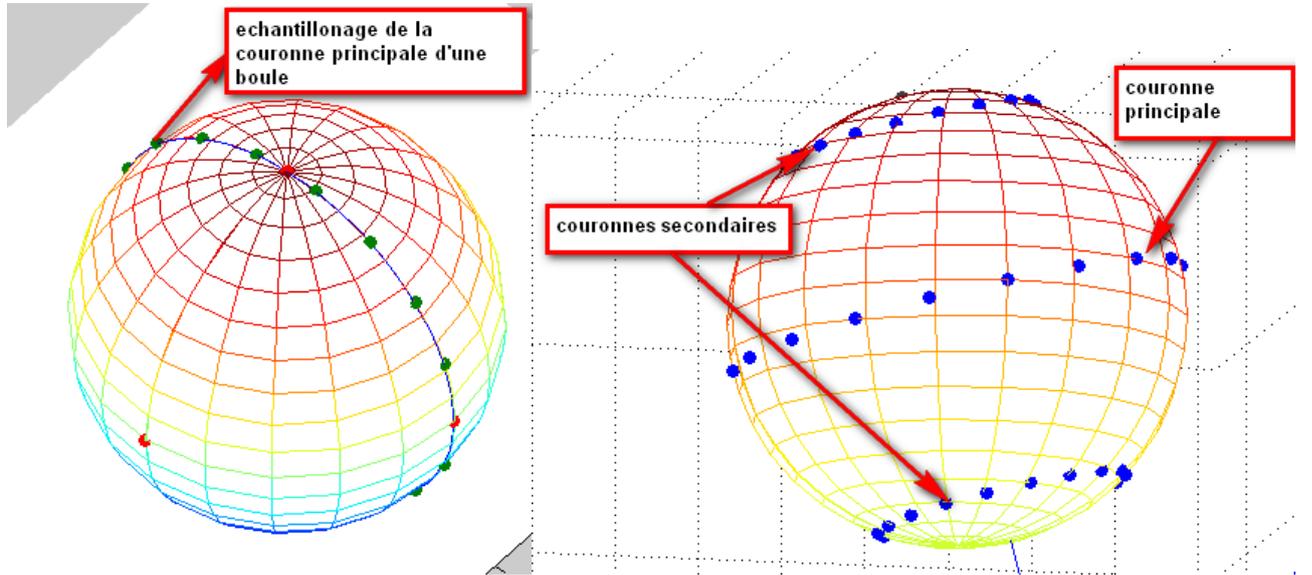


FIGURE 4.8: Couronnes principales et secondaires

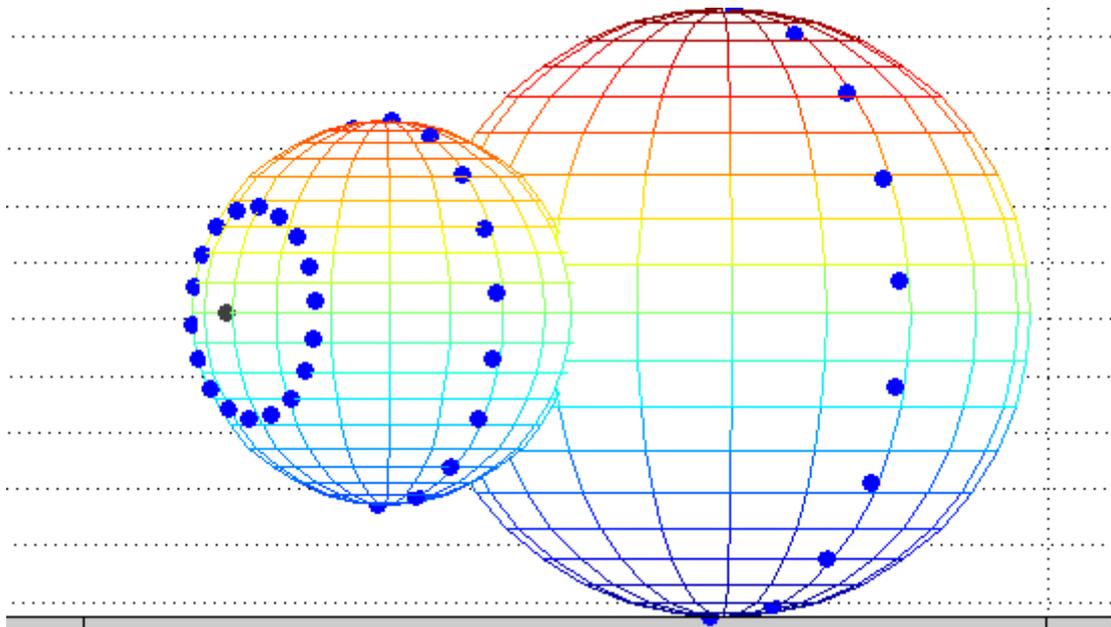


FIGURE 4.9: l'extraction des couronnes de la boule b_i dépend de la boule b_{i-1}

de la boule. Nous allons montrer comment les déterminer, ainsi que leur centre et leur rayon. Leur détermination dépend de la recherche préalable des couronnes principales. Une couronne secondaire de b_i peut être située à gauche ou à droite de la couronne principale. Ces propriétés nous seront utiles dans nos algorithmes dans le choix de la bonne couronne secondaire devant faciliter l'approximation des points par les ellipsoïdes. Nous emploierons souvent les termes « couronne secondaire gauche » et « couronne secondaire droite » selon qu'elle est située à gauche ou à droite de la couronne principale.

Considérons toujours notre ensemble de boules connexes B . Soit une boule b_i dont la couronne principale a été déjà extraite. Le centre et le rayon de cette couronne sont le centre et le rayon de la boule b_i . On veut déterminer le cercle de centre Ω'_i et de rayon r'_i tel que :

$$\begin{cases} \det(\overrightarrow{\Omega'_i\Omega_i}, \overrightarrow{\Omega_i\Omega_{i+1}}) = 0 \\ \|\overrightarrow{\Omega'_i\Omega_i}\| = d \end{cases} \quad (4.9)$$

où $d = r_i/\gamma$, Ω_i et Ω_{i+1} sont les centres respectifs des boules b_i et b_{i+1} , $\overrightarrow{\Omega_i\Omega_{i+1}}$ est le vecteur normal du plan principal de b_i , $\overrightarrow{\Omega'_i\Omega_i}$ est le vecteur normal du plan secondaire et dont la distance est proportionnelle au rayon r_i .

La solution de ce système est calculée comme suit :

$$\|\overrightarrow{\Omega'_i\Omega_i}\| = r_i/\gamma, \quad \overrightarrow{\Omega'_i\Omega_i} = \frac{\overrightarrow{\Omega_i\Omega_{i+1}} * \vec{n}}{\|\vec{n}\|}$$

D'où le centre de la couronne secondaire $\Omega'_i = \Omega_i - \overrightarrow{\Omega'_i\Omega_i}$ et son rayon $r_i = \sqrt{r_i^2 - \|\overrightarrow{\Omega'_i\Omega_i}\|^2}$. Si $\Omega'_i = \Omega_i - \overrightarrow{\Omega'_i\Omega_i}$, signifie que c'est une couronne secondaire gauche et si $\Omega'_i = \Omega_i + \overrightarrow{\Omega'_i\Omega_i}$, cela signifie que c'est une couronne secondaire droite. Notons que puisque le plan principal est parallèle aux plans secondaires, alors ils ont en commun les mêmes vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} et les vecteurs normaux des plans secondaires sont colinéaires au vecteur normal \vec{n} du plan principal. Donc les points de la couronne secondaire sont donnés par les X_i tels que

$X_i = PX'_i + \Omega'_i$ avec les $X'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$ tel que :

$$\begin{cases} x'_i = r_i \cos t \\ y'_i = r_i \sin t \\ z'_i = 0 \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \quad (4.10)$$

voir la figure 4.8. La figure 4.11a montre un exemple d'échantillonnage uniforme des points sur un sous ensemble de boules connexes.

4.2.2.4 Calcul de l'enveloppe convexe d'un sous ensemble de boules

Déterminer l'enveloppe d'un objet est un problème de géométrie algorithmique. Dans le cadre de notre étude, l'objet en question est un sous ensemble de boules connectées entre elles à un certain degré fixé. Pour une meilleure compréhension de l'enveloppe convexe, nous allons commencer avec une définition en 2D. Puis nous allons la généraliser à n dimensions.

Définition 4.2.4. Un sous ensemble S du plan \mathbb{R}^2 est dit convexe si et seulement si pour toute paire de points $p, q \in S$ le segment de droite $[pq]$ est complètement contenu dans S . L'enveloppe convexe $Conv(S)$ d'un ensemble S est le plus petit ensemble convexe qui contient S . C'est plus précisément l'intersection de tous les ensembles convexes qui contiennent S .

Définition 4.2.5. Soit $P = p_1, p_2, \dots, p_n$ un ensemble fini de n points dans le plan. Une définition alternative de l'enveloppe convexe de P est que c'est l'unique polygone convexe dont les sommets sont des points de P et qui contient tous les points de P . Une manière naturelle de représenter un polygone consiste à lister ses sommets dans le sens des aiguilles d'une montre, en commençant par un point arbitraire. Donc, le problème de calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de point est le suivant : Etant donné un ensemble $P = p_1, p_2, \dots, p_n$ de points dans le plan, calculer une liste qui contient les points de P qui sont les sommets de $Conv(P)$, listés dans le sens des aiguilles d'une montre. La figure 4.10 montre une illustration du calcul

de l'enveloppe convexe de neuf points.

Remarque. La première définition de l'enveloppe convexe a peu d'utilité quand on veut concevoir un algorithme pour calculer l'enveloppe convexe. Cette définition parle de l'intersection de tous des ensembles convexes contenant P et il peut en exister un nombre infini. La définition que $Conv(P)$ est un polygone convexe est plus utile.

Théorème 4.2.3. *Le calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble de n points dans le plan se fait avec une complexité de l'ordre de $O(n \log n)$.*

Remarque. Le calcul de l'enveloppe convexe d'un objet est utilisé dans beaucoup de domaines d'application. La plupart des applications proviennent des domaines de l'infographie, de la robotique, des systèmes d'information géographique et de la CAD CAM⁵.

Il existe dans la littérature beaucoup d'algorithmes pour calculer l'enveloppe convexe. Les plus connus sont ceux de Graham's Scan, de Preparata et Hong et de Jarvis.

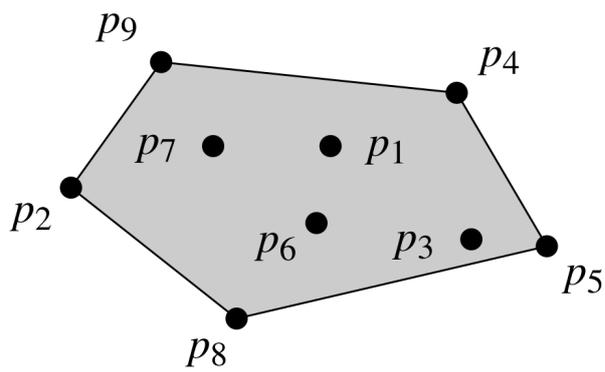
Enveloppe convexe en 3D

Avant de commencer, nous parlons d'abord de la notion de polytope.

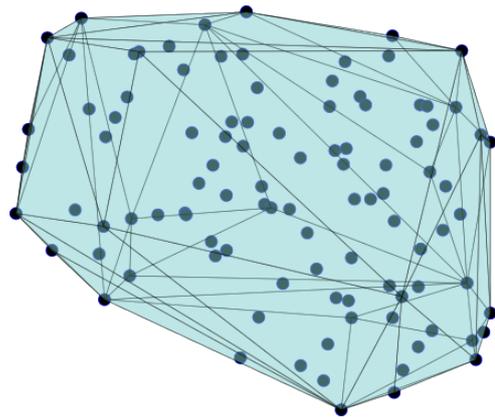
Définition 4.2.6. Un polytope est la généralisation à une dimension quelconque de celle de polygone et de polyèdre pour les dimensions 2 et 3. On peut la définir par récurrence de la façon suivante :

1. Un polytope de dimension 0 est un ensemble contenant un point unique.
2. Dans un espace euclidien à au moins n dimensions E , un polytope P de dimension n (ou n -polytope) est un ensemble fini non vide de $(n - 1)$ -polytopes (les $(n - 1)$ -cellules ou hyperfaces de P) situés dans des sous-espaces de dimension $n - 1$ de E , tels que :
 - (a) chaque hyperface $((n - 2)$ -cellule) de chaque hyperface $((n - 1)$ -cellule) de P coïncide avec une $(n - 2)$ -cellule d'une seule autre hyperface de P , laquelle n'engendre pas le même sous-espace de E que la première.

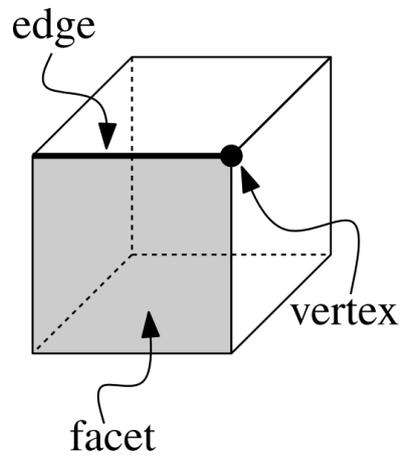
5. CAD = Computer Aided Design et CAM = Computer aided Manufacturing. Une fois les produit conçus, ils doivent être manufacturés



(a) Enveloppe convexe de 9 points 2D



(b) Enveloppe convexe de n points 2D



(c) Exemple de polytope 3D (polyèdre en 3D)

FIGURE 4.10: Exemples d'enveloppes convexes 2D et 3D et de polytope [Berg et al.,2008]

(b) deux hyperfaces de P sont toujours reliées par une suite d'hyperfaces ayant chacune une hyperface commune avec la suivante (condition de connexité).

(c) deux hyperfaces n'ont aucun point intérieur en commun (condition de non croisement)

Les cellules des hyperfaces de P sont aussi les cellules du polytope P ; un n -polytope possède au moins k -cellules.

Les $(n - 1)$ -cellules du polytope sont parfois appelées ses facettes, ses $(n - 2)$ -cellules ses crêtes et ses 1-cellules ses arêtes. Dans le cas 3D par exemple, formellement, une facette d'un polytope convexe est définie par un sous ensemble maximal de points coplanaires sur sa frontière. Une facette d'un polytope convexe est nécessairement un polygone convexe. Une arête d'un polytope convexe est une arête de l'une de ses facettes. On classe les n -polytopes en fonction de leur nombre d'hyperfaces appelé l'ordre du polytope, en utilisant les préfixes grecs tétra ($4D$), penta($5D$), hexa($6D$), etc.

Définition 4.2.7. Dans le cas de plusieurs dimensions, en particulier la dimension trois, les enveloppes convexes sont utilisées dans diverses applications. Par exemple, ils sont utilisés pour accélérer la détection de collisions dans les animations sur ordinateur. Nous avons vu que dans le cas $2D$, l'enveloppe convexe d'un ensemble P de n points dans le plan est un polygone convexe dont les sommets sont des points dans P . D'où $Conv(P)$ a au plus n sommets. Dans l'espace tridimensionnel, une affirmation similaire reste vérifiée : l'enveloppe convexe d'un ensemble P de n points est un polytope convexe dont les sommets sont des points dans P et, par conséquent, il a au plus n sommets. Dans le cas $2D$, la borne fixée sur le nombre de sommets implique immédiatement que la complexité de l'enveloppe convexe est linéaire, puisque le nombre d'arêtes d'un polygone est égal au nombre des sommets. Dans le cas $3D$ ce n'est plus vrai ; le nombre d'arêtes d'un polytope peut être supérieur au nombre de sommets. Mais la différence n'est pas trop grande comme indique le théorème suivant sur le nombre d'arêtes et de facettes d'un polytope convexe.

Théorème 4.2.4. *Soit P un polytope convexe avec n sommets. Le nombre de bords de P est au plus $(3n - 6)$, et le nombre de facettes de P est au plus $(2n - 4)$.*

La figure 4.10 montre des exemples d'enveloppes convexes 2D et 3D. Sur la figure 4.11b nous avons calculé l'enveloppe convexe d'un sous ensemble de boules à l'aide de l'échantillonnage que nous avons vu précédemment.

4.2.2.5 Approximation d'un sous ensemble de boules par un ellipsoïde

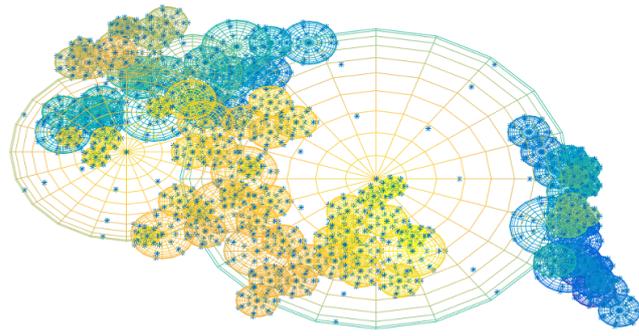
Etant donné un sous ensemble de boules B , nous appliquons ce que nous avons vu dans les précédentes sections, à savoir l'échantillonnage des points sur le sous ensemble. Puis pour l'ensemble des points obtenus (nombre élevé), on calcule les points de l'enveloppe convexe (qui réduit considérablement le nombre de points du nuage de points). L'ensemble des points de l'enveloppe convexe (points frontières à la forme à approximer) est ajusté par un ellipsoïde. On peut voir à la figure 4.11c un ellipsoïde qui approche les points de l'enveloppe convexe 3D. La figure illustre une conséquence de cette approximation sur le sous ensemble de boules de départ. La figure 4.11 résume donc les étapes à suivre pour obtenir la première segmentation de notre forme complexes à l'aide des ellipsoïdes primaires.

4.2.2.6 Algorithme de segmentation initial en ellipsoïdes primaires d'une forme F

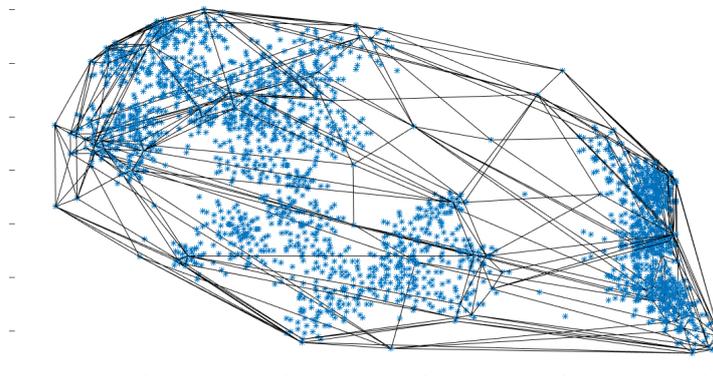
L'algorithme 5 donne les étapes :

4.2.3 Regroupement en utilisant l'algorithme de croissance de région optimal

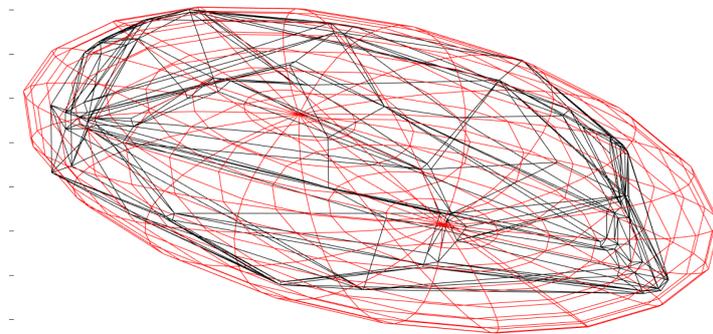
L'algorithme 6 décrit les différentes étapes.



