HAL
open science

Le chaos : des questions théoriques aux enjeux sociaux. Philosophie, épistémologie, histoire et impact sur les institutions (1880-2000)

Loïc Petitgirard

▶ **To cite this version:**

Loïc Petitgirard. Le chaos : des questions théoriques aux enjeux sociaux. Philosophie, épistémologie, histoire et impact sur les institutions (1880-2000). Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Lumière Lyon 2, 2004. Français. NNT : . tel-03224363

HAL Id: tel-03224363

https://theses.hal.science/tel-03224363

Submitted on 11 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Lumière Lyon 2

Thèse présentée pour le diplôme de Doctorat d'Histoire Spécialité : Histoire des Sciences et des Techniques

présentée et soutenue publiquement le 26 novembre 2004

par

Loïc PETITGIRARD

Le chaos : des questions théoriques aux enjeux sociaux.

Devant le jury composé de : M. Serge CHASSAGNE, Président du jury, M. Christophe LETELLIER, Rapporteur, M. Jean-Marc MALASOMA M. Vittorio MARCHIS, Rapporteur M. Girolamo RAMUNNI, Directeur de thèse.

Table des matières

Remerciements . . 1

Avertissement . . 3

Introduction . . 5

L'HISTORIOGRAPHIE ET SES ÉCUEILS . 6

LA TECHNICITÉ DE L'HISTOIRE CONTEMPORAINE . 8

LA MÉTHODE . . 8

L'INTERNET ET LES NOUVEAUX MOYENS DE LA RECHERCHE . 9

PLAN DE LA THÈSE . 10

Première partie. Y a-t-il une origine au chaos ? . 13

PRÉLIMINAIRE . 13

a. La recherche des origines . 13

b. La fin du XIXème siècle, un "moment" d'origine . 15

c. La perception des travaux de Poincaré au XXème siècle . 16

CHAPITRE 1. POINCARÉ, DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE AUX MATHÉMATIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES . 21

1.1. Les travaux de Poincaré avant 1889 . 22

1.2. Le concours Oscar II et le mémoire de Poincaré . 39

1.3. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste . 47

1.4. Premières conclusions . 53

1.5. Poincaré et les mathématiciens . 54

1.6. Poincaré, un incompris ? . 63

CHAPITRE 2. HASARD, DÉTERMINISME ET MÉCANIQUE STATISTIQUE . . 65

2.1. Poincaré, le hasard et le déterminisme . 67

2.2. La naissance de la Mécanique statistique . 80

2.3. De nouvelles interrogations . 111

Deuxième partie. L'émergence du chaos et de la théorie du chaos, 1975-1982 . 117

PRÉLIMINAIRE : SOCIOLOGIE D'UN CHAMP DE RECHERCHE, 1975-82 . 117

a. Introduction . 117

b. Sociologie d'un champ de recherche . . 120

CHAPITRE 3. LE CHAOS S'IMPOSE : 1975-1982 . 138

3.1. Le chaos selon Li, Yorke, May . 139

3.2. Le chaos : entre ergodicité et attracteurs étranges . 148

3.3. Le chaos dans les systèmes conservatifs . 168

3.4. Un premier bilan sur les concepts de chaos . . 192

CHAPITRE 4. PLUSIEURS VOIES POUR LE CHAOS . 193

4.1. Otto E. Rössler et les mécanismes du chaos . . 194

4.2. Des mesures pour le chaos : dimensions et exposants de Lyapounov . 226

4.3. Robert S. Shaw : une physique de la dynamique . . 238

4.4. La reconstruction des attracteurs étranges . 251

4.5. Un premier bilan en 1982 . 254

CHAPITRE 5. LES SCÉNARIOS DE TRANSITION VERS LE CHAOS . 257

Introduction . 257

5.1. Les premières accréditations du "scénario" de Ruelle et Takens . . 258

5.2. L'universalité dans le chaos . 260

5.3. P. Coullet, C. Tresser et l'universalité . . 268

5.4. Mira et Gumowski : les structures boîtes-emboîtées . 290

5.5. Le scénario de l'intermittence . . 296

5.6. Conclusion : 1981, la synthèse de J.P. Eckmann . . 301

Conclusion 1975-1982 . . 305

Troisième partie. Vers les conceptions du chaos, de 1900 aux années 1980. . . 313

CHAPITRE 6. UN CADRE MATHÉMATIQUE POUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES . 313

6.1. L'entre-deux-guerres : Birkhoff et Andronov . . 314

6.2. Les systèmes dynamiques aux Etats-Unis : de S. Lefschetz à S. Smale . . 337

6.3. L'Institut des Hautes Etudes Scientifiques . 355

6.4. Conclusion : Un retour sur les mathématiques de Poincaré . . 370

CHAPITRE 7. LE CHAOS ET LA MÉCANIQUE STATISTIQUE : ENTRE INSTABILITÉ ET ERGODICITÉ . 371

7.1. Les années 1930 : les théorèmes ergodiques et la théorie ergodique . . 371

7.2. La culture de la stochasticité en URSS, après la seconde guerre mondiale . 385

7.3. La lente évolution des conceptions sur l'ergodicité et l'instabilité, dans la science occidentale, avant les années 1970 . . 404

7.4. Un premier bilan : l'ergodicité dans le chaos . 417

Quatrième partie. Les pratiques du non linéaire et du chaos . 421

PRÉLIMINAIRE . 421

CHAPITRE 8. LES OSCILLATIONS NON LINÉAIRES ET LES ANALOGIES . 422

8.1. Les années 1930 et la théorie des oscillations . . 423

8.2. Nicolas Minorsky et les "analogues dynamiques" . 435

8.3. Les oscillations non linéaires après la seconde guerre mondiale . . 445

8.4. Théodore Vogel et les oscillations discontinues . . 449

8.5. Hayashi, Ueda et les oscillations électriques . 461

8.6. Un premier bilan : le chaos et le calcul . . 465

CHAPITRE 9. L'ORDINATEUR ET LES MATHÉMATIQUES EXPÉRIMENTALES . 467

9.1. De l'analogique au numérique : Hénon et les expériences numériques . . 467

9.2. Stanislaw Ulam et les "expériences de mathématiques" . 473

9.3. Lorenz et la météorologie numérique . . 482

9.4. Conclusion : le chaos et le calcul . 492

CHAPITRE 10. LA CHIMIE DES OSCILLATIONS . 492

10.1. Vers les oscillations chimiques . . 493

10.2. La réaction de Belousov-Zhabotinsky et la thermodynamique non linéaire . 500

10.3. Les années 1970 : vers le chaos chimique . . 509

10.4. Le chaos chimique . 514

10.5. Conclusion : chaos et oscillations chimiques . 519

Cinquième partie. Impact sur une institution : l'exemple du CNRS . 521

CHAPITRE 11. LE CHAOS AU CNRS . . 521

11.1. Avant les années 1970 : Le CNRS pris dans l'engrenage de l'histoire . 523

11.2. Les années 1970 et les Sciences pour l'Ingénieur . . 545

11.3. Au département des Mathématiques et Physique de Base (MPB), jusqu'en 1980 . . 562

11.4. Le chaos et les ATP de mathématiques . . 569

11.5. Les mathématiques dans les années 1980 : préliminaire à une politique scientifique . . 575

11.6. Le rapport de conjoncture de 1989 . . 581

11.7. Les années 1990 : le département SPM et la complexité . 589

11.8. Conclusion : les difficultés de l'interdisciplinarité . 595

Conclusion . 597

Annexes . . 603

1. Le dernier théorème géométrique de Poincaré . . 603

2. Les bifurcations . . 604

a. La figure des planètes et les formes de bifurcation . . 604

b. Les solutions périodiques de second genre . 607

3. Une question technique : les oscillations des machines hydrauliques. Henry Léauté (1885). . . 608

a. L'ingénieur Henry Léauté (1847-1916) . 609

b. Les oscillations des machines, 1885 . . 609

c. Quelques explications . 612

d. Conclusion . . 614

Sources . 619

Dépôts d'archives consultés . 619

Archives orales . 621

Entretiens avec les acteurs . 621

Entretiens réalisés par Cyrille Foasso (réalisés en juin-août 1997) . . 621

Archives du CNRS (1 avenue de la Terrasse – Bâtiment 19 – 91198 Gif-sur-Yvette) . 622

NBL American Institute of Physics, Center for History of Physics, Niels Bohr Library (College Park, Maryland – USA, http://www.aip.org/history) . . 622

Quelques sigles . 623

Glossaire . . 625

Index des noms . 633

A . 633

B . 634

C . 635

D . 636

E . 637

F . 637

G . 638

H . 639

I . . 640

J . 640

K . 640

L . 641

M . . 642

N . 643

O . 643

P . 644

R . 645

S . 646

T . 647

U . 647

V . 647

W . . 648

Y . 648

Z . 649

Bibliographie . . 651

Remerciements

Toute ma reconnaissance va en priorité à Girolamo Ramunni qui a accepté de me guider, depuis mon DEA, dans mes travaux d'histoire des sciences et des techniques. Sa grande disponibilité, son suivi et ses conseils m'ont été très précieux.

Je tiens à remercier tout particulièrement Christophe Letellier, commentateur infatigable, et toujours très constructif, de mes travaux.

Cette thèse doit beaucoup à un grand nombre de personnes d'horizons divers et leur écoute, leurs conseils ou simplement leur disponibilité ont été importants pour moi. Par ordre alphabétique et sans distinction de titre, merci à :

David Aubin, Robert Bouc, Ariane Bunel, Pierre Coullet, Louis Cosnier, Martine Culioli, Pierre Crépel, Michel Hénon, Gérard Iooss, Michel Jean, Georges Lochak, Paul Lucet, Jean-Marc Malasoma, Marc Massot, Laurent Rollet, Otto Rössler, Michelle Sabourin, Daniel Thoulouze, Charles Tresser.

Pendant mes recherches j'ai bénéficié des facilités du LARHRA (Centre Pierre Léon) et je remercie tout son personnel administratif, ses chercheurs et ses enseignants-chercheurs de m'avoir agréablement accueilli pendant ces trois années.

Cette aventure n'aurait pas été possible sans le soutien de l'ENS Lyon et je remercie en particulier Philippe Gillet et Marie-Christine Artru pour leurs prévoyances et l'attention qu'ils ont portées à mon projet dès le début.

Merci également à mes co-doctorants, engagés dans le séminaire (parfois informel) de l'ENS, en particulier Sébastien Dufaug, Lionel Dufaud, Eric De Guillaume, Benoît Maréchal, Clément Mouhot.

Le séminaire Rhône-Alpes d'Histoire et de Philosophie des Sciences a été un lieu d'échanges importants, grâce à ses deux organisatrices et aux multiples participants. Je les en remercie beaucoup.

Et bien entendu, merci à mes proches et amis sans lesquels rien de tout ceci n'aurait été possible. Merci à mes parents, à Michèle et Isabelle, pour leur aide précieuse dans le laborieux travail de relecture.

Last but not least, je pense à mon adorable Séverine qui m'a apporté un soutien sans faille durant toute cette épreuve.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Avertissement

· Deux niveaux de lecture

Nous avons exprimé notre intention de produire un discours ne négligeant pas les aspects techniques inhérents à l'histoire des sciences contemporaines. Pour répondre à la nécessité de respecter ces points techniques sans rebuter un lecteur qui ne possèderait pas une formation scientifique spécifique, nous avons choisi d'articuler deux niveaux de lecture dans le texte.

Les aspects les plus techniques seront imprimés avec une trame grisée, et placés au milieu du discours général. Le lecteur peut choisir de passer ces précisions sans perdre le fil du raisonnement. Néanmoins, elles sont inclues dans le corps du texte, et non pas en note de bas de page, parce qu'elles ajoutent des éléments qui sont souvent plus que des détails et participent à notre argumentation.

· Glossaire

Pour faciliter la lecture des passages un peu techniques, nous avons inclus un court glossaire à la fin du texte (page 648). Il ne peut s'agir que d'un nombre très limité de notions présentées de façon simplifiée, lorsque cela est possible. Les renvois au glossaire sont signalés par l'indice #. Par exemple : ensemble de Cantor#

D'autres détails techniques sont donnés dans les notes de bas de page, au moment où ils sont utiles pour la compréhension du débat.

· Noms de personnes

Nous avons été confronté plusieurs fois à des orthographes différentes pour les acteurs de notre histoire et auteurs des textes étudiés. Il s'agit essentiellement des noms de scientifiques russes dont les transcriptions françaises et anglaises diffèrent. Par exemple, N.N. Kryloff, N.N. Krylof, N.N. Krylov désignent le même individu. Nous avons choisi d'uniformiser notre texte en retenant une unique orthographe par personne afin de ne pas induire de confusions. Cependant, dans la bibliographie, l'orthographe originale, trouvée sur les sources, est reprise pour ne pas orienter le lecteur vers des notices inexistantes. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que le texte évoque un certain N.N. Bogoliuboff alors que le renvoi en bibliographie prend la forme [BOGOLIUBOV, N.N., 1990].

· Index des noms

Le nom d'une personne peut apparaître à divers endroits du texte. Nous avons constitué un index répertoriant l'ensemble des noms, afin de faciliter le parcours et la recherche (cf. page 655).

· Citations

Les citations de textes originaux sont placées entre guillemets "droits". Lorsque des guillemets sont inclus à l'intérieur de la citation, ils sont reproduits par une quotte 'simple'. Exemple :

"[…] l'existence de régions chaotiques ravira ceux qui cherchent à construire et expliquer la mécanique statistique à partir de la mécanique classique ('théorie

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

ergodique', etc.) […]"

Les toutes premières occurrences de certains mots, expressions ou noms d'institutions étrangères apparaissent entre guillemets, mais pour simplifier la lecture, ils sont ensuite intégrés au corps du texte, sans distinction. Exemple : "fer à cheval" puis, fer à cheval.

- Mise en évidence de portions de texte

Pour **mettre en évidence** des éléments de notre texte, nous avons choisi de **les écrire en caractères gras**.

Les mots placés en *italique* désignent des termes spécifiques employés dans les textes originaux, qui ne sont pas courants en français et que nous reprenons sans guillemets (exemple : *themata*). Les termes latins et / ou mathématiques sont présentés selon la même convention.

- Sigles

Quelques sigles utilisés régulièrement sont explicités à la fin du texte (page 647).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Introduction

Qu'est-ce que le chaos ? Trois années durant, c'est la question qui a rythmé notre analyse de l'histoire du chaos, ce champ de recherche s'épanouissant depuis 1975 en rapport avec des conceptions scientifiques apparemment nouvelles. La notion scientifique de chaos a d'ailleurs été, parfois, dénommée "chaos déterministe" pour la démarquer du sens commun, mais nous utiliserons le substantif chaos sans cet appendice, comme il est courant chez les spécialistes.

Ces dernières années, le chaos a été présenté comme un bouleversement majeur qui annonce, pour certains, la naissance d'une "nouvelle science", pour d'autres, un renouveau du déterminisme, ou encore une prise en compte plus sérieuse de la complexité en science. Une question récurrente est associée à ces affirmations : le chaos, et la théorie du chaos, constitueraient-ils une troisième "révolution scientifique" du XXème siècle, après la théorie de la relativité et la Mécanique quantique ?

Ces interrogations et ces prises de position traduisent l'engouement qui a traversé la science depuis plus de vingt ans, et a vu le chaos envahir le champ scientifique, en le débordant pour s'associer à des réflexions en sociologie et en philosophie, par exemple. Elles prouvent également la difficulté des remises en question dans le domaine scientifique, d'autant plus évidente que les "pères fondateurs" proclamés, dont Henri Poincaré, nous propulsent un siècle en arrière. Un tel enivrement suffirait à justifier que l'historien s'associe à une réflexion sur son origine.

Mais l'intérêt de faire une histoire du chaos dépasse ces seuls enjeux. En effet, à l'occasion des remises en question, face à de nouvelles problématiques, les chercheurs

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

se sont positionnés sur les plans technique et philosophique. C'est l'histoire du chaos comme révélateur de la science contemporaine, dans ses structures, ses pratiques, ses rigidités, qui a retenu notre attention.

L'historien, tel un anthropologue ou un sociologue, peut décrire ces variations et leurs confrontations au sein de la science. Mais nous réagissons en historien : c'est la dimension historique, la mise en perspective dans le temps des différents débats qui nous intéresse avant tout, plus que la simple dynamique d'un groupe de scientifiques qui estimeraient travailler dans le domaine du chaos.

Cependant, il ne peut s'agir de se limiter à une histoire des idées sans aucune référence au contexte, ni à une histoire sociale qui reléguerait la problématique scientifique à l'arrière-plan. Bien au contraire, ces deux aspects doivent être examinés comme éléments en perpétuelle interaction, en sachant leur attribuer une importance relative, selon les moments. En d'autres termes, il faut dépasser l'opposition classique entre "externalistes" et "internalistes" pour se concentrer sur une histoire qui prenne comme axe principal l'évolution conceptuelle, tout en plongeant ces débats dans un contexte social et institutionnel.

L'entreprise est risquée. En choisissant d'étudier un épisode très contemporain, nous ne bénéficions que d'un recul limité. Nous ne connaissons pas la "fin de l'histoire" et il est impossible de savoir ce qui résistera au temps, marquera la science et ce qui deviendra caduc. Certaines notions de chaos dont nous avons écrit l'histoire seront peut-être très bientôt périmées. En conséquence, il nous est apparu nécessaire de nous intéresser à de multiples voies de recherche sachant que certaines se refermeront à plus ou moins long terme.

Prendre un tel point de vue global est extrêmement délicat. La science récente est caractérisée par une explosion de la production de travaux de recherche et de documentation en général. En conséquence de cette abondance, les informations pertinentes et les ruptures épistémologiques sont noyées dans la masse, et d'autant plus difficiles à enregistrer. Parallèlement, la spécialisation croissante des recherches scientifiques impose un cloisonnement important : c'est un obstacle à dépasser pour espérer produire l'histoire de notions telle que le chaos, construites sur la base de plusieurs disciplines.

Alors, peut-on écrire une histoire si récente et suffisamment représentative du développement de la science ?

L'HISTORIOGRAPHIE ET SES ÉCUEILS

Beaucoup se sont lancés dans une réflexion sur la "science du chaos", pour le dire brièvement, selon une perspective historique, épistémologique ou philosophique. Parmi les travaux universitaires, les principales sources secondaires sont les travaux de A. Dahan et D. Aubin, d'une part, S. Franceschelli, d'autre part [1] . Les premiers se sont attachés à faire une histoire sociologique des systèmes dynamiques. D. Aubin, en

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

particulier, a soutenu une thèse, en 1998, à l'université de Princeton, "A cultural history of catastrophe and chaos : around the IHES", dans laquelle il a proposé une étude des réseaux de personnes, des groupes de travail qui se sont relayés dans l'institution entre 1958 et 1980. Dans une perspective d'histoire culturelle, il a analysé la possible adéquation entre le milieu culturel de l'IHES, celui plus large des mathématiques de l'époque et les mathématiques "topologiques" du chaos. Un élargissement de cet horizon l'a conduit à étudier les interactions internationales dans le domaine des mathématiques des systèmes dynamiques. Dans le même ordre d'idée, il a présenté une étude du cas de la turbulence (son histoire depuis Navier jusqu'au chaos) et montré à ce sujet les multiples interactions entre différentes disciplines scientifiques. Cette approche sociologique offre des informations précises sur un environnement culturel singulier, dans une période décisive pour l'histoire du chaos. Mais il faudrait approfondir le cas d'autres institutions : l'IHES a été et reste une institution marginale dans la science contemporaine, même en se référant uniquement à la France. En outre, plutôt qu'une analyse conceptuelle des filiations des travaux et de leurs conséquences sur les notions classiques, ces auteurs ont surtout reconstitué les réseaux d'échanges entre scientifiques. En un mot, ils ont décrit une certaine dynamique, mais ils n'ont pas explicité les causes de cette dynamique.

S. Franceschelli a réalisé dans sa thèse ("Construction de signification physique dans le métier de physicien : le cas du chaos déterministe", soutenue en 2001) une étude microsociologique et épistémologique du groupe de Pomeau, Manneville, Bergé et Dubois, physiciens français travaillant sur la transition vers la turbulence, autour de 1980. Sa problématique porte sur la construction d'un sens physique à partir des notions des mathématiques des systèmes dynamiques. Si ce travail traite des rapports entre mathématique et physique, il n'a pas vocation à apporter des éléments d'analyse des concepts de chaos.

L'historiographie du chaos regroupe, enfin, différents ouvrages de scientifiques, de journalistes, plus ou moins vulgarisés [2] . Malheureusement, le plus souvent la perspective historique se résume à une histoire très linéaire et chronologique.

Les approches sont variées et les renseignements que l'on peut puiser dans ces documents sont nombreux. Mais, l'analyse historique et épistémologique de la notion de chaos est quasi inexistante, ou se résume trop simplement à une perspective adjointe à l'histoire des mathématiques des systèmes dynamiques. Cela prouve la difficulté de l'exercice.

[1] Nous renvoyons aux références suivantes : [AUBIN, D., 1998a / 1998b], [AUBIN, D., DAHAN DALMEDICO, A., 2002], [DAHAN DALMEDICO, A., 1994] et [FRANCESCHELLI, S., 2001].

[2] Citons les plus connus : [DIACU, F., HOLMES, P., 1996], [GLEICK, J., 1991], [STEWART, I., 1998]. Le recueil de contributions [DAHAN, A., CHABERT, J-L., CHEMLA, K., 1992] est à singulariser : certaines questions d'histoire du chaos sont abordées. Il présente surtout un article des plus intéressants pour notre perspective, celui de Simon Diner : "Les voies du chaos déterministe dans l'école russe".

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

LA TECHNICITÉ DE L'HISTOIRE CONTEMPORAINE

Ecrire l'histoire des sciences contemporaines suppose déjà une maîtrise minimale de la technicité à l'œuvre dans les recherches récentes. Sans cela, il est illusoire de prétendre produire un discours sur le chaos. Nous verrons aux chapitres 3, 4, et 5 à quel point la variété des conceptions sur le chaos a été réduite faute d'une analyse épistémologique, technique, en profondeur. L'analyse de la science contemporaine ne saurait se contenter des ouvrages de vulgarisation et des reconstructions "historiques" proposées par les scientifiques.

Pour notre part, nous pensons posséder une formation scientifique suffisante, et nous nous sommes efforcé d'acquérir les éléments manquants pour comprendre les scientifiques du chaos. Notre formation initiale en mathématiques nous est apparue indispensable. "Déformatrice" sous certains aspects, elle se percevra peut-être dans notre style de rédaction de cette thèse, dans la présentation des raisonnements, qui pourrait apparaître d'une structure un peu rigide, "mathématique", moins souple qu'à l'accoutumé en histoire.

LA MÉTHODE

Une formation scientifique n'est, cependant, pas un vaccin contre les pièges des discours scientifiques. Selon quelle méthode avons-nous procédé pour franchir les obstacles majeurs ?

Les sources primaires, les textes et les articles des scientifiques, ont constitué notre premier objet d'analyse. Bien conscient qu'ils sont le produit d'une reformulation d'un travail de recherche plus problématique qu'il n'y paraît, nous pensons qu'ils restent une archive essentielle pour l'historien des sciences. Même si les hésitations et les tâtonnements sont gommés, même si les objectifs et les projets intellectuels ne sont pas toujours clairement exprimés, il en reste des traces significatives. Un épisode de l'histoire tel que l'émergence des conceptions du chaos après 1975 nous montrera que les scientifiques s'expriment beaucoup plus librement qu'on ne le pense et que les problématiques, les enjeux, comme les doutes, filtrent dans leurs articles. L'analyse technique, conceptuelle, souvent laborieuse, est irremplaçable pour capter ces éléments.

Néanmoins, les textes ne suffisent pas toujours et d'autres moyens de recherche doivent être mis en œuvre. Ainsi, nous avons effectué un travail en archives pour préciser différents points. Dans la mesure où il s'agit d'éclairer des trajectoires individuelles, les archives personnelles, la correspondance, les brouillons, lorsqu'ils sont disponibles, sont riches d'information. Dans la perspective d'une histoire socio-institutionnelle, les archives des institutions scientifiques ont été nos principales sources. Pour notre thèse, la collection d'archives du CNRS, encore insuffisamment exploitée, a été utilisée, autant au

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

sujet des structures nationales que des laboratoires propres.

Le "très contemporain" impose des limites et des contraintes. Malgré leur caractère récent, l'accessibilité n'est pas garantie et les documents sont parfois laissés à l'abandon, en voie de détérioration. Cependant, la principale limite pour l'historien tient plus à l'abondance de sources, déjà soulignée, et au risque de pénétrer l'histoire par un biais non représentatif de sa globalité. C'est en multipliant les perspectives sur notre sujet que nous pensons avoir remédié à ce problème.

Etudier une histoire récente offre par ailleurs une opportunité unique. En effet, beaucoup d'acteurs de l'histoire sont encore en vie, voire en activité, et leur témoignage est une source incomparable, à condition de le recueillir et de l'exploiter avec précautions. Nous avons réalisé de telles interviews après un long temps d'analyses préliminaires sans lesquelles l'exercice est inutile et trompeur. Lorsque des éléments épistémologiques et techniques sont en jeu, il importe qu'un dialogue s'instaure. La maîtrise des données scientifiques est alors indispensable pour comprendre, réagir et orienter l'interview. Sans cela, il nous paraît déconseillé d'entreprendre un échange, qui aboutirait à l'effet inverse de celui escompté : la parole de l'acteur pourrait, volontairement ou inconsciemment, orienter l'historien selon une perception trop personnelle des événements.

L'INTERNET ET LES NOUVEAUX MOYENS DE LA RECHERCHE

En outre, l'historien bénéficie aujourd'hui de nouveaux moyens pour ses recherches, les outils liés à Internet. Nous en avons fait usage à différents niveaux de nos investigations. En premier lieu, grâce au courrier électronique, nous avons pu initier ou prolonger le dialogue avec différents protagonistes de notre histoire. Cela ne remplace pas l'interview directe, mais constitue une solution très simple pour obtenir divers renseignements. Nous avons pu également interroger des scientifiques en activité pour suivre les enjeux et les problèmes de leurs recherches. Ce procédé se rapproche d'une correspondance classique (que nous avons engagée avec un de nos acteurs, faute de courrier électronique) au sens où il laisse un temps de réflexion avant les réponses, mais conserve tout de même une part de la spontanéité de l'entretien oral. Les mêmes moyens du courrier électronique ont facilité les contacts avec la communauté des historiens.

Deuxièmement, de plus en plus d'informations intéressant l'historien sont disponibles sur le Web. Les fonds des bibliothèques françaises sont disponibles en consultation à distance, le Système Universitaire de Documentation permet une recherche efficace dans l'ensemble de ces catalogues. Au niveau des aides à la recherche, il existe également de nombreux index répertoriant les fonds d'archives aux Etats-Unis. Nous avons effectué plusieurs recherches d'archives en consultant les sites Web, puis en prenant contact avec les archivistes, de manière à obtenir des copies des archives, via le courrier postal. Il est évident que ces recherches ne sont pas aussi précises et exhaustives qu'une recherche archivistique effective, sur place, mais elles permettent de consulter des archives hors d'accès géographique à un coût raisonnable, en temps et en argent.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

En outre, le Web regorge de publications utiles pour notre histoire du chaos. Il existe beaucoup de publications éditées par des moyens classiques, de photographies, numérisées et accessibles très facilement. Le site Gallica, qui regroupe la collection des documents numérisés par la Bibliothèque Nationale, en est un bon exemple et nous a fourni quelques uns des documents les plus anciens relatifs à notre histoire. Par ailleurs, des textes inédits sont diffusés sur des sites plus ou moins officiels. Ils suscitent naturellement des inquiétudes quant à leur origine, leur fiabilité et leur pérennité sur le réseau. Si les sites de prétirages ("preprints") mis en place dans les années 1990 donnent des documents d'origine universitaire destinés au milieu de la recherche sur le chaos, à l'opposé, les sites de laboratoires, et plus fréquemment les sites personnels, livrent des documents sans garantie sur leur provenance. L'historien doit s'en remettre à la démarche critique habituelle pour s'assurer du maximum d'objectivité du contenu, en procédant notamment à un recoupement des informations.

PLAN DE LA THÈSE

Que souhaitons-nous apporter au sujet du chaos grâce à cette démarche ?

Nous nous intéresserons à la question des racines des conceptions scientifiques de chaos : si le champ de recherche émerge à partir de 1975, le mouvement est une concrétisation d'un ensemble de nouvelles interrogations esquissées à la fin du XIXème. C'est là notre thèse principale. La première partie a pour objet ce contexte de la fin du XIXème, imprégné de débats philosophiques relatifs au hasard, au déterminisme et à l'instabilité. En deux chapitres nous montrerons comment la Mécanique céleste trouve une voie nouvelle avec les méthodes mathématiques de Henri Poincaré (chapitre 1) et la Mécanique statistique suggère une interrogation sur les probabilités et la définition de concepts tels que celui d'ergodicité (chapitre 2).

L'émergence et à la formalisation du champ du chaos entre 1975 et 1982 est détaillée dans une seconde partie. A travers les notions de chaos apparaissant à partir de 1975, des traces de ces interrogations sont perceptibles, comme nous le montrerons au chapitre 3. Cependant, il s'agit plus largement de montrer comment les notions de chaos s'imposent dans la science, au carrefour des mathématiques des itérations, des problèmes liés à la turbulence et de la "stochasticité". Par une analyse épistémologique approfondie nous montrerons que la trame conceptuelle des notions de chaos est articulée par les questions d'instabilité et d'ergodicité, les notions de "sensibilité aux conditions initiales" et d'attracteur étrange. Dans ce moment de créativité scientifique intense, il existe en réalité une grande variété technique. Si David Ruelle est l'instigateur et le promoteur des concepts clés, il nous faut rendre compte des subtilités dans les notions de chaos à travers au moins deux exemples : Otto Rössler et Robert Shaw. Au chapitre 4, ces "trois voies pour le chaos" font l'objet d'une analyse historique et épistémologique détaillée avec la perspective de montrer comment les thèmes de Ruelle tendent à s'imposer et à prédominer. Les "scénarios" de transition vers le chaos, nous permettront de préciser encore, au chapitre 5, la diversité conceptuelle sur le thème du

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

chaos et le mouvement qui tend à imposer la première théorie du chaos, aux alentours de 1982. Afin d'évaluer les variations dans ce champ, qui est loin d'être unifié, et de dépasser les discours très techniques des acteurs, il nous a semblé indispensable de procéder par sondage selon des trajectoires individuelles ; c'est pourquoi notre analyse dans cette seconde partie se construit sur un certain nombre de portraits de scientifiques plutôt que sur des courants de pensée, qui sont presque impossibles à discerner.

Dans une troisième partie, pour comprendre en quoi la fin du XIXème siècle a été un épisode déterminant de l'histoire des sciences, conduisant au chaos après 1975, nous indiquerons les bouleversements intellectuels produits par ces interrogations. Sous l'impulsion de Poincaré, un cadre mathématique pour les systèmes dynamiques s'est constitué progressivement au XXème siècle, en conséquence d'une série importante de renouvellements conceptuels explicités au chapitre 6. Ce cadre a servi à donner des éléments pour les conceptualisations du chaos, notamment la notion d'attracteur étrange, parallèlement aux notions issues de la Mécanique statistique. Au chapitre 7, nous montrerons en effet comment les problèmes d'ergodicité et d'instabilité, avant d'entrer au cœur des problèmes de chaos, sont les fruits d'une longue interrogation sur les fondements de la Mécanique statistique.

Les pratiques scientifiques mises en jeu ont été tout autant déterminantes que les productions mathématiques, plus abstraites, dans l'émergence de la science du chaos ; tel est l'objet de notre quatrième partie. Le raisonnement analogique et le calcul analogique, tout d'abord, ont informé la théorie des oscillations, depuis les années 1930, et ont concouru très tôt à l'étude des systèmes dynamiques, comme nous le montrons au chapitre 8. Parallèlement, après la seconde guerre mondiale, le calcul électronique, numérique, se développant, Stanislaw Ulam a mis en œuvre et diffusé l'idée d'"expérience mathématique". Ses études des itérations non linéaires et les projets du météorologue Edward Lorenz (dont l'image de l'"effet papillon" a connu un grand succès) montreront quel a été l'impact de l'introduction de l'ordinateur en science, et de cette démarche "expérimentale" dans l'histoire du chaos (chapitre 9). Un chapitre supplémentaire, centré sur les oscillations chimiques et le chaos en chimie, permettra de préciser ces pratiques et leur influence dans l'histoire du chaos.

Dans ces précédents chapitres la dimension sociale de la science reste en filigrane. Dans une dernière partie (qui est constituée de l'unique, long, chapitre 11), nous aborderons notre histoire selon une perspective plus résolument socio-institutionnelle. A travers l'exemple du CNRS, nous analyserons le contexte français pour montrer que l'émergence du champ du chaos a été très problématique, institutionnellement. Cette étude de cas nous donnera à lire l'histoire du CNRS, tout autant qu'elle nous montrera comment l'histoire du chaos est prise entre des enjeux scientifiques et des enjeux sociaux.

Nous pourrons enfin conclure sur le statut historique de cette notion de chaos, encore insuffisamment étudiée par les historiens.

Dans cette thèse, nous avons choisi de porter divers regards sur l'histoire du chaos. L'épistémologie est relayée par l'histoire sociale et institutionnelle, les grands moments de synthèses alternent avec les études de cas ciblées, l'histoire de courants de pensée se

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

combine à des portraits d'individus. Nous ne prétendons pas ainsi écrire l'Histoire du chaos, mais, en multipliant les perspectives, nous espérons au moins éliminer les mythes qui circulent à propos de l'histoire du chaos et essayer de balayer des historiques trop linéaires et triomphants qui sont encore proposés.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Première partie. Y a-t-il une origine au chaos ?

PRÉLIMINAIRE

a. La recherche des origines

Rechercher les origines d'une conception scientifique soulève de nombreuses difficultés. Cela suppose au préalable qu'on puisse définir la notion d'"origine" d'un concept scientifique. L'entreprise, en effet, est équivoque, mais l'historien est en terrain familier et, en partie balisé. Car pour lui la question des concepts scientifiques n'est qu'un problème parmi d'autres, comme celui de la recherche des origines de la Révolution Française. Il suffit de relire Marc Bloch (1886-1944), dans son Apologie pour l'histoire, (ouvrage posthume publié en 1949), lorsqu'il évoque l'"idole" des origines, la hantise des origines qui occupe la tribu des historiens, pour comprendre à la fois les ambiguïtés, les aléas et les pièges à éviter au cours d'une telle recherche.

Selon M. Bloch, l'expression "origine" peut recouvrir au moins deux sens. On pourrait l'entendre comme synonyme de "commencement". Ainsi, d'après lui, il faudra jouer avec

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

un "point initial [qui] demeure singulièrement fuyant. Affaire de définition, sans doute" [3] . Le problème de définition est particulièrement prégnant en ce qui concerne l'histoire d'un concept scientifique évoluant au cours du temps. Il peut aussi s'agir d'origine au sens de "causes". Cette acception nous entraîne, là encore, dans une recherche quasiment sans fin. Mais au fond, le problème est à la fois une question de commencement et de causes, ce que reflète le sens commun du mot, selon lequel "les origines sont un commencement qui explique. Pis encore : qui suffit à expliquer. Là est l'ambiguïté ; là est le danger" [4] .

Dans l'historiographie courante sur le chaos, nous trouvons deux "évènements" que nous pouvons apparenter à des origines et qui sont d'ailleurs les jalons de la périodisation la plus schématique possible de son histoire. Il s'agit, d'une part, des publications scientifiques, dans le courant de l'année 1975, qui se référent explicitement à une notion de chaos et d'autre part, certains travaux mathématiques d'Henri Poincaré, à la fin du XIXème siècle. Mais les travaux de Poincaré posent un problème : il n'est nulle part question de "chaos". Et si, dans l'année 1975, le terme est effectivement employé, ce qu'il désigne se réfère à un champ de questions diverses.

En reprenant les distinctions précédentes, l'année 1975 fait figure de "commencement" dans l'historiographie et les travaux de Poincaré de "causes", initiales. Ce sont, en substance, les affirmations les plus standard et les plus consensuelles sur l'histoire du chaos. Par ailleurs, le fait de se tourner vers la fin du XIXème siècle, plus de quatre-vingts ans avant le "commencement" illustre parfaitement le caractère fuyant des origines.

L'historiographie courante se fonde sur une analyse des filiations, des parentés entre les concepts et les théories anciennes et contemporaines. Mais, il ne faut pas succomber à la tentation et, comme le rappelle M. Bloch, "confondre une filiation avec une explication" [5] . Cette dernière affirmation rend manifeste les insuffisances de ce que les "historiens des sciences improvisés" ont, jusqu'à présent, réussi à construire, et encore seulement partiellement : des filiations. Au-delà de la filiation nous recherchons une explication.

Quelques historiens des sciences sont allés un peu plus loin et ont proposé des thèses plus construites. C'est le cas d'Aubin et Dahan-Dalmedico [6] . Selon eux il y aurait un "point d'origine indéniable : Poincaré" [7] . Pour résumer leurs thèses, à la suite des travaux mathématiques de Poincaré, différents scientifiques se sont réapproprié ses méthodes et ses outils, pour en tirer des conséquences sur le plan mathématique, ou les

[3] Nous renvoyons à la dernière réédition : [BLOCH, M., BLOCH, E., LE GOFF, J., 1997], p. 54.

[4] Ibid., p. 54.

[5] Ibid., p. 55.

[6] Nous renvoyons à l'article très récent : "Writing the History of Dynamical Systems and Chaos : Longue Durée and Revolution, Disciplines and Cultures", [AUBIN, D., DAHAN-DALMEDICO, A., 2002].

[7] "An Undeniable Point of Origin: Poincaré" in [AUBIN, D., DAHAN-DALMEDICO, A., 2002], p. 279.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

transférer dans d'autres domaines de recherche et disciplines. La période des années 1960-80 serait à la fois un moment de convergence de ces différents prolongements, de prise en compte des notions d'instabilité dans les systèmes dynamiques notamment, et un moment de reconfiguration socio-disciplinaire et conceptuelle lié à ces rencontres.

Les auteurs donnent une description de cette évolution, dont l'axe majeur est la théorie mathématique des systèmes dynamiques. S'ils ne négligent pas d'autres domaines des mathématiques, de la physique ou de la technique qui en sont proches, il est clair que les mathématiques forment le cœur de leur point de vue épistémologique. En revanche, les explications de cette dynamique sont quasiment absentes et les descriptions sont faites à partir du référentiel des scientifiques. Les réalisations effectives, les projets intellectuels, les motivations, les objectifs ou les valeurs des protagonistes sont peu explicités, à quelques exceptions près, et manquent pour éclairer le long cheminement vers les conceptions de chaos. Les notions de chaos, dont ils ne parlent quasi exclusivement qu'au singulier, ne sont d'ailleurs pas discutées. C'est avec la volonté de fournir une réelle explication de cette longue évolution que nous abordons la question de l'histoire, ou préhistoire, du chaos.

En tout cas, il semble partout admis qu'il y a "une" origine véritable : Poincaré. Il est même souvent considéré comme un "précurseur" du chaos et de la théorie du chaos. Mais cela peut-il avoir un sens ? Ces propositions sont-elles satisfaisantes ? L'unicité de l'origine est également en question : pourquoi n'imaginer qu'une seule origine alors qu'il pourrait y avoir plusieurs sources ? Cela suggère une perspective encore plus radicale : y a-t-il vraiment une origine au concept de chaos ?

b. La fin du XIXème siècle, un "moment" d'origine

Nous allons voir qu'il est difficile de donner une origine simple aux conceptions de chaos. L'objet de cette première partie est de montrer qu'il est plus approprié de qualifier la fin du XIXème siècle de "moment" d'origine. L'ossature de ce moment d'origine est constituée par les innovations au sujet des vieux problèmes de la Mécanique céleste, les méthodes mathématiques permettant d'avancer ces réponses nouvelles ainsi qu'un ensemble d'interrogations situées au carrefour de la philosophie, des mathématiques et de la physique. Des éléments de réponses à ce sujet sont apportées très tôt et marqueront l'histoire des sciences au XXème siècle. Les origines du chaos sont localisées dans ce contexte.

Sans chercher à stigmatiser les travaux de Poincaré, leur place dans cette période mérite d'être reconsidérée. S'il est l'acteur principal des travaux sur les équations différentielles, selon une perspective qu'il a lui-même initiée, il participe également aux débats philosophiques sur le hasard et le déterminisme ainsi qu'aux interrogations sur la Mécanique statistique. Cette conjugaison d'intérêts n'a pas été suffisamment prise en compte.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il nous paraît important d'apprécier la postérité prêtée à Poincaré et son caractère "précurseur" à travers les allégations trouvées dans différents opuscules de scientifiques, historiens, ou encore journalistes. Nous estimerons

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

ainsi, de manière simplifiée, l'importance de ses travaux sur les équations différentielles et nous apprécierons en quoi son texte de 1907, "Le hasard", devra faire l'objet de toute notre attention.

Ces perspectives acquises, nous entamerons l'analyse de ses travaux et du contexte intellectuel de la fin du XIXème siècle. L'originalité des méthodes de Poincaré en matière d'équations différentielles et leurs rapports aux réflexions de ses contemporains font l'objet du premier chapitre. Le second nous emmènera dans les débats à la fois philosophiques et scientifiques sur les questions du hasard, du déterminisme et de l'instabilité, à la frontière avec la Mécanique statistique naissante. "Le hasard" et les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste de Poincaré apparaîtront comme les meilleures illustrations de ce moment d'origine.

c. La perception des travaux de Poincaré au XXème siècle

Du début du XXème siècle à nos jours, le panthéon façonné par les scientifiques accorde une place plus ou moins importante aux travaux de Poincaré sur les équations différentielles. L'historiographie classique du chaos construit également des filiations entre ces travaux et les développements plus récents en matière de théorie du chaos, contribuant au mythe du "père fondateur". Une catégorisation rapide de ces affirmations conduit à en distinguer trois types.

Certaines déclarations soutiennent que les méthodes de Poincaré sont utilisées ou transformées pour servir dans d'autres branches de la science. Certains prétendent donner une succession à Poincaré et d'autres enfin s'attachent tout simplement à faire de Poincaré le découvreur du chaos, dont on aurait oublié un temps la découverte. Dire que Poincaré est a l'origine de recherches et de découvertes au XXème siècle semble donc avoir au moins trois significations différentes ; notre discussion préliminaire sur la notion d'"origine" prend pleinement son sens à travers ces exemples.

L'utilisation des travaux de Poincaré : la Mécanique non linéaire

La première série d'affirmations à démarquer date des années 1950-60. A l'occasion du centième anniversaire de la naissance d'H. Poincaré en 1954, Nicolas Minorsky prononce une allocution intitulée "Influence d'Henri Poincaré sur l'évolution moderne de la théorie des oscillations non linéaires". Minorsky [8] est alors un spécialiste de la Mécanique non linéaire et de la théorie des oscillations dans l'après seconde guerre mondiale. Il est l'auteur de l'ouvrage Nonlinear oscillations [9] , considéré comme une référence en la

[8] L'ingénieur N. Minorsky, féru de mathématiques, a joué un rôle important dans la reconnaissance, hors d'URSS, de l'importance des mathématiques de Poincaré pour les oscillations. Nous renvoyons au chapitre 8 consacré au sujet et à notre analyse des travaux de Minorsky en particulier, page 533.

[9] [MINORSKY, N., 1947] est la première édition de son traité, construit en grande partie sur les travaux réalisés en URSS ; [MINORSKY, N., 1962] la seconde, agrémentée des résultats actualisés en 1962. La première édition de l'ouvrage aura un impact important à la sortie de la seconde guerre mondiale dans le domaine des oscillations non linéaires. La seconde édition deviendra une référence en la matière, contenant l'essentiel des méthodes d'étude des systèmes oscillants.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

matière. En substance, et d'après lui, cette théorie a été guidée principalement pendant les années 1930-40 par les trois œuvres de Poincaré : "Sur les courbes définies par une équation différentielle" [10] , le **premier** tome des Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste [11] et "Les figures d'équilibre d'une masse fluide animées d'un mouvement de rotation" [12] . Il affirme ainsi :

"Il est difficile de trouver dans l'histoire de la Science un autre exemple de théorie mathématique développée sans aucune relation aux applications (dont la plupart n'étaient même pas connues, du reste, à l'époque) qui ait présenté une base aussi parfaite pour l'étude de phénomènes innombrables qui se sont révélées depuis lors." [13]

S'il a participé à faire reconnaître les travaux de Poincaré, en un sens Minorsky est surtout un traducteur, une sorte de porte-parole des travaux réalisés en Union Soviétique, dans les années 1930-60. Pour avoir la "version originale", nous pouvons nous tourner vers le Congrès International d'Histoire des Sciences, en 1968. Dans son intervention, le physicien soviétique Yuri Mitropolsky (né en 1917), représentant de l'Ecole de Kiev et lui-même spécialiste de la théorie des oscillations, revient sur le cas de "H. Poincaré et la théorie des oscillations non linéaires".

"La solution des problèmes mathématiques que pose l'étude des oscillations non linéaires, exige une approche très rigoureuse. Ce système a été élaboré à la suite des recherches fondamentales de H. Poincaré auquel on doit de remarquables travaux sur la théorie des équations différentielles ordinaires. [...] Les méthodes rigoureuses de H. Poincaré, reposant sur une solide base mathématique, ont été appliquées à l'étude systématique de nombreux problèmes de la théorie des oscillations non linéaires. Cette application fut effectuée vers les années 1930 par l'école des physiciens soviétiques dirigée par L.I. Mandelchtame, H.D. Papalexy, A.A. Andronov et A.A. Vitte. Ces savants ont réussi à élucider la signification fondamentale de ces méthodes et ont résolu avec leur aide de nombreux et importants problèmes de la théorie des oscillations non linéaires se réduisant aux mouvements périodiques. Actuellement les méthodes d'obtention des solutions périodiques fondées par H. Poincaré sont largement appliquées dans les différentes branches de la théorie des oscillations non linéaires, domaine qui s'est considérablement développé au cours des dernières années." [14]

[10] Ce sont quatre mémoires publiés entre 1881 et 1886 : [POINCARE, H., 1881], [POINCARE, H., 1882a], [POINCARE, H., 1885b], [POINCARE, H., 1886b].

[11] [POINCARE, H., 1892a]. Il cite uniquement le premier des trois tomes de l'ouvrage.

[12] Les deux mémoires [POINCARE, H., 1885a] et [POINCARE, H., 1892b] forment l'essentiel des réflexions de Poincaré sur le sujet.

[13] [MINORSKI, N., 1954], p. 126. L'orthographe de l'auteur du texte est "N. Minorski", mais il s'agit bien de la même personne. A travers sa correspondance avec Théodore Vogel, nous savons que Minorsky a assuré l'exposé en 1954 (Archives personnelles de Th. Vogel, 46 ii 57). Cf. chapitre 8, page 562.

[14] [MITROPOLSKY, Y.A., 1968], p. 123-124. En français dans le texte.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Ce long passage fourmille de détails que nous éclaircirons dans une partie consacrée à ce thème de la Mécanique non linéaire. D'ores et déjà, nous pouvons affirmer que les spécialistes des oscillations non linéaires (et de Mécanique non linéaire) sont parfaitement conscients de l'importance des théories de Poincaré et surtout qu'ils reconnaissent dans les mathématiques de Poincaré un **outil** pour leurs travaux : ils parlent en terme d'"applications" des résultats de Poincaré et utilisent des théorèmes mathématiques dans le cadre d'une théorie mathématisée. Pourquoi évoquer la question de la Mécanique non linéaire ? Elle est en fait un jalon de notre histoire : il s'agit d'un effort de théorisation, appuyé par les mathématiques de Poincaré et qui en a prolongé le développement ; le champ de recherche du chaos en a absorbé une partie [15] .

Ce premier exemple suffit à illustrer la trop grande simplicité qu'il y aurait à ériger Poincaré en initiateur ou précurseur d'une théorie postérieure de quelques décennies à ses travaux. En effet, le travail d'exportation et d'adaptation à la question des oscillations n'est en rien négligeable. Les innovations mathématiques de Poincaré participent autant des origines de ces développements des années 1950-60, que l'adaptation à la problématique des oscillations non linéaires. A moins de penser que les mathématiques étaient "prédestinées" à cette théorisation et applicables immédiatement à la question. Beaucoup d'ambiguïtés émaillent ces affirmations et elles proviennent en grande partie de la distinction difficile, et de la mise en relation délicate, entre les mathématiques de Poincaré, d'une part, et la physique des oscillations d'autre part.

Les successeurs de Poincaré

En se bornant au plan des mathématiques, la question des origines prend un sens différent, car des filiations beaucoup plus directes peuvent être établies. De Poincaré à G. D. Birkhoff (1884-1944) la parenté sur le plan des mathématiques est grande et bien connue. M. Morse (1892-1977), élève de Birkhoff, affirmait que "Poincaré était le vrai professeur de Birkhoff" [16] , alors qu'il ne l'a jamais rencontré. La célèbre théorie des systèmes dynamiques construite par Birkhoff est, en effet, un aboutissement du programme de Poincaré. Certes, Birkhoff inclut des éléments nouveaux, parachève l'œuvre du maître avec une vision topologique très poussée, mais l'esprit est le même, les résultats de Poincaré sont parfaitement intégrés à l'édifice, dont son célèbre Dynamical Systems (1927). Les travaux du mathématicien américain S. Smale (né en 1930) s'inscrivent en ligne directe de cette tradition, avec son article "Differentiable Dynamical Systems" de 1967. Les raccourcis que nous prenons ici ne doivent pas donner l'illusion d'une histoire si "linéaire". Cette "optique systèmes dynamiques", dont nous avons vu qu'elle a été étudiée par Dahan et Aubin dans plusieurs travaux, nous donne cependant

[15] Les deux articles [DAHAN DALMEDICO, A., 1994] et [AUBIN, D., DAHAN, A., 2002] suffisent à resituer cet épisode. Nous traiterons de cette question dans le chapitre 6 consacré à l'histoire des mathématiques des systèmes dynamiques ainsi que dans le chapitre 8 abordant plus spécifiquement les oscillations non linéaires, dans leurs rapports à la technique.

[16] [MORSE, M., 1946], p. xxiii. Pour comprendre cette phrase, il faut avoir en tête que Birkhoff ne connaît Poincaré que par traité interposé : il ne l'a jamais rencontré en personne (Birkhoff est un mathématicien américain qui entre dans la recherche mathématique en 1907, alors que Poincaré décède en 1912).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'occasion de replacer Poincaré dans une seconde voie de l'histoire des sciences du XXème siècle. En un mot, Poincaré est l'initiateur de cette branche des mathématiques, cela est un point très clair. Pour autant, le terme de "précurseur" n'est pas *a priori* adapté à la situation : Poincaré n'a pas anticipé, mais a bien construit, lancé, initié ce type de recherche (qu'il a baptisée "étude qualitative des équations différentielles" et qui est devenue, en s'élargissant, "étude des systèmes dynamiques") [17] .

Dans cette perspective d'une histoire des mathématiques, nous pourrions également intégrer des filières connexes aux théorisations des systèmes dynamiques. En parallèle à Birkhoff et Smale, il en existe une, passant par A. Kolmogorov (1903-87) [18] . Lors du congrès international des mathématiciens en 1954 [19] , il brosse un rapide historique des mathématiques des équations différentielles et de la Mécanique. Dans les problèmes d'intégration des équations différentielles, très importants au XIXème siècle, il souligne que le rôle de la topologie est apparu très nettement grâce à Poincaré. Kolmogorov inscrit ses propres résultats, dont celui à la base du célèbre théorème KAM (des noms de leurs auteurs Kolmogorov-Arnold-Moser), dans une perspective qu'il fait lui-même remonter à Poincaré. Ces affirmations confirment l'image d'un Poincaré présenté comme un initiateur de problèmes élaborés ou résolus par ses "successeurs" mathématiciens. Il est inutile de multiplier les exemples pour l'instant.

Poincaré, un "précurseur" du chaos ?

Dans des textes plus récents se développe abondamment le thème de Poincaré comme précurseur du chaos. Ce sont souvent des scientifiques, cherchant les fondateurs de leur domaine. Parmi quelques "représentants", on relèvera trois séries de déclarations. Pour ce qui concerne la vulgarisation, l'ouvrage assez répandu de Ian Stewart, Dieu joue-t-il aux dés ?, en donne un florilège, à la limite de la caricature.

"Dans sa grille de nappes d'intersection, connue maintenant sous le nom d'entrelacements isoclines (sic), Poincaré observait les traces de pas du chaos. Comme Robinson Crusoé, observant cinq orteils soigneusement imprimés dans le sable, il savait l'importance de ce qu'il avait vu. Comme Robinson Crusoé, il était rien moins qu'enthousiaste devant ce que cela laissait présager" [20] "[...] il est clair que Poincaré, en particulier, a vu plus que ses contemporains n'ont pu apprécier." [21]

Cette dernière affirmation est appuyée par la citation du texte de Poincaré, "Le hasard" [22] ,

[17] Dans le chapitre 6 nous montrerons l'évolution de la notion de "système dynamique", que Birkhoff et Smale ont contribué à présenter sous sa forme contemporaine.

[18] Au chapitre 7 (page 486) nous consacrons une analyse des résultats relatifs au théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser, contribution majeure de Kolmogorov.

[19] La présentation de Kolmogorov est publiée dans [KOLMOGOROV, A.N., 1954b].

[20] [STEWART, I., 1998], p. 110. Il faut lire "homoclines" plutôt qu'"isoclines" : la traduction française appropriée voudrait que ce fût "homocline", mais, en anglais, le terme "isocline" est parfois utilisé à la place d'"homocline" et a sans doute été trop rapidement francisé.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

de 1907, dont nous produirons une analyse plus complète.

Philipp Holmes et Florin Diacu dressent, dans leur ouvrage Celestial Encounters, un vaste panorama de l'histoire des théories de la stabilité, des théories du chaos et des mathématiques des systèmes dynamiques. Selon eux, l'origine de ce développement est à chercher du côté de la Mécanique céleste ; Poincaré occupe naturellement une place privilégiée dans leur exposé. Même s'il faut reconnaître une grande clarté au discours, souvent technique et plus précis que le précédent ouvrage, leurs affirmations relatives aux découvertes de Poincaré nous semblent exagérées. Les courbes homoclines (isoclines dans la citation précédente de Stewart) sont au centre des débats.

"Il restait beaucoup à découvrir, mais les courbes homoclines de Poincaré semblent avoir été la première manifestation mathématique du phénomène appelé aujourd'hui chaos. […] Poincaré était si frappé de sa découverte qu'il s'est passé du temps avant qu'il accepte l'idée que les homoclines puissent exister [...] il était difficile d'accepter l'idée de chaos. Un tel concept allait à l'encontre de la philosophie de l'époque. […] C'était un chercheur bien établi, mûr, réticent à ouvrir la boite de Pandore. Il l'avait trouvé et c'était suffisant. Sa philosophie ne lui permettait pas d'aller plus loin." [23]

Tout le paragraphe mériterait d'être cité comme exemple de vision rétrospective et anachronique de l'histoire des sciences, construite par des scientifiques. Le mélange, très peu maîtrisé, de mathématiques, de philosophie et d'épistémologie est assez dérangeant pour un historien, mais il a le mérite de refléter l'opinion la plus commune des scientifiques sur cet épisode de l'histoire du chaos.

Pour compléter cette anthologie, nous reproduisons les remarques de David Ruelle, mathématicien dont l'importance apparaîtra lorsque nous aborderons les années 1970. Après un discours sur la notion de "sensibilité aux conditions initiales", reposant sur les travaux de Hadamard, Duhem et Poincaré (dont le texte "Le hasard"), il s'interroge sur le fait que ces travaux soient restés sous silence jusque dans les années 1970.

"Je vois une autre raison à l'oubli où sont tombées les idées d'Hadamard, Duhem et Poincaré : ces idées sont venues trop tôt, les moyens de les exploiter n'existaient pas. Poincaré n'avait pas à sa disposition ces outils mathématiques de base que sont la théorie de la mesure ou le théorème ergodique, et ne pouvait donc pas exprimer ses brillantes idées intuitives dans un langage précis." [24]

[21] ***Ibid., p. 545.***

[22] [POINCARE, H., 1908] : le texte original date de 1907 ; il a été republié en 1908 dans Science et méthode.

[23] ***"Much more remained to be uncovered, but Poincaré's homoclinic tangle appears to have been the first mathematical manifestation of the phenomenon now called chaos [...] Poincaré was so struck by his discovery that it was some tome before he could accept the idea that a homoclinic tangle might exist. [...] it was hard to accept the idea of chaos. Such a concept went counter to the philosophy of his epoch. [...] He was a mature, well-established researcher, reluctant to open this Pandora's box. He had found it and that was enough. His philosophy would permit him to go no further.", [DIACU, P., HOLMES, P., 1996], p. 42-43 (en italique dans le texte). F. Diacu et P. Holmes sont des mathématiciens-mécaniciens.***

[24] ***[RUELLE, D., 1991], p. 65.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

L'interprétation de Ruelle a quelque chose de gênant, bien qu'elle puisse paraître assez juste. Poincaré aurait eu une intuition sans pouvoir l'exprimer dans un langage mathématique précis. Mais peut-on dissocier l'idée, de l'expression de cette idée dans un langage mathématique ? Tout dépend du rôle accordé aux mathématiques : un langage pour expliciter une pensée ou un moyen de construction de cette pensée. En suivant Ruelle il faudrait se réfugier dans la première option, ce qui est, au moins discutable. Il ne faudrait pas interpréter des résultats de Poincaré dans le cadre de la théorie de la mesure et de la théorie ergodique pour proclamer qu'il a eu telle ou telle idée, puis affirmer qu'il lui manquait ces mêmes éléments pour pouvoir l'exprimer effectivement. Ce serait faire un anachronisme.

En outre, notre analyse historique montrera que les citations de Holmes et Ruelle tentent de valoriser un certain point de vue sur le chaos : Holmes est un spécialiste de la théorie des équations différentielles, de la Mécanique, domaines qui, au sujet du chaos, sont liés aux homoclines. Ruelle est un mathématicien, travaillant en particulier en théorie ergodique des systèmes dynamiques et dont l'action va promouvoir l'idée de sensibilité aux conditions initiales. Leurs propos sont donc équivoques.

Enfin, avec l'image d'un Poincaré en avance sur son temps, on rejoint d'autres affirmations de I. Stewart selon lesquelles, à la fin du XIXème siècle, l'"époque n'était pas tout à fait adéquate et la culture encore moins" [25] . Evidemment, nous nous interrogeons sur le bien-fondé de tels propos mais l'historien peut-il faire autrement que condamner ce genre de raccourcis ?

La biographie de Poincaré, lue à travers ces divers ouvrages subit beaucoup de distorsions, suffisamment pour qu'il devienne urgent d'en rétablir les grandes lignes. Nous proposons un bilan des travaux de Poincaré touchant d'une manière ou d'une autre au chaos et à la théorie du chaos. Puis grâce à cette mise au point et en réinsérant la vie de Poincaré dans son contexte, à savoir la fin du XIXème siècle, nous allons montrer que, contrairement à toutes ces affirmations, Poincaré "est de son temps" ; mais peut-il en être autrement ?

CHAPITRE 1. POINCARÉ, DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE AUX MATHÉMATIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Au fil du bref parcours des hommages rendus à Poincaré, plusieurs facettes de son travail sont apparues. Si nous devions pointer un élément clé des travaux de Poincaré pour le développement de la science du chaos au XXème siècle, il nous faudrait choisir la perspective nouvelle qu'il a inaugurée en matière d'étude des équations différentielles : le point de vue **qualitatif, géométrique, local et global**. Le paragraphe précédent nous a livré plusieurs indices sur cet ensemble colossal de méthodes et de résultats mathématiques. Deux étapes essentielles de la construction de cet édifice viennent d'être

[25] [STEWART, I., 1998], p. 91.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

citées (par Minorsky) : une série de quatre mémoires intitulés "Sur les courbes définies par une équation différentielle" (1880-1886) et son ouvrage très célèbre Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, publié en trois tomes (1892, 1893, 1899). Son mémoire victorieux du concours Oscar II en 1890 est une étape intermédiaire.

Quelles sont les innovations proposées par les travaux de Poincaré et de quelle manière s'inscrivent-elles dans le contexte scientifique, intellectuel de cette fin de XIXème siècle ?

Arrière plan de nombreuses considérations mathématiques de Poincaré, la Mécanique céleste en est également un stimulant. Après avoir précisé ce fond problématique et son impact sur les recherches entamées par Poincaré, nous pourrons entrer dans le détail de l'analyse parfois technique, des travaux mathématiques, sans tomber dans une reconstruction logique de la découverte scientifique. Un aperçu des réflexions de ses contemporains nous permettra alors d'apprécier l'originalité de la pensée de Poincaré et comment les changements qu'il suggère sont enregistrés.

1.1. Les travaux de Poincaré avant 1889

A travers son travail mathématique sur les équations différentielles, Poincaré manifeste un souci constant pour les problèmes de la Mécanique céleste, qui a les faveurs des scientifiques encore à la fin du XIXème. Ce sont essentiellement le problème des trois corps, la stabilité du système de trois corps, et celle du système solaire. Afin de cerner l'originalité de l'intervention de Poincaré dans le problème au fil des années 1880, nous présentons dans leurs grandes lignes, ces problématiques essentielles en Mécanique céleste [26] .

a. Le problème des trois corps : une longue histoire

De Newton aux méthodes de résolution approchée

La question des trois corps constitue à elle seule un *themata* [27] , traversant l'histoire des sciences de Newton aux travaux très contemporains. Newton l'a posé dans ses Principia, au XVIIème siècle. Avec des méthodes géométriques, probantes dans le cas de deux corps, il a tenté, sans succès, de trouver la forme des trajectoires. Mais le problème est

[26] L'histoire du problème des trois corps jusqu'à la fin du XIXème siècle est un épisode de l'histoire des sciences bien connu, nous ne prétendons pas faire œuvre originale ici. Parmi les synthèses les plus récentes, on peut consulter [POUR LA SCIENCE, 2000] et [BARROW-GREEN, J., 1997].

[27] Selon l'historien des sciences Gerald Holton, l'imagination et la pensée scientifique se développent autour de thèmes, qu'il a choisi d'appeler *themata*. D'une manière générale, ces *themata* sont des concepts qui servent de guide au chercheur. Ce sont des questionnements clés et permanents : ils n'auront jamais de réponse ou de solution. Un scientifique adoptera des présuppositions, explicites ou implicites, autour de chacun de ces *themata*, qui le conduiront au succès ou à l'échec selon les cas. Holton distingue plusieurs emplois de *themata* et il attribue un rôle stimulant pour la recherche à l'opposition entre *themata* et anti-*themata*, lorsqu'il y a lieu. Nous renvoyons aux textes de Holton réunis dans : [HOLTON, G., 1978].

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

beaucoup plus complexe qu'à deux corps, au point que, jusqu'à Poincaré, la question n'avance que très lentement.

Les questions pratiques sont une motivation importante de telles recherches. La navigation demande, par exemple, une bonne connaissance des mouvements de la Lune. Pour autant l'intérêt intellectuel de la chose n'est certainement pas à négliger. Les recherches au sujet du problème des trois corps ont été engagées selon deux voies principales : la recherche de solutions approchées et la recherche de théorèmes généraux sur les mouvements des astres.

Newton proposait déjà de considérer un problème simplifié, celui du système Terre-Lune-Soleil dans lequel l'influence du Soleil serait considérée comme une perturbation d'un mouvement (de type képlérien) Terre-Lune. Dans cette optique d'approximation des solutions, la méthode analytique joue un rôle de plus en plus essentiel, au détriment de la géométrie. Le travail de Daniel Bernoulli (1700-1782) marque d'une certaine manière le **tournant pris au XVIII ème siècle avec l'abandon progressif des méthodes géométriques (utilisées par Newton) au profit des recherches analytiques**. L'approche par **linéarisation** devient prépondérante, avec les travaux d'Alexis Clairaut (1713-1766) en 1747-1749 [28], de Leonhard Euler (1707-1783) [29], Joseph Lagrange (1736-1813) et Jean d'Alembert (1717-1783). Euler, dans son second traité sur la théorie de la Lune, en 1772 donne également la première formulation du problème restreint des trois corps [30].

Durant le XIX ème siècle, se confirme la tendance, exclusive, à la recherche de solutions quantitatives, analytiques si possible, en écartant toute référence à la géométrie. La préface du célèbre ouvrage de Lagrange de 1788, Mécanique Analytique, scelle l'esprit des recherches en Mécanique pour ce siècle :

"Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème [...] On ne trouvera point de Figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni construction, ni raisonnement

[28] Clairaut est conduit à une résolution approchée par l'utilisation de développements en séries en fonction de petits paramètres. Sa Théorie de la Lune est récompensée par le prix de l'Académie de St-Petersbourg en 1752. [CLAIRAUT, A.C., 1747] et [CLAIRAUT, A.C., 1749].

[29] Euler a recours à la méthode de variation des paramètres pour le traitement en perturbation du mouvement planétaire : sa première théorie de la Lune est publiée en 1753. La question de l'apogée lunaire fût sujet d'oppositions entre ces grands savants du XVIII ème siècle, Euler, Clairaut et d'Alembert. Clairaut, avec ses premiers calculs, est parvenu à un résultat correspondant à la moitié de la valeur effectivement observée (reproduisant d'ailleurs un résultat de Newton). Euler et d'Alembert, par une méthode un peu différente, parvenait au même résultat. Clairaut envisagea alors de modifier la loi de la gravitation en ajoutant un terme supplémentaire en $1/r^n$ (idée déjà évoquée par Newton). Mais c'est au terme d'un développement plus poussé de ses séries qu'il parvient à "résoudre" le problème, en 1749. Voir par exemple [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 15-16.

[30] La formulation repose sur un système de coordonnées en rotation et des solutions particulières. Le terme "restreint" est dû à Poincaré, mais c'est Euler qui en donne la première formulation. [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 16.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

géométrique ou mécanique, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme." [31]

Cependant, il apparaît graduellement aux mathématiciens qu'il est très improbable d'obtenir une solution analytique complète du problème des trois corps. Au cours du siècle, les questions s'orientent vers celle de la fiabilité et donc de la convergence des séries employées pour la résolution approchée. Deux grands problèmes de la Mécanique céleste, reliés à la question de la stabilité des systèmes à plusieurs corps (comme le système solaire), sont d'actualité lorsque Poincaré s'intéresse aux débats : les termes séculaires et les petits diviseurs [32] . Lors du calcul des séries apparaissent en effet deux types de termes : les termes périodiques, qui ne posent aucun problème, et les termes séculaires, dont la valeur conditionne l'évolution sur des temps longs, car ils prennent de l'importance au fil de l'évolution temporelle. La stabilité dépend du comportement des termes séculaires.

Astronomes et mathématiciens

Parallèlement, dans le courant du XIXème siècle, il conviendrait de distinguer **deux types d'approche** du problème : celle des astronomes et celle des mathématiciens. Les astronomes sont plus préoccupés par des questions numériques et peu attachés aux questions de convergence mathématique des séries utilisées. Une diminution numérique des termes de la série, observée au-delà de quelques éléments, leur sert de "critère" de convergence. Pour les mathématiciens, une série est convergente si on le démontre rigoureusement. Le critère retenu et les travaux réalisés dépendent donc fortement de l'objectif recherché. Pour autant, la différence entre les démarches n'est pas clairement explicitée avant Poincaré, dans le second tome de ses Méthodes Nouvelles [33] . Malgré cette divergence de préoccupations, les travaux des astronomes ont une grande valeur, reconnue par Poincaré. Trois d'entre eux sont particulièrement importants : Delaunay (1816-1872), Gyldén (1841-1896), Lindstedt (1854-1939).

Charles Delaunay, astronome français du Bureau des Longitudes, se propose dès 1846 de "refaire entièrement la théorie de la lune" [34] . Il échafaude un système de variables qu'il juge plus adapté et obtient une série trigonométrique purement formelle, ne contenant aucun terme séculaire et satisfaisant l'équation de la Lune [35] . Du fait de la difficulté et de la longueur des calculs entrepris, plus de vingt années, entre 1846 et 1867,

[31] ***[LAGRANGE, J-L., 1788], p. V-VI.***

[32] Pour plus de détails sur la question des termes séculaires et des petits diviseurs, nous renvoyons page 33. Plusieurs scientifiques se sont illustrés sur ces problèmes dont Lagrange, et les deux mathématiciens français Pierre-Simon Laplace (1749-1827) et Siméon Denis Poisson (1781-1840).

[33] [POINCARE, H., 1893a], p. 1-3 : "Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot *convergence* […]".

[34] [DELAUNAY, C., 1846], p. 968.

[35] [DELAUNAY, C., 1846], [DELAUNAY, C., 1860], [DELAUNAY, C., 1867].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

lui furent nécessaires pour aboutir à ce résultat. Du point de vue théorique, le système de variables construit par Delaunay revêt effectivement une grande importance pour le traitement analytique de la théorie de la Lune. Le système sera repris par G.W. Hill ; Poincaré voit dans le système de Delaunay un des principaux accomplissements théoriques depuis Laplace [36] . D'un point de vue pratique cependant, l'intérêt de telles séries est tout relatif : les séries convergent très lentement et la complexité croissante des calculs les rendent difficilement praticables, malgré une précision remarquable.

Le second, Hugo Gyldén, est un astronome finlandais, directeur de l'observatoire de Stockholm. Poincaré admire les méthodes mises en place par Gyldén, les considérant comme étant parmi les meilleures [37] . Gyldén définit une méthode des "*orbites absolues"* pour calculer les mouvements des planètes. Mais les séries obtenues par celui-ci sont régulièrement sujettes à controverses. Bien qu'il ait produit beaucoup de résultats à leur sujet et introduit des fonctions horistiques [38] afin de résoudre le problème des petits diviseurs, rien n'assure en effet la convergence des séries, comme le prouve Poincaré en 1905 [39] .

L'astronome suédois Anders Lindstedt s'est engagé dans la voie de l'éclaircissement et l'approfondissement des travaux de Gyldén, en cherchant des solutions sous forme de séries trigonométriques. Les séries sont plus simples que celles de Gyldén, mais plus approximatives, tout en donnant de très bons accords avec l'observation. La résolution approchée du problème des trois corps le conduit à exprimer les coordonnées des trois corps en série trigonométrique dans lesquelles le temps n'apparaît qu'en argument des fonctions périodiques, éliminant ainsi les termes séculaires. Tout le problème réside dans la convergence des séries. Lindstedt affirme qu'il est possible de choisir des constantes d'intégration assurant la convergence, mais, une fois n'est pas coutume, Poincaré jettera le doute sur ce point.

b. La stabilité du système solaire

Eliminer les termes séculaires ?

La question de la stabilité du système solaire est le second *themata* de cette histoire, dont les rebondissements traversent tout le XXème siècle. **En ce XIX ^{ème} siècle il n'est pas, semble-t-il, imaginable de considérer le système solaire autrement que stable** [40] . En plein positivisme, la stabilité se "constate" d'elle-même. Il ne reste qu'à apporter la preuve mathématique de cette observation, c'est-à-dire à montrer la stabilité sur le problème

[36] C'est ce que Poincaré déclare dans l'introduction des Collected Works de Hill, en 1905, cité dans [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 20.

[37] [POINCARE, H., 1893a], p. v : "c'est à l'exposition de celles [les méthodes] de M. Gyldén, qui sont les plus parfaites, que je consacrerai le plus de pages.".

[38] [GYLDEN, H., 1893].

[39] [POINCARE, H., 1905c].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

formalisé mathématiquement, sur la base des équations de la Mécanique classique.

Une première partie du problème est associée à l'approche en perturbations adoptée pour la résolution des équations et l'utilisation des solutions sous forme de séries, qui font apparaître des termes séculaires. Les savants recherchent, jusqu'à Poincaré, à **éliminer ces termes séculaires, qu'ils considèrent avant tout comme des artéfacts de la méthode de perturbation et non pas comme une source d'instabilités**. Nous avons souligné les efforts des astronomes, Delaunay, Gyldén, Lindstedt, pour écarter ces éléments gênants. La définition de stabilité "à la Lagrange" correspond d'ailleurs autant à l'idée commune de stabilité qu'à l'absence de ces termes "gênants" : un système est stable lorsque les orbites des planètes restent bornées. Cette définition se différencie de la "stabilité à la Poisson", qui est à la fois un assouplissement autorisant l'éloignement d'un corps, aussi important soit-il, et un durcissement au sens où le retour du corps arbitrairement proche de sa position initiale est une condition essentielle de la stabilité.

Ensuite, Poincaré pose clairement la question de la convergence des séries de la Mécanique céleste et s'interroge sur le type mathématique de convergence utile en fonction des résultats en vue. Il argumente et construit ses résultats en rapport avec les débats sur les séries proposées par les astronomes Gyldén et Lindstedt (et souvent en réplique à leurs affirmations) [41] . Un de ses premiers résultats en la matière a été de prouver qu'une série qui converge, sans que cette convergence soit uniforme, peut malgré tout, atteindre des valeurs arbitrairement grandes. Le résultat est d'importance : il montre que, contrairement à ce que pensent les astronomes, la convergence "ordinaire" d'une série n'est pas une condition suffisante pour la stabilité et ne peut pas servir d'assise aux débats sur la stabilité du système solaire [42] .

Le problème des petits diviseurs

Enfin, ces questions de termes séculaires et de convergence sont liées au problème des petits diviseurs en Mécanique céleste. En effet, les efforts pour éliminer les termes séculaires ont mis en exergue l'éventualité de résonances : une petite force appliquée à une fréquence précise peut provoquer des oscillations d'amplitude importante. C'est le cas du problème Soleil-Jupiter-Saturne, comme l'analyse de Laplace l'a révélé [43] :

[40] Dans une période de positivisme triomphant, Jules Verne, dans son roman de 1865, De la terre à la lune, écrit une phrase remarquable qui traduit cette adhésion à l'idée d'un monde stable : "D'autres, appartenant à la race des trembleurs, manifestaient certaines craintes à l'égard de la Lune ; ils avaient entendu dire que, depuis les observations faites au temps des Califes, son mouvement de révolution s'accélérait dans une certaine proportion ; ils en déduisaient de là, fort logiquement d'ailleurs, qu'à une accélération de mouvement devait correspondre une diminution dans la distance des deux astres, et que, ce double effet se prolongeant à l'infini, la Lune finirait un jour par tomber sur la Terre. Cependant ils durent se rassurer et cesser de craindre pour les générations futures, quand on leur apprit que, suivant les calculs de Laplace, un illustre mathématicien français, cette accélération de mouvement se renferme dans des limites fort restreintes, et qu'une diminution proportionnelle ne tardera pas à lui succéder. Ainsi donc, l'équilibre du monde solaire ne pouvait être dérangé dans les siècles à venir.", [VERNE, J., 1865], p. 74-75.

[41] Pour plus de détails nous renvoyons à l'ouvrage de Barrow-Green, [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 41-43.

[42] Voir [POINCARE, H., 1885c] et [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 41.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'interaction des deux planètes induit des effets qui s'accumulent dans le temps et peuvent aboutir à une reconfiguration complète des trois astres. La résonance, en termes mathématiques, est la conséquence de l'existence d'une relation arithmétique entre les fréquences du mouvement moyen de Jupiter et Saturne. Leur rapport n_1/n_2 est d'environ *2/5*. Or le calcul des coefficients des séries (de Lindstedt notamment) implique la division par des termes du type $5n_1-2n_2$ qui peut devenir très petit (donc d'inverse très grand) : c'est ce que l'on appelle un problème de petits diviseurs.

c. George W. Hill (1838-1914) et le point de vue global en Mécanique céleste

Outre les problématiques diverses de la Mécanique céleste, les idées du mathématicien américain George W. Hill ont fortement inspiré les travaux de Poincaré en la matière. De manière plus générale, son travail sur le problème des trois corps a une grande influence dans le développement de la Mécanique céleste. L'étude des solutions périodiques en constitue la partie essentielle. Dans un premier article de 1877 [44], Hill a abordé le sujet en proposant la première solution périodique nouvelle du problème des trois corps depuis Lagrange en 1772. Le second article de 1878 étudie de manière plus systématique l'obtention de solutions périodiques.

L'approche développée par Hill est **radicalement différente des tentatives de calculs en perturbations prévalant jusque-là**. Les résultats de Hill s'appuient sur un traitement classique en perturbations mais il calcule ses développements **en partant d'une solution périodique dont il a démontré préalablement l'existence**. Le calcul est considérablement simplifié par rapport à ceux effectués habituellement car la manipulation est engagée d'emblée avec une solution du problème [45]. Les innovations de Hill ne se limitent pas à cette démarche.

"Lorsque nous cherchons quelle peut être la meilleure manière de contribuer au développement de ce sujet beaucoup étudié, nous ne pouvons manquer de noter que la grande majorité des auteurs ont eu, devant eux, comme but ultime, la construction de Tables : c'est-à-dire qu'ils ont considéré le problème du point de vue de l'astronomie pratique, plutôt que de celui des mathématiques […] on ne trouve qu'un choix restreint de variables pour exprimer la position de la Lune, et de paramètres avec lesquels exprimer les coefficients périodiques. Une fois encore, leurs objectifs les contraignant à embrasser le champ dans son ensemble, ils ont négligé de noter qu'il y avait des points mineurs d'un grand

[43] Dans le cas de la Théorie de Jupiter et de Saturne, en 1785: [LAPLACE, P.S., 1785]. Par un développement plus poussé que ses prédécesseurs dans les séries utilisées, Laplace a montré que de tels développements sont insuffisants pour expliquer les inégalités périodiques et séculaires de Jupiter et Saturne. Il affirme ensuite avoir repéré l'origine de ces inégalités : elle se trouve dans le rapport proche de 5 à 2 des périodes des moyens mouvements des deux planètes, causant les perturbations des orbites avec la bonne période (environ 900 ans).

[44] [HILL, G.W., 1877].

[45] Lagrange et ses successeurs, par exemple, partaient d'une solution du problème des deux corps, une trajectoire elliptique, qu'ils perturbaient : la trajectoire de départ n'est pas une solution du problème à trois corps, ce qui complique nettement les développements obtenus.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

intérêt pour les mathématiciens, simplement parce que leur connaissance était inutile pour l'élaboration des Tables." [46]

Hill distingue nettement les fins et les moyens des astronomes et des mathématiciens. Il propose une nouvelle voie pour l'étude de la théorie de la Lune et c'est en mathématicien qu'il raisonne. Partant d'un problème simplifié, il s'attache à l'étude du système différentiel associé. Son but n'est pas de chercher une solution exacte ou approchée du système. Il ne s'intéresse pas à une solution en particulier. Au contraire, il raisonne sur **l'ensemble des solutions**. Il essaye de **déterminer la structure de cet ensemble de solutions et propose de les classer en plusieurs groupes**. Il prend donc un point de vue **global** sur ce problème mathématique et parvient à en tirer des résultats mathématiques importants [47] , sans les calculs démesurés de ses prédécesseurs. Poincaré qui admirait cette démarche, en reprendra le principe.

Malgré leur caractère novateur, il apparaît que les articles de Hill sont peu connus avant 1886. De par son isolement dans les Etats-Unis des années 1870 très certainement et par son style très particulier – un peu obscur et difficile à comprendre – il reste un savant quelque peu ignoré. La republication de son article de 1877 dans la revue Acta Mathematica en 1886 lui offre une audience élargie et un résultat de Poincaré (à propos d'une question connexe de déterminants infinis), la même année, le fait sortir de l'oubli. Sans exagération et surtout après son mémoire de 1890, on peut même accorder à Poincaré seul le mérite d'avoir promu Hill à une position respectable. Dans l'introduction au premier volume des Méthodes Nouvelles, il résume ainsi la place qu'il accorde aux travaux de Hill : "Dans cette œuvre, malheureusement inachevée, il est permis d'apercevoir le germe de la plupart des progrès que la Science a fait depuis" [48] .

d. Les courbes définies par une équation différentielle

Les travaux de Poincaré en Mécanique céleste et mathématiques des équations différentielles sont imprégnés de tous ces débats. Son intérêt pour les équations différentielles remonte à ses tous premiers pas en recherche mathématique : sa thèse, soutenue en 1879 sous la direction de Hermite, traite de l'étude des intégrales des équations différentielles partielles au voisinage d'un point singulier [49] . D'après Hadamard, "sa Thèse marque surtout un progrès essentiel au premier point de vue [...] celui de

[46] ***"When we consider how we may best contribute to the advancement of this much-treated subject, we cannot fail to notice that the great majority of writers on it have before them, as their ultimate aim, the construction of Tables: that is they have viewed the problem from the stand-point of practical astronomy rather than of mathematics. It is on this account that we find such a restricted choice of variables to express the position of the moon, and of parameters, in terms of which to express the coëfficients of the periodic terms. Again, their object compelling them to go over the whole field, they have neglected to notice many minor points of great interest to the mathematician, simply because the knowledge of them was unnecessary for the formation of Tables.", [HILL, G.W., 1878], p. 5.***

[47] Parmi les nombreux résultats de Hill, mentionnons le cas de la "courbe de vitesse nulle" qu'il a utilisé dans sa théorie de la Lune, pour montrer un résultat d'ordre qualitatif : la Lune, initialement proche de la Terre, ne peut pas s'échapper du voisinage de la Terre. Pour des détails mathématiques et techniques, voir [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 22-28.

[48] [POINCARE, H., 1892a], p. 3.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

l'étude locale des solutions" [50] .

Ce ne sont pourtant là que ses débuts et la décennie suivante va montrer toute la virtuosité de Poincaré en matière d'équations différentielles. La suite d'articles intitulée "Sur les courbes définies par les équations différentielles" constitue sa première publication vraiment essentielle [51] . La série de mémoires est composée en deux temps : deux mémoires en 1881-82 [52] et deux autres en 1885-86 [53] . Ils contiennent les éléments de base de sa **théorie qualitative des équations différentielles** et correspondent aux mémoires cités par Minorsky [54] . L'idée présidant à cette démarche est de considérer, non pas les fonctions solutions des équations, mais les **courbes représentant les solutions**. Plusieurs paramètres montrent l'originalité du choix de Poincaré.

Pourquoi du qualitatif ?

Tout d'abord, en parallèle à la Mécanique céleste où les développements en série constituent une perspective dominante, les travaux sur les équations différentielles dans les années 1870 encore, se partagent entre les calculs explicites de solutions et l'étude approfondie du cas des équations linéaires. La voie suggérée par Poincaré témoigne de son grand doute dans la pertinence des méthodes analytiques (qu'il appellera "procédés anciens" en 1884 [55]) à produire des résultats généraux et globaux sur les équations différentielles et sa prise de conscience qu'il faut les dépasser.

Deuxièmement, seuls quelques résultats du mathématicien français Charles Sturm (1803-1855), dans le cadre des équations différentielles du second ordre, font figure d'antécédent à l'approche de Poincaré. Sturm a en effet proposé, en 1836, des théorèmes relatifs au comportement des solutions de ces équations, obtenus sans intégration explicite des équations (c'est-à-dire sans calcul des fonctions solutions) [56] . Poincaré s'inscrit dans une perspective à la fois semblable et parallèle [57] . Il ne nous paraît pas pertinent d'insister davantage sur ce point car il existe tout de même un énorme décalage, mathématique, entre les travaux de Sturm et de Poincaré. En un mot, les études et les résultats de Poincaré, analogues dans l'"esprit" à ceux de Sturm, dépassent en ampleur

[49] [POINCARE, H., 1879]. Selon Barrow-Green, ce travail s'inscrit à la fois dans la perspective des travaux d'Augustin Louis Cauchy (1789-1857) et Sofia Kovalevskaya (1850-1891) pour l'étude des solutions d'équations différentielles au voisinage des points ordinaires et dans celle de Charles Briot (1817-1882) et Jean-Claude Bouquet (1819-1885) (puis plus tard Lazarus Fuchs (1833-1902)) en matière de solution d'équation différentielle ordinaire au voisinage d'un point singulier.

[50] [HADAMARD, 1912], p. 1954-5, voir également [BARROW-GREEN, 1997], p. 44-45.

[51] L'article de C. Gilain [GILAIN, C., 1991] sert de base à notre présentation de ces mémoires.

[52] [POINCARE, H., 1881] et [POINCARE, H., 1882a].

[53] [POINCARE, H., 1885b] et [POINCARE, H., 1886b].

[54] Voir le paragraphe détaillant l'intervention de Minorsky en 1954, page 20.

[55] [GILAIN, C., 1991], p. 223.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

tout ce qui a pu se faire antérieurement [58] .

Enfin, les motivations exactes de Poincaré pour son approche qualitative sont explicitées en introduction à son premier mémoire, de 1881. Pour expliquer sa position, il développe un parallèle avec d'autres chapitres classiques des mathématiques :

"[...] pour étudier une équation algébrique, on commence par chercher, à l'aide du théorème de Sturm, quel est le nombre des racines réelles, c'est la partie qualitative, puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation. De même, pour étudier une courbe algébrique, on commence par construire cette courbe, comme on dit dans les cours de Mathématiques spéciales, c'est-à-dire qu'on cherche quelles sont les branches de courbes fermées, les branches infinies, etc. Après cette étude qualitative de la courbe, on peut en déterminer exactement un certain nombre de points." [59]

La partie qualitative de son travail sur les équations différentielles consiste à "c*onstruire les courbes définies par des équations différentielles*" [60] et elle s'inscrit dans la perspective d'une étude complète des équations, incluant une approche quantitative. Par ailleurs, la question des trois corps et de la stabilité du système solaire est, déjà en 1881, très importante dans l'esprit de Poincaré :

"[…] cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons pour exemple le problème des trois corps : ne peut-on pas

[56] Sturm résume ainsi son point de vue sur la question : " On ne sait les intégrer que dans un très petit nombre de cas particuliers hors desquels on ne peut pas même en obtenir une intégrale première ; et lors même qu'on possède l'expression de la fonction qui vérifie une telle équation, soit sous forme finie, soit en série, soit en intégrales définies ou indéfinies, il est le plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction […]. Cependant, la connaissance de ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques et dynamiques auxquelles se rapportent les équations différentielles dont il s'agit […] Or on peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu'on ait besoin de leur intégration.", [STURM, C., 1836].

[57] On peut mentionner ici le fait que Sturm a été professeur de mathématiques à l'Ecole Polytechnique. Il est décédé en 1855, bien avant que Poincaré n'entre à l'Ecole Polytechnique (Poincaré a suivi les cours d'analyse de Hermite) ; aucun lien direct ne peut être mis en évidence. En revanche, les ouvrages de Sturm, notamment le Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique (publication posthume, en 1857, rééditée plusieurs fois) sont des classiques et sont certainement connus de Poincaré. Voir par exemple la seconde édition, [STURM, C., 1863] et [STURM, C., 1864].

[58] Nous partageons les doutes de C. Gilain à propos des liens entre Sturm et Poincaré : "Nous ne savons pas si Poincaré s'est inspiré de ce mémoire de Sturm pour développer sa propre démarche qualitative dans le contexte spécifique qui était le sien. Si d'ailleurs leurs problématiques sont de même type, il convient de noter les différences importantes existant entre les deux théories, qui ne portent pas sur les mêmes classes d'équations différentielles, et ne développent ni les mêmes questions, ni les mêmes méthodes mathématiques", [GILAIN, C., 1991], p. 225.

[59] Ibid., p. 4. Poincaré fait référence à Sturm, mais le théorème en question ne concerne pas les équations différentielles ; comme l'indique le texte, il s'agit d'un théorème célèbre sur les racines des équations algébriques.

[60] Ibid., p. 4. En italique dans le texte.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux des corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ?" [61]

Plus tard, en 1884, Poincaré soulignera que ces problèmes justifient en grande partie l'intérêt accordé au point de vue qualitatif :

"On a dû voir en lisant les lignes qui précèdent que les questions de stabilité, analogues à celles que l'on rencontre en Astronomie, étaient ma préoccupation constante. C'est qu'en effet j'attendais de l'application des principes que je viens d'exposer la solution de cette question si intéressante de la stabilité du système solaire [...]." [62]

Les deux mémoires de 1881-82

Quels sont alors les premiers résultats de Poincaré, obtenus grâce à cette démarche ? La première partie des mémoires constitue une **étude qualitative, locale, des équations différentielles du premier ordre**. Elle contient la classification des points singuliers : Nœud, Col, Foyer et Centre.

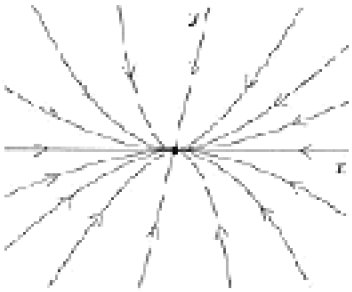
Tout d'abord, l'étude réalisée par Poincaré, comme dans les mémoires suivants, se fait dans le domaine des nombres réels (ses prédécesseurs, comme Briot et Bouquet, travaillaient avec des nombres complexes). L'analyse locale au voisinage des points singuliers le conduit à la classification devenue classique en 4 types de comportements possibles. Dans ce cadre il obtient sa formule liant le nombre de points singuliers : $N+F=C+2$.

[61] ***Ibid., p. 4.***

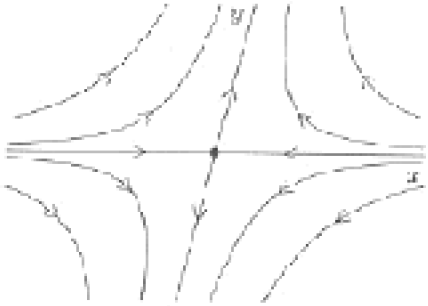
[62] ***Dans [GILAIN, C., 1991], p. 221. Cette citation de Poincaré de 1884 fait suite à un paragraphe concernant les courbes définies par les équations différentielles.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

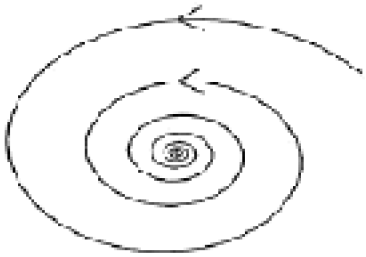
Points singuliers



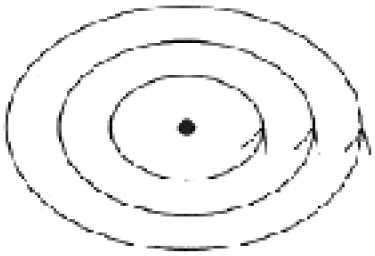
Nœud : une infinité de courbes intégrales passent par le point



Col : il passe deux courbes intégrales (et deux seulement)



Foyer : les courbes intégrales s'enroulent en spirale



Centre : au voisinage du point, les courbes intégrales sont des cycles fermés

Poincaré s'attache ensuite à l'analyse des courbes hors du voisinage des points singuliers, passant ainsi d'un point de vue local, à une approche globale. Pour y parvenir il introduit les notions d'arc ou **cycles sans contact** [63] et **cycles limites** [64] .

Poincaré utilise les arcs sans contact par l'intermédiaire des impacts de la courbe intégrale avec cet arc :

[63] Poincaré introduit des courbes algébriques et étudie leurs intersections avec les solutions des équations différentielles. Les arcs sans contact sont des courbes algébriques qui ne sont tangentes à aucune courbe solution.

[64] Les cycles limites sont des courbes solutions, sans point singulier, qui sont approchées asymptotiquement par d'autres courbes solutions : ces solutions s'enroulent en spirale autour ou à l'intérieur du cycle, en tendant progressivement à se confondre avec le cycle.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

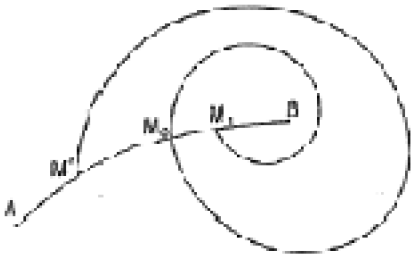


Figure tirée de [POINCARE, H., 1882a], p. 45

Sur l'arc *AB*, le point M_1 est le conséquent de M_0 et *M'* l'antécédent de M_0.

Il obtient l'un des résultats les plus importants à propos du comportement des solutions : une solution est un cycle ou bien tend vers un cycle limite (à l'exception des courbes finissant en un point singulier) [65].

Enfin, pour montrer l'existence effective de cycles limites il introduit une courbe algébrique qui coupe la solution une infinité de fois. C'est en étudiant les conséquents d'un point de la courbe sur l'arc qu'il déduit l'existence de cycles limites (correspondant à un point qui est son propre conséquent).

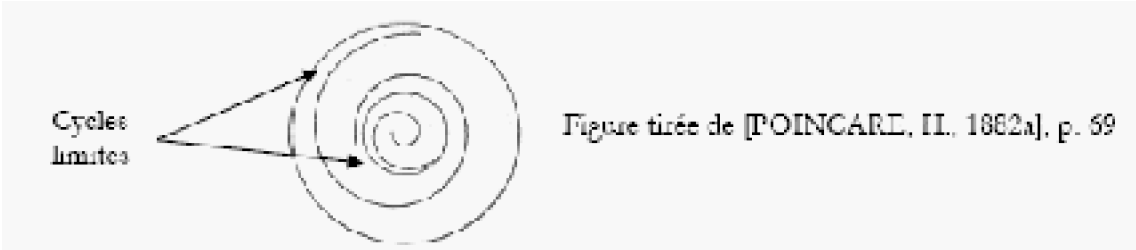


Figure tirée de [POINCARE, H., 1882a], p. 59

Ces résultats illustrent le principe du travail qualitatif de Poincaré : aucune intégration d'équation différentielle pour un résultat géométrique, qualitatif, valable pour toute une classe d'équations. Le résultat est du qualitatif local (étude des points singuliers) aussi bien que global (étude des cycles limites). Cette démarche aboutit à l'établissement d'une "carte" de l'équation différentielle avec les balises suivantes [66] : les points singuliers, les cycles limites et les cycles sans contact.

Les deux mémoires de 1885-86

Avec un premier chapitre intitulé "Stabilité et instabilité", en 1885 Poincaré amorce son

[65] Ce résultat, connu sous le nom de **Théorème de Poincaré -Bendixon**, à la suite du travail complémentaire réalisé par le mathématicien suédois Ivar Bendixon (1861-1935) en 1901, est un résultat majeur de la théorie qualitative des équations différentielles en dimension deux : [BENDIXON, I., 1901]. Le résultat obtenu par Bendixon est en fait plus général et plus rigoureux que celui de Poincaré. Voir également [GILAIN, C., 1991], p. 228.

[66] "Théorème XVIII. - *Il existe toujours un système topographique formé de cycles sans contact, de polycycles sans contact et de cycles limites. Ce système topographique sillonne toute la surface de la sphère. Les fonds et les sommets sont les nœuds et les foyers de l'équation donnée. Les cols sont les cols de l'équation donnée.* La connaissance de ce système topographique permet de discuter complètement les formes affectées par les courbes que définit l'équation différentielle donnée.", [POINCARE, H., 1882], p. 65 (en italique dans le texte). Comme le fait remarquer Gilain, l'intégration des équations du premier ordre, de degré un n'est pas complètement résolue avec le théorème, mais réduite. En général il n'est possible de déterminer le système topographique qu'en termes finis. [GILAIN, C., 1991], p. 230.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

mémoire avec la question de la stabilité. Cette première discussion extensive de la stabilité se fait en rapport avec la Mécanique céleste. De manière plus générale, dans ce troisième volume Poincaré cherche à exprimer en terme de dynamique (c'est-à-dire sur les équations issues de la Mécanique) les résultats acquis précédemment.

"On n'a pu lire les deux premières Parties de ce mémoire sans être frappé de la ressemblance que présentent les diverses questions qui y sont traitées avec le grand problème astronomique de la stabilité du système solaire. Ce dernier problème est bien entendu beaucoup plus compliqué, puisque les équations différentielles du mouvement des corps célestes sont d'ordre très élevé." [67]

Poincaré donne la définition de stabilité suivante : **l'orbite d'un point est stable si elle repasse infiniment souvent, arbitrairement près de la situation initiale**. Dans le mémoire de 1890 et dans les Méthodes Nouvelles il qualifiera cette stabilité de "stabilité à la Poisson" [68] . En ce sens, **dans les équations différentielles du premier ordre, l'instabilité est la règle, la stabilité l'exception**. La stabilité correspond uniquement aux cycles. **Dans le cas plus général, la règle change**.

Pour les équations différentielles du premier ordre, mais de degré plus élevé, du type

$$F(x, y, \frac{dx}{dy}) = 0$$

Poincaré prescrit une représentation géométrique sur la base de la surface *S* : *F(x,y,z)=0*. En introduisant le genre, *p* [69] , de cette surface il généralise la formule donnant le nombre de points singuliers : *N+F-C=2-2p*.

Selon cette relation l'absence de singularité est assurée seulement pour le genre *p*=1, c'est-à-dire du type du tore. Poincaré cherche à préciser ce cas particulier et en tire des conclusions instructives. Sur le tore, il considère les équations

$$\frac{d\omega}{dt} = A \qquad \frac{d\varphi}{dt} = B$$

où *A* et *B* sont des fonctions périodiques continues de *ω* et *φ*, qui ne s'annulent pas simultanément.

• Dans le cas particulier *A=a*, *B=b* (*a* et *b* constants), il obtient une situation sans cycle limite et dans laquelle l'orbite d'un point est stable.

• Avec le méridien (cycle sans contact) *φ* = 0, Poincaré étudie la suite des points issus de l'itération d'un point M_0 , point situé sur le méridien au temps *t*=0 : l'ensemble de

[67] ***[POINCARE, H., 1885b], p. 90.***

[68] [POINCARE, H., 1890] : il fait allusion à la stabilité dans le paragraphe consacré à l'usage des invariants intégraux (Chapitre 2, paragraphe 8). Dans [POINCARE, H., 1899a], chapitre XXVI, "Stabilité à la Poisson".

[69] Une surface est dite de genre *p*, si il est possible de tracer au plus 2*p* courbes fermées sur la surface sans diviser la surface en plus de deux régions.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

tous les itérés M_i est noté *P*. En utilisant la notion d'ensemble dérivé [70] de Cantor, il note *P'* le dérivé de *P* et parvient à montrer que : soit tout point de *P* est dans *P'* (l'orbite est alors stable), soit aucun point de *P* n'est dans *P'* (orbite instable). L'instabilité constatée sur le premier degré n'est plus la règle ici.

• Il étudie également l'ordre et la répartition des itérés sur le méridien, en remarquant qu'ils dépendent d'un nombre irrationnel (aujourd'hui appelé nombre de rotation).

Sur un exemple apparemment simple, un mouvement sur un tore, Poincaré dévoile toute la complexité du problème de stabilité et achoppe plus fondamentalement sur le possible **mélange des comportements stables et instables dans une même équation différentielle**.

Plus précisément, un problème apparaît lorsque l'ensemble *P'* est le même pour toutes les orbites d'une même équation différentielle. Poincaré ne parvient pas à déterminer dans quelle mesure il est possible que l'ensemble *P* soit contenu dans *P'* pour certaines orbites et qu'aucun point de *P* n'appartienne à *P'*, pour d'autres.

Signe de la référence constante à la Mécanique céleste, Poincaré souligne les rapports de ces problèmes avec le problème des trois corps et les séries de Lindstedt pour en signifier l'importance :

"Il est impossible de ne pas être frappé de l'analogie de ce procédé d'approximation avec la méthode de M. Lindstedt [71] en Mécanique céleste, et de ne pas comprendre que la question de la convergence du procédé que je viens d'exposer est intimement liée à celle de la convergence des séries employées par le savant astronome de Dorpat. Mais le problème que nous traitons ici est évidemment plus simple que les questions analogues de la Mécanique céleste, et, si les difficultés sont de même nature, elles sont moins nombreuses et sans doute plus aisées à surmonter." [72]

L'enjeu est capital et son ampleur véritable apparaîtra lorsque nous aurons pris la mesure de la place des séries de Lindstedt dans les travaux de Poincaré et dans son analyse du problème des trois corps.

Dans la suite des mémoires, Poincaré examine le cas des équations avec des dérivées d'ordres plus élevés, d'ordre deux surtout, grâce à une représentation des courbes dans l'espace. Les résultats précédents lui servent de guide dans sa recherche d'une classification des comportements dans le voisinage des points singuliers. Le but est toujours le même, obtenir des informations qualitatives sur les solutions, mais le grand nombre de types de singularités complique la tâche.

Afin d'aller plus avant dans le problème Poincaré choisit de construire et de recourir aux deux "outils mathématiques" fondamentaux dans l'étude qualitative des équations différentielles : les **sections transverses** (appelées aussi sections de Poincaré, depuis, par ses successeurs) et les **solutions périodiques**. Son idée est la suivante : dans le cas

[70] L'ensemble dérivé d'un ensemble *W* est l'ensemble des points ayant, dans leur voisinage, une infinité de point de *W*.

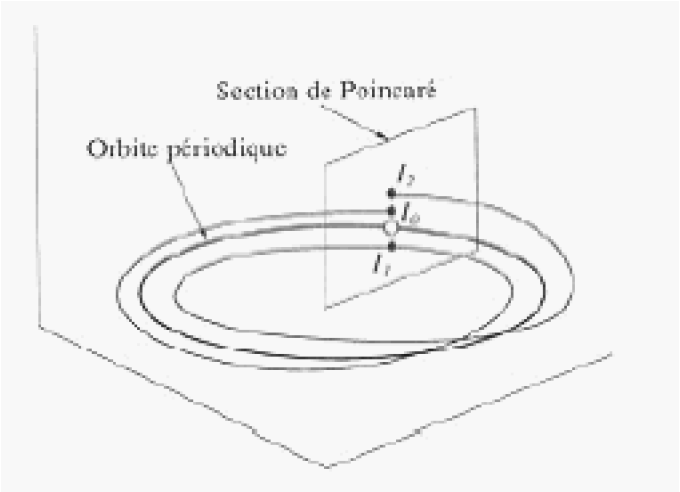
[71] ***Cf. p. 31.***

[72] ***[POINCARE, H., 1885b], p. 157. Voir [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 36-7.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

des équations différentielles du second ordre, les trajectoires périodiques jouent le rôle pris par les points singuliers dans les équations du premier ordre [73] . Etudier qualitativement le comportement revient donc à décrire le voisinage des orbites périodiques.

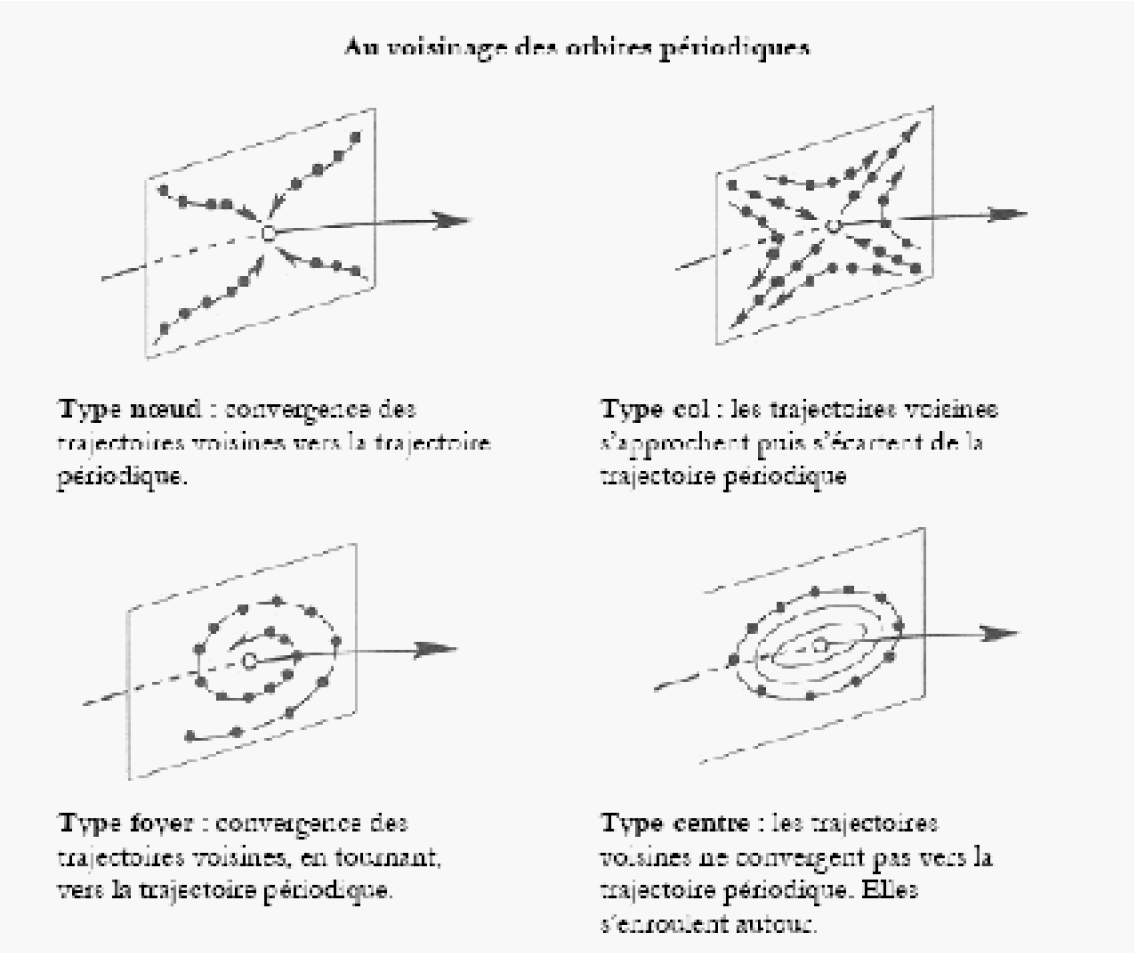
Pour mener à bien cette analyse, il se rend compte que l'utilisation de sections à deux dimensions facilite grandement la tâche. La notion de section transverse s'inspire des cycles sans contact du premier mémoire : le comportement du flot de l'équation est étudié par l'intermédiaire des impacts sur la section, de la même manière que les impacts sur une courbe sans contact lui ont servi à étudier les cycles limites. Le mouvement dans un espace à trois dimensions devient une transformation ponctuelle dans le plan.



L'étude des valeurs propres de la transformation approchée (linéarisée) au voisinage d'une orbite périodique lui fournit quatre comportements possibles, parmi lesquels il retrouve le nœud, le foyer, le col et un quatrième cas plus complexe, qui n'est pas toujours un centre.

[73] L'idée d'utiliser des solutions périodiques lui est venue plus tôt, d'un mémoire de 1884 où il a déjà élargi les résultats concernant les orbites périodiques dans le problème des trois corps : à partir des résultats de G.W. Hill et grâce à l'utilisation de la notion d'index de Kronecker il est parvenu à établir l'existence d'une infinité de solutions périodiques. [POINCARE, H., 1884].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.



La quatrième situation est assez subtile. Elle dépend de propriétés des séries trigonométriques solutions de l'équation différentielle. Si parmi les termes constants de ces séries aucun n'est nul, alors Poincaré montre qu'on retombe sur le premier cas, avec une instabilité du mouvement (selon sa définition). L'étude du cas opposé, qui se présente dans les équations générales de la dynamique, est liée à une théorie qu'il développera par la suite : les invariants intégraux. Plus précisément, il prouve que cette situation d'annulation des constantes se présente lorsqu'il n'existe pas de surface fermée sans contact pour l'équation, puis il montre que l'existence d'un certain invariant intégral est suffisante pour satisfaire cette dernière condition.

Le problème de la stabilité en 1886

En 1886, le problème de la stabilité a évolué, sans pour autant être résolu. De l'étude du quatrième comportement possible au voisinage d'une orbite périodique, Poincaré dégage une condition nécessaire pour assurer la stabilité, grâce aux invariants intégraux. Il

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

n'entreprend pas encore de construire une théorie pour ces invariants, mais il en a déjà reconnu l'importance dans un autre article de 1886 [74] : **si les séries de Lindstedt permettent d'évacuer les termes séculaires** [75] **, c'est grâce à la présence d'un invariant intégral** (ce qui lui permet d'ailleurs d'élargir le cadre de validité de la méthode de Lindstedt). Dans son mémoire de 1890, Poincaré décidera d'établir une théorie de ces invariants intégraux, car ils revêtent une importance considérable dans la question de la stabilité.

La conclusion du mémoire de 1886 laisse comprendre que Poincaré a également ciblé les deux problèmes déterminants en Mécanique céleste, la question des petits diviseurs et la convergence uniforme des séries :

"[...] on comprendra sans peine à quel point les difficultés que l'on rencontre en Mécanique céleste, par suite des petits diviseurs et de la quasi-commensurabilité des moyens mouvements, tiennent à la nature même des choses et ne peuvent être tournées. Il est extrêmement probable qu'on les retrouve, quelle que soit la méthode que l'on utilise." [76]

L'Analysis Situs

Déjà en 1886 la théorie de Poincaré est extrêmement novatrice dans ses aspects qualitatifs et dans ses résultats. Dans cette approche, il faut souligner le renfort apporté par une théorie mathématique particulière : l'*Analysis Situs* ou géométrie de situation, ou encore topologie pour utiliser un terme plus contemporain. Comme le rappelle C. Gilain [77] , la géométrisation dans l'étude globale des solutions des équations différentielles n'est pas qu'une simple illustration géométrique de raisonnements analytiques. L'introduction de la géométrie au niveau des objets et de leurs relations a permis de dégager des propriétés essentielles, topologiques, des objets en question. Le XIXème siècle a été marqué par le recours massif aux théories analytiques en géométrie, mais il faut bien mesurer le rôle réciproque de la géométrie, de l'*Analysis Situs* dans le développement des théories analytiques. Poincaré en donne une illustration exemplaire.

Plusieurs ingrédients de l'*Analysis Situs* ont été mis en avant. L'indice d'une courbe, le genre p de la surface géométrique intervenant dans les raisonnements sur les points singuliers et déterminant la relation $N+F-C=2-2p$, font partie de la panoplie de l'*Analysis Situs*. Plus généralement, les développements de Poincaré reposent sur une intuition géométrique de la situation, analysée grâce à cette théorie. Le passage du local au global notamment, s'appuie sur une intelligence de la surface géométrique à la base du travail, sans laquelle il est impossible de réaliser le saut.

La théorie qualitative des équations différentielles de Poincaré s'est donc construite

[74] [POINCARE, H., 1886a].

[75] Cf. p.32.

[76] [POINCARE, H., 1886b], p. 222.

[77] [GILAIN, C., 1991], p. 236-237. Voir aussi [DAHAN, A., CHABERT, K., CHEMLA, K., 1992], p. 287-288.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

en rapport avec plusieurs notions de mathématiques, comme l'*Analysis Situs*, et en relation avec les interrogations de la Mécanique céleste. Elle prend une dimension nouvelle avec le concours du roi Oscar II, pour lequel Poincaré produit des résultats concernant spécifiquement les deux "grands" problèmes qu'il a déjà abordés : celui des trois corps et celui de la stabilité. Il inaugure l'étude des équations différentielles dites conservatives, sur la base de son vaste ensemble de mathématiques qualitatives.

1.2. Le concours Oscar II et le mémoire de Poincaré

Le mémoire publié en 1890 suite à son triomphe dans le concours Oscar II constitue le pivot des travaux de Poincaré (ceux qui nous occupent tout du moins). Un certain nombre de résultats sont "attendus", au sens où ils s'inscrivent dans la longue histoire des problèmes de la Mécanique céleste. D'autres le sont moins, parce qu'ils sont contraires à l'opinion répandue ou tout simplement surprenants. Ils révèlent en tout cas l'incomparable maîtrise de Poincaré sur le sujet. Cependant, le plus inattendu dans cette histoire est le fruit d'une révision du mémoire couronné, suite à la découverte d'une petite erreur (passée d'abord inaperçue) : Poincaré est alors conduit à dévoiler une complexité insoupçonnée dans le problème des trois corps. Rappelons tout d'abord le contexte dans lequel est lancé le concours.

a. Le concours

A l'occasion de son 60ème anniversaire, le 21 janvier 1889, le roi Oscar II de Suède et de Norvège souhaite voir décerner un prix (assorti d'une somme d'argent) récompensant une œuvre mathématique importante. Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) est le grand organisateur du concours. Il est chargé du recrutement d'une commission, de la composition d'un jury et du choix des sujets. Après consultations, quatre sujets sont proposés [78] :

• le problème des *n* corps et la stabilité du système solaire (Weierstrass, membre de la commission, est l'instigateur de ce thème qui l'intéressait particulièrement),

• une analyse détaillée de la théorie des équations différentielles de Fuchs,

• la recherche sur les équations différentielles non linéaires, du premier ordre, étudiées par Briot et Bouquet,

• l'étude des relations algébriques entre les fonctions fuchsiennes de Poincaré qui ont le même groupe d'automorphisme.

A priori, Poincaré peut être intéressé et travailler sur n'importe lequel de ces sujets. Le premier thème reste certainement le plus difficile à traiter et c'est celui que Poincaré a choisi. Il s'engage ainsi dans la recherche d'une démonstration, mathématique, de la stabilité du système solaire. Le concours Oscar II est remporté, haut la main, par Poincaré. Son mémoire est clairement au-dessus du lot, la commission considérant qu'il

[78] [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 59. Les trois premiers sujets sont en fait proposés par Weiestrass ; le dernier est dû à Hermite. Mittag-Leffler, Weierstrass et Hermite sont les trois membres de la commission d'organisation.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

est "l'œuvre profonde et originale d'un génie mathématique dont la place est marquée parmi les grands géomètres du siècle" [79] .

Cependant, quelques mois après la remise du prix une erreur dans le mémoire victorieux est découverte. L'erreur subsistant dans le manuscrit de Poincaré est relevée par un mathématicien suédois, collaborateur de Mittag-Leffler à la revue Acta Mathematica, Edward Phrägmen. Fin novembre 1889, la première version du mémoire sort de l'imprimerie, prête à être diffusée. Ce n'est qu'à la fin de l'année suivante, 1890, que le mémoire paraît, dans une version remaniée par Poincaré [80] . L'épisode a été raconté d'un bout à l'autre par J. Barrow-Green, dont nous tirons les informations essentielles.

b. L'attendu et l'inattendu

Dans le prolongement des méthodes de Poincaré

De manière assez attendue, la démarche de Poincaré s'inscrit dans le prolongement de ses études des équations différentielles et permet de renouveler l'approche des problèmes de la Mécanique céleste. Le troisième chapitre de la version corrigée du mémoire constitue le cœur du mémoire, par les techniques et les résultats qui sont exposés : la "théorie des solutions périodiques". Inspiré par le point de vue de G.W. Hill, Poincaré apporte un cortège de résultats, dont les premiers concernent l'existence de telles solutions.

Deux notions sont essentielles et directement reliées à la question de la stabilité. Les **exposants caractéristiques**, qui lui permettent de préciser la stabilité des solutions périodiques, et les **solutions asymptotiques**, définies comme étant celles qui **approchent asymptotiquement les solutions périodiques instables**. Poincaré parvient à démontrer l'existence de cette toute nouvelle classe de solutions et applique ces résultats dans le cas d'un système conservatif autonome.

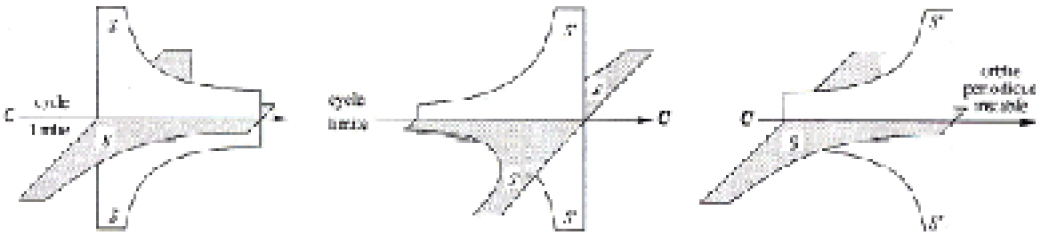
Dans la seconde partie du mémoire, Poincaré détaille l'utilisation de ses nombreux outils mathématiques sur le problème restreint des trois corps. Pour ce système conservatif à deux degrés de liberté, Poincaré établit tout d'abord une **représentation géométrique**, reposant sur un système d'équations à trois variables seulement [81] . Cette vision géométrique du problème des trois corps est une des originalités du travail de Poincaré [82] . Il cherche ensuite à décrire le comportement des solutions asymptotiques. Dans la représentation géométrique, l'ensemble de ces solutions forme deux surfaces asymptotiques.

[79] [POINCARE, H., 1956], tome XI, p. 286-289 (Rapport de la commission du Prix Oscar II).

[80] Suite à cette affaire, Poincaré remboursera les frais d'impression de la première version, à hauteur de 3500 couronnes (le prix attribuait 2500 couronnes au vainqueur !). [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 67-8.

[81] Un tel système Hamiltonien à deux degrés de liberté correspond *a priori* à un système à 4 variables.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.



S et S' sont les deux surfaces asymptotiques Orbite doublement asymptotique

En trois étapes [83] , Poincaré détermine les équations exactes des surfaces, sous forme de série. La première étape dresse une première approximation (ordre 1 dans les séries), l'objectif de la seconde étape est de fournir une approximation à un ordre quelconque, la dernière étape est le calcul de la solution exacte.

Une conclusion de 1889

Poincaré, dans le premier mémoire qu'il a rendu, concluait principalement qu'il était parvenu à une classification en trois types des solutions du problème restreint des trois corps: les solutions périodiques (trajectoires fermées de l'espace des phases), les trajectoires asymptotiques et les trajectoires générales ne rentrant pas dans ce cadre. Il commente ainsi le résultat, difficile et assez inattendu, qu'il pense avoir démontré : les trajectoires asymptotiques tendant vers une trajectoire fermée instable sont les mêmes que celles qui s'échappent de cette trajectoire instable, les surfaces asymptotiques sont fermées. En fait, après correction de son erreur, Poincaré est conduit à des conclusions encore plus inattendues, remettant en cause celles de 1889.

Séries de Lindstedt et intégrale analytique

Cette conclusion fait partie d'une liste des résultats positifs et négatifs, sorte de récapitulatif général au mémoire. Le résumé ne subsiste plus dans la seconde version. Dans la catégorie des points négatifs viennent la divergence des séries de Lindstedt et la non-existence d'intégrales uniformes, reprises dans la seconde version du mémoire [84] .

[82] La géométrie rend les résultats plus difficiles d'accès à ceux qui ne sont pas familiers avec ces images (c'est-à-dire beaucoup de savants contemporains de Poincaré et surtout les astronomes). Cependant Poincaré fait l'effort d'expliciter sa démarche, en illustrant son point de vue sur d'autres exemples de dynamique plus simple : un point mobile pesant se mouvant sur une surface parfaitement polie et dans le voisinage d'une position d'équilibre stable ainsi qu'un système apparenté à celui de Duffing. Le nom de Duffing sera associé à l'équation en question seulement quelques années plus tard, après les travaux de Duffing recueillis dans [DUFFING, G., 1918]. Le système utilisé par Poincaré est en fait mathématiquement le même et il est issu de considérations de la mécanique céleste. [POINCARE, H., 1890], p. 404-407.

[83] Pour plus de détails sur cet épisode, nous renvoyons à [ANDERSSON, K.G., 1994], [BARROW-GREEN, J., 1997].

[84] Pour conclure la version corrigée, il écrit un chapitre "Résultats divers" où il rassemble une série de résultats qu'il juge être les plus importants du mémoire.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

La question de la divergence des séries de Lindstedt avait été traitée de manière trop expéditive et approximative au goût de Weierstrass, dans le premier mémoire. Suite à plusieurs demandes de celui-ci et de Mittag-Leffler, Poincaré s'engage dans une démonstration rigoureuse de la divergence [85], pour arriver à la conclusion :

"dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons étudié et par conséquent aussi dans le cas général, les séries de M. Lindstedt ne convergent pas uniformément pour toutes les valeurs des constantes arbitraires d'intégration qu'elles contiennent." [86]

Weierstrass n'est pas tout à fait apaisé, puisque la démonstration n'est pas complète, Poincaré ne détaillant pas les conditions d'une convergence possible ni la proportion de séries divergentes. Pour Poincaré, il est peu probable que les séries convergent. Nous aurons l'occasion de voir que la suite de l'histoire ne donne pas raison à Poincaré sur ce point [87].

Quant à la non-existence d'intégrales uniformes, c'est un des résultats les plus remarquables et les plus célèbres du mémoire, qui a rapidement débordé son cadre initial. En reprenant sa démonstration du premier mémoire, Poincaré prouve qu'**il n'y a pas de nouvelle intégrale analytique dans le problème restreint des trois corps**. Il montre ainsi qu'il est **illusoire de chercher une solution exacte du problème des trois corps** et ruine l'espoir qui avait animé les recherches jusqu'à présent. **Son approche qualitative est d'autant plus légitime**. D'une certaine manière ce résultat s'apparente à la démonstration de l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations algébriques de degré supérieur à *5*.

Stabilité et théorème de récurrence

Enfin, dans la perspective de répondre aux questions explicitées dans l'énoncé du concours, Poincaré approfondit la question de la stabilité. La notion de stabilité qu'il utilise est toujours celle dite "à la Poisson" et son résultat essentiel est celui connu aujourd'hui sous le nom de "**théorème de récurrence**" [88]. En substance Poincaré affirme que **dans**

[85] Nous avons vu qu'il fait le lien entre la convergence de telles séries et l'existence d'un invariant intégral (en 1886, voir p. 45), qui est une condition naturellement remplie dans le cas d'un système Hamiltonien (Le volume de l'espace des phases est l'invariant naturel, automatique, dans ce cas). Dans le cas d'un système non-Hamiltonien à deux degrés de liberté en revanche, Poincaré est convaincu de la divergence des séries mais ne parvient pas à en donner une démonstration concluante.

[86] [POINCARE, H., 1890], p. 470 (en italique dans le texte).

[87] En anticipant quelque peu, il s'agit là du célèbre résultat de Kolmogorov-Arnold-Moser (théorème KAM), datant de 1954-63 (cf. p. 486).

[88] Les démonstrations constituent une partie essentielle du paragraphe "usage des invariants intégraux" dans [POINCARE, H., 1890], p. 313-332. Poincaré énonce le théorème de base de la manière suivante : "Supposons que le point P reste à distance finie, et que le volume
soit un invariant intégral ; si l'on considère une région r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois". Ensuite, il élargi le système d'hypothèses (invariant intégral plus général, sans restriction de dimension).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

un système à trois degrés de liberté pour le lequel le volume (de l'espace des phases) est un invariant, il existe un nombre infini de solutions stables. Dans un corollaire ajouté dans la seconde version du mémoire, Poincaré donne une forme "probabiliste" au théorème : le système revient arbitrairement près de la situation initiale, infiniment souvent, sauf pour certaines situations initiales exceptionnelles [89] . De manière remarquable, Poincaré fait appel à des concepts probabilistes pour préciser la dynamique du système, d'autant que les outils plus adaptés à ces conceptions (i.e. la théorie de la mesure) ne sont pas connus [90] . Dans la lignée des résultats obtenus en 1886, Poincaré a développé une théorie générale des invariants intégraux, et confirmé leur pertinence vis-à-vis des problèmes de stabilité.

Le second chapitre du mémoire corrigé traite de la "Théorie des invariants intégraux" sur la base du concept d'invariant intégral imaginé en 1886[51]. Pour une équation

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i$$

où les X_i sont des fonctions des x_i, un invariant intégral est une expression de la forme

$$\int Y_i dx_i$$

qui garde une valeur constante dans le temps (les Y_i sont des fonctions des x_i et l'intégration s'effectue sur un arc de courbe). Cette définition s'étend à des intégrales doubles et triples en fonction des régions d'intégration.

Poincaré choisit d'illustrer cette notion sur l'exemple d'un fluide incompressible qui serait décrit par un système d'équation du type :

$$\frac{dx}{dt} = X \qquad \frac{dy}{dt} = Y \qquad \frac{dz}{dt} = Z$$

Conservé par le système, le volume $\iiint dxdydz$, est un invariant intégral[52].

c. Une erreur dans le mémoire de 1889

Les conclusions de Poincaré en 1889, attendues et inattendues, répondent aux grandes interrogations de la Mécanique céleste soumises au concours. Cependant, les corrections apportées suites à l'erreur repérée par Phrägmen aboutissent aux découvertes les plus surprenantes du mémoire, même pour Poincaré.

L'inattendu pour Poincaré aussi

Poincaré est conscient à la fin de 1889 que le mémoire présenté au concours, sorti victorieux, doit subir un profond remaniement. Il l'exprime ainsi à Mittag-Leffler :

[89] Par exceptionnel il faut comprendre de probabilité nulle au sens du calcul des probabilités, c'est-à-dire improbable mais pas impossible.

[90] La notion de mesure et la théorie de l'intégration associée sont introduites par Lebesgue en 1902 seulement. [LEBESGUE, H., 1902].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"[...] les conséquences de cette erreur sont plus graves que je ne l'avais cru d'abord. Il n'est pas vrai que les surfaces asymptotiques soient fermées, au moins dans le sens où je l'entendais d'abord. Ce qui est vrai, c'est que si je considère les deux parties de cette surface (que je croyais hier encore raccordées l'une à l'autre) se coupent suivant une infinité de courbes trajectoires asymptotiques [91] (sic) J'avais cru que toutes ces courbes asymptotiques après s'être éloignées d'une courbe fermée représentant une solution périodique, se rapprochent ensuite asymptotiquement de la même courbe fermée. Ce qui est vrai c'est qu'il y en a une infinité qui jouissent de cette propriété. Je ne vous dissimulerai pas le chagrin que me cause cette découverte [...] D'autre part, de grands remaniements vont devenir nécessaires et je ne sais si on n'a pas commencé à tirer le mémoire ; [...] En tout cas, je ne peux faire mieux que de confier mes perplexités à un ami aussi dévoué que vous l'avez toujours été." [92]

Sa surprise est grande, la transformation du mémoire qui va en résulter également puisque les deux versions ne concordent plus sur certains aspects. Optimiste dans la première version, confiant même dans les résultats et les techniques mathématiques utilisées, Poincaré est moins enthousiaste et plus focalisé sur les résultats négatifs après le remaniement. Il insiste sur les orbites périodiques, orbites asymptotiques et **doublement asymptotiques** qui sont les éléments importants dans le mémoire final qu'il propose. Surtout il conclut :

"J'établis par exemple que le problème des trois corps ne comporte, en dehors des intégrales connues, aucune intégrale analytique ou uniforme. Bien d'autres circonstances nous font prévoir que la solution complète, si jamais on peut la découvrir, exigera des instruments analytiques absolument différents de ceux que nous possédons et infiniment plus compliqués." [93]

Une erreur

L'erreur commise par Poincaré est très localisée [94] .

Citons un extrait de la version corrigée du théorème :

[91] Poincaré ajoute en note : "et de plus que leurs distance est un infiniment petit d'ordre plus élevé que μ^p quelque soit p".

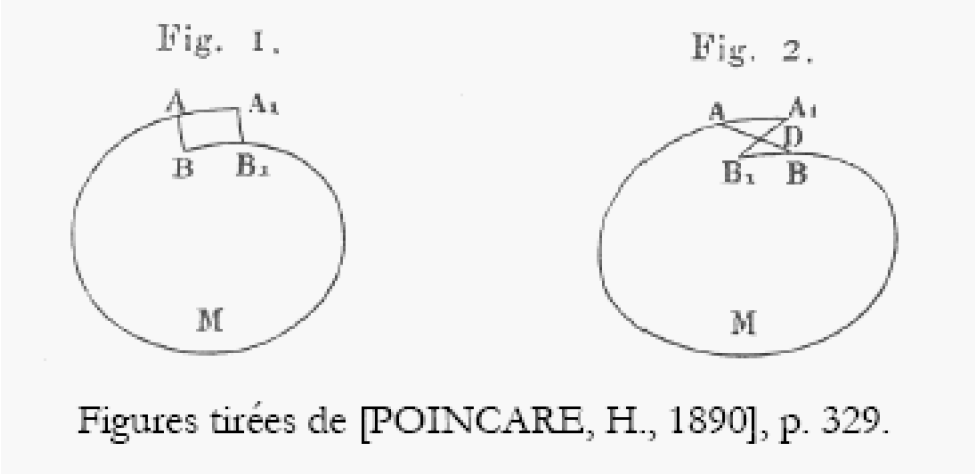
[92] Nous avons reproduit ici les termes exacts de la lettre de Poincaré à Mittag-Leffler, 1 décembre 1889, y compris les erreurs de langue. (Elle est reproduite dans [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 120-121).

[93] [POINCARE, H., 1890], p. 264-265. Il affirme aussi que le "problème présente des difficultés inouïes, que l'insuccès des efforts antérieurs avait bien fait pressentir, mais dont je crois avoir mieux encore fait ressortir la nature et la grandeur", ibid., p. 265. Au passage il remercie Phrägmen pour lui avoir "signalé les points où des explications complémentaires lui semblait nécessaires", ibid., p. 264.

[94] [BARROW-GREEN, J., 1994] et [BARROW-GREEN, J., 1997], en particulier p. 86-91. Comme le signale Barrow-Green, on peut se demander comment Poincaré a pu laisser passer une telle erreur dans un théorème "facile" comparé au reste de son mémoire : "What is simply an oversight ? […] Poincaré was renowned for paying scant attention to detail, and certainly the deadline for the competition would not have encouraged him to do otherwise. However, perhaps a more convincing argument might be that he had a preconceived idea about how he thought the curve would behave.", [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 91.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"**Théorème III**. Soit A_1AMB_1B une courbe invariante, de telle façon que A_1 et B_1 soient les conséquents de A et B. Je suppose que les arcs AA_1 et BB_1 soient très petits [...]. Je suppose qu'il existe un invariant intégral positif [...]. Les deux arcs AA_1 et BB_1 se coupent. Je me propose d'établir que c'est cette hypothèse qui est réalisée." [95]



Figures tirées de [POINCARE, H., 1890], p. 329.

Dans la version antérieure, Poincaré avait inféré que la courbe est en fait fermée en conséquence de l'existence d'un invariant intégral.

Mais lorsqu'il corrige le problème, il découvre que l'erreur a de multiples conséquences importantes pour ses résultats, c'est ce qu'il signifie dans sa lettre à Mittag-Leffler. En effet, Poincaré avait utilisé son résultat erroné dans l'étude du comportement des solutions asymptotiques à une orbite périodique instable, sur le cas des trois corps, et avait conclu au caractère fermé des surfaces asymptotiques. Cette conclusion est remise en question et Poincaré considère désormais les **orbites doublement asymptotiques**, celles qui sont **asymptotiques à l'orbite périodique dans le passé et dans le futur**. Les invariants intégraux interviennent à nouveau pour prouver l'existence de ce type de solutions. Poincaré établit même que l'existence d'une telle solution assure l'existence d'une infinité d'entre elles.

Seconde conséquence, les conclusions relatives à la stabilité ne sont plus justifiées. Afin de ne pas laisser en suspens la question, Poincaré entame le grand remaniement du mémoire, destiné à inclure la théorie, **extrêmement longue et compliquée**, des orbites doublement asymptotiques.

La figure tirée du second mémoire permet de comparer les conclusions tirées par Poincaré dans les deux versions. La figure représente les traces des surfaces asymptotiques (*AO'B'* et *A'O'B*) sur une surface de section. *O'* représente la solution périodique instable générant le système de surfaces asymptotiques.

[95] [POINCARE, H., 1890], p. 329. Les deux figures représentées correspondent à différentes hypothèses testées par Poincaré, avant de conclure définitivement pour l'intersection des deux arcs (que Poincaré n'illustre pas).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

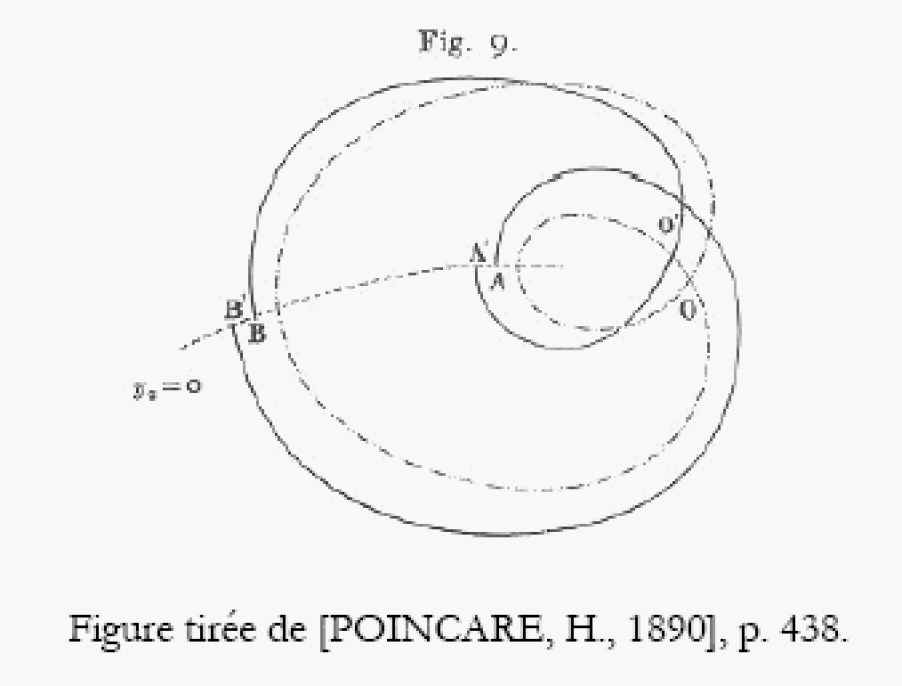


Figure tirée de [POINCARE, H., 1890], p. 438.

Poincaré pensait que :

• la courbe *BO'B'* est fermée (i.e. *B* et *B'* coïncident) et donc les surfaces asymptotiques sont fermées.

• ceci à des conséquences en terme de stabilité. La courbe *BO'B'* délimite une surface close (et dans l'espace des phases, un volume analogue à une tore). Une solution est donc soit intérieure soit extérieure à ce volume. A une solution périodique instable correspond un système de solutions asymptotiques confinées dans une région de l'espace, et qu'on peut considérer stable à ce titre. Il pensait aussi que de telles solutions pouvaient être étudiées complètement [96] .

Dans la version corrigée, Poincaré s'interroge sur la possibilité d'avoir des surfaces asymptotiques fermées. Sur l'exemple d'un pendule simple couplé à un oscillateur linéaire il démontre qu'il n'y a en fait rien de nécessaire à cette option et constate que les courbes *O'B* et *O'B'* peuvent se couper. Dans ce cas, une trajectoire passant par le point d'intersection appartient simultanément aux deux surfaces asymptotiques, ce qui en fait selon Poincaré, des solutions doublement asymptotiques.

Dans la première version du mémoire, Poincaré imaginait en outre que la série donnant une approximation (ordre 1) des équations des surfaces asymptotiques convergeait, alors qu'il s'aperçoit ensuite qu'elle n'est qu'une série asymptotique. La seconde étape (ordre quelconque) est donnée à titre de curiosité, en annexe, afin de compléter la description géométrique par une approche analytique : il pensait alors que ses calculs donnaient la série entière, convergente. Cette étape et la dernière étape, le calcul exact, ont fait l'objet des calculs longs et difficiles que Poincaré est obligé de réaliser en catastrophe, et montrent d'ailleurs son impressionnante dextérité en calcul.

[96] Voir [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 114-122 pour tous les détails techniques.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

L'erreur trouvée dans le premier mémoire est donc lourde de conséquence, plus que Poincaré ne semblait l'imaginer dans un premier temps. A côté des résultats "attendus" Poincaré révèle que la stabilité est loin d'être assurée mathématiquement dans le problème des trois corps. La résolution du problème soulève des difficultés d'une ampleur insoupçonnée.

La masse de résultats, de théorèmes et de méthodes du mémoire final va servir de base à son ouvrage le plus célèbre, les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Cité dans notre survol du XXème siècle, il va permettre la diffusion du travail de Poincaré (notamment en direction des astronomes) et asseoir la pertinence de son point de vue, géométrique, qualitatif. C'est dans ces pages que la notion d'orbite homocline, dont on a vu l'importance qu'il faut leur accorder, est définie comme une variante de la notion d'orbite doublement asymptotique.

1.3. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste

Publiées en trois volumes entre 1892 et 1899, les Méthodes Nouvelles livrent une série d'outils mathématiques essentiels à tout ce qui suit dans l'histoire des mathématiques des systèmes dynamiques, de la physique non linéaire et des théories du chaos. Les points les plus problématiques abordés sont la question de la stabilité et les orbites doublement asymptotiques étudiées en 1890. Les Méthodes Nouvelles nous permettent également de comprendre comment Poincaré aborde la résolution de ces problèmes de dynamique. C'est l'occasion de faire un bilan du travail de Poincaré avant de présenter le contexte intellectuel dans lequel s'insère toute cette histoire [97] .

a. Présentation des trois tomes

Dans le premier tome, paru en 1892, la plupart des méthodes analytiques sont exposées, la question des solutions périodiques est développée dans le détail, ainsi que les exposants caractéristiques, les solutions asymptotiques et l'existence des intégrales dans le problème des trois corps. Le mémoire de 1890 constitue la trame de cet ouvrage. Les solutions périodiques sont au cœur de l'étude et il en souligne toute l'importance. A propos des trajectoires générales il affirme ainsi :

"[...] on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions [générale et périodique] soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable." [98]

Sa forte conviction en **la densité des trajectoires périodiques dans l'ensemble des trajectoires du système** [99] est affichée et deux remarques s'imposent. D'une part,

[97] Plusieurs présentations historiques ont déjà été écrites au sujet des Méthodes Nouvelles. La plus fournie est celle de [GOROFF, D., 1993] (introduction à la traduction anglaise de l'ouvrage) ; la présentation de [BARROW-GREEN, J., 1997] est très accessible.

[98] ***[POINCARE, H., 1892a], p. 82 (nous mettons en évidence).***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Poincaré ne démontre pas ce résultat qui est pourtant la clé de voûte de sa démarche ; il l'admet, comme il admet qu'une preuve serait indispensable pour l'utiliser rigoureusement. Mais, dans l'immédiat, il n'y a pas nécessité de le démontrer. D'autre part, Poincaré aborde par ce biais la question de l'utilisation pratique des solutions périodiques. Il a montré qu'il est improbable (au sens de la théorie des probabilités) qu'un système réalise les conditions initiales d'une solution périodique, limitant *a priori* leur intérêt pratique. Mais Poincaré montre ici qu'elles permettent d'approcher les solutions générales.

Le second tome, en 1893, insiste sur les séries utilisées par les astronomes. D'une manière générale, les Méthodes Nouvelles sont prises entre deux tendances : établir des résultats pour les astronomes et donner des résultats mathématiques, intéressant les mathématiciens, compréhensibles par des mathématiciens. Le tome 2 met à plat les incompréhensions et les divergences entre les définitions des notions de convergence de séries car la confusion sur ces points a induit bien des méprises. D'un point de vue théorique et pratique (c'est-à-dire pour les mathématiciens et les astronomes) il présente et discute les diverses méthodes de Delaunay, Gyldén, et les variantes de Bohlin (qui ont visiblement sa préférence). Et il réitère sa conclusion quant **aux séries de Lindstedt qu'il prétend divergente en général, sans preuve définitive**.

Le dernier tome s'éloigne des préoccupations des astronomes, qui peuvent puiser dans les deux premiers l'essentiel de ce qui est connu à l'époque. En 1899, Poincaré revient sur sa vision géométrique du problème des trois corps. Le troisième tome contient des retours sur la théorie des invariants intégraux, les solutions périodiques et la stabilité. Selon Poincaré la **stabilité complète du problème des trois corps repose sur trois conditions** :

"1° Qu'aucun des trois corps ne puisse s'éloigner indéfiniment ; 2° Que deux des corps ne puissent se choquer et que la distance de ces deux corps ne puisse descendre au-dessous d'une certaine limite ; (sic) 3° Que le système vienne repasser une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa situation initiale. (sic)" [100]

La dernière condition, si elle est assurée indépendamment des deux autres, s'appelle, selon la terminologie de Poincaré, **la stabilité à la Poisson .** Poincaré illustre le problème sur divers exemples, mais l'intérêt de cette définition pour nous, est d'éclairer la discussion finale sur les solutions doublement asymptotiques.

b. Homoclines et hétéroclines

Pour l'historien, le prolongement donné à la question des solutions doublement asymptotiques, soulevée en 1890, constitue un point d'intérêt majeur du troisième tome. Dressons quelques rapides constats. Tout d'abord, Poincaré distingue désormais deux classes de solutions : les solutions baptisées **homoclines**, qui correspondent aux solutions doublement asymptotiques de son mémoire de 1890, et les solutions appelées

[99] La densité des trajectoires est exprimée dans la citation précédente, c'est-à-dire le fait qu'on puisse approcher aussi près qu'on veut, aussi longtemps qu'on veut, une trajectoire quelconque par une trajectoire périodique.

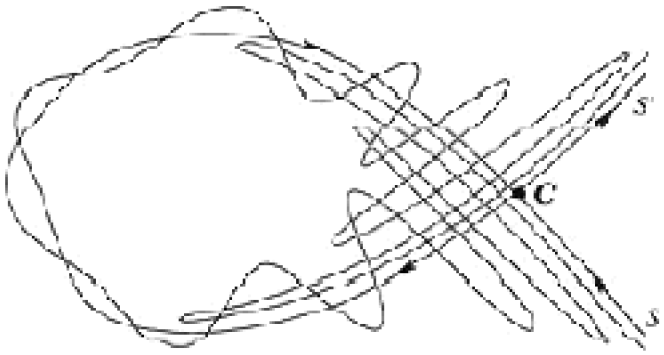
[100] ***[POINCARE, H., 1899a], p. 141.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

hétéroclines, ayant la particularité d'être asymptotiques à une solution périodique instable dans le passé et à **une autre** dans le futur. Deuxième constat : en définitive, probablement pris par d'autres recherches, il n'ajoute que très peu d'éléments nouveaux à ce sujet, dix ans après sa découverte. Il se livre d'abord à des commentaires sur la complexité des homoclines, en l'occurrence sur les surfaces asymptotiques et leurs intersections :

"Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes." [101]

La figure que Poincaré ne "cherche" pas à tracer ressemble à ceci :



C est l'orbite homocline, S et S' les surfaces asymptotiques. La figure représente le comportement dans la section transverse.
(Nous avons emprunté cette figure à C. Letellier. Poincaré n'en a dessiné aucune concernant les homoclines)

Le dessin est encore compliqué par les solutions hétéroclines qui viennent connecter différentes orbites périodiques instables. La suite prend deux formes : des corollaires et des remarques sur les homoclines d'une part, la question de l'existence des hétéroclines, qui n'est pas démontrée, d'autre part.

Par exemple, il agrémente le passage sur ces homoclines de quelques remarques, destinées à prouver sans doute toute la complexité du problème. Il imagine des solutions doublement asymptotiques voisines (à *t* négatif, très grand) de la solution périodique et agencées dans un certain ordre. A *t* positif, très grand, "*elles se présenteront alors dans un ordre entièrement différent*" [102] .

[101] ***[POINCARE, H., 1899a], p. 389.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

"Cette remarque est encore de nature à nous faire comprendre toute la complication du problème des trois corps et combien les transcendantes qu'il faudrait imaginer pour le résoudre diffèrent de toutes celles que nous connaissons." [103]

Ces dernières pages du tome 3 sont écrites dans une perspective bien précise, l'étude de la stabilité du problème. Plus exactement, la discussion qui suit les remarques sur la complexité du treillis d'homoclines est axée sur la stabilité et la **question de l'existence des hétéroclines prend sens parce que leur existence conditionne, selon Poincaré , la stabilité du système**.

L'idée de Poincaré est d'étudier l'ensemble formé, dans le plan de section, par les intersections des surfaces asymptotiques, c'est-à-dire les solutions homoclines. E_0 est l'ensemble de ces points, E'_0 l'ensemble dérivé [104] . Plusieurs cas de figures se présentent :

1° E'_0 recouvre le demi-plan, "il faudrait alors conclure à l'instabilité du système solaire" [105].

2° E'_0 peut avoir une aire finie et occuper une région finie du demi-plan.

3° E'_0 a une aire nulle et il serait analogue alors à ces 'ensembles parfaits qui ne sont condensés dans aucun intervalle'" [106] .

Poincaré ne peut rien conclure de plus précis par rapport à la stabilité.

Lorsqu'interviennent les hétéroclines, le système se complique encore. En définissant un second ensemble E'_1 à partir d'une autre orbite périodique instable, Poincaré revient à la question de la stabilité. En effet, s'il n'existe pas d'hétérocline, il conclut que les systèmes E'_0 et E'_1 doivent rester disjoints et ne peuvent pas occuper toute la place.

"Si au contraire, il existe une solution hétérocline, ces deux ensembles coïncideront. On voit que l'existence d'une pareille solution, si elle venait à être établie, serait un argument contre la stabilité." [107]

D'où l'intérêt d'analyser les hétéroclines selon Poincaré. Par ailleurs, il établit un lien entre l'existence des hétéroclines et la convergence des séries de Newcomb et Lindstedt. Poincaré a mis en doute la convergence de telles séries et affirmé que la convergence ne pouvait pas avoir lieu dans toutes les conditions possibles. Il avait émis l'idée que dans le cas où n_1/n_2 (rapport des moyens mouvements) est la racine d'un nombre commensurable non carré parfait, la convergence était néanmoins possible. Dans le

[102] Ibid., p. 391. En italique dans le texte.

[103] Ibid., p. 391.

[104] L'ensemble des points ayant dans leur voisinage, une infinité de points de E_0.

[105] [POINCARE, H., 1899a], p. 389.

[106] Ibid., p. 390.

[107] Ibid., p. 393.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

passage, plutôt intuitif, sur les hétéroclines, il cherche à montrer que la convergence, même dans ces conditions là, est incompatible avec l'existence d'hétéroclines. Il reprend les notations E'_0 pour l'ensemble associé à une hétérocline :

"Les solutions des équations différentielles qui correspondraient à cette valeur de n_1/n_2 seraient représentées par certaines courbes trajectoires. L'ensemble de ces courbes formerait une surface, admettant les mêmes connexions que le tore, et cette surface couperait notre demi-plan suivant une certaine courbe fermée C. L'ensemble E'_0 dont nous venons de parler devrait être tout entier extérieur à cette courbe, ou tout entier intérieur. Soient alors M_0 et M'_0 deux points appartenant à deux systèmes différents. Si M_0 est intérieur à la courbe C, et M'_0 extérieur à cette courbe, l'ensemble E'_0 relatif à M_0 devrait lui être tout entier intérieur, tandis que l'ensemble E'_0 relatif à M'_0 lui serait tout entier extérieur. Ces deux ensembles ne pourraient donc avoir aucun point commun et il ne pourrait exister de solution doublement asymptotique hétérocline allant de M_0 à M'_0. Or, [...] si la convergence avait lieu pour une infinité de valeurs du rapport $n1/n_2$, par exemple, pour celles dont le carré est commensurable, il existerait une infinité de courbes C qui sépareraient les uns des autres les points appartenant à des systèmes périodiques différents. Cette hypothèse est donc incompatible avec l'existence des solutions hétéroclines (au moins si les deux points M_0 et M'_0 que l'on considère, ou plutôt les solutions périodiques correspondante, correspondent à deux valeurs différentes du nombre n_1/n_2)." [108]

Les images rappellent la théorie KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser), datant des années 1954-63, et les questions de diffusion d'Arnold [109] .

La fin des Méthodes Nouvelles, avec le passage sur les hétéroclines, permet de cerner la perspective adoptée par Poincaré dans l'étude de ces courbes si particulières : pour lui elles sont un moyen d'assurer sa conviction dans la non convergence des séries de Lindstedt, problème qui l'a occupé à plusieurs reprises, et permettent de préciser la question de la stabilité dans le problème des trois corps.

En quelques mots, le système est stable si son mouvement est isolé dans un des tores évoqués (ou courbe fermée *C*). L'existence d'hétéroclines aurait pour effet de rendre impossible l'existence de ces tores et d'étendre le terrain de diffusion de la trajectoire à tout l'espace, le système n'étant plus stable dans ce cas.

Il démontre l'existence d'hétérocline dans quelques cas très particuliers, mais, sans conclusion générale, il laisse planer le doute :

"Le résultat est donc bien incomplet ; j'espère cependant qu'on me pardonnera la longueur de cette digression, car la question que j'ai posée [l'existence d'hétéroclines], plutôt que résolue, paraît se rattacher directement à la question de la stabilité, comme je l'ai montré au n° 400 [citation précédente]." [110]

[108] Ibid., p. 393.

[109] Personne ne semble avoir fait le rapprochement entre ces deux réflexions. Goroff évoque le lien entre les séries de Lindstedt et le théorème KAM dans [GOROFF, D., 1993], paragraphe 4.5, p. 174-177, mais ne parle nulle part de ce passage sur les hétéroclines, pas même dans le paragraphe 3.10 (p. 158-161) consacré aux solutions doublement asymptotiques. Nous renvoyons aux débats plus récents, exposés dans notre chapitre 3, avec le texte de Chirikov de 1979 notamment, page 218.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

c. Résoudre le problème des trois corps ?

Avant de poursuivre et nous interroger sur la postérité de ce travail de Poincaré, nous voulons clarifier sa position quant au problème des trois corps, la stabilité du système solaire et la question : que signifie, pour lui, "résoudre" le problème ? Il y a une ambiguïté à ce sujet, car la résolution selon le mathématicien et la résolution selon l'astronome n'ont pas le même sens. L'astronome cherche des développements en série lui permettant de déterminer l'évolution du système, en des temps aussi longs que possibles. Le mathématicien a une problématique différente. Pour ce qui est de Poincaré, il cherche d'abord à opérer des classifications (ce qui est quasiment un réflexe culturel chez les mathématiciens). L'objectif est de définir différents types de trajectoires d'une part, de déterminer leur agencement dans l'ensemble des trajectoires, d'autre part, en espérant être le plus exhaustif possible. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que son effort de définition de classes et l'étude de l'arrangement des ensembles de solutions périodiques, ou doublement asymptotiques, ne sont que des moyens pour parvenir à une fin : l'étude de la stabilité.

La **classe principale est la classe des orbites périodiques, qu'ils supposent denses et sur lesquelles il s'appuie pour construire d'autres classes**. Poincaré consacre beaucoup de temps à préciser des sous-classes, correspondant à des comportements périodiques variés [111]. Peu de temps avant sa mort, il livre un dernier résultat directement lié à ces questions d'orbites périodiques : son **dernier théorème géométrique** vise à démontrer la densité des orbites périodiques et assurer ainsi l'ensemble de sa démarche. En 1912, Poincaré lance quelques grandes lignes du résultat, démontré en 1913 par George Birkhoff [112].

La seconde classe, celle des orbites asymptotiques, est neuve et Poincaré en a démontré l'existence dans le mémoire pour le concours Oscar II. La troisième classe a été obtenue après quelques rebondissements : les solutions doublement asymptotiques, séparées en homoclines et hétéroclines. Il établit l'existence des homoclines dans le problème des trois corps restreints, puis s'intéresse à leur répartition (c'est l'étude des ensemble E_0 et E'_0).

A l'appui de ces affirmations, outre les tendances exposées dans les Méthodes Nouvelles, il est intéressant de mentionner les affirmations de Poincaré au sujet de la question des géodésiques, telle que Hadamard l'a traité en 1898 [113]. Hadamard a proposé une classification exhaustive des géodésiques des surfaces à courbure négative et Poincaré considère en conséquence le problème comme "entièrement résolu"

[110] ***[POINCARE, H., 1899a], p. 410.***

[111] Par exemple, les orbites périodiques de second genre, dont il précise les propriétés de "bifurcation". (Cf. annexe sur le sujet, p. 744).

[112] Une partie de l'annexe est consacrée à ce résultat de Poincaré, cf. p. 743.

[113] [HADAMARD, J., 1898]. Voir notre paragraphe consacré à J. Hadamard, p. 70.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

[114] . Nous reviendrons plus longuement sur les affinités entre les travaux de ces deux mathématiciens.

1.4. Premières conclusions

Le point de vue de Poincaré sur les équations différentielles et le problème des trois corps, marqué par le qualitatif et une perspective globale, donne des résultats très impressionnants. Il vient résoudre des problèmes très anciens, ou au moins apporte des indices très significatifs sur la convergence des séries ou l'absence d'intégrales analytiques supplémentaires dans le problème des trois corps. Il renouvelle considérablement les questions sur le problème des trois corps, et la stabilité du système solaire. Pour cela, il a adopté une démarche : définir des classes de comportements et étudier leur agencement dans l'ensemble des comportements dynamiques possibles. Les orbites périodiques sont le levier pour analyser le problème et Poincaré introduit ses outils et ses méthodes, comme les sections transverses, permettant de conduire l'analyse selon son point de vue. Ce sont des démarches reprises couramment dans la science du chaos, que certains scientifiques définissent même en termes d'orbite homocline.

Parallèlement, Poincaré a laissé une trace plus mineure dans le domaine des **théories des bifurcations** ; elles sont importantes tant dans les théories des oscillations que dans les théories du chaos. Poincaré a abordé le sujet dans deux contextes différents : le problème des **figures d'équilibre de masse fluide en rotation** et dans le cadre de **l'étude des solutions périodiques du problème des trois corps**. Ces résultats sont doublement intéressants. D'abord, ils inaugurent la question des bifurcations, poursuivie et développée considérablement au XXème siècle. Deuxièmement, ils confirment la portée d'un point de vue global et qualitatif en mathématique. Ces quelques précisions montrent à quel point il est tentant de rapprocher Poincaré de la science du chaos et d'en faire un "précurseur".

L'importance du contexte intellectuel de la fin du XIXème

A l'encontre de ce genre de raccourcis, nous pouvons déjà alléguer que les préoccupations de Poincaré sont avant tout celles de la Mécanique céleste, qui est un des sujets principaux d'interrogation dans le domaine scientifique. Avec la théorie des oscillations, de nouvelles problématiques sont en jeu, pour lesquelles les méthodes de Poincaré demandent à être adaptées.

Différents autres éléments nous permettront de saisir dans quelle mesure les travaux de Poincaré sont assimilés dans le contexte de la fin du XIXème siècle. Poincaré est, en effet, inséré dans des débats courants en matière de mathématiques, de science et de philosophie, comme en témoigne la grande attention portée à ses travaux par ses contemporains, qu'ils soient mathématiciens ou autres. La décontextualisation de ses interventions étant la source des contresens sur la notion de précurseur, il est important de se représenter cet environnement. Dans ce chapitre nous analyserons le milieu des

[114] [POINCARE, H., 1897b]. Il n'existe que trois classes de géodésiques d'après Hadamard ; le problème est beaucoup plus simple que celui abordé par Poincaré (Cf. p. 70).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

mathématiciens. Le chapitre suivant nous amènera dans des débats plus larges, philosophiques et scientifiques.

1.5. Poincaré et les mathématiciens

Intéresserons-nous tout d'abord aux réactions des mathématiciens contemporains de Poincaré. A travers l'échantillon des scientifiques intéressés à la question des mathématiques des équations différentielles, nous allons circonscrire le public attentif aux travaux de Poincaré, et déterminer dans quelle mesure ils ont été lus, compris, voire repris.

a. Quelques mathématiciens contemporains de Poincaré

A la fin du XIXème siècle, la théorie qualitative des équations différentielles est une branche dépréciée de la théorie des équations différentielles. La plupart des mathématiciens travaillent sur les aspects quantitatifs, plus déterminants pour les questions pratiques ; Paul Painlevé (1863-1933) en est le meilleur représentant [115]. Cependant, quelques illustres mathématiciens se préoccupent du qualitatif et souscrivent au point de vue de Poincaré. Emile Picard [116], Tullio Levi-Civita [117], Ivar Bendixon [118] produisent quelques résultats restés dans les mémoires (notamment le théorème de Poincaré-Bendixon).

Les quelques noms cités sont des mathématiciens de premier plan, connus et

[115] Il attache une grande importance aux développements analytiques et approchés, négligeant les apports du qualitatif (qu'il connaît néanmoins). Voir [GILAIN, C., 1991], p. 238-240.

[116] Le mathématicien français Emile Picard (1856-1941), par exemple, dans son Traité d'Analyse en 1896, fait écho aux travaux de Poincaré et aborde des questions qu'il juge particulièrement intéressantes pour les analystes. Un chapitre est consacré aux solutions périodiques de certaines équations différentielles et reprend l'essentiel de la théorie de Poincaré, parue dans le premier tome des Méthodes Nouvelles. On peut ajouter le court article qu'il consacre aux méthodes de Poincaré en mécanique analytique, [PICARD, E., 1914].

[117] Tullio Levi-Civita (1873-1941), mathématicien italien, participe au mouvement du qualitatif dans plusieurs articles sur le problème des trois corps. En rapport avec les idées de Poincaré, il y a surtout la question de la stabilité (discutée dans {LEVI-CIVITA, T., 1901]) et la méthode géométrique de Levi-Civita assez similaire à la notion de section transverse de Poincaré. Nous renvoyons à l'article consacré à Levi-Civita, [DELL'AGLIO, L., ISRAEL, G., 1989]. Levi-Civita a également publié un article "Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps" ([LEVI-CIVITA, T., 1906]) mais avec un point de vue un peu décalé par rapport à Poincaré et d'envergure plus limitée. Les allusions à Poincaré sont en fait très rares dans cet article et l'esprit n'a rien de géométrique : il se rapproche davantage des idées de Painlevé, faisant du qualitatif à partir de quantitatif affaibli, appauvri. Levi-Civita à travaillé également à quelques points précis du problème des trois corps comme les solutions singulières et les chocs. [LEVI-CIVITA, T., 1903a] et [LEVI-CIVITA, T., 1903b].