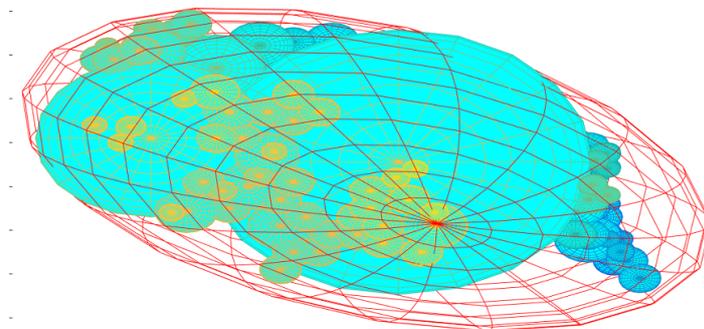
(a) Échantillonnage uniforme des points sur un sous ensemble de boules



(b) Calcul de l'enveloppe convexe 3D d'un sous ensemble de boules



(c) Approximation des points de l'enveloppe convexe par un ellipsoïde



(d) Approximation d'un sous ensemble de boules par un ellipsoïde

FIGURE 4.11: Etape d'approximation d'un sous ensemble de boules connexe par un ellipsoïde

Algorithm 5: Segmentation Initiale : le programme prend en paramètre un fichier de boules et retourne un ensemble d'ellipsoïdes.

- 1: Début
 - 2: Structure de données
 - B : contiendra l'ensemble de toutes les boules lues dans le fichier
 - E : contiendra l'ensemble de tous les ellipsoïdes qui seront calculés à partir des boules
 - x : Pourcentage devant servir à calculer K , le nombre de cluster attendu de K -means
 - $Seuil$: Seuil d'approximation d'un ensemble de boules par un ellipsoïdes ;
 - V : Contiendra à un moment donné le volume de toutes les boules de B
 - 3: Lecture du fichier de boules et initialisation des structures de données
 - 4: Calculer les volumes de toutes les boules $b \in B$ et mettre dans V .
 - 5: Calculer dynamiquement le nombre K de clusters ou de sous-ensembles de boules $K = (x * card(A))/100$;
 - 6: Tant que A non vide et $K > 2$ et NonConvergence=Vrai
 - 6.1) Calculer les sous-ensembles de boules SS avec K -means en fonction de leur volumes V
 - 6.2) Pour chaque sous ensemble de boules $s \in SS$, calculer ses composantes connexes CC .
 - 6.3) Pour chaque sous ensemble de boules connexe $c \in CC$, calculer l'erreur d'approximation ε et l'ellipsoïde e qui approxime c
 - 6.4) Si l'erreur d'approximation ε de c vérifie le seuil alors retirer ses boules de B et ajouter e à E
 - 7: Calculer de nouveau $K = (x * card(A))/100$; Aller à 6
 - 8: Soit A est vide ou $K \leq 2$ ou NonConvergence=Faux // Sortir de la boucle tant que.
 - 9: Si A est vide aller à *FIN* 14.
 - 10: Calculer toutes les composantes connexes de A restant et mettre dans CC_f
 - 11: Pour chaque c_f de CC_f , calculer un nouveau $K_f = (x * card(c_f))/100$;
 - Calculer les volumes des boules de c_f et mettre dans V_f ;
 - Calculer les clusters de c_f avec K -means en fonction de leur volume V_f et mettre dans SS_f
 - 12: Pour chaque cluster s_f de SS_f , calculer l'erreur d'approximation ε_f et l'ellipsoïde e_f qui approxime les boules connexes de s_f .
 - Si l'erreur d'approximation ε_f de s_f vérifie le seuil alors retirer ses boules de B et ajouter e_f à E
 - 13: Toutes les boules qui restent dans A sont des boules isolées et seront considérées comme des ellipsoïdes, d'où on les ajoute à A et on les supprime de B
 - 14: *FIN* : // On a au total m Ellipsoïdes dans A qui approximent l'ensemble des boules de départ.
-

Algorithm 6: Segmentation finale : le programme prend en paramètre un fichier d'ellipsoïdes primaires calculés avec les algorithmes vus précédemment.

- 1: Début
 - 2: Structures de données
 - RF* : Contientra les caractéristiques de tous les ellipsoïdes primaires
 - BF* : Contientra tous les sous-ensembles de boules des ellipsoïdes primaires
 - Graphs* : graphe pour stocker les relations d'adjacence entre les différents ellipsoïdes. Les nœuds sont les étiquettes des ellipsoïdes et les arêtes sont les relations entre les ellipsoïdes avec comme poids l'erreur commise en fusionnant deux ellipsoïdes
 - Tas* : Tas minimal où seront stockées les erreurs de fusion entre deux ellipsoïdes adjacents. Un nœud du tas est une structure avec 3 champs deux étiquettes d'ellipsoïdes avec l'erreur de fusion qui est la clé du tas.
 - Seuil* : Seuil de fusion de deux ellipsoïdes E : contientra la liste de tous les ellipsoïdes terminaux
 - 3: Lecture du fichier d'ellipsoïdes primaire et initialisation des structures de données *RF* et *BF*
 - 4: Initialisation du graphe et du tas avec les relations d'adjacence entre ellipsoïdes.
 - Pour chaque paire d'ellipsoïdes e_i et e_j primaires de *RF*, si leur intersection est non vide, alors on les fusionne pour obtenir un ellipsoïde résultant e_{ij} avec une erreur de fusion ε_{ij} .
 - Si ε_{ij} vérifie le seuil de fusion, alors
 - Insérer l'arête (i, j) dans le tas minimal *Tas* en fonction de ε_{ij} ;
 - Insérer l'arête (i, j) dans *Graphs*;
 - 5: Faire une mise à jour de *Graphs*, *RF*, *BF* en fonction des caractéristiques du nouvel ellipsoïde. // Phase de fusion itérative.
 - 6: Tant que *Tas* est non vide,
 - Dépiler l'arête (p, q) qui a la plus petite erreur de fusion ε_{pq} ;
 - Si l'erreur de fusion ε_{pq} ne vérifie pas le seuil, alors sortir de la boucle et aller à FIN.
 - Fusionner les deux ellipsoïdes e_p et e_q pour obtenir un nouvel ellipsoïde e_{pq} et l'erreur de fusion;
 - Faire une mise à jour de *Graphs*, *RF*, *BF* en fonction des caractéristiques du nouvel ellipsoïde.
 - 7: FIN : //Tous les ellipsoïdes se trouvant dans la structure *RF* sont les ellipsoïdes terminaux qui approximent l'ensemble de boules de départ.
-

4.3 Conclusion

Nous pouvons résumer notre méthodologie à partir des étapes suivantes :

1. On acquiert une image tomographique d'un échantillon de la forme à représenter (cas de l'espace poral du sol) à l'aide des scanners
2. On extrait de l'image tomographique obtenue, les frontières de la forme par seuillage
3. Des frontières obtenues, on extrait les régions de voronoïd pour obtenir une partition en tétraèdre de Delaunay de la forme
4. On extrait de la partition, les boules de Delaunay qui sont les boules maximales, dont les centres représentent le squelette la forme
5. On calcule un recouvrement minimal du squelette constitué de boules maximales
6. On segmente le recouvrement minimal en sous ensembles de boules connexes. Cela se

fait en utilisant des méthodes de division-fusion basée sur le clustering et les structures d'octree.

7. Chaque sous ensemble de boules connexe obtenue est approximé par des volumes quadratiques.
8. On termine enfin par une phase de croissance de régions ou regroupement qui consiste à parcourir tous les sous ensembles de boules connexes et fusionner ceux qui vérifient une certaine condition.
9. Pour terminer, le modèle est ensuite validé avec des données images tomographiques réelles d'échantillons du sol.

Nous allons dans le chapitre qui suit présenter de manière détaillée l'application de nos modèles aux échantillons de données réels de sol. Nous simulons grâce à la représentation obtenue le processus de drainage de l'eau dans le sol et faisons une comparaison entre les résultats que nous obtenons et ceux proposés dans [Pot et al.,2015]

APPLICATION A LA REPRÉSENTATION DES STRUCTURES POREUSES 3D DU SOL ET AU DRAINAGE DES EAUX

5.1 Introduction

Nous allons dans ce chapitre appliquer les méthodes que nous avons développées dans le précédent chapitre pour modéliser l'espace des pores du sol. Les données que nous utilisons sont des images tomographiques d'échantillons réels de sols issues de [Pot et al.,2015]. Avant cela, nous allons d'abord passer en revue les formes volumiques complexes en général et les milieux poreux en particulier. Nous allons continuer en présentant le déroulement du fonctionnement d'un processus de drainage dans un réseau de pores. Les données images de sol sont obtenues par transformation en utilisant des méthodes de géométrie algorithmique. Cette transformation conduit à une représentation intermédiaire du sol en graphe de boules où les sommets sont des boules qui représentent les pores et les arêtes sont des relations de connexité entre les pores. Ces arêtes permettent de décrire le réseau de pores. Les données ainsi représentées sont stockées dans des fichiers. Avant de passer aux données réelles, nous avons d'abord testé nos algorithmes avec des données de sols synthétiques que nous avons générées nous même. Nous exécutons

donc nos différents algorithmes sur le graphe de boules pour obtenir en sortie une description du réseau de pores du sol à l'aide des primitives quadriques. Nous présentons les résultats obtenus sur trois échantillons de sol avec les ellipsoïdes. La représentation géométrique ainsi obtenue peut être utilisée pour faire des simulations afin d'étudier des phénomènes tels que l'activité microbienne pour estimer la quantité de dioxyde de carbone dégagée dans le sol, suite à la respiration des micro-organismes vivants et le drainage pour comprendre les processus d'écoulement des liquides. En ce qui nous concerne dans cette thèse, nous avons opté pour la simulation du drainage dans le sol, où nous utilisons notre modèle pour comprendre précisément comment fonctionne la distribution de l'eau à l'échelle microscopique et comment on localise les interfaces eau-air dans les pores lorsqu'on applique une certaine pression hydrique.

5.2 Généralités sur les formes volumiques complexes

Les volumes complexes encore appelés formes ou scènes naturelles sont des volumes pour lesquels il est difficile de calculer une représentation géométrique exploitable à des fins de modélisation. Il n'existe pas à priori des fonctions analytiques permettant de les décrire. La complexité de ces scènes peut être liée à la nature des composants qui les constituent et à la variété des phénomènes qui s'y déroulent. Aujourd'hui, la modélisation des formes suscite de plus en plus d'intérêt dans les systèmes complexes. En effet, la modélisation dans un système complexe consiste à simuler la plupart de temps un processus dans le temps, afin de prédire un certain nombre de phénomènes émergents pouvant donner lieu à une observation. Pour avoir de bons résultats de prédiction, les chercheurs ressentent également le besoin de spatialiser des scénarios et pour cela, on a besoin d'avoir des informations précises sur la géométrie de la forme ou de l'environnement de simulation. Grâce aux techniques d'imagerie comme la tomographie assistée par ordinateur, l'acquisition d'images volumiques haute résolution ($3 - 5\mu m$) de grands échantillons de formes est désormais possible avec les scanners à rayon X. En effet,

les images permettent de spatialiser les phénomènes à des échelles micro et macroscopiques comme c'est le cas des images satellites des forêts, des images tomographiques des sols et organes, etc. Les images peuvent permettre de modéliser comment les individus se déplacent dans le cas d'une épidémie par exemple. On a dans ce cas des drones qui capturent à des moments donnés des images que l'on traite par la suite. Elles peuvent également permettre de spatialiser les dynamiques biologiques dans le sol à une échelle très fine comme à l'échelle des pores dans un espace poral. Contrairement aux objets manufacturés ou mécaniques, les formes naturelles n'ont pas été conçues à l'aide de surfaces ou volumes analytiques. Ainsi, on doit en quelque sorte trouver un algorithme qui calcule de manière significative une représentation de la forme initialement décrite par une centaine de millions de voxels. Ceci sous-entend que la représentation de la forme doit correctement l'approximer. Elle doit en plus être robuste à des changements mineurs, doit avoir une sorte de « continuité » par rapport à la description originale, doit être compacte et adéquate pour modéliser et simuler des phénomènes. Beaucoup de systèmes complexes s'inscrivent dans ces types de volumes et on dénombre une panoplie dans la nature. On peut citer par exemple le sol figure 5.1, les océans figure 5.6, les forêts figure 5.7, les villes figure 5.5, les organes comme le cerveau figure 5.4, les structures osseuses figure 5.2, les vaisseaux sanguins figure 5.3, etc.

5.2.1 Les milieux poreux

Les milieux poreux sont des cas particuliers de formes volumiques complexes. On peut définir un milieu poral comme un milieu constitué d'une matrice solide et de son complément géométrique constitué de vide, l'espace poral ou l'espace des pores. Ce dernier peut être occupé par un ou plusieurs fluides, sous une ou plusieurs phases liquide ou gazeuse. On retrouve les milieux poreux partout dans notre environnement naturel comme dans les systèmes physiologiques, technologiques et industriels. Nous avons quelques exemples (voir figures 5.2 , 5.1,

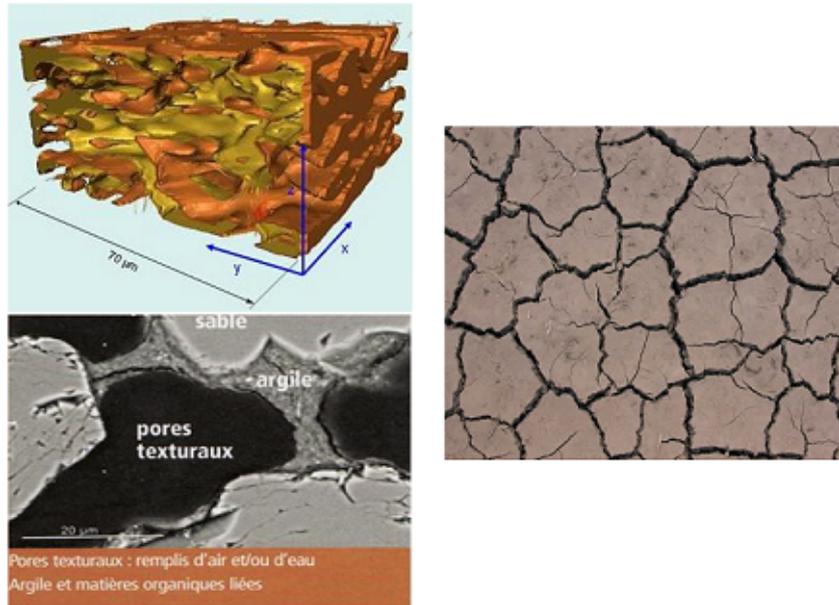


FIGURE 5.1: Structure poreuse d'un sol. [Ngom,2010]

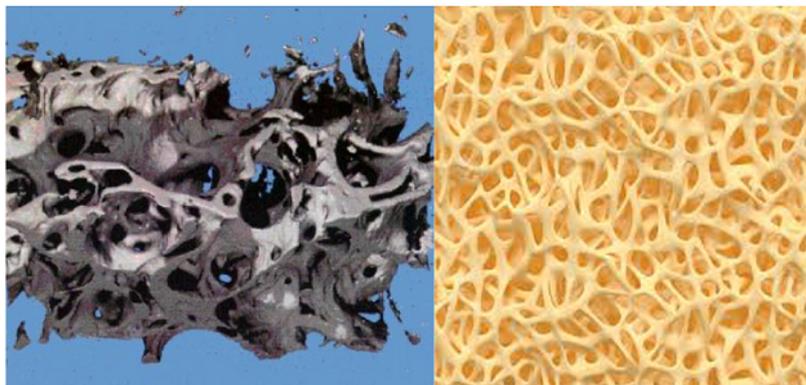


FIGURE 5.2: Structure poreuse d'un os. @Source : banque d'images 123rf

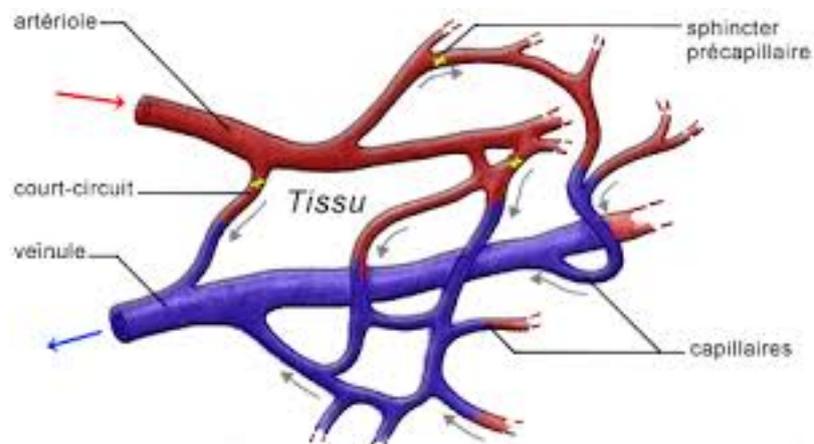


FIGURE 5.3: Structure vaisseaux sanguins. @Source : Jean-Paul BERGER. SVT Emirats Arabes Unis

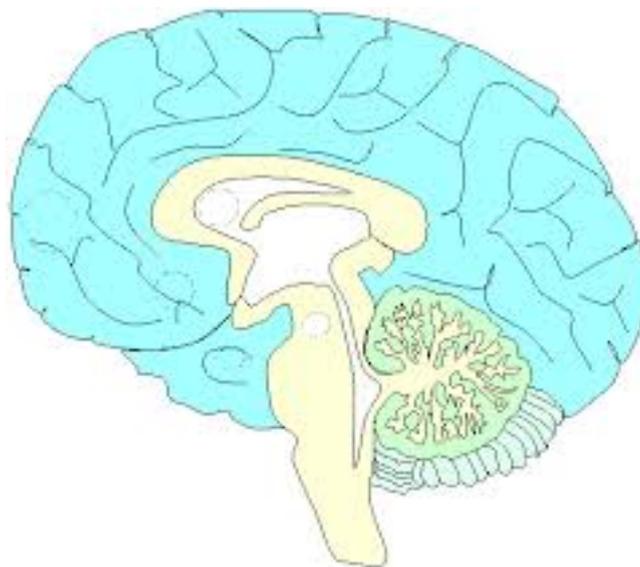


FIGURE 5.4: Structure d'un cerveau. @Source : Google



FIGURE 5.5: Image satellite d'une ville. @Source : CNES(Centre National d'Etudes Spatiales)



FIGURE 5.6: Image satellite d'un océan. @Source : NASA



FIGURE 5.7: Image satellite d'une forêt. @Source : banque d'images 123rf

5.3) comme le sol, les roches, les plantes et certains organes vivants. L'espace poral est dans la plupart des situations le siège d'activités physiques, biologiques ou chimiques dont les propriétés sont liées à sa structuration. La structure du milieu constitue l'ensemble des propriétés géométriques, topologiques, morphologiques de la phase solide et des pores [Perrier, 1995]. Les pores interstitiels sont des vides plus ou moins sphérique, de petite dimension ¹, mélangés entre les particules solides ou grains qui ne sont jamais jointifs [Ngom, 2010]. Les dimensions des vides sont étroitement liées à celle des grains dont la mesure est plus directement accessible. Ces pores et les fissures sont interconnectés et forment un réseau dans lequel peut circuler de l'eau avec des constituants sous forme dissoute ou gazeuse. On peut également représenter un milieu poreux sous la forme d'un corps solide avec à l'intérieur de très petites cavités appelées pores. Lorsque le volume des pores est constant, le milieu poreux est considéré comme indéformable. Le mouvement d'un fluide dans un milieu poreux est considérablement différent du mouvement du fluide dans les conduites fermées. Les parois rugueuses opposent une très grande résistance au déplacement du fluide. C'est ce qui explique la très faible vitesse de déplacement du fluide dans le milieu poreux par rapport à la vitesse de déplacement dans les conduites. C'est la raison pour laquelle on utilise les modèles du milieu poreux pour l'étude du mouvement des fluide (Metreveli)

5.2.1.1 Réseau interconnecté de pores

Les pores communiquent entre eux, dans le sens de l'écoulement des fluides, permettant le déplacement des particules d'eau. Celles-ci suivent des trajets ou trajectoires plus ou moins compliqués, identifiant les lignes du courant. Cet agencement caractérise la continuité du milieu poreux qui est une condition de base pour la validité des lois de l'hydrodynamique souterraine.

1. ordre de grandeur millimétrique

5.2.1.2 Les différents type de porosité

L'un des paramètres les plus importants, caractérisant un milieu poreux est la porosité notée ϕ qui est la partie d'un volume apparent unitaire qui n'est pas occupé par la phase solide. La porosité est donc égale au rapport volumique des vides au volume total

$$\phi = \frac{V_v}{V_t} \quad (5.1)$$

ϕ en %

Sur la base des tailles moyennes des interstices d'un milieu poreux et des états physiques du fluide contenu, une classification de la porosité du sol a été proposée par [Schoeller,1955] dans le tableau 5.1. Les vides ménagés entre les éléments structuraux² et de l'activité biologique³, dénommés micropores ou pores structuraux, sont à l'origine d'une porosité dite macroporosité ou porosité structurale. L'assemblage des particules constitutives du sol (sables, limons et argiles) résulte des vides appelées pores texturaux et une porosité dite microporosité ou porosité texturale. La porosité est un concept indépendant de la forme et des connexions entre les pores. De plus, il est couramment admis que seule la porosité structurale évolue sous l'effet de contraintes extérieures, tandis que la porosité texturale reste stable. Cependant, pour quantifier les pores texturaux, il est nécessaire d'en avoir une description qui permettrait par exemple de quantifier les processus qui ont lieu au sein de l'espace poral. Toute fois, vue la complexité du milieu poreux, une description explicite n'est pas réalisable. Aussi, bon nombre de méthodes alternatives, pour l'analyse des milieux poreux, ont été développées.

2. agrégats ou mottes

3. cycles de dessiccation et humectations liés au climat

Tailles des pores	Classe	Caractéristique
<0,0001mm	Microporosité,porosité texturale	Invisible à l'oeil nu, résulte de l'assemblage des constituants élémentaires du sol
0,0001mm à 2,5mm	Porosité capillaire	Constitue la majeure partie de la porosité du sol.
>2,5mm	Macro porosité,porosité structurale	Visible à l'oeil nu,est influencé par le fonctionnement du sol

TABLE 5.1: Classification de la porosité

5.2.2 Cas d'étude : Le sol

Selon l'Union des Industries de la Fertilisation UNIFA. Le sol provient en général de l'altération de la roche mère sous-jacente, appelée sous-sol. La formation du sol s'établit à l'interface entre la lithosphère, l'atmosphère, l'hydrosphère et la biosphère. L'action des plantes et de tous les organismes vivant dans le sol est déterminante dans le fonctionnement du sol. On peut voir sur la figure 5.8 le schéma des différentes couches d'un sol.

Toujours en faisant référence à la même source et à [Ngom et al.,2012], le sol est vu comme un milieu poreux complexe à cause de son milieu physique qui est hétérogène et de nombreux organismes vivants en interactions qu'on y trouve. Il est l'un des sièges de l'activité microbienne et beaucoup d'autres processus physiques tels que la séquestration du carbone. A cet effet Il fait partir des plus grands réservoirs de carbone de la planète avec 615 milliards de tonnes de carbone dans les 20 premiers cm et 2344 milliards de tonnes jusqu'à une profondeur de 3 mètres. Il est constitué d'un système bi phasique qui contient une partie pleine qu'on appelle les agrégats et une partie vide qu'on appelle les pores ou structures microscopiques. Cette partie de vide encore appelée l'espace poral du sol peut contenir de l'eau, de l'air et beaucoup

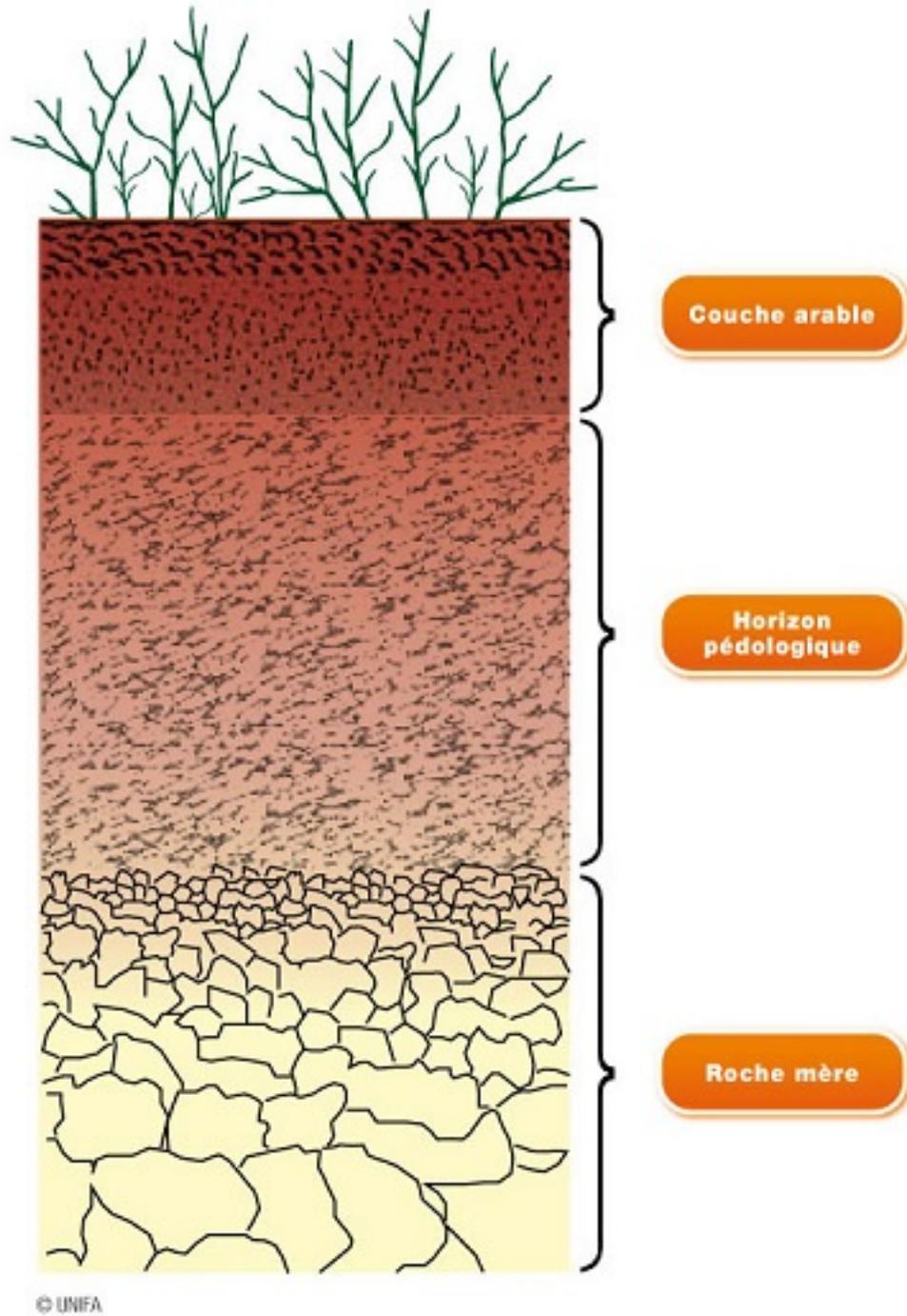


FIGURE 5.8: Différentes couches d'un sol. @source : UNIFA

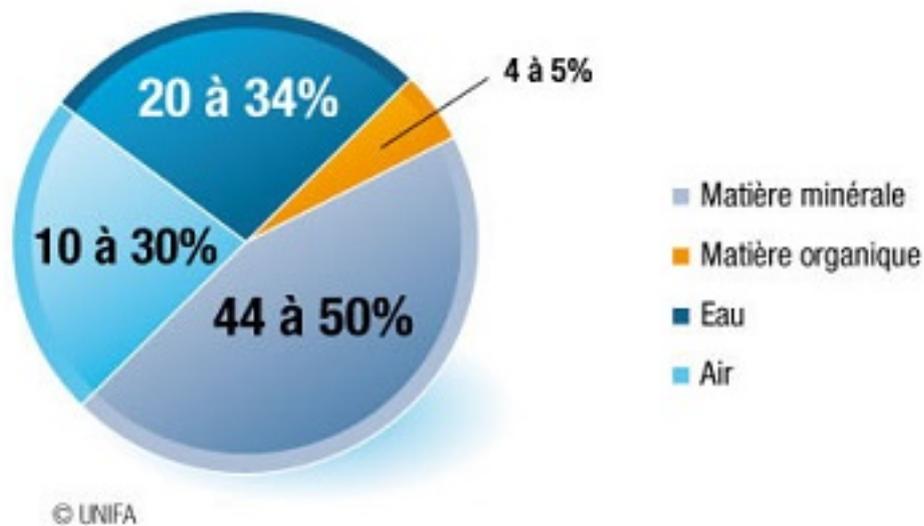


FIGURE 5.9: Constituants principaux d'un sol cultivé. @source : UNIFA

d'autres fluides. La figure 5.9 en donne une illustration. Il est constitué essentiellement des matières organiques⁴. Celles-ci contiennent environ 58 % de carbone. Leur dégradation et leur minéralisation par les organismes vivant du sol entraîne un relâchement important de carbone sous forme gazeuse dans l'atmosphère appelé CO_2 voir figure 5.10. Le CO_2 relâché dans l'atmosphère représente près de 70 % des émissions des gaz à effet de serre. Les gaz à effet de serre sont des composants gazeux qui absorbent le rayonnement infrarouge émis par la surface terrestre et contribuant à l'effet de serre (voir la figure 5.11). L'augmentation de leur concentration dans l'atmosphère terrestre est à l'origine selon certains scientifiques de la diminution de l'épaisseur de la couche d'ozone, ce qui cause des changements climatiques et le réchauffement de la planète. Le sol est également un facteur clé pour la compréhension de l'écoulement des fluides. L'écoulement des fluides dans le sol est particulièrement crucial pour la compréhension des processus physiques que nous venons d'évoquer. L'étude de la circulation des fluides à l'instar de l'eau permet de tendre vers une connaissance plus approfondie de notre écosystème et vers une meilleure gestion des ressources de la planète.

4. On peut définir la matière organique comme l'ensemble de tout ce qui est vivant ou a été vivant dans le sol. Nous avons par exemple les végétaux, les micro-organismes ou les cadavres d'animaux

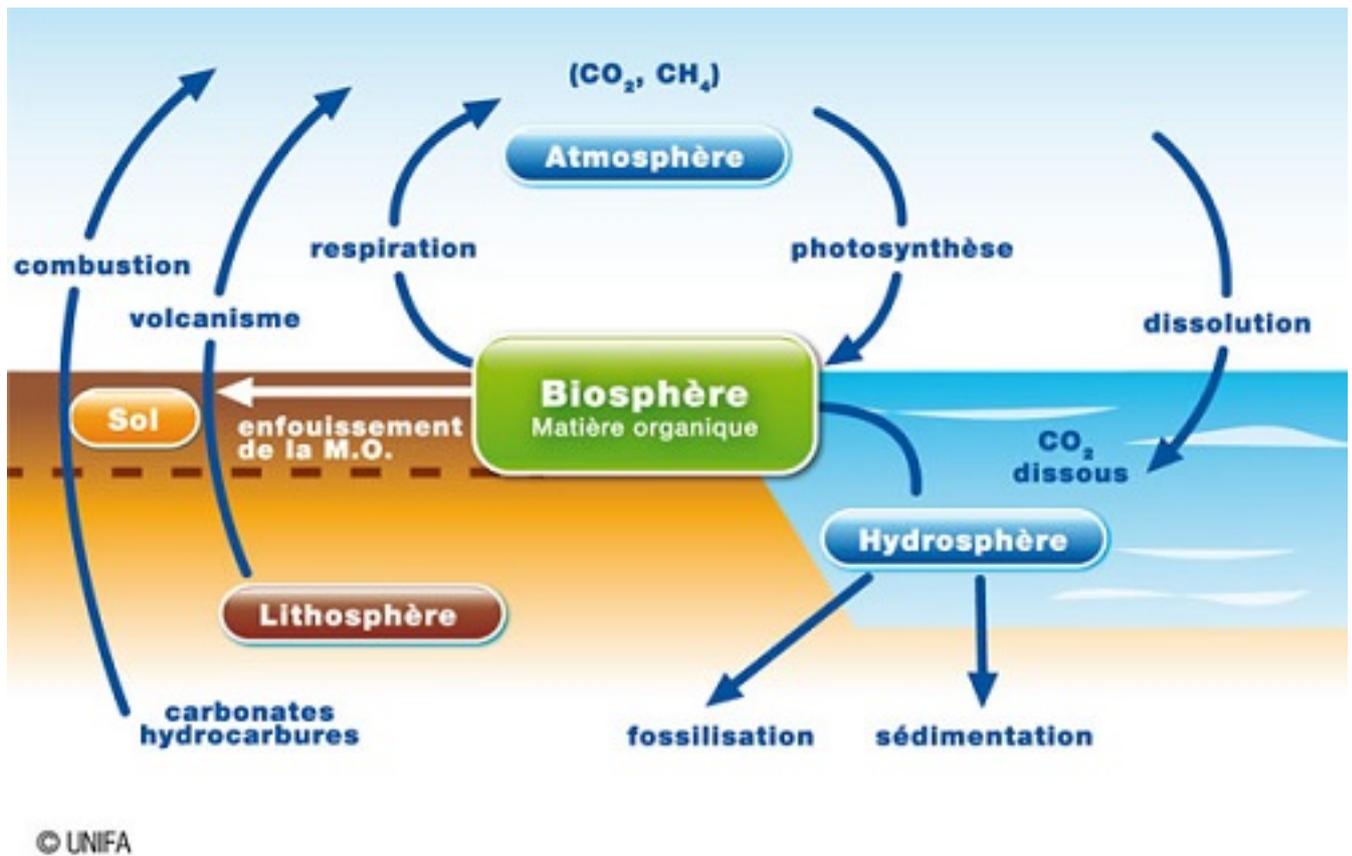


FIGURE 5.10: Le carbone dans le sol. @source : UNIFA

5.3 Le drainage

Comme mentionné dans la section précédente, le sol est un système complexe régi par une multitude de phénomènes physiques. Parmi ces phénomènes on a le phénomène d'écoulement des fluides représenté principalement par le processus de drainage. L'écoulement des fluides à travers le sol est particulièrement crucial pour la compréhension des processus physiques liés à de nombreux problèmes environnementaux (assainissement des eaux souterraines, dynamique biologique, etc.) et industriels (récupération assistée du pétrole). L'étude de la circulation des fluides à l'instar de l'eau permet de tendre vers une connaissance plus approfondie de notre écosystème (modification apportées à l'utilisation des terres ou du climat) et vers une meilleure gestion des ressources de la planète. C'est un processus qui dépend essentiellement de la structure spatiale de la forme où il est étudié. Il est donc important de tenir compte de la représentation géométrique de la forme, ainsi que de l'aspect spatialisation lors de sa modélisation. Le

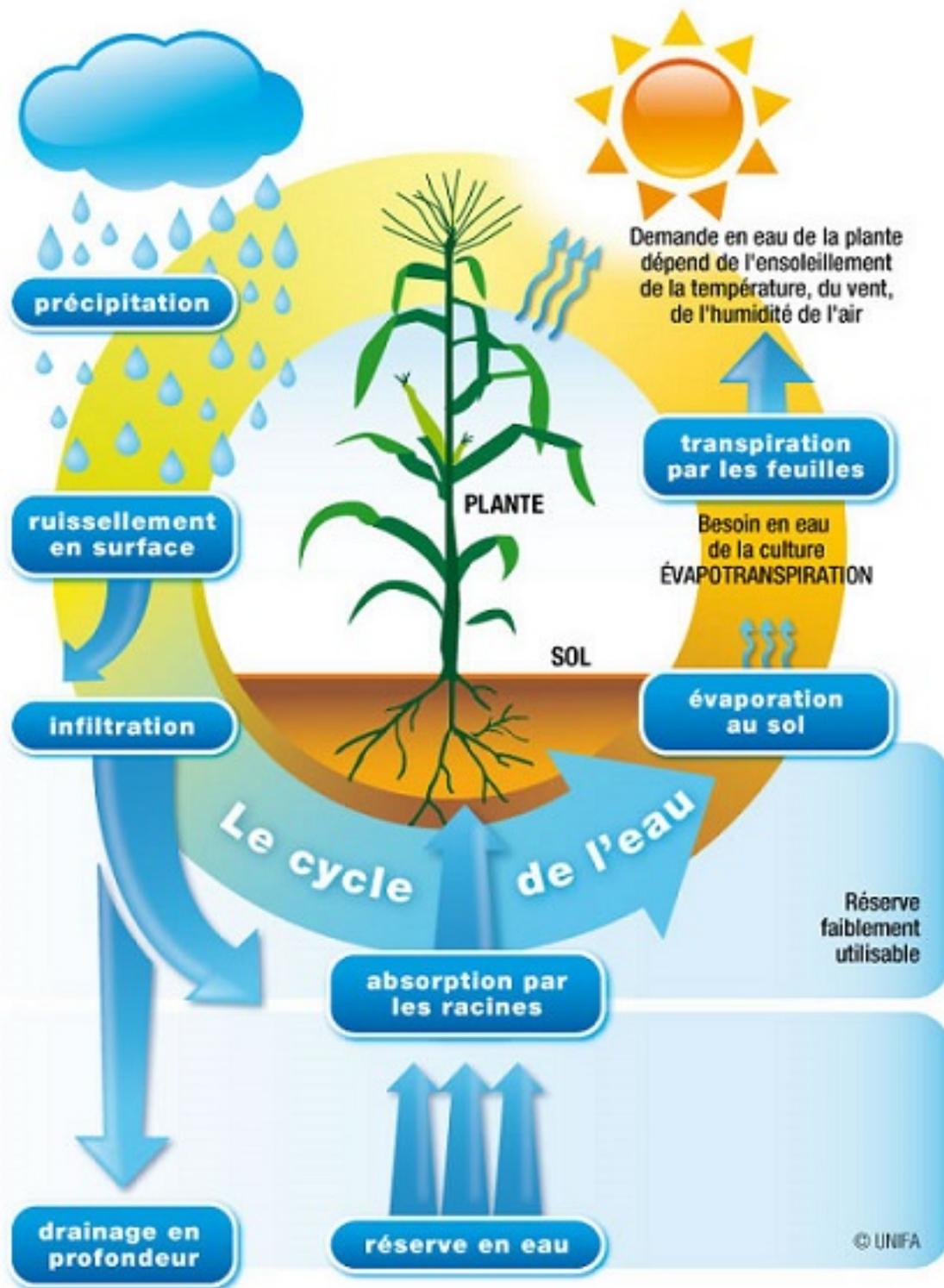


FIGURE 5.11: Le cycle de l'eau. @source : UNIFA

processus de drainage est généralement décrit par des lois de la physique et on l'étudie à plusieurs échelles dont l'échelle macroscopique avec la relation empirique de Darcy et à l'échelle microscopique dans l'espace poral. L'application du drainage en milieu poreux a pour rôle d'éliminer ou d'évacuer de l'eau en excès dans un sol humide. C'est un mécanisme où un fluide non mouillant (l'air dans notre cas) vient déplacer un fluide mouillant (l'eau dans notre cas). A une très basse vitesse imposée appelé pression hydrique, le fluide pousseur (l'air) va prioritairement envahir les pores les plus gros sous l'effet d'une pression hydrique seuil donnée par la Loi de Young Laplace. Chaque pore est ainsi visité jusqu'à l'atteinte d'un point d'équilibre. On présentera ici des résultats obtenus à l'échelle des pores sur des échantillons modélisés avec les ellipsoïdes. On a fait une comparaison qualitative et quantitative de nos résultats avec ceux obtenus à partir d'autres types de représentations [Pot et al.,2015]

5.4 Préparation des données de sols

Avant de faire toute modélisation sur un échantillon de sol, il faut d'abord effectuer des pré-traitements afin d'obtenir des données brutes. Ainsi, nous avons modélisé les données images 3D ROI p1bkk04a, ROI p1bkk03a et ROI p4bkk03a de [Pot et al.,2015] et avons réalisé l'expérience du drainage. La figure 5.13 montre une vue en perspective de quelque uns des voxels. Les différentes étapes pour obtenir ces images sont détaillées dans le même document (sections 3.1 à 3.4). Les échantillons de sol ont été obtenus à Versailles (France) et contiennent 17% d'argile, 56% de limon et 27% de sable et ont été passés à travers un tamis de 2 mm. Les agrégats de sol de taille comprise entre 2 et 3,15 mm ont été recueillis dans la phase solide et leur teneur en humidité gravi-métrique a été ajustée à $0,205 \text{ kg}^{-1}$. Ils ont ensuite été emballés uniformément à une densité de 1200 kg m^{-3} dans des cylindres de 50 mm de diamètre et de 40 mm de hauteur. Les colonnes de sol résultantes ont ensuite été sciées en tranches d'environ 8 mm d'épaisseur. Neuf cubes de sol de dimension $6 \times 6 \times 8 \text{ mm}^3$ ont été échantillonnés sur chaque tranche à l'aide

d'une lame afin de minimiser les perturbations pendant la coupe. Les échantillons ont été ensuite stockés dans une chambre froide à 4° C avant d'être traité.