[118] Le mathématicien suédois Ivar Bendixon (1861-1935) a généralisé un théorème de Poincaré (cf. note 65, p. 40) pour constituer ce que nous appelons le théorème de Poincaré-Bendixon. C'est un théorème majeur de la théorie qualitative des équations différentielles en dimension deux, [BENDIXON, I., 1901]. Voir [GILAIN, C., 1991], p. 228.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

reconnus tant à leur époque qu'aujourd'hui, dans l'histoire des mathématiques. Il en est de moins célèbres, mais qui s'inscrivent plus directement dans la lignée des travaux de Poincaré sur le problème des trois corps. Un recensement des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, limité à la période 1890-1933 [119] donne une bonne idée du cercle des quelques mathématiciens s'occupant du problème des trois corps, pour ce qui concerne leur liaison avec les travaux de Poincaré. Nous retiendrons deux noms, Jean Chazy (1882-1955) et Jules Andrade (1857-1933), et un troisième moins marquant, l'astronome Henri Andoyer (1862-1929). Ce dernier est plutôt versé dans la théorie analytique quasiment depuis sa thèse en 1886 [120] : il fait œuvre d'astronome et produit une théorie de la Lune sur la base des considérations des astronomes Delaunay et Gyldén [121] . La place des travaux géométriques de Poincaré est en fait assez restreinte, car elle n'a que peu d'importance dans sa perspective de calculateur chevronné.

Le plus jeune, et le plus important des trois, est Chazy [122] . Sa thèse, soutenue en 1910, est une thèse de mathématique des équations différentielles, sans rapport *a priori* avec l'astronomie [123] , qu'il prolonge par une étude du problème des trois corps. Chazy s'est lancé, après la première guerre mondiale, dans un travail de longue haleine, fructueux dans les années 1919-29 : l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps [124] . Il a recours au point de vue qualitatif de Poincaré afin d'établir une nomenclature du comportement des trajectoires.

Plus qu'une simple parenté d'esprit, le travail de Chazy est un prolongement des recherches de Poincaré [125] . Pour progresser dans l'étude du problème des trois corps, il

[119] Si 1890 correspond au début de la percolation des travaux de Poincaré les plus importants (dans notre perspective) ici, la date butoir 1933 est plus arbitraire. Elle correspond surtout à un tarissement des contemporains de Poincaré encore en activité.

[120] Le sujet de la thèse était : "Exposition de la théorie des orbites intermédiaires d'après M. Gylden". Voir [GISPERT-CHAMBAZ, H., 1991], p. 341 pour le rapport de M. Tisserand.

[121] [ANDOYER, H., 1902]. Jusqu'à la fin de sa vie, Andoyer fait des recherches sur sa théorie de la Lune (voir sa nécrologie par Jules Drach, [DRACH, J., 1929]). Il est élu membre de la section d'Astronomie de l'Académie des Sciences en 1919.

[122] Il existe une note biographique sur Chazy, publiée par G. Darmois, [DARMOIS, G., 1957].

[123] [CHAZY, J., 1910]. Le titre exact est "Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale à ses points critiques fixes", [GISPERT-CHAMBAZ, H., 1991], p. 407, rapporté par Painlevé.

[124] Chazy a publié plusieurs mémoires sur le thème : [CHAZY, J., 1922], [CHAZY, J., 1929] et un plus tardif [CHAZY, J., 1952]. Il a déjà une bonne connaissance des aspects mathématiques. Ses premières notes à l'Académie, sur ce sujet, sont publiées en 1913 : [CHAZY, J., 1913a], [CHAZY, J., 1913b]. Elles concernent en fait le problème général de *n* corps.

[125] Le problème des trois corps est un problème à douze dimensions : l'optique de Chazy est de dresser une carte des régions de cet espace à douze dimensions, où les comportements asymptotiques diffèrent. En 1920, Chazy a déjà obtenu une nomenclature distinguant "sept sortes" de comportements ([CHAZY, J., 1920]). Il cherche ensuite l'organisation et l'agencement relatifs de ces ensembles de trajectoires possibles. En 1929, dans le cas où "*la constante des forces vives dans le mouvement par rapport au centre de gravité est négative*" ([CHAZY, J., 1929], p. 353, en italique dans le texte) il ajoute quatre nouvelles sortes.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

développe certains points de théorie des équations différentielles (du second ordre) initiée par Poincaré en 1886 [126] . Au vu de ses travaux, il est indéniable qu'il connaît, et surtout a compris, les travaux de Poincaré. Il est même le premier à reconnaître, dans un travail d'Andrade, un exemple de courbe homocline qui avait échappé à tout le monde [127] .

Le travail d'Andrade dont il est question s'intitule "Sur le mouvement d'un corps soumis à l'attraction newtonienne de deux corps fixes" et date de 1914 [128] . Le problème mathématique traité est une dégénérescence du problème restreint des trois corps. La surprise vient du fait que ce travail est une reproduction de sa thèse de mathématique soutenue en 1890 [129] . C'est-à-dire qu'il **donne un exemple d'orbite homocline, l'année où Poincaré découvre et explicite la notion, suite à son erreur dans le mémoire du concours Oscar II**. Andrade ne donne pas de nom à son phénomène, trouvé dans le cas du mouvement planaire d'un mobile autour de deux masses fixes et pour lequel on peut considérer le mobile comme un satellite de la masse prépondérante :

"[…] j'ai cru entrevoir à ce sujet une singularité inattendue, mais j'espère pouvoir y revenir plus tard, au point de vue des développements en série." [130]

Un autre élément a attiré notre attention [131] , le rapport de Paul Appell sur la thèse d'Andrade. Appell est le grand ami de Poincaré et il a participé également au concours Oscar II (il en est sorti second, derrière Poincaré). Au sujet du phénomène d'Andrade il rapporte :

"[…] lorsque le mouvement se fait dans un plan, il déduit de ces formules des conséquences curieuses relatives au sens de la rotation du rayon vecteur du satellite autour de la masse principale." [132]

Il ne semble donc pas avoir fait le lien entre cette curiosité et le travail de Poincaré. Nous manquons malheureusement d'archives pour préciser davantage ces points. Quant à Andrade, personnage atypique, il passe allègrement d'un sujet à l'autre : théorie des probabilités, géométrie, mécanique, thermodynamique. En revanche, ni entre sa thèse de 1890 et sa republication de 1914, ni après 1914, il ne revient sur cette question de Mécanique céleste [133] .

[126] Sa note de 1921 sur le sujet montre sa maîtrise des travaux de Poincaré, et met en exergue les diverses connaissances mathématiques dont il use, en particulier les courbes géodésiques et les résultats d'Hadamard à ce sujet. [CHAZY, J., 1921].

[127] "Je ne sais si il a été remarqué que le problème traité par M. Andrade donne aussi un exemple, le plus simple sans doute dans le problème des trois corps, de solutions doublement asymptotiques, d'ailleurs homoclines selon le terme de Poincaré.", [CHAZY, J., 1920], p. 1562, note (2).

[128] [ANDRADE, J., 1914].

[129] [ANDRADE, J., 1890]. Thèse réalisée sous la direction de G. Darboux.

[130] [ANDRADE, J., 1890], p. 3.

[131] On peut ajouter que Andrade est ancien élève de l'Ecole Polytechnique : il y est rentré en 1876, trois années après Poincaré.

[132] [GISPERT-CHAMBAZ, H., 1991], p. 346.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Plusieurs scientifiques sont à l'écoute des travaux de Poincaré et J. Chazy est peut-être le plus expert d'entre eux, au sujet du problème des trois corps. Cependant, les deux mathématiciens les plus importants de cette époque, intéressé par les méthodes de Poincaré, sont A. Lyapounov et J. Hadamard. Ce dernier est sans doute le plus fin connaisseur du travail de Poincaré (il lui consacrera un article dans Acta Mathematica : "L'œuvre mathématique de Poincaré" [134] , en 1921). Les travaux considérables de G. Birkhoff et A. Andronov sont réservés à une partie ultérieure, mais nous signalons déjà qu'ils sont d'une ampleur supérieure à tous les travaux contemporains de Poincaré.

b. Alexander Lyapounov (1857-1918) : les mathématiques de la stabilité

La fin du XIXème siècle nous a légué quelques travaux étendus en théorie mathématique de la stabilité dont le plus essentiel est celui du mathématicien russe A. Lyapounov. S'il est incontestablement reconnu comme tel au XXème siècle, sa percée dans le champ mathématique a été lente. Son mémoire de 1892, synthèse des notions de stabilité de Lyapounov, connaît un succès très mitigé hors de Russie, tant qu'il n'existe que la version publiée en russe. La traduction complète en 1907, en français [135] , révèlera les méthodes de Lyapounov au public savant.

Ce travail est un complément important aux travaux de Poincaré, précisant les notions de stabilité et les conditions de stabilité autres que la "stabilité à la Poisson". De plus, **Poincaré a inspiré une partie des réflexions de Lyapounov** [136] : il a utilisé les travaux de Poincaré dans son mémoire et continue de les suivre après sa publication [137] . Cependant, l'influence n'est pas réciproque puisque Poincaré ne le cite pas lorsqu'il aborde les problèmes de stabilité, et le mentionne une fois seulement pour ses contributions en matière de figure de la Terre (un problème de bifurcation en l'occurrence

[133] Signalons qu'Andrade est l'instigateur principal de la chronométrie à la faculté des sciences de Besançon, au tournant du XXème siècle. Il consacre du temps à enseigner les mathématiques aux futurs maîtres horlogers ; il tient pour fondamental qu'ils aient une formation mathématique pour mieux traiter les problèmes techniques. Les "Mathématiques de l'ingénieur" sont même le sujet d'une réflexion qu'il livre au congrès international des mathématiciens à Heidelberg, en 1904 : [ANDRADE, J., 1904] ("L'enseignement scientifique aux Ecoles Professionnelles et les 'Mathématiques de l'ingénieur'").

[134] [HADAMARD, J., 1921].

[135] Voir la traduction [LIAPOUNOFF, A., 1907] : elle a été réalisée par un ingénieur (de la Marine) français, Edouard Davaux et publié aux Annales de la Faculté des sciences de Toulouse. Lyapounov a participé activement à cette traduction.

[136] Lyapounov, dans la préface de la traduction, affiche l'influence de Poincaré à propos des études de stabilité via les procédés de linéarisation. Il affirme : " L'essai unique, autant que je le sache, de solution rigoureuse de la question appartient à M. Poincaré, qui, dans le Mémoire remarquable sous bien des rapports *Sur les courbes définies par les équations différentielles* […] et, en particulier, dans ses deux dernières Parties, considère des questions de stabilité relatives au cas des systèmes d'équations différentielles du second ordre […]Bien que M. Poincaré se borne à des cas très particuliers, les méthodes dont il se sert permettent des applications beaucoup plus générales et peuvent encore conduire à beaucoup de nouveaux résultats. C'est ce qu'on verra par ce qui va suivre, car, dans une grande partie de mes recherches, je me suis guidé par les idées développées dans le Mémoire cité.", [LIAPOUNOFF, A., 1907], p. 205.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

[138]).

c. Jacques Hadamard (1865-1963) et les géodésiques

Dans le travail d'Hadamard à propos des géodésiques, les connexions avec le point de vue qualitatif de Poincaré sont plus réciproques. La renommée mathématique d'Hadamard débute avec l'attribution du prix Bordin de l'Académie des Sciences, en 1896, pour des travaux sur les géodésiques : le sujet proposé au prix concernait l'amélioration de la théorie des géodésiques, car celles-ci interviennent dans la représentation des trajectoires des mouvements en dynamique. Le mémoire correspondant, publié en 1897, s'intitule "Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique" [139] . Il est suivi, une année plus tard, par un travail sur "Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques" [140] . En substance, le premier s'attache à l'étude des géodésiques sur des surfaces à courbure positive, le second au cas des surfaces à courbure négative.

Le mémoire le plus important à nos yeux est celui de 1898, développé sur la base de ses précédentes idées. En effet, il est, chronologiquement, le premier travail, hormis ceux de Poincaré, montrant toute la puissance des méthodes qualitatives de Poincaré. Son **point de vue est topologique** et il s'attache à **développer une analogie avec les orbites périodiques** qui ont fait le succès de Poincaré dans le problème des trois corps [141] . Il singularise les géodésiques fermées et s'en sert pour décrire les comportements possibles des autres géodésiques. Le travail d'Hadamard montre que les méthodes de Poincaré sont comprises et reprises rapidement.

Le jugement de Poincaré sur de tels résultats est intéressant. En fait, Poincaré a dressé un court rapport, pour le prix décerné à Hadamard, qui mérite toute notre attention. En quelques mots, Poincaré résume les résultats d'Hadamard, construits à partir des

[137] "Pendant l'impression de cet Ouvrage, laquelle s'étendit à plus de deux années, ont paru deux Ouvrages très intéressants de M. Poincaré, qui traitent de questions se rapprochant beaucoup de celles que j'ai considérées. Je parle de son Mémoire sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique, paru dans Acta Mathematica […] peu de temps après que j'eus commencé à faire imprimer mon Travail, ainsi que du premier Volume, qui vient de paraître, de son Traité intitulé : Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Paris, 1892", [LIAPOUNOFF, A., 1907], p. 207.

[138] Nous renvoyons à l'annexe sur le thème des bifurcations, p. 744.

[139] [HADAMARD, J., 1897].

[140] [HADAMARD, J., 1898].

[141] "Quant à la méthode que nous avons employée, on peut la considérer comme une application de deux principes posés par M. Poincaré, dans ses études sur les équations différentielles. En premier lieu, nos conclusions mettent en évidence, une fois de plus, le rôle fondamental que joue dans ces questions l'*Analysis Situs*. [...] En second lieu, l'importance que ce géomètre a reconnue aux solutions périodiques, dans son traité de Mécanique Céleste, s'est manifesté également dans la question actuelle. Ici encore, elles se sont montrées 'la seule brèche par laquelle nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable'.", [HADAMARD, J., 1898], p. 775. De la même manière que Poincaré, Hadamard recourt à l'*Analysis Situs* comme outil essentiel de l'analyse qualitative.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

géodésiques fermées :

"Par deux points de la surface on peut mener une infinité de géodésiques ; mais ces géodésiques appartiennent à des types différents, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas toutes équivalentes du point de vue de l'Analysis Situs. Mais deux points peuvent toujours être joints par une géodésique appartenant à un type donné et ne peuvent l'être que par une seule. Les géodésiques se partagent en trois catégories : 1° Les géodésiques fermées et les géodésiques asymptotiques à une géodésique fermée; 2° Les géodésiques qui s'éloignent indéfiniment; (sic) 3° Les géodésiques qui restent à distance finie, se rapprochent d'abord beaucoup d'une géodésique fermée, s'en éloignent ensuite pour se rapprocher beaucoup plus encore d'une autre géodésique fermée et ainsi de suite. (sic)" [142]

La classification des géodésiques opérée par Hadamard semble convenir à Poincaré puisqu'il admet que "**le problème peut [donc] être regardé comme entièrement résolu "** [143] . La parenté avec les problèmes de la dynamique est évoquée par Poincaré dans son rapport :

"Quand on abordera le problème de la stabilité du système solaire d'une façon rigoureusement mathématique, on se trouvera en présence de questions tout à fait analogues ; les trajectoires seront assimilables aux géodésiques […] l'analogie des deux questions est donc complète ; sans doute celle qui a été résolue par M. Hadamard est beaucoup plus facile, mais le résultat obtenu prépare la solution du problème plus compliqué que la Mécanique céleste nous pose." [144]

Nous avons une nouvelle indication de l'optique de Poincaré au sujet de la résolution des problèmes de la dynamique : il considère qu'un tel problème est résolu dès lors qu'une classification est établie [145] .

En outre, Poincaré décide de participer à ces recherches et rédige, en 1905, un mémoire "Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes". Comme il l'avait proclamé très clairement dans son rapport de 1898 : le problème des trois corps est très complexe et il y a un grand intérêt à étudier des problèmes plus simples où l'on peut s'affranchir de difficultés secondaires. Le cas des géodésiques d'une surface est un bon point de départ :

"M. Hadamard l'a bien compris, et c'est ce qui l'a déterminé à étudier les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées ; il a donné une solution complète de ce problème dans un Mémoire du plus haut intérêt. Mais ce n'est pas aux géodésiques des surfaces opposées que les trajectoire du problèmes des trois corps sont comparables ; c'est, au contraire, aux géodésiques des surfaces convexes [...] J'ai donc du me borner à quelques résultats partiels, relatifs surtout aux géodésiques fermées, qui jouent ici le rôle des solutions périodiques du problèmes des trois corps." [146]

[142] [POINCARE, H., 1897b], p. 590.

[143] [POINCARE, H., 1897b], p. 590 (nous mettons en évidence).

[144] [POINCARE, H., 1897b], p. 591.

[145] Nous renvoyons aux explications sur la perspective de Poincaré, p. 61.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Les deux mathématiciens semblent "dialoguer" par référence réciproque [147] . Dans le mémoire de 1898 Hadamard fonde son utilisation des géodésiques fermées sur l'approche développée par Poincaré avec les orbites périodiques. Poincaré avait conjecturé la densité des orbites périodiques et Hadamard démontre une propriété semblable dans le cas des géodésiques : il existe une suite de géodésiques fermées, approchant les géodésiques de troisième espèce, sur une longueur croissante. D'ailleurs Hadamard n'hésite pas à rapprocher ces deux éléments :

"En un mot, la géodésique en question possède la propriété indiquée par M. Poincaré, à savoir que les équations du problème admettent une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue) [...]" [148]

d. Hadamard, Duhem, Poincaré et la "sensibilité aux conditions initiales"

Le mémoire d'Hadamard de 1898 soulève un autre point important, la notion de "sensibilité aux conditions initiales" qui constituera plus tard une notion clé dans les concepts de chaos. Hadamard ne lui a pas donné ce nom, mais nous l'utiliserons en connaissance de cause. Hadamard la présente ainsi :

"En un mot, tandis que toute géodésique qui s'éloigne à l'infini est entourée d'un continuum de géodésiques jouissant de la même propriété, au contraire, tout changement, si minime qu'il soit, apporté à la direction initiale d'une géodésique qui reste à distance finie suffit pour amener une variation absolument quelconque dans l'allure de la courbe, la géodésique troublée pouvant affecter n'importe laquelle des formes énumérées précédemment." [149]

Il est intéressant de constater que Poincaré et Hadamard n'accordent pas la même attention au sujet. Duhem en tirera lui des conclusions relativement à la théorie physique.

En effet, tout porte à croire que pour Poincaré cette propriété n'est qu'une curiosité, une anecdote, dans la problématique des géodésiques :

" La distribution des géodésiques qui passent par un point donné présente des particularités fort curieuses [...] si par un point donné on fait passer un faisceau de géodésiques […] il contiendra toujours des géodésiques allant à l'infini." [150]

Il y attache peu d'importance, mais cela se comprend dans la démarche de Poincaré. Il est dans une perspective globale et cherche à définir des classes de solutions : cette propriété n'a que peu d'intérêt dans cette approche [151] . Hadamard en revanche, en évoquant les questions sous-jacentes de dynamique, s'empresse de conclure sur le plan

146 ***[POINCARE, H., 1905b], p. 39.***

147 Nous n'avons pas déterminé si ce dialogue s'est développé de manière plus conventionnelle, par des rencontres entre les deux mathématiciens.

148 ***[HADAMARD, J., 1898], p. 768-769. En sus, la propriété d'Hadamard renforce la conjecture de Poincaré sur la densité des orbites périodiques.***

149 ***[HADAMARD, J., 1898], p. 772-3 (en italique dans le texte).***

150 ***[POINCARE, H., 1897b], p. 590.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

épistémologique, en rapport à des questions de physique :

"Certes, lorsqu'un système se meut sous l'action de forces données, et que les conditions initiales du mouvement ont des valeurs données, au sens mathématique du mot, le mouvement ultérieur et, par conséquent, la manière dont il se comporte, lorsque t augmente indéfiniment, sont par cela même connus. Mais dans les problèmes astronomiques, il ne saurait en être ainsi : les constantes qui définissent le mouvement sont données physiquement, c'est-à-dire avec des erreurs dont l'amplitude se réduit à mesure que la puissance de nos moyens d'observation augmente, mais qu'il est impossible d'annuler. Si l'on ne suit les trajectoires que pendant un temps déterminé, quelconque d'ailleurs, on peut imaginer que les erreurs sur les données initiales aient été rendues assez minimes pour ne pas altérer sensiblement la forme de ces trajectoires pendant le susdit intervalle de temps. Ce qui précède nous montre qu'il n'est en aucune façon légitime d'en tirer une conclusion analogue relativement à l'allure finale de ces mêmes courbes." [152]

Pour Hadamard, le problème de "sensibilité" existe, mais n'est vraiment problématique que dans un suivi temporel à long terme. Pierre Duhem (1861-1916), physicien français, reprend par la suite les arguments de Hadamard. Les deux savants sont amis [153] et qui plus est, prennent un poste dans la même faculté des sciences de Bordeaux. Il ne faut donc pas s'étonner de retrouver de telles considérations chez Duhem. Dans son célèbre ouvrage, La théorie physique. Son objet, sa structure, de 1906, il consacre un chapitre à la "Déduction mathématique et la théorie physique". Duhem choisit d'illustrer le résultat d'Hadamard de façon plus imagée et "parlante" (il prend l'exemple d'un front de taureau, avec ses cornes, sesoreilles et les cols intermédiaires pour donner une image du type de surface étudiée) et, de manière encore plus radicale qu'Hadamard, en fait un "exemple de déduction mathématique à tout jamais inutilisable" [154] pour le physicien. Voici comment il argumente :

"Malgré cette complication, si l'on connaît avec une entière exactitude la position initiale d'un point matériel sur ce front de taureau et la direction de la vitesse initiale ; la ligne géodésique que ce point suivra dans son mouvement sera déterminée sans aucune ambiguïté […] Il en sera tout autrement si les conditions

[151] On peut faire le rapprochement avec une autre remarque de Poincaré, dans les Méthodes Nouvelles. Après le travail d'analyse et de démonstration de l'existence des orbites doublement asymptotiques, il propose une "remarque" quant aux différences d'ordre d'apparition d'un ensemble de ces orbites pour $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$ (cf. p. supra 58). Cette propriété signe une sorte de "sensibilité aux conditions initiales", mais ne figure dans son texte qu'à titre de remarque.

[152] [HADAMARD, J., 1898], p. 773.

[153] Hadamard évoque leur amitié dans [HADAMARD, J., 1927]. Duhem est entré à l'Ecole Normale Supérieure en 1882, Hadamard en 1884. Hadamard obtient un poste à Bordeaux en 1896, suivi une année après par Duhem.

[154] [DUHEM, P., 1906], p. 223. Aussi p. 225 "Une telle déduction mathématique est et restera toujours inutile au physicien". En définitive, dans ce chapitre de l'ouvrage, Duhem, à la différence d'Hadamard, appelle à construire des Mathématiques de l'*à peu près*, qui seraient à même de prendre en compte le caractère approximatif des mesures physiques pour opérer des déductions plus réalistes et "utilisables".

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

initiales sont données non point mathématiquement, mais pratiquement ; la position initiale de notre point matériel sera non plus un point déterminé de la surface, mais un point quelconque pris à l'intérieur d'une petite tâche ; […] à nos données initiales pratiquement déterminées correspondra pour le géomètre une infinie multiplicité de données initiales différentes. Imaginons que certaines de ces données géométriques correspondent à une ligne géodésique qui ne s'éloigne pas à l'infini […]. Parmi les données mathématiques innombrables qui correspondent aux mêmes données pratiques, il en est qui déterminent une géodésique s'éloignant indéfiniment de son point de départ […] On aura beau augmenter la précision avec laquelle sont déterminées les données pratiques, rendre plus petite la tache où se trouve la position initiale du point matériel, resserrer le faisceau qui comprend la direction initiale de la vitesse, jamais la géodésique qui demeure à distance finie en tournant sans cesse autour de la corne droite ne pourra être débarrassée de ces compagnes infidèles qui, après avoir tourné comme elle autour de la même corne, s'écarteront indéfiniment […] Si donc un point matériel est lancé sur la surface étudiée à partir d'une position géométriquement donnée, avec une vitesse géométriquement donnée, la déduction mathématique peut déterminer la trajectoire de ce point et dire si cette trajectoire s'éloigne ou non à l'infini. Mais, pour le physicien, cette déduction est à tout jamais inutilisable. Lorsqu'en effet les données ne sont plus connues géométriquement, mais sont déterminées par des procédés physiques, si précis qu'on le suppose, la question posée demeure et demeurera toujours sans réponse." [155]

Les deux points de vue se rejoignent sur l'impossibilité pour un physicien de déduire le comportement asymptotique. Hadamard admet cependant qu'on peut suivre la trajectoire pendant un temps arbitraire à condition de réduire l'erreur sur les conditions initiales.

Hadamard tire d'autres conséquences à propos des questions de dynamique analogues des géodésiques, telles que la "stabilité du système du monde" : à cause de la cette sensibilité, "il importe de remarquer que l'un des principaux problèmes de la Mécanique Céleste [...] même sous son aspect théorique [...] cesserait d'avoir un sens" [156]. Poincaré ne relève pas cette conclusion dans son rapport.

En 1901, trois ans après son mémoire sur les géodésiques, Hadamard, dans une notice sur ses travaux, revient sur la classification des géodésiques et cette propriété.

"Par la démonstration de l'existence des géodésiques de la quatrième catégorie, on achève de répondre à la question posée. Cette question est la seule (non intégrale élémentairement) où une solution analogue à celle de M. Poincaré ait pu être obtenue. Il y a lieu d'espérer que ces deux résultats ouvriront la voie à la résolution de la question dans d'autres circonstances de plus en plus générales. D'autre part, deux conclusions ressortent de la discussion obtenue. [...] Il faudra surtout admettre que l'allure des trajectoires peut dépendre de propriétés discontinues, arithmétiques, des constantes d'intégration. En second lieu, et comme conséquence, des problèmes importants de Mécanique, tels que celui de

[155] ***[DUHEM, P., 1906], p. 213-228.***

[156] [HADAMARD, J., 1898], p. 773.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

la stabilité du système solaire, rentrent peut-être dans la catégorie des questions mal posées. Si, en effet, on substitue à la recherche de la stabilité du système solaire la question analogue relative aux géodésiques des surfaces dont nous avons parlé, on constate que toute trajectoire stable peut être transformée, par un changement infiniment petit dans les données initiales, en une trajectoire complètement instable, se perdant à l'infini [...] Or, dans les problèmes astronomiques, les données initiales ne sont jamais connues physiquement, c'est-à-dire avec une erreur que le perfectionnement des moyens d'observation peut diminuer, mais ne saurait annuler. Si petite qu'elle soit, cette erreur pourrait amener une perturbation totale et absolue dans le résultat cherché." [157]

"Mal posé" est bien sûr le terme qui marque ce passage. Selon Hadamard, un problème est bien posé si la solution de l'équation dépend continûment des conditions initiales [158] : la dépendance en des propriétés discontinues, "arithmétiques", fait basculer un problème dans le "mal posé". Ce sont les mêmes critiques que Duhem reproduit et élargit dans la perspective du rapport des mathématiques à la physique.

Par ailleurs, il est étonnant de voir associer le terme "mal posé" à ces problèmes considérés comme "résolus". Mais ceci est compréhensible si on interprète "résolution" comme la classification et la distribution relative des trajectoires des géodésiques ici, des orbites du problème des trois corps là, plutôt que le calcul des solutions.

Cette terminologie est lourde de sens et de conséquences car les problèmes "mal posés" sont, dans l'esprit d'Hadamard et Duhem, les problèmes à écarter dans la physique mathématique. Du fait de la forte autorité scientifique (et institutionnelle) de ces deux scientifiques il y a fort à parier que ces questions ne susciteront pas de recherches avancées parmi les mathématiciens. Le travail de Hadamard est à la fois remarquable pour ce qu'il met en évidence (la sensibilité) et dommageable pour l'étude plus précise du problème. Nous tenons très certainement un facteur important de l'évolution des considérations sur la "sensibilité aux conditions initiales".

1.6. Poincaré, un incompris ?

Sur la base de ces arguments, il nous paraît tout à fait légitime d'affirmer que l'"esprit" géométrique de Poincaré et ses résultats qualitatifs sont connus des quelques mathématiciens contemporains, spécialisés dans les équations différentielles, dont la plupart sont Français. Malgré leur extrême technicité mathématique, les performances de Poincaré sont loin d'être incomprises, comme certains aiment à les présenter. Plusieurs mathématiciens se sont emparés des méthodes, les ont développées, en tirent profit et les diffusent même dans des corpus mathématiques voisins. En ce sens, les affirmations de Stewart, Diacu et Holmes sonnent faux.

L'ingénieur Henry Léauté

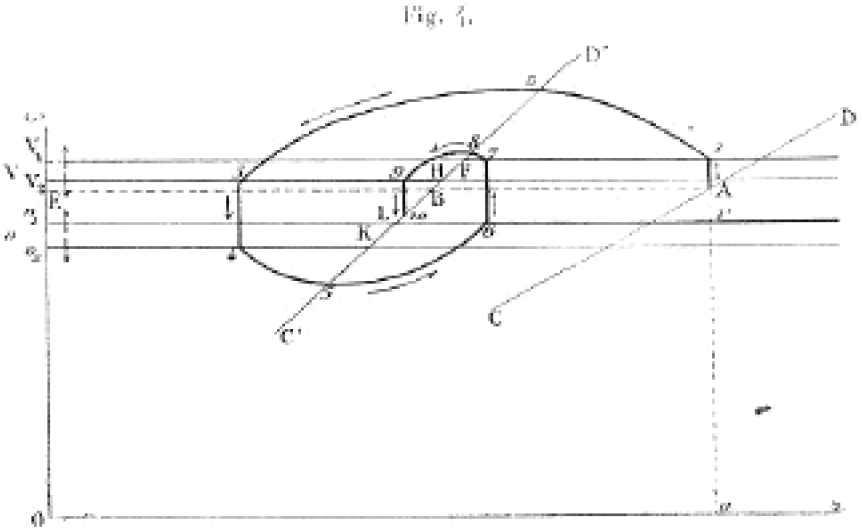
[157] ***[HADAMARD, J., 1901a] (en italique dans le texte). Hadamard, dans ce retour sur ses travaux, montre une nouvelle fois sa proximité avec les conceptions de Poincaré (importance des solutions périodiques, du point de vue qualitatif).***

[158] [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 208-209.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Dans la continuité de cette démarche mêlant qualitatif, géométrie et quantitatif, le cas des travaux de Henry Léauté doit être évoqué, même s'il ne se compare pas directement aux amples travaux mathématiques de Poincaré. Nous renvoyons à l'annexe où tous les détails sur ces travaux, absents de l'historiographie, sont donnés (p. 635).

Il s'agit d'abord d'une question technique, de Mécanique et de problèmes d'oscillations. Léauté se propose, en 1885, de concevoir une théorie des machines actionnées par moteur hydraulique. La vitesse fournie par ces machines est sujette à des oscillations et Léauté cherche à analyser les mécanismes d'oscillation afin de les réduire. Pour cela il introduit un diagramme plan, représentant l'état de la machine et analyse en quelque sorte l'"espace des phases" de la machine. Le coeur de l'analyse de Léauté est l'association qu'il fait entre une oscillation et un "cycle fermé" dans le diagramme ; l'évolution de l'état de la machine vers une oscillation correspond à un "cycle fermé limite", dans son vocabulaire.



Exemple de "cycle" dans [LEAUTE, H., 1885], p. 10.

Graphiquement, le rapprochement avec le "cycle limite" de Poincaré est aisé. Cependant l'origine de la terminologie de Léauté reste indéterminée. Le lien avec Poincaré est très tenu et ne peut être considéré comme une inspiration directe. Par ailleurs, Léauté utilise des raisonnements géométriques et des arguments qualitatifs mais ils ne sont pas du même ordre que ceux de Poincaré. Léauté vise d'abord une théorie donnant des moyens précis, pratiques, de résoudre le problème et utilise la géométrie pour faire des calculs approchés, dans le cas où ils sont impossibles autrement.

Néanmoins, il y a une certaine contemporanéité et quelques similarités entre ces travaux de Léauté et ceux de Poincaré. Ceci nous invite à ne pas négliger le poids de la technique dans les développements scientifiques. L'importance du travail de Léauté apparaîtra plusieurs années plus tard, lorsque le parallèle entre oscillation et "cycle limite" (de Poincaré), sera développé par Andronov en 1929. Le travail de Poincaré sera alors intégré à la question des oscillations, prolongeant en quelque sorte les idées de Léauté et de Poincaré, pour amorcer la théorie des oscillations non linéaires.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Malgré tout, il existe des différences de perception des résultats mathématiques parmi ce collège de savants. Le problème de la "sensibilité aux conditions initiales" illustre le mieux ces variations. Elle se présente chez Hadamard et Poincaré semble la reléguer au rang d'anecdote. Peut-être que le point de vue global n'est pas aussi aiguisé chez Hadamard que chez Poincaré, ce qui pourrait expliquer cette différence. Si les aspects très techniques des mathématiques de Poincaré sont bien reçus, faut-il considérer que la perspective d'une analyse globale l'est autant ? Si Poincaré nous semble très loin d'être un incompris, il convient de nuancer cette affirmation.

Enfin, pour ajouter à l'intrication de ces problématiques, on peut signaler qu'une notion de "sensibilité" très analogue à celle présentée ici se retrouve dans une réflexion plus philosophique de Poincaré sur un autre sujet, le hasard et les probabilités. D'emblée, le texte en question ("Le hasard", écrit en 1907) nous transporte dans un contexte élargi, non limité au cadre des mathématiques. L'historiographie n'a pas attiré suffisamment l'attention sur cette nécessité. En outre, la présentation de ces réflexions connexes illustrera les propos de D. Ruelle au sujet de Duhem, Hadamard et Poincaré, tout en nous montrant quelles nuances s'imposent.

CHAPITRE 2. HASARD, DÉTERMINISME ET MÉCANIQUE STATISTIQUE

Les distorsions concernant l'histoire des travaux de Poincaré découlent de leur retrait du contexte de la fin du XIXème siècle. Faire abstraction de ce contexte, c'est en même temps se condamner à ne pas comprendre ce qui se joue à ce moment là concernant l'histoire des sciences et du chaos en particulier. Selon notre thèse, au tournant du XXème siècle, des éléments essentiels, préliminaires aux développements du chaos au XXème siècle, se mettent en place. Les travaux mathématiques de Poincaré n'en sont qu'un aspect.

- Des themata

Pour éclairer cette problématique, ainsi que sa dynamique, il nous paraît judicieux de nous référer à la notion de *themata* **,** telle qu'elle a été définie par G. Holton [159] , car elle permet à la fois de mieux appréhender les questionnements et d'en saisir les enjeux profonds. Les *themata* essentiels sont d'abord les antinomiques hasard et déterminisme. Nous retrouverons ces thèmes à différents niveaux de l'investigation scientifique, sous diverses formes équivalentes, comme guide dans le choix des objets d'étude, des méthodes ou des orientations philosophiques et épistémologiques.

Le choix de ce couple hasard et déterminisme n'a rien d'étonnant si nous nous rappelons que le chaos est aussi appelé "chaos déterministe", terme construit par accolement de deux mots, dont le premier renvoie "traditionnellement" au désordre et à

[159] Nous renvoyons à la note 27 plus complète (p. 28).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'aléatoire. La pleine prise en compte et l'étude par les scientifiques de comportements possédant apparemment simultanément ces deux caractéristiques, couplées à l'instabilité, correspond aux débuts de l'ère de la théorie du chaos. Pour s'en donner un avant-goût, qui sera expliqué au chapitre 3, nous citerons deux extraits d'une introduction aux actes de la conférence Nonlinear Dynamics tenue en 1979 à New York, rédigée par Robert Helleman :

"Le principal sujet de cette conférence a été le comportement chaotique dont beaucoup de systèmes dynamiques non linéaires font montre ; je renvoie au comportement chaotique inhérent aux solutions de diverses équations déterministes du mouvement, et non au comportement chaotique obtenu par l'addition de sources externes de bruit. Ce comportement chaotique inhérent apparaît lorsque certaines orbites (ou solutions) ont une 'dépendance extrêmement sensible en leurs conditions initiales'." [160]

Et au sujet des systèmes non intégrables (dont le problème des trois corps fait partie, d'après la démonstration de Poincaré) :

"C'est parmi ces derniers systèmes que la mécanique statistique cherche - et trouve – des systèmes ergodiques, i.e., des systèmes (faiblement) chaotiques dans lesquels virtuellement toutes les orbites couvrent densément et uniformément la surface d'énergie constante. Le système non intégrable général, cependant, n'est pas globalement ergodique, mais a des régions chaotiques dans tout son espace de phases." [161]

Bien avant cette période des années 1960-70, l'interrogation sur les rapports du hasard et du déterminisme s'engage au XIXème siècle. Les questionnements dans l'une et l'autre de ces périodes ont leurs caractéristiques propres ; il serait hâtif de rapprocher et comparer directement les deux. Mais ce sont bien les points communs entre les deux que nous allons mettre en avant pour expliquer notre histoire du chaos.

- La Mécanique

Dans les débats du XIXème que nous analyserons, il nous faudra en outre prendre en compte la place très importante de la Mécanique, analytique, rationnelle et céleste. Elle s'est illustrée à travers Poincaré (problème des trois corps et Mécanique céleste), Hadamard (géodésiques et dynamique), Andrade, Chazy et Léauté. Ces exemples montrent les multiples facettes d'une activité très mathématisée mais dont l'influence dépasse le strict cadre mathématique. En effet, la place de la Mécanique dans la

[160] ***"The main subject of this conference was the chaotic behavior exhibited by many nonlinear dynamical systems; I am referring to the chaotic behavior inherent in the solutions of various deterministic equations of motion, and not to chaotic behaviour obtained by adding external noise sources. This inherent chaotic behavior arises when some orbits (or solutions) have an extremely 'sensitive dependence on their initial conditions'", [HELLEMAN, R.H.G., 1980a], p. ix (en italique dans le texte).***

[161] ***"It is among the latter systems that statistical mechanicians search for – and find – ergodic systems, i.e., (weakly) chaotic systems in which virtually every orbit covers the surface of constant energy densely and uniformly. The general nonintegrable system, however, is not (globally) ergodic, but has chaotic regions throughout its phase space.", [HELLEMAN, R.H.G., 1980a], p. ix (en italique dans le texte).***

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

philosophie scientifique, comme dans les débats philosophiques du XIXème est importante. La pensée mécaniste et son compagnon, le déterminisme, occupent ce vaste terrain.

Nous allons montrer que la fin du XIXème siècle voit l'émergence et le développement de plusieurs champs de la science mettant directement en question le hasard et le déterminisme. Les philosophes prennent part aux débats, élargissant les réflexions aux questions de libre arbitre ou à celle de la Vie. Les débats, qu'on peut faire remonter à Laplace au début du XIXème siècle, prennent une tournure particulière à la fin du XIXème siècle, au croisement de la Mécanique statistique naissante, des questions de probabilités (en mathématique et en physique) et des théories des équations différentielles, liées à des questions de dynamique. Nous allons montrer de cette manière que la fin du XIXème siècle, avec la remise en question d'une conception mécaniste de la science, est un "moment" d'origine.

Le point central de ce chapitre, consacré à la fin du XIXème siècle, est bien la remise en question de ce paradigme, comme résultat de la confrontation avec deux problèmes : la question de la "sensibilité aux conditions initiales", dont le cadre déborde très largement les mathématiques d'Hadamard et Poincaré, et la thermodynamique, qui conduira aux débats sur la Mécanique statistique.

Nous étions cantonnés, jusqu'à présent, à l'environnement scientifique proche de la pensée mathématique de Poincaré. Nous entreprenons maintenant de dresser un panorama plus étendu du contexte scientifique et philosophique, en partant des réflexions du même Poincaré. Si il est un mathématicien reconnu, il a développé une réflexion philosophique et épistémologique également originale, à propos des sujets qui posent véritablement questions au tournant du XXème siècle. Son texte "Le hasard" mérite une attention toute particulière.

Poincaré n'est évidemment pas le seul. Le mécanicien Boussinesq lance vers 1878 un débat philosophique important au sujet du déterminisme. Nous verrons comment il a évolué et se trouve au carrefour de multiples discussions. Maxwell et Boltzmann ont contribué pour leur part à interroger les limites de la Mécanique en rapport avec la méthode "statistique". Si les probabilités interviennent au cœur des débats en association avec des questions d'instabilités, sous l'impulsion des considérations de théorie cinétique des gaz et de Mécanique statistique, nous nous attacherons à montrer comment une vision très "statistique" ("fréquentiste") se met en place. Les bouleversements conceptuels sont considérables et heurtent le mécanisme triomphant de la fin d'un XIXème siècle.

A travers ces débats multiples se posent plusieurs **questions nouvelles**, sur le plan scientifique et philosophique, auxquelles les savants donnent des **réponses variées**. La question des instabilités, la place des probabilités en physique (et leur définition), la définition d'une notion d'ergodicité, sont au cœur des problématiques. Ces questions, ces réponses et leur évolution au XXème siècle, constituent une partie essentielle de l'histoire des conceptions scientifiques du chaos.

2.1. Poincaré, le hasard et le déterminisme

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Les réflexions de Poincaré sur le hasard intéressent l'historien du chaos au premier chef. Nous avons vu qu'elles sont reprises de manière récurrente dans les multiples "historiques" de la notion de chaos et le texte "Le hasard", de 1907, est cité régulièrement pour expliquer que Poincaré avait déjà compris une grande partie de ces enjeux. Nous allons analyser le texte de Poincaré et montrer ce qu'il possède de commun avec les débats philosophiques de la fin du XIXème. Pour avoir une vision claire des propositions de Poincaré et dissiper le caractère rétrospectif des affirmations à leur sujet, nous nous engageons dans un rapprochement avec tout le contexte de la fin du XIXème qui inclura ensuite les questions de la Mécanique statistique naissante.

a. "Le hasard", 1907 : où l'on retrouve la "sensibilité aux conditions initiales"

Souvent très directement associée au chaos, la seconde partie de "Le hasard" a été ressassée du fait de ses relations avec la "sensibilité aux conditions initiales". La lecture du texte laisse découvrir le lien avec ce que nous avons présenté au sujet d'Hadamard et Duhem :

"Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissons exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit." [162]

La problématique très large dans laquelle cet extrait s'inscrit se comprend à la lecture de l'intégralité du document. D'une part, c'est une réflexion générale sur le hasard et ses rapports au déterminisme laplacien. D'autre part, il exprime une série d'idées de Poincaré, à la fois originales et imprégnées du contexte d'interrogation sur ces sujets de l'actualité philosophique et scientifique vers 1900.

Une réflexion sur le hasard et le déterminisme

Rappelons tout d'abord, que lorsqu'il écrit ce texte, Poincaré est professeur de physique théorique et calcul des probabilités. A ce titre il est intéressé par les mathématiques du hasard. L'article de 1907 est une réflexion philosophique sur la notion de hasard, une sorte de complément à ses ouvrages plus techniques [163], reprise également dans son ouvrage de 1908, Science et méthode [164].

[162] ***[POINCARE, H., 1907], p. 138 (en italique dans le texte).***

[163] Le texte est repris en introduction au Calcul des probabilités de 1912, [POINCARE, H., 1912a].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"Le hasard" se présente comme une réflexion sur la question des "lois du hasard" (peut-on donner un sens à cela ?) et même plus simplement "qu'est-ce que le hasard ?". Poincaré souligne que les conceptions dominantes, à son époque, vont au déterminisme absolu (dans le monde inorganique) et développe ce que nous appelons le déterminisme laplacien (sans citer Laplace) dans lequel le hasard est la mesure de notre ignorance. A nos yeux, la réflexion de Poincaré est à mettre en correspondance directe avec les réflexions de Laplace, préliminaire à sa Théorie Analytique des Probabilités.

Poincaré adhère à l'idée de déterminisme laplacien [165] . En revanche, il rejette l'idée de hasard comme simple résultat de notre ignorance. Pour Poincaré cette conception est insuffisante car elle n'explique pas pourquoi il devrait exister des lois du hasard [166] . L'idée directrice est, comme chez Laplace, de justifier l'applicabilité du calcul des probabilités dans un monde qui est déterministe. Pour établir une définition admissible, Poincaré propose l'analyse de diverses situations, considérées communément comme "fortuites" [167] .

Les causes "très petites"

La première situation est celle d'un cône sur sa pointe et c'est à la suite de cet exemple qu'intervient le couplet "Une cause très petite...". Le second exemple est tiré d'une remarque de météorologie : l'atmosphère en équilibre instable (en présence d'un cyclone par exemple) ne permet pas de faire des prévisions car "un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là" [168] . La possibilité d'avoir un grand effet à partir d'une petite cause conduit, selon Poincaré, à des situations que nous appelons "hasard". Elles sont associées à des questions d'équilibre instable. Deux autres exemples étayent son analyse : la distribution des petites planètes sur le zodiaque et la roulette.

Pour Poincaré, cette définition ne suffit pas à expliquer pourquoi le hasard répond à certaines lois. La raison est ailleurs, comme il l'explique pour le jeu de roulette. Dans le jeu, le résultat final dépend de l'impulsion initiale et de la probabilité d'avoir telle ou telle impulsion. Or la probabilité que l'impulsion initiale soit entre a et $a+\varepsilon$ est identique à celle

[164] [POINCARE, H., 1908].

[165] Elle est affirmée dès les premiers paragraphes ; en outre, l'expression "considérer comme fortuit" traduit ce sentiment.

[166] Poincaré explique que dans ce cas, dès qu'un phénomène peut se soumettre à une description scientifique notre ignorance se dissipe : le caractère aléatoire devrait expirer lui aussi et les lois du hasard disparaître avec le mécanisme mis en évidence. [POINCARE, H., 1907], p. 137.

[167] Poincaré donne trois séries de causes. En plus des deux débattues ici, un troisième point de vue lui paraît plausible : dans une enquête scientifique sur un phénomène, il est impossible de réunir tous ses antécédents. Seul un certain voisinage d'antécédents rentrera en ligne de compte. Dans cette sélection de circonstances, il se peut qu'on laisse de côté des éléments pourtant déterminants, ce qui pourrait être une cause de hasard. [POINCARE, H., 1907], p. 144-5.

[168] [POINCARE, H., 1907], p. 139.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

correspondante à l'intervalle *[a+ ε , a+2 ε]*, si *ε* est assez petit : il s'agit d'une propriété mathématique commune à toute fonction analytique représentant la probabilité de l'impulsion. Au final, si la situation *[a, a+ ε]* fait apparaître le rouge et *[a+ ε , a+2 ε]* le noir, globalement, la probabilité de tomber sur rouge est la même que celle de tomber sur noir. Les données du problème sont contenues dans la probabilité de l'impulsion du départ. Ces données pourtant sont gommées dans le résultat final, car la probabilité rouge / noir ne dépend pas des caractéristiques singulières de la probabilité initiale, mais uniquement d'une propriété commune à toutes les distributions de probabilité de la donnée initiale. La situation est analogue pour la distribution des planètes. Pour Poincaré, c'est une raison valable à l'existence de lois du hasard.

Les causes "très complexes"

D'autres mécanismes sont susceptibles de répondre au problème de l'origine du hasard. En théorie cinétique des gaz, Poincaré avance que la petitesse des causes associée à leur complexité et leur grand nombre produit une répartition aléatoire. Dans ce cas, où la complexité des causes intervient, Poincaré centre sa réflexion sur le battage des cartes, qui devient une sorte de paradigme. Un grand nombre de battages répétés engendre une situation de hasard, au sens d'une équiprobabilité des dispositions, quelque soit la permutation répétée (c'est-à-dire l'habitude de mélange d'un joueur). La situation est différente lorsque le résultat d'une permutation produit un résultat certain, reproduit à chaque battage. Autrement dit, s'il subsiste un **invariant** au cours du processus, si quelque chose des conditions initiales est conservé, alors il n'y a plus de hasard [169] .

Les leçons de "Le hasard"

Le texte de Poincaré est intéressant car il renouvelle l'analyse de Laplace, l'approfondit en reprenant des exemples et des arguments de son temps. Il réévalue la notion de hasard dans ses rapports au déterminisme, avec deux propositions de causes "très petites" et causes "très complexes". Il donne même les points qu'il reste à élucider dans ses propositions : par exemple, le hasard ainsi défini, est-il objectif [170] ?

On peut interpréter les propositions en disant que, pour lui, le hasard est le fait de notre incapacité à prédire et qu'au fond des choses, ontologiquement si l'on veut, le monde est déterminé et il n'existe pas de hasard. Il légitime le calcul des probabilités dans les deux cas analysés grâce à des propriétés mathématiques mises en évidence dans des situations idéalisées (roulette, battage des cartes...). De manière générale, il s'appuie sur de nombreux points de mathématiques des probabilités, de théorie cinétique des gaz, d'instabilité, et de philosophie, relatifs au déterminisme.

[169] [POINCARE, H., 1907], paragraphe VI, p. 145-149.

[170] En effet, les notions de "très petit" ou de "très complexe" n'ont qu'une signification relative. Poincaré justifie la notion de "très petit" par l'argument suivant : "Une différence est très petite, un intervalle est très petit, lorsque dans les limites de cet intervalle, la probabilité reste sensiblement constante. Et pourquoi cette probabilité peut-elle être regardée comme constante dans un petit intervalle ? C'est parce que nous admettons que la loi de probabilité est représentée par une courbe continue", [POINCARE, H., 1907], p. 154.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Pour abonder dans ce sens, on peut ajouter que Poincaré propose une alternative à l'explication du "très complexe" comme absence d'invariance dans le phénomène observé. Dans le cas d'un processus de mélange (de cartes, de fluide, par exemple), il associe le "très complexe" avec l'uniformité du mélange final. Poincaré souligne que cette uniformité est le résultat de l'infirmité de nos sens et de la puissance limitée de nos instruments ; "si la théorie cinétique est vraie", le mélange devrait être plus subtil que ce que nous révèle nos observations, humaines, limitées. Poincaré s'appuie, en outre, sur les observations de Léon Gouy sur le mouvement brownien pour faire remarquer que le microscope révèle déjà quelques unes de ces subtilités [171] .

Cette limitation de notre connaissance fait écho à l'idée selon laquelle nous ne pouvons connaître la "situation initiale qu'*approximativement*" [172] . Le "très complexe", et le "très petit" également, renvoient donc au dépassement de nos capacités humaines. En un sens, la pensée de Poincaré n'est pas très éloignée de celle de Laplace : à l'ignorance des lois de la nature, Poincaré propose de substituer notre incapacité, humaine, à ne pas voir les subtilités dans les conditions initiales (trop petites) ou l'hétérogénéité sous l'uniformité. Au fond, il suggère de retenir cette définition du hasard : un phénomène (déterminé, comme tous les phénomènes) qu'il nous est impossible de prédire et qui nous apparaît donc "comme fortuit".

La pensée de Poincaré est plurielle et complexe car elle offre des alternatives, alors que Laplace renvoyait une image figée, enfermée du déterminisme et du hasard. Pour appréhender tous les ressorts du texte de Poincaré il faut le rapporter au riche contexte de débats philosophiques et scientifiques de la fin du XIXème siècle.

b. Instabilités, solutions singulières et déterminisme : les débats philosophiques

Les débats philosophiques dont il est question, de la même manière que le texte "Le hasard", se situent souvent à la frontière de la philosophie et des mathématiques. Cette tonalité est héritée des réflexions de Laplace, et Poincaré s'insère dans ces débats quelques années après un renouvellement des perspectives proposé par Joseph Boussinesq, en 1878. Nous allons déterminer les traces laissées dans son texte de 1907, car il est raisonnable de penser que Poincaré connaissait tout ou partie des questions abordées, vu les noms qui y sont attachés : Poisson, Saint-Venant, Boussinesq ou encore Maxwell [173] .

Déterminisme et mathématiques des équations différentielles

Le rapprochement entre mathématiques et déterminisme est d'abord le fait de Laplace.

[171] Ibid., p. 153. "Il n'y a pas de chance pour qu'aucun homme discerne jamais la variété infinie qui, si la théorie cinétique est vraie, se dissimule sous l'apparence uniforme d'un gaz. Et cependant, si on adopte les idées de Gouy sur le mouvement brownien, le microscope ne semble-t-il pas sur le point de nous montrer quelque chose d'analogue ?". Nous renvoyons à notre paragraphe consacré à la question du mouvement brownien, p. 133.

[172] Dans le paragraphe "Une cause très petite…", [POINCARE, H., 1907], p. 138 (en italique dans le texte).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

En effet, le déterminisme de Laplace trouve son inspiration dans l'archétype des lois de la nature, la gravitation selon Newton, exprimée en terme d'équations différentielles. Il faut pourtant nuancer cette affirmation. Rappelons au préalable le passage écrit par Laplace, considéré depuis comme la base de la doctrine du déterminisme laplacien :

"Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux." [174]

D'une connaissance de la situation présente, le "démon" de Laplace extrapolerait à tout le passé et l'avenir, en sous-entendant qu'ils sont uniques. Là s'arrête la comparaison avec le monde des équations différentielles. En effet, il faut souligner qu'à cette époque, aucun théorème d'existence de solution des équations différentielles n'est encore connu [175]. Le parallèle entre les doctrines métaphysiques et les mathématiques doit être manié avec précaution. Il nous paraît cependant légitime de considérer, avec R. Thom, que Laplace a eu une intuition du résultat mathématique, qu'il aurait bien pu considérer comme une évidence [176].

De là vient la "crise" des solutions singulières, entamée dès 1806 avec un mémoire de D.S. Poisson [177] portant sur les solutions des équations différentielles. En présence d'une intégrale singulière, l'unicité du mouvement, de la solution, est perdue. Poisson affirme qu'il y a une difficulté avec le déterminisme absolu :

[173] Dans [HACKING, I., 1983], I. Hacking donne un historique du concept de déterminisme et discute les "craquements" et débats autour de ce concept, au XIXème siècle. Hacking met en avant les discussions des statistiques mathématiques en rapport à la question du déterminisme. Pour l'histoire des solutions singulières, Hacking mentionne surtout Saint-Venant et Maxwell (Ibid., p. 464-465). D'autres réflexions, plus proches de nos vues, sont développées par G. Israël dans [DAHAN, A., CHABERT, J-L., CHEMLA, K., 1992], p. 249-273. Le lien avec les mathématiques des équations différentielles est critiqué. Selon Israël, le lien est ténu et ne peut pas être tenu pour direct ou évident.

[174] [LAPLACE, P-S., 1820], p. vi-vii : le texte est tiré de l'introduction de la troisième édition du traité, mais n'a pas subi de changements significatifs. Les mêmes termes sont employés en 1814 dans son Essai philosophique sur les probabilités et dans un autre chapitre, l'"analyse des hasards", 40 ans plus tôt ([DAHAN, A., CHABERT, J-L., CHEMLA, K., 1992], p. 372).

[175] En outre, le célèbre théorème de Cauchy relatif à cette question fournit (trente ans plus tard), sous certaines conditions seulement, l'existence et l'unicité de solutions, avec une caractéristique : l'existence de telles solutions est assurée seulement localement.

[176] Nous rejoignons les thèses d'Israël à ce sujet, dans [DAHAN, A., CHABERT, J-L., CHEMLA, K., 1992]. Le constat dressé par R. Thom apparaît dans l'introduction de la réédition de l'œuvre de Laplace [LAPLACE, P.S., 1986].

[177] Siméon Denis Poisson (1781-1840), mathématicien, physicien français. Ces premiers travaux portent justement sur les équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles, en relation avec les problèmes de la physique.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"Le mouvement, dans l'espace, d'un corps soumis à l'action d'une force donnée, et partant d'une position et d'une vitesse aussi données, doit être absolument déterminé. C'est donc une sorte de paradoxe, que les équations différentielles dont le mouvement dépend puissent être satisfaites par plusieurs solutions." [178]

Comme G. Israël le constate, Poisson dénote un paradoxe, vite oublié : dans son Traité de mécanique [179], il prétexte une impossibilité des forces naturelles à engendrer des solutions singulières pour éluder le paradoxe.

"Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale" (1878)

Le débat sur le déterminisme prend une grande ampleur avec la réflexion du physico-mathématicien J. Boussinesq [180], un contemporain de Poincaré, dans un mémoire intitulé "Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale", en 1878 [181]. Boussinesq l'affiche, le "véritable déterminisme" s'identifie au déterminisme mathématique des équations différentielles de la Mécanique. Sans y faire référence explicitement, le théorème d'existence et d'unicité des solutions est bien présent à son esprit. Ce que propose Boussinesq en 1878, c'est de réhabiliter les solutions singulières apparaissant dans l'intégration des équations différentielles. Il a connaissance des idées de Poisson, par ses propres recherches, et souligne que personne n'a attiré l'attention sur ce sujet depuis 1806.

Avant tout Boussinesq cherche à condamner les principes vitalistes et pour cela il se sert habilement des solutions singulières. Il sépare les phénomènes en deux classes. D'une part, les mouvements régis par les équations différentielles, sans solution singulière, correspondent au monde inanimé. D'autre part, les phénomènes qui présentent la pathologie, la possibilité d'indétermination et de non unicité de la solution, la tendance à la bifurcation, représentent les phénomènes de la vie. Boussinesq tire donc parti d'une propriété mathématique des équations différentielles pour échafauder un principe de l'ordre de la métaphysique. On peut dégager deux influences dans les pensées de Boussinesq, clairement assumées par l'auteur. Claude Bernard (1813-1878) en premier lieu, dont la discussion sur le déterminisme est bien connue. L'esprit de Bernard hante tout le mémoire, depuis le vocabulaire et les notions utilisées jusqu'à l'ambition de défendre le déterminisme et d'anéantir toutes les images vitalistes [182]. Boussinesq reprend partiellement les notions de "forces exécutives" et "forces directrices" définies par Bernard [183] pour construire un "principe directeur". Selon lui, quand apparaît une bifurcation, un "principe directeur", c'est-à-dire le libre choix du système animé, entre

[178] ***[POISSON, S.-D., 1806], p. 106. (En italique dans le texte).***

[179] [POISSON, S.-D., 1833], cité dans [DAHAN, A., CHABERT, J-L., CHEMLA, K., 1992], p. 263.

[180] Joseph Boussinesq (1842-1929), savant français, spécialiste de mécanique et physique mathématique.

[181] Le mémoire est publié dans [BOUSSINESQ, J., 1878]. Une note à l'Académie des Sciences a été publiée deux années auparavant, sur le même thème [BOUSSINESQ, J., 1877] : elle est présentée par Saint-Venant. Boussinesq complète son mémoire en 1879, dans [BOUSSINESQ, J., 1879].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

en jeu pour choisir la direction à suivre, indépendamment des lois mécaniques du processus.

Si l'objectif premier de Boussinesq est d'opérer la séparation entre vie et phénomène inanimé, ses vues s'étendent au-delà de cette distinction [184]. Son ambition est de produire une défense du déterminisme absolu (sur le monde inanimé tout au moins), sujet à diverses attaques. Il entend, par exemple, résoudre la contradiction entre l'irréversibilité apparente du monde et la réversibilité des lois mécaniques. Boussinesq cite une réflexion de Philippe Breton, ingénieur, publiée dans un opuscule intitulé La réversion ou le monde à l'envers en 1876, dans lequel l'ingénieur fait usage de l'argument suivant : d'après les équations de la Mécanique, un renversement des vitesses de tous les atomes de l'univers produirait un mouvement exactement inverse de celui que nous connaissons, procédant à un retour vers les origines [185]. L'ingénieur utilise cette idée contre le déterminisme mécanique absolu et plaide en faveur de la recherche de nouvelles lois. Boussinesq lui rétorque que le monde inanimé se satisfait bien de la réversibilité des lois mécaniques. Pour le monde animé il existe une possibilité d'avoir des solutions singulières, donc des

[182] Boussinesq cite, en avant-propos de son mémoire, l'ouvrage célèbre Introduction à la médecine expérimentale, en 1865, dans lequel Cl. Bernard prône une version métaphysique du déterminisme : "Il faut admettre comme un axiome expérimental que chez les êtres vivants aussi bien que dans les corps bruts les conditions de l'existence de tout phénomène sont déterminées d'une manière absolue. Ce qui veut dire en d'autres termes que la condition d'un phénomène une fois connue et remplie, le phénomène doit se reproduire toujours et nécessairement à la volonté de l'expérimentateur. La négation de cette proposition ne serait rien d'autre chose que la négation de la science même. En effet, la science n'étant que le déterminé et le déterminable, on doit forcément admettre comme axiome que dans des conditions identiques tout phénomène est identique et qu'aussitôt que les conditions ne sont plus les mêmes le phénomène cesse d'être identique.", [BERNARD, Cl., 1865], p. 115-116.

[183] "Il n'y a en réalité, qu'une physique, qu'une chimie et qu'une mécanique générales, dans lesquelles rentrent toutes les manifestations phénoménales de la nature, aussi bien celles des corps vivants que celles des corps bruts. Il n'apparaît pas, en un mot, dans l'être vivant, un seul phénomène qui ne retrouve ses lois en dehors de lui. De sorte qu'on pourrait dire que toutes les manifestations de la vie se composent de phénomènes empruntés, quant à leur nature, au monde cosmique extérieur, mais seulement manifestés sous des formes ou dans des arrangements particuliers à la matière organisée, et à l'aide d'instruments physiologiques spéciaux [...] Je pourrais encore exprimer l'idée qui précède, en disant que, dans les corps vivants, les **forces directrices** ou évolutives sont morphologiquement vitales, tandis que leurs **forces exécutives** sont les mêmes que dans les corps bruts [...] La morphologie organique caractérise donc l'être vivant ; mais cette loi morphologique, qui donne naissance à la matière organisée, est servie, cependant, par les forces physico-chimiques générales.", Citation de [BERNARD, Cl., 1867], p. 223, reprise par Boussinesq dans son avant-propos [BOUSSINESQ, J., 1878] (nous mettons en évidence). "Les sciences modernes, en admettant le déterminisme, en font la condition même de la liberté, ce qui distingue radicalement le déterminisme du fatalisme. En effet, l'acte libre ne peut exister que dans la période directrice du phénomène ; mais, une fois dans la période exécutive, le déterminisme doit être absolu, pour que la liberté en découle nécessairement.", Ibid., p. 233.

[184] Les analyses produites par les auteurs déjà mentionnés se résument à la discussion de cette conciliation. Cependant, il nous est apparu que le mémoire aborde tout un panel de problèmes que Boussinesq lie à cette question. Il nous intéresse de détailler ces points du fait de leur ressemblance avec certains points de la réflexion menée par Poincaré.

[185] L'argument est très proche des débats de la cinétique des gaz, notamment le paradoxe de réversibilité de Loschmidt. Ces considérations sont discutées plus loin, p. 106.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

bifurcations (des "lieux de bifurcations" pour reprendre ses termes) et il n'y a donc "pas lieu d'admettre, comme théoriquement possible, la réversion depuis une poire pourrie jusqu'au bourgeon à fruit d'un poirier" [186] .

Les paragraphes 19 et 20, intitulés "Les principes généraux de la mécanique paraissent ne permettre l'existence d'intégrales singulières que pour des modes particuliers d'état initial" et "Ces modes d'état initial ne sont autre chose que les conditions matérielles de la vie", sont également très intéressants. Boussinesq annonce ici que seules des conditions initiales exceptionnelles assurent l'existence d'intégrales singulières et par là le phénomène de vie :

"[...] les circonstances d'état initial compatibles avec l'existence de solutions singulières paraissent assez spéciales pour n'avoir qu'une probabilité pratiquement nulle de se produire fortuitement. Elles sont peut-être aussi impossibles à réaliser d'une manière artificielle, sinon plus, qu'il l'est de faire tenir sans appui un cône sur sa pointe." [187]

De telles affirmations s'appuient sur des analyses de systèmes physico-chimiques, dans lesquelles la question de l'équilibre instable fait figure d'archétype de solution singulière. Instabilité et singularité sont les deux notions qui reviennent constamment dans le propos de Boussinesq.

Il existe plusieurs points communs avec le texte de Poincaré, malgré les différences de ton et de point de vue. Les deux discours sont axés sur une défense du déterminisme [188] ; cependant, l'un cherche une conciliation avec la vie, l'autre avec le hasard. On aura relevé que l'exemple du cône en équilibre illustre la notion d'équilibre instable, de la même manière que chez Poincaré. Néanmoins, les exemples ne servent pas les mêmes discours, ni de manière identique, puisque Poincaré propose de débattre d'une vision du déterminisme alors que Boussinesq impose la sienne. L'équilibre instable ou les "causes très petites" se retrouvent également dans la notion de "travail décrochant" de Saint-Venant [189] : selon ce dernier, en termes mécaniques, un choix se réduit à un très petit travail (au sens de la physique), que la nature a pu réussir à annuler dans les organismes animés [190] . C'est un point à rapprocher du "principe directeur" de Boussinesq.

Les débats philosophiques

[186] [BOUSSINESQ, J, 1878], p. 86-87. Le chapitre 15 est consacré à la question de la réversibilité et du problème de dissipation de l'énergie.

[187] [BOUSSINESQ, J., 1878], p. 113-114.

[188] La remarque de Poincaré selon laquelle "nous sommes devenus des déterministes absolus, et ceux mêmes qui veulent réserver les droits du libre arbitre humain laissent du moins le déterminisme régner sans partage dans le monde inorganique" ([POINCARE, H., 1907], paragraphe I) est plus qu'une vague allusion à Boussinesq et Cl. Bernard.

[189] [SAINT-VENANT, A.J.C.B. de, 1877]. Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886), mathématicien, physicien français. Il est connu pour ses théories de l'élasticité et d'autres travaux en mécanique (il est élu à l'Académie des Sciences en Mécanique en 1868, en remplacement de Poncelet) et mécanique des fluides.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Nous pouvons étayer ces remarques à travers la participation de différents philosophes à ces réflexions sur le déterminisme. Le philosophe du nom de Paul Janet a écrit la préface à l'opuscule de Boussinesq et cherche à valoriser la réflexion de Boussinesq. Selon Janet, il revient aux mathématiciens de lever une difficulté amenée par les mathématiques dans la question du déterminisme. La préface élogieuse témoigne du vif intérêt des philosophes pour la solution avancée par Boussinesq, comme de la très bonne compréhension des arguments du mathématicien.

De manière plus révélatrice, un sondage dans la Revue philosophique de la France et de l'étranger dans les années 1876-1900 [191] suffit à montrer l'ampleur que prend cette discussion du libre arbitre, de la vie et leur conciliation avec le déterminisme. A. Fouillée, Ch. Renouvier, E. Naville, J. Delboeuf, A. Darlu, pour ne citer que ces quelques philosophes, s'engagent dans le débat. La liberté et le déterminisme, écrit par Fouillée [192], est le plus discuté (la première édition date de 1872). La réflexion réserve un chapitre à "l'indéterminisme mécanique" dont la base "scientifique" est justement constituée des idées de Boussinesq, Saint-Venant et Cournot [193]. Cournot s'était engagé à proposer une conciliation du déterminisme et de la liberté, vers 1840 [194], prenant appui sur un "pouvoir directeur" [195].

Les réflexions de Fouillée sur l'indéterminisme mécanique ne présentent que peu de nouveautés par rapport aux idées précédentes (il s'agit davantage d'une synthèse des considérations connues à l'époque) mais montre le débat suscité par ces thèses. L'édition de 1890 explique les divergences d'opinion entre les philosophes E. Naville, Ch.

[190] En d'autres termes, l'effet mécanique d'un choix, c'est-à-dire le processus cérébral qui préside à un choix, nécessite un travail (mécanique) très faible. La note est rédigée en complément de la première note de Boussinesq, en 1877 : [SAINT-VENANT, A.J.C.B., 1877] et [BOUSSINESQ, J., 1877].

[191] Dans la série de revues 1878-1900, il n'est quasiment pas une année sans qu'une note, un article ou un débat ne soit publié à ce sujet. Les années précédentes (1876 étant la première année de publication de la revue) ne consacrent aucun article : 1878 est un tournant, ce dont on ne s'étonnera pas, puisqu'il s'agit de l'année de publication du mémoire de Boussinesq.

[192] Alfred Fouillée (1838-1912), philosophe français. Nous avons consulté la troisième édition du traité : [FOUILLEE, A., 1890].

[193] Antoine Augustin Cournot (1801-1877), mathématicien français (probabilité, économie mathématique). Les arguments de Cournot sont également évoqués dans le traité de Boussinesq. Cournot, en effet, fut le premier après Poisson à tenter de trouver une solution à la question des solutions singulières. Cournot raisonne sur ces présupposés : les équations différentielles reflètent le monde tel qu'il est ; les faits physiques sont déterminés, il faut donc que les solutions singulières soient artificielles, un "paradoxe" comme l'a dit Poisson, quelque chose dont il faut se débarrasser. En ce sens, Cournot apporte peu à ce débat.

[194] [COURNOT, A.A., 1841]. Pour quelques explications supplémentaires, on peut consulter l'article de G. Israël dans [DAHAN, A., CHABERT, J-L., CHEMLA, K., 1992], p. 263-264.

[195] En substance, l'homme peut réduire le travail nécessaire à l'exécution d'une tâche (par une machine par exemple). En passant à la limite infinitésimale, Cournot imagine ce travail réduit à zéro. Le pouvoir directeur oriente le phénomène en imprimant une direction et en s'ajoutant à l'effet des forces physiques. Ce pouvoir à une double postérité : le travail décrochant de Saint-Venant et, antérieurement, la réflexion de Cl. Bernard.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Renouvier ou encore Tannery [196] . Pour ne citer qu'un passage, nous sélectionnons un commentaire des idées de Boussinesq et Saint-Venant, faisant suite à une longue discussion des problèmes posés par l'accord entre le principe physique de conservation de l'énergie et le "changement de direction d'un mouvement dans l'espace, sans création de force", autre dénomination du "pouvoir directeur" :

"[...] changer la direction d'un mouvement sans mouvement antécédent et par l'intervention d'une force supérieure ne serait chose possible que s'il y avait un moment d'équilibre et d'indétermination. Il faut préalablement que la balance soit en équilibre et que l'ensemble des forces qui agissent sur elle aboutisse à cet équilibre, à cette bifurcation des voies qui fait que la balance peut également s'incliner à droite ou à gauche [...] Mathématiquement, un cône peut se tenir sur sa pointe ; physiquement, non, parce qu'il y a toujours, d'un côté ou de l'autre quelque différence qui rompt l'équilibre. [...] Dira-t-on que la force mécanique qui rompt l'équilibre peut-être infiniment petite ou même égale à zéro ? – C'est l'hypothèse de Cournot et de M. de Saint-Venant [...]" [197]

Que nous prouvent ces arguments ? De manière très claire il apparaît que, sur le terrain philosophique, le déterminisme est beaucoup discuté depuis le mémoire de Boussinesq. On notera la grande réactivité du milieu philosophe à la problématique et la culture scientifique dont ces philosophes témoignent (les idées de Boussinesq sont visiblement bien comprises). Ces réflexions n'ont certainement pas échappé à Poincaré, lui-même philosophe et mathématicien, et placent "Le hasard" dans une période agitée philosophiquement. Les réflexions du britannique J.C. Maxwell, dans les mêmes années, montrent qu'il ne s'agit pas d'une préoccupation exclusivement française.

c. Maxwell et le déterminisme

En 1873, Maxwell a rédigé un essai intitulé "Est-ce que le progrès de la science physique tend à donner un avantage à l'opinion de nécessité (ou déterminisme) sur celui de la contingence des évènements et le libre arbitre ?" [198] . Il est tout à fait naturel de rapprocher cette réflexion des réflexions philosophiques précédentes et des textes de Boussinesq et Poincaré. Maxwell est plutôt tourné vers des considérations de théorie cinétique des gaz et sa méthode statistique, mais il aborde, dans ce cadre, la question de la stabilité. Pour Maxwell, un phénomène est dit stable si une variation infinitésimale de l'état présent n'affecte que de manière infinitésimale l'état futur. Pour signifier le rapport aux questions sur le déterminisme, il affirme :

[196] Le philosophe Ernest Naville (1816-1909) est notamment l'auteur d'un ouvrage sur Le Libre arbitre : étude philosophique en 1898 [NAVILLE, E., 1898], incluant sa réflexion en rapport avec le déterminisme. Des deux frères Tannery, Jules (1848-1910) et Paul (1843-1904) il n'est pas précisé duquel il s'agit précisément. On notera cependant que Jules est le mathématicien (dont la spécialité est le calcul différentiel et intégral), Paul le philosophe (connaisseur de l'histoire des mathématiques et certainement tenu au courant des grands développements mathématiques par son frère).

[197] [FOUILLEE, A., 1890], p. 142-143.

[198] "Does the progress of physical science tend to give any advantage to the opinion of necessity (or determinism) over that of the contingency of events and the freedom of will?", [MAXWELL, J.C., 1873].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

"Il est manifeste que l'existence de conditions instables rend impossible toute prédiction des évènements futurs, si notre connaissance de l'état présent est seulement approchée, et non précise. Le Professeur Balfour Stewart a bien noté que la stabilité physique est la caractéristique des systèmes dont la contemplation sert de base aux arguments des déterministes [...] et l'instabilité morale celle des âmes, qui fournissent à la conscience la conviction de libre arbitre." [199]

Maxwell illustre la stabilité par des exemples de la physique : ce sont les grands phénomènes du Système Solaire, suivant les lois élémentaires de la Dynamique. Quant aux phénomènes instables, ils sont plus compliqués, d'après Maxwell, mais ont des points communs :

"[…] le système a une grande quantité d'énergie potentielle, qui est susceptible d'être transformée en mouvement, mais qui ne peut pas commencer à l'être avant que le système soit parvenu à une certaine configuration, qui nécessite une dépense de travail pour être atteinte, qui, dans certains cas, peut être infiniment petite et, en général, n'a pas de proportion commune avec l'énergie libérée en conséquence. Par exemple, le rocher lâché par le gel et en balance sur un point singulier de la montagne [...]. Tous les grands résultats produits par les entreprises humaines dépendent de l'avantage pris sur ces états singuliers, lorsqu'ils surviennent. " [200]

Ainsi, la réflexion de Maxwell se rapproche singulièrement du "travail décrochant" de Saint-Venant, des idées de Boussinesq et Poincaré. Les conclusions de Maxwell sont un appel à une prise en compte plus étendue des phénomènes singuliers et instables, comme parade à un déterminisme qu'il juge dominant dans les conceptions scientifiques :

"Il apparaît alors que dans notre propre nature il y a plus de points singuliers [...] qu'il n'y en a dans les niveaux moins organisés. Mais les points singuliers sont, par leur nature, isolés, et ne forment pas une fraction appréciable dans l'écoulement de notre existence. Ainsi des prédictions des conduites humaines peuvent être faites dans beaucoup de cas. Premièrement pour celles qui n'ont pas de caractéristiques particulières et considérées en particulier en grand nombre, selon la méthode statistique. [...] Si, en conséquence, ceux qui cultivent la science physique [...] sont conduits dans la poursuite des arcanes de la science, à l'étude des singularités et instabilités, plutôt qu'aux continuités et stabilités des choses, la promotion d'une connaissance naturelle pourrait tendre à réparer le préjudice en faveur du déterminisme [...]" [201]

[199] ***"It is manifest that the existence of unstable conditions renders impossible the prediction of future events, if our knowledge of the present state is only approximate, and not accurate. It has been well pointed out by Professor Balfour Stewart that physical stability is the characteristic of those systems from the contemplation of which determinists draw their arguments […] and moral instability that of those developable souls, which furnish to consciousness the conviction of free will. ", [MAXWELL, J.C., 1873], p. 440.***

[200] ***"[…] the system has a quantity of potential energy, which is capable of being transformed into motion, but which cannot begin to be so transformed till the system has reached a certain configuration, to attain which requires an expenditure of work, which in certain cases may be infinitesimally small, and in general bears no definite proportion to the energy developed in consequence thereof. For example, the rock loosed by frost and balanced on a singular point of the mountain-side […].", [MAXWELL, J.C., 1873], p. 443.***

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Selon lui, l'"homme pragmatique" doit donc renoncer à un certain déterminisme construit sur l'idée de "mêmes causes, mêmes effets" [202] . Les données des débats de la fin du XIXème sont déjà partiellement exprimées dans l'exposé de Maxwell. Au regard de cette réflexion, "Le hasard" fait figure d'actualisation, une trentaine d'années après, servie par un mathématicien-physicien, spécialiste de calcul des probabilités, de mécanique et théorie cinétique des gaz.

d. Premières conclusions

A notre longue liste, il conviendrait d'adjoindre les réflexions d'Hadamard et de Duhem. On a vu les conséquences épistémologiques qu'ils tirent de la "sensibilité aux conditions initiales" dans le problème des géodésiques, au sujet des rapports entre mathématique et physique [203] . De cette instabilité des géodésiques, Poincaré est indéniablement au courant.

Le texte de Poincaré est donc nourri d'un vaste ensemble de réflexions philosophiques et mathématiques. Il cristallise une partie des positions philosophiques de son temps. Poincaré n'est pas fixé sur la défense d'une position, comme a pu l'être Boussinesq. Il produit un texte ouvert et propose des solutions, qui lui sont propres pour certaines, alors que d'autres sont partagées par ses contemporains et il cherche à les préciser dans ce cas.

Dans ces débats, la question de l'instabilité commence à s'installer. On peut se demander si elle ne devient pas un *themata*, en philosophie aussi bien qu'en mathématiques, s'insérant dans la dichotomie hasard et déterminisme, en la bousculant. Poincaré est celui qui perçoit le mieux l'enjeu en termes de conceptions du hasard et du déterminisme laplacien. Maxwell, Boussinesq et les philosophes considèrent l'instabilité comme une "liberté" dans un monde déterministe permettant de penser le monde animé, la Vie et le libre arbitre.

Des aspects plus scientifiques irriguent également ces réflexions. Ce sont les

[201] ***"It appears then that in our own nature there are more singular points […] than there are in any lower organisation. But singular points are by their very nature isolated, and form no appreciable fraction of the continuous course of our existence. Hence predictions of human conduct may be made in many cases. First, with respect to those who have no character at all, especially when considered in crowds, after the statistical method. […] If, therefore, those cultivators of physical science […] are led in pursuit of the arcane of science to the study of the singularities and instabilities, rather than the continuities and stabilities of things, the promotion of natural knowledge may tend to remove that prejudice in favour of determinism […].", [MAXWELL, J.C., 1873], p. 440.***

[202] [BRUSH, S.G., 1986], p. 591. Les positions de Maxwell sont en fait très difficiles à cerner, car très fluctuantes d'un indice à l'autre. Si dans l'ensemble il adhère à une conception statistique, le rapport à l'indéterminisme dans les phénomènes physiques n'est pas tout à fait clair. Dans l'article "Atom" écrit pour l'Enclyclopédie Britannica, Maxwell écrit par exemple : "the constancy and uniformity of the properties of the gaseous medium is the direct result of the inconceivable irregularity of the motion of agitation of its molecules.". Cité dans [BRUSH, S.G., 1986], p. 592. Pour d'autres indices allant dans ce sens, et dans le sens opposé, consulter [BRUSH, S.G., 1986], p. 591-3.

[203] Nous renvoyons au paragraphe détaillant ces débats, p. 72.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

questions de thermodynamique et de Mécanique statistique qui préoccupent d'ailleurs les savants davantage que les débats philosophiques. Cependant, les mêmes antinomiques, hasard (ou indéterminisme) et déterminisme (ou mécanisme) restent sous-jacent à ces problématiques de l'actualité scientifique du XIXème.

2.2. La naissance de la Mécanique statistique

Plus que sur des questions de libre arbitre, les préoccupations scientifiques à la fin du XIXème sont axées sur les connexions du déterminisme mécanique avec la thermodynamique, sur la théorie cinétique des gaz et sur la Mécanique statistique naissante. La facette scientifique du hasard et du déterminisme est importante, et même cruciale au regard du développement de la science au XXème siècle, du chaos en particulier.

De manière schématique, la Mécanique statistique est le résultat de l'introduction des probabilités au cœur des théories physiques, mécanistes. Ainsi, il apparaît d'emblée en quoi nos *themata* se trouvent au centre des discussions. Le terme de "Mécanique statistique" le reflète très bien : "Mécanique" renvoie naturellement à déterminisme (et accessoirement aux équations différentielles) tandis que "statistique" rappelle les probabilités et le hasard. Les positions par rapport au hasard et au déterminisme, ainsi que le lien avec les débats généraux évoqués jusqu'à présent, sont, en réalité, très subtils.

Au fond du problème, il y a les questions essentielles de la nécessité, de la légitimité, et de la justification de l'introduction de notions probabilistes en physique. L'irruption des probabilités dans le champ de la théorie physique amène des changements conceptuels importants et il y a manifestement une réticence à aborder la théorie physique autrement que par la voie classique, mécaniste, déterministe. Les paradoxes opposés aux conceptions de Boltzmann signent ces réticences.

Les tentatives de conciliation entre les probabilités et la Mécanique engendrent des interrogations nouvelles sur le hasard et le déterminisme, des théories de la Mécanique statistique, la notion d'ergodicité et des conceptions sur les probabilités. Poincaré a participé à ces réflexions. C'est pourquoi nous mettrons en exergue ses contributions de manière à en expliquer les enjeux et montrer les stigmates portés par son texte "Le hasard".

Enfin, les probabilités posent questions, au point que celles-ci sont, encore au début du XXème siècle, repoussées, une vision statistique "fréquentiste" est préférée. Ce n'est qu'un sursis avant la révolution quantique qui marquera la victoire d'un certain indéterminisme. A travers les positions de plusieurs savants nous dégagerons les principales tendances qui concourent à ce choix, incarné par la synthèse des Ehrenfest en 1911.

La Mécanique statistique renouvelle considérablement les problématiques scientifiques, à la fin du XIXème, mais également pendant tout le XXème siècle. Nous verrons par la suite que les interrogations et les réponses apportées dans ces débuts auront un impact très profond sur l'histoire des sciences du XXème siècle et l'histoire des

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

conceptions du chaos. Outre les notions d'ergodicité, les questions d'instabilité seront progressivement réévaluées dans le cadre de la physique, et non plus seulement de la philosophie, pour construire des notions de "stochasticité" et de chaos.

a. L'introduction des probabilités et statistiques en théorie cinétique des gaz : le rôle de J.C. Maxwell et L. Boltzmann

A la source de nombreuses interrogations en physique à la fin du XIXème se trouve la question de l'accord entre le premier et le second principe de la thermodynamique. R. Clausius avait formulé le problème par l'opposition, simplifiée :

"1) l'Energie du monde est constante, 2) l'Entropie du monde tend vers un maximum." [204]

Il s'agit par ailleurs de concilier la Mécanique avec la thermodynamique. Par leurs entreprises sur le sujet, Maxwell et Boltzmann vont construire les premiers éléments de la théorie cinétique des gaz et de la Mécanique statistique. Ils vont surtout inaugurer les bouleversements conceptuels en Mécanique.

Maxwell introduit la statistique

Les premières incursions de la statistique dans les problèmes de la physique remontent à R. Clausius (entre 1850 et 1857) et, d'une manière plus explicite, à J.C. Maxwell (1860-1867 pour les premières réflexions) [205] . Avec Clausius, la théorie cinétique des gaz, décrivant un gaz comme un système moléculaire mécanique, déterministe, est le point d'entrée des idées et méthodes statistiques en thermodynamique. Inspiré par la lecture de Herschel, Maxwell convertit plus systématiquement la théorie cinétique des gaz en une approche statistique. En 1850, le jeune Maxwell s'enthousiasme pour cette méthode [206] :

"On dit que l'Entendement doit fonctionner selon les lois de la raison. Ces règles sont, ou devraient être, contenues dans la Logique ; mais la science de la Logique reconnaît pour l'instant seulement les choses soit certaines, soit impossibles, soit entièrement douteuses, avec aucune desquelles nous devons (heureusement) raisonner. C'est pourquoi la vraie Logique pour ce monde est le Calcul des Probabilités, qui prennent en compte des amplitudes de probabilités

[204] ***Clausius clôt par ces mots son opuscule de 1864 [CLAUSIUS, R., 1864], Abhandlung IX, p. 44 : "1) Die Energie des Welt ist constant. 2) Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu."***

[205] Rudolf Clausius (1822-1888) et James Clerk Maxwell (1831-1879). Les ouvrages de S.G. Brush font référence en matière d'études de la thermodynamique et de la physique statistique de cette seconde moitié du XIXème siècle : [BRUSH, S.G., 1983] et [BRUSH, S.G., 1986].

[206] En 1850, un long article de J. Herschel (1792-1871), astronome britannique, publié dans la Edimburgh Review présente les travaux de statistique de A. Quetelet (1796-1874). La citation est extraite d'une lettre à son ami, L. Campbell, datée de 1850, où Maxwell exprime sa pensée concernant le calcul des probabilités. C'est l'unique indice, mis à part la parenté entre le raisonnement développé par Maxwell dans ses articles scientifiques et celui de Herschel, qui permette de lier les travaux statistiques de Maxwell aux réflexions de statistiques "sociales" de Quetelet.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

[...] Cette branche des maths [...] est la seule 'Mathématique pour l'homme pratique', comme nous devrions l'être. Ainsi, comme la connaissance humaine passe par les sens de telle manière que l'existence des choses extérieures est inférée seulement à partir du témoignage harmonieux (non similaire) des différents sens, l'Entendement, agissant par les lois de la raison, assignera différents degrés de probabilité à différentes vérités." [207]

La position de Maxwell est en décalage par rapport aux conceptions déterministes du XIXème siècle. Il suggère même que notre mode de connaissance est probabiliste [208]. En 1850, Maxwell n'a que 19 ans ; cette position de jeunesse sera progressivement transformée en un point de vue moins catégorique, plus "statisticien" que "probabiliste" comme nous le verrons.

En 1860, Maxwell utilise la notion de gaussienne (présente dans les travaux de Quetelet) pour construire une loi de distribution des vitesses des molécules du gaz [209], mais la propriété mathématique ainsi dégagée ne convainc pas ses collègues physiciens. Dans un second article de 1867 [210], il montre, malheureusement de manière erronée, que la distribution n'est pas affectée par les collisions à l'intérieur du gaz. Ce sera ensuite l'œuvre de Boltzmann de parachever l'approche statistique du problème.

Les premiers travaux de Boltzmann

Dès 1868, Boltzmann généralise la loi maxwellienne des vitesses dans le cas d'un gaz soumis au champ de gravité [211]. Mais son article majeur est publié en 1872 [212] et

[207] ***" They say that Understanding ought to work by the rules of right reason. These rules are, or ought to be, contained in Logic; but the actual science of Logic is conversant at present only with things either certain, impossible, or entirely doubtful, non of which (fortunately) we have to reason on. Therefore the true Logic for this world is the Calculus of Probabilities, which takes account of the magnitude of probability […] This branch of Math. […]is the only 'Mathematics for Practical Men', as we ought to be. Now, as human knowledge comes by the senses in such a way that the existence of things external is only inferred from the harmonious (not similar) testimonies of the different senses, Understanding, acting by the laws of right reason, will assign to different truths […] different degrees of probability." [CAMPBELL, L., GARNETT, W., 1969], p. 143.***

[208] La suite de la lettre est plus significative à ce sujet : " What is believing ? When the probability (there is no better word found) in a man's mind of a certain proposition being true is greater than that of being false, he believes it with a proportion of faith corresponding to the probability, and this probability may be increased or diminished by new facts. This is faith in general. When a man thinks he has enough of evidence for some notion of his he sometimes refuses to listen to any additional evidence pro or con, saying, 'It is a settled question, *probates probate* ; it needs no evidence ; it is certain.' This is knowledge as distinguished from faith." [CAMPBELL, L., GARNETT, W., 1969], p. 144.

[209] [MAXWELL, J.C., 1860].

[210] [MAXWELL, J.C., 1867].

[211] [BOLTZMANN, L., 1868].

[212] [BOLTZMANN, L., 1872].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

développe une analyse sur la base d'un gaz uniforme, supposé constitué de particules sphériques, toutes identiques. Sur ce modèle il détermine la distribution des vitesses et l'influence des collisions. De cette étude il ressort les grands principes, largement reconnus au XXème siècle : l'équation de transport de Boltzmann, la fonction *H* et le théorème *H*. Boltzmann identifie l'entropie, telle que Clausius la conçoit en 1865, avec la fonction *H*. Le théorème *H* montre que cette entropie "généralisée", c'est-à-dire valable pour des états hors de l'équilibre, suit un principe d'évolution monotone : c'est le second principe de la thermodynamique.

Dans le précèdent article de 1868, Boltzmann développait une autre approche, sur des idées purement probabilistes, pour éclairer l'existence de la distribution de Maxwell, à l'équilibre [213] . En comparant les deux approches en 1877, Boltzmann en déduit que la marche vers l'équilibre correspond au passage des états microscopiques peu probables vers les plus probables [214] . En introduisant la quantité W, probabilité d'un état macroscopique (c'est-à-dire le nombre d'états microscopiques correspondant à l'état macroscopique, rapporté au nombre total d'états microscopiques possibles), il obtient la formule célèbre : S=k.log W. Autrement dit, Boltzmann, dans son article de 1877, donne une **interprétation probabiliste à l'entropie**.

De Maxwell à Boltzmann

A nos yeux, cette transition de Maxwell à Boltzmann constitue une rupture essentielle dans l'histoire des sciences. On ne peut pas comprendre les controverses autour de Boltzmann, les textes de Poincaré et la fin du XIXème siècle sans avoir cela présent à l'esprit. Il convient de bien préciser plusieurs points, car il subsiste quelques ambiguïtés dans les interprétations de Boltzmann et Maxwell.

Boltzmann est un partisan indéfectible de l'atomisme et du mécanisme. Ses analyses reposent sur des considérations de Mécanique et il recherche un analogue mécanique de la thermodynamique. Il est néanmoins un utilisateur des probabilités dans ses théories physiques. Son article de 1877 montre qu'on peut obtenir une entropie sur la base de deux démarches, construites sur deux hypothèses opposées : un processus microscopique purement probabiliste (combinatoire) d'un côté, un phénomène mécanique de l'autre.

Maxwell, lui aussi mécaniste, déterministe et grand utilisateur de modèles mécaniques pour ses théories, n'en est pas moins celui qui a introduit systématiquement les statistiques en physique. La meilleure illustration des problèmes engendrés par cette dualité entre mécanique et statistique, par l'accord entre une pensée mécanique au niveau microscopique et les principes d'une thermodynamique macroscopique est le Démon de Maxwell. Par cette expérience de pensée, Maxwell s'applique à donner son interprétation de l'irréversibilité et à fixer des limites au second principe de la

[213] Boltzmann choisissait déjà de diviser l'énergie en parties discrètes, en supposant équiprobables les états microscopiques correspondants à une énergie donnée. Par un passage à la limite il montre alors qu'on retrouve une distribution gaussienne.

[214] Il s'agit d'un de ses articles les plus connus [BOLTZMANN, L., 1877]. Ces conclusions sont en rapport avec le "paradoxe de réversibilité" opposé à Boltzmann, cf. p. 106.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

thermodynamique [215] : le second principe est valable uniquement **statistiquement**.

Déterminisme et probabilités

Les débats sont centrés, implicitement, sur la question de la place des probabilités ou des statistiques dans la physique, ainsi que la légitimation de ces démarches. La justification du point de vue statistique, selon Maxwell, est fondée sur deux constats : le nombre de molécules à gérer est trop grand et il n'y a aucun moyen pratique permettant de suivre la trajectoire de chaque molécule individuellement. Le Démon de Maxwell rappelle également les idées de Laplace et son "Intelligence qui [...] connaîtrait toutes les forces dont la Nature est animée..." [216] . Cette dernière remarque n'a rien d'anecdotique, si l'on se souvient que Laplace en faisait une légitimation du calcul des probabilités. On peut interpréter le débat de fond auquel Maxwell et Boltzmann participent, en disant que l'enjeu est de savoir quel statut donner à ces probabilités fraîchement importées en physique. Doit-on se limiter à penser que c'est un moyen commode pour résoudre les problèmes de thermodynamique ?

Parallèlement, c'est le mode de connaissance du monde qui est en jeu. En suivant Maxwell et son "Démon", l'application de la méthode statistique résulte de notre incapacité à préciser les mouvements moléculaires. Cette faiblesse dans notre connaissance est-elle passagère ou doit-on considérer qu'elle est fondamentale ? Notre mode de connaissance du monde ne pourrait-il pas être irrémédiablement probabiliste ? Il est souvent difficile de positionner Maxwell sur cette alternative. Ses affirmations de jeunesse étaient franchement en faveur d'un probabilisme ; avec la méthode statistique et sa justification, Maxwell les fait oublier, au profit d'une position de statisticien. Maxwell est aussi un critique du déterminisme absolu en 1873, mais ne renonce pas à un monde déterministe [217] . Nous pouvons, sur ce point, renvoyer à "Le hasard" de Poincaré, dont la

[215] L'expérience imaginée par Maxwell est la suivante. Deux enceintes contenant des molécules d'un gaz : A est l'enceinte "chaude", B la "froide" ; elles sont reliées par un clapet. Un petit être intelligent est capable de discerner les vitesses des molécules. A l'approche de molécules de A dont la vitesse est inférieure à la moyenne des vitesses de B, il ouvre le clapet (sans dépense de travail). Il réalise l'opération inverse avec les molécules de B plus rapides que celles de A. L'énergie de l'enceinte A augmente, celle de B diminue ; autrement dit l'enceinte A a été chauffée en même temps que B a été refroidie, sans fournir de travail pour cela. L'intention de Maxwell est de montrer que le second principe ne repose que sur une certitude statistique et sur notre incertitude vis-à-vis des phénomènes microscopiques. [SKLAR, L., 1993], p. 38-39.

[216] [LAPLACE, P.S., 1820], p. vi-vii, cité au sujet du texte "Le hasard", p. 83 et p. 88.

[217] Dans son texte de 1873 (présenté p. 95) Maxwell distingue en fait deux types de connaissances : " [...] I think the most important effect of molecular science on our way of thinking will be that it forces on our attention the distinction between two kinds of knowledge, which we may call for convenience the Dynamical and Statistical.", [MAXWELL, J.C., 1973], p. 438. Selon Maxwell, la statistique s'occupe des phénomènes de grands nombres et la dynamique des phénomènes individualisés. On retrouve en parallèle aux propos du physicien, des allusions à la "sociologie". Maxwell, en introduction, semble attaché à se départir des idées de Galton, statisticien britannique connu pour ses positions eugénistes. Les positions de Maxwell sont d'ailleurs prudentes sur ces questions. La justification du point de vue statistique, c'est-à-dire notre incapacité à saisir les détails de chaque individu d'une population, vaut autant pour la physique que pour les études sur l'homme.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

préférence irait également à une perspective statistique.

Les positions de Boltzmann sont différentes. Son travail montre d'abord que le point de vue statistique est consensuel. Il ne contraint ni à une position résolument mécaniste, ni à son contraire, une posture fondamentalement probabiliste. Par contre, Boltzmann a repris les idées de Maxwell statisticien, pour construire un édifice avec une facette beaucoup plus probabiliste : la formule $S=k.\log W$ et son interprétation probabiliste font fi de la prudence de Maxwell. Dans un contexte où la philosophie déterministe règne, les conceptions de Boltzmann choquent, alors que les méthodes statistiques s'en accommodent. En ce sens, Boltzmann va plus loin que Maxwell. Les conceptions de Boltzmann, après avoir précipité les idées de Maxwell, sont en train d'ébranler tout l'édifice de la physique du XIXème siècle, qui était fondé sur des principes exclusivement déterministes.

b. Boltzmann face aux paradoxes

A travers leurs conceptions, Maxwell et Boltzmann montrent qu'il n'y a pas consensus sur ces questions. Le fait que Boltzmann, qui a les positions les moins orthodoxes, soit attaqué sur ses conceptions n'a rien de surprenant. Les paradoxes (ou plutôt objections) soumis à Boltzmann signent le rejet d'une certaine vision du monde et la profondeur de la crise traversée. A la fois techniques et philosophiques, ils expriment tout le problème de l'accord entre probabilités et mécanisme, entre thermodynamique et Mécanique. Les raisonnements et les moyens mis en œuvre en sont très révélateurs. Les plus connus des paradoxes sont ceux de Loschmidt (1876), et Zermelo-Planck (1896). Celui lancé par Curlverwell (1890), sorte de paradoxe de réversibilité mais se distinguant des thèses de Loschmidt, conduira Boltzmann à élaborer l'hypothèse de "désordre moléculaire".

Paradoxe de réversibilité

Le premier, appelé depuis "paradoxe de réversibilité [218] " (où "paradoxe de Loschmidt"), dont l'idée remonte en fait à Lord Kelvin en 1874 [219] , affirme qu'un retournement instantané des vitesses des atomes d'un gaz devrait conduire, mécaniquement, à un retour en arrière du système et donc voir l'entropie décroître. Pour Loschmidt, il y a une contradiction avec le second principe. Au passage, notons la similarité avec un débat précédent de Boussinesq, au sujet des thèses de Ph. Breton sur la réversibilité. Pourtant, à notre connaissance, il n'existe pas de lien direct entre les deux argumentations [220] .

Ce premier paradoxe est crucial dans l'évolution des idées de Boltzmann. En effet, c'est en réponse à la réfutation de Loschmidt que Boltzmann va donner une tournure

[218] En allemand, Loschmidt le dénomme *Umkehreinwand*, littéralement "réfutation par réversion". Josef Loschmidt est un collègue viennois de Boltzmann.

[219] [BRUSH, S.G., 1983], p. 90-91.

[220] Les idées thermodynamiques ne sont que peu développées chez Boussinesq ; on ne trouve aucune allusion au second principe. L'irréversibilité du monde n'est guère plus qu'un constat empirique. (Voir p. 91 pour le texte de Boussinesq et sa réplique à Ph. Berton).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

probabiliste à son interprétation du second principe, dans son article célèbre de 1877 [221] , que nous considérons comme un tournant dans l'histoire de la physique.

Sa réponse à Loschmidt joue sur des distinctions entre états microscopiques et macroscopiques. L'entropie est, dans son esprit, une mesure de probabilité d'un système macroscopique. Dans la situation la plus courante d'un processus irréversible tendant vers l'équilibre, les états microscopiques peu probables (entropie faible) s'orientent vers les situations les plus probables (entropie élevée). Le renversement des vitesses, à l'équilibre, ne suffit pas à assurer le retour vers un état de non-équilibre. Il faut choisir une situation initiale microscopique qui soit elle-même le résultat de l'évolution d'un état de non-équilibre : or celles-ci sont très particulières dans l'ensemble des situations d'équilibre et ne sont que très peu probables, d'après Boltzmann.

Sur ce paradoxe, il est intéressant de constater que Boltzmann inverse l'objection et s'en sert comme levier pour son futur article de 1877 :

"La proposition de Loschmidt m'apparaît cependant très importante, car elle montre la liaison intime qui existe entre le second principe et le calcul des probabilités, dont au contraire le premier principe est tout à fait indépendant." [222]

Boltzmann jongle avec la Mécanique, la statistique et les probabilités, et parvient à transformer des théories de type Mécanique analytique en un théorème de probabilités.

Le théorème de récurrence et l'objection de Zermelo-Planck

Un autre paradoxe soumis à Boltzmann quelques années plus tard, en 1896, utilise un des résultats énoncés par Poincaré en 1890, dans le cadre du problème des trois corps : **le théorème de récurrence**. Episode de l'histoire des sciences qui est désormais assez connu, nous en donnons les grandes lignes ici [223] .

Zermelo affirme qu'en vertu du théorème de récurrence un système mécanique doit revenir infiniment souvent, aussi près qu'on veut de la situation initiale. Pour lui, il y a contradiction avec le second principe. L'attaque, inspirée par Planck, vise avant tout la vision statistique du second principe, qu'il considère pour sa part comme une "vraie" loi de la physique (non une loi valable statistiquement). Elle participe d'un rejet des conceptions de Boltzmann, en l'occurrence sa vision mécaniste, atomiste du monde [224] .

Boltzmann ne nie pas l'importance des récurrences, qu'il considère en fait comme des fluctuations nécessaires et qui sont tout à fait attendues dans un processus probabiliste. D'un point de vue technique, il calcule le temps de récurrence effectif pour un

[221] L'histoire de cette phase de transition est particulièrement bien analysée dans [DUGAS, R., 1959], p. 185 et après.

[222] Cité dans [DUGAS, R., 1959], p. 191 (en italique dans le texte). Cette réflexion de Boltzmann date de 1877, quelques temps avant son article le plus connu.

[223] Voir [BRUSH, S.G., 1983] et [BRUSH, S.G., 1986].

[224] Ce n'est qu'une partie de l'opposition à cette vision du monde. L'opposition se fédère autour des conceptions énergétistes et de W. Ostwald. Pour ce contexte général de débats sur l'énergétisme, nous renvoyons à [SEGAL, J., 1998], p. 675-680.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

gaz et montre qu'il est gigantesque et inobservable pour les systèmes communs. L'objection de récurrence est en définitive retournée par Boltzmann au profit de ses conceptions.

Objection au théorème H

L'idée [225] selon laquelle il n'est pas possible de démontrer purement dynamiquement le théorème *H* est le dernier paradoxe opposé à Boltzmann. La preuve doit s'adosser à une hypothèse assurant la décorrélation des molécules après collision, sans laquelle le traitement probabiliste n'est pas justifié.

Stimulé par les débats britanniques, Boltzmann conçoit [226] la notion de "chaos moléculaire " ou "désordre moléculaire [227] ", s'appuyant sur l'argument que le libre parcours moyen d'une molécule est très grand comparé à la distance séparant deux molécules du gaz : une molécule a peu de chance de rencontrer une molécule déjà percutée et de faire jouer les corrélations.

Une nouvelle fois, l'intérêt de cette intervention est de montrer en quoi l'accord entre la mécanique, déterministe, au niveau microscopique et l'utilisation des probabilités pour parvenir à un résultat macroscopique, est problématique. Boltzmann fait preuve d'une grande réactivité et d'intelligence en retournant la situation à son avantage. Son argument est reproduit dans ses fameuses Leçons sur la théorie des gaz, de 1895 [228] et Boltzmann le présente même comme une clé de voûte de toutes ses démonstrations :

"Qu'il soit nécessaire, pour l'exactitude des démonstrations, de faire expressément cette supposition, c'est ce que j'ai déjà remarqué dans la discussion de la démonstration de mon théorème de H ou théorème de minimum. Mais ce serait une grave erreur de croire que cette supposition n'est nécessaire

[225] Les britanniques E. P. Curlverwell et S.H. Burburry sont les instigateurs de ces objections, en 1890. [CURLVERWELL, E.P., 1890] et [BURBURRY, S.H., 1890]. Curlverwell adressa la remarque selon laquelle l'irréversibilité du théorème *H* s'appuie, paradoxalement, sur des mécanismes moléculaires et des collisions entièrement réversibles. Il suggéra aussi d'introduire l'irréversibilité au niveau microscopique, comme conséquence d'une interaction avec l'éther. En 1894, Burburry précise la question et signale que la démonstration du théorème *H* repose sur l'hypothèse de non corrélation des molécules entre elles (alors qu'elles sont en collisions régulières). Dans tous les cas, et Boltzmann l'accepte aisément, le théorème *H* ne peut pas admettre de démonstration purement dynamique, ce qui va renforcer encore le poids des probabilités en théorie des gaz.

[226] Burburry avait auparavant proposé dans Nature une possible justification, sur la base des perturbations aléatoires, externes au système [BURBURRY, S.H., 1895a et b]. Boltzmann partage l'opinion de Burburry, et admet qu'une hypothèse proche de la "condition A" de Burburry, est nécessaire. La solution adoptée par Boltzmann, le "désordre moléculaire", est le résultat de plusieurs débats entre lui-même, Burburry et G.H. Bryan un autre physicien britannique. On pourrait ergoter sur l'attribution de la paternité de cette hypothèse au seul Boltzmann. Voir [BRUSH, S.G., 1986], p. 616-627.

[227] Le terme allemand, employé par Boltzmann est *Stosszahlansatz*, ce qui signifie "argument du nombre de collisions".

[228] Nous disposons des traductions de M. Brillouin, datant de 1902 et 1905 : ces traductions ont été un point d'entrée important de la théorie de Boltzmann en France, très peu connue et peu discutée auparavant [BOLTZMANN, L., 1902] (Leçons de 1895), [BOLTZMANN, L., 1905] (Leçons de 1898).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

que pour la démonstration de ce théorème. Sans elle on ne pourrait démontrer aucun théorème de la théorie des gaz, par suite de l'impossibilité où l'on est de calculer à chaque moment la position de toutes les molécules d'un gaz comme l'astronome calcule la position de toutes les planètes. [...] Il ne faut peut-être pas trop regretter que le théorème du minimum soit précisément lié à l'hypothèse du mouvement inorganisé des molécules, mais plutôt se féliciter de ce que ce théorème ait assez éclairci les idées pour mettre en évidence la nécessité de cette supposition." [229]

L'hypothèse formulée est donc un point essentiel, qui, en quelque sorte, parachève la théorie de Boltzmann. D'ailleurs, de toutes les réflexions concernant l'accord de la Mécanique et des probabilités (notamment la question de l'"ergodicité") il ne reste que ce point dans les Leçons [230] . On voit aussi la distance prise par Boltzmann vis-à-vis des conceptions prudentes de Maxwell, introduisant la statistique comme un effet de "grand nombre".

c. Max Planck (1858-1947) et le déterminisme

Malgré les oppositions entre Planck et Boltzmann, l'hypothèse de désordre moléculaire trouve avec Planck un bon porte-parole. A travers son interprétation de la théorie quantique des radiations, il promeut l'interprétation statistique de l'entropie à partir de 1900. Ses calculs sur le corps noir sont construits sur les idées de Boltzmann mais Planck, au fond, est un déterministe. Dans cette situation, on retrouve l'ambiguïté liée au fait que la statistique et les probabilités ont un statut qui n'est pas clairement débattu. Quant à la position de Planck, elle mérite d'être citée, vu la similarité avec celle de différents scientifiques au XXème siècle.

"Comme les sciences sociales, la physique a appris à apprécier la grande importance d'une méthode complètement différente de la méthode purement causale, et l'a appliquée depuis le milieu du siècle dernier avec un succès continûment croissant. C'est la méthode statistique, et les nouvelles avancées en physique théorique sont liées à son développement...[Alors que cette méthode peut sembler] peu profitable aux besoins scientifiques de nombreux travailleurs qui désirent principalement une élucidations des relations causales, elle est devenue indispensable à la pratique de la physique. Une renonciation impliquerait l'abandon des plus importantes des plus récentes avancées des sciences physiques. Il doit être gardé à l'esprit que la physique, dans le sens exact, ne traite pas de quantité absolument déterminée ; car chaque nombre obtenu par une mesure physique est entaché d'une possible erreur." "l'hypothèse de déterminisme absolu est une base nécessaire de l'investigation scientifique" [231]

En quelques mots, Planck résume ce qui est en train de se jouer au tournant du XXème

[229] ***[BOLTZMANN, L., 1902], p. 21-22.***

[230] Dans ses Leçons, Boltzmann argumente plus globalement sur l'"Emploi du calcul des probabilités en Physique moléculaire". Admettant qu'il n'est pas entièrement justifié de recourir au calcul des probabilités en théorie des gaz (les seules raisons valables étant le grand nombre et la longueur du parcours moyen des molécules), Boltzmann légitime tout de même leur application arguant des perturbations irrémédiables induites par le milieu extérieur et de la cohérence trouvée avec les aspects pratiques, empiriques.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

siècle avec l'introduction des statistiques en physique. Quant à ses positions déterministes, elles sont au goût de l'époque et assez répandues. Il est bien connu qu'au nom de ces positions, Planck sera réticent à accepter par la suite l'interprétation de Copenhague de la physique quantique qu'il a lui-même contribué à lancer.

d. L'ergodicité

Dans les tentatives de cette fin du XIXème siècle de concilier Mécanique, thermodynamique, statistique et probabilités, il émerge une nouvelle question, celle de l'"ergodicité" des systèmes mécaniques. Le "principe ergodique" est au cœur de la problématique du hasard et du déterminisme dans les conceptions de la Mécanique statistique. L'origine de la notion d'ergodicité a prêté à beaucoup de confusions. L'ouvrage de Paul et Tatiana Ehrenfest, en 1911, est le premier exposé donnant les contours d'une notion d'ergodicité (qu'ils considèrent comme pratiquement impossible) et de "quasi-ergodicité", destinée à assouplir les exigences de leur ergodicité [232]. Selon eux, **un système est ergodique si le système passe par tous les points de l'espace des phases compatibles avec l'énergie totale du système**. Ceci permet d'expliquer que certains systèmes mécaniques puissent avoir des propriétés proches du hasard et de comprendre le rapport aux fondements de la Mécanique statistique (titre de l'ouvrage des Ehrenfest).

Les Ehrenfest définissent ce principe en se référant aux idées de Maxwell et Boltzmann. Nous allons analyser les interprétations des Ehrenfest pour montrer qu'ils n'ont pas toujours repris, ou ont peut-être refusé, certaines conceptions de Boltzmann. Leur résultat final, le principe ergodique, en est très significatif : alors que Boltzmann raisonne de plus en plus dans un cadre probabiliste, définissant une notion d'"ensemble" qui sera reprise par Gibbs, les Ehrenfest écartent toute référence aux probabilités. Ils ont déformé le sens que Boltzmann attribuait à *Ergode* et l'ont remplacé par une notion de quasi-ergodicité qui n'a rien de limpide. L'ouvrage des Ehrenfest ayant été la référence en matière de Mécanique statistique pendant plusieurs décennies, la confusion traîne depuis dans tous les manuels de physique [233]. Par ailleurs, nous analyserons au chapitre 7 les conséquences de ces conceptions au fil du XXème siècle puisque ces notions ont joué un

[231] ***Citations tirées de [BRUSH, S.G., 1983], p. 95-96 (traduction anglaise des originaux allemands) : "Like the social sciences, physics has learnt to appreciate the great importance of a method completely different from the purely causal, and has applied it since the middle of the last century with continually increasing success. This is the statistical method, and the newest advances in theoretical physics have been bound up with its development… [While this method might seem] unsympathetic to the scientific needs of many workers, who desire principally an elucidation of causal relations, yet it has become absolutely indispensable in practical physics. A renunciation of it would involve the abandonment of the most important of the more recent advances of physical science. It must also be borne in mind that physics, in the exact sense, does not deal with quantities that are absolutely determined; for every number obtained by physical measurements is liable to a certain possible error" / " the assumption of absolute determinism is a necessary basis for every scientific explanation".***

[232] Leur ouvrage est la première mise au point générale sur les fondements de la mécanique statistique, quelques années après les principaux éléments fondateurs de Boltzmann et Gibbs. La première version, de 1911, a été rapidement traduite en français par E. Borel, en 1915 : [BOREL, E., EHRENFEST, P, EHRENFEST, T., 1915].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

rôle important dans l'émergence des problématiques de type chaos dans la seconde partie du XXème siècle.

Premiers textes de Boltzmann

La première discussion des systèmes dits "ergodiques" est due à Boltzmann, en 1871 [234] ; le point de départ est un problème de dynamique. Boltzmann considère dans le plan, une masse attirée par un potentiel harmonique de la forme $\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$, a et b étant des constantes [235] . Deux cas se distinguent selon que le rapport a/b est rationnel ou non. Dans le premier cas, le mouvement est périodique, dans le second il n'y a pas de récurrence exacte. L'espace des phases est à 4 dimensions : x,y,u et v étant les composantes des vitesses selon x et y. Les équations de l'énergie cinétique donnent :

$\frac{1}{2} mu^2+ \frac{1}{2} ax^2=c$ et $\frac{1}{2} mv^2+ \frac{1}{2} by^2=d$

où c et d sont des constantes fixées par les conditions initiales. Le mouvement a donc lieu en fait sur un tore. Boltzmann en conclut que le mouvement recouvre toute la surface du rectangle [236] , l'espace des phases du système en question. Sur un autre exemple, une masse soumise à une force centrale $a/r+b/r^2$, il déduit que le mouvement recouvre également, dans ce cas, une certaine partie du plan.

Dans ses premières explications sur l'ergodicité Boltzmann généralise quelques exemples de dynamique classique (détaillés ci-dessus) à la théorie moléculaire des gaz :

"La grande irrégularité du mouvement thermique, et la multiplicité des forces extérieures agissant sur le corps, rendent probable que les atomes eux-mêmes, par le fait du mouvement que nous appelons chaleur, passent par toutes les positions possibles et vitesses conformes à l'équation de l'énergie cinétique, et que nous pouvons par conséquent appliquer les équations développées précédemment aux coordonnées et vitesses des atomes d'un corps chaud." [237]

Cette affirmation est considérée, depuis les Ehrenfest, comme l'"hypothèse ergodique" de

[233] D'après [BRUSH, S.G., 1983], le manuel des Ehrenfest est rapidement devenu "la" référence en matière de fondements de la mécanique statistique. On trouve la citation de Max Born, dans [BRUSH, S.G., 1986], p. 96.

[234] [BOLTZMANN, L., 1871b]. Nous renvoyons au débat dans [BRUSH, S.G., 1986], p. 365-366.

[235] La référence explicite de Boltzmann aux courbes de Lissajous est intéressante, car elle montre à la fois l'imprégnation de ces travaux dans le milieu scientifique et l'importance de l'étude des phénomènes vibratoires et périodiques dans la physique (ce qui donnera le célèbre traité de Lord Rayleigh, Theory of Sound [RAYLEIGH, J.W.S., 1877]). Lissajous a publié ses résultats en 1857 : [LISSAJOUS, J.A., 1857a] et [LISSAJOUS, J.A., 1857b].

[236] Un tore est l'analogue d'un rectangle dont on identifie les côtés opposés.

[237] Notre traduction du texte (en anglais) cité dans [BRUSH, S.G., 1986], p. 366 : "The great irregularity of the thermal motion, and the multiplicity of forces that act on the body from outside, make it probable that the atoms themselves, by virtue of the motion that we call heat, pass through all possible positions and velocities consistent with the equation of kinetic energy, and that we can therefore apply the equations previously developed to the coordinates and velocities of the atoms of warm bodies".

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Boltzmann. Il faut noter le léger glissement dans l'interprétation de Boltzmann : l'influence du milieu extérieur doit entrer en ligne de compte, ainsi que les collisions internes, alors que les propriétés mathématiques suffisaient dans ses exemples de dynamique. Boltzmann construit un argument physique qu'il appuie sur des considérations mathématiques.

La distorsion introduite par les Ehrenfest provient d'une surinterprétation de cet argument. Ils l'érigent en "justification de Boltzmann-Maxwell" de l'idée selon laquelle une trajectoire du système passe par toutes les phases possibles, impliquant l'égalité des moyennes temporelles et des moyennes dans l'espace des phases. La proposition de Boltzmann est plus subtile et il n'avait pas cela à l'esprit. L'existence de trajectoires périodiques, dont il a conscience, et qui, de fait, ne remplissent pas tout l'espace des phases, suffit pour infirmer cette idée. Les Ehrenfest "oublient" surtout le fait que Boltzmann ne distingue pas les trajectoires denses (celles qui approchent toutes les phases possibles) de celles qui passent par toutes les phases. Cette dernière remarque est primordiale et elle relève d'une conception particulière de Boltzmann : son finitisme. Comme Dugas le souligne, Boltzmann

"révoque toute considération d'un infini actuel et ne considère tout ensemble infini que comme la limite d'une collection d'individu en nombre très grand, mais fini. Ajoutons que cette collection finie est seule douée à ses yeux de réalité physique." [238]

Cette conception de l'infini rejaillit sur le principe ergodique, qui sans cela pourrait passer pour un sujet très négligé chez Boltzmann. En prenant la terminologie des Ehrenfest, l'ergodicité (au sens de Boltzmann) n'a de sens qu'à travers la quasi-ergodicité. Cela signifie que, pour Boltzmann, dans un système d'énergie donnée, "passer par toutes les phases compatibles avec l'énergie" ne se distingue pas de "passer aussi près que l'on veut de toute phase compatible avec l'énergie". Son article de 1877 révèle la portée de cette idée finitiste de l'infini, qui sert l'interprétation probabiliste de l'entropie (et aura les conséquences que l'on sait sur Planck, Einstein et la future théorie des quanta).

Par ailleurs, les interprétations des Ehrenfest déforment les intentions de Maxwell et Boltzmann. Ils construisent un principe général autonome alors que Boltzmann cherchait une justification à divers travaux, notamment la loi de distribution des vitesses. De son côté, Maxwell était préoccupé par le théorème d'équipartition de l'énergie.

Pour asseoir l'équipartition Maxwell propose une hypothèse qui, selon lui, n'est valable que dans les systèmes mécaniques en interaction avec l'extérieur, même si les chocs sur les parois du récipient peuvent parfois suffire. Maxwell reste néanmoins très prudent. En tout cas, l'hypothèse est très clairement explicitée par Maxwell en 1879 :

"Le seul postulat nécessaire à une preuve directe [du théorème d'équipartition] est que le système, si il est laissé à lui-même dans un état de mouvement donné, passera, tôt ou tard, par toutes les phases conformes à l'équation de l'énergie." [239]

Les deux présentations restent assez heuristiques, et ni Maxwell, ni Boltzmann ne cherchent à être plus rigoureux. En outre, il n'est nulle part question d'"ergodicité" dans

[238] ***[DUGAS, R., 1959], p. 26.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

les propos de ces savants.

Le problème pour Maxwell et Boltzmann, au fond, est de justifier qu'un mouvement dit aujourd'hui "ergodique" existe malgré l'existence de constantes du mouvement qui induisent une décomposition de l'espace des phases en mouvements possibles et distincts. Comme les collisions internes se traduisent par une conservation des constantes, il faut faire appel aux forces externes susceptibles de détruire les constantes et assurer un mouvement qui soit ergodique [240] . On voit le décalage entre le principe ergodique des Ehrenfest et la soi-disant origine dans les conceptions de Maxwell et Boltzmann.

Les "ensembles" de Boltzmann et les probabilités

En outre, la première mention d'*Ergode*, notion due à Boltzmann, apparaît dans des travaux postérieurs à 1871 consacrés à la recherche d'un équivalent mécanique de la thermodynamique. En 1884, Boltzmann suit les traces de H. Helmholtz (1821-1894) lui aussi à la recherche d'un modèle mécanique de la thermodynamique.

En 1884, Helmholtz a introduit et travaillé sur les mouvements polycycliques et monocycliques. Un système est dit polycyclique s'il est un système dynamique contenant un ou plusieurs mouvements périodiques ou circulants. Monocyclique signifie que tout mouvement d'énergie donnée est un cycle, ou de manière équivalente que, grâce à une relation sur les vitesses des différentes parties du système, le mouvement est défini à partir d'une seule coordonnée. Le but de Helmholtz était de construire à partir de ces systèmes des mécaniques pour lesquelles il existe un second principe.

Boltzmann suit la voie ouverte par Helmholtz [241] et étudie sur plusieurs modèles les expressions d'entropie, d'énergie et leurs relations. Au passage, on peut citer l'exemple de système monocyclique donné par Boltzmann. Il s'agit d'une masse soumise à l'attraction gravitationnelle d'un corps. Elle décrit une ellipse mais ne constitue pas un système monocyclique en l'état : en imaginant une masse répartie régulièrement, continûment, tout au long de l'ellipse, le système devient monocyclique. C'est également un modèle d'un anneau de Saturne, étudié antérieurement par Maxwell (1855), pour en déterminer la stabilité.

Le texte de 1884 est le point de départ de plusieurs notions capitales : celle d'ensemble (selon la terminologie de Gibbs), celle d'ergodicité qu'on peut voir comme une extension faite par Boltzmann de la notion de monocyclicité [242] . Ces "ensembles", Boltzmann les appelle "*Inbegriff von Systeme*", littéralement, collection de systèmes. Il définit l'ensemble *Monode* [243] (extension d'un concept valable sur les systèmes

[239] ***[MAXWELL, J.C., 1879]. "The only assumption which is necessary for the direct proof [of the equipartition theorem] is that the system, if left to itself in its actual state of motion, will, sooner or later, pass through every phase which is consistent with the equation of energy". Cité dans [BRUSH, S.G., 1986], p. 366.***

[240] Pour une discussion plus détaillée, nous renvoyons à [VON PLATO, J., 1991], p. 76-80.

[241] A noter aussi, que Poincaré, dans les années 1880, ne connaît pas les travaux de Boltzmann, mais bien ceux de Helmhotlz, dont les systèmes monocycliques. Poincaré discutera ces mêmes notions en 1889 seulement : [POINCARE, H., 1889a].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

monocycliques) comme une famille de distribution de probabilité "stationnaire" [244] ; un *Orthode* est un ensemble qui réalise une analogie mécanique de la thermodynamique [245], ce que nous appelons aujourd'hui un "ensemble statistique d'équilibre". L'*Ergode* est un *Monode* d'énergie donnée (ce que laisserait entendre, étymologiquement, "Ergomonode") : en termes gibbsiens, il s'agit de l'"ensemble microcanonique".

Le résultat le plus remarquable de Boltzmann est de montrer que son *Ergode* est bien un *Orthode*. Autrement dit, l'ensemble "microcanonique" est un modèle mécanique de thermodynamique d'équilibre. Boltzmann prouve par ailleurs que l'ensemble "canonique" (*Holode*) est un ensemble d'équilibre. Ces résultats que nous attribuons aujourd'hui à Gibbs sont dus précédemment à Boltzmann [246].

Ce passage par les systèmes monocycliques méritent beaucoup d'attention, pour l'importance donnée une nouvelle fois aux mouvements périodiques. Nous allons proposer une interprétation volontairement simplifiée des conceptions de Boltzmann afin de saisir l'importance de la monocyclicité et périodicité dans le problème [247]. Cela permettra aussi de se faire une idée du détournement de la notion d'ergodicité et la non-distinction, chez Boltzmann, entre ergodicité et quasi-ergodicité. Nous l'avons rappelé, Boltzmann pense en termes finitistes. L'espace des phases d'un système est découpé en cellules et le mouvement du système devient une sorte de permutation des cellules. A une énergie totale donnée correspond un nombre fini de cellules pour lesquelles le mouvement est alors nécessairement périodique, avec un cycle unique : autrement dit, le système est monocyclique. Il est légitime de penser que le système puisse passer par toutes les cellules compatibles avec l'énergie. Telle est l'hypothèse ergodique dans l'esprit de Boltzmann, qui n'a rien de choquant tant qu'on se restreint au

[242] Peu d'historiens (et autres) se sont penchés sur cet article de Boltzmann, qui pourtant contient beaucoup de concepts essentiels qu'on retrouve chez Gibbs notamment. Quelques références sur le sujet sont contenues dans le texte de Gallavotti (un des rares articles très précis sur le sujet), [GALLAVOTTI, G., 1994] et l'article de synthèse de Von Plato : [VON PLATO, J., 1991].

[243] Les considérations étymologiques de [GALLAVOTTI, G., 1994] nous semblent particulièrement pertinentes. *Monode* renverrait ainsi à un ensemble de distributions d'une "unique nature".

[244] Stationnaire signifie, selon Boltzmann empruntant là une définition à Clausius, que les positions et les vitesses restent bornées à un domaine fixé. [BOLTZMANN, L., 1884], p. 129.

[245] Etymologiquement, Orthode serait un Monode de "nature correcte". Boltzmann définit l'*Orthode* sur une condition de différentiabilité exacte de la quantité $(dU+pdV)/T$ où U est l'énergie totale, V le volume, T la température et p est liée aux forces agissant sur le système (pression).

[246] La notion même d'ensemble, Gibbs ne s'en attribue pas vraiment la paternité : il fait référence à la méthode "statistique" de Maxwell et une allusion à un article de Boltzmann [BOLTZMANN, L., 1871c]. Voir [GIBBS, J.W., 1902], p. viii. Le travail de Gibbs étend encore les considérations de Boltzmann et les éclaircit car l'article de Boltzmann de 1884 est loin d'être limpide. Ce travail de 1884 correspond encore à une phase de tâtonnements pour Boltzmann, ce qui explique peut-être l'absence de suite véritable donnée à cet article.

[247] Nous nous inspirons de [GALLAVOTTI, G., 1994].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

cas discret. Le passage au continu est délicat. Le principe ergodique des Ehrenfest n'est rien d'autre qu'un passage brutal au continu, fortement déformateur et qui fait la naïveté du principe.

L'article de 1887, "Sur les analogies mécaniques du second principe de la thermodynamique" [248] permet de mieux comprendre les positions de Boltzmann sur la question de l'ergodicité. Il réitère largement les considérations précédentes (sur les mouvements de Lissajous notamment) et son *Ergode.* Remarquons que les idées de Boltzmann ont bien évolué depuis 1881 où il établissait une distinction très nette entre son approche et celle de Maxwell :

" Il y a une différence dans les conceptions de Maxwell et Boltzmann, dans le sens où ce dernier caractérise la probabilité d'un état par le temps moyen durant lequel le système est dans cet état, alors que le premier considère une infinité de systèmes équivalents dans tous les états initiaux possibles." [249]

Boltzmann s'est rapproché progressivement de la démarche de Maxwell, puis la dépasse, comme il l'a fait avec l'introduction des statistiques en Mécanique. En effet, ses "*Inbegriff*" renvoient au texte de Maxwell, de 1879 [250], qui traite des "ensembles" ("l'infinité de systèmes équivalents dans tous les états initiaux possibles").

En 1887, la notion d'ensemble devient la clé de voûte de son système : sans cela, il est difficile d'exprimer mathématiquement que les propriétés observables d'un gaz dépendent uniquement des forces et de l'énergie totale (ce qu'il a appelé l'*Ergode*). Nous partageons les remarques de Von Plato [251], à qui nous empruntons ces dernières remarques. Le but de Boltzmann est de trouver la distribution de probabilités permettant de calculer toutes les propriétés d'un système. Or il existe, théoriquement, des trajectoires, en nombre infini, pour lesquelles la distribution est violée, les trajectoires périodiques par exemple. Raisonner sur des ensembles permet de dépasser ce cap théorique en exprimant les propriétés macroscopiques sans préciser l'évolution microscopique. Dans un ensemble, il y a beaucoup plus de conditions initiales qui conduisent à une distribution uniforme que d'autres : on est assuré de trouver une distribution d'équilibre. Le passage d'une distribution d'équilibre (macro) à la distribution d'un système particulier (micro) est aussi une inférence probabiliste : le système peut admettre une distribution s'écartant de la distribution d'équilibre, mais c'est fortement improbable.

Boltzmann raisonne donc constamment en termes probabilistes. On peut ajouter

[248] [BOLTZMANN, L., 1887].

[249] "There is a difference in the conceptions of Maxwell and Boltzmann, in that the latter characterizes the probability of a state by the average time in which the system is in this state, whereas the former assumes an infinity of equal systems with all possible initial states", cite dans [VON PLATO, J., 1991], p. 71 (traduit de Boltzmann, Wissenschaftliche Abhanlungen, vol II, p. 582).

[250] Le texte de Maxwell, de 1879, s'attache à une discussion des idées de Boltzmann de 1871 ; comme nous le constations, il contient déjà en germe la notion d'"ensemble", mais de manière trop allusive encore. [MAXWELL, J.C., 1879].

[251] [VON PLATO, J., 1991], p. 82-83.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

que la conception même de probabilité dans la physique de Boltzmann s'est diversifiée. En 1881, il évoquait des probabilités synonymes de moyenne temporelle, se démarquant de Maxwell. Désormais, il raisonne avec des probabilités sur des ensembles. Ceci nous permet de signaler une dernière interprétation douteuse des Ehrenfest : ils suggèrent que tous les systèmes vérifient l'hypothèse ergodique. Pour être fidèle à Boltzmann il conviendrait que ce soit seulement une **majorité**.

Leur traité reprend donc les grandes lignes des travaux de Boltzmann, mais les sort trop rapidement de leur contexte et, de ce fait, en gomme les subtilités : les nuances probabilistes apportées par Boltzmann, la distinction entre modèles continus et discrets, la question de l'influence du milieu extérieur et les collisions. En outre, les Ehrenfest critiquent la Mécanique statistique de Maxwell et Boltzmann parce qu'elle ne justifie pas le principe ergodique (tel qu'ils l'entendent) : ceci n'a rien d'étonnant car ce n'était pas l'idée de Boltzmann.

Le texte des Ehrenfest est pourtant capital pour les suites données au problème des fondements de la Mécanique statistique puisque leurs définitions d'ergodicité et de quasi-ergodicité serviront en quelque sorte de paradigme à la question (paradigme qui évoluera rapidement avec les contraintes mathématiques [252]). En un mot, la question fondamentale devient : un système régi par la dynamique peut-il passer par toutes les configurations mathématiquement possibles ? ou arbitrairement près ? C'est sur cette formulation, plus mathématique, que se poursuit le débat. Il s'agit désormais d'une recherche mathématique, élaborée par les mathématiciens. D'ailleurs l'argument des Ehrenfest contre l'hypothèse ergodique "naïve" est singulièrement abstrait et mathématique [253] . Tout ceci est destiné à établir les bases de la Mécanique statistique, à concilier la dynamique microscopique et la statistique. Alors que jusqu'ici mathématique, physique, philosophie même, sont inextricablement mêlées (Boltzmann est un modèle du genre), de telles questions de dynamique échappent progressivement aux physiciens. Les propos d'E. Borel confirment cette tendance, nous le verrons, et les premiers véritables "théorèmes ergodiques" seront dus aux mathématiciens G.D. Birkhoff (1931) et J. Von Neumann (1932). Nous analyserons ultérieurement ces résultats. En définitive, Boltzmann a participé de manière essentielle aux débats de la Mécanique statistique, mais une grande partie de la substance qu'il a apportée est purement et simplement engloutie dans le flot de la "théorie ergodique", mathématique, naissante. Ce n'est pas sans rapport avec le "choix" qui est opéré au début du XXème siècle en faveur de conceptions "statistiques", "fréquentistes" plutôt que probabilistes.

e. Les idées de Poincaré sur la théorie cinétique des gaz

Dans "Le hasard" au fil de la lecture on découvre un certain nombre d'allusions à la

[252] Nous faisons référence à l'arrivée de la théorie de la mesure, en mathématiques, qui change les données du problème et permet de préciser encore la notion mathématique d'ergodicité. Le chapitre 7 montrera les changements induits par la "théorie ergodique" à partir des travaux de Birkhoff.

[253] Comme le fait remarquer Gallavotti, la notion de quasi-ergodicité, conçue pour pallier les déficiences de l'ergodicité est encore plus obscure et fait même appel à l'axiome du choix ! [GALLAVOTTI, G., 1994].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

théorie cinétique des gaz. En réalité, Poincaré ne s'est pas contenté d'être spectateur de ces questionnements. En mécanicien, on peut facilement imaginer qu'il a contribué aux débats fortement marqués par la Mécanique (Mécanique analytique, Mécanique céleste, dynamique) dans ses dimensions tant physiques que mathématiques (significatives avec l'utilisation du théorème de récurrence de Poincaré par Zermelo). Plus largement, scientifiquement et philosophiquement, Poincaré a participé à ces interrogations sur la Mécanique statistique. Pour comprendre son texte de 1907, il faut suivre l'évolution de sa pensée, depuis son entrée en la matière en 1889 jusqu'à la publication de la seconde édition du Calcul des probabilités en 1912.

L'entrée dans la problématique de la cinétique des gaz

Bien avant les Ehrenfest, Poincaré s'est inquiété et investi dans les débats sur les thèses de Maxwell dans un premier temps et Boltzmann ensuite [254] . Mais il n'est que tardivement au fait de l'actualité en théorie cinétique des gaz. Sa première intervention, en 1889, montre à la fois l'intérêt qu'il porte au thème, et la méconnaissance quasi totale (en France) de ce sujet. Dans la note intitulée "Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la Thermodynamique" [255] il s'interroge sur l'accord entre Mécanique et thermodynamique. Poincaré prend acte des tentatives de Helmholtz ("les plus intéressantes", "sans contredit") à propos des systèmes monocycliques pour rattacher les principes thermodynamiques aux théorèmes de la Mécanique : elles le satisfont pour les phénomènes réversibles. Sa note est centrée sur les phénomènes irréversibles, pour lesquelles les conciliations lui semblent insatisfaisantes, y compris les idées de Helmholtz. Par une démonstration rapide Poincaré en arrive à la conclusion :

"Nous devons donc conclure que les deux principes de l'augmentation de l'entropie et de la moindre action (entendu au sens Hamiltonien) sont inconciliables. Si donc M. von Helmholtz a démontré, avec une admirable clarté, que les lois des phénomènes réversibles découlent des équations ordinaires de la Dynamique, il semble probable qu'il faudra chercher ailleurs l'explication des phénomènes irréversibles et renoncer pour cela aux hypothèses familières de la Mécanique Rationnelle d'où l'on a tiré les équations de Lagrange et de Hamilton." [256]

La démonstration, contredite quelques temps après par le physicien britannique G.H. Bryan [257] , n'est pas notre souci. L'impression essentielle dégagée par ce texte est que Poincaré**veut** aboutir à la conclusion d'une inconciliabilité, quitte à produire une démonstration un peu bancale. La note traduit bien plus son *a priori* sur la question

[254] Poincaré a consacré plusieurs cours à la thermodynamique (premier semestre 1888-89), repris en théorie analytique de la chaleur (1893) avant de discuter ces problèmes dans le cadre de son cours de calcul des probabilités (1893-94).

[255] [POINCARE, H., 1889a].

[256] ***[POINCARE, H., 1889a], p. 552-553.***

[257] Celui-ci avance que Poincaré raisonne uniquement dans un cas de température nulle, duquel on ne peut rien conclure. Voir [BRUSH, S.G., 1986], p. 638.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

qu'une démarche et une démonstration mûrement réfléchie. Ceci éclaire la position de Poincaré vis-à-vis de la Mécanique statistique qu'il découvre progressivement au cours des années suivantes. Au fond, l'idée de chercher à accorder irréversibilité et mécanique lui paraît courue d'avance et son attitude critique systématique à propos des arguments de Maxwell et Boltzmann ne fait que renforcer ce constat.

Ainsi, en 1893, Poincaré écrit-il à l'adresse des philosophes un bref article intitulé "Le mécanisme et l'expérience" [258] dans lequel on retrouve quelques ingrédients de la précédente note : selon lui, le mécanisme implique la réversibilité des phénomènes alors que le monde est peuplé de phénomènes irréversibles. Outre les solutions d'Helmholtz et les "mouvements cachés" Poincaré discute le point de vue de Maxwell. Les "Anglais" ont proposé une autre hypothèse que Poincaré compare à la situation, irréversible, suivante : cacher un grain d'orge dans un tas de blé est facile, mais il est ensuite impossible de le retrouver.

"Cela tient à ce que les grains sont trop petits et nombreux ; l'irréversibilité apparente des phénomènes naturels tiendrait de même à ce que les molécules sont trop petites et trop nombreuses pour la grossièreté de nos sens" [259]

"Le hasard" reprendra un argument similaire. Il fait allusion au Démon de Maxwell et annonce que la théorie cinétique des gaz est "jusqu'ici la tentative la plus sérieuse de conciliation entre le mécanisme et l'expérience". L'argument suivant, à l'encontre des théories de Maxwell, est des plus intéressant. Il s'agit en l'essence du paradoxe de Zermelo-Planck :

"Un théorème facile à établir nous apprend qu'un monde limité soumis aux seules lois de la mécanique, repassera toujours par un état très voisin de son état initial. Au contraire, d'après les lois expérimentales admises [...] l'Univers tend vers un certain état final dont il ne pourra plus sortir. Dans cet état final, qui sera une sorte de mort, tous les corps seront en repos et à la même température." [260]

Poincaré va même plus loin et il donne sa solution au paradoxe : le monde tend vers un état de mort où il restera longtemps mais pas éternellement. Le temps de récurrence est fonction du nombre de molécules du problème [261] . Enfin, pour Poincaré, le problème de fond, c'est-à-dire la contradiction entre "la réversibilité dans les prémisses et l'irréversibilité dans la conclusion", est loin d'être résolu. En quelques pages Poincaré démonte deux points clés de la théorie. Mais il témoigne aussi de sa méconnaissance des avancées récente sur ces problèmes. En fait, il ignore totalement les travaux de Boltzmann et se réfère encore en 1893, exclusivement à Maxwell. Par contre les travaux

[258] [POINCARE, H., 1893b].

[259] Ibid., p. 89.

[260] Ibid., p. 90. C'est certainement dans un esprit de simplification que Poincaré fait allusion à la mort thermique de l'Univers plutôt qu'au second principe de la thermodynamique. La mort thermique fait partie des débats scientifico-philosophiques et n'a pas besoin de beaucoup d'explicitations pour un contemporain de Poincaré.

[261] Ni Zermelo, ni Planck, ni Boltzmann ne font référence à ce texte précis de Poincaré. Sans doute ignorent-ils complètement son existence.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

de Maxwell lui semblent très familiers, au point d'en corriger les erreurs de calcul et de formuler des objections à l'encontre de sa théorie des gaz [262] .

Sur la théorie cinétique des gaz, 1894

En 1894, Poincaré publie une nouvelle réflexion, plus étoffée, "Sur la théorie cinétique des gaz", ignorant encore les idées de Boltzmann, il faut le souligner. Cette fois le coeur de son propos est ce qu'il appelle le "postulat de Maxwell" (qui est en fait le "principe ergodique") et le "théorème de Maxwell", en l'occurrence le principe d'équipartition de l'énergie. Les travaux de dynamique, sur les trois corps notamment, refont surface pour critiquer les affirmations de Maxwell. Il définit ainsi, ce qu'il appelle, pour quelques temps encore, le postulat de Maxwell :

"Dans un problème quelconque de mécanique, il y a certaines fonctions des coordonnées q et de leurs dérivées qui doivent demeurer constantes pendant toute la durée du mouvement. C'est ce qu'on appelle des intégrales. Il y en a toujours au moins une qui est celle des forces vives et qui exprime la constance de l'énergie totale. Il en résulte qu'un système, partant d'une situation initiale donnée, ne peut pas atteindre une situation quelconque : les valeurs des intégrales doivent, en effet, être les mêmes pour la situation initiale et pour toutes les situations ultérieures. Maxwell admet que, quelle que soit la situation initiale du système, il passera toujours une infinité de fois, je ne dis pas par toutes les situations compatibles avec l'existence des intégrales, mais aussi près qu'on voudra d'une quelconque de ces situations. C'est ce qu'on appelle le postulat de Maxwell." [263]

Au passage, on remarquera que Poincaré comprend le postulat dans la version "aussi près que...". Ensuite, il reprend un problème soulevé par Lord Kelvin, à propos de ce postulat :

"Tous les problèmes de mécanique admettent certaines solutions remarquables que j'ai appelées périodiques et asymptotiques […] Pour ces solutions, le postulat de Maxwell est certainement faux. Ces solutions, il est vrai, sont très particulières, elles ne peuvent se rencontrer que si la situation initiale est tout à fait exceptionnelle. Il faudrait donc au moins ajouter à l'énoncé du postulat cette restriction, déjà bien propre à provoquer nos doutes : sauf pour certaines situations initiales exceptionnelles." [264]

Pour Poincaré, cette restriction n'est pas encore très satisfaisante. En effet :

"[…] si le postulat est vrai, le système solaire serait instable ; s'il est stable, en effet, il ne peut passer que par des situations peu différentes de sa situation initiale. C'est là la définition même de la stabilité. Or si la stabilité du système solaire n'est pas démontrée, l'instabilité l'est moins encore et est même peu

[262] Une courte, mais dense, note de 1893 montre qu'il rentre dans les moindres détails de la théorie et qu'il est très attentif à l'accord expérimental de celle-ci. [POINCARE, H., 1893c].

[263] ***[POINCARE, H., 1894], p. 100***

[264] ***Ibid., p. 105.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

probable. Il est possible et même vraisemblable que le postulat de Maxwell est vrai pour certains systèmes et faux pour d'autres, sans qu'on ait aucun moyen certain de discerner les uns des autres." [265]

Poincaré utilise, par analogie, ses résultats de la théorie des équations différentielles, comme l'existence de solutions périodiques et asymptotiques, et met en défaut le postulat. Il établit même un lien des plus intéressants entre le postulat et la question de la stabilité ("à la Poisson") [266] . Le point le plus remarquable de ce texte de Poincaré est bien cette allusion au théorème de récurrence, que beaucoup de scientifiques considèrent comme le "premier théorème ergodique" [267] et le caractère probabiliste qu'il revêt. La critique de Poincaré montre que sur la base du théorème de récurrence, il est illusoire de fonder une hypothèse ergodique ou quasi-ergodique, telle que les Ehrenfest la conçoivent.

Somme toute, c'est une intervention dans le pur style de Poincaré : il met en exergue les points vraiment problématiques et laisse le soin aux autres de trouver une solution. En outre, Poincaré intervient en dynamicien, spécialiste de la Mécanique, dans un problème qu'il considère lui-même comme de la "dynamique rationnelle" :

"Dans les problèmes de dynamique rationnelle, analogues à celui qui nous occupe ici, les forces ne dépendent que de la position du système ; si donc on connaît la situation du système, on connaîtra, non seulement les coordonnées des divers points et leurs vitesses, mais encore leurs accélérations. On pourra en déduire la situation nouvelle du système au bout d'un temps infiniment petit. On peut donc dire que, si l'on connaît la situation initiale du système, on connaîtra sa situation à un instant ultérieur quelconque." [268]

Ce passage, dont la parenté au déterminisme laplacien est flagrante, témoigne des positions de Poincaré, en 1894, et de l'évolution de sa pensée quelques années plus tard dans "Le hasard". La posture déterministe de Poincaré se démarque également des positions de Boltzmann, déjà converti à une vision plus probabiliste des phénomènes de la théorie des gaz.

Enfin, il faut bien remarquer que les réflexions techniques de Poincaré n'ont rien d'original par rapport à Boltzmann, qui les a largement anticipées, y compris le point de vue "probabiliste" et les trajectoires "exceptionnelles". Ajoutons que, d'après Von Plato [269] , le texte de Poincaré n'a eu guère d'audience auprès des physiciens. Le peu de

[265] ***Ibid., p. 105.***

[266] On remarquera d'ailleurs que Poincaré est plutôt convaincu de la stabilité du système solaire, c'est-à-dire que les solutions instables sont exceptionnelles. Mais ce sont elles qui pourraient assurer le postulat de Maxwell.

[267] Comme nous l'avons déjà signalé, les premiers véritables théorèmes ergodiques sont les théorèmes de Birkhoff (1931) et Von Neumann (1932). Birkhoff présentera le théorème de récurrence comme la racine de son théorème ergodique. Au chapitre 7, nous détaillerons ce point, p. 454.

[268] ***Ibid., p. 98.***

[269] [VON PLATO, J., 1991], p. 86.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

considérations dont fait l'objet le "célèbre" théorème de récurrence dans les discussions sur l'hypothèse ergodique [270] confirme assez bien cette observation.

Poincaré reprend le fil de ses analyses en 1906 et publie un texte plus technique sur le sujet : "Réflexions sur la théorie cinétique des gaz" [271] . Toujours très peu enthousiasmé par ces théories, Poincaré s'attache de plus en plus à une critique mathématique, précise, rigoureuse des thèses de Gibbs et Boltzmann. Il a abandonné les positions de principe pour occuper le terrain de la théorie. Cet opuscule de Poincaré est également intéressant parce que les Ehrenfest s'en sont certainement inspirés dans leurs critiques des idées de Gibbs [272] .

Le Calcul des probabilités, 1912

Le dernier jalon de l'évolution des idées de Poincaré est la fin de son traité sur le Calcul des probabilités, dans sa deuxième édition, en 1912. Parmi les diverses questions étudiées dans le dernier chapitre Poincaré aborde "le mélange des liquides". Au cœur du problème se trouve le postulat de base du "théorème de Boltzmann-Maxwell". L'intérêt de ce passage réside dans l'argumentation associant très intimement dynamique et probabilités. Poincaré évoque la situation suivante. Supposons que nous ayons introduit des molécules roses dans un liquide, à l'instant *t=0*. La question est de savoir si la répartition des molécules roses devient uniforme ou non avec le temps ; le postulat en question correspond à la réponse affirmative à cette interrogation. Poincaré décrit le problème en termes probabilistes :

"Quelque soit la probabilité de telle ou telle situation du système à l'instant zéro, n'allons-nous pas avoir une probabilité uniforme pour cette situation à l'instant t, pourvu que t soit assez grand ?" [273]

Il cherche ensuite des justifications et des exceptions sur des modèles dynamiques de liquides. Poincaré travaille en mathématicien. L'intérêt de ces quelques pages est de donner une base solide aux arguments mathématiques qui se développeront dans la perspective d'une recherche de type "théorie ergodique". Le dernier paragraphe, consacré à "un mode de raisonnement" utilisé en théorie cinétique des gaz, est aussi très remarquable pour les aspects probabilistes introduits.

[270] Les discussions postérieures au traité des Ehrenfest s'entend.

[271] [POINCARE, H., 1906]. Sans entrer dans les détails, Poincaré cherche à critiquer les théories de Boltzmann et Gibbs, trop floues mathématiquement à son goût, et à développer une notion d'entropie grossière (utilisée habituellement par les physiciens et qui obéit au second principe) et d'entropie fine (en fait constante). Le résultat de Poincaré met en avant les difficultés des passages à la limite (du discret au continu) et les précautions à prendre, contrairement aux Ehrenfest.

[272] [DUGAS, R., 1959], p. 237-238. Le problème, élucidé par Poincaré, réside dans les passages à la limite dans le découpage en cellules finies de l'espace des phases.

[273] [POINCARE, H., 1912], p. 323. Il suit : "C'est là ce qu'on postule dans la théorie cinétique des gaz, et en particulier quand on veut établir le théorème de Boltzmann-Maxwell. Il y aurait un grand intérêt à justifier ce postulat.". Il est raisonnable de penser que Poincaré connaît désormais largement les théories avancées par Boltzmann, au moins à travers la traduction remarquable et remarquée des Leçons sur la théorie des gaz, par M. Brillouin en 1902 et 1905.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Dans son exposé, Poincaré suppose le volume du vase divisé en n volumes égaux, $v_1 ... v_n$. La probabilité pour qu'une molécule soit dans un volume v_i est p_i. La loi de probabilité s'exprime : $P = p_1 x_1 + ... + p_n x_n$, où $x_1 ... x_n$ sont des "variables auxiliaires".

Le processus est connu à travers les probabilités q_{ik} : probabilité pour qu'une molécule, à l'instant t dans le volume v_i, soit dans le volume v_k, à l'instant $t+\tau$. On remplace, dans la loi P, les x_k par $q_{1k} x_1 + ... q_{nk} x_n$, pour obtenir une nouvelle loi notée PS, valable pour l'instant suivant. En itérant le processus, on montre alors que PS^h (h itérations) tend vers une loi de probabilité uniforme. Poincaré fait une objection à ce raisonnement :

"Il n'est pas démontré que la probabilité pour qu'une molécule soit à l'instant t+2# dans le volume v_i en admettant qu'on sache qu'elle était à l'instant t+# dans le volume v_k reste la même si l'on ne sait pas du tout où elle était à l'instant t, ou bien si l'on sait qu'elle était à cet instant dans le volume v_i par exemple." [274]

Cela pose la question du type de processus en jeu et de savoir si les probabilités de transition q_{ik} sont les mêmes à l'instant t et à l'instant $t+\tau$ [275]. D'après Poincaré les raisonnements de théorie cinétique passent cela sous silence. Il considère cependant qu'ils peuvent être plausibles dans certains cas, comme celui-ci :

"quand on envisage la probabilité pour qu'une molécule gazeuse subisse une déviation donnée par un choc avec une autre molécule, cette probabilité ne sera guère affectée par les chocs antérieurs subis par la même molécule." [276]

Poincaré ne cite aucun auteur en particulier pourtant cette hypothèse ressemble fort aux hypothèses de "désordre moléculaire" : il n'y a pas de corrélations entre les molécules, le processus a toutes les caractéristiques d'un phénomène sans mémoire. En un mot, on peut le qualifier d'aléatoire.

Les deux derniers paragraphes du traité éclairent davantage son texte "Le hasard". Les derniers mots font écho à ce texte :

"Supposons les molécules gazeuses enfermées dans un vase en forme de parallélépipède rectangle, pouvant choquer les parois, mais ne pouvant se choquer entre elles. Si elles ont toutes la même vitesse, elles ne seront pas uniformément réparties dans le vase au bout d'un temps quelconque, si elles ne le sont pas au temps t=0. Elles le seront, au contraire, si leur vitesse varie suivant une loi de probabilité quelconque, suivant la loi de Maxwell, par exemple, et cela quelle que soit la loi." [277]

Ceci nous renvoie à la question de la complexité des causes et à l'absence de hasard

[274] ***Ibid., p. 332.***

[275] Le terme de probabilité de transition n'est pas utilisé par Poincaré. La grande similitude avec les processus de Markov nous pousse à choisir ce terme. Il faut noter aussi que les théories de A.A. Markov (1856-1922) sont tout à fait contemporaines de Poincaré : son travail en théorie des probabilités, sur les processus stochastiques date de la période 1907-1912.

[276] ***Ibid., p. 332.***

[277] ***Ibid., p. 333. En italique dans le texte.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

lorsqu'une caractéristique du système est conservée, invariante. Dans l'hypothèse où seuls les chocs sur les parois interviennent et où les vitesses des molécules sont identiques, la situation initiale se conserve et ne produit pas d'uniformité dans la distribution spatiale. Dans l'autre cas, la connaissance de la seule loi de probabilité des vitesses assure la tendance à l'uniformisation du gaz. Comme le dit Poincaré en relation avec la situation générale où l'on ne connaît que les lois de probabilités pour la vitesse d'une molécule, "on pourrait alors raisonner à peu près comme nous l'avons fait à propos du battage des cartes" [278] .

L'évolution de la pensée de Poincaré est étonnante. Poincaré navigue allègrement entre dynamique, statistiques et probabilités, ne s'abstenant pas de présenter le processus comme probabiliste, à condition que cela soit un minimum justifié. Cette évolution, depuis 1889, est traversée par deux grandes tendances : la critique du mécanisme et le scepticisme à l'égard des interprétations mécaniques de l'irréversibilité [279] . Ces deux tendances sont développées dès 1889 et se concrétisent en quelque sorte par un assouplissement probabiliste promulgué graduellement : "Le hasard" est une étape dans ce changement.

f. Vers la statistique

Au fil des débats agitant la théorie cinétique des gaz, nous avons vu se dégager des prises de position, plus ou moins claires, à propos des probabilités en physique et du déterminisme. Certains prônent un point de vue statistique (ou vision fréquentiste des probabilités), sous-tendu par des phénomènes mécanistes, déterministes ; d'autres (essentiellement Boltzmann) préfèrent une perspective probabiliste, ne supposant pas de processus strictement déterminés. Cette "petite" révolution de fin de XIXème siècle, en rupture d'avec les positions dominantes, va progressivement s'estomper et s'effacer au profit d'une vision purement statistique, plus en accord avec la philosophie scientifique dominante. Plusieurs raisons participent à ce décalage par rapport au bouleversement intellectuel inauguré par Boltzmann. Le travail de Gibbs, qui est un acte important pour la Mécanique statistique, et le mouvement brownien déterminent l'orientation suivie. La part grandissante des mathématiques focalise l'attention sur les mathématiques, à propos de l'ergodicité comme des considérations sur la définition mathématique des probabilités. Tout ce contexte nous permettra de préciser encore les affirmations de Poincaré dans "Le hasard".

Josiah Willard Gibbs (1839-1903) et la Mécanique statistique

[278] Ibid., p. 332.

[279] Parmi les différents protagonistes, les travaux de Boltzmann et Gibbs sont peut-être les moins considérés. L'"hommage" rendu à la mort de Boltzmann en 1906, à l'Académie des Sciences est prononcé par Poincaré : on se demande s'il est possible de faire plus expéditif. En intégralité cela donne : "Boltzmann, qui vient de mourir tragiquement, professait depuis longtemps à Vienne ; il s'était surtout fait connaître pour ses recherches sur la théorie cinétique des gaz. Si le Monde obéit aux lois de la Mécanique qui permettent indifféremment de marcher en avant ou en arrière, pourquoi tend-il constamment vers l'uniformité sans que l'on puisse le faire rétrograder ? Telle est la question qu'il avait entrepris de résoudre et non sans quelques succès", [POINCARE, H., 1906b].

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Le nom de J.W. Gibbs, physicien américain, est apparu plusieurs fois déjà. En 1902 paraît son célèbre ouvrage, fondateur de la Mécanique statistique : Elementary principles in Statistical Mechanics developed with special reference to the rational foundation of thermodynamics [280] . Il vient ponctuer l'évolution des idées en physique depuis Clausius, Maxwell et Boltzmann, avec leur théorie cinétique des gaz. Gibbs apporte deux nouveautés, essentielles pour l'histoire de la physique au XXème siècle, qui sont intimement liées. D'une part, il fonde la Mécanique statistique sur des conceptions mathématiques. Alors que Maxwell et Boltzmann restaient sur des modèles de gaz, les lois mécaniques, les processus de collisions et autres, Gibbs construit une théorie indépendante de ce substrat [281] . Par ailleurs, l'indépendance de la théorie facilitera grandement l'utilisation de la Mécanique statistique dans le cadre de la physique quantique [282] . D'autre part, Gibbs vient compléter l'évolution de la cinétique des gaz (de Clausius) vers les aspects combinatoires (le lien entre entropie et probabilités établi par Boltzmann) [283] . C'est le sens du terme "Mécanique statistique" choisi par Gibbs lui même. Son intention est de "faire des recherches statistiques en tant que branche de la Mécanique rationnelle" [284] .

Gibbs n'intervient pas de manière soudaine dans les questions de Mécanique statistique [285] . Il a commencé par des travaux à la frontière entre la Mécanique et la thermodynamique. Ces points sont moins connus et nous permettent d'insister, une nouvelle fois, sur le poids de la Mécanique dans la conception de la démarche statistique.

Gibbs obtient une thèse d'ingénieur de l'université de Yale en 1863, avant de se former aux mathématiques et physique à Paris, Berlin et Heidelberg. Dans les années

[280] [GIBBS, J.W., 1902], il a été traduit en français, en 1926 seulement, par F. Cosserat (avec une introduction de L. Brillouin).

[281] En introduction à son traité, Gibbs signale qu'il prend le parti de ne pas expliquer "les mystères de la Nature". Partant du problème des chaleurs spécifiques, problème essentiel en ce début de XXème siècle et lié aux questions d'équipartition de l'énergie, Gibbs affirme : "Certainly, one is building on an insecure foudation, who rests his work on hypotheses concerning the constitution of matter. Difficulties of this kind have deterred the author from attempting to explain the mysteries of nature, and have forced him to be contented with the more modest aim of deducing some of the more obvious propositions relating to the statistical branch of mechanics." [GIBBS, J.W., 1902], p. x. On pourra remarquer qu'il n'échappe pas aux tentatives de récupération des énergétistes, voyant chez Gibbs de bons arguments contre la nécessité de recourir à l'atomisme. Cependant, Gibbs ne partage pas ces vues énergétistes (voir [KLEIN, M.J., 1972], p. 391 et [BRUSH, S.G., 1983], p. 76 à ce sujet). De toute manière Gibbs n'est pas enferré dans ce débat autant que Boltzmann.

[282] Ce point de vue lui permet de se tenir à l'écart d'un problème physique important (un des "nuages" de Kelvin), celui de l'écart entre les chaleurs spécifiques expérimentales et les prédictions de la théorie cinétique sur la base du théorème d'équipartition.

[283] Gibbs, dans une notice sur Clausius, indique d'ailleurs la différence essentielle à ses yeux : "In reading Clausius we seem to be reading mechanics ; in reading Maxwell, and in much of Boltzmann's most valuable work, we seem rather to be reading in the theory of probabilities". Cité dans [KLEIN, M.J., 1972], p. 391.

[284] "we pursue statistical inquiries as a branch of rational mechanics" [GIBBS, J.W., 1902], p. ix.

[285] On se reporte à la biographie de J.W. Gibbs, dans le Dictionary of Scientific Biography [KLEIN, M.J., 1972].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

1860, il travaille sur un dispositif pour machines à vapeur, destiné à améliorer la réponse du système au changement de vitesse du moteur : le cœur de ce problème est un problème de dynamique, de Mécanique, et plus précisément d'équilibre et d'instabilité du système. Même s'il abandonne les réflexions sur ces machines, ceci l'a certainement marqué. Dans les années 1870, en effet, il entame des travaux en thermodynamique qui s'orientent progressivement vers la question de la thermodynamique de l'équilibre et sa stabilité. Son article de 1878, qui le rendra célèbre, développe une théorie générale de l'équilibre thermodynamique, inspirée de l'équilibre mécanique, et qui fondamentalement repose sur un principe extrémal. La première application, célébrée par les chimistes tels Ostwald et Le Chatelier, à l'équilibre chimique, avec la notion de potentiel chimique fera date. Mais, malgré une reconnaissance partielle, ses idées ont du mal à percer en Europe ; Boltzmann, Planck, Helmholtz développent leurs notions en parallèle.

De 1884 à 1902 Gibbs forme le projet de fonder une "Mécanique statistique" prolongeant le chemin frayé par Maxwell et Boltzmann. Il définit la notion d'"ensemble" statistique (dont on a vu les premières traces chez Boltzmann), diversifie les configurations imaginables pour de tels ensembles (microcanonique, canonique, grand ensemble). Par des analogies formelles il identifie les termes mathématiques aux quantités thermodynamiques connues. Nul besoin de s'appesantir plus sur la multitude de résultats de Gibbs qui découlent de ces considérations. Quant aux limites de sa théorie, Gibbs en est largement conscient [286] . Il donne des fondements statistiques à la thermodynamique dans la mesure où un système thermodynamique peut être traité comme un système mécanique conservatif avec un nombre fini de degrés de liberté. En ce sens, il s'agit bien d'une "branche" de la Mécanique rationnelle, ainsi qu'il le souhaitait.

Il faut également remarquer que l'essentiel de la construction de Gibbs concerne la Mécanique statistique d'équilibre. Dans un rapide chapitre de son ouvrage Gibbs donne quelques indications à propos de l'irréversibilité [287] mais ce ne sont que des arguments verbaux, prudents. Il poursuit des recherches dans ce domaine, mais son décès rapide en 1903 met un terme à ces dernières considérations.

Poincaré est assez critique à l'encontre des thèses de Gibbs. Hadamard en fait également une analyse en 1906 [288] et se départit des positions de Poincaré, sur le fond. En effet, il pense plausible l'existence de lois irréversibles, sans aller jusqu'à l'affirmer tout à fait. L'objection de réversibilité des équations du mouvement ne suffit pas à jeter le doute [289] . L'argument d'Hadamard repose sur deux éléments récurrents dans ce type de discours : le battage des cartes et un phénomène du type "petite cause, grand effet". Le battage des cartes intervient en tant que processus réversible régularisant les probabilités. L'autre effet concerne la discussion des systèmes mécaniques, telle que

[286] [KLEIN, M.J., 1972], p. 392.

[287] Chapitre XII de [GIBBS, J.W., 1902], p. 139-151.

[288] [HADAMARD, J., 1906a].

[289] Voir les remarques de Dugas [DUGAS, R., 1959], p. 231-232.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Gibbs l'envisage. Soit *P'* le point représentatif du système au temps *t'* et *P''* au temps *t''* :

"Quand t''-t' est très grand, c'est-à-dire qu'un changement très petit de P' entraîne un changement très grand de P'', tout se passe comme si P' étant donné, P'' était plus ou moins indéterminé, comme si la donnée de P' correspondait au lancé d'une roulette dont l'arrêt marquerait la position de P''. Cette roulette fonctionnerait aussi parfaitement que possible si l'indétermination de P'' était absolue (sauf la condition de constance de l'énergie). Même si cette hypothèse est inexacte, il n'en est pas moins vrai que des points représentatifs primitivement rapprochés les uns des autres se dispersent avec le temps et que notre ensemble de systèmes est ainsi battu." [290]

On remarquera que la discussion du jeu de roulette dans "Le hasard" se rapproche de cette description. Néanmoins, Hadamard insiste beaucoup plus sur les aspects de "sensibilité aux conditions initiales".

Par ailleurs, Hadamard critique Gibbs car celui-ci n'apporte pas d'arguments suffisamment rigoureux en faveur de l'existence de processus irréversibles. Voici comment Hadamard met en défaut l'objection de réversibilité. Dans la notice sur ses propres travaux de 1912, un rapide retour sur la question montre quel est le centre du problème selon lui : qu'est-ce qu'une distribution non organisée ? Car la théorie cinétique affirme qu'une certaine quantité *H* est croissante, non pas pour toute situation initiale, mais pour les distributions non organisées. Or une seule propriété des distributions organisées est utilisée pour les raisonnements de cinétique des gaz : ce sont des distributions exceptionnelles, au sens du calcul des probabilités. Ce caractère exceptionnel fait quasiment office de définition. A ce propos, Hadamard ne manque pas d'évoquer le théorème (de récurrence) de Poincaré (comme il l'avait fait plus directement dans l'article de 1906).

L'objection de réversibilité repose sur l'ambiguïté de cette définition. En imaginant un mouvement de *t* à *t'*, renversé dans le temps à l'instant *t'*, l'objection suppose que le mouvement inorganisé à *t*, l'est aussi à *t'*, sans quoi le processus sort du cadre d'application de la fonction *H*. Hadamard affirme que cela n'est pas exact [291] et propose une autre version des propriétés de la quantité *H*, immunisée contre l'objection de réversibilité.

"Soient H_1 et $H_2<H_1$, deux valeurs de H ; T un intervalle de temps convenablement choisi. Désignons par M_1 les mouvements pour lesquels, pendant l'intervalle T, la quantité H prend au moins une fois la valeur H_1 ; par M_2, les mouvements pour lesquels (au cours du même intervalle de temps) H prend au moins une fois la valeur H_2 ; par M_3, ceux qui satisfont à l'une ou l'autre des deux conditions précédentes ; autrement dit, qui sont à la fois des mouvements M_1 et des mouvements M_2. Les M_3 sont exceptionnels parmi les M_1, mais non parmi les M_2." [292]

[290] ***Cité dans [DUGAS, R., 1959], p. 232.***

[291] Tout dépend du système auquel se réfère le qualificatif "exceptionnel" (comme le montre la variante de propriété de H suggérée par Hadamard). "le fait, pour un mouvement, d'être organisé ou inorganisé dépend de ce que l'on suppose préalablement connu à son sujet." [HADAMARD, J., 1912], p. 86.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Le mouvement brownien

En parallèle aux considérations de Gibbs, les études sur le mouvement brownien participent au cheminement vers les conceptions statistiques. En un sens, ce phénomène considéré comme une manifestation directe d'une évolution moléculaire aléatoire s'insère naturellement dans les débats de thermodynamique aujourd'hui. Mais, en réalité, avant Einstein, en 1905, peu de physiciens y prêtent attention et Clausius, Maxwell comme Boltzmann ne publient rien sur le sujet. Le physicien Louis-Georges Gouy (1854-1926) attire le premier l'attention des physiciens en 1888, et Poincaré est à l'écoute. En substance, Gouy a constaté que le mouvement est indépendant des influences extérieures et suggère que le mouvement brownien offre une exception au second principe de la Thermodynamique, au niveau microscopique [293] .

Poincaré évoque cette réflexion de Gouy dans "Le hasard", et plus longuement dans une conférence faite à Saint-Louis en 1904 (reproduit dans La valeur de la science en 1905 [294]). Ce dernier texte, consacré à "la crise actuelle de la physique mathématique", aborde le principe de Carnot et l'irréversibilité. Selon Poincaré, Maxwell, Boltzmann et Gibbs ont développé un point de vue tel que :

"le principe de Carnot n'est qu'un principe imparfait, une sorte de concession à l'infirmité de nos sens ; [...] le démon imaginaire de Maxwell, qui peut trier les molécules une à une, saurait bien contraindre le monde à revenir en arrière" [295]

Ce sont des objections théoriques, selon Poincaré, alors que le phénomène de mouvement brownien est plus problématique : "plus besoin de l'œil infiniment subtil du démon de Maxwell, notre microscope suffit […] et voilà déjà l'un de nos principes en péril" [296] . Ce sont quelques idées reprises dans "Le hasard". Poincaré n'a pas continué sur le sujet, certainement pris dans d'autres problématiques [297] .

Les premiers résultats théoriques, frayant une voie à des investigations expérimentales, sont l'œuvre de Albert Einstein (1879-1955) et du physicien d'origine polonaise Marjan Smoluchowski (1872-1917), à partir de 1905. Einstein avait déjà travaillé à des études de physique statistique avant de publier son troisième article de 1905.

[292] [HADAMARD, J., 1912], p. 86.

[293] Gouy imagine une machine, irréalisable en pratique mais objet de pensée théorique, qui pourrait récupérer une portion du travail d'une particule brownienne. Le travail serait produit à partir de la chaleur du milieu, allant à l'encontre du principe de Carnot. Le second principe ne serait plus valable pour des systèmes de taille inférieure au micron. Voir [BRUSH, S.G., 1986], p. 670.

[294] [POINCARE, H., 1905a].

[295] [POINCARE, H., 1905a], p. 130-131.

[296] Ibid., p. 131-132.

[297] D'après S.G. Brush, il semble que Poincaré se soit déchargé sur Louis Bachelier (1870-1946), auteur d'une thèse de mathématiques sur la spéculation financière, développant une théorie des processus stochastiques proches des théories modernes sur le brownien (processus de Wiener).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Celui-ci est une illustration du besoin d'une approche atomiste de la thermodynamique. En substance, la théorie d'Einstein repose sur les fluctuations, qui suffisent à expliquer le mouvement des particules browniennes ; l'intérêt majeur de sa théorie est de donner un résultat quantitatif, rapidement exploité sur le plan expérimental. Einstein prouve ainsi l'utilité de l'approche statistique sans jamais évoquer l'idée qu'il puisse exister un hasard fondamental dans le phénomène.

Les expériences de Jean Perrin (1870-1942), qui lui vaudront son prix Nobel en 1926, constituent une confirmation des idées d'Einstein. Elles sont rapidement devenues synonymes de preuve de la réalité atomique de la matière pour les observateurs contemporains.

Si le mouvement brownien est lié aux théories de Maxwell et Boltzmann, il n'en est pas une "simple" application. Cependant, la théorie développée au début du XXème siècle assure la vision statistique-atomiste du monde, mise en doute dans les débats scientifiques et philosophiques. Les questions de fond sont évincées et la vision statistique (celle proposée par Einstein, si l'on veut) est acceptée.

Le rapprochement des mathématiques.

Les recherches proches du mouvement brownien se développent également d'un point de vue mathématique, selon les théories appelées depuis Pearson, "marche aléatoire". On peut en effet faire remonter à Karl Pearson (1857-1936), en 1905, cette idée de marche d'un homme ivre, prototype du mouvement brownien. Lord Rayleigh (1842-1919) avait déjà en 1880 traité d'un problème analogue, tiré de la physique [298] .

Outre le mouvement brownien, les éléments théoriques publiés par Gibbs en 1902 et dans la synthèse des Ehrenfest, en 1911, ont un poids déterminant dans le succès de la méthode statistique. Or le parti pris est très clair dès les premières pages de ce dernier document, qui propose quasiment une relecture et réinterprétation de l'histoire alors récente de la théorie cinétique des gaz (en plus de l'ergodicité). Une seule note suffit à donner le ton :

"Dans ce qui suit l'expression : probabilité d'un événement est évitée et remplacée par des évaluations explicites de fréquence, sans doute plus lourde mais plus précise. Dans les anciens travaux dont nous allons parler tout d'abord, l'expression de 'probabilité' employée sans nuance a été incontestablement utile : des nombres exprimant des fréquences relatives de natures très différentes, telles que a) la longueur relative des durées pendant lesquelles une molécule A est dans un état Z ; et b) le nombre relatif des molécules qui a une époque fixée sont dans l'état Z, étaient désignées sous la dénomination unique : 'la' probabilité pour que A soit dans l'état Z." [299]

Les **Ehrenfest ne considère qu'une vision "fréquentiste" des probabilités**, ce qui est en décalage avec les idées de Boltzmann par exemple. Avec ce point de vue très

[298] Dans une série de réflexion [RAYLEIGH, J.W.S., 1873 / 1880 / 1903].

[299] ***Nous utilisons la version de Borel, traduction de 1915 du texte des Ehrenfest : [BOREL, E., EHRENFEST, P., EHRENFEST, T., 1915], p. 191.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"conservateur", qui a le mérite de ne pas bousculer les positions philosophiques classiques, la statistique (que nous considérons dans le cas présent comme synonyme de l'option fréquentiste des probabilités), a pu s'imposer assez facilement. L'idée de probabilités en quelque sorte "réellement probabilistes" est éludée.

Nous avons vu qu'une autre conséquence a été de focaliser l'attention sur la question de l'ergodicité, qui s'insère dans le questionnement très récurrent sur la justification de l'emploi de méthode statistique sur la base d'un processus déterministe. C'est dans cette perspective que les mathématiciens interviennent un peu a posteriori pour légitimer les théories physiques. Rien d'étonnant donc à ce que deux résultats mathématiques paraissent en 1913, prouvant l'impossibilité de l'existence de systèmes ergodiques. M. Plancherel (1885-1967) s'appuie sur la récente théorie de la mesure de Lebesgue, A. Rosenthal (1887-1959) [300] sur les idées de Brouwer et Baire. D'autres travaux mathématiques suivent et, parmi eux, il nous paraît important d'évoquer les idées de E. Borel.

Emile Borel (1871-1956)

A travers ses multiples réflexions sur les phénomènes aléatoires, Borel va contribuer à appuyer l'option fréquentiste au sujet des probabilités. La **définition des probabilités** constitue en fait le cœur de la problématique de Borel. Pour lui il ne s'agit que d'une question de mathématiques, à savoir celle de déterminer les hypothèses mathématiques requises dans la définition. Ce choix de Borel s'inscrit dans la perspective de l'histoire des probabilités mathématiques, qui trouveront progressivement leurs fondements avec lui, puis plus définitivement avec A. Kolmogorov en 1933. Borel tente d'écarter les probabilités des théories physiques, mais dans ses tentatives de définition il s'adosse tout de même aux éléments de la Mécanique statistique et à des intuitions proches de ce que Poincaré exprime dans "Le hasard".

Sa traduction de l'ouvrage des Ehrenfest, en 1915, est assortie de compléments personnels qui laissent filtrer ses choix. Tout d'abord, prolongeant les réflexions de Plancherel et Rosenthal, Borel montre lui aussi que "l'hypothèse de l'existence rigoureusement abstraite des systèmes ergodiques est contradictoire" et débat des problèmes mathématiques posés par la Mécanique statistique [301] . Borel distingue très

[300] [PLANCHEREL, M., 1913] et [ROSENTHAL, A., 1913].

[301] Au sujet de l'hypothèse ergodique il ajoute : "à vrai dire, il ne semble pas que cette hypothèse abstraite ait jamais été réellement envisagée par les physiciens ; ceux-ci n'ont probablement jamais cru aux systèmes rigoureusement ergodiques, au sens mathématique, c'est-à-dire, pour rester dans la géométrie ordinaire, à la trajectoire qui passe rigoureusement par tous les points intérieurs au carré [...] les courbes telle que celle de G. Peano n'ont été connues que par ceux qui s'intéressent à la théorie des ensembles, et personne n'a jamais pensé que de telles courbes pourraient être des trajectoires dynamiques. Pour le physicien une trajectoire est ergodique si l'on approche autant que l'on veut de toute position compatible avec la valeur donnée de l'énergie [...] Lorsque l'on interprète la mécanique statistique au moyen de l'indétermination permanente des actions extérieures [...], la question de l'existence mathématiquement rigoureuse de la trajectoire ergodique n'a plus aucune importance physique.", [BOREL, E., EHRENFEST, P., EHRENFEST, T., 1915], p. 276. La remarque au sujet de G. Peano est due à Rosenthal : [ROSENTHAL, A., 1913].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

nettement les mathématiques et la physique, indiquant d'ailleurs que l'hypothèse ergodique est du ressort des mathématiques et n'intéresse pas les physiciens. En fait, il prépare le terrain pour son interprétation et sa justification à base de théorème de calcul de probabilité.

Ses notions de probabilités reposent clairement celle d'"indétermination permanente des actions extérieures" :

"C'est la notion même du déterminisme des phénomènes qui est ici en jeu. Il s'agit de savoir s'il est possible d'admettre que les mouvements ultérieurs des molécules d'un gaz sont déterminés par leur état initial et par les lois du choc. Or, en admettant même que l'état actuel soit rigoureusement connu, ce que l'on déduira, c'est un ensemble d'états parmi lesquels on n'a aucune raison de supposer que l'un plutôt que l'autre est effectivement réalisé ; on est donc en droit de considérer comme devant être réalisé dans l'avenir l'un de ces états choisis parmi ceux qui sont bien plus fréquents que les autres. [...] D'une manière précise, un calcul facile montre qu'un déplacement d'un millième de millimètre d'un atome situé dans une étoile éloignée a pour conséquence une modification dans la trajectoire d'une molécule gazeuse observée par nous, modification dont l'ordre de grandeur angulaire dépasse 10^{-200}. Il est donc physiquement impossible de regarder la direction des trajectoires des molécules comme rigoureusement déterminées, comme un nombre mathématique abstrait ; il faudrait, en effet pour cela, avoir introduit dans nos équations au moins tout l'univers visible ; si on regarde une telle direction comme pouvant se trouver avec une égale probabilité à l'intérieur d'un cône dont l'angle au sommet est 10-200, on constate que les chocs ont pour effet de disperser très rapidement ces directions primitivement très voisines ; [...] ces différences imperceptibles suffisent pour modifier entièrement l'histoire de la masse gazeuse. Les conclusions auxquelles on arrive ainsi sont analogues à celles auxquelles conduisent les hypothèses ergodiques [...] Elle permet en même temps de répondre à l'objection de J. Loschmidt. L'évolution des états les plus probables apparaît en effet alors, non comme une propriété d'un modèle particulier mais, ce qu'elle est réellement, comme une propriété statistique de l'infinité de modèles qui correspondent au bout d'une fraction de seconde à un gaz réel, supposé rigoureusement connu à l'instant initial." [302]

La fin du premier paragraphe laisse apparaître que **Borel adhère à une vision "fréquentiste" des probabilités**, comme les Ehrenfest. L'indétermination, en reprenant des termes modernes, est la combinaison d'une sensibilité extrême du système et d'irrémédiables perturbations extérieures [303]. En conséquence il est indispensable, selon Borel, de mettre sous une forme "indéterminée" des propositions de type courant en théorie cinétique. Les parois du récipient d'un gaz ne sont pas absolument rigides, les

[302] ***[BOREL, E., EHRENFEST, P., EHRENFEST, T., 1915], p. 283. En italique dans le texte.***

[303] Dans un texte antérieur, de 1913, "La mécanique statistique et l'irréversibilité", Borel détaillait davantage les calculs sur l'indétermination : il imagine même un système de réflexions sur de multiples globes sphériques (un système analogue de la théorie cinétique), lequel présente une propriété de croissance exponentielle avec le temps. [BOREL, E., 1913]. Borel ajoutait : "L'indétermination de l'avenir est, bien entendu, relative à nos moyens d'investigation et de calcul", p. 1702.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

données ne sont pas exactement connues ou connues seulement avec une approximation. Ceci implique de prendre en considération des probabilités pour ces données soumises à l'indétermination. Borel s'attache à montrer que cette forme probabiliste des données du problème justifie de raisonner de manière statistique sur le comportement du gaz [304]. Il construit des démonstrations mathématiques sur des modèles de gaz (sphères en collisions) qui lui servent à justifier l'emploi des probabilités dans la cinétique des gaz ; la racine physique de cette justification est l'indétermination de données. Au chapitre des analogies avec "Le hasard" on peut donc compter : l'indétermination de Borel et le passage "Une cause très petite", le jeu de roulette cité par Borel et Poincaré, pour lequel les conditions de lancement sont indéterminées [305].

Pour en terminer, dans le long extrait du texte de 1915, Borel évoque des "conclusions" à ces considérations et compare la situation aux hypothèses ergodiques. En fait, **Borel remplace l'ergodicité par la loi des grands nombres** au cœur des fondements de la cinétique des gaz [306]. Les deux points de vue ont les mêmes conséquences, mais dans l'esprit de Borel, les hypothèses ergodiques doivent céder la place aux théorèmes de calcul des probabilités. Voilà qui éclaire ses critiques à l'encontre de l'ergodicité et montre comment les mathématiques des probabilités et la physique statistique se rapprochent considérablement sous la plume de Borel.

Le rapport des mathématiques à la physique est à double sens. La théorie des probabilités sert à la théorie physique, qui s'associe en retour, de manière heuristique, à la démarche de définition des probabilités. En s'intéressant à la question du fondement des probabilités, Borel interroge et mêle toutes les problématiques physico-mathématiques essentielles en 1915 [307] : Mécanique statistique, mouvement brownien et fluctuations, continu et discontinu autant en mathématique des probabilités qu'en physique des quanta. Il inscrit également l'option statistique, fréquentiste, au cœur de la définition des probabilités et de la perception de tous ces phénomènes ayant en commun leur caractère aléatoire.

[304] [BOREL, E., 1906].

[305] Au sujet du jeu de roulette, Borel affirme que les conditions de lancement du jeu sont indéterminées, suivent une loi de probabilité qu'on ne connaît pas, mais qui est une fonction continue. Seules les propriétés générales des distributions de probabilité importent pour connaître la loi de probabilité du résultat du jeu de roulette, une distribution uniforme. Borel ajoute un autre exemple. Dans le cas d'un point matériel, de vitesse *V*, limité à un domaine *D*, Borel s'interroge sur la probabilité des directions possibles du point, c'est-à-dire de l'orientation de *V*. Il conclut : "*toutes les directions sont également probables, pourvu que l'on considère un temps assez long*" sur la base d'un raisonnement similaire à celui de la roulette. [BOREL, E., 1906], p. 1687 (en italique dans le texte). Rappelons que le texte de Borel est antérieur à celui de Poincaré. Borel n'évoque pas le jeu de roulette, mais d'autres jeux simplifiés lui servent de modèle, tel celui de la distribution des petites planètes. De toute façon ce ne sont que des prétextes à mathématisation de situations analogues dans diverses questions physiques.

[306] Ceci est explicité dans [BOREL, E., 1906]. Dans ce texte, la justification de l'utilisation des probabilités est suivie d'un raisonnement probabiliste établissant la loi de Maxwell de répartition des vitesses. Il affirme alors : "[...] rien n'autorise à dire que la loi de Maxwell devient plus probable lorsque le temps croit ; tout ce que l'on peut dire, c'est qu'en multipliant les expériences, ou en les prolongeant, on permet à la loi des grands nombres de se manifester malgré les écarts passagers possibles.", [BOREL, E., 1906], p. 1691.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

2.3. De nouvelles interrogations

A travers ces nombreux débats émaillant la période 1878-1915 il se dégage une certaine cohérence sur le fond, malgré les divers corpus de connaissances concernés. L'axe fédérateur est l'antinomie hasard / déterminisme dont les incarnations varient d'un savant à l'autre et évoluent avec le temps. Ces *themata* évoluent au gré des nouvelles conceptions philosophiques, des mathématiques et de la Mécanique statistique. Toutes ces réflexions s'épanouissent à la frontière entre la Mécanique, la thermodynamique, les mathématiques (des équations différentielles et des probabilités) et la philosophie.

Nous avons surtout montré que des questions nouvelles et importantes surgissent à ce moment là. La place des probabilités (et du hasard) en physique est questionnée, la définition des probabilités mathématiques devient un enjeu et l'ergodicité des systèmes mécaniques constitue une question à part entière. Plus confiné au plan épistémologique et philosophique, la question de l'instabilité fait l'actualité. "Le hasard" de Poincaré est peut-être le texte qui cristallise le mieux cet ensemble d'interrogations.

En outre, à la fin du XIXème siècle, diverses réponses sont déjà proposées à ces problématiques. Nous avons vu qu'il se produit une convergence progressive vers une option statistique, incarnée par le texte des Ehrenfest, une conception "fréquentiste" des probabilités et leur "principe ergodique".

Cet épisode est doublement important. D'une part, des interrogations nouvelles naissent et vont se perpétuer au XXème siècle. A ce niveau on peut compléter les *themata* hasard et déterminisme par les couples antithétiques stabilité et instabilité, et de manière plus anecdotique, réversibilité et irréversibilité. Nous verrons comment le couple stabilité / instabilité devient un véritable *themata*, stimulé par les interrogations récurrentes sur les fondements de la Mécanique statistique. D'autre part, les choix effectués vont avoir naturellement une incidence sur les développements ultérieurs. L'histoire des conceptions du chaos s'inscrit dans ce double mouvement.

Poincaré, un "précurseur" du chaos ?

Grâce à tous les éléments rassemblés dans cette première partie il est possible d'apprécier à leur juste valeur les affirmations répétées au sujet de Poincaré et de nuancer son caractère précurseur prétendu, si cher à nombre d'interprétations de l'histoire du chaos. Remarquons au préalable que l'idée que Poincaré soit un précurseur du chaos et des théories du chaos, dépend des réponses apportées à deux questions

[307] En conclusion de ses commentaires sur le texte des Ehrenfest, Borel soulève les questions des fluctuations et des quanta ([BOREL, E., EHRENFEST, P., EHRENFEST, T., 1915]). L'essentiel de la discussion concerne le mouvement brownien, les moyens de récupérer son énergie et les possibilités de contredire le second principe. Comme le dit Borel, "c'est le problème du démon de Maxwell transporté sur le plan expérimental" (ibid., p. 290). Le démon de Maxwell est effectivement à l'honneur puisqu'il sert de modèle pour imaginer un procédé de contournement du second principe par les fluctuations. Mais le point important des fluctuations est ailleurs : la théorie des fluctuations peut suggérer la marche à suivre pour définir la probabilité élémentaire, le problème véritablement crucial pour Borel (ibid., p. 292).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

élémentaires, mais problématiques : que faut-il entendre par chaos et théorie du chaos ? L'idée de "précurseur" a-t-elle un quelconque sens ? Dans l'immédiat, les réponses limitées que nous pouvons apporter à la première question restreignent nos conclusions, mais nous y reviendrons en temps voulu.

Poincaré et la théorie du chaos

Du fait de ses nombreux travaux qualitatifs sur les équations différentielles, on peut facilement légitimer l'idée que Poincaré est un initiateur d'une partie des théories du chaos, en accord avec l'historiographie. Dans cette perspective, il est sous-entendu que la théorie du chaos est un ensemble d'outils, dont les parties mathématiques ont été inaugurées par Poincaré. Deux instruments mathématiques, la section transverse (appelée justement section de Poincaré) et l'application de premier retour (application de Poincaré) sont à la base de l'étude des systèmes dynamiques. La notion de bifurcation est une notion devenue essentielle dans les études des systèmes dynamiques et du non linéaire. Mais plus que des éléments mathématiques précis, c'est l'esprit qualitatif, mêlant la théorie des équations différentielles à l'*Analysis Situs*, la topologie, la géométrie, qui a été instillé par Poincaré dans cette voie de recherche. Toute la branche des mathématiques des systèmes dynamiques a hérité de cette évolution majeure. Nous nous accordons avec les travaux de Dahan et Aubin [308] à ce sujet. Nous ajouterons que l'esprit qualitatif est persistant et il évolue, naturellement, au cours du XXème siècle, selon les nouvelles contraintes de la science. Nous montrerons en quoi Poincaré a su "montrer une voie", et comment ses outils, épaulés par l'ordinateur, se sont transformés en outil puissant de caractérisation de la dynamique.

Poincaré et le chaos

Concernant les notions de chaos, la question est plus délicate. Certains concepts, tels que les orbites homoclines, seront propulsés au premier rang avec les notions de chaos. Indéniablement, Poincaré a contribué à cet aspect de l'histoire du chaos mais il convient d'être prudent avec ces affirmations, en général.

En premier lieu, les références au texte "Le hasard" et la citation classique de l'extrait "Une petite cause…" sont souvent très discutables. Le texte est difficile à appréhender historiquement comme nous l'avons montré et il n'est pas possible de le réduire à un fragment sans dénaturer la pensée originale de Poincaré. Par ailleurs, l'extrait est parfois associé aux travaux sur le problème des trois corps, pour signifier que la pensée de Poincaré est déjà "orientée" vers le chaos en 1907. Il nous paraît exagéré de singulariser ces deux points, ce qui n'empêche pas d'imaginer que les réflexions de Poincaré en Mécanique céleste aient inspiré sa réflexion sur le hasard. Nous préférons souligner que "Le hasard" est inscrit à la fois dans les débats sur la Mécanique, sur la Mécanique statistique et dans les débats philosophiques sur les probabilités.

A nos yeux, le texte entre dans l'histoire du chaos en un sens différent, peut-être beaucoup plus fort. "Le hasard" fait ressortir toutes les problématiques importantes autour

[308] Voir l'article le plus récent : [AUBIN, D., DAHAN DALMEDICO, A., 2002].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

de 1900 ; or ce sont elles qui font origine en se prolongeant jusque dans les années 1970 et encore aujourd'hui. Notre préhistoire du chaos est au fond l'histoire de l'évolution de ces interrogations et des réponses apportées dans ce **moment d'origine**. Il nous paraît trompeur de tout réduire à Poincaré, tout génial qu'il ait été.

Plus fondamentalement, les définitions de chaos ne se réduisent pas aux simplifications de la combinaison déterminisme, sensibilité aux conditions initiales et hasard. Nous n'avons pas encore les éléments permettant de faire avancer le débat. Après l'analyse des conceptions du chaos des années 1975-82 (les chapitres 3, 4 et 5) nous pourrons apporter de nouveaux éléments de réponse.

Un bémol sur la notion de précurseur

Savoir si Poincaré est un initiateur ou un précurseur dépend également de ce que l'on entend par "précurseur". Il faut donc chercher à préciser cette notion, dans l'absolu. La racine latine du terme est *praeccurrere* "courir en avant", qui donne *praecursor* "éclaireur, avant-coureur" [309] . Un précurseur serait une personne dont les conceptions annoncent ou préparent la voie à d'autres conceptions, un mouvement, qu'elles ont précédées dans le temps. Il y a dans cette définition de quoi perturber plus d'un historien, pour qui il est bien difficile d'admettre l'idée d'une quelconque anticipation. L'historien des sciences et épistémologue G. Canguilhem a déjà stigmatisé cette tendance à la recherche de précurseur, trop fréquente dans le domaine de l'histoire des sciences, dans un passage resté célèbre :

"A la rigueur s'il existait des précurseurs l'histoire des sciences perdrait tout sens, puisque la science elle-même n'aurait de dimension historique qu'en apparence […] Un précurseur serait un penseur, un chercheur qui aurait fait jadis un bout de chemin achevé plus récemment par un autre. La complaisance à rechercher, à trouver et à célébrer des précurseurs est le symptôme le plus net d'inaptitude à la critique épistémologique. Avant de mettre bout à bout deux parcours sur un même chemin, il convient d'abord de s'assurer qu'il s'agit bien du même chemin." [310]

En dehors du cercle des historiens, la notion de précurseur bénéficie d'une indulgence certaine. Un rapide regard sur l'historiographie nous a montré à quel point l'affirmation en question est considérée comme quasiment hors de doute concernant Poincaré.

Nous allons reprendre l'analyse de ces assertions et accréditer partiellement cette idée de "précurseur", plutôt que de la rejeter en bloc, au risque de choquer les historiens. Pour cela il faudra dégager la pierre de touche : le raisonnement sur le strict plan mathématique, avec toutes ses spécificités, donne une relative plausibilité à de telles affirmations.

Dans cette perspective nous démarquerons deux éléments parmi les conceptions du chaos prêtées à Poincaré. L'argument le plus plausible est celui lié à la notion mathématique de courbe homocline. En anticipant sur la suite, il est même possible de

[309] Nouveaux dictionnaire étymologique et historique, Larousse, 4ème édition, 1971 (par A. Dauzat, Dubois, J., Mitterand, H.)..

[310] [CANGUILHEM, G., 1994], p. 20-21.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

tracer un chemin, parmi les œuvres mathématiques de plusieurs scientifiques du XXème siècle, entre la définition initiale de Poincaré et les variantes récentes. Une lecture sur un plan strictement mathématique des derniers paragraphes des Méthodes Nouvelles conforte cette idée.

Le second point à singulariser concerne l'importance donnée aux orbites périodiques. Ces orbites jouent un rôle particulier dans certaines conceptions du chaos (et dans la théorie du chaos). En effet, certains scientifiques considèrent que le squelette d'un comportement chaotique est constitué par l'ensemble des orbites périodiques instables de l'équation différentielle correspondante [311]. Le meilleur moyen d'accéder à une connaissance du système est d'analyser les orbites périodiques. Il est particulièrement tentant de relier cette démarche à celle de Poincaré lorsqu'il percevait les orbites périodiques comme une "brèche" pour pénétrer la citadelle réputée imprenable (le problème des trois corps dans son cas).

Quelle historicité ces conceptions peuvent-elles avoir ? Une mise au point préalable de philosophie des mathématiques est utile pour répondre à une telle interrogation. Pour simplifier la présentation nous allons schématiser volontairement les mathématiques et l'histoire des mathématiques selon deux perspectives : un point de vue platonicien, pour lequel les mathématiques sont des idées conçues dans un "monde" que le mathématicien investit et découvre peu à peu ; une perspective opposée où les mathématiques sont une construction progressive, une invention plutôt qu'une découverte. L'historicité des mathématiques, qui est l'enjeu de cette discussion, n'a pas le même sens dans les deux cas. Pour un platonicien, l'histoire se réduit à une vulgaire chronologie de découvertes qui seraient nécessairement ahistoriques : un précurseur lève un coin du voile que ses successeurs achèvent de retirer. Pour son contradicteur, l'historicité des mathématiques est très forte, les contingences historiques jouent un rôle primordial dans l'évolution des concepts mathématiques. Il n'y a plus guère d'anticipation possible et parler de précurseur n'a plus de sens. Pour rendre compte de la pensée mathématique il paraît difficile de distinguer ces deux conceptions, mais leur séparation éclaire, à notre avis, la discussion de la notion de précurseur.

Comment réagir dans le cas de Poincaré et des homoclines ? Pour un platonicien (en schématisant un peu, de nombreux mathématiciens se revendiquant des mathématiques "pures" semblent partager ce type d'idées) il est tout naturel de déclarer que Poincaré a découvert le chaos, puisque, selon lui, les mêmes éléments mathématiques se retrouvent dans le squelette mathématique du chaos, quatre-vingt ans après. Nous pensons que Stewart, Diacu et Holmes adhèrent à cette conception. La posture contraire incite à la prudence et nous fait penser qu'un parcours moins linéaire qu'il n'y paraît pourrait joindre les homoclines de Poincaré aux notions récentes. En effet, est-on certain que le cheminement passe exclusivement par les mathématiques ? Il faudrait savoir ce qui

[311] Il faudrait distinguer les systèmes conservatifs des systèmes dissipatifs pour être plus rigoureux. Dans le cas des systèmes conservatifs, l'utilisation des orbites périodiques se rapproche des idées de Poincaré (rappelons que Poincaré travaille sur les systèmes de la mécanique céleste, conservatifs). Pour les systèmes dissipatifs, la "philosophie" est la même, mais les orbites périodiques jouent le rôle de squelette de l'attracteur : dans le cas conservatif, il n'existe pas d'attracteur. Nous renvoyons par exemple à l'article [CVITANOVIC, P., 1991] justement intitulé "Periodic Orbits as the Skeleton of Classical and quantum chaos".

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

relève effectivement d'un développement mathématique continu et ce qui résulte d'une reconstruction a posteriori (d'autant plus que l'adhésion à une philosophie mathématique "platonicienne" incite fortement à une telle vision rétrospective des résultats mathématiques, puisqu'ils sont quasiment "sans histoire").

En outre, à l'opposition entre une histoire "mathématicienne" (héritée d'une vision platonicienne) des mathématiques et une histoire "historienne", qu'on pourrait rapprocher des vieilles idées d'internalisme et d'externalisme, s'ajoute une dimension liée à la pensée des mathématiciens, en tant qu'êtres humains. Il y a les théorèmes d'une part et comment les mathématiciens perçoivent leurs résultats, quelle portée ils leurs attribuent, quel sens ils leurs donnent, d'autre part. D'où cette question : que pense Poincaré de ses homoclines et est-ce que nous les appréhendons nécessairement de la même manière au fil du temps ?

Nous avons déjà donné des éléments de réponse. Poincaré traite le problème des trois corps par la classification des trajectoires en grandes classes. Aux yeux de Poincaré, les homoclines, les hétéroclines sont des classes particulières, qui ont de l'importance en tant qu'ensemble de trajectoires et non en tant que trajectoires individuelles. La résolution du problème des trois corps et de la stabilité du système solaire passe par l'élucidation de la structure des classes de solutions. Le détail de l'évolution d'une homocline n'intéresse pas Poincaré. De toute façon, dès le début, il a conscience que cela ne servira pas à résoudre le problème. Dans sa perspective globale, cela n'a pas d'intérêt. On pourrait ajouter qu'il n'a que peu de moyens de calcul à disposition pour ce genre d'étude. Mais alors, s'il a été saisi par la difficulté proposée par les homoclines, dans quelle mesure a-t-il anticipé tout ce que le calcul permettra de découvrir, d'imaginer et de penser ?

Au sujet des orbites périodiques également, la prudence s'impose. Pour Poincaré les orbites périodiques servent de tremplin pour construire des classes d'orbites, sa perspective étant de résoudre un problème de stabilité. Plus que la construction et le calcul des orbites périodiques, il s'appuie sur le résultat de densité des orbites périodiques. Là encore, dans quelle mesure les moyens de calcul ont-ils modifié les perspectives ?

Affirmer que Poincaré est un précurseur renvoie donc, selon nous, à une conception des mathématiques et de leur place dans la science. Il faudra éclaircir ce point dans l'histoire du chaos que nous voulons écrire. Cette discussion, loin de proposer une réponse définitive à la question, montre deux choses. D'abord que l'on peut donner un sens à l'affirmation selon laquelle Poincaré est un précurseur d'un chaos conçu sur la base des homoclines. Nous avons joué sur une présentation dichotomique platonicienne / historisante de l'histoire des mathématiques, mais sauf à être un relativiste aveugle, il faut bien admettre qu'il y a une certaine a-historicité dans les résultats mathématiques. Les cadres théoriques persistent plus longtemps que les cadres des sciences physiques. Les objets mathématiques et les résultats, les théorèmes et les conjectures ont une durée de vie très longue, comparée au reste des résultats scientifiques. La notion de "vérité" n'a, en fait, pas le même statut en mathématiques et dans les autres sciences. En un sens, une théorie mathématique n'est jamais remise en cause, elle est seulement limitée.

Admettre que Poincaré (aux côtés duquel on pourrait placer Andrade) a été confronté

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

à la première "manifestation mathématique" du chaos peut prendre sens, à condition de considérer les homoclines comme un élément de chaos, ce qui nous renvoie aux notions de chaos en jeu. Cela n'enlève rien à nos critiques sur les affirmations qui prennent trop peu de précautions à ce sujet. Les discours faisant de Poincaré un précurseur n'hésite pas à sortir ses travaux de leur contexte, à rapprocher artificiellement des arguments, et à faire, inconsciemment, de véritables anachronismes car les mathématiques ne sont pas seules en jeu. L'analyse que nous avons faite du texte "Le hasard" devrait le faire comprendre.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Deuxième partie. L'émergence du chaos et de la théorie du chaos, 1975-1982

PRÉLIMINAIRE : SOCIOLOGIE D'UN CHAMP DE RECHERCHE, 1975-82

a. Introduction

L'ensemble de l'historiographie admet que l'article des mathématiciens américains Tien-Yien Li et James Yorke, publié en 1975 sous le titre "Period three implies chaos", a introduit de manière durable dans le champ scientifique le terme chaos, selon une acception différente de son sens premier. Le premier objet de cette partie est de montrer que la période qui s'étend de 1975 à 1982 a été un épisode d'intense **développement des conceptions de chaos** et a vu, dans le même temps, se constituer un **champ de recherche** autour de ces notions. Comme toute périodisation, ce choix de dates butoirs a sa part d'arbitraire et il nous faut immédiatement préciser ici, qu'en retenant 1975 comme borne inférieure, nous ne sous-entendons pas que ces développements sont une simple conséquence de la publication de Li et Yorke ; notre analyse précisera ce rapport. La

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

limite supérieure 1982, quant à elle, trouve une explication au niveau de la sociologie du groupe des scientifiques intéressés par le chaos. Elle se justifie par l'histoire du développement conceptuel qui lui est associé. Afin d'expliquer en profondeur ce moment clé de l'histoire du chaos notre étude se déploie en un double point de vue sociologique et conceptuel, historiquement indissociables, mais disjoints pour les commodités de la présentation.

Eléments d'historiographie

Sur le plan sociologique, il existe déjà une analyse et une interprétation proposées par David Aubin et Amy Dahan. Nous reprenons leur article de synthèse [AUBIN, D., DAHAN, A., 2002] pour expliciter leurs thèses sur les développements des années 1970 (on en trouvera un exposé plus détaillé dans la thèse de David Aubin : [AUBIN, D., 1998a]) :

"De notre point de vue, les années 1970 ont été une période de rupture dans le domaine considéré ici, 'les systèmes dynamiques et le chaos'. Cette rupture s'est exprimée par deux mouvements simultanés : (1) une convergence socioprofessionnelle de groupes de scientifiques venant, a priori, de différentes disciplines qui se sont rencontrés et ont interagi diversement, et (2) une reconfiguration conceptuelle, intellectuelle, centré sur des nouveaux thèmes de recherche, objets conceptuels, méthodes théoriques, et systèmes expérimentaux. De manière symbolique, ces deux mouvements ont leur apogée en novembre 1977, avec la conférence de New York sur la théorie des bifurcations et ses applications. A l'époque, la rupture était interprétée diversement : révolution scientifique complète avec la promotion d'un nouveau paradigme, pour certains, contre un sentiment bien plus grand de continuité parmi les mathématiciens." [312]

Nous verrons qu'il se produit effectivement une convergence socio-disciplinaire importante et une reconfiguration conceptuelle, fortement marquée par la théorie des systèmes dynamiques. Leurs affirmations reposent sur plusieurs éléments.

(i) Ils établissent notamment un récit des travaux de Stephen Smale et René Thom, relaté préalablement dans leur exposé. Selon les auteurs, leurs travaux mathématiques et les réflexions plus philosophico-épistémologiques de Thom ont joué un rôle important dans le processus de convergence-reconfiguration.

(ii) Ils livrent une présentation d'égale importance très orientée sur les travaux de Ruelle, surtout celui réalisé avec Takens et publié en 1971 sous le titre "On the nature of turbulence", ainsi qu'une analyse sociologique du contexte de l'IHES. Aubin et Dahan affirment:

[312] ***"From our point of view, the 1970s were a period of rupture in the domain under consideration here, 'dynamical systems and chaos'. This rupture was expressed by two simultaneous movements: (1) a socio-professional convergence among groups of scientists coming from a priori different disciplines who met and diversely interacted, and (2) a conceptual, intellectual reconfiguration centred around new research themes, conceptual objects, theoretical methods, and experimental systems. Symbolically, these two movements peaked in November 1977, with the New York conference on bifurcation theory and applications. At the time, the rupture was diversely interpreted: scientific revolution, complete with the advent of a new paradigm, for some, vs a much greater feeling of continuity among mathematicians.", [AUBIN, D., DAHAN, A., 2002], p. 307.***

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

"comme il apparaîtra clairement, nous faisons cela pour la raison que nous sommes surtout intéressés par le processus social par lequel des théories mathématiques abstraites en sont arrivées à être perçues comme immensément pertinentes pour l'hydrodynamique, la physique, la chimie et autres. Ceci, avec notre intérêt pour le contexte local de l'IHES, explique pourquoi nous singularisons Ruelle." [313]

Selon eux, c'est essentiellement dans ce contexte socio-institutionnel que les mathématiques "à la Smale" sont sorties du cadre des mathématiques pour intégrer la physique, la chimie et d'autres disciplines.

(iii) Une analyse "conceptuelle" des nombreuses recherches sur les cellules de Rayleigh-Bénard dans les années 1970 complète ces deux perspectives. Elle correspond à un récit des rencontres entre les multiples travaux de recherche sur ce dispositif et à une histoire de la naissance des interactions entre scientifiques de formation plutôt mathématique, plutôt hydrodynamique ou de physique des solides. Dans cette perspective, les cellules sont pensées comme des "objets-frontières" entre disciplines [314]. Cette analyse leur permet d'affirmer que le processus d'adoption des mathématiques dans la démarche de certains physiciens, hydrodynamiciens, au fil des années 1970, a été préparé par ces rencontres.

(iv) Les auteurs ajoutent une présentation des recherches du groupe de Christian Mira et Igor Gumowski, travaillant à Toulouse [315]. Ils dévoilent une autre convergence-reconfiguration, à propos des itérations, moins déterminée par les mathématiques très abstraites "à la Smale" que la précédente. Elle a le mérite de présenter une alternative à ce processus dominant tout en donnant une image plus complexe du processus en cours dans les années 1970.

Notre analyse vise à compléter leurs travaux sur les plans épistémologiques, conceptuels et sociologiques. Nous nous intéresserons davantage aux développements conceptuels et aux pratiques scientifiques qui émergent dans le champ du chaos. L'analyse de la période 1975-82 sera complétée par l'histoire remontant jusqu'à la fin du XIXème, laquelle permettra d'expliquer le large mouvement opéré dans les années 1970.

En outre, les travaux de Aubin et Dahan sont très orientés sur la question des mathématiques des systèmes dynamiques, plutôt que sur le chaos. On peut comprendre qu'ils délaissent les conceptions de chaos, préférant aborder le thème très ample des mathématiques des systèmes dynamiques. En particulier, ils n'abordent jamais ce que sont ces notions de chaos, comment elles se sont construites et ont évolué : c'est le cœur de notre démarche. Ces conceptions ne se résument pas à l'adoption ou l'adaptation d'une "approche en terme de systèmes dynamiques" [316] ; en conséquence, leur analyse

[313] ***"As will appear clearly, our reason for doing so is that we are mostly interested in the social process by which abstract mathematical theories came to be seen as immensely relevant to hydrodynamics, physics, chemistry and so forth. This, together with our interest in the IHES local context, explains why we single out Ruelle.", [AUBIN, D., DAHAN, A., 2002], p. 305 (nous mettons en evidence).***

[314] [AUBIN, D., DAHAN, A., 2002], Paragraphe 3.2, p. 308-310.

[315] [AUBIN, D., DAHAN, A., 2002], paragraphe 3.3 : "Computer and Engineering mathematics, Toulouse 1973".

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"conceptuelle" est trop limitée pour expliquer et caractériser tout ce qu'ils annoncent au sujet du chaos par une extrapolation de leur histoire des systèmes dynamiques. Quelques conclusions pertinentes sur le processus plus large de convergence-reconfiguration peuvent en être dégagées néanmoins.

Les objectifs de cette partie

Par une analyse tout d'abord sociologique, nous nous proposons de montrer la constitution et l'organisation progressive d'un champ de recherche. Dans la période 1975-82, il s'agit à la fois de la convergence de disciplines, de la mise en place d'un réseau de chercheurs, de l'organisation de rencontres sous forme de grandes réunions, comme de multiples petits colloques et séminaires. Le processus de construction du champ est signé par plusieurs indices, comme les simples faits qu'il commence à se penser comme un champ émergent, qu'il se fixe des références, se construit une histoire dans laquelle nous verrons la place réservée à Poincaré.

Dès lors, cette analyse sociologique pose naturellement la question de savoir si cela est associé au développement d'un paradigme, au moins celle de comprendre ce qui se produit au niveau conceptuel. L'analyse du processus conceptuel vise à répondre à cette question en montrant en quoi cet épisode n'est pas qu'une illusion sociologique. Nous verrons s'il est adéquat de parler d'une ou de plusieurs notions de chaos et nous analyserons ce qui fédère les scientifiques par-delà les différences socio-institutionnelles. Les démarches et les pratiques scientifiques diverses attachées au(x) chaos feront l'objet d'une attention toute particulière.

Lorsque les perspectives importantes seront dégagées, nous pourrons nous engager dans l'histoire intermédiaire entre la fin du XIXème siècle et ces années décisives, en nous reposant sur les multiples liens qu'il est facile de tisser entre ces deux périodes et dont nous nous proposons d'évaluer la pertinence et l'importance.

b. Sociologie d'un champ de recherche

Pour entrer dans la sociologie du chaos dans la période 1975-82, il paraît judicieux de se concentrer en premier lieu sur les grandes conférences rassemblant les scientifiques s'affiliant au domaine et faisant, en quelque sorte, autorité. Les plus petites réunions permettent ensuite tout à la fois de préciser la diversité et l'ampleur des activités, et de discerner la partie de la communauté scientifique engagée, de près ou de loin, dans l'étude du chaos.

Trois conférences internationales

En se limitant au niveau international, trois conférences, avant 1980, ont fait figure de grandes réunions de ce qui devient progressivement un domaine de recherche à part

[316] "Dynamical system approach" est le terme employé pour désigner la démarche à base de mathématiques des systèmes dynamiques dans l'étude des équations différentielles ([AUBIN, D., DAHAN, A., 2002], p. 308). Ils empruntent ceci au mathématicien Morris Hirsch : [HIRSCH, M.W., 1984].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

entière. Nous nous appuyons sur nos recherches systématiques et sur ce qu'on peut tirer des travaux d'historiens.

La première d'entre elles (et elle se définit comme telle) est la conférence de Côme, honorant la mémoire de Volta, durant l'été 1977 [317] . L'intitulé de cette conférence était : "Stochastic behavior in classical and quantum Hamiltonian systems". Comme le prétendent les organisateurs, les physiciens Guilio Casati (italien) et Joseph Ford (américain), elle est la première conférence où se rencontrent des scientifiques de domaines divers, mais abordant, par un biais ou par un autre, la question des systèmes complètement déterministes, non linéaires, pouvant générer des solutions chaotiques [318] . Des mathématiciens y côtoient des astronomes, des biologistes, des économistes et des physiciens [319] , dans l'idée de rompre avec les frontières disciplinaires.

La conférence de New York, la même année 1977 (31 octobre - 4 novembre), constitue un évènement d'une ampleur supérieure. Comme à Côme, la qualité des intervenants est au rendez-vous. Les organisateurs sont Okan Gürel (IBM) et le biochimiste allemand Otto Rössler. Le thème général de la conférence est : "Bifurcation theory and applications in scientific disciplines". La théorie des bifurcations, et non spécifiquement le chaos, est au centre des préoccupations. La conférence est d'ailleurs dédiée au mathématicien Eberhard Hopf, pour son 75ième anniversaire, car ses travaux sur cet aspect des mathématiques des systèmes dynamiques (ainsi que la question de l'ergodicité) ont atteint une grande notoriété [320] .

Cependant, plusieurs contributions importantes sortent du lot et concernent directement la question du chaos et des attracteurs étranges [321] . A ce sujet, on notera les interventions des spécialistes et de quelques uns de leurs élèves : Morris Hirsch, Edward Lorenz, Robert May, Sheldon Newhouse, Otto Rössler, David Ruelle, Stephen Smale,

[317] La première conférence de Côme a eu lieu en 1927, pour le centennaire de la mort de Volta. Elle est restée dans les mémoires de l'histoire de la Mécanique quantique.

[318] " [..] nonlinear systems can yield wildly chaotic solution behavior… […] a conference on stochastic behaviour in classical and quantum Hamiltonian systems which, to our knowledge, brought together for the first time astronomers, biologists, economists, physicists, and mathematicians working in this common area." [CASATI, G., FORD, J., 1979] (préface). On peut noter aussi que, déjà en 1977, la problématique de la quantification des systèmes classiques, chaotiques est abordée.

[319] Voir note 318. Pour ne citer que quelques noms, avec lesquelles nous nous familiariserons rapidement : Andrei Kolmogorov, Mitchell Feigenbaum, Robert Helleman., Hermann Haken, Boris Chirikov, Martin Gutzwiller…et bien d'autres. Les comptes rendus de quelques allocutions ont été publiés : [CASATI, G., FORD, J., 1979].

[320] Dédicace à E. Hopf : [GÜREL, O., RÖSSLER, O.E., 1979], p. 1. Pour la bifurcation de Hopf nous renvoyons au chapitre 6, p. 445. Les travaux célèbres de Hopf en théorie ergodique, dont son Ergodentheorie ([HOPF, E., 1937]), sont analysés au chapitre 7, p. 458.

[321] O. Gürel affirme, dans la conclusion du colloque : "other phenomena such as 'chaos' and the creation of 'strange attractors' were discussed in not one but many papers presented in diverse sessions. This will undoubtedly flourish in the days ahead. It is clear that the theory will be expanded in the directions incorporating these new objects". [GÜREL, O, RÖSSLER, O.E., 1979], p. 685.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Robert Williams, James Yorke et bien d'autres. Comme son homologue de Côme, cette conférence réunit des acteurs de très nombreuses disciplines. Les mathématiques occupent une place centrale puisque la théorie des bifurcations est d'abord perçue comme une question mathématique, mais la biologie, l'écologie, la chimie, la physique, l'économie, l'ingénierie jouent également des rôles importants.

A travers ce colloque on voit poindre la manifestation d'une communauté d'approche des problèmes de type dynamique, en mathématique et dans d'autres disciplines. Plus que la théorie des bifurcations, c'est l'**approche qualitative** qui est fédératrice de toutes les contributions [322] . Les conceptions du chaos, la synergétique de Hermann Haken, les problèmes issus de la physique (mécanique des fluides et turbulence), de la chimie (réaction de Belousov-Zhabotinsky), de l'écologie (dynamique des populations) sont abordés d'un point de vue qualitatif, par des méthodes construites et examinées, non plus seulement au niveau mathématique mais en relation avec toutes ces questions pratiques. Ces familles très variées de scientifiques trouvent un intérêt commun dans les méthodes d'approche des problèmes, ce qui en fait des facteurs de liaison de première importance. Plus prosaïquement, cette confrontation généralisée a également permis de mettre un terme à l'ignorance réciproque entre disciplines qui n'ont pas les mêmes objets de recherche, mais des démarches proches. Ceci est d'autant plus facile que les théories sont assez accessibles pour les uns et les autres, hormis certains aspects plus mathématiques qui devaient déjà apparaître un peu ésotériques à bon nombre d'observateurs. En tout cas, les spécialistes du sujet, au fait de l'actualité de 1977, sont réunis pour la première fois, à l'exception notable des ressortissants de l'URSS et de ses satellites.

Mentionnons une troisième conférence, fille des deux précédentes, focalisée explicitement et ouvertement sur le thème du chaos (même si son titre ne le laisse pas apparaître) : "International Conference on Nonlinear dynamics", organisée à la New York Academy of Sciences, entre le 17 et le 21 décembre 1979, par Robert Helleman (d'ailleurs présent à la première conférence). Son introduction à la publication des actes va à l'essentiel et nous évoque fortement des éléments des chapitres précédents, au sujet de la fin du XIXème siècle. C'est ce que nous allons montrer avant de proposer un bilan de ces trois conférences. Helleman commence ainsi [323] :

"Le sujet principal de cette conférence a été le comportement chaotique que présentent beaucoup de systèmes dynamiques non linéaires ; je me réfère au comportement chaotique inhérent aux solutions de diverses équations déterministes du mouvement, et non au comportement chaotique obtenu en additionnant des sources de bruit extérieures. Ce comportement chaotique inhérent survient quand des orbites (ou solutions) ont une extrême 'dépendance sensible en leurs conditions initiales'." [324]

[322] Dans sa préface à la publication des actes du colloque, Gürel montre, à ce sujet, le mélange de qualitatif et quantitatif inhérent à la théorie des bifurcations. Fondamentalement, une bifurcation est un changement qualitatif dans un phénomène et les aspects quantitatifs interviennent dans l'évaluation des variations des paramètres, du nombre de changements dans les solutions critiques. [GÜREL, O, RÖSSLER, O.E., 1979], p. I.

[323] Cette introduction a plus certainement été rédigée à la fin de l'année 1980, mais cela change peu de choses pour l'instant.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Une telle définition est à la fois vague (ce n'est qu'un mot introductif) et assez générale pour englober les différents pans de l'activité liée à ce "chaos", inscrits à l'ordre du jour de la conférence. La notion de chaos telle qu'elle est présentée, renvoie à la capacité de génération d'aléatoire dans des systèmes décrits par des équations déterministes. La sensibilité aux conditions initiales y occupe une place importante, dans le sens où elle est le mécanisme générateur de cet aléa, de ce chaos. Nous verrons effectivement à quoi tout cela fait allusion et toutes les nuances à apporter.

Helleman donne ensuite un rapide panorama des sujets débattus pendant la conférence, en distinguant deux grandes classes de systèmes : les systèmes dissipatifs et les conservatifs, dont les analyses sont présentées de manière disjointe. Les systèmes conservatifs Hamiltoniens se divisent eux-mêmes en deux types : les intégrables et les non intégrables.

"Ce sont parmi ces derniers que ceux qui travaillent dans le domaine de la mécanique statistique cherchent – et trouvent – des systèmes ergodiques, i.e., des systèmes (faiblement) chaotiques dans lesquels virtuellement toutes les orbites couvrent densément et uniformément la surface d'énergie constante. Un système non intégrable général, néanmoins, n'est pas (globalement) ergodique, mais a des régions chaotiques à travers tout son espace des phases. [...] Non seulement il y a une abondance de régions chaotiques, mais il y a aussi une abondance de régions régulières dans lesquelles la plupart des orbites sont confinées à des tores invariants […] dans l'espace des phases. Ceci est une conséquence du théorème de Kolmogorov -Arnold -Moser, qui montre qu'une fraction finie de toutes les orbites sont typiquement sur de tels tores de petites dimensions." [325]

A côté du chaos, on voit donc apparaître la notion d'ergodicité, une référence directe à des travaux de Mécanique statistique, et le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser, du nom des trois mathématiciens l'ayant démontré. De plus, chaos et ergodicité ne sont pas seulement vaguement rapprochés : l'ergodicité est une forme (faible) de chaos.

Dans le cas des systèmes dissipatifs, Helleman présente deux aspects : la question des bifurcations et celle du chaos.

"On peut penser que, dans un système dissipatif, toutes les orbites sont

[324] ***"The main subject of this conference was the chaotic behavior exhibited by many nonlinear dynamical systems; I am referring to the chaotic behavior inherent in the solutions of various deterministic equations of motion, and not to chaotic behaviour obtained by adding external noise sources. This inherent chaotic behavior arises when some orbits (or solutions) have an extremely 'sensitive dependence on their initial conditions'.", [HELLEMAN, R.H.G., 1980a], p. ix (en italique dans le texte).***

[325] ***"It is among the latter systems that statistical mechanicians search for – and find – ergodic systems, i.e., (weakly) chaotic systems in which virtually every orbit covers the surface of constant energy densely and uniformly. The general nonintegrable system, however, is not (globally) ergodic, but has chaotic regions throughout its phase space. […] Notwithstanding the abundance of chaotic regions, there is also an abundance of regular regions in which most orbits are confined to invariant tori (inner tubes) in phase space. This follows from the Kolmogorov -Arnold -Moser Theorem, which shows that a finite fraction of all orbits usually lie on such lower-dimensional tori.", [HELLEMAN, R.H.G., 1980a], p. ix. (en italique dans le texte).***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

effectivement attirées par un point stationnaire [...] Une seconde possibilité est qu'un simple attracteur périodique, ou cycle limite, existe dans l'équation familière de van der Pol. Lorsqu'on change la valeur d'un certain paramètre, μ [...] on trouve qu'un attracteur périodique à une boucle de période T se transforme, pour une certaine valeur μ_1, en un attracteur à deux boucles, de période 2T. A un certain μ_2 , il atteint quatre boucles et double encore sa période, etc. Les μ_k pour lesquels ces bifurcations de doublement de période se produisent, convergent souvent vers une valeur critique finie $\mu_\#$, produisant des attracteurs de plus en plus compliqués au cours du processus. Au-delà de $\mu_\#$, l'objet n'est plus un attracteur, mais d'autres attracteurs non périodiques peuvent survenir, avec des formes compliquées dans l'espace des phases. Le mouvement le long de ces attracteurs peut être chaotique, ergodique ou 'mélangeant'. De tels attracteurs étranges sont discutés dans les présentations groupées sous ce titre [...]" [326]

Toutes ces citations nous renvoient à un large spectre des débats de la fin du XIXème siècle. Les références seront explicitées dans la discussion des aspects conceptuels, mais nous pouvons déduire quelques tendances sur la base de l'analyse de ce dernier colloque.

Il ressort en premier lieu qu'une certaine "communauté" de scientifiques s'est formée et se maintient sur ces questions de chaos. La majorité des intervenants (sans parler des participants) était déjà active aux deux premiers colloques. En parallèle, la communauté semble s'agrandir, de nouvelles figures émergent. On pourrait faire, en quelque sorte, du comité scientifique de la conférence, le comité des références en matière de chaos et de dynamique non linéaire : Arnold, Chirikov, Fadeev, Ford, Krumhansl, Kruskal, Lebowitz, Marcus, Martin, Moser, Novikov, Rosenbluth, Ruelle, Sinaï. On notera également que la participation du monde soviétique est plus importante qu'en 1977.

Deuxièmement, les présentations sont plus orientées qu'auparavant sur la thématique "chaos", telle que Helleman la décrit. Ainsi le titre des sessions regroupant ces exposés peut être associé au mot introductif et explicatif de Helleman : Turbulence, Comportement ergodique et intégrable, Physique et chimie, Applications et flots chaotiques, Turbulence chimique et turbulence développée, Attracteurs étranges.

En outre, malgré l'effort de Helleman, et de l'organisation sans doute, pour intégrer les présentations sous une unique étiquette de "chaos", il se dégage une impression de coexistence plutôt que de fusion des problématiques. Les préoccupations se jouxtent, les traditions de recherche se rencontrent, mais chaque scientifique et chaque domaine d'étude semble conserver sa spécificité. Il n'y a pas à proprement parler de spécialisation

[326] ***"One might think that, in a dissipative system, all orbits would eventually be attracted to a stationary point […] A second possibility is that a simple periodic attractor, or limit cycle, exists in the familiar van der Pol equation. As one changes the value of a certain parameter, μ […] one finds that a one loop periodic attractor of period T changes, at some value μ_1, into a double loop attractor of period 2T. At some μ_2, it acquires four loops and doubles its period again, etc. The μ_k's at which these period-doubling bifurcations take place often converge to some finite critical value, μ_∞, producing more and more complicated attractors in the process. Beyond μ_∞, the object is no longer an attractor, but other nonperiodic attractors can arise, with complicated shapes in phase space. The motion along some of these attractors can be chaotic, ergodic or 'mixing'. Such strange attractors are discussed in the papers grouped under that heading […].", [HELLEMAN, R.H.G., 1980a], p. ix-x. (en italique dans le texte).***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

sur une problématique bien circonscrite appelée chaos ; les intervenants de ces colloques sont en quelque sorte des représentants des problématiques de chaos dans leur discipline. La notion de chaos très floue dégagée par Helleman traduit le fait qu'on est en présence d'un champ de recherche encore en phase de s'établir sur différents horizons disciplinaires. Naturellement les chercheurs venus de cultures scientifiques différentes, ne sont pas tous en phase les uns avec les autres. Seule l'idée de phénomènes aléatoires, issus de mécanismes déterministes, se révèle assez fédératrice pour souder ces diverses tendances. Seule une lecture conceptuelle pourra permettre de pousser l'analyse et de comprendre ce qui se passe effectivement en 1979. Ce ne sont là que des impressions qu'il faudra confirmer ou infirmer.

Plusieurs petites réunions

Ces trois grands rassemblements nous ont donné des indications globales, mais celles-ci écrasent sans tout à fait y parvenir, la diversité des problématiques existantes avant 1980. Les activités thématiques ou disciplinaires se lisent à travers les multiples petits colloques et séminaires organisés à travers le monde dans les années 1976-82. Nous ne prétendons pas examiner l'intégralité des réunions ayant abordé le thème du chaos. Nous souhaitons plus modestement esquisser la diversité des activités. Nous considérons essentiellement les réunions qui ont donné lieu à une publication des actes [327] et les classons grossièrement.

La majorité des réunions importantes sont centrées sur les mathématiques des systèmes dynamiques et / ou la physique théorique. On peut ranger les trois grandes conférences dans cette catégorie, même si elles touchent également aux thématiques évoquées ensuite. Ce sont par exemple :

• le colloque international de Rennes, en 1975 : "Dynamical systems in mathematical physics" [328] ,

• le séminaire de l'Université de Berkeley (Etats-Unis), de l'année 1976-77 "Turbulence seminar" [329] ,

• la conférence organisée à l'Université du North Dakota (Etats-Unis) en 1977, "The structure of attractors in dynamical systems" [330] ,

• la conférence internationale de la Northwestern University (Illinois, Etats-Unis) en 1979, sur "Global theory of dynamical systems" [331] ,

[327] Dans cette période où la notion de chaos est mal cernée, il est indispensable de lire effectivement les comptes-rendus ; leur titre ne suffit pas.

[328] [GALLAVOTTI, G., KEANE, M.S., RUELLE, D., 1976].

[329] [BERNARD, P., RATIU, T.S., 1977].

[330] [ARKLEY, N.G., MARTIN, J.C., PERRIZO, W., 1978].

[331] [NITECKI, Z., ROBINSON, C., 1980].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

• la série de séminaires donnés à l'Université de Warwick (Grande-Bretagne) durant l'année 1979-80, "Dynamical systems and turbulence" [332] ,

• les deux séminaires du Centre International des Sciences Mécaniques (CISM) à Udine (Italie) sur le thème : "Mathematical Theory of Dynamical systems and Microphysics", en 1979 et 1981 [333] .

La turbulence fait partie des préoccupations théoriques et mathématiques, mais, avec l'hydrodynamique, elle a fait l'objet de colloques importants, surtout dans les débuts du chaos [334] :

• le colloque de la Société Française de Physique à Dijon en 1975 : "Hydrodynamique physique et instabilité" [335] ,

• la Gordon Conference de 1976 organisée par P.C. Martin et J.P. Gollub : "Dynamical instabilities" [336] .

A cela, il faut ajouter les colloques de Mécanique statistique, comme la conférence de Sitges (Espagne) de 1982 ("Dynamical systems and chaos"), ou encore, plus versé dans les systèmes conservatifs, l'atelier de 1981 à Lakeway (Texas, USA) : "Workshop on Long-time predictions in nonlinear conservative dynamical systems" [337] .

La synergétique, ligne de pensée promue par le physicien allemand Herman Haken, a rassemblé quelques réflexions sur le chaos. Parmi les multiples ateliers organisés par Haken, nous avons retenu : en 1977, "Synergetics : a Workshop", en 1981, "Chaos and order in Nature" et en 1982 "Evolution of order and chaos in physics, chemistry and biology" [338] .

Des écoles d'été sont également organisées en direction d'un public de chercheurs encore peu aguerris aux théories du chaos. La plus connue est certainement l'Ecole d'été de physique théorique des Houches, organisée en 1981, sur le thème : "Comportement chaotique des systèmes déterministes" [339] . Celle tenue en 1978 à Bolzano (Italie) et

[332] [RAND, D.A., YOUNG, L-S., 1981]

[333] Celui de septembre 1979 est publié dans [BLAQUIERE, A., FER, F., MARZOLLO, A., 1980], le second, de septembre 1981 : [AVEZ, A., BLAQUIERE, A., MARZOLLO, A., 1982].

[334] Nous renvoyons au chapitre VIII de la thèse : [AUBIN, D., 1998a].

[335] [MARTINET, A., 1976].

[336] Non publiée.

[337] "Sitges conference on statistical mechanics", [GARRIDO, L., 1983] et [HORTON, C.W. Jr, REICHL, L.E., SZEBEHELY, V.G., 1983] pour la seconde.

[338] Respectivement : [HAKEN, H., 1977], [HAKEN, H., 1981], [HAKEN, H., 1982].

[339] [IOOSS, G., HELLEMAN, R.H.G., STORA, R., 1983].

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

intitulée "Dynamical systems" est de moindre ampleur, mais a marqué certains esprits [340] .

Il reste quelques inclassables :

• le séminaire de l'Université du Wisconsin (Etats-Unis) en 1976 : "Applications of bifurcation theory" [341] (le colloque de New York en 1977 est un peu dans la même veine et ils présentent tous deux la grande transversalité disciplinaire des théories),

• la "Rencontre entre physiciens et mathématiciens sur quelques problèmes non linéaires et leurs applications", à Nice en 1977 [342] ,

• enfin, la "quatrième" grande réunion, organisée au Center for Nonlinear Studies, à Los Alamos (Etats-Unis) en 1982 : "Order in chaos" [343] (en 1981, il s'y tient un autre colloque moins important : "Coupled nonlinear oscillators" [344]).

A travers ce recensement, il est clair que la problématique du chaos se rencontre dans plusieurs domaines et thématiques, dans lesquelles beaucoup de mathématiques entrent en jeu, essentiellement des mathématiques des systèmes dynamiques. On pourra aussi remarquer qu'il existe des alternatives au choix du terme chaos, comme l'introduction de Helleman l'avait fait deviner. Stochastique, turbulence ou chaos sont utilisés, sans que l'on comprenne vraiment la différence (pour l'instant). Il est néanmoins possible de dégager une correspondance entre le choix parmi ces termes et les disciplines concernées. En restant très schématique, le stochastique est "culturellement" propre au domaine des recherches sur les systèmes conservatifs, la turbulence est attachée aux phénomènes dissipatifs, en particulier et naturellement, ce qui concerne la Mécanique des fluides. Le terme "chaos" ne connaît pas d'attache particulière. Il étend son emprise et dépasse ces différences culturelles comme l'introduction de Helleman nous l'a montré. En 1978, l'article "Prevalence of chaos" [345] plaçait déjà cet ensemble de comportements compliqués sous le même terme et cela sera amplement confirmé par nos futures analyses.

Ce rapide bilan nous donne les premiers signes d'un champ de recherche en train de se former, regroupant une communauté stable (celle qui intervient dans plusieurs de ces colloques) mais difficile à cerner et à cartographier. En règle générale, les scientifiques ne se limitent pas à ce domaine du chaos : ils proviennent d'un champ mieux établi et font

[340] Organisée au Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) du 19 au 27 juin 1978 : [GUCKENHEIMER, J., MOSER, J., NEWHOUSE, S.E., 1980]. Deux acteurs de notre histoire y ont participé : Pierre Coullet et Charles Tresser, cf. chapitre 5, p. 341.

[341] [RABINOVITZ, P.H., 1977].

[342] Colloque de la Société Française de Physique : [SFP, 1977].

[343] [CAMPBELL, D., ROSE, H., 1983]. Nous justifions du fait qu'elle peut être considérée comme la "quatrième grande conférence" un peu plus loin, p. 171.

[344] [CHANDRA, J., SCOTT, A., 1983].

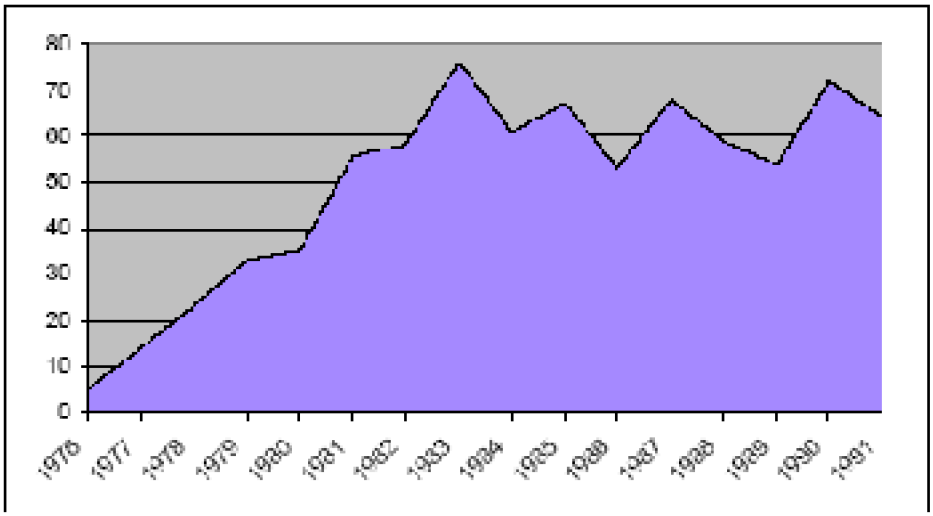
[345] [MACDONALD, M., 1978], p. 306 : "The term 'chaos' has been appropriated to refer to this intriguing feature of nonlinear dynamical systems [...]".

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

une incursion dans le problème du chaos. Le plus présent des champs voisins est certainement celui des mathématiques des systèmes dynamiques. Si on accrédite l'idée selon laquelle ces considérations remontent à Poincaré, ce champ des mathématiques a toutes les chances d'être déjà organisé et structuré. Nous verrons que c'est une des raisons qui explique son poids dans l'évolution des approches du chaos.

Des tentatives précoces de vulgarisation

En parallèle, et dès 1976, l'entreprise de diffusion et de promotion du chaos, ainsi que celle des phénomènes qui lui sont rattachés, est entamée. Le biologiste Robert May est en pointe dans cet exercice et son article de 1976, publié dans Nature, "Simple mathematical models with very complicated dynamics" a assuré une bonne publicité à ces questions. May gravitant à proximité de Li et Yorke, on ne s'étonnera pas de son bon niveau d'information et de sa tentative précoce et avertie. Le texte se veut vulgarisateur en même temps qu'il entre dans de nombreux détails techniques (sans être un article de recherche). De cette manière il est accessible et utile à un large spectre de scientifiques, comme en témoignent les forts taux de citations parmi eux :



Citations de "Simple mathematical models with complicated dynamics" 1976 [MAY, R.M., 1976]

Néanmoins avant 1980, ces tentatives restent très limitées [346] . Deux nouveaux articles très remarqués sortent vers 1980, en promouvant cette fois la notion d'attracteur étrange. David Ruelle, dont on verra qu'il est en grande partie à l'origine de cette notion, s'exerce à expliquer le rapport entre turbulence (non limitée au domaine de l'hydrodynamique et, en l'occurrence, synonyme de chaos) et attracteur étrange [347] . On

[346] On a cité "The prevalence of chaos", [MACDONALD, M., 1978], texte court, qui met l'accent sur la diversité des systèmes chaotiques, mais qui est sans commune mesure avec la démonstration de May.

[347] En français dans la revue La Recherche (voir [RUELLE, D., 1980c] et la republication récente [RUELLE, D., 2000]) et son équivalent en anglais dans The Mathematical Intelligencer ([RUELLE, D., 1980a]).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

peut mentionner au passage l'article de Yves Pomeau et Pierre Bergé sur la turbulence hydrodynamique qui propose une vulgarisation des nouvelles idées sur la transition vers la turbulence [348] .

Le second article, de Douglas Hofstadter, datant de 1981, est plus tourné vers les processus itératifs (comme May), certainement plus simples à rendre compréhensibles pour un public non averti. Il s'intitule : "Strange attractors : mathematical patterns delicately poised between order and chaos" [349] et discute abondamment de l'universalité de la cascade de doublements de période selon Feigenbaum.

Ces trois principales publications ont trois points communs qu'il faut souligner. D'abord, ils sont agrémentés de beaucoup d'images informatiques, ce qui est aujourd'hui quelque chose de très banal, mais n'est pas anodin en 1980. Les attracteurs étranges et plusieurs figures fractales générées avec l'ordinateur sont à la fois spectaculaires, attirantes et étonnantes. On pourrait raisonnablement penser qu'il s'agit d'un effort pour plaire et faire une bonne publicité ; nous verrons, à l'analyse, que toute cette dimension visuelle (et informatique) n'est pas qu'un effet publicitaire et qu'elle a son importance dans l'exercice même de recherche.

Le second point commun tient en un mot : nouveauté. Celle-ci vise autant les conceptions que les pratiques scientifiques. L'article de May se fixait déjà pour objectif de faire connaître ces nouveaux phénomènes, dans son article presque militant, qui se termine par cet appel :

"J'insisterais donc pour que les étudiants soient familiarisés assez tôt dans leur formation en mathématiques avec, par exemple, l'équation (3) [$X_{t+1}=a.X_t(1-X_t)$]. Non seulement en recherche, mais aussi dans le monde quotidien de la politique et de l'économie, ce serait mieux pour tous nous, si plus de gens se rendaient compte que des systèmes non linéaires simples n'ont pas nécessairement des propriétés dynamiques simples." [350]

Hofstadter, qui n'est pas directement investi dans la recherche sur le chaos mais produit un recensement d'idées sur le sujet, traduit l'excitation et l'engouement autour de ces comportements ainsi que la nouveauté de l'utilisation massive de l'ordinateur dans les études mathématiques. Il reprend la citation précédente de May en conclusion de son article jugeant qu'il s'agit d'"une plaidoirie que je trouve très juste" [351] . Quant à Ruelle, il décrit comment les attracteurs étranges offrent une compréhension renouvelée de la turbulence, pendant que Pomeau et Bergé parlent de "bond en avant" théorique à ce

[348] En français, dans la revue La Recherche : [BERGE, P., POMEAU, Y., 1980].

[349] [HOFSTADTER, D.R., 1981], dans Scientific American. Hofstadter est plus connu pour son best-seller Gödel, Escher, Bach : [HOFSTADTER, D.R., 1996].

[350] ***"I would therefore urge that people be introduced to, say, equation (3) [$X_{t+1}=a.X_t(1-X_t)$] early in their mathematical education. [...] Not only in research, but also in the everyday world of politics and economics, we would all be better off if more people realised that simple nonlinear systems do not necessarily possess simple dynamical properties.", [MAY, R.M., 1976], p. 467.***

[351] "a plea I find most apt", [HOFSTADTER, D.R., 1981], p. 29.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

sujet.

Enfin, ces articles ont un dernier trait commun : ils évoquent la propriété dite de "sensibilité aux conditions initiales" pour caractériser les propriétés étranges du chaos. En 1976, May emploie déjà le terme d'"effet papillon" pour l'illustrer, reprenant ainsi l'image proposée par le météorologue Edward Lorenz en 1972 [352] . Ruelle suggère la même chose dans un chapeau de paragraphe (intitulé : "Les battements d'ailes de l'attracteur de Lorenz"). Hofstadter signale la propriété mais ne lui associe pas l'image de Lorenz.

De manière plus globale, on retiendra de ces éléments de vulgarisation que le chaos est fortement associé à ces idées sur la turbulence, les attracteurs étranges et la sensibilité aux conditions initiales.

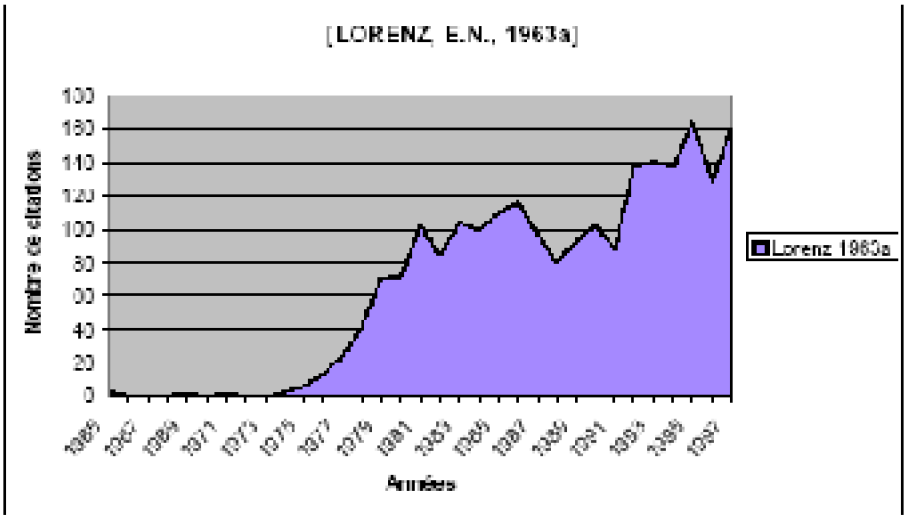
Un champ fondé sur des références

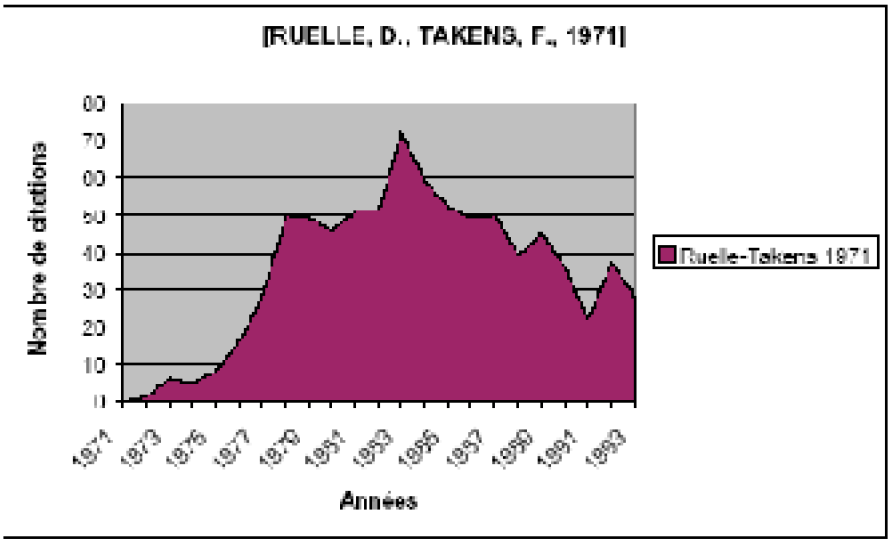
Ces indications ne sont que quelques bribes glanées dans des textes simplifiés, dont nous préciserons l'importance ultérieurement. Une analyse similaire, un peu superficielle mais très informative, peut être faite au niveau des travaux auxquels les recherches sur le chaos font régulièrement références dans la période 1975-82.

Une analyse quantitative brute, construite sur la lecture des articles produits dans la période et les données tirées du Science Citation Index, dévoile une série de références constituée chronologiquement de : Lorenz, 1963 / Ruelle-Takens, 1971 / Li et Yorke, 1975 / May, 1976 / Feigenbaum, 1978-9. Quantitativement, l'attention portée à ces articles est indéniable, et la période 1975-82 correspond à la phase de croissance exponentielle des références. En prenant les deux exemples les plus significatifs, l'article de Lorenz de 1963 et celui de Ruelle et Takens, il n'est pas besoin de beaucoup de commentaires.

[352] [MAY, R.M., 1976], p. 466. May ne cite pas la conférence de Lorenz de 1972, mais son article de 1963, où il n'est pas question de l'image du papillon.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est





Une étude plus fine, reposant sur des éléments de l'analyse conceptuelle à venir, donne des indices plus qualitatifs, et permet d'opérer quelques distinctions dans le choix des articles de références (distinction élémentaire mais classique : théorie / expérience / modèles et simulations numériques).

Trois travaux sont à classer en première place pour l'importance théorique qui leur est accordée, voire pour leur caractère fondateur présumé : Smale (1967), Ruelle-Takens (1971), Feigenbaum (1979). Les deux premiers sont considérés comme des préludes à de nombreux développements théoriques des années 1970, le dernier est associé à l'effervescence de l'universalité du doublement de période, à la fin de la décennie [353] . Le "scénario" d'intermittence de Pomeau et Manneville peut être intégré à ce lot, même s'il ne bénéficie pas d'autant de crédit et de publicité que ceux de Ruelle et Takens ou Feigenbaum.

[353] D'après J. Gleick, le colloque de 1979 est celui de la reconnaissance de Feigenbaum, comme celui de 1977 avait vu l'acclamation de Lorenz (voir note , p. 168), [GLEICK, J., 1991], p. 338.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Pour les manipulations numériques et les systèmes d'équations différentielles-modèles (des sortes de drosophiles pour mathématiciens-numériciens) [354] qu'ils ont fournis, les articles de Lorenz (1963), Hénon (1976) puis, un peu plus tard, celui de Rössler (1976) sont cités et utilisés à profusion. On notera également que, souvent, les citations ne visent pas l'analyse théorique, jointe aux considérations de Lorenz et Rössler par exemple. Il s'agit surtout d'indiquer la provenance des équations utilisées.

Au niveau des expériences, incontestablement, celle de Harry Swinney et Jerry Gollub de 1975 est à mettre en tête, d'autant qu'elle est associée aux considérations de Ruelle et Takens de 1971. La vague pour la transition vers le chaos, à la fin de la décennie, suscite un ensemble important d'expériences, parmi lesquelles deux peuvent être singularisées parce qu'elles ont contribué à valoriser des éléments théoriques : celle de Albert Libchaber et Jean Maurer au sujet du "scénario" de doublement de période et celle de Monique Dubois et Pierre Bergé, en association avec Paul Manneville et Yves Pomeau, sur l'intermittence.

Enfin, en analysant ces citations et références, il est clair que, comme au sujet des articles de Lorenz ou Rössler, beaucoup des allusions sont assez superficielles et relèvent souvent de l'automatisme, ou de l'"incontournable", de la référence sans laquelle l'article n'est pas un "bon" article. Chose évidente, le choix de ces références, comme des indications bibliographiques, est porteur de sens et témoigne d'une volonté d'identification à un courant. On pourra constater également que les travaux cités en exemple dans la vulgarisation recouvrent l'essentiel des textes en question. Tout cela illustre le fait que notre champ de recherche est en train de se structurer, de se donner des repères, de se construire une identité en faisant référence à quelques grands travaux. Nous verrons que la convergence vers les éléments de la liste limitée présentée ici n'est pas le fruit du hasard et qu'elle est significative d'une tendance marquante de la fin de la décennie 1970, au niveau des problématiques et des perspectives de recherches sur le chaos. Une dernière remarque : Poincaré ne figure pas dans ces références, l'omission est trop importante pour ne pas être signalée.

Deux autres indicateurs signent l'avènement d'un champ du chaos : la recherche des "pères fondateurs" et l'écriture des premiers manuels synthétisant les recherches validées et acceptées par la communauté scientifique faisant autorité en la matière.

Une histoire reconstruite

En effet, au-delà de la sélection des travaux-références, le processus de constitution d'une identité propre au champ se déploie en direction d'un passé plus lointain. De manière très consensuelle Henri Poincaré est progressivement désigné comme père fondateur et précurseur de l'ère du chaos, comme nous l'avons déjà signalé dans notre première partie.

Il faut encore distinguer plusieurs degrés dans les évocations du nom de Poincaré. Il

[354] Ce sont des systèmes étudiés numériquement et pour une gamme toujours plus étendue de paramètres, pour comprendre les mécanismes propres de génération de comportements compliqués. Par ailleurs, ils sont utilisés pour modéliser des dynamiques complexes trouvées dans des systèmes issus de la physique, de la chimie ou autre.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

est d'abord associé à un ensemble de méthodes d'étude de la dynamique des systèmes, au travers des "sections de Poincaré" et "applications de Poincaré", encore que les terminologies "section transverse" et "application de premier retour" sont aussi souvent usitées. En baptisant ainsi ces méthodes, il est rendu hommage à Poincaré, mais le fait est que ce choix a été opéré bien avant 1975 [355] . L'histoire et l'analyse à venir nous montreront que ce sont là des méthodes adoptées par l'ensemble des chercheurs du champ du chaos, adaptées aux différents problèmes qui se posent. Ainsi, sans qu'il soit explicitement présenté comme l'initiateur de ces outils, tout le monde comprend qu'il en est le principal instigateur. Il n'y a là rien de très contestable et, comme nous l'avons précisé dans les chapitres précédents, le fait que ces moyens portent le nom de Poincaré est légitime. En outre, la symbolique associée à ces aspects de méthodologie n'est pas très forte car la problématique du chaos, l'enjeu de ces recherches et la nouveauté prétendue après 1975 ne concernent pas tant les moyens d'étude que les phénomènes et les notions de chaos eux-mêmes.

Sur le plan des conceptions du chaos, les allusions à Poincaré sont en effet neuves et plus discutables. On notera tout d'abord qu'elles sont quasiment inexistantes avant 1977. Parmi les allusions de 1977, on peut pointer celles du colloque de New York. Okan Gürel, co-organisateur, se lance à dresser une histoire de la notion de bifurcation, qu'il fait remonter à Poincaré [356] , tout en suggérant d'attribuer une place essentielle à celui-ci dans tout ce qui est abordé au cours du colloque. Pour autant, dans les transcriptions des autres interventions, Poincaré n'est pas mis en avant, sauf dans l'exposé du mathématicien Robert Devaney, au sujet des orbites homoclines ("Homoclinic orbits to hyperbolic equilibria") :

"Depuis l'époque de Poincaré et Birkhoff, on sait que la structure des orbites d'un système dynamique à proximité d'un point homocline est extrêmement compliquée" [357]

En outre, dans les articles-références postérieurs à 1975, il ne se trouve aucune allusion à Poincaré en relation avec le chaos. Pour Li et Yorke (1975), May (1976), Hénon (1976) ou Rössler (1976), Poincaré n'est pas relié avec les considérations spécifiques aux conceptions de chaos (en mettant à part les "sections de Poincaré" et autres méthodes, bien évidement). On remarquera également que Poincaré n'est pas évoqué dans les premiers textes de vulgarisation, datant pourtant de 1980.

Cependant, les références aux "comportements compliqués" et aux "homoclines" se

[355] Difficile de le dater précisément. Ruelle et Takens, en 1971, parlent déjà des sections de Poincaré ; Birkhoff, avant la seconde guerre mondiale non ; Lorenz en 1963, Hénon en 1964 non plus.

[356] Gürel évoque Poincaré dans la préface à la publication du colloque ("The concept of bifurcation belongs to one of Poincaré's pioneering studies", p. 1 / "E. Lorenz published his article in 1963 concerning turbulence. The solution corresponding to turbulence belongs to critical solutions, discussed almost three quarters of a century prior to this work by Poincaré", p. 2), et de manière très extensive dans sa contribution introductive au colloque ("Poincaré's bifurcation analysis"). [GÜREL, O., RÖSSLER, O.E., 1979], p. 5-26.

[357] "Since the time of Poincaré and Birkhoff, it has been known that the orbit structure of a dynamical system near a homoclinic point or orbit is extremely complicated", [GÜREL, O., RÖSSLER, O.E., 1979], p. 108.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

multiplient à partir de 1977. Le co-organisateur du colloque de 1977, Otto Rössler indique par exemple :

"Cette application contient [...] un point homocline [...] Un tel point d'intersection entre une variété stable et instable d'un point fixe de type selle dans un difféomorphisme a été décrit pour la première fois par Poincaré (25) dans le problème de trois corps restreint." [358]

En 1978, dans "The prevalence of chaos", l'auteur explique :

"On sait depuis le temps de Poincaré que des systèmes dynamiques conservatifs assez simples, tels que deux oscillateurs linéaires couplés, peuvent avoir un comportement hautement compliqué." [359]

En 1979, Boris Chirikov rappelle, dans son long développement sur les systèmes Hamiltoniens, que Poincaré a déjà défini la notion de courbes doublement asymptotiques [360] . Jusque là, les allusions sont concentrées sur les homoclines. Le pas suivant est franchi par Helleman en 1980, à propos des systèmes Hamiltoniens :

"L'existence des régions chaotiques était déjà connu de Poincaré" [361]

En une sorte d'apothéose, la préface à la publication de la conférence Order in chaos de 1982 achève de consacrer Poincaré:

"La possibilité que le chaos existe dans des systèmes déterministes va directement à l'encontre de l'intuition commune. Pour comprendre que cette possibilité est néanmoins véritable, nous pouvons nous référer à la profonde perspicacité de Henri Poincaré, un des fondateurs de la théorie moderne des systèmes dynamiques." [362]

Ce passage est suivi du dernier ingrédient qui manquait à notre anthologie : la sensibilité aux conditions initiales appuyée par la citation *in extenso* du texte "Le Hasard" (le célèbre "Une petite cause...", sorti du Science et Méthode de 1908, en l'occurrence). Cette dernière citation montre également que Poincaré est associé sans équivoque à la théorie mathématique des systèmes dynamiques. Enfin, le symposium The mathematical heritage of Poincaré de 1980, inscrit Poincaré dans la même voie : la publication reprend

[358] ***"This map contains [...] a homoclinic point [...] Such an intersection point between the stable and unstable manifold of a saddle-like fixed point in a diffeomorphism was first described by Poincaré (25) as occuring in the reduced 3-body problem.", [RÖSSLER, O.E., 1977d], p. 190 (la note (25) renvoie aux Méthodes Nouvelles de Poincaré : [POINCARE, H., 1892a / 1893a / 1899a]).***

[359] ***"It has been known since the time of Poincaré that quite simple conservative dynamical systems, such as two coupled linear oscillators, can exhibit highly complicated behaviour", [MADONALD, M., 1978], p. 305.***

[360] [CHIRIKOV, B., 1979], p. 274.

[361] ***"The existence of chaotic regions was known already to Poincaré", [HELLEMAN, R.H.G., 1980b], p. 421 (il ne s'agit pas de la conférence qu'il a organisé en 1979).***

[362] ***"The possibility that chaos exists in deterministic systems runs directly counter to normal intuition. To understand that this possibility is nonetheless real, we can refer to the deeper insight of Henri Poincaré, one of the founder of modern dynamical systems theory.", [CAMPBELL, D., ROSE, H., 1983].***

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

un article de David Ruelle intitulé "Differentiable dynamical systems and the problem of turbulence", qui, sans faire directement référence à Poincaré, ne peut que l'associer au mouvement en marche [363] .

Cinq années suffisent à construire une histoire, débutant par des allusions timides, prudentes et ciblées (sur les homoclines notamment) qui tendent à constituer un amalgame dont on questionne la pertinence depuis le début de cette thèse. Le fait que les premiers pas du chaos en 1975-76 ne semblent pas être des reprises des travaux de Poincaré (ni des réflexions tirées de "Le Hasard") au point où celui-ci les avaient laissés, interroge d'autant plus.

En outre, pour prolonger brièvement ce point, il faut ajouter que la question des homoclines et l'allusion à Poincaré se trouve chez Steve Smale, dans son article de 1967 en particulier. Nous avons vu qu'il compte parmi les travaux de référence de cette fin des années 1970, ce qui est susceptible de peser dans le choix de s'en remettre à Poincaré. Mais cela pose tout autant la question de savoir si les homoclines dont il est question sont pensées telles que Poincaré les a présentées ou bien selon les prescriptions de Smale. Là encore, notre analyse de l'histoire entre la fin du XIXeme siècle et les années 1970 devrait apporter des réponses.

D'autres précurseurs plus récents, sont célébrés, de manière moins ostentatoire que Poincaré. Il s'agit d'Edward Lorenz, des auteurs du théorème KAM et de Michel Hénon (avec Carl Heiles), ainsi que de Stanislaw Ulam. Le premier bénéficie d'une aura fondée sur trois éléments : tout d'abord son système différentiel, exploré dans le détail entre 1975 et 1982, puis sa reconnaissance internationale au colloque de 1977, organisé en l'honneur de Hopf et qui a vu la célébration de Lorenz [364] , et enfin sa parabole de l'"effet papillon" lancée en 1972. Rapidement, Lorenz parvient au statut de celui qui a "redécouvert" ce que Poincaré avait "déjà vu" et un rapprochement est construit entre, d'une part, son travail publié en 1963 et, d'autre part, les éléments ultérieurs appelés "effet papillon" et sensibilité aux conditions initiales [365] .

Le second groupe est moins cité. Leurs travaux s'inscrivent dans la perspective des systèmes Hamiltoniens et ne préoccupent qu'une portion limitée des scientifiques. Néanmoins, l'introduction de Helleman, au colloque de New York de 1979, met en exergue le théorème KAM. Incontestablement, ces résultats sont perçus comme des tournants dans cette branche.

Enfin, Ulam est reconnu ici pour un aspect particulier de son activité, les expériences numériques. On se contentera de l'article de vulgarisation de Hofstadter faisant l'éloge de Ulam sur ce point :

[363] Le colloque a eu lieu en 1980 (Indiana University, Bloomington), mais les actes sont publiés en 1983. Le texte de Ruelle inclus dans le recueil est un texte publié en 1981 dans le Bulletin of the American Mathematical Society. [BROWDER, F.E., 1983].

[364] D'après le récit de Gleick, le dîner avait été prévu en l'honneur de Lorenz, ovationné lors de son entrée. [GLEICK, J., 1989], p. 325.

[365] Dans [MAY, R.M., 1976], p. 466 par exemple (voir note 352, p. 162).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"Un des plus vigoureux partisans de ce style de pratique mathématique a été Stanislaw M. Ulam qui, quand les ordinateurs étaient encore jeunes, n'a pas hésité à les utiliser sur des problèmes d'itérations non linéaires aussi bien que des problèmes de beaucoup d'autres branches des mathématiques. Beaucoup des idées esquissées ici sont venues à la suite des études précoces de Ulam avec Paul Stein." [366]

En 1975, ces personnages, hormis Poincaré, sont tous en vie et en activité. Ils bénéficient d'une célébrité internationale, mais seul Poincaré a le privilège d'être progressivement transformé en mythe. Il est assez intéressant de constater avec ces exemples que la machine à manipuler les idées originelles des scientifiques peut se mettre en route extrêmement rapidement. Ceci est certainement d'autant plus facile que les textes sont anciens, ont été écrits en français et dans un contexte très différent de l'effervescence des années 1975-82.

Peu de manuels avant 1982

Pour épuiser les signes les plus caractéristiques de la constitution d'un champ, il nous paraît important d'interroger les manuels et plus généralement les tentatives de synthèse des conceptions élaborées. De manière surprenante au premier abord, le premier ouvrage édité sur le thème du chaos a été publié en français (puis en anglais), en 1980, par Christian Mira et Igor Gumowski. Il s'intitule Dynamique chaotique [367] et traite de la dynamique des itérations. Les auteurs espèrent "apporter une pierre à la construction d'une théorie plus systématique" pour les itérations d'ordre un et deux, sous certaines hypothèses de travail. Ils présentent surtout les résultats tirés de leurs études, dont ils datent les débuts à 1963. C'est donc un exercice particulier, avec ses spécificités et une perspective singulière, que nous aborderons d'ailleurs largement [368] .

Un effort plus global est réalisé avec l'Ecole d'été des Houches, organisée durant l'été 1981. En effet, les séances de cours sont rédigées dans la perspective de mettre au point un cours de base [369] , dont le résultat est publié en 1983. Les méthodes et les principaux résultats sont exposés en même temps que se confirme la tendance vers un chaos un peu simplifié (le chaos de la vulgarisation qui est aussi un chaos "de manuel") :

[366] ***"One of the strongest proponents of this style of mathematizing has been Stanislaw M. Ulam, who, when computers were still young, turned them loose on problems of nonlinear iteration as well as on problems from many other branches of mathematics. It is from Ulam's early studies with Paul Stein that many of the ideas to be sketched here follow.", [HOFSTADTER, D.R., 1981], p. 17.***

[367] [GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1980a]. La traduction anglaise, en 1980, est Recurrences and discrete dynamic systems, [GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1980b].

[368] Au chapitre 5 (p. 354), pour leurs travaux sur le doublement de période, et au chapitre consacré au champ du chaos à l'intérieur du CNRS, au chapitre 11 (p. 684).

[369] "[…] nous pensons que ces notes constituent le premier ouvrage imprimé, qui contienne simultanément un survol des résultats abstraits et des applications, et qui soit susceptible de servir de base à des cours destinés à des étudiants de bon niveau.", [IOOSS, G., HELLEMAN, R.H.G., STORA, R., 1983], p. xv.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"Le titre de cet ouvrage : 'Comportement chaotique des systèmes déterministes', peut sembler contradictoire à ceux qui ne connaissent de la Mécanique que les cours usuels. La dernière décade a vu des progrès aussi nombreux que passionnants en Dynamique non linéaire. Il est apparu d'après ces nouveaux résultats que la plupart des systèmes mécaniques déterministes, avec plus de un degré de liberté, présentent une transition d'un comportement bien régulier (périodique ou quasi-périodique par exemple comme le montrent les ouvrages classiques de mécanique) vers un comportement chaotique. Ce dernier pourrait être appelé comportement 'ergodique' s'il intervient dans un système conservatif, ou comportement 'turbulent' s'il intervient dans un système dissipatif. En fait on peut démontrer que certaines propriétés de nombreuses orbites de tels systèmes déterministes sont aléatoires !" "Le comportement chaotique est inhérent à la plupart des systèmes mécaniques puisque beaucoup d'orbites ont une Dépendance très Sensible par rapport aux conditions initiales. Cela signifie qu'une modification infinitésimale des conditions initiales peut causer rapidement de grandes modifications de l'orbite qui en est issue. Ceci implique qu'indépendamment de la connaissance du comportement passé, nous ne pouvons pas prédire beaucoup du comportement à venir de telles orbites, à cause des erreurs expérimentales lors de ces observations. Un exemple est le billard incliné à plots […] Néanmoins, en répétant l''expérience' nous trouvons que la répartition de l'endroit où la boule tombe suit une loi de probabilité bien déterminée. C'est donc en termes de probabilités et statistiques que le résultat de l'expérience de Mécanique déterministe doit être décrit." [370]

Cet effort ne fait que commencer, ce qui est en plein accord avec notre choix de borner la période d'incubation du chaos à 1982, car le fait de s'engager dans des synthèses traduit une certaine maturité du champ, comme la fin d'un commencement.

Une conclusion : 1982, la fin du commencement ?

Un dernier indice nous laisse penser que l'année 1982 marque bien une étape. En effet, lors de la conférence organisée au Los Alamos National Laboratory en 1982, sous l'intitulé "Order in chaos", un sentiment d'aboutissement règne, comme cela est traduit par la préface à la publication des actes :

"Au sens réel du terme, cette conférence a représenté la 'fin du commencement' du champ du chaos déterministe. Beaucoup des éléments fondamentaux du chaos de basse dimension sont maintenant modélisés théoriquement et vérifiés expérimentalement, et toute une série de questions intrigantes sont sur le point de trouver des réponses. Nous espérons que ce volume communique un peu de l'excitation, de la vitalité, et des attentes que ceux qui ont participé au meeting ont ressenti." [371]

[370] *Ibid., p. xv et p.xvi (en italique dans le texte).*

[371] ***"In the very real sense, this conference represented the 'end of the beginning' of the field of deterministic chaos. Many of the fundamentals of low dimensional chaos are now both theoretically modelled and experimentally verified, and a variety of intriguing questions seem ripe for answering. We hope that this volume conveys some of the excitement, vitality, and anticipation that those of us who attended the meeting felt.", Ibid. p. viii.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

La conférence se veut à la fois un bilan des efforts passés et une tentative d'initier de nouvelles perspectives dans la recherche sur le chaos "dans les systèmes déterministes". Rappelons que la même préface venait achever la mythification de Poincaré [372] et nous tenons là les ingrédients qui motivent notre choix de faire de cette conférence un terme de l'ère des premiers pas du chaos.

Nous avons mis en exergue de multiples traits signant à un niveau sociologique la constitution d'un champ de recherche sur le chaos. La conscience de l'émergence et de l'appartenance à ce champ est extrêmement précoce et le sentiment d'être parvenu à un aboutissement en 1982 est même très étonnant. La coïncidence avec les taux de citations des articles marquants est aussi surprenante et nous conforte dans notre choix : 1975-1982 correspond systématiquement à une montée en puissance, parfois suivie d'une petite dépression, une cassure dans le rythme, en 1982-83. Cette période semble donc former un épisode assez bien délimité, au plan sociologique.

Naturellement, tous ces éléments et tous les points que nous avons laissés en suspens, nous incitent à nous demander s'il n'y aurait pas une sorte de "paradigme" structurant ce champ, plus seulement au niveau sociologique, mais véritablement du point de vue conceptuel. Quels seraient les méthodes et les concepts sous-tendant ce champ du chaos ? Est-ce que la "fin du commencement" correspond à un aboutissement théorique et expérimental comme cela est annoncé en 1982 ? C'est tout l'enjeu de notre étude détaillée des notions émergentes de chaos.

CHAPITRE 3. LE CHAOS S'IMPOSE : 1975-1982

Le terme "chaos" apparaît dans le champ scientifique vers 1975 et sa diffusion y est très rapide au cours de l'année 1976. Dans la période 1975-82, de plus en plus d'auteurs emploient ce terme mais son utilisation n'est pas circonscrite, ni systématique : il renvoie à plusieurs conceptions différentes des scientifiques. L'analyse sociologique montre une convergence disciplinaire et l'émergence d'un champ d'investigation après 1975. Pour comprendre et expliquer ce mouvement, il est indispensable de produire une analyse des concepts, ce qui est l'objet des trois chapitres qui suivent. Nous proposons une analyse épistémologique approfondie des premiers travaux, articles et textes publiés à ce sujet, ce qui n'a jamais été entrepris encore, malgré l'abondance de discours sur cette étape déterminante.

Nous allons montrer que si, au niveau sociologique, il se produit une rencontre de perspectives diverses, les concepts de chaos sont les fruits de multiples interactions conceptuelles. Dans notre présentation nous avons introduit les aspects sociologiques avant le développement conceptuel : cela ne signifie aucune hiérarchie ni dépendance stricte de l'un par rapport à l'autre. La rencontre conceptuelle n'est pas une simple conséquence d'un dialogue interdisciplinaire, tout comme les rapprochements entre scientifiques ne tiennent pas uniquement aux développements intellectuels possibles à

[372] Cf. p. 167, en particulier la note 362.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

propos de chaos. La période 1975-82, autant que l'histoire antérieure à 1975, nous montrera les relations bilatérales entre les développements socio-institutionnels et conceptuels.

Dans ce premier chapitre, nous analyserons successivement le chaos selon le groupe de Li, Yorke et May, les conceptions de David Ruelle, puis les questions des systèmes conservatifs, pour montrer la marche de la conceptualisation dans ce champ émergent. La présentation séparée ne doit pas masquer les profondes relations des conceptions entre-elles. L'enjeu de ce chapitre est de montrer autant les nuances que les similitudes conceptuelles.

3.1. Le chaos selon Li, Yorke, May

En matière de chaos, l'article de James Yorke (né en 1941) [373] et Tien-Yien Li (né en 1945) [374], deux mathématiciens travaillant aux Etats-Unis, fait figure de résultat déclencheur des évènements et il est singularisé dans l'ensemble de l'historiographie. Leur célèbre "Period three implies chaos" a été publié en 1975 et il constitue effectivement le premier résultat mathématique d'une longue série, associé au terme chaos. L'analyse de ce texte, assez court, donne déjà quelques pistes au sujet de ce qu'il faut entendre par chaos et laisse pressentir le réseau conceptuel très vaste en action à l'arrière-plan de ce résultat.

a. "Period three implies chaos", 1975

Le propos de l'article est de prouver des résultats mathématiques dans le cadre des itérations du type :

$x_{n+1} = F(x_n)$ (F fonction d'un intervalle dans lui-même).

Ce type d'applications a un intérêt, non seulement mathématique, mais également pour la modélisation de différents processus de la physique, de la dynamique des populations pour ne citer que quelques exemples parmi la multitude de phénomènes auxquels nous aurons à faire.

[373] James Yorke a fait toute sa carrière à l'Université du Maryland, en mathématiques. Cette institution a l'avantage de posséder un centre de recherche, l'IFDAM ("Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics"), devenu IPST ("Institute for Physical Science and Technology"), très propice au développement de recherches interdisciplinaires. Yorke baigne donc dans un milieu où les interactions entre mathématiques, physique et autres domaines scientifiques sont encouragées (c'est d'ailleurs la raison pour laquelle il y est resté après sa thèse de mathématiques en 1966). Ses thèmes de prédilection en cette période sont les mathématiques des équations différentielles et des systèmes dynamiques plus généralement.

[374] Tien-Yien Li, mathématicien d'origine chinoise, soutient une thèse de mathématique en 1974 à l'University of Maryland, spécialisée dans les équations différentielles et systèmes dynamiques (la thèse s'intitule "Dynamics of x(n+1)=F(x(n))"). Né en Chine, passé à Taiwan (avec ses parents) en 1948 en suivant Tchang Kaï-chek, il poursuit ses études en mathématiques là-bas, puis émigre aux Etats-Unis vers 1969 afin de poursuivre dans cette voie. Yorke est en quelque sorte son mentor à l'Université du Maryland : son choix pour les systèmes dynamiques est du à Yorke et donc assez conjoncturel. (E-mail de T-Y Li à l'auteur, 22 avril 2004).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Le but est de préciser les comportements **non périodiques** des suites d'itérés d'un point initial *x*, notée : $\{F^n(x)\}$. Ce comportement non périodique est justement celui qui "pourrait être appelé 'chaotique'" [375]. Cependant, le terme chaotique est employé une seconde fois dans l'article, selon une autre "définition" : il est alors plus simplement synonyme d'irrégularité et ne correspond pas à un comportement en particulier, de type non périodique. On notera également que le titre de l'article contient le terme chaos et qu'à ce niveau il est associé à une propriété remarquable démontrée par les auteurs :

"Notre objectif est de comprendre les situations dans lesquelles les itérés d'un point sont très irréguliers. Un cas particulier de notre résultat principal dit que si il y a un point périodique, de période 3, alors pour tout entier n=1,2,3… il y a un point périodique de période n." [376]

"Chaos" désigne à la fois l'"irrégularité", un comportement (une suite d'itérés) non périodique, et la propriété indiquée précédemment : posséder des points de toute période. Le terme chaos qualifie autant l'itération en tant que processus dynamique que les suites d'itérés à partir d'un point. Le titre très suggestif choisi par les auteurs cache donc en réalité un certain flou autour de ce qu'ils appellent chaos. En tout cas, en se fiant à cette seule source, il ne se dégage ni concept ni définition univoque de chaos. Pour préciser davantage, il faut retracer la genèse de l'article.

Il convient d'abord de souligner que le travail a été produit en partie en association avec le biologiste Robert May (né en 1936) [377], un des scientifiques gravitant dans l'entourage de Li et Yorke. La lecture d'un article de May, "Biological populations with nonoverlapping generations : stable points, stable cycles, and chaos" publié en 1974, montre qu'il est très proche des positions de ceux-ci. L'article est soumis en juin 1974, publié en novembre, en vertu de quoi il devient une publication antérieure à celle de Li et Yorke évoquant le chaos. Pour être tout à fait exact, il faut également compter avec l'exposé de Li et Yorke, donné au séminaire "Dynamical systems" (du 12 au 16 août 1974) : ils brossent un rapide résumé de leur article de 1975, sous le titre "The 'simplest' dynamical system", et utilisent le terme "chaos" de manière plus floue qu'en 1975 [378].

La petite histoire des deux publications est racontée par Li et Yorke eux-mêmes [379].

[375] [LI, T.Y., YORKE, J., 1975], p. 986 : "In this paper we analyse a situation in which the sequence $\{F^n(x)\}$ is non-periodic and might be called 'chaotic'.".

[376] ***"Our objective is to understand the situations in which iterates of a point are very irregular. A special case of our main result says that if there is a periodic point with period 3, then for each integer n = 1,2,3 … there is a periodic point with period n." [LI, T.Y., YORKE, J., 1975], p. 986. Un point périodique est un point x, tel que $F^p(x)=x$, pour un certain p (le plus petit p vérifiant cela est appelé période).***

[377] Né à Sydney (Australie), Robert May (aujourd'hui Lord May) a entamé des études d'ingénieur en chimie avant de s'engager dans une carrière en physique théorique, suite à sa thèse soutenue en 1959. Il se tourne ensuite vers la biologie des populations, puis s'en va à Princeton en 1971 à l'"Institute for Advanced Studies". En 1973 il a publié un ouvrage très remarqué, [MAY, R.M., 1973] où il regroupe des résultats d'écologie et de modélisations mathématiques de systèmes de populations en interactions. Nous renvoyons à la courte biographie dans [MAY, R.M., 2001] et les points biographiques dans [GLEICK, J., 1991], p. 97.

[379] Dans [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 201-208

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Leur théorème était démontré dès avril 1973 et soumis à la revue American Mathematical Monthly, qui l'a rejeté car les relecteurs l'ont jugé trop obscur ; il est donc admis que ce résultat est antérieur à la publication de May mais aussi antérieur à 1975.

La rencontre avec May date de l'année universitaire 1973-74, pendant laquelle est organisé un séminaire sur le thème de la biomathématique. May, physicien reconverti à la biologie, y est invité. Celui-ci présente plusieurs résultats à propos de l'itération de la fonction logistique : $N_{t+1}=N_t[1+r(1-N_t/K)]$ [380] . May s'intéresse en fait à la dynamique des populations, où cette application constitue un modèle des plus élémentaires. Il donne un résultat, inconnu de Li et Yorke, relatif au doublement de période [381] possible lorsqu'on fait varier les paramètres de la fonction logistique, tandis que May découvre les propriétés démontrées par les deux mathématiciens. Des corrections et des modifications qui ont suivies proviennent les articles de 1974 et 1975.

Le terme chaos désigne, dans l'article de May, les comportements de l'itération logistique pour lesquels on trouve soit des points périodiques de période arbitraire soit un comportement apériodique. Mais cette phrase peut laisser perplexe :

"Pour la biologie des populations en général, et pour les insectes des zones tempérées en particulier, l'implication est que même si le monde naturel était à 100 pour cent prédictible, la dynamique de population avec une régulation 'dépendant de la densité' pourrait être malgré tout, dans certaines circonstances, non distinguable du chaos, si le taux de croissance intrinsèque r était assez grand." [382]

En croisant les analyses des différents textes, plusieurs tendances ressortent. Le terme chaos est synonyme d'irrégularité. Au fond, il y a d'abord une reprise du terme traditionnel chaos pour signifier une absence de régularité dans les itérations de certains points. Les auteurs ne précisent pas l'irrégularité en elle-même, par contre ils affirment qu'elle masque l'existence de multiples comportements périodiques et non périodiques. C'est leur résultat principal et il est d'importance : dans ces processus itératifs contraints par un mécanisme itératif (déterministe) ce chaos n'est pas une forme d'irrégularité totale ; il

[378] [LI, T.Y., YORKE, J.A., 1974]. Le terme chaos n'est pas singularisé par rapport à "turbulent", "complexe", "instable". "Our purpose […] is to get a new glimmer of understanding of the possible analytic regularities in the chaotic, turbulent, unstable, irregular processes of such greater complexity that surround us.", p. 203. Leur théorème est annoncé, mais sans le futur slogan "period three implies chaos".

[380] Equation utilisée dans [MAY, R.M., 1974], p. 645.

[381] Lorsque les paramètres de l'itération sont modifiés, il peut se produire qu'une orbite de période *p* donne naissance (par le fait de la bifurcation) à des orbites de période double *2p*. Le chapitre 5 est entièrement consacré à l'histoire de ces phénomènes. Dans leur présentation de 1974, Li et Yorke avait annoncé ces comportements en parallèle à leur théorème ; dans l'article de 1975, ils ne donnent que la référence à l'article [MAY, R.M., 1974] (pas encore paru), sans même préciser le phénomène (p. 986).

[382] ***"For population biology in general, and for temperate zone insects in particular, the implication is that even if the natural world were 100 percent predictable, the dynamics of populations with "density dependent" regulation could nonetheless in some circumstances be indistinguishable from chaos, if the intrinsic growth rate r were large enough", [MAY, R.M., 1974], p. 645.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

existe des **structures** périodiques affleurantes, mises en évidence par le théorème de Li et Yorke, et mélangées à des comportements non périodiques. Dès qu'une période trois est diagnostiquée, ce sont **toutes** les périodes qui sont présentes.

Par ailleurs, May ajoute, en 1975, un ingrédient à ce chaos, lequel deviendra prépondérant par la suite :

"Une autre manière de décrire le régime chaotique est d'observer que des valeurs initiales de population, proches, peuvent conduire à des trajectoires de population, avec le temps, qui divergent largement. Même si nous avons un modèle qui est très simple et complètement déterministe, en supposant tous les paramètres constants et exactement connus, le futur n'est pas prédictible. Comme souligné par Oster, les dynamiques du système sont en beaucoup d'endroits non distinguables d'un échantillon tiré d'un processus aléatoire, et sont décrites au mieux en termes stochastiques." [383]

L'idée que le comportement dynamique imite un processus aléatoire (ou mieux : "stochastique" [384]) n'était pas encore tout à fait explicitée dans les textes précédents, mais le choix du terme chaos renvoie directement à cette dimension aléatoire, surtout lorsqu'il est pris au sens d'irrégularité. En revanche, la "sensibilité aux conditions initiales", qui n'a pas de nom chez Li-Yorke-May encore en 1975, était complètement absente des caractérisations précédentes. Concernant ces scientifiques et à ce moment là, elle n'est qu'un aspect marginal dans leur reconnaissance du chaos. Dans ce contexte, elle est destinée à accentuer le rapprochement du mécanisme, déterministe, de l'aléatoire, conférant au terme chaos la double caractéristique d'être de l'aléatoire, au sens d'une irrégularité, à base de processus itératif, déterministe.

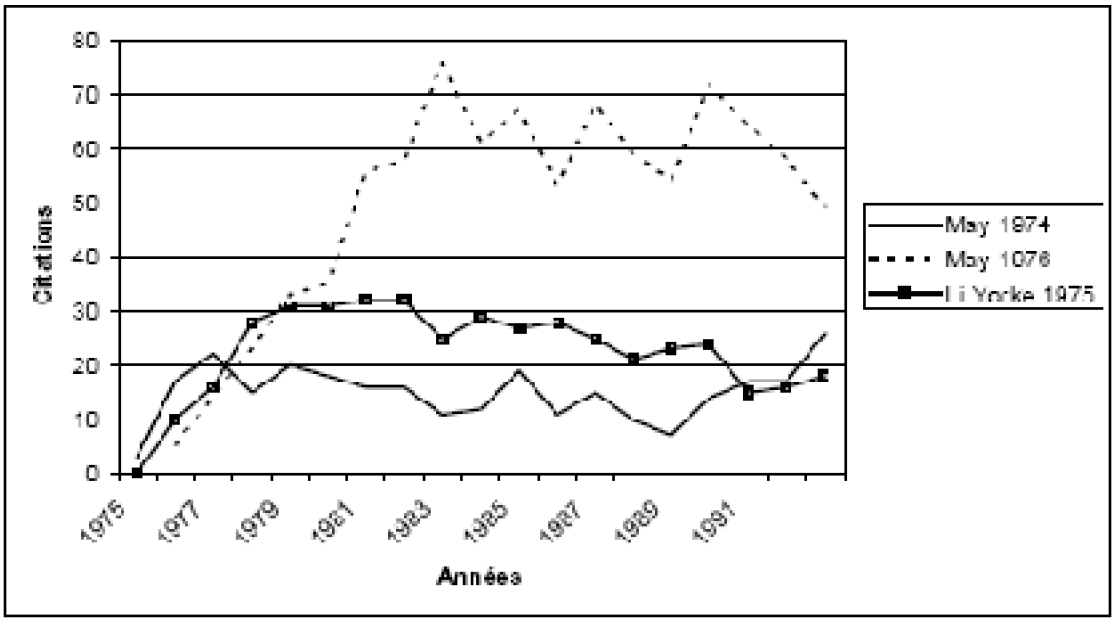
Par ses capacités à produire des textes très clairs (et des exposés sans doute aussi brillants) May est un maillon important dans la chaîne de diffusion et de publicité du chaos, tel qu'il est conçu dans l'esprit de ces trois scientifiques. L'article de May intitulé "Simple mathematical models with very complicated dynamics", publié dans Nature en 1976 constitue en quelque sorte le point d'orgue de cette série de publications. Cet article fait partie des textes les plus populaires à propos du chaos ; il est célébré et cité plus régulièrement que "Period three implies chaos", après 1980 [385] :

[383] ***"Another way of describing the chaotic regime is to observe that arbitrarily close initial population values can lead to population trajectories which, as time goes on, diverge widely. Even if we have a model which is very simple and fully deterministic, with all parameters assumed to be constant and exactly known, the future is unpredictable. As emphasised by Oster, the dynamics of the system are in many respects indistinguishable from the sample function of a random process, and are best described in stochastic terms.", [MAY, R.M., 1975], p. 166. Pour la référence à George Oster : [MAY, R.M., OSTER, G.F., 1976].***

[384] "Stochastique" signifie "qui dépend, qui résulte du hasard" d'après le Trésor de la Langue Française (version informatisée : http://atilf.atilf.fr/tlf.htm).

[385] Il correspond presque à un article de vulgarisation, ce qui explique son succès (cf. p. 160).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est



b. Les filiations et les prolongements

Plusieurs inspirations et filiations importantes transparaissent de ces textes et nous permettent de comprendre leur choix de proposer une nouvelle terminologie. Les auteurs de "Period three implies chaos" insistent d'abord énormément sur le travail d'Edward Lorenz. La primauté du travail de Lorenz se retrouve chez tous les scientifiques évoqués Li, Yorke, May (bientôt Rössler et beaucoup d'autres…). C'est son travail sur les itérations, produit au départ pour l'analyse des équations différentielles issues de problèmes de convection, qu'ils mettent en exergue. La non périodicité avait déjà une grande importance dans l'analyse de Lorenz, dans la mesure où elle était un outil pour aborder la question de la prédictibilité à long terme en météorologie, sujet de son plus célèbre article de 1963 [386]. Ce travail est parvenu dans les mains de Li et Yorke par l'intermédiaire d'Alan Faller, fasciné par ces résultats. Celui-ci était alors professeur de dynamique des fluides expérimentale et océanographe, au sein de l'IFDAM ("Institute of Fluid Dynamics and Applied Mathematics") à l'Université du Maryland, où travaillait Li et Yorke et où une recherche pluridisciplinaire est encouragée [387]. Dans leur article Li et Yorke s'intéressent uniquement à la partie traitant des mathématiques des itérations. Dans son article de 1963 le plus connu, et dans un suivant de 1964, Lorenz montre que ce type de modèles pourtant très simples peut avoir des comportements très complexes [388].

[386] C'est une "série fascinante de papiers" ("a fascinating series of papers" (LI, T.Y., YORKE, J., 1975], p. 985) qui sont mentionnés : [LORENZ, E.N., 1963a], [LORENZ, E.N., 1963b], [LORENZ, E.N., 1964] entre autres.

[387] Voir [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 202 pour d'autres détails. Voir également la note 373, p. 173.

[388] Celui de 1964 s'intitule : "The problem of deducing the climate from the governing equations", [LORENZ, E.N., 1964] et aborde le comportement d'une itération quadratique (du type de la fonction logistique).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Les autres références les plus marquantes couvrent deux types de résultats. Les expériences, au sens de l'ensemble des calculs numériques réalisés sur des itérations comme celles qu'ils considèrent, et les résultats mathématiques à proprement parler, touchant à ce genre particulier de systèmes dynamiques. Au premier rang des résultats numériques se trouvent Lorenz et le groupe de Stanislaw Ulam, Paul Stein, Myron Stein et Nicolas Metropolis du laboratoire de Los Alamos [389] . Ceux-là proposent également une courte analyse mathématique des calculs numériques. Remarquons deux choses : parmi les résultats exploités, on trouve des calculs numériques sur la fonction logistique et l'exemple est repris par Li, Yorke et May pour illustrer abondamment toute leur théorie [390] . Le travail de Lorenz s'inscrit pour cette même raison dans leur corpus. Deuxièmement, le travail de Metropolis, Stein et Stein de 1971-73, est reconnu pour sa description symbolique des itérations et pour le phénomène de cascade de doublements de période, comme May l'a signalé. Ils trouvent donc tout naturellement leur place dans le cadre général où s'inscrivent Li, Yorke et May.

Sur le plan plus théorique, le travail de S. Smale ("Differentiable dynamical systems" de 1967) est cité car il fournit à la fois un exemple d'application d'une méthode (étudier l'action de l'itération sur des séries d'ensembles) et une illustration d'un résultat assez proche de ce que Li et Yorke veulent montrer : dans le "fer à cheval" de Smale il y a un nombre infini de points périodiques [391] . Loin d'être anecdotique, ceci est peut-être l'élément mathématique le plus significatif du contexte général de cet article de 1975.

En outre, à un niveau plus global, le travail est affilié aux mathématiques des systèmes dynamiques (les itérations étant un exemple de système dynamique), en particulier dans les aspects de **théorie ergodique des systèmes dynamiques**. Li et Yorke (avec leur collègue mathématicien Andrzej Lasota) font des recherches dans cette branche des mathématiques, ce qui se retrouve dans les références citées et en particulier dans plusieurs de leurs propres travaux, antérieurs ou en voie de publication [392] . A côté de la notion de "fer à cheval", nous démontrerons en fait toute l'importance de cette préoccupation pour l'ergodicité.

Un vaste ensemble de travaux nourrit donc l'analyse de Li et Yorke. L'article de 1975 n'a rien d'une création *ex nihilo*, comme on pouvait s'y attendre. Au contraire il s'appuie sur toute une histoire et sur des travaux tant numériques que théoriques. Si quelques

[389] Ils comptent parmi les travaux numériques les plus répandus en matière d'itérations non linéaires. Le titre de ce travail est "Nonlinear transformation studies on electronic computers" datant de 1963 (republié dans [ULAM, S., 1974]) et de [METROPOLIS, N., STEIN, M.., STEIN, P.R., 1973].

[390] Pour la fonction logistique paramétrée par r : $x_{n+1} = r.x_n(1-x_n)$, le cas $r = 4$ est traité par Ulam et ses collègues, les cas $0 \leq r < 4$, partiellement, par Lorenz.

[391] L'article de Smale est [SMALE, S., 1967], cité car : "in his famous "horseshoe example" in which he shows how a homeomorphism on the plane can have infinitely many periodic points", [LI, T.Y., YORKE, J., 1975], p. 988.

[392] Notamment : [LASOTA, A., YORKE, J., 1973], [LI, T.-Y., YORKE, J., 1978] (en attente de publication en 1975), [LI, T.-Y, 1976]. Nous renvoyons au paragraphe plus détaillé sur le sujet, p. 199.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

noms très classiques de la préhistoire du chaos ont été mentionnés, il faut noter l'absence de celui de Poincaré. Force est d'admettre que son travail n'a pas de connexion très directe avec le résultat : il s'agit d'itérations, non d'équations différentielles, et les méthodes de Poincaré ne sont pas utiles ici. Néanmoins à travers Lorenz ou Smale on comprendra qu'il est présent par l'esprit et les travaux qu'il a pu inspirer [393].

La nouveauté de leur théorème se trouve dans le début de systématisation qu'ils proposent, tout en sachant qu'elle est assez limitée. N. Metropolis, M. Stein et P. Stein, dans une voie alternative, ont donné des résultats plus précis, mais peut-être moins spectaculaires. Le théorème de Li et Yorke montre l'abondance de suites périodiques dans des itérations très générales ; il permet même d'avancer que **toutes** les périodes sont représentées, moyennant certaines conditions, et que des suites non périodiques coexistent dans la **même** itération. En un mot, Li et Yorke mettent en lumière un début de classification des dynamiques possibles dans les itérations, s'appuyant sur la structure des orbites périodiques.

L'importance que nous accordons à cette publication de Li et Yorke ne tient pas uniquement au fait qu'elle donne un nom à une classe de phénomènes. Leur résultat va servir de paradigme à certains développements sur le sujet. Expliquons au préalable les nuances et les retouches qui lui sont apportées.

En effet, à la fin de l'année 1976, la notion de chaos du groupe May, Li et Yorke est souvent reprise mais également parfois discutée. Deux mathématiciens Peter Kloeden, Michael A.B. Deakin, et un physicien Andrew Z. Tirkel, tous trois australiens, explicitent plus clairement, dans Nature, les propriétés reliées à la notion de chaos (pour les itérations) sous-jacentes aux idées des précédents auteurs. Elles sont au nombre de trois :

"(1) Les solutions ne sont pas toutes périodiques ; (2) pas nécessité de stabilité asymptotique ; (3) il peut se produire des cycles de toute période." [394]

Pour Kloeden et al., le théorème de Li et Yorke stipule que la présence d'une période trois implique les propriétés (1), (2) et (3), ce qui constituerait leur notion de chaos. L'article de 1976 ne s'avise pas simplement de reformuler le travail de Li et Yorke mais entend apporter des éléments critiques à cette position et discuter les relations entre (1), (2) et (3).

L'article présente surtout les résultats du mathématicien ukrainien Alexander Sharkovsky (né en 1936). Publié en 1964 [395], bien avant celui des deux mathématiciens américains, un des théorèmes de Sharkovsky donne en effet une caractérisation plus précise des comportements itératifs. Rédigé en russe, le résultat est resté très peu à la

[393] Les chapitre 6 et 9 apporteront des éclairages sur cette question.

[394] ***"(1) Not all solutions are periodic; (2) Asymptotic stability need not obtain; (3) Cycles of all periods may occur.", [KLOEDEN, P., DEAKIN, M.A.B., TIRKEL, A.Z., 1976], p. 295.***

[395] Il a été soumis en 1962, publié en 1964. Pour plus de détails biographiques, nous renvoyons au numéro spécial de Journal of Difference Equations and Applications (pour le 65ème anniversaire de Sharkosky) : [ROMANENKO, E.Yu., FEDORENKO, V.V., 2003].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

portée du public au-delà de l'Ukraine [396]. Mentionné dans Nature en 1976, le résultat sera traduit complètement (en anglais) par Peter Stefan et publié en 1977 seulement [397]. C'est cette dernière publication qui assurera la plus grande reconnaissance de Sharkovsky dans le monde occidental [398].

Le résultat de Sharkovsky est plus précis que celui de Li et Yorke car il donne un ***ordre*** d'apparition des orbites périodiques.

Li et Yorke montrent que la période 3 implique toutes les autres périodes. Sharkovsky établit lui que cet ordre d'apparition est respecté : *3, 5, 7, 9, … 2.3, 2.5, 2.7, 2.9…2.2.3, 2.2.5, 2.2.7….2.2.2.3….2* ^{n} *, 2* $^{n-1}$ *…4, 2, 1*. La présence d'une période *k* implique l'existence de toutes les périodes inférieures selon cet ordre (c'est-à-dire à droite de *k*).

Publié en 1965, un second résultat de Sharkovsky, établi sur des considérations topologiques de l'ensemble *C* des points appartenant à un cycle, donne l'alternative suivante :

• *C* est un ensemble fermé, alors toute condition initiale donne une suite d'itérés se terminant, asymptotiquement, en comportement périodique.

• Sinon, il y a une quantité non dénombrable de points de départ ne se concluant pas asymptotiquement en un cycle périodique [399].

Le théorème de Li et Yorke est donc un cas très particulier des résultats de Sharkovsky. La répartition entre orbites périodiques et non périodiques est affinée. Ces remarques n'enlèvent rien à l'originalité du travail de Li et Yorke, construit sans la connaissance du travail de Sharkovsky. Mais déjà deux notions de chaos, définies exclusivement mathématiquement, se distinguent, car Kloeden et al. suggèrent, sur la base des résultats de Sharkovsky, que :

"[…] les propriétés (1) et (2) soient vues comme définissant le chaos, mais que (3) ne soit pas considéré comme nécessaire. Ceci provoquera des divergences avec la nomenclature de certains auteurs (par exemple May), mais c'est une

[396] Il semble que sa sortie de l'Union Soviétique soit d'abord passée par la traduction de deux ouvrages. L'ouvrage de Konstantin Sibirsky intitulé Introduction to Topological Dynamics, en 1975, où une partie des travaux de Sharkovsky y est révélée. Il s'agit de la traduction de l'ouvrage de Sibirsky, datant de 1970. On trouvera la traduction : [SIBIRSKY, K.S., 1975]. Dans une autre monographie, antérieure, Functional equations in a single variable ([KUCZMA, M., 1968]), l'auteur fournit une liste plus complète des travaux de Sharkovsky ; le premier chapitre de l'ouvrage aborde le sujet : "Iterates and orbits". Les résultats de Sharkovsky sont cités entre les "classiques" de Julia et Fatou, et les résultats les plus récents de Myrberg, Mira et Gumowski. Malheureusement, ils sont référencés en russe dans sa bibliographie et rien n'indique le contenu exact de ces articles.

[397] [STEFAN, P., 1977]. Il ne s'agit pas seulement d'une traduction et Stefan l'assume ouvertement : il a mis la démonstration de Sharkovsky "à son goût" ("to suit my taste" [STEFAN, P., 1977], p. 237). Par ailleurs, c'est le mathématicien Sheldon Newhouse qui a mis Stefan au courant de cet article de Sharkovsky. Tout ceci s'insère dans le cadre de l'IHES, étudié au chapitre 6.

[398] Un sondage dans le Science Citation Index montre que l'article de Kloeden et al. n'a pas attiré l'attention (il est surtout cité par R.M. May). Il est probablement éclipsé par les notes plus complètes de May et éludé par l'article de Li et Yorke.

[399] [SHARKOVSKY, A.N., 1965] et [KLOEDEN, P., DEAKIN, M.A.B., TIRKEL, A.Z., 1976].

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

convention cohérente et en accord avec l'usage de tous les jours." [400]

Malgré la plus grande généralité du théorème de Sharkovsky, dans l'ensemble des travaux de 1975-82, la référence au théorème de Li et Yorke est préférée. Certes il y a là un phénomène publicitaire : le terme chaos, employé uniquement par Li et Yorke, leur procure un avantage intéressant. Mais il faut bien avouer que le résultat de Li et Yorke est très simple, ce qui favorise une place en tête du "paradigme" annoncé. En effet, le diagnostic d'une période trois, et même leur critère plus général, permettent de déterminer rapidement et facilement si un comportement vérifie le théorème et s'il existe du chaos, sous la forme qu'ils imaginent. Ainsi, dans divers travaux de la fin des années 1970, on trouve des mentions du type :

"L'argument repose sur le théorème de Li et Yorke. Ici nous rapportons la découverte de comportement chaotique comme résultat expérimental dans un système d'enzyme (peroxydase). Comme Rössler, nous appuyons notre identification du chaos sur le théorème de Li et Yorke." [401]

Pour les deux auteurs de ces lignes on remarquera au passage qu'un comportement chaotique est un comportement "non périotone, non périodique" :

"L'existence de comportement non périotone, non périodique dans des systèmes dynamiques a été fermement établie seulement récemment. Ceci est appelé comportement chaotique." [402]

De la même manière, toujours en 1979, on peut lire à propos des aspects expérimentaux :

"L'analyse repose sur l'idée que des états chaotiques peuvent apparaître avec des oscillations périodiques de période trois." [403]

c. Une première notion de chaos ?

L'article de Li et Yorke a donc attiré l'attention sur une notion de chaos dans une catégorie particulière de systèmes, les itérations. Nous avons montré que leur proposition a été débattue et reprise très rapidement. A la suite du théorème de Li et Yorke, le chaos se trouve donc être :

• une irrégularité apparente des suites d'itérés, produites par un mécanisme pourtant très simple,

[400] ***"We suggest that requirements (1) and (2) be regarded as defining chaos, but that (3) not be regarded as necessary. This would entail some divergence from the nomenclature of certain authors (for example, May), but it is a consistent convention and one in accord with everyday usage" [KLOEDEN, P., DEAKIN, M.A.B., TIRKEL, A.Z., 1976], p. 295.***

[401] ***"The argument is based on a theorem by Li and Yorke. Here we report the finding of chaotic behaviour as an experimental result in an enzyme system (peroxidase). Like Rössler, we base our identification of chaos on the theorem by Li and Yorke", [OLSEN, L.F., DEGN, H., 1977], p. 178.***

[402] ***"the existence of non-monotonic, non-periodic behaviour in dynamic systems has been firmly established only recently. It is termed chaotic behaviour", [OLSEN, L.F., DEGN, H., 1977], p. 177.***

[403] ***"The analysis is based on the idea that chaotic states can occur along with periodic oscillations of period three.", [HUDSON, J.L., HART, M., MARINKO, D., 1979], p. 1605. Les auteurs se réfèrent, pour les analyses en terme d'équations différentielles, à Rössler et Lorenz.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

• un mélange de périodique / non périodique, et plus que cela, un mélange structuré ; dans les travaux présentés l'objectif est de préciser l'arrangement entre ces deux types de comportements.

Nous insistons bien sur le fait que Li et Yorke n'ont pas donné une vision définitive et irrévocable du chaos. En 1975, ils livrent une ébauche sur laquelle viennent s'agglomérer des résultats antérieurs, parfois plus généraux (le théorème de Sharkovsky ignoré dans le monde occidental jusque là), des recadrages et des compléments. Ainsi, Kloeden, Deakin et Tirkel ont pointé les insuffisances de la notion proposée par Li et Yorke. Pour abonder dans ce sens nous pouvons ajouter les résultats complémentaires du japonais Y. Oono : "une période différente de 2^n implique le chaos" [404] . En définitive, beaucoup de comportements nouveaux sont (re)mis en avant dans la foulée du théorème de Li et Yorke, mais leur théorème reste le meilleur représentant de cet ensemble de réflexions, du fait de son caractère initiateur (du choix d'un titre choc) et surtout de la simplicité du résultat.

La suite nous montrera à quel point cet article de 1975, bien que sommaire, participe à l'élaboration du champ de recherche et ne se limite pas à mettre un nom sur un phénomène. Il n'est pas non plus l'unique moteur des investigations. C'est une conception de chaos parmi d'autres imaginées dans la fin des années 1970. En effet pour des systèmes autres que les itérations, diverses variantes de chaos vont naître, non sans lien avec ce qui vient d'être présenté. Nous verrons que pour les systèmes dynamiques continus, et non plus discrets comme les itérations, les conceptions sont plus complexes, s'inspirent partiellement des conceptions de Li, Yorke, May et partagent quelques points communs.

3.2. Le chaos : entre ergodicité et attracteurs étranges

Pour les systèmes dynamiques plus généraux, des notions de chaos se dessinent à partir de 1976. Les exigences ne sont pas les mêmes que pour les itérations et d'autres concepts apparaissent pour échafauder une notion de chaos nouvelle, adaptée en particulier aux équations différentielles. Là encore, des nuances se font jour entre différentes approches de la question mais quelques grandes tendances fixent un cadre à cette activité de construction. Ce sont la question de la turbulence, la notion d'attracteur étrange, la sensibilité aux conditions initiales et l'ergodicité. Un scientifique est en grande partie à l'origine du choix de ces composantes : David Ruelle. Nous allons voir, en effet, que le processus s'engage avec lui dès 1975, sur la base de ses travaux en matière de mathématiques de la turbulence et de l'association avec la notion d'"attracteur étrange" qu'il a préconisé.

a. David Ruelle, la turbulence et les attracteurs étranges

1971 : turbulence et attracteurs étranges

[404] [OONO, Y., 1978b] : "Period ≠ 2^n implies chaos".

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

A la fin des années 1970 la notion d'attracteur étrange est assez largement diffusée, certainement autant que celle de chaos. En 1980, la première vulgarisation du concept par David Ruelle, dans l'article "Les attracteurs étranges" [405], le fait sortir de la confidentialité. Malgré les difficultés mathématiques sous-jacentes, il parvient à donner une idée très claire de ces attracteurs qu'il associe directement au comportement chaotique. Les premiers mots de l'article sont d'ailleurs :

"Nombreux sont les phénomènes naturels dont l'évolution temporelle peut être décrite par des équations différentielles déterminées. Résoudre ces dernières doit nous permettre de répondre à la question : que devient le système au bout d'un temps assez long ? Dans certains cas, son comportement dynamique devient chaotique et le traitement informatique des mesures effectuées permet alors de visualiser un attracteur étrange." [406]

Une interprétation littérale de la dernière phrase inciterait à considérer que l'attracteur étrange est un signe presque automatique de chaos, pratiquement un synonyme. Pour bien comprendre ce rapprochement, il faut se pencher sur les travaux antérieurs de Ruelle. En effet, David Ruelle est celui qui a donné naissance à cette notion d'"attracteur étrange", en 1971, dans l'article "On the Nature of Turbulence" écrit avec son collaborateur alors à l'IHES, Floris Takens. La définition y est très abstraite, comme le reste de l'article d'ailleurs. Schématiquement, il est construit localement comme le produit d'un espace et d'un ensemble de Cantor. L'article de 1971 se veut, avant tout, une proposition de théorie mathématique de la turbulence et de l'apparition de la turbulence, qui soit alternative à celle de Lev Landau, alors admise par l'ensemble des physiciens : pour le formuler simplement, un système à petit nombre de degrés de liberté est susceptible d'avoir un comportement turbulent en se développant, dans son espace des phases, sur un attracteur "étrange" [407].

Par turbulence il faut entendre à la fois "compliqué", "irrégulier" et "chaotique" (au sens classique) [408]. En termes plus précis, mathématiques, la turbulence est associée à un attracteur qui n'est ni un point ni une orbite fermée : l'attracteur dit "étrange" [409], qui rentre dans cette catégorie, sert à rendre compte du comportement de turbulence auquel un système peut parvenir à la suite d'un nombre limité de bifurcations.

Produit par des mathématiciens, le résultat est très abstrait et la définition des

[405] [RUELLE, D., 1980c] dans La Recherche. [RUELLE, D., 2000] propose une republication de l'article original de 1980. L'article a également une version anglaise, dont le public est nécessairement plus large (The Mathematical Intelligencer) [RUELLE, D., 1980a].

[406] [RUELLE, D., 1980c], p. 133-4.

[407] Notons que la notion de turbulence est plus générale que la présence d'attracteur "étrange". La section 9 de l'article [RUELLE, D., TAKENS, F., 1971] présente un exemple où la situation de turbulence est associée à l'existence d'attracteurs étranges.

[408] "[…] very complicated, irregular and chaotic, we have turbulence", [RUELLE, D., TAKENS, F., 1971], p. 167.

[409] "[…] a 'strange' attractor which is locally the product of a Cantor set and a piece of two-dimensional manifold". [RUELLE, D., TAKENS, F., 1971], p. 170.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

concepts, y compris celui de turbulence, est purement mathématique. D'ailleurs, les considérations de mathématiques des systèmes dynamiques, les travaux de R. Thom et de S. Smale, constituent la base mathématique de ces résultats.

Dans leur raisonnement, généricité et stabilité structurelle, deux notions avancées en la matière, sont essentielles pour aboutir aux conclusions. En outre, Ruelle et Takens s'inscrivent explicitement dans les problématiques de mathématiques des systèmes dynamiques suggérées par Smale, avec sa théorie des systèmes hyperboliques.

Cet article de 1971, sur lequel nous reviendrons à plusieurs reprises, est déterminant dans les premières considérations de chaos car il est d'abord responsable de l'idée, très vivace à la fin des années 1970, que la turbulence est associée à un attracteur étrange [410], ou, pour le formuler autrement, qu'un attracteur étrange est un modèle représentant une forme de turbulence. Il nous reste à comprendre le lien exact qui se noue avec la problématique du chaos.

Rencontre avec le système de Lorenz

Un moment clé dans cette perspective est la rencontre avec les travaux de Lorenz, les mêmes que ceux utilisés par Li et Yorke : en 1975, Ruelle a effectivement connaissance de ces résultats publiés en 1963 [411]. Tout comme Li et Yorke, Ruelle est intéressé par les éléments mathématiques en jeu. Lorenz propose, en effet, un système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma.x + \sigma.y \\ \dot{y} = xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \qquad \sigma, r, b \geq 0$$

destiné à rendre compte de problèmes de convection. Son comportement rappelle la turbulence sur plusieurs points : non périodicité de l'évolution, sensibilité des phénomènes aux perturbations et existence d'un objet, dans l'espace des phases, à la géométrie singulière. Lorenz en a donné quelques images en deux dimensions (projection sur un plan de l'ensemble évoluant dans un espace à trois dimensions, lignes isoplèthes) [412].

[410] On peut le voir à travers divers articles consacrés à la turbulence par les physiciens Paul Martin ([MARTIN, P.C., 1976]), à propos des expériences de Harry Swinney et Jerry Gollub, réalisées dans la perspective suggérée par Ruelle ([GOLLUB, J.P., SWINNEY, H.L., 1975]) ou encore plus simplement dans l'article de vulgarisation de Ruelle, promouvant sa vision du problème ([RUELLE, D., 1980c]).

[411] Les premières considérations présentées par Ruelle à ce sujet sont publiées dans [RUELLE, D., 1975]. Ruelle et Lorenz se sont rencontrés auparavant, en 1971, à une conférence sur les modèles statistiques de la turbulence, à La Jolla en Californie. Ils participent à la même session, discutent de manière plus ou moins directe une question de type sensibilité aux conditions initiales, mais ne se sont pas rapprochés davantage à l'époque. Voir [ROSENBLATT, M., VAN ATTA, C.W., 1975] pour les comptes-rendus du symposium et [AUBIN, D., 1998a], p. 654.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

L'"attracteur de Lorenz", puisque c'est le nom donné par Ruelle à cet objet géométrique, est ainsi relié, par Ruelle lui-même, aux considérations mathématiques de Ruelle et Takens.

Cependant, le lien entre les attracteurs étranges définis en 1971 et les figures de Lorenz n'est pas tout à fait immédiat. Le cas étudié par Lorenz ne rentre pas dans le cadre de validité de la théorie de Ruelle et Takens car le système de Lorenz ne vérifie pas l'Axiome A [413] . Néanmoins, on assiste au transfert, par **analogie**, de la notion d'attracteur étrange, en direction du système de Lorenz. Le report ne se fait pas sans quelques éléments de similitude entre les deux situations. Ruelle tente de repérer de l'hyperbolicité (un étirement et un repliement) dans le système de Lorenz, car c'est un ingrédient essentiel de l'Axiome A et cela permettrait de se rapprocher des conditions d'application des théories valables avec l'Axiome A. La sensibilité aux conditions initiales intervient également [414] . En définitive, les quelques points communs devinés l'emportent sur les différences pour autoriser le transfert. Ainsi des considérations très pointues sur les systèmes dynamiques (mathématiques) donnent des **moyens heuristiques** pour caractériser l'attracteur de Lorenz, dont l'analyse est à la fois moins abstraite et plus simple, mais moins rigoureuse car les résultats sont issus de manipulations des équations sur ordinateur. C'est sur cette autre dimension, le calcul numérique, très présent dans ce travail de 1975, qu'il convient d'insister. Car les affirmations sur le système de Lorenz (hyperbolicité et sensibilité notamment)

"ont été obtenus numériquement par Lorenz et Lanford, en utilisant l'ordinateur. Malheureusement (heureusement pour les mathématiciens) les ordinateurs ne prouvent pas encore les théorèmes. C'est pourquoi je dois émettre quelques réserves, car, si je suis assez confiant sur les choses décrites précédemment, il n'y a encore aucune preuve, et les preuves pourraient être difficile à obtenir." [415]

Ainsi pour analyser le système de Lorenz, une application de Poincaré a été implémentée par Lanford : le résultat permet de visualiser le processus dynamique et de voir apparaître l'étirement et le repliement. Ce passage est déterminant pour préciser le comportement et il est très significatif de voir que ce sont les calculs à l'ordinateur qui autorisent les conclusions (qui sont plutôt des conjectures). L'expression "l'ordinateur nous dit que" [416] , employée lorsqu'il s'agit d'indiquer les traces du phénomène de repliement dans la

[412] Les lignes isoplèthes sont des lignes de niveau (X=constante). Li et Yorke ne s'intéressent pas à ces aspects là, mais à l'"application de Poincaré" construite par Lorenz.

[413] Ruelle le dit lui-même dans son article, [RUELLE, D., 1975], p. 151.

[414] [RUELLE, D., 1975], p. 150.

[415] ***"The facts mentionned above about the solution of (3) [Lorenz system] have been obtained numerically by use of a computer by Lorenz and Lanford. Unfortunately (fortunately for mathematicians) computers do not yet prove theorems. Therefore I must make the reservation that, while one is quite confident that things are as described above, there are non proofs yet, and proofs may be hard to obtain." [RUELLE, D., 1975], p. 151. O. Lanford est également remercié à la fin de l'article pour l'ensemble des résultats numériques qu'il a fourni pour ce travail.***

[416] "The computer tells us that […]" [RUELLE, D., 1975], p. 150.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

section de Poincaré numérique, est tout aussi significative. On rend ainsi compte, dans la rencontre entre les idées de Lorenz et de Ruelle, de l'important travail produit à l'ordinateur, des images en découlant et de l'atout que cela représente dans une situation mathématique extrêmement délicate.

Conclusion : 1975 est une étape

Cet épisode de 1975 s'inscrit dans la perspective de la Mécanique des fluides et de la turbulence, du point de vue mathématique. Le modèle de Lorenz est lui-même issu de considérations de la Mécanique des fluides et Ruelle s'exprime en termes de turbulence. L'année 1975 est une étape dans l'élargissement des considérations de Ruelle, qui petit à petit vont prendre le nom de chaos, même si "turbulence" et "chaos" restent très proches, surtout dans l'esprit de Ruelle. C'est aussi un prélude à plusieurs tendances, dont la première est l'utilisation de l'ordinateur, intermédiaire indispensable pour passer de situations très abstraites à des cas plus "concrets" mais également pour généraliser la notion d'attracteur étrange.

Enfin, à côté des attracteurs étranges, un autre concept prend de l'ampleur dès 1975 et va permettre de tisser des liens plus marqués entre ces problèmes de turbulence et les considérations sur les itérations. Il s'agit de la sensibilité aux conditions initiales, second concept clé dans l'évolution présente.

b. La sensibilité aux conditions initiales

La notion de "sensibilité aux conditions initiales" (SCI en abrégé) est déjà apparue de manière fugitive et à plusieurs reprises. May par exemple mentionne ce fait comme remarquable, sans en tirer de conséquences. Assurément, celui qui abonde le plus dans le sens d'une reconnaissance de la sensibilité aux conditions initiales est Ruelle. C'est en combinant les attracteurs étranges et la sensibilité aux conditions initiales qu'une importante notion de chaos, dont un synonyme sera "turbulence faible", va se développer pleinement.

Le meilleur exemple, annonciateur des positions de Ruelle, se trouve dans son introduction à la discussion du système de Lorenz en 1975. Il entame son propos par une discussion de la notion de turbulence, toujours en termes mathématiques, à partir de l'étude générale des équations différentielles :

"Le phénomène mathématique auquel il est référé est que, dans beaucoup de cas, les solutions de (1) ont un comportement asymptotique quand t # # qui apparaît erratique, chaotique, 'turbulent', et les solutions dépendent de manière sensible des conditions initiales." [417]

Ruelle ajoute la sensibilité car, dans le cas des mouvements quasi-périodiques, il affirme que le caractère "erratique, chaotique ou turbulent" peut apparaître en l'absence de

[417] ***"The mathematical phenomenon referred to is that <u>in many cases, solutions of (1) have an asymptotic behavior when t-> ∞ which appears erratic, chaotic, "turbulent", and the solutions depend in a sensitive manner on initial condition</u>.", [RUELLE, D., 1975], p. 146 (souligné dans le texte). (1) renvoie à une écriture générale d'un système différentiel : "dx/dt=X(x)".***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

sensibilité. La sensibilité aux conditions initiales joue donc pleinement dans sa notion de turbulence, prise au sens de mouvement non périodique. Les distinctions qu'il opère sont claires et renvoient à l'article de 1971 : il y a les comportements quasi-périodiques, non sensibles aux conditions initiales, et les comportements obtenus par perturbation de ceux-ci et qui sont sensibles aux conditions initiales. Ces comportements non périodiques sont associés à l'existence d'attracteurs étranges : on comprend ainsi qu'il recherche de la sensibilité aux conditions initiales dans le système de Lorenz [418] .

Lorsqu'il se dégage du strict plan mathématique, on voit aussi que Ruelle joue avec les mots chaos et turbulence. Ils ne désignent pas toujours un comportement bien précis mais servent à qualifier une impression : apparence erratique, apparence chaotique ou turbulente. On peut même constater que Ruelle connaît le "Period three implies chaos" de Li et Yorke tout en usant du mot chaos dans son sens le plus général et, d'une certaine manière, le plus classique.

A travers ce texte de 1975, les futurs liens très serrés entre chaos, turbulence, attracteurs étranges et sensibilité aux conditions initiales commencent à se tisser. La sensibilité aux conditions initiales et les attracteurs étranges entrent en jeu pour ne plus en sortir et pour devenir deux notions fondamentales. Ruelle revient d'ailleurs plus loin dans le texte sur cette question en rappelant que la sensibilité s'exprime également par une propriété de perte d'information sur les conditions initiales ou encore, en terme de fonction de corrélation $F(t)$, par la propriété : $F(t) \rightarrow 0$ exponentiellement lorsque $t \rightarrow \infty$ [419] .

Le physicien Yves Pomeau, dans son étude du système de Lorenz de 1976, marche dans les traces de Ruelle en considérant une même propriété de corrélation et en affirmant :

"Cette propriété signifie que, partant de deux conditions initiales très proches, après quelques temps, les deux points représentants les configurations seront très éloignés l'un de l'autre ; en d'autres termes le système 'oublie' avec le temps ses conditions initiales, ce qui est parfaitement compatible (ce point est souvent un point de mécompréhension) avec le caractère déterministe des équations du mouvement." [420]

Cette propriété des fonctions de corrélation apporte peu à sa discussion de l'attracteur de Lorenz. L'extrait pointe plutôt les aspects problématiques, les ambiguïtés et le trouble que la notion de sensibilité aux conditions initiales peut engendrer dans les esprits.

En parallèle, Ruelle se livre aussi à l'exercice de critique de certaines "conceptions infondées" qui émaillent les exposés scientifiques, de façon à accentuer encore l'enjeu de

[418] Ruelle formule même une conjecture pour le système de Lorenz : il existe une fonction de corrélation temporelle, qui tend vers 0 exponentiellement. Ceci exprime une sensibilité aux conditions initiales. [RUELLE, D., 1975], p. 152.

[419] [RUELLE, D., 1975], p. 152 (voir la note 418). Ruelle donne ces précisions dans le cas Axiome A.

[420] ***"This property means that, starting from two initial conditions very close to each other, then after some time the two representation points will be very far from each other, in other terms the systems "forgets" after some time its initial condition, which is perfectly compatible (this point is often a matter of misunderstandings) with the deterministic character of the equations of the motion." [HENON, M., POMEAU, Y., 1976], p. 35.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

la sensibilité aux conditions initiales. En particulier, selon le premier de ces préjugés "une source extérieure de 'bruit' est nécessaire pour expliquer l'apparente perte d'information dans un flot turbulent". Il assène un argument, dont le succès ne va pas se démentir : "La sensibilité aux conditions initiales semble expliquer tout ce qu'il y a à expliquer" [421] .

La notion de sensibilité aux conditions initiales a donc une grande importance pour Ruelle et elle intègrera très largement la notion de chaos, bientôt dominante, qu'il promeut. Cependant, elle n'est pas au premier plan et n'entre pas dans la définition de chaos pour Li et Yorke par exemple, pour Rössler et d'autres non plus, comme on le verra. S'il faut retenir un moment de basculement dans l'accentuation de la sensibilité aux conditions initiales, nous pourrions signaler la conférence de New York de 1977 : "Bifurcation theory and applications in scientific disciplines" [422] .

Avant son intervention David Ruelle est connu pour ses travaux, et, avant tout, pour l'article commun avec Floris Takens de 1971, que nul n'ignore à ce moment là. C'est au cours de ce colloque qu'il communique ses réflexions sous l'intitulé très suggestif : "Sensitive dependence on initial condition and turbulent behavior". Le titre retenu indique la place qu'il entend désormais donner à cette sensibilité aux conditions initiales, place déjà perceptible dans la précédente communication de 1975 et les considérations de 1971. Le contexte très particulier donne un écho important à la proposition.

Ici le raisonnement de Ruelle tend à associer sensibilité aux conditions initiales et turbulence, en montrant qu'elle **découle** de cette sensibilité, alors qu'elle n'était qu'un élément constitutif auparavant. En termes mathématiques, il donne la définition de la sensibilité aux conditions initiales :

"La sensibilité aux conditions initiales signifie que s'il y a un petit changement #x0 dans la condition initiale x0, le changement correspondant $\#x_t = f^t(x_0+\#x_0) - ft(x_0)$ de $x_t=f^t(x_0)$ croît et devient grand quand t devient grand. Plus précisément nous demandons une croissance exponentielle avec t." [423]

La turbulence conserve sa définition "standard". Il s'agit du comportement de x_t (état du système) lorsque :

"x_t ne sera ni asymptotiquement constant ni périodique, mais aura une aspect apparemment erratique." [424]

[421] Partie IV du texte : "Some misconceptions". "That an external source of "random noise" is necessary to explain the apparent loss of information in turbulent flow." ; "The sensitive dependence on initial condition seems to explain all what has to be explained.", [RUELLE, D., 1975], p. 153.

[422] Rappelons qu'elle est la première manifestation d'ampleur réunissant les spécialistes des problématiques de théorie des bifurcations, de turbulence, de "chaos" (dont ceux que nous avons déjà évoqués). Cf. p. 152.

[423] ***"Sensitive dependence on initial conditions means that if there is a small change δx_0 in the initial condition x_0, the corresponding change $\delta x_t = f^t(x_0+\delta x_0) - f^t(x_0)$ of $x_t=f^t(x_0)$ grows and becomes large when t becomes large. More precisely we require δx_t to grow exponentially with t.", [GUREL, O, ROSSLER, O.E., 1979], p. 409 (en italique dans le texte). f^t correspond à l'évolution temporelle du système.***

[424] ***"x_t will be neither asymptotically constant nor periodic, but will have an apparently erratic appearance.", [GUREL, O, ROSSLER, O.E., 1979], p. 413.***

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Plus précisément, Ruelle veut construire un raisonnement mathématique montrant que la présence de sensibilité aux conditions initiales conduit à un système turbulent. S'il ne prétend pas tout démontrer rigoureusement, il avance les grandes lignes du raisonnement justifiant ce rapprochement, dont on ne peut que constater l'extrême technicité mathématique. En outre, la turbulence, sous forme d'attracteur étrange, se manifesterait par un spectre continu de fréquences [425] , lui-même produit de la sensibilité aux conditions initiales. Ruelle ajoute qu'un tel spectre est le meilleur signe de sensibilité aux conditions initiales ; il serait difficile de la mettre en évidence expérimentalement autrement que par ce biais.

Présentée en 1977 et publiée en 1979, cette communication ancre la sensibilité aux conditions initiales au cœur de la problématique du chaos par l'intermédiaire de la turbulence, car, à la fin des années 1970, pour Ruelle, les termes chaos et turbulence sont utilisés alternativement pour désigner la manifestation d'attracteur étrange et de sensibilité aux conditions initiales. L'article "Les attracteurs étranges" en est le meilleur exemple. Ses articles plus techniques conservent néanmoins le terme turbulence, plus cohérent avec ses travaux antérieurs.

c. Questions d'ergodicité

Les deux éléments, attracteurs étranges et sensibilité aux conditions initiales, ne sauraient rendre à eux seuls toutes les facettes de la problématique de Ruelle au sujet de la turbulence. Il manque en particulier les questions d'ergodicité. Le texte de 1975, tournant vers l'ère du chaos, n'est pas qu'une interrogation sur la géométrie de l'attracteur de Lorenz : il est empreint d'interrogations sur l'ergodicité de ce genre de systèmes. La théorie ergodique des systèmes dynamiques appliquée à la turbulence est incarnée par la recherche des "mesures décrivant la turbulence" [426] , au sens de la théorie de la mesure, en mathématiques. Ceci mérite quelques explications.

Les enjeux de cette recherche de mesures sont mieux explicités dans ses articles ultérieurs [427] . Fondamentalement, ce sont les **propriétés statistiques** de ces systèmes dynamiques qui sont en question. Par exemple, pour un fluide modélisé par un champ de vitesse *v(t)* :

"Dans un régime turbulent, on s'attend à ce que v(t) soit distribué selon une loi de probabilité. Cette probabilité est définie par une mesure # sur H, invariante sous l'évolution temporelle, déterministe, du système." [428]

[425] Un phénomène quasi-périodique, outre qu'il n'est pas sensible aux conditions initiales, possède un spectre de fréquence formé de pics discrets aux fréquences caractérisant le mouvement. Voir par exemple, [RUELLE, D., 1980a], p. 133.

[426] "measure describing turbulence", [RUELLE, D., 1975], p. 153 en particulier.

[427] Tels que "What are the measures describing turbulence?" ([RUELLE, D., 1978a]) et "Measures describing a turbulent flow" ([RUELLE, D., 1980b]).

[428] ***"In a turbulent regime, one expects v(t) to be distributed according to some probability law. This probability law is defined by a measure ρ on H, invariant under the deterministic time evolution of the system.", [RUELLE, D., 1980b], p. 1.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

La recherche de Ruelle est donc axée sur la démonstration de l'existence de telles mesures et leur caractérisation. Il a déjà obtenu des résultats en la matière, avec son collaborateur Robert Bowen. Leur résultat "frappant", selon le mot de Ruelle, est un **théorème ergodique pour les flots Axiome A** [429] . C'est-à-dire qu'ils ont montré l'existence de mesures invariantes et ergodiques définies sur un attracteur du flot (il n'y a qu'un nombre fini d'attracteurs pour un flot Axiome A). Autrement dit, la "Mécanique statistique" de ces attracteurs est connue.