5.5 Résultats et interprétations

5.5.1 Drainage à partir d'une représentation morphologique de l'espace poral : Obtention des interface eau-air à partir des ellipsoïdes.

On présente ici brièvement comment on extrait les interfaces eau-air obtenus après un processus de drainage sur une représentation de l'espace poral à base des primitives ellipsoïdes. Toutes les primitives ellipsoïdes sont initialement remplies d'eau. La distribution finale de la teneur en eau est simulée en suivant la procédure de drainage itérative mentionnée dans [Pot et al.,2015]. Dans ce schéma, l'équation de Young-Laplace donne l'équivalent du rayon maximal de pores R_{max} req(m), qui sont remplis d'eau à une pression hydrique (potentiel matriciel) fixe Ψ (en kPa).

$$\psi = 2\sigma \cos(\theta) R_{max}^{-1} \quad (5.2)$$

Où σ est la tension superficielle de l'eau en contact avec l'air, θ est l'angle de contact entre l'eau et solide, supposé dans cette étude être nul, car on utilise un fluide complètement mouillant(l'eau). Les conditions pour lesquelles un ellipsoïde donné doit être vidé ou rempli d'air sont similaires à celles adoptées dans l'article [Pot et al.,2015], en ce sens qu'un ellipsoïde est autorisé à se vider même si aucun des ellipsoïdes voisins ne l'est. Comme pour le drainage effectué en utilisant la représentation à base de boules [Monga,2014], nous pouvons soit remplir d'air ou d'eau les primitives (boules, ellipsoïdes, cylindres, etc.) uniquement en fonction de leurs caractéristiques géométriques, ou prendre en compte les relations d'adjacence entre elles. Dans le premier cas, une boule ne se videra que si son rayon est supérieur au rayon seuil maximal donné par la loi de Young Laplace. Dans le second cas, une boule ne se videra que si son rayon est inférieur à un

rayon seuil donné et si elle n'est pas entourée de boules dont les rayons sont inférieurs au même rayon seuil. Cependant, étant donné que, contrairement aux boules, un ellipsoïde a 3 axes de symétrie. Il faut donc faire le choix d'un rayon entre les trois rayons des trois axes. Ce rayon sera ensuite utilisé comme critère pour déterminer si l'ellipsoïde est vide ou non. Les options sont le plus petit rayon des trois axes, le plus grand des trois et la moyenne des trois. Dans ce qui suit, nous avons examiné les 3 options. Finalement, lorsque tous les ellipsoïdes ont été considérés en appliquant une règle uniforme pour tous, le modèle contient la distribution spatiale de l'eau dans le sol, laquelle peut être directement comparée à la distribution eau-air observée dans l'image 3D $SR - \mu CT$ segmentée, ainsi qu'aux modèles de prédiction obtenus dans l'article de Pot avec l'approche Lattice-Boltzmann. La déclaration ci-dessus s'applique si les mêmes lois physiques sont respectées bien entendu. Il convient de souligner que la loi de Young Laplace a été conçue pour les pores cylindriques et peut être utilisée pour les pores ellipsoïdes, puisqu'un ellipsoïde est proche d'un cylindre dont le rayon minimal correspond au rayon du cylindre.

5.5.2 Évaluation des modèles de prédiction interfaces eau-air

L'un des objectifs de la simulation du processus du drainage dans ce travail était d'évaluer si un modèle morphologique de l'espace poral avec ellipsoïdes prédisait de manière plus précise et / ou plus rapide la distribution de l'eau dans les divers pores qu'un modèle basé sur des boules. Par conséquent, nous avons considéré exactement les mêmes données images avec les mêmes potentiels matriciels de -2 kPa à -1 kPa (cubes bkk03a et bkk04a, respectivement). Pratiquement, nous avons utilisé le premier ensemble de données pour calibrer de manière optimale les paramètres et le second pour valider. Pour évaluer quantitativement l'erreur du drainage comparée entre les données de la simulation et celles mesurées, on calcule l'erreur absolue moyenne appelée MAE comme suit :

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |s_i - m_i| \quad (5.3)$$

Où la sommation est effectuée sur tous les voxels des pores n , et s_i et m_i sont respectivement les densités seuillées des voxels pour les images simulées et mesurées. En effet, nous attachons à chaque ellipsoïde l'ensemble de voxels correspondants afin de calculer le MAE.

5.5.3 Résultats et discussions

La figure 5.12 montre des vues en perspective et compare les différentes représentations réalisées sur l'échantillon de sol p1bkk03a. On part de la représentation avec les boules (ligne 1), puis à la représentation avec les ellipsoïdes primaires (ligne 2), jusqu'à la représentation avec les ellipsoïdes terminaux (ligne 3). A chaque niveau de représentation hiérarchique, on peut remarquer que le nombre de primitives diminue. La suite de ces résultats et les discussions qui en découlent, suivent de près la section 3.2 de [Pot et al.,2015] qui traite de la modélisation des interfaces eau-air à l'échelle des pores. Les figures 5.12 , 5.14 , 5.15 , 5.16 , 5.17 , 5.18 , 5.19 , 5.20 , 5.21 et 5.22 et les tableaux 5.2 et 5.3 illustrent l'estimation des interfaces eau-air à partir des ellipsoïdes et sur les mêmes données que dans [Pot et al.,2015]. Le tableau 5.2 présente le calcul du MAE pour l'échantillon p1bkk04a avec un potentiel matriciel de -1 kpa, pour l'échantillon p1bkk03a et le nombre p4bkk03a à -2 kpa. Nous avons expérimenté les différents cas de drainage avec les trois rayons des ellipsoïdes et en utilisant la loi de Young Laplace. En effet, pour nos ensembles de données, les résultats (valeurs MAE) varient peu en fonction du choix des rayons (rayon minimal, rayon moyen, etc.). La raison est que pour ces données spécifiques, les rayons des ellipsoïdes sont relativement homogènes. Toutefois, nous recommandons de choisir le rayon minimal car, comme nous l'avons dit plus haut, la loi de Young Laplace a été conçue pour les pores cylindriques. Par rapport à l'expérience effectuée avec les boules [Pot et al.,2015], nous obtenons un gain net en termes de temps de calcul. De plus, le gain de qualité lié à la valeur du MAE, décroît en fonction de la qualité des résultats du drainage. Nous définissons le gain de qualité comme le ratio MAE. Donc, en ce qui concerne le gain de qualité

du MAE, le gain est nettement observé pour p1bkk04a. Pour p1bkk03a et p4bkk03a, les valeurs du MAE sont comparables. Si nous considérons le schéma qui utilise le rayon minimal R_{min} , les gains de qualité Ellipsoïde et boules sont les suivants : ROI p1bkk04a : 2, ROI p1bkk03a : 1.06, ROI p4bkk03a : 0.97.

Le tableau 5.3 présente l'estimation des erreurs d'approximations lorsqu'on approxime l'espace des pores à l'aide d'un ensemble d'ellipsoïdes et de boules. Dans ce tableau 5.3, nous faisons référence à deux paramètres pour mesurer cette erreur : ρ_1 et ρ_2 . ρ_1 est l'erreur d'approximation liée au pourcentage d'espace de pores non inclus dans l'ensemble des ellipsoïdes, respectivement l'ensemble de boules, ρ_2 est l'erreur d'approximation liée au pourcentage de la réunion des ellipsoïdes, respectivement des boules non comprises dans les pores. Nous avons remarqué que ρ_1 était plus petit pour les ellipsoïdes que pour les boules et que ρ_2 était plus petit pour les boules que pour les ellipsoïdes. En effet, cela est dû au fait que nous avons calculé les ellipsoïdes en utilisant l'enveloppe convexe de l'ensemble des boules correspondantes ; Ce qui fait que nous avons légèrement surestimé l'espace des pores. En plus, il est indiqué dans [Pot et al.,2015] que les boules ont sous-estimé la porosité. L'utilisation des ellipsoïdes corrigera cet aspect, mais augmentera légèrement la porosité. En outre, toujours dans ce tableau 5.3 et comme dans l'article, nous avons considéré toutes les boules maximales, qui ont un fort taux de recouvrement et pas seulement l'ensemble minimal de boules recouvrant le squelette comme dans [Monga,2014]. La raison est que pour une application comme le drainage, les résultats étaient beaucoup plus précis en prenant en compte l'ensemble de toutes les boules maximales.

Les figures 5.15, 5.18 et 5.21 présentent une comparaison des modèles de prédictions de la distribution eau-air dans les représentations avec les ellipsoïdes et les boules pour l'échantillon p1bkk04a. Il convient de noter que la représentation avec les boules utilisée ici, comme dans [Pot et al.,2015], inclut toutes les boules maximales de la forme de l'espace des pores. En effet, pour simuler le processus de drainage, on considère l'union de toutes les boules maximales

dont les rayons sont inférieurs au rayon seuil calculé grâce à la loi de Young Laplace. Étant donné que les boules maximales ont de fortes intersections entre elles, elles ne définissent pas du tout une approximation par morceaux de l'espace poral. D'autre part, les ellipsoïdes, par construction, ont des intersections très faibles entre elles et forment donc une approximation par morceaux de l'espace des pores. Par conséquent, la représentation basée sur les ellipsoïdes pourrait être utilisée pour de nombreuses autres applications telles que : la simulation d'écoulement (diffusion, etc.), la simulation de dynamiques biologiques, la classification des milieux poreux, etc. En effet, dans le cas de la rétention d'eau, une comparaison plus nette de la représentation de l'espace poral avec les boules par rapport à celle avec les ellipsoïdes n'aurait pas utilisé toutes les boules maximales, mais seulement l'ensemble minimal de boules recouvrant le squelette. Cet ensemble de boules définit une approximation par morceaux de l'espace des pores [Monga et al., 2007, Ngom et al., 2012] et a été utilisé avec succès pour simuler la décomposition microbienne de matière organique [Monga, 2014]. Nous avons également par la suite calculé les interfaces eau-air en utilisant cet ensemble minimal de boules. En effet, étant donné que cette représentation minimale de boules n'incluait pas une partie importante de l'espace des pores, les résultats de rétention d'eau étaient approximatifs. C'est la raison pour laquelle, dans le travail décrit dans [Pot et al., 2015], nous utilisons l'ensemble de toutes les boules maximales pour simuler la processus de drainage. Une autre façon de comparer les représentations ellipsoïdes et boules pour la simulation du drainage consisterait à calculer tous les ellipsoïdes maximaux de la forme, puis à mettre en œuvre la même stratégie que celle utilisée avec l'ensemble de toutes les boules maximales. Malheureusement, il n'existe pas encore de méthode, avec un temps de calcul raisonnable, permettant de déterminer tous les ellipsoïdes maximaux d'une forme volumique 3D. Les figures 5.14 , 5.16 , 5.17 , 5.19 , 5.20 et 5.22 présentent la simulation de la distribution eau-air sur les représentations basées sur les ellipsoïdes et les boules pour les échantillons p1bkk03a et p4bkk03a respectivement. Ces différentes visualisations sont en ligne

avec l'évaluation quantitative donnée par le calcul des valeurs du MAE dans le tableau 5.2. En effet, la méthode basée sur les ellipsoïdes fournit des interfaces eau-air qui se rapprochent assez bien avec celles expérimentales, sauf certains cas où les ellipsoïdes ne fonctionnent pas mieux que les boules (voir figure 5.16 par exemple). Sinon, la prédiction des interfaces air-eau conserve globalement la même forme qu'avec les boules (voir figures 5.14 , 5.15 , 5.19 et 5.21). Donc globalement, les résultats pourraient correspondre plus exactement aux résultats expérimentaux, mais donneraient néanmoins une estimation raisonnable des interfaces eau-air avec un temps de calcul beaucoup plus court (15-30 minutes avec un PC standard) que les techniques LBM, PDE ou FEM. La raison est que nous utilisons une représentation plus sophistiquée de la géométrie de l'espace des pores avec des primitives plus évoluées au lieu de l'ensemble des voxels(primitives primaires). Toutefois, notre approximation par morceaux est moins précise que la représentation avec les voxels, mais exploitable pour simuler des applications. Le calcul initial de la représentation de l'espace des pores avec les ellipsoïdes prend entre 15 et 25 minutes de temps CPU par codage Matlab (voir tableau 5.4). Surtout, cette tâche spécifique nécessite l'utilisation des structures de données sophistiquées. Nous ferons une implémentation en C pour essayer d'améliorer ce temps de calcul. Car matlab est un peu lourd à cet effet.

	Boules : ensemble minimal de boules maximales recouvrant le squelette	Boules : ensemble de toutes les boules maximales	Ellipsoïdes (Rmin)	Ellipsoïdes (Rmean)	Ellipsoïdes (Rmax)
ROI p1bkk04a					
MAE	0.46	0.16	0.08	0.08	0.08

Qualité de gain(ratio MAE) par rapport à l'ensemble de toutes les boules maximales			2.00	2.00	2.00
Qualité de gain(ratio MAE) par rapport à l'ensemble minimal de boules maximales recouvrant le squelette			5.75	5.75	5.75
Temps de calcul (s)		12409	1933	1933	1934
Gain de temps (Ratio temps de calcul)			6.41	6.42	6.42
Diamètre seuil selon la loi de Young Laplace		300 μm	300 μm	300 μm	300 μm
ROI p1bkk03a					
MAE	0.41	0.18	0.17	0.21	0.20
Qualité de gain(ratio MAE) par rapport à l'ensemble de toutes les boules maximales			1.06	0.86	0.9

Qualité de gain(ratio MAE) par rapport à l'ensemble minimal de boules maximales recouvrant le squelette			2.41	1.95	2.05
Computation time (s)		5476	879	816	820
Gain de temps (Ratio temps de calcul)			6.20	6.70	6.68
Diamètre seuil selon [Pot et al.,2015]	73.6 μm				
ROI p4bkk03a					
MAE	0.56	0.30	0.31	0.31	0.38
Qualité de gain(ratio MAE) par rapport à l'ensemble de toutes les boules maximales			0.97	0.97	0.8
Qualité de gain(ratio MAE) par rapport à l'ensemble minimal de boules maximales recouvrant le squelette			1.80	1.80	1.47
Temps de calcul (s)		6765	1166	1115	1112

Gain de temps (Ratio temps de calcul)			5.80	6.06	6.08
Diamètre seuil selon [Pot et al.,2015]	112 μm				

TABLE 5.2: Valeurs de l'erreur de drainage MAE entre l'image segmentée et la représentation géométrique avec les ellipsoïdes et les temps de calcul(en seconde) pour les différents cas de simulations. On a pris un diamètre seuil selon la loi de Young Laplace pour p1bkk04a et selon l'article [Pot et al.,2015] pour les autre ensembles de données

	Voxels	Boules : ensemble minimal de boules maximales recouvrant le squelette	Boules : ensemble de toutes les boules maximales	Ellipsoïdes primaires	Ellipsoïdes terminaux
p1bkk04a					
ρ_1	0	0.2442	0.0607	0.0582	0.0670
ρ_2	0	0.0226	0.0773	0.1305	0.1467
Nombre de primitives	2079943	26493	151797		4072
p1bkk03a					
ρ_1	0	0.2592	0.0865	0.0318	0.0239
ρ_2	0	0.0215	0.0531	0.1140	0.1258
Nombre de primitives	280338	4941	125984		2011
p4bkk03a					
ρ_1	0	0.4033	0.1190	0.0875	0.0968
ρ_2	0	0.0479	0.0628	0.1502	0.1664
Nombre de primitives	219353	5257	134417		2505

TABLE 5.3: Erreur d'approximation de l'espace poral entre l'image $SR - \mu CT$ segmentée et les modèles géométriques : $\rho_1 = \frac{V_{esp}}{V_{sol}}$ et $\rho_2 = \frac{V_{prim}}{V_{sol}}$. Où V_{esp} est le nombre de voxels de l'espace poral de l'image segmentée $SR - \mu CT$ non inclus dans les primitives ; V_{prim} est le nombre de voxels de primitives de l'image segmentée $SR - \mu CT$ non inclus dans l'espace poral ; V_{sol} est le nombre total de voxels de l'image segmentée $SR - \mu CT$