Ceci impose une modification du regard porté sur le texte de 1975. De la même manière que la notion d'attracteur étrange est rapprochée du système de Lorenz, Ruelle s'interroge sur l'ergodicité de l'attracteur de Lorenz et le transfert des résultats d'ergodicité des systèmes vérifiant l'Axiome A à une classe plus générale d'attracteurs. Les notions d'attracteurs, les propriétés ergodiques et l'interrogation sur la nature de la turbulence sont entièrement liées. Sa critique de la seconde des "conceptions infondées", à savoir l'idée selon laquelle la mesure invariante recherchée en turbulence est, en fait, approximativement Gaussienne, montre ces rapports étroits. Ruelle affirme en effet qu'une telle image de la turbulence est héritée des conceptions de Landau, où la turbulence est une superposition d'un très grand nombre de fréquences ; selon Ruelle, l'attracteur de Lorenz ne porte pas de mesure de ce type et réfute en quelque sorte l'idée d'une telle turbulence [430] .

Pour élargir encore la perspective dans laquelle il est indispensable d'inscrire les réflexions de Ruelle, on peut évoquer les travaux du mathématicien Bowen, qui sont, autant que ceux de Ruelle, connectés aux questions d'ergodicité. Il n'est pas question de détailler tous les résultats de Bowen à ce sujet [431] ; nous avons choisi un exposé de 1976 en particulier, insistant sur les "comportements statistiques des flots" [432] . Ces propos sont doublement intéressants. D'abord, Bowen montre les traits saillants de la problématique de l'ergodicité des systèmes dynamiques (pour un flot noté φ_t). "L'ergodicité est le premier pas dans l'étude statistique de φ_t" [433] : de la propriété d'ergodicité d'un flot découle l'existence d'une mesure invariante ; lorsqu'un flot est ergodique, ce sont les propriétés de cette mesure qui sont objet d'étude (définition d'une fonction de corrélation, par exemple).

Bowen suggère une classification sommaire du caractère aléatoire des flots, reposant sur la distinction de trois comportements :

[429] Ruelle l'évoque dans son texte de 1975 ("The following striking result holds", [RUELLE, D., 1975], p. 151). Le résultat en question est publié dans "Ergodic theory of Axiom A flows" : [BOWEN, R., RUELLE, D., 1975], qui est en voie de parution lorsque le texte sur l'attracteur de Lorenz.est rédigé.

[430] Ruelle cite les figures de l'attracteur de Lorenz comme preuve. Nous renvoyons au paragraphe "That a measure describing turbulence should be approximately Gaussian", [RUELLE, D., 1975], p. 153.

[431] On peut consulter une de ses synthèses sur la théorie ergodique (des flots Anosov) : [BOWEN, R., 1975].

[432] Lecture au séminaire sur la turbulence de Berkeley 1976-77. Voir [BOWEN, R., 1977], p. 117 : "This talk will be about the statistical behavior of flows".

[433] "Ergodicity is the first step in the statistical study of φ_t", [BOWEN, R., 1977], p. 122.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

• Le comportement trivial : un lancé de dé qui donnerait toujours "pile". Un point fixe ou une orbite fermée possède ce genre de propriété statistique.

• Le comportement monotone : une rotation d'un angle α non commensurable avec π, ce qui correspond aussi à un flot irrationnel sur le tore.

• Le hasard : un jeu de pile ou face, non biaisé. Bowen inclut l'attracteur de Lorenz, les attracteurs Axiome A, certains billards dans cette catégorie.

Ces distinctions laissent apparaître qu'il y a une certaine hiérarchie dans les comportements aléatoires. L'étude de l'ergodicité des flots, de leurs mesures invariantes, vise à préciser quelle dose de hasard se trouve dans un flot donné. L'enjeu des recherches et leur ampleur sont ainsi plus complètement spécifiés.

Deuxièmement, Bowen propose de modéliser une expérience de Mécanique des fluides, un flot de Couette, pour lequel une série de données (fréquences dominantes dans un spectre de Fourier) a été obtenue, pour différentes valeurs des paramètres du système [434] . L'ergodicité joue un double rôle. Elle sert à justifier le calcul des fonctions de corrélation du signal relevé sur l'expérience, et donc le calcul du spectre de Fourier déterminé. L'ergodicité est aussi naturellement une propriété à rechercher dans les modèles, construits sous forme de flots, susceptibles de représenter les données expérimentales. La problématique de l'ergodicité a donc plusieurs facettes, brièvement résumées ici, mais dont nous aurons à préciser la longue histoire.

Désormais, il est clair que l'article de Ruelle de 1975 n'a plus le même sens si nous omettons toute cette interrogation sur les propriétés statistiques de la dynamique turbulente, prenant pleinement en compte les aspects dynamiques "déterministes". Parallèlement, les propositions de Ruelle faites au colloque de New York de 1977, incluant une option sur la sensibilité aux conditions initiales, pèsent davantage. L'exposé exprime la démarche de Ruelle et présente avec plus de maturité les relations entre attracteurs étranges, sensibilité aux conditions initiales et théorie ergodique. Ces relations avaient été entr'aperçues en 1975, elles sont plus réfléchies, plus assurées. Nous pouvons même affirmer que le texte de 1977 est programmatique : il annonce la voie de recherche suivie au sujet de la turbulence. D'une certaine manière les textes de 1978, la conférence de New York en 1979 découlent de cette problématisation de 1977. Pour pousser jusqu'au bout cette interprétation, il conviendrait peut-être de minorer l'importance du texte de 1975 **dans les recherches de Ruelle**. C'est une sorte d'épiphénomène dans les recherches de Ruelle, mais qui a des conséquences immenses puisque le champ du chaos se fonde sur cette proposition, ce que nous sommes en train de montrer [435] .

On peut ajouter à cela que, de 1975 à 1980, il y a une évolution significative de la voie de recherche de Ruelle. En effet, si en 1975 la géométrie de l'attracteur de Lorenz

[434] Il s'agit des expériences de Gollub, Swinney et Fenstermacher : [GOLLUB, J.P., SWINNEY, H.L., 1975], [FENSTERMACHER, R., SWINNEY, H.L., GOLLUB, J.P., 1977].

[435] Ceci pourrait paraître paradoxal, mais nous ne le pensons pas car il faut bien distinguer les travaux de Ruelle de leurs conséquences.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'avait attiré, en 1980, sa position est différente :

"Il a été prouvé que l'idée d'attracteur étrange est physiquement pertinente et fructueuse, mais leur étude géométrique directe est difficile et décourageante. La théorie ergodique a fourni une approche plus payante [...]" [436]

Ainsi, l'attracteur étrange est le support de la turbulence, mais ce sont ses caractéristiques statistiques plutôt que géométriques qui font l'objet d'attention, au moins dans le contexte de 1980. La perspective ergodique prime, ce qui renforce notre lecture du texte de 1975. Nous sommes face à un double phénomène. D'une part, sous l'impulsion des propositions de 1971, il se produit vers 1975 un changement dans les orientations de recherche, avec le rapprochement des idées d'attracteurs étranges, de sensibilité aux conditions initiales et de théorie ergodique. D'autre part, une certaine inertie et continuité avec des problématiques de Mécanique statistique mathématique, de théorie ergodique se fait jour.

Jusqu'à présent, la turbulence selon Ruelle et la notion de chaos de Li et Yorke se sont côtoyées. Quels sont les rapports entre les deux ? Ils pourraient sembler ténus, vu le ton léger adopté par Ruelle au sujet du chaos. On peut imaginer un simple rapprochement de circonstances entre turbulence et chaos, dans une vague favorable à de nouvelles conceptions sur la dynamique. Pourtant, les liens sont très marquants, profonds et plus remarquables que les petites touches esquissées jusque-là.

d. Entre le chaos selon Li et Yorke et la turbulence.

Questions de systèmes dynamiques

Tout d'abord, nous remarquerons que le travail de Li et Yorke, et les études des itérations plus généralement, ont leur place dans l'analyse de Ruelle : selon lui, ils permettent de mieux appréhender le système de Lorenz, à travers l'étude de ces orbites périodiques [437] .

D'un point de vue technique, le lien entre les résultats de Li et Yorke sur les itérations, d'une part, et les conceptions de Ruelle sur les attracteurs étranges et le système de Lorenz, d'autre part, est assuré par un outil mathématique : les sections de Poincaré (et l'application de premier retour construite sur la base d'une section). A un flot continu, comme une équation différentielle, correspond ainsi une itération. S'il s'agit d'une équation différentielle à trois variables (comme le système de Lorenz), l'application de premier retour sera une itération du plan (i.e. à deux dimensions). Li et Yorke se sont limités aux itérations unidimensionnelles, mais grâce à des approximations ou des cas limites d'applications à deux dimensions, il est possible d'utiliser marginalement leurs résultats.

Par ailleurs, il faut bien comprendre que le cadre général est celui des

[436] ***"The idea of strange attractors has proved physically relevant and fruitful, but their direct geometrical study is discouragingly difficult. Ergodic theory has provided a more rewarding approach […]", [RUELLE, D., 1981a], p. 36.***

[437] [RUELLE, D., 1975], p. 151. L'article de Li et Yorke [LI, T.-Y., YORKE, J., 1975] n'est pas encore publié, mais le résultat est connu de Ruelle.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

mathématiques des systèmes dynamiques : une équation différentielle ou une itération ne sont que des incarnations particulières de l'objet mathématique système dynamique. Ce cadre général, nous le verrons, est issu d'une longue tradition de mathématiques, dans laquelle Smale a eu une influence déterminante. Ceci explique les allers-retours, les inspirations cherchées dans l'un ou l'autre cas et les extensions proposées [438].

Les perspectives d'étude de l'ergodicité sont également présentes dans les deux types de travaux. Fondamentalement, il s'agit d'étudier les caractéristiques statistiques des comportements dynamiques, pour les itérations dans un cas, pour les systèmes dynamiques du type des équations différentielles dans l'autre. Le lien entre la théorie ergodique, c'est-à-dire les moyens théoriques, mathématiques, de caractériser l'ergodicité des systèmes dynamiques, et le chaos dans les itérations est saisissant dans cette citation de 1977 :

"Les résultats rapportés pourraient éclairer le fait remarquable que de simples processus déterministes apparaissent comme étant chaotiques. Le chaos a besoin d'une description probabiliste. Il est donc nécessaire de trouver la connexion entre le processus dynamique et sa distribution de probabilité et corrélations." [439]

Pour mieux saisir le rapport avec les notions de chaos de Li et Yorke, un rapide retour sur leur article s'impose.

L'ergodicité dans les itérations

"Period three implies chaos" est pris dans un réseau de résultats du type de la théorie ergodique des itérations, comme les réflexions de Ruelle s'inscrivent dans la problématique plus générale de la théorie ergodique des systèmes dynamiques. Les résultats de la théorie ergodique permettent à Li et Yorke de préciser les propriétés asymptotiques et statistiques des $\{F^n(x)\}$, ce qui est le principal sujet de leurs investigations. Ainsi, leur dernier paragraphe est consacré aux "Propriétés statistiques de $\{F^n(x)\}$".

En quelques mots, Li et Yorke procèdent à l'application de quelques théorèmes d'ergodicité sur les itérations. Pour cela "le sujet de la théorie ergodique, qui étudie des transformations sur des espaces généraux, motive la définition suivante". Il s'agit de la **densité** g de x, définie à partir de la **fraction limite** [440] φ comme :

[438] La grande familiarité de Ruelle avec ces objets se lit aussi dans ses propositions d'extension des propriétés des flots Axiome A (par exemple, leurs mesures invariantes et ergodiques, leurs attracteurs et bassins d'attraction) au cas d'un système dynamique différent, celui de Lorenz. Sa conviction repose en partie sur ces acquis.

[439] ***"The results reported may shed some light on the remarkable fact that simple deterministic processes may physically appear as being chaotic. Chaos needs a probabilistic description. It is then necessary to derive the connection between the dynamical process an dits probability distribution and correlations.", [GROSSMANN, S., THOMAE, S., 1977], p. 1362 (nous mettons en évidence). L'article traite des distributions statistiques des itérations discrètes à une dimension.***

[440] La fraction d'itérés de x $\{x, F(x)...F^{N-1}(x)\}$ dans $[a_1, a_2]$ est notée $\varphi[x, N, a_1, a_2]$. La fraction limite est $\varphi[x, a_1, a_2]=\lim_{N\to\infty} \varphi[x, N, a_1, a_2]$. [LI, T-Y., YORKE, J., 1975], p. 989.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

$$\varphi[x,[a_1,a_2]] = \int_{a_1}^{a_2} g(y)dy \quad \text{pour tout } a_1, a_2 \text{ dans l'intervalle J, } a_1 < a_2$$

Ceci donne des indications sur la répartition asymptotique des itérés $\{F^n(x)\}$. Si $L(x)$ est l'ensemble des points limites de $\{F^n(x)\}$, Li et Yorke montrent que, pour une certaine classe de fonctions [441] F, $J_\infty = \{y ; g(y)>0\}$ est un intervalle et pour presque tous les x, $L(x)= J_\infty$. Ce résultat est publié dans un autre article des mêmes Li et Yorke : "Ergodic transformations from an interval into itself", sorti en 1978 (on aura compris que le résultat est déjà obtenu en 1975). En sus du travail de Li et Yorke, l'article de Lasota et Yorke, de 1973, encadre les considérations statistiques [442]. C'est le premier article montrant l'existence de mesures invariantes pour certaines classes d'applications F de l'intervalle [0,1], comme l'application "tente" par exemple. Ce résultat est utilisé dans la preuve du résultat présenté dans le paragraphe sur les propriétés statistiques de $\{F^n(x)\}$ et naturellement dans l'article de 1978.

Les résultats de Grossman et Thomae, dont nous avons tiré la précédente citation, "Le chaos a besoin d'une description probabiliste", nous permettent de mieux saisir encore le rapport entre chaos et ergodicité. C'est un article de théorie ergodique des itérations.

Leur article de 1977 repose sur les deux mêmes résultats de Lasota et Yorke (1973) et Li et Yorke (1978, obtenu en prétirage). Ils s'articulent autour des mêmes problèmes d'existence et d'unicité des densités invariantes, des fonctions de corrélations et leurs relations avec les caractéristiques des fonctions F.

Une première grande partie traite des processus ergodiques [443], puis ils introduisent une notion de "chaos pur" : "Si, non seulement la loi dynamique, mais toutes ses itérées sont ergodiques, nous qualifions le système de purement chaotique" [444]. Ils réalisent des simulations numériques sur l'application logistique. Qualitativement, leurs résultats sont similaires aux idées de Li et Yorke : en règle général, il y a une coexistence entre des orbites périodiques et ergodiques. Leur analyse repose sur l'étude des densités invariantes et les fonctions de corrélations, des outils de la théorie ergodique permettant de préciser ces mélanges de structures. Ceci augure de "la description probabiliste du chaos".

Grossman et Thomae se donnent des méthodes pour calculer cette densité, numériquement, sur ordinateur, puis étudient le cas de l'application logistique, selon différentes valeurs du paramètre : les outils permettent d'évaluer la transition des

[441] Ce sont les fonctions qui vérifient surtout l'inégalité :

[442] Les deux articles en question sont : [LASOTA, A., YORKE, J., 1973] et [LI, T.-Y., YORKE, J., 1978].

[443] Ils définissent l'ergodicité par l'existence d'une densité invariante (L^1-intégrable) générant une mesure absolument continue ([GROSSMANN, S., THOMAE, S., 1977], p. 1353).

[444] "If not only the dynamical law itself but also all of its iterate are ergodic, we call the system purely chaotic.", [GROSSMANN, S., THOMAE, S., 1977], p. 1361.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

comportements, dans l'application logistique, du périodique vers du "chaos pur". En faisant varier le paramètre *a* de 1 à 4, ils observent un phénomène de doublement de période, puis une valeur critique (3,5699456…) pour laquelle il y a un "chaos pur", et au-delà, des états "mixtes" (coexistence d'orbites périodiques et ergodiques). Les densités invariantes et les fonctions de corrélations permettent de visualiser et de mesurer ces superpositions de structures.

Le chaos entre ergodicité et attracteurs étranges

La rencontre des problèmes du chaos et de la turbulence ne tient donc pas seulement d'une rencontre de circonstances, limitée à une opération de récupération du système de Lorenz par Ruelle au profit des attracteurs étranges ou par Li et Yorke pour leurs études des itérations. Il y a une grande proximité conceptuelle, due en partie à la forte présence des mathématiques des systèmes dynamiques. La problématique de l'ergodicité de la dynamique rapproche les deux thématiques, et apparaîtra à plusieurs reprises au cours des discussions à venir [445]. Tout ceci contribue à la formation des embryons de conceptions de chaos qui se structurent avec les propositions de Li, Yorke et Ruelle.

Nous avons ainsi montré comment, sous l'impulsion de Ruelle, les attracteurs étranges, la sensibilité aux conditions initiales et la problématique de l'ergodicité sont entrés au coeur de la turbulence d'abord, pour se prolonger dans le champ du chaos après 1975. Le résultat de Li et Yorke a contribué à ce mouvement, même si ce n'est pas une contribution majeure, et en a également bénéficié.

L'importance du travail de Ruelle tient aussi à l'effort de recherche qu'il va susciter. Ainsi, de même que les propositions de Li et Yorke sont reprises et discutées, les notions de sensibilité aux conditions initiales et d'attracteurs étranges font l'objet de nombreuses analyses. Les intuitions et la démarche de Ruelle sont prolongées de manière spectaculaire, contribuant à renforcer les tendances souhaitées par celui-ci. Plusieurs de nos paragraphes, et, en fait, pratiquement tout ce qui est discuté dans cet épisode 1975-82, abordent ces prolongements. Nous commencerons par montrer l'importance prise par la question des attracteurs étranges.

e. Les attracteurs étranges : des objets mathématiques

Implicitement, plusieurs leçons sont tirées de l'analyse de Ruelle, au sujet des attracteurs étranges et de l'attracteur de Lorenz en particulier, par tous ceux qui viendront ajouter leur touche personnelle à la perspective générale : les objets attracteurs étranges ne sont pas que des abstractions mathématiques, ils sont analysables, moyennant l'utilisation de l'ordinateur. Plus que cela, il est légitime de les analyser de cette manière. Plusieurs scientifiques s'engagent dans la voie de l'étude des attracteurs étranges. Nous allons montrer comment la perspective initiée par Ruelle se développe et se mue en des analyses numériques et théoriques des attracteurs étranges. De nouveaux objets mathématiques sont construits et l'effort d'analyse participe ainsi activement à la

[445] Afin de saisir l'ampleur de la problématique, nous mentionnons le paragraphe dédié au texte de B. Chirikov (p. 211), à celui de R. Helleman (p. 229), aux exposants de Lyapounov (Chapitre 4, p. 284), aux notions d'entropie (Chapitre 4, p. 291).

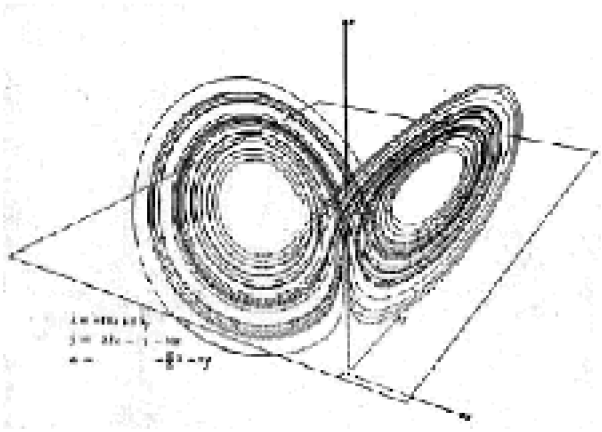
Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

constitution du champ du chaos. Les propositions de Ruelle suscitent des échos en France et outre-Atlantique surtout.

Aux Etats-Unis, R. Williams et J. Guckenheimer

Ainsi le séminaire "From numerical analysis to Strange Attractors" (rebaptisé "Turbulence seminar" pour la publication de quelques exposés présentés), organisé à l'automne 1976, à Berkeley, s'inscrit dans cette perspective [446] . Les exposés et les débats se concentrent sur la turbulence, à savoir les théories et les modèles de la turbulence, l'impact des systèmes dynamiques et la place du calcul numérique.

Parmi les travaux publiés, Lanford donne quelques images de l'attracteur de Lorenz [447] .



"Computer pictures of the Lorenz attractor" dans [BERNARD, P., RATIU, T.S., 1977], p. 113.

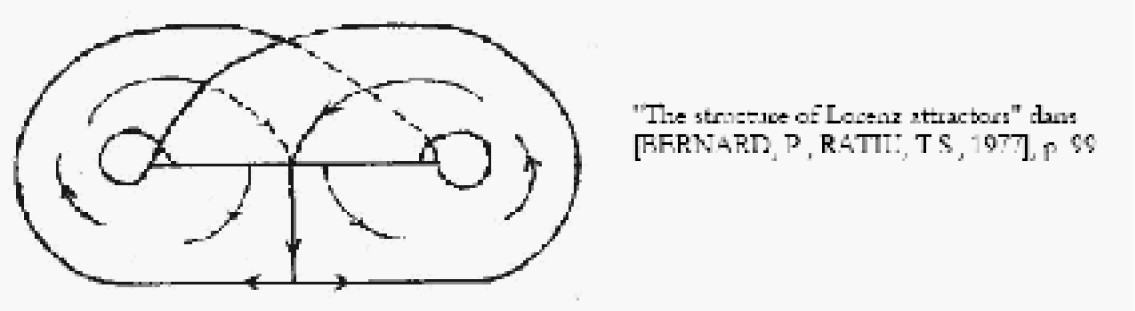
Si elles ne sont guère plus qu'une illustration supplémentaire de l'analyse produite avec Ruelle, le travail de Robert F. Williams est, lui, beaucoup plus intéressant. Il concerne la "structure de l'attracteur de Lorenz" et se veut une analyse **qualitative**, **topologique** de cet attracteur. L'objectif est de montrer "rigoureusement" que l'attracteur a la forme de la "variété branchée" [448] :

[446] Le développement historique nous montrera que la mise en place d'un tel à séminaire à Berkeley est tout sauf un hasard : c'est là que Smale a fait école. Ruelle s'étant inspiré des travaux de Smale, ce séminaire est une sorte de retour aux sources. Au chapitre 6 (page 446 notamment), nous évoquerons les rapports intellectuels, personnels entre Ruelle et Smale, ainsi que les rapprochements entre l'IHES et les mathématiciens de Berkeley, de manière générale.

[447] Ajoutées après le séminaire, pour la publication uniquement. Pour les images : [BERNARD, P., RATIU, T.S., 1977], p. 113-117.

[448] "branched manifold". Voir [BERNARD, P., RATIU, T.S., 1977], p. 111. La figure se trouve page 99.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est



Deux remarques s'imposent. Malgré la volonté de rigueur de Williams, il laisse comprendre que nombre des résultats annoncés alors, ne sont pas prouvés et reposent uniquement sur des calculs numériques. En outre, on ne peut qu'être frappé de la similarité avec l'idée de Rössler de construire des "modèles en papier" des attracteurs étranges [449] . La différence se situe, non dans le résultat final souhaité, mais dans la démarche proposée : si pour Rössler l'intérêt tient à leur grande heuristique, Williams entend lui démontrer ses idées mathématiquement, c'est-à-dire dépasser le stade des calculs à l'ordinateur et utiliser les mathématiques des systèmes dynamiques. On ne manquera pas de signaler que les deux scientifiques n'ont pas de connaissance mutuelle de leurs travaux en 1976 [450] .

Comme Williams l'annonce alors, sa recherche sur les attracteurs de Lorenz prendra, de 1976 à 1980, une tournure de plus en plus mathématique. La structure, la stabilité structurelle des attracteurs, l'ensemble des orbites périodiques, la dynamique symbolique, sont étudiés [451] . L'article publié tardivement en 1983 (mais achevé en 1980) avec Joan Birman livre une synthèse de ces éléments [452] et s'aventure davantage sur le terrain de la théorie des nœuds, afin de décrire au mieux la structure et l'agencement relatif des orbites périodiques des équations de Lorenz. Il est manifeste que l'étude approfondie du système de Lorenz selon Williams fait appel à de multiples domaines des mathématiques, beaucoup plus encore que l'embryon d'étude de Ruelle de 1975 sur le même système, tout en s'inscrivant dans la perspective inaugurée par ce dernier (pour les aspects

[449] Le chapitre 4 consacre une analyse complète aux travaux de Rössler. Pour le détail sur les "modèles papiers", voir en particulier p. 258.

[450] Dans son paragraphe intitulé "History", Williams n'indique alors que trois sources : Lorenz lui-même, le travail de Ruelle de 1975 et celui de Guckhenheimer. Ibid., p. 111. L'allusion à Lorenz est un peu déroutante : il prétend trouver chez Lorenz une intuition de la figure présentée. L'article de 1963 de Lorenz montre, en effet, une image ressemblant à cette figure. Elle est le résultat de calculs numériques, selon un procédé de type ligne de niveau ("isopleth", qui sont des procédés courants en météorologie : rappelons que Lorenz est météorologue), et était destinée à donner une idée générale de la géométrie de l'espace des phases. Lorenz décrit effectivement que deux surfaces coexistent, et pose le problème de l'arrangement relatif des deux surfaces. Mais l'idéalisation est de l'initiative de Williams principalement et non une idée suggérée par Lorenz. Voici l'image de [LORENZ, E.N., 1963], p.138

[451] On mentionne les deux articles principaux : [GUCKENHEIMER, J., WILLIAMS, R.F., 1979] (sur la stabilité structurelle de l'attracteur de Lorenz), [WILLIAMS, R.F., 1979].

[452] [BIRMAN, J.S., WILLIAMS, R.F., 1983].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

géométriques, non les aspects ergodiques).

Son compatriote, John Guckenheimer suit une démarche analogue dans son analyse de 1976 "A strange, strange attractor". Ils collaborent par la suite pour l'étude de la stabilité structurelle de l'attracteur de Lorenz. L'objet de l'étude de 1976 est de construire un attracteur étrange, inspiré par les résultats numériques de Lorenz. Il s'agit de définir une procédure de construction d'un système dynamique ayant les propriétés topologiques de l'attracteur de Lorenz. En un sens, la démarche est inverse à l'analyse du système de Lorenz. Grâce à un procédé de Smale, il construit une classe d'attracteurs au nom générique d'"attracteurs de Lorenz".

Deux exemples français : Yves Pomeau et Michel Hénon

La même année, en France, l'attracteur de Lorenz est analysé par le physicien Yves Pomeau qui réalise une série de calculs numériques avec J.L. Ibanez. L'analyse produit une sorte de complément au travail de Ruelle (et Lanford) présenté en 1975, elle en est directement inspirée [453] . Ce sont l'attracteur de Lorenz, c'est-à-dire celui correspondant aux équations différentielles originales, et sa structure géométrique qui les intéressent. Pomeau et Ibanez combinent leurs calculs numériques avec les résultats d'une analyse mathématique, reposant sur l'utilisation de sections de Poincaré. Etirement, repliement, sensibilité aux conditions initiales sont amenées naturellement dans ce contexte à propos de l'attracteur de Lorenz. On ne peut que constater la proximité des résultats de Pomeau (et Ibanez), Ruelle (et Lanford) et Rössler [454] sur ce thème de l'attracteur de Lorenz. Au passage, il faudrait remarquer que si l'analyse est finalement très mathématique, Pomeau et Ibanez suivent, en un sens, une démarche de physicien, expérimentant le système de Lorenz numériquement, grâce à un calculateur analogique [455] .

Deux ouvertures sont amenées spécifiquement par ces expériences. Elles permettent de mettre en évidence un comportement singulier du système de Lorenz : il existe une transition, caractérisée par une valeur critique des paramètres du système, pour laquelle le système bascule d'une position attracteur étrange à une configuration en cycle limite. L'importance en sera révélée par Pomeau lui-même (et un collaborateur, Paul Manneville) à travers le "scénario" de l'intermittence, proposé en 1979.

La seconde voie suggérée par Pomeau et Ibanez est l'idée de réaliser des systèmes

[453] Pomeau fait aussi référence à René Thom, et s'inscrit dans la perspective des mathématiques des systèmes dynamiques. [HENON, M., POMEAU, Y., 1976], p. 30. D'après D. Aubin, sa relation aux systèmes dynamiques est très marquée : "By 1976, Yves Pomeau had arrived at the same kind of coherent picture of chaotic behavior and turbulence as Ruelle or Martin. As opposed to Martin, however Pomeau adopted a more mathematical language inspired by Thom's catastrophe theory, Smale's dynamical systems theory, but also abstract ergodic theory" [AUBIN, D., 1998a], p. 668.

[454] Cf. chapitre 4 pour les travaux de Rössler. Si Pomeau connaît vraisemblablement le travail de Ruelle très tôt, en revanche, il semble tout ignorer de Rössler. Pomeau cite la contribution de Ruelle (et Lanford) en 1976 dans [HENON, M., POMEAU, Y., 1976], p. 31.

[455] Au sujet du scénario d'intermittence, le chapitre 5 (p. 360) apportera plus de lumière. Quant au calcul numérique et aux "expériences numériques" des physiciens nous en faisons une analyse détaillée aux chapitres 8 et 9.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

dynamiques plus simples encore que celui de Lorenz, mais présentant des caractéristiques similaires, et qui permettraient de prouver plus clairement des "évidences" mises en lumière par les calculs numériques. Puisque le raisonnement repose sur la section de Poincaré il propose de produire une application du plan dans lui-même, plutôt qu'une équation différentielle, imitant le comportement de Lorenz et son attracteur étrange. Il en construit une de manière *ad hoc* qui permet de mieux fonder son raisonnement.

L'astronome Michel Hénon exploitera cette suggestion, pour obtenir un système très simple. Celui-ci est présent au séminaire de Nice (sur la turbulence), en janvier 1976 lorsque Pomeau expose justement cet aspect de ses réflexions. La familiarité de Hénon avec les applications du plan dans lui-même, lui permet de réagir rapidement et de produire un système très simple donnant un attracteur étrange [456]. Il est connu depuis sous le nom de système de Hénon [457] et correspond à l'application suivante :

$$\begin{cases} x_{i+1} = y_i + 1 - a.x_i^2 \\ y_{i+1} = b.x_i \end{cases}$$

où *a*, *b* sont des constantes (il aurait un attracteur étrange pour les valeurs a=1,4 et b=0,3 ; voir les figures ci-dessous).

Il est intéressant de saisir que c'est le démontage du système de Lorenz par Pomeau qui emmène Hénon vers son système. L'étirement et le repliement sont des éléments qui guident Hénon. Le choix des valeurs des paramètres est plus approximatif et c'est par tâtonnements que des valeurs adéquates de *a* et *b* sont retenues.

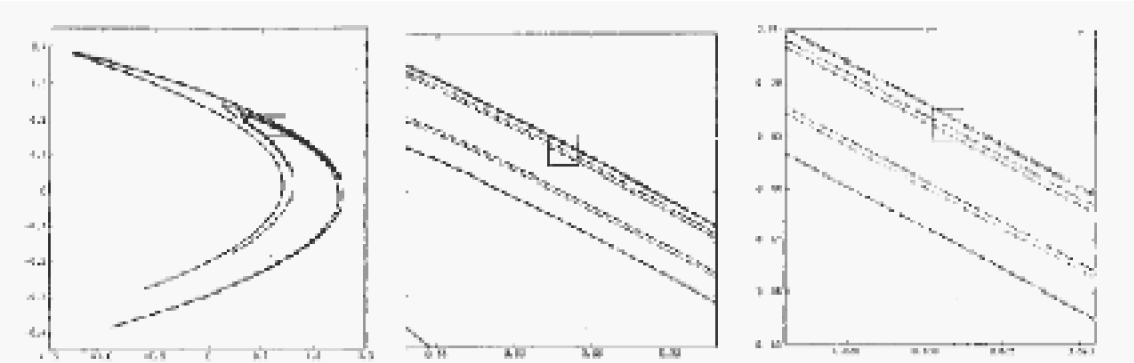
Tout l'intérêt du système de Hénon réside dans la facilité de programmer cette opération extrêmement simple, une itération à deux dimensions, simulant les comportements plus complexes des systèmes du type Lorenz [458]. Il devient un système numérique de référence, une sorte de modèle sur lequel un maximum de conjectures sont testées numériquement, comme le système de Lorenz qui a fait l'objet de nombreuses expériences numériques déjà en 1976 et continu de l'être, en parallèle du système de Hénon. Ainsi l'attracteur de Hénon est manipulé et les ensembles de Cantor sont visualisés avec leur structure auto-similaire [459].

[456] Hénon s'exerce sur les itérations depuis les années 1960, notamment sur le célèbre système de Hénon-Heiles. Nous renvoyons au chapitre 7 (p. 494) et au chapitre 9 (p. 573) pour plus d'éléments d'analyse.

[457] La première publication du résultat est [HENON, M., 1976], laquelle est reproduite quasiment à l'identique dans l'article "commun" de Hénon et Pomeau : [HENON, M., POMEAU, Y., 1976]. La première version a été publiée par l'intermédiaire de Ruelle, à qui la nouvelle fût portée par Uriel Frisch, un spécialiste de la turbulence à l'Observatoire de Nice (où travaille Hénon). C'est le même Frisch qui a demandé à Hénon de republier le résultat avec Pomeau. Entretien avec Michel Hénon, 17 mars 2004.

[458] Les calculs sont suffisamment simples pour qu'ils puissent être effectués par Hénon sur un ordinateur de poche (HP-65). L'exploration détaillée s'est faite sur IBM 7040 avec une précision nécessairement accrue. [HENON, M., 1976], p. 76.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est



Agrandissements successifs dans l'"attracteur de Hénon"
[HENON, M., 1976], p. 74-76.

D'autres comportements sont mis en évidence. Pour *b*=0,3 par exemple, la forme de l'attracteur évolue de manière significative selon les valeurs de *a* : pour *a* petit, l'attracteur est un point, et lorsque *a* augmente il se transforme successivement en 2 points, puis 4, 8 et ainsi de suite par doublement [460] . Hénon rapproche la situation de celle évoquée par May en 1976, et annonce l'existence d'une valeur critique a_c=1.06 pour laquelle il affirme obtenir un attracteur étrange.

Cet exemple illustre également les problèmes posés par une analyse à base de calculs numériques. L'ensemble de Cantor, l'attracteur étrange du système, ne sont que le résultat de calculs et un doute est émis quant à l'existence mathématique de l'objet : ne pourrait-il s'agir d'une orbite de période très longue plutôt que d'une non périodicité ? C'est une réflexion du mathématicien Sheldon Newhouse [461] qui jette le doute. Deux pistes d'analyse peuvent être suivies pour répondre à l'interrogation : soit s'engager dans une analyse mathématique, avec des outils très évolués pour démontrer l'existence ou non de l'ensemble de Cantor, soit rester dans la voie numérique pour déterminer l'éventuelle période de cette orbite de période très longue. Mais cette seconde voie débouche sur un écueil : les erreurs de calcul et d'arrondis, inévitables, empêchent l'évaluation numérique de la période [462] .

C'est là un problème très général avec les attracteurs étranges, amené par la proposition de Ruelle et non résolu depuis : il n'existe aucune preuve mathématique de

[459] [HENON, M., 1976], p. 75. Hénon montre qu'à travers différents zooms sur la figure, la structure en bandes parallèles se reproduit à tous les niveaux de grossissements.

[460] Notes du séminaire donné à l'Observatoire de Besançon, le 18 janvier 1977, intitulé "Les attracteurs étrangers". Archives personnelles de M. Hénon.

[461] L'article de Newhouse circule sous forme de prétirage entre 1977 et 1980 et il est publié dans [NEWHOUSE, S., 1980].

[462] [CURRY, J.H., 1979a], p. 130 : en calculant des itérés d'une même condition initiale, sur deux machines différentes (CDC 7600 et CRAY-1) avec 14 chiffres significatifs, Curry a observé qu'à la 60ième itération, les deux résultats n'ont plus rien à voir l'un avec l'autre. Il procède ensuite à une analyse du taux d'erreur, de son importance dans les calculs sur le système de Hénon, pour mettre en doute la possibilité de détecter des périodes trop longues. Voir la note complémentaire n° p. 233.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

leur existence, seulement des indications numériques (graphiques), même pour les plus étudiés d'entre eux [463] . Cela signe une certaine "limite" aux expériences numériques dans le domaine. Un seul système fait exception, celui construit par René Lozi [464] , mathématicien à l'université de Nice, à partir de l'attracteur de Hénon :

$$\begin{cases} x_{i+1} = y_i + 1 - a.|x_i| \\ y_{i+1} = b.x_i \end{cases}$$

Il est un peu plus simple que les autres et le mathématicien Michal Misiurewicz est parvenu à démontrer, grâce aux outils des systèmes dynamiques, l'existence effective de l'attracteur étrange [465] .

Ces quelques exemples nous montrent l'épanouissement de la notion d'attracteur étrange, à la frontière des analyses numériques et des mathématiques des systèmes dynamiques. L'ensemble de Cantor est visualisé sur l'attracteur de Hénon et le travail numérique réalisé sur ce système est peut-être encore plus spectaculaire que ce qui touche à l'attracteur de Lorenz. En revanche, il existe des études de mathématiques avancées, une perspective topologique sur l'attracteur de Lorenz dès 1976, alors que l'attracteur de Hénon n'a pas encore été proposé ni publié.

Les attracteurs étranges dans le champ du chaos

Le sujet des attracteurs étranges prend de l'importance. L'objet est un objet mathématique, maintenant détaché des considérations de turbulence dans lesquelles il est né. Les multiples analyses et constructions montrent que les recherches à ce sujet tendent à s'autonomiser en un thème de mathématiques numériques. Cette activité est aussi le point de départ de nouvelles problématiques. Les questions d'évolution des attracteurs lorsque les paramètres du système varient et le "scénario" d'intermittence suggéré par les observations mathématiques illustrent cette nouveauté. Nous aurons l'occasion d'ajouter de nombreux exemples pour conforter notre analyse.

De cette manière, les attracteurs étranges constituent un axe de recherche du champ du chaos en train de se constituer et pèsent sur les conceptions de chaos. Mais il nous faut également nuancer ces affirmations, car dès lors qu'il s'agit de systèmes **conservatifs**, la question des attracteurs étranges n'est plus aussi pertinente. Le développement du chaos pour ces systèmes nous montrera l'ampleur prise par la problématique du chaos et comment les thèmes de la sensibilité aux conditions initiales, de l'ergodicité et des mathématiques des systèmes dynamiques dominent encore plus

[463] L'existence mathématique de l'attracteur de Lorenz a été prouvée en l'an 2000. L'annonce et quelques détails sur la méthode employée peuvent se trouver dans [LOZI, R., 2000].

[464] [LOZI, R., 1978], présenté au colloque de Nice de 1977.

[465] Sa contribution ("Strange attractors for the Lozi mappings") dans la conférence de New York en 1979 [HELLEMAN, R.H.G., 1980a], p. 348-358.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

largement.

3.3. Le chaos dans les systèmes conservatifs

a. Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Une distinction très importante au sein des systèmes dynamiques a été reléguée en arrière-plan jusqu'à présent. Il s'agit de la différentiation entre les systèmes conservatifs et les systèmes dissipatifs. Les premiers sont caractérisés par l'existence d'une quantité, fonction des variables du système, se conservant au cours du mouvement ; les systèmes Hamiltoniens rentrent dans cette catégorie. D'ailleurs, à l'exception de quelques systèmes particuliers, ce sont les seuls systèmes conservatifs généralement considérés [466] .

En étant très schématique, nous dirons que les systèmes conservatifs sont au cœur de la Mécanique classique (Mécanique céleste en particulier) et de la Mécanique statistique, et que les systèmes dissipatifs sont appropriés à la description des phénomènes physiques où il y a justement des sources de dissipation d'énergie, par frottement par exemple. La turbulence, entre autres, telle que Ruelle la conceptualise, rentre dans cet ensemble.

En revanche, il faut souligner qu'une partie des théories mathématiques sous-jacentes au développement du chaos, à savoir la théorie des systèmes dynamiques, ne distingue pas *a priori* les systèmes conservatifs des systèmes dissipatifs. Ils sont traités avec les mêmes outils et tombent sous le coup des mêmes théorèmes, à moins que cela soit spécifiquement explicité. Ceci explique que la différence ait été passée sous silence jusque-là.

Pourquoi alors distinguer maintenant ces deux catégories ? La pertinence relativement à la problématique du chaos est très claire : **il n'est pas question d'attracteur étrange dans le cas des systèmes conservatifs** (il n'est même pas question d'attracteur du tout). Pourtant au moment où apparaissent les notions de chaos, on commence à évoquer un chaos pour ces systèmes également.

Nous analyserons deux articles de synthèse pour illustrer au mieux cette question : un texte de Boris Chirikov intitulé "A universal instability of many-dimensional oscillator systems", datant de 1979 et consacré exclusivement aux systèmes Hamiltoniens. Un second de Robert Helleman, "Self-generated chaotic behavior in non linear mechanics", publié en 1980 et dont l'enjeu principal est de montrer ce qu'est le chaos dans les systèmes mécaniques. Ce texte est divisé en deux grandes parties, les systèmes conservatifs / les systèmes dissipatifs, mais nous mettrons en avant ce qui transcende la dichotomie au sujet du chaos.

La distinction dissipatif / conservatif tient à des questions de physique ; les deux textes sont l'œuvre de physiciens. Boris Chirikov travaille à l'Institut de Physique Nucléaire à Novossibirsk en URSS et Robert Helleman est un physicien théoricien, établi aux Pays-Bas, à l'Université de Twente. A travers leurs réflexions nous allons montrer

[466] Le système conservatif, non-Hamiltonien, le plus connu est le système de Lotka-Volterra.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

qu'il se constitue un "chaos conservatif", qui a ses spécificités, tout en étant corrélé très fortement au "chaos dissipatif".

b. Les systèmes conservatifs et la stochasticité. L'exemple de Boris Chirikov.

Le bilan dressé par Chirikov concerne le problème de l'instabilité et de la stochasticité dans les oscillations non linéaires. Il est plutôt orienté vers les aspects théoriques et mathématiques des phénomènes ; il ne traite que de modèles classiques de la Mécanique non linéaire et s'appuie beaucoup sur les résultats de simulations numériques, les seules "expériences" [467] mentionnées par Chirikov.

De multiples problèmes sont abordés dans l'article. Nous devrons en laisser quelques uns de côté pour nous focaliser sur les tendances les plus significatives à l'égard de la question du chaos. Enfin, Chirikov n'emploie jamais le terme "chaos", il ne parle qu'en termes de phénomènes stochastiques. A la fin des années 1970, ces phénomènes seront rapprochés et fusionneront avec le chaos. L'article de Helleman est représentatif de cette transition. Ce sont les rapprochements conceptuels sous-jacents à ce changement de qualificatif que nous allons analyser.

L'autre intérêt du texte de Chirikov est d'avoir été produit par un physicien soviétique, imprégné de la culture de la stochasticité, dont l'importance, dans les conceptions du chaos et dans son histoire en général, est très grande. La stochasticité a été un thème très développé en URSS, alors que la science occidentale ne découvre vraiment l'ampleur de ces réflexions qu'à la fin des années 1970 [468] . Le texte de Chirikov, qui intègre cette histoire, n'a pas été choisi par hasard.

Les premiers liens avec le chaos

Nous avons annoncé que rien ne permet de faire le lien avec ce qui précède au niveau des attracteurs, mais plusieurs autres indices laissent entrevoir certaines relations. En premier lieu, la stochasticité correspond à des phénomènes aléatoires produits par divers mécanismes :

"Les expériences numériques révèlent qu'avec le recouvrement de résonances, les oscillations d'un système deviennent irrégulières, ou stochastiques, comme si ces dernières étaient influencées par une perturbation aléatoire, même si, en fait, le mouvement est gouverné par des équations purement dynamiques. Ainsi, nous avons trouvé un exemple d'un processus 'aléatoire' se produisant dans un système dynamique [...] [ce] dernier résultat conduit à une compréhension de la nature des lois statistiques de la mécanique classique." [469]

[467] "With a few exception only *numerical* experiments will be mentionned, so we shall say often just "experiment", "empirical", etc. without the risk of confusing the reader", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 265 (en italique dans le texte).

[468] De manière symptomatique, les réflexions du physicien Nicolas S. Krylov sur les fondements de la mécanique statistique et l'instabilité, n'est traduit en anglais qu'en 1979 et crée la surprise : [KRYLOV, N.S., 1979]. Cette histoire de la stochasticité fait l'objet d'une partie du chapitre 7 (p. 468).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Le lien est, certes, superficiel, même un peu réducteur, mais c'est un premier indice. Chirikov montre ensuite les enjeux de l'étude de la stochasticité :

"L'instabilité des oscillations non linéaires se produisant avec le recouvrement de résonances est d'une nature plutôt singulière donnant lieu à un mouvement irrégulier, ou stochastique, du système. Ce genre de mouvement mécanique a été l'objet d'une longue recherche dans de nombreuses tentatives de fonder la mécanique statistique. C'est précisément de là que la théorie ergodique des systèmes dynamiques est sortie. La mise en évidence de comportements statistiques dans des systèmes dynamiques extrêmement simples a été un résultat plutôt surprenant de l'étude des oscillations non linéaires. Ce dernier aspect de l'interaction de résonances sera discuté dans la section 5." [470]

Ceci nous montre le rapport de la stochasticité aux problèmes d'ergodicité et à celui des fondements de la Mécanique statistique classique. La recherche des comportements stochastiques est orientée vers la justification d'une description statistique de certains mécanismes, et il paraît facile de la rapprocher des tentatives de description statistique, probabiliste, ergodique du chaos.

En faisant un pas supplémentaire dans la théorie, nous comprenons que les rapports ne relèvent pas seulement de parallèles un peu grossiers. C'est dans le mécanisme générateur de la stochasticité que nous trouvons des indices intéressants. Il a été signalé dans une précédente citation que l'explication à la stochasticité donnée par Chirikov est celle du "recouvrement de résonances". Ceci est confirmé et précisé ensuite :

"Dans la section 3 nous avons vu qu'une caractéristique principale d'une simple résonance est la stabilisation non linéaire de perturbations résonantes. Le mécanisme de recouvrement de résonances détruit cette stabilisation et laisse un système 'errer' dans les résonances. Se produisant ainsi, l'instabilité stochastique est l'obstacle principal sur la voie de l'application des oscillations non linéaires pour supprimer les perturbations résonantes." [471]

[469] ***"Numerical experiments reveal that under the overlap of resonances the oscillations of a system become irregular, or stochastic, as if the latter were influenced by a random perturbation even though, in fact, the motion is governed by purely dynamical equations. Thus, we have come across an example of arising a "random" process in a dynamical system…[…] the latter result leads to a new understanding of the nature of statistical law in classical mechanics.", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 267 (nous mettons en évidence).***

[470] ***"The instability of nonlinear oscillations arising under the overlap of resonances has a rather peculiar nature resulting in an irregular, or stochastic, motion of the system. This kind of mechanical motion has been the object of a long search in numerous attempts of foundation of the statistical mechanics. This is just where the ergodic theory of dynamical systems [28,2] has come out. A rather surprise result of the study of nonlinear oscillations has proved to be the possibility of statistical behaviour in extremely simple dynamical systems [10, 38, 39, 34]. The latter aspect of resonance interaction will be discussed in section 5.", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 285-6 (nous mettons en évidence).***

[471] ***"In section 3 we have seen that a main feature of a single resonance is the nonlinear stabilization of resonant perturbation. The mechanism of resonance overlap destroys that stabilization and lets a system "wander" over resonances. Arising thus, stochastic instability is the main obstacle in the way of application of nonlinear oscillations for the suppression of resonant perturbation. This has been found out already in ref. [10].", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 291-2. La référence [10] correspond à une étude de conception des synchrotrons.***

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Autrement dit, dans les oscillations non linéaires, il se produit un phénomène d'instabilité générant de la stochasticité : lorsqu'une seule résonance entre en jeu, la non linéarité assure la stabilité, mais lorsque plusieurs résonances se chevauchent, le système perd sa stabilité et il parcourt l'espace couvert par les résonances, c'est ce qui fait la stochasticité.

Pour être plus précis, il se met en place une véritable instabilité lorsque déjà deux résonances se rapprochent :

"Les expériences numériques montrent que le mouvement en question devient irrégulier comme si le système était influencé par des forces aléatoires même si, en fait, aucune force de ce genre n'est présente. [...] C'est pourquoi ce type de mouvement a été appelé oscillations stochastiques, ou instabilité stochastique. [...] Mentionnons accessoirement qu'une autre particularité d'un tel mouvement est la forte instabilité locale. Ceci signifie que des trajectoires initiées toutes proches l'une de l'autre se séparent exponentiellement dans le temps en moyenne (section 5.2)." [472]

En dernier ressort, la caractéristique appelée "sensibilité aux conditions initiales" dans le contexte du chaos, intervient donc ici aussi, et prend une grande importance dans le texte de Chirikov.

Explications et détails techniques

Notre objectif désormais est double. D'une part nous voulons d'abord montrer les liens conceptuels ainsi que les similarités dans l'analyse de la stochasticité des systèmes conservatifs et du chaos, de manière à préciser les vagues parallèles que nous venons d'établir. D'autre part, on esquissera l'horizon historique dégagé en conséquence. Tout ceci sera prolongé par l'analyse du texte de Helleman.

Au préalable, quelques notions techniques minimales sont nécessaires pour comprendre les véritables enjeux du texte, à un niveau plus détaillé que les précédents éléments indicatifs. Nous avons choisi de suivre en grande partie la présentation de Chirikov, pour les notions d'**intégrabilité**, de **séparatrice** (et des **homoclines** associées) et de **résonances**.

En premier lieu, il convient de distinguer deux types de systèmes Hamiltoniens : les systèmes dits **intégrables** , et les autres, non intégrables. Un système d'Hamiltonien H, à n degrés de liberté :

[472] ***"Numerical experiments show that the motion in question becomes irregular as if the system were influenced by some random forces even though, in fact, no such a force is present. (see eq. (4.1)). That is why this kind of motion was called stochastic oscillations, or stochastic instability. Its main features will be considered in section 5. Let us mention incidently that another peculiarity of such a motion is a strong local instability. The latter means that the trajectories started initially close together are separating exponentially with time at the average (section 5.2).", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 286-7 (nous mettons en évidence).***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad p = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \qquad q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

est dit intégrable lorsqu'on connaît n intégrales premières du mouvement (quantités se conservant) en involution :

$$H = F_1, F_2, \ldots F_n \quad \text{avec} \quad \{F_i, F_j\} = 0 \qquad (\{\} \text{ est le crochet de Poisson})$$

En effet, dans ce cas le système s'intègre par quadrature et, sous certaines conditions, il existe des coordonnées dites "action-angle" (I, φ) telles que l'équation du mouvement se réduit à :

$$\dot{I} = 0, \qquad \dot{\varphi} = \omega(I) \qquad \text{où} \qquad \omega(I) = \frac{\partial H}{\partial I}$$

Sous ces mêmes conditions, le **mouvement se fait sur un tore à n dimensions et il est quasi-périodique**. Schématiquement on peut dire que les systèmes intégrables sont simples et leurs comportements sont connus. Les autres sont mal compris. La Mécanique classique est focalisée sur la recherche des systèmes intégrables, la question des oscillations non linéaires est centrée sur les systèmes non intégrables. Comme le dit Chirikov, la première catégorie est "exceptionnelle" et les problèmes qui l'occupent n'en font pas partie [473] .

Les situations intéressantes du point de vue dynamique correspondent au voisinage des **séparatrices**. Dans le cas d'un pendule simple, la situation est facile à comprendre : il s'agit de la trajectoire de l'espace des phases qui séparent deux comportements qualitativement totalement différents, l'oscillation et la rotation. Cette circonstance est remarquable car il suffit d'une toute petite perturbation à cet endroit pour faire basculer le comportement de l'oscillation à la rotation et inversement. L'Hamiltonien sous sa forme générale s'écrit, sous forme réduite, (p est le moment angulaire, φ l'angle, U_0 l'amplitude de l'énergie potentielle) :

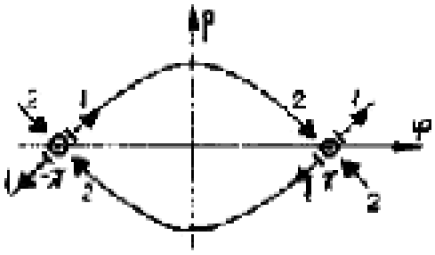
$$H(p, \varphi) = \frac{p^2}{2} - U_0 \cos\varphi$$

[473] "In spite of great success in the search of completely integrable nonlinear systems [68] the latter are nevertheless exceptional, in my opinion. Anyway the problems we are going to consider do not belong to integrable ones.", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 270.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Les séparatrices correspondent à $H=U_0$ et ont pour équation : $p_{sx}= \pm 2\omega_0 \cos(\varphi_0/2)$.

Le diagramme de l'espace des phases est de la forme :



Séparatrices du pendule :
0 – un tour "moustachu" (point)
1 – "moustache" "émergente"
2 = "moustache" arrivant

[CHIRIKOV, B., 1979], Figure 2.1 p. 274.

En reprenant Chirikov :

"Selon la terminologie de Poincaré, les moustaches sont appelées trajectoires doublement asymptotiques puisqu'elles approchent une trajectoire dans les deux directions du temps (t#±#). Pour notre système, cette trajectoire limite – les points fixes instables #=±# – est la même pour les deux limites t#±#. Dans ce cas les moustaches sont appelées trajectoires homoclines." [474]

Il reste à donner des indications relativement au problème des **résonances**. Les oscillations libres d'un système Hamiltonien (pendule) sont stables et ne sont pas d'un grand intérêt ici. La recherche sur les oscillations non linéaires s'intéresse davantage à ce qui se passe lorsque le système est perturbé de la manière suivante :

$H(I, \varphi, t)=H_0(I) + \varepsilon . V(I, \varphi, t)$ avec ε petit.

Dans le cas où la perturbation est en plus périodique, dépendant périodiquement de la phase $\tau=\Omega t+ \tau_0$, il est possible de développer la perturbation en série de Fourier :

$$H(I,\varphi,\tau)=H_0(I)+\varepsilon\sum_{m,n}V_{mn}(I)e^{i(m\varphi+n\tau)}$$

Plus la phase $m\varphi+n\tau$ est petite, plus la perturbation a de l'effet. Dans le cas limite d'une phase constante, les résonances correspondent à $m\omega(I)+n\Omega=0$. **Ces fréquences ω_{mn} de résonances forment généralement un ensemble infini, dense (dans l'ensemble des ω)**, ce qui explique l'intérêt pour les interactions entre ces résonances, problème de fond abordé par Chirikov.

Dans le cas simplifié où une seule résonance intervient (une seule composante dans la série de Fourier) il est possible de donner quelques caractéristiques (approchées) de la résonance. Avec un Hamiltonien de la forme

[474] ***"According to Poincaré's terminology [6] the whiskers are called doubly-asymptotic trajectories since they are approaching some trajectories for both directions of time (t→±∞). For our system this limiting trajectory- the unstable fixed point φ=±π – is the same in both limits t→±∞. In this case the whiskers are called homoclinic trajectories.", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 274 (en italique dans le texte). Nous avons traduit "whiskers" par "moustache" en suivant l'ouvrage pris en référence par Chirikov, Ergodic problems of classical mechanics, qui est lui-même une traduction anglaise de Problèmes ergodiques de la mécanique classique, de 1967 [ARNOLD, A., AVEZ, A., 1967].***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

$H(I, \varphi, \tau) = H_0(I) + \varepsilon . V_{mn}(I)\cos(m\varphi - n\tau)$

une approximation du type pendule est imaginable, c'est-à-dire qu'il est possible de trouver un Hamiltonien approchant, obtenu par transformation du premier, et de la forme :

$H_r(p, \psi) = p^2/2M + \varepsilon V_{mn}(I_r)\cos\psi$

Les séparatrices pour ce système ont alors pour équations :

$$I_{sx} - I_r \pm (\Delta I)_r \sin\left(\frac{m\varphi - n\tau}{2}\right) \qquad (\Delta I)_r - 2m\sqrt{\varepsilon M V_{mn}} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}} I_r$$

(I_r est une constante, α est un paramètre servant à caractériser la non linéarité des petites oscillations)

L'amplitude des oscillations (ΔI_r) est appelée **demi largeur de résonance** (en I) et nous allons voir comment elle entre dans la caractérisation du problème de stochasticité.

L'interaction de résonances, la problématique de Chirikov

L'interaction de résonances est un problème fondamental dans les oscillations non linéaires, selon Chirikov. Il est au cœur du mécanisme de génération de la stochasticité.

En reprenant la présentation de Chirikov, lorsqu'on introduit simultanément plusieurs perturbations harmoniques de l'Hamiltonien, chaque perturbation détermine "sa" résonance dans l'espace des phases. Toute la question est de déterminer **quel est le mouvement sous cette accumulation de résonances**.

Dans son texte, Chirikov explicite le raisonnement courant qui mène à conclure que le système est instable, en général. L'argumentaire repose sur le "théorème de Poincaré" : il n'existe pas d'autre intégrale analytique du mouvement que l'énergie (et les classiques moment, moment angulaire, etc.).

Selon Chirikov, l'idée générale présidant aux réflexions sur la question était la suivante : en se plaçant dans le voisinage d'une résonance particulière on espérait absorber, grâce à un changement de variables, les autres perturbations (non résonantes dans ce voisinage). Cette possibilité était connue "depuis longtemps", il fallait pour cela combiner formellement une séquence infinie de changements de variables pour parvenir, idéalement, à un mouvement stable. Tout le problème est que ces transformations se font d'un point de vue formel et :

"La stabilité réelle dépend de la convergence de la série infinie de variables, ou, en d'autres termes, de l'existence d'une limite pour laquelle le mouvement est formellement stable." [475]

Or, le raisonnement dominant voulait que cette série ne converge pas en général, ce qui signifie que le mouvement était considéré comme instable et la question "résolue". Au centre de l'argumentaire récurrent sur le sujet, se trouve le "théorème de Poincaré" [476] . Du fait que la convergence d'une série de transformations correspondrait à une nouvelle

[475] ***"Real stability depends on whether that infinite sequence of variable is convergent, or, in other words, whether there exists that limit in which the motion is formally stable.", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 285.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

intégrale, ce théorème "célèbre" est effectivement déterminant.

Chirikov esquisse le changement intellectuel qui s'est opéré dans les perspectives de réponse à ce problème et montre que la conclusion ne peut pas se résumer à une situation instable de manière générale.

En fait, Chirikov annonce qu'une démarche particulière permettant d'y répondre a été trouvée "récemment" (le texte est écrit en 1979) et affirme: "Aujourd'hui nous savons qu'une telle interprétation du théorème de Poincaré est une erreur" [477] . La nouvelle réponse, centrée sur le **théorème de Kolmogorov -Arnold -Moser** (théorème KAM), est une théorie de la stabilité montrant, contrairement à ce qui était prétendu, qu'il existe de la stabilité dans les oscillations non linéaires. En exposant plus en détail ce résultat, c'est cet aspect que nous allons mettre en avant : il y a **coexistence de stabilité et d'instabilité** dans les oscillations non linéaires. Ceci nous renvoie à notre introduction : instabilité et stochasticité étant associées, on peut interpréter cette coexistence comme un mélange de stabilité et de chaos, ou encore de mouvement quasi-périodique et de chaos. Nous prenons là quelques raccourcis, mais ils sont justifiés par le texte de Helleman qui va suivre (également par son introduction aux actes du colloque de New York de 1979 [478]) et servent ici à mieux associer ce résultat aux problématiques du chaos.

Lorsque nous aurons détaillé les raisonnements entourant le théorème KAM, nous en viendrons aux résultats essentiels autour de cette coexistence de stabilité et d'instabilité. Au cœur du texte de Chirikov, il est question avant tout de déterminer la frontière entre la stabilité et l'instabilité, de donner un critère indiquant la transition, d'une part et de caractériser l'instabilité elle-même, d'autre part. Le théorème KAM donne des indications relatives à la bordure de stabilité, mais nous détaillerons surtout les critères dévoilés par Chirikov, tel que le "recouvrement des résonances". Sur ces différents points, les rapports au chaos, tant sur les concepts mis en jeu que sur les méthodes d'analyses, seront plus clairs.

Détails sur le théorème KAM [479]

En substance le théorème KAM présenté par Chirikov, avance un ensemble de résultats au sujet du comportement d'un Hamiltonien intégrable, à *n* degrés de liberté, perturbé de manière non intégrable (pour simplifier nous choisissons le cas autonome, c'est-à-dire que le temps n'intervient pas explicitement dans la formulation). Un tel système est de la forme :

$$H(I,\varphi) = H_0(I) + \varepsilon \sum_m V_m e^{i\sum_k m_k \varphi_k} \quad \text{où } \varphi \ (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),\ m \ (m_1, m_2, \ldots, m_n) \text{ (entiers)}$$

476 "These sort of ideas was based, particularily, on the famous Poincaré theorem [...]", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 285.

477 "Today we know that such an understanding of the Poincaré theorem is in error.", ibid., p. 285.

478 [HELLEMAN, R.H.G., 1980a]. Nous renvoyons aux détails donnés en introduction de notre seconde partie, p. 153.

479 **Paragraphe 4.5 et 4.6 du texte de Chirikov, [CHIRIKOV, B., 1979], p. 306-310.**

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

La perturbation a deux effets (sous certaines conditions bien évidement) :

• des tores invariants [480] pour le système intégrable non perturbé se déforment, mais conservent la forme de tore et restent invariants : ce sont les tores non résonants.

• les autres tores "explosent", car rien n'assure leur conservation, même sous la moindre perturbation : ce sont les tores résonants.

Tout dépend des fréquences (ω_i) ($i=1..n$) constitutives des tores. Lorsqu'elles vérifient une condition de résonance (amenée par la perturbation) $\Sigma_i m_i \omega_i = 0$, la situation est critique au sens où les procédés de transformations successives évoqués ne sont absolument pas convergents : il se produit une éclatement du tore, quelque soit l'ampleur ε de la perturbation. Pour être exact, les changements de variables invitent des "petits dénominateurs" dans les séries, lesquels sont de la forme $1/\Sigma_i m_i \omega_i$. A la résonance même, le dénominateur s'annule. Tout le problème est de déterminer ce qui se produit à proximité de la résonance, lorsque le dénominateur est petit, mais pas nul (donc d'inverse grand). Est-il possible que le procédé converge malgré tout ?

La réponse est oui, les tores sont alors conservés, sous certaines conditions, qui correspondent à la définition d'un voisinage "interdit" des résonances (appelé **couche de résonance** par Chirikov [481]) et d'une amplitude ε maximale pour la perturbation. Hors de cette zone il y a stabilité.

Ce résultat ne résout pas tous les problèmes, mais établit la **coexistence de stabilité et d'instabilité**, dans des systèmes d'oscillations non linéaires, issus de systèmes intégrables faiblement perturbés. Par ailleurs, dans le cas général, la catégorie des tores résonants occupe la majeure partie de l'espace des possibles. En effet, les zones interdites forment des couches autour des résonances qui elles-mêmes couvrent l'espace des (ω_i) de manière dense. Ceci a pour conséquence qu'il est quasiment impossible de choisir les conditions initiales du système dans un "bon" domaine, c'est-à-dire une zone de stabilité.

Cas particulier : système à 2 degrés de liberté

Cependant, lorsque le nombre de degrés de liberté se réduit à deux, la stabilité du système peut être assurée (si la perturbation n'est pas trop importante). En effet, dans ce cas, les tores en question sont des tores à deux dimensions qui partagent l'espace à trois dimensions (sous-espace d'énergie constante donnée). Un mouvement qui voudrait transiter d'un tore à un autre devrait traverser tous les tores intermédiaires, ce qui implique qu'il est automatiquement **confiné entre deux tores invariants (infranchissables) adjacents**. Pour Chirikov, la situation est intéressante car d'"un point de vue physique c'est justement la stabilité du mouvement" [482] .

[480] Voir les explications ci-dessus à propos des systèmes intégrables, p. 214.

[481] "resonance layers", p. 307.

[482] "From a physical point of view this is just stability of motion", ibid., p. 310.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Lien avec les intégrales du mouvement

Pour en revenir au théorème de Poincaré et à son utilisation sommaire, la faille dans le raisonnement peut s'expliquer très simplement. L'Hamiltonien non perturbé possède des intégrales du mouvement, autant que de degrés de liberté et, en conséquence, le mouvement se développe sur un tore. La conservation des tores sous perturbation correspond à la conservation des intégrales du mouvement. Du fait que les intégrales (ou les tores) peuvent être détruites "à l'intérieur de l'ensemble dense, des couches résonantes", "leur dépendance des variables dynamiques est partout **discontinue**" [483] . Le théorème de Poincaré fixait l'impossibilité d'avoir des intégrales analytiques, mais n'interdisait en rien l'existence d'intégrales avec des discontinuités. Il y a eu une surinterprétation du théorème.

Le recouvrement de résonances non linéaires

Dans son texte, Chirikov se propose essentiellement de produire une analyse qualitative (et graphique) de mécanismes particuliers de destruction des intégrales du mouvement et donc d'apparition d'instabilité, en parallèle au théorème KAM. Le principe qui lui permet de définir un critère de stabilité et d'évaluer la frontière de stabilité des systèmes repose sur **le recouvrement de résonances non linéaires**. Nous nous intéressons à ce principe ainsi qu'aux autres développés par Chirikov pour deux raisons : il constitue un mécanisme générateur d'une instabilité et de stochasticité du système, d'une part ; d'autre part, nous allons voir que les méthodes permettant l'analyse du recouvrement et de cette instabilité sont des méthodes standard de la dynamique.

Commençons par le cas de deux résonances, pour lequel Chirikov explique les grandes lignes du critère adopté afin de caractériser le recouvrement : c'est le **contact des séparatrices des résonances**.

La base du principe n'est pas de Chirikov mais repose sur un résultat plus ancien. Pour un système où se manifestent deux résonances, lorsque celles-ci sont suffisamment éloignées, on peut penser que le système restera localisé autour d'une résonance (le choix dépendant des conditions initiales). Que se passe-t-il lorsque les deux résonances se rapprochent ? *A priori*, on peut s'attendre à ce que le système passe de l'une à l'autre, mais rien ne laisse supposer qu'il se passe autre chose. Pourtant

"Les expériences numériques montrent que le mouvement en question devient irrégulier comme si le système était influencé par des forces aléatoires même si, en fait, aucune force de ce genre n'est présente. [...] C'est pourquoi on a appelé ce type de mouvement oscillations stochastiques, ou instabilité stochastique." [484]

Une instabilité se met donc en place et le critère pour définir la frontière stabilité-instabilité

[483] "inside the everywhere dense set of resonance layers. Hence their dependance on dynamical variables is everywhere discontinuous", ibid., p. 310 (nous soulignons).

[484] ***"Numerical experiments show that the motion in question becomes irregular as if the system were influenced by some random forces even though, in fact, no such a force is present. (see eq. (4.1)). That is why this kind of motion was called stochastic oscillations, or stochastic instability.", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 286-7.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

correspond à la limite de chevauchement des résonances. Cette limite est définie elle-même par le **contact entre les séparatrices des deux résonances**. En l'état, le critère est difficile à mettre en oeuvre, car la présence d'une résonance modifie la séparatrice de l'autre. La méthode consiste alors à considérer les séparatrices non perturbées (c'est-à-dire comme si l'autre résonance n'existait pas) et à déterminer quand ces deux séparatrices "abstraites, idéales" se rencontrent. Tel est le critère retenu par Chirikov.

Dans les cas où plusieurs résonances se côtoient, la situation est évidemment plus délicate. Pour l'analyse de ces phénomènes de recouvrement de résonances, ce sont alors les **itérations** qui entrent en jeu, pour plusieurs raisons. En premier lieu, le travail tant numérique qu'analytique sur les itérations est considérablement plus simple [485] . Mais cela tient surtout à un choix très particulier de Chirikov. Dans l'idée de représenter les dynamiques au voisinage des séparatrices de résonances, Chirikov se concentre sur une itération baptisée "standard", dont les équations sont :

$$\bar{I} = I + K \sin\theta \qquad \bar{\theta} = \theta + \bar{I} \qquad (K \text{ étant un paramètre})$$

Chirikov a montré qu'elle est représentative des comportements à étudier [486] . Par ailleurs, cette application standard correspond à la dynamique d'un système particulier : un modèle de particule chargée, confinée dans une bouteille magnétique [487] . Plus exactement, c'est par une section de Poincaré de ce modèle qu'il est conduit (avec diverses approximations) à l'itération en question.

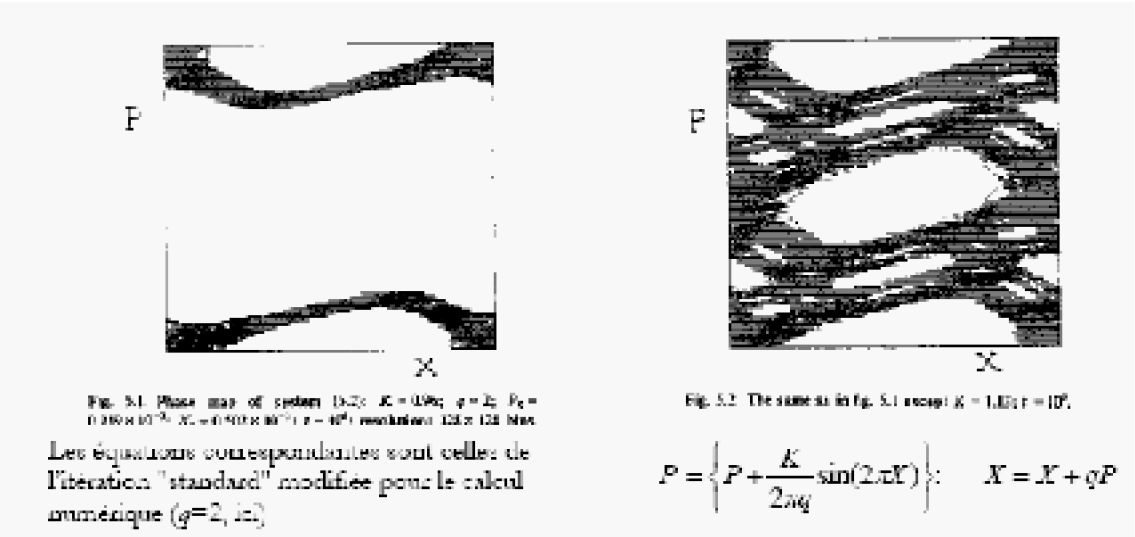
Sur cette itération, Chirikov analyse les situations à multiples résonances. *K* déterminant la valeur des résonances et leur nombre, en faisant varier *K*, il peut étudier les passages d'une résonance à l'autre et tester le critère de recouvrement. Les deux figures illustrent la situation avant et après le recouvrement de résonances.

[485] Paragraphe 4.2, en particulier page 292. La situation est la même qu'avec le système de Hénon, beaucoup plus simple à implémenter numériquement que celui de Lorenz, comme cela a été mentionné p. 207 (ainsi qu'à la note 458).

[486] C'est ce qu'il a montré dans le paragraphe 4.4.

[487] Le système peut paraître un peu baroque, mais il correspond en fait à des problèmes de confinement de plasmas, de fusion thermonucléaire contrôlée où le problème de stabilité du mouvement des particules est crucial. Ibid., paragraphe 4.3 (page 300 pour les rapports à la fusion). N'oublions pas que Chirikov est un physicien travaillant dans ce domaine.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est



Il faut imaginer que le bord supérieur est identifié au bord inférieur, le droit au gauche, le rectangle étant ainsi l'analogue d'un tore. Dans les conditions choisies, il y a deux résonances P_r=0 (ou 1) et P_r=1/2. Sur la figure (5.1), le mouvement a lieu autour de la résonance P_r=0 et ne s'évade pas ; il y a une stabilité du mouvement, qui n'atteint pas l'autre résonance. Sur la figure (5.2), le paramètre ayant été augmenté, les résonances se recouvrent, le mouvement s'effectue dans l'espace entre les deux résonances, sans rester localisé sur une résonance. Il y a une instabilité large. On notera par ailleurs que le mouvement se fait dans une bande d'une certaine largeur, dans les deux cas : cela correspond à la "couche stochastique", où il y a une instabilité **locale**, même lorsque le mouvement est stable globalement. Le phénomène n'a pas de rapport avec le recouvrement de résonances. Ce sont deux instabilités de nature complémentaire et Chirikov analyse ce phénomène en détail dans un paragraphe suivant.

L'entropie de Krylov-Kolmogorov-Sinaï

L'application standard a un dernier avantage. Elle permet de rentrer dans le détail de la stochasticité, non plus seulement du point de vue des mécanismes générateurs (tel que le recouvrement), mais avec l'objectif de quantifier la dose de "hasard" observée grâce à une notion baptisée **KS-entropie**.

Du fait que l'application a une forme très simple, l'analyse est autant numérique qu'analytique, et concerne l'application tangente. Grâce à l'application tangente et à ses éléments propres (valeurs propres, vecteurs propres) Chirikov présente les directions de dilatation et de contraction, l'instabilité locale (les trajectoires proches qui divergent exponentiellement) et les orbites doublement asymptotiques [488] .

L'analyse de l'application tangente amène également un moyen de caractérisation de l'instabilité, appelé **entropie de Krylov -Kolmogorov -Sinaï** ou **KS-entropie** par Chirikov. Cette entropie correspond à $h=\ln |\lambda_+|$ lorsque qu'il existe une valeur propre λ_+ telle que $|\lambda_+|>1$.

[488] Ibid., p. 319.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Chirikov donne quelques détails au sujet de cette entropie, expliquant par là le nom qu'il lui attribue. Il affirme qu'elle a été utilisée largement par Krylov dans l'étude des propriétés statistiques des systèmes mécaniques (sans que cela s'appelle entropie). Kolmogorov l'aurait introduite, indépendamment, dans la théorie ergodique, sur la base de considérations de théorie de l'information : elle était appelé "entropie par unité de temps". Enfin, Sinaï a fait le lien entre cette entropie et l'instabilité locale [489] .

Relevons également les références citées par Chirikov au sujet de ces calculs : il a développé une méthode avec J. Ford, G. Casati et F.M. Izraelev [490] , C. Froeschlé [491] en a donné une plus sophistiquée, plus difficile à mettre en oeuvre, mais plus informative. Enfin, il signale une troisième méthode présentée à la conférence "Transformations ponctuelles et leurs applications", à Toulouse (LAAS) en 1973 [492] .

Le terme entropie ne doit pas induire en erreur. Malgré le contexte de Mécanique statistique entourant ces réflexions, Chirikov souligne qu'il ne s'agit pas de l'entropie thermodynamique habituelle : la KS-entropie a la dimension d'une fréquence et désigne un **taux de divergence (exponentiel) des trajectoires voisines**.

L'intérêt de toute cette construction est que le passage de la stabilité à la stochasticité correspond, au niveau de l'entropie, à un décollage de 0 vers des valeurs strictement positives. C'est **un indicateur de la frontière de stabilité**, dont le calcul est donc important mais délicat, même pour une application simple comme l'application standard. A travers ces quelques éléments on peut se demander si une telle notion a sa place dans les systèmes chaotiques généraux, sans distinction de conservatif et dissipatif. Nous verrons que l'entropie est effectivement utilisée dans le "chaos dissipatif" ; nous montrerons qu'elle a, en fait, été transférée du conservatif vers le dissipatif.

Les fondements de la Mécanique statistique

De la même manière que les considérations de Li, Yorke ou Ruelle sont empreintes des questions d'ergodicité des systèmes dynamiques, de description statistique des dynamiques, autrement dit des questions de "Mécanique statistique", il nous faut insister sur le fait que Chirikov s'inscrit lui aussi dans une perspective de Mécanique statistique.

Dans ce cadre, le comportement instable localement, c'est-à-dire la divergence

[489] Tous ces points seront analysés dans le chapitre 7 dans les paragraphes consacrés à la question de la stochasticité.

[490] Les deux premiers sont les organisateurs de la conférence de Côme de 1977, à laquelle, naturellement Chirikov participe. Ils donnent un exposé commun (avec G. Casati et F.M. Izraelev) : [CASATI, G., FORD, J., 1979], p. 334-352. Les questions relatives aux rapports entre les exposants de Lyapounov, les notions d'entropie et les questions de théorie ergodique sont discutées au chapitre 4, p. 291.

[491] Voir la note précédente (n° 490).

[492] Selon Chirikov, la lecture des comptes rendus de cette conférence (publiés dans [MIRA, C., LAGASSE, J., 1976]) donne plus généralement les tendances importantes dans la recherche sur les itérations (qu'il utilise abondamment). [CHIRIKOV, B., 1979], p. 292.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

(exponentielle) des trajectoires voisines n'est pas seulement un mécanisme générateur de stochasticité. Chirikov enchaîne toute une série de remarques à ce sujet :

"Il est intéressant de noter qu'un tel mouvement est recherché depuis longtemps dans l'objectif de donner des fondements à la mécanique statistique. Cependant, en conséquence des tentatives timides de la théorie ergodique classique de déduire des propriétés statistiques des lois dynamiques, une idée erronée a pris racine, celle qui affirme que le mouvement est déterminé ostensiblement par la complexité du système et, en premier lieu, par le nombre de ces degrés de liberté. Dans le même temps, il se trouve que la forte instabilité locale du mouvement est capable de générer un mouvement extrêmement complexe, même dans un système aussi simple que le système (5.1)" [493]

En quoi les propriétés statistiques résultent-elles de cette instabilité ?

Chirikov suggère des interprétations montrant que ce genre de processus "mélange" les trajectoires [494] . Il reproduit trois idées courantes en la matière, dont l'idée de perte de mémoire du système :

"Dès que la divergence des trajectoires est exponentielle, le système oublie les conditions initiales très rapidement, et pour toujours. En d'autres termes, la 'mémoire stochastique' est courte […] et se perd de manière abrupte." [495]

La seconde est plus sophistiquée et repose sur l'idée qu'un tel processus stochastique se compose d'un ensemble dense de trajectoires périodiques (dont le nombre croît exponentiellement avec la période). Elles sont instables et forment un réseau à travers lequel les trajectoires générales diffusent, rebondissant en quelque sorte sur les mailles de ce réseau. Chirikov prend l'exemple de la planche de Galton pour figurer une telle dynamique, dont le résultat est un processus aléatoire [496] .

Chirikov ajoute une troisième interprétation sur la base de la notion d'information. Une trajectoire est définie par ses conditions initiales, c'est-à-dire un nombre réel. En Mécanique classique, ces conditions initiales contiennent une quantité d'information

[493] ***"It is worth noting that such a motion has been searching for since long ago with the purpose of foundation of the statistical mechanics. However, subsequent upon the first poor attempts of the classical ergodic theory to derive the statistical properties from the dynamical laws an erroneous idea has taken root that the intricacy of motion is determined ostensibily by the complexity of a system and, in first place, by the number of its degrees of freedom. Meanwhile, it turns out that the strong local instability of motion is capable of giving rise to an extremely intricate motion even in a system as simple as the system (5.1)", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 323.***

[494] Chirikov n'emploie pas le terme "mixing" dans son sens mathématique, mais pour signifier que les propriétés statistiques proviennent d'un mélange analogue, sans que les strictes conditions mathématiques soient respectées.

[495] ***As soon as the divergence of trajectories is exponential the system forgets the initial conditions very quickly, and for ever. In other words, the "stochastic memory" is short [...] and it gets lost abruptly.", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 324.***

[496] "This sort of phase motion ressembles the motion of a small shot on the Galton Board [123]. Its simplest version is just a wooden planck fixed vertically with many pins stuck squarely into it. A shot is falling through the "forest" of pins scattering by them "randomly". This classical device for a visual demonstration of random processes is a typical system with an exponential local instability of motion", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 324.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

infinie sur le mouvement. Mais dans ce cadre où s'expriment surtout la stabilité et la quasi-périodicité, toute cette diversité reste cachée : seule la divergence de trajectoires voisines révèle ces détails microscopiques, dans des systèmes aussi simples que l'application standard [497] .

On se contentera sur ce point de constater que ces conceptions ne sont pas spécifiques au monde conservatif, comme l'illustrent les considérations sur la sensibilité aux conditions initiales, la turbulence et l'ergodicité, de Ruelle ou Bowen notamment. Cependant, Chirikov raisonne d'abord en physicien (et non en mathématicien) et traite ici uniquement de Mécanique classique (Hamiltonienne).

Etude des "couches stochastiques" et diffusion d'Arnold

Pour en terminer avec le texte de Chirikov, il nous faut montrer que la stochasticité dont il est question possède plusieurs facettes et se présente de manière plus ou moins universelle (rappelons le titre de l'article : "A universal instability of many-dimensional oscillator systems"). Le recouvrement de résonances induit une instabilité mais elle n'est pas universelle : en fait, il est nécessaire que le système soit perturbé assez fortement (par rapport à la situation intégrable) pour que des résonances se rapprochent et se chevauchent effectivement.

En revanche, la "couche stochastique" [498] est un phénomène inévitable. L'explication de ce phénomène est liée aux **structures homoclines à proximité des résonances**. Chirikov montre deux choses essentielles sur ces couches. Premièrement, une perturbation, si faible soit-elle, engendre une stochasticité locale et limitée au voisinage de la résonance (la couche). Deuxièmement, dans des systèmes multidimensionnels, la stochasticité se répand, à partir de cet "embryon", dans pratiquement tout l'espace des phases : elle n'est plus locale et s'appelle diffusion d'Arnold, du nom de celui qui en a montré le mécanisme.

Chirikov s'intéresse aux "couches stochastiques" à proximité des séparatrices des résonances, avec les différents outils déjà présentés. Dans des cas simples, comme le pendule en oscillation libre, les deux séparatrices (les moustaches) ont un comportement simple. Mais si une perturbation s'invite, elle induit des comportements plus compliqués qui se combinent au caractère critique du mouvement à proximité de la séparatrice (la séparatrice délimite deux comportements complètement différents, l'oscillation et la rotation). Il apparaît alors deux "moustaches entrelacées de manière compliquée" [499] .

"Selon une citation, aujourd'hui en vogue, de Poincaré, on est frappé par la compléxité de l'image des séparatrices emmélées, qu'il n'a pas lui-même (Poincaré) cherché à dessiner." [500]

Ce qui intéresse Chirikov ce n'est pas tant la structure homocline (qui, d'après lui, a été détaillée par plusieurs scientifiques depuis Poincaré) que le domaine d'instabilité autour

[497] [CHIRIKOV, B., 1979], p. 325.

[498] "Stochastic layer" : c'est l'objet de la section 6 du texte, [CHIRIKOV, B., 1979], p. 336.

[499] "the two whiskers interwoven in an intricate manner appear", p. 336.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

de la séparatrice, autrement dit l'épaisseur de la couche stochastique [501] . Sur la figure (5.1) plus haut, l'épaisseur de la couche stochastique correspond à la largeur de la bande le long de la séparatrice de la résonance P_r =0. Dans ce cadre, il utilise l'application "standard" (assez représentative du comportement au voisinage de la séparatrice d'une résonance non linéaire), des simulations numériques et la KS-entropie pour étudier "semi-empiriquement" ce voisinage [502] .

Les résultats de cette analyse sont de première importance parce qu'ils montrent que "dans un voisinage suffisamment serré de la séparatrice, la couche stochastique existe toujours" [503] : pour des perturbations faibles, c'est un domaine d'instabilité, au milieu d'autres domaines de stabilité. En outre,

"la couche stochastique joue un rôle important dans la théorie moderne des oscillations ; en étant l''embryon' d'une instabilité, c'est précisément le lieu à partir duquel la stochasticité se répand, lorsque la perturbation s'accroît, à travers tout, ou presque tout, l'espace des phases d'un système." [504]

L'importance de cette couche est mise en lumière pleinement dans le cas des systèmes multi-dimensionels. En reprenant Chirikov :

"L'ensemble des couches stochastiques aux résonances non linéaires forment un réseau, une 'toile' ; les trajectoires des mouvements dans ce réseau pénètrent à peu près tout l'espace des phases. Une instabilité universelle se met en place, une instabilité découverte par Arnold [...] et qui a par la suite été appelée diffusion d'Arnold." [505]

[500] "According to a presently popular quotation from Poincaré one is struck by the complexity of the interwoven separatrix figure that he (Poincaré) himself was not even attempting to draw", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 336. On aura reconnu le passage de la fin des Méthodes Nouvelles de Poincaré, s'exprimant au sujet des courbes homoclines (l'original se trouve dans [POINCARE, H., 1899a], p. 389 et nous l'avons analysé au chapitre 1, p. 58).

[501] Chirikov cite en particulier Melnikov, Smale, Shilnikov, Alekseev. La structure homocline permet de donner quelques indications quantitatives, mais, selon Chirikov, aucun résultat analytique n'a été obtenu relativement à son problème. [CHIRIKOV, B., 1979], p. 337.

[502] C'est le cas où le paramètre *K* est petit (et <1) dans l'application standard qui est analysé. Dans le paragraphe 4.4, Chirikov a montré que l'application standard est une linéarisation, au voisinage de la résonance, de l'itération plus générale appelée "whisker mapping : celle-ci décrit de manière plus générale le mouvement au voisinage de la séparatrice (et des moustaches) perturbée. ([CHIRIKOV, B., 1979], p. 300-303).

[503] "in a sufficiently close vicinity of separatrix the so-called stochastic layer always exists.", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 267.

[504] "The stochastic layer plays an important role in modern oscillation theory, being an "embryo" of an instability, this is just the place from which the instability is spreading, as the perturbation grows, over all, or almost all, of the phase space of a system.", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 267.

[505] "the set of stochastic layers at nonlinear resonances forms a united network, a "web", motion trajectories inside the latter penetrating nearly all the phase space. A universal instability set in, the instability which has been discovered by Arnold [5,67] and which has been called later the Arnold diffusion [43].", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 267-68 (nous mettons en évidence).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Cette instabilité universelle n'a pas d'importance pour des systèmes à moins de deux degrés de liberté. En effet, pour une perturbation assez faible, le mouvement est confiné dans le voisinage d'une résonance et les résonances sont séparées entre elles par des tores invariants stables (en conséquence du théorème KAM). En revanche, lorsque les degrés de liberté augmentent, les couches stochastiques se rencontrent. En effet, du fait d'être dans des espaces de dimension importante, les couches de résonances peuvent se couper et former un réseau dense de résonances, couvrant la surface d'énergie donnée, et ceci **quelque soit l'ampleur de la perturbation** [506] . Puisqu'un mouvement dans une couche stochastique parcourt toute la couche [507] , il va passer d'une résonance à l'autre et diffuser dans l'espace des phases. La différence entre cette diffusion et les mouvements instables obtenus par recouvrement de résonances tient au fait que cette dernière nécessite une perturbation suffisamment importante pour qu'il y ait chevauchement de résonances, alors que la diffusion d'Arnold (et la couche stochastique) est universelle : la moindre perturbation déclenche le phénomène.

Conclusions : stochasticité et chaos

Le stochastique du monde conservatif et le chaos dissipatif sont donc finalement voisins dans les concepts mis en jeu, les méthodes utilisées et leurs racines historiques [508] , si on s'en remet au texte de Chirikov. La divergence exponentielle des trajectoires voisines, typique de la stochasticité, rappelle la sensibilité aux conditions initiales ; le mélange de stabilité (associé au périodique ou quasi-périodique) et d'instabilité (stochasticité) également. Les moyens d'étude de la dynamique sont les itérations (l'application standard en particulier) et les sections de Poincaré. Avec l'intervention des simulations numériques, indispensables et omniprésentes, nous sommes dans le même environnement méthodologique. Nous montrerons que l'intervention des courbes homoclines et des notions d'entropie est tout aussi significative que ces précédents points.

Le texte de Helleman confirme toutes ces tendances et, étant plus orienté vers un effort de synthèse des deux mondes, il dégage de manière significative les points importants.

c. Analyse d'un article de Robert Helleman

Une première remarque s'impose. Nous avons signalé que Chirikov emploie exclusivement le terme stochastique pour désigner ses comportements "aléatoires", alors que d'emblée Helleman parle, s'agissant du conservatif, de "stochastique" (ou "stochasticité") aussi bien que de chaos comme s'ils étaient équivalents. Le titre du texte

[506] Chirikov en parle à la suite du théorème KAM, [CHIRIKOV, B., 1979], p. 310.

[507] Chirikov affirme qu'il est "ergodique", [CHIRIKOV, B., 1979], p. 346. Ceci nous renvoie à toutes les propriétés statistiques brièvement discutées.

[508] Les références que nous avons extraites du texte sont lacunaires, mais par exemple les homoclines de Poincaré, revues par Smale jouent dans les deux mondes, les notions d'entropie également. Nous renvoyons à la synthèse et à la discussion du texte de Helleman pour davantage de précisions.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

ne retient d'ailleurs que le terme "chaotique". Or qu'est-ce que le chaos pour Helleman ? Le chaos se limite à une définition minimale, donnée en introduction : il correspond aux comportements qui sont aussi aléatoires qu'un lancé de dés, dans ces systèmes pourtant mécaniques, déterministes [509] .

Définition lâche et peu consistante au regard de ce que nous avons détaillé et, surtout très approximative à la vue de ce qui est présenté dans son texte sur près de 70 pages, comme dans tous les développements postérieurs à 1975. Néanmoins, on peut facilement comprendre cela dans la perspective d'un rapprochement du dissipatif et du conservatif, car le chaos de Helleman et la stochasticité suivent ainsi une définition commune. Ajoutons que le chaos, dans les deux cas, est "autogénéré" comme l'indique le titre du texte. Ce point commun n'est pas tout à fait explicité, mais il est sous-jacent à tout le texte et renvoie au problème de sensibilité aux conditions initiales. A travers ces considérations introductives, on comprend surtout que la stochasticité est en train d'être intégrée à côté du "chaos dissipatif", sous la bannière unique du chaos.

L'analyse complète du texte révèle que la définition générale de chaos n'est que pure convenance et ne sert qu'à donner une impression superficielle d'unité. Il est vrai que la dichotomie est très profonde sur le plan technique bien sûr, mais également au niveau historique et quasiment culturel pour les physiciens [510] . Ceci est manifeste dans les deux textes en question.

Sur le plan historique, en se fiant temporairement aux dires de Helleman et Chirikov, l'histoire de ces phénomènes (dits chaotiques en 1980 et auparavant dénommés stochastiques) est plus longue et plus élaborée domaine du conservatif, quasiment réduit à la Mécanique Hamiltonienne. Ceci va de paire avec une plus grande assurance dans les résultats établis dans ce cadre : la question des orbites homoclines et le théorème KAM font, par exemple, figures de résultats incontestés dans ce domaine. Ils priment par leur côté mathématiquement rigoureux, analytique, en contrepoint des expériences numériques. Le domaine du chaos dissipatif est bien moins structuré par des résultats "vérifiés" que par des calculs numériques foisonnants.

Ces différences jouent dans le fait de choisir une définition minimaliste de chaos, définition qui se voudrait fédératrice mais finalement très réductrice. Pourtant au sujet du chaos il existe des points communs très significatifs assez subtils, entre les deux mondes. Le texte de Helleman met à jour toute une série de différences et de rapprochements entre le conservatif et le dissipatif, que nous avons vu transparaître dans le texte de Chirikov. Le concept de chaos est en train de se déployer pour donner une notion plus complexe que ce qu'elle était à ses débuts.

Naturellement, la sensibilité aux conditions initiales intervient dans cette mise en relation conservatif / dissipatif. Le texte de Chirikov est assez représentatif de ce point de

[509] "It turns out that the phase space of most Hamiltonian- and many Dissipative- systems is dotted with 'Chaotic' Regions in which some properties of many orbits are *as random as coin tosses*, even though the system is deterministic.", [HELLEMAN, R.H.G., 1980b], p. 420 (en italique dans le texte).

[510] Rappelons par exemple que la notion d'intégrabilité des systèmes Hamiltoniens n'a aucun équivalent dans le monde dissipatif. Inversement, le domaine conservatif n'admet pas d'attracteur étrange.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

vue là. Mais Helleman ne s'éternise pas sur le sujet, ni sur les exposants de Lyapounov [511] . Le caractère "autogénéré" renvoie très certainement à l'existence de cette sensibilité et à sa responsabilité dans l'apparition de comportements aléatoires. Mais les points de contacts les plus intéressants sont ailleurs. Les deux éléments qui sont des ponts conceptuels clés, ont déjà été entr'aperçus : il s'agit de la notion d'ergodicité, présentée à plusieurs reprises, et des orbites homoclines.

Les courbes homoclines

Le texte de Chirikov a montré toute l'importance des homoclines, leur lien avec la sensibilité aux conditions initiales, la stochasticité, dans le cadre Hamiltonien. De même Helleman, pour les systèmes non intégrables, associe les comportements très sensibles aux conditions initiales, c'est-à-dire les phénomènes stochastiques, avec la présence de points homoclines [512] . Dans ce cas l'analyse est du ressort des mathématiques des systèmes dynamiques et les résultats peuvent être prouvés mathématiquement. Le pendant dans le cadre dissipatif est un ensemble de résultats numériques obtenus essentiellement pour l'attracteur de Hénon, comme le signale Helleman :

"Le mécanisme responsable du comportement chaotique est similaire à celui d'un système conservatif […] Une nouvelle fois nous trouvons des 'séparatrices' sauvages émanant d'un point hyperbolique, s'entrecoupant en des points 'homoclines' . Une nouvelle fois les "séparatrices" se coupent en une infinité de points en repliant miraculeusement leurs boucles et plis dans les bandes étranges de l'attracteur. Une fois que la présence d'orbite homocline a été établie, on peut montrer l'existence toute proche d'orbites 'quasi-aléatoires' et de sections transverses avec ensemble de Cantor […]" [513]

On voit là le transfert opéré du conservatif vers le dissipatif, avec les réserves qui s'imposent pour ces conclusions appuyées avant tout par des calculs numériques. La notion d'orbite homocline s'introduit comme une clé du concept de chaos, dans le conservatif comme dans le dissipatif.

Dans cet essai de synthèse Helleman ne s'affiche pas comme l'auteur de ce transfert (dont on notera par ailleurs l'analogie avec le procédé employé par Ruelle au sujet des

[511] Helleman consacre un paragraphe au sujet des systèmes Hamiltoniens et de leur SCI (d'ailleurs plus centré sur un début de description des comportements aléatoires, p. 427-432), sans évoquer les exposants de Lyapounov. Il fait seulement quelques autres allusions dans le texte. Pour le dissipatif il annonce plus prosaïquement, en association directe avec les attracteurs étranges : "*Along* the attractor we would still have the sensitive dependence on initial conditions, characteristic of the chaotic region […]i.e. *along* the attractor points can be repelled by each other." [HELLEMAN, R.H.G., 1980b], p. 454 (en italique dans le texte).

[512] Pour reprendre les termes de Helleman, la notion de point homocline est à imaginer dans l'espace des phases du système, en tant qu'intersection des séparatrices stables et instables d'un point hyperbolique, [HELLEMAN, R.H.G., 1980b] p. 434.

[513] "The mechanism responsible for this chaotic behavior is similar to that in a conservative system […] Again we find wild "separatrices" emanating from a hyperbolic point, intersecting each other in 'homoclinic' points . Again, the "separatrices" intersect in infinitely many points while miraculously folding away their loops and plies within the strange bands of the attractor. Once homoclinic points have been established 'quasi-random' orbits and Cantor-set cross-sections can be shown to exist nearby […]" [HELLEMAN, R.H.G., 1980b], p. 463 (en italique et souligné dans le texte).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

attracteurs étranges). Il donne pour références essentielles l'ouvrage de Jürgen Moser (1928-1999) Stable and Random Motions in Dynamical Systems, de 1973, et le "Differentiable Dynamical Systems" de S. Smale, de 1967 [514], déjà mentionné. En croisant ces éléments avec les affirmations de Chirikov et tout ce qui a été évoqué au sujet de Smale, il apparaît que les structures homoclines et leur possible généralisation émanent du travail de Smale, dont il faudra évaluer l'impact, mais dont il est désormais quasiment acquis qu'il est de toute première importance dans toutes les considérations de chaos.

La question des orbites homoclines est perçue comme un point important en association avec le travail de Smale, le "fer à cheval", le mélange d'orbites périodiques et non périodiques. Toute la difficulté tient, là encore, au problème de dépasser le cadre théorique (celui de Smale), pour analyser concrètement, numériquement et analytiquement, des systèmes mathématiques explicites.

Helleman affirme que les deux systèmes modèles, ceux de Hénon et de Lorenz, ont déjà été testés et disséqués afin d'analyser les séparatrices et points homoclines [515]. En effet, les deux physiciens-mathématiciens américains James Kaplan et James Yorke proposent une étude de la transition vers le chaos dans le système de Lorenz et montre à cette occasion qu'il existe une valeur seuil à partir de laquelle le système possède une orbite homocline. A partir de là, selon une démonstration inspirée par Smale, ils mettent en lumière, dans une section de Poincaré, un comportement appelé "fer à cheval brisé", similaire au fer à cheval de Smale : c'est leur argument pour dire qu'il existe une infinité de points périodiques et une infinité non dénombrable d'orbites apériodiques, c'est-à-dire du chaos.

Les orbites homoclines dans le système de Hénon, plus simple à explorer numériquement, font l'objet de beaucoup d'attention. En suivant les idées de Smale, le jeune mathématicien James Curry cherche, et trouve, des homoclines dans le système de Hénon, exclusivement à partir de calculs numériques, en faisant des "expériences" [516]. De manière plus analytique, Frederick Marotto parvient à prouver l'existence d'homocline, pour un domaine très limité de paramètres du système (*b* assez petit) [517], Robert

[514] [MOSER, J., 1973]. Moser correspond à l'initiale M de théorème KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser). [SMALE, S., 1967].

[515] Outre ceux détaillés ici, on peut citer [FEIT, S.D., 1978], [FRANCESCHINI, V., RUSSO, L., 1981].

[516] [CURRY, J.H., 1979a], p. 135-137. Curry utilise ce qu'il appelle le "théorème de Smale" reliant les homoclines aux orbites périodiques et non périodiques, pour "réaliser des expériences" ("we performed the following experiment", p. 135) au sujet des intersections des variétés stables et instables autour des points fixes de la transformation. Ces calculs sont appuyés par une analyse des erreurs numériques permettant de mieux assurer les "évidences" numériques. On peut signaler que James Howard Curry a fait sa thèse avec Oscar Lanford III, dont on a vu la dextérité au sujet des expériences numériques (Ph.D. en mathématiques de l'University of California, Berkeley, 1976 : "Transition to turbulence in finite-dimensional approximations to the Boussinesq equations"). C'est en arrivant au National Center for Atmospheric Research in Boulder, Colorado, qu'il a pénétré vraiment dans l'étude des systèmes dynamiques assistée par ordinateur : une machine CRAY y est arrivée quelques semaines après son entrée comme post-doctorant. Il a réalisé beaucoup de travaux numériques dont [CURRY, J.H., 1980], [CURRY, J.H., 1981]. On peut consulter le document Internet : http://www.maa.org/summa/archive/curryJH.htm

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Devaney et Zbigniew Nitecky [518] pour tout *b* et $a \geq 2(1+|b|)^2$. Pierre Coullet, Charles Tresser et Alain Arnéodo poursuivent, en insistant sur les plages de paramètres où il y a un comportement chaotique (ensemble de Cantor) effectivement observé numériquement [519].

Les homoclines constituent donc un pont historique : les considérations théoriques sont antérieures à la période 1975-82 et nous rappelons que les homoclines ont été nommées ainsi par Poincaré à la fin du XIXème siècle. Elles sont également un pont conceptuel entre le chaos dissipatif et conservatif, aux côtés du fer à cheval de Smale. Il reste à ajouter que ceci se comprend uniquement si nous nous remémorons que le cadre des systèmes dynamiques, le cadre mathématique de fond de ces considérations, transcende la dichotomie conservatif / dissipatif. Il n'est pas étonnant que des thématiques unificatrices en découlent.

Des questions d'ergodicité

Les aspects relevant de l'ergodicité sont plus subtils. Nous avons déjà signalé que les recherches de Ruelle, aussi bien que celles de Li et Yorke, s'inscrivent dans une démarche de théorie ergodique, sans faire allusion à la distinction dissipatif / conservatif. Chirikov suggère très fortement des liens entre la Mécanique statistique, l'ergodicité et les interrogations sur la stochasticité dans les systèmes Hamiltoniens. Le texte de Helleman s'insère également dans une telle perspective de Mécanique statistique [520]. Une petite parenthèse de Helleman traduit bien son sentiment à ce sujet :

"[…] l'existence de régions chaotiques ravira ceux qui cherchent à construire et expliquer la mécanique statistique à partir de la mécanique classique ('théorie ergodique', etc.) […]" [521]

Pour les deux physiciens, la préoccupation pour l'ergodicité est donc directement associée à un projet d'œuvrer pour la Mécanique statistique. L'ergodicité dans le texte de Helleman est d'abord envisagée dans le cadre Hamiltonien. Les résultats et les enjeux se résument par ces quelques mots :

"Il se trouve que l'espace des phases de la plupart des systèmes Hamiltoniens – et beaucoup de systèmes dissipatifs- est ponctué de régions 'chaotiques' où

[517] (*a,b*) sont les paramètres du système de Hénon (cf. p. 206). [MAROTTO, F.R., 1979].

[518] [DEVANEY, R., NITECKI, Z., 1979].

[519] [TRESSER, C., COULLET, P., ARNEODO, A., 1980].

[520] Le texte est d'ailleurs écrit en vue d'un cours d'Ecole d'été internationale de mécanique statistique ("Fundamental problems in Statistical Mechanics") à Enschede (Pays-Bas), du 23 juin au 5 juillet 1980.

[521] "While the existence of chaotic regions will cheer up those who seek to derive and explain statistical mechanics from classical mechanics ('ergodic theory', etc.) it sows terror in the hearts of those designing and building extensive (expensive) mechanical systems, e.g. the multi (–hundred) million dollar intersecting storage rings of high energy physics". [HELLEMAN, R.H.G., 1980], p. 421-22. D'une manière générale, on remarquera que Helleman est très critique de l'"abandon" de ces preoccupations par les physiciens.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

certaines propriétés sont aussi aléatoires qu'un jeu de pile ou face, même si le système est déterministe. Alors que les méthodes statistiques apparaissent applicables à ces régions chaotiques, elles sont incompatibles avec les comportements réguliers, 'quasi-periodique' des autres régions, lesquelles existent aussi en abondance. Ainsi l''Ergodicité' et l''Approche de l'équilibre thermique' ne tiennent pas pour la plupart des systèmes Hamiltoniens." [522]

On constate que Helleman souligne surtout des résultats négatifs, voire des impossibilités. Les enjeux techniques sont les mêmes que ceux détaillés dans le long texte de Chirikov. Tous deux renvoient à plusieurs résultats connus et établis mathématiquement déjà en 1980. Ces résultats font état d'une absence de règle générale, excepté le fait qu'un système Hamiltonien n'est globalement jamais ergodique. Dans le cas intégrable, cela est impossible ; dans le cas non intégrable il existe simultanément des zones chaotiques et régulières (c'est un dérivé du théorème KAM). Nous renvoyons à tout ce qui a été commenté au sujet du texte de Chirikov.

La situation en 1980 est en fait beaucoup plus complexe, non limitée aux systèmes Hamiltoniens et surtout, elle s'inscrit dans une interrogation sur la notion même d'ergodicité. Quelques mots de Smale, toujours en 1980 explicitent, mieux que le résumé qu'Helleman veut en faire, le sentiment à l'égard de la question dans un article intitulé : "On the problem of reviving the ergodic hypothesis of Boltzmann and Birkhoff" (qui laisse sous-entendre que l'hypothèse est quasiment éteinte) :

"Dans les 25 dernières années il y a eu un changement dans les relations de la théorie ergodique aux équations différentielles ordinaires. Auparavant, l'ergodicité était associée uniquement aux équations différentielles ordinaires contraintes comme les Hamiltoniennes (ou celles préservant le volume, au moins). Aujourd'hui ce ne sont plus les systèmes dynamiques Hamiltoniens, mais généraux avec lesquels l'ergodicité s'adapte le mieux. Nous conclurions que la physique théorique et la mécanique statistique ne devraient pas autant être attachées aux équations Hamiltoniennes que par le passé. Pour des raisons physiques, il est certainement raisonnable d'attendre des systèmes physiques qu'ils aient des perturbations non-Hamiltoniennes (peut-être très faibles) dues à de la friction ou des effets de forçage par absorption d'énergie externe. Aujourd'hui des raisons mathématiques suggèrent également qu'il est raisonnable de développer une approche plus non-Hamiltonienne de certains aspects de la physique." [523]

La thèse défendue par Smale est la suivante : pour sauver l'hypothèse ergodique, il faut introduire un terme de dissipation aux équations Hamiltoniennes de la physique. Deux raisons président à cette proposition. D'un côté, les systèmes Hamiltoniens ne sont pas ergodiques en général ; d'un autre, il existe tout une classe d'équations différentielles ordinaires possédant de "bonnes" propriétés, celles d'avoir des attracteurs étranges

[522] ***"It turns out that the phase space of most Hamiltonian- and many Dissipative- systems is dotted with 'chaotic' regions in which some properties of many orbits are as random as coin tosses, even though the system is deterministic. While statistical methods appear to be applicable to those chaotic regions, they are incompatible with the very smooth regular, 'quasi-periodic' behavior in other regions, of which there is abundance as well. Hence 'Ergodicity' and the 'Approach to thermal equilibrium' do not hold for most Hamiltonian systems." [HELLEMAN, R.H.G., 1980], p. 420 (en italique et souligné dans le texte).***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

structurellement stables, avec caractère mélangeant, notamment ; les systèmes vérifiant l'Axiome A de Smale sont de ceux-là. Ils ont l'avantage d'être structurellement stables et nous avons vu que la théorie des attracteurs étranges est adaptée à ces systèmes. Enfin, nous avons signalé l'existence d'un théorème fondamental dû à Robert Bowen (1947-1978) et David Ruelle, qui détermine la **Mécanique statistique de ses systèmes** : à un mouvement sur l'attracteur étrange décrivant le régime asymptotique, il fait correspondre une statistique, c'est-à-dire une distribution de probabilité (en l'occurrence, une mesure ergodique invariante).

Sans vouloir déjà retracer toute l'histoire de l'ergodicité depuis Boltzmann, un rapide retour dans le temps s'impose. Le travail de Ruelle-Takens, une nouvelle fois, a été une des étapes importantes du cheminement présenté par Smale car il a introduit la notion d'attracteur étrange (et a induit beaucoup de débats connexes). Le théorème de Bowen-Ruelle dont il est question ici, date de 1975 [524] ("Ergodic theory of Axiom A flows") et repose sur des analyses de Ruelle et du russe Yakov Sinaï (né en 1935) [525] , dans un contexte d'échanges quasiment limités à des spécialistes de physique-mathématique.

La question de la théorie ergodique prend donc ici une toute autre nuance. Fondamentalement, il s'agit d'une interrogation de Mécanique statistique, reformulée dans le langage des mathématiques des systèmes dynamiques. Ce chapitre, la théorie ergodique des systèmes dynamiques, est le moteur de tout un pan de la réflexion théorique en cours, même si son utilisation en est limitée aux flots vérifiant l'Axiome A de Smale. Le texte de Ruelle de 1977 (sur la sensibilité aux conditions initiales) est peut-être le meilleur représentant de ce mouvement conceptuel associant toutes ces problématiques : ergodicité, chaos, turbulence, sensibilité aux conditions initiales, Mécanique statistique [526] . Nous en aurons d'autres exemples lorsque la question des exposants de Lyapounov sera posée.

d. Vers un nouveau sens du terme chaos

La synthèse de Helleman intègre l'essence de ces éléments dans l'exposé des notions de

[523] ***"In the last 25 years, there has been a turnabout in the relationship of ergodic theory to ordinary differential equations. Previously, ergodicity was associated only to constrained ordinary differential equations as Hamiltonian(or volume-preserving at least). Nowadays it is not the Hamiltonian, but the general dynamical systems where ergodicity is fitting more naturally. We would conclude that theoretical physics and statistical mechanics should not be tied to Hamiltonian equations so absolutely as in the past. On physical grounds, it is certainly reasonable to expect physical systems to have (perhaps very small) non-Hamiltonian perturbations due to friction and driving effects from outside energy absorbtion. Today also mathematical grounds suggest that it is reasonable to develop a more non-Hamiltonian approach to some aspects of physics.", [SMALE, S., 1980], p. 141.***

[524] [BOWEN, R., RUELLE, D., 1975].

[525] Ce sont [SINAI, Y., 1972] et [RUELLE, D., 1976].

[526] Pour des détails sur la lente évolution des résultats entre 1975 et 1980, nous renvoyons à notre paragraphe "Questions d'ergodicité", p. 193 (et aux textes "What are the measures describing turbulence" [RUELLE, D., 1978a], [RUELLE, D., 1978b], [RUELLE, D., 1980b] pour un rapide bilan).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

chaos. Ainsi, la définition de chaos en termes de comportements apparemment aléatoires produits par des mécanismes déterministes est très superficielle comparée à ce qu'elle sous-entend. Peut-être faut-il insister sur ce qui est associé au terme chaos et à la recherche sur le chaos dans le texte de Helleman, pour mieux le comprendre.

Soulignons tout d'abord que le chaos n'est pas présenté seulement pour lui-même. La finalité du texte est à chercher du côté de la Mécanique statistique et de la Mécanique non linéaire. Pour Helleman il s'agit de tirer de l'étude du chaos, et de la stochasticité, des conséquences, des résultats, des propositions d'améliorations de la Mécanique théorique et des chemins conceptuels nouveaux pour la Mécanique statistique.

Le terme chaos est aussi très révélateur de l'**esprit du texte** et de l'esprit du temps. La synthèse de Helleman a, en effet, une tonalité très particulière : elle est marqué par une envie de **rupture** et une volonté de **fédérer** les concepts et les approches, en partie grâce aux systèmes dynamiques.

La rupture est illustrée par le grand nombre de résultats négatifs ou d'impossibilités mis en avant. Cela concerne surtout le domaine du conservatif. Au fond, il s'agit d'une mise au point de ce qui est ancré dans l'esprit des scientifiques et qui doit être remis en question. Ainsi des notions comme l'intégrabilité, les dichotomies trop tranchées ordre / désordre, stabilité / instabilité, qui président à l'étude habituelle des systèmes Hamiltoniens sont battues en brèches : la plupart des systèmes Hamiltoniens sont non intégrables, les comportements ordonnés et stochastiques coexistent, l'ergodicité perd de son sens. A quoi il convient de rajouter le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Mais le propos ici n'est pas novateur, comme cela est perceptible chez Chirikov. Il s'agit de rappels, voire de rappels à l'ordre, au sujet de beaucoup de résultats antérieurs, validés, mais finalement peu diffusés chez les physiciens. Ceci explique la critique sévère de Helleman à l'encontre des ouvrages destinés à la formation des futurs scientifiques :

"Il est très surprenant que, aujourd'hui encore, aucun manuel de mécanique classique pour étudiants avancés en physique, n'ait été publié […] avertissant les étudiants que la plupart des systèmes se comportent de cette manière ou que toutes les méthodes de résolution, présentées dans ces textes, ne fonctionnent pas (divergent) pour la plupart des systèmes Hamiltoniens." [527]

Au contraire, le paragraphe consacré au dissipatif est plutôt enthousiaste. Le tout laisse une impression de rupture avec un certain passé et d'ouverture vers des problématiques renouvelées. Le choix du terme chaos exprime donc, de manière peut-être inconsciente, une volonté de dépasser des idées jugées périmées.

Deuxièmement, nous avons constaté qu'il y a un ensemble de cloisons entre conservatif et dissipatif, au niveau technique naturellement, mais aussi en terme d'approche (analytique / numérique). On pourrait aussi opposer une certaine inertie du conservatif au dynamisme du dissipatif. Mais dans l'esprit de Helleman, sa synthèse se

[527] ***"It is surprising that even today no authoritative graduate-physics textbook on Classical Mechanics has appeared which does show pictures like figure 1, let alone warn student that most systems exhibit such behavior or that all solution methods, derived in its text, fail (diverge) for most Hamiltonian systems", [HELLEMAN, R.H.G., 1980b], p. 421 (en italique et souligné dans le texte).***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

veut fédératrice et réconciliatrice. Voilà le second sens à donner à l'utilisation du terme chaos : il sert à figurer un rapprochement renouvelé, une volonté d'unifier les problématiques sous une bannière unique.

Enfin, les problèmes évoqués sont transversaux. En effet, l'aléatoire émergeant d'un mécanisme est un trait commun à plusieurs domaines d'études, aussi bien pour les systèmes conservatifs que dissipatifs : turbulence, synchrotron, biologie des populations…etc. En un mot, les scientifiques découvrent que le chaos est partout ; le terme chaos inclut cette dimension d'"universalité".

3.4. Un premier bilan sur les concepts de chaos

On peut maintenant rapprocher les dernières conclusions sur le texte de Helleman des considérations de sociologie du champ du chaos. Nouveauté et rupture se retrouvent chez beaucoup de protagonistes dont nous avons mentionné le nom, lorsqu'il s'agit de chaos. Soyons prudent toutefois. Tout d'abord, la rupture n'est pas brutale : il s'agit d'une reconfiguration de problématiques, s'étendant sur quelques années. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que les perceptions de cette nouveauté soient en décalage par rapport à notre analyse plus globale de cette période et qui visait à montrer justement les traits saillants de l'évolution conceptuelle. D'ailleurs, ces impressions ne sont pas partagées par tout le monde, et les changements sont nuancés selon les perspectives de recherches, les disciplines, les thématiques.

Ainsi, ce contexte nouveau est traversé par des tendances lourdes, s'exprimant sur le long terme :

• L'étude des systèmes dynamiques en mathématiques, tant les itérations, les équations différentielles que les systèmes généraux, plus abstraits.

• La question de la turbulence (faible) dans un cadre théorique, mathématique.

• La compréhension des oscillations non linéaires (Mécanique non linéaire).

• La question de l'ergodicité, des fondements de la Mécanique statistique, de la description statistique / probabiliste des systèmes dynamiques.

Le chaos est à la croisée de divers problèmes tirés de ces thématiques. Les ingrédients du chaos sont à l'image de ces rencontres en même temps que la convergence est le reflet des conceptions construites. Ce sont essentiellement :

• les attracteurs étranges (dans le cas dissipatif)

• la sensibilité aux conditions initiales

• les homoclines et le fer à cheval de Smale

• les propriétés statistiques exprimées sous forme de mesures invariantes, ergodiques.

Le terme chaos signe donc autant la nouveauté que le croisement de tendances marquantes dans l'histoire des sciences. Il est aussi fédérateur et unificateur, comme le texte de Helleman nous l'a démontré. Il ne s'agit pas simplement d'un croisement mais de rencontres, de la reconnaissance et de la définition de points communs, tant au niveau

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

des concepts et que des méthodes (qualitatif, expériences de mathématiques), par delà les différences disciplinaires et culturelles.

Il est évident, à la lecture de ce bilan, que ce mouvement a une épaisseur historique certaine. Il nous faudra expliquer pourquoi et comment une rencontre aussi large, touchant autant de domaines a pu se faire, dans les années 1970, autour des questions de chaos. En reparcourant ce premier chapitre on pourrait s'avancer à proposer deux raisons. La première tiendrait à une certaine maturité des développements mathématiques des systèmes dynamiques, que l'on retrouve en filigrane de toutes les avancées conceptuelles. La seconde serait axée sur l'ordinateur, dont on a vu l'omniprésence. Ce sont deux pistes à approfondir ultérieurement.

Enfin, on pourrait être tenté de regrouper toutes ces problématiques en un paradigme. Mais cela nous paraît quelque peu difficile et surtout prématuré au regard des éléments encore manquants dans ce puzzle. Il existe des obstacles comme la dichotomie dissipatif / conservatif : même si nous avons montré que la barrière est partiellement transcendée dans les problématiques de type chaos, il y a tout de même des différences de conceptualisation. En se limitant aux seuls systèmes dissipatifs, nous pourrions proposer de nous restreindre aux attracteurs étranges et à la sensibilité aux conditions initiales. Nous avons beaucoup insisté sur ces éléments tant il est vrai que le cadre théorique du chaos continu s'inspire des idées de Ruelle, développées depuis 1971. Elles sont magnifiées et tendent à former l'ossature principale du chaos (dissipatif) tel que nous l'avons présenté. Nous retrouvons d'ailleurs les conceptions sorties de la vulgarisation produite à l'époque tout comme aujourd'hui. Cela ne doit pas pour autant occulter les disparités qui existent entre différentes notions de chaos et, en même temps, les efforts pour les rapprocher sous une notion unique, universelle. La proposition de définition d'un paradigme ne pourra se faire sereinement que lorsque les voies alternatives dans la conceptualisation du chaos seront bien explicitées.

CHAPITRE 4. PLUSIEURS VOIES POUR LE CHAOS

Nous avons mis en évidence que le terme "chaos" est très symbolique d'un renouveau conceptuel dans les années 1970, à l'intersection de plusieurs problématiques et qu'il signe l'émergence d'un champ de recherches. Cependant, il ne désigne pas une notion unique, simple, sauf à être simplificatrice. Nous allons maintenant montrer que plusieurs notions de chaos et plusieurs regards sur le chaos coexistent avant 1980.

Des perspectives où les mathématiques des systèmes dynamiques prédominent, nous passons maintenant à des exemples qui, soit s'inscrivent dans la même perspective pour la prolonger, soit sont en marge et la complètent d'une autre manière. Ces points de vue sont multiples, mais nous choisissons d'en confronter trois, qui sont essentiels vers 1980. On peut les associer aux noms de David Ruelle, Otto Rössler et Robert Shaw. Les conceptions du premier ont fait l'objet du chapitre précédent. Rössler et Shaw, quant à eux, portent des appréciations décalées, qui leur valent des positions de marginaux dans la période 1975-82. Cependant, leurs propositions, quasiment absentes de

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'historiographie et n'ayant que trop peu attiré les épistémologues, méritent beaucoup d'attention. Nous esquisserons dans le même temps le processus de marginalisation de ces tendances un peu trop alternatives.

4.1. Otto E. Rössler et les mécanismes du chaos

L'allemand Otto Rössler propose le premier un regard très original sur le chaos, alors qu'il surgit à peine des textes de Li, Yorke et Ruelle. Ses travaux, réalisés à partir de 1975 participent au mouvement général de conceptualisation du chaos, tout en étant nettement focalisés sur la question des "mécanismes" générant le chaos. D'une manière un peu réductrice, on peut voir ses recherches comme un transfert analogue à celui suggéré par Ruelle [528] lorsqu'il a exporté la notion d'attracteur étrange aux systèmes différentiels "concrets". Cependant, la notion de chaos développée ici se détache de la perspective "ergodique" précédemment évoquée. Ce sont ces différences d'approche que nous voulons pointer, en montrant comment elles s'inscrivent dans l'histoire personnelle de Rössler, distincte de l'histoire des mathématiques "rigoureuses" des systèmes dynamiques et de la Mécanique statistique incarnée par Ruelle.

O. Rössler

Tout d'abord, le parcours scientifique d'Otto Rössler dans l'histoire du chaos est assez inattendu. Né à Berlin en 1940, il suit une éducation classique avant de se former à la médecine ; il soutient une thèse en 1966, en immunologie. Il s'écarte ensuite progressivement de cette voie initiale, pour s'occuper de biogenèse et d'anthropogenèse [529] , passe l'année 1969-70 au Center for Theoretical Biology à Buffalo, aux Etats-Unis, puis revient en Allemagne, à Tübingen, où il poursuit une carrière universitaire en "biochimie théorique".

Rössler s'oriente vers la problématique du chaos dès 1975. Ce que nous entendons montrer est que, d'une part, son parcours éclectique avant 1975 l'a préparé à être très réceptif à cette nouveauté, d'autre part, qu'il existe une très grande inertie et persistance de ses travaux antérieurs à 1975 dans ses conceptions du chaos.

a. 1969-75 : la Vie, les systèmes dynamiques, les oscillations

Pour commencer, l'intérêt de Rössler pour les équations différentielles, et les systèmes dynamiques, ne date pas de 1975. C'est le fruit de plusieurs rencontres décisives et d'un questionnement personnel sur la notion de Vie. En tant que biologiste, médecin, il est

[528] Cf. chapitre 3, p. 187.

[529] Il fait une incursion en 1966 dans le domaine de la physiologie comportementale au Max-Planck Institute, à Seewiesen (Max-Planck-Institute für Verhaltenphysiologie in Seewiesen, Bavière. Konrad Lorenz en est alors le directeur). Il s'occupe de biogenèse et d'anthropogenèse, en collaboration avec le très célèbre éthologue, et (futur) prix Nobel, Konrad Lorenz (1903-1989). Cette rencontre pourrait passer pour anecdotique, mais de l'aveu de Rössler lui-même, Lorenz fait partie de ces mentors (Entretien avec O.E.Rössler, 14 août 2003, réalisé avec Christophe Letellier).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

facilement compréhensible que Rössler se pose la question de l'origine de la vie. Mais plus que cela, il semble que ce soit un guide dans son orientation vers certains sujets ; un *themata*, si l'on veut, qui sert d'arrière-plan à ses recherches [530] .

La dynamique de la Vie

Le lien entre la Vie et les équations différentielles s'explique par la conception "dynamique" de la Vie qu'il développe progressivement. Diverses illustrations concrètes nous montrent le croisement de ses préoccupations de biogenèse et de système dynamique. Un bon exemple en est son article de 1971, "Un modèle de type 'théorie des systèmes' pour la biogenèse" [531] . Même si l'utilisation de la notion de système dynamique est encore timide, il apparaît clairement qu'il y trouve une façon de faire avancer sa réflexion.

Aussi Rössler se penche-t-il sur les équations différentielles et la dynamique des oscillateurs chimiques en partie pour répondre à ce problème de l'origine de la vie, dont il a déjà donné une formalisation très complexe, en termes d'équations différentielles, à la fin des années 1960 [532] . La simplification du processus et la recherche de mécanismes plus élémentaires sont, à ses yeux, des clés de futurs développements sur le sujet. Ainsi les oscillateurs chimiques (d'un point de vue théorique) sont à la fois de bons candidats et des supports de réflexion intéressants. Les outils des systèmes dynamiques sont des moyens pratiques d'étudier leurs comportements. Cette évolution correspond à un changement dans la prise en compte des phénomènes de Vie : les conceptions à base d'énergie font place à une vision moléculaire des processus. C'est ce qui est signifié dans son autobiographie lorsqu'il pense être

"passé d'une humeur variationnelle à une humeur cinétique, laissant Teilhard de Chardin en arrière et entrant dans une vision centrée sur la chimie et en conséquence, une vision cinétique, ou de manière équivalente, dynamique." [533]

Cette conversion n'est pas totale au sens où il n'y a pas d'adhésion complète à une forme de réductionnisme moléculaire. Au contraire, et le développement des théories dynamiques de Rössler nous le montrera, un regard "global" sur les mécanismes des réactions chimiques comme dans les mathématiques de la dynamique est persistant dans son travail.

[530] S'il s'occupe de biogenèse à Seewiesen en 1966, son intérêt à ce sujet est encore plus ancien ; l'anthropogenèse, la collaboration avec K. Lorenz sont des éléments à inscrire dans cette perspective. Pour plus de détails, nous renvoyons aux éléments biographiques et autobiographiques publiés dans [LETELLIER, C., à paraître].

[531] "Ein systemtheoretisches Modell für Biogenese" [RÖSSLER, O.E., 1971].

[532] Pour en donner une idée, les mécanismes font appel à 10^{100} équations différentielles. Le texte n'a pas été publié à l'époque. Il sera republié dans l'ouvrage [LETELLIER, C., à paraître].

[533] "So I went from the variational mood to the kinetic one, leaving Teilhard de Chardin behind and entering the chemical-centered view and, therefore, the kinetic or, equivalently, dynamic view.", in [LETELLIER, C., à paraître]. L'humeur "variationnelle" renvoi aux conceptions de la physique construites sur les principes variationnels (par exemple le principe de Fermat, de Maupertius, qui sont des principes extrémaux).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

L'allusion à Teilhard de Chardin n'a rien d'une anecdote puisque Rössler affirme avoir puisé dans son œuvre pour se construire une vision dynamique de la Vie [534] . Cette affirmation, et celles qui suivent, s'appuient en partie sur l'autobiographie scientifique de Rössler et l'interprétation proposée dans [LETELLIER, C., à paraître] [535] .

On peut comprendre à la lecture du Phénomène humain de Teilhard de Chardin qu'il puisse trouver dans cette théorie de l'Evolution un parallèle à ses conceptions sur la Vie. Rössler affirme ainsi :

"[…] si vous voulez, j'ai réinventé les idées de Teilhard sur la complexification lorsque j'ai vu que la dynamique d'une flamme est la même que celle de la vie ; elle est seulement plus monotone : elle ne peut pas se complexifier. Mais autrement, c'est le même phénomène." [536]

Teilhard développe en effet une idée d'"Expansion de la Vie" reposant sur un ensemble de procédés que la vie utilise pour avancer [537] . Ce sont des "mouvements élémentaires", parmi lesquelles il inclut : Reproduction, Multiplication, Rénovation, Conjugaison, Association, Additivité dirigée. Il est intéressant de noter que Teilhard s'intéresse aux "mouvements" de la Vie. On peut affilier l'esprit de "dynamicien" que Rössler cherche à se forger et sa description de la Vie en termes dynamiques, à la perspective développée par Teilhard. Ce pourrait être un appui heuristique important dans la pensée de Rössler. En poussant l'interprétation plus loin, pourquoi ne pas imaginer que les termes mêmes de la théorie dynamique construite par Rössler trouvent leur pendant dans les "mouvements" de Teilhard : c'est l'interprétation de C. Letellier. Il est fort possible que Teilhard ait laissé des traces dans les conceptions de Rössler (celui-ci est d'ailleurs prêt à admettre de telles hypothèses [538]). Mais nous nous bornerons pour notre part à l'interprétation heuristique, car les affirmations plus ambitieuses, tout à fait compréhensibles et très tentantes, ne reposent pas encore sur suffisamment d'arguments tangibles à notre avis.

Robert Rosen (1934-98) : vers les systèmes dynamiques

L'intérêt prononcé de Rössler pour la dynamique a été fécondé par la rencontre, décisive, avec Robert Rosen lors de son passage aux Etats-Unis, à Buffalo, en 1969. Rosen cultive une affinité essentielle avec Rössler : un double intérêt pour les mathématiques et la Vie [539] . Rosen est un biomathématicien, issu de l'école de Nicolas Rashevsky (1899-1972) [540]

[534] Pour des détails sur ses conceptions, [LETELLIER, C., à paraître]. Rössler a découvert Teilhard au début des années 1960. Il évoque un ouvrage principal, Le phénomène humain ([TEILHARD DE CHARDIN, P., 1955]).

[535] Merci à Christophe pour la communication de beaucoup de documents clés (et les discussions).

[536] "So if you wish I reinvented this idea of Teilhard's of complexification when I saw that the dynamics of the flame is the same as if there was life, only it is more monotonous: it cannot complexify. But otherwise, it is the same phenomenon", voir l'autobiographie dans [LETELLIER, C., à paraître].

[537] [TEILHARD DE CHARDIN, P., 1955], Chapitre 2 (La Vie), p. 95 (L'expansion de la Vie) et p. 96 (Les Mouvements élémentaires de la Vie).

[538] [LETELLIER, C., à paraître].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

, lui-même directement impliqué dans ces questions de biologie-mathématique. Il joue un rôle important dans la progression de Rössler, pour une raison principale. Nous pouvons dire, de manière très concise, que Rosen a fait découvrir et "inculqué" la théorie qualitative des systèmes dynamiques à Rössler. D'ailleurs ce dernier retient l'ouvrage Dynamical System theory in Biology de Rosen, publié en 1970, comme un des meilleurs sur la question des systèmes dynamiques [541] .

Ce traité est remarquable à plusieurs points de vue car son contenu est atypique pour l'époque et il l'est encore aujourd'hui. En 1970, les ouvrages consacrés aux systèmes dynamiques sont rares, et celui-ci est précieux car il traite déjà des potentialités pour la biologie théorique. La présentation de Rosen donne des clés originales pour la biomathématique et pour la théorie des oscillations, développée jusque là dans le cadre de la Mécanique et de l'électronique. L'intérêt pour Rössler est quasiment évident.

A son retour de Buffalo en 1970, Rössler élargit encore sa culture, à travers la lecture de Rosen et de quelques classiques de la théorie des oscillations : le Theory of oscillators d'Andronov, Vitt et Khaikin, le Nonlinear Oscillations de Minorsky [542] . On peut dire alors que sa formation théorique mathématique est relativement complète pour l'époque : théorie qualitative des équations différentielles, théorie des bifurcations, Mécanique non linéaire et théorie des oscillations [543] . Cet épisode est un cap déterminant dans la vie scientifique de Rössler : son intérêt pour la biogenèse, pour les oscillateurs chimiques s'intègre maintenant dans un cadre théorique mathématique, lui ouvrant la voie à des analyses approfondies.

Tübingen, 1970-75

L'impulsion donnée par Rosen laisse des traces très visibles dans les travaux de la période 1970-75, que Rössler passe à Tübingen. Le sujet principal de ses investigations

[539] Son dernier ouvrage, Life itself : a comprehensive inquiry into the nature, origin and fabrication of life, traite de ce problème : [ROSEN, R., 1991].

[540] Rashevsky a été son directeur de thèse. Les théories de Nicolas Rashesky s'inscrivent dans deux courants : la biophysique et les mathématiques. Dans son ouvrage Mathematical Biophysics il montre l'intérêt de l'approche mathématique des phénomènes de la vie [RASHEVSKY, N., 1938]. Il est le chef de file de l'Ecole de Chicago, (où il enseigne) concentrée sur cette discipline, et édite d'ailleurs la revue Bulletin of Mathematical Biophysics. Voir [SEGAL, J., 1998], p. 164-168 pour plus de détails sur l'Ecole, ses études du fonctionnement du neurone et le lien avec les représentations logiques du cerveau.

[541] Encore aujourd'hui. Entretien avec O.E. Rössler, 14 août 2003, réalisé avec C. Letellier. L'ouvrage est : [ROSEN, R., 1970].

[542] Les ouvrages [ANDRONOV, A.A., VITT, A.A., KHAIKIN, S.E., 1966] et [MINORSKY, N., 1962].

[543] En sus, il faut mentionner que Rössler a eu un intérêt de jeunesse (depuis le lycée) pour l'électronique et la radio amateur. Sans en exagérer l'importance, il n'est pas impossible qu'une certaine intuition des circuits électroniques et de leurs oscillations ait pu lui être utile dans son approche des problèmes oscillatoires en général. Son intérêt pour les ouvrages d'Andronov et Minorsky s'explique également par leur composante électronique importante. Lettre de O.E. Rössler à l'auteur, 16 septembre 2003. Voir également [LETELLIER, C., à paraître].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

est la dynamique des oscillations chimiques, étudiée dans le détail par Rössler. Bien sûr les outils des systèmes dynamiques sont utilisés, mais il est important de saisir qu'une nouvelle pratique scientifique se développe à ce moment là, à Tübingen : c'est une combinaison de mathématiques et d'ordinateur, dont les résultats sont très remarquables.

Nous allons montrer cette pratique à l'œuvre, comment elle se combine à un raisonnement analogique et surtout en quoi elle permet à Rössler de fonder un cadre théorique à la dynamique des oscillateurs chimiques. Son importance sera révélée lors du passage aux considérations sur le chaos.

La recherche en matière d'oscillations chimiques [544] est entreprise à Tübingen dès 1970 avec un collaborateur à l'université, Friedrich Franz Seelig. Rössler a connu Seelig à Marburg avant de partir pour Buffalo. Il est un spécialiste de chimie quantique, réorienté dans les oscillations chimiques à la fois par les discussions avec Rössler et par les suggestions de son ancien directeur de thèse. Seelig publie rapidement deux articles dans ce domaine neuf, un premier contenant un exemple d'oscillateur à 5 variables, un second avec 3 variables [545] .

L'activité de ce binôme présente deux facettes : une réflexion théorique sur les systèmes chimiques susceptibles de produire différents comportements dynamiques, dont des oscillations, et l'étude détaillée de systèmes donnés. La réaction de Belousov-Zhabotinsky est le meilleur exemple de ces systèmes explorés théoriquement et utile pour recueillir des données expérimentales. Cette réaction est introduite à Tübingen par l'intermédiaire d'un collègue biologiste, Wolfgang Engelmann, en 1970, qui leur a montré une variante de la réaction dans laquelle les couleurs des produits oscillent. Par ailleurs, Rössler a participé au congrès international de Biophysique à Moscou, en août 1971. Il y fait la connaissance d'Anatol Zhabotinsky et d'autres biophysiciens comme Evegny Sel'kolv, Ullrich Franck [546] . La réaction de Belousov-Zhabotinsky va devenir un sujet d'étude récurrent à Tübingen.

La dimension théorique des recherches de Rössler dans cette période s'exprime au mieux dans son article de 1972, "Circuits de base pour les Automates fluides et les systèmes à relaxation", où il ne manque pas de s'inscrire dans la lignée des travaux de Lotka qui avait en effet, produit le premier mécanisme chimique abstrait susceptible de décrire une oscillation [547] . L'idée présentée est très séduisante puisque Rössler prétend donner des bases de l'étude abstraite des comportements dynamiques dans les réactions chimiques. Rössler expose un ensemble de systèmes prototypes susceptibles de produire

[544] Pour l'histoire des oscillations chimiques et pour comprendre l'importance des problématiques adjacentes dans l'histoire du chaos, nous renvoyons au court chapitre 10 consacré au sujet.

[545] Voir [LETELLIER, C., à paraître], en particulier ce qui concerne l'article "Bifurcation of a homogeneous reaction system".

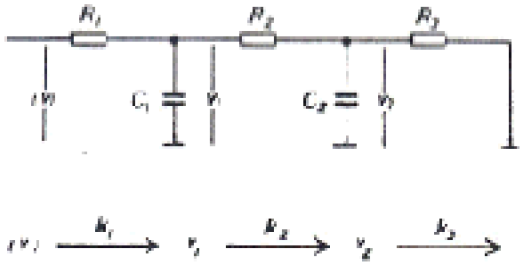
[546] [LETELLIER, C., à paraître]. A ce moment là Zhabotinsky a confirmé la possibilité d'oscillations entretenues dans la réaction de Belousov, qui devient par la suite réaction de Belousov-Zhabotinsky.

[547] [ROSSLER, O.E., 1972a] : "Grundschaltungen von flüssigen Automaten und Relaxationssystemen". Rössler fait allusion, page 333, à [LOTKA, A.J., 1920a]. Les travaux de Lotka sur les oscillations chimiques sont analysés au chapitre 10, p. 609.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

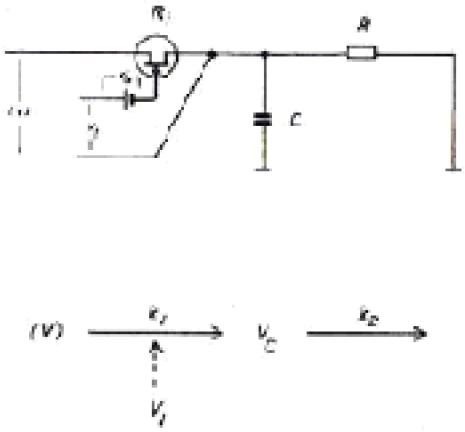
différents types de comportements : bascule, oscillations multiples, flip-flop, oscillations de relaxation. Ils forment une sorte d'**ensemble de systèmes fondamentaux pour les circuits chimiques**. A partir de ces circuits élémentaires, il est possible de construire, selon un **principe d'assemblage**, des comportements d'une aussi grande complexité que souhaitée. Cette théorie a son analogue en matière de circuits électroniques : Rössler s'inspire de ce domaine, qu'il connaît par ailleurs, et en transfert le principe à la chimie [548]. L'analogie entre les deux formes de circuits n'est pas anecdotique. Elle est considérablement développée dans un article de synthèse de 1974 sur les dynamiques chimiques : "A synthetic approach to exotic kinetics (with examples)" [549]. Aux composants et circuits électroniques "classiques" correspondent des mécanismes chimiques abstraits dont voici quelques exemples :

• des chaînes de circuits RC sont les analogues de cinétique chimique du premier ordre, où les concentrations correspondent à la tension aux bornes du condensateur :



[RÖSSLER, O.E., 1974], p. 547.

• un amplificateur chimique non-inverseur :



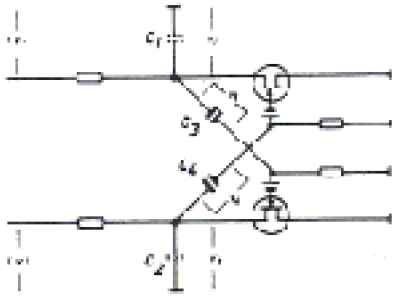
[RÖSSLER, O.E., 1974], p. 549.

• un multivibrateur d'Abraham-Bloch :

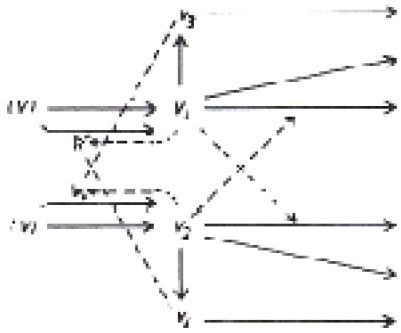
[548] "Es existiert damit auch für bestimmte chemische Systeme ein *Bausteinprinzip*, wie es bisher nur aus der Elektronik geläufig war." (en italique dans le texte), [ROSSLER, O.E., 1972a], p. 342.

[549] [RÖSSLER, O.E., 1974].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.



[RÖSSLER, O.E., 1974], p. 555.



Un regard rétrospectif sur son activité lui fait dire qu'il pratiquait une sorte d'"électronique chimique" [550] . En outre, ces développements aident à comprendre la démarche de Rössler qui se veut avant tout intuitive et **analogique**.

"Trois sources pour générer de nouveaux circuits chimiques avec des comportements dynamiques non triviaux, i.e. exotiques, sont présentées au début : (a) l'analogie avec les circuits électroniques ; (b) l'analogie avec les éléments neuronaux, et (c) l'analogie avec des circuits chimiques déjà existants, inventés par des biophysiciens mathématiciens." [551]

Le raisonnement analogique est extrêmement important.

L'autre dimension intéressante réside dans l'utilisation de l'ordinateur, présent à Tübingen depuis 1970. Cela est facilement perceptible dans plusieurs travaux de théorie des oscillations, menés avec Seelig. Il s'agit de la question des "flip-flop", c'est-à-dire des systèmes chimiques à deux états qui peuvent basculer vers l'un ou l'autre état sur commande d'un ou plusieurs paramètres. Deux modèles sont étudiés. Un système commandé par un seul paramètre, servant au basculement dans les deux sens : les deux collaborateurs s'exercent sur l'ordinateur IBM 7094 du centre de calcul de Darmstadt à ce sujet. Le second est un système de Rashevsky-Turing, où le flip-flop correspond à un système à deux composantes (deux cellules) couplées. C'est en jouant sur le paramètre

550 "We helped each other through our shared enthusiasm for a "chemical electronics", as I would call it today". Lettre de O.E. Rössler à l'auteur, 16 septembre 2003.

551 ***"As an aid for intuition, three sources for the generation of new chemical circuits with non-trivial, i.e. exotic, dynamical behaviour are offered at the outset: (a) the analogy to electronic circuits ; (b) the analogy to neural elements; and (c) the analogy to already existing chemical circuits, invented by mathematical biophysicists." [RÖSSLER, O.E., 1974], p. 546.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

du couplage qu'on peut faire permuter le système. Une machine analogique, un Dornier 240, de l'université de Tübingen est utilisée à cette fin.

Toutes les "preuves" du comportement flip-flop des systèmes construits de manière abstraite, implémentés sous forme de systèmes différentiels, sont en fait le résultat de calculs analogiques et numériques. Le recours à ces ordinateurs s'explique naturellement par la "complexité" des équations différentielles. Elles sont peu nombreuses (4 ou 5) mais contiennent plusieurs non linéarités, rendant le traitement analytique quasiment impossible. On voit aussi que l'ordinateur ouvre de nouvelles voies à l'analyse des réactions chimiques, reposant sur l'utilisation couplée de modélisation et de simulation.

La combinaison de mathématiques et de calculs numériques est aussi très perceptible dans l'étude de la réaction de Belousov-Zhabotinsky réalisée avec un assistant de Seelig, Dietrich Hoffman, et publiée en 1972. Rössler a connaissance du modèle "Bruxellateur", à deux dimensions, pour cette réaction [552] ; il va développer des idées sur des systèmes de dimensionnalité supérieure. La question sous-jacente à leur article de 1972 [553] est de déterminer le type d'oscillation de relaxation existant dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky. Ils donnent des arguments, qualitatifs, reposant sur une analyse mathématique et des simulations numériques, en faveur d'une oscillation de type Bonhoeffer. Les oscillateurs qu'ils désignent sous ce nom possèdent une boucle d'hystérésis et impliquent une autocatalyse [554]. Ce sont là des conditions suffisantes pour produire des cycles limites, à la base des oscillations de relaxation conçues notamment par B. Van der Pol. L'analyse qualitative est complétée par des notions sur le phénomène de bifurcation. Pour cela les auteurs s'appuient sur le texte de Minorsky, renvoyant également aux "sources", Andronov et Poincaré. Les auteurs se réfèrent également aux idées de R. Thom : ils présentent leur résultat comme un analogue des systèmes morphogénétiques de Thom en voyant chez lui une extension possible de leur théorie [555]. Il existe toutefois une différence notable entre les approches : le quantitatif, passant par la simulation numérique, est essentiel ici pour démonter les mécanismes, même si le travail reste dans le champ théorique.

En résumé, trois ingrédients déterminent cette étude de la réaction de Belousov-Zhabotinsky : les observations expérimentales, l'analyse qualitative et mathématique, et les simulations numériques, réalisées sur un CDC 3300 de l'université de Tübingen. La combinaison de ces trois aspects commence à partir de 1970 et produit

[552] Ilya Prigogine est intervenu en 1972 à Tübingen sur le sujet. [LETELLIER, C., à paraître]. Le "Bruxelateur" (ou "Brusselator" en anglais) compte parmi les "circuits de base" de sa théorie : [ROSSLER, O.E., 1972a], p. 341. Le chapitre 10 apportera plus de détails sur ces travaux (voir en particulier p. 624).

[553] [RÖSSLER, O.E., HOFFMAN, D., 1972d].

[554] Karl Friedrich Bonhoeffer (1899-1957), sans donner ce nom à ce type d'oscillateurs, a décrit ces comportements en 1943. [BONHOEFFER, K.F., 1943]. Nous renvoyons au chapitre 10 consacré aux oscillations chimiques, notamment p. 613.

[555] Thom est cité dans [RÖSSLER, O.E., HOFFMAN, D., 1972], p. 99-102 : "Homogeneous reaction systems pushing themselves through a series of hard bifurcations are one dimensional analogues to the systems described by Thom's theory".

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

des résultats remarquables. Il faut souligner à quel point le groupe s'empare de l'ordinateur, pour quasiment le substituer aux analyses expérimentales et marginaliser progressivement les observations. Le trait le plus remarquable de cet ensemble d'études est le fait de pratiquer des mathématiques "qualitatives", usant de la théorie des systèmes dynamiques développée avant 1970, tout en cherchant des résultats quantitatifs, guidés par ce qualitatif. Ainsi, ils obtiennent des points d'ancrage pour l'étude, assurant et orientant, si besoin est, la démarche théorique. Cette pratique est assez singulière encore en ce début des années 1970, dans le domaine de la chimie surtout ; il en existe des traces dans d'autres domaines de l'investigation scientifique [556] . Nous allons voir à quel point cette démarche et le raisonnement analogique sont décisifs pour les études sur le chaos après 1975.

b. 1976 : le tournant vers le chaos

L'entrée dans le thème de recherche du chaos s'opère en 1975, à la suite d'échanges avec Arthur Winfree. Nous sommes à un tournant de la carrière de Rössler. Comme lui, le biologiste Winfree a un parcours atypique, qui l'a conduit à effleurer la question du chaos. La rencontre et les affinités entre les deux hommes méritent d'être soulignées pour bien expliquer l'inflexion des recherches de Rössler.

Art Winfree (1942-2002)

Avant de s'engager dans sa voie de prédilection, la biologie, Winfree a été formé à l'"ingénierie physique" [557] . Ainsi son premier travail, publié en 1967, concerne-t-il les phénomènes collectifs et de synchronisation d'une "population" d'oscillateurs électriques couplés entre-eux [558] : il s'agissait à la base de produire un modèle de cellules, avec des activités rythmées différenciées, propre à représenter des phénomènes collectifs en biologie, comme ceux des cellules cardiaques. Peu de connaissances mathématiques ou théoriques étant développées à ce sujet, Winfree a construit son modèle pour mettre en évidence des comportements. Le modèle est un gros circuit électrique (réalisé concrètement). Il repose sur une analogie biologique-électrique au sens où les oscillateurs biologiques sont remplacés par des oscillateurs électriques. Le travail possède une dimension théorique, construite sur la base d'une modélisation mathématique, et faisant appel à la dynamique non linéaire, la Mécanique statistique et à des notions de transition de phase. Même si cette étude est laissée de côté par Winfree, elle servira à lancer d'autres études importantes [559] . On voit en quoi ce biologiste théoricien se rapproche du profil de Rössler et de ses collègues.

Winfree est intervenu de plusieurs manières dans le parcours de Rössler. Leur

[556] Pour l'histoire de cette pratique, en rapport avec l'électronique, les oscillations non linéaires, la mécanique non linéaire, nous renvoyons aux chapitres 8 (centré sur les oscillations non linéaires et le calcul analogique) et 9 (pour l'utilisation du calcul digital).

[557] "Physical engineering". Voir les deux courtes biographies publiées sur Winfree : [WINFREE, A.T., 2003a], [WINFREE, A.T., 2003b].

[558] [WINFREE, A.T., 1967].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

première rencontre en 1973 a permis à Rössler de découvrir directement chez Winfree (à Purdue University, dans l'Indiana, Etats-Unis) les expériences sur les oscillations spatiales dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky, c'est-à-dire la formation d'ondes, de spirales se déplaçant dans le dispositif chimique [560].

En 1975, c'est encore Winfree qui lui fournit les publications (et prépublications) des résultats connus en 1975, y compris les tout récents articles de Li, Yorke et May dans la thématique du "chaos" [561]. Cette initiation de 1975 va de paire avec des explications directes de Winfree sur le sujet ; celui-ci souhaitait en fait s'engager, lui aussi, vers cette question [562]. Enfin, Rössler revient de ses rencontres avec Winfree poussé par une sorte de défi, celui de trouver un système chimique réactionnel reproduisant le système de Lorenz.

Une fin d'année décisive : le premier article de Rössler sur le chaos

D'une certaine manière, au regard de la culture de Rössler en matière de dynamique, la rencontre avec Winfree est d'abord informative. Cependant, les résultats des publications qui lui sont transmises sont très nouveaux pour Rössler et l'idée de chercher un oscillateur chimique analogue au système de Lorenz est finalement un bon moyen de s'insérer dans la problématique du chaos et de la turbulence.

Il n'est donc pas très étonnant qu'à la fin de l'année 1975, les analyses de Rössler se précipitent pour donner un système de réaction manifestant un comportement "chaotique" [563]. On peut dire que Rössler livre ainsi un premier article en 1976 dans lequel toute sa culture scientifique, esquissée précédemment, s'exprime de manière remarquable. C'est ce que nous voulons montrer : tous les éléments antérieurs à 1975 se conjuguent pour

[559] Rappelons que dans les années 1960, les oscillations non linéaires connues et étudiées se limitent à des systèmes singuliers ou à deux oscillateurs couplés. Pour un grand nombre d'oscillateurs, les méthodes classiques (Van der Pol, Minorsky…etc.) ne donnent pas de résultats. En outre, Winfree opère une approximation dans son modèle qui servira de base aux études des oscillateurs en biologie : les amplitudes des oscillations sont supposées quasiment constantes ; seules les phases entrent en ligne de compte. L'expérience de Winfree lance un problème nouveau, le "modèle de phases", dont les développements mathématiques importants sont dus notamment à Yoshiki Kuramoto au Japon (et quelques autres). Voir [WINFREE, A.T., 2003b].

[560] La rencontre est mentionnée dans l'autobiographie de Rössler, [LETELLIER, C., à paraître]. Les oscillations du dispositif de Winfree sont rapportées dans l'article : [WINFREE, A.T., 1972].

[561] Rössler et Winfree se retrouvent au colloque de Vienne de 1975 (Human Ecology Meeting). Parmi les articles transmis par Winfree il y a celui de Lorenz (1963), de May (1974), Li et Yorke (1975, en prétirage), un article de. Smale de 1965 (contenant l'exemple du fer à cheval : [SMALE, S., 1965]).

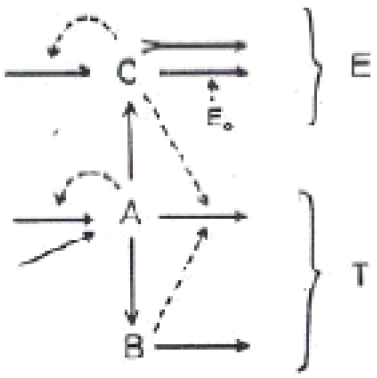
[562] Ce passage est raconté par Rössler dans [LETELLIER, C., à paraître].

[563] "Chaotic behavior in Simple Reaction Systems". [RÖSSLER, O.E., 1976a]. L'article est rédigé dans les derniers jours de 1975. Rössler explique qu'il a été mis "sous pression" à la suite d'une intervention dans un séminaire à Tübingen. Il avait alors choisi de présenter quelques idées pour réaliser son système, sans les équations : un de ses collègues aurait alors affirmé vouloir reprendre l'idée pour trouver lui-même les équations nécessaires afin de les publier. [LETELLIER, C., à paraître].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

aboutir à la constitution d'une conception particulière de chaos et d'une démarche propre à Rössler. Sa première publication en laisse deviner les grandes lignes.

A un premier niveau, le résultat du travail publié en 1976 est un système différentiel de trois équations. Il correspond à un mécanisme chimique abstrait, bâti à partir de ses circuits élémentaires. En l'occurrence, il s'agit d'une bascule d'Edelstein (système à hystérésis à une variable) couplée à un oscillateur de Turing (un système chimique oscillant à deux variables).



$$\dot{a} = k_1 + k_2\, c - (k_3\, b + k_4\, c)\, a/(c + K)$$
$$\dot{b} = k_5\, a - k_6\, b\,,$$
$$\mu\, \dot{c} = k_7\, a + k_8\, c - k_9\, c^2 - k_{10}\, c/(c + K')$$

[RÖSSLER, O.E., 1976a], p. 260

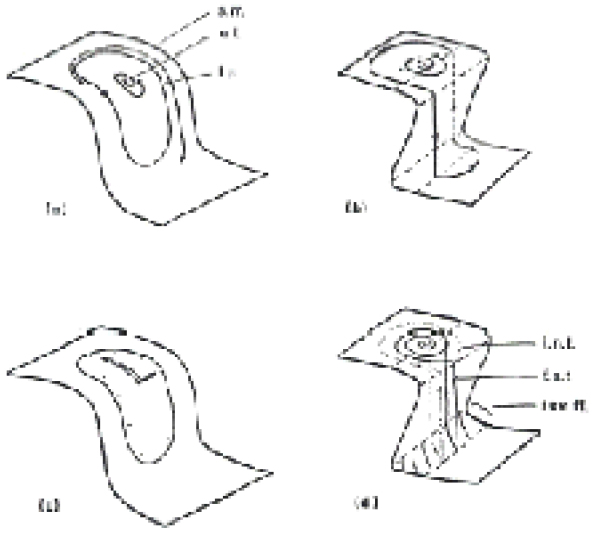
L'intérêt de l'article réside à un autre niveau, celui de l'analyse du comportement dynamique et du principe de génération de chaos, concentré dans un "prototype dynamique". L'étude du comportement du système repose sur deux outils : une application de Poincaré et le théorème de Li et Yorke. Rössler prend la voie de Lorenz, qui avait étudié une application de premier retour de son système et montré qu'elle prenait une forme de chapeau [564]. Or le problème posé initialement par Rössler est la recherche d'un analogue du système de Lorenz, dans le cadre des réactions chimiques. L'idée de Rössler est de s'appuyer sur l'application en forme de chapeau : pour s'assurer d'un comportement similaire à celui du système de Lorenz, il s'engage donc à rechercher un comportement dynamique, en trois dimensions, dont une application de Poincaré reproduit cette forme.

L'aspect inattendu du travail de Rössler tient dans la "recette" qu'il fournit pour obtenir ces comportements, et d'autres plus généraux, qualifiés de chaotiques.

La base de travail provient des "circuits universels" développés par Khaikin, Andronov et Vitt, représentés dans l'espace des phases (figure (a) et (b) ci-dessous). Ces circuits sont des extensions d'une dynamique planaire et par une légère modification de la surface de support, on peut obtenir des comportements un peu plus évolués. C'est en jouant sur ces principes que Rössler fait émerger un possible mécanisme de " **réinjection**" des trajectoires (figure (d)) du niveau inférieur dans le plan supérieur.

[564] L'application de Lorenz est de la forme :

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.



[RÖSSLER, O.E., 1976a], p. 260

Fig. 1. Main trajectorial flow of a universal circuit. a) Nearly linear mode. b) Relaxation mode. c) Analogous "Soft Watch" (after Salvador Dali's synonymous painting, 1933). d) Chaos-producing mode (see text). s.m. = slow manifold, u.f. = unstable focus. l.c. = limit cycle, the intermediate part of slow manifold in (b) and (d) is unstable, f.s.t. = "first switched trajectory", L.n.t. = "last nonswitched trajectory", rev.fl. = reversed direction of flow "downstairs".

Rössler a recours au théorème de Li et Yorke pour montrer que cette réinjection permet d'obtenir un "chaos". En effet, l'application de Poincaré du système de la figure (d) (prise selon une section dans le plan supérieur) a la forme de chapeau recherchée et répond aux hypothèses du théorème de Li et Yorke (il existe un point de période 3). C'est pourquoi il prend la liberté de parler de chaos pour cette dynamique. **Par ce biais, Rössler transfère la technologie des applications discrètes, et le chaos tel qu'il a été présenté par Li et Yorke , dans le domaine du continu**.

L'étape suivante est cruciale : Rössler passe aux réactions chimiques. De son expérience des oscillations chimiques, il retire une possible combinaison de circuits chimiques reproduisant la "recette" : un oscillateur et une bascule, correspondant schématiquement, sur la figure (d), à l'oscillation dans le plan supérieur et à la "réinjection" du plan inférieur vers le plan supérieur. Ce sont les mécanismes de l'oscillateur de Turing couplé à la bascule d'Edelstein.

Il lui suffit ensuite de déterminer les équations différentielles de la réaction pour obtenir un système dynamique "concret", explicite. En retour, ce sont les simulations numériques du système trouvé ainsi qui permettront d'assurer le bien-fondé de tous ces raisonnements. Grâce à une représentation graphique des simulations, on "voit" que le système possède la double propriété : des oscillations et une réinjection. Sur ce point là, on peut percevoir le rôle de la troisième dimension dans la représentation [565] . Sur la figure (d) la réinjection passe par une dimension supplémentaire à la surface d'appui ; or par un système astucieux, les simulations analogiques du modèle de mécanisme

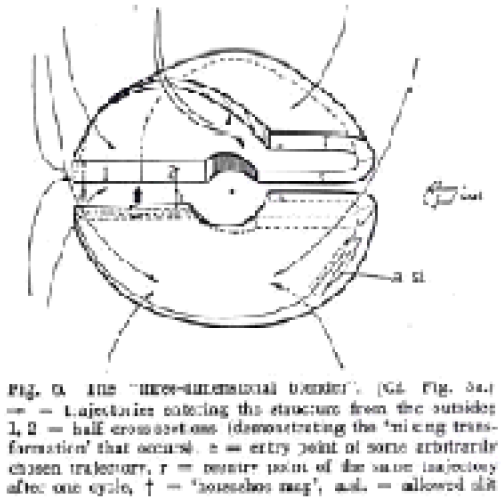
[565] C'est un élément important à retenir, dans la mesure où la troisième dimension joue, selon Rössler, un rôle capital dans la question du chaos ([RÖSSLER, O.E., 1976a], p. 261). Voir aussi notre paragraphe "Une perspective atypique", p. 270.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

chimique peuvent se représenter en une image stéréographique : des yeux exercés peuvent visualiser directement en relief la dynamique. Rössler a ainsi une "preuve" que sa recette n'est pas qu'une pure spéculation.

Mais, le passage aux équations différentielles explicites, à trois variables, change la nature du problème. En effet, la "recette" figure un cas "idéal" combinant une oscillation en deux dimensions à une réinjection par la troisième. Les équations différentielles sont des objets mathématiques à trois dimensions, entièrement couplées, qu'il n'est pas possible de scinder en ces deux sous-systèmes. La section de Poincaré n'a aucune raison d'être unidimensionnelle, l'application de Poincaré construite n'est plus une itération et donc les théories de Li et Yorke ne peuvent plus être utilisées directement. Le procédé heuristique, l'analogie entre la chimie et la dynamique sont très remarquables, mais ont aussi leurs limites en l'état.

Néanmoins Rössler trouve une parade en introduisant de nouveaux éléments mathématiques de la théorie des systèmes dynamiques. Le fer à cheval de Smale (ou la transformation du Boulanger) prend le relais du théorème de Li et Yorke. Rössler remarque en effet que l'application de Poincaré, bidimensionnelle, est similaire au fer à cheval. La combinaison avec les développements précédents se résume dans le mécanisme présenté par Rössler sous le nom de "mixeur à 3 dimensions" [566].



[RÖSSLER, O.E., 1976a], p. 262.

Ceci est un modèle épuré des représentations graphiques des simulations numériques obtenues grâce au premier système différentiel. Le principe de réinjection est incorporé au mixeur. Le mixeur se veut aussi un analogue de la figure (d) (vue à l'envers).

Le fer à cheval apparaît très clairement. Dans la coupe du mixeur, on voit s'opérer la transformation de "*1-2*" en "*T-S*" dans la partie supérieur du mixeur, puis un écrasement de "*T-S*" et un retour en face de "*1-2*" : il s'agit d'un mécanisme analogue au fer à cheval combinant étirement et repliement. Rössler voit même son exemple comme une illustration du principe de suspension de Smale, c'est-à-dire un flot en trois dimensions dont l'application de Poincaré en deux dimensions est un fer à cheval, ce qui était un

[566] "Three-dimensional blender" [RÖSSLER, O.E., 1976a], p. 262.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

problème posé par Smale [567] . Il est clair que ces considérations se rapprochent des idées de Ruelle (Lanford), Pomeau et d'autres, à la différence près qu'ici c'est l'heuristique qui prime et permet d'avancer très loin.