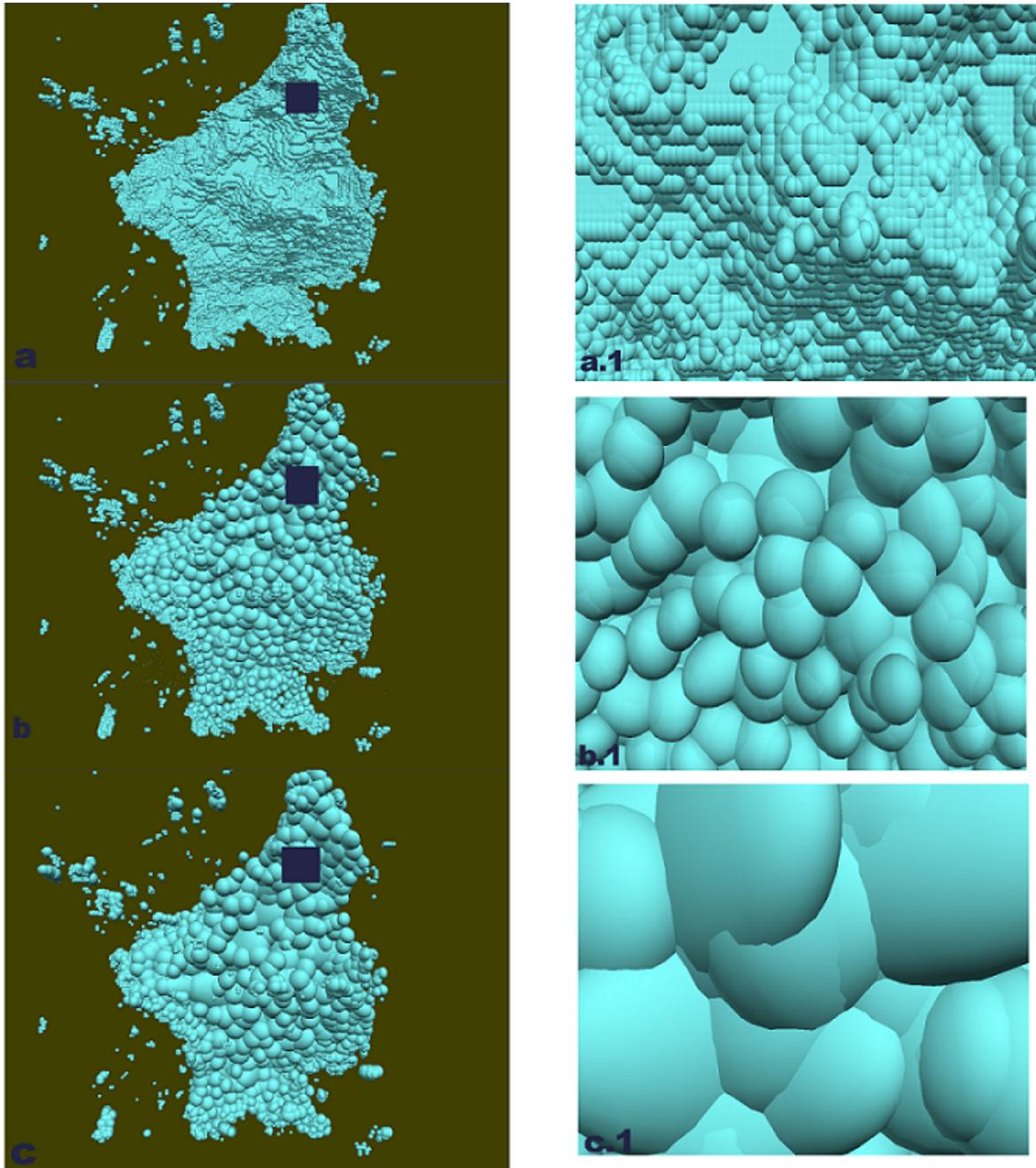
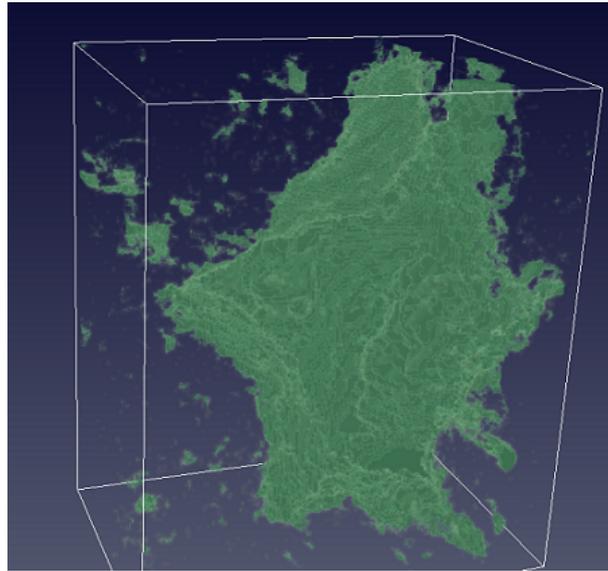


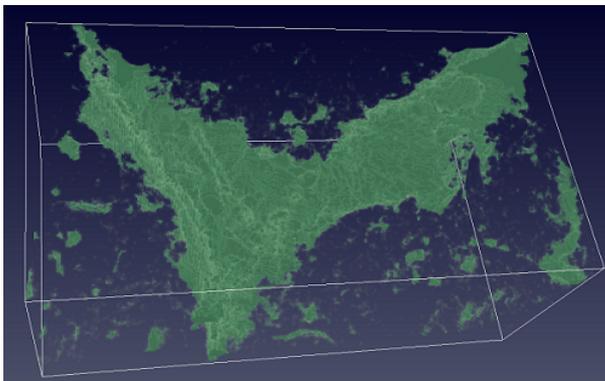
FIGURE 5.12: Comparaison entre la représentation avec les boules et la représentation avec les ellipsoïdes pour le pore **ROI p1bkk03a**. La première ligne montre la représentation avec les boules. La seconde ligne montre les ellipsoïdes primaires obtenus avec l'algorithme de division fusion à l'aide des K -means et la troisième ligne montre les ellipsoïdes finaux obtenus avec l'algorithme de croissance de régions. Les différentes images à droite représentent les agrandissements respectifs de celles de gauche.



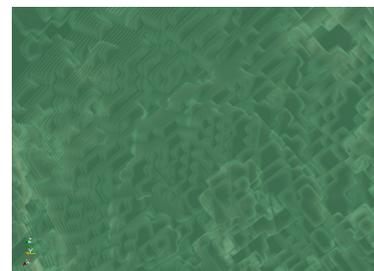
(a) Donnée image 3D ROI p1bkk03a à une échelle réduite



(b) Donnée image 3D ROI p1bkk04a à une échelle réduite



(c) Donnée image 3D ROI p4bkk03a à une échelle réduite



(d) Zoom des voxels sur une partie de l'image

FIGURE 5.13: Données images 3D volumiques d'échantillons de sol

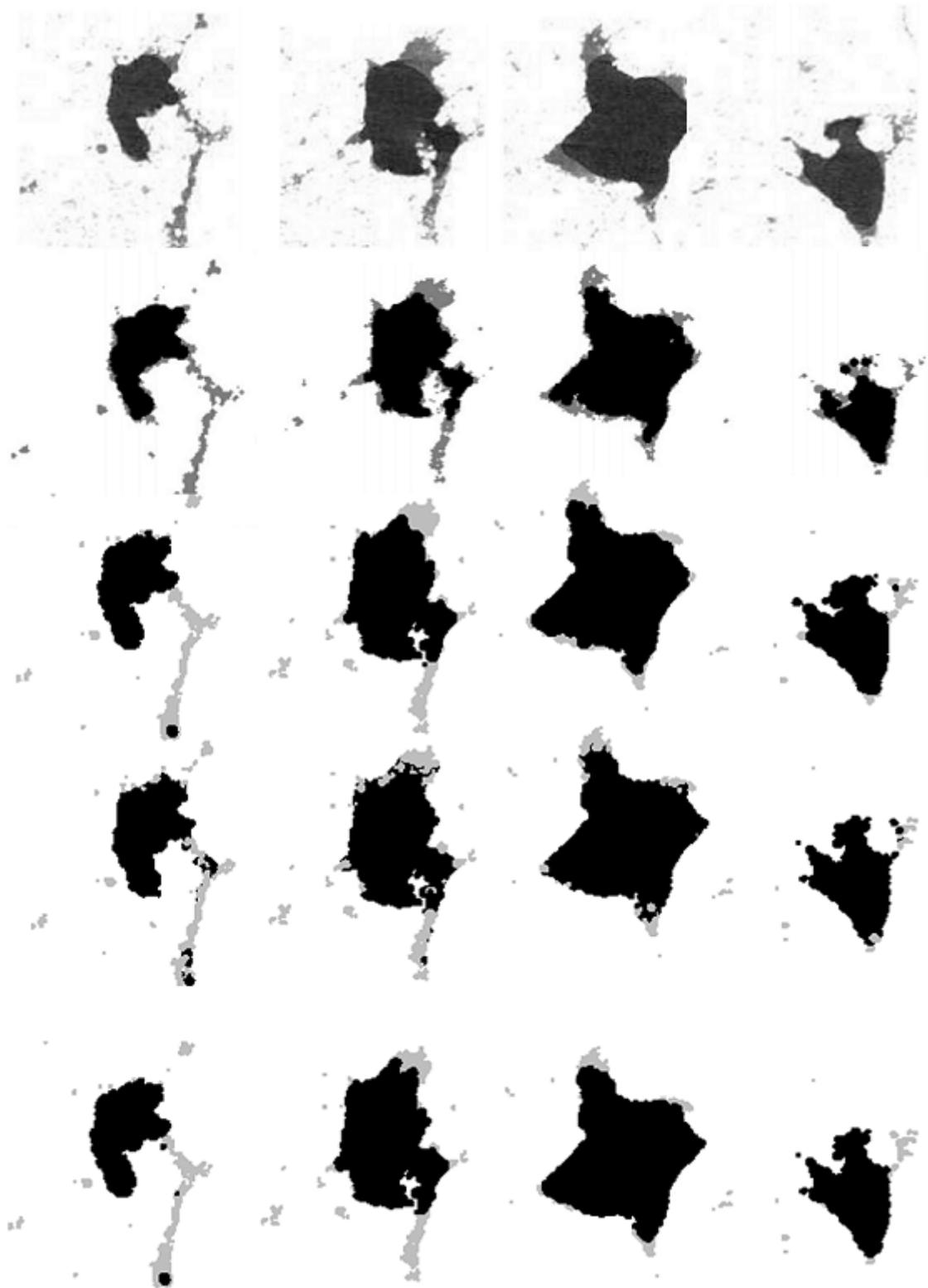


FIGURE 5.14: Comparaison des coupes 2D des résultats du drainage lorsque le point d'équilibre est atteint. On a les coupes de l'expérience originale (première ligne) et les modèles de simulation de la distribution air-eau dans l'espace poral connecté **ROI p1bkk03a** à différentes sections verticales pour $z = 18, 24, 34$ et 65 (de gauche à droite). La phase solide est en blanc, l'eau est en gris clair et l'air est en noir. La deuxième ligne correspond à la simulation avec les boules, tandis que les troisième, quatrième et cinquième résultent de la modélisation avec des ellipsoïdes définis respectivement avec le rayon minimal (3e ligne), le rayon maximal (4e ligne) et le rayon moyen (5ème ligne). Le diamètre seuil a été fixé à $73\mu m$.

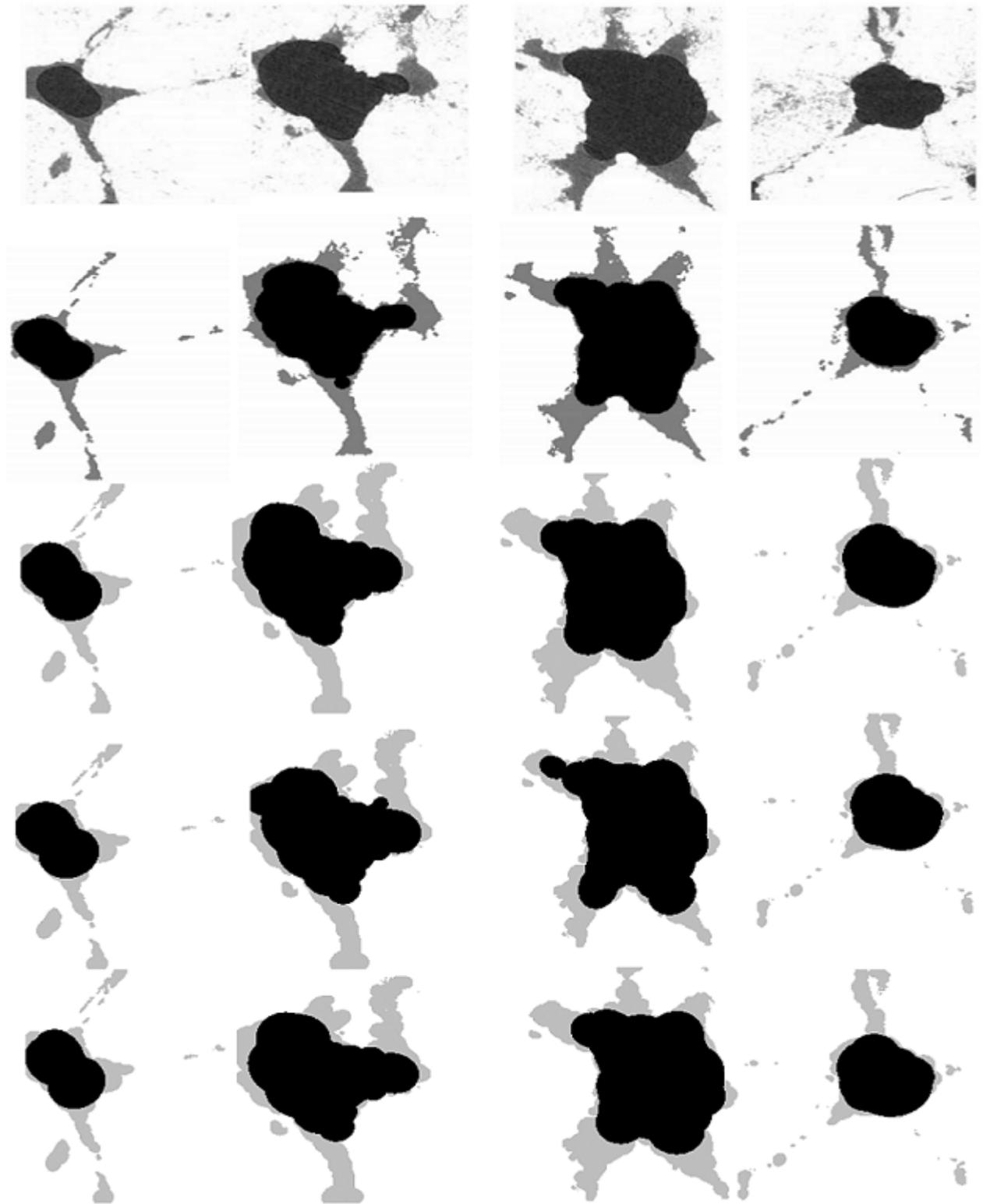


FIGURE 5.15: Comparaison des coupes 2D des résultats du drainage lorsque le point d'équilibre est atteint. On a les coupes de l'expérience originale (première ligne) et les modèles de simulation de la distribution air-eau dans l'espace poral connecté **ROI p1bkk04a** à différentes sections verticales pour $z = 22, 64, 106$ et 148 (de gauche à droite). La phase solide est en blanc, l'eau est en gris clair et l'air est en noir. La deuxième ligne correspond à la simulation avec les boules, tandis que les troisième, quatrième et cinquième résultent de la modélisation avec des ellipsoïdes définis respectivement avec le rayon minimal (3e ligne), le rayon maximal (4e ligne) et le rayon moyen (5ème ligne). Le diamètre seuil a été fixé à $400\mu m$.

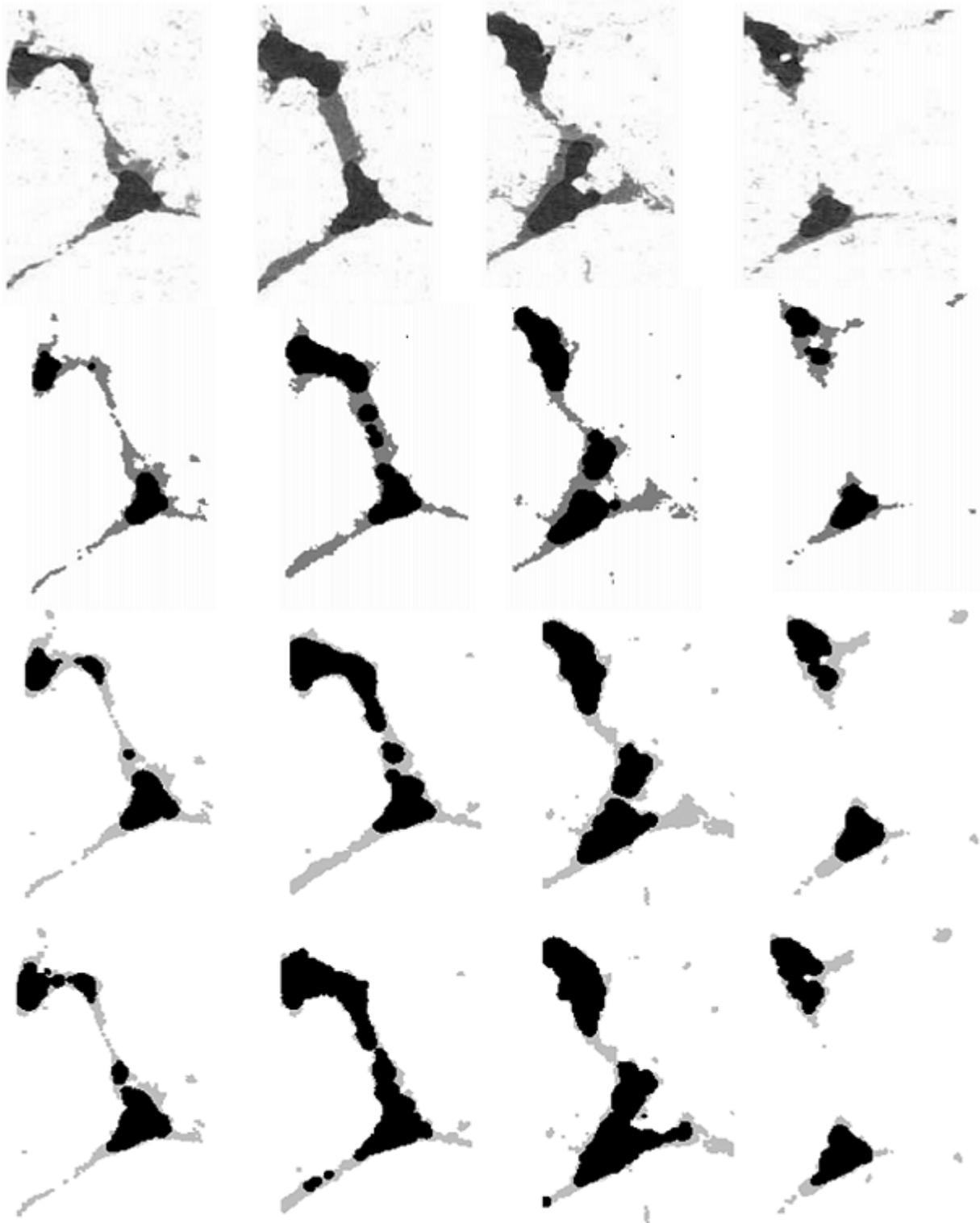


FIGURE 5.16: Comparaison des coupes 2D des résultats du drainage lorsque le point d'équilibre est atteint. On a les coupes de l'expérience originale (première ligne) et les modèles de simulation de la distribution air-eau dans l'espace poral connecté **ROI p4bkk03a** à différentes sections verticales pour $z = 30, 39, 54$ et 63 (de gauche à droite). La phase solide est en blanc, l'eau est en gris clair et l'air est en noir. La deuxième ligne correspond à la simulation avec les boules, tandis que les troisième, quatrième et cinquième résultent de la modélisation avec des ellipsoïdes définis respectivement avec le rayon minimal (3e ligne) et le rayon maximal (4e ligne). Le diamètre seuil a été fixé à $112\mu m$.

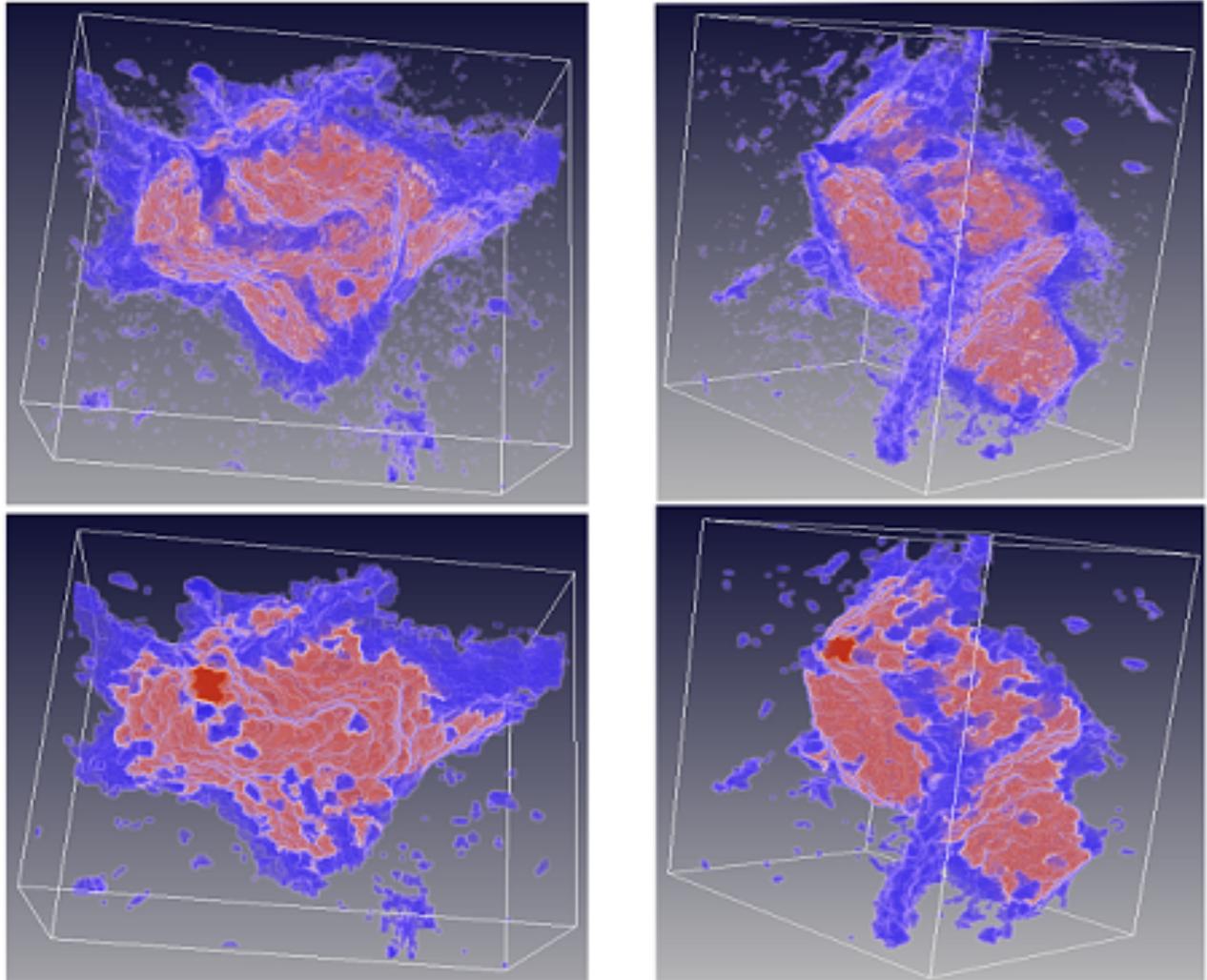


FIGURE 5.17: Visualisation 3D des résultats du drainage au point d'équilibre sur deux angle de vus différents de **ROI p1bkk03a**. La phase solide n'est pas représentée ici. L'eau est en bleu et l'air en rouge. Les images de la première ligne correspondent à l'expérience originale et les images du bas montrent les simulations avec les ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $73\mu m$.

	ROI p1bkk04a	ROI p1bkk03a	ROI p4bkk03a
Temps CPU total pour obtenir les ellipsoïdes (avec le code matlab)	1370 sec.	985 sec.	1017 sec.

TABLE 5.4: Temps de calcul nécessaire pour obtenir les ellipsoïdes. Les ellipsoïdes sont calculés une fois pour toute. Une implémentation en langage C réduirait encore plus ce temps de calcul comparer à l'implémentation Matlab.

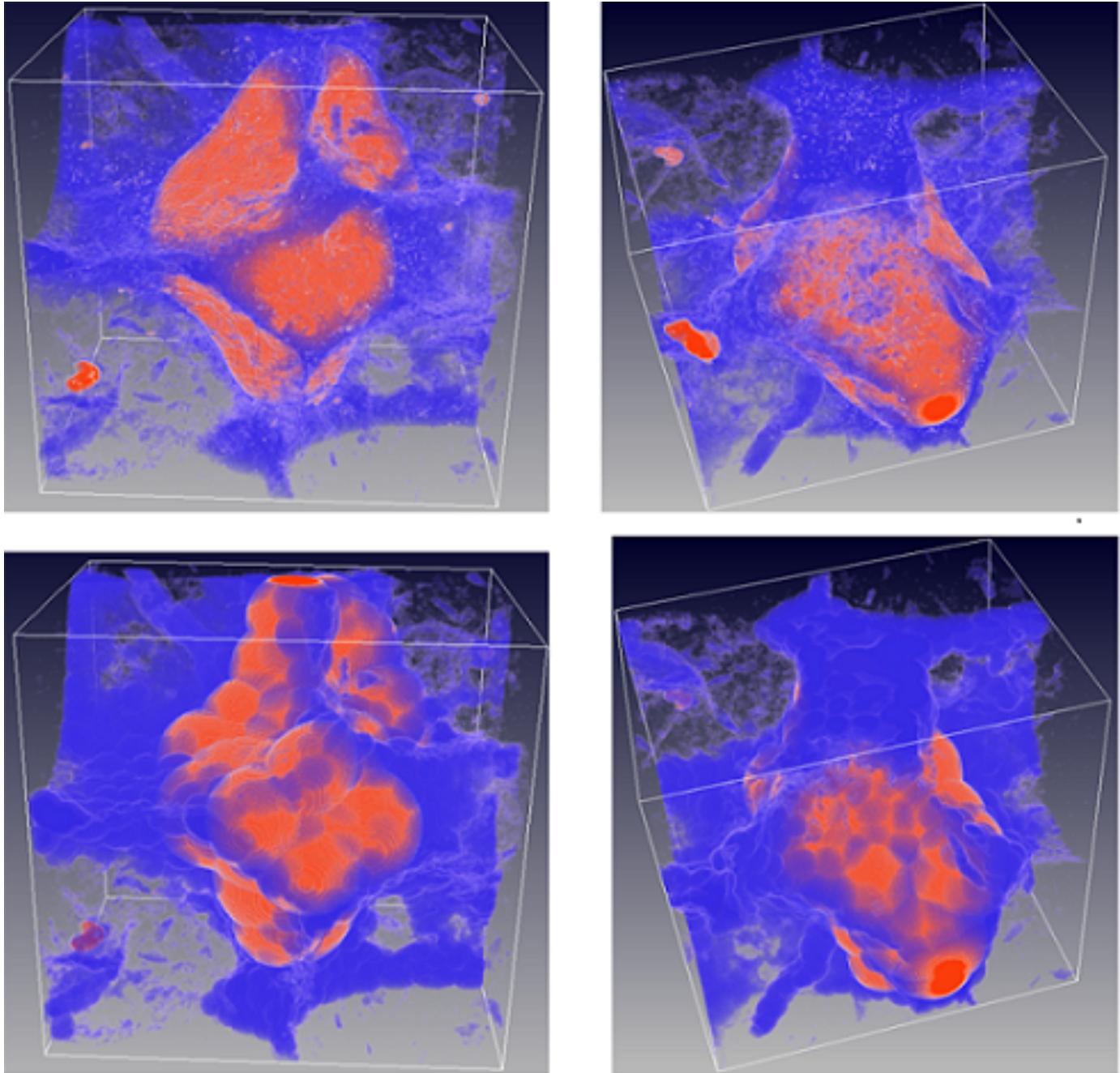


FIGURE 5.18: Visualisation 3D des régions d'intérêts de **ROI p1bkk04a** après drainage vu sur deux points de vue différents. La phase solide n'est pas représentée ici. L'eau est en bleu et l'air en rouge. Les images de la première ligne correspondent aux données CT originale et les images du bas montrent les simulations avec les ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $400\mu m$ pour évaluer leur niveau de saturation.

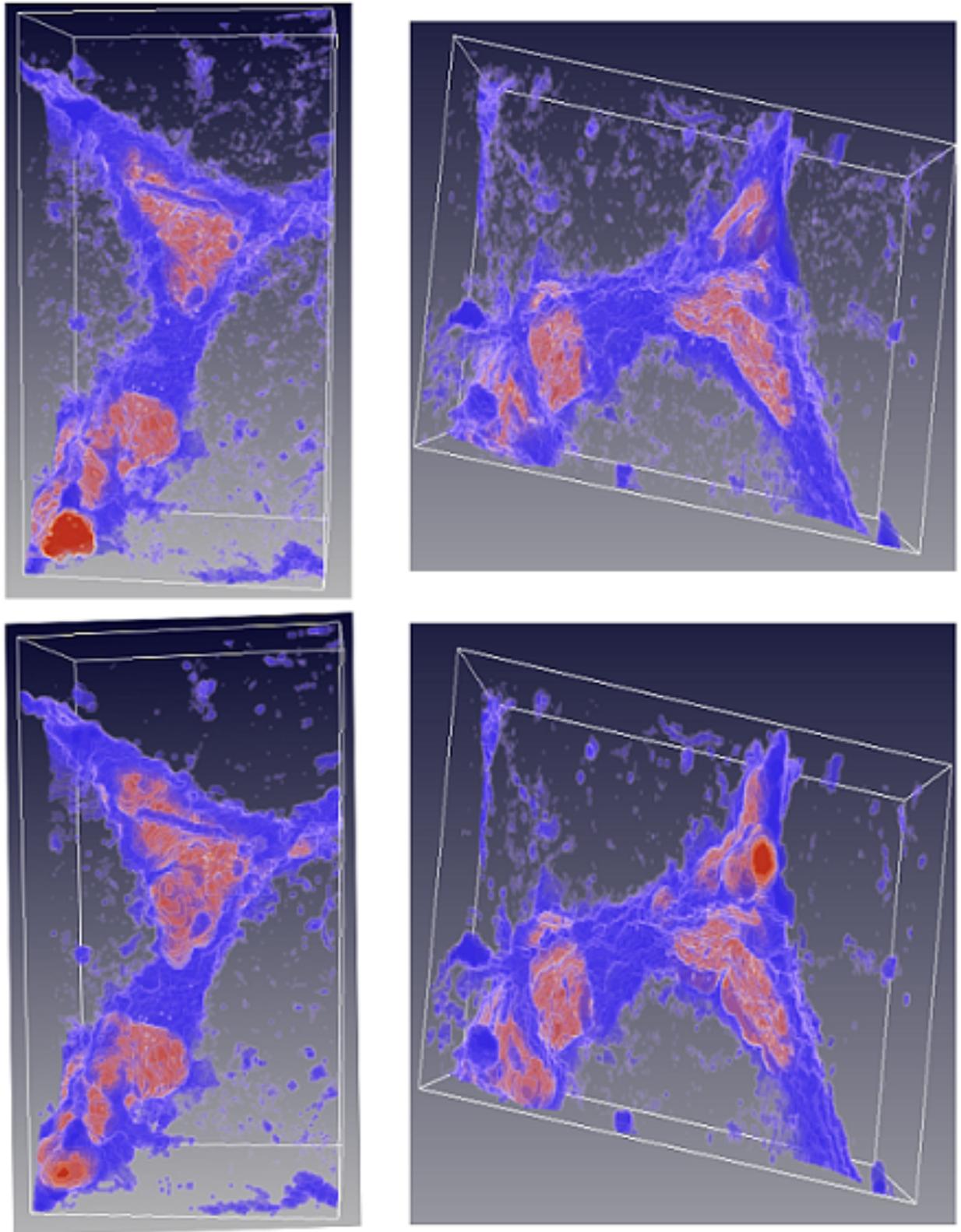


FIGURE 5.19: Visualisation 3D des résultats du drainage au point d'équilibre sur deux angle de vus différents de **ROI p4bkk03a**. La phase solide n'est pas représentée ici. L'eau est en bleu et l'air en rouge. Les images de la première ligne correspondent à l'expérience originale et les images du bas montrent les simulations avec les ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $112\mu m$.

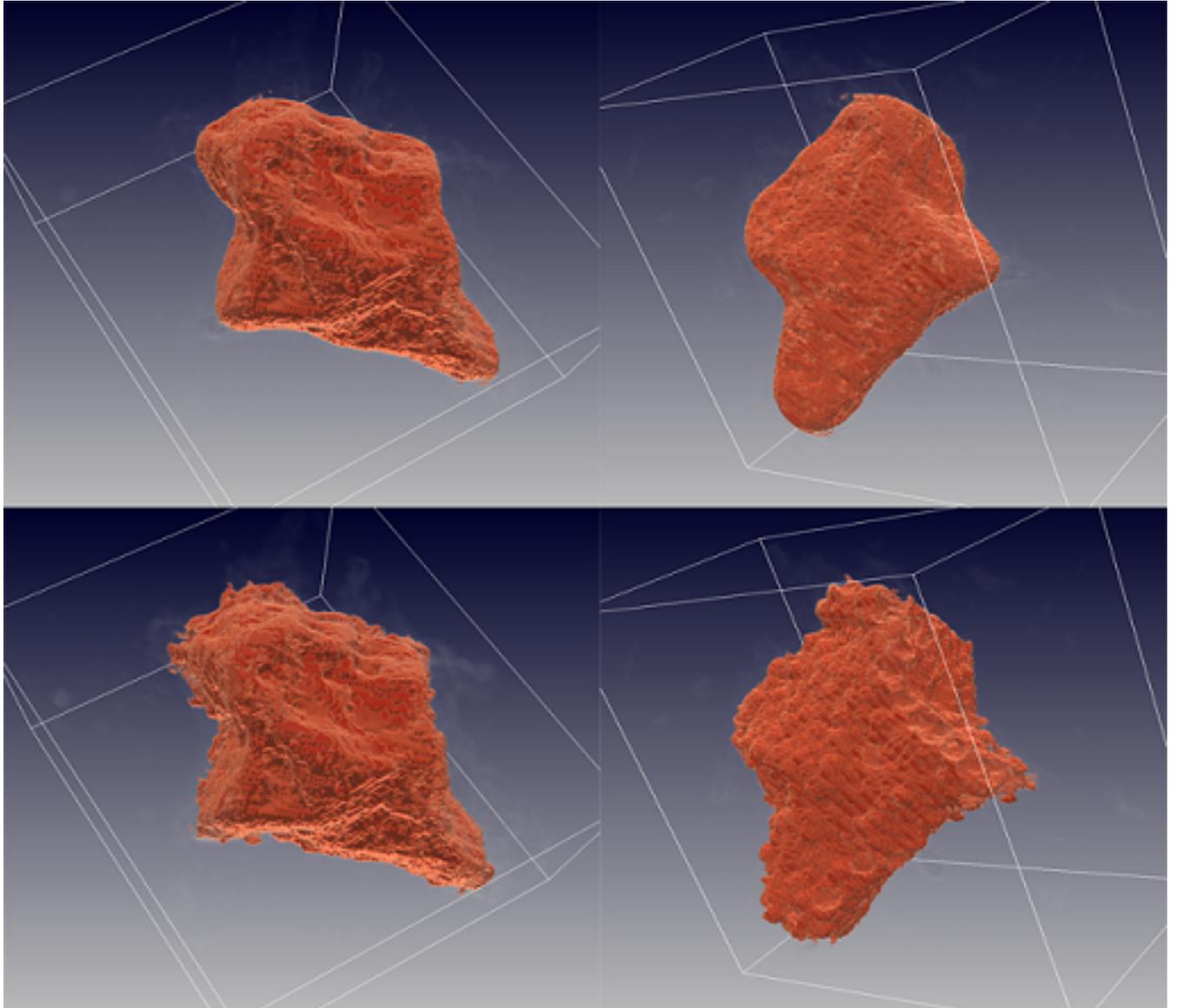


FIGURE 5.20: Visualisation 3D sur deux angle de vue différents des interfaces eau-air obtenues après drainage de **ROI p1bkk03a**. Les images de dessus correspondent aux données de l'expérience originale et les images du bas montrent les simulations en utilisant des ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $73,6\mu m$.

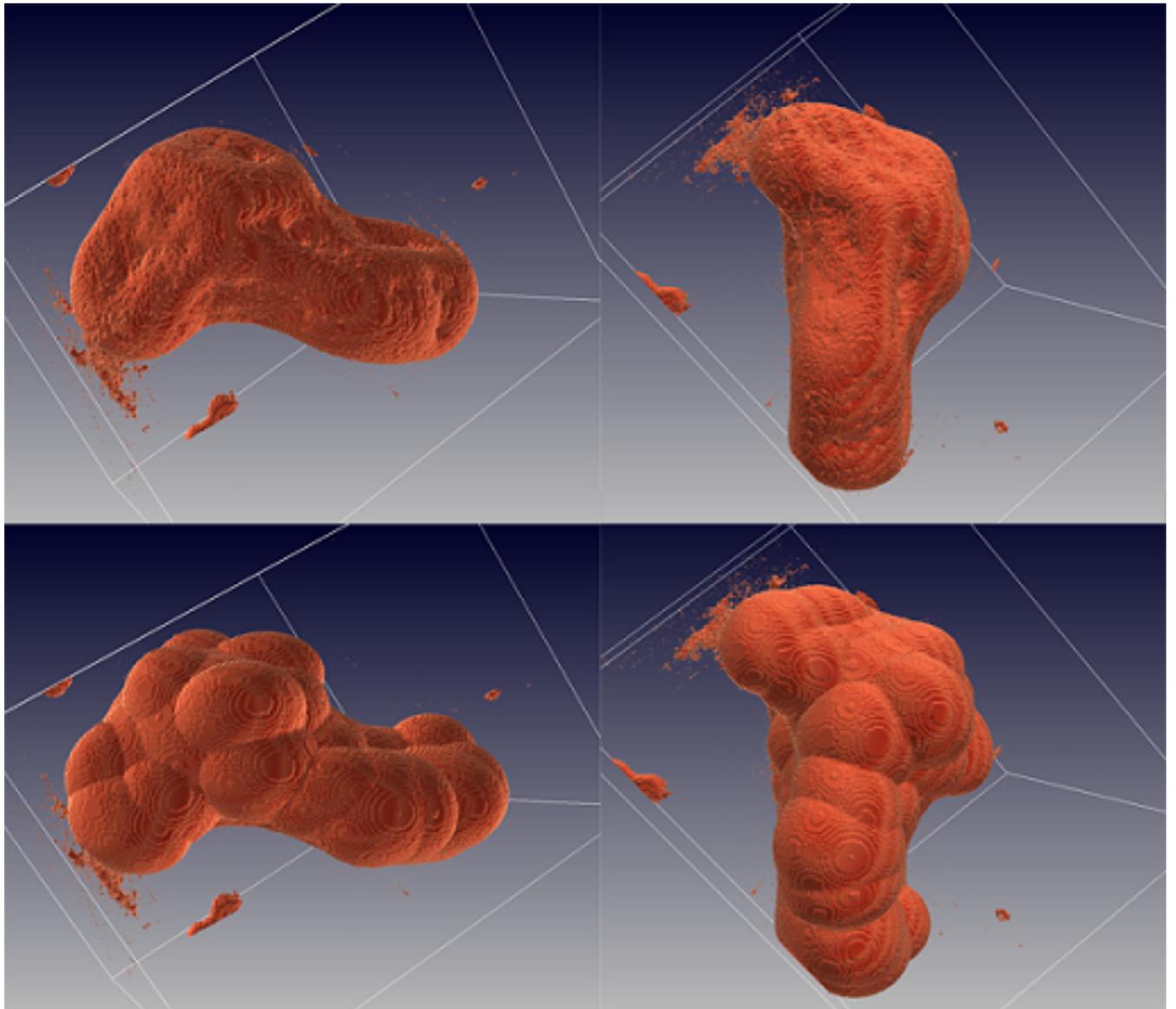


FIGURE 5.21: Visualisation 3D sur deux angle de vue différents des interfaces eau-air obtenues après drainage de **ROI p1bkk04a**. Les images de dessus correspondent aux données de l'expérience originale et les images du bas montrent les simulations en utilisant des ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $400\mu m$.