En outre, les principes dégagés par Rössler lui autorisent des prolongements "simples" comme une liste de réactions chimiques abstraites candidates au comportement chaotique, construites sur la "recette" : un système oscillant et une bascule. Le principe de réinjection, possible seulement à partir de trois dimensions, lui permet cette conclusion :

"Le chaos peut être classé comme une propriété dynamique émergeant avec la troisième dimension. En ce sens, c'est une 'super-oscillation'. La question de savoir si des sauts qualitatifs similaires sont promis par les dimensions supérieures est une question ouverte." [568]

Cet article de Rössler s'inscrit donc, d'une part, dans une perspective de recherche qui est la sienne depuis 1970 sur la question des oscillations chimiques, leurs mécanismes de base et les principes de construction. D'autre part, Rössler fait fructifier un récent acquis en matière de systèmes dynamiques et s'engage dans l'étude des oscillations en trois dimensions, ce qu'il avait déjà en tête d'approcher avant 1975, mais sans vraiment y parvenir. Même s'il s'agit d'une première incursion dans la question du chaos, l'horizon de recherche s'élargit considérablement, Rössler en est pleinement conscient. Le prototype construit permet ainsi d'envisager la recherche de systèmes chimiques chaotiques concrets (dont la réaction de Belousov-Zhabotinsky paraît déjà un bon exemple). La recherche d'autres mécanismes est visiblement un de ces objectifs, qu'il peut poursuivre dans la lancée de sa "recette". La fin de l'année 1975 peut être vue comme un "changement dans la continuité".

c. 1976-79 : les années fastes

Les recherches effectuées par la suite réalisent progressivement ce projet de construction de mécanismes différents, de recettes nouvelles pour le chaos, dans les dimensions trois et quatre. Elles s'enchaînent à un rythme assez soutenu dans la période 1976-79. De nouvelles idées émergent et Rössler s'investit dans un projet de classification des comportements chaotiques possibles. Nous allons montrer que les tendances illustrées précédemment perdurent : Rössler recourt systématiquement aux simulations numériques, aux mathématiques des systèmes dynamiques, aux analogies, mais de moins en moins aux oscillations chimiques.

Ainsi, l'article "Chaos in abstract kinetics : two prototypes" (publié en 1977) présente deux types de chaos distincts : le type "spiral" et le type "vis". Le type "spiral" est illustré par le système du premier article de 1976. Rössler élabore encore sa description de la dynamique du système et s'appuie pour cela sur une forme particulière de modèles : **les**

[567] Smale a prouvé mathématiquement l'existence de ces "suspensions", c'est-à-dire des flots tridimensionnels traversant le fer à cheval ; mais la question de savoir si elles sont simples à trouver est ouverte : [SMALE, S., 1967].

[568] ***"chaos can be classified as a dynamical property emergent with the third dimension. In this respect it is a sort of "superoscillation". Whether similar qualitative jumps are provided by the next-higher dimensions is an open question.", [RÖSSLER, O.E., 1976a], p. 263.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

modèles en feuille de papier .

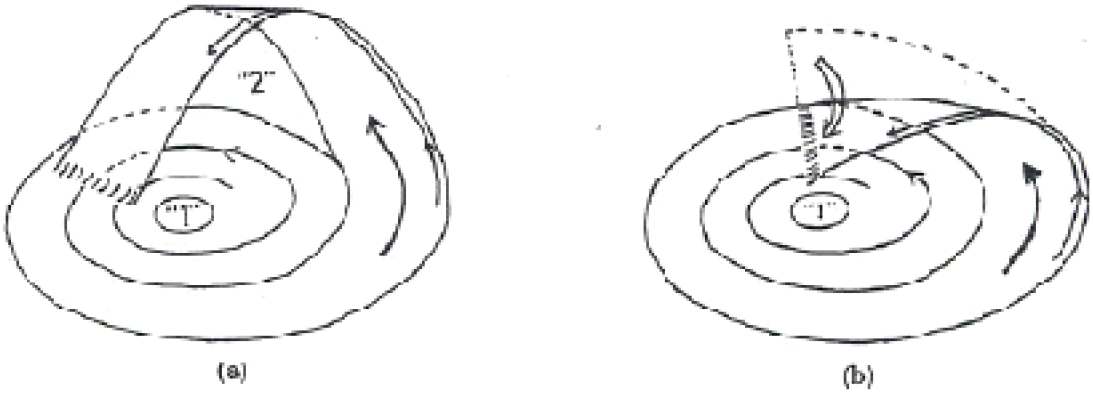


Figure 3. (a) "Paper-sheet model" of the flow of Figure 1. (b) Prototype. "1", "2" = allowed holes; (= = =) nesting line

[RÖSSLER, O.E., 1977c], p. 277.

La figure (a) propose une représentation du principe de réinjection et la figure (b) un "prototype", c'est-à-dire "le" plus simple des comportements chaotiques de type "spiral". Le prolongement de ses précédentes réflexions est manifeste. Rössler suggère naturellement un schéma de réaction chimique correspondant et les équations différentielles associées à ces réactions ; la simulation numérique permet de confirmer, en le reproduisant grossièrement, graphiquement, le modèle en papier.

La question du type "vis" est encore plus intéressante, car elle montre comment Rössler jongle avec ses modèles (pris à la fois au sens de modèle de papier, modèle chimique, modèle mathématique).

Le point de départ est un système d'oscillations à hystérésis à 2 variables, liant deux cycles limites stables par un cycle limite instable. Un travail de schématisation de la géométrie de l'espace des phases permet la construction d'une application vérifiant le théorème de Li et Yorke, assurant un chaos selon la prescription établie par Rössler. Puis par une transformation destinée à trouver un mécanisme plus simple, un prototype, il construit le modèle papier (d), en transformant le modèle (a), et le traduit ensuite en équations différentielles "chimiques" :

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

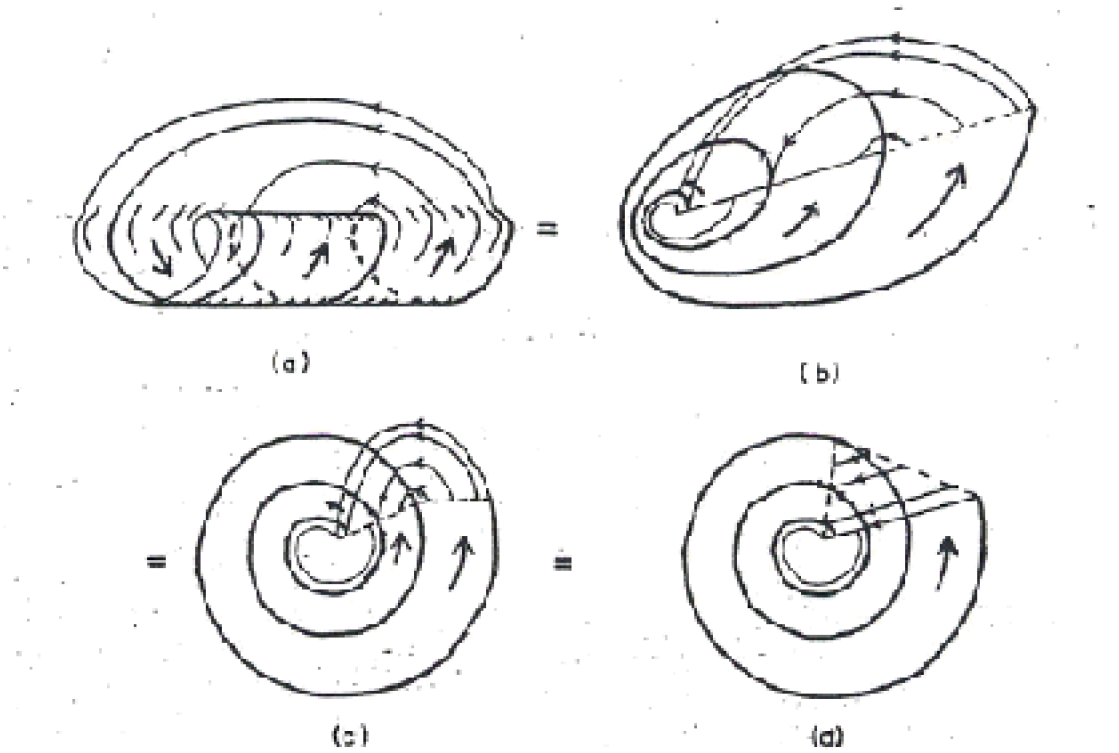


Figure 10. Three views of the same paper-sheet flow of Figure 9c, taken from three different perspectives, proving equivalence to the flow of Figure 3b. *a* = Figure 9c; *d* = Figure 3b; *b*, *c* = intermediate stages

[RÖSSLER, O.E., 1977c], p. 282

Les raisonnements sur les feuilles de papiers, qui peuvent paraître approximatifs, sont en fait analogues à des raisonnements mathématiques du domaine de la topologie, sans la rigueur contraignante des démonstrations mathématiques. Toutes ces procédures relèvent des aspects "idéalisés" du chaos : ce sont des modèles à deux dimensions (feuille de papier) pour lesquels il est possible de se référer aux théories du type Li et Yorke. Plus que cela, la manipulation des modèles permet de rendre compte des équivalences topologiques [569] entre certains schémas : c'est de cette manière qu'il montre l'équivalence, comme générateurs de chaos, entre une application de Li et Yorke et une application ne vérifiant pas ce théorème [570] .

Le cas non-idéal, celui des équations différentielles, est évidemment plus délicat, mais il bénéficie de l'appui heuristique des modèles papiers. En ce sens **les modèles de la chimie sont les intermédiaires indispensables à la réflexion de Rössler**, car ils autorisent, avec beaucoup de souplesse, le passage de la "théorie" topologique aux équations différentielles "concrètes".

Avec cet article, Rössler définit déjà une certaine méthodologie pour construire des

[569] C'est-à-dire le fait qu'il est possible de passer d'un modèle à l'autre par une transformation continue (un homéomorphisme).

[570] L'application équivalente est une application "dents de scie inversées" [RÖSSLER, O.E., 1977c] p. 281 et p. 283.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

mécanismes de chaos, idéalisés d'abord (mécanismes géométriques dans l'espace des phases), traduits en équations ensuite. Dans le premier cas, la notion de chaos est celle proposée par Li et Yorke, transposée du discret au continu par l'intermédiaire d'une section de Poincaré. Dans le second, la notion est moins facile à cerner. En trois dimensions, Rössler confirme qu'il s'appuie sur le fer à cheval et ses propriétés. Il considère l'application de Li et Yorke comme un "fer à cheval dégénéré" [571] , ainsi il est légitime d'extrapoler le terme chaos dans le cas "non dégénéré". D'après Rössler, ceci se justifie d'autant plus que les propriétés de l'application fer à cheval sont déjà bien élucidées. Sans plus de détails, il évoque la notion d'"attracteur étrange" de Ruelle et Takens et il n'utilise nulle part cet outil pour l'instant.

La conclusion témoigne de ses doutes. Il signale, par exemple, que les liens entre fer à cheval et applications de Li et Yorke sont mal spécifiés. Et surtout, en rapport avec l'application ne vérifiant pas le théorème de Li et Yorke, il pose la question : "est-ce que la période 3 implique encore le chaos ?" [572] . Autrement dit, est-ce que la notion de chaos selon Li et Yorke suffit ? Leurs conceptions étaient utiles et ont été généralisées au point que les choses se sont largement complexifiées : Rössler est amené à en toucher certaines limites théoriques.

Au cours de son projet, il donne une illustration simple du chaos de type "spiral" dans "An equation for continuous chaos" [573] : le système d'équation est retenu depuis sous le nom de **système de Rössler**. Il s'agit originellement du système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y+z) \\ \dot{y} = x + 0.2y \\ \dot{z} = 0.2 + z(x-5.7) \end{cases}$$

Ce système est construit pour être un prototype simple de chaos continu. Le système de Lorenz pose question car il n'est pas aisé de définir une application de Poincaré avec les méthodes habituelles, du fait de la symétrie du système. Le système de Rössler a l'avantage d'être plus facile à analyser, tout en ayant un comportement similaire. Rössler y voit déjà un "modèle de modèle" [574] dont il estime possible de tirer des conclusions sur le comportement par variation des paramètres, bifurcations, bassins d'attractions, ce qu'il n'a entrepris pour aucun de ses modèles précédents, les jugeant un peu compliqués.

[571] [RÖSSLER, O.E., 1977c], p. 286. "degenerate horseshoe map".

[572] "Does period 3 still imply chaos ?" [RÖSSLER, O.E., 1977c], p. 287. Il ne s'agit pas de remettre en question le théorème de Li et Yorke, mais certainement d'un appel à le préciser ou à l'élargir, pour prendre en compte des comportements "équivalents". La remarque est judicieuse étant donné l'existence du théorème de Sharkovsky, plus précis que celui de Li et Yorke : Rössler n'en a pas encore connaissance à ce moment là.

[573] [RÖSSLER, O.E., 1976b].

[574] "a model of model", [RÖSSLER, O.E., 1976b], p. 397.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Pour le reste, l'article confirme le précédent. La notion de chaos et le théorème de Li et Yorke servent d'élément de base à la notion de chaos continu : ce passage du discret au continu est re-expliqué brièvement par un raisonnement sur un modèle en papier.

Le modèle est également un exemple de l'aboutissement du principe de construction qu'il suit depuis longtemps. Par ailleurs, Rössler est fort conscient de la valeur de ce principe, imaginé au départ pour classer les oscillateurs chimiques et reconverti en machine à produire des comportements chaotiques. Le système de Rössler (l'"équation (2)")

"est en fait dérivé d'une équation plus compliquée que celle pour laquelle il a été démontré que le 'principe de construction par blocs' est strictement applicable [4]. Le principe de constitution en question, non seulement permet la construction d'un nombre illimité de systèmes chaotiques artificiels, mais peut être aussi utilisé comme guide dans une identification de nouveaux systèmes naturels montrant un comportement similaire (en suggérant des tests dans leur espace de paramètres). Ainsi, le champ d'applications possible des équations du type (2) va de l'astrophysique à l'économie, via la chimie et la biologie." [575]

Les réflexions poursuivies ultérieurement, pendant les années 1976-79, visent à préciser encore ce chaos, les mécanismes du chaos, à rentrer dans le "zoo" des comportements dynamiques et les classer, pour reprendre une expression de Rössler [576]. Elles se partagent schématiquement en deux types de préoccupations : la théorie de la dynamique chaotique et la turbulence chimique. Nous allons voir comment cela s'inscrit dans la voie ouverte au début de l'année 1976.

Eléments d'une théorie de la dynamique chaotique

D'abord Rössler tente une classification des comportements chaotiques selon les mécanismes générateurs. Dans un article précédent, il avait différencié un chaos "spiral" d'un chaos "vis". Par une réflexion plus approfondie sur les applications de Poincaré cette fois, Rössler obtient deux grandes classes de comportements : les applications dites "bâton de marche" [577] et les applications "sandwich", qui se caractérisent par un repliement pour la première, une coupure pour la seconde [578]. Ce sont les deux classes majeures des comportements de chaos selon Rössler [579] ; le chaos "spiral" et "vis" se rangent dans la première catégorie.

Lors de la conférence de New York de 1977, il présente un bilan des mécanismes

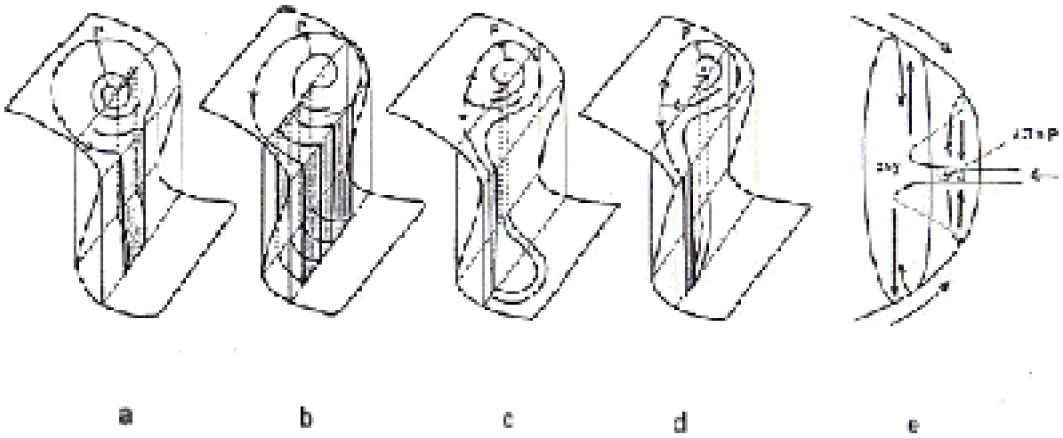
[575] ***L'"équation (2)" est le système de Rössler, la référence [4] est [RÖSSLER, O.E., 1976a]. "Eq. (2) has in fact been derived from a more complicated equation for which this "building-block principle" has been shown to apply strictly [4]. The named design principle not only enables the construction of an unlimited number of artificial chaotic systems, but at the same time can be used as a guideline for the identification of further natural systems showing the same behaviour (by suggesting to probe into their parameter space). The field of possible applications of equations of the type of eq. (2) thus ranges from astrophysics, via chemistry and biology, to economics". [RÖSSLER, O.E., 1976b], p. 398 (en italique dans le texte).***

[576] [RÖSSLER, O.E., 1977f], p. 607.

[577] "Walking-stick" est l'expression employée.

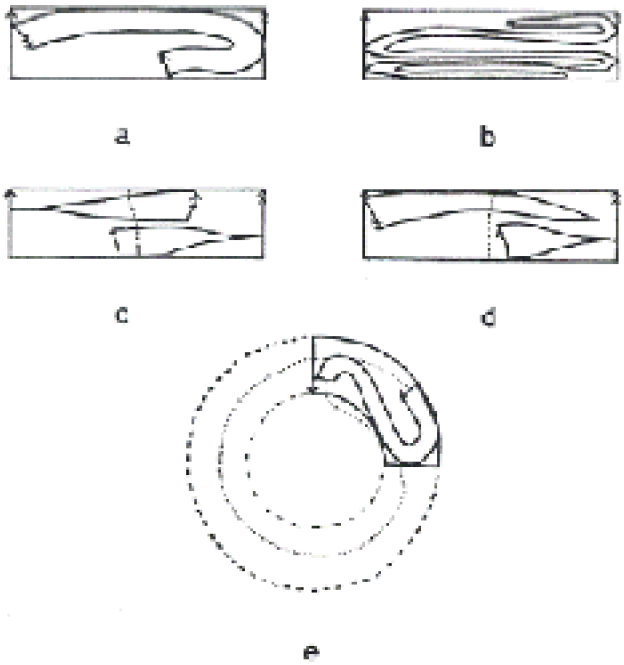
protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

possibles pour générer du chaos sous la forme des cinq prototypes :



[RÖSSLER, O.E., 1979e], p. 377

Ces mécanismes ont leur correspondant en terme d'applications de Poincaré dont on voit très clairement la séparation en deux classes (les repliées, les coupées) :



[RÖSSLER, O.E., 1979e], p. 378.

578 La distinction apparaît pour la première fois en 1976 dans [RÖSSLER, O.E., 1976c]. Le terme "walking-stick" n'est pas encore intronisé et le terme "horseshoe map" désigne cette caractéristique. Dès 1977, l'expression est entérinée. Dans le raisonnement de Rössler, la différence de longueur entre les deux côtés du fer à cheval est cruciale. C'est pourquoi il préfère le terme "walking-stick" illustrant mieux la dissymétrie. Il s'agit aussi de revenir sur des affirmations précédentes, en les précisant, concernant justement la présence d'un fer à cheval dans les applications chaotiques. Voir aussi note .

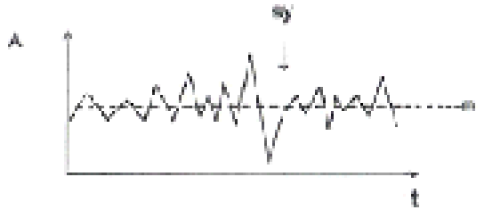
579 "All these systems can be classified into two major classes: those in which the chaotic behaviour is due to the presence of a 'folded' Poincaré map in state space, and those in which it is due to a 'cut' Poincaré map."[RÖSSLER, O.E., 1977f], p. 607.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

De la même manière, Rössler montre comment un même système différentiel, avec différents paramètres, peut admettre des régimes de chaos distincts [580] .

Les traits principaux de sa démarche se démarquent bien. D'abord la maîtrise des outils des systèmes dynamiques s'accroît rapidement et leur intervention est de plus en plus décisive dans les raisonnements. Ainsi les affirmations relatives aux applications de type "bâton de marche" se font prudentes et la transférabilité des résultats sur le fer à cheval est mise en question. Il naît une réflexion assez abstraite qui se concrétise par la suite dans un article de 1977 intitulé : "'Syncope implies chaos' in Walking-stick Maps". La référence au théorème de Li et Yorke est évidente ; c'est le but de l'article que de trouver un équivalent, ou une extension, du théorème dans le cas des applications de Poincaré bidimensionnelles, et non plus seulement dans le cas "dégénéré". Cette question a été lancée en 1976 avec une conjecture reposant sur le taux de "recouvrement" du "bâton de marche" [581] .

Pour parvenir à ce critère il utilise la panoplie des systèmes dynamiques de manière plus sûre. La notion d'homocline intervient dans sa preuve. Rössler démontre en fait qu'**une homocline peut apparaître dans les applications de Poincaré de type "bâton de marche"** (modulo certaines hypothèses). Pourquoi se tourner vers les homoclines ? Simplement, parce que dans ce cas, l'**existence d'une infinité d'orbites périodiques est assurée** [582] . On voit au passage que Rössler est fidèle à cette définition de chaos lorsqu'il s'agit de montrer effectivement son existence dans un processus dynamique. La conclusion de cette recherche, beaucoup plus abstraite qu'à l'habitude et ne s'appuyant sur aucune simulation numérique, est un critère pour le chaos : la présence d'une "syncope" dans une série temporelle (c'est-à-dire l'apparition d'un évènement brisant la non périotonie de la dynamique).



[RÖSSLER, O.E., 1977f], p. 612.

[580] "Different types of chaos in two simple differential equations" [RÖSSLER, O.E., 1976c]. L'étude de deux systèmes simples révèlent au moins trois types de chaos : chaos Lorenzien, chaos de type "sandwich", chaos de type "fer à cheval". Dans la catégorie du chaos "fer à cheval", se distinguent, sur un même système, des comportements de chaos "spiral" et "vis", avec tous les intermédiaires possibles. Cet article et cette énumération montre la complexité possible en dynamique, dégagée grâce aux travaux de Rössler.

[581] Le bâton de marche a une tige et une poignée : la longueur de la poignée est variable et "couvre" une plus ou moins grande partie du bâton. Ce "recouvrement" est un paramètre important pour le comportement du système. [RÖSSLER, O.E., 1976c], p. 1667 ; [RÖSSLER, O.E., 1977f], p. 608.

[582] Rössler fait référence au théorème de Birkhoff [BIRKHOFF, G.D., 1927d] (donnant simplement l'existence de cet ensemble de points périodiques) et surtout au résultat de Smale, liant l'homocline à un automorphisme de décalage, assurant l'existence d'orbites de toutes périodes. [SMALE, S., 1965].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Deuxièmement, à partir de 1977, on notera qu'il n'est plus question de chimie des oscillateurs dans l'exercice théorique. Ainsi les équations prototypes sont-elles présentées sans cette référence, qui a néanmoins servie à leur construction, explicitée dans des travaux antérieurs. Les prototypes suffisent désormais pour réaliser les expériences numériques et poursuivre l'étude du chaos.

En définitive, une partie des résultats, ceux touchant aux modèles en papier, est assez proche de ce que Guckenheimer et Williams ont fait, de manière plus mathématique, à propos de l'attracteur de Lorenz [583] . Rössler y est parvenu par une voie alternative, non liée à la question de l'attracteur de Lorenz, dans une démarche qui, de plus, est constructive et génératrice de nouveaux chaos et ne se limite pas aux "attracteurs de Lorenz".

Pour donner un terme à cette suite spectaculaire de travaux, nous avons retenu l'année 1979. La série ne s'arrête pas à cette année, mais il faut remarquer que le projet d'étendre les réflexions à la dimension supérieure aboutit alors à l'étude d'un système concret. L'idée d'étendre le principe de réinjection à la dimension 4 remonte à l'année 1976 et apparaît comme un prolongement assez naturel [584] .

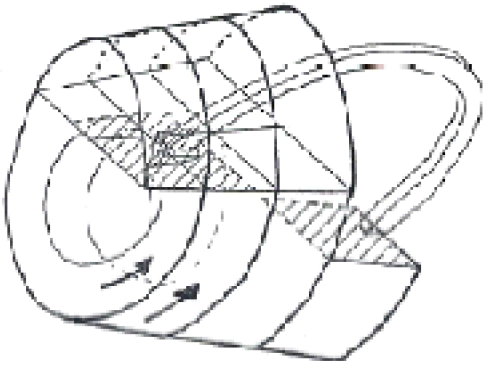


Fig. 15 Nontrivial reinjection between different portions of a 3-dimensional flow. Example of a generalized (three-dimensional) paper model.

[RÖSSLER, O.E., 1979b], p. 303.

Les mêmes outils, simulations numériques et systèmes dynamiques, et le fil directeur de la chimie des oscillations, permettent à Rössler de construire et d'étudier un système quadridimensionnel, avec la perspective de possibles extensions :

583 Il est difficile de dater précisément quand Rössler a connaissance des idées de Guckenheimer-Williams, mais au moins en 1977 il en fait mention, pour signifier le parallèle avec son propos [RÖSSLER, O.E., 1977d], p. 188. (Voir chapitre 3, p. 202 pour les détails sur la perspective adoptée par Guckenheimer et Williams).

584 Rössler s'interroge alors sur la possibilité d'un tel prolongement et l'existence d'un "super-chaos" (RÖSSLER, O.E., 1976c], p. 1669). Cf. note 568.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + 0.25y + w \\ \dot{z} = 2.2 + xz \\ \dot{w} = -0.5z + 0.05w \end{cases}$$

Ce système d'équation tiré de "An equation for hyperchaos" [585] , illustre un comportement qu'il baptise "hyperchaos". Cette recherche est beaucoup plus délicate que pour les systèmes en trois dimensions, du simple fait de la difficulté à visualiser le processus. Pour la même raison, il semble que l'étude de ces systèmes soit restée depuis, du domaine de l'académisme. Le résultat de Rössler montre tout de même, une nouvelle fois, la fécondité de sa démarche.

La turbulence chimique

Nous avons montré l'ampleur de la réflexion théorique sur la dynamique. Les principes et la construction de Rössler se montrent performants également à travers les développements en matière de "turbulence chimique", d'un point de vue toujours théorique, mais aussi orienté vers l'expérimentation chimique. Vu son intérêt pour les réactions chimiques, il semble naturel que cette voie ait été choisie.

Les développements théoriques permettent tout d'abord d'analyser des comportements "concrets", c'est-à-dire des systèmes différentiels donnés, simulés sur ordinateur. Ainsi, dans le prolongement des travaux théoriques réalisés avec Seelig, en 1972, sur les oscillateurs chimiques de type Rashevsky-Turing, l'étude de "turbulence chimique" commence, en 1976, sur un système morphogénétique : deux cellules de Turing, symétriques, couplées [586] . Les simulations numériques du modèle donnent, grâce à l'analyse qualitative, un comportement inattendu : le système oscille entre deux états chaotiques, de type "vis". Il existe même un second comportement "bichaotique" entre deux chaos de type "spiral". Le résultat suggère enfin que des comportements chaotiques apparaissent dans des équations aux dérivées partielles, qui modélisent plus généralement les phénomènes de réaction-diffusion au cœur du système de type Turing.

Les analyses des mécanismes du chaos, servent aussi à préciser la notion de turbulence. A l'occasion de l'atelier sur la "Synergétique" organisé par Hermann Haken en 1977, Rössler propose un inventaire plus étendu des comportements turbulents en chimie [587] . Plusieurs tendances, même si elles sont peu développées, s'expriment. La notion de "turbulence" est plus large que la notion de chaos, dans le sens où elle inclut une non

[585] [RÖSSLER, O.E., 1979d].

[586] Rössler ajoute quelques simplifications, tirées de l'étude de 1972 pour procéder à l'exploitation mathématique du modèle. "Chemical turbulence : Chaos in a simple reaction-diffusion system", [RÖSSLER, O.E., 1976d].

[587] Voir les comptes-rendus de ce Workshop : [RÖSSLER, O.E., 1977e].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

périodicité dans l'espace et plus seulement dans le temps. Turbulence est synonyme de "chaos spatio-temporel" [588] . Il s'agit surtout d'un recensement d'exemples de turbulence, mais qu'il a cherché à caractériser, en s'appuyant sur les oscillateurs chimiques et en particulier les cellules de Turing.

Enfin, la facette la plus importante de ce travail, dont on aura compris qu'il est surtout théorique, est l'étude de la réaction de Belousov-Zhabotinsky. L'apport des réflexions de Rössler en la matière est primordial, notamment pour le développement des études plus expérimentales du groupe de John Hudson [589] . C'est le point de rencontre entre les idées abstraites sur la dynamique et un signal expérimental.

Tout l'intérêt de la classification des mécanismes de chaos se retrouve dans la possibilité de diagnostiquer le comportement des expériences chimiques et surtout d'orienter les recherches en fonction de ce diagnostic. C'est ainsi qu'il considère sa contribution aux travaux sur le chaos chimique, réalisés avec Klaus Wegmann [590] . Deux publications marquent les premiers pas dans cette voie, en 1978 [591] .

Mais, il existe un point de blocage sérieux dans cette démarche, comme le souligne Rössler :

"Pour prouver que du chaos 'endogène' est possible dans la réaction de Zhabotinskii, au moins trois observables appropriées sont requises." [592]

Or, dans les conditions de 1978, le dispositif n'autorise qu'un relevé de deux observables et les auteurs ne peuvent espérer mieux qu'une projection à deux dimensions d'un espace des phases de dimension supérieure. En d'autres termes, l'espace des phases du système réel reste inatteignable. Ainsi les comparaisons avec les prototypes abstraits restent limitées et approximatives mais elles donnent quelques indications tout de même. La grande quantité de situations simulées numériquement fournit un catalogue important dans cette démarche.

Le second problème est celui du bruit, qui rend les interprétations douteuses. S'agit-il de chaos endogène, "déterministe", ou de fluctuations conduisant à exciter un mécanisme sensible mais ne présentant pas les caractéristiques du chaos ? En définitive, malgré des moyens d'analyse et de contrôle de l'expérience encore rudimentaires, les résultats méritent d'être remarqués. Ils donnent à penser que des comportements compliqués, déjà

[588] "In this sense it would be synonymous to 'spatio-temporal chaos'", [RÖSSLER, O.E., 1977e], p. 175.

[589] John Hudson (souvent appelé Jack Hudson) est chimiste à l'University of Virginia (département de Chemical Engineering). La rencontre avec John Hudson a lieu à New-York en 1977, lors de la conférence que Rössler co-organise. Les travaux publiés en 1978 (réalisés antérieurement) ont été faits en partie indépendamment de ceux du groupe de Hudson.

[590] Wegmann est un biologiste de l'université de Tübingen. "I essentially stood idly by confining (sic) that this is the right direction to move in changing parameters – just as I would on an electronic system.". Lettre de O.E. Rössler à l'auteur, 16 septembre 2003.

[591] Il s'agit de [RÖSSLER, O.E., WEGMANN, K., 1978] et [WEGMANN, K., RÖSSLER, O.E., 1978].

[592] "To prove that "endogenous" chaos is possible in the Zhabotinskii reaction, at least three appropriate observables are required", [WEGMANN, K., RÖSSLER, O.E., 1978], p. 1182.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

observés dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky, peuvent s'expliquer dans ce cadre et sortir de leur marginalité. La classification théorique est donc très intéressante, potentiellement, mais son utilisation se trouve limitée par les conditions d'acquisition d'un signal expérimental supposé chaotique.

d. La notion de chaos dans les travaux de Rössler

En analysant ces travaux abondants, nous avons parfois pris la peine de révéler ce que cachait le terme chaos. Revenons maintenant plus en détail sur les spécificités de la construction de la notion de chaos et son utilisation par Rössler, afin de souligner les nuances par rapport aux autres conceptions contemporaines.

Tout d'abord, la transposition du chaos, du discret au continu, qui est un apport essentiel du travail de Rössler, n'est pas évidente. Rössler utilise des analogies graphiques et travaille sur des modèles de papier pour procéder au transfert de la notion de chaos "à la Li-Yorke" au "chaos continu". La transposition inclut les propriétés associées aux itérations discrètes : orbites périodiques en nombre infini, trajectoires non périodiques en quantité non-dénombrable, instabilité des trajectoires.

Ainsi Rössler généralise la notion de Li et Yorke en reprenant les caractéristiques de mélange d'orbites périodiques et non périodiques. Malgré ses longs développements théoriques et l'évolution des résultats, il n'a pas perdu son idée de départ [593] . En étant plus précis, sur les modèles papiers, ces idéalisations des processus dynamiques, les lignes qu'on peut dessiner sur le papier correspondent aux orbites périodiques ou non périodiques du cas discret. Il y a une relation univoque entre les endomorphismes à une dimension et les "origamis avec des lignes" [594] . Dans ce cadre abstrait, on comprend facilement l'extrapolation de Rössler. Cependant, une fois sorti de ces modèles abstraits, dans la recherche de systèmes différentiels, non idéalisés, par l'intermédiaire de la théorie des oscillations chimiques, Rössler est conduit à des comportements plus complexes. Que reste-t-il du chaos proposé par Li et Yorke ?

Tout repose alors sur les notions de Smale et les propriétés du fer à cheval : celui-ci génère un comportement "équivalent" à celui de Li et Yorke, et un mélange aussi complexe de trajectoires périodiques et non périodiques. Ainsi la définition de chaos dans ce cadre n'a pas à être modifiée. Ceci explique pourquoi Rössler emploie toujours l'expression de "trajectoire non périodique" comme synonyme du terme chaos ; il se réfère par là à la fois à Li et Yorke, au travail de Lorenz [595] et à celui de Smale.

Force est de constater que sa démarche se démarque de celle de Ruelle. Il ne s'agit

[593] Il écrit par exemple en 1977 : "'chaotic' – meaning presence of nonperiodic plus infinitely many periodic trajectories", renvoyant à Li et Yorke ([RÖSSLER, O.E., 1977e], p. 175). Ou encore "All flow governed by a strange attractor are also 'chaotic' that is, possess an infinite number of unstable periodic solutions plus an uncountable set of nonperiodic ones", [RÖSSLER, O.E., ORTOLEVA, P.J., 1978], p. 71.

[594] Rössler utilise le terme "origami" en référence à l'art du pliage du papier au Japon. "Evidently, there is a one-to-one relationship between the class of one-dimensiional endomorphisms and the class of 'origamis with lines on them'", [RÖSSLER, O.E., 1979b], p. 296.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

pas de transférer des notions de mathématiques des systèmes "Axiome A" vers des systèmes différentiels du type de Lorenz. D'autres points sont frappants. Tout d'abord, la notion de sensibilité aux conditions initiales n'est jamais vraiment mise en avant. Elle est présente, mais toujours en arrière plan, alors qu'elle a tendance à prendre le dessus au fil du temps chez d'autres chercheurs du domaine. L'instabilité des orbites périodiques, la sensibilité aux conditions initiales sont des éléments présents en filigrane, mais ne sont pas les aspects primordiaux du concept de chaos. Le fait qu'il ne produise aucune étude des exposants de Lyapounov des systèmes n'a rien d'étonnant et traduit un certain désintérêt pour la chose.

Cela ne signifie pas qu'il ne se rend pas compte de l'existence et de l'importance d'une telle sensibilité [596] . Pour Rössler, elle n'a de sens qu'à travers les mécanismes de génération de chaos. La sensibilité aux conditions initiales se manifeste à travers la notion d'étirement-repliement dans le fer à cheval ou la transformation du boulanger, et non pas comme divergence exponentielle de trajectoires voisines. L'"hyperbolicité", au sens d'une combinaison d'étirement et de repliement, est l'élément clé, utilisé dès 1976 dans son "mélangeur".

On remarquera également qu'il reste prudent avec la notion d'attracteur étrange. Pour Rössler, le chaos ne se limite pas à l'existence d'un attracteur étrange, comme l'ont défini Ruelle et Takens en 1971. La présence de cet objet géométrique implique l'existence d'un chaos, au sens de la coexistence d'orbites périodiques et non périodiques,

"cependant la réciproque n'est pas vraie : le nombre de systèmes 'presque chaotiques' est beaucoup plus grand, par exemple en chimie, que ceux qui possèdent un attracteur étrange." [597]

C'est pour cela qu'il distingue une notion d'"attracteur chaotique" à côté de celle d'"attracteur étrange" [598] . Mais il signale immédiatement après que cette distinction n'est pas vraiment viable au niveau pratique, car un petit bruit suffit à rendre ces différences

[595] "Nonperiodic oscillation (1) or chaos (2) was, in a simple differential system, first observed by Lorenz in his model of turbulence.", [RÖSSLER, O.E., 1976d], p. 1168. Il fait référence au "Deterministic nonperiodic flow" (1) de Lorenz ([LORENZ, E.N., 1963]) et à Li et Yorke pour (2).

[596] En 1978 apparaît pour la première fois cette idée dans une caractérisation qu'il donne du chaos: "Chaotic oscillations are characterized (a) by the presence of an infinite number ...(b) by the phenomenon of "hyperbolicity", meaning that closely adjacent initial conditions lead to rapidly diverging trajectories for most initial conditions." [WEGMANN, K., RÖSSLER, O.E., 1978], p. 1179.

[597] "The converse is not true, however : the number of 'merely chaotic' system sis much larger, for example in chemistry, than that of systems possessing a strange attractor at the same time." [RÖSSLER, O.E., ORTOLEVA, P.J., 1978], p. 71-72.

[598] Voir [RÖSSLER, O.E., 1979c], p. 109-110. Un "attracteur chaotique" est construit d'abord à partir d'un difféomorphisme à deux dimensions (censé être une application de Poincaré d'un flot) : en itérant l'application (un "bâton de marche" par exemple) il se construit un ensemble attracteur de la forme d'une ligne qui se replie infiniment sur elle-même, avec une structure fractale. Le point homocline H, lorsqu'il existe (en 1977, Rössler renvoie à Smale et Poincaré) assure l'existence de chaos :
H = point homocline ([RÖSSLER, O.E., 1977d], p. 189) Un attracteur étrange est en fait un attracteur chaotique minimal. En effet, il peut exister des attracteurs périodiques à l'intérieur d'un attracteur chaotique ([RÖSSLER, O.E., 1979c], p.110).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

imperceptibles (physiquement, chimiquement et aussi numériquement). La divergence de conception est tout de même significative.

De même, tous les aspects liés à des questions de hasard et d'aléatoire sont écartés chez Rössler. Li et Yorke, May, les physiciens plus proches de la Mécanique statistique et quelques autres n'ont pas manqué d'y faire référence, mais Rössler s'en éloigne et "son" chaos relègue cette dimension en arrière-plan :

"Le chaos génère de l'aléatoire (imprédictibilité), et peut être caractérisé, dans une certaine mesure, par des méthodes statistiques. D'un autre côté, il est bien moins grossier que ce que pourra jamais devenir une méthode statistique quelconque." [599]

Le chaos pour Rössler s'insère bien au contraire dans l'idée de comportement dynamique au sens d'une oscillation complexe, d'une "super-oscillation". Il considère que l'état d'équilibre est le comportement type de la dimension un, l'oscillation celui de la dimension deux (avec la limite imposée par le théorème de Poincaré-Bendixon) [600]. Le chaos apparaît comme le phénomène caractéristique de la dimension trois [601]. Le principe de réinjection assure le passage à une dimension supérieure, de la première à la deuxième, de la deuxième à la troisième. L'hyperchaos est l'extension du processus à la dimension quatre.

Une perspective atypique

Le caractère atypique des propositions de Rössler ne se comprend que dans la perspective de sa trajectoire personnelle. Pour le dire brièvement, Rössler analyse la dynamique des systèmes en trois dimensions comme il analysait les réactions chimiques. Il s'agit avant tout de déterminer des **mécanismes de production des comportements**.

Sur le plan de l'étude des réactions chimiques, il met en place un principe de construction par bloc, avec un ensemble de circuits fondamentaux. Pour la dynamique des systèmes, il établit d'abord le principe de "réinjection" et celui du "mixeur", qui évoluent par la suite avec l'utilisation de modèles en papier et d'un principe de découpage / collage des bandes de papier. Ce sont, certes, des approximations mais elles aident à comprendre les machines à produire du chaos. Rössler les compare à des "petits ordinateurs analogiques" [602].

On peut voir l'analyse chimique théorique comme une heuristique pour l'analyse dynamique ; Rössler reproduit une pratique de classification et de construction de

[599] ***Lettre de O.E. Rössler à l'auteur, 16 septembre 2003 : "Chaos generates randomness (unpredictability), and can be characterized to some extent by statistical methods. On the other hand, it is much less coarse than any statistical approach can ever become."***

[600] Discussion dans [RÖSSLER, O.E., 1976d], p. 1670.

[601] "If oscillation is the typical behavior of 2-dimensional dynamical systems (Euclidean and on manifolds), then chaos, in the same way, characterizes 3-dimensional continuous systems." [RÖSSLER, O.E., 1979e], p. 376.

[602] "small 'analogue computers'", [RÖSSLER, O.E., 1977d].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

mécanismes élémentaires à un niveau plus abstrait. Ceci s'explique, au fond, par le fait que son étude des réactions chimiques était déjà orientée vers l'analyse de leur dynamique, leur évolution dans le temps.

La parenté de ces analyses va en fait très loin. Car l'analyse dynamique générale non seulement s'inspire de l'analyse des réactions chimiques mais s'appuie fortement sur elle. En effet, les modèles abstraits sont transposés en circuits chimiques, puis, dans un second temps, en équations différentielles. La chimie donne les prototypes des comportements étudiés. Le recours à la simulation numérique permet de boucler le raisonnement et d'assurer la démarche. Rien ne serait possible sans cet intermédiaire, au moins dans les premiers temps, car la concrétisation numérique en dépend.

Mais, nous l'avons signalé, l'intermédiaire s'efface progressivement : la chimie disparaît des analyses théoriques, concentrées sur les modèles papiers, les applications de Poincaré et les simulations numériques d'équations différentielles. Rössler parvient à construire assez rapidement des prototypes simples pour les différents mécanismes de chaos qu'il diagnostique en dimension trois. Il définit en quelque sorte un ensemble de systèmes élémentaires pour le chaos tridimensionnel. Ce faisant, il autorise un élargissement des problématiques concernées par ces comportements dynamiques : à côté de la chimie, les problèmes de l'astrophysique à l'économie peuvent s'insérer dans le cadre théorique, sous réserve qu'il y soit question de dynamique.

Cet intérêt pour la dynamique, pour son mécanisme sous-jacent, va de paire avec un désintérêt pour les trajectoires prises isolément. C'est pourquoi l'étirement, associé au repliement et qui est constitutif du mécanisme élémentaire de production de chaos, passe au premier plan chez Rössler. Les conséquences en terme de trajectoires et de divergence de trajectoires voisines sont secondaires dans cette analyse. Rössler propose une vision plus **globale** de la dynamique. Les théories mathématiques des systèmes dynamiques en font autant, depuis Poincaré, ce qui n'a rien d'étonnant puisque Rössler s'adosse à ce corpus pour ses réflexions théoriques. L'affirmation de sa perspective est très claire dans ce passage :

"En dimension une, les trajectoires constituent l'essentiel. En deux dimensions, elles jouent le rôle d'indicateur, puissant, de tout ce qui se passe. En trois dimensions, elles perdent apparemment leur accroche. En dimension deux aussi bien qu'en dimensions supérieures, on peut dire que les flots sont constitués d'un courant de domaines entiers, avec des particules 'suspendues' (et ainsi des trajectoires) jouant uniquement le rôle de marqueurs. Néanmoins, dans ce rôle modeste, les particules jouent remarquablement bien en deux dimensions – parce qu'elles enserrent des domaines. Cette relation 'duale' entre les domaines et leurs filets se brise en trois dimensions." [603]

Les mathématiques ne pénètrent pas l'analyse de Rössler uniquement par les systèmes

[603] ***"In one dimension, trajectories are all there is. In two dimensions, they play the role of a powerful indicator of everything that goes on. In three dimensions, they apparently lose their grip. In two dimensions as well as higher dimensions, flows can be said to consist of a streaming of whole domains, with suspended 'particles' (and hence trajectories) only playing the role of markers. In this modest role, particles nonetheless do remarkably well in two dimensions – because they enclose domains. This 'dual' relationship between domains and threads breaks down in three dimensions.", [RÖSSLER, O.E., 1979b], p. 305.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

dynamiques puisqu'il fait des constats et façonne des intuitions plus généralement géométriques et topologiques. On voit aussi que la troisième dimension a une place singulière pour Rössler : lieu du chaos et dimension pour laquelle il faut inaugurer une **pratique nouvelle**. Nous en avons donné les grandes lignes. Il convient maintenant d'en souligner les traits les plus remarquables.

Une pratique peu ordinaire

En effet, la perspective classificatrice de Rössler se conjugue avec une pratique assez originale pour les années 1970. Fondamentalement, il s'agit d'un couplage entre trois activités : une modélisation grâce à des éléments de mathématiques (les modèles en papier et leur topologie), une construction de schémas de réactions (en suivant un "principe de construction") et une forte composante de simulations numériques et de visualisation. Ce sont trois aspects d'un même travail, celui qui consiste à expliciter une dynamique. Ils sont plus ou moins schématiques, qualitatifs et quantitatifs et c'est leur conjonction qui est importante. Tout ceci repose sur deux caractéristiques essentielles du travail de Rössler : la visualisation des comportements et la démarche analogique.

La visualisation, en trois dimensions, joue un rôle capital. Elle autorise le lien entre modèles en papier et équations différentielles, simulées à l'ordinateur. L'objet de l'expérience étant le portrait de phase des équations (donnant la dynamique du système) la représentation graphique est le moyen de se figurer des comportements très peu parlants en terme d'équations mathématiques. C'est d'ailleurs pour cette raison que la question de l'hyperchaos est délicate : il n'y a pas de visualisation de la quatrième dimension et donc assez peu d'intuition à retirer de telles expériences. **L'ordinateur, par les images qu'il peut générer, guide et assure la démarche**. Par son intermédiaire, les propriétés des applications de Poincaré, ou des itérations construites pour simuler des applications de Poincaré, sont analysées. Les équations prototypes sont réduites à des cas simples par des essais sur l'ordinateur [604]. D'une manière générale, Rössler a obtenu ses équations à partir des ordinateurs numériques (de la série HP 9845). Néanmoins, l'importance de l'ordinateur analogique est à souligner.

D'après Rössler, le dispositif analogique présentait en effet l'avantage de pouvoir modifier la vitesse de déroulement de la dynamique sur l'écran stéréoscopique [605]. Ce qui signifie que l'on peut "manipuler" le système, l'observer à différentes vitesses et mieux en appréhender la dynamique [606]. Ainsi l'existence de deux types de chaos (type "vis" et

[604] En évoquant son travail pour obtenir le célèbre système de Rössler, il explique que dans la réduction du système à une seule non linéarité, l'ordinateur lui a été indispensable. [RÖSSLER, O.E., 1979c], p. 107 : "These constraints could subsequently be relaxed, so that a single nonlinear right-hand side (in one of the 3 variables) was sufficient; in fact, no more than a single quadratic term is needed. To find the last-mentioned relaxation, a computer was necessary."

[605] Le dispositif permettait en fait de choisir une vitesse x1, x10, x100 ou x1000, et également d'arrêter le processus en plein cours, puis de le mettre en route à nouveau, comme s'il ne s'était rien passé. Lettre de O.E. Rössler à l'auteur, 16 septembre 2003.

[606] Rössler, reprennant une phrase qu'il attribue à Christopher Zeeman : "topological objects are 'there to be stroked' like pets" et ajoute : "Yes, this is facilitated by the 4 buttons on the analogue computer". Lettre de O.E. Rössler à l'auteur, 16 septembre 2003.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

type "spiral") dans la même équation a été détectée grâce à l'utilisation de l'ordinateur analogique [607] . La suite du traitement s'effectue tout de même sur ordinateur digital ; l'analogique est en quelque sorte un **dispositif exploratoire** préliminaire. En résumé, les calculs à l'ordinateur "confirment la pensée et aident à penser" [608] : les deux dimensions sont effectivement primordiales dans le travail de Rössler.

Quant au procédé de l'analogie, c'est un moyen de penser très utile et très efficace mis en œuvre par Rössler : analogies entre chimie et électronique, entre mécanismes chimiques et comportements dynamiques, analogies visuelles entre modèles papiers et représentations graphiques informatiques. Il n'est pas surprenant que l'ordinateur analogique, dont le principe même repose sur une analogie entre un circuit électrique et le phénomène étudié, ait eu un temps les faveurs de Rössler. En outre, la généralisation et l'extension des mécanismes dynamiques à d'autres domaines scientifiques que la chimie, passent par des analogies "inverses" de celles proposées par Rössler dans sa démarche d'analyse.

Enfin, on peut s'interroger sur la place de l'expérimentation physique, chimique, dans cette pratique. Il se trouve que Rössler a très peu pratiqué lui-même ce genre d'expériences au sujet du chaos. Il a servi de guide aux expérimentateurs, comme dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky, mais n'a pas cherché à réaliser de dispositifs. On peut y voir du désintérêt ; on peut également le relier à son opinion sur la simulation par ordinateur. Comme il nous l'a dit :

"Une expérience sur l'ordinateur (pas seulement l'ordinateur analogique) est une expérience physique, de mon point de vue" [609] ***.***

C'est une affirmation qu'il faut rapprocher de cette idée :

"Des oscillations compliquées de type chaotique ont été trouvées non seulement dans des simulations à l'ordinateur, mais dans des vraies mesures (en utilisant en quelque sorte un 'ordinateur chimique analogique')." [610]

On voit ici à quel point l'analogie est ancrée naturellement et profondément dans la pensée de Rössler et quelles conséquences cela peut avoir dans son travail. Car si une simulation correspond à un résultat empirique, c'est par l'analogie établie entre le procédé de simulation et le phénomène naturel. La différence entre une "vraie" expérience et un calcul se situe au niveau du bruit trouvé dans l'expérimentation, alors que la simulation est un résultat épuré.

[607] A la surprise de Rössler, qui ne s'attendait pas à cette possibilité double de comportement chaotique. Le "son du chaos" fait aussi partie des éléments exploitables par l'ordinateur, dont Rössler semble tirer quelques intuitions. Lettre de O.E. Rössler à l'auteur, 16 septembre 2003. La publication relative à cette découverte est [RÖSSLER, O.E., 1976c].

[608] "They [computer calculations] confirm thinking and they help thinking". Lettre de O.E. Rössler à l'auteur, 16 septembre 2003.

[609] ***"An experiment on the computer (not just analogue computer) is a physical experiment in my view". Lettre de O.E. Rössler à l'auteur, 16 septembre 2003.***

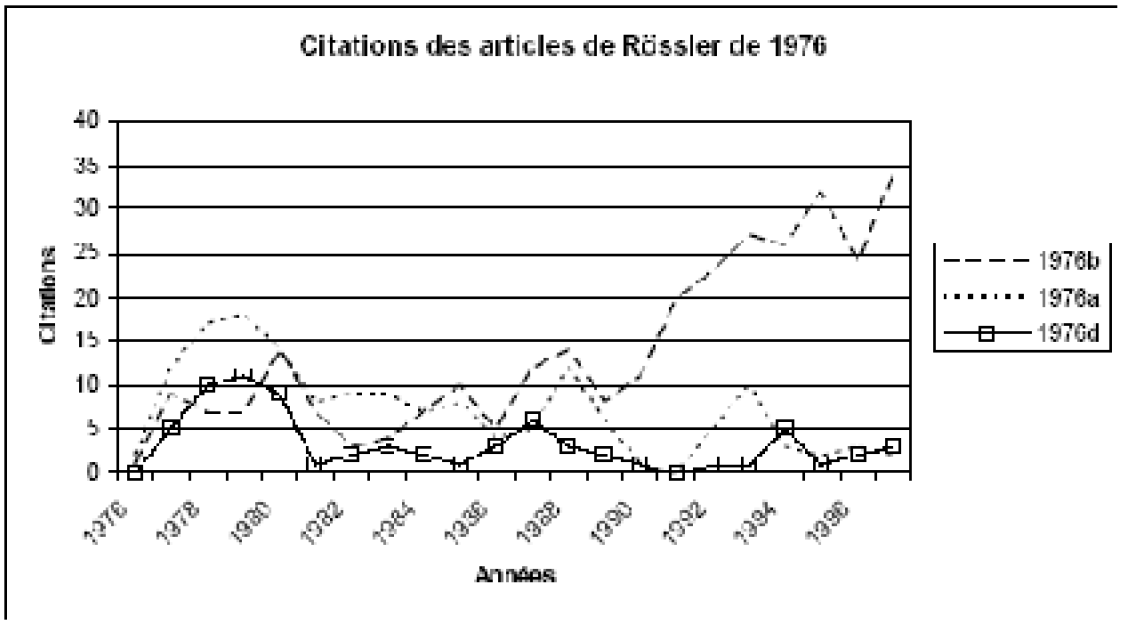
[610] ***"Not only in computer simulations but also in real measurements (using a 'chemical analogue computer', so to speak) have complicated oscillations of the chaotic type been found", [RÖSSLER, O.E., 1979c], p. 108.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

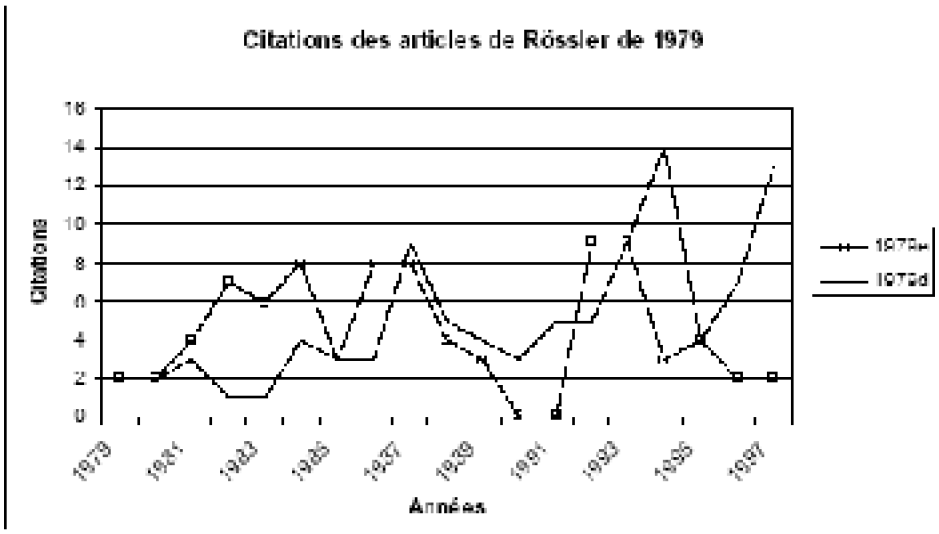
Aussi ce rapport de la simulation à la réalité empirique explique assez bien que dans sa pratique la place réservée habituellement à l'expérience soit prise par le calcul. La dialectique de la théorie et de l'expérience est remplacée par un dialogue entre la théorie mathématique et les simulations numériques, ces dernières expériences donnant à la fois des résultats physiques (chimiques) et mathématiques.

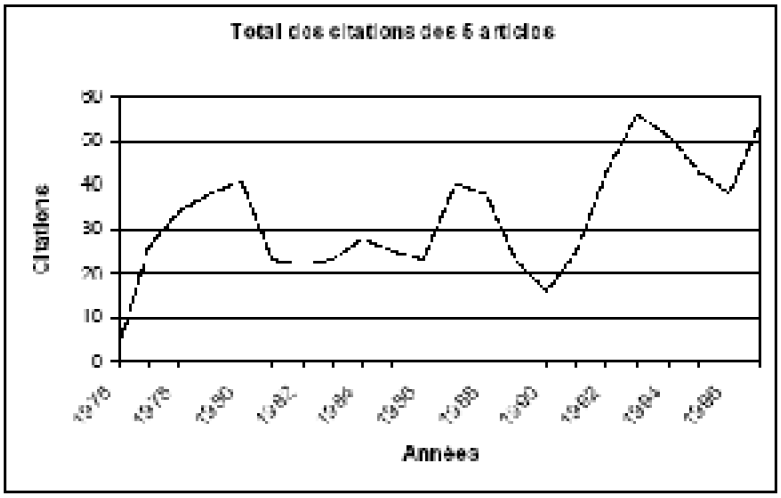
e. Quelle reconnaissance des notions de Rössler ?

La période 1976-79 est donc extrêmement prolifique et les travaux de Rössler sont foisonnants. Pour en cerner la pénétration parmi les scientifiques nous avons réalisé des dénombrements de citations des articles que nous considérons comme les plus novateurs ou les plus accessibles.



protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.





Nous avons choisi cinq articles représentatifs, des années 1976-79 :

1) "An equation for continuous chaos", 1976 : il rapporte les équations du système de Rössler ([RÖSSLER, O.E., 1976b]).

2) "Chaotic behavior in simple reaction system", 1976 : c'est le premier article donnant les grandes lignes de sa démarche ([RÖSSLER, O.E., 1976a]).

3) "Chemical turbulence : Chaos in a simple reaction-diffusion system", 1976 : Rössler traite de la turbulence chimique ([RÖSSLER, O.E., 1976d]).

4) "An equation for hyperchaos", 1979 : il incarne les réflexions sur le chaos en dimension 4 ([RÖSSLER, O.E., 1979e]).

5) "Continuous chaos - Four prototypes equations", Conference de New York, 1977 : le premier bilan effectué par Rössler devant un public très concerné ([RÖSSLER, O.E., 1979d]).

Quelques constats s'imposent. Les taux de citations ne sont pas très élevés au

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

regard de l'ampleur de la réflexion et des concrétisations avec la réaction de Belousov-Zhabotinsky. Notons également que les chiffres du plus cité et du plus célèbre de ces cinq articles ("An equation for continuous chaos") ne doit pas faire illusion : une citation de cet article correspond plus souvent à une simple utilisation des équations de Rössler (voir simple mention du nom de Rössler) qu'à une référence à la démarche générale. On peut distinguer schématiquement trois périodes qu'on retrouve sur toutes les courbes, mais avec des tendances parfois divergentes.

• 1976-80 : des citations croissantes atteignant un pic en 1979-80, traduisent un certain attrait pour les travaux théoriques de Rössler. On notera que le plus cité est l'article 2), celui où est explicité la démarche Rössler et non pas (encore) l'article 1) donnant le système de Rössler.

• 1980-90 : deux tendances opposées. On constate un ralentissement ou une stagnation à un niveau moyen (au regard de l'ensemble de la série) pour les trois articles de 1976, alors que les articles 4) et 5) de 1979 grimpent et se retrouvent à un niveau quasiment équivalent aux trois premiers.

• Après 1990 : on observe un pic sur tous les graphiques (sauf pour l'article 3)) et les tendances ultérieures varient beaucoup d'un article à l'autre : quasi-extinction pour les 2), 3) et 4), persistance et progression pour les autres. Le nombre de citations des articles 1) et 5) **n'a jamais été aussi élevé depuis 1980** (le nombre a doublé).

Ces vagues successives demanderaient à être expliquées, car il est étonnant de voir un tel retour dans les années 1990, après dix ans de statu quo. Avant 1980, la communauté concernée par le chaos et les notions proches est assez restreinte ; le public scientifique est demandeur et connaisseur. La diffusion de la démarche (article 2), et du système de Rössler en particulier (article 1), n'a rien d'anormale, au contraire. Ceci s'explique d'autant mieux qu'avant 1980, la formalisation du champ n'est pas achevée et l'on pourrait dire que toutes les démarches sont aussi atypiques que celle de Rössler : elles apportent chacune des résultats différents dont aucun, *a priori*, n'est "supérieur" à l'autre.

On peut ajouter que dès 1978, la question du chaos et les travaux de Rössler sortent d'un cadre très spécialisé et bénéficient d'une plus large publicité : un article dans Nature intitulé "The prevalence of chaos" fait état des découvertes récentes et met en avant la contribution de Rössler [611] . Un signe de plus que cela n'est pas passé inaperçu.

Pour la suite, la situation est à rapprocher de la conjoncture générale des années 1980 dans le domaine. En se rapportant aux taux de citations des autres articles de Ruelle et Takens par exemple, symbolisant l'attention portée aux attracteurs étranges, il semble falloir admettre que la démarche de Rössler est loin d'être dominante ; elle n'est pas celle qui est "choisie" par une majorité de chercheurs dans le domaine du chaos, pendant ces années. Ce n'est qu'à la suite d'un parcours "en solitaire" que Rössler trouve une plus grande reconnaissance du milieu scientifique. Il faudrait alors analyser ce qu'il

[611] MacDonald (Departement of Natural Philosophy, Glasgow) encense le travail de Rössler : "In a fascinating series of papers O.E. Rössler outlines some of the taxonomy of chaotic flows, and sketches a number of potential applications". Il souligne également sa participation aux travaux sur la reaction de Belousov-Zhabotinsky. [MACDONALD, N., 1978], p. 306.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

reste de la réflexion de Rössler et de sa démarche combinant les recettes des oscillations chimiques, les théories mathématiques topologiques (modèles papiers) et les simulations à l'ordinateur. Une telle étude sort du cadre de notre thèse et il serait prématuré de conclure à ce sujet. Le régime du champ du chaos après 1990 est tel qu'une analyse détaillée de l'histoire du chaos demanderait un travail exclusivement concentré sur le sujet : la densité technique, le nombre considérable d'articles à explorer placent hors de portée, dans l'immédiat, toute conclusion vraiment assurée.

4.2. Des mesures pour le chaos : dimensions et exposants de Lyapounov

En parallèle à l'approche de Rössler, marquée par la topologie et le qualitatif, se développent plusieurs voies de recherches. Avant d'aborder les conceptualisations de Robert Shaw, nous nous focaliserons sur les démarches cherchant à donner des mesures quantitatives au chaos. Nous allons voir qu'elles sont sous-tendues par une conception de chaos, dans laquelle la perspective de Ruelle est déterminante, ce qui expliquera que les succès remportés par les méthodes construites ne sont pas neutres vis-à-vis des concepts de chaos. Nous analyserons donc les principaux indicateurs de chaos et leurs conséquences épistémologiques et sociologiques relativement au champ de recherche en construction.

a. Pourquoi du quantitatif ?

Les réflexions sur le chaos, comme celles menées par Ruelle, Li, Yorke ou Rössler, ont deux caractéristiques marquantes : elles sont essentiellement des abstractions très mathématisées et qualitatives. Mais, très tôt, ces propositions conduisent à certaines limites de l'analyse théorique. Les scientifiques butent en particulier sur la question de l'existence effective des attracteurs étranges ou de la sensibilité aux conditions initiales, dans les simulations numériques, comme dans les phénomènes "réels". Dans les conceptions de Ruelle, cela a son importance, puisque l'existence du chaos dans ces deux types d'expériences pose question.

Rössler suit une démarche différente et le chaos peut espérer être appréhendé dans l'expérience phénoménologique, grâce aux classifications qu'il propose. Les réflexions sur la réaction de Belousov-Zhabotinsky indiquent des tentatives en ce sens. Ruelle, pour remédier à l'absence de critères très directs pour détecter un chaos, a proposé d'analyser le spectre de fréquences du signal supposé chaotique. L'idée est reprise dès 1975, dans l'étude des processus comme la turbulence (faible) en Mécanique des fluides, réalisée par Harry Swinney et Jerry P. Gollub : la continuité du spectre de fréquences est un des premiers indices utilisé pour caractériser des phénomènes appelés turbulents [612]. Le choix de procéder à une analyse spectrale ne tient pas du hasard et n'est pas uniquement commandé par un appel des mathématiciens comme Ruelle. Cela fait partie de la

[612] [GOLLUB, J.P., SWINNEY, H.L., 1975]. Il s'agit de la première expérience réalisée au sujet de la transition vers la turbulence en rapport avec le scénario imaginé par Ruelle et Takens. Swinney et Gollub ont utilisé le spectre de fréquence en tant que dispositif distinguant un comportement périodique (pic dans le spectre) d'une turbulence (spectre continu).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

panoplie la plus standard de l'analyse des signaux [613] . Il n'y a donc rien de vraiment novateur dans le principe du traitement des mesures. Les défis techniques sont ailleurs, dans les dispositifs de mesure, hérités des études des transitions de phases, transposés dans le cadre de la transition vers la turbulence hydrodynamique.

Cependant, les analyses de Rössler ne portent pas encore leurs fruits [614] , et l'analyse spectrale trouve ses limites dans le cas des signaux "compliqués" justement étudiés dans l'expérimentation réelle. Dans ce cas, les limites ne sont pas seulement pratiques, mais aussi théoriques. Ainsi,

"L'analyse en spectre de puissance, par exemple, caractérise un comportement apériodique par la présence d'un bruit de bande large dans le spectre de puissance, mais un tel bruit peut être produit par des systèmes ayant un petit ou un grand nombre de dimensions d'espace de phase. Ainsi un spectre de puissance ne permet pas de les distinguer." [615]

C'est-à-dire que le spectre de fréquence ne révèle presque rien de ce qui ferait la spécificité d'un chaos. La problématique est donc de préciser ces indices de chaos, en vue des expériences numériques ou concrètes, car les moyens opérationnels pour détecter un chaos et le mesurer sont très limités à ce moment là. On peut ajouter qu'il y a certainement un facteur "psychologique" à cette tension vers le quantitatif. L'attachement au quantitatif et le renoncement à trop de qualitatif est bien ancré chez les physiciens, en rapport avec leur souci de "reproductibilité", de "fiabilité" des observations expérimentales. On peut comprendre des réticences à s'engager dans une voie plus topologique que métrique, dans le cas du chaos. Cependant, il est bien difficile d'évaluer le poids de ces préjugés dans la recherche d'indicateurs quantitatifs.

Sans alternative et selon les habitudes expérimentales, l'analyse spectrale se poursuit quelques temps [616] , mais le développement des capacités de détermination de la dimension d'un signal sera l'occasion d'une réévaluation de l'apport de ces techniques dans le cas du chaos. L'alternative est présentée dans le même article que la précédente citation :

"Si un attracteur chaotique existe pour de tels flots, alors la dimension fournirait

[613] Voir par exemple [GLEICK, J., 1991], p. 168-172, [AUBIN, D., DAHAN, A., 2002], p. 316-318.

[614] Les résultats, bien qu'encourageants, ne sont pas encore décisifs, ni suffisamment précis, pour la raison que la collecte du signal ne permet pas de tirer directement trois séries temporelles indépendantes, qui correspondraient à trois dimensions d'espace des phases. C'est une première approche du chaos en chimie qui reste très qualitative, comme nous l'avons montré p. 264.

[615] "Power spectral analysis, for example, characterizes aperiodic behavior by the presence of broadband noise in the power spectrum, but broadband noise can be produced by systems requiring either a small of large number of phase-space dimensions. Thus the power spectrum fails to make this distinction.", [FROEHLING, H., CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, D., PACKARD, N.H., SHAW, R., 1981], p. 606 (article soumis le 20 août 1980).

[616] Outre les expériences de Gollub et Swinney, on peut renvoyer aux travaux numériques du physicien Paul Martin, cherchant à déterminer des spectres dans les simulations numériques de modèles de fluide, de manière à faire le pont entre modèle et expériences. Voir [McLAUGHLIN, J.B., MARTIN, P.C., 1974 / 1975]. Ces expériences sur la transition vers la turbulence sont analysées au chapitre 5, p. 317.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

une classification expérimentale des flots turbulents" [617]

Ainsi, avant 1980, nous allons voir que deux éléments sont développés dans la perspective de quantifier certains aspects du chaos. Il ne s'agit pas de signes directs, mais d'indications signant la possibilité d'un certain chaos. Ce sont les notions de dimension d'attracteur étrange et celle d'exposant de Lyapounov. Nous allons voir d'où proviennent ces indicateurs et leur rapport avec les notions de chaos en voie d'élaboration. Ainsi il ressortira en quoi la perspective des attracteurs étranges et de la sensibilité aux conditions initiales bénéficie de ces recherches et se renforce.

b. Dimensions des attracteurs étranges

Vers 1980, un grand espoir est placé dans l'utilisation des notions de dimension afin de caractériser les flots dans l'espace des phases. C'est en effet par ce biais que **la mesure quantitative de l'"étrangeté"** des attracteurs associés au chaos, est inaugurée. Comme beaucoup d'éléments rassemblés pour étudier le chaos, ce sont une nouvelle fois des pièces rapportées, connues par ailleurs, dans plusieurs branches des mathématiques.

La notion "moderne" de dimension est due à Felix Hausdorff (1868-1942), en 1919 [618], qui a donné une généralisation de la dimension commune, euclidienne. Plusieurs définitions de dimension d'un objet mathématique ont été proposées depuis. La dimension la plus couramment utilisée est issue des prolongements des travaux d'Hausdorff, dans les années 1930, par le mathématicien Abram Besicovitch (1891-1970).

A partir du milieu des années 1970, l'ouvrage de Benoît Mandelbrot (né en 1924) Les objets fractals : forme, hasard et dimension [619], va favoriser l'utilisation de cette notion de dimension au sujet des attracteurs étranges. L'ouvrage ne s'inscrit pas directement dans une réflexion au sujet du chaos et, d'ailleurs, ne prétend pas aborder le sujet. Il est le fait d'un mathématicien, travaillant alors au sein du laboratoire de mathématiques d'IBM, donnant sa vision sur des objets dits fractals et promulguant une vision plus générale, très géométrique, de la Nature. Ce terme fractal est inventé par Mandelbrot, notamment dans l'idée de figurer la dimension fractionnaire (non entière) de certains objets [620]. Le propos se veut peu technique, mais on trouve une annexe dans l'ouvrage, dressant un tableau des notions de dimension utiles, dont celle d'Haussdorff-Besicovitch, qu'il utilise sous l'appellation "dimension fractale".

[617] ***"If a chaotic attractor exists for such flows, then the dimension would provide an experimental classification of turbulent flows.", ibid., p. 606.***

[618] Voir [HAUSDORFF, F., 1919] (en Allemand).

[619] Cet ouvrage est une transcription, améliorée, de conférences données en 1973-4 au Collège de France et à l'Université de Cambridge : [MANDELBROT, B., 1975]. Sa traduction en anglais [MANDELBROT, B., 1977] a assuré une large audience internationale au livre et à ses théories.

[620] Plus précisément un objet est dit fractal, selon Mandelbrot, lorsque sa dimension fractale est plus grande que sa dimension topologique (qui correspond à la dimension "intuitive"). Mandelbrot s'explique sur ce choix dans l'entretien : [MANDELBROT, B., 1986], p. 424.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Il convient d'évaluer à sa juste valeur l'impact de cet ouvrage. Sur le plan de la vulgarisation et de la diffusion des idées sur les fractales et la question de la dimension, il est indéniable que cet ouvrage a produit son effet [621]. Cependant, il ne faudrait pas oublier que les propriétés des dimensions sont connues et utilisées dans plusieurs domaines. En prenant quelques raccourcis, il s'agit surtout des questions de traitement du signal, sujet lui-même relié au problème de théorie de l'information. Car fondamentalement, c'est la quantité d'information contenue dans un signal qui intéresse les scientifiques et les dimensions donnent des indications dans ce sens [622].

Mandelbrot intervient également plus directement dans le jeu des problématiques de la turbulence en 1975-76, d'abord au cours du séminaire sur la turbulence organisé à Orsay en juin 1975, puis à l'occasion du séminaire de Berkeley en 1976, sur le même thème [623]. Il tente alors de provoquer la convergence de deux approches du problème de la turbulence vers la notion de fractales : selon Mandelbrot, l'approche dynamique combinant le travail de Lorenz, Ruelle et Takens peut tendre à rencontrer son approche développée depuis les années 1960, à la condition que tous recourent à la notion de fractales. L'argumentation s'appuie sur plusieurs éléments précis : l'attracteur étrange se construit sur les ensembles de Cantor, prototypes des ensembles fractals ; le système de Lorenz possède un attracteur "pire qu'étrange", fractal, mais "sa dimension [lui] est inconnue" [624].

L'argumentaire se conclut par un appel sans équivoque :

[621] Il suffit de lire tout article de la période 1978-1982 présentant la question de dimension des attracteurs étranges, pour saisir l'importance de l'ouvrage de Mandelbrot (Cf. note). Charles Tresser et Pierre Coullet affirment aussi que le texte de Mandelbrot a été une clé de leurs développements théoriques vers 1977-78 (voir chapitre 5, p. 329).

[622] A la fin des années 1970, le rôle de la théorie de l'information dans le développement conceptuel du chaos est le mieux exprimé dans les travaux de Shaw et elle s'inscrit dans un développement conceptuel très large (voir la suite de ce chapitre et l'analyse des idées de Shaw, p. 294). Quant à l'analyse des signaux, l'utilisation des notions de dimensions y est déjà avancée. En 1962, Roger Shepard, travaillant en psychologie mathématique au Bell Labs, y avait eu recours afin de déterminer le nombre de paramètre pertinents dans les expériences de psychologie ([SHEPARD, R.N., 1962a et b]). Sans prétendre à l'exhaustivité on peut mentionner divers domaines où la dimension joue un rôle important. La méthode de K. Fukunaga et D. Olsen permet de déterminer la dimension intrinsèque (ou topologique) d'une série de données, selon une méthode statistique ; c'est un premier pas important pour l'analyse de données, publiée en 1971 ([FUKUNAGA, K., OLSEN, D.R., 1971]). Keinosuke Fukunaga prolonge d'ailleurs ce genre d'analyse au sujet de la reconnaissance des formes ([FUKUNAGA, K., 1972]). Les travaux de Gerard V. Trunk (né en 1942) s'inscrivent dans cette perspective d'estimation statistique de dimensions de signaux ([TRUNK, G.V., 1968] et [TRUNK, G.V., 1972]). Les problèmes généraux en amont sont ceux de la détection de formes, de cibles, et l'analyse de signaux RADAR : Trunk travaille pour le Naval Research Laboratory, section RADAR (laboratoire de la Marine américaine), au sein de l'Université John Hopkins (pour plus d'informations, voir sur le site www.iriacenter.com dans la liste des "Fellow of the Military Sensing Symposia"). Dans la même veine, pour l'US Air Force, on peut consulter les travaux de L.J. White et A.A. Ksienski en 1974 (détection d'avions par RADAR : [WHITE, L.J., KSIENSKI, A.A., 1974]).

[623] Voir les publications : [TEMAM, R., 1976], p. 121-145 et "Fractals and turbulence : attractors and dispersion" dans [BERNARD, P., RATIU, T.S., 1977], p. 83-93. Cette conférence a déjà été signalée : elle est la première où le rapport entre les attracteurs étranges et le système de Lorenz, suggéré par Ruelle, est repris et analysé par Williams (et Lanford), cf. p. 202.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

"Ainsi, le terme attracteur étrange utilisé dans Ruelle & Takens 1970 pourrait bien être une victime du franc succès de l'approche sous-jacente, un terme plus positivement descriptif devenant souhaitable. On peut suggérer attracteur fractal." [625]

La tentative de raccordement et de soumission au cadre de sa théorie est manifeste. L'année suivante, 1977, à New York, Mandelbrot persiste dans sa lancée en rapprochant le système de Lorenz de ses considérations, avec un argument supplémentaire : la dimension de l'attracteur serait d'environ 2,06, faisant de l'attracteur un objet fractal [626].

Malgré ces appels, et au regard de l'évolution générale sur la période 1976-80, les scientifiques gardent essentiellement leur ligne de recherche, sans faire totalement allégeance aux fractales. Autour de 1980, le travail de Mandelbrot fait plutôt figure de "piqûre de rappel" des considérations de dimensions (fractales et autres) effectuée au cœur de la problématique de la turbulence et du chaos. D'ailleurs, la plupart des textes traitant de la dimension des attracteurs étranges, pour être bref, s'appuient sur l'opuscule de Mandelbrot, ne serait-ce que pour les définitions les plus simples [627]. La dimension fractale devient donc une des références dans la mesure du chaos, par l'intermédiaire de l'étude des attracteurs étranges ; ainsi l'article de synthèse d'Edward Ott de 1981 ("Strange attractors and chaotic motion in dynamical systems" [628]) insiste-t-il particulièrement sur cet aspect.

c. Exposants de Lyapounov

Le second indicateur utilisé dans la caractérisation du chaos sont les exposants de Lyapounov. Ils sont issus plus directement des mathématiques des systèmes dynamiques et, tout comme la notion de dimension, ils ne datent pas des années 1970. Ce sont des nombres codifiés par Lyapounov, à la fin du XIXème siècle, et repris, adaptés ensuite dans le cadre des études de stabilité des systèmes dynamiques. Les scientifiques soviétiques ont prolongé ces considérations, notamment dans les années 1960 avec l'ouvrage The theory of Lyapounov exponents and its application to the problem of stability

[624] "…there is no doubt (though the fact remains to be proved) that the corresponding "worse than strange" attractor is fractal ; but its dimension is not known to me.", [BERNARD, P., RATIU, T., 1976], p. 84.

[625] "Thus, the term strange attractor used in Ruelle & Takens 1970 may well be a victim of the very success of the underlying approach, a more positively descriptive term becoming desirable. One may suggest fractal attractor." [BERNARD, P., RATIU, T., 1976], p. 84-85 (souligné dans le texte).

[626] [GÜREL, O., RÖSSLER, O.E., 1979], p. 462-463. Mandelbrot ne précise pas les paramètres pour le système de Lorenz, mais ce sont vraisemblablement les valeurs : r=40, σ=16, b=4.

[627] S'agissant, ici, le plus souvent de travaux non français, c'est la version anglaise du livre de Mandelbrot qui est utilisée, par exemple dans les articles : [RUSSEL, D.A., HANSON, J.D., OTT, E., 1980], [FARMER, J.D., OTT, E., YORKE, J.A., 1983], [FROEHLING, H., CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, J.D., PACKARD, N.H., SHAW, R., 1981] et [GRASSBERGER, P., PROCACCIA, I., 1983a].

[628] [OTT, E., 1981]. Ott est alors physicien à l'"Université du Maryland", où travaille J. Yorke (il y est arrivé en 1979).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

[629] .

Un article, en particulier, amène le sujet à l'attention des scientifiques au milieu des années 1970 : celui de Giancarlo York, Luigi Galgani et Jean-Marie Strelcyn de 1976. Il est intitulé : "Kolmogorov entropy and numerical experiments". Ruelle le mentionne dans son article misant sur la sensibilité aux conditions initiales en 1977. Il n'est pas directement lié aux balbutiements du chaos, au sens où il n'a pas été orienté par les considérations postérieures à 1975 comme celles de Li et Yorke ou d'autres. Par contre, les auteurs se donnent pour cadre l'étude de la "stochasticité", c'est-à-dire de l'apparition de phénomènes irréguliers, aléatoires, dans certains systèmes dynamiques déterministes, surtout les systèmes Hamiltoniens. On soulignera la remarque suivante, placée en tête de l'article, au sujet de la mesure de la stochasticité dans ces systèmes :

"Un des outils empiriques les plus puissants a toujours été l'étude de la divergence des trajectoires voisines dans l'espace des phases." [630]

Confirmant ce qui a été perçu à travers les textes de Chirikov (de 1979) et de Helleman (1980), la stochasticité est un problème bien connu et une question tout aussi "ancienne" que peut l'être celle de son estimation par l'étude de la divergence des trajectoires voisines.

L'enjeu de l'article est le suivant [631] : dans de nombreux systèmes Hamiltoniens, déjà étudiés numériquement, il apparaît schématiquement un mélange de deux grandes classes de comportements, de l'ordre et du stochastique ; il s'agit de trouver des moyens de caractériser ordre et désordre, c'est-à-dire de définir un paramètre d'ordre.

Précédant de trois années celui de Chirikov, ce texte s'inscrit dans une perspective très similaire. Les auteurs proposent pour cela une quantité "entropylike", *k* (dépendant de plusieurs paramètres, dont la position *x* de l'espace des phases où elle est évaluée). *k* est destiné à distinguer les régions de l'espace des phases ordonnées (ou stables) des régions stochastiques : très schématiquement, *k*=0 pour les régions ordonnées, et, dans le cas stochastique, *k* est positif et indépendant du point *x* de la région stochastique.

La proposition principale des auteurs est de rattacher ce paramètre *k* aux exposants de Lyapounov du système. Ils montrent ainsi que ***k* est directement relié au plus grand exposant de Lyapounov** ; c'est cette quantité qui est déterminée selon un processus d'approximation décrit dans l'article et qu'il est assez facile de mettre en œuvre sur un

[629] [BYLOV, B.F., VINOGRAD, R.E., GROBMAN, D.M., NEMYTSKII, V.V., 1966] (en russe). Plusieurs noms devraient y être rattachés : V.M. Millionshchikov, Lipschitz, Malkin. V. Oseledec a utilisé les exposants de Lyapounov dans le cadre de la théorie ergodique [OSELEDEC, V.I., 1968] dont une alternative a été proposée dans [MILLIONSHCHIKOV, V.M., 1968]. (Cf. plus loin, p. 291).

[630] "One of the most powerful empirical tools has always been the study of the divergence of nearby trajectories in phase space.", [BENETTIN, G., GALGANI, L., STRELCYN, J.-M., 1976], p. 2338.

[631] Le texte est beaucoup plus mathématique et plus rigoureux que celui de Chirikov ; notre présentation prendra quelques raccourcis techniques, sans quoi elle serait extrêmement fastidieuse (on peut tout de même préciser que les raisonnements se font sur un arrière-plan de théorie de la mesure, comme toute la théorie ergodique mathématique d'ailleurs. Ainsi, le résultat d'existence des exposants de Lyapounov est vrai hors d'un ensemble de mesure nulle).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

ordinateur.

Tout l'intérêt de se connecter aux exposants de Lyapounov tient au fait que, mathématiquement, il existe beaucoup de résultats assurés. Le fond mathématique utilisé est d'origine soviétique et les deux résultats fondamentaux exploités dans l'article sont d'Oseledec, pour ses considérations de 1968 ("A multiplicative ergodic theorem. Ljapounov characteristic numbers for dynamical systems") et le travail du mathématicien Yakov Pesin, publié en 1976 et transmis aux auteurs par l'intermédiaire du mathématicien Anatole Katok [632] . Ces travaux concernent la théorie ergodique des systèmes dynamiques.

Le travail d'Oseledec assure l'existence mathématique des exposants de Lyapounov (sous certaines hypothèses), le théorème de Pesin permet de relier ces exposants avec l'entropie métrique (ou entropie de Kolmogorov, ou entropie-KS selon la terminologie adoptée par Chirikov). Ainsi, il est possible de bâtir des conjectures reliant *k*, l'entropie de Kolmogorov, les exposants de Lyapounov, sur une base assez solide.

De manière heuristique, l'exposant de Lyapounov et *k* servent de paramètre d'ordre, à la manière d'une entropie thermodynamique (sans en avoir la signification). Les supputations font enfin l'objet de tests numériques ; c'est le système de Hénon-Heiles, système Hamiltonien à deux degrés de liberté, issu de considérations de Mécanique céleste et construit vers 1962-64, qui sert de support aux simulations numériques.

Cet article s'inscrit dans une double perspective : la **théorie ergodique, mathématique, des systèmes dynamiques** d'une part, les expériences numériques sur ces systèmes d'autre part. Les concepts, outils et démonstrations issus des mathématiques des systèmes dynamiques sous-tendent le travail. La nouveauté apparaît dans la reprise des calculs de Hénon-Heiles avec ces outils, ainsi que dans la poursuite des travaux, également numériques, de Boris Chirikov et ses collaborateurs, lesquels ont en fait participé à la définition de la quantité *k*. On aura compris la grande proximité des problématiques de York et al. et de Chirikov [633] .

Avec ce qui a été exposé auparavant, on comprend comment ce travail s'inscrit dans les développements "normaux" des années 1970. L'article, reçu le 8 juin 1976, ne s'associe pas explicitement aux questions de chaos, même si sa teneur en fait, rétrospectivement, un élément facilement associable à cette problématique. Les auteurs se présentent eux-mêmes dans la continuité de la question de la stochasticité dans les systèmes dynamiques, et semblent tout ignorer de l'existence des idées de chaos. Le processus d'intégration au chaos se fait ultérieurement, en passant par Chirikov et Helleman (et d'autres, car l'agrégation au chaos ne saurait être imputée exclusivement à ces deux physiciens).

Plusieurs travaux suivront sur les exposants de Lyapounov (le problème étant le

[632] Mentionné en remerciement dans l'article. Les références précises sont : [OSELDEC, V.I., 1968] et [PESIN, Ya.B., 1976]. Pesin travaille alors avec le mathématicien Dmitri Anosov, spécialiste reconnu des systèmes dynamiques.

[633] Bien évidemment, il ne s'agit pas ici du texte de 1979. Nous ne voulons pas insister davantage pour ne pas brouiller les pistes et risquer l'anachronisme. Néanmoins, sur le sujet précis des exposants de Lyapounov, les deux groupes vont dans le même sens.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

calcul de tous les exposants et pas seulement du plus grand), sur la stochasticité, l'entropie de Kolmogorov et d'autres confrères s'associent à ce cheminement [634]. Parmi leurs collaborateurs, il convient de distinguer Claude Froeschlé (1939-) et Jean-Paul Scheidecker (1943-), travaillant alors à l'Observatoire de Nice [635]. S'ils publient en commun avec Giancarlo York en 1978, c'est parce qu'ils ont déjà une bonne expérience du sujet. En effet, depuis 1971, ces deux astronomes travaillent à l'étude de systèmes dynamiques, conservatifs (les seuls pratiquement qui intéressent les astronomes), d'un point de vue numérique. On ne doit pas s'étonner de trouver cette perspective à Nice : Michel Hénon, l'auteur du modèle utilisé par le groupe de York est arrivé à Nice en 1968. En fait, Froeschlé s'est intéressé depuis 1968 aux systèmes dynamiques à petit nombre de degré de liberté, avec l'idée d'élaborer des méthodes de visualisation et d'investigation numérique de ces systèmes [636]. Avec Scheidecker, les méthodes mises au point ont été exploitées pour étudier la stochasticité dans les systèmes dynamiques, selon les moyens imaginés par Froeschlé [637]. On en trouve la concrétisation sous la forme de la thèse d'Etat de Scheidecker de 1976, réalisée sous la direction de Froeschlé. Les indicateurs élaborés se révèlent être des mesures pertinentes de la stochasticité. Dans le travail de "rencontre" avec York et Galgani, ils prennent le nom d'exposants de Lyapounov et deviennent un moyen courant pour les déterminer [638].

Ainsi en 1978-79, il existe des algorithmes permettant de déterminer numériquement la valeur des exposants de Lyapounov ; ils sont utilisés dans le cadre des systèmes dynamiques Hamiltoniens et sont issus de considérations de la théorie ergodique des systèmes dynamiques.

D. Ruelle travaille justement dans cette perspective, il n'est donc pas étonnant qu'il connaisse ce travail de York, Galgani et Strelcyn de 1976 et qu'il le cite dans son intervention aux sujet de la sensibilité aux conditions initiales et de la turbulence à New York en 1977. On comprend alors son affirmation selon laquelle le plus grand exposant

[634] Outre les travaux qui suivent, on peut citer : [BENETTIN, G., STRELCYN, J.M., 1978], [BENETTIN, G., CASARTELLI, M., GALGANI, G., GIORGILLI, A., STRELCYN, J.M., 1978, 1979] et plus particulièrement sur le problème du calcul des exposants de Lyapounov : [BENETTIN, G., GALGANI, G., GIORGILLI, A., 1978].

[635] Signalons déjà, qu'avant de s'engager dans l'astronomie, Froeschlé est issu d'un parcours très mathématique (Licence, Agrégation) et Scheidecker est formé aux mathématiques (DEA d'Analyse Numérique, thèse de 3ème cycle en mathématiques).

[636] Les sept premiers articles publiés par Froeschlé sont consacrés à ces méthodes : [FROESCHLE, C., 1968-73]. Il a notamment présenté un système de vision stéréoscopique pour visualiser les systèmes à 3 degrés de liberté : [FROESCHLE, C., 1970]. Sa thèse d'Etat, soutenue en 1971, porte sur le thème : "Contribution à l'étude des systèmes dynamiques à 2 et 3 degrés de liberté" [FROESCHLE, C., 1971].

[637] Le principe utilisé repose sur le calcul des valeurs propres de l'application tangente au flot. L'évolution des valeurs propres avec l'itération est un indicateur de l'apparition de stochasticité, des zones où il existe une intégrale isolante ainsi que celles appelées "ergodiques" : [FROESCHLE, C., SCHEIDECKER, J.P., 1973, a-d]. Voir aussi [FROESCHLE, C., SCHEIDECKER, J.P., 1975].

[638] Chirikov souligne les avantages des méthodes numériques développées par Froeschlé, pour déterminer l'entrpopie-KS des applications comme l'itération "standard".

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

de Lyapounov, "caractérise la dépendance sensible aux conditions initiales" [639] , et vérifie une inégalité intégrant l'entropie de Kolmogorov-Sinaï [640] .

Ces éléments, loin d'être dissociés, forment un tout : **le poids donné à la sensibilité aux conditions initiales est associé aux réflexions croissantes sur les exposants de Lyapounov**. Le rapprochement entre les exposants de Lyapounov et les problématiques du chaos est accentué par les travaux de Ruelle. D'autres suivent, comme Sidnie D. Feit en 1978 : "Characteristic exponants and Strange attractors" [641] . Sous l'impulsion de Ruelle, Feit a réalisé une étude essentiellement numérique des exposants de Lyapounov dans le cas de l'attracteur de Hénon. D'emblée, sensibilité aux conditions initiales et exposants de Lyapounov sont associés selon les préconisations de Ruelle en 1977. Ensuite Feit détermine les exposants du système lorsque les paramètres varient, afin d'établir des relations entre le caractère positif d'un exposant dans le régime asymptotique et la présence d'un attracteur étrange, ou encore entre une fenêtre de valeurs négatives pour l'exposant et l'existence d'orbites périodiques. Non seulement, sensibilité aux conditions initiales et exposants sont plus fortement associés, mais de plus les exposants sont utilisés afin de caractériser les régimes dynamiques [642] . Une tentative de lier sensibilité aux conditions initiales, exposants et attracteurs est en train de s'opérer.

En parallèle, dans les années 1976-79, un groupe de physiciens japonais constitué de Ippei Shimada et Tomomasa Nagashima notamment, travaille au problème de la caractérisation du chaos "dissipatif" par les exposants de Lyapounov. Les méthodes numériques sont assez proches de celles du groupe de York [643] mais ils s'intéressent explicitement et avant tout aux mouvements dits chaotiques. Leur optique est de mesurer l'instabilité de la dynamique et de montrer que les exposants peuvent également servir à préciser l'évolution, par bifurcation, de systèmes tels que celui de Lorenz.

A la fin des années 1970, les exposants de Lyapounov accèdent donc au rang d'indicateur de la sensibilité aux conditions initiales [644] et prétendent même devenir des caractéristiques élaborées des comportements dynamiques.

d. Des rapprochements entre dimension et exposants de Lyapounov

[639] [RUELLE, D., 1979], p. 413: "Finally, let us remark, (after Benettin et al.) that the largest characteristic exponent $\chi = \lambda_x^{(s(x))}$, which characterizes the sensitive dependence on initial condition, satisfies…".

[640] Ruelle signale qu'il est lui aussi au courant des travaux de Pesin, par l'intermédiaire d'Anatole Katok (signalé dans [RUELLE, D., 1979], p. 413).

[641] [FEIT, S.D., 1978].

[642] Tout ceci repose sur des conjectures, testées ensuite à l'ordinateur.

[643] La méthode de Benettin et al. est explicitée dans le cas conservatif ; elle peut se transporter au dissipatif à condition d'adapter l'algorithme, selon la procédure des japonais (par une orthogonalisation de la base servant au calcul des exposants de Lyapounov, à chaque itération) : [SHIMADA, I., NAGASHIMA, T., 1978], p. 1614-1615. En 1977, ils s'étaient intéressés au cas du système de Lorenz, pour lequel ils ont repris la méthode de Benettin et al. [NAGASHIMA, T., SHIMADA, I, 1977].

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Les développements importants sur les questions de dimensions et d'exposants prennent une tournure nouvelle dans les années 1980. Les recherches se poursuivent déjà plus ou moins selon une problématique commune, celle de caractériser un comportement chaotique. Mais en 1979, deux conjectures relient déjà la dimension fractale de l'attracteur étrange aux exposants de Lyapounov. L'une est due à James Kaplan et James Yorke [645], l'autre au japonais Hazime Mori [646]. Selon une procédure désormais bien rôdée, ces conjectures sont testées numériquement, à partir des attracteurs connus, à la fois pour des itérations du plan et des équations différentielles [647]. De tels indices permettent d'écarter l'idée de Mori et de conserver celle de Kaplan et Yorke. Il n'y a donc pas de démonstration mathématique rigoureuse de la conjecture, mais, petit à petit, ces éléments vont donner lieu à la définition d'une nouvelle dimension, baptisée "K-Y dimension" (pour Kaplan-Yorke) ou "dimension de Lyapounov" [648].

Derrière ces intentions et concrétisations se dessinent plusieurs tendances. Tout d'abord, la place toujours plus importante de l'ordinateur et des calculs numériques est flagrante. Sans eux l'exercice de calcul d'exposants de Lyapounov et de dimensions est impossible et l'utilisation de ces indices resterait du domaine de l'abstraction et de l'académisme. C'est un signe que l'analyse, pour dépasser les discours abstraits, théoriques et qualitatifs, se prolonge par la voie numérique.

Deuxièmement, les exposants de Lyapounov et les dimensions occupent une place toujours croissante, parce qu'ils sont des indicateurs quantitatifs, bien maîtrisés d'un point de vue numérique. L'essai de synthèse de Doyne Farmer, Edward Ott et James Yorke, "The dimension of chaotic attractor" [649] ne peut que le confirmer. Il est inutile de multiplier les exemples, mais on peut d'ores et déjà annoncer que lorsque viendra le temps de

[644] Ceci est clair dans toutes les études numériques analysées, auxquelles on pourrait ajouter de nombreux articles de la période postérieure à 1980 : par exemple [HUBERMAN, B.A., RUDNICK, J., 1981], [PACKARD, N.H., CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, J.D., SHAW, R.S., 1980], [CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, D., PACKARD, N., SHAW, T., JONES, G., DONNELLY, R.J., 1980]. Shaw travaille également cet aspect [SHAW, R.S., 1981].

[645] La conjecture peut se formuler ainsi :
où d est la dimension fractale (ou de Hausdorff-Besicovitch) de l'attracteur, $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \ldots > \lambda_N$ et j le plus grand entier tel que $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j > 0$. Voir [KAPLAN, J.L., YORKE, J.A., 1979a].

[646] [MORI, H., 1980]. Sa conjecture repose sur un raisonnement mathématique à base d'arguments heuristiques (dont Mori s'attache à préciser les limites). La dimension fractale D d'un attracteur étrange est donnée par la formule
où m^0 et m^+ sont le nombre d'exposants de Lyapounov λ respectivement nuls et positifs ; λ^+ et λ^-, les moyennes des exposants λ positifs, respectivement négatifs.On peut noter qu'elle fonctionne pour le "traditionnel" modèle de Lorenz.

[647] [RUSSELL, D.A., HANSON, J.D., OTT, E., 1980] teste les conjectures sur l'application de Hénon notamment. On peut également signaler le travail de Farmer (et en partie Packard) : [FARMER, J.D., 1982]. La conjecture de Mori est déjà mise en doute en 1980.

[648] Le nom n'est pas attribué immédiatement. C'est un lent processus d'acceptation de ce résultat, d'abord numérique, qui conduit à définir une notion supplémentaire de dimension. L'article décisif est la synthèse "The Lyapounov dimension of strange attractors" ([FREDERICKSON, P., KAPLAN, J., YORKE, E.D., YORKE, J.D., 1983]), associant notamment Kaplan et Yorke.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

l'exploration empirique en physique, chimie, etc., l'élan de ce mouvement n'en sera que redoublé du fait de cette dimension quantitative extrêmement décisive.

Pour comprendre pourquoi ces deux indices prédominent (et prédomineront), il faut prendre en compte la trame conceptuelle sous-jacente. Nous l'avons montré, les exposants de Lyapounov sont associés à la sensibilité aux conditions initiales quasiment automatiquement ; plus largement ils sont associés à un réseau problématique où la stochasticité (avec l'article de Benettin et al.), la théorie ergodique, la sensibilité aux conditions initiales (avec Ruelle) et les notions d'entropie sont des noeuds essentiels. Quant aux dimensions, il suffit de rappeler qu'elles interviennent pour seconder les attracteurs étranges. **C'est dans un contexte où les attracteurs étranges et la sensibilité aux conditions initiales s'imposent que les indicateurs percent et prennent une place importante**.

Les rapprochements entre indicateurs et les vertus qui leur sont accordées pour la dynamique provoquent une concentration sur ces indicateurs et sur les éléments conceptuels sous-jacents. Plus l'analyse du chaos se focalise sur les dimensions et exposants, plus les attracteurs étranges et la sensibilité aux conditions initiales sont considérés comme l'essence du chaos. En dernier ressort nous touchons à un processus social plus que conceptuel, mais il est clair qu'on ne peut pas écarter la large acceptation des attracteurs étranges et de la sensibilité aux conditions initiales, du développement singulier de ces indicateurs, et réciproquement.

Pour en revenir au plan conceptuel, il est important de bien contextualiser la problématique encadrant les développements des exposants de Lyapounov, en précisant notamment le rôle de Ruelle et les rapports à la théorie ergodique des systèmes dynamiques.

e. Les liens avec l'entropie et la théorie ergodique

La théorie ergodique fournit des outils pour entrer dans ces caractérisations statistiques du chaos (ou de la turbulence), appuie la définition et justifie l'existence des exposants de Lyapounov [650] . On a vu les reprises et les développements de ces objets par Pesin, Benettin et ses confrères, Chirikov ; dans le cadre conservatif, la théorie ergodique permet de proposer des notions d'entropie et de les relier aux exposants de Lyapounov, eux-mêmes rattachés à des questions de divergence exponentielle de trajectoires voisines. C'était d'ailleurs la motivation d'Oseledec en 1968 [651] .

[649] [FARMER, J.D., OTT, E., YORKE, J.A., 1983].

[650] Rappelons que la justification émane des travaux mathématiques d'Oseledec et de son "théorème ergodique multiplicatif", valable dans le cas d'un système dynamique possédant une mesure de probabilité invariante. Dans les systèmes conservatifs (le cadre de Oseledec est celui de la mécanique classique) la condition est automatiquement respectée. [OSELEDEC, V.I., 1968].

[651] Dans son introduction Oseledec affirme : "This investigation is based on the work of Sinaï on entropy theorem in classical dynamical systems. From his work it became clear that positive entropy in classical dynamical systems is related to exponential divergence of orbits originating at nearby points. Because of this connection the author became interested in the problem of exponential divergence.", [OSELEDEC, V.I., 1968], p. 197.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Le meilleur exemple des rapports entre les exposants de Lyapounov, la turbulence et la théorie ergodique se trouve dans les réflexions de Ruelle (ce qui n'a rien d'étonnant vue la place de la théorie ergodique dans son étude de la turbulence). La raison essentielle tient à ce que la théorie ergodique accède à la catégorie des systèmes dynamiques Axiome A, grâce notamment au travail avec Bowen publié en 1975. Dans ce cadre, il existe des mesures invariantes, dont une en particulier (appelée "mesure asymptotique") a des propriétés jugées intéressantes pour décrire la turbulence. Elle est ergodique et **l'entropie métrique correspondante égale la somme des exposants de Lyapounov positifs (comptés avec leur multiplicité)** [652] . Dans la perspective des recherches de mesures décrivant la turbulence, nous avons indiqué que l'exposé de 1977 est un noeud important ; nous pouvons maintenant ajouter que les résultats précédents y sont également annoncés et que quelques grandes lignes de justification sont données (plus ou moins heuristiquement).

De manière générale, nous avons vu que l'ergodicité est à la fois une motivation des recherches et un point d'appui essentiel des résultats avancés. Concernant les exposants et les entropies, la théorie ergodique en fournit les fondements mathématiques, d'une part ; d'autre part, ils sont destinés à caractériser la stochasticité, les comportements statistiques, les frontières entre stabilité et stochasticité. Ce sont des paramètres d'ordre [653] : ceci est net avec l'entropie métrique (chez Chirikov par exemple) ; les exposants de Lyapounov sont utilisés pour caractériser la sensibilité aux conditions initiales (ou la divergence exponentielle des trajectoires voisines), mais bientôt ils deviennent des éléments de classification de la turbulence. Ainsi, pour Ruelle, le nombre d'exposants de Lyapounov positifs ou nuls correspond à une classe de turbulence [654] .

En un mot, les exposants de Lyapounov et l'entropie métrique prennent leur sens à travers les interrogations sur l'ergodicité des systèmes dynamiques. Cependant, cela n'est pas exclusif d'un développement parallèle, comme nous l'avons vu, où le numérique seconde les mathématiques et les fondements rigoureux sont différés : ainsi, les calculs réalisés sur les systèmes "concrets" (celui de Lorenz ou Hénon) ne reposent que sur une sorte d'intuition d'ergodicité (et de sentiment qu'ils sont proches de l'Axiome A) pour ces systèmes. Néanmoins, cette impression, pour vague qu'elle soit, est importante puisqu'elle légitime les calculs d'exposants de Lyapounov sur les attracteurs étranges.

f. Conclusion : les conceptions de Ruelle et les indicateurs du chaos

Les indicateurs quantitatifs de chaos se développent donc rapidement, en réponse à des interrogations sur la nature du chaos, les problèmes expérimentaux, numériques ou phénoménologiques. L'essentiel est peut-être le réseau conceptuel qui sous-tend leur

[652] D'autres propriétés sont importantes, comme la stabilité sous des petites perturbations. Voir [RUELLE, D., 1980b], (p. 7, en particulier).pour les détails sur ces "mesures asymptotiques".

[653] On peut faire référence à l'article [OONO, Y., 1978a] ("A heuristic approach to the Kolmogorov entropy as a disorder parameter").

[654] Voir par exemple [RUELLE, D., 1978a], p. 345.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

épanouissement. Ainsi nous pouvons affirmer que la perspective "à la Ruelle", à base d'attracteur étrange, de sensibilité aux conditions initiales, d'interrogation sur l'ergodicité, a déterminé les constructions théoriques et les mises en œuvre effectives. Cependant, Ruelle n'est qu'au début d'une chaîne de considérations qui se prolongent, et s'autonomisent en une voie de recherche [655] . Il ne faudrait pas laisser croire que Ruelle manipule tout ce qu'il a contribué à lancer. Mais les indicateurs développés ne sont pas le fruit du hasard. Ils se fondent sur ses concepts et participent à promouvoir cet ensemble de conceptions. Les dimensions et les exposants sont finalement très représentatifs de l'importance prise par les propositions de Ruelle dans le champ du chaos au détriment de celles de Rössler, mais aussi de la troisième voie que nous allons présenter, celle de Robert Stetson Shaw.

4.3. Robert S. Shaw : une physique de la dynamique

Dans les années 1976-79, Rössler a proposé une vision du chaos, en léger décalage par rapport à la perspective de Ruelle, progressivement dominante et qui prend de l'ampleur à travers le développement des indices quantitatifs comme les dimensions d'attracteur étrange et les exposants de Lyapounov. La "bataille", qu'il est évidemment exagéré de nommer ainsi puisqu'il n'y pas d'affrontements, ne se résume pas à deux protagonistes, ni à deux camps ou deux voies : il ne s'agit pas d'options inconciliables mais plutôt de nuances sur les objets privilégiés, les objectifs et les méthodes. Rössler n'est pas le seul à présenter une alternative. Nous avions choisi de le mettre en avant pour son originalité et le fait étonnant que ses travaux "réapparaissent" dans les années 1990 dans le champ du chaos. C'est pour leur originalité également que nous discutons les travaux de Robert Shaw. Rössler puisait dans les oscillations chimiques, les systèmes dynamiques et des simulations à l'ordinateur ; Shaw cherche du côté de la physique, de la théorie de l'information et des calculs à l'ordinateur analogique, pour construire un concept de chaos qui intègre ces tendances.

a. Robert Stetson Shaw

Robert S. Shaw (né en 1946) fait partie du groupe d'étudiants de l'Université de Santa Cruz, en Californie, regroupant notamment Doyne Farmer, Norman Packard, James Crutchfield, dont la petite histoire a été racontée dans l'ouvrage de Gleick [656] . Ils se sont proclamés "Collectif des systèmes dynamiques" [657] .

[655] On peut considérer les algorithmes automatisés de Grassberger et Procaccia comme un aboutissement de ces recherches. Nous en débattrons à la conclusion de la seconde partie, p. 313.

[656] [GLEICK, J., 1991]. Sous une forme beaucoup plus romancées, et pour des aventures postérieures et indépendantes des considérations présentées ici, on peut aussi consulter les deux romans de T. Bass : The Eudaemonic Pie [BASS, T.A., 2000] et Ils ont battu Wall Street !, [BASS, T.A., 2002].

[657] Voir le chapitre de [GLEICK, J., 1991] (p. 305-341) consacré à ce groupe. La référence au "Dynamical Systems Collecitve" se trouve également dans leurs articles tel [PACKARD, N.H., CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, J.D., SHAW, R.S., 1981], p. 712.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

En 1977, Shaw prépare une thèse sur la supraconductivité et se trouve proche de la conclusion [658]. Le cosmologue et relativiste William Burke lui demande alors s'il peut réaliser une simulation sur l'ordinateur analogique dont Shaw a une certaine maîtrise : il s'agit de l'attracteur de Lorenz, dont la connaissance a été porté à Burke par l'astrophysicien Edward Spiegel [659]. Le sujet prend de l'ampleur et devient l'"attraction" du département de physique. Shaw décide dans la continuité de se consacrer à l'étude des attracteurs étranges, de ces questions de chaos, et donc d'abandonner sa thèse. Son article publié en 1981, "Strange attractors, Chaotic behavior, and Information flow" dresse un bilan de ses réflexions ; l'article circulait déjà en 1978 sous forme de prétirage [660].

Shaw a la chance d'assister à la première grande réunion sur le non linéaire à New York en décembre 1977 ; il s'aperçoit à ce moment là de l'aspect novateur de sa perspective et de l'apport de ses prédécesseurs [661].

Dans son article, Shaw propose une révision, une réinterprétation des comportements turbulents, selon l'optique de la théorie de l'information [662]. Il existe beaucoup de similarités dans les études des comportements qualifiés de turbulents ou chaotiques : la première critique de Shaw est d'affirmer que tout ceci est resté dans "le royaume des 'métaphores mathématiques'" [663]. Ce qui annonce la teneur plus "physicienne" de son projet.

"Nous allons tenter de répondre à cette question [les similarités de comportements] en nous appuyant sur quelques notions physiques, notamment celle de longueur d'incertitude, et de flux d'information, pour nous guider à travers les grandes aires du sujet qui n'ont pas donné lieu à des tentatives d'analyses mathématiques." [664]

Le travail produit par Shaw est à la croisée de la physique, des mathématiques et de la simulation analogique. Il n'y a pas vraiment de dominante, si ce n'est la notion d'information, qui est à la fois la clé de voûte des réflexions, de son interprétation, et l'élément qui fait le pont entre ces différents domaines [665].

658 Il en commencera une autre, achevée en 1980 sur le sujet On the predictability of Mechanical Systems, ce qui est très directement lié à ses préoccupations au sujet du chaos.

659 Spiegel connaît Lorenz depuis les années 1960, [GLEICK, J., 1991] p. 309.

660 Gleick rapporte qu'il a été tiré à plus de 1000 exemplaires, [GLEICK, J., 1991], p. 325.

661 [GLEICK, J., 1991], p. 324.

662 Pour les aspects plus propres à l'information et à la théorie de l'information nous renvoyons à la thèse de J. Segal et à son analyse du même texte de Shaw : [SEGAL, J., 1998], p. 613-624.

663 "in the realm of "mathematical metaphors".", [SHAW, R.S., 1981], p. 81.

664 " We will attempt to answer it relying on a few simple physical notions, notably those of an uncertainty length, and information flow, to guide us past the large areas of the subject which have not yielded to attempts at mathematical analysis", [SHAW, R.S., 1981], p. 81.

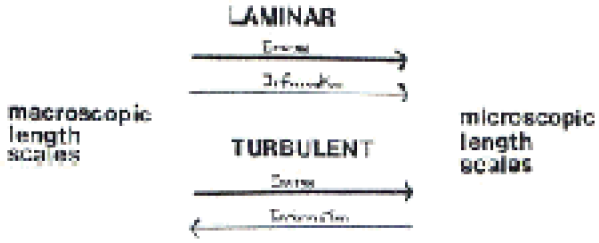
protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

b. La turbulence vue comme un flux d'information

La thèse principale de Shaw au sujet de la turbulence est la suivante :

"Le fait que de petites causes aient de grands effets dans les flots turbulents est, naturellement, bien connu des étudiants en mécanique des fluides. Lorenz a surnommé cette caractéristique 'l'effet papillon' : même si une solution complète des équations du mouvement atmosphérique était connue à un certain temps, la perturbation d'un simple papillon provoquerait la divergence de la solution en temps fini. La littérature se réfère souvent à la turbulence comme étant 'extrêmement sensible aux conditions initiales'. Nous pensons cependant que cette façon de voir la nature chaotique de la turbulence, comme due quelque part à la sensibilité aux conditions initiales, occulte d'une certaine façon la caractéristique essentielle de la turbulence, celle de la génération continue d'information intrinsèque au flot." [666] "La différence qualitative majeure entre un flot laminaire et turbulent vient de la direction du flot d'information entre les échelles de longueur macroscopiques et microscopiques." [667]

La figure suivante exprime l'interprétation de Shaw :



[SHAW, R.S., 1981], p. 106.

Nous allons voir que cette interprétation ambitieuse de la turbulence s'adosse à tout un travail au sujet du chaos, selon un point de vue informationnel. Plus exactement, Shaw s'appuie sur la proposition de Ruelle et Takens d'associer turbulence et attracteur étrange [668] . C'est en fait une étude approfondie des attracteurs étranges, en termes d'information, qui autorise son interprétation de la turbulence :

[665] Voir [SEGAL, J., 1998], p. 617 et p. 621, en particulier.

[666] "The fact that small causes have large effects in turbulent flow is of course well known to students of fluid mechanics. Lorenz elegantly dubs this feature "the butterfly effect": even if a complete solution of the equations of atmospheric motion were known at some time, the perturbation of a single butterfly would cause the solution to diverge in finite time. The literature often refers to turbulence as being "extremely sensitive to initial conditions". We however fell that this way of viewing the chaotic nature of turbulence, as due somehow to sensitivity to initial conditions, obscures somewhat the essential character of turbulence, that of continuous information generation intrinsic to the flow itself.", [SHAW, R.S., 1981], p. 107 (en italique dans le texte, nous mettons en évidence).

[667] "The chief qualitative difference between laminar and turbulent flow is in the direction of information flow between the macroscopic and microscopic length scales", Ibid., p. 106.

[668] "Ruelle and Takens [8] have pointed out the similarity in the behaviour of turbulent flow and strange attractors, suggesting that turbulence results from a strange attractor regime un the Navier-Stokes equations.", [SHAW, R.S., 1981], p. 106.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"Nous sommes confrontés à une situation similaire à celle discutée précédemment à propos des attracteurs étranges, les flots turbulents sont des sources d'information." [669]

Le coeur de l'article est donc une **phénoménologie des attracteurs étranges**. Ceci pourrait sembler en contradiction avec notre intention de montrer que Shaw présente une alternative à la perspective Ruelle. Mais s'il s'appuie sur les considérations de Ruelle et Takens de 1971, nous allons montrer qu'il s'en est départi aussi (comme pour la sensibilité aux conditions initiales) et surtout qu'il se focalise sur la notion d'information, absente chez Ruelle et Takens.

Son cheminement peut également se formuler d'une autre manière. En introduction à son texte Shaw rappelle qu'en Mécanique classique on peut traiter des systèmes physiques au niveau macroscopique, en ayant une totale ignorance du niveau microscopique. Il affirme alors :

"C'est la thèse de ce texte cependant, de dire qu'il existe beaucoup de systèmes non conservatifs pour lesquels cette séparation est rompue ; au lieu d'avoir une complète connaissance ou ignorance confinée aux échelles macro ou micro, il peut y avoir un flux d'information entre elles, dans un sens ou dans l'autre, et une meilleure prise en compte de l'information est requise pour comprendre leurs comportements. La théorie de l'information, telle que Shannon l'a développée, fournit un cadre pour la quantification de cette notion." [670]

Pour Shaw ces systèmes sont représentés de manière abstraite par un flot dans l'espace des phases. Il faut développer une théorie informationnelle des objets censés réaliser les transferts d'informations en question, dans l'espace des phases : les attracteurs étranges en font partie [671]. Ainsi, **un attracteur étrange est vu comme une source d'information** pour lequel Shaw construit un paramètre λ mesurant la croissance d'information dans ce système [672]. Le flux d'information est le principe premier des comportements chaotiques (donc les turbulents aussi), et la théorie de Shannon permet de le préciser.

c. Mesurer l'information

La démarche de Shaw est très intéressante et assez analogue de celle de Rössler. Elle mêle une maîtrise des concepts utiles et bien balisés des systèmes dynamiques, une

[669] ***"We are faced with the same situation discussed earlier regarding strange attractors, turbulent flows are an information source", [SHAW, R.S., 1981], p. 106 (en italique dans le texte).***

[670] ***"It is the thesis of this paper, however, that there exist many nonconservative systems for which this implicit, separation breaks down ; instead of our complete knowledge or ignorance being confined to the macro-microscales, there may be an active flow of information between them, one way or the other, and a more careful auditing of information is required for an understanding of their behavior. Information theory, as developed by Shannon, provides a framework for the quantification of this notion", [SHAW, R.S., 1981], p. 81.***

[671] [SHAW, R.S., 1981], p. 81.

[672] Le paramètre est appelé
dans le texte. Nous utilisons λ par commodité.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

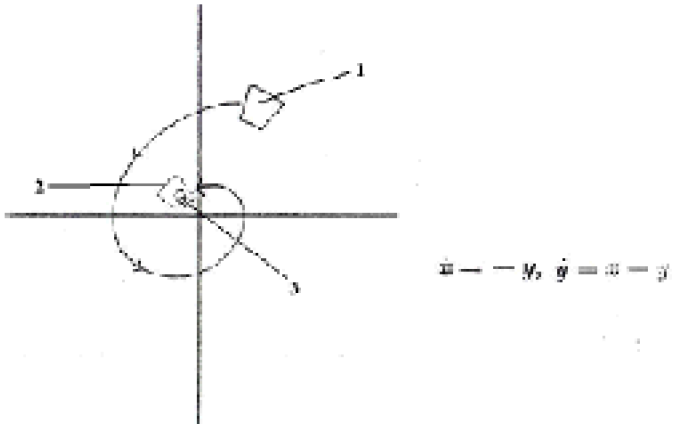
bonne connaissance de la théorie de l'information et une approche plus expérimentale, sur ordinateur analogique.

Comment Shaw introduit-il l'information dans l'étude des flots dissipatifs ? A l'origine, il y a une perception plus physique que mathématique de l'espace des phases du système, illustrée par cet extrait du texte de Shaw :

"Le Principe d'Incertitude nous assure qu'il y a un bloc de taille minimale dans l'espace des phases, qui est une constante physique de la Nature. Si deux orbites arrivent à l'intérieur d'un tel bloc, elles ne sont plus distinguables et l'information sur leurs origines distinctes est perdue. Ainsi la dimensionnalité est réduite et la 'rigueur' apparente des solutions formelles devra être modifiée si elles sont censées représenter la réalité physique observée." [673]

Le principe d'incertitude implique donc la division de l'espace des phases en cellules de taille minimale [674] , appelées "état" en Mécanique statistique. Ceci a pour conséquence qu'un système évoluant dans un volume fini de l'espace des phases ne peut se trouver qu'en un nombre **fini** d'états. Il faut remarquer que le quadrillage proposé n'est pas un résultat original : Kolmogorov et Sinaï l'ont proposé pour l'espace des phases, mais sans rapport avec une discussion en termes d'information. Shaw l'ignore, vraisemblablement.

Sur le système de l'oscillateur harmonique amorti, Shaw explique de quelle manière il y a perte d'information.



Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti
[SHAW, R.S., 1981], p. 84

Deux observateurs réalisent des mesures (avec une inévitable incertitude) à deux instants différents, *1* et *2*, et localisent le système dans les volumes *1* et *2* de la figure. Or, en laissant évoluer le volume *1* avec le temps, il se contracte en un volume *3*, plus petit que *2* : cela signifie que, à ce moment-là, l'observateur 1 peut donner les conditions initiales, avec plus de précision que l'observateur *2*. "*De l'information accessible a été*

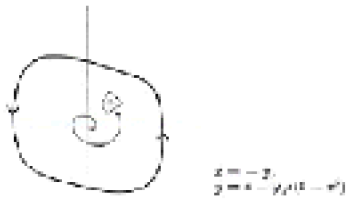
[673] ***"The Uncertainty Principle assures us that there is a minimum block size in phase space, which is a physical constant of Nature. Should two orbits arrive within such a block, they are no longer distinguishable, and the information represented in their separate origins is lost. Thus the dimensionality is reduced, and the seeming "rigor" of the formal solutions will have to be modified if they are to represent observed physical reality.", [SHAW, R.S., 1981], p. 83.***

[674] Shaw fait ici référence au "logon" suggéré par Gabor dans le cadre des canaux de communications et résultant du principe d'incertitude. Nous renvoyons au texte de Dennis Gabor, de 1946 [GABOR, D., 146] et au chapitre 4, p. 266-274 de la thèse de J. Segal [SEGAL, J., 1998].

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

détruite par le flot contractant dans l'espace des phases" [675] .

Pour le système de Van der Pol, en se situant à l'intérieur du cycle limite (loin du bord), la situation est l'inverse de la précédente. Le volume de l'espace des phases s'étend, de l'information est créée.



Portrait de phase d'un oscillateur de Van der Pol
[SHAW, R.S., 1981], p. 84

L'évolution de la quantité d'information est alors donnée par

$$\Delta I = \log\left(\frac{\Omega_{final}}{\Omega_{initial}}\right) = \log\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

où Ω est le nombre d'états distingués avant ou après un laps de temps, V est le volume des blocs de l'espace des phases correspondant. Le taux de croissance ou de destruction d'information est donc

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d\log\Omega}{dt} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$$

Sur la base de ces correspondances, Shaw construit son paramètre λ pour les systèmes dits chaotiques, en commençant par le cas des applications unidimensionnelles, du type $x_{n+1}=2x_n$ *modulo* 1, et plus généralement $x_{n+1}= F(x_n)$. Il les considère comme des "machines", des sortes de mécanismes physiques générant un flux de nombre à traiter selon la théorie de l'information[676]. Le paramètre λ représente alors le taux moyen de variation d'information[677] :

$$\lambda = \Delta I_{moyen} = \int_0^1 P(x)\log\left|\frac{dy}{dx}\right|dx$$

avec $y=F(x)$, P étant la densité de probabilité correspondant à l'itération[678]. Lorsque P n'est pas connue, le paramètre peut être déterminé opérationnellement par cette formule équivalente :

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left|\frac{dy}{dx}\right|$$

Shaw fait alors remarquer que cette formule n'est rien d'autre que l'expression de l'**exposant de Lyapounov de l'itération**. La propriété de sensibilité aux conditions initiales, mesurée habituellement par λ, est donc synonyme ici d'une production d'information.

Le calcul du paramètre λ est ensuite étendu à des systèmes en dimension supérieure, au système de Lorenz en particulier. Le contact entre les itérations et les systèmes différentiels est opéré, naturellement, par le biais d'une section de Poincaré.

675 "*Some accessible information has been destroyed* by the contracting flow in phase space" [SHAW, R.S., 1981], p. 84 (en italique dans le texte).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Mais il est très clair que Shaw ne se cantonne pas à établir une application de Poincaré : **il s'inscrit explicitement dans une perspective très proche de Rössler et Williams** (mais ne cite pas Guckenheimer) au sujet des relations entre attracteurs et itérations. Il annonce déjà que **la structure en "variétés branchées" est importante** [676] .

Sur l'attracteur de Lorenz, le calcul de λ peut se faire facilement, grâce à une section de Poincaré [677] . En intégrant le temps de parcours de l'attracteur, il définit et calcule le taux de croissance de l'information par unité de temps : $\lambda_t = 1,19$ *bits/sec* pour l'attracteur de Lorenz.

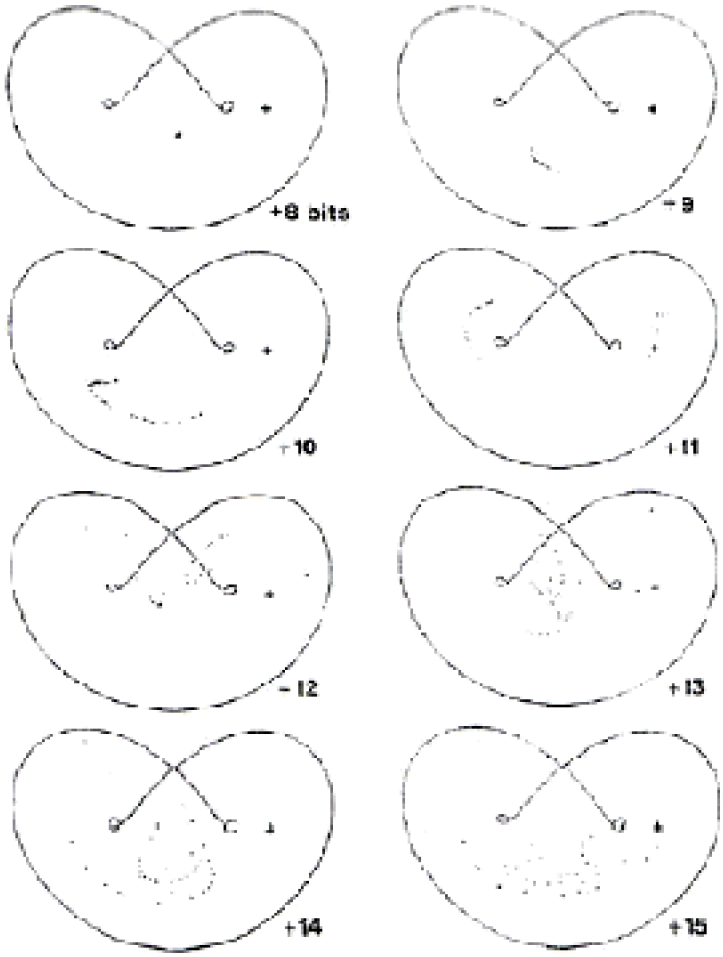
Tout ceci se fonde en grande partie sur des calculs numériques, effectués sur diverses itérations. Mais le point intéressant est la vérification **expérimentale** de la pertinence de λ_t , le taux de croissance de l'information par unité de temps, par des expériences sur ordinateur analogique.

Son procédé est simple : sur un ordinateur analogique Systron-Donner 10/20, de résolution en tension *1-2mV*, Shaw lance cinquante fois le calcul d'une trajectoire du système de Lorenz en partant des mêmes conditions initiales. Sachant que l'amplitude de variation des voltages est de *15V* avec le paramétrage choisi, la quantité d'information initiale est $H_{in} = \log_2 (15/0,002) \sim 13$ *bits*. Les positions des cinquante points sont repérées à des intervalles réguliers multiples de $1/\lambda_t$ qui correspond au temps nécessaire pour la création d'un bit d'information. La figure montre la dispersion des orbites, de plus en plus grande au fil du temps, et déjà vers 11-12 unités il n'y a plus vraiment de localisation. Ce n'est qu'une corroboration statistique, approximative et limitée par le temps nécessaire à ces opérations, mais ces indications valident "expérimentalement" au moins la démarche de Shaw.

[676] Ce sont les conceptions avancées par R. Williams en 1976, cf. p. 202.

[677] D'autant plus qu'en s'appuyant sur le théorème d'Oseledec, Shaw affirme que λ est indépendant du choix de la section (tout comme les exposants de Lyapounov, il s'agit d'une propriété topologique).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.



[SHAW, R.S., 1981], p. 97

d. Une physique de la dynamique. Réévaluation du chaos et phénoménologie des attracteurs étranges

Shaw propose une véritable **physique de la dynamique** dans l'espace des phases, appuyée par une notion d'information, prise elle aussi au sens physique : il traite de la dynamique comme un physicien étudie la matière. Nous allons mettre en exergue cet aspect de la démarche de Shaw, à travers les exemples qu'il donne, ses critiques, et nous voulons surtout en montrer toutes les conséquences épistémologiques. Les notions de chaos et d'attracteur étrange sont à réévaluer dans ce cadre.

Tout d'abord, en considérant que Shaw raisonne en physicien, ses tentatives expérimentales prennent tout leur sens. La dynamique est l'objet des expériences, l'ordinateur analogique n'est pas seulement un dispositif de calcul, mais un dispositif expérimental. D'ailleurs, sa préoccupation pour les aspects pratiques numériques / empiriques est assez proche de ce qu'on pourrait appeler la "chimie" de la dynamique de

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Rössler à la même époque.

Deuxièmement, le chaos et les attracteurs étranges sont définis différemment selon que l'analyse est expérimentale ou théorique. Il existe des notions opératoires lorsqu'il s'agit de se confronter aux simulations numériques ou analogiques : un attracteur étrange est signalé par la non-existence de périodicité. Ceci est une caractérisation très approximative du chaos. Le paramètre λ_t permet de préciser cette distinction, sans pour autant fournir une preuve plus "définitive" [678].

Troisièmement, l'interprétation de la dynamique sur la base de la notion d'information jette un regard théorique nouveau sur le chaos et les attracteurs étranges, avec des répercussions épistémologiques très remarquables. Dans ce cadre interprétatif de la turbulence, en effet, la sensibilité aux conditions initiales n'a aucune pertinence, à l'inverse des conceptions de Ruelle par exemple.

C'est la **prédictibilité** qui fait sens dans l'esprit de Shaw. On pourrait arguer que la sensibilité aux conditions initiales est connectée aux problèmes de prédictibilité et de hasard. Mais, pour Shaw il n'y a pas besoin de cet intermédiaire : la prédictibilité est directement rattachée à un problème de flux d'information et de quantité d'information disponible.

Schématiquement, selon Shaw, un système a un comportement dit prédictible lorsque la création d'information est faible au cours du temps. D'après la formule liant *dH/dt* et *Ω(t)*, la distinction entre prédictibilité et imprédictibilité repose sur le caractère polynomial ou exponentiel de *Ω(t)* en fonction du temps *t*. Si *Ω(t)* est exponentiel, la création d'information est toujours positive et le système agit constamment comme une source d'information. Les exposants de Lyapounov renvoient à ce flux d'information plutôt qu'à une sensibilité aux conditions initiales.

Dans ce cadre, la sensibilité aux conditions initiales est donc écartée, tandis que d'autres éléments sont réinterprétés et validés. Le mécanisme de type étirement-repliement est, par exemple, considéré comme le principal moteur de la perte de prédictibilité, dans les flots de dimension supérieure à trois :

"L'effet de ces flots est de systématiquement créer de l'information qui n'était pas implicite dans les conditions initiales du flot. Etant donné une quelconque erreur finie dans les observations de l'état initial d'une orbite, et le principe d'incertitude assure de l'existence d'une telle erreur, la position d'une orbite sera en conséquence déconnectée de sa condition initiale en temps fini, ainsi toute prédiction de sa position après ce temps est impossible en principe." [679]

Shaw est plus précis dans le cas de l'attracteur de Lorenz, pour lequel le paramètre λ_t est

[678] Ibid., p. 104.

[679] ***"In three and higher dimension it is possible to have flows which in a compact region continuously expand volumes of phase space in some dimension or dimensions while contracting them in others. It is the contention of this paper that the effect of these flows is to systematically create new information which was not implicit in the initial conditions on the flow. Given any finite error in the observation of the initial state of some orbit, and the Uncertainty Principle guarantees such an error, the position of an orbit will be causally disconnected from its initial conditions in finite time, thus any prediction as to its position after that time is in principle impossible.", [SHAW, R.S., 1981], p. 85-86 (en italique dans le texte).***

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

calculé. Ce paramètre sert à préciser l'horizon de prédictibilité, c'est-à-dire le moment où l'information de départ est définitivement diluée. Il répond en quelque sorte à une proposition de Lorenz lui-même, relevée dans son article de 1963, sur la "longueur" effective attendue dans l'impossibilité des prédictions "à long terme" [680] .

Shaw prescrit un moteur pour le chaos et un quantificateur λ_t de ce chaos. En outre, il contribue à préciser les relations entre déterminisme et prédictibilité. Shaw assure une distinction épistémologique plus nette grâce au concept d'information, alors que les débats contemporains restent assez flous et reviennent toujours à l'idée d'un mécanisme générant de l'aléatoire, sans préciser ce que signifie "aléatoire", si cela renvoie à une "non prédictibilité" ou à autre chose.

Son intérêt cultivé pour une approche physique de la dynamique le porte à d'autres critiques très radicales qui lui permettent surtout de déboucher sur les bases d'une classification des attracteurs étranges :

"La description des systèmes dynamiques en terme d'orbites de l'espace des phases a fait ses preuves comme abstraction de grande puissance. Un problème avec cette approche tout de même est que tous les théorèmes et constructions mathématiques relatives aux variétés de Hausdorff ont été appliquées à la théorie des systèmes dynamiques même s'ils ne sont pas pleinement appropriés. Les apparitions, récurrentes dans la littérature, d'objets assurément non physiques comme les ensembles de Cantor, et des distinctions aussi peu physiques que les applications analytiques ou non, les infinités d'orbites dénombrables ou non, à propos de soi-disant modèles de phénomènes physiques, en sont des preuves." [681]

D'une part, les ensembles de Cantor, qui ont fait une partie du succès du chaos et de sa théorisation depuis 1975 sont rejetés franchement par Shaw comme "non physiques". De la même manière, il faut réévaluer la question des attracteurs étranges sur la base d'arguments physiques.

En conséquence, parce qu'elle persiste dans le temps c'est l'**enveloppe de l'attracteur étrange** qui fait sens pour lui, bien que l'étude de la topologie des solutions des équations différentielles ait montré la grande complexité de ces solutions. En outre, le travail à l'ordinateur analogique donne une valeur empirique à cette enveloppe puisque, dans les simulations, c'est l'objet qui est effectivement visualisé. Ainsi, ce sont les "variétés branchées" de Williams et le travail de Rössler qui fournissent les objets pertinents :

"Dans la mesure où une "solution" physique correspondant à un attracteur

[680] Lorenz suggérait d'étudier le comportement de deux orbites partant de conditions initiales très proches pour comparer leurs évolutions respectives. [SHAW, R.S., 1981], p. 95 et [LORENZ, E.N., 1963].

[681] ***"The description of dynamical systems in terms of orbits in phase space has proven to be an abstraction of great power. One problem with this approach, however, is that all the mathematical theorems and constructs pertaining to Hausdorff manifolds have been applied to dynamical systems theory even when they are not fully appropriate. Evidence for this lies in the recurrent appearance in the literature of such blatantly unphysical objects as Cantor sets, and such unphysical distinctions as analytic vs. non-analytic mappings, countable vs. uncountable infinities of orbits, etc., occurring in what are purportedly models for physical phenomena.", [SHAW, R.S., 1981], p. 98 (nous mettons en évidence).***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

étrange est un objet transitoire, existant seulement quand un mécanisme physique est opérant, et gouverné, comme nous l'avons vu, par le mouvement chaotique du bain thermique, une classification reposera profitablement sur les variétés branchées sur lesquelles les solutions évoluent." [682]

D'autre part, en reprenant la critique de Shaw, il y a lieu de remettre en cause l'idée de **réversibilité** qui est incluse dans les présupposés théoriques, aux côtés du déterminisme. Dans l'abstraction mathématique en terme de variété de Hausdorff, il est supposé exister une règle déterminant le mouvement en chaque point, qui est une simple conséquence de l'existence d'équations différentielles gouvernant le flot : c'est le caractère déterministe de ces systèmes dynamiques. Toutes les trajectoires sont supposées distinctes et censées le rester sous l'action du flot : c'est l'idée de réversibilité, qui provient du théorème d'existence et d'unicité des solutions aux équations différentielles.

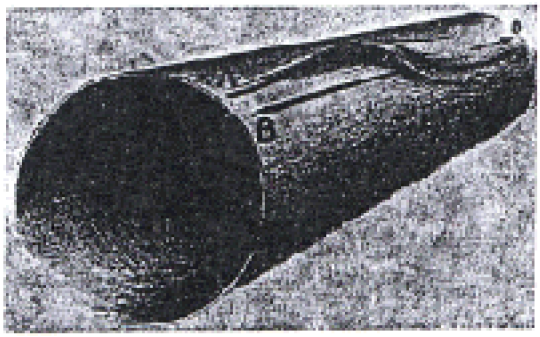
Shaw affirme qu'il faut séparer les deux, et **écarter la réversibilité sur la base du second principe**, interprété en termes d'information : la réversibilité n'est pas possible dès lors qu'il y a perte d'information (comprise comme une croissance d'entropie).

Sur la base de ces deux critiques, tirées d'une intuition physique de la dynamique, Shaw propose un début de classification des comportements possibles à partir des représentations qualitatives, en variétés branchées. Il pose le problème dans ces termes, où s'expriment les contraintes du déterminisme et l'absence de réversibilité :

"Quels sont les types topologiques de variétés branchées possibles, avec la restriction que les trajectoires peuvent se joindre mais pas se diviser ?" [683]

Le cheminement aboutit a une classification, certes incomplète, mais proposant trois catégories de formes possibles :

1) pas de point fixe, pas de bord (du type d'un tore)



[SHAW, R.S., 1981], p. 100.

2) pas de point fixe, bords inclus (du type de l'attracteur de Rössler)

[682] ***"Inasmuch as a physical "solution" to a strange attractor flow is a transitory object, existing only when some physical mechanism is operating, and governed as we have seen by the chaotic motion of the heat bath, a classification scheme might more profitably be based on the branched manifolds on which solutions move.", ibid., p. 98.***

[683] ***"What topological types of branched manifolds are possible, subject to the restriction that trajectories can join but not split ?", ibid., p. 99 (en italique dans le texte). Le déterminisme s'exprime par l'impossibilité de "division" des trajectoires, l'absence de réversibilité, par la possibilité que deux trajectoires se joignent.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

3) des points fixes, bords inclus (comme par exemple l'attracteur de Lorenz)

Notons que les "preuves" de ces résultats sont essentiellement des expériences réalisées sur ordinateur analogique. L'importance des variétés branchées et de leur classification est explicitée :

"Cela nous permet de réitérer notre affirmation selon laquelle les objets fondamentaux dans tous ces exemples sont les formes dynamiques discutées dans la section précédente, qui représentent l'action de l'application ou du flot. La spécification d'une itération sous la forme d'un ensemble d'équations assises sur un bout de papier est un objet statique, mais quand l'application est implémentée physiquement sa forme dynamique correspondante est invoquée […] Les applications itérées du plan dans lui-même sont souvent décrites en terme de série d'actions à produire, par exemple étirez le, courbez le deux fois…etc. c'est une représentation de l'action physique qui est la forme de base. Le texte original de Smale discute les attracteurs étranges en ces termes." [684] ***"En conclusion, nous avons discuté du fait que les formes représentant les actions physiques d'une application sont les bases naturelles pour caractériser les diverses applications et flots turbulents […] La section transverse d'un flot apparaît très compliquée, où beaucoup de strates de l'ensemble de Cantor sont visibles, mais dans chaque cas l'observation a révélé que tout flot tridimensionnel peut être réduit à des combinaisons de formes dynamiques [données par la classification]."*** [685]

En d'autres termes, les mécanismes géométriques représentant l'action, comme l'étirement et le repliement, priment chez Shaw. **Les variétés branchées cristallisent ces actions**. Ainsi, Shaw persiste dans sa vision de la dynamique en termes physiques et à base d'actions. Ceci a naturellement des conséquences lorsqu'il s'agit de considérer des "vrais" systèmes physiques. Le chaos pour ces systèmes se révèlera par la présence dans leur dynamique d'un analogue de ces actions, comme l'étirement-repliement.

"Beaucoup de 'systèmes ouverts' qui retirent du 'travail' de leur environnement (dilatant habituellement le volume de l'espace des phases) et le dissipent, plus tard, sous forme de chaleur (en contractant le volume dans l'espace des phases), pourraient avoir la capacité de former un fer à cheval ou une autre forme stochastique." [686]

Ces dernières réflexions de Shaw abondent toujours dans le sens d'une vision physique et informationnelle de la dynamique. Il confirme le trait fondamental des systèmes

[684] ***"This allows us to reiterate the claim that the fundamental objects in all of these examples are the dynamic forms discussed in the preceding section, which represent the action of the map or flow. The specification of some iterated map in the form of a set of equations sitting on a piece of paper is a static object, but when the map is physically implemented its corresponding dynamic form is invoked. […] Iterated maps maps of the plane onto itself are often described in terms of a series of actions to be performed, e.g. stretch it, bent it double, etc. this is representation of the physical action which is the basic form. Smale's original paper discussed strange attractors in these terms.", ibid., p. 102.***

[685] ***"In conclusion, we have argued that forms representing the physical action of a map are the natural basis to characterize the various turbulent maps and flows […] The cross-section of some flow may appear very complicated, with many of the outer layers of the Cantor set visible [31] but in each case the observation is that any three-dimensional flow can be reduced to some combination of the dynamic forms of Section XIII.", ibid., p. 103***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

chaotiques pour en tirer une ultime conclusion :

"[…] la fonction physique principale de tels systèmes est de prendre de l'information aux échelles de longueur microscopiques (des degrés de liberté de 'chaleur') et de la projeter dans les expressions macroscopiques." [687] ***"Si tel est le cas, on peut s'attendre à ce que le spectre du bruit d'un système physique contenant un ou plusieurs attracteurs étranges, puisse différer d'un bruit 'blanc' ou d'une distribution de la puissance du bruit indépendante de la fréquence telle que nous pourrions l'attendre d'une répartition égale de l'énergie 'thermique' parmi tous les degrés de liberté. […] En fait, dans beaucoup de systèmes un mystérieux bruit, avec un spectre de puissance caractéristique en 1/f, est observé. […] Nous suggérons que les attracteurs étranges fournissent un tel mécanisme"*** [688]

Le fait qu'un flux d'information du microscopique vers le macroscopique implique l'existence d'un spectre de bruit en *1/f*, repose à la fois sur des indices expérimentaux (un système électronique, en astronomie…) et sur des calculs analogiques qui ont mis en lumière un spectre croissant dans les basses fréquences (mais pas tout à fait en *1/f*) pour un attracteur étrange.

Dans un dernier paragraphe, Shaw se lance dans des ultimes spéculations, toujours plus ambitieuses. Elles ont le mérite d'illustrer la place donnée à l'information dans la vision du monde de Shaw :

"Selon cette vision, si le 'monde' peut être vu comme un flot gouverné par une immense équation aux dérivées partielles, alors l'information se déplace à travers la face du monde selon les caractéristiques du système, des régions sources du flot où dH/dt > 0 vers les puits où dH/dt < 0" [689]

D'après le schéma développé par Shaw, les sources d'information correspondent aux mouvements chaotiques sur les attracteurs étranges, qui "*initient* les évènements" [690] ; les puits sont des absorbeurs d'information tels que des points fixes ou des cycles limites.

[686] ***"Many 'open systems' which take 'work' energy from the surroundings (usually expanding some volume of phase space) and then dissipate this work as heat at a later time (contracting the phase space volume), may have the capability of forming a horseshoe or other stochastic form.", ibid., p. 103.***

[687] ***" […] the main physical function of such systems is to take information from microscopic length scales ('heat' degree of freedom) and project it up to the macroscopic expression.", ibid., p. 107.***

[688] ***"If this is the case, we might expect that the noise spectrum of a physical system containing one or more strange attractors might differ from the 'white' or frequency independent noise power distribution which one would expect from a statistically equal distribution of the 'heat' energy among all the degrees of freedom. […] In fact, in many systems there is observed a mysterious noise with a characteristic 1/f power spectrum. […] We suggest that strange attractors provide such a mechanism", ibid., p. 107.***

[689] ***"under this view, if the 'world' can be regarded as a flow governed by some immense partial differential equation, then information moves across the face of the world along the characteristics of the system, from sources in regions of the flow where dH/dt > 0 to sinks where dH/dt < 0.", ibid., p. 108 (en italique dans le texte).***

[690] "*initiates* events", [SHAW, R.S., 1981], p. 108 (en italique dans le texte).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

c. Une démarche marquée par la physique

La démarche de Shaw est empreinte de physique. De la même manière que Rössler puisait des intuitions dans les oscillateurs chimiques, Shaw se laisse guider par des images tirées de la physique et une conceptualisation unifiée par la notion d'information. Il vise lui aussi à produire une classification des comportements. Shaw fait œuvre de physicien dans le choix du cadre théorique et dans ses efforts pour suivre une démarche expérimentale (calculs analogiques). Il n'hésite pas à déployer de multiples arguments physiques pour critiquer les incompatibilités entre l'abstraction mathématique et les processus physiques (ensemble de Cantor, réversibilité, nécessité de suivre un second principe…). Cependant, le résultat est assez inclassable car il s'agit autant de physique que de mathématique.

En tout cas, Shaw fait ressortir une notion de chaos très particulière, un peu marginale, mais qui trouve des points de contact avec les conceptions de Rössler, avec les mathématiques des systèmes dynamiques, l'ergodicité, les exposants de Lyapounov : le chaos est un processus dynamique générant un flux d'information.

Tout l'intérêt de ce travail réside selon nous, d'une part, dans l'originalité des notions avancées, montrant qu'il n'y a pas de voie unique aux conceptualisations de chaos, et, d'autre part, dans la proximité avec des réflexions contemporaines, mêlant mathématiques, ordinateur et physique. Nous avons insisté sur Rössler, mais Pomeau (et bientôt Manneville avec lui) est de ceux-là. Feigenbaum, Coullet et Tresser, pour ceux qui s'inscriront dans la question de la transition vers le chaos à la fin des années 1970, y participeront également.

4.4. La reconstruction des attracteurs étranges

De ce que nous avons pu exposer pour la période 1975-80, il ressort que les résultats s'appuient sur des raisonnements purement formels, mathématiques, sur des intuitions théoriques de physique ou chimie, ou sur des calculs numériques. La confrontation avec le domaine empirique est assez limitée, surtout si on écarte arbitrairement les expériences numériques ou analogiques de cette catégorie. Rappelons simplement que l'hypothèse de Ruelle et Takens sur le démarrage de la turbulence est l'objet d'études de physiciens dès 1975, notamment de Swinney et Gollub. Leur enquête vise à préciser la transition vers la turbulence et non pas la turbulence et le chaos en eux-mêmes ; l'attracteur étrange n'est pas l'objet de leurs travaux expérimentaux. Néanmoins, il faut insister sur l'impact de ces expériences, dans la mesure où elles ont contribué à renforcer la viabilité de la voie alternative à l'entrée en turbulence proposée par Ruelle et Takens, et donc indirectement, de leurs conceptions en terme d'attracteur étrange [691]. Les premiers résultats au sujet du chaos dans le domaine expérimental sont obtenus dans la chimie des oscillations, sous l'influence des théories de Rössler. Auparavant, l'attention était focalisée sur les modèles mathématiques des phénomènes naturels. Ce sont donc les deux premiers exemples où les phénomènes naturels eux-mêmes sont sujets d'études.

[691] Il suffit de lire, par exemple, l'article [MARTIN, P.C., 1976] et Ruelle lui-même dans [RUELLE, D., 1975].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Le véritable pont entre les considérations théoriques et l'expérimentation est réalisé vers 1980. Il s'agit des procédés "simples" de reconstruction des attracteurs étranges à partir de données empiriques. L'exercice de recherche d'éléments quantitatifs, comme les dimensions ou exposants de Lyapounov, est un prélude à ces considérations dont il va tirer profit.

Pour expliciter cette nouveauté, reprenons l'article de Ruelle, de 1980, où il fait une sorte de bilan méthodologique. Il insiste sur la distinction très nette entre, d'une part, la turbulence (ou le chaos) et les attracteurs étranges, qui d'un point de vue mathématique sont assez bien maîtrisés, et, d'autre part, les phénomènes naturels présentant les apparences de la turbulence, moins accessibles, moins facilement contrôlables et plus difficilement compréhensibles. Nous avons vu qu'à partir d'un modèle mathématique d'un système, il est possible de simuler le comportement du système et de voir apparaître des attracteurs étranges. Par le biais de la modélisation mathématique des phénomènes, Ruelle affirme qu'on peut

"[…] voir si des attracteurs étranges apparaissent, soit par l'étude directe des résultats expérimentaux, soit par simulation sur ordinateur. De cette manière le 'chaos' qui apparaît dans certains phénomènes devient compréhensible, et l'on peut espérer que cette compréhension donnera lieu à des applications pratiques. Pour le moment l'étude des évolutions temporelles chaotiques ou 'turbulentes' dans les phénomènes naturels n'en est qu'à ses débuts, et progresse lentement" [692]

Outre que cela confirme la définition du chaos en terme d'attracteurs étranges, il reste donc que l'étude des phénomènes naturels passe par l'établissement de liens entre les produits des simulations et les signaux expérimentaux : c'est toute la problématique de la reconstruction des attracteurs étranges à partir des données empiriques.

Pour formuler le problème pratique qui se pose, disons que les scientifiques cherchent à reconstruire le portrait de phase d'un système expérimental sur lequel ils disposent, *a priori*, de très peu d'informations. On ignore même le nombre de degrés de liberté et par exemple la dimension de l'espace des phases à utiliser. Qui plus est, le nombre de signaux indépendants récupérables est limité. Deux méthodes sont suggérées vers 1980, utilisant une **seule série temporelle** . L'idéal est effectivement de recueillir un seul signal pour construire le portrait, mais rien ne garantissait qu'un seul signal puisse suffire.

Ces méthodes assureront une grande partie des succès remportés par les théories du chaos au cours de la décennie 1980. D. Ruelle a suggéré la méthode suivante : à partir d'un signal $x(t)$, pris à des temps réguliers (un intervalle de temps τ est fixé) on engendre un signal de dimension N, de manière artificielle, en prenant pour coordonnées dans l'espace de dimension N, les valeurs ($x(t), x(t-\tau), \ldots x(t-N.\tau)$). τ est appelé retard et la méthode, "méthode des retards".

Son confrère, Floris Takens [693] , fournit une démonstration mathématique du fait que cette méthode produit, selon un choix judicieux de N, un **équivalent** de l'attracteur du système. Plus exactement ce sont les propriétés topologiques de l'espace des phases qui

[692] ***[RUELLE, D., 1980c], p. 133-4.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

sont retrouvées grâce à cette méthode.

L'autre méthode, proposée de manière indépendante, est donnée par le groupe de physiciens américains, Norman Packard, James Crutchfield, Doyne Farmer et Robert Shaw, dans leur article "Geometry from a time series" [694] . Leur proposition repose sur l'utilisation des dérivées du signal *x(t)* récupéré sous forme de série temporelle. Les dérivées successives seront autant de nouvelles dimensions à inclure dans le nouvel espace. Là encore, ce ne sont que les propriétés topologiques de l'espace des phases qui sont pertinemment reproduites. En revanche, les auteurs n'apportent pas de preuves mathématiques de la validité du procédé. Ce sont des indications multiples qui permettent d'assurer leurs hypothèses. Au fond, leur suggestion repose sur :

• une similarité graphique entre un attracteur de Rössler simulé sur ordinateur analogique (le système de Rössler est choisi parce qu'il est simple) et la reconstruction faite à partir de l'échantillonnage de la simulation précédente,

• un calcul de l'exposant de Lyapounov positif, selon plusieurs méthodes, sur les attracteurs (original et reconstruit).

Le résultat n'a *a priori* pas la même valeur que celui de Ruelle et Takens. Le premier est assuré par un édifice mathématique, le second repose sur des constats plus empiriques et des calculs numériques en nombre limité. Il en est de même pour la dimension *N* à retenir pour l'opération de reconstruction, qui est évaluée par Takens, mais ne tourmente pas les tenants de l'autre méthode.

Les exemples d'utilisation de ces méthodes sont nombreux dès le début des années 1980 : la chasse aux attracteurs étranges dans les expériences est ouverte. Il est facile de comprendre que ces méthodes offrent des perspectives, immédiatement perçues comme prometteuses [695] . En effet, un manque s'était manifesté au travers des études de la réaction de Belousov-Zhabotinsky selon les prescriptions de Rössler (il fallait idéalement trois signaux indépendants, mais le dispositif expérimental ne permettait d'en obtenir que deux). L'utilisation des outils de topologie avait été bridée alors que les attracteurs reconstruits permettent désormais d'effectuer ces analyses.

Enfin, la notion d'attracteur étrange, qui avait déjà acquis un poids théorique certain, s'impose davantage. Elle était un objet mathématique abstrait et elle prend une dimension nouvelle : l'attracteur étrange est un outil pour "voir" le chaos dans les expériences, comme l'explique Ruelle.

[693] [TAKENS, F., 1981]. Sa démonstration est extrêmement abstraite et repose sur des considérations de mathématiques très poussées.

[694] [PACKARD, N., CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, D., SHAW, R., 1980]. On notera qu'ils sont déjà au courant de l'autre procédure de Ruelle, p. 713.

[695] Pour donner deux exemples, dans le domaine de la chimie de la réaction de Belousov-Zhabotinsky, des multiples reconstructions et analyses : [ROUX, J.C., ROSSI, A., BACHELART, S., VIDAL, C. , 1980], [ROUX, J.C., SIMOYI, R.H., SWINNEY, H.L., 1983]. Le chapitre sur les oscillations chimiques (chapitre 10) détaille davantage les raisons de cette réactivité du milieu de la chimie face aux reconstructions d'attracteurs.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

4.5. Un premier bilan en 1982

Schématiquement, trois regards alternatifs sur le chaos cohabitent entre 1975 et 1982. Nous y avons associé les noms de Rössler, Ruelle et Shaw. Nous avons vu que ces perspectives ne sont pas exclusives les unes des autres, qu'elles ont des points communs et que les différences se situent dans les nuances au niveau des concepts mis en jeu, comme des pratiques proposées.

Parmi ces trois visions, une seule domine largement, celle de Ruelle. C'est l'école de la sensibilité aux conditions initiales, des attracteurs étranges et de l'ergodicité. Avec les éléments avancés dans ce chapitre, nous pouvons saisir pourquoi cette combinaison s'impose.

Plusieurs raisons à ce choix ont déjà été proposées. Ce sont d'abord les tentations du quantitatif qui focalisent l'attention sur les exposants de Lyapounov, dont on a vu qu'ils étaient perçus comme des indices de sensibilité aux conditions initiales, et les dimensions des attracteurs étranges. Ces deux indicateurs, dont l'"école Ruelle" (et pas seulement Ruelle) est l'instigatrice et, consciemment ou inconsciemment, le meilleur appui, deviennent des éléments caractérisant le chaos pour beaucoup de scientifiques.

La reconstruction des attracteurs étranges prolonge ces considérations en deux sens. L'attracteur étrange devient l'objet central des analyses et les indicateurs sont appliqués à la récolte des attracteurs, pour dépeindre ce chaos. Le fait est que la confrontation avec les données empiriques ne connaît pas d'alternative à ce processus de reconstruction. En d'autres termes, l'étude expérimentale est orientée par la reconstruction des attracteurs étranges et leur confère une dimension empirique, symboliquement extrêmement forte.

Tout ceci se fait dans la perspective promue par Ruelle, et la conforte. Nous insistons : il ne s'agit pas seulement de la notion d'attracteur étrange, puisque Rössler comme Shaw y ont recours. Tout est dans la perspective "ergodique" adoptée par Ruelle qui s'exerce au détriment de la vision géométrico-topologique de Rössler (Williams également) et des propositions "informationnelles" de Shaw. Quelle citation peut mieux que celle-ci illustrer le délaissement de ces tentatives, et le découragement à s'y engager ?

"Il a été prouvé que l'idée d'attracteur étrange est physiquement pertinente et fructueuse, mais leur étude géométrique directe est difficile et décourageante. La théorie ergodique a fourni une approche plus payante [...]" [696]

Des exemples multiples

Après 1980, l'installation du "paradigme" des attracteurs étranges se poursuit. Leur production est décuplée par le processus de reconstruction et ils ne sont plus considérés comme des artéfacts numériques. De multiples exemples d'attracteurs reconstruits sortent de la chimie des oscillations [697], de la Mécanique des fluides, de la biologie. Les

[696] ***Nous l'avons déjà cité, p. 197 et note 436.***

[697] Des travaux [ROUX, J.C., ROSSI, A., BACHELART, S., VIDAL, C., 1980], [ROUX, J.C., SIMOYI, R.H., SWINNEY, H.L., 1983].

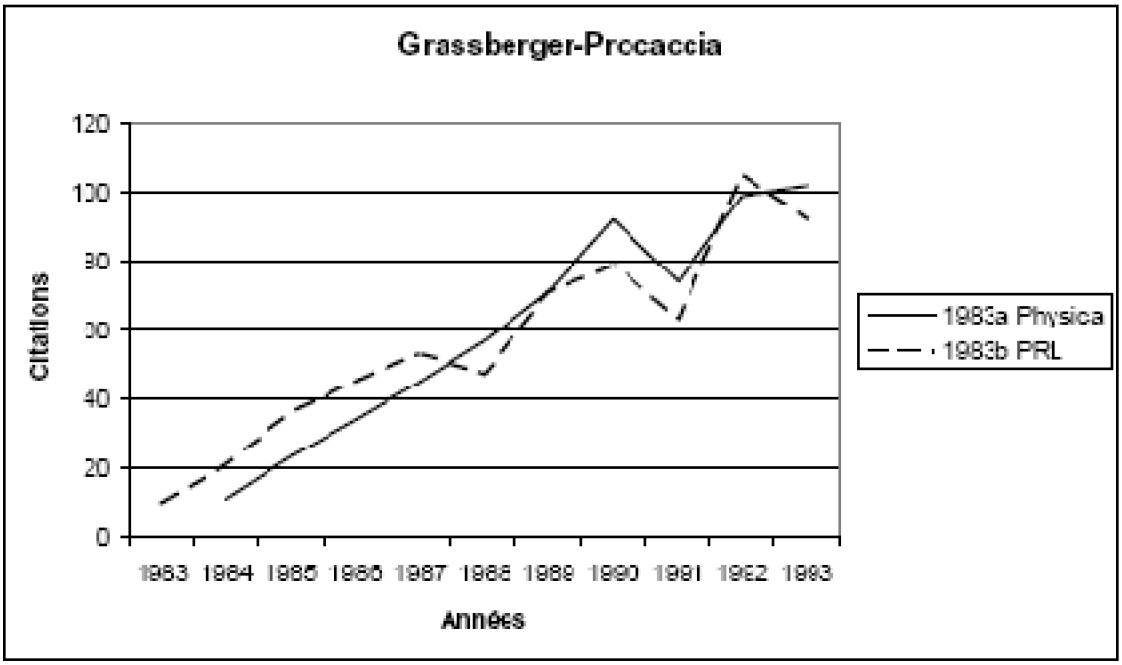
Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

attracteurs étranges sont spectaculaires et deviennent populaires (grâce à l'effort de vulgarisation également). Ils prennent de la consistance, plus seulement mathématique, et ils sont au cœur de la confrontation du chaos au réel.

Une autre étape est franchie avec le développement d'une certaine **automatisation** des procédures d'analyse du chaos. L'algorithme introduit par les physiciens Peter Grassberger et Itamar Procaccia à la fin de l'année 1982 (reçu le 7 sept 1982, publié effectivement en 1983) va connaître, en particulier, un grand succès. Ils donnent une nouvelle notion de dimension (appelée par la suite **dimension de corrélation**), une méthode pour la calculer et ils la testent avec succès sur les systèmes-modèles de Lorenz et Hénon. L'idée de fond est toujours la même :

"Les attracteurs étranges sont caractérisés typiquement par une dimensionnalité fractale D qui est inférieure au nombre de degrés de liberté F, D < F. […] nous suggérons une mesure différente pour l'étrangeté des attracteurs […] associée intimement à la dimension fractale." [698]

De cette manière les procédures de calcul des exposants de Lyapounov (en particulier du plus grand d'entre eux), des dimensions (fractales, de corrélation), d'entropie également, se trouvent banalisées. Les taux de citations (proche de la centaine en 1990 !) des articles de Grassberger et Procaccia illustrent l'engouement pour ces indicateurs quantitatifs :



Enfin, il faut ajouter que la référence aux fractales est rarement évitée : il suffit de relire la précédente citation pour comprendre que l'association des dimensions fractales aux attracteurs étranges persiste et constitue "la" référence pour proposer de nouvelles procédures. Le rapprochement du chaos et des fractales ne se borne pas à des questions

[698] ***"Strange attractors are typically characterized by fractal dimensionality D which is smaller than the number of degrees of freedom F, D < F. [...] we suggest a different measure for the strangeness of attractors [...] which is closely related to the fractal dimension.", [GRASSBERGER, P., PROCACCIA, I., 1983b], p. 346.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

de dimension d'attracteurs, ce que nous montreront les questions de transition vers le chaos. Cependant, il faut reconnaître que les deux thématiques s'amalgament depuis les propositions de Mandelbrot et rien ne dément cette association. Le chaos fait écho aux fractales et réciproquement. Les deux thématiques profitent d'un même élan, jouent sur des éléments graphiques spectaculaires et bénéficient d'une publicité qui rejaillit autant sur le chaos que sur les fractales.

Conclusion

L'essentiel de ce que nous voulions montrer est que, progressivement, l'approche de Ruelle triomphe et se finalise dans ce que nous pourrions appeler une théorie du chaos. La déferlante des attracteurs étranges et de la sensibilité aux conditions initiales, vague inspirée par Ruelle, est relayée par une vogue pour des indices quantitatifs du chaos. Si ces éléments assurent une fixation sur ces conceptions en particulier, il nous faut affirmer encore une fois que Ruelle n'intervient que très peu dans le second mouvement. Le cadre général a été fixé avant 1980, le quantitatif vient le prolonger et, en quelque sorte, le faire dévier des problématiques initiales. Schématiquement, avant 1980, les recherches sur les indicateurs quantitatifs sont accompagnées d'une réflexion et d'une formalisation théorique très poussées, où la théorie ergodique joue un rôle majeur. Par la suite, il semble se produire une dissociation entre les éléments théoriques, d'un côté, le développement et l'évaluation quantitative du chaos par la reconstruction d'attracteurs étranges, de l'autre. La seconde opération devient plus facile, plus banale grâce aux automatisations informatiques du traitement des données.

Mais le développement conceptuel, où le qualitatif prime, n'est pas mort. Rössler, Ruelle et Shaw, pour reprendre les alternatives abondamment discutées, poursuivent leurs recherches ; le quantitatif n'est que la partie visible de l'iceberg.

La date butoir de 1982 commence à prendre sens, même si les analyses à venir sont indispensables pour conclure plus sereinement. En effet, en 1982, le processus de développement conceptuel arrive à une certaine maturité ; il se concentre dans une approche théorique, celle de Ruelle, qui porte ses fruits au niveau numérique et expérimental. Un air de "fin du commencement" est très facilement décelable au terme d'une période de production extrêmement intense. L'exemple de la compilation de Sparrow sur les équations de Lorenz représente à la fois un aboutissement des analyses sur le système de Lorenz, début de l'emballement de 1975, la maturité de l'analyse en termes qualitatifs et la précision des expériences numériques plus quantitatives [699].

L'analyse de l'évolution conceptuelle sur la période 1975-82 n'est pas encore achevée, loin de là. Pour terminer d'en rendre compte, il est nécessaire d'aborder la question de la transition vers le chaos. Cette obligation tient au fait que les attracteurs étranges sont, depuis le début, associés à la question de la transition vers la turbulence : c'est ainsi que Ruelle (et Takens) ont inauguré leurs conceptions sur la "nature de la turbulence", si importantes dans les évènements de 1975-82. Par ailleurs en pleine période de développement de conceptions sur le chaos, la problématique de la transition vers le chaos profite autant qu'elle participe aux élaborations conceptuelles.

[699] The Lorenz equations : bifurcations, chaos and strange attractors, [SPARROW, C., 1982].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

CHAPITRE 5. LES SCÉNARIOS DE TRANSITION VERS LE CHAOS

Introduction

Le développement conceptuel du chaos et les possibilités d'étude des phénomènes dits chaotiques soulèvent de nombreuses difficultés avant 1980 (pour rester schématique). Sur le plan mathématique, les avancées sont lentes et le recours de plus en plus important aux calculs numériques stimule ces recherches. Sur le plan expérimental, les écueils sont légion. Il est difficile (pour ne pas dire impossible) de détecter un attracteur étrange dans un signal expérimental avant les procédures de reconstruction ; la sensibilité aux conditions initiales est difficile à quantifier "directement", c'est-à-dire en terme de divergence de trajectoires données. Les exposants de Lyapounov et les notions de dimensions ne résoudront que partiellement ces problèmes et, avant 1980, le phénomène de chaos est assez insaisissable expérimentalement. La transition vers le chaos (ou turbulence, selon les scientifiques), en revanche, est accessible.

Dans ses grandes lignes, l'analyse de la transition vers le chaos consiste à étudier les modifications (bifurcations) successives de la dynamique d'un système, lorsque les valeurs des paramètres du système sont modifiées ; il s'agit surtout de phénomènes dissipatifs et de transition vers un chaos dissipatif. L'étude du comportement final, le comportement chaotique, n'est pas l'objet des recherches. Cependant, les relations du chaos à la transition vers le chaos sont importantes et font l'objet de ce chapitre.

Nous allons montrer en effet que les "scénarios" de transition construits dans la période 1975-82, s'appuient sur diverses notions de chaos. La relation n'est pas à sens unique et les considérations sur la transition vers le chaos nous aideront à préciser les notions de chaos disséquées aux chapitres précédents. Nous souhaitons donc montrer à l'oeuvre différentes conceptions de chaos, différentes pratiques dans l'exercice de construction de "scénarios".

L'histoire de cet épisode se résume souvent à trois scénarios attestés dès 1981 dans la célèbre synthèse de J.P. Eckmann, "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems" et que nous analyserons successivement. Le développement des transitions vers le chaos a commencé avec la reconnaissance, à différents niveaux, de l'analyse de Ruelle et Takens de 1971 et la construction d'un premier "scénario". Un second concerne le doublement de période et l'universalité, qui est souvent restreint aux idées de Feigenbaum. Le "scénario" de l'intermittence constitue un troisième pan de notre analyse.

Cependant, de même que différentes perspectives sur le chaos cohabitent entre 1975 et 1982, nous voulons montrer que divers scénarios de transition ont été imaginés, au-delà du triplet "officiel" ; dans le cas du doublement de période et de l'universalité par exemple, il existe des alternatives, trop vite oubliées, qui méritent toute l'attention des épistémologues. Pour cette raison, la composition de Eckmann devra être analysée, en rapport avec les conceptions de Ruelle notamment, pour déterminer toutes ses

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

conséquences sur les conceptions de chaos, les scénarios de transition et le champ de recherche du chaos.

5.1. Les premières accréditations du "scénario" de Ruelle et Takens

Comme l'affirme Pomeau en 1976 [700] , l'article de Ruelle et Takens de 1971 a relancé l'intérêt pour la question du démarrage de la turbulence. Ce qui n'a rien d'évident car leur proposition pose plusieurs problèmes. Outre qu'ils introduisent les attracteurs étranges, ils visent avant tout une interprétation mathématique de la transition vers la turbulence, domaine habituellement plutôt réservé aux physiciens [701] . Un des buts affichés est de remettre en question le scénario de transition vers la turbulence de Lev Landau, admis par une large frange de physiciens : selon eux, la turbulence peut se développer (sur un attracteur étrange) après une succession limitée de bifurcations. Cette proposition de 1971 est à la fois difficile sur le plan mathématique, où d'ailleurs les démonstrations ne sont pas complètement assurées, et n'est couverte par aucun élément d'ordre expérimental. Mais déjà avec cet exemple, il est clair que la transition vers la turbulence est associée à une conception de la turbulence ; nous verrons les variantes au sujet des autres transitions vers le chaos.

Pour comprendre le crédit accordé au scénario, et l'affirmation de Pomeau selon laquelle il a provoqué un renouvellement de l'intérêt pour la question de la transition, il est nécessaire de rendre compte des études expérimentales associées à cette problématique, vers 1975.

Les expériences de Harry Swinney et Jerry Gollub, deux physiciens américains du City College of New York, s'inscrivent dans cette perspective et sont les premières expériences probantes en faveur de la thèse de Ruelle-Takens [702] .

Le dispositif est un assemblage de deux cylindres concentriques enserrant un fluide. Le cylindre central est fixe, l'autre tournant à une vitesse contrôlée [703] . La vitesse radiale est mesurée localement par un système de diffusion de lumière, puis échantillonnée ; son spectre de puissance est ensuite déterminé.

Le processus observé correspond à une apparition successive de fréquences nouvelles dans le spectre, au fur et à mesure de l'évolution de la vitesse de rotation (équivalent au nombre de Reynolds) : chaque nouvelle fréquence (qui va avec des harmoniques) correspond à un pic très marqué dans le spectre. Après quelques apparitions, la dynamique du système vire brusquement et donne un spectre continu,

[700] Voir [AUBIN, D., 1998a], p. 667, citant le texte d'un exposé de Pomeau donné en 1976 (au colloque de l'International Astronomical Union, Nice).

[701] Au chapitre 6, réservé aux mathématiques des systèmes dynamiques, les propositions de Ruelle et Takens sont analysées avec plus de détails. Cf. p. 442.

[702] Pour le premier compte-rendu de cette expérience : [GOLLUB, J.P., SWINNEY, H.L., 1975].

[703] Une telle mise en place permet l'observation d'un flot dit de Taylor-Couette.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

sans pic distinct, qui ressemble à un "comportement erratique et bruité" [704] .

Les observations s'accordent **qualitativement** au scénario imaginé par Ruelle-Takens. Mais rien n'est évident et l'expérience pose plus de questions qu'elle n'apporte de réponses. C'est un indice en faveur du scénario, mais il ne remet pas en cause celui de Landau. En outre, aucun modèle mathématique de fluide en conditions expérimentales n'est disponible pour rapprocher la situation mathématique très générale, exprimée par Ruelle et Takens, des observations empiriques.

La seconde expérience importante, vient en quelque sorte compléter le problème d'interprétation déjà soulevé. Il s'agit d'un ensemble de calculs numériques réalisés par Paul Martin et son étudiant, John McLaughlin, du laboratoire de physique de Harvard. En 1974-75, ils proposent l'étude d'un modèle mathématique pour montrer comment les caractérisations de Ruelle et Takens pourraient être mises en évidence. L'expérience numérique principale est réalisée à partir d'un fluide dans des conditions de type Rayleigh-Bénard, modélisé et étudié par les équations de Boussinesq tronquées [705] . Ce ne sont pas les conditions de l'expérience de Gollub et Swinney mais celles d'un dispositif étudié par Günter Ahlers au Bell Laboratory.

Martin et McLaughlin procèdent à la détermination du spectre de Fourier de la simulation numérique : c'est ce qui pourrait servir de base à l'interprétation en matérialisant le chaînon manquant entre le signal expérimental et la théorie. Tous les résultats ne sont pas encore probants au point de valider entièrement, sur le plan numérique, les idées de Ruelle et Takens. D'une part, les calculs numériques sont en nombre limité et Martin et McLaughlin s'interrogent sur ce qui est du ressort de l'artéfact numérique. D'autre part, la simulation repose sur un choix préalable de modèle. Selon le modèle choisi, le type de bifurcations possibles et les manifestations de la transition sont variables. La transition vers la turbulence peut se faire directement au franchissement d'un seuil, ou correspondre à l'image de Ruelle et Takens, avec une succession et une accumulation de régimes périodiques préalables au développement de la turbulence. Le problème de l'accord entre le scénario mathématique de Ruelle-Takens, les simulations et l'expérience est résumé par Martin en 1975, au congrès de Dijon "Hydrodynamique physique et instabilité" :

"La base de leur proposition me semble quelque peu arbitraire mais cela pourrait refléter mon ignorance. Leurs prédictions semblent s'accorder avec les calculs réalisés par John MacLaughlin et moi-même, pour un problème de type Bénard. Bien que nos calculs semblent être en accord semi-quantitatifs avec les expériences et montrer des caractéristiques de l'image de Ruelle-Takens, l'accord pourrait être fortuit. Par exemple, nos calculs n'ont pas examiné de manière critique les erreurs dues à l'ordinateur." [706]

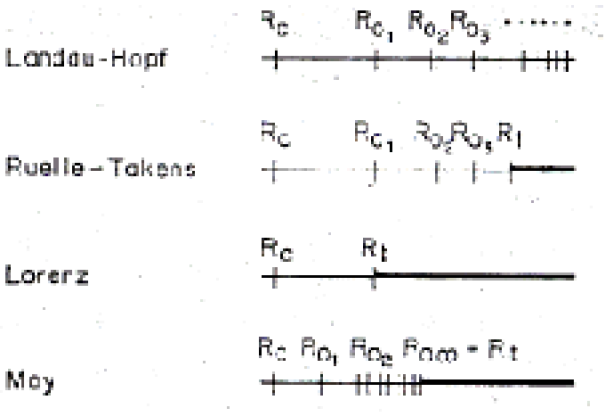
Les calculs donnent des indices mais il faudrait pousser l'analyse numérique pour déterminer s'il s'agit d'une coïncidence. Dans le même exposé de Martin à Dijon, quatre

[704] "The velocity data of Fig. 1(e) show erratic and noisy behaviour…" [GOLLUB, J.P., SWINNEY, H.L., 1975], p. 929.

[705] Une cellule de Rayleigh-Bénard correspond à un fluide dans une cavité prise entre deux plaques horizontales et chauffée par le dessous.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

scénarios possibles pour la transition vers la turbulence, en fonction de l'évolution d'un paramètre *R* du système, sont associés à ces noms :



[MARTIN, P.C., 1976], p. 60.

Les analyses de 1975-76 sont alors en conjonction directe avec ce qui est pratiqué au sujet du chaos, dans la perspective de Ruelle. Le chaos, ou la turbulence, est détecté sur la base d'un spectre continu, tant sur le plan expérimental que numérique. Cette caractérisation très faible est, à ce moment là, l'unique voie possible, d'autant qu'elle présente l'avantage de mettre en évidence les comportements périodiques précurseurs de ce chaos, sous forme de pics dans le spectre. C'est donc une définition très opératoire de la turbulence, qui est appuyée par les considérations mathématiques de Ruelle et Takens. En outre, on remarquera que les calculs numériques de Martin à propos de ses scénarios reposent sur le modèle de Lorenz, objet des investigations de Ruelle (et Lanford) dès 1975 et système-test le plus utilisé dans les calculs numériques [707] . En 1976 donc, le scénario de Ruelle-Takens est accrédité, en même temps que des alternatives sont suggérées. Ce sont aussi les conceptions en terme d'attracteurs étranges qui bénéficient indirectement de ces indices expérimentaux.

5.2. L'universalité dans le chaos

Le chaos n'est pas uniquement associé aux équations différentielles et aux processus dynamiques continus. Avec Li et Yorke, il est d'abord attaché aux itérations. La même question de l'évolution des itérations vers un comportement chaotique se pose dans ce cas ; le bilan de Martin en 1976 se réfère à cette question sous le titre "May", renvoyant à Robert May, et correspond au scénario de doublement de période. Ce phénomène a été observé depuis quelques années déjà lorsque de nouvelles conceptions émergent vers

[706] ***"The basis of their proposal seems somewhat arbitrary to me but that may reflect my ignorance. Their predictions seem to agree with calculations by John MacLaughlin and myself, for a problem of the Bénard type. While our calculations seem to be in semiquantitative accord with the experiments and to exhibit features of the Ruelle-Takens picture, the agreement could be fortuitous. For example, our calculations have not been critically examined for spurious computer effects.", [MARTIN, P.C., 1976], p. 60.***

[707] Martin en a eu connaissance par Barry Saltzmann, physicien du MIT et collaborateur de Lorenz lors de ses travaux du début des années 1960. Nous renvoyons au chapitre VIII de [AUBIN, D., 1998a].

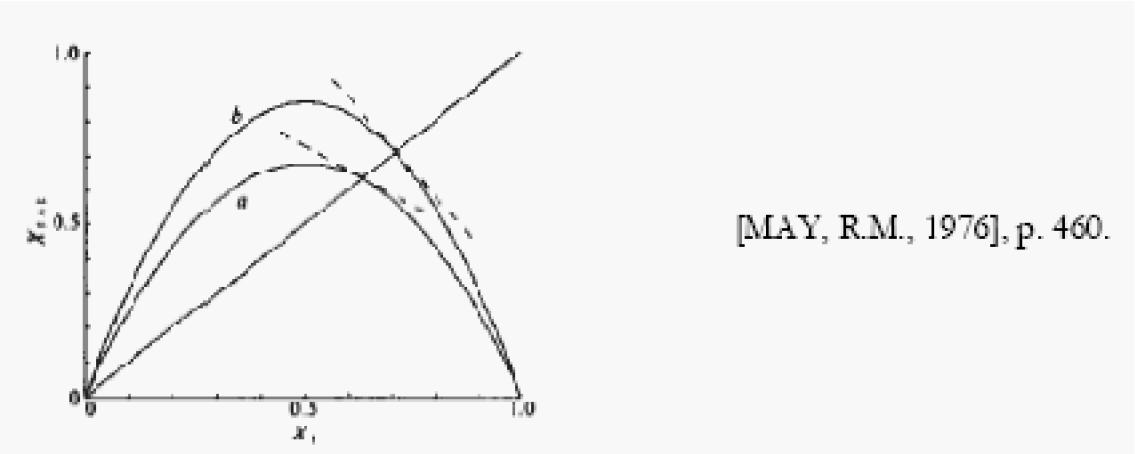
protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

1977 pour l'expliquer et le physicien Mitchell Feigenbaum participe activement à ce processus en suggérant l'idée d'"universalité" du scénario. Cependant, ces conceptions plutôt "physiciennes" sont prodiguées indépendamment par d'autres physiciens, comme nous le montrerons par la suite.

a. De R. May à M. Feigenbaum

L'existence de doublement de période a déjà été mentionnée à plusieurs reprises. En particulier, May avait exposé à Li et Yorke un tel mécanisme trouvé dans une application de type logistique en 1973 [708] . Son article de 1974, publié dans Science, donne une bonne idée de l'émulation au sein du groupe puisque le doublement de période est présenté comme un processus conduisant à un régime décrit comme chaotique, selon la terminologie de Li et Yorke [709] . Ainsi en faisant évoluer le paramètre de la fonction logistique, il apparaît un cycle de période 2, puis 4, 8…puis successivement tous les 2^n, jusqu'au chaos.

De 1974 à 1976, May dissèque le phénomène et dévoile surtout un résultat important : la cascade de doublements de période existe pour toute une classe d'itérations, celles qui possèdent une "bosse" simple [710] . Autrement dit, le phénomène n'est pas lié à une unique équation itérative, ni à une classe limitée d'équation : les doublements de période apparaissent de manière très générale, "universelle", dans les itérations, à la condition que celles-ci présentent une forme :



En réalité, un grand nombre de travaux, mathématiques ou plus simplement

[708] Nous renvoyons au chapitre 3, p. 174 pour les détails à ce sujet.

[709] [MAY, R.M., 1974], p. 645. La présentation de Li et Yorke, au colloque "Dynamical systems" de 1974 (sous le titre "The 'simplest' dynamical system"), met le doublement de période en parallèle aux phénomènes complexes abordés ; le terme "chaos" n'est pas encore mis en avant, mais le rapport avec leur futur "chaos" est déjà là, [LI, T.Y., YORKE, J.A., 1974].

[710] "single-hump" [MAY, R.M., 1976], p. 462. A propos de ce résultat May affirme : "It cannot be too strongly emphasised that the process is generic to most functions F(X) with a hump of tunable steepness", ibid., p. 461. Cet article célèbre, publié dans Nature, rend compte des résultats essentiels, mais les démonstrations étendues des propriétés mathématiques se trouvent surtout dans [MAY, R.M., OSTER, G.F., 1976] (en annexe de leur article).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

numériques, ont été produits avant 1973 sur ce thème, même s'ils ne se réfèrent pas toujours à un processus cascadant. May cite E. Lorenz, pour une étude de 1964 et plus anciennement T.W. Chaundy et E. Philipps de 1936, pour l'analyse du cas particulier de l'itération quadratique. Les résultats de P.J. Myrberg, obtenus en 1958-63, font partie des mêmes réflexions. Même la généralité, l'"universalité" du résultat présenté par May se trouve dans le travail de N. Metropolis, M. Stein et P. Stein, du Los Alamos National Laboratory, en 1971 [711] . A la différence de ceux-ci, May rapproche ce mécanisme de doublement de période des autres questions de bifurcations en Mécanique des fluides, très d'actualité [712] .

Le mécanisme de doublement de période n'est pas l'apanage de May et plusieurs scientifiques se sont investis dans l'analyse, dont certains bien longtemps avant lui. Rappelons, par exemple, qu'en 1976 Michel Hénon a détecté une cascade de doublements de période dans l'itération qu'il vient de construire et cherche à en préciser les contours [713] .

En Allemagne, les deux physiciens de l'Université de Marburg, Siegfried Grossman et StefanThomae, publient, en 1977, leur étude des itérations unidimensionnelles dans une perspective qui relève de la théorie ergodique [714] . Sur l'étude de la fonction logistique, ils mettent en évidence (numériquement) une loi de puissance sur la suite de paramètres de la cascade de doublements de période [715] . En outre, ils montrent qu'après le point critique, les comportements ne sont pas "purement" du chaos, mais un mélange de comportements périodiques et ergodiques, pour lesquels on peut mettre en évidence une **cascade de bifurcations inverses**, de même type que la transition précédente. Grossman et Thomae donnent une seconde loi de puissance pour cette cascade [716] . Les résultats, méconnus, sont importants, mais il n'est pas question d'universalité ici.

Le physicien américain Mitchell Feigenbaum est le plus célèbre pour ces recherches, au point que beaucoup de scientifiques parlent de "cascade de Feigenbaum" en référence à ce mécanisme. L'ouvrage très populaire de Gleick en fait une sorte de héros romantique

[711] Voir la référence [METROPOLIS, N., STEIN, N., STEIN, P.R., 1973], déjà citée au sujet de l'article de Li et Yorke de 1975, ainsi que [LORENZ, E., 1964], [CHAUNDY, T.W., PHILIPPS, E., 1936]. Au sujet de Myrberg, mathématicien finnois, nous renvoyons à son article publié en français, sur le sujet : [MYRBERG, P.J., 1962].

[712] Il cite même le bilan de McLaughlin et Martin, le travail de Ruelle et Takens : [MAY, R.M., 1976], p. 466-7

[713] Voir le chapitre 3, p. 207 et la note 460 (p. 207). Il s'agit d'une itération bidimensionnelle, un cas plus général que celui de May.

[714] Cf. chapitre 3, p. 199.

[715] Dans le cas de l'application logistique (paramétrée par *a*), ils déterminent la loi : $a_n \approx c_0 - c_1 . e^{-c_2 n}$, où, en particulier, $c_2 = 1{,}543 \pm 0{,}02$.

[716] Pour les valeurs de *a* au-delà du point critique, il y a des fenêtres périodiques dans le diagramme de bifurcation aux valeurs notées $\hat{a}_n$. Ils mettent en avant une seconde loi de puissance : $\hat{a}_n \approx \hat{c}_0 - \hat{c}_1 . e^{-\hat{c}_2 n}$. En revanche, ils n'attirent pas l'attention sur la proximité des deux valeurs c_2 et $\hat{c}_2$. [GROSSMAN, S., THOMAE, S., 1977], p. 289. A titre indicatif, pour ce qui suit, le lien avec la constante δ de Feigenbaum est le suivant : $c_2 = \ln \delta = \hat{c}_2$.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

[717] . Son portrait et ses travaux ont été esquissés dans l'historiographie, sans jamais vraiment prendre en compte sérieusement les ressorts spécifiques de sa démarche. Les résultats de Feigenbaum dépassent effectivement les perspectives précédentes. Mais une grande partie a été découverte, de manière indépendante et quasi-simultanée, par Coullet et Tresser. Ils ont été très souvent relégués au second plan et finalement moins reconnus, internationalement. Ces deux séries de travaux ne sont pas tout à fait équivalentes et c'est ce qui fait l'intérêt de leur comparaison. Pour leurs points communs nous indiquerons les tendances marquantes de ces travaux sur les itérations. Pour les différences d'approche nous rappellerons que, tout comme dans les conceptualisations du chaos, rien n'interdit *a priori* des voies alternatives de développement.

b. L'universalité selon N. Metropolis, M. Stein et P. Stein, 1971

Au préalable, et malgré le centrage de ce chapitre sur la période postérieure à 1975, il convient de s'attarder sur le résultat, plusieurs fois mentionné, de Metropolis, Stein et Stein, datant de 1971 (publié en 1973). Feigenbaum s'attache à ancrer sa réflexion dans leur travail (on notera que Feigenbaum travaille au Los Alamos National Laboratory à partir de 1974, où exercent ces trois scientifiques). L'analyse de Metropolis, Stein et Stein porte sur l'étude des itérations de type "bosse" [718] . Ils s'intéressent aux cycles engendrés par l'itération du maximum de la courbe, c'est-à-dire les valeurs de λ pour lesquelles il existe un k tel $\lambda f^{(k)}(c)=c$ (où $f(c)=f_{max}$; on peut choisir $c=1/2$ sans perte de généralité).

Ils introduisent un système de symboles permettant de repérer l'évolution de l'itéré du maximum. Si au cours du processus, une itération par f fait passer le point à gauche ou à droite de c, on introduit dans la suite symbolique du cycle respectivement un L (left) ou un R (right).

Leur résultat est qu'**il existe une ordination des cycles possibles (i.e. des suites de symboles possibles)**, valable pour **toutes** les courbes f du type étudié, indépendamment des spécificités de l'équation f produisant une telle courbe. Autrement dit, il y a **universalité** et les suites de symboles sont appelées "U-sequence". L'ordre correspond à l'ordre naturel sur les valeurs de λ ; l'apparition des séquences possibles pour l'itéré de c se fait donc toujours dans le même ordre, quelque soit l'équation.

En outre, toutes les périodes et séquences ne sont pas réalisables. Les auteurs donnent un critère, peu pratique, pour déterminer si une séquence de R et L correspond effectivement à une valeur de λ et dressent, en appendice de l'article, la liste des séquences de périodes inférieures à 11.

[717] Le chapitre "Universalité" (p. 199-238) est centré sur l'histoire M. Feigenbaum (le chapitre "Les hauts et les bas de la vie" (p. 83-110) également, mais dans une moindre mesure) [GLEICK, J., 1991].

[718] Metropolis, Stein et Stein ne donnent pas de nom particulier, ni "bosse", ni "unimodal", aux itérations qu'ils étudient. Ce sont les relations $x_{n+1}=\lambda f(x_n)$ pour lesquelles : i) f ($[0,1]\to[0,1]$) est continue, C^1 par morceau sur [0,1], $f>0$ sur]0,1[, $f(0)=f(1)=0$ ii) f a un unique maximum $f_{max}\leq 1$ (en un point ou sur un intervalle). f est strictement croissante à gauche du maximum, strictement décroissante à droite. iii) en x tel que $f(x)=f_{max}$, la dérivé de f existe et s'annule. iv) λ est défini sur $]\lambda_0, \lambda_{max}[$ tel que $\lambda f(x)$ a deux points fixes.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Dans ce contexte, si une séquence périodique *P* existe, on peut définir son "harmonique" $H(P)= P\mu P$ avec $\mu=R$ ou *L* selon que *P* contient un nombre pair de symboles *R* ou non. *H(P)* est de période double de *P*. L'article montre que si *P* est admissible, alors son harmonique l'est également, ce qui signifie, en résumé, que le **doublement de période est déjà connu en 1971 (et même avant) ; il est analysé mathématiquement et surtout déjà perçu comme universel**.

Outre l'influence de ces résultats sur Feigenbaum, un groupe de physiciens français (Bernard Derrida, Annie Gervois, Yves Pomeau) leur donne un prolongement très remarquable en 1978-9. En substance, ils construisent une loi de composition [719] sur les suites de symboles leur permettant de reconstruire toute la "U-sequence" d'une part, et de montrer l'**autosimilarité** de celle-ci, d'autre part (c'est-à-dire qu'une partie de la séquence est semblable à la séquence entière).

Plus que les résultats précis, c'est l'effort de classement et d'organisation des cycles périodiques possibles qui est intéressant dans ces travaux. Il faut rapprocher ces tentatives des théorèmes de Li et Yorke, et, plus encore, de celui de Sharkovsky. L'étude des itérations n'est pas limitée au chaos de Li et Yorke ; c'est une préoccupation plus générale qui bénéficie de l'effervescence entourant le thème du chaos. Le lien entre la transition par doublement de période et la question du chaos est donc évident. On pourra également remarquer que tous ces travaux, depuis Metropolis, Stein et Stein, reposent sur l'utilisation de simulations numériques : tout comme dans le développement des notions de chaos, l'ordinateur est omniprésent.

c. Mitchell Feigenbaum et l'universalité

Dans le chapitre des itérations la contribution de Feigenbaum est importante. Il a promu, en effet, l'universalité à un rang très élevé dans les préoccupations des systèmes dynamiques. Nous allons montrer, en analysant son parcours, que Feigenbaum adopte un point de vue de physicien sur les itérations, permettant de donner un sens nouveau à cette universalité et de produire des résultats assez spectaculaires.

L'idée de l'universalité, l'indépendance par rapport à la fonction itérée, lui vient directement de Paul Stein (du groupe Metropolis, Stein et Stein). Ces premiers pas dans les itérations lui ont été inspirés par une présentation de S. Smale au Center for Physics à Aspen (Colorado, Etats-Unis), en 1975. Feigenbaum entreprend alors d'étudier les itérations quadratiques (du type $x_{n+1} =\lambda.x_n (1-x_n))$ [720] . Le doublement de période est analysé sur une calculatrice HP-65, assez lente : c'est de cette manière que Feigenbaum se familiarise avec le processus de convergence des valeurs λ_n du paramètre λ, pour lesquelles il se produit un doublement, vers la valeur critique λ_c (à partir de laquelle il y a chaos, selon les conceptions de Li et Yorke). La convergence géométrique des λ_n lui apparaît sur ce tout premier exemple. En déterminant de manière précise la raison

[719] Loi de composition appelée * . En particulier, à partir d'une séquence *P*, on construit les harmoniques par *P*R*. [DERRIDA, B., GERVOIS, A., POMEAU, Y., 1978].

[720] Voir [GLEICK, J., 1991], p. 218- 219, [FEIGENBAUM, M.J., 1980b], p. 68-69 et [AUBIN, D., DAHAN DALMEDICO, A., 2002], p. 315.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

géométrique il trouve :

$$\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_{n+2}-\lambda_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta \approx 4{,}669..$$

P. Stein lui annonce alors que le doublement de période existe pour toute une classe d'itérations. Quelques temps plus tard, Feigenbaum décide donc de faire les calculs sur une seconde itération ($x_{n+1} = \lambda.sin(\pi x_n)$), pour laquelle il retrouve le même phénomène de convergence géométrique et la même raison géométrique, ce qui constitue la grande surprise : δ = 4,669…

Vers 1976 donc l'universalité réapparaît dans le domaine [721] . Mais il existe une différence avec les précédentes tentatives. Avec Metropolis, Stein et Stein, il s'agissait d'avoir une idée qualitative de l'évolution de l'itéré d'un point. Feigenbaum souligne le caractère **quantitatif** des nouveaux résultats : la "théorie de l'universalité montre que des équations qualitativement semblables ont le même comportement *quantitatif*" [722] .

Pour être plus précis, nous dirons que Feigenbaum met en lumière un phénomène invariant d'échelle, renvoyant à une régularité cachée. Ce sont les connaissances en matière de **phénomènes critiques et de théories de renormalisation** qui autorisent Feigenbaum à une telle lecture des phénomènes. Une étape nouvelle est en train d'être franchie à propos de la cascade de doublements de période. Il reste à donner un cadre théorique, permettant à la fois d'expliquer cette universalité et de démontrer les propriétés indiquées par un ensemble de résultats numériques. Car Feigenbaum choisit et observe numériquement ces phénomènes mathématiques pour "créer de l'intuition" [723] .

A la fin de l'année 1976, l'essentiel des explications est échafaudé. De manière heuristique, puisque c'est ainsi que Feigenbaum le présente dans un premier temps, nous donnons l'opération de base, qui donne lieu à l'invariance d'échelle, reconnue dans le doublement de période d'une itération notée $x_{n+1} = \lambda.f(x_n)$.

[721] Les premières recherches de Feigenbaum remontent à 1976. Ses résultats sur la question de l'universalité dans les dynamiques discrètes sont publiés dans un rapport interne au Los Alamos Science Laboratory (référencé LA-6816-PR, LASL, Theoretical Division Annual Report, July 1975-septembre 1976), auquel nous n'avons pu avoir accès.

[722] "The universality theory shows that qualitatively similar equations have the identical *quantitative* behaviour", [FEIGENBAUM, M.J., 1980b], p. 69 (en italique dans le texte).

[723] Voir le paragraphe de Gleick qui s'étend à ce sujet : "Ce n'était pas des mathématiques ; il ne *démontrait* rien […] Feigenbaum faisait une recherche en physique et, aussi étrange que cela parût, c'était presque de la physique expérimentale. […] Il avait besoin – selon une expression qui devient plus tard un cliché de la nouvelle science – de *créer de l'intuition*.", [GLEICK, J., 1991], p. 224 (en italique dans le texte).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

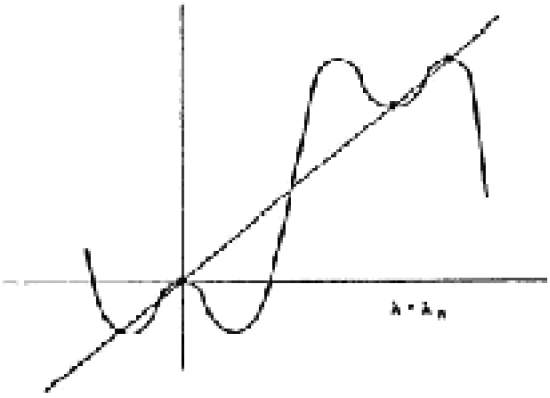


Fig. 8

$f^{(2^n)}$ *pour* $\lambda = \lambda_n$
Extrait de [FEIGENBAUM, M.J., 1978], p. 36

La figure (8) représente l'itérée $f^{(2^n)}$, au voisinage d'un point-type noté $\bar{x}$, pour la valeur λ_n. L'intersection avec la diagonale donne les points fixes de $f^{(2^n)}$ c'est-à-dire les points 2^n périodique pour l'itération f.

Un cran en arrière, $f^{(2^{n-1})}$ est représentée sur la figure (7), pour la même valeur λ_n. On y voit les cycles de période 2 qui correspondent aux points fixes de $f^{(2^n)}$.

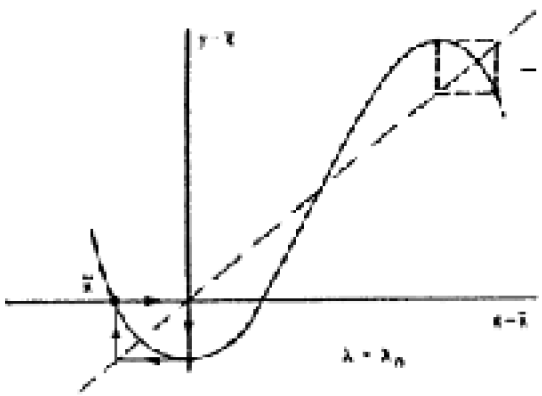


Fig. 7

$f^{(2^{n-1})}$ *pour* $\lambda = \lambda_n$
Extrait de [FEIGENBAUM, M.J., 1978], p. 36

Enfin, lorsqu'à partir de la situation de la figure (7), on fait évoluer λ de λ_n vers λ_{n+1}, l'itérée $f^{(2^n)}$ laisse apparaître des 2-cycles (figure (9)). Par comparaison avec les cycles de la figure (7), il s'est produit un **changement d'échelle et un renversement**. Ce sont ces deux opérations géométriques qui seront encodées dans un cadre mathématique plus rigoureux.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

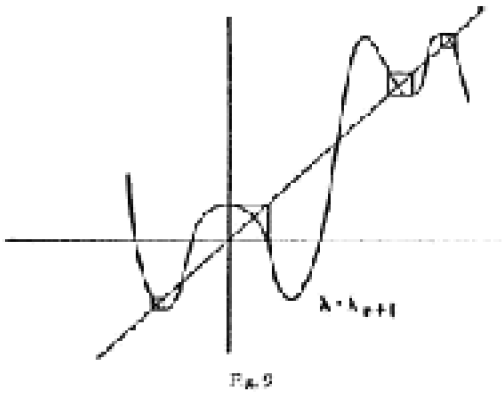


Fig. 9

$f^{(2^n)}$ pour $\lambda = \lambda_{n+1}$
Extrait de [FEIGENBAUM, M.J., 1978], p. 37

En notant l'itération de manière plus synthétique $x_{n+1} = h(\lambda, x_n)$ et en introduisant $F(n,\lambda,x) = h^{(n)}(\lambda,x) = h(\lambda, h(\lambda, \ldots h(\lambda,x)\ldots))$, la formulation mathématique est une fonction **T** incluant le décalage de λ, et la double transformation géométrique (renversement, changement d'échelle par un facteur α), agissant directement sur les fonctions [724] :

$$\mathrm{T}.h(\lambda_n, x) = \overbrace{-\alpha.h(\lambda_{n+1}, h(\lambda_{n+1}, -\frac{x}{\alpha})}^{\alpha = \text{changement d'échelle} \ldots (-1) = \text{renversement}} = -\alpha.F(2, \lambda_{n+1}, -\frac{x}{\alpha})$$

$$\mathrm{T}^2.h(\lambda_n, x) = (-\alpha)^2.F(2^2, \lambda_{n+2}, \frac{x}{(-\alpha)^2})$$

$$\ldots$$

La conjecture de Feigenbaum est que la limite de cette opération est universelle, c'est-à-dire qu'il existe une fonction g indépendante de l'itération f telle que :

$$\lim_{t \to \infty} (-\alpha)^t F(2^t, \lambda_{n+t}, \frac{x}{(-\alpha)^t}) = g(x)$$

D'après les propriétés de F, g vérifie l'équation de renormalisation, qui concentre en elle l'invariance d'échelle et explique l'universalité observée

$$g(x) = -\alpha\, g(g(-\frac{x}{\alpha}))$$

La formulation s'exprime en termes analogues à une transformation de groupe de renormalisation. Elle a été proposée grâce à l'aide de Pedrag Cvitanovic, en situation post-doctorale en physique à Los Alamos à ce moment là [725]. Ceci permet de voir **le paramètre λ comme une température, le point de basculement vers le chaos comme un point critique d'une transition de phase, et la raison géométrique δ comme un exposant critique de cette transition**. Publié seulement en 1979, suite à de nombreuses

[724] Les notations sont différentes des textes, assez difficiles à suivre, de Feigenbaum. Nous nous inspirons de la courte synthèse dans [HAO, B.-L., 1985], p. 27-29 pour donner les grandes lignes des deux articles essentiels : [FEIGENBAUM, M.J., 1978] et [FEIGENBAUM, M.J., 1979a].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

difficultés pour faire accepter un article ni mathématiquement rigoureux, ni vraiment de physique statistique, ceci n'est encore qu'une première étape : le résultat (l'universalité) n'est pas démontré, mais présenté sous forme de conjecture. La première preuve, pour une certaine classe d'universalité seulement, est le fait d'Oscar Lanford III, en 1981. Mais la démonstration est encore assistée par l'ordinateur pour réaliser des calculs [726] . Le travail de Pierre Collet, Jean-Pierre Eckmann et Oscar Lanford, publié en 1980, constitue la première preuve mathématique d'une universalité : leur but est de "montrer que l'explication de Feigenbaum est correcte, au moins dans certains régimes limités" [727] .

Malgré leurs approximations, l'universalité et le formalisme de Feigenbaum parviennent à se faire une place dans le champ du chaos à partir de 1977. C'est surtout son intervention au colloque de Côme, durant l'été 1977, qui est saluée et enfin appréciée à sa juste valeur [728] . Par ailleurs, le résultat de Feigenbaum est signalé dans l'autre grande conférence du moment, à New York, par l'intermédiaire de John Guckenheimer [729] . Le succès de Feigenbaum est quasiment assuré dès 1978, au point de rapidement occulter certaines contributions pourtant significatives. Ce sont deux français, Coullet et Tresser, travaillant à Nice, qui font les frais de cette focalisation sur Feigenbaum. Deux autres chercheurs de Toulouse, Christian Mira et Igor Gumowski ont eux aussi abordé la question du doublement de période, selon une approche originale, un peu passée sous silence. C'est en comparant ces différents résultats que nous ferrons ressortir les traits saillants de chacune des démarches et surtout leur rapport au chaos.

5.3. P. Coullet, C. Tresser et l'universalité

La composante d'universalité est centrale dans la principale alternative aux travaux de Feigenbaum, qui est le fait de deux jeunes physiciens français, travaillant au LPMC

[725] Une première formulation avortée est donnée dans [FEIGENBAUM, M.J., 1978] et la formulation modifiée dans [FEIGENBAUM, M.J., 1979a]. Le premier article a d'abord été soumis à SIAM Applied Journal of Mathematics en avril 1977 puis rejeté, avant d'être publié dans Journal of Statistical Physics. Le second, publié dans ce même journal, avait été soumis à Advances in Mathematics en novembre 1976, et rejeté.

[726] Dans son article "A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures", Lanford précise : "The heart of the proof is a set of complicated numerical estimates proves rigourously with the aid of a computer" [LANFORD III, O.E., 1982], p. 429. Il procède à différents calculs à l'ordinateur, trop longs à faire autrement, tout en les encadrant par une analyse numérique des erreurs d'arrondis.

[727] "to show that Feigenbaum's explanation is correct, at least in a certain limiting regime" [COLLET, P., ECKMANN, J-P, LANFORD III, O.E., 1980], p. 213. La restriction à laquelle ils font allusion est la suivante : il s'agit des itérations $\psi(x)= f(|x|^{1+\varepsilon})$, où f est suffisamment analytique, ε petit (et <1). Ils utilisent le formalisme du type du groupe de renormalisation, directement inspiré par celui de Feigenbaum, montrent l'existence d'un point fixe et déterminent la loi d'échelle avec le paramètre δ.

[728] Voir [GLEICK, J., 1991], p. 232-233. Hénon a assisté au colloque avec une conséquence que nous verrons bientôt (p. 332).

[729] Cependant, le point de vue "renormalisation" est écarté et Guckheimer traduit la conjecture de Feigenbaum en langage des systèmes dynamiques. Voir le compte rendu de l'exposé : [GÜREL, O., RÖSSLER, O.E., 1979], p. 83-84.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

(Laboratoire de Physique de la Matière Condensée) à Nice, dans les mêmes années 1976-1980 : Pierre Coullet et Charles Tresser. Signalons toute de suite qu'elle est absente des travaux de Mira et Gumowski. Coullet et Tresser ont commencé leurs recherches en 1977, indépendamment de celles de Feigenbaum, et leur approche est assez similaire. Les résultats convergent surtout pour accréditer l'universalité du mécanisme de doublement de période. Cependant, ce sont les nuances et les différences entre ces deux ensembles qui nous intéressent. On a trop souvent tendance à écarter cette série de travaux sous prétexte qu'ils "retrouvent" les résultats de Feigenbaum ; nous pensons qu'une analyse épistémologique sérieuse permettra de distinguer ce à quoi il faut attribuer la paternité à Feigenbaum, ne serait-ce que sur un argument de chronologie, et ce qui fait l'originalité du travail niçois.

Nous allons montrer que, comme avec Feigenbaum, c'est un point de vue de physicien qui domine leur approche du problème, reposant sur l'analogie avec les transitions de phase. Mais un travail plus complet sur le chaos est associé à cette démarche, dont nous verrons les rapports à la question de la transition et comment il dépasse largement les considérations de Feigenbaum.

Le contexte niçois

Pierre Coullet et Charles Tresser, tout comme Feigenbaum, sont imprégnés d'un environnement de physique statistique, où les questions de transition de phase, de phénomène critique et de groupe de renormalisation sont naturelles. Coullet a fait une thèse, à Nice, sur la théorie de la renormalisation en théorie des champs [730] . Il est recruté par le CNRS au sein du LPMC, où une équipe s'occupe en particulier de Mécanique statistique des fluides hors d'équilibre. La formation de Charles Tresser est plus variée : double maîtrise de mathématiques et de physique, DEA de physique théorique, puis une thèse au même laboratoire LPMC.

A cette culture de physique statistique, il faut ajouter leur intérêt pour les fractales, très en vogue et popularisées par Mandelbrot dans son ouvrage de 1975, auquel ils accèdent très tôt. En outre, un autre physicien de l'équipe, Jean Coste, formé à Paris, est en contact avec la recherche en physique théorique effectuée à l'Ecole Normale Supérieure à Paris, et en particulier avec Yves Pomeau, Albert Libchaber et Gérard Toulouse [731] .

Concernant la question de la transition vers le chaos, en étant très rapide nous serions tenté d'affirmer que le même environnement produit les mêmes théories. Coullet et Tresser, comme Feigenbaum, établissent une analogie entre la transition de phase et le doublement de période, en tant que transition vers un chaos. Nous commencerons par saisir les différences d'approches, parfois subtiles, toujours très révélatrices du processus

[730] Thèse plutôt formelle sous la direction de E. Tirapegui.

[731] Nous parlerons assez peu de Gérard Toulouse mais c'est un chercheur qui a son importance. Il avait déjà en tête des idées d'analogies entre phénomènes critiques et systèmes dynamiques, inspirées à la fois par Kenneth Wilson, pour ces théories de renormalisation et ses suggestions, et les succès du programme de classification des singuliarités de René Thom. Voir [AUBIN, D., DAHAN, A., 2002], p. 316-7.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

de constitution de savoirs scientifiques. Le contexte dans lequel ils travaillent, leur culture de physicien et leur parcours dans les années 1977-81 nous donnerons les clés pour comprendre ces nuances. Enfin, le fait qu'ils ne soient pas entrés tout de suite en contact avec Feigenbaum offre un cas d'école à l'historien.

a. Les différences d'approche avec Feigenbaum

Tout d'abord, l'intérêt suscité par la question n'a pas la même origine que chez Feigenbaum [732] . Au laboratoire de Nice, Coullet travaille avec Jean Coste et Jean Peyraud (directeur du laboratoire) sur les instabilités de modes en dynamique des fluides. Dans le cas d'un écoulement de Bénard, une première analogie avec une dynamique de populations en compétition est construite [733] .

Un écoulement de Bénard dans une lame de fluide initialement isotrope est sujet à des modes hydrodynamiques fluctuants, de type rouleau, orientés selon différentes directions (ou angles) θ_i autorisées par les conditions aux limites. Une modélisation du système, en prenant en considération l'intensité x_i de ces modes instables, permet de mettre le système en correspondance avec un modèle de compétition entre autant d'espèces, de populations x_i, du type des systèmes de Volterra. Le but de l'opération est d'étudier les mécanismes de sélection de modes qui apparaissent en grand nombre dans un écoulement de type Bénard. Le modèle de fluide choisi est donc une équation de Volterra avec quelques conditions supplémentaires sur les coefficients. Une partie des résultats connus pour le système de Volterra peut être transférée au cas hydrodynamique.

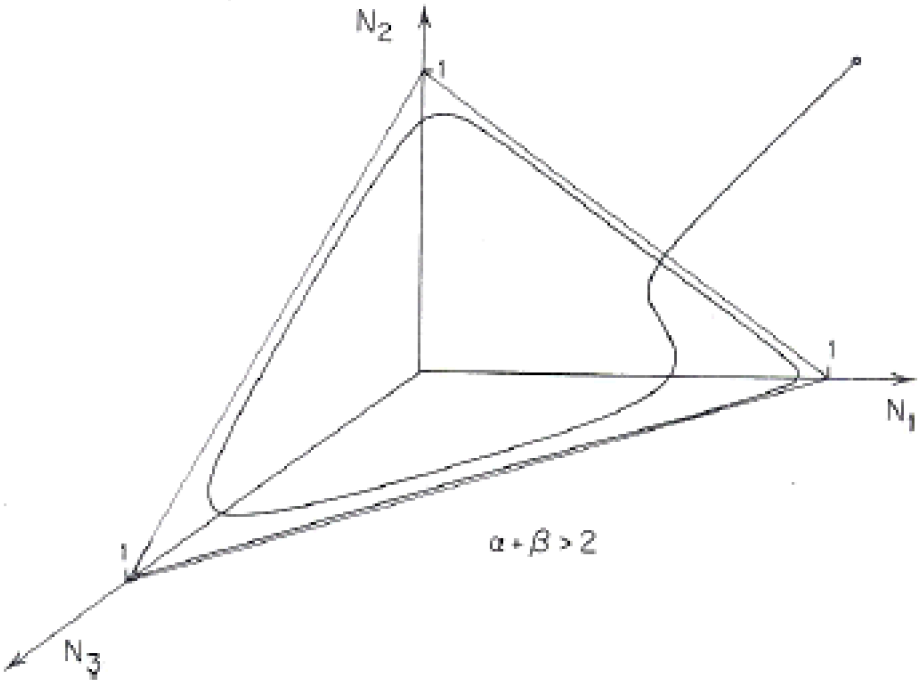
Par le biais de cette analogie, la question de l'analyse non linéaire d'une dynamique compétitive est posée. L'analyse linéaire de stabilité du système ne permet que des conclusions très limitées. Une analyse utilisant les ressorts des systèmes dynamiques est envisagée. Le premier constat est que, dans le cas particulier de l'écoulement de Bénard (qui est symétrique), la dynamique conduit à la convergence vers un mode instable (sélection d'une espèce) et à l'élimination de tous les autres : ceci correspond à la configuration stationnaire de l'écoulement.

Le système de Volterra est étudié de manière plus générale. D'où l'intérêt pour les résultats publiés en 1975 et dus à Robert May et Warren Leonard, du département de biologie de Princeton. Sur un système de trois espèces May et Leonard ont trouvé, numériquement, un comportement pathologique, qui oscille indéfiniment entre les trois points N_1, N_2, N_3 chacun représentant l'existence d'une unique espèce parmi les trois. Leur analyse mathématique permet de caractériser cette dynamique.

[732] Nous renvoyons au passage correspondant p. 325.

[733] Voir l'article de leur exposé donné à Nice en 1977 : [COSTE, J., PEYRAUD, J., COULLET, P., CHENCINER, A., 1978a].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est



[MAY, R.M., LEONARD, W.J., 1975], p. 250.

La complexité du phénomène est intéressante mais comme l'affirment May et Leonard :

"Biologiquement, le comportement illustré [sur la figure précédente] est un non-sens. Mathématiquement, pour des variables continues $N_i(t)$, le système n'atteint jamais asymptotiquement aucun des points (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), […] Ce qui reste d'intéressant dans cette analyse est l'observation générale que des non linéarités peuvent produire des phénomènes cycliques non périodiques…" [734]

Dans le cas de la Mécanique des fluides, il existe un analogue simple de ce résultat : dans un modèle de convection en rotation, il s'agit des basculements de l'angle de l'axe θ_i entre trois configurations. La situation présentée par May et Leonard est plutôt académique (cela suppose une symétrie de permutation) et le modèle de fluide rentre plus naturellement dans cette catégorie (symétrie de rotation) qu'un modèle de populations.

Avec l'appui d'Alain Chenciner, mathématicien déjà aguerri aux méthodes des systèmes dynamiques, plusieurs cas d'équations différentielles de compétitions d'espèces sont alors étudiés [735] . Plus que les résultats en eux-mêmes, ce sont à la fois les connaissances acquises au sujet des systèmes dynamiques et la série de coïncidences

[734] ***"Biologically, the behavior illustrated [in Figs 4 and 5] is nonsense. Mathematically, for continuous variables $N_i(t)$, the system never asymptotically attains any of the point (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). […] What remains interesting about the analysis is the general observation that nonlinearities can produce nonperiodic cyclic phenomena of the kind depicted in Figs 2-5.", [MAY, R.M., LEONARD, W.J., 1975], p. 252. Rappelons que May est déjà en contact avec Li et Yorke, et les questions de chaos, lorsqu'il décrit ce système et les oscillations non périodiques ; cependant, Coullet et Tresser n'ont connaissance que de cet article.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

qui se développent à partir de cette question d'évolution des populations biologiques, qui sont importants.

D'après Coullet, Jean Peyraud est allé présenter leurs travaux à l'Observatoire de Nice, où il a des contacts et où travaille Michel Hénon [736] . Ce dernier les a orientés vers un autre article, alors tout récent, de Robert May : celui de 1976, paru dans Nature et décrivant toute la série des résultats connus au sujet des itérations unidimensionnelles (elles-mêmes utilisées pour modéliser des populations en biologie) dont les propriétés de la fonction logistique et le doublement de période.

Sur la base de l'article de May, Coullet réalise des tracés (sur une table traçante Hewlett-Packard) de l'itération de la "bosse" (fonction logistique), pour différentes valeurs du paramètre. L'objectif était d'en faire un séminaire [737] pour présenter tous ces résultats nouveaux. En laissant tourner les calculs pour la 512ème (ou 1024ème) itérée de la fonction, l'image alors obtenue, au point critique, est **visuellement auto-similaire**. Avant ce point la figure est plutôt lisse.

Les réactions de Coullet et Tresser sont assez immédiates. La ressemblance avec une transition comme on peut en trouver en physique des phénomènes critiques leur vient à l'esprit rapidement [738] . En conséquence il restait à déterminer si, au-delà de l'image, ce phénomène a les caractéristiques d'une "vraie" transition : dans quelle mesure y a-t-il universalité et peut-on formuler une théorie avec le groupe de renormalisation ? Pour Coullet et Tresser il y a beaucoup d'enthousiasme, peu de certitudes, mais une forte conviction et de grands espoirs suscités par toute leur culture de la physique des transitions de phase. Les analyses poussées ne sont faites que durant l'été 1977, période plus propice à ces recherches peu académiques, et durant laquelle les machines à calculer sont accessibles plus facilement [739] .

A leur dire, leurs premières tentatives visent à mesurer la dimension de Hausdorff de la figure tracée, pour différents profils de la bosse [740] , afin de tester l'universalité des

[735] Voir la série d'articles [COSTE, J., PEYRAUD, J., COULLET, P., CHENCINER, A., 1978a et b], [COSTE, J., PEYRAUD, J., COULLET, P., 1979], [CHENCINER, A., 1977].

[736] Entretien avec Pierre Coullet, 12 mars 2004.

[737] Nous n'avons aucune date précise pour ce séminaire. Il se télescope avec un autre séminaire organisé par Coullet et Tresser, avec Pierre-Louis Sulem, visant à présenter aux physiciens de Nice la théorie du groupe de renormalisation, alors en pointe dans la physique théorique. Ce dernier a eu lieu durant l'année 1976-77.

[738] L'image à laquelle les auteurs se réfèrent est le phénomène d'opalescence critique, manifestation d'une transition avec invariance d'échelle. L'opalescence critique est un effet visuel spectaculaire qui résulte des fluctuations de densité qui ont lieu dans un fluide très proche de sa température critique. Les fluctuations sont présentes à toutes les échelles du liquide au point critique (il y a invariance d'échelle) ce qui provoque une diffusion de la lumière à toutes les longueurs d'onde.

[739] Entretien avec Pierre Coullet, 12 mars 2004 et entretien (séparé) avec Charles Tresser, 12 mars 2004.

[740] Coullet et Tresser procèdent en tâtonnant, d'autant que les mesures se font au double-décimètre directement sur les figures (confirmé par les entretiens séparés).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

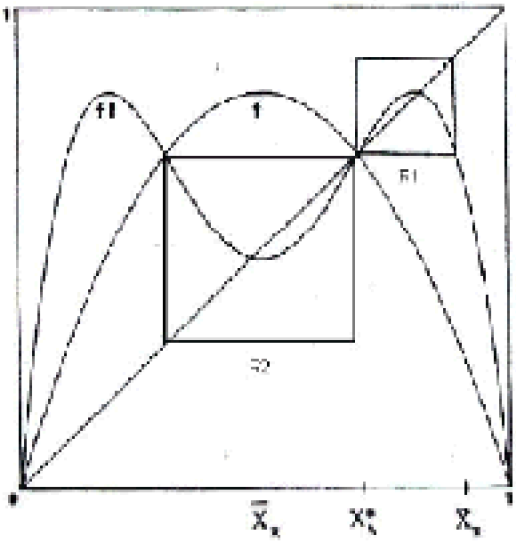
figures auto-similaires. Mais les résultats sont peu probants, puisque rien d'universel n'est détecté *a priori*. Ce n'est qu'à la suite de l'idée de Tresser de considérer la dimension de Hausdorff comme seulement locale et répartie elle-même selon un ensemble de Cantor [741] , que la situation se débloque.

L'étape de la formulation en terme de groupe de renormalisation n'intervient qu'après l'accumulation de suffisamment d'indices d'universalité. Pour résumer ces premiers pas :

"Ces résultats numériques suggèrent une forte analogie avec les phénomènes critiques (divergence de certaines quantités comme le nombre de points de l'orbite lorsque R -> R_c, une certaine notion d'invariance d'échelle associée à la structure d'ensemble de Cantor, universalité). Nous nous proposons de comprendre ces résultats à l'aide d'une technique en tout point analogue à celle du groupe de renormalisation introduit par Wilson-Kadanoff dans l'étude des phénomènes critiques." [742]

Le mécanisme d'apparition de l'ensemble de Cantor est ainsi traité comme une transition de phase : formulation en groupe de renormalisation, détermination de son point fixe, calcul des exposants critiques.

Le groupe de renormalisation est construit d'après la comparaison suivante : la bosse *R1* (voir figure ci-dessous) de l'itéré $f^{(2)}$ est un analogue de la courbe de départ *f*, moyennant un changement d'échelle.



[TRESSER, C., COULLET, P., 1978], p. 578

Au-delà des différences circonstancielles, la première distinction avec la formulation de Feigenbaum apparaît dans le choix opéré. En adaptant les explications de Feigenbaum au schéma présenté, Feigenbaum prend la bosse *R2*, sur laquelle il produit

[741] Ce sont les calculs numériques qui révèlent cette structure inattendue. Dans l'exposé original de 1977, ils se réfèrent à cette propriété : "Un résultat supplémentaire est que, pour n fixé les $b_n(i)$ ne se répartissent pas uniformément entre leur maximum et minimum, on voit numériquement que cette répartition elle-même se fait suivant un ensemble de Cantor, également universel". [COULLET, P., TRESSER, C., 1978], p. 26. Ces objets sont aujourd'hui appelés "multifractals".

[742] ***[COULLET, P., TRESSER, C., 1978], p. 26.***

un **renversement** et un **changement d'échelle** pour trouver l'analogue de la bosse initiale (L'opération de renormalisation ne possède que ces deux générateurs et les possibilités sont épuisées).

Guidés par leur analogie, Coullet et Tresser s'intéressent au comportement de divergence de la période :

> "L'exposant critique caractérisant la divergence du nombre de points de l'orbite stable est relié à la valeur propre λ_1 de manière analogue à l'exposant critique de la longueur de corrélation dans la théorie des phénomènes critiques […] La relation peut également s'écrire : $R_c^{(1)} - R \sim \lambda_1^{-N}$ On peut interpréter cette expression en disant que la série des points de bifurcation se comporte au voisinage de $R_c^{(1)}$ comme une série géométrique, de raison λ_1 universelle dans les classes définies." [743]

Tels qu'ils sont publiés après septembre 1977, ces résultats renvoient directement à l'interprétation de Feigenbaum. Coullet et Tresser ont été informés par l'intermédiaire de Michel Hénon, une nouvelle fois : celui-ci était présent à Côme durant l'été 1977, où Feigenbaum fût "célébré" et a obtenu un prétirage de l'article de Feigenbaum (qui ne sera publié qu'en 1978).

Coullet et Tresser sont engagés dans une voie de type Mécanique statistique, leur indiquant les hypothèses à poser (celles courantes en renormalisation [744]) et comment interpréter l'universalité et les exposants critiques. **La série géométrique de Feigenbaum n'est qu'une incarnation de leur vision en terme de phénomène critique**. Aussi peuvent-ils donner la valeur δ de Feigenbaum. Mais il faut bien souligner que le caractère géométrique n'est qu'une variante de l'exposant critique, plus fondamental.

L'analogie avec la transition de phase va déjà beaucoup plus loin : non seulement, il se produit une cascade de doublements de période avant le point critique, mais **il se produit une cascade inverse, après le point critique**. Ce comportement est courant dans les transitions de phase en physique et, comme en physique, l'exposant critique est le même des deux côtés, universellement. Coullet et Tresser perçoivent donc de manière plus générale ce que Feigenbaum a entr'aperçu et l'insèrent dans un cadre explicatif. On peut noter que Grossman et Thomae [745] avaient également perçu la cascade et son miroir en 1977, sans chercher quoi que ce soit d'universel. E. Lorenz a retrouvé la cascade inverse en 1980 [746] , mais en ignorant que Coullet et Tresser l'avait déjà compris.

[743] [COULLET, P., TRESSER, C., 1978], p. 27. Dans la note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, la propriété est donnée sous forme de limite, comme Feigenbaum l'a exprimé ([TRESSER, C., COULLET, P., 1978], p. 578).

[744] Explicitée dans [TRESSER, C., COULLET, P., 1978], p. 578.

[745] Cf. p. 322 et leur texte : [GROSSMAN, S., THOMAE, S., 1977].

[746] Il s'agit de [LORENZ, E., 1980] dont le titre évoque les caractéristiques du phénomène : "Noisy periodicity and reverse bifurcation". J. Curry est remercié par Lorenz ; nul doute que ce mathématicien, spécialiste de calcul numérique et intéressé par les problèmes météorologiques ait pu aider Lorenz (voir les notes 462 (p. 208) et 516 (p. 233) à son sujet).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Une série de calculs numériques tend par ailleurs à montrer un autre type d'**universalité de classe** [747] .

En effet, les exposants critiques dépendent de la classe de la "bosse", c'est-à-dire de l'ordre du zéro de la dérivée de la "bosse" en son maximum. A ce niveau, c'est la structure du Cantor au point critique qui est concernée : l'invariance d'échelle a des caractéristiques différentes selon les classes. La divergence à l'approche de R_c ne change pas.

Répétons le, tout ceci repose sur une analogie très suivie avec l'opération de renormalisation et de nombreux calculs numériques (tout comme Feigenbaum). Plusieurs éléments viennent renforcer leur conviction : la lecture de l'article de Metropolis, Stein et Stein de 1973 signalant une universalité et le théorème de Sharkovsky [748] . Coullet et Tresser donnent aussi le premier modèle très simple, exactement soluble, pour leur théorie, à partir de l'application :

$B(x) = 2.x$ pour $0 \leq x \leq ½$

$B(x) = 2.(1-x)$ pour $½ \leq x \leq 1$

donnant la famille à un paramètre $f_R(x) = R.B(x)$, pour R dans [0,1]. [749]

L'opération de renormalisation dans ce cas est simple, l'existence d'un point fixe est immédiate et, malgré une itération qui ne reproduit pas tout à fait le phénomène de doublement de période, le modèle démontre, en termes mathématiques, l'intérêt de l'approche en terme de groupe de renormalisation et indique d'où proviennent les lois d'invariance de type géométrique [750] . Là où Feigenbaum s'arrêtait à des conjectures, Coullet et Tresser proposent quelques éléments de démonstration.

Enfin, dans l'esprit de Coullet et Tresser l'universalité prend une autre dimension, non limitée au cadre des itérations. Ils prétendent notamment : "on est tenté de conjecturer une universalité quantitative pour des comportements turbulents plus réalistes dont la turbulence fluide n'est peut-être qu'un exemple particulier" [751] .

Le raisonnement justifiant cette extension est explicité dans les comptes rendus du colloque de 1977 [752] . Il s'appuie sur deux éléments essentiellement. Tout d'abord, le

[747] [COULLET, P., TRESSER, C., 1978], p. 25, [TRESSER, C., COULLET, P., 1978], p. 580.

[748] D'après Tresser, l'article de Metropolis, Stein et Stein a été lu avant l'été 1977, celui de Sharkovsky leur est transmis par Chenciner durant l'été (Entretien avec Charlers Tresser, 12 mars 2004). Rappelons que l'ordre de Sharkovsky est une propriété universelle.

[749] [TRESSER, C., COULLET, P., 1978], p. 579.

[750] Pour être tout à fait rigoureux, le point fixe de la transformation de renormalisation est $B/2$, ce qui correspondrait à un paramètre critique $R_c = 1/2$. Mais pour $R < R_c$ il n'y a pas doublement de période ; en revanche dans le domaine "chaotique", $R > R_c$, il y a un doublement de période "inversé". De ce côté de la transition, la théorie de la renormalisation donne les résultats classiques : et λ_1 est la valeur propre obtenue par la renormalisation ($\lambda_1 = 2$ ici). [TRESSER, C., COULLET, P., 1978], p. 579.

[751] [COULLET, P., TRESSER, C., 1978], p. 28.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

caractère discret des itérations étudiées n'a rien de "pathologique" : moyennant certaines conditions, elles peuvent, en effet, représenter une application de Poincaré d'un flot. L'attracteur de Hénon illustre cette possibilité car il est construit comme modèle simple reproduisant l'application de Poincaré du modèle de Lorenz. Ensuite, ils s'inscrivent dans ce nouveau contexte d'interrogation sur la turbulence : les idées de Ruelle et Takens sur la turbulence, les attracteurs étranges, le modèle de Lorenz (pensé à partir d'un système convectif). Feigenbaum, s'il perçoit l'importance de l'universalité, se détache plus difficilement du cadre des itérations [753] .

b. Face à Feigenbaum

La phase de reconnaissance des travaux de Coullet et Tresser est assez peu linéaire. Ils se font connaître d'abord assez largement, lors du colloque de Nice de septembre 1977. Yves Pomeau, Gérard Toulouse, de l'Ecole Normale Supérieure, sont présents et découvrent ces résultats. Si l'on ajoute Alain Chenciner, qui a manifesté le premier de l'intérêt pour la question, quelques "spécialistes" français sont au courant. Ils parviennent à publier une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, en 1978 seulement [754] .

Cependant, même lorsque ce résultat est porté à la connaissance d'un plus grand nombre de spécialistes, la reconnaissance n'est pas à la hauteur du résultat, essentiellement en raison de la concurrence des travaux de Feigenbaum. En fait, plusieurs facteurs, d'ordre sociologique, entrent en ligne de compte, mais schématiquement, la publicité au niveau international se focalise surtout sur Feigenbaum, au détriment des chercheurs niçois.

Remarquons, tout d'abord, que les deux situations ne sont pas tout à fait comparables : Feigenbaum travaille au Los Alamos Scientific Laboratory, publie en anglais, après plusieurs tentatives, dans le Journal of Statistical Physics, dont le public est international. Coullet et Tresser, au sein d'un petit laboratoire français, de province, publient eux dans le Journal de Physique, en français. Loin de tout expliquer, on comprendra que ce point n'est certainement pas anecdotique.

Deuxièmement, la référence, qui se fait de plus en plus systématique, aux travaux de Feigenbaum, oriente toujours plus les recherches dans son sens, légèrement en décalage des idées de Coullet et Tresser. En particulier, dans les tentatives de formulation et de démonstration plus rigoureuses des résultats d'universalité, on choisit le générateur du groupe de renormalisation de Feigenbaum. Nous avons vu que le travail de Pierre Collet,

[752] [COULLET, P., TRESSER, C., 1978] p. 27-28.

[753] Il est difficile de préciser à quel moment Feigenbaum prône une universalité généralisée. Avec les expériences de Libchaber et Maurer, on peut imaginer que ses conceptions s'élargissent. Mais dans son texte de synthèse, orienté vers la vulgarisation, en 1980, il ne donne pas les pistes pour étendre cette universalité : [FEIGENBAUM, M.J., 1980b].

[754] La note aurait du être publiée bien plus tôt, mais le référant choisi, P. Stefan, est décédé durant l'été 1977, dans un accident de montagne. La note est restée en l'état jusqu'à ce que René Thom, après consultation de Coullet et Tresser, la fasse effectivement paraître. Entretien avec Charlers Tresser, 12 mars 2004.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Jean-Pierre Eckmann et Oscar Lanford, publié en 1980, constitue la première preuve mathématique d'une universalité, destinée à corroborer les explications de Feigenbaum [755]. D'autres preuves sont apportées [756], dont le résultat du travail mathématique et numérique de Lanford [757]. Progressivement donc, il se construit un tissu de résultats autour de l'universalité, dont on fixe l'origine aux travaux de Feigenbaum [758].

Dans un autre registre, les expériences réalisées en physique des fluides donnent toujours plus de crédit à Feigenbaum : Albert Libchaber et Jean Maurer dans leur découverte de cascade de doublements de période mettent Feigenbaum en avant (et parlent de "schéma de Feigenbaum") [759]. Libchaber avait rencontré Feigenbaum déjà en 1976, à la Gordon Conference organisée par P.C. Martin. Mais il connaissait également Coullet et Tresser, qui lui ont dit en 1978, sans qu'il y croit vraiment, qu'une cascade de doublements de période pourrait apparaître dans ses expériences [760].

En outre, l'attitude de Feigenbaum va vraisemblablement dans le sens d'une obstruction à l'émergence de cette concurrence. Il pensait, en fait, avoir à faire à des scientifiques français bien établis et tentant de récupérer ses idées : il aurait été surpris à la conférence de New York de 1979 de se trouver face à des chercheurs, plus jeunes que lui, dont l'un d'entre eux n'a pas encore de poste [761]. Cette même conférence est aussi sa consécration devant un parterre de spécialistes [762].

En se projetant quelques années plus tard, il faut aussi signaler que l'ouvrage grand public de James Gleick (publié en 1987) a achevé de gommer toute espèce de subtilité entre les deux recherches. Il ne reste aucune trace de Coullet et Tresser et toute

[755] Voir la note 727 (p. 328) et [COLLET, P., ECKMANN, J-P, LANFORD III, O.E., 1980], p. 213. Il n'y a aucune mention, même pour remarque, du travail de Coullet et Tresser.

[756] Le cas de Feigenbaum n'est pas tout à fait inclus dans le cadre de l'étude précédente (cela correspondrait à $\varepsilon=1$). Ce sont Massimo Campanino, Henri Epstein et David Ruelle qui apportent des éléments de preuve de la conjecture dans ce cas (cf. [CAMPANINO, M., EPSTEIN, H., 1981] et [CAMPANINO, M., EPSTEIN, H., RUELLE, D., 1982]).

[757] [LANFORD III, O.E., 1982].

[758] On peut ajouter l'article [NAUENBERG, M., RUDNICK, J., 1981] et l'article de vulgarisation [LUBKIN, G.B., 1981].

[759] "Feigenbaum scheme", [LIBCHABER, A., MAURER, J., 1982], p. 127. Ils ajoutent, en référence, un article de Coullet et Tresser, sans préciser davantage.

[760] Entretiens avec Pierre Coullet et Charles Tresser, 12 mars 2004. Tous deux, indépendamment, ont échangé une conversation avec Libchaber pour l'aviser de cette possibilité. Tresser évoque même précisément la conférence des Houches de 1978 comme lieu de rencontre et de discussion : il s'est tenu effectivement une école du 27 mars au 8 avril 1978, sur le thème "Solitons, instantons, turbulence", où Libchaber et Pomeau sont intervenus. Au dire de Coullet et Tresser, Libchaber est venu régulièrement à Nice pour discuter des problèmes en question. Dans les dossiers d'Action Thématique Programmée (ATP, opération gérée par le CNRS) on trouve effectivement des traces des collaborations (des visites de Coullet et Tresser à Paris, pour travailler avec Libchaber entre autres). Archives du CNRS, G 850117 Articles 4 à 7 (Dossier ATP 3875, 1980).

[761] Tresser n'est pas encore au CNRS. Entretiens avec Pierre Coullet et Charles Tresser, 12 mars 2004.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'universalité se résume à la théorie de Feigenbaum [763] . La légende de Feigenbaum se déploie encore plus largement dans l'ouvrage récent d'Abraham Pais, The Genius of Science [764] , regroupant quinze portraits de scientifiques du XXème siècle : Feigenbaum y côtoie Einstein, Bohr, Dirac, etc.

Maintenant, à l'échelle nationale, voire locale, d'autres paramètres entrent en jeu. On constatera l'éloignement progressif des recherches de Coullet et Tresser par rapport à la thématique de départ, propre à l'équipe du LPMC auxquels ils sont intégrés, à savoir les questions de Mécanique statistique des fluides hors d'équilibre. Un certain nombre de pressions se seraient alors exercées pour recentrer leur activité [765] . Il faut se figurer également que tout ceci commence vers 1977, dans un laboratoire de Nice, loin du centre plus actif qu'est Paris ; Coullet et Tresser sont des locaux, sans ancrage au niveau national, sans "réseau scientifique" dévoué. Ils ne sont ni normaliens, ni polytechniciens. Seule une ambiguïté vis-à-vis de leur recherche leur est favorable : ils "jouent" à itérer une parabole, ce qui pour un physicien ou un mathématicien peut paraître enfantin, mais utilisent des méthodes sophistiquées. Le recours à des théories de groupe de renormalisation rend leur recherche plus "sérieuse" et valable, aux yeux des physiciens théoriciens surtout. Ceci a également pu être un facteur favorisant les rapprochements avec la physique théorique parisienne, de l'Ecole Normale Supérieure en particulier.

Force est de constater que l'opposition entre Feigenbaum et Coullet et Tresser, tourne indiscutablement à l'avantage du premier, alors qu'en termes de résultats "scientifiques" peu de choses les distinguent. Feigenbaum est reconnu internationalement le premier, dans les conférences de Côme en 1977 et New York en 1979. Ce déficit d'image est l'élément finalement déterminant dans cette histoire, impossible à renverser.

En revanche, les travaux postérieurs à 1978 prennent des voies différentes et dans la perspective des conceptions du chaos, les réflexions de Coullet et Tresser nous paraissent plus intéressantes que celles de Feigenbaum. Pour ce dernier, très attaché aux itérations, le chaos correspond finalement à l'image annoncée par Li et Yorke, à une orbite non périodique germant après une suite de doublement de période. A Nice, les choses sont plus complexes et s'inscrivent dans le prolongement de l'analogie inaugurée au cours de 1977.

c. Le chaos chez Coullet et Tresser avant 1980

Tout d'abord il faut signaler que leur maîtrise des éléments de système dynamique est

[762] Coullet et Tresser étaient initialement dans la liste des noms retenus pour une éventuelle intervention, mais sur le sujet, seule la communication de Feigenbaum a été exposée (Entretien avec Charles Tresser, 12 mars 2004). Ceci n'a sans doute pas été sans conséquences vu l'ampleur de la conférence et le public présent. En outre, Feigenbaum était déjà présent à la précédente grande réunion de Côme en 1977.

[763] Le chapitre "Expérimentateur", p. 241-268, passe sous silence les relations Coullet-Tresser-Libchaber.

[764] [PAIS, A., 2000], p. 84-104.

[765] Nous n'avons pas plus de précisions (Entretiens avec Pierre Coullet et Charles Tresser, 12 mars 2004).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

assez limitée lors des manipulations de l'été 1977 et le colloque qui a suivi. Leur travail est placé sous la bannière de la renormalisation avant tout. C'est durant les mois suivants que leur apprentissage de la théorie des systèmes dynamiques va se faire et leur participation au CIME en juin 1978 achève de combler leurs lacunes, grâce aux cours de Guckenheimer, Moser, Newhouse et aux interventions de Chenciner, Aizenman et Misiurewicz [766].

Si les analyses se font naturellement plus précises, plus rigoureuses sur le plan mathématique, du fait de cette formation accélérée, la perspective dominante reste celle de transposer les résultats de la physique des transitions de phase dans le problème de la dynamique. Cette heuristique est toujours très puissante. Elle se traduit également par une évolution de leur notion de chaos.

Chaos et entropie topologique

Les correspondances tout d'abord se précisent. Reprenons leur exemple de la transition ferromagnétique pour résumer l'analogie opérée. Il existe dans ce cas une température critique T_c, où, pour $T>T_c$ la magnétisation macroscopique M moyenne est nulle ; pour $T<T_c$ M est non nulle et il existe une loi du type $M\sim(T_c-T)^{\alpha}$ à l'approche de T_c. Le temps de corrélation diverge à la température critique selon une loi universelle : $\xi\sim(T-T_c)^{-\nu}$.

L'analogie, établie dès 1977, fait concorder la période des comportements périodiques au temps de corrélation ; la magnétisation correspond au paramètre qui caractérise l'intensité du "bruit", la stochasticité. L'équivalent dynamique de ce paramètre d'ordre est choisi plus tard : il s'agit de l'**entropie topologique** [767]. Autrement dit, le chaos, qui était l'apériodique, le stochastique, trouve une définition mathématique tirée des mathématiques des systèmes dynamiques. Coullet et Tresser construisent en fait une notion **locale** d'entropie topologique, efficace sur le plan numérique [768]. **Le chaos, la stochasticité, correspondent à une entropie topologique positive**.

La variante introduite pour cette caractérisation du chaos est intéressante. Elle répond à un problème pratique particulier : l'analyse en termes de comportements asymptotiques des orbites, périodiques ou apériodiques, est "trop fine" d'un point de vue expérimental (réel ou numérique) [769]. Parallèlement, le paramètre "grossier" d'entropie

[766] Au Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) est organisée une école d'été sur le thème "Dynamical Systems" du 19 au 27 juin 1978 à Bolzano, Italie. Voir la liste des colloques et séminaires présentées au début de la seconde partie, p. 159.

[767] La notion d'entropie topologique est plus ancienne et n'est pas introduite dans les questions de dynamique par Coullet et Tresser. La première définition remonte à 1965 ([ADLER, R.L., KONHEIM, A.G., McANDREW, M.H., 1965]) ; Robert Bowen a précisé cette notion en 1971-73 : [BOWEN, R., 1971], [BOWEN, R., 1973]. Guckenheimer et Misiurewicz, présents au CIME en 1978 sont familiers de ces considérations mathématiques et ont pu influencer Coullet et Tresser dans ce choix (voir par exemple [BLOCK, L., GUCKENHEIMER, J., MISIUREWICZ, M., YOUNG, L.-S., 1979]).

[768] C'est le sujet de [COULLET, P., TRESSER, C., 1980].

[769] [COULLET, P., TRESSER, C., 1980] p. 255.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

topologique peut être soumis à une analyse en terme de groupe de renormalisation, ce qui permet de façonner un nouvel exposant critique [770] . Il ne s'agit pas pour autant de remplacer mais de **composer deux caractéristiques, deux structures pour la notion de chaos**.

L'entropie topologique fournit donc une alternative dans le choix d'un paramètre d'ordre. Nous avons vu que l'entropie métrique servait de paramètre pour la "stochasticité" [771] . Les exposants de Lyapounov peuvent aussi jouer ce rôle [772] et il existe d'ailleurs une loi universelle pour les exposants [773] .

Une classification des transitions

L'analogie avec les transitions de phase, particulièrement suivie entre 1977 et 1980, et conduite avec de bonnes connaissances en mathématiques des systèmes dynamiques, permet non seulement de reconsidérer leur vision du chaos, mais également de préciser les différentes classes de transitions en matière de dynamique. L'extension de l'analogie conduit à distinguer deux grandes catégories de résultats. Des conséquences **quantitatives** sont déduites des analyses, grâce au groupe de renormalisation. La cascade sous-harmonique et son universalité quantitative en sont les meilleurs exemples. Sur un autre plan, l'analogie permet de tirer des conséquences plus **qualitatives** sur le problème des transitions en dynamique.

Qualitativement, ils distinguent ainsi deux types de transitions : les transitions "brutales" et les transitions "continues". Dans le langage de la physique des transitions de phase, ceci correspond aux transitions du premier ordre (passage discontinu d'une configuration à une autre) et du deuxième ordre (passage continu). Analogiquement, la transition de premier ordre est une transition pour laquelle une dynamique simple (stationnaire, périodique ou à deux périodes distinctes) est immédiatement suivie de turbulence. Cependant le caractère brutal n'est pas totalement valable dans le cas de la dynamique : il peut exister une transition par intermittence, rendant continue la transition. En résumé,

"En analogie avec les transitions de phase, nous n'attendons pas de propriétés universelles lorsque la transition est discontinue ; nous observons généralement

[770] La loi d'échelle pour ce paramètre est constatée seulement numériquement et non reliée analytiquement aux propriétés du groupe de renormalisation. [COULLET, P., TRESSER, C., 1980], p. 256.

[771] L'entropie est associée aux exposants de Lyapounov dans la caractérisation de la stochasticité dans l'article de Benettin et ses collaborateurs, en 1976 (cf. chapitre 4, p. 284). Dans [OONO, Y., KHODA, T., YAMAZAKI, H., 1980], les auteurs discutent d'un paramètre d'ordre, analogue à ceux trouvés dans les transitions de phase, dont ils présument qu'il correspond à l'entropie métrique (entropie de Kolmogorov, dans le texte).

[772] Le japonnais Yoshitsugu Oono l'a montré dans [OONO, Y., 1978a], tout en mettant en évidence, heuristiquement, le rapport avec l'entropie.

[773] La loi de puissance est donnée par les physiciens américains Huberman et Rudnick dans [HUBERMAN, B.A., RUDNICK, J., 1980]. Les exposants de Lyapounov sont associés à l'inverse de la longueur de corrélation dans les transitions de phase.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

un phénomène d'hystérésis comme dans l'exemple du modèle de Lorenz" [774]

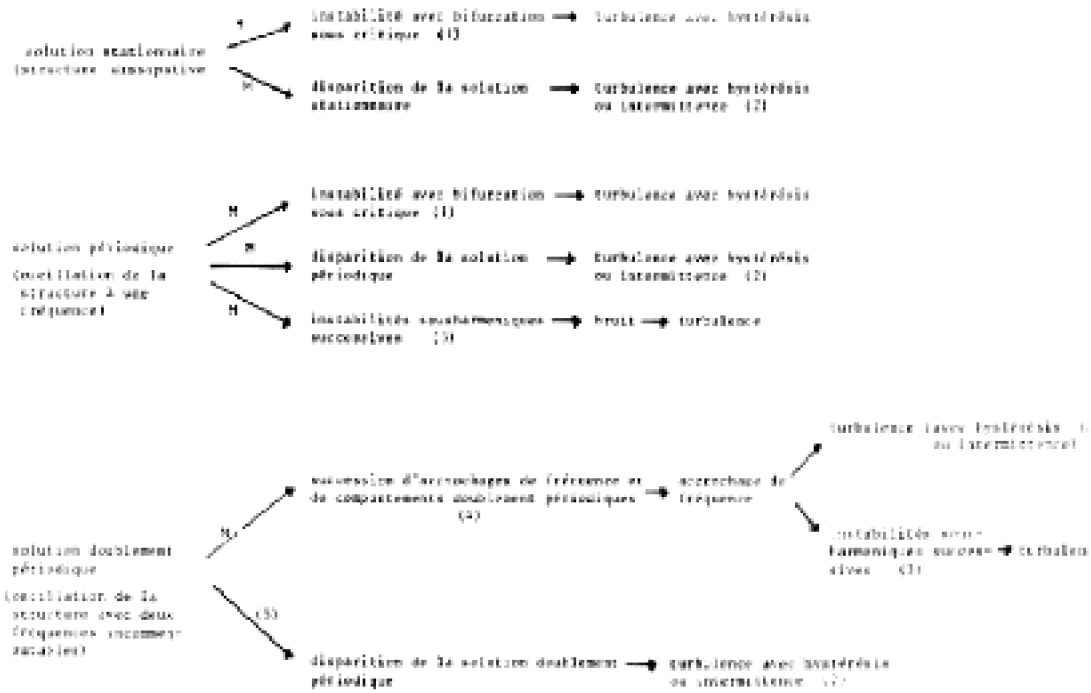
La cascade sous-harmonique correspondrait, elle, au deuxième ordre, par l'apparition progressive de comportement turbulent.

Ceci n'épuise pas la diversité des scénarios possibles. En 1980, Coullet et Tresser, rejoints par Alain Arnéodo, physicien théoricien au CNRS dans un laboratoire voisin (Laboratoire de Physique Théorique de l'Université de Nice) qui choisit de se convertir à leur problématique, ébauchent une classification. La construction distingue deux grandes classes, suivant le nombre de fréquences fondamentales observées avant la transition. Evidemment, elle "suscite certaines réflexions" [775] . Cette classification primitive est très remarquable, d'autant plus qu'elle n'est pas directement superposable avec la nomenclature qui deviendra "classique" en trois scénarios : quasi-périodicité (Ruelle-Takens), cascade de doublements de période, intermittence.

[774] ***"In analogy with phase transitions, we do not expect any universal property when the transition is discontinuous ; we generally observe a hysteresis phenomenon as e.g. in Lorenz model.", [TRESSER, C., COULLET, P., ARNEODO, A., 1980], p. 243.***

[775] ATP "Systèmes dynamiques modèles et transition vers la turbulence", Annex 1, p. 3. (Archives du CNRS, G 850117, Articles 4 à 7 (Année 1981)).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est



Classification des transitions vers le chaos dans les systèmes dissipatifs (voir note 78)

L'intermittence, autre scénario imaginé, est sujet de discussion dans ce cadre [776]. Selon les auteurs, le mécanisme de Pomeau et Manneville, même s'il donne un cadre théorique pertinent aux expériences réalisées par Dubois et Bergé et se retrouve dans beaucoup de simulations numériques, ne **correspond pas à un mécanisme de transition vers le chaos** :

"[…] le phénomène d'intermittence mis en évidence par ces auteurs dans le modèle de Lorenz à grand nombre de Rayleigh ne décrit en rien une transition intermittente vers la turbulence puisqu'il prend place en plein régime turbulent. […] Par contre beaucoup plus rares sont les systèmes mettant en jeu une véritable transition intermittente que nous appellerons 'intermittence de seuil' […] l'intermittence de seuil doit se comprendre comme un cas limite d'une transition vers le chaos du 1er ordre avec hystérésis." [777]

Le phénomène d'hystérésis est étudié en particulier dans leur article "On the existence of

[776] Nous détaillons ce scénario plus loin, p. 360.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

hysteresis in a transition to chaos after a single bifurcation" [778] . Dans cette question de transition vers le chaos, l'analogie avec les transitions de phase est véritablement le fil conducteur qui leur donne les clés d'une taxonomie et permet d'écarter un phénomène qui est connu mais n'explique pas comment le chaos se met en marche.

Le bruit

Une dernière analogie mérite notre attention : dans la démagnétisation ferromagnétique au point de Curie, le champ magnétique perturbe l'aimant, et au fur et à mesure de l'approche du point, de moins en moins de force de champ suffit à cela. Sur le plan de la dynamique, **le bruit externe au système fait office de champ magnétique**. Ceci est compris depuis le début de l'analogie par Coullet et Tresser : c'est une "évidence", qui ne mérite pas d'être publiée et on peut dire que l'analogie ne serait pas complète sans l'analogue de ce bruit [779] . D'autres ne se priveront pas de publier de tels résultats sur l'influence du bruit au point critique, sans apporter, qualitativement, beaucoup plus que ce que l'analogie permet d'approcher [780] . Une analyse en groupe de renormalisation (se référant systématiquement à Feigenbaum) sert à diagnostiquer de nouveaux exposants critiques universels, conformes à des études numériques [781] .

d. 1980 : premières conclusions

Des mathématiques à base de physique

Nous avons mis en lumière la très forte heuristique générée par la physique des transitions de phase, transportée dans le cadre de la dynamique. Si une certaine naïveté marque leurs premiers pas, les outils des systèmes dynamiques consolident la réflexion.

[777] ***ATP "Systèmes dynamiques modèles et transition vers la turbulence", Annexe 1, p. 3. (Archives du CNRS, G 850117, Articles 4 à 7 (Année 1981)).***

[778] [TRESSER, C., COULLET, P., 1980].

[779] Le bruit est aussi inévitable du moment qu'il s'agit d'expérimentations ou de calculs numériques (erreurs d'arrondis dans ce cas).

[780] Au grand regret de Coullet et Tresser, qui considèrent cela comme une "trivialité" (entretien avec Charles Tresser, 12 mars 2004). L'analogie est proposée dans l'analyse [CRUTCHFIELD, J.P., HUBERMAN, B.A., 1980], essentiellement appuyée par des résultats numériques. Ce n'est pas seulement la cascade de dédoublement qui est étudiée, mais l'influence du bruit sur la transition vers le chaos (pour une particule dans un potentiel anharmonique) : les résultats à l'ordinateur analogique, troublé par un générateur de bruit, montrent simplement le décalage de la transition avec le bruit. L'universalité est ensuite testée sur une itération unidimensionnelle.

[781] Ce sont uniquement des travaux sur les itérations soumises à doublement de période : [CRUTCHFIELD, J., NAUENBERG, M., RUDNICK, J., 1981], [SHRAIMAN, B., WAYNE, C.E., MARTIN, P.C., 1981]. Les deux donnent une loi d'échelle (équivalente malgré les différences de présentation) liant l'exposant de Lyapounov et le bruit σ, selon une fonction universelle :
où $t=ln2/ln\delta \approx 0,4498\ldots$ et $u=ln2/ln\beta \approx 0,34\ldots$ $(\beta\approx7,7)$.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Les systèmes dynamiques s'insèrent alors aux côtés des outils d'étude des phénomènes critiques pour bâtir des scénarios de transition vers le chaos, donnant des indications à la fois qualitatives et quantitatives. Les mathématiques et la physique sont combinées dans cette recherche ; ce sont des résultats qu'on peut dire mathématiques, obtenus par des intuitions physiques des objets mathématiques.

L'autre guide est la simulation numérique, omniprésente ici. La pratique même du calcul numérique suit une démarche proche de l'expérimentation physique. Il n'est pas de meilleur exemple que les premières analyses des figures obtenues par itération de la "bosse" de l'article de May, observée et disséquée comme le serait une expérience physique "réelle", conduites sans les outils des systèmes dynamiques. Les aspects interactifs, les possibilités graphiques de visualisation participent de cette démarche et les travaux de Coullet et Tresser sont particulièrement prégnants à ce niveau.

Par ailleurs, nous avons montré la suite de coïncidences qui émaille la progression dans les premiers temps des réflexions (d'autres concours de circonstances traversent le cheminement de Feigenbaum). Mais il faut insister sur le fait que, à côté de ces petits hasards, Coullet et Tresser étaient particulièrement réceptifs et préparés pour développer une analogie pareille. Sans quoi rien ne serait sorti de ces rencontres. Il convient également de souligner le concours de scientifiques comme Chenciner, véritable catalyseur des interactions conduisant au développement du sujet. Le contexte niçois mériterait une étude plus étendue pour comprendre la dynamique générale dans laquelle cet épisode s'inscrit [782] .

Dans ce rapide bilan, nous pouvons revenir une dernière fois sur les proximités et les nuances entre les résultats de Feigenbaum et ceux de Coullet et Tresser dans l'analogie choisie et les résultats qualitatifs et quantitatifs dégagés. En se fiant aux allégations de Feigenbaum, on peut constater que la question de l'universalité n'est pas perçue aussi immédiatement que chez Coullet et Tresser. **Feigenbaum semble découvrir par surprise l'universalité** tout en étant ensuite inspiré par P. Stein (et l'article de Metropolis, Stein et Stein de 1973) dans l'analyse de la question. L'analogie avec les transitions de phases conduite d'emblée par Coullet et Tresser leur laisse **imaginer des propriétés universelles *a priori*** : ils les cherchent dans les calculs numériques réalisés et ne sont pas surpris (au contraire) de se voir confortés par les simulations numériques. Leur lecture en terme de transition de phase leur a permis en outre de voir qu'il y a transition des "deux côtés" : avant et après le paramètre critique, avec le même exposant critique. Le fait que Feigenbaum se focalise sur le caractère géométrique du doublement de période, indique qu'il ne fait qu'une analogie timide, et n'a pas pris en compte tout de suite les multiples facettes du phénomène critique. Coullet et Tresser ne "voient" pas la série géométrique des doublements en elle-même mais comme un phénomène critique avec un exposant critique, ce qui a tout son sens dans l'analogie.

Les différences majeures avec Feigenbaum apparaissent dans la suite donnée à cet épisode de 1977. Nous avons vu que l'analogie est poursuivie et l'universalité est recherchée plus largement par Coullet et Tresser. Dans un premier temps, c'est l'outil des applications de Poincaré qui permet d'imaginer des extensions, comme dans le cas des

[782] Les prolongements dans les années 1980-90 sont analysés en rapport avec l'histoire du CNRS, au chapitre 11, p. 730.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

oscillateurs forcés présenté en 1979 [783] .

Le système est constitué d'une particule placée dans un potentiel harmonique, sujette à une force extérieure dont la dérivée temporelle dépend de la position de la particule (feedback). L'universalité du diagramme de bifurcation pour cette classe de système est observée numériquement et comprise grâce au transfert des techniques des systèmes discrets via une application de premier retour.

La seconde différence touche aux conceptions de chaos. On a vu qu'elles sont plus pertinemment disséquées par Coullet et Tresser, sans doute grâce à leur formation sur les systèmes dynamiques, acquise en l'espace d'une année. Mais de manière plus fondamentale cela tient au fait que le chaos et les transitions vers le chaos sont intimement liés dans leurs réflexions. Les travaux jusqu'en 1980 le font sentir, ceux postérieurs à 1980 l'assument parfaitement.

e. Chaos et transition vers le chaos, après 1980

A la fin des années 1970, pour Coullet, Tresser et Arnéodo, la question de la transition est clairement reliée à celle du chaos. La transition vers le chaos permet en effet de donner une idée du chaos auquel les transitions aboutissent et ils soulignent plus généralement l'importance de s'interroger sur l'origine et la nature du comportement chaotique [784] . A quelle notion de chaos font-ils référence et comment chaos et transition vers le chaos se répondent-ils ?

Pour les débuts, en 1977, il est difficile de répondre : il s'agit pour Coullet et Tresser d'un moment de découverte et, de manière diffuse, le chaos (qui est appelé turbulence) est un mélange de chaos selon Li et Yorke (et May, source primaire de leurs réflexions), de questions de stochasticité, de sensibilité aux conditions initiales, d'attracteur étrange [785] . Cependant, l'étude de la transition dans les itérations unidimensionnelles se focalise sur l'ensemble de Cantor qui concentre en quelque sorte ces ingrédients et donne la meilleure représentation de "leur" chaos : leur culture des transitions de phases leur fait certainement préférer cet objet invariant d'échelle, autosimilaire, fractal.

Par la suite, nous l'avons signalé, la définition d'un paramètre d'ordre, l'entropie topologique locale, va de paire ave une réévaluation de la notion de chaos. La structure précédente n'est pas caduque, mais, d'un point de vue pratique, il est plus efficace de recourir à cette caractéristique entropique, plus simplement discriminatoire d'une stochasticité. L'installation des mathématiques des systèmes dynamiques permet de préciser ces notions et finalement de superposer deux structures, métrique et topologique.

Tout ceci se passe dans le cadre des itérations et des applications de Poincaré de flots. L'intérêt pour les flots eux-mêmes, la résurgence de l'attracteur étrange dans leurs

[783] C'est l'article [COULLET, P., TRESSER, C., ARNEODO, A., 1979].

[784] ATP "Systèmes dynamiques modèles et transition vers la turbulence", Annexe 1. (Archives du CNRS, G 850117, Articles 4 à 7 (Année 1981)).

[785] Voir par exemple l'exposé du colloque de 1977 : [COULLET, P., TRESSER, C., 1978].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

conceptions (non plus limité à sa trace sous forme d'ensemble de Cantor) signe une nouvelle étape, perceptible en 1981. A propos des études des systèmes où se présentent des phénomènes turbulents, chaotiques, ils précisent :

"L'annulation asymptotique des fonctions d'autocorrélation, la mise en évidence d'un spectre de bruit continu, la positivité des exposants de Lyapounov sont les tests de stochasticité utilisés. Il n'existe à l'heure actuelle aucune preuve (théorique) pour ces systèmes de l'existence d'attracteurs étranges." [786] ***"On peut se limiter à appliquer les tests numériques de stochasticité précédemment cités. On peut aussi s'aventurer à essayer de démontrer l'existence mathématique d'attracteurs étranges."*** [787] ***"Dans certains cas […] il est cependant possible soit de définir des flots modèles pour lesquels on sait démontrer l'existence d'attracteurs étranges : c'est la méthode qu'ont utilisée Guckenhermer (sic)-Parry-Williams dans l'étude de l'attracteur de Lorenz ; soit d'utiliser des théorèmes généraux dus essentiellement à Shil'nikov et qui permettent de comprendre l'origine et la structure des comportements chaotiques."*** [788]

Plusieurs remarques s'imposent. Jusqu'à présent, il n'a jamais été question des tests numériques à partir des exposants de Lyapounov, spectres, etc. Leurs connaissances sont suffisantes pour que cette mise à l'écart ne soit pas le fait d'une méprise. Cela est parfaitement assumé et ces calculs n'ont qu'un intérêt limité ; Coullet et Tresser ont déjà leur critère de stochasticité. Plus que cela, de tels indices ne servent pas à répondre à la question de l'origine et la nature du chaos, ni à celle des scénarios de transition. On peut ajouter que les calculs de dimension d'attracteur étrange sont également évacués, sans doute pour la même raison.

Deuxièmement, l'annonce de 1981 (mûrie antérieurement) se traduit concrètement par de nouvelles perspectives en termes de recherches et de résultats. La conception de chaos en tant qu'attracteur étrange aboutit à la construction d'un nouveau scénario. L'exemple le plus significatif est l'article au titre révélateur : "A possible new mechanism for the onset of turbulence", publié en 1981. Comme le titre l'indique il est d'abord question d'un mécanisme de transition vers la turbulence, mais le cadre n'est plus celui des itérations discrètes : il s'agit de familles paramétrées de flots Φ_a à trois dimensions (avec une condition de symétrie). Court mais fourmillant d'idées, il illustre tout le rapport entre une conception de chaos et une transition.

En s'inspirant de la méthode de Guckenheimer-Williams, Arnéodo, Coullet et Tresser ont en effet échafaudé un nouveau scénario de transition continue vers la turbulence, sous forme d'une cascade, où intervient une succession d'orbites homoclines, dont la forme se complique avec le paramètre *a*. Plus précisément, la transition suit le scénario suivant :

- il existe des valeurs ($\tilde{a}_n$) de *a* pour lesquelles Φ_a possède une paire d'orbites

[786] ***ATP "Systèmes dynamiques modèles et transition vers la turbulence", Annexe 1, p. 3. (Archives du CNRS, G 850117, Articles 4 à 7 (Année 1981)).***

[787] ***Ibid., p. 5***

[788] ***Ibid., p. 1.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

homoclines (à O) stables,

• pour $a \geq \tilde{a}_n$ (et $a \approx \tilde{a}_n$) une orbite périodique symétrique est générée par bifurcation des précédentes homoclines,

• pour $a = a_n \in]\tilde{a}_n, \tilde{a}_{n+1}[$ l'orbite périodique est déstabilisée et donne naissance à deux orbites périodiques stables, symétriques l'une de l'autre,

• une nouvelle bifurcation à $a = \tilde{a}_{n+1}$ ramène à une situation à deux homoclines.

• La succession se répète jusqu'à une limite $a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n$, au-delà de laquelle il y a chaos.

Selon la procédure de Guckenheimer-Williams pour le flot de Lorenz, ils ont construit une suspension (un flot dans $\mathbf{R}^3$) de l'application :

$$f_a(x) = a - |x|^\delta, \qquad x < 0$$
$$f_a(x) = -a + |x|^\delta, \qquad x \geq 0$$

Le diagramme de bifurcation, le mécanisme de transition, la formulation en groupe de renormalisation sont transférés grâce à la même procédure de suspension d'une application en flot : les résultats connus pour les itérations ont leur pendant dans le cadre des flots. Ceci explique le choix de l'application f_a : il s'agit de la famille faisant l'objet de la démonstration de Collet, Eckmann, Lanford, à propos de la résolution des équations de renormalisation.

On peut signaler également que les résultats sont bien différents dans le cas des flots par rapport aux itérations, au moins sur deux points :

• il n'y pas de doublement de période (d'orbites périodiques) et pas de pics dans le spectre associé. Au contraire, puisqu'il s'agit d'homoclines, c'est la fréquence zéro qui prédomine, et ce pic de fréquence devrait être largement prépondérant.

• il y a universalité (même loi d'échelle pour a_n et $\tilde{a}_n$) mais δ dépend d'un certain nombre de paramètres des flots construits. Pas question d'une "super-universalité" comme c'est le cas des itérations avec le paramètre δ de Feigenbaum : il s'agit de multiples classes d'universalité contiguës (car dépendant continûment des paramètres des flots).

Quelles conclusions tirer de l'analyse de cet article ? On comprend d'abord que la notion de chaos ne se limite pas à une question d'entropie topologique, plus propre aux itérations. Si l'entropie topologique positive reste un moyen de caractérisation du chaos, la notion d'attracteur étrange et les orbites homoclines ont toute leur importance. Le chaos est une véritable superposition de structures et devient une notion toujours plus sophistiquée.

L'article marque également l'éventualité d'étendre les techniques de renormalisation et les propriétés d'universalité hors des itérations, directement dans les flots.

Enfin, et il faut insister sur ce point, les auteurs manipulent des modèles de flots, construits selon les prescriptions de Guckenheimer et Williams notamment. Ce choix

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

s'explique dans la mesure où ils pensent que les attracteurs étranges sont des bons éléments pour étudier les comportements chaotiques mais qu'il faut dépasser le cadre théorique, mathématique, reposant sur les considérations de systèmes dynamique Axiome A car :

"[…] cette théorie ne nous permet pas de comprendre la stochasticité générée dans les analyses numériques de difféomorphismes et équations différentielles donnés par des expressions algébriques explicites." [789]

Ainsi les "modèles topologiques" [790] ouvrent des nouvelles possibilités. On notera cependant, que les démonstrations sont très heuristiques, relayées comme d'habitude par des calculs numériques sur des systèmes différentiels suffisamment représentatifs des propriétés annoncées. En outre, il est problématique de trouver des exemples numériques précis. Nous ne pouvons manquer de rapprocher cette perspective de celle de Rössler, quelques années auparavant, dans les méthodes et les pratiques (en faisant abstraction des résultats à proprement parler). L'analogie avec sa démarche ne s'arrête pas là.

A côté des méthodes de Guckenheimer-Williams, nous avons mentionné leur choix de recourir aux théorèmes de Shilnikov. L'intérêt pour ces théorèmes peut se résumer par cette citation de l'article explicitant la problématique et les premiers résultats de Arnéodo, Coullet et Tresser en la matière :

"Une étape fondamentale dans l'étude de la stochasticité dans de telles équations différentielles consiste à prouver l'existence d'une infinité d'orbites périodiques isolées. Cependant, il semble douteux sinon sans espoir de trouver des théorèmes généraux donnant des réponses définitives à ce dernier problème sous des conditions déterminables analytiquement. Le but principal de cet article est de donner des arguments convaincants au fait que l'origine et la structure des comportements chaotiques auxquels beaucoup de familles d'équations différentielles d'ordre trois à un paramètre sont sujettes, peuvent être compris à la lumière du théorème suivant, qui est une légère modification d'un ancien résultat de Shil'nikov." [791]

Pour les niçois il ne fait aucun doute que

"[…] l'utilisation conjuguée de l'ordinateur, des méthodes de G-P-W et des théorèmes généraux dus essentiellement à Shil'nikov permettra de nouveaux

[789] ***"Nevertheless this theory does not allow us to understand the stochasticity generated in numerical investigations of diffeomorphisms and differential equations given by explicit algebraic expressions.", [ARNEODO, A., COULLET, P., TRESSER, C., 1981b], p. 573.***

[790] "the class of topological models of Guckenheimer", ibid., p. 573.

[791] ***"A fundamental step in the investigation of stochasticity in such differential equations consists in proving the existence of infinitely many isolated periodic orbits. However, it seems doubtful if not hopeless to get general theorems giving definitive answers to this last problem under analytically computable conditions. The main purpose of this paper is to give convincing arguments that the origin and structure of chaotic behavior displayed by many one-parameter families of third-order differential equations can be understood in the light of the following theorem, which is a slight modification of an old result by Shil'nikov.", [ARNEODO, A., COULLET, P., TRESSER, C., 1982], p. 172. Pour les travaux de Shilnikov, nous renvoyons aux traductions anglaises : [SIL'NIKOV, L.P., 1965].***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

progrès dans la compréhension des mécanismes conduisant à la turbulence." [792]

Ils procèdent en deux temps. Ils illustrent d'abord l'application des théorèmes dans l'étude du chaos. Les conditions d'applications du théorème sont vérifiées soit analytiquement dans un cas simple, soit numériquement sur des systèmes plus explicites. Parmi ces systèmes, il y a ceux de Rössler destinés à illustrer les notions de chaos "de type vis" et "de type spiral". Les conditions du théorème sont presque vérifiées, mais les trois physiciens signalent : "il semble que Rössler ait déjà eu une l'intuition d'un tel phénomène" [793] . Ceci n'a rien d'un hasard et n'est pas anecdotique : fondamentalement, cela témoigne d'un cheminement tendant partiellement vers la perspective de Rössler. Par ailleurs, nous avons déjà signalé que les méthodes de Williams (et Guckenheimer) sont proches des modèles de papier de Rössler.

A la différence de Rössler cependant, leur perspective reste, dans un second temps, le problème de la transition vers le chaos, bien qu'il ne soit pas vraiment possible de dissocier ce problème de l'étude du phénomène de chaos. Ce qui explique les derniers mots de la conclusion de l'article de 1982.

"Plus précisément, lorsque # $_0$ [orbite homocline] existe, il y a un fer à cheval avec une infinité de branches dans une application de Poincaré typique pour le flot ; le nombre de branches décroît quand on déplace les paramètres hors des valeurs pour lesquelles une orbite homocline existe. Cette évolution explique que des phénomènes bien connus comme les cascades de bifurcations sous-harmoniques, ou l'intermittence, apparaissent naturellement quand on fait varier les paramètres dans de tels systèmes." [794]

Le monde des systèmes dynamiques domine donc leur perspective sur le chaos à base d'homoclines. Ce sujet des orbites homoclines est surtout développé ensuite par Charles Tresser après 1981 et divers travaux, dont sa thèse d'Etat, présentent les théorèmes de Shilnikov. Il propose aussi de classifier les flots sur la base de la topologie des homoclines étudiées [795] .

f. Des physiciens en action

[792] ***ATP "Systèmes dynamiques modèles et transition vers la turbulence", Plan de recherche, p. 8. (Archives du CNRS, G 850117, Articles 4 à 7 (Année 1981)).***

[793] "[…] it seems that Rössler had already the feeling of such a phenomenon.", [ARNEODO, A., COULLET, P., TRESSER, C., 1982], p.177.

[794] ***"More precisely, when Γ_0 [orbite homocline] exists, there is a horseshoe with infinitely many branches in a typical Poincaré first return map for the flow; the number of branches decreases when we move the parameters away from values where a homoclinic orbit exists. This evolution explains in turn that well-known phenomena such as cascades of subharmonic bifurcations, or intermittency, naturally arise when varying a parameter in such systems.", [ARNEODO, A., COULLET, P., TRESSER, C., 1982], p. 181. D'après les auteurs, ce théorème explique aussi le passage du chaos "type vis" au "type spiral" selon la disctinction de Rössler. Le "type vis" correspond à la situation proche de l'existence d'une homocline, qui s'en éloigne en allant vers le "type spiral".***

[795] Voir par exemple son article : [TRESSER, C., 1984].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Parti d'observations quelque peu empiriques sur des calculs numériques, les conceptions de Coullet et Tresser se sont considérablement élargies pour donner des clés à l'étude du chaos et de la transition vers le chaos. Deux points méritent d'être soulignés une dernière fois. Tout d'abord, l'élargissement en question suit un développement de la notion de chaos utilisée, en même temps que les options prises sur le chaos déterminent l'orientation des recherches. Ensuite, le travail en matière de systèmes dynamiques, mathématiques, auraient été totalement différent sans l'analogie physique proposée et sans la démarche de ces physiciens en action, explorant la dynamique, comme ils analyseraient la matière.

Il nous paraît justifié de rapprocher ces démarches de celles de Rössler, et de la "physique de la dynamique" de Shaw. Soulignons qu'ils sont tous issus des sciences empiriques, qu'ils pratiquent les expériences numériques et qu'il serait très réducteur de ramener ces travaux à une "simple" perspective de mathématiques des systèmes dynamiques.

5.4. Mira et Gumowski : les structures boîtes-emboîtées

Indépendamment de Feigenbaum, Coullet et Tresser, les deux chercheurs Christian Mira et Igor Gumowski ont travaillé au développement d'un cadre théorique pour les itérations et leurs bifurcations. On rappellera qu'ils sont également les auteurs du premier ouvrage sur le chaos, dans les itérations, en 1980 : Dynamique chaotique [796] .

La question du doublement de période a attiré leur attention et leur étude s'est concrétisée avec les "structures boîtes-emboîtées". Plus que les résultats obtenus par le "groupe de Toulouse" [797] ce sont leurs démarches qui sont particulièrement intéressantes. Elles combinent des mathématiques, de l'ingénierie et de la simulation numérique. Elles permettent de moduler encore l'histoire du doublement de période, concentrée sur Feigenbaum. Après avoir précisé le contexte de leurs recherches, nous pointerons ces nouvelles nuances et leur rapport aux conceptions de chaos.

Les itérations à Toulouse

Mira et Gumowski travaillent, dans les années 1970, à Toulouse, successivement au LAAS (Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes, laboratoire propre du CNRS), à la Faculté des Sciences ("Groupe systèmes dynamiques non linéaires"), puis à l'INSA de Toulouse ("Groupes d'études des systèmes non linéaires et applications") [798] . Mira est issu d'une formation d'ingénieur, Gumowski est un physicien (en activité au CERN de 1966 à 1976 notamment) ; ils se sont connus et travaillent ensemble à partir de

[796] [GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1980].

[797] C'est le nom choisi par Mira dans [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 96.

[798] Mira a publié un texte très détaillé, une autobiographie scientifique, sur les recherches réalisées avec Gumowski : on peut le trouver dans [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 95-197. Par ailleurs, le contexte institutionnel sera précisé au chapitre 11, centré sur le CNRS.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

1958.

Quelles sont leurs motivations dans l'étude des itérations ? Elles ne sont pas exclusivement mathématiques. Le sujet des itérations leur vient d'abord des problématiques techniques, d'ingénieurs : le LAAS (anciennement le Laboratoire de Génie Electrique) est porté sur l'étude des systèmes électroniques, de l'automatisme et du contrôle. Les dynamiques de synchrotron font également appel à ce genre de systèmes itératifs [799]. L'analyse des itérations est courante à Toulouse depuis les années 1960 pour ces raisons. Aussi, n'est-il pas étonnant qu'un des colloques internationaux marquants sur le sujet ait été organisé à Toulouse par Mira et Jean Lagasse (directeur du LAAS) en 1973 [800].

L'étude du phénomène de doublement de période débute vers 1972 à Toulouse. Mais, comme le relate Mira, depuis 1968, la complexité des itérations unidimensionnelles lui est apparue progressivement, et, en 1969, un membre du laboratoire, Alain Giraud, avait mis en avant les premiers rangs d'un doublement de période, dans sa thèse de docteur-ingénieur sur les "Applications des récurrences à l'étude des systèmes de commande" [801]. Leurs réflexions sur ces comportements débutent donc bien avant 1975.

Outre les connaissances acquises par les longues études des itérations à deux dimensions, deux séries de travaux plus centrées sur les itérations unidimensionnelles ont autorisé un développement de résultats généraux pour ces itérations, leurs bifurcations et les classifications de leurs comportements. Il s'agit des résultats du mathématicien finlandais Pekka Juhana Myrberg (1892-1976), qui a reconnu le doublement de période et a cherché à le préciser, et de Alexander Sharkovsky, pour son ordination des cycles selon leur période et des méthodes d'études des systèmes itératifs. Mira est d'ailleurs entré en relation avec Sharkovsky et l'a rencontré à la conférence sur les oscillations non linéaires de Berlin, en 1975 [802].

Les "structures boîtes-emboîtées"

Ces travaux forment la base et la référence à l'identification de la **structure de l'organisation des bifurcations des itérations d'une fonction à un extremum** : c'est l'ambition plus générale du groupe, qui intègre (et dépasse) la seule question du doublement de période. La fonction quadratique-type, explorée numériquement, est : $f(x)=x^2-\lambda$. Afin de rendre compte de la structure des bifurcations, Mira et Gumowski construisent une "**structure de type boites emboîtées**" [803]. Cette structure possède une propriété essentielle, celle d'être auto-similaire [804].

[799] Chirikov, physicien travaillant sur les machines de la physique nucléaire, utilise lui aussi les itérations (dans sa synthèse de 1979, il s'agit de l'application standard : [CHIRIKOV, B., 1979]). Gumowski qui travaille au CERN est coutumier de ces questions.

[800] Il s'agit du colloque "Transformations ponctuelles et leurs applications" dont les actes sont publiés dans [MIRA, C., LAGASSE, J., 1976].

[801] [GIRAUD, A., 1969].

[802] Voir [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 151-154.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Afin de donner une idée de la complexité de la construction et surtout des différences d'approches avec Feigenbaum, Coullet et Tresser, on peut résumer brièvement le procédé employé par les deux physiciens.

Les boîtes se construisent selon les manifestations de trois types de bifurcations dans l'itération de $f(x)=x^2-\lambda$. La première est celle donnant naissance à deux points fixes, q_1 (instable) et q_2 (stable). Ceci arrive pour $\lambda=\lambda_{(1)0}=-1/4$, lorsque la parabole est tangente à la première bissectrice.

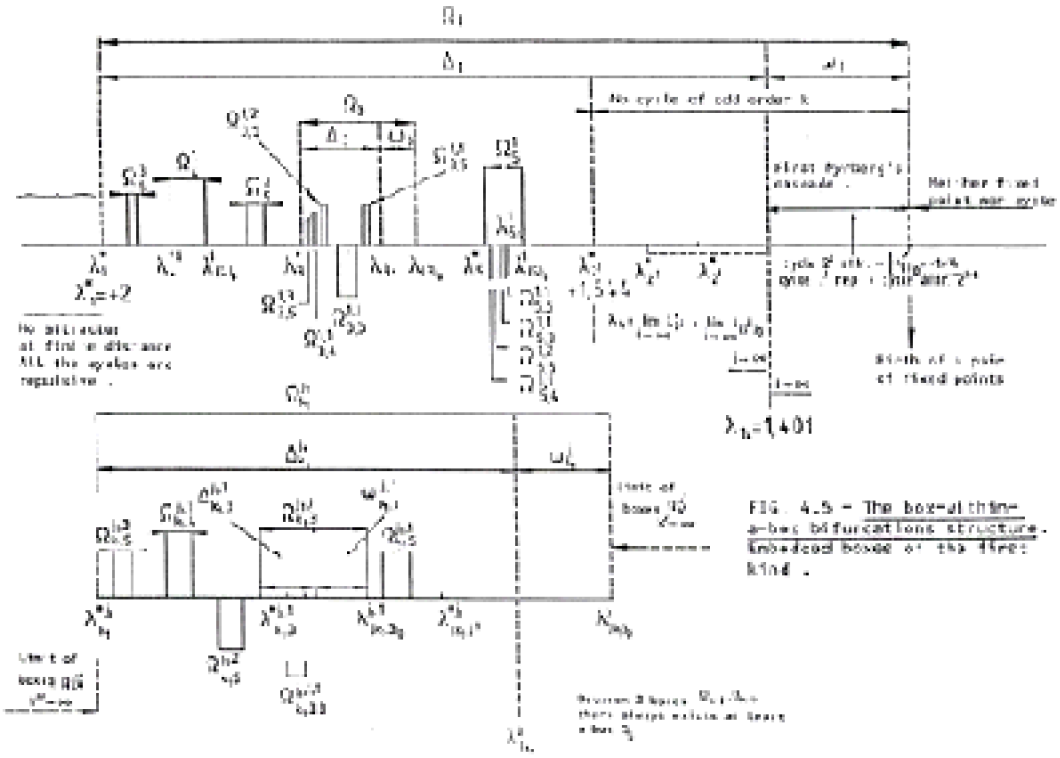
La seconde bifurcation est le doublement de période de q_2, correspondant à un λ noté $\lambda_{(1)s}$. La dernière est une bifurcation "non classique", qui correspond à la coalescence de points singuliers de natures différentes : le cycle instable q_1 et un point critique de rang deux (deux itérations de l'extremum de la parabole). Le λ correspondant est celui qui vérifie $q_1=\lambda^2-\lambda$, et $\lambda=\lambda_1^*=2$ ici.

La "boîte" est l'intervalle $\Omega_1=[\lambda_{(1)0}\,;\,\lambda_1^*]$. En reproduisant le schéma de construction pour les itérés d'ordre k de f (notées $f^{(k)}$) une succession de boîtes est obtenue, imbriquées les unes dans les autres. Ce sont des "boîtes-emboîtées". Du fait de la multiplicité des cycles de période élevée, la construction réclame des précautions et des notations assez complexes, dont nous avons seulement donné un avant-goût. Cette simple illustration révèle les facettes de la structure et les informations qui s'en dégagent :

[803] Les deux articles initiaux sont [GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1975b] et [MIRA, C., 1976a]. Dans leur ouvrage [GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1980] ils y consacrent un chapitre, p. 97-120.

[804] Dans les premiers articles le vocable " auto-similaire" n'est pas utilisé, encore moins "fractal". Selon les termes exacts, les boites construites successivement ont "les mêmes propriétés" que celles dans lesquelles elles s'emboîtent : [GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1975b], p. 46.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.



dans [GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1980], p. 112]

Le résultat des investigations de Mira et Gumowski est un cadre théorique, assez général, donnant une classification extrêmement précise de l'agencement des bifurcations, dont les bifurcations de doublement de période forment une catégorie. Il n'est pas question ici ni de renormalisation, ni d'universalité, malgré la notion d'autosimilarité introduite par construction. Les propriétés métriques des bifurcations, explicitées par Feigenbaum, ne sont pas en jeu. Pour bien dégager le sens de ces travaux il convient de les resituer dans leur contexte.

Mira et Gumowski étudient les bifurcations et leurs structures, dans la perspective de **mettre en évidence les propriétés des solutions complexes et leurs "mécanismes" de formation** [805] . Ce n'est pas uniquement un problème de transition par bifurcations successives (vers un état appelé chaos ou autre), simplement parce que le comportement "final" n'a pas à être dissocié du mécanisme qui l'engendre. Les considérations sur les "boîtes-emboîtées" ne sont qu'un extrait d'un ensemble très vaste de travaux concernant les solutions complexes et la dynamique générale des récurrences.

La rencontre avec la question du chaos apporte des éléments supplémentaires, très significatifs. A la fin de l'année 1975, une note publiée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences aborde les suggestions de May, diffusées en 1974, pointant les comportements dits "chaotiques". L'explication de Mira, au sujet d'une itération à partir du modèle *f(x,λ)=x.exp[λ(1-x/K)]* est la suivante :

[805] C'est ce qui transparaît de l'ensemble de leurs travaux, plus particulièrement d'un préliminaire à la question des boîtes-emboîtées : [GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1975a].

"Ce qui est appelé 'chaos' en biologie par certains auteurs [May] a donc pour origine, d'une part la présence de cette infinité de cycles répulsifs sur x>0, [...] d'autre part, quand # croît de zéro à l'infini, l'existence d'une structure de bifurcations de type 'boîtes emboîtées'..." [806]

Cette courte citation appelle plusieurs commentaires. Elle montre en premier lieu la remarquable expérience acquise sur les itérations et la réactivité de Mira. Ce que le groupe de Li, Yorke et May découvre tout juste, lui semble familier au point d'en préciser immédiatement les contours et l'origine. Deuxièmement, on constate que l'explication cristallise deux éléments dont on a vu l'importance : la présence d'une infinité de comportements périodiques instables, pour reformuler la première partie de la suggestion de Mira dans un autre vocabulaire, et la structure "boîtes-emboîtées", dont découle le doublement de période en particulier. Ceci traduit également le fait que ces préoccupations sont parfaitement mêlées : le chaos s'explique, en partie, par les mécanismes de bifurcation.

Quelques conclusions

Notre but étant de dégager les spécificités du travail du groupe de Toulouse, nous pouvons d'ores et déjà conclure qu'il est marqué par une culture des itérations. Il n'y a pas de comparaisons possibles avec les tâtonnements évoqués chez Feigenbaum, Coullet et Tresser. En fait, les problématiques sont assez différentes ; les résultats ne se rapportent pas aux mêmes aspects du doublement de période. Chez Mira et Gumowski, tout est intégré dans une réflexion sur la dynamique des récurrences et leurs mécanismes, alors que Feigenbaum est focalisé sur l'universalité.

Les pratiques de recherche sont, en revanche, assez proches. Dans la démarche de Mira et Gumowski, on retrouve des éléments "classiques" : du qualitatif et du quantitatif, des mathématiques des itérations et des simulations numériques, sans lesquelles rien ne serait possible, autant pour indiquer les perspectives à ouvrir que pour préciser les valeurs des bifurcations. Ainsi, dans le cas des "boîtes-emboîtées" la dynamique est décortiquée avec beaucoup de simulations numériques et avec la volonté de s'inscrire dans la continuité de Myrberg et Sharkovsky.

En tout cas, il est certain que les "structures boîtes-emboîtées" ne connaissent pas le même succès que les "cascades de Feigenbaum". Avec le groupe de Toulouse, il n'y a pas de querelle de priorité, ni même de similarité de résultats. Les raisons de la relative marginalité de ces réflexions tiennent plus vraisemblablement à des facteurs locaux [807] .

Conclusion générale sur le doublement de période dans les itérations

De manière générale les recherches sur la cascade de doublements de période ont eu

[806] ***[MIRA, C., 1976a], p. 220.***

[807] Nous verrons au chapitre 11 qu'au sein du LAAS, les recherches sur l'automatique et le contrôle dominent ces considérations théoriques ; les spéculations de Mira et Gumowski restent marginales. Avec le passage aux Sciences Pour l'Ingénieur au LAAS et plus généralement au CNRS dans les années 1970, ces recherches seront un peu délaissées et Mira préférera changer de cadre institutionnel.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

énormément de succès, au sens où un grand nombre de résultats ont été produits en très peu de temps, tout en étant fortement mis en valeur. Plusieurs raisons expliquent ce phénomène. La vulgarisation qui, de May en 1976 à Feigenbaum lui-même, distille les principales avancées, a induit une focalisation sur certains thèmes : nous avons mentionné les attracteurs étranges et l'"effet papillon" ; il faut adjoindre la "cascade de Feigenbaum" en tête de ces thèmes privilégiés. Dans les préoccupations plus proprement scientifiques, le doublement de période doit son succès à d'autres paramètres. Cette citation, de deux physiciens, résume l'état d'esprit autour de 1980 :

"Récemment il y a eu un engouement considérable avec la possibilité que des applications itérées de l'intervalle puissent fournir un modèle mathématique de certains systèmes physiques subissant une transition d'un comportement périodique à un comportement chaotique. Une raison de cet engouement est le fait qu'il existe des caractéristiques des applications qui se comportent de manière universelle à proximité de la transition et à la transition. En effet, il a été prouvé qu'il est possible de construire une analogie avec les phénomènes critiques, de produire des exposants critiques, et, dans un cas, d'obtenir une fonction d'échelle universelle." [808]

Le fait que le mécanisme soit simple, qu'il permet d'expliquer facilement la transition des comportements périodiques vers un état de chaos et qu'il ait été observé expérimentalement très tôt, donne ainsi beaucoup de poids à ces considérations. En reprenant Aubin et Dahan, il s'agit également d'une sorte de réconciliation car l'analogie entre transition de phase et instabilités au démarrage de la turbulence avait été tentée, sans succès jusque là [809] : ceci pourrait expliquer le vif succès et l'enthousiasme rencontrés par les propositions de Feigenbaum.

L'universalité est donc d'autant plus attirante. Elle est quantitative et fournit des exposants critiques pour la turbulence. En outre, le cadre théorique ne se contente pas de donner une simple phénoménologie de l'universalité mais produit une interprétation très remarquable. Enfin, l'analyse de l'universalité est le produit d'une convergence de problématiques de mathématique et de physique ; plus encore c'est un croisement au niveau conceptuel et au niveau des démarches, où l'expérimentation numérique, réalisée par des physiciens, s'associe à des théories physiques et mathématiques. L'universalité a tout pour séduire autant les mathématiciens que les physiciens.

En définitive, voilà qui explique le "mythe" Feigenbaum. Il est rapidement considéré

[808] ***"Recently there has been considerable excitement over the possibility that iterated maps of the interval might provide a mathematical model for certain physical systems that undergo a transition from periodic to chaotic behavior. One reason for this excitement is the fact that there are characteritics of the maps that behave in a universal fashion at and near the transition. In fact, it has proven possible to construct an analogy with critical phenomena, derive critical exponents, and, in one case, obtain a universal scaling function.", [NAUENBERG, M., RUDNICK, J., 1981], p. 493.***

[809] [AUBIN, D., DAHAN, A., 2002], p. 316-318. Les auteurs soulignent que Ahlers, Gollub, Swinney, Libchaber, Dubois, Bergé étaient des expérimentateurs, spécialistes des phénomènes critiques avant de se convertir à l'hydrodynamique. Kenneth Wilson, l'un des principaux instigateurs des théories de renormalisation avait déjà signalé les analogies potentielles entre les phénomènes critiques et les systèmes dynamiques. Ils avaient donc déjà fait germer plusieurs idées sur ces analogies, restées sans suite véritable, jusqu'à l'épisode Feigenbaum.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

comme l'initiateur de toute cette histoire au point d'occulter ce que d'autres ont pu faire et d'associer à son nom des découvertes dont il n'est pas responsable. Pour des multiples raisons intellectuelles, sociologiques, institutionnelles (voire publicitaires) que nous avons mises en lumière, Feigenbaum concentre et cristallise, à lui seul, ce renouveau, au prix d'une considérable simplification des faits.

5.5. Le scénario de l'intermittence

Aux côtés du scénario de Ruelle et Takens, du doublement de période universel, se loge un troisième scénario qui entre dans le champ du chaos à la fin des années 1970. Les parallèles possibles avec les situations précédentes sont assez nombreux, mais l'enjeu en terme de conception du chaos est plus limité ici. Nous nous focaliserons davantage sur la démarche mise en place par le groupe de physiciens à l'origine des premières explications de ce scénario. L'étude microsociologique du groupe a fait l'objet de la thèse de S. Franceschelli ; nous en reprendrons quelques traits essentiels pour montrer comment les mathématiques des systèmes dynamiques servent à donner un cadre théorique à des expériences numériques et physiques du groupe, mais aussi pour souligner l'importance de la dimension "physicienne" dans cette démarche.

a. Observations et interprétations

Nous avons évoqué le constat, un peu inattendu, fait lors des simulations analogiques du "second" attracteur dans le système de Lorenz, par les physiciens Y. Pomeau et J.L. Ibanez, en 1976. Pomeau revient sur cette observation dans un article de 1980 :

"Dans les études systématiques du système de Lorenz sur un ordinateur analogique, j'avais remarqué une transition […] vers la turbulence que je n'avais pas vraiment comprise à cette époque. Il est intéressant cependant de citer les observations correspondantes pour éclairer ce mécanisme. Je suivais sur un écran de TV le point de coordonnées disons x(t), z(t) où l'évolution temporelle de x et y est gouvernée par l'eq. (1) [Lorenz]. Lorsqu'un cycle limite stable était atteint le calcul (analogique) était si rapide qu'il était impossible de suivre visuellement le point sur la trajectoire. L'impression donnée était celle d'une courbe stationnaire fermée lumineuse. Dans un régime stochastique, l'impression visuelle était qu'une surface entière était couverte par le mouvement (en fait cette surface était une projection plane d'un attracteur étrange). Au contraire, autour de valeurs bien définies du paramètre de contrôle, r, une figure intermédiaire était observée : une courbe apparemment fermée était détruite par des bouffées intermittentes : durant ces bouffées, une surface entière était couverte par le point, puis une courbe fermée était reformée et ainsi de suite." [810]

Cette observation numérique s'accompagne, quelques temps après, de l'observation d'un phénomène apparemment similaire dans les cellules de convection de Rayleigh-Bénard par Libchaber et Maurer, à l'Ecole Normale Supérieure. Pomeau s'engage alors dans la recherche d'un cadre interprétatif et, en 1978, il demande à Manneville (du CEA de Saclay, où ils travaillent tout les deux) de réaliser des calculs sur machines numériques, digitales, afin de retrouver et affiner les résultats obtenus sur machine analogique, dont la précision n'est pas toujours facile à maîtriser. A partir de la confirmation numérique, le

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

processus d'analyse qui conduit à la construction du scénario de l'intermittence [811], s'engage avec la collaboration de Pomeau et Manneville.

Leur interprétation se construit de manière semi-quantitative, sur la base d'explorations numériques du système de Lorenz, et grâce à **une utilisation et une interprétation des mathématiques des systèmes dynamiques**.

Le souci de se fonder sur les systèmes dynamiques s'illustre en plusieurs points. En premier lieu il s'exprime dans l'étude de la stabilité structurelle du système de Lorenz, qui est importante puisqu'elle permet d'assurer les raisonnements topologiques développés dans le cadre des systèmes dynamiques. Avec ces physiciens, cette stabilité est caractérisée de manière heuristique : le fait de trouver des comportements similaires pour des évaluations numériques à différentes valeurs des paramètres est un critère, opératoire, suffisant [812].

Dans la même veine, une première **explication qualitative** du processus observé est construite sur la base des variétés stables du cycle limite et en considérant que la bifurcation déstabilise l'une d'elles. Le mouvement se compose d'un parcours à proximité du cycle "limite" (qui n'en est plus vraiment un puisque le cycle est légèrement instable). La trajectoire s'écarte donc progressivement de ce "fantôme", suffisamment lentement pour laisser l'impression qu'il s'agit encore d'un cycle limite. Lorsque l'éloignement est assez important il apparaît des bouffées turbulentes, résultat de l'attraction vers la variété instable (qui domine la faible instabilité de cette variété) [813].

La construction d'une application de premier retour permet de traduire de manière semi-quantitative ce qui se passe. Le choix classique pour étudier le système de Lorenz n'est pas pertinent dans la perspective de leur démonstration ; ils choisissent et construisent la section *x=0* (qui est donc bidimensionnelle). Puis ils établissent, avec les données numériques, une application unidimensionnelle en y, suffisamment

[810] ***"In systematic studies of the Lorenz system on an analog computer, I had noticed a "bursting" transition to turbulence which I did not properly understood (sic.) at that time. It is relevant however to quote the corresponding observations to make clear this mechanism. I followed on a T.V. screen the point of coordinates, say x(t), z(t) where the time evolution of x and y is governed by eq. (1) [Lorenz]. When a stable limit cycle was reached the (analog) computation was so fast that it was impossible to follow visually the point on the trajectory. The impression was the one of a steady luminous closed curve. In a stochastic regime, the visual impression was that a full surface was covered by the motion (actually this surface was a plane projection of a strange attractor). On the contrary, around some well definite values of the control parameter, r, an intermediate picture was observed: an apparently closed curve was destroyed by intermittent bursts : during these bursts, a full surface was covered by the representation point, then a closed curve was recovered and so on.", [POMEAU, Y., 1980], p. 155-156. Cité d'après [FRANCESCHELLI, S., 2001], p. 138.***

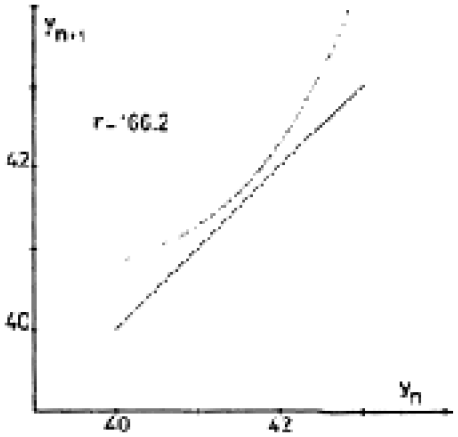
[811] Le terme "intermittence" est choisi par ces deux physiciens et renvoie à un phénomène d'alternance de turbulence et de phases laminaires, connu par ailleurs en hydrodynamique (expliqué dans [TRITTON, D.J., 1977], p. 265. Cité dans [POMEAU, Y., MANNEVILLE, P., 1979], p. 2).

[812] [FRANCESCHELLI, S., 2001], p. 141-142. La notion de stabilité structurelle est mise en perspective historique dans le chapitre 6, p. 413.

[813] Ibid., p. 143-144.

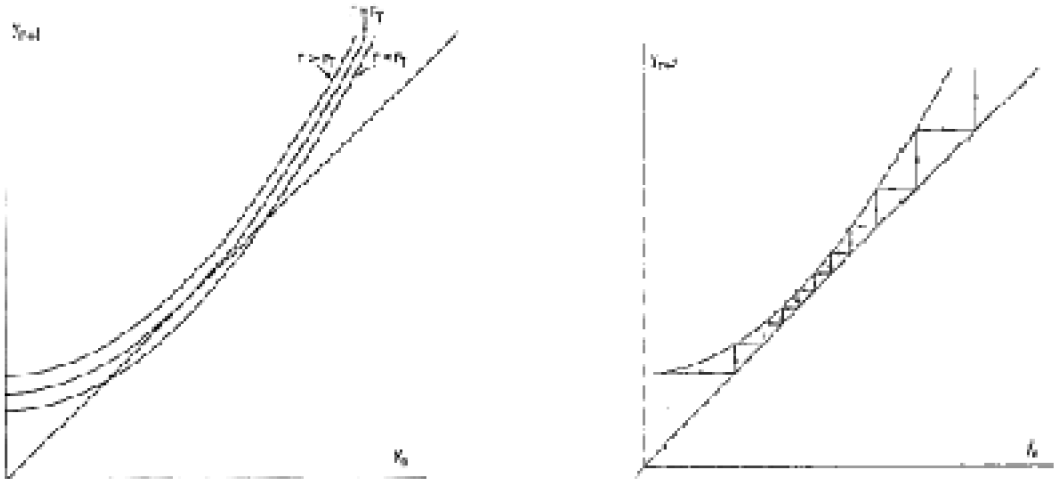
Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

représentative :



[POMEAU, Y., MANNEVILLE, P., 1980], p. 191

Dans l'interprétation de Pomeau et Manneville, la transition par la voie intermittente correspond au changement de configuration relative de la parabole et de la première bissectrice (voir la figure ci-dessous). Pour $r < r_T$, la parabole coupe la bissectrice en deux points (un stable, l'autre instable) ; à r_T, valeur du paramètre à la transition, les deux points fusionnent (la parabole est tangente à la bissectrice et le point de contact correspond à un cycle limite), puis au-delà, $r > r_T$, il se forme un canal entre la parabole et la droite. Le canal correspond a la phase laminaire (à proximité du cycle limite lorsque $r=r_T$) ; lorsque le point s'écarte du goulot, le comportement devient temporairement apériodique, turbulent, puis lors d'un nouveau passage ultérieur, à proximité du goulot, une nouvelle phase laminaire apparaît.



[POMEAU, Y., MANNEVILLE, P., 1980], p. 191-2

Tels sont les premiers pas théoriques de l'interprétation, qui montre, selon Franceschelli, que "l'invention du scénario d'intermittence a été réalisé petit à petit, à partir de l'exigence de fournir une explication qualitative pour un phénomène observé, c'est-à-dire à partir d'une démarche très phénoménologique et assez peu axiomatique" [814]

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

. Le cadre théorique est étendu par la suite, pour donner la distinction en trois types d'intermittence I, II, III [815] . On peut ajouter que sur le modèle de Lorenz, Pomeau et Manneville estiment [816] que la durée des phases laminaires suit la loi de puissance $t \sim (r-r_T)^{1/2}$, au voisinage de la transition r_T.

b. Vers l'expérience

Le cadre théorique convient aux expériences numériques, souples et bien maîtrisées, réalisées sur le modèle de Lorenz et pour lequel ils montrent comment utiliser et adapter la technologie très abstraite des mathématiques des systèmes dynamiques. Lorsqu'il s'agit de véritables expériences de Mécanique des fluides, la démarche change. Le versant expérimental de cette transition vers la turbulence est analysé grâce à l'interaction de ces deux "théoriciens" avec deux physiciens, expérimentateurs, ayant une bonne connaissance du domaine de la Mécanique des fluides : Monique Dubois et Pierre Bergé. Leur article commun de 1980 consacre l'approche théorique précédente en terme d'application de Poincaré en montrant comment, expérimentalement, ils sont parvenus à construire une telle application et comment le comportement intermittent se produit dans le cas d'une cellule de convection de Rayleigh-Bénard.

Là encore, le cheminement est intéressant, puisque le modèle de Lorenz est une approximation de la convection et les calculs de Pomeau et Manneville sont, par là même, limités dans leurs apports à l'analyse de la cellule de convection expérimentale. Les physiciens sont conscients des limites des modèles :

"Une interprétation quantitative détaillée est clairement hors de portée, même du point de vue simplifié des systèmes dynamiques avec peu de degrés de liberté dont on pense qu'ils contiennent l'essentiel des mécanismes de transition vers la turbulence en géométrie confinée. En effet, les simplifications drastiques concernant la géométrie, les conditions aux limites, l'ordre des troncatures, etc. entravent la construction d'un système différentiel réaliste pertinent par rapport aux expériences rapportées plus haut. En tout cas, ce système dynamique inconnu devrait partager des caractéristiques génériques avec des modèles déjà bien étudiés et il est apparu plus prometteur i) d'obtenir autant d'information que possible de ces modèles et plus spécifiquement du modèle de Lorenz et ii) de construire des modèles abstraits montrant ces caractéristiques génériques les plus susceptibles d'expliquer les observations expérimentales." [817]

Autrement dit, les données de l'expérience montrent quelques différences par rapport au modèle de Lorenz, dans la convergence vers le cycle limite "fantôme". Pomeau et Manneville cherchent alors à construire des modèles théoriques permettant d'appréhender ces résultats. La **généricité** est le concept clé dans leurs choix ; elle est explicitée dans la citation précédente, au sens des mathématiques des systèmes

[814] Ibid., p. 147.

[815] Nous renvoyons à leur [POMEAU, Y., MANNEVILLE, P., 1980] et surtout au manuel de synthèse, référence en la matière, L'ordre dans le chaos : vers une approche déterministe de la turbulence [BERGE, P., POMEAU, Y., VIDAL, C., 1988].

[816] [POMEAU, Y., MANNEVILLE, P., 1979], p. 2.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

dynamiques. Il s'agit de proposer des modèles génériques rendant compte des observations expérimentales et reproduisant les comportements génériques imposés par l'expérience. En retour, les modèles orientent les observations vers des éléments susceptibles d'être détectés. Il y a une interaction permanente entre ces quatre physiciens pour confronter (et faire progresser) expériences, modèles et théories [818] .

La lecture microsociologique de la construction du scénario d'intermittence proposée par Franceschelli, montre toute l'importance de la dimension "physicienne" du travail réalisé dans cette phase d'élaboration. Ils ne sont pas des simples utilisateurs des mathématiques et ne se contentent pas d'"appliquer" des recettes. Ils interprètent et adaptent des données mathématiques dans le cadre de leur problème de physique. Cette attitude se retrouve dans la théorisation proposée, les expériences mises en place et encore plus franchement dans la simulation numérique. Pomeau et Manneville jouent avec l'ordinateur autant qu'avec les mathématiques et considèrent la simulation comme une "expérience". Le calcul numérique est d'une heuristique très forte pour le développement du scénario, tout comme l'expérience est un guide dans la collaboration des quatre physiciens. Au regard de tout ce que nous avons démontré, nous voyons à quel point cette situation est à la fois très circonstanciée et très répandue entre 1975 et 1982 ; il y a de l'originalité mais rien d'extraordinaire dans cette pratique de physiciens.

c. Des prolongements sur l'intermittence

L'interprétation de Pomeau et Manneville ouvre la voie à deux types de travaux : les expériences et la théorie. L'utilité de la démarche et l'utilisation des systèmes dynamiques suggérées par les premières expériences, sont prolongées dans d'autres réalisations expérimentales. Le cas de la cellule de Rayleigh-Bénard est repris en 1983, de manière à préciser, quantitativement, les données expérimentales [819] . Le thème de la réaction chimique de Belousov-Zhabotinsky [820] est également repris pour étude de l'intermittence.

[817] ***"A detailed quantitative interpretation is clearly out of reach, even from the simplified point of view of dynamical systems with few degrees of freedom which are believed to contain most of the mechanics of the transition to turbulence in confined geometry. Indeed the drastic simplifications concerning the geometry, the boundary conditions, the order of truncation, etc…impede the construction of a realistic differential system relevant to the experiment reported above. Anyway, this unknown realistic dynamical system should share some generic features with already well stutied models and it has seemed more promising i) to gain as much information as possible from these models and more especially from the Lorenz system and ii) to build abstract models displaying these generic features most susceptible of explaining the experimental observations.", [BERGE, P., DUBOIS, M., MANNEVILLE, P., POMEAU, Y., 1980b], p. 342-3.***

[818] Voir [FRANCESCHELLI, S., 2001], p. 149-155.

[819] [DUBOIS, M., RUBIO, M.A., BERGE, P., 1983]. Ce travail fournit des résultats quantitatifs, sur la distribution des durées des phases laminaires par exemple, montrant un très bon accord avec ce qui avait été imaginé théoriquement. Ils montrent, dans le cas de Rayleigh-Bénard, un cas d'intermittence de type III. Voir [FRANCESCHELLI, S., 2001], p. 156-7 pour une explication du contenu de l'article.

[820] Une intermittence de type 1 est détectée dans la réaction. On notera la présence de Pomeau pour cadrer ce résultat : [POMEAU, Y., ROUX, J.C., ROSSI, A., BACHELART, S., VIDAL, C., 1981].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Sur le plan théorique ensuite, deux tendances sont perceptibles. Un pan des études développées correspond au traitement direct de ces applications unidimensionnelles, en tant qu'applications, alors que Pomeau et Manneville recourraient aux applications unidimensionnelles dans l'optique d'illustrer le comportement dynamique des équations différentielles. Les calculs numériques et la formalisation se combinent pour étudier l'application logistique, dont les simulations mettent en lumière la propension au comportement intermittent. Elle relaie le modèle de Lorenz utilisé par Pomeau et Manneville [821] .

En parallèle, toujours sur la base de ces études, le formalisme tend à rapprocher les scénarios de l'intermittence de la cascade de doublements de période. Ainsi, une formulation en terme de groupe de renormalisation est construite à la fin de 1981, permettant de rendre compte de comportements universels pour l'intermittence.

Pour être plus précis, il est montré, mathématiquement, que l'équation du groupe de renormalisation donnée par Feigenbaum peut être utilisée pour les intermittences, en modifiant uniquement les conditions limites [822] . Il y a un même type d'universalité et des invariances d'échelles déduites des calculs de renormalisation, confirmant et prolongeant les intuitions de Pomeau et Manneville. La longueur *t* des phases laminaires varie en fonction du paramètre *r* à l'approche du point critique r_T comme [823] :

$$t \approx (r - r_T)^{-(1-\frac{1}{z})}$$

Autrement dit, l'approche par le groupe de renormalisation unifie formellement les deux types de scénario. Sur le plan théorique, les deux scénarios sont donc cousins, mais, d'un point de vue pratique, que ce soit pour le numérique ou les expériences de laboratoire, ce sont les outils mathématiques adaptés par Pomeau et Manneville qui sont effectivement opératoires.

5.6. Conclusion : 1981, la synthèse de J.P. Eckmann

a. Premières conclusions

De nos analyses il ressort donc que plusieurs scénarios de transitions ont été proposés dans la période 1975-82. Ils émergent dans des contextes différents ; les démarches de constructions et les concepts mis en jeu varient d'une situation à l'autre. Ils sont tous des

821 Par exemple [HIRSCH, J.E., HUBERMAN, B.A., SCALAPINO, D.J., 1982].

822 [HIRSCH, J.E., NAUENBERG, M., SCALAPINO, D.J., 1982], p. 392.

823 *z* est la "classe d'universalité", l'ordre du maximum de l'application unidimensionnelle. [HIRSCH, J.E., NAUENBERG, M., SCALAPINO, D.J., 1982] fournissent les lois d'échelles dans le cas le plus standard (*z=2*, comme dans le cas de l'application logistique) ; ils expliquent le constat de [POMEAU, Y., MANNEVILLE, P., 1979], p. 2. Pour les classes plus générales, le résultat se trouve dans [HU, B., RUDNICK, J., 1982], suivant de quelques mois à peine le précédent.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

combinaisons de mathématiques, de simulations numériques et de physique. Si le résultat peut s'exprimer en termes mathématiques il ne s'agit pas d'"applications" des mathématiques. Au contraire, les mathématiques sont entraînées, voire dépassées, par une vision et une pratique de physicien. Sur ces points, les cas de Coullet et Tresser, Feigenbaum, Pomeau et Manneville ne sont pas isolés et nous renvoient aux travaux de Rössler et Shaw notamment.

Nous avons souligné le rapport entre les conceptions de chaos et les questions de transition vers le chaos, très clair chez Ruelle et Takens, pour Coullet et Tresser, perceptible chez Mira et Gumowski. Dans le cas de Feigenbaum la situation est finalement plus simple. D'une part, il est plus préoccupé par l'universalité des transitions par doublement de période, que par les notions de chaos ; d'autre part, une définition faible peut assurer, à elle seule, ses besoins théoriques. Ainsi, les considérations de May (Li et Yorke) de 1976, sur lesquelles il s'appuie, sont suffisantes, contrairement aux constructions conceptuelles de Coullet et Tresser. Enfin, chez Pomeau et Manneville, dans leur construction du scénario d'intermittence, ce ne sont pas tant les notions de chaos que la panoplie des systèmes dynamiques qui s'exprime.

Il nous reste à expliquer la réduction-sélection à l'œuvre vers 1981 dans cet ensemble de propositions. Un article a bousculé la convergence vers le triptyque Ruelle-Takens / doublement de période / intermittence : celui de Jean-Pierre Eckmann, "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems".

b. "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems", 1981

L'historiographie présente deux lignes-forces du texte. Pour Aubin et Dahan, il serait une sorte de bilan-synthèse des recherches sur les scénarios, un aboutissement des rencontres et du processus de convergence-reconfiguration des disciplines et concepts, pour reprendre leurs termes [824]. En même temps, il confirme le "point de vue système dynamique" [825] : Eckmann exprime sa synthèse dans le langage des systèmes dynamiques, confirmant qu'ils sont de bons outils pour modéliser les phénomènes en question.

Effectivement, les trois scénarios présentés sont explicités sous une forme mathématique, dans le cadre des systèmes dynamiques. On peut facilement comprendre ce choix par rapport aux développements du chaos et de la transition vers le chaos, qui recourent d'une manière ou d'une autre aux mathématiques des systèmes dynamiques. Cependant, la réinterprétation en termes mathématiques ne se limite pas à une question de langage et n'est pas neutre.

Pour cerner ce point, il faut commencer par analyser les sous-entendus du terme "turbulence" (dont on notera qu'il est pris pour synonyme de chaos, comme chez Ruelle).

"Je décris ici des exemples de comportements relativement simples, mais néanmoins apériodiques, et les mets en perspective. Dans cette optique, les

[824] [AUBIN, D., DAHAN, A., 2002], p. 321, pour la discussion de l'article de Eckmann et plus généralement, le paragraphe 4.4.

[825] Terme emprunté à M. Hirsch, cf. note 316 (p. 149).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

systèmes montrant ce comportement sont encore suffisamment irréguliers pour être appelés turbulents, et en fait certains de leurs aspects sont trouvés dans la convection (irrégulière) des fluides. Toutes les formes de périodicité (même les très faibles) sont intéressantes, mais les mots apériodique, erratique, chaotique, et (faiblement) turbulent, seront utilisés de manière interchangeable pour n'importe laquelle de ces formes." [826] "la turbulence décrite dans les scénarios trouvés jusqu'à présent est une simple forme d'apériodicité temporelle, dont l'apparence est bien contrôlée." [827]

Ainsi Eckmann explique qu'un système peut passer d'un comportement bien connu, simple, à des comportements "erratiques", "au sens où cette évolution temporelle peut être assez imprédictible sur des grandes échelles de temps, ou peut montrer un spectre de bande large, ou peut ne plus être périodique du tout" [828] . Puis vient la caractérisation de la turbulence : la sensibilité aux conditions initiales et les attracteurs étranges [829] .

Selon Eckmann, le projet général d'étude des systèmes dissipatifs est de décrire les comportements des systèmes dynamiques en produisant une classification de leurs attracteurs [830] . Comme il existe peu de critères pour cela, l'analyse est conduite à propos de l'évolution des attracteurs, par bifurcation : "cette procédure a été recommandée dans l'article de Ruelle et Takens (1971)" [831] .

Il s'agit donc d'un cadre de mathématiques des systèmes dynamiques, mais aussi, de manière latente, du cadre conceptuel de Ruelle pour la turbulence, où les notions de sensibilité aux conditions initiales et attracteurs étranges sont en première ligne. Ses choix se retrouvent dans la présentation des trois scénarios et ont leurs conséquences.

Le scénario de Ruelle-Takens-Newhouse, extension du plus ancien des scénarios proposés, est présenté le premier. En reprenant la formulation simplifiée [832] : si un système subit trois bifurcations de Hopf successives, à partir d'une solutions stationnaire,

[826] ***"I describe here examples of relatively simple, but nevertheless aperiodic behavior, and put them in perspective. In this view, systems exhibiting this behaviour are still sufficiently irregular to be called turbulent, and in fact some of their aspects are found in (irregular) convection of fluids. All forms of aperiodicity (even very weak ones) are of interest, but the words aperiodic, erratic, chaotic, and (weakly) turbulent will be used interchangeably for any of these forms.", [ECKMANN, J.P., 1981], p. 94.***

[827] ***"[…] the turbulence described in the scenarios which have been found so far is a simple form of temporal aperiodicity, whose appearance is well under control.", [ECKMANN, J.P., 1981], p. 97.***

[828] "[…] in the sense that its time evolution may be quite unpredictable on large time scales, or it may show broad-band spectrum or may not be periodic any more. ", [ECKMANN, J.P., 1981], p. 94.

[829] Il précise que les attracteurs sont "étranges" lorsqu'ils manifestent une sensibilité aux conditions initiales ([ECKMANN, J.P., 1981], p. 96).

[830] "[…] this aim is clearly felt throughout the literature on dynamical systems", ibid., p. 96.

[831] "This procedure has been advocated in Ruelle and Takens (1971)", [ECKMANN, J.P., 1981], p. 96 (note 6).

[832] [ECKMANN, J.P., 1981], p. 99.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

lorsqu'un paramètre est varié, alors il y a toutes les chances pour que le système possède un attracteur étrange, avec sensibilité aux conditions initiales après la troisième bifurcation. Naturellement, attracteur étrange et sensibilité aux conditions initiales sont au coeur du scénario, conformément à l'inspiration initiale de Ruelle et Takens.

Le second schéma est celui de Feigenbaum. Loin des analogies, de la renormalisation et des idées numériques-empiriques, le scénario est étendu et refondu dans le moule des systèmes dynamiques. Le travail d'expression sous forme de bifurcations de champ de vecteur est le résultat de travaux personnels de Eckmann et Pierre Collet [833] . Par ailleurs, si la renormalisation est absente de l'exposé, elle est sous-jacente aux démonstrations des propositions avancées : on rappelle que Eckmann a participé à la démonstration effective de la convergence du procédé de renormalisation imaginé par Feigenbaum [834] .

Ajoutons qu'ici, la turbulence finale s'inscrit en négatif par rapport à la ligne proposée au début : il y a un "attracteur apériodique (une orbite périodique stable de 'periode 2^{∞}'). L'action sur l'attracteur est ergodique, mais non mélangeante (en particulier, il n'y a pas de dépendance sensible des conditions initiales)" [835] .

Enfin, le troisième et dernier scénario est celui de l'intermittence. Il est le moins satisfaisant "mathématiquement" : "il n'est pas fait mention du moment où le regime "turbulent" est atteint ou quelle est la nature exacte de cette turbulence" [836] . Cette fois la présentation est limitée aux familles d'itérations à un paramètre, dans un cas particulier. En outre, la transcription en langage des systèmes dynamiques est réalisée, mais, malgré la longue introduction, la turbulence et le scénario ne renvoient ni aux attracteurs étranges, ni à la sensibilité aux conditions initiales ; c'est un signe de la faible relation du scénario à la question du chaos.

c. Dans la perspective de Ruelle

Le texte de Eckmann est une très "belle" synthèse, écrite dans le langage des mathématiques des systèmes dynamiques. Cette fusion dans un cadre unique donne une grande portée à la présentation et facilite la compréhension par le plus grand nombre, à condition d'être aguerri aux systèmes dynamiques. C'est ce qui en fait une synthèse majeure.

En revanche, et c'est un défaut de toute synthèse, les nuances apparues dans les processus de conception des scénarios ont été laminées. La transformation épistémologique, elle, est complète. Le rapport des mathématiques et de la physique, si

[833] Notamment dans [COLLET, P., ECKMANN, J.P., 1980].

[834] Cf. p. 327. La démonstration correspond à l'article : [COLLET, P., ECKMANN, J-P, LANFORD III, O.E., 1980].

[835] "[…] aperiodic attractor (a stable periodic orbit of 'period 2^{∞}'). The action on the attractor is ergodic, but not mixing (in particular, there is no sensitive dependence on initial condition)", [ECKMANN, J.P., 1981], p. 100.

[836] "there is no mention as to when the "turbulent" regime is reached or what the exact nature of this turbulence is", [ECKMANN, J.P., 1981], p. 101.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

important dans le processus de développement, est gommé au profit d'une épistémologie plus classique : les mathématiques forment le corps théorique, auquel l'expérience (numérique ou physique) est subordonnée. Eckmann choisit clairement de distinguer la théorie mathématique, de son "interprétation" et des expériences. Le texte est ancré dans une dichotomie théorie / application de la théorie [837] ; les résultats numériques ne sont pas singularisés, mais intégrés dans la présentation théorique.

Ce noeud épistémologique est doublé d'une interprétation dans la perspective développée par Ruelle au sujet de la turbulence (et du chaos) : tout le préliminaire fixe ce cadre avant de détailler les "scénarios". Cela nous montre, au passage, que la question de la transition vers le chaos est indissociable d'une conception du chaos. Le mouvement de constitution de cette perspective dominante trouve donc ici un relais important. Est-ce étonnant ? En rien, puisque Eckmann travaille dans le même environnement que Ruelle, dont il est un collaborateur ; il a d'ailleurs effectué des séjours à l'IHES, où Ruelle travaille depuis les années 1960.

Enfin, si Eckmann participe, consciemment ou non, à ce mouvement, on peut s'interroger sur les critères présidant au choix de ces trois scénarios. Il n'y a aucune raison, *a priori*, que l'accord avec la conceptualisation en question suffise à retenir un scénario, sauf le premier naturellement : les deux autres, en effet, malgré l'interprétation suggérée, cadrent assez mal avec la turbulence selon Ruelle. Ce sont plutôt leur "beauté conceptuelle" et, peut-être plus encore, le fait que des expériences soient venues s'associer à ces schémas théoriques qui constituent les arguments essentiels en leur faveur. On comprend donc la sélection, qui d'ailleurs laisse la porte ouverte à d'autres propositions. Le tout provoque une concentration de l'attention sur les trois scénarios, qu'Eckmann l'ait voulu ou non. Ainsi, il participe et profite du double mouvement autour de Ruelle et Feigenbaum.

Conclusion 1975-1982

a. Le chaos et la théorie du chaos en 1982

Plusieurs concepts de chaos

Au fil de notre exposé à multiples facettes, nous avons montré le processus de construction et de convergence des conceptions de chaos de 1975 à 1982. Le mouvement "débute" en 1975, mais nous avons vu qu'il a surtout des racines très profondes et qu'il s'appuie sur nombre de disciplines, concepts, problématiques et cultures plus locales. Son histoire est très complexe et son origine paraît insaisissable.

L'émergence de concepts de chaos est marquée par les travaux et l'impulsion d'un scientifique, David Ruelle. Architecte de la notion d'attracteur étrange, au destin marqué par le succès, d'abord sur le plan théorique, puis expérimental, Ruelle a également porté

[837] Eckmann insiste d'ailleurs sur le fait qu'il n'y a pas de "domaine d'applicabilité" fournie avec les scénarios ([ECKMANN, J.P., 1981], p. 97).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'attention sur la question de la sensibilité aux conditions initiales, au point de faire de ces deux éléments le squelette conceptuel d'un certain chaos. Par ailleurs, nous avons vu l'importance des questions relatives à l'ergodicité et à la Mécanique statistique dans ces orientations.

Cependant, le bouillonnement de la fin des années 1970 ne saurait se réduire à cette perspective. Des alternatives, des nuances multiples se sont présentées dans ces quelques années. Nous avons singularisé Rössler et Shaw, qui, s'appuyant sur la notion d'attracteurs étranges, ont proposé une vision plus géométrico-topologique pour le premier, un point de vue physique et informationnel pour le second, comme alternative à la problématique statistique, ergodique choisie par Ruelle. Nous avons alors montré le mouvement de cristallisation sur les propositions de Ruelle, se prolongeant dans l'exercice de calculs des dimensions d'attracteur étrange et d'exposants de Lyapounov. Attracteurs étranges et sensibilité aux conditions initiales sont ainsi ancrés toujours plus solidement dans les études du chaos.

Cette diversité existe aussi à propos des scénarios de transition vers le chaos, même si là encore, les choix privilégient trois d'entre eux, sélection dont nous avons vu les affinités avec l'"école Ruelle".

En 1982, finalement, un cadre général pour le chaos est avalisé par une majorité de scientifiques participant au champ de recherche du chaos. Il nous paraît délicat de prétendre qu'il se constitue ainsi un paradigme, car il existe encore des alternatives, des nuances, aussi bien dans les concepts que dans les méthodes. Néanmoins, une théorie du chaos, regroupant les outils essentiels pour son analyse, est constituée. Nous avons souligné que l'utilisation de tel ou tel outil sous-entend une certaine notion de chaos. Il est donc compréhensible qu'il existe plusieurs acceptions de la théorie du chaos. Pour rester schématique, nous dirons que ce sont des assemblages d'un certain nombre d'**instruments pour étudier la dynamique :** les méthodes de mathématiques des systèmes dynamiques, de topologie, de statistique, de théorie ergodique, d'une part ; cela peut, d'autre part, inclure les systèmes-modèles, la pratique des simulations numériques, et prendre en compte des suggestions de Rössler et Shaw.

Cependant, les outils ont tendance à s'autonomiser et à se dégager d'une conception donnée de chaos ; les proximités des conceptions entre elles, leurs racines communes et l'importance des mathématiques des systèmes dynamiques ajoutent au fait qu'une méthode issue d'une certaine conception puisse être reprise dans une autre. L'utilisation généralisée des algorithmes automatisés de Grassberger et Procaccia en sont la preuve. C'est pourquoi la théorie du chaos est un assemblage hétéroclite, sans frontière définie. Le terme de "théorie" employé pour le désigner n'est pas tout à fait approprié.

En définitive, plus que le terme "théorie du chaos" c'est l'expression "science du chaos" ou, encore mieux, "science de la dynamique" qui caractérise les conceptualisations et les instruments construits et dont l'évolution est si rapide après 1975.