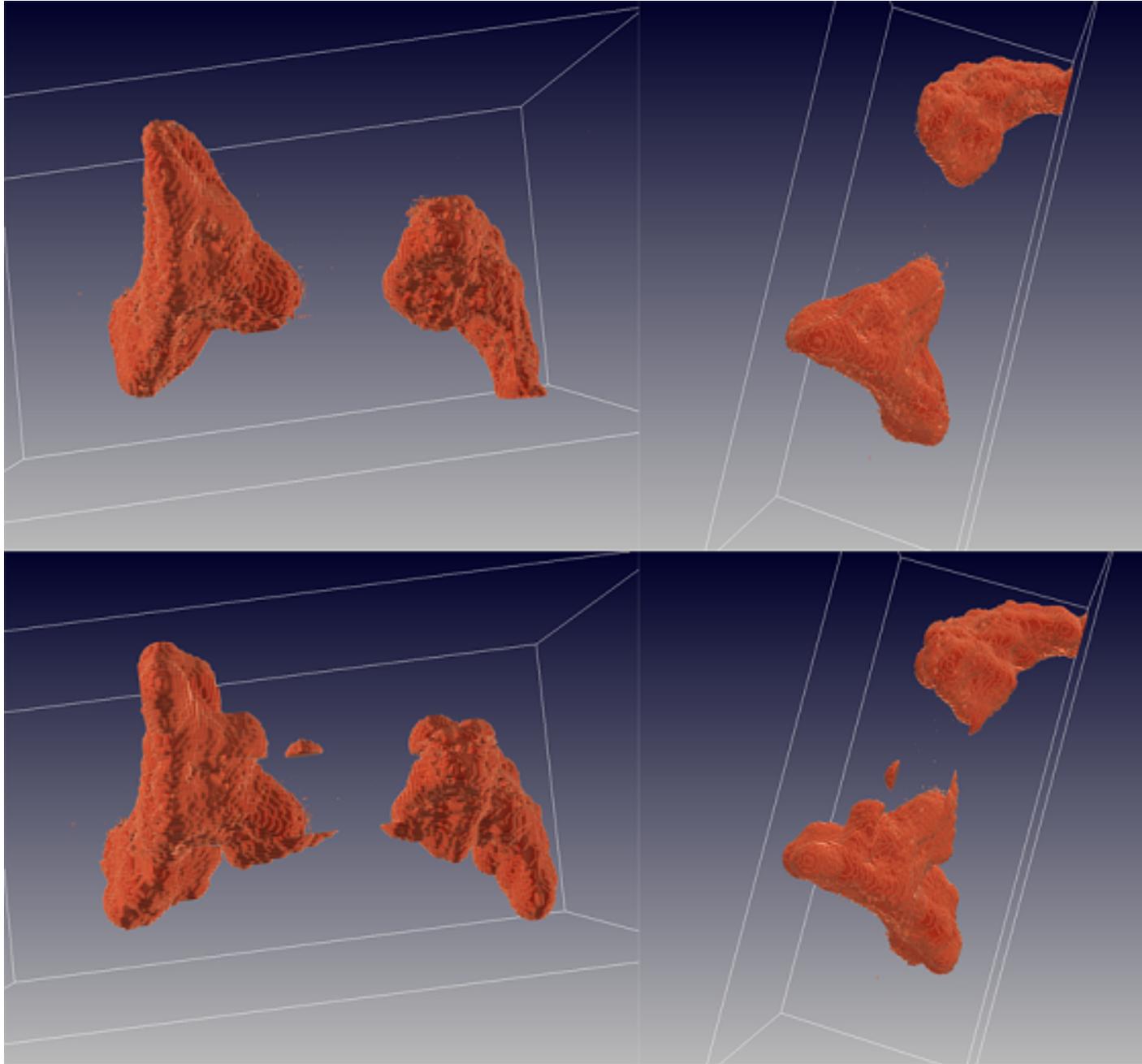


FIGURE 5.22: Visualisation 3D sur deux angle de vue différents des interfaces eau-air obtenues après drainage de **ROI p4bkk03a**. Les images de dessus correspondent aux données de l'expérience originale et les images du bas montrent les simulations en utilisant des ellipsoïdes sur l'axe minimal avec un diamètre seuil de $112\mu m$.

CONCLUSION GENERALE

6.1 Conclusion

On fait face dans cette thèse à un problème de modélisation des formes volumiques complexes. Ce sont des formes naturelles pour lesquelles il n'existe pas à priori une définition mathématique pour les décrire. La représentation géométrique 3D de ces formes constitue un enjeu majeur dans beaucoup de domaines de recherche à cause des phénomènes impliqués. Nous avons par exemple dans les milieux poreux du sol la décomposition microbienne, les processus de drainage des eaux, etc. Les récents progrès en tomographie 3D, permettent l'acquisition d'images de ces formes sous formes de voxels. Ce qui représente déjà un début de solution. Mais la plupart des expériences menés en vision par ordinateurs ne permettent pas d'exploiter la représentation en voxels à cause de sa complexité. D'où la nécessité de rechercher une représentation plus évoluées et qui soit compacte et stable. Nos principales contributions sont de définir un canevas permettant de classifier les formes complexes à partir d'images et de fournir des modèles qui vont permettre d'accélérer les simulations des processus dans les systèmes complexes. Les enjeux de ces simulations peuvent être d'ordre écologique dans le contexte de la séquestration du carbone, agricole et industriel. Dans la littérature, quelques auteurs proposent des solutions à l'aide des descripteurs et des modèles de surfaces et volumes réguliers pour décrire les formes. Mais la plupart concernent la modélisation des formes simples ou mécaniques

comme les objets manufacturés. Il n'y en a pas beaucoup en ce qui concernent les formes complexes. Même quand c'est le cas, les représentations ne sont pas toujours exploitables et il est surtout difficile de trouver un contexte applicatif. Nous proposons de nouveaux algorithmes pour modéliser les formes volumiques complexes 3D en partant d'une représentation intermédiaire formée de boules obtenues de la représentation initiale à base de voxels. L'idée de base consiste à retrouver une approximation intrinsèque par morceaux de la forme à l'aide des primitives évoluées. Dans notre situation, ce sont les volumes quadriques à cause des avantages qu'ils présentent. On minimise une fonction comportant un terme d'erreur d'approximation et un facteur d'échelle. Notre méthode procède à un traitement hiérarchique en définissant un ensemble de représentations successives et en utilisant une stratégie de division-fusion basée sur les K-means et l'octree, puis une stratégie de croissance de régions pour calculer la représentation finale. Nous avons appliqué nos modèles pour représenter les milieux poreux du sol afin de simuler le processus de drainage. Nous présentons les résultats qualitatifs et quantitatifs obtenus à partir d'images d'échantillons de sol réels. Ces résultats nous montrent clairement que les quadriques ellipsoïdes fournissent une approximation meilleure de l'espace poral et un bon niveau de saturation en eau par rapport à la représentation avec les boules.

6.2 Perspectives

Malgré le travail effectué jusqu'à présent, il reste encore des choses à faire pour améliorer notre modèle et le valider. Il reste donc comme travail à faire, de voir comment utiliser dans la mesure du possible, les autres types de volumes quadriques pour compléter notre modèle, comme les paraboloides, les hyperboloides. Il faut également refaire le travail plus complet avec les super ellipsoïdes. Nous avons déjà débuté le travail dans ce sens-là. Il va falloir également améliorer les temps de calcul pour obtenir les ellipsoïdes à partir de la représentation initiale en utilisant le calcul parallèle pour faire tourner nos algorithmes sur des échantillons

de données plus grands que ceux utilisés jusqu'ici. Pour aller dans le sens de la validation du modèle actuel, il va falloir, comme nous avons simulé le processus de drainage, simuler l'activité de décomposition microbienne dans l'espace poral du sol, l'idée ici étant de fournir des éléments de réponses qui permettront de mieux comprendre les liens qui existent entre la dynamique biologique du sol et sa géométrie. Enfin, en dehors de l'espace poral du sol, il faudra étendre nos modèles pour modéliser d'autres formes complexes ayant traits à d'autres domaines tels que la médecine, etc.

Publications de la thèse

[1] Kemgue, A. T., Monga, O. (Auteur de correspondance), Moto, S., Pot, V., Garnier, P., Baveye, P., Bouras, A. (2019). From spheres to ellipsoids : Speeding up considerably the morphological modeling of pore space and water retention in soils. *Computers and Geosciences*, 123, 20-37. DOI : [10.1016/j.cageo.2018.11.006](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2018.11.006).

[2] Alain Tresor Kemgue , Olivier Monga, Serge Moto,Sebti Foufou Modelling complex volume shape using ellipsoid : application to pore space representation 978-1-5386-4283-2/17 © 2017 IEEE 13th International Conference on Signal-Image Technology and Internet-Based Systems. DOI : <http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/SITIS.2017.52>

[3] Alain Tresor Kemgue and Olivier Monga From Voxels to Ellipsoids : Application to Pore Space Geometrical Modelling © Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2018 K.J. Kim et al. (eds.), IT Convergence and Security 2017, Lecture Notes in Electrical Engineering 449, DOI : https://doi.org/10.1007/978-981-10-6451-7_23.

Détail des algorithmes

A.1 Description sommaire

Nous décrivons ici les algorithmes que nous avons utilisés. Le processus d'approximation de l'espace poral par un ensemble minimal d'ellipsoïdes se fait en deux étapes. La première étape appelé segmentation initiale utilise soit l'algorithme 1 ou l'algorithme 2 qui seront tous décrits ci-dessous et la seconde étape appelé croissance de région utilise l'algorithme 3 qui sera également mentionné ici. L'ensemble des ellipsoïdes obtenu à la fin du processus sont encore appelés régions.

- Algorithme 1 : Division-fusion qui utilise les clusters (k-means)
- Algorithme 2 : Division-fusion qui utilise une structure de données octree
- Algorithme 3 : Croissance de région

A.1.1 Algorithme 1

Algorithm 1: Division-merge using clusters (k-means based)

BEGIN ALGORITHM

1) Data structure

AllBalls : will contain all the balls read in a file

AllEllipsoids : will contain the set of ellipsoids computed from the initial balls

```

X : percentage used to calculate K, the expected cluster number of K-means algorithm
Threshold : the balls approximation by set of ellipsoids threshold ;
BallsVolumes : will contain at a given time the volume of all balls of AllBalls
2) read the balls file and initialize data structures.
FOR_1 1<=l<=N , retrieve x_l,y_l,z_l coordinates of center of ball l and radius r_l
AllBalls [l,1]=x_l; AllBalls [l,2]=y_l; AllBalls [l,3]=z_l;
BallsVolumes[l]= (4/3)*pi*r_l^3;
END FOR_1
3) Calculation of cluster number or subset balls expected from K-means algorithm
K=(X*N)/100
WHILE_1 noEmpty(AllBalls) and K > 2 and NotConverged()
  SubSets =K-means(AllBalls,Vol,K); //SubSets contains K clusters of balls of AllBalls
  FOR_2 1<=i<=K, we calculate the connected components of SubSets_i
  Compons = relatedComponents(SubSets[i]); // Compons contain p connected components of
    FOR_3 1<=j<=p, compute ellipsoid that fitting balls of Compons_j with fitting error
    [errorApp_j,ellipsoid_j] = ellipsoideFitting(Compons[j]);
    IF_1 (errorApp_j check Threshold) then we keep ellipsoid and remove its balls from AllBalls
    addEllipsoid(AllEllipsoids,ellipsoid_j);
    deleteBalls(AllBalls,Comp[j]);
  END IF_1
  END FOR_3
  END FOR_2
N= Cardinal(AllBalls); K=(X*N)/100; // calculation of new cluster number value of K
END WHILE_1

```

4) Either AllBalls is empty or we have $K \leq 2$, or we converge

IF_2 NoEmpty(AllBalls)= FALSE then, goto the end of algorithm. We obtains M ellipsoids

GOTO END

// We calculate all the related components of the remaining AllBalls and we get p comp

ELSE we try to apply another method to recover another ellipsoids from AllBalls

//We calculate all the connected components of remaining balls in AllBalls and we get

Compons = relatedComponents(AllBalls);

FOR_4 $1 \leq j \leq p$, we compute the cluster number of Compons_j

Nballs= Cardinal(Comp[j]); $K = (X * Nballs) / 100$; Vol=BallsVolumes(Comp[j]);

SubSets = K-means(Compons[j],Vol,K); //SubSet contains K clusters of connected balls

FOR_5 $1 \leq i \leq K$, calculate ellipsoid that fitting the balls of Subsets_i with fitting

[errorApp_i,ellipsoid_i] = ellipsoidFitting(SubSet[i]);

IF_3 (errorApp_i check Threshold then we keep ellipsoid and remove its balls from AllBalls)
addEllipsoid(AllEllipsoids,ellipsoid_i);

deleteBalls(AllBalls,SousEns[i]);

END IF_3

END FOR_5

END FOR_4

END IF_2

5) All remaining balls in AllBalls are isolated balls and will be considered as ellipsoids

Nballs= Cardinal(AllBalls);

FOR_6 $1 \leq j \leq p$

addBalls(AllEllipsoids,AllBalls[i]);

deleteBalls(AllBalls,AllBalls[i]);

END FOR_6

// We have at the end M ellipsoids in total in AllEllipsoids that fitting starting se

END ALGORITHM

A.1.2 Algorithm 2

Algorithm 2 : initial segmentation : division-merge based on octree structure

BEGIN ALGORITHM

1) Data structures

Threshold : division threshold (fitting threshold)

ImagePoint : data structure with two fields :

=> number : balls number in the point image

=> labels : labels of all balls in the point image

M : matrix of ImagePoint or 3D image with DIM x DIM x DIM dimension

AllBalls : array of dimension N balls and four columns. This array is also called ba

AllBalls [1,1]= x coordinate of ball l

AllBalls [1,2]= y coordinate of ball l

AllBalls [1,3]= z coordinate of ball l

AllBalls [1,4]= radius r of ball l

AllEllipsoids : contains set of all ellipsoids expected that fitting the set of balls

2) Initialization : read the balls file and fill the structure AllBalls and 3D image

FOR_1 1<=l<=N ball labeled l with i,j,k coordinates and radius r in the AllBalls,

M[i,j,k].number=1; M[i,j,k].labels[1]=1; AllBalls[l,1]=i; AllBalls[l,2]=j;

AllBalls[l,3]=k; AllBalls[l,4]=r;

END FOR_1

```
// if M[i,j,k].number == 1 then the point image is a ball else M[i,j,k].number == 0,
```

2) Top-Down octree construction from 3D image of dimension DIMxDIMxDIM of ImagePoint.

At the beginning, the octree root contains the whole 3D image M of image point of all

$N = \text{cardinal}\{M[i,j,k].\text{nbre}=1, 1 \leq i \leq \text{DIM}, 1 \leq j \leq \text{DIM}, 1 \leq k \leq \text{DIM}\}$

```
FUNCTION RecursiveCalls(M,DIM)
```

```
we fit the set of N balls of image M by an ellipsoid with fitting error ErrorApp.
```

```
setBall=getBallsImages(AllBalls,M) ;
```

```
[errorApp,ellipsoid] = ellipsoidFitting(setBall);
```

```
IF_1 (errorApp check Threshold), then keep ellipsoid stop octree division
```

```
addEllipsoid(AllEllipsoid,ellipsoid);
```

```
GOTO END
```

```
ELSE we split 3D image M in eight DIM/2 x DIM/2 x DIM/2 sub-images M1,...M8
```

```
FOR_2 1<=t<=8 sub-image Mt,
```

```
    recursiveCalls(Mt, DIM/2);
```

```
    END FOR_2
```

```
END IF_1
```

```
END FUNCTION
```

The program stops when there is no longer any division. The set of ellipsoids is current.

```
END ALGORITHM
```

A.1.3 Algorithme 3

Algorithm 3 : region growth or merge

```
BEGIN ALGORITHM
```

1) Data structures

RegionFeatures : contains all initial ellipsoids features obtained from Algorithm 1 or

BallsFeatures : contains all subsets balls of every initial ellipsoids

Graphs : graph to store the adjacency relations between the initial ellipsoids or reg

Heap : minimal heap where the merge errors between every two adjacency ellipsoids will

Threshold : threshold of the merging error of two adjacency ellipsoids

2) read initial ellipsoids file and initialize the data structures

```
FOR_1 1<=l<=N,
```

```
    //get the subset of balls and the ellipsoid features l
```

```
RegionFeatures[l]= Ellipsoid_l;
```

```
BallsFeatures[l]=SubSetBalls_l;
```

```
END FOR_1
```

3) Initialize graph and heap.

```
    //Calculation of graph edges and inserting its in the minimal heap according the
```

```
countRegion=cardinal(RegionFeatures);
```

```
FOR_2 1<=i<=(countRegion -1)
```

```
FOR_3 (i+1)<=j<=countRegion
```

```
IF_1 EdgeExist (i,j)= TRUE
```

```
    [error_i_j,ellipsoid_i_j] = mergeEllipsoids(BallsFeatures [i], BallsF
```

```
IF_2(error_i_j check the cricterion Threshold)
```

```
graphIndex++; heapIndex++;
```

```
Heap(heapIndex)=[ error_i_j,i,j];
```

```
IF_3 EdgeExistInGraphs(i,j)=FALSE
```

```

        //edge (i,j)not exist yet in the graph, then insert it.
Graphs(graphIndex)=[i,j,0,0,error_i_j];
ELSE
Update pointers for all predecessor edges that contain either node i or j with graphIndex
//update of all predecessors edges pointers that contain either node i or j with graphIndex
    graphUpdate(Graphs, graphIndex) ;
        Graphs (graphIndex)=[i,j,0,0, error_i_j];
            END IF_3
        END IF_2
    END IF_1
END FOR_3
    END FOR_2
4) merge phase. Pop from the heap edge that contains the smallest error ; Check whether
WHILE_1 noEmpty (Heap)
edgeMin=POP(Heap);
IF_4 edgeExistInHeap(Heap, areteMin)=TRUE
//minimal edge exists in the graph and and its error is that which is in the graph
IF_5 (getErrorOfEdge(edgeMin) check Threshold)
// if error edge named Min don't check the merging threshold, goto the end of fusion phase
        GOTO END ALGORITHM
    END IF_5
//merge of the two ellipsoids whose labels are contained in edgeMin
i=edgeMin[1]; j=edgeMin[2];
k=ComputeLabelNewEllipsoid(i,j);
[error_k,ellipsoid_k] = mergeEllipsoids(BallsFeatures [i], BallsFeatures [j]);

```

```
    IF_6(error_k check Threshold)
//Update the new ellipsoid features and it subset balls. updateEllipsoidFeatures(Regi
updateBallsFeatures(BallsFeatures,ellipsoid_k);
updateHeap(Heap,k,error_k);
updateGraph(Graphs,k,error_k);
    END IF_6
END IF_5
END WHILE_1

//All ellipsoids are in RegionFeatures structure

END ALGORITHM
```