La fin du commencement

Le processus d'émergence du chaos s'accompagne de l'idée de transversalité et de

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

rupture. Les phénomènes dits chaotiques se rencontrent dans divers domaines de la physique, la chimie, la biologie et ne semblent pas connaître de limites disciplinaires pas plus que la distinction dissipatif / conservatif chère aux physiciens. La rupture avec une série de résultats "classiques" est nette et l'idée de nouveauté est dans les esprits. La notion de "fin du commencement" a donc pleinement son sens. On peut tout de même moduler la position de cette borne : avec du recul, en considérant les procédés de reconstruction des attracteurs étranges, d'une part, et l'article d'Eckmann en tant qu'aboutissement des réflexions sur les scénarios, d'autre part, l'année 1981 devrait être retenue plutôt que 1982 comme une limite à ce commencement. Mais la conscience de ce terme n'est acquise qu'en 1982.

La perspective de Ruelle l'emporte

Les cheminements conceptuels sont d'une intensité impressionnante et concentrés en un épisode assez bref. Le foisonnement d'idées étonne, mais le plus surprenant est qu'un consensus soit trouvé aussi promptement. Le fort accent mis sur le champ des mathématiques des systèmes dynamiques joue ici un rôle important et a une double signification. Cela reflète bien naturellement la place qu'il occupe dans les conceptions du chaos. Mais il faut rappeler qu'il est également le plus ancien et le champ de recherches le plus investi dans la problématique du chaos (Ruelle en est le meilleur exemple). Il est aussi le mieux structuré sociologiquement. Sa mainmise sur les études du chaos est donc toute naturelle.

Le choix d'en venir aux attracteurs étranges, à la sensibilité aux conditions initiales, aux dimensions, exposants et entropie a de multiples explications, toutes n'étant pas du ressort purement intellectuel. Il s'agit d'un attrait pour le quantitatif, symbolisé par les indicateurs développés dans le cadre de la théorie de la dimension, des fractales et de la théorie ergodique des systèmes dynamiques. On pourrait être plus radical dans cette interprétation. Dans les interrogations sur le chaos, la "simplicité" du quantitatif contraste avec la "complexité" de la mise en œuvre d'un point de vue qualitatif. Ainsi, l'utilisation des exposants de Lyapounov, ou des dimensions, se dispense de faire appel à des éléments sophistiqués.

L'attirance pour le quantitatif, après 1980 surtout, le réseau conceptuel très fourni au niveau des mathématiques des systèmes dynamiques, participent de la tendance à privilégier l'optique de Ruelle, mais ne suffisent pas à l'expliquer. Des facteurs sociologiques entrent en jeu. En reprenant le concept du sociologue Pierre Bourdieu, Ruelle bénéficie d'un formidable capital symbolique, dont la pierre de touche est son article de 1971. Ce capital s'est construit en plusieurs étapes. Il est d'abord reconnu pour avoir relancé la question de la transition vers la turbulence, puis, lorsque les notions d'attracteur étrange et de sensibilité aux conditions initiales occupent le devant de la scène, il est intronisé comme fondateur de ces recherches. Ruelle et l'article quasiment légendaire de 1971 deviennent des références majeures. Par ailleurs, Ruelle profite d'un contexte local, celui de l'IHES, qui lui est extrêmement favorable. L'histoire sur le plus long terme éclairera toute l'importance de l'IHES.

Pour autant, il ne faudrait pas considérer Ruelle comme un démiurge décidant du sort

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

du champ du chaos. Nous avons vu qu'il n'a pas d'emprise sur les "dérives" du quantitatif et n'interdit pas les développements alternatifs. Il n'y a pas de stratégie de pouvoir (du moins pas explicitement) de la part de Ruelle. L'agglomération progressive autour de la matrice conceptuelle, dominante, se "laisse faire", lentement mais sûrement, sans qu'il soit nécessaire de forcer les choses ; l'inertie du champ des systèmes dynamiques est telle que, sans contrepoids efficace, rien n'arrête la machine. Et finalement, c'est le projet de Ruelle qui aboutit.

Les pratiques

Au niveau des pratiques scientifiques, la période 1975-82 est aussi fournie que les diverses approches du chaos. Pour l'essentiel, trois démarches ont fortement marqué l'exercice de conceptualisation et d'analyse du chaos. Le point de vue qualitatif, sous forme mathématique, a fait montre de sa pertinence dans des situations qui se prêtent difficilement à des estimations purement quantitatives. Le qualitatif est important dans le mouvement de conceptualisation, il reprend des notions de mathématiques qualitatives, mais il peut être aussi opératoire. C'est très net sur le plan des simulations numériques, moins évident au niveau expérimental. Les indicateurs quantitatifs l'emportent, mais les tentatives sur la réaction de Belousov-Zhabotinsky inspirées par Rössler montre que le quantitatif n'a pas nécessairement l'apanage de l'analyse empirique.

Deuxièmement, l'analogie a été un moteur des conceptions. C'est par ce biais que la chimie, la physique, la biologie ont pénétré le mouvement de conceptualisation des chaos, qui ne se limite pas au développement de notions mathématiques. Les analogies tentées ont fécondé des notions mathématiques, en même temps qu'elles les ont faites fructifier.

Enfin, autant sur le plan des pratiques que des mécanismes intellectuels, les mathématiques et l'ordinateur ont été les deux instruments déterminants.

b. Mathématiques et ordinateur

Importance des mathématiques

L'abstraction en terme de systèmes dynamiques mathématiques constitue l'ossature et le cadre théorique, mathématique de ces recherches. La théorie des systèmes dynamiques, la théorie ergodique des systèmes dynamiques trouvent tout naturellement leur place dans les réflexions sur le chaos à ce moment là. Mais, au regard des interventions et des conceptualisations diverses du chaos, il apparaît que si beaucoup de résultats sont, in fine, exprimés dans ce langage, il ne faut pas atténuer la pluralité des démarches : elles ne s'appuient pas exclusivement sur les mathématiques, ne font pas montre d'une "rigueur" absolue, n'hésitent pas à recourir aux expériences numériques et, si elles s'insèrent parfois dans un cadre hypothético-déductif, elles sont guidées par beaucoup d'intuitions, d'analogies, de conjectures issues de divers horizons mathématiques, numériques, physiques, chimiques, etc. Les mathématiques atteignent parfois leurs limites, relayées, sans être remplacées, par l'ordinateur. On peut même se demander si ce qui s'est développé entre 1975 et 1980 aurait pu avoir lieu si une rigueur s'était

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

imposée dans le cheminement mathématique.

Le rôle de l'ordinateur

Nous sommes d'avis que pratiquement rien ne se serait déroulé de cette manière sans un aspect plus "expérimental" que constitue le calcul à l'ordinateur. A travers les multiples exemples donnés jusqu'à présent, cette dimension est importante pour, au moins, deux raisons :

• Les notions de dimensions et les exposants de Lyapounov sont calculables par une machine, uniquement par une machine, et sont donc directement utilisables. Ils étaient des quantités servant un raisonnement mathématique, de ce fait ils se sont transformés en outil pour quantifier le chaos. En retour, il semble que l'intérêt pour les mathématiques et la maîtrise théorique de ces indices se soient accrus. Des conjectures sont lancées et les moyens mis en œuvre pour les tester et, même éventuellement les infirmer, sont des expériences numériques.

• Plus fondamentalement, grâce à des dispositifs graphiques, l'ordinateur produit des images illustrant les phénomènes "chaotiques" préalablement imaginés ou permettant leur conceptualisation. Les représentations graphiques des attracteurs étranges frappent l'imaginaire, les fractales également. On peut les voir comme une simple illustration, mais l'heuristique de ces images est très forte. Il faut bien comprendre que la géométrie et la topologie de l'espace des phases sont au cœur de l'analyse. Grâce aux dispositifs informatiques l'espace des phases peut être visualisé, observé, manipulé, modifié en temps réel.

L'ordinateur est un adjuvant précieux dans le monde des mathématiques, même s'il ne prouve rien au sens des mathématiciens.

Des mathématiques expérimentales ?

En ce sens le recours à l'ordinateur introduit une dimension "expérimentale" à ces études. Mais il faut bien s'entendre sur le sens de ce terme. Les scientifiques réalisent des calculs numériques à haute dose et ils prétendent même ainsi faire des "expériences numériques" : en affirmant cela, seul l'aspect mathématique de ces résultats semble primer.

Or l'ordinateur, et c'est encore plus frappant avec l'ordinateur analogique, est d'abord un dispositif électronique : les calculs effectués sont aussi des mesures sur un système physique. Lorsqu'on parle d'expérience, ne faut-il pas penser en terme d'expérience de physique, et pas seulement de mathématiques ?

A notre avis, ce point mérite une attention toute particulière, que nous réservons aux chapitres 8 et 9, où la réflexion et une analyse épistémologique, philosophique et historique plus détaillée seront présentées. Il semble que ce soit une rupture importante avec les pratiques scientifiques antérieures.

Cela nous renvoie aux difficiles classifications des démarches de Shaw, de Rössler, des premiers travaux de Pomeau, de Coullet et Tresser, de Feigenbaum. Ce sont des pratiques atypiques car elles ne sont ni tout à fait des mathématiques, ni vraiment de la

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

physique. Nous avons nous-même parlé de "physique de la dynamique", d'expériences numériques, d'analogie, suivant en cela les catégories classiques de l'épistémologie. Ce qui pose question justement, c'est cette volonté permanente de se fondre dans la dichotomie mathématique / physique : pourquoi ne pas considérer plutôt que le problème vient de la dichotomie même et qu'elle est peut-être tout simplement caduque ? Pourquoi ne pas appeler tout simplement "mathématiques expérimentales" cette activité si atypique ? Le dispositif permettant les expériences étant, bien entendu, l'ordinateur, analogique mais aussi numérique, dans ce cas là.

Les idées de Rössler, de Shaw qui considèrent qu'un calcul à l'ordinateur est une expérience proche d'une expérience de physique, sont partagées par Hénon [838] ; le parallèle avec les expériences est aussi explicité dans l'article de vulgarisation de Hofstadter, lequel singularisait le travail de Ulam et affirmait au sujet du chaos :

"Probablement que la principale raison pour laquelle ces idées sont seulement en train d'être découvertes est que le style d'exploration est entièrement moderne : c'est une sorte de mathématiques expérimentales, dans lesquelles l'ordinateur digital joue le rôle du vaisseau de Magellan, le télescope de l'astronome et l'accélérateur du physicien." [839]

Toutes ces conclusions amènent beaucoup d'interrogations sur l'histoire qui a conduit à un tel épanouissement.

c. Perspectives sur l'histoire

En effet, au cours des multiples développements de 1975-82, beaucoup de rencontres très conjoncturelles ont œuvré dans les croisements et échanges conceptuels. Mais plusieurs processus plus structurels sont en jeu, que l'histoire à la charge de révéler. Une histoire du chaos, sur le long terme, devrait éclairer tout ce développement qui paraît si exceptionnel. Nous envisageons de l'inscrire dans quelques tendances parallèles, que nous dissocions, pour la présentation, mais dont nous verrons les relations. Les sept années de développements à partir de 1975 nous ont permis d'en dégager trois.

Il s'agit d'abord, et assez naturellement, de déterminer la place des mathématiques des systèmes dynamiques dans la préhistoire du champ du chaos, et leur évolution depuis Poincaré. La Mécanique statistique et le problème de l'ergodicité, dont les origines remontent à la fin du XIXème siècle demandent à être analysés de manière à rendre compte de leur rôle dans l'histoire du chaos. En parallèle, la question du développement des expériences numériques suscite beaucoup d'interrogations, dans leurs rapports à la physique, aux mathématiques et aux pratiques scientifiques ; il y a également celle qui concerne leur apparition. Quelle importance accorder à Ulam, par exemple ? S'agit-il d'une coïncidence si ceux qui ont utilisé les simulations numériques sont tous des

[838] Entretien avec Michel Hénon, 17 mars 2004. Nous renvoyons au chapitre 9, p. 573 pour tous les détails relatifs à sa pratique du calcul.

[839] ***"Probably the main reason these ideas are only being discovered is that the style of exploration is entirely modern : it is a kind of experimental mathematics, in which the digital computer plays the role of Magellan's ship, the astronomer's telescope and the physicist's accelerator.", [HOFSTATDER, D.R., 1981], p. 16-17.***

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

physiciens (ou apparentés), aguerris aux problèmes mathématiques ?

Dans la perspective de répondre à la question des origines du chaos, de la place de Poincaré dans cette histoire, nous aborderons toutes ces thématiques, historiquement. Avec le recul amené par ces analyses nous comprendrons mieux les enjeux en arrière-plan de l'émergence du chaos.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Troisième partie. Vers les conceptions du chaos, de 1900 aux années 1980.

CHAPITRE 6. UN CADRE MATHÉMATIQUE POUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Les mathématiques des systèmes dynamiques fournissent des concepts et des moyens d'étude des comportements dynamiques, utilisés abondamment tant dans les conceptions du chaos que dans la théorie du chaos. De multiples exemples ont été donnés : section de Poincaré, application de premier retour, attracteurs, attracteurs étranges, fer à cheval, homoclines, systèmes hyperboliques, etc. Trois principaux textes sont cités comme références : celui de Ruelle et Takens de 1971 ("On the nature of turbulence"), l'article de Smale de 1967 ("Differentiable dynamical systems") et, bien sûr, ceux de Poincaré. Mais l'histoire des mathématiques des systèmes dynamiques et leur influence sur l'épisode 1975-1982 ne peuvent pas se résumer à ces trois scientifiques. L'historiographie courante suffit à nous faire comprendre que ce sont trois points saillants d'un mouvement de plus grande ampleur.

Notre but est de montrer que dans le cadre des mathématiques la question des systèmes dynamiques a subit une longue et profonde évolution sur deux plans, les

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

méthodes et surtout les perspectives d'étude de la dynamique, d'une part, des progrès significatifs dans les résultats mathématiques relatifs à ces systèmes, d'autre part. Beaucoup d'"historiques" se satisfont de reconstructions dans lesquelles les travaux émergent en se succédant presque "logiquement". Il nous paraît important de bien montrer que le cadre des systèmes dynamiques a subi des transformations au cours du processus historique ; cela laisse penser qu'une lecture linéaire des seuls résultats mathématiques ne peut mener qu'à des raccourcis et des anachronismes. De cette manière nous pourrons saisir les mutations des travaux sur les équations différentielles après 1912, sous l'effet de la perspective initiée par Poincaré, et les inscrire dans notre histoire. L'influence des mathématiques au cours de l'épisode 1975-82 n'en sera que plus claire.

Nous nous proposons d'analyser l'évolution des mathématiques des systèmes dynamiques, en suivant différents contextes intellectuels, institutionnels et culturels. Chronologiquement, il s'agit des analyses de Birkhoff et Andronov, de Lefschetz aux Etats-Unis après la seconde guerre mondiale, des travaux de Smale dans les années 1960 et, parallèlement, des réflexions conduites au sein de l'IHES, en France, où se développent les travaux de Ruelle et Takens.

6.1. L'entre-deux-guerres : Birkhoff et Andronov

Les travaux de Poincaré sur les équations différentielles, nous l'avons vu, furent rapidement repris par ses contemporains, mais leurs réflexions ne concernent ni un élargissement important des travaux de Poincaré, ni la définition de nouvelles problématiques. Les premières transformations véritables se déroulent dans l'entre deux guerres. Dans le cadre des systèmes conservatifs, très directement inspiré par Poincaré, le travail de G. Birkhoff offre un renouvellement des mathématiques des systèmes dynamiques dont nous allons montrer les traits saillants. Pour les systèmes dissipatifs, ce sont les travaux du russe A. Andronov qui ouvrent des perspectives nouvelles. Les conséquences de cette transformation des mathématiques des systèmes dynamiques seront nombreuses après la seconde guerre mondiale.

a. Birkhoff (1884-1944)

Quelques grands mathématiciens du début du XXème siècle ont repris les analyses de Poincaré sur les équations différentielles, pour les prolonger. Parmi eux nous avons présenté Hadamard et Lyapounov. Mais le véritable successeur de Poincaré est sans conteste George Birkhoff. Comme le disait Marston Morse, élève et ami de Birkhoff : "Poincaré a été le vrai professeur de Birkhoff" [840] . Ce n'est pas peu dire que Birkhoff s'est inspiré de Poincaré [841] . Il a transformé le cadre d'étude de la dynamique confectionné par Poincaré. Sa longue carrière lui a permis de conduire un travail de longue haleine et

[840] "Poincaré was Birkhoff's true teacher", [MORSE, M., 1968], p. xxiii.

[841] Birkhoff est également un ami d'Hadamard et de Levi-Civita dont on a vu les affinités mathématiques avec le point de vue qualitatif et le travail de Poincaré en particulier.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

d'obtenir des résultats de grande ampleur. Ce sont les principaux jalons de ces résultats que nous présentons, en signalant les nouveautés de chaque étape, et en montrant ainsi la construction progressive d'une théorie très élaborée des systèmes dynamiques, assez différente de l'état dans lequel Poincaré l'avait laissée.

Le mathématicien américain George Birkhoff a été formé à l'Université de Chicago et à Harvard. Il a obtenu son doctorat de mathématiques en 1907 (sur le sujet : "Asymptotic properties of certain ordinary differential equations with applications to boundary values and expansion problems"), puis revient à Harvard en 1912, où il fait l'essentiel de sa carrière, jusqu'à son décès en 1944 [842] .

Les travaux de Birkhoff ont bénéficié d'une large publicité dès lors que celui-ci est parvenu à démontrer le dernier théorème géométrique de Poincaré qu'il avait laissé inachevé à son décès [843] . En 1913, Birkhoff s'affiche comme un successeur de Poincaré. Cependant, l'année précédente, il avait déjà publié un travail intéressant et plus significatif encore, sur la question des systèmes dynamiques : "Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques" [844] . Les éléments introduits par Birkhoff sont très remarquables et ils ont marqué l'étude des systèmes dynamiques, comme nous le verrons.

Il nous importe maintenant de souligner les évolutions proposées par Birkhoff et de montrer ce qui les distinguent de Poincaré.

Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques, 1912

Dans l'article de 1912 Birkhoff donne de nouvelles définitions et, en premier lieu, il prend la peine de préciser ce qu'est un "système dynamique" :

"Un système dynamique, dans une très large acception, peut être considéré comme défini par un système quelconque d'équations différentielles ordinaires du premier ordre : $dx_1/X_1=\ldots=dt$ où $X_1, \ldots, X_n$ sont des fonctions données, réelles et uniformes de $x_1,\ldots,x_n$, analytiques par rapport à ces variables, et où t est la variable indépendante. Les variables $x_1,\ldots x_n$, sont les coordonnées du mouvement. Et t, indique le temps." [845]

L'exercice de définition est plus important que la formulation elle-même. Poincaré n'avait pas fixé la notion de système dynamique et s'intéressait aux équations différentielles. Signalons deux choses. Tout d'abord, comme dans tous les travaux de Birkhoff qui suivront et qui concerneront les "systèmes dynamiques", il faut comprendre qu'il s'agit des "systèmes issus de la dynamique", autrement dit des équations différentielles tirées des

[842] Au sujet de Birkhoff, on peut consulter l'hommage de Morse [MORSE, M., 1968] ou celui présenté en introduction aux Oeuvres de Birkhoff : [BIRKHOFF, G.D., 1968].

[843] Voir l'annexe consacrée au dernier théorème de Poincaré, p. 743.

[844] Birkhoff signale que le mémoire a été lu déjà en 1909 dans une réunion de l'American Mathematical Society. Il est publié, en français, en 1912, dans le Bulletin de la Société Mathématique de France. [BIRKHOFF, G.D., 1912].

[845] ***[BIRKHOFF, G.D., 1912], p. 306.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

principes Lagrangiens, et surtout Hamiltoniens avec Birkhoff. Ce rapport à la Mécanique n'a rien d'anecdotique comme on le verra. Ceci a pour conséquence que Birkhoff s'occupe essentiellement de systèmes dynamiques conservatifs, pour utiliser le terme contemporain.

Ensuite, ces systèmes sont étudiés géométriquement : "les équations sont aussi représentées par une courbe de l'espace à *n* dimensions" [846] . La géométrisation suggérée par Poincaré est reprise par Birkhoff, ce qui ne se démentira pas par la suite.

En 1912, Birkhoff s'intéresse à la stabilité du mouvement d'un tel système dynamique et propose pour cela d'introduire différentes notions : les "mouvements positivement stables", et les "points limites alpha et oméga".

Les "mouvements positivement stables" correspondent aux mouvements qui "à partir d'un certain moment et ultérieurement, n'approche jamais indéfiniment près de certaines positions singulières" [847] , avec les variantes négativement stables (lorsque le sens du temps est inversé) et instables lorsque la condition n'est pas respectée.

Les "**points limites alpha et oméga**" sont : "Tous les points desquels les points de la courbe représentative d'un mouvement s'approchent indéfiniment pour *lim t*=+∞ (ou *lim t*=-∞), seront appelés les *points-limites oméga* (ou *alpha*) du mouvement" [848] .

Le premier théorème sur ces points-limites stipule alors :

"Théorème I. – Les points-limites oméga d'un mouvement positivement stable représentent un ensemble de mouvements, positivement et négativement stables, desquels le mouvement donné s'approche uniformément quand le temps croît, c'est-à-dire que la distance entre le point représentant le mouvement et l'ensemble de points-limites tend vers 0 pour lim t=+#" [849]

Deux tendances se dégagent très clairement de cet article de Birkhoff. Tout d'abord il prend une vision géométrique sur les équations différentielles (et donc sur ses systèmes dynamiques). Il considère les **ensembles de trajectoires**, et non pas les trajectoires isolées pour elles-mêmes. Il produit une extension de la notion d'orbites périodiques en deux sens, puisque ses mouvements "récurrents" contiennent les mouvements périodiques et qu'ils sont déjà promis à jouer le rôle que Poincaré a donné à ces orbites périodiques. Le cœur de l'article de 1912 est, en effet, la notion de **mouvement récurrent**, qui traverse et symbolise les travaux de Birkhoff :

"Tout ensemble fermé M' de mouvements positivement et négativement stables, tel que tout mouvement de M' admet M' pour son ensemble de mouvements limites alpha, ainsi que pour son ensemble de mouvements limites oméga, sera appelé un ensemble minimal ; et tout mouvement de M' sera appelé un mouvement récurrent" [850]

[846] Ibid., p. 306.

[847] Ibid., p. 305.

[848] Ibid., p. 308 (en italique dans le texte).

[849] ***Ibid., p. 309 (en italique dans le texte).***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

D'après Birkhoff le mouvement récurrent est "une extension naturelle des mouvements périodiques" [851] . Il a des propriétés remarquables : tout point de sa courbe représentative est à la fois un point-limite alpha et un point-limite oméga, il est donc stable au sens de Poisson [852] . Birkhoff donne les deux exemples "les plus simples de mouvement récurrent" : "les cas du repos et du mouvement périodique" [853] . Enfin il livre une autre caractérisation des mouvements récurrents :

"Théorème III. – La condition nécessaire et suffisante pour qu'un mouvement positivement et négativement stable M soit un mouvement récurrent est que pour tout nombre positif #, si petit qu'il soit, il existe un intervalle de temps T, assez grand pour que l'arc de la courbe représentative correspondant à tout intervalle égal à T ait des points distants de moins de # de n'importe quel point de la courbe tout entière." [854]

Birkhoff se sert des mouvements récurrents pour pénétrer la dynamique des systèmes dynamiques.

L'intérêt des mouvements récurrents est double : d'une part, ils se présentent en nombre dans la dynamique puisque l'ensemble des mouvements limites de tout mouvement contient au moins un mouvement récurrent [855] . D'autre part, Birkhoff, sur la base de son "Théorème V" [856] , imagine qu'il est possible de représenter un mouvement stable donné, aussi exactement qu'on le désire, au moyen d'un ensemble de mouvements récurrents et de mouvements qui leur sont asymptotiques.

On notera au passage qu'il ne s'agit pas seulement du problème des trois corps (ce dont traitait Poincaré lorsqu'il a amené l'idée d'utiliser les orbites périodiques comme levier de son étude), mais des systèmes dynamiques (au sens de Birkhoff) en général. Comme Poincaré, cependant, Birkhoff est intéressé par la classification des différents mouvements récurrents possibles, qu'il ne fait qu'entamer.

Il dégage deux types : les continus (ceux représentables au moyen de fonctions continues et périodiques des variables qu'elles contiennent) et les discontinus. Il reprend

[850] Ibid., p. 311 (en italique dans le texte).

[851] Ibid., p. 305.

[852] Il s'approche arbitrairement près d'une quelconque de sa position initiale, infiniment souvent. [BIRKHOFF, G.D., 1912], p. 311.

[853] [BIRKHOFF, G.D., 1912], p. 312.

[854] Ibid., p. 312 (en italique dans le texte).

[855] "Théorème IV.- *L'ensemble des mouvements limites oméga M', de tout mouvement positivement stable M, contient au moins un mouvement récurrent."* p. 314 (en italique dans le texte).

[856] "Théorème V.- *Tout mouvement positivement stable M à la propriété que, pour tout nombre positif ε, on peut choisir un nombre positif T assez grand pour que, sur tout arc de la courbe M correspondant à un intervalle égal à T, après l'instant initial* $t=t_0$ *, tous les points ne restent pas à une distance au moins égale à ε des courbes de tous les mouvements limites récurrents de M." p. 316 (en italique dans le texte).*

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

le cas des géodésiques d'Hadamard pour suggérer l'existence de mouvements récurrents discontinus [857] (puis au terme de son article montre que lorsque les équations ne sont pas analytiques, il existe des récurrents discontinus [858]).

Orbites périodiques et section transverse

Birkhoff s'engage dans des analyses au sujet de deux éléments fétiches des travaux de Poincaré : les orbites périodiques, dans les systèmes dynamiques en général, et les sections transverses. Birkhoff reprend les travaux de Poincaré et les prolonge. Ainsi en 1915, il publie sur le problème restreint des trois corps : il prend un point de vue topologique et attaque le problème de manière qualitative [859] . Il ne reviendra que vingt ans plus tard sur le problème, après avoir développé des outils puissants pour caractériser la dynamique.

Dans son article de 1917 sur les systèmes à deux degrés de liberté ("Dynamical systems with two degrees of freedom" [860]), Birkhoff donne des méthodes pour déterminer l'existence d'orbites périodiques dans de tels systèmes et prolonge, pour la première fois, l'idée de section transverse de Poincaré. Rappelons que le sujet des systèmes à deux degrés de liberté (non intégrables) était une des préoccupations de Poincaré : il considérait, comme Birkhoff, que ce sont aussi les systèmes non intégrables les plus simples et par là, les meilleurs candidats à une analyse qualitative.

Le cœur de l'article est la question des orbites périodiques, pour laquelle trois méthodes sont élaborées (ou reprises) par Birkhoff : méthode de prolongement analytique de Poincaré, "minimum method", "minimax method" [861] . Quant à la question des sections

[857] Le raisonnement de Birkhoff sur les géodésiques est le suivant. Elles ont été classées par Hadamard en trois catégories (celles qui sont fermées ou asymptotiques à des géodésiques fermées ; celles qui s'éloignent sur les nappes infinies de la surface ; celles qui restent dans les régions finies de la surface et qui sont en nombre fini). La troisième catégorie donne des mouvements stables, donc d'après le théorème IV, il existe un mouvement récurrent parmi les géodésiques représentant les mouvements limites. Il ne peut pas s'agir du type 1 et 2 de la classification (non récurrents), donc soit il existe un mouvement récurrent de la troisième catégorie, soit toutes les géodésiques de la troisième catégorie "tend à s'approcher infiniment souvent, infiniment près en position et en direction d'une certaine géodésique fermée, pour s'éloigner chaque fois de nouveau lorsque le temps continue à croître". [BIRKHOFF, G.D., 1912], p. 318.

[858] La question de l'existence des mouvements récurrents discontinus dans le cas analytique a été résolue par son élève Marston Morse. [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 212 et p. 222.

[859] Cf. [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 212-214, pour des explications sur les résultats prouvés par Birkhoff, au sujet des orbites périodiques du problème.

[860] [BIRKHOFF, G.D., 1917].

[861] Voir [BARROW-GREEN, J., 1997],, p. 215-216 pour les détails techniques. La méthode "minimax" est importante (d'après Barrow-Green [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 216, note 325, citant Birkhoff [BIRKHOFF, G.D., 1927], p. 139 et Veblen [VEBLEN, O., 1968], p. xix) car elle est à l'origine du travail de Marston Morse sur le calcul des variations, qui a introduit les considérations topologiques en analyse.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

transverses, que Poincaré a introduites pour, notamment, ramener le problème des trois corps restreint à une transformation de l'anneau dans lui-même, Birkhoff développe une théorie plus complète qui l'autorise à donner des conditions d'existence de ces sections [862] , ce qui n'avait rien d'évident et aurait pu restreindre leur utilisation sans cela. Birkhoff montre qu'elles existent dans beaucoup de cas, et qu'il en existe plusieurs types différents.

En outre, Birkhoff met en évidence des propriétés remarquables de ces sections transverses. La réduction du problème différentiel à une transformation plane grâce à une section transverse permet en fait une réduction qualitative et analytique du problème [863] . En considérant les points invariants de ces transformations, il parvient également à une modification du dernier théorème de Poincaré [864] .

En 1920, il étend encore les propriétés des transformations de section dans un imposant article : "Surface transformations and their dynamical applications". De ses études des transformations des surfaces, il dresse un bref inventaire des dynamiques possibles, dans le cas à deux degrés de liberté [865] . Le rapport avec le programme de classification imaginé par Poincaré est évident ; Birkhoff le réalise grâce à ses nouveaux outils mathématiques, comme la notion de point elliptique et de point hyperbolique [866] .

En 1927, deux autres publications témoignent de ces mêmes préoccupations. Il revient sur la question des orbites périodiques, leur répartition dense et le parti pris par Poincaré d'en faire la voie pour étudier les systèmes dynamiques [867] . Birkhoff présente le problème du mouvement d'une boule sur une table convexe et montre que, dans ce cas, s'il existe un mouvement périodique stable, alors il y a une infinité de mouvements périodiques stables dans son voisinage et l'ensemble de ces mouvements périodiques stables forme un ensemble dense. Ceci va dans le sens de Poincaré, tout en montrant que cette possibilité n'existe pas *a priori* sans certaines conditions. En outre, il rappelle

[862] [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 216. Nous faisons allusion au dernier théorème de Poincaré. Voir l'annexe, à ce sujet p. 743.

[863] [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 216. Birkhoff insiste sur le fait qu'une transformation d'une section transverse possède une "invariant area integral". La forme normale de l'équation différentielle impliquait l'existence de deux fonctions des coordonnées (x,y), alors que la transformation limite à une fonction.

[864] Celui-ci reposait sur une section en forme d'anneau, Birkhoff montre que le théorème peut être utilisé pour des sections de genre $p=0$, et modifié pour avoir les mêmes conclusions avec un genre $p>0$.

[865] " The catalogue of types of motion according to their degree of simplicity apperas to run as follows : ordinary periodic motions, biperiodic motions representable analytically by convergent trigonometric series in two arguments, triperiodic motions representable by three arguments; motions asymptotic to periodic motions of hyperbolic type, motion asymptotic to periodic motion of elliptic type and other types just referred to: recurrent motions of biperiodic or triperiodic type (not representable by convergent trigonometric series); recurrent motions of discontinuous type; motions asymptotic to recurrent motions of these new types (or to sets of isomorphic recurrent motions); *special* motions (i.e. not passing near all phases for both lim $t=+\infty$ and lim $t=-\infty$) not of above types; *general* motions.", [BIRKHOFF, G.D., 1920], p. 119 (en italique dans le texte).

[866] Définies pour les transformations de surfaces, ces notions se transfèrent au niveau des orbites périodiques elliptiques et hyperboliques.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

une propriété très analogue, qu'il avait démontrée dans sa précédente étude de 1920 : dans le cas d'un système transitif, l'ensemble formé par les orbites périodiques et les orbites asymptotiques à celles-ci est dense [868] .

Birkhoff a choisi ce système mécanique de billard pour deux raisons : le système est représentatif parmi les systèmes à deux degrés de liberté, donc les résultats ont une certaine généralité ; de plus, il présente l'avantage que : "Le côté formel, d'habitude si difficile en dynamique, disparaît presque complètement, et seulement les questions qualitatives intéressantes ont besoin d'être abordées" [869] . C'est un système mathématique "modèle", un peu comme les géodésiques considérées par Hadamard.

A ce moment là, il tente aussi la généralisation des orbites homoclines.

A propos des intersections des deux familles de courbes asymptotiques à une orbite périodique instable, tel que Poincaré les a décrit dans le problème restreint des trois corps, il écrit :

"Il est certain que cette intersection des deux familles (dans les cas où elles ne coïncident pas identiquement) est un phénomène existant généralement, bien que je n'ai pas encore été capable de traiter certains cas exceptionnels. Je prouverai ici que tout mouvement homocline est toujours dans l'immédiat voisinage d'une infinité de mouvements périodiques. Ce fait implique incidemment que le mouvement périodique instable approché par le mouvement homocline est dans le voisinage immédiat d'une infinité d'autres mouvements périodiques […]" [870]

Dynamical Systems, 1927

La même année son Dynamical Systems fait le bilan des perspectives de Birkhoff sur les systèmes dynamiques construites en une quinzaine d'années [871] . Le prolongement des idées de Poincaré est assumé et affiché, comme pour tout ce qui précède. Ce traité sera

[867] Birkhoff résume la pensée de Poincaré à ce sujet : "In his work on dynamics Poincaré was led to focus attention primarily upon the periodic motions. He conjectured that any motion of a dynamical system might be approximated by means of those periodic types i.e. that the periodic motions would be found to be densely distributed among all possible motions; and it became a task of the first order of importance for him to determine what the actual distribution of the periodic motions was, so as to prove or disprove his conjecture." [BIRKHOFF, G.D., 1927d], p. 359.

[868] [BIRKHOFF, G.D., 1927d], p. 379. Un système est dit transitif si "motions can be found passing from nearly one assigned state to nearly any other arbitrarily assigned state". Il ajoute : "This property is probably satisfied "in general" by non-integrable dynamical systems".

[869] "the formal side, usually so formidable in dynamics, almost completely disappears, and only the interesting qualitative questions need to be considered.", [BIRKHOFF, G.D., 1927d], p. 361.

[870] "It is certain that this intersection of the two families (in cases where they do not coincide identically) is a phenomenon of general occurrence, although I have not as yet been able to treat certain exceptional cases. I will prove here that every homoclinic motion is always in the immediate neighbourhood of infinitely many periodic motions. The fact just stated implies incidentally that the unstable periodic motion approached by the homoclinic motion lies in the immediate neighbourhood of infinitely many other periodic motions […] ", [BIRKHOFF, G.D., 1927d], p. 376.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

à Birkhoff ce que les Méthodes Nouvelles sont à Poincaré, c'est-à-dire une sorte de synthèse de ses idées, une source d'outils pour étudier la dynamique, de réflexions aussi car il ne prétend pas tout résoudre dans ce seul volume. Une nuance est toutefois nécessaire : ce n'est pas le point d'orgue de son travail sur la dynamique, mais seulement une étape.

En un mot, Birkhoff propose un nouveau cadre général pour la dynamique ; il inclut des questions de dynamique formelle et des notions de stabilité.

L'ouvrage de Birkhoff détaille beaucoup de résultats dans différents chapitres de la théorie des systèmes dynamiques. Dans l'ordre de présentation, il s'agit d'abord de la dynamique formelle. Birkhoff donne là la propriété de réduction de systèmes Hamiltoniens ou Pfaffiens à des formes normales [872]. Il s'intéresse ensuite à la stabilité de ces systèmes, dans le cas d'un point d'équilibre "généralisé", en définissant deux notions de stabilité pour ce cas et en montrant que la stabilité ordinaire implique, dans le cas des systèmes Hamiltoniens ou Pfaffiens, leur stabilité complète [873].

En sortant du cadre strictement formel, Birkhoff mentionne également la stabilité "permanente" (qui correspond simplement au cas ou de petits déplacements de l'équilibre ou de la trajectoire périodique demeurent petits) ; elle est de première importance théorique aux côtés de la stabilité complète. C'est en ces termes que se pose le "problème de la stabilité" :

"Une question importante en dynamique est celle de savoir si la stabilité formelle complète d'un mouvement périodique de type stable assure la stabilité dans le sens qualitatif défini ci-dessus." [874]

Ceci masque deux interrogations : celle de savoir si la stabilité complète assure effectivement une stabilité permanente, et sinon celle de déterminer s'il y a tout de même

[871] [BIRKHOFF, G.D., 1927a]. Une partie de l'ouvrage correspond à des lectures données devant l'American Mathematical Society en 1920 ; Birkhoff a choisi d'en développer certains points avant de les faire publier (Préface de Birkhoff).

[872] Birkhoff construit des séries de transformations formelles des systèmes Hamiltoniens, puis pour des systèmes Pfaffiens, qui possèdent un point d'équilibre "généralisé" à l'origine, de manière à réduire le système à un Hamiltonien $H(p,q)$ sous forme d'une série de produits $p_i q_i$, commençant par la somme
[BIRKHOFF, G.D., 1927a], Chapitre III (dans les pages 78-96, Birkhoff établit successivement le résultat précédent pour les systèmes Hamiltoniens, puis Pfaffiens).

[873] Ce résultat est montré dans [BIRKHOFF, G.D., 1927a], p. 105-106, sur la base de la réduction aux formes normales. La stabilité ordinaire, ou naturelle ou encore du premier ordre, correspond au cas où les λ_j précédents sont imaginaires purs. La stabilité complète, ou trigonométrique est plus sophistiquée. Pour un système $dx/dt=X(x,t)$ (en dimension n), un intervalle de temps T, f un entier quelconque, $P_s(x,t)$ un polynôme à coefficients analytiques et périodiques en t et de plus bas degré s. Le système est stable complètement lorsqu'il est possible, pour tout $e>0$ d'approcher P_s, pour des temps inférieurs à T, avec une erreur plus petite que Me^{m+s} par une somme trigonométrique de type :
$(k_i-k_j>k>0,\ k_0=0)$ où M, N, k sont des constantes dépendants uniquement de m et P_s. Voir [BIRKHOFF, G.D., 1927a], p. 105

[874] ***"An outstanding question in dynamics is whether or not the complete formal stability of a periodic motion of stable type assures stability in the fundamental qualitative sens defined above.", [BIRKHOFF, G.D., 1927a], p. 227 (section "The problem of stability").***

stabilité dans les cas particuliers importants, comme le problème des trois corps restreints [875] . En d'autres termes, les conditions formelles pour avoir une stabilité permanente ne sont pas connues.

Birkhoff présente ensuite des éléments d'une théorie générale des systèmes dynamiques construite sur les notions acquises depuis 1912. Les points récurrents sont intégrés à un ensemble plus large de définitions qui inclut la notion d'ensemble invariant, de **points errants** [876] (et non-errants), de **mouvement central** [877] .

Les mouvements centraux sont des équivalents des mouvements stables "à la Poisson", présentés par Poincaré dans le cadre de la dynamique classique [878] . L'importance qui leur est accordée tient au fait qu'**ils existent pour les systèmes dynamiques généraux**. **Ils englobent les mouvements récurrents et naturellement, les mouvements périodiques**. Pour Birkhoff "il est évident que le premier problème concernant les propriétés des systèmes dynamiques est la détermination des mouvements centraux". [879]

Cependant, les théories de Birkhoff sont plus opérantes dans le cadre des systèmes à deux degrés de liberté, que dans ce cadre très général. La raison essentielle tient au fait qu'il a démontré la possibilité de faire des sections transverses dans ce cas particulier, qui simplifient considérablement l'analyse de la dynamique en permettant de s'appuyer sur les transformations planes, dont il a produit plusieurs analyses.

Le Dynamical Systems de Birkhoff, s'il est considéré comme un achèvement de la vie scientifique de ce mathématicien, n'en est pas pour autant un testament. Birkhoff continue de travailler sur les systèmes dynamiques bien après 1927. Avec Paul Smith, ils précisent les transformations (homéomorphismes) des surfaces, leur structure, les comportements

[875] Ibid.

[876] Les points errants ('wandering" en anglais) d'un système dynamique (correspond à un espace des états M) sont definis ainsi : "The set W of wandering point of M is made up of curves of motion filling open n-dimensional continua. The set M_1 of non-wandering points of M is made up of the complementary closed set of curves of motion.", [BIRKHOFF, G.D., 1927a], p. 191.

[877] Birkhoff en donne une définition simplifiée : "central motions are those which recur infinitely often near any particular state of the motion, or at least have such motions in the infinitesimal vicinity of any state", [BIRKHOFF, G.D., 1941], p. 710. L'ensemble des mouvements centraux est construit par itération du processus suivant : à partir de l'ensemble M_1 des points non-errants de *M*, on recherche les points errants relativement à M_1 (au lieu de *M*) qui constituent un ensemble M_2. Une cascade d'ensembles (inclus les uns dans les autres) $M_1, M_2 \ldots M_i \ldots$ aboutit à un ensemble terminal M_r, l'ensemble des mouvements centraux. [BIRKHOFF, G.D., 1927a], p. 190-5.

[878] Les systèmes Hamiltoniens en question, ont surtout la propriété de posséder un invariant intégral naturel, ce qui a permis à Poincaré de montrer que le mouvement d'un tel système dynamique revient infiniment souvent, infiniment près de sa position initiale (cf. p. 50). En outre, les mouvements centraux ont la propriété de "récurrence régionale" car il n'y a pas de points errants dans l'ensemble des mouvements centraux.

[879] "[…] it is obvious then that a first problem concerning the properties of dynamical systems is the determination of the central motions.", [BIRKHOFF, G.D., 1927a], p. 197.

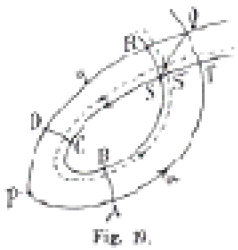
 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

asymptotiques des points de la surface sous l'itération de la transformation. Les points récurrents, mouvements centraux, points homoclines sont les moyens utilisés pour l'analyse. On notera que cet article donne la première définition de "transitivité métrique", base de nouvelles considérations sur l'ergodicité, avec le théorème ergodique de Birkhoff [880] .

L'aboutissement véritable du travail de Birkhoff sur les systèmes dynamiques est son article "Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques" publié en 1935, en français. Il est de première importance dans cette histoire. D'après Morse, c'est le **point d'orgue de la théorie qualitative de Birkhoff** [881] . Le traitement qualitatif est parachevé par la construction d'une **classification symbolique des dynamiques possibles, appelée signature**. Schématiquement, un système dynamique est caractérisé topologiquement par sa signature. En reprenant les mots de Morse : "Pour Birkhoff, une telle signature est la description qualitative ultime d'un système dynamique" [882] . En outre, Birkhoff déploie tous ses outils mathématiques pour parvenir à cet objectif.

Birkhoff procède à une étude très complète des voisinages des orbites elliptiques, puis des orbites hyperboliques, grâce à une surface de section *S* et la transformation *T* associée. Ce sont les points hyperboliques qui servent à introduire la classification symbolique des trajectoires du système dynamique.

Il s'intéresse d'abord au voisinage étendu d'un point hyperbolique, c'est-à-dire à l'aire prise entre le point *P* hyperbolique et un point homocline *Q* :



[BIRKHOFF, G.D., 1935b], p. 176

Birkhoff montre alors la propriété suivante, qui conclut la construction de sa suite de symboles :

"il existe au moins un point P de QRST qui ne sort jamais de la région annulaire, qui se trouve en QRST après m itération de T^{-1}, après l itérations de plus, ..., et en même temps dans QRST après m' itérations de la transformation inverse T, après

[880] "A transformation will be called metrically transitive if there exists no measurable invariant set E such that 0<m(E)<m(S). A transition of this type is also transitive in the ordinary sense; that is, for any two mutually exclusive connected regions α and ß, some power of T can be chosen which will carry points of α into points of ß", [BIRKHOFF, G.D., SMITH, PA.., 1928], p. 365-66. Pour les problèmes concernant l'ergodicité nous renvoyons au chapitre 7, p. 451.

[881] [MORSE, M., 1968], p. xlvi : "This qualitative theory culminates in the paper [33] 130 pages long, crowned by the Pontifical Academy. This paper resumes and extends much of Birkhoff's earlier' dynamical theories. Upon finishing this work Birkhoff commented to the author that it was an exhausting task."

[882] "For Birkhoff such a signature is the ultimate in the qualitative description of a dynamical system", [MORSE, M., 1968], p. xlvii.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

l' itérations de plus, ... Ici m, l, p,..., m', l', p'...sont des entiers arbitraires (#k). Désignons l'ensemble fermé des points P de cet espèce par le symbole doublement infini [...m, p, l, m, m', l', p'...]. [...] De tels symboles arithmétiques sont bien adaptés à la discussion de tous les points qui restent toujours dans le voisinage étendu du point fixe ; ils ressemblent un peu aux symboles effectivement introduits par Hadamard dans son étude remarquable des géodésiques sur certaines surfaces ouvertes de courbure totale négative." [883]

Cette représentation symbolique donne déjà des propriétés remarquables :

"Il paraît donc que tout système dynamique non intégrable qui admet une seule solution homocline de cette espèce, doit admettre une hiérarchie presque inconcevable de solutions dans le voisinage étendu correspondant. Parmi ces solutions signalons les suivantes : (1) Les solutions périodiques rattachés aux symboles périodiques quelconques. (2) Les solutions asymptotiques à de telles solutions périodiques, quand le temps croît (ou décroît), dont le symbole infini se termine (ou commence) avec une suite périodique arbitraire correspondante. (3) Les solutions récurrentes dont le symbole est récurrent, c'est à dire tel que chaque suite de n entiers (n arbitraire) dans le symbole, se trouve au moins une fois dans toute suite de N entiers du symbole. [...]" [884]

Enfin,

"Remarquons en conclusion que notre étude nous montre l'existence nécessaire d'un nombre infini des solutions homoclines ([1]). Par conséquent nous pouvons obtenir beaucoup d'autres solutions voisines, en partant d'autres solutions homoclines qui appartiennent à la même solution périodique." [885]

Le symbolisme est ensuite étendu à plusieurs points fixes hyperboliques joints par l'intermédiaire de points **hétéroclines**, avant d'aboutir à sa "théorie générale des solutions" qui est l'apothéose du mémoire de 1935. Le cas général se construit sous trois hypothèses :

"(1) le système considéré est transitif dans l'espace S_3 (2) il admet une surface régulière de section S_2 (3) il admet au moins une solution périodique, mais il n'y a pas des solutions e-périodiques [périodiques de type elliptique] dégénères" [886]

Le raisonnement général peut se résumer en quelques mots [887] . Sous ces hypothèses, Birkhoff montre qu'il "*existe toujours un nombre infini des points fixes hyperboliques de T k* " [888] . Tout l'intérêt de ce résultat est de **faire des points fixes hyperboliques un**

[883] ***[BIRKHOFF, G.D., 1935b], p. 184 (sic.). Le P de la propriété ne doit pas être confondu avec P le point hyperbolique.***

[884] ***[BIRKHOFF, G.D., 1935b], p. 184***

[885] ***[BIRKHOFF, G.D., 1935b], p. 185. La note ([1]) fait référence au fait que Poincaré en a montré autant dans le cas du problème des trois corps.***

[886] ***[BIRKHOFF, G.D., 1935b], p. 187. Ces hypothèses sont destinées à écarter des cas non élucidés par Birkhoff. La troisième renvoie directement au fait mentionné en préliminaire au choix de ces hypothèses que "Dans notre théorie les solutions périodiques joueront le rôle central" (ibid., p. 187).***

[887] Nous nous inspirons ici du résumé de M. Morse dans [MORSE, M., 1968], p. xlvi-xlvii.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

instrument de caractérisation de *T*, ce que Birkhoff a entrepris.

Sur la surface de section S_2, les courbes invariantes autour d'un point fixe hyperbolique *P* sont réparties en une branche-α $E_\alpha(P)$ et branche-ω $E_\omega(P)$, selon que les points convergent vers *P* par *T* ou T^{-1}. Birkhoff montre que (avec ses hypothèses) on peut prolonger analytiquement les branches d'un point fixe hyperbolique, de telle manière qu'elles soient denses dans S_2.

Birkhoff distingue ensuite l'ensemble *K* de tous les points fixes et de toutes les branches α et ω des points hyperboliques, de l'ensemble de tous les autres points. Dans l'hypothèse de transitivité métrique, plus forte que l'hypothèse (1), *K* est de mesure nulle. Les autres points, qui forment donc l'"essentiel", sont groupés en des ensembles Σ_Q définis de la manière suivante : pour *Q* un point de cet ensemble, c'est-à-dire hors de *K* (i.e. un point qui n'appartient à aucune branche $E_\alpha(P)$ ou $E_\omega(P)$), Σ_Q est l'ensemble connexe maximal contenant *Q* mais aucun point de *K*.

Les solutions des ensembles Σ_Q sont appelées "isomorphes" car les ensembles ont des propriétés remarquables : ils sont indépendants des points *P* parmi les points hyperboliques, ils se transforment les uns en les autres sous l'action de *T* (par exemple :

$$T(\Sigma_Q) = \Sigma_{T(Q)}).$$

Pour finaliser la caractérisation, Birkhoff utilise un point fixe hyperbolique, dont les branches $E_\alpha(P)$ et $E_\omega(P)$ forment un réseau dense dans S_2. Ce réseau est spécifié par une "signature", un symbole à deux dimensions, permettant de caractériser les entrelacements de $E_\alpha(P)$ et $E_\omega(P)$, donc le réseau. Dans le cas dit "régulier" où les Σ_Q se réduisent au seul point *Q*, "probablement le cas général" [889], Birkhoff parvient ainsi à la conclusion :

"...deux systèmes dynamiques réguliers seront topologiquement équivalents quand ils admettent la même signature # et seulement en ce cas." [890]

Conclusion : les systèmes dynamiques par Birkhoff

Morse résume bien les tendances marquantes de l'évolution du travail de Birkhoff :

"Après vingt et un ans les problèmes restent essentiellement les mêmes, mais l'approche et en particulier son langage sont devenus plus topologiques et plus abstraits. Les 'flots conservatifs' doivent être étudiés dans le sens topologique et statistique, et la théorie variationnelle abstraite doit y pénétrer." [891]

En effet, Birkhoff est parti de l'étude des équations différentielles telle que Poincaré l'a laissée, avec son point de vue géométrique, pour transformer l'étude de ces systèmes dynamiques, en une perspective plus topologique, laquelle inclut les résultats de

[888] [BIRKHOFF, G.D., 1935b], p. 195.

[889] [BIRKHOFF, G.D., 1935b], p. 200.

[890] [BIRKHOFF, G.D., 1935b], p. 212. Dans le cas irrégulier, la situation est moins probante : les systèmes étant analysé sur la base des ensembles Σ_Q, ils seront "Σ-équivalents".

Poincaré, y compris les plus spectaculaires à propos des orbites homoclines. Le texte de 1935 est le travail le plus achevé en la matière. Birkhoff analyse également les systèmes dynamiques de manière plus abstraite, selon une dynamique formelle, et introduit de nouveaux concepts de mouvements, récurrents et centraux.

Birkhoff, à la différence de Poincaré, ne fait quasiment aucune concession à l'analytique sur les systèmes dynamiques [892]. Le qualitatif est porté encore plus haut que ce qu'a produit Poincaré, grâce à la topologie, grâce aussi à l'utilisation d'une description symbolique, dont on verra, avec les travaux de Smale, qu'elle est tout à fait remarquable.

Par ailleurs, Birkhoff est resté célèbre pour son théorème ergodique démontré en 1931. Il se place là encore dans la lignée de Poincaré, et de son théorème de récurrence en particulier. Cet aspect remarquable sera discuté ultérieurement [893], dans le cadre des questions d'ergodicité justement. Son intérêt pour la question de l'ergodicité est à rapprocher de ses positions sur la dynamique en physique, peu connues, mais qui participent de son intérêt constant pour les systèmes dynamiques. Birkhoff défend l'idée que **les théories physiques doivent être dynamiques** [894], et de manière idéale, conçues sous forme d'équations différentielles [895]. Birkhoff est **réticent à la Mécanique quantique** qui se développe entre les deux guerres et n'est pas encore une théorie achevée pour lui ; il n'existe pas de support conceptuel satisfaisant à l'équation de Schrödinger d'après lui [896]. Birkhoff pense les théories physiques en rapport avec les théories classiques, comme la Mécanique, et propose des alternatives dynamiques à la théorie atomique, qui prennent en compte l'espace-temps [897]. Ainsi, avec la théorie ergodique, il s'agit de donner une base **dynamique** à la Mécanique statistique. Philosophiquement, on peut affirmer que Birkhoff est proche de Poincaré et du

[891] ***"After a laps of twenty-one years the problems remain essentially the same, but the approach and particularly that language of approach has become more topological and abstract. 'Conservative flows' are to be studied both in the topological and the statistical sense, and abstract variational theory is to enter. ", [MORSE, M., 1968], p. xlviii-xlix.***

[892] Il fait une incursion limitée dans le quantitatif dansun mémoire sur le problème des trois corps : [BIRKHOFF, G.D., 1935a].

[893] Au chapitre 7, dans les paragraphes consacrés aux théorèmes ergodiques, page 451.

[894] Dans son hommage à Joseph Larmor, il insiste beaucoup sur l'aspect dynamique des théories de Larmor, et semble même attaché à l'idée d'"éther" (il encense l'ouvrage de Larmor Aether and Matter). "Larmor grew to scientific maturity at a time when every attempt was being made to explain all physical phenomena on a dynamical or at least a quasi-dynamical basis, involving the concepts of absolute space (the ether), of absolute time and simultaneity […] Under the impact of the radical new theories [Quantum Mechanics and General Ralativity], Larmor refused to abandon without further consideration the classical point of view which had served so well." (p. 887-8). Birkhoff semble en bon accord avec les idées de Larmor. [BIRKHOFF, G.D., 1943].

[896] Voir notamment "Some remarks concerning Schrödinger's wave equation" ([BIRKHOFF, G.D., 1933]) et la note précédente (n° 895).

[897] Voir note précédente. Birkhoff considère un système atomique (proton-électron) et en étudie les oscillations, avec les méthodes des systèmes dynamiques. L'idée la plus porteuse est exprimée en terme de mouvements centraux : [BIRKHOFF, G.D., 1926], p. 294.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

déterminisme dominant au XIXème siècle.

D'une certaine manière, Birkhoff a également contribué à autonomiser le sujet des mathématiques des systèmes dynamiques : Poincaré était versé dans les équations différentielles générales avant de se focaliser sur les problèmes de la Mécanique céleste (le problème des trois corps surtout) ; Birkhoff, même s'il s'inspire des exemples de la Mécanique classique et travaille essentiellement sur la dynamique Hamiltonienne, pousse le sujet "hors" de la Mécanique. Cette catégorisation ne renvoie pas à une distinction entre les "sciences mathématiques" et les "sciences mécaniques". Nous entendons par là que les scientifiques susceptibles de prolonger les théories de Birkhoff ne seront plus des mécaniciens, mais des mathématiciens avant tout, du fait du très haut niveau de mathématisation atteint par la théorie de Birkhoff. La théorie des systèmes dynamiques est en train de s'autonomiser et sera renforcé en ce sens par les travaux de Smale.

b. Du conservatif au dissipatif ; les mathématiques des équations différentielles

Les travaux de Poincaré et Birkhoff ont une double facette. D'un côté, ce sont des études qualitatives des solutions des équations différentielles, dans toute leur généralité. D'un autre, les considérations les plus travaillées sont concentrées en grande partie sur des systèmes différentiels issus de la dynamique classique, de la Mécanique ; le problème des trois corps en est le meilleur exemple. Pour le formuler autrement, les systèmes dits dissipatifs (ou non conservatifs) ne reçoivent pas l'attention, à laquelle les systèmes Hamiltoniens ont droit.

C'est pourtant sur ce point qu'une grande évolution de l'étude de la dynamique va se faire, durant l'entre deux guerres, période de plein développement des considérations de Birkhoff. Par ces deux biais, l'étude des systèmes dynamiques, c'est-à-dire des équations différentielles, ressort profondément modifiée de cette période ; elle forme aussi l'embryon d'un développement ultérieur, conduisant aux travaux plus "abstraits" sur les systèmes dynamiques après la seconde guerre mondiale, qui ont inspiré eux-mêmes, plus directement, les travaux contemporains et les conceptions du chaos, dans les années

[895] Nous citons in extenso un paragraphe de "The Mathematical nature of physical theories", de 1944, pour résumer les positions de Birkhoff (on peut trouver les mêmes idées dans "Electricity as a fluid" [BIRKHOFF, G.D., 1938]). Après un développement historique-philosophique sur la mécanique Newtonienne, il discute des nouvelles théories physiques : "In the first place, all of these theories, except that of quantum mechanics, employ a selected four-dimensional framework of space and time which is to serve as the stage for the interaction of matte rand electricity […] The laws which are postulated generally lead to one or more ordinary or partial differential equations, so that finally the basis of all theory turns out to be a set of differential equations – the diffrential equations of the physical universe ! Whether or not quantum mechanics, in which space and time only function as preliminary scaffolding, can be accommodated within such a framework remains to be seen. […] it is suggested that the fundamental Schrödinger equation may amount to genial formalistic conjecture, yet to be justified. […] In the final quantum-mechanical phase of today there is a mystical employment of variational principles and optical analogies of classical type in order to pass directly from the approximate dynamical interpretation of the atom (proton and electrons) to the corresponding wave equation of Schrödinger. […] But nothing, it seems to me, is more evident than that the method proposed for making theses calculations has not yet been properly placed in a wider scheme of the universe as a whole. In fact I believe that there is a definite possibility of using electromagnetic space-time for this purpose. This possibility should be studied most carefully" [BIRKHOFF, G.D., 1944], p. 915-918.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

1975□82.

Dans cette partie consacrée aux mathématiques des systèmes dynamiques, nous allons montrer la construction du cadre mathématique et les résultats marquants au sujet des systèmes dissipatifs. Nous nous focaliserons ici plutôt sur les résultats mathématiques "finalisés". Pour expliquer cette histoire et ses conséquences sur d'autres plans, nous reviendrons plus en détail sur le processus de constitution de ces savoirs, mêlant intimement mathématiques et physique en particulier. Ce sera l'objet du chapitre consacré à la théorie des oscillations non linéaires et au calcul analogique. En anticipant sur ces éléments, nous nous contenterons de dire que ces changements sont impulsés par un renouvellement des enjeux scientifiques et techniques : si la Mécanique classique et la Mécanique céleste ont pendant longtemps fourni les sujets "importants", de nouvelles problématiques émergent avec les questions d'oscillations des systèmes électriques, électroniques, pour la radio notamment. Ce sont ces phénomènes dissipatifs qui vont recevoir l'attention des mathématiciens-physiciens.

La transformation théorique et les résultats essentiels de la dynamique des systèmes dissipatifs proviennent, avant la seconde guerre mondiale, d'Union Soviétique. Plusieurs centres d'activités émergent, sur des problématiques différentes. Nous nous bornerons à détailler les développements les plus lourds de conséquences dans l'histoire.

Alexander Alexandrovich Andronov (1901-1952)

Il s'agit, d'abord et avant tout, des travaux de l'"école" d'Alexander Andronov [898] . Inspiré par le physicien Leonid Mandelstam (1879-1944), son maître et instigateur d'une "pensée non linéaire" [899] , Andronov s'engage dans des recherches sur les oscillations non linéaires. Il est d'une bonne formation mathématique (il a suivi les cours de N. Lusin, maître de Kolmogorov) et son travail de thèse constitue un jalon de premier ordre dans les recherches sur cette physique non linéaire ; en 1929, une note au Comptes Rendus de l'Académie des Sciences annonce ses résultats sous le titre évocateur : "Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations entretenues" [900] , dans lequel il établi un lien entre **une oscillation d'un système physique et l'existence d'un cycle limite dans l'espace des phases du système**.

La théorie des oscillations non linéaires, qui signifie, schématiquement, l'étude des équations différentielles à petit nombre de dimensions, est élaborée par Andronov et ses collaborateurs, en reprenant, comme pour sa thèse de 1929, le vaste ensemble de

[898] L'ouvrage qui vient de paraître, Les sciences pour la guerre – 1940-60 ([DAHAN, A., PESTRE, D., 2004]) semble contenir un chapitre à ce sujet ("L'école d'Andronov à Gorki, profil d'un centre scientifique dans la Russie soviétique" par A. Dahan, en collaboration avec I. Gouzévitch). Au moment de rédiger notre texte nous n'avons malheureusement pas pu avoir accès au livre en question.

[899] Nous empruntons ce terme à [DINER, S., 1992], p. 338. Son texte constitue d'ailleurs une référence au sujet des travaux soviétiques en matière d'oscillations non linéaires et mathématiques des systèmes dynamiques. Nous nous y réfèrerons régulièrement.

[900] [ANDRONOV, A., 1929].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

méthodes mathématiques qualitatives de Poincaré, auquel il faut ajouter la théorie de la stabilité de Lyapounov et des éléments obtenus par Birkhoff, dont l'ouvrage Dynamical Systems vient de paraître, en 1927. Andronov a fortement poussé à la lecture de Poincaré auprès de ses élèves et contribué à créer une culture des mathématiques des équations différentielles, comme nous allons le voir.

L'extension de ces travaux prend plusieurs directions, fortement associées les unes aux autres, et constituent les facettes de la recherche emmenée par Andronov. En s'établissant à Gorki à partir de 1931, il donne le tempo des recherches sur le sujet, formant ainsi l'"école de Gorki" (ou l'école Andronov ou Mandelstam-Andronov). Il s'agit autant de théories proches de considérations physiques (comme la théorie des horloges mécaniques développée par Bautin [901]), de méthodes d'étude des systèmes dynamiques que de théories plus mathématiques.

Les deux dernières catégories sont celles qui nous intéressent ici. Andronov est séduit par différents aspects de la dynamique. Au moment où les théories quantiques s'orientent vers une interprétation indéterministe, Andronov adhère à des positions philosophiquement plus proches du déterminisme. Andronov est intéressé aux mathématiques de la dynamique, et en particulier par la classification topologique des mouvements selon Birkhoff ; il y trouve un intérêt relatif à la théorie atomique :

"On peut penser qu'on va avoir une autre approximation de la réalité, une autre approximation des quanta, si on suppose que nos atomes sont des systèmes auto-oscillants. Tout ça reste au niveau de la fantaisie, mais une façon de garder au moins une partie des idées de Birkhoff." [902]

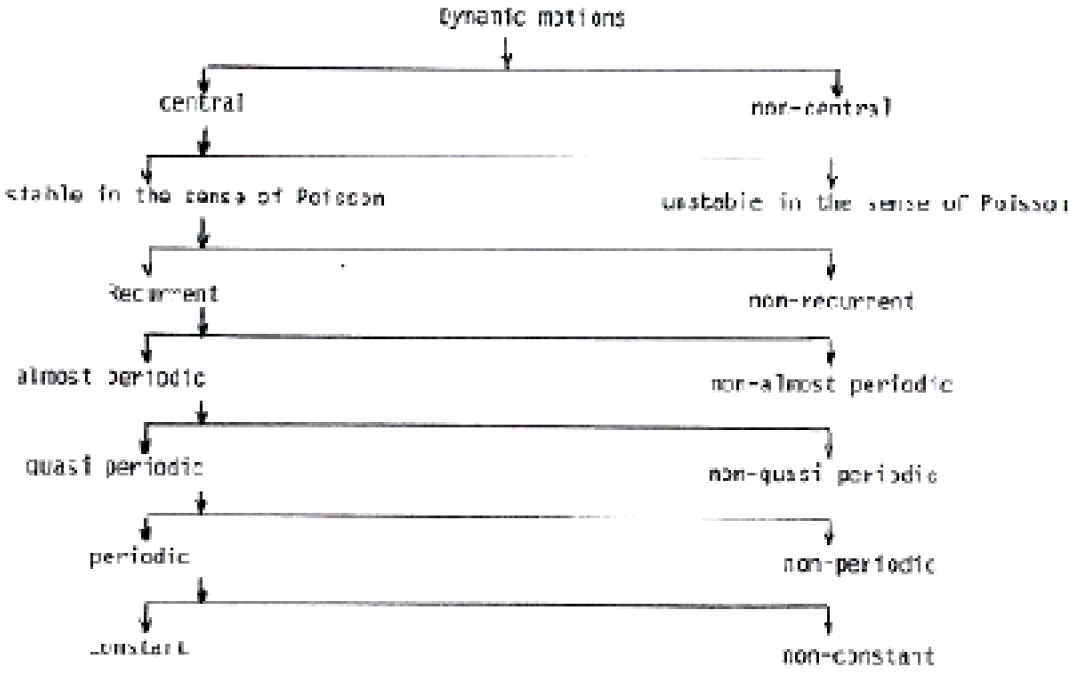
En reprenant les classifications de Birkhoff, Andronov induit la structure de comportements dynamiques généraux [903] :

[901] [DINER, S., 1992], p. 342.

[902] ***[ANDRONOV, A.A., 1956], p. 110. Pour être plus complet voici quelques idées d'Andronov à ce sujet : "La théorie des mouvements centraux a été mise en lien, par Birkhoff, avec la dynamique atomique. C'était Birkhoff qui pensait en 1926 (année de publication de son travail sur les mouvements centraux) que la conservativité [le caractère conservatif] approximative de plusieurs systèmes macromécaniques et aussi la conservativité supposée (dans la mécanique quantique ancienne) des microsystèmes au niveau de l'atome et la molécule, est seulement la conséquence statistique des "vraies" équations non conservatives à la place desquelles on substitue des équations conservatives. […] Après beaucoup d'expériences qui ont établi la nature "ondulatoire" de la matière et aussi l'apparition de la nouvelle mécanique quantique, il est évident que nos études habituelles macroscopiques sont insuffisantes pour étudier les phénomènes atomiques. Il est clair que cette insuffisance ne peut pas être compensée par le remplacement des équations conservatives par des équations non conservatives appliquées aux atomes. Il peut y avoir autre chose. Un physicien utilise souvent la théorie classique pour divers calculs. Pour beaucoup de choses en optique la théorie classique est une bonne approximation asymptotique de la réalité. On peut penser qu'on va avoir une autre approximation de la réalité…". Merci à Valentin Ovsienko pour la traduction.***

[903] Tiré de [DINER, S., FARGUE, D., LOCHACK, G., 1986], p. 252. L'original (en russe) se trouve dans les "Collected Works" d'Andronov : [ANDRONOV, A.A., 1956], p. 109.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est



Cependant, le coeur des développements de l'école d'Andronov est constitué par les méthodes d'analyse qualitative des systèmes : en particulier les applications de premier retour, l'utilisation des récurrences, les études de stabilité et des bifurcations. La compilation de ces méthodes constitue l'ouvrage, véritable bible sur le sujet, Théorie des oscillations, publié en 1937, dont les auteurs sont Andronov, Khaikin (et Vitt [904]).

Les analyses sont liées à une problématique assez générale, celle de la **modélisation** des systèmes physiques, extrêmement importante pour ces physiciens-mathématiciens. L'introduction de l'ouvrage Théorie des oscillations est une discussion de la modélisation mathématique, et la théorie mathématique entend donner les moyens d'étude de ces modèles. Il ne s'agit que des **modèles dynamiques** ; les aspects statistiques des oscillations sont abordés par d'autres approches, hors du sujet de leur théorie des oscillations. Ceci explique le grand intérêt pour les équations différentielles et les travaux de Poincaré et Birkhoff.

En outre, l'étude des systèmes physiques "réels" implique des simplifications et des idéalisations [905] , un peu à l'opposé de la Mécanique céleste, pourrait-on ajouter. La construction de modèles mathématiques contraint à ce que ces modèles, pour être acceptables, soient stables dans deux sens : stables au sens des théories de Lyapounov (par variation des conditions initiales) ; leurs propriétés doivent être stables par

[904] Diner traduit le titre de cet ouvrage russe par Théorie des vibrations. Le titre de l'édition américaine de 1949 est Theory of oscillations. Les seuls auteurs mentionnés originellement sont Andronov et Khaikin : le nom de Vitt, victime des purges staliniennes, a été enlevé de cette édition. La seconde édition de 1959, fortement augmentée, fait apparaître son nom. [DINER, S., 1992], p. 342.

[905] Première phrase de l'introduction d'Andronov.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

modification du modèle mathématique lui-même (c'est-à-dire de ces paramètres). D'où l'intérêt pour les **bifurcations** et le développement consécutif de la notion de "**systèmes grossiers**", en 1937, par Andronovet Lev Pontryagin (1908-1988) [906], qui correspond à la seconde notion de stabilité ; la traduction occidentale, par Lefschetz, transformera cette notion en "stabilité structurelle".

Déjà en 1933, la question des bifurcations est soulevée et, d'après Diner, l'école de Gorki va développer l'étude des bifurcations sous toutes leurs formes, les répertoriant et les analysant d'une manière systématique pour les systèmes dynamiques dont l'espace des phases est plan [907]. La bifurcation d'un point d'équilibre en un cycle limite en est un exemple [908].

Quant au concept de "système grossier" et vu l'importance qu'il aura par la suite, il mérite quelques explications [909]. Au fond, un modèle mathématique sera intéressant pour la physique si par une petite modification dans les équations du modèle, les propriétés qualitatives ne sont pas altérées.

En termes mathématiques, un système est dit grossier si une petite variation dans les équations du système induit une transformation (homéomorphisme) de l'espace des phases laissant inchangé le portrait de phase, c'est-à-dire qui envoie les points critiques aux points critiques, les cycles limites sur les cycles limites, etc. Andronov en donne ainsi une définition mathématique rigoureuse et, de cette manière, propose une classe de systèmes mathématiques adaptés à la modélisation des systèmes physiques.

Une ligne de recherche mathématique sur le sujet consistait alors à déterminer, pour un système grossier en général, quels peuvent être les plus typiques de ses comportements qualitatifs possibles. En 1937 déjà, il semblerait que la théorie des systèmes grossiers était bien avancée dans le cas des systèmes bidimensionnels. Cette théorie avait pour conséquence essentielle, en rapport avec la théorie des oscillations, que **pour des systèmes grossiers, seuls les cycles limites peuvent représenter les oscillations auto-entretenues**.

En résumé, le travail initié par Andronov a autorisé la construction d'un cadre mathématique permettant l'étude des systèmes dissipatifs, grâce au **transfert** d'une partie des technologies mathématiques de Poincaré, Lyapounov et Birkhoff, et au développement très important au sein de l'"école de Gorki". Les problématiques et les

[906] Pontryagin est un mathématicien célèbre pour ses travaux en topologie et théorie des processus maximaux. L'article fondateur de 1937 a été traduit et inclus en annexe de la traduction américaine de l'ouvrage d'Andronov (Vitt) Khaikin : [ANDRONOV, A.A., KHAIKIN, S.E., 1949].

[907] [DINER, S., 1992], p. 342.

[908] Elle est couramment appelée bifurcation de Hopf, mais Andronov en a également fait part et on peut en trouver le germe dans les travaux de Poincaré (cf. p. 408) D'où le nom de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf qui lui est parfois donnée. Voir également page 445.

[909] Nous nous appuyons dans ce paragraphe, sur l'opinion de Vladimir Arnold, retranscrite dans [AUBIN, D., DAHAN DALMEDICO, A., 2002], p. 287, et les commentaires de la même page.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

perspectives de recherche sont considérablement renouvelées par l'exportation du point de vue qualitatif et mathématique dans les systèmes dissipatifs ; les interactions avec la physique, évoquées brièvement sont très significatives et participent à la construction de la théorie ; le volet "enjeux techniques et applications" méritera un traitement plus complet. Dans ce mouvement, l'étude des équations différentielles acquiert ainsi des moyens nouveaux et prend une ampleur sans précédent, tout en conservant son aspect qualitatif. La théorie des bifurcations est particulièrement développée, toujours dans le même esprit, et le traité Théorie des bifurcations des systèmes dynamiques du plan [910] est l'équivalent de Théorie des oscillations sur le thème des bifurcations.

L'école de Kiev : N. Kryloff et N. Bogoliuboff

Si le ressort des travaux d'Andronov est l'analyse qualitative, les méthodes quantitatives sont utiles [911] , mais secondaires. En revanche, les travaux de Nicolaï M. Kryloff [912] et Nicolaï N. Bogoliuboff (né en 1909) ont fourni des méthodes quantitatives très performantes. Le contexte est différent de celui de Gorki : ils travaillent à Kiev (Ukraine) où ils contribuent à lancer une école de mathématiques sur leur thème de prédilection : la Mécanique non linéaire. En quelque sorte, il s'agit de suites données au second tome des Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste de Poincaré, centré sur ces questions de développements analytiques et de développements en série. Kryloff et Bogoliuboff se taillent une réputation sur les questions de développements asymptotiques et de méthodes d'approximations. Le rapport aux travaux plus pratiques est un trait commun avec l'école de Gorki. Leurs résultats sont nombreux mais le renouvellement problématique n'a pas l'ampleur de celui proposé par l'école d'Andronov ; L'attention est concentrée sur la méthodologie de l'approximation. L'impact de ces travaux est différent, non moins important. Kolmogorov, lorsqu'il abordera des questions de systèmes dynamiques par exemple, puisera en particulier dans ces méthodes.

Avant la seconde guerre mondiale, ce sont les deux contextes les plus actifs et les plus florissants pour ce qui est des oscillations non linéaires et des équations différentielles non conservatives. Ce qui ne veut pas dire que la science occidentale est absente ou ignorante du domaine.

Les oscillations non linéaires en Europe occidentale

[910] L'ouvrage est publié en 1967, bien après la mort d'Andronov : [ANDRONOV, A.A., LEONTOVICH, E.A., GORDON, I.I., MAIER, A.G., 1973] (traduction). En 1966, un autre ouvrage Théorie des systèmes dynamiques du plan est publié : [ANDRONOV, A.A., LEONTOVICH, E.A., GORDON, I.I., MAIER, A.G., 1971] (traduction).

[911] Les méthodes quantitatives sont intéressantes car il y a des questions d'ordre strictement quantitatif dans l'étude des oscillations (comme la période d'une oscillation), mais rien ne se fait sans une intégration qualitative préalable. De même pour les calculs numériques approchés, qui doivent être employés judicieusement et en les combinant avec l'analyse qualitative. [ANDRONOV, A.A., KHAIKIN, S.E., 1949], introduction, p. xxxii.

[912] Il s'agit de Nicolaï Mitrofanovich Kryloff (1879-1955) à ne pas confondre avec son compatriote Nicolaï Sergeevich Kryloff (1917-1947) connu pour ses travaux de mécanique statistique (dont les travaux sont analysés au chapitre 7).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

L'Europe de l'ouest, essentiellement, ne reste pas inactive durant ces quelques années. Comme nous le verrons au chapitre 8 la problématique des oscillations non linéaire occupe une communauté importante dans les années 1930. Il faut signaler que jusqu'en 1937 au moins, les relations scientifiques, sur le thème des oscillations non linéaires, avec l'URSS sont soutenues et les résultats ne connaissent que l'éventuelle frontière de la langue [913] . Mais, pour ce qui est des mathématiques des systèmes dynamiques, les résultats sont plus limités et seuls quelques uns ont compté dans le processus que nous décrivons. On notera au préalable que, un peu à la manière de l'école de Gorki, ces considérations émanent des problèmes de physiques et d'ingénieurs, de l'électronique à la radio et au RADAR. Mais il existe une grande différence : les analyses occidentales ont commencé avec très peu de connaissances des travaux de Poincaré, Lyapounov et Birkhoff, ce qui peut paraître paradoxal.

Chronologiquement, Balthasar Van der Pol est le premier à participer au développement des méthodes quantitatives pour les oscillations dites de "relaxation", en combinant des méthodes classiques, tant analytiques que graphiques [914] , et son travail plus proche des questions techniques, moins mathématique, est plus impressionnant. En 1928, le français Alfred-Marie Liénard a introduit à la fois une généralisation de l'équation de Van der Pol (parfois appelée équation de Liénard) et un procédé géométrique permettant de montrer l'existence de solutions périodiques dans l'équation [915] .

D'autres scientifiques peuvent être cités pour des interventions ponctuelles, notamment Jules Haag pour les méthodes d'approximation [916] . On peut ajouter une liste de mathématiciens français, occupés à des questions d'analyse mathématique et s'intéressant aux équations différentielles, de manière déconnectée des questions techniques. Nous avons mentionné Jean Chazy [917] . Henri Dulac pour son travail sur les cycles limites doit également être signalé [918] . Arnaud Denjoy, reprenant une question de Poincaré, développe quelques éléments à propos des équations différentielles sur le tore, qui seront repris par Kryloff et Bogoliuboff [919] .

[913] La note d'Andronov de 1929 est publiée en français. Kryloff est correspondant de l'Académie des Sciences et il publie, avec Bogoliuboff, de nombreuses notes et mémoires en français tel que [KRYLOFF, N., BOGOLIUBOFF, N., 1933].

[914] Voir le chapitre 8, page 519, pour des détails sur les travaux de Van der Pol..

[915] A-M Liénard (1869-1958) est polytechnicien et fait partie du corps des Mines. Il est professeur à la chaire d'Electricité Industrielle de l'Ecole des Mines de Paris en 1928 (il en sera directeur à partir de 1929). Le résultat date de 1928 ; à ce moment là, le lien entre cycle limite et oscillation périodique n'a pas été proposé par Andronov. Il n'est donc pas question de recherche de cycle limite chez Liénard, mais de "courbe intégrale fermée" signifiant la trajectoire périodique dans son équation. [LIENARD, A., 1928].

[916] Jules Haag, mécanicien et mathématicien français. Sa méthode est proche d'une méthode également construite par Kryloff et Bogoliuboff. [HAAG, J., 1938 / 1943 / 1944].

[917] Au chapitre 1, p. 66.

[919] Arnaud Denjoy (1884-1974) est un analyste remarqué, élève de Borel, Painlevé et Picard. Voir [CARTWRIGHT, M.L., 1952], p. 86.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Cependant, dans l'entre-deux guerres, ces résultats sont limités. Ce sont des pierres apportées à l'édifice, mais dont l'impact a été moins déterminant que celui des soviétiques, excepté les travaux des mathématiciens Levinson (au MIT), Cartwright et Littlewood (tous deux à Cambridge en Grande-Bretagne).

En effet, la mathématicienne Mary Lucy Cartwright (1900-1998) et son collègue John Littlewood [920] produisent des analyses poussées de quelques équations différentielles bien précises, dérivées des équations de Liénard [921]. Ils sont investis dans des recherches sur ces équations issues des techniques de la radio, à partir de 1938, en Grande-Bretagne ; comme leurs homologues continentaux, ils entament leurs recherches sans connaissance approfondie des résultats et des méthodes de Poincaré. Outre-atlantique, Norman Levinson [922] s'engage dans une voie plus méthodologique en proposant de généraliser aux systèmes dissipatifs les résultats des théories des transformations du plan dans lui-même, définies par Poincaré (section transverse et application de premier retour) et développées par Birkhoff (mathématicien à Harvard, établissement voisin du MIT [923]) dans le cadre des systèmes conservatifs [924]. En 1944, il propose un article dans la veine de la théorie qualitative des équations différentielles "à la Poincaré", fournissant des moyens topologiques d'étude de la dynamique, qui n'a rien à envier aux travaux soviétiques.

En utilisant les méthodes topologiques de Levinson, Cartwright et Littlewood étudient l'équation de Van der Pol avec terme forcé :

[918] Henri Dulac a travaillé sur les équations différentielles (voir par exemple [DULAC, H., 1912]), et plus particulièrement à la recherche des cycles limites. Le problème auquel est attaché son mémoire le plus important ([DULAC, H., 1923]) est le 16ème problème de Hilbert, qui consiste à déterminer le nombre maximal et les positions relatives des cycles limites d'un système polynomial plan de degré *n*. Dulac pensait avoir montré que le nombre de cycles limites est fini pour n'importe quel *n*. Une erreur dans sa démonstration n'a été détectée qu'en 1985 par Yulij Ilyashenko ! ([ILYASHENKO, Y.S., 1985]).

[920] John E. Littlewood (1885-1977) est plus connu pour sa longue collaboration avec l'autre grand mathématicien de Cambridge, Godfrey H. Hardy (1877-1947), et leurs travaux sur les séries, la théorie des fonctions, la fonction zêta de Riemann, etc.

[921] Nous renvoyons aux articles [McMURREN, S.L., TATTERSALL, J., 1996 / 1999] dont on trouve quelques éléments dans [AUBIN, D., DAHAN DALMEDICO, A., 2002], p. 290-1.

[922] Norman Levinson (1912-1975) a été formé au MIT, d'abord comme ingénieur en électricité, puis a passé un PhD en mathématiques. En 1934, il est allé à Cambridge, là où Hardy enseigne, mais vouait apparemment plus d'intérêt à Littlewood, meilleur mathématicien selon lui (G.-C. Rota rapporte cela dans [LEVINSON, N., 1998], p. xxxvi.)

[923] Cette proximité ne suffit pas à "expliquer" l'utilisation, d'ailleurs abondante, des travaux de Birkhoff par Levinson. Si ils travaillent dans la même ville, il faut aussi rappeler que George D. Birkhoff est un antisémite notoire (voir [MACLANE, S., 1994] par exemple) et Levinson est issu d'une famille juive, d'origine russe ; il sera même un combattant de l'antisémitisme (et de toute forme de discrimination d'ailleurs). Cela n'est pas fait pour les rapprocher.

[924] [LEVINSON, N., 1944]. Levinson connaît les travaux de Kryloff et Bogoliuboff.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

$$\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$$

Les résultats publiés en 1945 font état de la découverte, un peu surprenante, d'un ensemble de trajectoires, aux propriétés complexes.

Pour *b<2/3* et *k* assez grand, ils montrent qu'il existe une solution périodique, vers laquelle le comportement tend asymptotiquement. Dans le cas *b>2/3*, il existe un ensemble K_0 de trajectoires non périodiques, aux propriétés singulières [925].

Levinson montre, en 1949, qu'il s'agit bien des "courbes fermées remarquables", dont l'existence avait été soupçonnée dans le cas des transformations analytiques du plan par Birkhoff (et M. Charpentier). Leur présence dans des problèmes de dynamique était douteux ; le travail accompli par les trois mathématiciens l'accrédite et montre en outre que l'objet K_0 est stable, autrement dit qu'il ne s'agit pas d'un cas trop exceptionnel.

Cartwright, Littlewood et Levinson participent à un mouvement parallèle aux considérations soviétiques et produisent des objets mathématiques étranges. Leur importance sera révélée par les résultats de Smale, quelques années plus tard : en les exprimant dans un langage plus géométrique il en extraira son "fer à cheval".

Dans le domaine des études des équations différentielles, hors d'URSS, il reste à mentionner le travail d'Eberhard Hopf [926] (1902-1983), en matière de théorie des bifurcations. L'histoire a retenu la bifurcation de Hopf (ou Andronov-Hopf) tirée de son principal article publié en la matière en 1942 [927]. Le théorème de Hopf donne un critère pour déterminer quand une famille de points d'équilibre peut bifurquer en une famille de mouvements périodiques, ainsi que l'état de stabilité ou d'instabilité des solutions de la branche bifurquant. Andronov a étudié le même phénomène ; mais de toute manière, Hopf ne prétend même pas innover en la matière et renvoie à Poincaré :

"J'ose à peine penser qu'il y a du nouveau dans le théorème ci-dessus. Les méthodes ont été développées par Poincaré il y a peut-être 50 ans et font aujourd'hui partie de la structure conceptuelle classique de la théorie des solutions périodiques […]." [928]

[925] Il est connexe, de mesure zéro et fait penser aux "courbes fermées remarquables" de Birkhoff. Cartwright et Littlewood affirment que les expériences sur les sous-harmoniques décrites par Van der Pol et Van der Mark ([VAN DER POL, B., VAN DER MARK, M., 1927]), leur ont permis de maintenir une conviction quand à l'existence de cet objet. [CARTWRIGTH, M.L., LITTLEWOOD, J.E., 1945], p. 182.

[926] Hopf est un mathématicien d'origine autrichienne, plus connu pour ces travaux en théorie ergodique.

[927] L'original est en allemand ([HOPF, E., 1942]) et il a été traduit en 1976 en anglais dans [MARSDEN, J.E., McCRACKEN, 1976], p. 163-193. Le second article [HOPF, E., 1948] traite d'une théorie de la turbulence, construite avec cette notion de bifurcation. Pour cet aspect, voir page 445.

[928] ***Traduction de la traduction anglaise : "I scarcely think that there is anything new in the above theorem. The methods have been developed by Poincaré perhaps 50 years ago and belong today to the classical conceptual structure of the theory of periodic solutions in the small.", [MARSDEN, J.E., McCRACKEN, 1976], p. 163.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

A la différence des autres travaux antérieurs à 1945, ces considérations de Hopf ne s'intègrent pas dans une perspective de développement continu d'une problématique, de type étude de la dynamique ou des équations différentielles (elles montrent cependant que les travaux de Poincaré sur les bifurcations ne sont pas totalement ignorés à l'ouest non plus). Hopf se raccroche seulement à Poincaré et le texte est quasiment totalement ignoré avant les années 1970 [929] . Seuls Jürgen Moser y fait allusion en 1964, René Thom dans Stabilité Structurelle et Morphogenèse en 1966 [930] . En reprenant l'interprétation de Aubin [931] , c'est le succès de l'article de Ruelle et Takens qui remettra la bifurcation de Hopf au goût du jour. Ainsi on comprend mieux l'hommage rendu à Hopf lors de la conférence de New York de 1977 [932] , qui lui est dédiée.

En définitive, en comparant ces analyses occidentales aux travaux soviétiques, force est de constater qu'ils sont épars, n'ont pas la même cohérence ni la même ampleur théorique. Ils ne sont pas insignifiants, bien au contraire, mais l'école Andronov, en particulier, produit plus que des résultats ponctuels, elle construit un cadre d'étude des oscillations non linéaires.

Avec Birkhoff et Andronov, les systèmes dynamiques sont définis de manière générale comme des équations différentielles : la mention "dynamique" est une référence à la mécanique, à l'évolution déterministe dans le temps. En période de développement des théories probabilistes et de la Mécanique quantique, le terme n'est pas anodin et signe une volonté de se distinguer de ces conceptions. En outre, grâce aux travaux de Birkhoff et d'Andronov, les systèmes dynamiques, autant conservatifs que dissipatifs, trouvent un cadre mathématique bien échafaudé, dont les grandes lignes sont finalement publiées dès 1937. Elles seront mieux diffusées et connues au sortir de la seconde guerre mondiale.

Par ailleurs, le travail de Poincaré trouve toute sa place dans cet ensemble. Ils sont à la base des considérations mathématiques, ils sont intégrés aux deux corpus et avec Birkhoff, **rien d'essentiel n'est oublié**. Mais, par ce processus, ils ont aussi été étendus, relus, transformés et insérés dans de nouvelles perspectives. Andronov a produit un cadre nouveau et adapté les résultats de Poincaré. Même si le vocabulaire et les outils mathématiques sont repris à Poincaré, l'ouvrage de Birkhoff par la perspective plus

[929] Hopf a passé quatre années (1931-36) au MIT, et a travaillé avec Birkhoff sur des questions de mécanique classique. On peut penser que cette question de bifurcation émane en partie de ces études sur la dynamique. En outre, en 1936, il a accepté un poste à l'Université de Leipzig, en pleine période nazie. Le désintéressement des considérations de Hopf peut éventuellement se percevoir comme une réaction à son acceptation du régime nazi. Il a également participé aux recherches en aéronautique et mécanique des fluides pendant la seconde guerre mondiale : son travail sur les bifurcations, et ses propositions sur le sujet de la turbulence émerge dans ce contexte un peu particulier. Voir [FRANK, M., 2000].

[930] [AUBIN, D., 1998a], p. 463.

[931] [AUBIN, D., 1998a], p. 463. Ruelle et Takens abordent, en effet, le sujet dans l'article de 1971. Voir [AUBIN, D., 1998a], p. 467-472 et la fin de ce chapitre, page 445, pour la comparaison entre les théories de la turbulence de Hopf et Ruelle-Takens.

[932] "Bifurcation theory and applications in scientific disciplines" : [GÜREL, O., RÖSSLER, O.E., 1979].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

topologique adoptée, nous donne à voir les travaux de Poincaré, repensés par Birkhoff, en léger décalage par rapport aux perspectives initiales. L'entre deux guerres est une deuxième étape dans le processus de construction des mathématiques des systèmes dynamiques. La troisième étape, naturellement inspirée par ces développements, profite d'un changement de contexte et de l'action de Solomon Lefschetz.

6.2. Les systèmes dynamiques aux Etats-Unis : de S. Lefschetz à S. Smale

Avec la seconde guerre mondiale, les mathématiques des systèmes dynamiques vont arriver aux Etats-Unis et subir une nouvelle évolution importante. Nous allons voir que ce changement de contexte national, historique, institutionnel est associé à une évolution des problématiques et à une nouvelle mutation des mathématiques des systèmes dynamiques.

Solomon Lefschetz et l'école qu'il va diriger dans l'après guerre se trouvent au coeur du développement des problématiques aux Etats-Unis. Dans un premier temps, nous montrerons qu'il s'y produit d'une part un approfondissement de la notion de stabilité structurelle, et d'autre part le développement d'un nouveau point de vue sur les systèmes dynamiques, nommément l'analyse globale.

Ensuite, avec l'école de Smale, à Berkeley dans les années 1960, nous suivrons la synthèse des concepts de Lefschetz, de Birkhoff, de Levinson ; un nouveau cadre pour les systèmes dynamiques, toujours plus topologisé en émerge, avec de nouvelles conceptions sur la dynamique, incarnée par la théorie hyperbolique. Les conséquences et les développements des années 1970 en sortiront éclairés.

a. L'action de Lefschetz

Solomon Lefschetz (1884-1972)

Né à Moscou, la même année que Birkhoff, Lefschetz émigre en France avec ses parents. D'origine juive, russe, il poursuit ses études jusqu'à entrer à l'Ecole Centrale. En 1905 il en sort ingénieur et quitte la France pour les Etats-Unis dans l'idée d'acquérir de la pratique en ingénierie électrique. Un accident, conduisant à l'amputation de ses deux mains, réoriente sa carrière vers les mathématiques. Il prépare une thèse de mathématiques en 1911 et s'occupe surtout de géométrie algébrique et de topologie. Sa carrière suit son cours, entre postes d'assistant et de professeur associé, avant de parvenir à un poste de professeur à Princeton, en 1924, où il va côtoyer les mathématiciens américains les plus prestigieux et les nouveaux immigrants européens dans les années 1930.

La seconde guerre mondiale marque un tournant dans la vie scientifique de Lefschetz, pourtant âgé de 60 ans en 1944. Cette impulsion va, en effet, le conduire à s'intéresser aux équations différentielles.

Avec la forte mobilisation scientifique de la guerre, Lefschetz est sollicité pour devenir

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

consultant à l'"Office of Naval Research" (ONR), sur la question des équations différentielles non linéaires. Son activité à Princeton, ses cours et séminaires sont réorientés sur le sujet. D'une certaine manière il renoue avec son passé d'ingénieur puisque ces recherches sont naturellement associées aux questions de sciences de l'ingénieur.

Dès 1942, Lefschetz propose une traduction libre d'une série de travaux de Kryloff et Bogoliuboff, publiée en 1943 sous le titre Introduction to nonlinear mechanics [933] . Il parle couramment plusieurs langues, dont le russe, et puise directement dans les originaux. Les travaux en question ne concernent alors que les méthodes quantitatives, utilisées dans les domaines des phénomènes dissipatifs. La question des méthodes qualitatives est abordée à la suite d'un rapport rendu public en 1945, rédigé par Nicolas Minorsky pour l'ONR et publié sous le titre Introduction to nonlinear mechanics en 1947 [934] .

Cet ouvrage est un concentré des méthodes d'analyse des équations différentielles. Il n'existe pas encore de traduction de la Théorie des oscillations d'Andronov et ses collaborateurs ; Minorsky en reprend les grandes lignes dans la première partie consacrée aux "méthodes topologiques" (cycles limites, théorie des bifurcations, étude géométrique des mouvements périodiques...). Avec les méthodes topologiques, les méthodes analytiques (Poincaré, Van der Pol, Kryloff et Bogoliuboff), les études des systèmes à plusieurs degrés de liberté, le traitement des résonances et des oscillations de relaxations, l'ouvrage embrasse l'essentiel des méthodes connues pour analyser les équations différentielles. Il va sans dire qu'il aura un impact considérable, sur Lefschetz, mais aussi sur toute la communauté du non linéaire, comme nous le verrons au chapitre 8.

L'épanouissement dans la guerre froide

A partir de 1944, l'intérêt pour les équations différentielles est fermement établi pour Lefschetz. La lecture du rapport de Minorsky incite Lefschetz à entreprendre la traduction plus systématique des travaux soviétiques, ceux d'Andronov en particulier. Il traduira lui-même quelques travaux de Kryloff et Bogoliuboff pendant la guerre, le mémoire de Lyapounov sur la stabilité en 1947 et Théorie des oscillations en 1949. En 1946, Lefschetz rédige également son propre ouvrage, Lectures on differential equations. Par ces multiples traductions et les efforts de Minorsky et Lefschetz, les théories de Poincaré, Lyapounov et les travaux soviétiques font leur apparition aux Etats-Unis. Ils s'insèrent surtout dans un effort de recherche, aux répercussions importantes car tel est l'impact de l'action de Lefschetz, à Princeton dans un premier temps, puisqu'il y est institutionnellement rattaché. L'ONR et l'armée américaine agissent dans ce sens et financent des contrats de recherche dans le domaine [935] . Le cadre institutionnel de ces recherches prend une nouvelle dimension après 1957 : en 1953 Lefschetz est retraité de

[933] La première édition est de 1943, la seconde de 1949 : [KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1949].

[934] Voir [MINORSKY, N., 1947]. En fait, Lefschetz a participé au projet géré par Minorsky. Il est difficile de savoir sur quels aspects il a travaillé avec lui, mais vu les premières traductions qu'il réalise, il s'agit très probablement des méthodes quantitatives de Kryloff et Bogoliuboff.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Princeton, le projet décroche un peu, mais lorsque le Spoutnik soviétique est mis en orbite, le choc entraîne le déploiement de moyens importants pour la recherche. Ce contexte de guerre froide contribue largement au développement des systèmes dynamiques aux Etats-Unis [936]. Dans le cas particulier de Lefschetz, la "Martin Company", fabriquant d'avions et de missiles [937], propose la création du Research Institute for Advanced Study (RIAS) à Baltimore et donne à Lefschetz les moyens de son action de recherche. Le centre deviendra mondialement connu. Au bout de six années de fonctionnement, il est accueilli à Brown University (à Providence) et devient le Center for Dynamical Systems, qui prend le nom de Lefschetz en 1974.

Lefschetz met en place un séminaire, fait publier les contributions de son école et de ses collègues dans la collection des Annals of Mathematical Studies de Princeton. Entre 1950 et 1960, cinq volumes des Contributions to the theory of non-linear oscillations sont édités.

Les spécialistes de la théorie des équations différentielles des années 1940 participent à cette activité. Mary Cartwright est invitée par Lefschetz au séminaire en 1949. Elle publie ses travaux dans les Contributions [938], ainsi que Norman Levinson. Dans le même temps, de jeunes chercheurs y font leurs premières armes [939]. La maîtrise de l'approche qualitative des équations différentielles grandit, comme la thèse de Stephen Diliberto le laisse percevoir [940].

La stabilité structurelle et l'analyse globale

Le cadre institutionnel, les interactions avec l'armée auraient pu être l'occasion de mener une activité allant du plus concret au plus théorique. Il semble qu'il n'en soit rien, et ce sont surtout les mathématiques qui se développent.

Sur la lancée du mouvement de traduction et d'analyse des travaux soviétiques,

[935] Air Force of Scientific Research, Office of Aerospace Research, Army Ballistic Missile Agency, d'après [DAHAN DALMEDICO, A., 1994], p. 140.

[936] Cette affirmation, partagée avec Dahan et Aubin, concerne surtout les travaux de l'école de Lefschetz et ne s'appuie que sur quelques indices dispersés. Il n'existe pas d'étude systématique susceptible de quantifier et de préciser l'importance du complexe militaro-industriel sur le développement des mathématiques des systèmes dynamiques. Cependant, vu le contexte et la place des militaires dans le système de recherche américain après 1945, on ne peut pas douter que leur présence est déterminante.

[937] La compagnie est devenue la Martin-Marietta Company, et aujourd'hui la Lockheed-Martin Company, qui, avec Boeing, constitue une entreprise majeure en aéronautique militaire.

[938] Par exemple, dans le premier volume : [CARTWRIGHT, M.L., 1950].

[939] Voir [DAHAN DALMEDICO, A., 1994], p. 144-145. On peut citer les nouveaux noms de : F. Brownell, L.L. Rauch ou J. McCarthy, pour des travaux plus calculatoires ; J.G. Wendel, W. Wasow abordent plutôt les aspects géométriques et qualitatifs.

[940] Ses résultats sont publiés dans les Contributions : [DILIBERTO, S.P., 1950]. Ils concernent les théorèmes de réduction des systèmes d'équations différentielles ordinaires ; ceci est relié au premier mémoire de Poincaré sur les équations différentielles.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

l'essentiel de la recherche faite sous l'égide de Lefschetz se tourne vers la théorie des oscillations, la théorie générale des systèmes dissipatifs à petit nombre de degrés de liberté. Un autre pan de l'activité concerne les études algorithmiques des singularités des points critiques et les bifurcations d'orbites périodiques [941] .

Dans la perspective de l'histoire des mathématiques des systèmes dynamiques, les réflexions à la frontière des mathématiques et de la physique ont engendré un développement très mathématique sur la notion de **stabilité structurelle**. L'idée trouve sa source dans les "systèmes grossiers" d'Andronov et Pontryagin, apparus en 1937, et que Lefschetz a choisi de traduire par "systèmes structurellement stables". Lefschetz en a perçu rapidement l'intérêt pour des questions pratiques ; il faut peut-être y voir un reste de son affinité avec les problèmes de la physique et de l'ingénieur. En tout cas, Lefschetz dirige un élève, le père Henry De Baggis, dans des recherches sur la stabilité structurelle.

La stabilité structurelle est directement liée à des questions de modélisation [942] ; mais elle s'impose aussi dans la problématique de théorisation et de **classification** des systèmes dynamiques non linéaires. En effet, cette notion est un critère pour définir une classe générale de systèmes dynamiques, dont on espère les propriétés suffisamment homogènes pour être soumises à une théorie mathématique générale. Voilà la source d'une perspective nouvelle, en train de s'ouvrir en mathématiques : l'**analyse globale des systèmes dynamiques** dans laquelle s'inscrit De Baggis en 1952 et pour laquelle il fournit un premier jalon.

En 1952, De Baggis obtient les premiers résultats importants en la matière, en parvenant à préciser et démontrer mathématiquement quelles sont les propriétés des systèmes structurellement stables du plan [943] : ils n'ont qu'un nombre fini de cycles limites et De Baggis montre, au sujet des points critiques, qu'une séparatrice issue d'un point-selle ne peut pas tendre vers un point-selle (lui-même ou un autre).

L'analyse globale acquiert ses lettres de noblesse dans l'ouvrage de Lefschetz de 1957, faisant la synthèse des travaux soviétiques et des derniers résultats de ses élèves : Differential equations, geometric theory [944] .

La stabilité structurelle et les résultats de De Baggis sont reformulés sur la base des systèmes "généraux" [945] qui vérifient les propriétés suivantes :

(i) il n'y a qu'un nombre fini de points critiques, tous élémentaires, et pas de centre,

(ii) il n'existe pas de séparatrice joignant deux points-selle,

[941] Voir [DAHAN DALMEDICO, A., 1994].

[942] En effet, la stabilité structurelle est un critère imposé par la "réalité" physique, expérimentale pour définir ce que peut être un "bon" modèle (c'était la philosophie d'Andronov et Pontryagin à l'origine des "systèmes grossiers").

[943] Résultats publiés dans [DEBAGGIS, H., 1952].

[944] [LEFSCHETZ, S., 1957].

[945] Voir la monographie de Lefschetz et [DAHAN-DALMEDICO, A., 1994], p. 147-8.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

(iii) il n'y a qu'un nombre fini de trajectoires fermées, et chaque cycle limite a un indice caractéristique non nul.

Le "théorème de De Baggis" exprime alors qu'un système, en dimension deux, est structurellement stable si, et seulement si, il est "général".

L'analyse globale est lancée. Mais "global" n'a plus le sens admis dans les analyses de Poincaré. Celui-ci portait un regard global sur les équations différentielles, au sens où l'ensemble des solutions était embrassé dans la même analyse. Désormais, il ne s'agit pas de raisonner par rapport aux solutions d'un système donné, mais de penser un système dynamique par rapport à l'ensemble des systèmes dynamiques ou à une classe à laquelle il appartient. Poincaré proposait de classer les solutions des systèmes dynamiques ; l'analyse globale se propose de classer les systèmes dynamiques eux-mêmes.

Le second jalon déterminant pour l'analyse globale est posé par Mauricio Peixoto, un élève de Lefschetz d'origine brésilienne. Il raffine cette nouvelle perspective d'analyse, en introduisant à nouveau des éléments de topologie et en produisant un résultat important en 1959.

Pour résumer, il considère l'ensemble *E* des champs de vecteurs C^1 sur une variété différentiable *M*, compacte, sans bords. Schématiquement, deux systèmes *S* et *S'* de *E* sont qualitativement équivalents s'il existe une transformation (homéomorphisme) de *M* qui envoie les solutions de *S* sur celles de *S'*. Un système *S* est ainsi structurellement stable lorsqu'il existe un voisinage de *S* ne contenant que des systèmes équivalents à *S*.

Le théorème de Peixoto, démontré en 1959, affirme alors que les systèmes structurellement stables sur une variété M à deux dimensions forment un ensemble ouvert, dense dans l'ensemble des systèmes sur M [946]. Autrement dit, on peut approcher un système quelconque sur M, par un système structurellement stable. Ce qui revient à dire que les systèmes structurellement stables sont "majoritaires" en dimension deux.

Le résultat est doublement important. D'une part, il donne du sens à la notion de stabilité structurelle et assure ses prétentions épistémologiques à être un "bon" critère pour la modélisation. D'autre part, le processus de développement des considérations d'analyse globale passera par des tentatives de généralisation de ce résultat. Ainsi s'ouvrent les années 1960 avec l'entrée en scène de Steve Smale et une nouvelle ère pour les mathématiques des systèmes dynamiques.

On peut, pour terminer, signaler que l'école Lefschetz a une activité, qui naturellement ne s'arrête en 1960 ; elle se poursuit en matière de mathématiques des systèmes dynamiques, de méthodes analytiques pour l'étude des singularités, de contrôle et de stabilité. Ainsi les méthodes de Lyapounov (première et surtout deuxième méthode) sont développées ; la théorie du contrôle prend son essor sur cette "seconde méthode" (dite aussi "méthode directe"), Lefschetz s'y intéressant personnellement [947]. Les élèves

[946] [PEIXOTO, M., 1959] voir aussi son intervention au Symposium sur les équations différentielles de 1959 à Mexico : [ADEM, J., CESARI, L., LASALLE, J.P., LEFSCHETZ, S., LLUIS, E., 1959], p. 190 .

[947] Avec son élève, Joseph LaSalle : [LEFSCHETZ, S., LASALLE, J.P., 1961].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

de Lefschetz sont nombreux et participent au rayonnement de l'école et à la promotion des équations différentielles aux Etats-Unis. Il est hors de question d'en faire un tableau exhaustif, mais on peut ajouter les noms de Joseph LaSalle, Jack Hale et Lamberto Cesari (1910-1990) à la liste de ceux cités, pour leurs multiples travaux et le maintien de l'élan donné par Lefschetz [948] .

Un premier bilan

Les quelques jalons que nous avons posés témoignent d'une grande continuité au sein des travaux mathématiques réalisés de 1940 à 1960. L'héritage des soviétiques, dûment traduit, est exploité et sert à l'appropriation des moyens d'analyse des équations différentielles de Poincaré et Lyapounov. Les travaux de Cartwright, Littlewood et Levinson sont intégrés à cet effort remarquable de synthèse. Par ailleurs, le recul de l'histoire sur cette époque conduit à pointer une rupture avec l'émergence de l'analyse globale : le changement n'est pas encore apparu comme extrêmement significatif, mais les développements des années 1960-70 montreront l'impact de cette perspective.

L'école Lefschetz a donc laissé une quantité énorme de résultats, pour l'étude analytique, géométrique, topologique et qualitative des systèmes dynamiques, dont une partie peut servir aux problèmes soulevés par des ingénieurs [949] . Nous avons opéré une sélection, conformément à notre projet d'éclairer le développement conceptuel des mathématiques des systèmes dynamiques, mais il convient de souligner deux absences surprenantes dans les thèmes abordés par le groupe de Lefschetz : le domaine des systèmes dynamiques conservatifs et la théorie des bifurcations. C'est dans un autre contexte, celui du "Courant Institute" à New York que ces problématiques s'épanouiront, dans les années 1960 seulement [950] . Certes le choix de l'optique des systèmes dissipatifs a pour effet de marginaliser les questions du conservatif, mais dans les réflexions d'Andronov ou de Levinson, cela ne suffisait pas à disqualifier ces résultats. Ceci est d'autant plus paradoxal que Birkhoff professe les mathématiques des systèmes dynamiques à Harvard, jusqu'à sa mort en 1944, alors que Lefschetz et ses collègues procèdent essentiellement sur la base des lectures des travaux soviétiques. Là encore, le fait que Birkhoff s'occupe de problèmes conservatifs doit être pris en compte mais ne suffit pas à tout expliquer. Il semble que les personnalités de Lefschetz et Birkhoff ne soient pas étrangères à cela. Pour reprendre Dahan : "ils ne s'aimaient pas" ; leurs centres d'intérêts, leurs cultures et leurs origines sont, en effet, assez opposés au point, peut-être, de négliger la contribution de Birkhoff jusque dans les années 1960 [951] , lorsque les travaux de Moser (du Courant Institute) et LaSalle (un élève de Lefschetz), auxquels on peut ajouter Smale, revaloriseront ces travaux.

[948] Notamment l'organisation de conférences, les ouvrages de références et de synthèse sur les systèmes dynamiques, oscillations non linéaires, théorie du contrôle, etc. [CESARI, L., 1959], [HALE, J.K., 1963], [LASALLE, J.P., LEFSCHETZ, S., 1963], [HALE, J.K., LASALLE, J.P., 1967], [CESARI, L., HALE, J., LASALLE, J., 1976].

[949] Nous renvoyons à la liste un peu plus complète de [DAHAN-DALMEDICO, A., 1994].

[950] Dans ce cadre, les études des systèmes conservatifs sont privilégiées, cf. [DAHAN-DALMEDICO, A., 1994], p. 156.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

b. Smale et la théorie hyperbolique

Depuis Poincaré, les mathématiques des équations différentielles ont connu des extensions et des redéfinitions problématiques de grande ampleur : une topologisation accrue par Birkhoff et la définition d'une symbolique pour la dynamique, une extension aux systèmes dissipatifs par Andronov, reprise par l'école de Lefschetz, et la définition d'une nouvelle perspective globale sur les systèmes dynamiques. Sans compter les multiples contributions plus modestes et plus ponctuelles.

Cependant, selon Batterson, un des meilleurs biographes de Smale, avant l'arrivée de celui-ci, le monde de la théorie des systèmes dynamiques n'était "même pas une sous-spécialité […] mais plutôt une jungle mathématique manquant de problèmes établis" [952] . Par là, il veut signifier que le champ des mathématiques des systèmes dynamiques ne se reconnaît pas dans une problématique bien délimitée et manque quelque peu de cohérence. Au regard de ce qui précède, il est vrai que la question mathématique n'a pas d'autonomie ; elle dépend d'un vaste ensemble, un véritable foisonnement de problèmes allant de la technique à la modélisation, aux questions de mathématiques des équations différentielles. Batterson affirme qu'au fil des interventions de Smale durant la décennie 1960, il a "défini l'"ordre du jour", établi les conjectures et prouvé les grands théorèmes" [953] . Pour ainsi dire, le champ des mathématiques des systèmes dynamiques commence à se structurer.

Nous allons donc voir comment, dans les années 1960, le travail réalisé sous l'égide du mathématicien américain Stephen Smale (né en 1932) induit une profonde évolution de la question de la dynamique en mathématique, symbolisée par la théorie des systèmes hyperboliques, présentée en 1967 dans l'article "Differentiable Dynamical Systems".

Pour illustrer déjà la continuité avec les développements précédents, on peut signaler que Smale présente son travail sur le "fer à cheval", dans l'exercice autobiographique, à la "confluence de trois traditions historiques de la dynamique, différentes" [954] :

(1) Les travaux de Cartwright-Littlewood et Levinson sur les équations de type Van der Pol,

[951] Lors du colloque organisé (par l'"école Lefschetz", en l'occurence Jack Hale et Joseph LaSalle) à l'Université de Puerto Rico en décembre 1965, Lefschetz fait un exposé intitulé "Geometric differential equations : recent past and proximate future". On peut considérer qu'il fait amende honorable, en signalant que Birkhoff, aux côtés de Poincaré et Lyapounov, a introduit des concepts "importants" ([HALE, J.K., LASALLE, J.P., 1967], p. 1) ; il consacre même une section de sa présentation à quelques résultats de Birkhoff (ibid., p.1-14).

[952] "not even a subspeciality ...[but rather] a mathematical wilderness lacking established problems", [BATTERSON, S. 2000], p. 72-73

[953] "set the agenda, made the conjectures, and proved the big theorems", [BATTERSON, S. 2000], p. ix-x.

[954] [SMALE, S., 1998], p. 44. ("the confluence of three different historical traditions in dynamics").

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

(2) Poincaré et Birkhoff, pour leurs travaux sur les courbes homoclines,

(3) Andronov-Pontryagin, et les développements de l'école de Lefschetz sur la stabilité structurelle.

Cela donne une idée des points d'accroche avec l'histoire précédente, tout en gardant à l'esprit qu'il ne s'agit là que de la reconstruction de l'histoire de Smale, par Smale ; nous en verrons la pertinence et les limites relativement à l'histoire des mathématiques des systèmes dynamiques.

La topologisation des systèmes dynamiques

Le terme de "topologisation" des systèmes dynamiques pourrait résumer la perspective adoptée par Smale dans l'étude des systèmes dynamiques. C'est un peu réducteur au regard des résultats produits par Smale, mais cela traduit l'esprit de son analyse. Le fait qu'il ait débuté sa carrière par une thèse, en 1956, dans le domaine de la topologie n'est pas étranger à cette orientation [955] . Son expérience dans ce domaine sera investie dans l'étude des systèmes dynamiques d'une part, et prolongée par d'autres travaux, naturellement. Ces travaux de topologie lui ont d'ailleurs valu sa Médaille Fields en 1966 [956] . Mais la topologie ne s'introduit pas au même endroit que Birkhoff, elle se croise avec l'analyse globale. Cette conversion de la topologie aux systèmes dynamiques est le fruit de plusieurs rencontres personnelles et conceptuelles [957] .

Lors du colloque de topologie organisé à Mexico durant l'été 1956, Smale fait la connaissance du mathématicien français René Thom, de deux étudiants de l'Université de Chicago : Morris Hirsch, qui deviendra son collègue le plus proche, et le brésilien Elon Lima. Ce dernier lui présentera Mauricio Peixoto en 1958, lorsque Smale s'installe à l'"Institute of Advanced Study" de Princeton pour deux ans. Smale approche, par ce biais, les résultats de l'école Lefschetz, dont Peixoto est issu. Et ce sont les travaux de Peixoto sur la stabilité structurelle qui intéressent Smale, pour une raison qu'il donne lui-même :

"J'ai été immédiatement enthousiaste, pas seulement pour ce qu'il [Peixoto] faisait, mais par la possibilité que, avec ma connaissance de la topologie, je pouvais étendre ce travail à n dimensions." [958]

La généralisation proposée par Smale constitue le point de départ de ses recherches sur

[955] Comme il le dit, la topologie était alors une "nouvelle branche" ("new branch of mathematics called topology" in [SMALE, S., 1998], p. 40). Sa thèse, intitulée "Regular curves on Riemannian Manifolds", a été dirigée par Raoul Bott, à l'Université du Michigan et soutenue en 1956.

[956] Il a travaillé à la conjecture de Poincaré généralisée et l'a démontrée en 1961, dans le cas $n \geq 5$.

[957] Pour quelques détails supplémentaires, voir [AUBIN, D., 1998a], p. 281 et après.

[958] "I was immediately enthusiastic, not only about he [Peixoto] was doing, but with the possibility that, using my topology background, I could extend his work to n dimensions.", [SMALE, S., 1980], p. 148. Il ajoute que le travail d'autres topologues, Pontryagin et Lefschetz ont en quelque sorte préparé le terrain pour débarquer sa topologie. [SMALE, S., 1998], p. 44 : "Thanks to Pontryagin and Lefschetz, there was the specter of topology in the concept of structural stability of ordinary differential equations. I believe that was why I listened to Mauricio."

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

les systèmes dynamiques et ses résultats fondamentaux, inscrits d'emblée dans l'analyse globale des systèmes dynamiques. En reprenant la notion de transversalité, qu'il connaît par René Thom, Smale introduit les systèmes de dimension *n*, vérifiant les propriétés suivantes [959] :

i) leur ensemble limite est constitué d'un nombre fini de singularités hyperboliques et d'orbites périodiques

ii) les variétés stables et instables se coupent transversalement.

L'extrapolation de Smale se résume par deux conjectures : les systèmes précédents forment un ensemble ouvert et dense de l'ensemble de tous les systèmes ; les conditions i-ii) sont des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir un système structurellement stable. Autrement dit, **la "plupart" des systèmes dynamiques seraient de ce type et sont structurellement stables**. Elle étend à la fois le théorème de Peixoto (densité des systèmes structurellement stables) et les caractéristiques données par de De Baggis, à toutes dimensions. Le premier papier de Smale en dynamique contient ces deux conjectures, extrêmement audacieuses, qui se révèleront fausses mais génératrices d'un développement important. En 1976, un regard rétrospectif sur cette période lui fera dire :

"J'étais extrêmement naïf à propos des équations différentielles ordinaires à cette époque et j'étais également extrêmement présomptueux […] Si j'avais été familier avec la littérature (Poincaré, Birkhoff, Cartwright-Littlewood), j'aurais vu à quel point cette idée était folle." [960]

Dans un article de vulgarisation plus récent, il explique que sa conjecture signifiait en quelque sorte : "le chaos n'existe pas" [961] . Pourtant, lors de la présentation de sa conjecture au "Symposium on Ordinary Equations and their Applications", en 1959, à Mexico, le public, averti en la matière, ne semble pas avoir réagi négativement à son idée [962] . L'idée de Smale peut paraître naturelle, de "bon sens", lorsqu'elle est replacée dans son contexte : la dynamique n'est pas encore le monde complexe qu'il va lui-même mettre en évidence, et qui est la "découverte" de l'ère du chaos. Cet accord tacite traduit un "paradigme" des mathématiques de la dynamique, même si le mot est peut-être trop fort, en tout cas un sentiment partagé par le plus grand nombre.

Les écueils des conjectures

[959] [SMALE, S., 1960]. René Thom les baptisera "systèmes Morse-Smale", voir [SMALE, S., 1980], p. 148.

[960] "I was extremely naive about ordinary differential equations at that time and was also extremely presumptuous […] If I had been at all familiar with the literature (Poincaré, Birkhoff, Cartwright-Littlewood), I would have seen how crazy this idea was", [SMALE, S., 1980], p. 148.

[961] "At that time, as a topologist, I prided myself on a paper that I had just published in dynamics. I was delighted with a conjecture in that paper which had as a consequence that (in modern terminology) "Chaos does not exist"!" [SMALE, S., 1998], p. 41 (publication étendue d'un séminaire donné lors de l'"International Congress of Science and Technology" au Brésil en 1996).

[962] Le colloque a été initié par Lefschetz et son groupe de Princeton. C'est d'ailleurs là que Smale rencontre Lefschetz pour la première fois.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Un autre mathématicien américain, qui gravite dans la galaxie de l'école de Lefschetz, Norman Levinson, est le seul à alerter Smale sur un problème dans sa conjecture [963]. Levinson lui affirme qu'il n'est pas possible que le résultat soit aussi général que Smale le prétend et lui présente un contre-exemple qui pourrait ruiner son hypothèse, un système pour lequel il existe une infinité de solutions périodiques, dont il est impossible de se débarrasser ; c'est le système issu des recherches avec Cartwright et Littlewood, le "monstre" K_0 [964]. Smale s'engage alors dans une recherche destinée d'abord à comprendre le problème et sa conclusion soumis par Levinson, à laquelle il a encore du mal à se résoudre. De cette réflexion, reposant sur une analyse et une **interprétation géométrique** du travail de Levinson, Smale met en avant une application dite du "fer à cheval" [965] par similitude graphique avec cet objet. La culture topologique de Smale joue à plein dans ce travail.

1960 est en fait le début d'une réévaluation de ses premières conjectures, et de la réorientation de son projet de classification. En quelques années, par une suite de conjectures-réfutations, pour reprendre les termes de Popper, bien adaptés à la démarche de Smale, l'évolution du projet est spectaculaire et s'accompagne d'une transformation du champ des systèmes dynamiques. Smale va abandonner la position centrale accordée à la stabilité structurelle, redéfinir la notion de système dynamique, étudier les structures homoclines et proposer une théorie des systèmes hyperboliques.

La première entrave à son projet initial est sa propre démonstration de l'existence d'un système structurellement stable, avec une infinité de points périodiques ; Smale le publie en 1965 dans "Diffeomorphisms with many periodic points" [966]. Il montre ainsi que les systèmes dynamiques ne sont peut-être pas si "simples" que ce qu'il avait conjecturé [967]. Cependant, dans cette recherche, Smale s'est focalisé sur les difféomorphismes : il a abstrait une application des équations différentielles de Levinson, par un procédé "classique" de section transverse, mais a ensuite travaillé sur ces applications, dont les rapports aux équations différentielles ne sont plus assurés. Autrement dit, il n'est

[963] Smale raconte cet épisode dans [SMALE, S., 1998]. Smale est à Rio de Janeiro à ce moment là, et, comme Smale le relate, il a trouvé le fer à cheval en réfléchissant sur les plages de Rio.

[964] Cf. page 407.

[965] "I came across the "horseshoe" [...] when I was trying to get a geometric picture of a variant of van der Pol's equation in N. Levinson's paper.", [SMALE, S., 1967], p. 775. Des équations de Levinson-van der Pol Smale a abstrait une figure un peu plus complexe que le fer à cheval. C'est sur une suggestion d'un de ces collègues, Lee Neuwirth, que Smale s'oriente vers le fer à cheval. Pour des détails techniques, une présentation relativement accessible est donnée dans [DIACU, F., HOLMES, P., 1996], p. 60-65.

[966] [SMALE, S., 1965]. Il montre qu'il existe des difféomorphismes avec un nombre infini de points périodiques, qui conservent cette propriété lorsqu'ils sont perturbés légèrement ; l'ensemble des points périodiques forment un ensemble de Cantor.

[967] Il le reconnaît dans l'introduction du même article : "This shows that the answer to problem A of [12] is negative, for every manifold of dimension greater than 1, in fact. That is, diffeomorphisms (and dynamical systems also [...]) axiomatized there are not dense in all diffeomorphisms.", [SMALE, S., 1965], p. 64 (la reference [12] correspond à [SMALE, S., 1960]).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

pas dit que le fer à cheval soit associé à un problème de dynamique.

En revanche, en consultant les oeuvres complètes de Birkhoff à l'IMPA à Rio en 1960, Smale découvre le monde des trajectoires homoclines et le travail de Poincaré. Les relations entre le fer à cheval et ces homoclines nous montrerons l'affinité naturelle trouvée par Smale dans ces travaux, qu'il considérait comme "oubliés". Mais déjà, par ces exemples dynamiques, la classe des systèmes Morse-Smale est à restreindre ; les homoclines lui servent à illustrer l'existence de systèmes structurellement stables ayant une infinité de points périodiques.

Ce faisant, il reste fidèle à lui-même et poursuit son projet [968] d'analyse globale des systèmes dynamiques, à la recherche d'une classe de système à la fois structurellement stables et formant un ensemble dense. Après 1960, la classe des systèmes Morse-Smale (dont la stabilité est seulement conjecturée, pas démontrée) et le fer à cheval lui servent d'éléments de base pour espérer réaliser ce rêve. En 1962, lors du Congrès International des Mathématiciens de Stockholm, Smale présente un exposé, marquant une étape importante dans sa démarche de construction, nous montrant ainsi les perspectives dans lesquelles il s'engage.

Le Congrès International des Mathématiciens, 1962

L'exposé de Smale n'est pas un exposé de mathématique, donnant un résultat abouti, démontré dans les règles de l'art. En premier lieu, il redéfinit la question des systèmes dynamiques. Pour Birkhoff, un système dynamique n'était autre qu'une équation différentielle. Avec Smale, le problème s'élargit considérablement : l'étude des équations différentielles est absorbée dans l'étude des difféomorphismes. Il justifie cette subordination au "problème de conjugaison pour les difféomorphismes" [969] . Le texte de 1967 explicite ce projet, dans une version plus aboutie : outre l'utilisation des sections transverses qui ramène un problème différentiel à des difféomorphismes,

"je crois qu'il y a une seconde raison plus importante pour étudier le problème des difféomorphismes (mis à part la grande beauté naturelle). Les mêmes phénomènes et problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires sont présents dans leur forme la plus simple dans le problème des difféomorphismes." [970]

Ces systèmes dynamiques incluent ainsi les équations différentielles et les applications, difféomorphismes et homéomorphismes. La stabilité structurelle est redéfinie pour tous ces systèmes. Le projet de fond est de trouver un ensemble ouvert dense de

[968] Qualifiée de "admirable battle" par Palis : [PALIS, J., 1993], p. 170.

[969] "It appears that usually a qualitative problem in differential equation has an analogue in the conjugacy problem. This analogue is a little simpler than the original, and if solved, its solution seems to give a way of doing the original problem.", [SMALE, S., 1962], p. 490.

[970] ***"I believe there is a second and more important reason for studying the diffeomorphism problem (besides its great natural beauty). That is, the same phenomena and problems of the qualitative theory of ordinary differential equations are present in their simplest form in the diffeomorphism problem.", [SMALE, S., 1967], p. 747.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

difféomorphismes : c'est le "problème de conjugaison" [971] .

Son intervention de 1962 montre sa démarche : Smale procède par tâtonnements et tests pour obtenir cette classe de systèmes. Il cherche les "bons" axiomes, en espérant que les systèmes en question seront aussi structurellement stables et n'hésite pas à émettre des axiomes pour les critiquer ensuite [972] . Il présente ainsi sa démarche "constructive" qui annonce, d'une certaine manière, la définition de l'axiome qu'il considère comme central, et qu'il baptisera Axiome A.

Naturellement, Smale aborde la question de sa conjecture sur les systèmes dits Morse-Smale. Nous avons dit que le fer à cheval et les points homoclines ont été des arguments décisifs dans la négation de la première partie de la conjecture. Smale insiste sur la complexité engendrée par la présence des points homoclines et c'est à cette occasion qu'il rapporte la fameuse phrase de Poincaré : "on sera frappé de la complexité de cette figure..." [973] . Ensuite, il apporte un exemple de plus, un automorphisme du tore, [974] venant achever de ruiner sa conjecture.

Dans la discussion de ces exemples, Smale explique quel a été le cheminement et la succession de conjectures-démonstrations préalable à son exposé. Il révèle l'importance de sa rencontre avec quelques mathématiciens soviétiques bien connus : V. Arnold, D. Anosov, Y. Sinaï [975] .

Quelques mathématiciens soviétiques

Il faut expliquer au préalable qu'en 1961, lors de la conférence internationale sur les oscillations non linéaires, organisée à Kiev, Smale a présenté son exemple du fer à cheval, en tant que système dynamique structurellement stable, avec une infinité d'orbites périodiques [976] . Il y a rencontré Dimitri Anosov, un des descendants de l'école d'Andronov ; puis, lors de sa visite à Moscou, il a fait la connaissance de Kolmogorov et Anosov l'a introduit auprès d'un groupe de mathématiciens "extraordinairement doués", comptant Arnold, Novikov et Sinaï [977] . Il a proposé plusieurs conjectures, dont il

[971] C'est le titre de son intervention au congrès des mathématiciens en 1962 "Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms", [SMALE, S., 1962]. Nous renvoyons à [PALIS, J.,], p. 171 ou [AUBIN, D., 1998a], p. 300-1.

[972] Dans son exposé il introduit cinq axiomes, avec des variantes, et en discute l'intérêt, les conséquences. [SMALE, S., 1962].

[973] En français dans le texte de Smale, [SMALE, S., 1962], p. 494. La citation plus complète a été donnée au chapitre 1, page 58.

[974] Un automorphisme du tore, un exemple dû à René Thom qui l'a suggéré à Smale ([SMALE, S., 1980], p. 151).

[975] Ce sont les trois noms qu'il donne dans la publication de son exposé : [SMALE, S., 1962], p. 494.

[976] Smale le raconte dans [SMALE, S., 1980], p. 150.

[977] "I must say I was extraordinarily impressed to meet such a powerful group of four young mathematicians. In the following years, I often said there was nothing like that in the West.", [SMALE, S., 1980], p. 151. Palis rapporte : "[…] in his own words, an extraordinarily gifted group of young mathematicians" [PALIS, J., 1993], p. 170.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

connaissait l'état d'avancement du côté soviétique par l'intermédiaire d'Anosov, présent au congrès de 1962. La première est que l'automorphisme du tore est structurellement stable : Smale en a lui même fait la démonstration et il a appris en 1962 qu'Arnold et Sinaï l'ont démontré. Anosov a démontré un théorème résolvant sa seconde conjecture, généralisant l'exemple précédent à plusieurs dimensions [978] .

Ces rencontres n'ont rien d'anecdotiques. Elles ont contribué à enterrer la première conjecture de Smale, mais, plus important encore, elles vont ouvrir la voie aux définitions proposées par Smale au sujet de la théorie hyperbolique. En outre, la réactivité des mathématiciens soviétiques, si elle peut surprendre, n'a rien d'un hasard ; nous montrerons au chapitre suivant, comment ces problématiques sont inscrites dans un contexte, un peu différent, de théorie ergodique de la Mécanique classique et des systèmes dynamiques. Ceci expliquera l'intérêt et la portée des résultats de Arnold, Anosov et Sinaï.

Après l'abandon de la première partie des conjectures de 1960, Smale parvient à mettre un terme à l'ensemble en 1965. Il avait quelques doutes déjà en 1962 [979] , et publie finalement la preuve que "les systèmes structurellement stables ne sont pas denses", titre de l'article en question [980] . La notion de stabilité structurelle est mise un peu à l'écart pour cette raison. Durant la période 1960-66, Smale a participé à la déconstruction de son projet, achevé par la démonstration que la stabilité ne peut pas régner. Mais il s'agit autant d'un mouvement de construction d'une théorie générale, dont le point d'orgue est l'article de 1967, "Differentiable dynamical systems". Smale en est la cheville ouvrière, utilisant les axiomes imaginés en conséquence des réfutations successives et les résultats suggestifs du mathématicien Anosov.

La théorie hyperbolique

Ayant relativisé la notion de stabilité structurelle en 1965, il avait alors annoncé tenir un ensemble d'axiomes, qu'il considérait de première importance. Cet ensemble servira à constituer l'Axiome A. Smale résume le projet dans l'article de 1967 :

"On cherche une classe de difféomorphismes qui inclut tous les précédents exemples de manière transparente et qui laisserait au moins la possibilité d'inclure un sous-ensemble ouvert dense de Diff(M) pour chaque variété compacte M. Ceci est fourni par les difféomorphismes décrit ici, i.e., ceux satisfaisant les Axiomes A et B ci-dessous." [981]

[978] La démonstration de la première conjecture est [ARNOLD, V., SINAI, Y., 1962]. Le travail d'Anosov concerne le flot géodésique des variétés Riemanniennes, compactes, de courbure négative : [ANOSOV, D.V., 1962].

[979] Il semble que Smale suspectait que la seconde partie de sa conjecture était fausse dès 1962, [AUBIN, D., 1998a], p. 306.

[980] [SMALE, S., 1966].

[981] ***"One is looking for a class of diffeomorphisms which include all of the previous examples in a transparent way and will at least have the possibility of including an open dense subset of Diff(M) for each compact manifold M. This is provided by diffeomorphisms described now, i.e., those satisfying Axioms A and B below.", [SMALE, S., 1967], p. 776.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

L'Axiome A, pour un difféomorphisme *f*, est le suivant : "(a) l'ensemble Ω des points non-errants est hyperbolique. (b) les points périodiques de *f* sont denses dans Ω." [982] (lorsque *f* vérifie l'axiome, on dit aussi que *f* est hyperbolique).

Un ensemble invariant *Ω* est hyperbolique lorsque le faisceau tangent de la variété *M*, restreint à l'ensemble *Ω*, peut se scinder en deux parties, sur lesquelles la dérivée de l'application opère comme une contraction sur l'une, une expansion sur l'autre.

Schématiquement, la notion d'hyperbolicité d'un difféomorphisme retient cette **double propriété de contraction et d'expansion, d'étirement et de repliement** que nous avons évoquée à maintes reprises. C'est ce qui permet d'**unifier** les exemples multiples du fer à cheval, les systèmes Morse-Smale, les exemples d'Anosov.

Les difféomorphismes Morse-Smale satisfont l'axiome, ainsi que les automorphismes du tore. Les résultats d'Anosov ont ainsi joué dans le choix de la définition de Smale : les difféomorphismes d'Anosov, c'est ainsi que Smale les appellent, vérifient l'Axiome A et sont en fait **globalement hyperboliques** (la variété M en entier est un ensemble hyperbolique) ; Anosov a montré leur stabilité structurelle, ce qui a orienté Smale a chercher des propriétés généralisant cette classe de difféomorphismes [983] .

L'article de 1967 est donc un achèvement, une finalisation, et en même temps une ouverture, car il suggère et propose des perspectives de recherche, autant qu'il démontre. Cependant, Smale va s'apercevoir rapidement que la généralité des systèmes hyperboliques, n'est pas tout à fait au rendez-vous. Les systèmes hyperboliques sont unifiés et trouvent une théorie solide avec le travail de Smale, ce qui aura des répercussions incalculables, mais, **ils ne sont qu'une petite partie des systèmes dynamiques**. En 1970, Smale en est déjà conscient et dit : "Je crois maintenant que le principal problème des systèmes dynamiques ne peut pas être unifié si élégamment" [984] . Ce qui, au passage, relativise la notion d'axiome : le terme Axiome A est conservé depuis, mais il s'agit d'une propriété particulière et non d'un axiome au sens courant.

L'impulsion donnée par Smale est importante, comme on va le voir pour les mathématiques des systèmes dynamiques. Au regard de la période 1975-82, le fer à cheval est un point particulier sur lequel il convient de revenir. Le texte de 1967 donne une présentation synthétique des problèmes soulevés par ce difféomorphisme hyperbolique si primordial. Ce sont les relations avec les courbes homoclines, et la dynamique symbolique qui lui confèrent tant d'importance.

[982] "(a) the nonwandering set Ω is hyperbolic. (b) the periodic points of f are dense in Ω.", [SMALE, S., 1967], p. 777.

[983] Dans l'introduction du paragraphe "Unification", Smale l'affirme : "Anosov's work on hyperbolic structures on manifolds give a clue on how to proceed.", [SMALE, S., 1967], p. 775. Smale consacre une partie à ces "difféomorphismes d'Anosov", à laquelle s'ajoute l'annexe de John Mather pour les démonstrations relatives à cette classe de difféomorphismes. Pour plus de détails, nous renvoyons à [PALIS, J., 1993], p. 173-4.

[984] "I believe now that the main problem of dynamical systems can't be unified so elegantly", [SMALE, S., 1980], p. 90 (Article donné au séminaire Bourbaki en février 1970).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Le fer à cheval

Smale est parvenu à établir un **pont entre ces trois aspects de la dynamique : la dynamique symbolique, le fer à cheval et les orbites homoclines** [985] . Rappelons que Birkhoff, s'appuyant sur quelques notions introduites par Hadamard, avait déjà donné une **dynamique symbolique pour les structures homoclines** [986] . Smale la connaît [987] mais sa construction est beaucoup plus précise que celle de Birkhoff. Surtout, elle rend compte de l'importance de l'étirement-repliement, mécanisme de base du fer à cheval, dans les structures homoclines, avec toutes ses conséquences.

L'application du fer à cheval est l'application qui transforme le carré *Q*, en ses parties *Q1* et *Q2* :

[985] Rappelons que les idées essentielles sont présentées en 1965 dans [SMALE, S., 1965] ; le texte plus connu de 1967, [SMALE, S., 1967], est un peu plus accessible et plus figuré, quoique très technique. L'ouvrage de Diacu et Holmes donne un bon résumé des relations présentées par Smale ; nous nous y référons pour son aspect pédagogique. Cependant, si on peut se fier au discours technique proposé, il faut bien comprendre qu'il s'agit d'un texte écrit en 1996, par des "non historiens" et qui suggère des raccourcis que nous éviterons ici. [DIACU, F., HOLMES, P., 1996].

[986] Cf. page 393.

[987] Smale cite ([SMALE, S., 1967], p. 775) précisement le mémoire "Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques" de Birkhoff dans lequel, d'après Smale "he noted a resemblance between his homoclinic points and Hadamard's shift automorphism". Dans le précédent article détaillant le fer à cheval, Smale se situait déjà au carrefour de la dynamique symbolique et des structures homoclines : [SMALE, S., 1965], p. 63.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

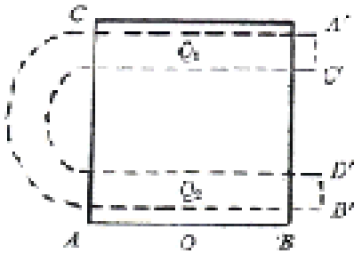
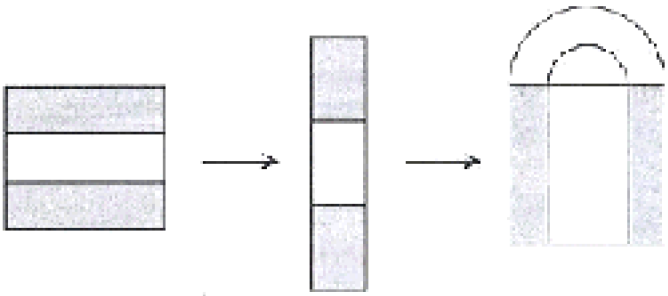


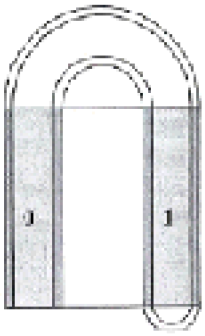
Figure 1
[SMALL, S., 1967], p. 771.

Décomposée et stylisée, le mécanisme est équivalent à :



[DIACU, F., HOLMES, P., 1996], p. 61

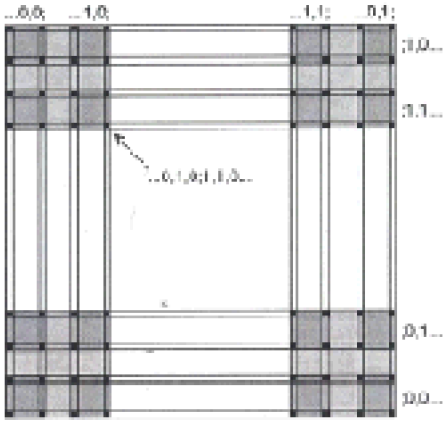
En itérant une seconde fois l'application, le carré se réduit à :



[DIACU, F., HOLMES, P., 1996], p. 61

Le lien entre fer à cheval et dynamique symbolique est (relativement) simple à comprendre. Chaque point récurrent par l'itération du fer à cheval (et de son inverse) est adressé par un code, un symbole, constitué par exemple de 0 et de 1. Cela fournit un adressage de l'ensemble des points invariants par l'application, de type ...0, 1, 0 ; 1, 1, 0... :

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

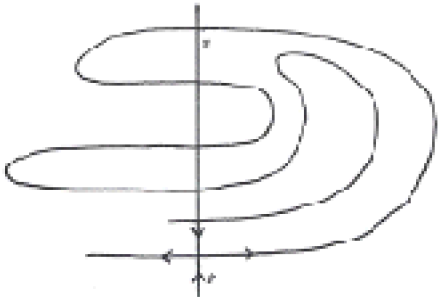


[DIACU, F., HOLMES, P., 1996], p. 63

Prenons un point *x* : si après *k* itérations du fer à cheval il se trouve dans la bande 0, alors le symbole correspondant à *x* contient un 0 à la *k* ième place ; autrement dit *k* itérations du fer à cheval correspondent à *k* décalages dans la suite de symboles. Le **mécanisme du fer à cheval, dans le système symbolique, est l'"équivalent" d'un décalage dans la suite de symboles**.

Tous les points sont repérés par ce système et ce qui est aussi important, des propriétés obtenues sur les séquences symboliques peuvent se transférer en des propriétés de l'application fer à cheval. La dynamique symbolique étant plus simple à gérer et par ailleurs déjà bien étudiée sous des aspects de statistique et de théorie ergodique [988] , c'est un avantage non négligeable.

Pour parvenir un cran plus loin, il faut constater l'analogie graphique entre le schéma d'une courbe homocline et le fer à cheval :



[SMALE, S., 1967], p. 774.

Selon les mots de Smale :

"C'est le même phénomène que celui de la Figure 1 [voir ci-dessus, p. 369], mais vu de manière différente. […] L'approche du fer à cheval de la Figure 1 présente un grand avantage au sens où on obtient une image satisfaisante de la structure et de la stabilité des orbites tandis qu'un point homocline donné défie l'analyse à première vue. Telle est l'idée cachée derrière le théorème." [989]

Le théorème peut s'écrire ainsi :

988 Smale fait référence à deux types de travaux sur les décalages : la théorie ergodique et les probabilités (notamment l'ouvrage [BILLINGSLEY, P., 1965]), la dynamique topologique ([GOTTSCHALK, W.H., HEDLUND, G.A., 1955]). Cf. [SMALE, S., 1967], p. 770.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Soit *x* un point homocline transverse d'un difféomorphisme *f* . Alors il existe un ensemble de Cantor *Λ* (*x* étant dans *Λ*) et *m* , nombre entier, tels que $f^m(\Lambda)=\Lambda$ et *f m* restreint à *Λ* est topologiquement un automorphisme de décalage.

Il a un corollaire [990] : dans tout voisinage d'un point homocline transverse, il y a un point périodique.

La description des points homoclines qui défiait l'analyse, se précise et devient l'analogue d'une application fer à cheval et d'un automorphisme de décalage. Ce travail de Smale n'est qu'une facette de son étude des systèmes dynamiques, mais elle est celle qui percera de manière remarquable dans les conceptions de ses successeurs, hors des mathématiques aussi abstraites et malgré le caractère très pointu des outils employés.

L'héritage de Smale

Avec Smale, le travail sur les systèmes dynamiques, grâce à une perspective topologique en analyse globale, transforme profondément la notion de système dynamique et les mathématiques des systèmes dynamiques. La théorie hyperbolique et son "chef d'oeuvre" [991] de 1967 sont les meilleurs exemples de sa contribution en matière d'étude de la dynamique. Smale va également modeler le champ des systèmes dynamiques par l'école qu'il contribue à mettre en place à Berkeley [992] , où il enseigne à partir de 1964. Ses élèves, et ses relations sont des figures essentielles des mathématiques développées dans les années 1970-80 : Bowen, Newhouse, Abraham, Shub, Pugh pour n'en citer que quelques uns.

Au niveau conceptuel, l'héritage de Smale est conséquent. Il offre un nouveau regard sur la dynamique, où la complexité des phénomènes est omniprésente. Le "simple" fer à cheval engendre des ensembles de Cantor, les structures homoclines intègrent les étirements et repliements, tout ceci était difficilement imaginable en 1960 et figure toute la complexité des systèmes hyperboliques. Ces perspectives nouvelles rejaillissent clairement dans les conceptions du chaos. Pour Smale lui-même, le chaos correspond aux structures homoclines [993] . On peut en outre s'interroger sur le laps de temps séparant l'article de 1967 et l'effervescence dix années plus tard. Le grand niveau d'abstraction explique sans doute les transferts assez lents des concepts ; les

[989] ***"This is the same phenomena that is occurring in Figure 1, but looked at in a different way. […] A great advantage of the horseshoe approach of Figure 1 is that one gets a satisfactory picture of the orbit structure and stability while a given homoclinic point at first glance seems to defy analysis. That is the idea behind the theorem.", [SMALE, S., 1967], p. 775.***

[990] Les deux énoncés sont directement tirés de [SMALE, S., 1967], p. 775.

[991] Expression empruntée à J. Palis : "a masterpiece of the mathematical literature", [PALIS, J., 1993], p. 173.

[992] Diliberto, un élève de Lefschetz, était son prédécesseur à Berkeley : la question de son influence comme préparation au développement de l'école de Smale est posée, mais n'a pas été résolue ([AUBIN, D., 1998a], p. 305).

[993] Il l'affirme, de manière très appuyée, dans son exposé et la discussion qui suit, à l'occasion d'une conférence en 1990 ("Chaos : the new science") dont les comptes rendus sont publiés dans [HOLTE, J., 1993], p. 89-104.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

mathématiciens travaillent sur leurs objets, et non sur des équations différentielles "concrètes" [994] . D'ailleurs, au niveau des mathématiques des systèmes dynamiques, il n'y a pas vraiment de temps d'arrêt, et les aspects problématiques à partir de 1975 concernent justement la transition vers les systèmes concrets. Cela traduit le changement opéré dans le champ des systèmes dynamiques, progressivement éloigné des seules équations différentielles.

La notion d'homocline a également subi une transformation. Elle est définie de manière plus générale, pas uniquement pour des équations différentielles, comme intersection de variétés stables et instables. Les homoclines ont de nouvelles propriétés et leur comportement est compris à travers le fer à cheval, l'étirement-repliement. Tout ceci était hors de pensée de Poincaré et Birkhoff, car en définitive le nouveau cadre leur est étranger. Si Smale s'appuie sur leurs définitions, le résultat final dépasse les notions initiales. Légitimement, le terme homocline a été conservé, mais il prête à confusion : il y a les homoclines de Poincaré et les homoclines de Smale. A la lumière de l'**utilisation** qui en est faite dans les années 1970, ce sont ces dernières qui sont en jeu, même si les deux notions peuvent se confondre dans le **résultat final** [995] .

Enfin, nous avons vu l'importance des trois "traditions" dégagées par Smale, dans sa construction du fer à cheval : le travail de Poincaré et Birkhoff, les équations de Cartwright-Littlewood-Levinson, l'école Lefschetz. Mais au regard de tout ce qui a été détaillé, c'est aussi un contexte intellectuel plus large qui intervient dans les années 1960 : il faut compter sur les multiples relations de personne à personne, les relations avec l'école de mathématiques en URSS. L'importance de René Thom et de l'IHES a été suggérée, nous allons maintenant la préciser.

6.3. L'Institut des Hautes Etudes Scientifiques

René Thom est une des personnalités marquantes de l'IHES, où il est arrivé à la fin de l'année 1963. En 1958, il a été lauréat de la Médaille Fields et sa réputation en topologie différentielle n'est pas à faire. Il est le principal instigateur de la théorie des catastrophes dont l'histoire débute dans les années 1950, par un projet de classification, et aboutit au début des années 1970.

En précisant les enjeux et les problématiques entourant son développement, nous allons mettre en avant les idées de Thom et leurs conséquences pour les mathématiques des systèmes dynamiques, dans la théorie comme dans leur utilisation. Avec ses mathématiques, à base de topologie, utilisées pour créer des modèles, le projet de Thom a conduit, d'une part, au développement de la dynamique qualitative à l'IHES, dont les conséquences ce font sentir dans le champ des mathématiques des systèmes dynamiques, d'autre part, à l'émergence d'une pratique de modélisation, à base de

[994] Nancy Koppel affirme ne jamais avoir vu une équation différentielle dans les études conduites à Berkeley. [AUBIN, D., 1998a], p. 308.

[995] Nous renvoyons à notre discussion de la notion de précurseur et au problème d'anticipation en mathématiques, à la fin du chapitre 2, page 142.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

topologie, qui a eu une influence dans la construction des mathématiques de la turbulence par Ruelle et Takens. Le contexte de l'IHES, par les rencontres, les confrontations de projets et de notions mathématiques qu'il a permis a joué un rôle important dans ce développement. La thèse de David Aubin est notre source historiographique première, puisqu'elle est focalisée sur le contexte de l'IHES [996] .

a. René Thom et la théorie des catastrophes

Le projet de classification de Thom

Thom se lance, dans le milieu des années 1950, dans un programme de classification : celle des applications génériques, réelles, de $\boldsymbol{R}^n$ dans $\boldsymbol{R}^p$, s'inscrivant dans la perspective des travaux de Hassler Whitney (1907-1989). En se focalisant sur les singularités, il tient une ébauche de résultat dès 1956, laquelle évoluera dans les années 1960 en une classification distinguant sept catastrophes élémentaires [997] .

En parallèle aux travaux de Smale, Thom aboutit au "problème de conjugaison topologique", selon les termes de Smale adoptés en 1961. Ils ont donc un objectif commun, celui de trouver un ensemble ouvert, dense de difféomorphismes (ces deux topologues se sont, en fait, inspirés de la notion de "généricité" [998] introduite par Thom). Mais les démarches et les outils adoptés par les deux mathématiciens sont assez différents. En effet, dans l'optique de Smale, il s'agit de recourir à la notion de stabilité structurelle et la dynamique qualitative de Birkhoff pour résoudre le problème ; pour Thom, ce sont les singularités qui déterminent les difféomorphismes et permettront de répondre au problème. En outre, Smale procède par différents essais pour deviner les bons axiomes ; Thom cherche, lui, vraiment à classifier les singularités, à formaliser ses intuitions et s'engage dans des mathématiques extrêmement techniques.

Le contexte de l'IHES

L'institution IHES joue un rôle décisif dans les développements des considérations de Thom, la formation de ce qui pourrait être appelé une "école Thom" [999] et leurs conséquences. L'IHES est, en effet, un formidable lieu de rencontres et d'échange d'idées.

C'est d'abord en ce lieu que Thom se frotte à la stabilité structurelle. Aux dires d'Aubin, l'invitation de Arnold en 1965 et le séminaire de Peixoto en 1964 sur la stabilité structurelle ont joué un rôle important dans l'évolution des conceptions de Thom. En allant

[996] [AUBIN, D., 1998a], en particulier les chapitres VI et VII.

[997] [AUBIN, D., 1998a], p. 333.

[998] Durant l'année 1951-52, Thom a étendu la notion de généricité issue de la géométrie algébrique, aux structures différentiables. ([AUBIN, D., 1998a], p. 128)

[999] [AUBIN, D., 1998a], p. 337. D'après Aubin, les rapports d'activité de l'IHES évoquent une école ou un groupe autour de Thom.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

à Berkeley en août-septembre 1965, Thom a eu, en outre, l'occasion de se familiariser avec les travaux récents de Smale. De ces multiples rencontres, il ressort que la notion de stabilité structurelle passe, pour Thom, du statut de propriété intéressante à celui d'un guide pour la pensée [1000]. En cela, il se rapproche un peu des idées de Smale, lequel accordait la primauté à la stabilité structurelle. Cette notion de stabilité acquiert une grande importance dans les réflexions de Thom, aussi parce qu'elle lui paraît être une propriété essentielle pour la modélisation de la nature. Au-delà de leurs divergences de démarches, Smale et Thom se retrouvent sur ce point, avant que Smale change d'idée.

L'IHES a permis également trois rencontres qui ont orienté le projet de Thom.

Eric Christopher Zeeman compte parmi les principaux interlocuteurs de Thom ; Zeeman est régulièrement invité à l'IHES à partir de 1961 et leurs échanges ont permis de révéler à Thom l'**utilisation de la topologie pour la modélisation**. En effet, Zeeman était très investi dans son idée d'appliquer les théories mathématiques aux autres sciences, d'utiliser les mathématiques pour mieux comprendre les phénomènes naturels. Il s'est essayé à une "topologie du cerveau" espérant ainsi :

"[…] utiliser les mathématiques pour essayer d'expliquer les relations entre l'esprit et le cerveau, entre la mémoire et l'anatomie, et entre la pensée et l'activité électrochimique du cortex. L'outil mathématique utilisé est la topologie algébrique, parce que c'est une branche des mathématiques bien adaptée pour ignorer les variations locales et capturer les propriétés globales." [1001]

Par ces moyens d'analyse les résultats sont exprimés

"en langage géométrique, et sont qualitatifs plutôt que quantitatifs. Ceci signifie que, jusqu'ici, la théorie décrite dans ce papier a tenté d'expliquer les phénomènes plutôt que de prédire les mesures que des expériences obtiendraient." [1002]

Les outils topologiques sont utilisés pour donner du sens au mode de fonctionnement du cerveau. Il ne fait pas de doute que l'optique de Zeeman a inspiré Thom dans sa théorie des catastrophes, reprenant ce style d'utilisation des mathématiques, de la topologie, et leur aspect très qualitatifs pour modéliser les comportements globaux de systèmes complexes.

La seconde rencontre est celle du mathématicien John Mather arrivé en septembre 1967, à l'IHES pour deux ans. Durant ce laps de temps, il démontre le théorème de classification que Thom avait conjecturé dix ans auparavant et cherchait lui-même à

[1000] Thom avait passé une année en 1960-61 à Baltimore, dans le groupe de Solomon Lefschetz, là où la stabilité structurelle a émergé après la guerre. [AUBIN, D., 1998a], p. 128. Il en avait sûrement déjà entendu parlé depuis 1960.

[1001] ***"We use mathematics to try and explain (sic) the relationship between mind and brain, between memory and anatomy, and between thinking and the electrochemical activity of the cortex. The mathematical tool used is algebraic topology, because this is a branch of mathematics well adapted to ignore local variations and capture global properties.", cité dans [AUBIN, D., 1998a], p. 346-7 (en italique dans le texte). Original dans [ZEEMAN, E.C., 1965], p. 277.***

[1002] ***"The results are expressed in geomtetrical language, and are qualitative rather than quantitative. This means that so far the theory to be described in this paper has attempted to explain phenmena rather than predict the measurements that experiments would obtain.", cité dans [AUBIN, D., 1998a], p. 348. Original dans [ZEEMAN, E.C., 1965], p. 277.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

prouver. Il existe donc sept catastrophes élémentaires pour les systèmes décrits par moins de quatre paramètres : pli, fronce, queue d'aronde, papillon, ombilic hyperbolique, ombilic elliptique, ombilic parabolique.

Enfin, d'anciens collaborateurs de Smale à Berkeley sont invités au séminaire de Thom à l'IHES : Ralph Abraham, Nicolaas Kuiper, Charles Pugh. Ce dernier présente en février 1967, le contre-exemple donné par Smale, montrant que les systèmes structurellement stables ne sont pas génériques. Thom, qui avait, comme Smale, misé sur la stabilité structurelle, le perçoit comme un coup sérieux porté aux ambitions du projet, mais au contraire de Smale, n'y renonce pas : la stabilité structurelle reste un guide pour la modélisation des phénomènes naturels.

L'IHES est un creuset d'idées nouvelles ; la théorie des catastrophes en est la meilleure illustration. En évoquant la constitution de cette théorie et les idées prônées par Thom sur la modélisation, nous tenterons d'en faire ressortir l'enjeu et surtout de montrer le rôle important des mathématiques qualitatives, de la topologie dans son étude des phénomènes, des formes en particulier (morphogenèse). Il ne s'agit pas seulement de discuter les idées de Thom, mais de montrer ensuite comment, à l'IHES et sous son impulsion, la dynamique qualitative s'est développée et la "topologie appliquée" s'est propagée.

La théorie des catastrophes

Mathématicien reconnu, Thom s'intéresse à la biologie théorique dès les années 1960. Outre l'intérêt suscité par les travaux de Zeeman, les discussions avec ses collègues biologistes, Thom décrit ses "visions" mathématiques : il voit des manifestations des singularités mathématiques dans les phénomènes biologiques [1003] . Les travaux en embryologie de Conrad Hal Waddington (1905-1975) ont été les travaux les plus déterminants et c'est à l'interface entre les mathématiques et la biologie que la théorie des catastrophes est née. L'idée essentielle réside dans les paysages épigénétiques de Waddington : les changements dans la topologie de ces paysages correspondent aux catastrophes.

[1003] [AUBIN, D., 1998a], p. 138-9. Nous renvoyons à l'ouvrage Paraboles et catastrophes de Thom : [THOM, R., 1983], p. 45.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

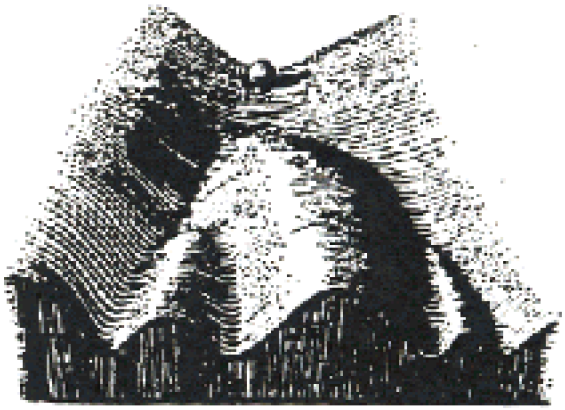


FIGURE 4
Part of an Epigenetic Landscape. The path followed by the ball, as it rolls down towards the spectator, corresponds to the developmental history of a particular part of the egg. There is first an alternative, towards the right or the left. Along the former path, a second alternative is offered: along the path to the left, the main channel continues leftwards, but there is an alternative path which, however, can only be reached over a threshold.

Le paysage épigénétique de Waddington

Repris de [AUBIN, D., 1998a], p. 143 (tiré de [WADDINGTON, C.H., 1957], p. 29

Selon Waddington, le principal problème de la biologie est d'expliquer les caractéristiques définissant les organismes vivants, leur forme et leur fin. Les organismes ont, en effet, cette propriété remarquable de conserver leur forme, alors qu'un flux constant de matière les traverse. Waddington pensait que les gênes étaient la cause essentielle de ce phénomène, et voyait dans l'étude des relations entre l'organisme et ses gènes, un sujet des plus importants. Cette science est l'épigénétique dont les deux aspects sont les changements dans la composition cellulaire (différenciation cellulaire) et les changements dans les formes géométriques (la morphogenèse). Dans tous les cas, le développement d'un organisme suit un cheminement défini, toujours le même et résistant aux changements.

Pour développer ces considérations, Waddington a introduit les **paysages épigénétiques**, représentations visuelles du développement d'un organisme : le roulement de la balle dans une des vallées correspond au cheminement du développement d'un organisme, aboutissant à une fin.

Les canaux stables, pour lesquelles une perturbation de la trajectoire de la balle est suivie d'un retour dans le canal, sont appelés *creodes*, et plus tard *chreods*. Plusieurs changements de voies peuvent apparaître dans un chemin de développement ; à ces changements, l'activation d'un gène ou non peut modifier le chemin choisi. C'est à cet endroit que les changements importants se font, lorsque la balle a plusieurs options. Les changements dans la topologie de ces paysages (c'est-à-dire dans l'ensemble des singularités de la fonction potentielle décrivant le paysage) correspondent aux catastrophes de Thom. Thom voyait lui-même dans sa théorie une justification mathématique de l'idée de paysage épigénétique [1004] .

Dans ce cadre Thom a introduit la notion d'**attracteur** . En effet, dans sa théorie

[1004] [AUBIN, D., 1998a], p. 147.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

dynamique de la morphogenèse [1005] , Thom reprend l'idée de considérer un **système en termes de points finaux qu'il peut atteindre**. La finalité biologique est exprimée de cette manière dans un contexte mathématique. Les régimes stables susceptibles d'être atteints par un système sont appelés les **attracteurs**.

Les attracteurs sont les régions de l'espace des phases du système, stables sous les équations dynamiques : une fois entré dans la région il n'est pas possible d'en sortir, et toute configuration proche de l'attracteur s'en approche asymptotiquement. Le bassin d'attraction est la région contenant l'attracteur et où toutes les conditions initiales conduisent le système dans l'attracteur.

Dans son évolution un système est soumis à une compétition entre attracteurs [1006] . Par ces propositions très qualitatives, et topologiques, Thom suggère des modèles pour la différenciation cellulaire, la morphogenèse, la régulation, reproduction et d'autres phénomènes biologiques. Il montre la pertinence de la topologie pour conceptualiser les phénomènes biologiques et les modéliser.

Thom met en place une pratique de modélisation très particulière, qu'il étend à de multiples disciplines scientifiques. En même temps, il propose une "théorie de la pratique de modélisation" [1007] , une méthode pour modéliser : c'est la théorie des catastrophes, qui n'est pas une théorie au sens classique, mais, d'après Thom, un langage [1008] , ou une méthode, destinée à se substituer aux pratiques un peu approximative de construction de modèles en sciences.

Les grandes lignes de cette "philosophie" de Thom méritent d'être détaillées, dans la perspective de compléter le tableau des problématiques développées à l'IHES à la fin des années 1960 et leur influence.

Stabilité structurelle et morphogenèse

Le programme de Thom était de faire des morphologies de la réalité quotidienne, l'objet d'une science dynamique des formes, car la réalité se présente en "phénomènes et formes" [1009] . La pratique de modélisation de Thom dans un domaine de l'expérience peut se résumer ainsi : trouver les formes rencontrées habituellement, établir une liste de ces formes selon leurs caractéristiques topologiques, trouver la dynamique qui gouverne leur émergence et leur destruction.

L'ouvrage de Thom, Stabilité structurelle et morphogenèse [1010] , construit à partir de

[1005] [THOM, R., 1968].

[1006] [AUBIN, D., 1998a], p. 146-7.

[1007] Emprunté à Aubin, [AUBIN, D., 1998a], p. 159.

[1008] Voir [AUBIN, D., 1998a], p. 167, par exemple.

[1009] [THOM, R., 1974], p. 9. Cité dans [AUBIN, D., 1998a], p. 161.