Bibliographie

- [Alsallakh,2014] B. Alsallakh, "Visual methods for analyzing probabilistic classification data, *IEEE transactions on visualization and computer graphics*," 20(12),1703-1712, 2014.
- [Ayache et al.,2003] Ayache, N., Epidaure., *a research project in medical image analysis, simulation and robotics at INRIA, IEEE Trans. Med. Imag.* 22 (10) (2003) 1185–1201.
- [Anton,2005] F. Anton. *Voronoi diagrams of semi-algebraic sets. PhD thesis, University of British Columbia, 2005.*
- [Amenta et al.,1999] N. Amenta and M. Bern. *Surface reconstruction by voronoi filtering. Discrete and Computational Geometry*, pages 481–504, 1999.
- [Amenta et al.,2001] N. Amenta, S. Choi, and R.K Kolluri. *The power crust, unions of balls, and the medial axis transform. Discrete Applied Mathematics*, 19 :127–153, 2001.
- [Attali et al.,2009] D. Attali, J.D. Boissonnat, and H. Edelsbrunner. *Stability and computation of medial axes - a state of the art report. Mathematical Foundations of Scientific Visualization, Computer Graphics, and Massive Data Exploration*, page 109 :125, 2009.
- [Agarwal et al.,2004] P. Agarwal, L. Guibas, A. Nguyen, D. Russel, and L. Zhang. *Collision detection for deforming necklaces. Computational Geometry : Theory and Applications*, 28 :137–163, 2004.
- [Banegas et al.,2001] Banégas F., Jaeger M., Michelucci D., Roelens M., "The ellipsoidal Skeleton in Medical," 2001.
- [Boissonnat et al.,1998] Boissonnat, J.D., Yvinec, M., 1998. *Algorithmic Geometry. Cambridge University Press* 541 pp.
- [Boissonnat et al.,2006] Attali, D., Boissonnat, J.D., Edelsbrunner, H., 2006. *Stability and Computation of Medial Axes : A State of the Art. INRIA Research Report-78153, Le Chesnay Cedex, France.*
- [Boulaassal,2010] H. Boulaassal, *Segmentation et modélisation géométrique de façade de bâtiment à partir de relevé laser Terrestre. Thèse soutenue en 2010*
- [Bricault et al.,1997] I.Bricault, O. Monga. *From volume medical images to quadratic surface patches. Image Understanding* 67, 1997.
- [Barr,1981] Alan H. Barr., *Superquadrics and angle preserving transformations. IEEE Computer Graphics and Applications*, 1(1) :11–23, January 1981.
- [Barr,1984] Alan H. Barr., *Global and local deformations of solid primitives. Computer Graphics*, 18(3), 1984.
- [Berg et al.,2008] M. Berg, O. Cheong, M. Kreveld, M. Overmars, *Computational Geometry Algorithms and Applications Third Edition, ISBN 978-3-540-77973-5. DOI 10.1007/978-3-540-77974-2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, 2000, 1997.*
- [Bouso,2011] M. Bouso *Modélisation algorithmique pour la spatialisaton des dynamiques biologiques du sol. PhD thesis, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, 2011.*
- [Berryman et al.,2000] J.G Berryman and H.F Wang., *Elastic wave propagation and attenuation in a double-porosity dual-permeability me-*

-
- dium. Int. J. Rock Mech. and Mining Sci*, 37 :67–78,2000.
- [Boissonnat et al.,1992] J.D. Boissonnat and Duquestne J. Yvenec M Cérézo A., Devillers O. *An algorithm for constructing the convex hull of a set of spheres in dimension d*. In C. Arcelli, L.P. Cordella and G. Sanniti di Baja, editors, *Visual Form- Analysis and Recognition*, pages 443–450, 1992.
- [Baillard et al.,2000] C. Baillard, C. Barillot. *Robust segmentation of anatomical structures with level sets*. In : *Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1935, 2000.
- [Blinn,1982] J. A. Blinn. *generalization of algebraic surface drawing*. *ACM Transactions on Graphics* 1 (3),235–256, 1982.
- [Badler et al.,1978] N.I. Badler and R. Bajcsy. *Three-dimensional representations for computer graphics and computer vision*. *Computer Graphics, SIGGRAPH 78 Proceedings*, 12 :153–160, 1978.
- [Bouma et al.,1998] J. Bouma, P.A. Droogers, G. Boer. *Parameters for describing soil macro- porosity derived from staining patterns*. *Geoderma* 83, 293–308, 1998.
- [Chevalier et al.,2005] L. Chevalier, F. Jaillet, Atilla Baskurt, *Segmentation et modélisation 3D par un ensemble de super ellipsoïdes*, 2005.
- [Chazal et al.,2005] Chazal, F., Lieuthier, A. *The lambda medial axis*. *Graph Models* 67, 304–331,2005
- [Caumon et al.,2004] Caumon, Lepage, Sword, Mallet., *Building and editing a sealed geological model*, *Mathematical Geology*, 2004, 36 (4) 405–424.
- [Caumon et al.,2005] G. Caumon, B. Levy, L. Castani, J.C. Paul, *Visualization of grids conforming to geological structures : a topological approach*, *Comput Geosci* 31 (6) (2005)671–680.
- [Chaperon,2002] T. Chaperon. *Segmentation de nuage de points 3D pour la modélisation automatique d'environnements industriels numérisés*. *PhD thesis, Ecole des mines de Paris*, 2002.
- [Chang et al.,2011] Chang, M.-C., et Kimia, B. B. *Measuring 3d shape similarity by graph-based matching of the medial scaffolds*. *Computer Vision and Image Understanding*, 115(5) :707 – 720. *Special issue on 3D Imaging and Modelling*,2011.
- [Cierniak,2011] Robert Cierniak, *X-Ray Computed Tomography in Biomedical Engineering*, Springer-Verlag London Limited 2011, ISBN 978-0-85729-026-7 DOI 10.1007/978-0-85729-027-4, 2011.
- [Chen et al.,2002] Chen, D.-Y., et Ouhyoung, M. *A 3d object retrieval system based on multi-resolution reeb graph*. *Computers and Graphics*,2002.
- [Charles et al.,1995] Charles L. Lawson, Richard J. Hanson, *Solving Least Squares Problems. Volume 15 de Classics in Applied Mathematics*. ISBN 0898713560, 9780898713565. SIAM, 1995
- [Druoton et al.,2013] Druoton, L. Garnier, R. Langevin., *Iterative construction of Dupin cyclides characteristic circles using non-stationary Iterated Function Systems (IFS)*. *Computer-Aided Design*, 2013, 45(2) :568–573.
- [Doube,2015] Doube M., "The ellipsoid factor for quantification of rods, plates, and intermediate forms in 3D geometries," *Front. Endocrinol.* 6 :15. doi : 10.3389/fendo.2015.00015, 2015.
- [Darwish et al.,2014] Darwish, M.A., H.K. Abdulrahim, Y. Mohieldeen, *Qatar and GCC water security. Desalination and water treatment*. 1-27, 2014.
- [Dijke et al.,2004] M.I.J. van Dijke, K.S.Sorbie, M. Sohrabi, A. Danesh, and D. Tehrani. *Three- phase flow wag processes in mixed-wet porous media : pore scale network simulations and comparisons with water-wet micromodel experiments*. *SPE J.*, 9 :57–66, 2004.
- [Delerue et al.,1999] J.F. Delerue, E. Perrier, Z.Y. Yu, and B. Velde *New algorithms in 3d image analysis and their application to the measurement of a spatialized pore size distribution in soils*. *Phys. Chem Earth*, 24 :639-644,1999

-
- [Delerue et al.,2002] J.F. Delerue and E.Perrier. *Dxsoil a library for 3d image analysis in soil science. Computers and Geosciences*, 28 :1041–1050, 2002.
- [Eickhorst et al.,2008] Eickhorst T, Tippkötter R., and Harkes, M.P.,*Detection of microorganisms in undisturbed soil by combining fluorescence in situ hybridization (FISH) and micropedological methods. Soil Biol Biochem.* 40, 1284–1293, 2008.
- [Esther,2008] E. Esther. *On the union of cylinders in three dimensions. In 49th annual IEEE symposium Foundations of computer science*, pages 179–188, 2008.
- [Freije et al.,2015] Freije, A.M., Heavy metal,trace element and petroleum hydrocarbon pollution in the Arabian Gulf : Review. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences* 17 : 90–100, 2015.
- [Florez,2006] L. Florez-Valencia., *Modèle d'état de cylindre généralisé et la quantification de sténose artérielles en imagerie 3D. PhD thesis*, Institut des Sciences Appliquées de Lyon, Images et Systemes, 2006.
- [Frey,2001] Frey, P.J, 2001. *MEDIT :An interactive mesh visualization software. INRIA Technical Report -0253*, 41 pp.
- [Fang et al.,2011] Fang, Y., Sun, M., et K., R. *Temperature distribution descriptor for robust 3D shape retrieval. Dans Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW), 2011 IEEE Computer Society Conference on*, pages 9–16,2011.
- [Fatt,1956] I. Fatt. *The network model of porous media. transaction. Transactions AIME*, 207 :144–177, 1956.
- [George,2004] George, P.L, 2004. *Tetmesh-ghs3d -tetrahedral mesh generator. Report-78153, INRIA User's manual, Le Chesnay cedex*, 13 pp.
- [George et al.,1998] George, P.L., Borouchaki,H., 1998. *Delaunay Triangulation and Meshing. Hermes*, 414 pp.
- [Gryze,2006] S. De Gryze, L. Jassogne, J. Six, H. Bossuyt, M. Wvers, and R. Merckx., *Pore structure changes during decomposition of fresh residue : X-ray tomography analyses. Geoderma*, 134 :82–96, 2006.
- [Grundmann et al.,2008] Grundmann, M., Meier, F., et Essa, I. *3d shape context and distance transform for action recognition. Dans Pattern Recognition, 2008. ICPR 2008. 19th International Conference on*, pages 1–4. IEEE.
- [Glantz et al.,2007] R. Glantz and H. Markus. *Dual models of pore spaces. Advances in Water Ressources*,30 :227–248, 2007.
- [Grangeat,2009] Grangeat Pierre., *Tomography, British Library Cataloguing-in-Publication Data ISBN : 978-1-84821-099-8*, 2009.
- [Horaud et al.,1995] R. Horaud and O. Monga., *Vision par ordinateur : Outils fondamentaux. Hermes*,1995.
- [Hoppe et al.,1992] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. MacDonald, and W. Stuetzle. *Surface reconstruction from unorganized points. Computer Graphics, SIGGRAPH 92 Proceedings*, 26 :71–78, 1992.
- [Halperin et al.,1994] D. Halperin and M.H. Overmars. *Spheres, molecules and hidden surface removal. In 10th Annual symposium on computational geometry*, pages 113–122,1994.
- [Hubbard,1996] P.M Hubbard. *Approximating polyhedra with spheres for time-critical collision detection. ACM Transactions on Graphics*, 15 :179–210, 1996.
- [Jaklic et al.,2013] Jaklic, A. and Leonardis, A. and Solina, F.,*Segmentation and Recovery of Superquadrics. Springer*, 2013.
- [Kuiper et al.,2015] Kuiper, N., C. Rowell, B. Shomar,*High levels of molybdenum in Qatar's groundwater and potential impacts. Journal of Geochemical Exploration* 150,16-24, 2015.
- [Knowlton et al.,1979] K. Knowlton and L. Cherry. *Atoms, a 3D opaque molecule system. Computers and chemistry*,1 :161–166, 1979.
- [Lebesgue et al.,1942] Lebesgue, H.L. and Montel, P., *Les coniques. publisher : Gauthier-Villars*,1942.
- [Lorensen et al.,1987] W.E Lorensen and H.E Cline. *Marching cubes. A high resolution 3d surface construction algorithm. Computer Graphics, SIGGRAPH 87 Proceedings*,21 :163–169, 1987.

-
- [Ling et al.,2007] Ling, H., et Jacobs, D. W. *Shape classification using the inner-distance. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*,29(2) :286–299,2007
- [Lake,1995] L Lake. *Enhanced Oil Recovery. Prentice Hall, 1995.*
- [Lowe,2004] Lowe, D. G. *Distinctive image features from scale-invariant keypoints. International journal of computer vision*, 60(2) :91–110,2004.
- [Mokhtari et al.,2017] B. Mokhtari, K. Eddine Melkemi, D. Michelucci, S. Fofou, "A 3D shape matching and retrieval approach based on fusion of curvature and geometric diffusion features". *IJCAT* 55(2) : 79-91, 2017.
- [Mokhtari,2016] B. Mokhtari, *Appariement de formes, recherche par forme clef. Doctoral thesis, Université Mohamed Khider - Biskra, 2016.*
- [Malladi et al.,1995] Malladi, R. , Sethian, J., Vemuri, B., *Shape modeling with front propagation : a level set approach, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 17 (2) (1995) 158–175.
- [Monga,2007] Monga O, "Defining and computing stable representations of volume shapes from discrete trace using volume primitives : application to 3D image analysis in soil science," *Image and Vision Computing* 25 (2007) 1134-1153.
- [Monga,2014] Monga O., Garnier P., Pot V., Coucheney E., Nunan N., Otten W., Chenu C.,"Simulating microbial degradation of organic matter in a simple porous system using the 3D diffusion based model MOSAIC," *Biogeosciences*, 11, 2201–2209, 2014.
- [Monga et al.,2008] O. Monga, M. Bousso, P. Garnier, and V. Pot., *3d geometric structures and biological activity : Application to microbial soil organic matter decomposition in pore space. Ecological Modelling*, 216 :291–302, 2008.
- [Monga et al.,2007] Monga O.,Ngom N.F., Delerue J.F.,"Representing geometric structures in 3D tomography soil images : application to pore space modelling," *Computers and Geosciences* 33, 1140–1161. 2007.
- [Moran et al.,1992] C.J Moran, A.B. McBratney.Acquisition and analysis of three component digital images of soil structure. *Journal of Soil Science* 43 (3), 541–549,1992.
- [Marsily,1986] G. Marsily. *Quantitative Hydrogeology-Groundwater Hydrology for Engineers. Academic Press,San Diego, 1986.*
- [Mumford et al.,1989] D. Mumford and J Shah.*Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42 :577–685, 1989.
- [Ngom et al.,2012] Ngom F., Monga O., Ould Mohamed M.,"3D segmentation of soil microstructures using generalized cylinders," *Computers & Geosciences*, 2012.
- [Ngom,2010] Ndèye F. Ngom Dirigé par O. Monga, Thèse de doctorat : *Modélisation de milieux poreux à partir d'images tomographiques 3D, soutenue le 21 Decembre 2010*
- [Nilsson et al.,1997] F. Nilsson and P.E Danielson. *Finding the minimal set of maximum disks for binary objects. Graphical models and image processing*, 59 :55–60,1997.
- [Ohbuchi et al.,2010] Ohbuchi, R., et Furuya, T. *Distance metric learning and feature combination for shape-based 3d model retrieval. Dans Proceedings of the ACM workshop on 3D object retrieval*, pages 63–68,2010.
- [Pot et al.,2015] Pot V., S. Peth, O. Monga, L.E. Vogel, A. Genty, P. Garnier, L. Vieublé-Gonod, M. Ogurreck, F. Beckmann, P.C. Baveye, "Three-dimensional distribution of water and air in soil pores," *Advances in Water Research* 84 : 87-102, 2015.
- [Perrier,1995] E. Perrier *Structure géométrique et fonctionnement hydrique des sols : simulations exploratoires. PhD thesis, Université Paris 6, 1995.*
- [Peth et al.,2008] S. Peth, R. Horn,F. Beckmann, T. Donath, J. Fischer, and A.J.M. Smucker. *Three dimensional quantification of intra aggregate pore space features using synchrotron radiation based microtomography. Soil Science Society of America*, 72 :897–907, 2008.

-
- [Rajan,1996] V. Rajan. *A union of spheres representation for 3D objects*. PhD thesis, University of british columbia,1996.
- [Rashed,2009] Rashed, R., *Apollonius De Perge, Coniques / Scientia Graeco-arabica*. vol. 2, ISBN : 9783110199383, LCCN : 2008468868, publisher : De Gruyter, 2009.
- [Russell et al.,2012] Russell, J. and Cohn, R., *Quadric*. ISBN 9785511085357. Book on Demand ,2012.
- [Rouke et al.,1979] J. O'Rouke and N.I Balder. *Decomposition of three-dimensional objects into spheres*. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 1 :295–305, 1979.
- [Saba,2011] Luca Saba., *Computed Tomography - Special Applications*, Janeza Trdine 9, 51000 Rijeka, Croatia,ISBN 978-953-307-723-9, 2011.
- [Spoler et al., 2004] C. Spoler and S.H.L Klapp. *Vapor-liquide transitions of dipolar fluids in disordered porous media : Performance of angle-averaged potentials*. *J. chem. Phys.*, 121 :9623–9629, 2004.
- [Schmit,1998] M. Schmit. *Some examples of algorithms anlysis in computational geome- try by means of mathematic morphology techniques*. In J.D. boissonnat and J.P.Laumond, éditeurs, *Lecture Notes in Computer Science, Geometry and Ro- botics*, 391 :225–246,1998.
- [Sanner,1992] M. Sanner. *Sur la modélisation des surfaces moléculaires*. PhD thesis, Université de Haute Alsace, Mulhouse, 1992.
- [Schoeller,1955] H. Schoeller. *Géochimie des eaux souterraines. Application aux eaux des gisements de pétroles*. *Revue de l'institut Fr du pétrole et Ann des compustibles liquides*, N mars, avril, juin, juillet, Août, Edition technique Paris, 1955.
- [Shomar et al.,2014] Shomar, B., M. Darwish, C. Rowell, *What does integrated water resources management from local to global perspective mean? Qatar as a case study, the very rich country with no water*. *Water Resour. Management* 28 : 2781-2791,2014.
- [Solina et al.,1990] F. Solina, R. Bajcsy *Recovery of parametric models from range images : the case for superquadrics with global deformations*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(2), 1990.
- [Surhone et al.,2010] Surhone, L.M. and Timpledon, M.T. and Marseken, S.F., *Superquadrics : Mathematics,Geometry,Ellipsoid,Quadric,Square(algebra),Cube,Octahedron,Lozenge,Spindle,Geometric Modeling,Computer Graphics,Superellipsoid,Supertoroid,Superellipse*. ISBN 9786130323295 Betascript Publishing,2010.
- [Spain et al.,2014] Spain, B. and Sneddon, I.N. and Ulam, S. and Stark, M., *Analytical Quadrics*. ISBN 9781483138299,International Series in Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science,2014
- [Vogel et al.,2001] H.J Vogel and K.I. Roth.*Quantitative morphology and network representation of soil pore structure*. *Advances in Water Resources*, 24 :233–242, 2001.
- [Vogel et al.,2015] Vogel L.,Makowski D.,Garnier P.,Vieublé-Gonod L.,Coquet Y., Raynaud X.,Nunan N.,Chenu C.,Falconer R.,Pot V., "Modeling the effect of soil meso- and macropores topology on the biodegradation of a soluble carbon substrate" *Advances in Water Research* 83 : 123-136, 2015.
- [Whiffin et al.,2007] Whiffin, V.S., van Paassen, L.A., and Harkes, M.P.,4.3.4. *Microbial carbonate precipitation as a soil improvement technique*. *Geomicrobiology Journal* 24(5),417-423, 2007.
- [Wen et al.,1996] Wen, X.H., Gomez-Hernandez, J.J.,*Upscaling hydraulic conductivities in heterogeneous media : an overview*. *J. Hydrol. (Amst.)* 183, ix–xxxii (1996).doi :10.1016/S0022–1694(96)80030–8
- [Wanner et al ,1995] O. Wanner, A.B Cunningham and R. Lundman. *Modelling biofilm accumu- lation and mass transport in a porous medium under high substrate loading*. *Biotechnol, Bioengrg*, 47 :703–712, 1995.
- [Wrobel et al.,1987] B. Wrobel,O. Monga,"Image segmentation : towards a methodology," 1987.
- [Todda1 et al.,2007] Todda1 M.,Alper Yildirim E., "On Khachiyan's algorithm for the computation of minimum-volume enclosing ellipsoids"

Discrete Applied Mathematics Volume 155 Pages 1731-1744,2007.

[Thayananthan et al.,2003] Thayananthan, A., Stenger, B., Torr, P. H., et Cipolla, R. *Shape context and chamfer matching in cluttered scenes.* Dans *Computer Vision and Pattern Recognition, 2003. Proceedings. 2003 IEEE Computer Society Conference on, volume 1, pages 1–127. IEEE.*

[Tung,2005] Tung, T. *Indexation 3D de bases de données d'objets par graphes de Reeb améliorés.* PhD thesis, Télécom ParisTech,2005.

[Terzopoulos,1991] D. Terzopoulos. *Dynamic 3d models with local and global deformations : Deformable superquadrics.* *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence PAMI 13 (7), 703–714, 1991.*

[Zhang et al.,2003] Zhang, H., et Malik, J. *Learning a discriminative classifier using shape context distances.* Dans *null, page 242. IEEE 2003.*