[1010] [THOM, R., 1972/ 1973].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

1966 et publié en 1972, constitue une sorte de manifeste de la théorie des catastrophes. Fidèle à son programme, Thom propose, dans les sept premiers chapitres, une théorie générale de la morphologie, applicable à tout problème de formes.

L'approche de Thom est qualitative, résolument qualitative, et fait écho à tout ce que nous avons montré. Thom va très loin dans ce sens, au point de condamner la science quantitative, jugée dogmatique [1011]. **La théorie des catastrophes est un moyen de penser rigoureusement le qualitatif** [1012].

La notion de stabilité, propriété essentielle des formes, joue un rôle extrêmement important. Pour Thom, elle repose sur une structure algébrico-géométrique, dotée de la propriété de stabilité structurelle par rapport aux perturbations l'affectant [1013]. Cette structure porte le nom de *logos* dans la terminologie de Thom [1014] et c'est ce que proposent ses théories. La stabilité structurelle est donc déterminante dans ses mathématiques et ses vues en matière de modélisation, ce qui explique le titre de son ouvrage. Avec la notion de généricité apparue dans la question des classifications des singularités, ce sont les deux ingrédients mathématiques clés dans les théories de Thom.

En outre, Thom prône une approche non réductionniste [1015] en science, et dans la modélisation. Il souligne aussi la grande autonomie de ses théories relativement au substrat des phénomènes : l'étude de la morphologie est déconnectée des spécificités du matériau où apparaît la forme.

Il s'agit donc d'un changement radical dans l'idée de modélisation : partir des formes et morphologies telles qu'elles apparaissent, identifier leur caractéristiques topologiques, s'interdire d'en appeler aux substrat et aux forces. Pour cela, il faut en passer par des méthodes mathématiques sophistiquées, pour obtenir un modèle intelligible, qualitatif du phénomène en question. Cette façon de modéliser, initiée en biologie, s'étend à d'autres domaines. Thom s'intéresse ainsi aux sciences humaines, à la linguistique et à la sémiotique, qui constituent les principaux champs de sa recherche dans le début des années 1970 [1016].

Qualitatif et topologie ont donc une place centrale dans les conceptions de Thom. Le contexte de l'IHES est particulièrement favorable au développement de ces idées. En effet, les personnalités invitées participent à l'élaboration des idées de Thom. Le

[1011] Voir [AUBIN, D., 1998a], p. 166 pour la citation de Thom : "he claimed, everything had changed since he could "present qualitative results in a rigorous way, thanks to recent progress in topology and differential analysis"".

[1012] Voir le paragraphe [AUBIN, D., 1998a], p. 165-6 à ce sujet.

[1013] [AUBIN, D., 1998a], p. 163-5.

[1014] Le *logos* est repris d'Héraclite, et Thom attribue un *logos* à toute forme, une structure formelle qui en assure l'unité et la stabilité. [AUBIN, D., 1998a], p. 164.

[1015] [AUBIN, D., 1998a], p. 160

[1016] Ibid., p. 151-156.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

séminaire de Thom de 1970-71 est consacré aux "Modèles mathématiques de la morphogenèse" [1017] . Zeeman et Abraham sont fortement inspirés par la théorie des catastrophes et s'engagent dans des travaux plus appliqués. Zeeman a été un vecteur du succès de la théorie au niveau international. La théorie des catastrophes connaîtra ses succès et ses écueils durant la décennie 1970, avec Thom, Zeeman et Abraham, lequel va porter la théorie à son extension maximale. Nous ne détaillerons pas davantage ce point.

La dynamique qualitative

Les réflexions de Thom sont également associées à des questions de dynamique qualitative. A la fin des années 1960 des travaux se développent sur le sujet, du fait de l'impulsion donnée par Thom et d'un rapprochement avec l'école de Smale.

Ainsi, en 1969-70 le séminaire de Thom est consacré entièrement à des questions de "dynamique qualitative". Smale y est présent, avec plusieurs de ses collaborateurs (dont Rufus Bowen, son "meilleur étudiant" [1018]), Peixoto, Takens, Zeeman, etc. Les relations avec les centres de Berkeley (là où Smale exerce) et Warwick (université de Zeeman) créent un cadre d'activités soutenues dans le domaine des mathématiques des systèmes dynamiques. Le champ des systèmes dynamiques trouve une structure sociale au travers de ce réseau de scientifiques délocalisés, réunis régulièrement à l'IHES ou dans les séminaires internationaux.

Quant aux aspects conceptuels, la théorie mathématique des systèmes dynamiques atteint un sommet avec l'analyse globale et la définition d'une série de notions importantes permettant de faire une analyse qualitative des systèmes dynamiques, d'en saisir les caractéristiques globales : **attracteurs**, **généricité**, **systèmes hyperboliques**. Si la généricité est attachée au nom de Thom et les systèmes hyperboliques à Smale, la vaste théorie des systèmes hyperboliques est une construction n'impliquant pas seulement ce dernier, mais il en est le principal artisan. Quant à la notion d'attracteur, destiné à un grand succès, elle se trouve autant chez Thom que chez Smale. Dans "Differentiable dynamical systems", Smale en fait usage, mais sans qu'il soit un concept absolument crucial ; l'article est plus naturellement tourné vers la classification des difféomorphismes que des attracteurs. Chez Thom la notion d'attracteur est intégrée à ces conceptions de théorie des catastrophes.

Autour de 1970, il y a plus que cela : la topologie a envahi totalement la recherche sur les systèmes dynamiques et le programme de classification générique des systèmes dynamiques commence à aboutir à un certain nombre de résultats. Dans cette perspective la généricité et la stabilité structurelle constituent en quelque sorte l'ossature de ce programme. Le champ des systèmes dynamiques est organisé sur le plan conceptuel par ces notions et ce programme. Ceci est exprimé très clairement par Peixoto, dans les comptes rendus d'un colloque tenu en 1971, intitulé tout simplement "Dynamical systems" [1019] et réunissant les diverses tendances évoquées jusqu'à présent :

[1017] [AUBIN, D., 1998a], p. 390.

[1018] Ibid., p. 365.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'école Smale, l'école des catastrophes de l'IHES et même quelques scientifiques affiliés au groupe de Lefschetz. Peixoto introduit les actes par ces mots:

"Le Symposium est consacré en gros à la théorie générique des systèmes dynamiques, quand on regarde les propriétés vraies pour presque tous les systèmes dynamiques. Cette théorie a commencé une dizaine d'années plus tôt comme un rejeton du cas de la stabilité structurelle en dimension 2, où les flots structurellement stables sont assez simples et constituent un ensemble ouvert et dense dans l'espace de tous les flots. Bien que ceci se soit avéré faux en dimension plus élevée, l'expérience a montré qu'on trouve toujours un genre de stabilité structurelle associée à une propriété générique. Ce point de vue développé avec grand succès par Smale et d'autres domine nettement la théorie qualitative des équations différentielles, incluant la théorie des bifurcations avec des répercussions dans des sujets reliés, comme la mécanique hamiltonienne, les foliations, la théorie de Morse [...] D'un autre côté, la même idée de stabilité structurelle considérée du point de vue des applications d'une variété dans une autre, et leurs singularités, conduisait à un développement parallèle et en quelque sorte plus fructueux dans les mains de Whitney, Thom et Mather ; cela veut dire que les applications structurellement stables en sont venues à constituer un ensemble ouvert et dense dans l'espace de toutes les applications." [1020]

L'importance des idées de Smale et Thom est reconnue dans ce qui apparaît comme un aboutissement. A la croisée de la dynamique qualitative et de la théorie des catastrophes, l'activité à l'IHES a été décisive. D'après Aubin, cette concentration à l'IHES provient en grande partie de l'attirance des meilleurs représentants de la théorie des systèmes dynamiques pour la pratique de modélisation de Thom. En tout état de cause, le prosélytisme de Thom passe par la rédaction d'articles, mais il n'a jamais cherché à faire "école" : il y était même réticent et n'a pas engagé d'étudiants sur la piste de la théorie des catastrophes [1021]. L'IHES n'est, de toute façon, pas une structure universitaire, compliquant encore une éventuelle démarche dans ce sens. Mais l'influence de la topologie appliquée est perceptible dans plusieurs exemples.

La topologie appliquée

En effet, les idées de Thom et ses tentatives ont ouvert la voie à de multiples applications, dans divers domaines scientifiques. Ceci a engagé les scientifiques gravitant autour de lui a se lancer dans la même voie. Smale, Zeeman, Ruelle sont inspirés par cette perspective. C'est ainsi que Smale s'est engagé dans l'étude de l'économie, Ruelle, dans l'étude de la turbulence, comme nous allons le voir. Au colloque de Bahia en 1971, Smale, Zeeman et Thom sont invités chacun à donner une allocution ; ils montrent à cette occasion les points communs dans leurs moyens d'étude des phénomènes et les divergences dans les démarches suivies. Thom s'occupe de linguistique et suit son

[1019] [PEIXOTO, M., 1973].

[1020] [PEIXOTO, M., 1973], p. 5, cité dans [DAHAN DALMEDICO, A., 1994], p. 161 (souligné dans le texte).

[1021] Alain Chenciner est attiré par les idées de Thom, dont il sera membre du jury de thèse. [AUBIN, D., 1998a], p. 391.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

programme de modélisation. Zeeman est investi en physiologie, pour laquelle il construit des modèles par une idéalisation des processus biochimiques complexes. Il ne suit pas le programme de Thom, mais se sert de la théorie des catastrophes pour mettre en forme ses modèles ; la démarche se départit de celle de Thom, tout en soulignant l'importance de la théorie des catastrophes. Smale traite de problème d'économie [1022], mais là il ne produit pas de modèles. Il utilise ceux déjà existants et se sert de la topologie pour en révéler les caractéristiques. Toutes ses applications de l'analyse globale relèvent de cette démarche [1023]. Le style général des contributions est assez différent de l'un à l'autre : Thom écrit un texte un peu verbeux, Zeeman utilise beaucoup d'images, de graphes, de données expérimentales, alors que Smale est plus proche des mathématiques rigoureuses et habituelles. C'est aussi une question de perception du rôle donné aux mathématiques : Thom y voit un réservoir de métaphores, un langage, et à l'opposé pour Smale, le "mathématicien prouve des théorèmes" [1024].

Dans ces trois perspectives, il existe plusieurs points communs. D'abord, il s'agit de modèles dynamiques. Smale et Thom les opposent aux modèles d'équilibre en économie, structurels en linguistique, Zeeman y oppose les processus biochimiques. Leur intérêt et leur investissement dans la dynamique qualitative suffisent à expliquer ce choix commun, de même que les tendances partagées au recours systématique à la topologie et à l'abstraction du support matériel du phénomène.

L'influence de Thom sur les mathématiciens l'ayant côtoyé est donc importante, même si il convient d'admettre des nuances : ils n'ont pas accepté telles quelles la modélisation conçue par Thom, la théorie des catastrophes et les théories de Thom [1025]. L'exemple de David Ruelle nous offre un autre cas dans lequel toute l'importance de ce contexte de l'IHES est manifeste.

b. David Ruelle, les systèmes dynamiques et l'IHES

David Ruelle est membre de l'IHES depuis 1963, l'année de l'arrivée de Thom. Il est mathématicien-physicien d'origine belge et a travaillé dans le domaine de la théorie quantique des champs et de la physique statistique avant d'en venir à l'étude des systèmes dynamiques, quelques temps après son entrée à l'IHES. Depuis 1968 au moins,

[1022] [PEIXOTO, M., 1973], p. 531-544.

[1023] Voir [AUBIN, D., 1998a], p. 410-411.

[1024] [AUBIN, D., 1998a], p. 413 : "For Smale, the mathematician proved theorems".

[1025] Même Zeeman s'est écarté de la voie originale de Thom (voir "The Thom-Zeeman Debate, [AUBIN, D., 1998a], p. 424-8). Plus tard, Smale a aussi été très véhément à l'égard de Zeeman (voir "The Smale-Zeeman Debate", [AUBIN, D., 1998a], p. 435-39). Les critiques à l'encontre de la théorie des catastrophes se sont multipliées, les plus sévères émanent surtout des mathématiques appliquées. La critique de H. Sussmann et R. Zahler est sans appel : "Catastrophe theorists have : misused the basic mathematics in ways that lead to indefensible arguments ; offered models which are based on unreasonable assumptions and which lead to implausible conclusions; made predictions which are frequently vacuous, tautologous, vague, or impossible to test experimentally." Cité dans [AUBIN, D., 1998a], p. 433.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

il réfléchit et essaye "de regarder des problèmes d'hydrodynamique ou, plus généralement, de "phénomènes dissipatifs" d'un point de vue physique analogue à celui de Thom" [1026]. Sa collaboration avec Floris Takens à l'IHES aboutira à un article d'une grande importance, "On the nature of turbulence" en 1971, donnant une théorie mathématique de la turbulence.

Ce travail mûrit au carrefour de la dynamique topologique et de la "topologie appliquée", dans le contexte de l'IHES. Il prélude à l'utilisation d'une partie des mathématiques des systèmes dynamiques dans l'ère du chaos.

Dans leur article, la turbulence est analysée sur un mode atypique, faisant usage de la théorie des systèmes dynamiques dont on a vu le plein développement à l'IHES à la fin des années 1960. Au sujet de l'apparition de la turbulence, il existait alors deux théories principales : le modèle quasi périodique et celle de Jean Leray [1027], datant des années 1930. La seconde s'inscrit dans une perspective de théorie des équations.

En étudiant les équations de Navier-Stokes, Leray a choisi d'associer la turbulence à un phénomène de rupture dans ces équations ; il suppose, en effet, que les équations cessent de décrire le fluide à partir d'une valeur critique et doivent être remplacées par une équation intégrale. Les solutions irrégulières de cette équation forment les solutions turbulentes.

La première, totalement différente de celle de Leray, est due au physicien Lev Landau (1908-1968), publié en 1944 [1028], et, indépendamment de Eberhard Hopf, entre 1942 et 1948 [1029]. Dans ce cadre théorique, la turbulence, le désordre, est le résultat de l'accumulation d'un nombre théoriquement infini de modes d'oscillations, autrement dit d'un mouvement quasi-périodique de plus en plus compliqué, l'accumulation suit l'augmentation progressive du nombre de Reynolds. Chez Landau peu d'arguments précis étayent un tel scénario, excepté des considérations très générales sur la stabilité des solutions.

Avec Hopf, la démarche est beaucoup plus mathématique et s'appuie sur la notion de bifurcation (appelée aujourd'hui bifurcation de Hopf), étudiée en 1942. En substance, il s'agit du même scénario que celui de Landau, exprimé en des termes de mathématiques des systèmes dynamiques.

Comme Ruelle et Takens plus tard, il choisit de paramétrer les équations de Navier-Stokes par une variable μ et d'étudier le comportement des solutions en fonction

[1026] "trying to look at some problems of hydrodynamics or, more generally, of 'dissipative phenomena' from a physical point of view analogous to Thom's", [AUBIN, D., 1998a], p. 358.

[1027] Pour les principaux travaux de Leray : [LERAY, J., 1933 / 1934a / 1934b]. Nous renvoyons au paragraphe présentant les conceptions de Leray dans [AUBIN, D., 1998a] (p. 472-481) et aux références inclues.

[1028] [LANDAU, L.D., 1944]. Les résultats sont reproduits quasiment inchangés dans le célèbre cours de Landau et Lifschitz consacré à la Mécanique des fluides : [LANDAU, .L.D., LIFSCHITZ, E.M., 1959].

[1029] Il s'agit surtout de l'article [HOPF, E., 1948], pour lequel Hopf s'appuie sur [HOPF, E., 1942].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

de μ. Pour μ grand dans son paramétrage, Hopf affirme que le flot laminaire (solution stationnaire) est la seule solution possible [1030]. Puis, à différents seuils, μ_0, μ_1, μ_2..., Hopf conjecture que le système subit une série de bifurcations (de Hopf) infinie et que le système évolue dans une variété $M(\mu)$: par exemple, après la première bifurcation, $M(\mu_0)$ est un cycle limite de Poincaré.

Lorsque Ruelle et Takens interviennent, la théorie dominante dans la communauté des physiciens est celle de Lev Landau. L'analyse de Ruelle et Takens vise à critiquer cette théorie et propose une théorie alternative [1031]. Leur démarche est à la fois similaire à celle de Hopf [1032], dans le sens où il s'agit d'une analyse en termes dynamiques (et non statistiques) et construite sur des mathématiques de même type, et très innovante, parce qu'ils ont recours à des procédés mathématiques extrêmement poussés et abstraits : la **topologie** et son utilisation pour la modélisation, telle que Thom en a démontré l'utilité, les notions de **généricité et de stabilité structurelle**.

Quelques citations suffisent à remettre l'article dans ce contexte. Les deux lignes de remerciements sont très claires :

"Les auteurs remercient avec plaisir R. Thom pour les discussions de grande valeur […] L'ouvrage de Thom [12] (à paraître) a été une source d'inspirations pour le présent article" [1033]

Dans son ouvrage de réflexion de 1991, Ruelle rappelle :

"La description de la turbulence en termes de modes par Landau m'a tout de suite déplu parce qu'elle était en désaccord avec des idées mathématiques que j'avais entendu exposer (sic) par René Thom, et que j'avais étudiées dans un article fondamental de Steve Smale sur les systèmes dynamiques différentiables. Le Français René Thom et l'Américain Steve Smale sont tous deux d'éminents mathématiciens [...] C'est d'eux que j'ai appris les développements modernes des idées de Poincaré sur les systèmes dynamiques, et à partir de là il était clair que le paradigme des modes est loin d'être universellement applicable." [1034]

L'idée générale pour l'apparition de la turbulence est la suivante : au bout d'un petit nombre de bifurcations il se crée un attracteur dit "étrange" (représentant la turbulence) et

[1030] D'après les "faits observationnels" en hydrodynamique : [HOPF, E., 1948], p. 304.

[1031] C'est ce qui leur vaudra d'être accueillis fraîchement : refusé par le comité de lecture de la revue Archive for Rational Mechanics and Analysis, il est publié dans Communications in Mathematical Physics, où Ruelle est éditeur. Vu la technicité mathématique et ces considérations controversées, il n'y a rien d'étonnant à cela. Voir [RUELLE, D., 1991], p. 73 et [AUBIN, D., 1998a], p. 451.

[1032] Dans leur texte, le nom donné au scénario est d'abord celui de Landau et Lifschitz, mais une note renvoie à la présentation et à la discussion selon Hopf. [RUELLE, D., TAKENS, F., 1971], p. 167.

[1033] "The authors take pleasure in thanking R. Thom for valuable discussion [...] Some inspirations for the present paper was derived from Thom's forthcoming book [12]",[RUELLE, D., TAKENS, F., 1971], p. 169 ([12] correspond à l'ouvrage Stabilité structurelle et Morphogenèse).

[1034] [RUELLE, D., 1991], p. 72.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

le scénario est générique. L'analyse de l'article fait ressortir les principales connexions conceptuelles, au-delà de la mention de la notion d'attracteur et généricité.

Dans leur article, ils considèrent les équations de Navier-Stokes, comme système dynamique à un paramètre μ, sans se préoccuper de la forme exacte des équations :

$$\frac{dv}{dt} = X_{\mu}(v)$$

Partant de l'état de repos ($\mu=0$), le régime du fluide passe à un état stationnaire pour μ faible (un point fixe dans l'espace des phases). Par le franchissement d'un seuil μ_1, le champ de vitesse subit une **bifurcation d e Hopf** [1035] et génère un état d'oscillation de fréquence ω_1.

A une seconde valeur critique μ_2, une autre bifurcation de Hopf crée un régime d'oscillation de fréquence ω_2, indépendant du précédent et s'y superposant. Il s'agit en quelque sorte d'une preuve mathématique de ce que Hopf avait imaginé.

Si μ augmente encore, alors le "mouvement du fluide devient très compliqué, irrégulier et chaotique, nous avons de la *turbulence*" [1036]. Mais pour cela, il n'est nul besoin d'attendre le franchissement de multiples paliers ω_n : un nombre limité (3 ou 4) suffit. Le scénario de Landau et Lifschitz [1037] correspond en fait à un grand nombre de paliers ω_n. L'article de Ruelle-Takens**prouve mathématiquement que ce scénario n'est pas générique** [1038] et n'a donc que très peu de chance d'être observé en pratique. Sur cet exemple, les outils des systèmes dynamiques montrent qu'ils peuvent être remarquablement utiles.

Ruelle et Takens s'inspirent notamment de l'article de Smale de 1967, dont l'essentiel était de traiter des systèmes dynamiques de dimension supérieure à deux, comme dans le cas présent. La notion d'attracteur "étrange", définie comme le produit d'un ensemble de Cantor par une variété, est inspiré du fer à cheval et des constructions de Smale. Un attracteur étrange tel qu'il est présenté dans l'article, est stable, ce qui fait qu'il "ne peut

[1035] La bifurcation de Hopf correspondant au passage d'un point fixe à un cycle limite, dans l'espace des phases, la fréquence ω_1 est la fréquence de parcours du cycle. Ici, il convient de signaler que Ruelle et Takens connaissent et utilisent la notion de bifurcation de Hopf, grâce à Thom. Rappelons que Thom l'a remis un peu au goût du jour dans Stabilité structurelle et morphogenèse : celui-ci est publié en 1972 seulement, mais les idées circulent bien avant à l'IHES. Dans les remerciements de l'article on peut lire : "The authors take pleasure in thanking R. Thom for valuable discussion, in particular introducing one of us (F.T.) to the Hopf bifurcation", [RUELLE, D., TAKENS, F., 1971], p. 169.

[1036] "the fluid motion becomes very complicated, irregular and chaotic, we have *turbulence*", [RUELLE, D., TAKENS, F., 1971], p. 167 (en italique dans le texte).

[1037] L'interprétation de ces physiciens est décrite dans un des ouvrages de leur célèbre série de traités : [LANDAU, L.D., LIFSCHITZ, E.M., 1959] (traduction anglaise) et dans l'article [LANDAU, L.D., 1944].

[1038] L'idée est de prouver que les mouvements de Landau font figure d'exception. En termes mathématiques (comme Ruelle l'affirme lui-même), l'assertion la plus correcte serait : les mouvements non quasi périodiques sont génériques.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

pas être rejeté comme une pathologie non générique" [1039] . En 1971, leur caractérisation de la turbulence s'arrête à ces grandes lignes à la fois qualitatives et extrêmement pointues.

L'article de 1971 a ainsi hérité des analyses de Thom et Smale, des analyses topologiques "appliquées" de Thom, de la théorie des systèmes dynamiques développée dans le contexte de l'IHES. En outre, il signe une rencontre entre ces théories mathématiques abstraites et la physique, selon une perspective qualitative, peu habituelle en physique. L'optique de Ruelle et Takens est atypique dans le sens où ils ne considèrent pas les équations d'un système donné, ne s'embarrassent pas des détails d'un modèle précis. Au contraire, pour reprendre la formule d'Aubin, ils arrêtent de regarder des représentations spécifiques de la nature pour étudier les conséquences du mode de représentation lui-même [1040] .

Ce résultat va connaître un tout autre sort que la théorie des catastrophes. Dans ses démarches, Ruelle fait preuve de beaucoup d'ouverture, contrairement à Thom. Ici, l'arrogance mathématique laisse la place à plus de diplomatie dans les contacts avec des hydrodynamiciens qui se montrent d'abord peu enthousiastes avant d'adhérer un peu plus largement aux thèses de Ruelle. Il est difficile d'admettre qu'une analyse mathématique puisse suggérer de chercher des alternatives aux théories physiques, mais c'est tout le sens de l'opération de Ruelle lorsqu'il prend contact avec des expérimentateurs. Cette approche participera du véritable succès de l'entreprise et du développement considérable des notions d'attracteur étrange, de turbulence et de chaos.

En outre, la teneur mathématique du travail de 1971 ne doit pas faire oublier que Ruelle est aussi un physicien, théoricien. La turbulence est un phénomène physique, hydrodynamique et l'ouverture vers les expérimentateurs traduit une volonté d'éclaircir cet aspect du problème. La caractéristique de son travail est de mettre les mathématiques au service d'objectifs théoriques : par l'utilisation d'une forme de modélisation à la Thom d'une part, et par une formalisation très poussée des problèmes d'autre part. Outre l'article de 1971 qui illustre bien ceci, il faut mentionner ses travaux de Mécanique statistique, remarquables au point de vue théorique. Ainsi, dans l'introduction de son traité de 1969, il exprime sa vision des mathématiques dans la physique :

"L'analyse mathématique donne au monde physique une nouvelle structure et un nouveau sens. La connaissance de cette structure et de ce sens constitue une intelligibilité de la 'nature des choses' aussi profonde que l'on peut espérer. […] Le progrès de la physique mathématique pourrait être promu significativement, selon l'opinion de l'auteur, par la disponibilité de résultats d'importantes théories mathématiques sous des formes concises et sans preuves, dans l'esprit des 'Fascicules de Résultats' de Bourbaki." [1041]

Il faut donc lire les résultats de 1971 à la lumière de cette volonté de rigueur mathématique, de référence à Bourbaki et d'une attitude structuraliste qui marquent le

[1039] "An attractor of the type just described can therefore not be thrown as non-generic pathology", [RUELLE, D., TAKENS, F., 1971], p. 171.

[1040] [AUBIN, D., 1998a], p. 450.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

travail de Ruelle [1042], en turbulence comme en Mécanique statistique. Le chapitre suivant nous montrera l'autre versant, celui de la Mécanique statistique et l'ergodicité à l'oeuvre dans les travaux de Ruelle.

Le chaos et les conceptions de Ruelle-Takens

Même si la théorie des catastrophes n'a pas eu le succès escompté et n'a pas perduré, la pratique et les idées de Thom se sont diffusées sous d'autres formes, grâce au contexte de l'IHES. Les mathématiques qualitatives, la topologie, ses tentatives de modélisation se retrouvent en particulier dans la conceptualisation de la turbulence de Ruelle et Takens, croisées avec les mathématiques de Smale. En ce sens, on peut parler de "naufrage subtil", pour reprendre le terme de Thom [1043].

Les conceptions de Ruelle et Takens ont été décisives dans l'effervescence du chaos. En 1971, elles représentent déjà une nouvelle idée du rapport entre simplicité et complexité, entre ordre et désordre. Dans un système "apparemment" simple, il suffit d'accumuler un nombre limité de modes d'oscillation pour obtenir un comportement turbulent. Les approches connues antérieurement, celles de Landau, mais aussi les méthodes statistiques couramment utilisées dans la théorie de la turbulence, reposaient sur un schéma où le complexe émerge du grand nombre de phénomènes superposés (ce qui sert souvent à justifier l'utilisation de méthodes statistiques). Pour Ruelle réfléchissant de manière rétrospective en 1991 à l'évolution depuis 1971, il s'agit d'un changement de paradigme : le "paradigme des modes" de Landau, est remplacé par celui du chaos [1044]. Cela reflète la difficulté rencontrée pour faire reconnaître les idées sur la turbulence, confrontées à des cadres de pensée bien fixés [1045]. Pour ce point de l'histoire de la turbulence et du changement occasionné par l'article de 1971, la proposition est pertinente, mais il faut la nuancer s'il y a une prétention à englober toutes les évolutions de la période 1975-82. Cet article ne résume pas la totalité des mutations observées. L'idée des attracteurs étranges est présente, le fait que la turbulence soit un comportement non périodique également, mais la sensibilité aux conditions initiales conquiert son importance par la suite [1046]. En outre, s'il contient le qualificatif "chaotique",

1041 ***"[…] mathematical analysis gives to the physical world a new structure and meaning. The knowledge of this structure and meaning constitutes an understanding of the 'nature of things' as deep as we can hope to be. […] The progress of mathematical physics could be significantly promoted, in the author's opinion, by the availability of results of important mathematical theories in concise form and without proofs, in the spirit of Bourbaki's 'Fascicules de Résultats'", [RUELLE, D., 1969], p. vii-viii.***

1042 La thèse de Aubin fait une grande place au structuralisme et au bourbakisme, versant mathématique du structuralisme, en tant que "connecteur culturel" entre différents milieux.

1043 "Sociologiquement, on peut dire que cette théorie a donc fait naufrage. Mais c'est en un certain sens un naufrage subtil, parce que la plupart des notions que j'ai introduites ont fait leur chemin.", [THOM, R., 1991], p. 47.

1044 [RUELLE, D., 1991], p. 67-95, en particulier, p. 72.

1045 Voir la note précédente n° 1031, p. 444.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

il est associé à "irrégulier" et "turbulent" ce qui lui donne un sens tout à fait classique [1047] . Il s'agit d'abord d'une coïncidence.

6.4. Conclusion : Un retour sur les mathématiques de Poincaré

La constitution du champ des mathématiques des systèmes dynamiques est de quelques années antérieure à celle du champ du chaos. Quelques programmes et projets ambitieux ont donné les perspectives et ont assuré une certaine continuité dans l'extension mathématique. Les développements postérieurs à 1975 sont apparus, en conséquence, non pas comme des ruptures, mais comme des prolongements de ces considérations.

Le déroulement depuis Poincaré est cependant marqué par des ruptures et l'émergence de nouvelles conceptualisations mathématiques de la dynamique. Comme dans tout processus historique, des rencontres plus conjoncturelles ont doublé les grandes tendances et, en dépit de leur caractère très ponctuel, ont engendré des changements parfois profonds. Les mathématiques des systèmes dynamiques employés après 1975 sont le résultat de ces mutations ; les changements se poursuivent après 1971 et à travers l'épisode du chaos. Au plan des mathématiques, l'article de 1971 a eu, par exemple, pour effet d'orienter les recherches vers les attracteurs des systèmes [1048] .

La place importante qui leur est accordée tient à cette longue tradition, au réseau conceptuel, mais aussi social, qui s'est construit. Ainsi beaucoup de mathématiciens issus des systèmes dynamiques participent-ils de manière décisive à la constitution des problématiques du chaos : Ruelle, le premier, Bowen, Newhouse, Guckenheimer, Abraham et bien d'autres. La conférence sur les systèmes dynamiques, organisée par Cesari, Hale et Lasalle (école Lefschetz) en 1974 est aussi symbolique de cette présence : Li et Yorke annoncent les résultats du futur "Period three implies chaos" [1049] .

Sur le plan conceptuel, l'héritage des systèmes dynamiques est considérable. Fondamentalement, ces mathématiques apportent les outils utiles pour rendre compte des nouveaux rapports entre ordre et désordre, stabilité et instabilité, qui ont germé depuis les années 1960 et arrivent à maturité avec le chaos. Cependant ce cheminement ne se limite pas à des conceptions mathématiques car les problèmes de la Mécanique statistique, des oscillations non linéaires et diverses expériences numériques tentées sur ordinateur ont eu un rôle majeur. Ceci nous conduit à relativiser encore les travaux de

[1046] La présence d'un ensemble de Cantor comme attracteur peut suggérer l'existence d'une sensibilité de ce genre ; mais en 1971 une telle sensibilité n'est pas la préoccupation centrale et n'a pas encore la place particulière qui lui est accordée par la suite dans les idées sur la turbulence et le chaos.

[1047] Le terme apparaît page 167 et page 168 de leur article [RUELLE, D., TAKENS, F., 1971].

[1048] L'article de Eckmann de 1981, bilan des scénarios de transition vers la turbulence nous le rappelle bien ([ECKMANN, J.P., 1981]). Nous renvoyons à l'étude plus complète du chapitre 5, en particulier à la page 368.Voir également [AUBIN, D., 1998a], p. 485.

[1049] [LI, T.Y, YORKE, J.A., 1974], sous le titre "The 'simplest'dynamical system". Cf. chapitre 3, p. 175.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Poincaré : ils sont au départ de ces mutations, mais de multiples facteurs les ont transformés, si bien que le cadre mathématique déployé dans les années 1970 n'est plus directement celui de Poincaré, mais une hyper-sophistication de ses idées.

CHAPITRE 7. LE CHAOS ET LA MÉCANIQUE STATISTIQUE : ENTRE INSTABILITÉ ET ERGODICITÉ

Par un simple rapprochement de vocabulaire, notre analyse de la période 1975-1982 est renvoyée au "moment" d'origine. D'un coté, instabilité et ergodicité sont entrés en jeu au carrefour de l'interrogation sur les probabilités en physique, des fondements de la théorie cinétique des gaz et des débats sur le déterminisme à la fin du XIXème siècle. De l'autre, ces notions surgissent dans les conceptions du chaos en rapport avec la Mécanique statistique au cours des années 1970.

De la même manière que les mathématiques des systèmes dynamiques ont subi une profonde évolution avant de s'incarner dans les notions de chaos, les débats sur l'instabilité, l'ergodicité et plus généralement la Mécanique statistique ont mûri au fil du XXème siècle. Les changements conceptuels depuis leurs origines jusqu'aux années 1980 font l'objet de ce chapitre, dans lequel nous reprendrons les *themata* hasard, déterminisme et instabilité afin de faire la lumière sur les enjeux les plus profonds.

Nous avons décomposé notre histoire en trois périodes temporelles et culturelles pour donner une épaisseur historique certaine à cette évolution des idées. La première correspond aux années 1930, à la naissance et au développement de la "théorie ergodique", dans un contexte internationalisé. Le cadre de l'URSS post-seconde guerre mondiale constitue l'arrière-plan des développements sur la stochasticité et l'instabilité. Enfin, le processus de diffusion, d'acceptation de ces idées nouvelles, dans la science occidentale, en dehors de l'Union Soviétique, nous permettra de saisir les ultimes évolutions et aboutissements dans les conceptualisations du chaos.

7.1. Les années 1930 : les théorèmes ergodiques et la théorie ergodique

Nous avons vu au chapitre précédent que l'entre-deux-guerres a été propice aux développements de Birkhoff et Andronov en matière de mathématiques des systèmes dynamiques. De manière parallèle, les années 1930 sont marquées par le développement d'une nouvelle notion d'ergodicité, appelée "transitivité métrique" et la constitution d'une "théorie ergodique". Les théorèmes de Von Neumann et Birkhoff sont au cœur de cette mutation dans laquelle les mathématiques des systèmes dynamiques, avec Birkhoff, sont essentielles. Cependant, dans la lignée des réflexions du XIXème siècle, la théorie des probabilités est également concernée. Eberhard Hopf et quelques acteurs soviétiques sont prolifiques à ce niveau et participent ainsi à ce mouvement de conceptualisation extrêmement divers. Les contours de la "première" notion de "chaos" de Norbert Wiener

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

pourront ainsi être soulignés. Néanmoins, il n'est pas question d'analyser de manière exhaustive l'ensemble des débats portés sur la scène internationale. En rapport avec les suites données à ces théories nous nous contenterons de sélectionner ces quelques tendances, très représentatives des propositions générales à nos yeux.

a. Les deux théorèmes ergodiques : vers la transitivité métrique et la théorie ergodique

La recherche en Mécanique statistique est, rappelons-le, fortement orientée par la synthèse des Ehrenfest, après sa publication en 1911. L'hypothèse ergodique, assouplie en hypothèse quasi-ergodique, qui est destinée à légitimer le traitement statistique de la Mécanique et l'unicité de la distribution stationnaire (microcanonique), se décline en deux formulations : les moyennes temporelles et spatiales (dans l'espace des phases) sont égales ; le temps passé par une trajectoire de l'espace des phases dans une région est proportionnel à la taille de cette région.

Les deux premiers théorèmes ergodiques, de Von Neumann et Birkhoff, s'en inspirent mais vont surtout modifier les perspectives. La notion d'ergodicité va être transformée et s'ouvrira rapidement sur des réflexions plus proches des probabilités. Cependant, sous l'impulsion de Birkhoff, elle est articulée par les questions de dynamique, dans sa conception, et donne naissance à la "théorie ergodique", laquelle deviendra la théorie ergodique des systèmes dynamiques, en se détachant de ses racines physiques.

La rencontre de deux traditions

Chronologiquement, même s'il a été publié après celui de Birkhoff, Von Neumann est l'auteur du premier théorème ergodique [1050]. Vers la fin de l'année 1931, les deux résultats sont prêts. Birkhoff fait paraître son résultat en deux articles consécutifs (datés du 27 novembre et du 1er décembre 1931) [1051] ; celui de Von Neumann est publié en janvier 1932 [1052], dans la même revue. Ces deux résultats fondamentaux sont le fruit d'une seule et même rencontre entre deux traditions incarnées par Von Neumann et Birkhoff.

En effet, jusqu'à cette époque, Von Neumann est préoccupé par les questions de la

[1050] D'après Ulam, Von Neumann en a toujours voulu à Birkhoff de lui avoir soufflé la priorité : "Von Neumann never quite forgave G.D. for having "scooped" him in the affair of the ergodic theorem : Von Neumann had been the first in proving what is now called the weak ergodic theorem. By a sheer virtuoso kind of combinatorial thinking, Birkhoff managed to prove a stronger one, and – having more influence with the editors of the "Proceedings" of the National Academy of Sciences – he published his paper first. This was something Johnny could never forget.", [ULAM, S., 1976], p. 98.

[1051] [BIRKHOFF, G.D., 1931a / 1931b]. Il faut noter que l'article cité comme référence habituelle ("Proof of the ergodic theorem") est le second de ces articles et qu'il ne va pas sans le premier ("Proof of a recurrence theorem for strongly transitive systems") ; tout le monde ne semble pas au courant que les notations et certaines preuves de résultats sont contenus dans le premier article.

[1052] "Proof of the Quasi-ergodic hypothesis", [VON NEUMANN, J., 1932a].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Mécanique quantique et son intérêt pour la Mécanique statistique, et la thermodynamique, leur est fortement associé. Il est manifestement inspiré par la lecture de l'article des Ehrenfest [1053] comme son résultat le reflète. En substance, Von Neumann utilise des méthodes d'opérateurs sur les espaces de Hilbert, pour parvenir à montrer que la moyenne temporelle existe "en moyenne L_2" [1054], comme son précédent travail de 1929 [1055]. En outre, il donne une condition pour que le système soit "ergodique", c'est-à-dire que la moyenne temporelle égale la moyenne spatiale : tout ensemble invariant dans la dynamique est soit 0, soit l'espace des phases entier (le sous-espace d'énergie donnée pour être plus précis). Le théorème de Von Neumann est inscrit dans une histoire bien délimitée, qu'on pourrait même qualifiée d'"européenne" [1056].

De son côté, Birkhoff est plus intéressé par la Mécanique classique, les systèmes dynamiques et Poincaré. Son théorème ergodique s'adosse à ses propres considérations sur les systèmes dynamiques [1057]. Il montre d'abord un résultat de récurrence, avec l'hypothèse de "transitivité forte" [1058], qui correspond au fait que "tout ensemble mesurable de trajectoires complètes dans M est de mesure 0 ou V, où V est le volume total de M" [1059]. Le **théorème de récurrence de Poincaré** [1060], la question des sections transverses [1061], la notion de mouvement récurrent forment l'arrière-plan de son résultat.

[1053] En 1929, il a d'ailleurs écrit un article sur la mécanique statistique quantique et le problème de l'ergodicité dans ce cadre : [VON NEUMANN., J., 1929].

[1054] Pour une transformation *T* d'un espace *M*, avec une mesure invariante *μ*, on considère l'espace de Hilbert $L_2(M)$ des fonctions de carré intégrable. Von Neumann prouve que pour tout *f* de L_2, il existe une limite *f**dans L_2 :
Il y a convergence en "moyenne" ; elle implique d'ailleurs la convergence en presque tout point, mais ne dit rien sur les fonctions intégrables en général (L_1). Voir [VON NEUMANN, J., 1932a], [LO BELLO, A., 1983], p. 52-53.

[1055] Cette convergence en moyenne est aussi la notion de convergence propre aux espaces de Hilbert, que Von Neumann a introduit en mécanique quantique.

[1056] Elle passe par les Ehrenfest (aux Pays-Bas à cette époque), David Hilbert et son centre de recherche à Göttingen, où Von Neumann a travaillé avant d'aller à Princeton.

[1057] Birkhoff sous-entend qu'il a même déjà abordé ce problème de dynamique dix ans auparavant : "The method of proof is one which I tried to use nearly ten years ago in order to show that there was some uniformity of recurrence when there was merely regional transitivity", [BIRKHOFF, G.D., 1931a], p. 651.

[1058] Le résultat est le suivant : "if t_n denotes time of the nth crossing of σ by a trajectory which issues from a point P of σ, then we have, for a certain constant τ : lim t_n(P)/n= τ for all points P save those which belong to a set of measure 0.", [BIRKHOFF, G.D., 1931a], p. 651 : *σ* est une sorte de section transverse.

[1059] "[…] any measurable set of complete trajectories in M has either the measure 0 or V, where V is the total volume of M.", [BIRKHOFF, G.D., 1931a], p. 651.

[1060] Birkhoff le discute, en présente la "signification" et s'inscrit dans la perspective de Poincaré ; c'est une habitude chez Birkhoff. [BIRKHOFF, G.D., 1931a], p. 651.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Le titre du premier article du 27 novembre 1931 suffit à faire ressortir clairement sa perspective : "Proof of a recurrence theorem for strongly transitive dynamical systems".

Dans la seconde partie des articles, Birkhoff prouve son "théorème ergodique", valable sans hypothèse de transitivité forte : "*il existe une 'probabilité de temps' p bien définie selon laquelle tout point se déplaçant sera dans une région v, sauf pour un ensemble de mesure 0 ;"* [1062] , c'est-à-dire que la limite :

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{\bar{t}}{t} = p \leq 1$$

[illegible] t est le temps écoulé depuis le départ d'un point fixe et $\bar{t}$ le temps passé dans v). En [illegible] l'hypothèse de transitivité forte, $p = 1$ le quotient du volume de v [illegible] le volume total V.

Malgré les différences dans leur apparence, les deux théorèmes sont le résultat du croisement de ces deux perspectives de recherches. Birkhoff s'inspire de Von Neumann [1063] et inversement, Von Neumann a utilisé un résultat de Bernard Osgood Koopman (1900-1981) [1064] , un élève de Birkhoff. Dans son travail sur les systèmes dynamiques [1065] , Koopman est parvenu à établir un lien entre les systèmes dynamiques et les transformations des espaces de Hilbert [1066] : ce résultat constitue en quelque sorte la trace mathématique de la rencontre des deux traditions mises en avant.

[1061] Il suffit de lire l'énoncé du résultat dans la note 1058, p. 453.

[1062] "[…] *there is a definite 'time probability' p that any moving point, excepting those of a set of measure 0, will lie in a region v ;",* [BIRKHOFF, G.D., 1931b], p. 660 (en italique dans le texte).

[1063] "On October 22, 1931, M. v. Neumann communicated personnaly to the authors of this note his results on the Mean Ergodic Theorem", [BIRKHOFF, G.D., KOOPMAN, B.O., 1932], p. 281. Morse le présente aussi dans sa biographie de Birkhoff [MORSE, M., 1968], p. xli. On peut lire également [BIRKHOFF, G.D., 1932b], p. 366, et son texte original : [BIRKHOFF, G.D., 1931a], p. 651.

[1064] [VON NEUMANN, J., 1932], p. 70. Von Neumann fait état d'une conversation au printemps 1930 avec Koopman, au sujet de l'application de son théorème dans le cadre d'un théorème ergodique. (Ibid., p. 71).

[1065] Il suffit de rappeler le titre de sa thèse, de 1926, pour comprendre qu'il suit la voie du maître : "On the rejection to infinity and exterior motion in the restricted problem of the three bodies".

[1066] [KOOPMAN, B.O., 1931]. Plus précisément, il a démontré le résultat suivant : un système conservatif T_t sur M, avec une mesure invariante sur M, peut être représenté par une famille de transformations (unitaires) d'un espace de Hilbert. Outre qu'il ouvre une perspective intéressante dans l'étude des systèmes dynamiques, cette opération a été utilisée par Von Neumann dans son théorème.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Dans la confrontation avec le théorème de Von Neumann, la perspective adoptée par Birkhoff sur son théorème ergodique va légèrement évoluer, d'une manière finalement assez peu inattendue et très significative.

1932 : la théorie ergodique et la transitivité métrique

Les perspectives sur l'ergodicité vont évoluer par la confrontation autant "scientifique" que personnelle entre Von Neumann et Birkhoff. En premier lieu, il faut signaler que Von Neumann, peut-être froissé de ne pas avoir eu la priorité de publication, fait paraître un texte intitulé "Physical applications of the ergodic hypothesis" [1067] en 1932 dans lequel il prétend que seul son théorème à une réelle signification pour la physique.

Le texte consécutif de Birkhoff et Koopman, "Recent contributions to the ergodic theory" [1068], est une sorte de réponse à ces affirmations. Il apporte également une première définition de la "théorie ergodique", comme le titre le suggère, alors qu'il n'était question que de théorème ou d'hypothèse ergodique auparavant. En outre, il propose une première reconstruction de l'histoire très récente de la question de l'ergodicité, en insistant particulièrement sur le travail des Ehrenfest, bien qu'il ne semble pas qu'il fût vraiment directement déterminant dans le résultat obtenu par Birkhoff. Plus logiquement, Poincaré y trouve sa place (et plus encore dans un autre article de Birkhoff de 1932 [1069]). Birkhoff et Koopman aboutissent, naturellement, à la formulation du "théorème ergodique", qui, bien sûr, n'est autre que le théorème de Birkhoff (par opposition au "théorème ergodique en moyenne" de Von Neumann). Dans ce texte intervient surtout la notion de **transitivité métrique** qui vient remplacer la forte transitivité et la condition établie par Von Neumann pour avoir ergodicité :

"Si ($P\#P_t$) est un groupe, à un paramètre, continu d'automorphismes de l'espace métrique #, il est dit métriquement transitif si et seulement si # ne peut pas se décomposer en deux sous-ensembles de mesure plus grande que zéro, en étant chacun invariant sous toute transformation du groupe." [1070]

La substitution est habile car elle permet de mettre sa nouvelle hypothèse en perspective avec les considérations sur les transformations du plan, que Birkhoff a étudié avec Paul Smith [1071] en 1928 et où cette notion était apparue pour la première fois. A la fin du texte, il n'y a aucune ambiguïté au sujet de la transitivité métrique : "il peut être affirmé, en conclusion, que le problème remarquable et non résolu dans la théorie ergodique est la

[1067] [VON NEUMANN, J., 1932b].

[1068] [BIRKHOFF, G.D., KOOPMAN, B.O., 1932].

[1069] "Probability and physical systems", [BIRKHOFF, G.D., 1932b].

[1070] ***"If ($P \rightarrow P_t$) is a continuous one-parameter group of automorphisms of the metrical space Ω, it is said metrically transitive if and only if Ω cannot be decomposed into two subsets each of mesure greater than zero, and each invariant under every transformation of the group.", [BIRKHOFF, G.D., KOOPMAN, B.O., 1932], p. 280.***

[1071] Nous renvoyons au chapitre 6, page 392 (note 880 en particulier), pour plus de détails sur cet aspect des mathématiques de Birkhoff.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

question de la véracité ou fausseté de la transitivité métrique pour des systèmes Hamiltoniens généraux" [1072] . En d'autres termes, "L'*Hypothèse Quasi-ergodique* a été remplacée par sa version moderne : l'*Hypothèse de Transitivité Métrique"* [1073] . Précisons bien qu'ils ne montrent pas l'équivalence des deux versions, mais procèdent à **un échange : la théorie ergodique nouvellement définie est articulée par la question de la transitivité métrique**.

Le renouveau de l'ergodicité

Précisons la nature des changements opérés par Birkhoff.

L'hypothèse ergodique (ou quasi-ergodique) était une affirmation concernant la dynamique d'un système, destinée à justifier un traitement statistique. En un sens, il est tout à fait légitime que des considérations de Mécanique, ou sur les systèmes dynamiques, interviennent dans ce contexte ; nous l'avons vu avec les multiples débats entre Maxwell, Boltzmann et ses contradicteurs, avec l'utilisation du théorème de récurrence de Poincaré issu des problèmes de Mécanique céleste (pour le paradoxe de Zermelo-Planck par exemple [1074]). De la même façon, les résultats de Birkhoff sur les systèmes dynamiques sont investis dans la question de l'ergodicité et le changement est à la hauteur de l'évolution induite par Birkhoff. L'importance de la dynamique, déterministe, dans l'épistémologie de Birkhoff n'est pas étrangère à ses recherches : la réflexion sur l'ergodicité, comme justification de l'utilisation des probabilités et moyen de maintenir dans une philosophie fréquentiste des probabilités (comme les Ehrenfest l'ont promue) trouve un écho remarquable chez Birkhoff.

La seconde évolution importante de 1931 tient à l'utilisation des probabilités, sous forme de théorie de la mesure. La théorie de la mesure intervient doublement : dans l'hypothèse de transitivité métrique et dans le résultat final, valable "presque partout". Selon Birkhoff, c'est la nécessité de considérer des résultats valables "en général" qui conduit à introduire ces probabilités [1075] . Il rappelle d'ailleurs que Poincaré, avec son théorème de récurrence, avait inauguré cette perspective. La mise sous forme de théorie de la mesure est lourde de conséquences. En effet, si la théorie ergodique, avec Birkhoff, s'inscrit dans une recherche sur la dynamique, l'introduction de ces perfectionnements

[1072] "It may be stated in conclusion that the outstanding unsolved problem in the ergodic theory is the question of the truth or falsity of metrical transitivity for general Hamiltonian systems", [BIRKHOFF, G.D., KOOPMAN, B.O., 1932], p. 282.

[1073] "The *Quasi-Ergodic Hypothesis* has been replaced by its modern version : the *Hypothesis of Metrical Transitivity*", [BIRKHOFF, G.D., KOOPMAN, B.O., 1932], p. 282 (en italique dans le texte).

[1074] Cf. chapitre 2, p. 105.

[1075] Dans "Probability and physical systems" : "As far as I know, it was Koopman, among mathematicians, who first emphasized the importance of getting away from the exclusive consideration of those "properties which are changed altogether by an infinitely small change in the physical conditions attendant on the problem, or by the slightest change in initial data" and of obtaining results which are valid *in general*. Evidently results of this type are likely to bring in considerations of *probability*.", [BIRKHOFF, G.D., 1932b], p. 365 (en italique dans le texte).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

mathématiques ouvre des voies aux théories des probabilités, en plein développement dans les années 1930 (sur la base de la théorie de la mesure).

L'autonomisation du sujet

La formulation mathématique précise, dans le cadre des systèmes dynamiques et la théorie de la mesure, participe à **autonomiser** le sujet de la théorie ergodique. Parallèlement à l'indépendance mathématique acquise par la théorie des systèmes dynamiques, avec Birkhoff, la théorie ergodique est en train de se définir comme la théorie des systèmes dynamiques préservant une mesure [1076].

Cependant, malgré sa percée dans le domaine, Birkhoff abandonne le sujet aussi vite qu'il y est venu. Il n'aura produit qu'un résultat, décisif. Von Neumann ne s'investit pas non plus outre mesure dans cette recherche. L'effort de Birkhoff contribue néanmoins au timide développement du sujet à Harvard. Il faut dire que Koopman est déjà son élève et qu'un autre mathématicien très adroit est présent au moment où se développent ces problèmes, Eberhard Hopf.

L'autonomisation par rapport aux fondements de la Mécanique statistique va provoquer une ouverture dans plusieurs directions, tournées vers les mathématiques pour la plupart. L'interrogation sur l'ergodicité se métamorphose en une recherche des systèmes métriquement transitifs. Cependant, cette option n'est pas exclusive. Dans un rapport constant aux théories des probabilités, la problématique de l'ergodicité poursuit son évolution. Le travail d'Eberhard Hopf, en parallèle à ceux des mathématiciens soviétiques, en est très représentatif.

b. E. Hopf : théorie ergodique et probabilités

Hopf travaille à Harvard lorsque les théorèmes ergodiques sont dévoilés [1077]. Il est bien plus qu'un spectateur de cette nouveauté puisqu'il va contribuer lui-même au développement de la théorie ergodique. En un sens Hopf revient aux sources, en associant les questions sur l'ergodicité à la théorie des probabilités et à la Mécanique statistique. Nous allons voir qu'en conséquence Hopf propose de dépasser la notion de transitivité métrique, à peine avalisée, en introduisant le concept de "mélange".

à Harvard

Revenons au préalable, brièvement, sur son entrée en théorie ergodique. Il a publié un article, souvent passé sous silence, le 4 décembre 1931, intitulé "On the time average theorem in dynamics" [1078], exactement entre ceux de Birkhoff et de Von Neumann.

[1076] Avec Birkhoff, les systèmes considérés sont les systèmes Hamiltoniens, qui préservent la mesure (le volume de l'espace des phases). La généralisation viendra d'autres mathématiciens contemporains, dont E. Hopf, N. Kryloff et N. Bogoliuboff en particulier (cf. note , p. 465).

[1077] Hopf est "International Fellow of Mathematics" à l'Université de Harvard, entre 1930 et 1932, puis, jusqu'en 1936, professeur assitant au Massachusetts Institute of Technology. Nous renvoyons aux indications biographiques dans la sélection de ses œuvres [HOPF, E., 2002], p. xv.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

L'article contient leurs deux résultats : Hopf était donc intéressé par le sujet avant cette date et il bénéficie d'un environnement certainement très propice à cette problématique. Mais Hopf produit plus qu'une mosaïque de résultats. Il les expose, explicite leurs différences, les rend accessibles (plus que n'importe quel article sur le sujet à l'époque) et traduit même mieux les problèmes et les résultats de la théorie ergodique que le texte de Birkhoff et Koopman.

Tous les textes sur les théorèmes ergodiques dont nous avons parlés sont dans les livraisons 17 et 18 des Proceedings of the National Academy of Science de 1931-32. Il faut encore en ajouter deux de Hopf, qui sont très rarement cités. Dans le premier, "Complete transitivity and the ergodic principle" [1079], en 1932, Hopf examine le problème du mélange des liquides, discuté par Poincaré [1080] : Hopf affirme que la transitivité métrique n'est pas suffisante pour expliquer le phénomène, qu'il a, au préalable, formulé mathématiquement. En outre, il s'écarte de la dynamique Hamiltonienne en considérant plus généralement les transformations qui préservent la mesure. La théorie ergodique selon Birkhoff n'est donc pas si limpide que ce qu'il prétend à l'issue de son théorème ergodique. Le second traite de Mécanique statistique, "Proof of Gibbs hypothesis on the tendency toward statistical equilibrium" [1081], la même année. Hopf cherche les conditions pour lesquelles un système de la Mécanique statistique tend vers un état d'équilibre stationnaire, quelque soit la distribution initiale.

En définitive, parmi les mathématiciens investis dans le problème de l'ergodicité, aux Etats-Unis, Hopf est le seul à tenter de répondre aux questions posées originellement, c'est-à-dire avant les Ehrenfest, ou en rapport direct avec leur principe ergodique.

Probabilité et ergodicité

Dans ses travaux ultérieurs, le développement du sujet est important et unique en son genre. Nous singulariserons deux de ces travaux : l'article de 1934 intitulé "On causality, statistics and probability" [1082] et son ouvrage Ergodentheorie [1083] de 1937.

Dans le texte de 1934, comme le titre ne l'indique pas, Hopf aborde à la fois la théorie ergodique et le problème de fondements des probabilités. En introduction du texte, Hopf montre qu'il s'inscrit dans le cadre fréquentiste et mécaniste, naturellement associé aux

[1078] Il est publié en 1932, dans le numéro 18 des Proceedings (le même volume que l'article de Von Neumann) : [HOPF, E., 1932a].

[1079] Une centaine de pages après son précédent article : [HOPF, E., 1932b].

[1080] Dans son Calcul des probabilités (de 1912) notamment. Dans le chapitre 2, page 125, nous avons analysé les idées de Poincaré.

[1081] Le dernier de cette période : [HOPF, E., 1932c].

[1082] [HOPF, E., 1934]

[1083] [HOPF, E., 1937].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

considérations de Mécanique statistique depuis les Ehrenfest. Il remarque

"[…] avec quelle précision le concept de hasard peut être défini et comment il est naturel de déduire les lois fondamentales des probabilités, une fois qu'il est reconnu que les phénomènes fréquentiels sont produits par des causes strictement mécaniques" [1084]

En liant probabilité et théorie ergodique, en cherchant une inspiration réciproque dans ces domaines, Hopf aboutit à une régénération de la théorie ergodique. Ainsi, d'une part, il cherche à définir les probabilités par la **théorie des fonctions arbitraires**. Hopf reprend l'exemple de la roulette, donné par Poincaré et formule, en terme de théorie de la mesure, l'idée suivante : l'équiprobabilité rouge / noir provient de la **continuité de la distribution initiale des impulsions données à la roulette** (comme Poincaré l'explique schématiquement dans "Le hasard" [1085]). D'autre part, Hopf introduit et développe des notions de théorie ergodique comme la notion de "mélange", dont l'importance se révèlera quelques années plus tard. Mais déjà, il suggère de **remplacer la notion de transitivité métrique par celle de mélange**, transformant ainsi à nouveau, la notion d'ergodicité.

Pour élaborer la notion de mélange, Hopf a en fait repris une idée de Gibbs. Par ailleurs, en 1932, Hopf avait déjà abordé ce problème dans son article sur le mélange des liquides, selon les conceptions de Poincaré. Mais, en 1934, il donne la première formulation mathématique rigoureuse du mélange. Ainsi la comparaison avec la transitivité métrique est possible, alors qu'en 1932, Hopf s'était limité à une mise en perspective plus intuitive.

En retour, ses résultats de théorie ergodique servent à préciser le cadre de la théorie des fonctions arbitraires, c'est-à-dire sa théorie des probabilités. Son résultat principal est une loi des grands nombres, obtenue grâce aux théorèmes ergodiques. Dans cette perspective Hopf s'éloigne progressivement du problème des fondements de la Mécanique statistique. Il oriente la théorie ergodique vers la définition du hasard et des probabilités, en laissant reposer ces considérations sur une philosophie mécaniste, déterministe.

Retour en Allemagne, 1936

L'année 1936 marque un tournant dans la vie de Hopf : il retourne en Allemagne, sous le régime nazi, qui lui offre un poste de professeur à Leipzig, ce qu'il accepte, non sans critique de la part de ses collègues aux Etats-Unis. Coupé des discussions avec les mathématiciens de Harvard et du MIT (c'est-à-dire l'entourage de Birkhoff et Norbert Wiener, qui est lui aussi intéressé par la théorie ergodique), Hopf semble se désintéresser de la théorie ergodique. Il ne produit pratiquement plus sur le sujet, si ce n'est son célèbre opuscule de 1937, Ergodentheorie, une synthèse très remarquable. Cet ouvrage doit son importance au fait qu'il est unique en son genre avant les années 1950, puisque personne

[1084] ***"[…] how accurately the concept of chance maybe defined and how naturally the fundamental laws of probability may be derived, once frequency phenomena are recognized as produced by strictly causal mechanisms.", introduction de [HOPF, E., 1934].***

[1085] Cf. p. 82.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

d'autre n'a tenté de synthèse, et son influence se fera sentir très rapidement, avec les réflexions du physicien N.S. Krylov. Il faut également souligner sa présentation abstraite et très générale qui traduit la mathématisation et l'autonomisation entamée avec Birkhoff.

Dans le prolongement de l'article de 1934, Hopf reprend les notions clés et rappelle au lecteur que :

"en faisant abstraction de l'intérêt mathématique que ces questions [de théorie ergodique] méritent, leur importance réside dans le fait qu'elle nous apportent une compréhension des phénomènes de fréquences dans la nature." [1086]

La notion de mélange est reprise et Hopf en donne des exemples, telle la transformation du Boulanger. Dans le dernier chapitre, il évoque une partie de sa recherche plus récente au sujet des géodésiques des surfaces à courbures négatives. Rappelons qu'Hadamard avait étudié le problème en 1898 et donné une classification des comportements des géodésiques [1087], tandis que Birkhoff l'évoquait comme modèle pour ses mouvements récurrents. Hopf, en collaboration avec Gustav Hedlund [1088] à Harvard, a entamé, vers 1935, la recherche des propriétés d'**ergodicité du mouvement géodésique**. En 1939, les deux mathématiciens parviennent séparément [1089] à montrer le **caractère mélangeant du flot géodésique** (dans le cas compact), qui est le point culminant de cette recherche.

L'ouvrage de 1937 est un aboutissement de la théorie ergodique, et en même temps un terme dans les recherches de Hopf sur les fondements des probabilités et l'ergodicité, hormis la question des géodésiques. On peut s'interroger sur ce désintérêt pour l'ergodicité. Il est probable que la proximité avec Werner Heisenberg, lui aussi à l'Université de Leipzig, ne soit pas étrangère à cela [1090]. En effet, Hopf s'intéresse à la Mécanique quantique en 1937 : l'interprétation du hasard et des probabilités dans ce cadre théorique est en rupture avec les conceptions classiques. On peut imaginer que Hopf ne juge plus nécessaire de recourir à la théorie ergodique pour justifier du hasard, ce qui avait motivé une partie de ses recherches. Enfin, Hopf mentionne, très brièvement, que

"les constructions conceptuelles de la théorie ergodique ne sont pas seulement importantes pour les systèmes avec une succession d'états fortement déterministe. Ils sont aussi applicables lorsque les états successifs ne sont

[1086] ***"Abgesehen von dem rein mathematischen Interesse, das diese Fragestellungen verdienen, beruht ihre Bedeutung darin, dass sie uns das Verständnis für die stabilen Häufigkeiterscheinungen in der Natur vermitteln.", introduction de [HOPF, E., 1937].***

[1087] Hadamard avait produit la première classification des géodésiques dans ce cas, [HADAMARD, J., 1898]. Nous renvoyons au chapitre 1, page 70, où nous présentons les travaux d'Hadamard dans leur contexte de la fin du XIXème siècle et les rapports aux travaux de Poincaré.

[1088] Hedlund a fait sa thèse (soutenue en 1930) avec Morse, sur le sujet : "Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients" (1ère partie de la thèse).

[1089] Dans deux articles séparés : [HEDLUND, G., 1939], [HOPF, E., 1939].

[1090] Heisenberg est professeur de physique théorique à Leipzig de 1927 à 1941.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

connus qu'avec des probabilités, et conduisent à beaucoup de lois de régularités plus simples." [1091]

Il ne fait qu'une rapide allusion à ces considérations, plus probabilistes, qu'il n'a d'ailleurs jamais évoquées auparavant : vraisemblablement, elles étaient dénuées d'intérêt dans le cadre fréquentiste. Pourtant ces résultats constituent un pan important de la théorie ergodique, dont le mathématicien A. Khinchin est un des premiers représentants : ce sont des considérations proches de la théorie des probabilités et qui se développent en URSS surtout.

c. La Mécanique statistique et la théorie des probabilités

Avec Hopf, la théorie ergodique et la théorie des probabilités cohabitent au sens où l'ergodicité appuie sa théorie des fonctions arbitraires. Cependant, sa théorie ne connaît pas de vrai succès, certainement occultée par la théorie axiomatisée de Kolmogorov en 1933 (la théorie est abandonnée par Hopf lui-même, de toute manière). Il importe surtout de comprendre que ces travaux sont caractéristiques des interactions inaugurées dans les premiers temps de la théorie cinétique des gaz et de montrer l'ampleur à laquelle la problématique accède dans les années 1930.

De la Mécanique statistique à la théorie des probabilités

Dans un premier temps on peut dire que toute la théorie des probabilités a été stimulée par les besoins de la Mécanique statistique. Cette dernière pose les questions, incite au développement d'une véritable théorie des processus aléatoires et interroge sur le principe ergodique, avec les Ehrenfest. De Boltzmann, en 1872, qui avait introduit les probabilités pour les besoins de sa théorie, aux réflexions de Borel, et à la théorisation du mouvement brownien, c'est dans l'élan de la Mécanique statistique que les recherches sont menées. Dans les années 1930, en parallèle à Hopf, il paraît donc assez naturel que la théorie ergodique rétroagisse sur la théorie des probabilités.

En particulier, comme J. Von Plato [1092] l'explique, les notions simples comme le "presque partout" des raisonnements de théorie des probabilités émanent vraisemblablement des théorèmes ergodiques. En effet, le théorème de récurrence de Poincaré avait proposé un résultat valable pour la "majorité" des trajectoires d'un certain problème. Avec Von Neumann et Birkhoff, la théorie de la mesure a pénétré la théorie des systèmes dynamiques, en systématisant la notion de "majorité" grâce à celles de "presque partout" et de propriétés valables "sauf pour un ensemble de mesure nulle".

Le contexte dans lequel Kolmogorov façonne sa théorie des probabilités est également imprégné de ces interfécondations. Le premier et le meilleur exemple est le travail produit par le mathématicien Alexander Khinchin (1894-1959), élève de N. Lusin et

[1091] ***"die Begriffsbildungen der Ergodentheorie nicht nur für Systems mit streng determinierten Zustandsfolgen von Wichtigkeit sind. Sie sind auch, wenn die aufeinanderfolgenden Zustände nur durch Warscheinligkeiten verknüpft sind, anwendbar und führen dort zu viel einfacheren Gesetzmässigkeiten.", fin de l'introduction de [HOPF, E., 1937].***

[1092] Nous renvoyons à l'ouvrage de J. Von Plato sur l'histoire des probabilités [VON PLATO, J., 1994] ainsi qu'au compte rendu de G. Shafer, [SHAFER, G., 1998], p. 419.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

collègue de Kolmogorov. Il participe, en effet, au développement de la théorie ergodique, à la fois dans la voie initiée par Von Neumann et Birkhoff [1093] (dès 1932) et dans une direction très peu abordée aux Etats-Unis, les probabilités. Khinchin a déjà une longue expérience dans le calcul des probabilités, au sujet des lois asymptotiques en particulier, et il investit les théorèmes ergodiques dans ces problèmes, après les avoir reformulés lui-même [1094].

Khinchin introduit même une **version probabiliste du théorème ergodique** de Birkhoff [1095] : il ne suppose plus de relations déterministes entre les états successifs, comme c'est le cas en Mécanique classique, ce qui permet d'étendre des raisonnements lorsque la Mécanique classique n'est plus utilisable. Son célèbre opuscule de 1949 sur les Fondements mathématiques de la Mécanique statistique [1096], montre que Khinchin est résolument orienté vers l'utilisation des méthodes générales du calcul des probabilités, dont il fait la preuve de la fécondité. Il est clair que Khinchin s'est progressivement détaché des considérations de théorie ergodique de 1932 ; il est peut-être plus juste de penser que son intérêt pour l'ergodicité s'est fondu dans les problèmes de la théorie des probabilités.

Le cadre de l'école de Kolmogorov et de l'axiomatisation de la théorie des probabilités est très propice à ces interrogations. Kolmogorov produit lui aussi une démonstration simplifiée du théorème ergodique de Birkhoff en 1937, de même que Stepanoff, un autre étudiant de Lusin, à Moscou, s'intéresse aux prolongements du théorème ergodique en Mécanique [1097]. Avec Nemytskii, Stepanoff rédigera d'ailleurs l'ouvrage très connu sur la théorie qualitative des équations différentielles, dont la moitié est consacrée à la théorie ergodique [1098].

Enfin, Kryloff et Bogoliuboff, à Kiev, contribuent à la théorie ergodique dans sa version mécanique et probabiliste [1099]. Leur long article "La théorie générale de la mesure

[1093] Indépendamment de Hopf, Khinchine reformule les deux théorèmes ergodiques dans une version approchante : [KHINCHIN, A.I., 1932].

[1094] Pour aboutir notamment à une théorie des corrélations des processus stationnaires : [KHINCHIN, A.I., 1934].

[1095] Dans [KHINCHIN, A.I., 1933], un court texte publié à l'occasion du 50ème anniversaire du mathématicien et probabiliste Richard von Mises, éditeur de la revue où l'article est publié : Zeitschrift fir Angewandte Mathematik und Mechanik.

[1096] Mathematical Foundations of Statistical Mechanics, publié en russe en 1943 et traduit en 1949 : [KHINCHIN, A.I., 1949].

[1097] [KOLMOGOROV, A.N., 1937] et [STEPANOFF, V.V., 1936] (publié en français).

[1098] La traduction anglaise a été réalisée en 1960, mais l'ouvrage date de 1949 : [NEMYTSKII, V.V., STEPANOFF, V.V., 1960]. Il a servi d'ouvrage de référence à E. Lorenz notamment dans les aspects mathématiques de ses études sur les instabilités météorologiques (cf. p. 601).

[1099] Les aspects probabilistes sont certainement plus anecdotiques qu'à Moscou, dans cette école de mécanique non linéaire. On relèvera tout de même la courte note : "Les propriétés ergodiques des suites de probabilités en chaîne", [KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1937b].

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

dans son application à l'étude de la dynamique des systèmes de la Mécanique non linéaire" [1100] n'a pas été souvent ni remarqué, ni commenté. Pourtant il contient une innovation très importante, sur le plan mathématique : alors que l'étude des propriétés ergodiques des systèmes de la dynamique présuppose la donnée d'une mesure invariante, Kryloff et Bogoliuboff proposent la **construction d'une telle mesure invariante**, pour une vaste classe de systèmes [1101] .

A un niveau international, le processus de mathématisation de la théorie ergodique parvient donc, à la fin des années 1930, à un état très avancé. La théorie ergodique s'était déjà affranchie de ses interrogations de Mécanique statistique ; elle s'est maintenant détachée des considérations de la Mécanique, pour travailler au développement des probabilités. La théorie de la mesure se trouve au coeur du dispositif mathématique et permet de naviguer entre mécanique et probabilités. L'hypothèse ergodique est devenue l'hypothèse de transitivité métrique, construite sur la théorie de la mesure et Hopf a proposé une alternative, le mélange.

Les conséquences immédiates de cette évolution sont nombreuses. Nous avons par exemple mentionné la reformulation par Khinchin des fondements de la Mécanique statistique, sous forme de théorie des probabilités. Aux Etats-Unis, l'ergodicité n'est plus non plus limitée aux systèmes mécaniques et les deux mathématiciens John Oxtoby et Stanislaw Ulam montrent, en 1941, un résultat très important : comme l'avaient pressentis Birkhoff et Hopf, la **transitivité métrique est une propriété partagée par une "majorité" des systèmes** [1102] . L'hypothèse de transitivité métrique est accréditée par ce résultat obtenu, d'ailleurs, à Harvard, en collaboration régulière avec Birkhoff.

Le "chaos" de Wiener

Nous inscrirons un dernier résultat dans cette perspective, le "chaos" de Norbert Wiener. Ce mathématicien américain s'est intéressé au mouvement brownien avec lequel il s'est familiarisé dès 1919, au département de mathématiques du M.I.T., où il cherchait les propriétés mathématiques du phénomène. D'après P.R. Masani [1103] , ce serait les études de G. Taylor sur la turbulence, en 1920, et les théorèmes ergodiques de Von Neumann et Birkhoff qui auraient orienté Wiener vers l'idée d'en faire une sorte de paradigme pour l'analyse des phénomènes stochastiques. Il en a proposé une formalisation mathématique, associée à une théorie générale de l'analyse harmonique, construite entre 1924 et 1930.

Wiener est également un spécialiste de théorie ergodique [1104] . C'est au carrefour de ses préoccupations pour les processus aléatoires et de la théorie ergodique, au sujet de

[1100] [KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1937a]. On peut consulter les notes plus courtes : [KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1935 / 1936].

[1101] Les systèmes dont l'espace des phases est métrique, compact.

[1102] [OXTOBY, J., ULAM, S., 1941].

[1103] Un des meilleurs biographes de Wiener. Cf. [MASANI, P.R., 1990].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

la turbulence, qu'il conçoit, en 1938, la notion de "chaos homogène" [1105]. En restant schématique, un "chaos" est une formalisation, en termes de la théorie des processus aléatoires et de la théorie de la mesure de Lebesgue, de la notion d'ensemble de Gibbs. La théorie du mouvement brownien correspond à un "chaos" unidimensionnel [1106]. Wiener recherche en fait une théorie généralisant le mouvement brownien à *n* dimensions ainsi qu'un théorème ergodique étendu, multidimensionnel. Wiener espère tirer de cette théorie une formulation de la Mécanique statistique hors équilibre et de la théorie ergodique, à base de processus stochastiques.

Wiener établit plus un programme qu'un résultat définitif pour ces difficiles questions de physique statistique. Cependant, la tentative est très significative du contexte de développement des études des processus stochastiques, en relation avec les théorèmes ergodiques. En outre, par contraste avec les notions de chaos postérieures à 1975, nous pourrions qualifier la conception de Wiener de "chaos indéterministe" : elle appartient plutôt à l'histoire de la théorie des probabilités, alors que le "chaos déterministe" s'inscrit dans l'histoire des systèmes dynamiques. Mais ce sont des distinctions plus récentes, alors que, dans les années 1930, elles participent à deux élans très voisins (voire d'un élan unique). Ainsi, ce qui pourrait sembler être une digression à un spécialiste du chaos "déterministe", n'en est pas une, historiquement.

Les années 1930 sont donc un formidable creuset de conceptions, prolongeant les problématiques de la fin du XIXème siècle grâce à des interactions entre la théorie des systèmes dynamiques, la théorie ergodique et la théorie des probabilités.

[1104] Voir le chapitre 12 de la biographie de Wiener, [MASANI, P.R., 1990], p. 139-159. Wiener a notamment collaboré avec Hopf, en 1931 (ibid., p. 139). Selon Masani on peut qualifier la position de Wiener de "ergodic stochasticism" : "he almost invariably treated signals in the class S of G.H.A. [General Harmonic Analysis] as trajectories of a stationary stochastic process governed by a measure-preserving flow over a probability space, and used the Birkhoff ergodic theorem whenever possible." (ibid., p. 149). En cela, il est influencé par les theories de Khinchin et Kolmogorov. Wiener, dans son autobiographie I am a mathematician, détaille : "My research at this time [1927-31] received a ready reception in Russia and was in close relation with the work of some of the Russian mathematicians. I had long had a peculiar sort of contact with the leading Russian mathematicians, although I had never met any of them nor, I believe, ever been in correspondence with them. Khintchine and Kolomogoroff, the two chief Russian exponents of the theory of probability, have long been involved in the same field in which I was working. For more than twenty years, we have been on one another's heels; either they had proved a theorem which I was about to prove, or I had been ahead of them by the narrowest of margins. This contact between our work came not from any definite program on my part nor, I believe, from any on theirs but was due to the fact that we had come into our greatest activity at the same time, with about the same intellectual equipment.", [WIENER, N., 1956], p. 145.

[1105] Défini dans son article du même nom, [WIENER, N., 1938]. Avec le mathématicien Aurel Wintner, en 1943, il étudie le cas du "chaos discret", [WIENER, N., WINTNER, A., 1943].

[1106] "Of all the forms of chaos occurring in physics, there is only one class which has been studied with anything approaching completeness. This is the class of types of chaos connected with the theory of the Brownian motion. Physical theories of chaos, such as that of turbulence, or of the statistical theory of a gas or a liquid, may or may not be theories of equilibrium. In the general case, the statistical state of a chaotic system, subject to the laws of dynamics, will be a function of the time. The laws of dynamics produce a continuous transformation group, in which the chaos remains a chaos, but changes its character [...]", [WIENER, N., 1938], p. 899.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Cependant, en rapport avec les développements des années 1970 nous intéressant, l'importance des concepts les plus proches des probabilités, comme le "chaos" de Wiener, s'estompe progressivement. Dans la suite de notre chapitre nous nous occuperons surtout des problèmes de la théorie ergodique des systèmes dynamiques, en train de s'autonomiser et qui traversent un nouvel environnement scientifique et culturel, l'URSS.

7.2. La culture de la stochasticité en URSS, après la seconde guerre mondiale

Au fil des années 1940, l'URSS se replie sur elle-même et le mouvement s'accentue avec la guerre froide. Par la force des choses, la science qui s'y développe s'isole de l'activité scientifique occidentale. Dans ce contexte radicalement différent de l'internationalisation des années 1930, les problématiques présentées prennent en fait un nouvel essor et en se reposant sur leurs quelques décennies d'histoire, il se constitue une culture de la stochasticité, en rapport avec des conceptions générales sur les phénomènes aléatoires.

Comme nous l'avons perçu au chapitre 3, le texte de Chirikov de 1979 porte les stigmates de cette stochasticité, mais nous allons montrer maintenant que les perspectives sur l'ergodicité, l'instabilité et la Mécanique statistique ont été modifiées, et l'impact de ces recherches dépasse en ampleur les quelques points singuliers détectés jusqu'à présent.

a. Les instabilités et les fondements de la Mécanique statistique : la physique de N.S. Krylov (1917-47)

Le physicien d'origine russe Nikolaï Sergeevich Krylov est le premier à raviver la Mécanique statistique dans ses rapports à la physique. Décédé prématurément, à l'âge de 30 ans, il a laissé une réflexion importante sur les fondements de la Mécanique statistique [1107] ; c'est le seul sujet qui l'ait occupé dans sa courte vie scientifique, commencée en 1939.

Au carrefour des mathématiques et de la physique, Krylov a fécondé les acquis récents de la théorie ergodique et des théories sur les géodésiques dans la Mécanique statistique, par une critique des principes mis en œuvre avant lui. Nous allons voir également qu'il a promu la notion d'instabilité en Mécanique à un rang très élevé, contribuant ainsi à la reconnaissance des phénomènes d'instabilité, et de sensibilité aux conditions initiales, dans les années ultérieures, même si ses ouvrages fondamentaux, datant des années 1940, ne seront traduits en anglais qu'en 1979.

Ses réflexions initiales, dans sa thèse dirigée par V.A. Fock et soutenue en 1941, vont le guider dans sa quête d'une Mécanique statistique renouvelée [1108] . Le premier

[1107] Ses travaux ont été traduit en 1979 [KRYLOV, N.S., 1979]. Cet ouvrage regroupe sa thèse ainsi que l'ouvrage général qu'il entreprenait de rédiger au sujet des fondements de la mécanique statistique, avant de décéder.

[1108] Nous renvoyons à la courte biographie de Fock, dans [KRYLOV, N.S., 1979], p. xiii-xv.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

paragraphe de sa thèse consacrée aux processus mélangeants dans l'espace des phases, résume quelles sont, selon lui, les deux difficultés majeures auxquelles les fondements de la Mécanique statistique sont confrontés :

1) les difficultés d'introduire les concepts probabilistes dans la Mécanique classique,

2) la difficulté de définir les types de systèmes auxquels on peut appliquer les résultats de statistiques [1109] .

Le travail de Krylov est à la fois une critique des théories connues, qui, en substance se sont heurtées aux deux obstacles majeurs, et une proposition de construction d'une théorie, dont les principes se dégagent par l'**analyse des systèmes physiques**. C'est dans ce double exercice qu'il va tout d'abord écarter l'idée d'ergodicité (associée à la seconde difficulté), pour la remplacer par la notion de **mélange**, dans les fondements de la Mécanique statistique.

Critique de l'ergodicité

Le cheminement de Krylov pour en arriver à ce point peut se résumer en quelques grandes inspirations. Avant tout, plutôt que de suivre la perspective des Ehrenfest sur le principe ergodique, Krylov examine, dans sa thèse, une question qu'il juge plus pertinente, celle du **processus de relaxation d'un système vers son état d'équilibre**. L'observation expérimentale physique atteste qu'il est caractérisé par un temps de relaxation, fini [1110] . De cette manière Krylov réintroduit la physique dans la question des fondements de la Mécanique statistique, qui a été cantonnée, pendant quelques années, à des recherches mathématiques. Selon Krylov, les études sur l'ergodicité ont "jusqu'ici fait très peu de progrès dans l'objectif fixé par la Mécanique statistique" [1111] . L'ergodicité a montré qu'elle était "bien insuffisante pour les buts de la statistique, en particulier, pour définir le concept de base de relaxation". En outre, les résultats des recherches sur l'ergodicité "n'ont pas rendu possible de donner une **description physique** de ces systèmes couverts par les définitions mathématiques qui ont été introduites" [1112] . En quelques mots, Krylov condamne assez sévèrement les recherches bornées aux mathématiques car il les juge limitées sur le plan de la physique. Par ailleurs, la réduction au problème de transitivité métrique laisse complètement ouverte la question de savoir quels systèmes vérifient cette hypothèse [1113] .

En fait, la critique de Krylov a un caractère plus général : pour lui, **il est impossible**

[1109] [KRYLOV, N.S., 1979], p. 193.

[1110] Introduction de Migal et Fock, [KRYLOV, N.S., 1979], p. xvii.

[1111] "[…] studies on ergodicity ,which so far have made very little progress in reaching the aim set by statistical mechanics.", [KRYLOV, N.S., 1979], p. 193

[1112] "On the other hand, mechanical ergodicity has, in the first place, turned out to be quite insufficent for the purposes of statistics, specifically, to define the basic concept of relaxation ; in the second place, the results of research on ergodicity have not made it possible to give a physical description of those systems that are covered by the mathematical definitions that have been introduced.", [KRYLOV, N.S., 1979], p 193-4 (nous mettons en evidence).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

de fonder la Mécanique statistique sur la seule Mécanique classique. L'ergodicité ne serait donc qu'une illustration de cet écueil. Comme il l'explique dans sa thèse, "tous les schémas construits sur la Mécanique classique [...] sont, de manière inhérente, incapables de laisser s'introduire des concepts de probabilité, de manière non-contradictoire [...]" [1114] . Ce qui renvoie à la première difficulté du problème des fondements de la Mécanique statistique.

Le mélange et l'instabilité mécanique

Sa critique est développée tout au long de ses travaux, en même temps qu'il propose une alternative avec les systèmes mélangeants. L'argumentaire de Krylov est assez ample.

La source principale d'inspiration lui vient des travaux de Hopf sur les géodésiques des surfaces à courbure négative, en particulier de son ouvrage Ergodentheorie qui contient la démonstration que le flot géodésique de surfaces à courbure négative est mélangeant ; il puise également dans les travaux plus avancés de Hopf et Hedlund, achevés en 1939, l'année où Krylov commence son travail de thèse [1115] .

La première partie de sa thèse est consacrée au cas du gaz parfait, vu comme un ensemble de sphères dures en collisions élastiques. Krylov donne à ce modèle un équivalent sous forme d'un problème de géodésique, puis étudie la "divergence des lignes géodésiques" [1116] . Il parvient ainsi à montrer que **deux géodésiques voisines s'écartent de manière exponentielle avec le temps** et quantifie précisément le taux de divergence. Il détermine ensuite le temps de relaxation du système grâce à ces considérations de théorie des géodésiques, pour aboutir à un résultat comparable à la théorie cinétique classique.

Dans la suite de sa thèse, Krylov définit plus généralement la notion de "mouvement de type mélangeant" [1117] . Il s'en suit plusieurs résultats, appuyés de manière essentielle sur les travaux de Hopf et il dévoile une méthode, présentée comme universelle, pour étudier l'instabilité :

"Cette méthode de réduction d'un problème mécanique au problème de l'étude

[1113] Voir le paragraphe examinant les études d'ergodicité : "studies on ergodicity", ibid., p. 207-9.

[1114] "[…] all schemes based on classical mechanics, to which the results we have described are also closely related, are inherently capable (sic) of allowing probabilistic concepts to be introduced into them in a non-contradictory manner in the sense that no probabilistic statement relating to a moment t can be a necessary consequence of any statement relating to a moment t_0 unless it is identically contained in it.", [KRYLOV, N.S., 1979], p. 209. (vu le sens général du paragraphe, il faut lire "incapable" plutôt que "capable").

[1115] "This result, derived by Hedlund and Hopf, will serve as a starting point for our subsequent discussion", [KRYLOV, N.S., 1979], p. 213. Le paragraphe "Mixing in the phase space" ([KRYLOV, N.S., 1979], p. 212-217) explicite ces résultats.

[1116] Le paragraphe "The divergence of geodesic lines" ([KRYLOV, N.S., 1979], p. 196-202) contient la démonstration en question.

[1117] "mixing-type motion", [KRYLOV, N.S., 1979], p. 212. Son second, et dernier, chapitre ("B. Mixing in the Phase space") est entièrement consacré à la question.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

de la divergence des géodésiques d'un espace riemannien correspondant au principe variationnel de Jacobi, se montre être une méthode universelle pour étudier l'instabilité mécanique des systèmes." [1118]

Pour cela, Krylov reformule le problème du mouvement d'un système mécanique conservatif à *n* degré de liberté sous forme de géodésiques: il en existe une formulation variationnelle, issue de la Mécanique classique, laquelle s'exprime elle-même sous forme d'un flot de géodésiques sur un espace de Riemann, dont la métrique est déterminée par les caractéristiques du problème variationnel [1119]. Ainsi, le caractère mélangeant correspond à des conditions sur la métrique [1120], obtenues sur la base des résultats de divergence des géodésiques [1121].

Pour Krylov, l'instabilité mécanique et la divergence des géodésiques se répondent et il propose une méthode d'étude de l'instabilité se fondant sur la théorie des géodésiques [1122]. La thèse de Krylov, en associant ces problèmes au mélange, montre toute l'importance de l'instabilité mécanique en physique statistique.

Les fondements de la physique statistique

Sa monographie, inachevée, de 1947, The foundations of statistical physics [1123], nous permet d'esquisser les principales perspectives adoptées par Krylov dans son projet général. Il a un leitmotiv : il n'est pas possible de donner des fondements à la Mécanique statistique, sans adjoindre à la Mécanique classique des notions probabilistes (il ajoute que la Mécanique quantique ne suffit pas non plus).

Krylov définit tout d'abord un certain nombre de propriétés préalables à toute tentative de fonder la Mécanique statistique. Pour les déterminer il dit procéder de l'expérience, qui constitue son seul guide [1124]. Contrairement aux essais contemporains, plus mathématiques, de fonder la Mécanique statistique avec la théorie ergodique, **Krylov a une démarche résolument empiriste**. Trois points forment la base dégagée par

[1118] ***"[…] this method of reducing a mechanical problem to the problem of studying the divergence of geodesics in a corresponding Riemannian space of the Jacobi variationnal principle proves to be a universal method for studying the mechanical instability of systems", [KRYLOV, N.S., 1979], p. 195.***

[1119] [KRYLOV, N.S., 1979], p. 214.

[1120] [KRYLOV, N.S., 1979], p. 217.

[1121] "[…] the proof of the establishment of a uniform distribution of probabilities, which was given above, that is, the proof of mixing, was based essentially on the possibility of reducing the problem of solving the equations of motion of pure mechanics to the problem of finding the geodesic lines of a corresponding Riemannian space.", [KRYLOV, N.S., 1979], p. 230.

[1122] Krylov ne mentionne pas Hadamard, ni Poincaré à ce sujet. Il reprend le sujet tel que Hopf l'a présenté.

[1123] [KRYLOV, N.S., 1979], p. 3-182. Il n'a eu le temps de rédiger que deux chapitres.

[1124] Krylov défend, en le détaillant, son point de vue dans les premiers paragraphes de son ouvrage, cf. [KRYLOV, N.S., 1979], p. 9.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Krylov. Tout d'abord, lors de la mesure d'une quantité physique caractérisant un système, l'égalité des moyennes spatiales et temporelles, autrement dit une certaine ergodicité, existe pour ce système. Deuxièmement, appuyé par ses études antérieures, il réaffirme l'importance des processus de relaxation, en temps fini. Enfin, il insiste sur le caractère probabiliste des mesures effectuées sur un système : des mesures après le temps de relaxation, ou une série de mesures consécutives de quantités physiques ne peuvent être décrites que dans un schéma probabiliste.

"On devrait souligner que le caractère probabiliste des séries de mesures obtenues est […] un fait expérimental absolument fiable, non moins fiable que le caractère probabiliste des séries de tests obtenus dans tout autre application, aussi bien fondée soit-elle, de la théorie des probabilités. Les séries de résultats obtenues par de telles mesures ont, par conséquent, une propriété commune à tous les objets probabilistes – la non-existence d'un algorithme quelqu'il soit qui pourrait déterminer le résultat des mesures successives. Une formule, aussi complexe soit-elle, ne peut pas en principe décrire les changements successifs des mesures quantitatives qui sont gouvernées par la loi de probabilité de la distribution de la propriété." [1125]

Pour Krylov, le point d'achoppement des justifications de la Mécanique classique est le fait que lorsqu'un système "se déplace selon une trajectoire définie décrite par des équations différentielles, *les résultats de mesures*, au moins en principe, *doivent avoir un algorithme*" [1126] . En d'autres termes, la Mécanique classique ne peut pas générer une série aléatoire de mesures au sens où le hasard est caractérisé comme l'absence d'algorithme descriptif.

Dans ses arguments, Krylov admet un bémol à ces considérations :

"[…] bien que le comportement de la trajectoire d'un système statistique dans l'espace des phases puisse être décrit par les moyens d'un algorithme, la description est si complexe, due à l'extrême complexité et 'complication' de la trajectoire, que même sur des périodes de temps très longues (qui peuvent être définies plus précisément, par exemple par comparaison au temps de récurrence) elle imite le comportement de quantités distribuées selon les lois du hasard." [1127]

Il est difficile de préciser s'il y a une allusion (à Poincaré ?) au sujet de cette "complexité"

[1125] ***"It should be stressed that the probabilistic character of the series of measurements obtained is [...] an absolutely reliable experimental fact, no less reliable than the probabilistic character of the series of tests obtained in any other, however well founded, application of probability theory. The series of results obtained by such measurements have, in consequence, a property common to all probabilistic objects- the non-existence of any algorithm that could determine the results of successive measurements. A formula, however complex, cannot in principle describe the successive changes in quantity measurements that are governed by the probabilistic law of the property distribution", [KRYLOV, N.S., 1979], p. 8.***

[1126] "[…] the system under consideration moves along a definite trajectory described by differential equations, *all measurement results*, at least in principle, *must have an algorithm*.", [KRYLOV, N.S., 1979], p. 51 (en italique dans le texte).

[1127] ***"[…] although the behavior of the phase trajectory of a statistical system can be described by means of an algorith (sic), the description is so complex, due to the extreme complexity and 'intricacy' of the phase trajectory, that even over very long periods of time (that can be defined more accurately, for example by comparison to the recurrent time) it imitates the behavior of quantities distributed according to the laws of chance.", [KRYLOV, N.S., 1979], p. 52.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

et nous nous garderons donc de toute interprétation. Nous dirons simplement que, pour Krylov, cela est encore insuffisant, car ce sont des descriptions valables pour un intervalle de temps donné, qui ne pourraient pas être appliquées aux phénomènes de fluctuations ou de mouvement brownien, sans conduire à des conclusions erronées.

Ces quelques éléments montrent l'importance, dans les conceptions de Krylov, de la réflexion sur la notion de hasard, sur les probabilités et leur place dans la théorie physique. La caractérisation du hasard suggérée par Krylov est étonnante, d'autant plus qu'elle correspond à des notions développées plus tard sous le terme de complexité algorithmique. Dans ce cadre, les affirmations de Krylov seront un peu tempérées. Ce passage est aussi caractéristique des argumentations de Krylov, où la physique côtoie la philosophie, où l'ontologique est mélangé à l'épistémique, pour reprendre Diner [1128] . Il suffit de voir comment Krylov introduit au milieu de la discussion de la caractérisation du hasard, son adhésion à une vision fréquentiste des probabilités [1129] , mise en relation avec les possibilités d'expérimenter les systèmes physiques.

L'interrogation sur les probabilités et l'importance des concepts probabilistes interviennent à plusieurs autres niveaux dans les développements théoriques de Krylov, notamment au sujet de la notion de mélange. Cette notion est destinée à occuper la place centrale du dispositif théorique. Selon Krylov, elle a plusieurs atouts. Le mélange permet de justifier l'introduction des lois probabilistes en Mécanique statistique et d'expliquer théoriquement le phénomène de relaxation (en temps fini) [1130] . Deuxièmement, dans le bref historique qu'il propose, Krylov rappelle que le mélange avait été évoqué d'abord par Gibbs, qui l'a introduit pour une discussion de l'irréversibilité, puis par Poincaré : Krylov affirme que Poincaré "a insisté particulièrement sur son importance dans l'utilisation des notions probabilistes" [1131] . Ce qui semble conforter la place qu'il donne lui-même au concept de mélange. Enfin, la généralité et l'importance de l'instabilité mécanique, comme il l'a montré dans sa thèse, laisse imaginer que les comportements mélangeants sont répandus parmi les systèmes physiques.

Toutefois, considérant que la Mécanique ne saurait légitimer à elle seule les lois de probabilités, le mélange reste insuffisant pour fonder la physique statistique. Le second, et dernier, chapitre rédigé dans son opuscule, tend à montrer que la Mécanique quantique

[1128] [DINER, S., 1992], p. 348. Nous nous référerons ici au passage : [KRYLOV, N.S., 1979], p. 49-55, mais l'ouvrage de Krylov dans son ensemble alterne entre ces considérations philosophiques, épistémologiques et physiques.

[1129] Voir le paragraphe 10, [KRYLOV, N.S., 1979], p. 53-54, et [KRYLOV, N.S., 1979], p. 96 : "To use the concept of probability it is necessary that it should be possible, as a matter of principle, to reproduce those homogeneous test conditions a limitless number of times [...] the application of the concept of probability, meaningless with respect to one experiment, requires an unlimited repetitions of the tests and, consequently, unlimited reproductions of the test conditions [...]".

[1130] "Thus, the *process of mixing is indispensable in order for the relaxation* of physical systems *to exist*, that is, to *make possible the existence of a probabilistic law* of the distribution of the states that is independent of the initial state and is determined by the fluctuation formula.", [KRYLOV, N.S., 1979], p. 19 (en italique dans le texte).

[1131] Poincaré "laid particular stress on its importance in the use of probabilistic notions", [KRYLOV, N.S., 1979], p. 17.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

non plus ne suffit pas. La mort prématurée de Krylov aura laissé le cadre théorique malheureusement inachevé sur ces points. Nous nous contenterons des propos de Migdal et Fock répercutant les opinions de Krylov dans l'introduction de l'ouvrage. En substance, ils affirment que Krylov concevait la théorie de cette manière :

"Il peut ainsi être supposé qu'entre une caractéristique macroscopique et une description microscopique habituelle, il y a une sorte de complémentarité similaire à celle qui, selon la mécanique quantique, survient dans le cas d'une description classique. Il est impossible de spécifier très minutieusement la situation précise d'un système dans la région de l'espace des phases délimitée par l'état macroscopique sans perturber les caractéristiques macroscopiques du système. Un état macroscopique ne peut pas être déterminé plus précisément qu'une certaine région minimale." [1132]

Cette idée de complémentarité entre les descriptions microscopiques et macroscopiques, couplée au caractère mélangeant, donne les lois probabilistes attendues en Mécanique statistique, contournant la première difficulté du problème des fondements. On peut voir cela comme le résultat des interactions, impossibles à éliminer, entre l'observateur et le système préparé. Toujours est-il que, comme le remarque Diner [1133], il ne faut peut-être pas s'étonner de cette solution, car Krylov est l'élève de Fock, adepte de la complémentarité en Mécanique quantique.

Malgré une courte vie scientifique, la réflexion produite par Krylov impressionne. Elle est également fortement emprunte du contexte des années 1940. La théorie des probabilités, les notions d'ergodicité ont déjà pris leur plein essor et Krylov profite de nombreux acquis mathématiques ; il bénéficie également des renouvellements des conceptions sur le hasard promues par la Mécanique quantique, au sens où les débats sur la place des probabilités en physique sont plus ouverts qu'à la fin du XIXème siècle. Avant tout, Krylov fait fructifier les théories mathématiques dans une théorie physique : il est surtout un des rares (peut-être le seul) physicien à orienter ces considérations mathématiques vers la physique. Ainsi, il propose de fonder la Mécanique statistique sur trois conceptions essentielles, intimement mêlées : l'instabilité, le mélange et une "complémentarité" microscopique / macroscopique pour avoir des lois de probabilité pleinement justifiées. En conséquence de sa démarche d'analyse, l'instabilité acquiert un statut nouveau, en passant d'une propriété des flots géodésiques à une caractéristique concevable pour un plus vaste ensemble de systèmes physiques. Krylov donne un moyen de l'analyser, mais, mort prématurément, il n'a pas précisé tout son cadre d'analyse, et notamment les conditions dans lesquelles l'instabilité conduit au mélange.

b. La stochasticité et l'instabilité en URSS

[1132] "It can therefore be assumed that between a macroscopic characteristic and a usual microscopic description there is a kind of complementarity similar to the one that, according to quantum mechanics, arises in the case of a classical description. It is impossible to specify too minutely the more precise location of a system within the phase region delimited by the macroscopic state without disturbing the macroscopic characteristics of the system. A macroscopic state cannot be determined any more precisely than a certain minimal region", [KRYLOV, N.S., 1979], p. xxi.

[1133] [DINER, S., 1992], p. 348.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Si le travail de Krylov n'est traduit en anglais qu'en 1979, il inspire de nombreux physiciens et mathématiciens en URSS. En effet, des études poussées de l'instabilité et de l'ergodicité vont germer [1134] et l'analyse de la stochasticité, les phénomènes possédant les propriétés de l'aléatoire, va se développer.

Pour mesurer cette évolution, il suffit d'ouvrir l'ouvrage d'Arnold et Avez [1135] publié en 1967, Les propriétés ergodiques de la mécanique classique, qui constitue en quelque sorte une étape de synthèse, vingt ans après la mort de Krylov. La forte activité de théorie ergodique des systèmes dynamiques est très perceptible à travers les résultats présentés. Nous allons voir que c'est au cours de ces deux décennies que les idées de Krylov ont pénétré l'analyse des systèmes dynamiques, permettant d'accélérer le développement de la théorie ergodique. L'effort de recherche se situe une nouvelle fois au carrefour des mathématiques et de la physique, de la Mécanique statistique et des systèmes dynamiques, et constitue un pan de la culture de la stochasticité qui se crée alors en URSS.

Un problème de classification

Pour comprendre le développement en question, il convient au préalable de préciser les enjeux généraux en théorie ergodique des systèmes dynamiques, produits par la poussée des années 1930. En un mot, avec les définitions de transitivité métrique et de mélange, il émerge une interrogation concernant la classification [1136] et la caractérisation des systèmes aux propriétés ergodiques : en schématisant un peu, la distinction entre les systèmes mélangeants et non mélangeants constitue la première pierre de cette classification. Il s'agit d'une problématique essentiellement mathématique, au sujet des systèmes dynamiques préservant une mesure, et afin de préciser les distinctions entre comportements ergodiques, plusieurs concepts sont imaginés, comme le **spectre** et l'**entropie**.

Le spectre

Le spectre est une notion construite par à Von Neumann et Koopman en 1932 [1137] .

Cette notion repose sur la transformation de Koopman qui permet d'associer à une transformation T de (M, μ) préservant la mesure, un opérateur K_T dans l'espace $L_2(M,$

[1134] Dans son ouvrage Chaos in dynamic systems, le physcien soviétique Zaslavskii rend hommage à l'héritage légué par Krylov : "This book influenced Soviet physicists and mathematicians investigating the transition from a dynamic to a statistical description of systems to such an extent that serious research in this field is hardly imaginable nowadays without a thorough acquaintance with Krylov's book.", [ZASLAVSKII, G.M., 1985], p. 47.

[1135] André Avez est un mathématicien français qui a participé à la publication de la synthèse des éléments surtout introduits par Arnold et ses collaborateurs à Moscou.

[1136] Il s'agit de classer les transformations T (préservant la mesure), ergodiques à isomorphisme près. Deux transformations S et T sont équivalentes (isomorphes) lorsqu'il existe une transformation U, préservant la mesure, couplant S et T par la formule : $U^{-1}SU=T$.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

μ), unitaire. L'isomorphisme entre deux transformations *T* et *U*, produit un isomorphisme entre les K_T et K_U. Le spectre de *T* est défini comme étant le spectre de l'opérateur K_T sur L_2 *(M, μ)*. De plus, lorsqu'il existe une base de L_2 *(M, μ)* construite avec des fonctions propres de K_T, on dit que *T* a un spectre discret (ou ponctuel).

En 1942, le premier résultat de classification important a été démontré par Von Neumann et Paul Halmos [1138] : il stipule que **deux transformations à spectre discret sont isomorphes si et seulement si elles ont même spectre**. Ce qui fait du spectre un invariant représentatif des transformations. Ce théorème ne signifie pas pour autant que le problème de classification est résolu : non seulement il reste l'autre cas, celui où le spectre est continu, mais ce cas est plus compliqué, car le spectre ne donne pas assez d'information sur le système pour espérer une classification.

Avant l'intégration d'une nouvelle notion d'entropie pour de telles transformations, la classification se limite à quelques grandes lignes. Hopf a formulé une notion de "mélange faible" et a montré en 1937 que lorsque le spectre d'une transformation préservant la mesure, ergodique (au sens de la transitivité métrique), est continu, la transformation est faiblement mélangeante. Les grandes classes de comportements sont donc, de la plus générale à la plus restrictive : les transformations ergodiques (ensemble *E*), faiblement mélangeantes (ensemble *FM*), mélangeantes (ensemble *M*). En 1948, Rokhlin [1139] est parvenu à montrer que la plupart des transformations de *E* ont un spectre continu, et que, dans un sens topologique, l'ensemble *M* n'occupe qu'une faible portion de *FM*. Le résultat de 1944 de Halmos [1140] complète cette classification en affirmant que les transformations de *FM* occupent presque tout l'ensemble *E*.

L'entropie

C'est dans un contexte très différent que le concept d'entropie est introduit et va transformer le problème. La notion d'entropie est due à A. Kolmorogov en 1958. Elle tire son originalité du fait qu'elle est issue de considérations de théorie de l'information, à laquelle Kolmogorov s'est fortement intéressé dès le début des années 1950 [1141] . Dans ces mêmes années, nous verrons plus loin qu'il arrive aux problèmes de la théorie ergodique par le biais de recherches en Mécanique classique. De cette "rencontre" naît

[1137] Cette définition est concomitante du théorème ergodique de Von Neumann, appuyé sur le résultat de Koopman : [KOOPMAN, B.O., 1931], [VON NEUMANN, J., 1932a], [KOOPMAN, B.O., VON NEUMANN, J., 1932]. Nous renvoyons également à [LO BELLO, A., 1983], p. 59-60.

[1138] [HALMOS, P., VON NEUMANN, J., 1942]. Paul Halmos (né en 1916) est un mathematician hongrois, compatriote de Von Neumann.

[1139] [ROKHLIN, V.A., 1948].

[1140] [HALMOS, P., 1944].

[1141] Kolmogorov participe à donner une formulation mathématique à la théorie de l'information, avec Khinchin, et ses élèves. [SEGAL, J., 1998], Chapitre 9 ; [DINER, S., 1992], p. 357.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'idée de projeter les notions de théorie de l'information en théorie ergodique.

L'entropie, baptisée depuis K-entropie (ou K-S entropie puisque Sinaï l'a reprise par la suite [1142], ou encore, entropie métrique [1143]), ne doit pas être confondue avec l'entropie thermodynamique. Elle caractérise l'incertitude engendrée par la transformation *T*.

Pour une transformation *T*, sur l'ensemble (*M, μ*), on considère une partition [1144] de *M* notée $\xi=(A_1,...,A_n)$. Si on cherche à déterminer avec quelle incertitude on trouvera un point *x* donné dans un certain A_i, il est clair que cette incertitude est maximale lorsque la partition est équitable c'est-à-dire $\mu(A_i)=1/n$ pour tout *i*. Si il y a un déséquilibre en faveur de A_1, $\mu(A_1)=99/100$, l'incertitude est considérablement réduite.

L'entropie $h(\xi)$ de la partition est définie par :

$$h(\xi) = f(\mu(A_1),...,\mu(A_n)) = -\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\log(\mu(A_i))$$

L'entropie $h(T)$ de la transformation T se définit à partir du taux avec lequel la transformation accroît l'incertitude d'une partition ξ:

$$h(T,\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h(\xi \vee T(\xi) \vee ... \vee T^{n-1}(\xi))$$

(où $\xi \vee ... \vee T^{n-1}(\xi)$ est la partition engendrée par les $\xi, ..., T^{n-1}(\xi)$)

et

$$h(T) = \sup_{\xi} h(T,\xi).$$

En outre, l'entropie est un invariant des systèmes dynamiques, mais n'est pas un invariant spectral (c'est-à-dire qu'elle n'est pas un invariant de la transformation K_T associée à *T*) et Kolmogorov a montré que des transformations à spectre continu peuvent avoir des entropies différentes. Ce concept est donc important car il permet de caractériser plus précisément des comportements ergodiques alors que les notions de spectre continu et de comportements mélangeants sont limitées. En 1970, le mathématicien Daniel Ornstein en a montré l'intérêt en prouvant que "deux décalages de Bernoulli de même entropie sont isomorphes" [1145].

Les systèmes de Bernoulli, c'est-à-dire les systèmes isomorphes à un décalage de Bernoulli, ont une place très particulière dans les questions d'ergodicité. De par leur construction, ils intègrent une composante aléatoire, équivalente à un jeu de pile ou face, tout en étant des systèmes mathématiquement déterministes : les valeurs prises par le

[1142] [SINAI, Y., 1959].

[1143] B. Chirikov, dans son texte de 1979, énonce les différents vocabulaires employés (cf. chapitre 3, p. 211).

[1144] Voir par exemple : [LO BELLO, A., 1983], p. 62-63.

[1145] [ORNSTEIN, D., 1970] : "Two Brnoulli shifts with the same entropy are isomorphic". On peut consulter son ouvrage référence en matière de théorie ergodique des systèmes dynamiques, Ergodic theory, randomness and dynamical systems, [ORNSTEIN, D., 1974].

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

système sont déterminées par la donnée initiale du système.

Schématiquement, un décalage de Bernoulli est construit [1146] à partir d'un jeu de pile ou face, c'est-à-dire la donnée d'un ensemble de valeurs possibles, {*0,1*} ici, et de probabilité de tirage. Dans un jeu équitable {*0*} a une probabilité ½, {*1*} a la même probabilité.

Un jeu de pile ou face est la donnée d'une suite de *0* et de *1*, doublement infinie : $...a_{-n}, a_{-n+1},...a_{-1}, a_0, a_1, ..., a_n ...$ notée $\{a_i\}$. Un schéma de Bernoulli est la donnée de l'ensemble des suites $\{a_i\}$ possibles, et de l'opération de décalage *T* qui fait correspondre une suite $\{b_i\}$ à une suite $\{a_i\}$ suivant la relation $b_k = a_{k-1}$. Ce décalage correspond au passage d'un tirage au suivant et c'est l'élément dynamique du système.

L'entropie définit une sorte d'échelle d'ergodicité et de stochasticité des transformations ; les systèmes de Bernoulli sont à l'extrémité de l'échelle, les systèmes les plus aléatoires mais également les mieux classés grâce au théorème d'Ornstein.

L'entropie n'est pas pour autant la panacée puisqu'elle ne caractérise pas toutes les propriétés des transformations ergodiques. Mais à partir de l'entropie Kolmogorov a imaginé la classe des systèmes dits **K-systèmes** (ou systèmes quasi-réguliers [1147]) : ce sont les systèmes ayant une **entropie non nulle**. Arnold et Avez les décrivent comme "**une classe de systèmes dynamiques aux propriétés fortement probabilistes**" [1148] . En effet, les K-systèmes ont la propriété d'être mélangeants et ergodiques. L'entropie correspondant à un taux d'accroissement d'incertitude, elle donne le **taux de divergence exponentielle des trajectoires voisines**, ce qui nous renvoie aux calculs faits par Krylov dans le cas du flot géodésique.

Les C-systèmes, l'instabilité et la Mécanique Statistique

Au cours des années 1960, une nouvelle classe vient enrichir le tableau des comportements ergodiques et stochastiques, les "**C-systèmes**". Elle est construite par Dmitri Anosov, un élève de Pontryaguin et membre du groupe de mathématiciens entourant Kolmogorov à Moscou, incluant V. Arnold et Y. Sinaï [1149] . Ce sont des spécialistes de mathématiques des systèmes dynamiques, intéressés aux problèmes de la théorie ergodique et aux questions plus proches de la physique.

[1146] Nous renvoyons à [LO BELLO, A., 1983], p. 37-43 et au livre d'Ornstein, [ORNSTEIN, D.S., 1974]. Jacob Bernoulli (1654-1705)n'a pas formulé de notion de décalage mais la définition s'appuie sur le jeu de pile ou face, étudié dans son Ars Conjectandi de 1713 (voir [LO BELLO, A., 1983], p. 37). Par ailleurs, historiquement, mais de manière tout à fait anachronique, on peut dire que le premier "théorème ergodique" est la loi des grands nombres de Bernoulli : la moyenne de {*0*} dans une succession de tirages (moyenne "temporelle") est ½, c'est-à-dire la probabilité d'avoir {*0*} sur un tirage (équivalent d'une moyenne "spatiale"). Tout ceci peut expliquer le nom donné au "décalage de Bernoulli" ("Bernoulli shift" en anglais).

[1147] Ce serait la terminologie de Kolmogorov d'après Arnold, cf. [ARNOLD, V., AVEZ, A., 1967], p. 30.

[1148] [ARNOLD, V., AVEZ, A., 1967], p. 29 (nous mettons en évidence).

[1149] Il s'agit du groupe à propos duquel Smale est si élogieux. Cf. chapitre 6, p. 425.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Anosov a défini, de manière axiomatique, la "condition C" qui donnera son nom à cette classe générale de systèmes structurellement stables et aux propriétés stochastiques (Smale, en reprenant cette notion, les appelle les flots d'Anosov). Quelques mots d'Arnold et Avez suffisent à faire comprendre les propriétés de ces systèmes. Il s'agit

"d'une classe de systèmes dynamiques classiques aux propriétés essentiellement stochastiques [...] Les orbites des C-systèmes sont très instables : deux orbites, correspondant à des conditions initiales voisines, s'écartent l'une de l'autre de façon exponentielle. Cette propriété entraîne l'indépendance asymptotique du futur et du passé : les C-automorphismes sont ergodiques, 'mixing', ont un spectre de Lebesgue infini et une entropie positive. En un mot ce sont les (sic) K-systèmes. Les C-systèmes forment un ouvert dans l'espace des systèmes dynamiques classiques. Par conséquent, tout système suffisamment voisin d'un C-système a les mêmes propriétés stochastiques." [1150]

Le rôle attribué à l'instabilité dans cette notion mérite d'être bien indiqué. En premier lieu, l'instabilité inscrite dans ces systèmes est héritée de l'étude des flots de géodésiques sur les surfaces à courbure négative : ce **flot géodésique est en quelque sorte le prototype des C-systèmes**. Ainsi, lorsque Anosov prouve l'ergodicité des C-systèmes [1151], il raisonne d'abord sur les flots géodésiques avant d'étendre la démonstration valable pour le prototype. En réalité, l'ergodicité des C-systèmes est à relier aux propriétés données par Hopf et Hedlund en 1939 [1152] ; l'instabilité s'inscrit dans la perspective des résultats d'Hadamard et de Krylov. Le commentaire de Krylov présentant le flot géodésique comme une méthode générale pour étudier l'instabilité prend tout son sens à travers les propositions d'Anosov.

Par ailleurs, dans les systèmes d'Anosov l'instabilité est fondamentalement inscrite à la base du comportement et n'est pas seulement une propriété parmi d'autres. Krylov cherchait dans l'instabilité mécanique une condition pour avoir des propriétés de mélange en Mécanique statistique ; ici, les propriétés d'instabilité sont supposées et les conséquences en terme d'ergodicité sont évaluées. Le changement proposé par Anosov est plus qu'une inversion de perspective, car l'instabilité trouve une "vraie" place grâce à une double propriété remarquable : **les C-systèmes ont des trajectoires instables, localement, mais ils sont structurellement stables. Autrement dit, leur instabilité n'est pas rédhibitoire, ni incompatible avec un comportement "réel" et ces systèmes peuvent modéliser des systèmes physiques**.

Cette systématisation de l'instabilité, de la divergence exponentielle des trajectoires voisines, est un changement important, résultat d'une évolution sur le long terme et d'une maturation dans un contexte de physique-mathématique en URSS. C'est un des aspects les plus visibles de l'importante culture de la stochasticité qui se développe depuis les années 1930. La théorie hyperbolique de Smale, inspirée par la notion de C-système,

[1150] ***[ARNOLD, V., AVEZ, A., 1967], p. 45 (nous mettons en évidence).***

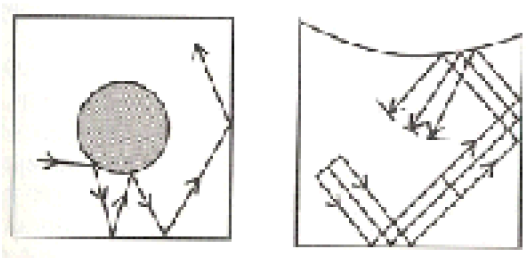
[1151] [ANOSOV, D.V., 1963].

[1152] Cf. p. 462.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

trouve également une racine dans ce contexte (les propositions de Smale soulignent d'ailleurs l'importance de la stabilité structurelle de ces systèmes).

Les prolongements de Ya. Sinaï sont tout autant significatifs [1153] . Dans ces années 1960 son résultat le plus marquant concerne les propriétés des billards. Le gaz de sphères dures, en collisions élastiques, dans une boîte parallélépipédique aux bords rigides est un modèle particulier de billard (Arnold et Avez l'appelle gaz de Boltzmann-Gibbs). En 1963, Sinaï a montré que ce billard est ergodique sur les surfaces de niveau d'énergie, assurant ainsi **une première démonstration mathématique de l'"hypothèse ergodique" sur un modèle physique** [1154] . En 1970, Sinaï a prouvé plus généralement qu'une catégorie de billards, dont la figure ci-dessous montre deux représentants, sont des K-systèmes. Nous soulignerons simplement qu'une fois de plus les méthodes employées par Hopf ont été adaptées et que **sa démonstration repose sur la propriété de divergence exponentielle des trajectoires voisines**.



Exemples de billards
Tirés de [DINUR, S., 1992], p. 362

Exposants de Lyapounov

Les résultats de Sinaï ont avivé une autre recherche dans ces considérations de propriétés ergodiques des systèmes dynamiques, au sujet des exposants de Lyapounov. Dans les développements postérieurs à 1975 nous avons vu l'importance du "théorème ergodique multiplicatif" d'Oseledec pour assurer l'emploi des exposants de Lyapounov en tant que moyen de caractérisation de la divergence des trajectoires voisines d'un système dynamique. En 1968, Oseledec inscrit son résultat dans cette perspective :

"Cette recherche repose sur le travail de Sinaï à propos des théorèmes d'entropie pour les systèmes dynamiques classiques. A partir de ces résultats il est devenu clair qu'une entropie positive dans les systèmes dynamiques classiques est reliée à la divergence exponentielle d'orbites provenant de deux points voisins. Du fait de cette connexion l'auteur s'est intéressé au problème de divergence exponentielle." [1155]

Le contexte déjà très fourni intègre donc des éléments supplémentaires hérités des travaux du mathématicien russe Lyapounov sur la stabilité, à la fin du XIXème. Il convient de noter qu'il s'agit d'une adaptation des nombres définis par Lyapounov et, si la science

[1153] En parallèle aux études des billards, Sinaï a montré que les C-difféomorphismes sont des K-systèmes, cf. [ARNOLD, V., AVEZ, A., 1967], p. 64.

[1154] L'annonce de la preuve est publiée dans [SINAI, Y., 1963] ; voir également [ARNOLD, V., AVEZ, A., 1967], p. 65-67. Ici l'hypothèse ergodique s'entend au sens de la transitivité métrique.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

occidentale a pu "oublier" ce point particulier des résultats de Lyapounov, les chercheurs soviétiques l'ont fait fructifié. L'ouvrage de Nemytskii et Stepanoff, Théorie qualitative des équations différentielles [1156], publié en russe en 1949, dresse un bilan des résultats sur ces exposants et propose des moyens pour les estimer. Nemytskii participe également à un second ouvrage de 1966, en russe, intitulé Théorie des nombres caractéristiques de Lyapounov [1157]. Oseledec se réfère à ce document proposant un panorama assez complet.

Premières conclusions

Plusieurs chapitres des mathématiques et de la physique participent aux développements conceptuels présentés, mais il n'y a pas de frontières entre ce qui pourrait sembler être des spécialités ; Kolmogorov, Arnold, Sinaï, Anosov exercent conjointement dans tous ces domaines. A un niveau plus philosophique, on peut dire que c'est la stochasticité, l'apparition de propriétés statistiques en Mécanique classique, ou encore la question des fondements de la Mécanique statistique qui fédèrent ces divers problèmes. C'est en ce sens qu'il est possible de parler d'une culture de la stochasticité.

En revanche, les exfiltrations en direction de la science occidentale restent très éparses et il n'existe pas, à notre connaissance, d'environnement scientifique où les mêmes thématiques sont développées en harmonie. Au cours des années 1960, Smale reprend des éléments utilisés par Anosov, tout en apportant aux mathématiciens soviétiques qu'il rencontre ses méthodes particulières en mathématiques des systèmes dynamiques [1158]. L'hyperbolicité intègre l'instabilité dans l'analyse globale des systèmes dynamiques, mais le processus laisse les aspects stochastiques et les considérations de Mécanique statistique de côté. En ce sens, l'ouvrage de synthèse Les propriétés ergodiques de la mécanique classique, qui sera traduit en anglais en 1968, complète remarquablement bien le "Differentiable dynamical systems" de Smale.

A la fin de la décennie, en 1969, lors du symposium "Statistical mechanics at the turn of the decade" organisé pour commémorer le 70ème anniversaire du physicien G.E. Uhlenbeck, le physicien américain A.S. Wightman propose un bilan sur la question de l'ergodicité. Les travaux soviétiques y sont au premier plan. Wightman affirme ainsi :

"Il n'est pas déraisonnable de penser que les K-systèmes possèdent le genre

[1155] ***"This investigation is based on the work of Sinaï on entropy theorem in classical dynamical systems. From his work it became clear that positive entropy in classical dynamical systems is related to exponential divergence of orbits originating at nearby points. Because of this connection the author became interested in the problem of exponential divergence.", [OSELEDEC, V.I., 1968], p. 197 (nous mettons en evidence).***

[1156] Pour la traduction anglaise : [NEMYTSKII, V.V., STEPANOFF, V.V., 1960].

[1157] [BYLOV, B.F., VINOGRAD, R.E., GROBMAN, D.M., NEMYTSKII, V.V, 1966].

[1158] Dans une interview récente (Avril 1997) Arnold affirme : "Smale was one of the first foreign mathematicians I met when he came to Moscow in 1961. His influence on Russian works in dynamical systems and on me was enormous." (p. 435-6). L'interview est disponible sur Internet, à l'adresse: www.ams.org/notices/199704/arnold.pdf

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

d'irréversibilité typique, qui fait d'eux des sujets appropriés pour la mécanique statistique. La théorie de la K-S-entropie devrait être regardée comme un premier pas […] en direction d'une théorie rigoureuse de l'approche à l'équilibre." [1159]

Il ajoute à propos des résultats sur les billards : "le résultat de Sinaï établit une fois pour toute que la Mécanique statistique d'un système mécanique isolé va comme les Pères Fondateurs l'ont suggéré…" [1160] . En 1969, les physiciens sont donc conviés à prendre conscience de ces résultats. Cet appel montre également que les résultats, tout mathématiques qu'ils soient, sont accessibles aux physiciens. On peut y voir la capacité des mathématiciens soviétiques à parler leur langage, à comprendre les problématiques et à associer les résultats mathématiques aux problèmes de la physique. Nous comprendrons également par la suite qu'autour de 1970 l'instabilité commence à se faire une place dans la science occidentale, alors qu'elle a déjà fortement imprégné les réflexions en URSS depuis les travaux de Krylov.

Bien que nous nous soyons beaucoup intéressés aux relations entre l'instabilité et l'ergodicité, la stochasticité est en fait une problématique plus large et plus complexe. En abordant maintenant le théorème KAM et les résultats relatifs aux propriétés de stabilité des systèmes dynamiques, nous apporterons une touche supplémentaire à ce tableau.

c. Le théorème KAM et la stabilité des systèmes dynamiques

Par les rapprochements avec les problématiques de l'instabilité, le théorème KAM et ses conséquences constituent un prélude essentiel aux années de développement du chaos. Le texte de Chirikov l'a illustré sur bien des points. Dans l'immédiat il importe surtout de comprendre comment il s'insère dans l'histoire de la stochasticité et comment il participe à un renouvellement conceptuel de grande ampleur. En effet, nous allons voir que s'il trouve ses racines dans la Mécanique céleste, il concerne au premier chef la stabilité, l'ergodicité et l'intégrabilité des systèmes mécaniques. Il propose surtout une nouvelle **vision du monde, en incitant à repenser les rapports de l'ordre et du désordre, de la stabilité et l'instabilité des systèmes mécaniques**.

Théorème KAM

Lorsque Kolmogorov présente son théorème au Congrès International des Mathématiciens de 1954 [1161] , il prend la peine de préciser qu'il s'inscrit dans la perspective des mathématiques des systèmes dynamiques et de la Mécanique classique (les systèmes dynamiques conservatifs) dont il fait ressortir les considérations topologiques et métriques. Kolmogorov place Poincaré à l'origine du renouvellement du

[1159] ***"It is not unreasonable to think that K-systems possess the typical kind of irreversibility which make them suitable subjects for statistical mechanics. The theory of the K-S-entropy ought to be regarded as a first step [...] in the direction of a rigorous theory of the approach to equilibrium.", [COHEN, E.G.D., UHLENBECK, G.E., 1971], p. 26***

[1160] "Sinaï's result settles once and for all that statistical mechanics of an isolated mechanical system can go as the Fouding Fathers suggested [...]", [COHEN, E.G.D., UHLENBECK, G.E., 1971], p. 28.

[1161] L'intervention est traduite en anglais dans [KOLMOGOROV, A.N., 1954b].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

sujet, à la fin du XIXème, parce qu'à la suite de son travail, "le rôle fondamental de la topologie dans cette catégorie de problème est devenu clair" ; par ailleurs son théorème de récurrence [1162] a initié "la théorie 'métrique' des systèmes dynamiques dans le sens de l'étude des propriétés des mouvements valables pour 'presque tout' état initial du système" [1163].

Kolmogorov situe sa recherche au carrefour de la Mécanique classique et de la théorie ergodique, en insistant sur la nécessité d'obtenir des résultats intéressants pour la physique :

"Dans les systèmes conservatifs, les mouvements asymptotiquement stables sont impossibles. C'est pourquoi, par exemple, la détermination de mouvements périodiques individuels, aussi intéressante qu'elle puisse être du point de vue mathématique, n'a qu'une signification physique réelle plutôt restreinte dans le cas des systèmes conservatifs. Pour les systèmes conservatifs, l'approche métrique est de première importance en rendant possible l'étude des propriétés d'une majorité des mouvements. Dans ce but, la théorie ergodique générale contemporaine a élaboré un système de notions dont la conception est hautement convaincante du point de vue de la physique. Cependant, jusqu'à présent, les progrès faits dans les applications de ces approches modernes à l'analyse de problèmes spécifiques de la mécanique classique ont été plus que limités." [1164]

L'essence du théorème KAM, c'est-à-dire la possible conservation des tores invariants d'un système Hamiltonien perturbé, est annoncé à la suite de cette longue introduction [1165]. Kolmogorov offre des grandes lignes de démonstration [1166] pour le cas à deux degrés de liberté, le critère de conservation des tores et la généralisation à toute dimension. Pour signifier la portée de son résultat, il signale comment il contourne, et par là résout, le problème des "petits diviseurs" de la Mécanique céleste, sur lequel Poincaré

[1162] Kolmogorov parle du théorème de Poincaré-Caratheodory, comme référence aux retouches proposées par Caratheodory, par adjonction de la théorie de la mesure. [KOLMOGOROV, A.N., 1954b], p. 355.

[1163] "[…] the fundamental role of topology for this range of problems became clear" ([KOLMOGOROV, A.N., 1954b], p. 355) ; "the 'metrical' theory of dynamical systems in the sense of the study of properties of motions holding for 'almost all' initial states of the system." ([KOLMOGOROV, A.N., 1954b] p. 355-6).

[1164] "In conservative systems, asymptotically stable motions are impossible. Therefore, for instance, the determination of individual periodic motions, however interesting it may be from the view-point of mathematics, has only a rather restricted real physical significance in the case of conservative systems. For conservative systems, the metrical approach is of basic importance making it possible to study properties of a major part of motions. For this purpose, contemporary general ergodic theory has elaborated a system of notions whose conception is highly convincing from the view-point of physics. However, up to now the progress made towards the application of these modern approaches to the analysis of specific problems of classical mechanics has been more than limited.", [KOLMOGOROV, A.N., 1954b], p. 356.

[1165] Pour des détails à propos de ce résultat, nous renvoyons au chapitre 3, p. 218.

[1166] Kolmogorov a publié deux articles avant son intervention dans lesquels il présente ses résultats avec plus de détails techniques : [KOLMOGOROV, A.N., 1953 / 1954a].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

et tant d'autres ont buté :

"Probablement, beaucoup d'entre vous aurons déjà deviné que, en substance, ce dont nous parlons est une certaine modification de l'idée de la possibilité d'éviter l'apparition de 'petits diviseurs' anormaux lors du calcul des orbites perturbées et qui a été considérablement discutée dans la littérature sur la mécanique céleste. Cependant, par contraste avec la théorie des perturbations ordinaire, nous obtenons des résultats exacts plutôt que la conclusion que les séries de certaines approximations d'ordre fini (relativement à #) sont convergentes. Ceci est obtenu parce que, au lieu de calculer le mouvement perturbé pour des conditions initiales fixées, nous changeons les conditions initiales elles-mêmes de telle façon que, en faisant varier #, nous avons toujours à faire avec des mouvements ayant des fréquences normales." [1167]

Kolmogorov en tire une conclusion pour l'ergodicité des systèmes classiques :

"L'hypothèse que le cas transitif et le cas de spectre continu (mélangeant) aient une signification de premier ordre, a été plus d'une fois affirmé en rapport avec l'hypothèse 'ergodique' en physique [...] Dans les applications aux systèmes analytiques canoniques, les réponses aux deux questions sont négatives, puisque le théorème sur la stabilité de la décomposition en tores [...] reste valable pour tout nombre de degrés de liberté [...] Ainsi, sous une petite variation de H le système dynamique reste non transitif et la région G continue à être décomposable en des ensembles ergodiques à spectre discret, à un ensemble résiduel de petite mesure près." [1168]

L'exposé de Kolmogorov est saisissant car il résout un vieux problème de la Mécanique céleste et en indique les conséquences en termes de théorie ergodique des systèmes dynamiques. Ainsi il donne une bonne illustration de la culture mathématique de l'école soviétique, de sa diversité, de son intérêt pour l'ergodicité (et de son exceptionnelle dextérité personnelle). Kolmogorov mêle allègrement les mathématiques de Poincaré, sauvegardées et développées avec Birkhoff et Andronov, les théories de Hopf et d'autres résultats de Mécanique céleste, comme ceux de Chazy. En commentant ses travaux, Kolmogorov déclare en outre : "Mes travaux en mécanique classique ont été influencés par les articles de Von Neumann sur la théorie spectrale des systèmes dynamiques et par-dessus tout par le travail classique de N.M. Krylov et N.N. Bogoliubov en 1937" [1169] .

[1167] "Probably many of you will already have guessed that, in essence, what we are talking about is a certain modification of the idea of the possibility of avoiding the appearance of abnormal 'small divisors' when calculating disturbed orbits, which has been extensively discussed in the literature on celestial mechanics. However, in contrast to ordinary perturbation theory, we obtain exact results instead of the conclusion that the series of some approximation of finite order (relative to θ) are convergent. This is achieved because instead of calculating the disturbed motion for fixed initial conditions, we change the initial conditions themselves so that, with varying θ, we always deal with motions having normal frequencies.", [KOLMOGOROV, A.N., 1954b], p. 364 (nous mettons en évidence).

[1168] "The hypothesis that the transitive case and the case of a continuous spectrum (mixing) are of predominant significance have more than once been stated in connection with the 'ergodic' hypotheses in physics [...] In application to analytic canonical systems, the answers to both questions are negative, since the theorem on the stability of the decomposition into tori [...] remains valid for any number of degrees of freedoom [...] Thus, under a small variations of H the dynamical system remains non-transitive and the region G continues to be decomposable, to within a residual set of small measure, into ergodic sets with discrete spectra", [KOLMOGOROV, A.N., 1954b], p. 365-6

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Les conséquences du théorème de Kolmogorov sont à la hauteur de cette densité historique et mathématique. Le résultat incite à repenser les propriétés attribuées aux systèmes de la Mécanique classique car (en rapport avec la décomposition en ensembles ergodiques),

"il est intéressant de noter que certains physiciens mettent en avant l'hypothèse que le 'cas général' d'un système dynamique canonique sans trajectoire qui s'éloigne est la décomposition même de #^{2s} en des tores s-dimensionnels T^s portant des mouvements périodiques conditionnels avec s périodes. Cette idée semble reposer seulement sur une attention essentiellement donnée aux systèmes linéaires et à un groupe limité de problèmes classiques intégrables, et il devrait être noté, en tous les cas, que les méthodes pour prouver le théorème mentionné ci-dessus sont reliées de manière essentielle à cette décomposition spécifique en tore de tout autre dimension r > s ou r < s." [1170]

En d'autres termes, d'une part il faudrait **éviter de généraliser les idées valables sur les systèmes intégrables, trop simples et atypiques**. D'autre part, les systèmes Hamiltoniens perturbés faiblement n'ont pas des comportements antithétiques des systèmes intégrables : une certaine décomposition en tores invariants (ce sont des déformations des tores du cas intégrable) persiste ; ces résidus sont mélangés à des zones où le comportement est ergodique, plutôt que périodique (ou quasi-périodique) comme sur les tores. Les briques ergodiques croissent avec l'intensité de la perturbation, mais lorsqu'elle reste faible, le système perturbé n'est pas ergodique dans son ensemble. En résumé, **les idées de Kolmogorov tendent à battre en brèche la dichotomie entre les systèmes qui seraient purement (quasi-) périodiques (les systèmes intégrables) et les autres, purement ergodiques**.

En définitive, c'est toute une histoire et un vaste réseau conceptuel se rapportant à la Mécanique céleste, à la Mécanique non linéaire et à la Mécanique statistique qui sont en jeu. L'élève de Kolmogorov, V. Arnold prend en quelque sorte le relais en donnant en 1963 une preuve complète des grandes lignes jetées par Kolmogorov [1171]. Le mathématicien d'origine allemande Jürgen Moser avait apporté sa touche au résultat en 1962, en proposant une démonstration utilisant des moyens différents, dans le cas des systèmes infiniment différentiables [1172]. Cet ensemble de résultats constitue le théorème

[1169] Cité dans [DINER, S. 1992], p. 355. Il s'agit d'une part des travaux sur les mesures invariantes et les ensembles ergodiques discutés page 478, d'autre part des méthodes de développements perturbatifs, en rapport avec la mécanique non linéaire (chapitre 6, p. 404).

[1170] "In this connection, it is interesting to note that some physicists (see reference [7]) put forward the hypothesis that the 'general case' of a canonical dynamical system without receding trajectories is the very decomposition of Ω^{2s} into s-dimensional tori T^s carrying conditionally periodic motions with s periods. This idea seems to be based only on the predominant attention given to linear systems and to a limited group of integrable classical problems, and it should in any case be noted that the methods for proving the above-mentioned theorem are essentially related to this specific decomposition into tori of any other dimension r > s or r < s.", [KOLMOGOROV, A.N., 1954b], p. 366 (nous mettons en évidence). Kolmogorov cite la monographie de Mécanique de Landau et Pyatigorskii, comme illustration des idées qu'il présente comme des préconceptions de la mécanique linéaire : [LANDAU, L., PYATIGORSKII, L., 1940].

[1171] [ARNOLD, V.I., 1963].

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

KAM.

Bilan : la stochasticité dans les années 1960, en URSS

Le théorème KAM et les conceptions sur l'instabilité induisent un renouvellement thématique important et un regard neuf sur les rapports entre stabilité et instabilité. Avec Krylov l'instabilité s'est introduite au cœur de la physique statistique, puis des mathématiques des systèmes dynamiques. Avec Kolmogorov les systèmes mécaniques peuvent mélanger intimement les comportements stables et instables. La perception des vieilles dichotomies stabilité / instabilité et ordre / désordre est en voie de réévaluation.

Plus philosophiquement, ce sont les rapports entre le hasard et le déterminisme qui sont interrogés. La stochasticité, qui peut prendre diverses formes, se situe entre les deux pôles. La définition la plus simple que l'on puisse en donner serait : phénomène qui a les propriétés du hasard. Ce qui signifie qu'elle repose sur une notion de hasard et ne se confond pas avec ce hasard. Pour reprendre S. Diner, à la fin des années 1960, il se dégage l'idée qu'un mouvement qui possède la propriété de mélange est un vrai processus aléatoire, qui mérite le nom de stochastique. Dans sa thèse en 1969, Chirikov pensait la stochasticité comme une combinaison de propriétés d'ergodicité, de mélange et d'entropie positive [1173] . En 1979, Chirikov singularise la propriété d'instabilité locale des comportements stochastiques, dont découle la propriété de mélange [1174] . Dans tous les cas, la stochasticité repose sur un mécanisme : les propriétés choisies pour la définition, ainsi que les moyens des systèmes dynamiques mis en œuvre pour étudier la stochasticité traduisent une adhésion à une forme assouplie de mécanisme. Avec Diner, il nous paraît pertinent de s'interroger sur l'importance de l'idéologie matérialiste dominant la culture soviétique pour expliquer l'orientation vers cette forme de mécanisme [1175] .

En définitive, la notion de stochasticité est très difficile à positionner entre hasard et déterminisme : peut-être ces catégories sont-elles simplement inadéquates. La stochasticité se définit dans une interaction de mathématique et de physique ; ici également la distinction est peut être trop rigide pour rendre compte de la pensée et de la pratique de la stochasticité. Etant donné que ces interrogations sur la stochasticité filtrent dans le domaine du chaos, il n'est pas étonnant de retrouver ces problèmes épistémologiques au niveau des conceptions du chaos.

Enfin, avec les nouvelles considérations relatives au hasard, la stochasticité évolue

[1172] [MOSER, J., 1962].

[1173] Nous citons S. Diner dans [DINER, S., 1992], p. 350.

[1174] Voir l'analyse du texte de Chirikov au chapitre 3, page 211.

[1175] [DINER, S., 1992], p. 367. Tout ce contexte soviétique mériterait une analyse historique et épistémologique approfondie. Reconnaissons que Diner (qui est un physicien) est le seul à donner quelques indications sur ce sujet. Il s'est livré à l'exercice d'analyse de quelques travaux intéressants, mais souvent publiés en russe. Diner a également développé sa propre interprétation philosophique de la stochasticité et admet en particulier que ce "néo-mécanisme correspond à un changement total de point de vue, responsable d'une approche réaliste (ontologique) de l'aléatoire, des probabilités et de la mécanique statistique." (Ibid., p. 367).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

encore. A la confluence de la théorie des systèmes dynamiques, de la théorie de l'information et de la logique, Kolmogorov développe l'idée de **complexité algorithmique** [1176] . Schématiquement, la complexité d'un algorithme de calcul est définie par la quantité d'information nécessaire pour obtenir le résultat du calcul selon cet algorithme. Une suite de nombres est considérée comme aléatoire lorsqu'il n'existe aucun algorithme plus simple que celui qui donne les valeurs successives de la suite. Un phénomène aléatoire est ainsi un phénomène qui n'admet pas de description globale condensée, pour lequel il n'existe pas de prédiction algorithmique. Cette notion, dont on a vu une esquisse chez Krylov lorsqu'il se lance à définir une notion de hasard [1177] , s'inscrit elle-même dans la culture de la stochasticité. Dans tous les cas, la complexité algorithmique oblige à repenser la prédiction dans les systèmes dynamiques.

Ces nuances montrent qu'il existe une continuité épistémologique dans les interrogations sur la stochasticité et les notions de chaos, qui ne se limite pas aux débats relatifs à l'instabilité. L'ergodicité et la composante dynamique, présentes dans l'évolution de la notion de stochasticité, trouvent des prolongements dans le champ du chaos, comme les textes de Chirikov et Helleman nous l'ont montré. Par delà le rapprochement initié en 1980, il existe une véritable continuité historique entre la stochasticité et le chaos ; c'est ce que nous allons voir en nous intéressant à la percée lente et progressive de la stochasticité, hors d'URSS.

7.3. La lente évolution des conceptions sur l'ergodicité et l'instabilité, dans la science occidentale, avant les années 1970

Si la facilité à appréhender les problèmes de la Mécanique statistique et de la stochasticité est partagée par un nombre important de scientifiques en URSS, les résultats dans ces domaines sont beaucoup plus éparpillés aux Etats-Unis et en Europe entre la seconde guerre mondiale et les années 1970. Le manuel d'Arnold et Avez vient certainement combler une partie du vide mais la culture nécessaire, associant mathématique et physique, ne s'acquiert pas par les livres.

Néanmoins, en parallèle à ces intenses développements, les notions d'ergodicité et l'appréhension de l'instabilité évolue, à un rythme moins soutenu. Nous allons voir qu'il existe en fait une tension entre des conceptions bien ancrées dans la physique et les nouvelles théories comme le théorème KAM. Dans un contexte très différent de l'URSS, les déterminants de l'évolution ne sont plus les mêmes. A travers quelques exemples significatifs, nous comprendrons que l'ordinateur a été un des facteurs essentiels des changements au sein de la physique, en Mécanique statistique en particulier.

[1176] Trois autres scientifiques, le mathématicien américain Ray J. Solomonoff (entre 1960-64), le mathématicien suédois Per Martin-Löf et le mathématicien américain Gregory Chaitin (en 1965) développeront des idées parallèles, dans des contextes différents. Dans le cas de l'URSS, Kolmogorov avait déjà publié en 1958 un article sur la définition d'algorithme ; sa théorie de la complexité est publiée en 1965. Nous renvoyons au chapitre 9 de [SEGAL, J., 1998], p. 592-605, et [DINER, S., 1992], p. 363-6.

[1177] De la lecture des traductions des textes de Kolmogorov sur le sujet, il ne nous ait pas apparu qu'il se soit inspiré de l'idée de Krylov. La complexité algorithmique a des racines plus diverses dans les préoccupations de Kolmogorov.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Entre la seconde guerre mondiale et les années 1970, les résultats sont beaucoup plus épars, aux Etats-Unis et en Europe. L'expérience de Fermi-Pasta-Ulam (FPU), vers 1953-55, vient bousculer les idées arrêtées sur l'ergodicité, avant que les travaux numériques de Hénon et Heiles, en 1962-64, ne jettent le doute sur la question de l'intégrabilité des systèmes de la Mécanique céleste. Progressivement, et sous l'impulsion des conceptions et des interventions des scientifiques soviétiques, des rapprochements vont se faire avec le théorème KAM, dans les travaux du physicien américain Joseph Ford notamment ; Boris Chirikov, en contact régulier avec ce dernier, apportera son savoir-faire.

a. Deux expériences numériques : l'expérience FPU et l'expérience de Hénon-Heiles

Deux "surprises" amorcent cette histoire occidentale : ce sont les expériences numériques de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) réalisées vers 1953-55 au Los Alamos National Laboratory et celles effectuées par Hénon et Heiles, lors d'un séjour de Hénon à l'Université de Princeton. La première vient bousculer les idées reçues sur l'ergodicité, la seconde se heurte à la question de l'intégrabilité de certains systèmes de la Mécanique céleste.

L'expérience FPU

Après leur intervention dans le projet Manhattan, Enrico Fermi et Stanislaw Ulam continuent de fréquenter le laboratoire de Los Alamos, où les recherches scientifiques pour la construction de la bombe atomique ont été réalisées [1178] . A la sortie de la seconde guerre mondiale des machines à calculer électroniques y sont disponibles et leurs potentialités pour explorer les problèmes scientifiques intéressent vivement le physicien Fermi et le mathématicien Ulam [1179] . Ils entreprennent ainsi un "travail heuristique" [1180] sur des problèmes non linéaires de la physique et la question de l'ergodicité est retenue. D'une part Fermi considérait que les futures théories physiques impliqueraient les phénomènes non linéaires [1181] et, en 1923, il s'était déjà intéressé à l'hypothèse quasi-ergodique [1182] ; d'autre part, rappelons qu'Ulam a lui même contribué à l'aspect mathématique de la théorie ergodique, en montrant que la transitivité métrique est largement "répandue" [1183] .

[1178] Le projet Manhattan est le nom donné au projet de construction de la bombe atomique américaine pendant la seconde guerre mondiale. Ulam participera en outre au projet de bombe H, dont il est même considéré comme un des pères, avec Edward Teller.

[1179] Nous verrons au chapitre 9 quel usage étendu Ulam en fera pour les mathématiques, en définissant une pratique d'"expériences mathématiques".

[1180] "We decided to try a selection of problems for heuristic work where in absence of closed analytic solutions experimental work on a computing machine would perhaps contribute to the understanding of properties of solutions. This could be particularly fruitful for problems involving the asymptotic – long time or "in the large" behavior of non-linear physical systems", [ULAM, S., 1974], p. 490.

[1181] Ulam le présente ainsi dans la note introductive au résultat des expériences numériques, dans [ULAM, S., 1974], p. 490.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Entre 1953 et 1955 (après la mort de Fermi) ils réalisent leur série d'expériences numériques sur la machine MANIAC avec leur collaborateur John Pasta, dans l'idée d'étudier la répartition de l'énergie sur les différents modes de vibration d'un modèle de corde vibrante, fixée à ses extrémités. Elles visaient à observer "les *taux* de mélange et de 'thermalisation'" [1184] du système.

Pour le traitement numérique, le système est modélisé par un ensemble linéaire de 64 particules ; les forces agissant entre particules voisines possèdent un terme linéaire et un terme d'ordre supérieur (carré ou cubique par exemple). Les équations exploitées sont du type :

$$x_i = (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + \alpha\,[(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2]$$

ou encore

$$x_i = (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + \beta\,[(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_i - x_{i-1})^3]$$

Avec $i=1, 2,...64$, α et β des constantes

Contrairement au comportement attendu, le système n'atteint pas un état d'équipartition de l'énergie et il "ne montre certainement pas qu'il est mélangeant" [1185]. Fermi pensait qu'il s'agissait d'une "petite découverte" indiquant que "les croyances dominantes en l'universalité du "mélange et thermalisation" dans les systèmes non linéaires ne sont peut-être pas toujours justifiées" [1186]. Nous verrons que ces croyances étaient effectivement assez répandues.

En 1954, l'année même où Kolmogorov introduit ses nuances sur l'ergodicité des systèmes classiques, l'expérience de Fermi, Pasta et Ulam révèle donc la complexité des comportements non linéaires et une surprise quant à leurs propriétés d'ergodicité. Ce sont deux aspects d'une même remise en cause des idées un peu "naïves" sur l'ergodicité des systèmes mécaniques. Cependant, les considérations de Kolmogorov sont très générales alors que les expériences numériques ne concernent qu'un nombre limité de modèles physiques, simples. Le travail de Joseph Ford en particulier contribuera à rapprocher ces deux perspectives et à mettre toujours plus en question les conceptions de la physique.

Le modèle de Hénon-Heiles

[1182] Fermi a publié ses réflexions sur le sujet dans [FERMI, E., 1923]. Pour une rapide analyse de cette contribution, nous renvoyons page 499.

[1183] Ulam a produit ce résultat avec Oxtoby lorsqu'ils étaient à Harvard (cf. p. 466).

[1184] "The motivation then was to observe the *rates* of mixing and 'thermalization' with the hope that the calculationnal results would provide hints for a future theory", [ULAM, S., 1974], p. 490. (en italique dans le texte).

[1185] "the systems certainly do not show mixing", [ULAM, S., 1974], p. 499.

[1186] "He expressed to me the opinion that they really constituted a little discovery in providing intimations that the prevalent beliefs in the universality of "mixing and thermalization" in non-linear systems may not be always justified.", [ULAM, S., 1974], p. 490.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Une toute autre série de calculs numériques, engagée à l'initiative de l'astronome français Michel Hénon (né en 1933) va conduire à une surprise équivalente. Hénon s'intéresse à la dynamique des amas globulaires, sujet sur lequel il a produit une thèse achevée en 1961 [1187]. L'année suivante il est invité au Princeton University Observatory, où il s'intéresse à un autre problème de dynamique : celui du mouvement d'une étoile dans une galaxie axisymétrique et le problème de la "troisième intégrale" dans ce modèle.

Divers travaux numériques laissaient alors augurer de l'existence d'une telle intégrale, mais avec ses propres simulations numériques Hénon observait un comportement plutôt erratique des trajectoires, difficile à croire et contraire à l'idée qu'une intégrale existe dans toutes les configurations du modèle. Encadrant un étudiant de Princeton, Carl Heiles, les calculs sont refaits et ce surprenant résultat est confirmé [1188]. Ces observations sont répercutées dans leur article "The applicability of the third integral of motion", daté de 1964 [1189].

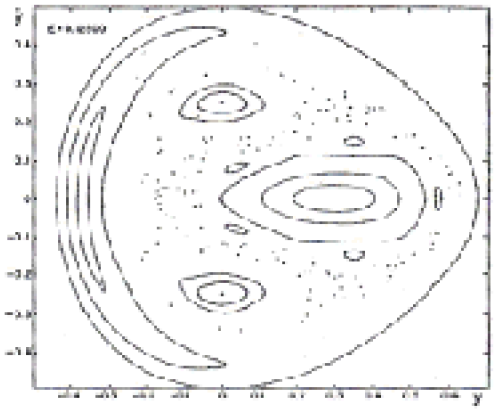
Les motivations de ces recherches diffèrent de celles des expériences FPU. Dans une perspective proche de la Mécanique céleste et des systèmes dynamiques selon Poincaré et Birkhoff, Hénon s'intéresse aux systèmes dynamiques conservatifs dans leurs aspects numériques ; il n'est pas autant aguerri aux notions d'ergodicité. L'analyse produite dans le texte de 1964 reflète ces deux tendances. D'un côté, l'analyse est conduite dans une surface de section, bidimensionnelle, de l'espace des phases. La simple observation des comportements calculés conduit alors à distinguer deux types : les trajectoires qui s'alignent sur des courbes fermées et celles qui évoluent entre les courbes fermées ; ces dernières sont appelées "ergodiques" puisqu'elles tendent à couvrir l'espace entre les courbes. De l'autre, les analyses des comportements "ergodiques" sont assez limitées et très opératoires.

[1187] Dans le chapitre 9 (cf. page 573) nous produisons une analyse historique et épistémologique des travaux de Hénon.

[1188] Naturellement, la situation aurait pu s'expliquer par une erreur de programmation ou des erreurs de calculs. Hénon et Heiles ont donc fait deux programmes indépendants et ont travaillé sur deux ordinateurs différents (CDC 1604 et IBM 7040). Cependant, les effets en questions restaient très difficiles à observer. C'est en essayant un autre modèle, avec des équipotentielles en triangle, que les trajectoires erratiques sont apparues en nombre (Voir l'article [HENON, M., HEILES, C., 1964], p. 75).

[1189] [HENON, M., HEILES, C., 1964], il était achevé et reçu par l'éditeur en août 1963. Le titre original prévu pour le texte était "The hypothetical third integral...", mais ses collègues (et le comité de lecture de la revue de publication) le jugeant trop "hérétique", Hénon a retenu l'autre formulation (Entretien avec Michel Hénon, 17 mars 2004). Voir également [HENON, M., 1987].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.



[HENON, M., HEILES, C., 1954], figure 5, p. 75.

Précisons les aspects problématiques des observations. Lorsqu'il existe une intégrale, le mouvement s'agence sur des courbes fermées : les expériences montrent donc que l'existence d'une intégrale n'est pas générale. De plus, la quantité de courbes "ergodiques" dépend des paramètres du modèle (l'énergie totale, en l'occurrence) et il existe une transition progressive des systèmes où seules des courbes fermées existent, vers des systèmes où les trajectoires "ergodiques" occupent tout l'espace. Pour préciser la transition, les deux comportements sont distingués grâce à un critère assez empirique construit sur le constat suivant : sur les courbes fermées, deux points initialement proches s'écartent très lentement, alors que **pour une trajectoire "ergodique" l'écart croît "grossièrement exponentiellement"** [1190] .

La coïncidence avec les propositions courantes chez les scientifiques soviétiques est très remarquable, mais il s'agit ici avant tout d'un critère opératoire et commode. Hénon ignore encore les théories proposées en Union Soviétique.

Peut-être faut-il néanmoins rapprocher ce choix des travaux de J. Moser (le M de KAM) : Hénon a assisté, en décembre 1962, à une conférence d'astronomie où Moser est intervenu pour présenter ses résultats (le théorème KAM en l'occurrence) et ses enjeux. Il est concevable que Hénon a pu en extraire du sens pour son résultat et une explication de ce mélange d'ordre et de désordre si troublant pour la communauté des astronomes [1191] .

En tout cas, les résultats remettent en question la dichotomie déjà critiquée par Kolmogorov, entre les modèles intégrables "simples" et les non intégrables, "ergodiques". Très symboliquement, on peut ajouter que le problème restreint des trois corps fait partie des systèmes concernés par ce mélange de comportements, comme Poincaré et Birkhoff l'avaient pressenti.

Par la suite, Hénon ne s'intéresse pas davantage aux propriétés statistiques et reste

[1190] "roughly exponentially", [HENON, M., HEILES, C., 1964], p. 77.

[1191] C'est ce que nous laisse penser notre entretien avec Michel Hénon. Le fait qu'il est du changer le titre de son article (note 1189, p. 497) montre que la question est sensible.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

très attaché aux questions de la Mécanique céleste. En revanche, tout comme l'expérience FPU, le modèle intéressera les physiciens préoccupés par la physique statistique et servira les tentatives pour repenser l'ergodicité. Le texte de Benettin et ses collaborateurs, en 1976, en est une illustration parmi d'autres [1192].

Il convient d'ajouter cependant qu'un seul mathématicien s'est intéressé très tôt au problème suscité par ces expériences numériques : Vladimir Arnold. Il est vrai qu'il est un des mieux placés pour en comprendre tout l'enjeu. C'est également une preuve de la réceptivité d'un mathématicien-physicien habitué à l'interaction avec les problématiques proches de la physique [1193].

b. L'ergodicité, l'instabilité et le théorème de Poincaré

L'importance de ces deux expériences numériques se révèlera énorme, mais un processus d'explication et d'acceptation de cette "évidence" se met en route au préalable. Car avant d'être assumées comme telles, ces "évidences" vont à l'encontre des idées communément admises en matière d'ergodicité. Pour rapporter les idées générales sur le sujet, hors d'URSS, nous allons détailler l'opinion de quelques physiciens célèbres en montrant notamment l'ancrage dans certains résultats du XIXème siècle, dont en particulier un théorème de Poincaré sur la Mécanique.

Affichons d'emblée que l'entreprise est limitée parce que peu de physiciens s'intéressent au sujet avant les années 1970. Les mathématiciens, plus que les physiciens, réfléchissent sur l'ergodicité. Les raisons de ce désintérêt sont difficiles à cerner : faut-il penser qu'ils ne voient qu'une question de peu d'intérêt ou trop difficile, trop mathématique ? Ou adhèrent-ils à l'idée que l'"hypothèse ergodique" (ou tout équivalent) est valable, sans problème, dans les systèmes les plus communs en physique ? Nous ne disposons pas de beaucoup d'éléments pour répondre, mais les indications que nous avons collectées nous semblent suffisantes et significatives pour notre perspective.

Fermiet l'hypothèse de quasi-ergodicité

L'exemple de l'analyse de Fermi en 1923 est très emblématique. Il pensait valider l'hypothèse quasi-ergodique [1194] grâce à un théorème de Poincaré, affirmant qu'il n'existe pas d'autre intégrale analytique, uniforme que l'énergie (et les constantes classiques) dans un système mécanique. Rappelons que Poincaré avait obtenu ce résultat dans ses travaux de Mécanique céleste [1195]. Avant que les théorèmes ergodiques de Von

[1192] Rappelons que la stochasticité et la sensibilité aux conditions initiales ont pénétré le champ du chaos en partie grâce à ce texte, [BENETTIN, G., GALGANI, L., STRELCYN, J.M., 1976]. Cf. chapitre 3, p. 284.

[1193] Hénon n'a pas été sollicité par d'autres mathématiciens, ni français, ni étranger. Le fait qu'il manipule des "expériences numériques" n'est pas étranger à cela, comme nous l'expliquons au chapitre 9 (page 573). Arnold au contraire lui suggère de nouvelles problématiques de recherche utilisant l'ordinateur.

[1194] Il analyse la quasi-ergodicité, après que Plancherel a montré l'impossibilité de l'hypothèse ergodique des Ehrenfest. [FERMI, E., 1923], p. 261.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Neumann et Birkhoff ne viennent clarifier la situation, Fermi adopte l'hypothèse en s'appuyant sur le théorème de Poincaré et en adjoignant une condition d'indépendance linéaire des résonances [1196] . Pour Fermi, la Mécanique statistique d'équilibre trouve ainsi une base solide et sa surprise est d'autant plus grande lorsque l'expérience numérique lui révèle que l'équilibre n'est pas atteint, dans un système pourtant très simple.

Les convictions de Brillouin

Les conceptions du physicien français Léon Brillouin (1889-1969) se fondent sur une interprétation un peu différente du même théorème de Poincaré. Brillouin insiste plus sur l'instabilité en Mécanique que sur l'ergodicité, et il cherche surtout des arguments en faveur de ses convictions indéterministes. Ainsi dans toute la seconde (et dernière) partie de son ouvrage Scientific Uncertainty and Information il développe son idée que la Mécanique classique n'est pas rigoureusement déterministe et la même année 1964, il rédige l'article "Indéterminisme dans la Mécanique rationnelle et rôle des discontinuités de Poincaré" [1197] .

Pour Brillouin, le théorème de Poincaré a été trop longtemps déconsidéré, alors qu'il a des conséquences importantes. Une interprétation mathématique d'abord, physique ensuite, conduit Brillouin à ses conclusions :

"L'absence de convergence uniforme a pour résultat la possibilité de discontinuités. La solution du problème peut changer brusquement de caractère pour une variation infime du paramètre considéré. Il est évident qu'une discontinuité de ce genre correspond à une instabilité pratique. Il est physiquement impossible de mesurer rigoureusement tous les paramètres qui définissent le système. [...] Dans ces conditions, l'instabilité signalée plus haut correspond à l'absence de réponse dans la théorie" [1198]

Reprenant un exemple de Borel, Brillouin signale qu'une moindre perturbation suffit à rendre impossible la prédiction sur un gaz de molécules au-delà d'une fraction de seconde et il affirme : "L'exemple choisi par Borel lui fournit une excellente justification des méthodes statistiques de Boltzmann" [1199] . En un sens l'instabilité est la meilleure justification de l'ergodicité des systèmes de la physique.

[1195] Cf. chapitre 1, p. 50.

[1196] C'est-à-dire $\Sigma\, n_k . w_k = 0$ pour aucun autre ensemble $\{n_k\}$ que $n_i = 0$ pour tout i (w_k correspondant aux résonances du système). [FERMI, E., 1923], p. 265. Par une interprétation géométrique dans l'espace des phases, Fermi annonce qu'il n'existe pas de famille de surface divisant l'espace et ayant la propriété qu'un mouvement entamé sur une surface, reste sur la surface. En conséquence de quoi, le mouvement mécanique traverse tout domaine de l'espace des phases, autrement dit, le système est quasi-ergodique.

[1197] Il s'agit respectivement de [BRILLOUIN, L., 1964a] et [BRILLOUIN, L., 1964b].

[1198] [BRILLOUIN, L., 1964b], p. 276 (en italique dans le texte).

[1199] Ibid., p. 276.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

De manière plus générale, Brillouin considère que l'instabilité, résultat des discontinuités de Poincaré, se produit à cause des résonances, c'est-à-dire une relation (du type $\Sigma n_k . w_k = 0$) entre les fréquences données par la méthode de Hamilton-Jacobi.

"On a cru pouvoir escamoter la difficulté en disant que tout irait bien, pourvu que les fréquences v_k soient incommensurables. Mais cette réponse est inacceptable dans un problème physique réel, où toutes les quantités (y compris les v_k) ne sont définies qu'avec certaines erreurs possibles $\#v_k$, de sorte que le terme 'incommensurable' n'a aucun sens." [1200]

Pour des raisons internes à la mécanique (résonances) et des contingences de la physique (conditions initiales non connues exactement), "*la prédiction est réellement impossible*" [1201] et l'instabilité condamne la Mécanique rationnelle à l'indéterminisme. Les arguments de Brillouin rappellent les débats de la fin du XIXème siècle, mais ses conclusions sont inverses des propos de Duhem par exemple : l'instabilité de la mécanique n'est pas un résultat "inutile aux physiciens", mais elle est irrémédiable et confine à accepter un certain indéterminisme, au sens de l'impossibilité de faire des prédictions effectives. Pour Brillouin cette impossibilité est inéluctable, alors qu'avec Duhem il convenait simplement d'évincer ces cas particuliers de la théorie physique.

Par ailleurs, Brillouin correspond avec les plus grands physiciens de sa génération et depuis 1958 il diffuse ses idées (et le théorème de Poincaré) en direction de ses connaissances. Erwin Schrödinger et Dennis Gabor sont les deux physiciens qui ont réagi avec le plus d'enthousiasme à ses propositions [1202]. Cependant, comme pour les conceptions de Fermi, les idées de Brillouin concernant la Mécanique statistique vont buter sur les nouvelles théories ergodiques.

L'instabilité et l'indéterminisme : l'après Mécanique quantique

Avant d'expliciter cette rupture, il convient de mentionner les idées du physicien Max Born au sujet de l'instabilité. Dans un célèbre article "Is classical mechanics in fact deterministic ?", Born avait déjà en 1955 insisté sur l'instabilité en mécanique, sans recourir aux mathématiques de Poincaré. Pour ce qui nous intéresse il cherche à faire part de ses doutes quant à l'argument proposé pour introduire des considérations de statistique en Mécanique, à savoir, l'idée de "grand nombre" [1203] de molécules dont il n'est pas possible

[1200] Ibid., p. 280.

[1201] Ibid., p. 285 (en italique dans le texte).

[1202] Gabor lui écrit en 1959 : "I did not know Poincaré's great theorem either, what a genius that man was ! [...] It is really surprising that Poincaré's great theorem is so little known, because it is really at the basis of ergodic theory. People somehow seem to have assumed that all the other integrals except the energy (and total momentum) integrals are ill-behaved." (Correspondance entre D. Gabor et L. Brillouin, Folder 7 Box 7 Papers of Leon Brillouin, 1877-1972, Niels Bohr Library). Nous renvoyons à la biographie de Brillouin, par R. Mosseri [MOSSERI, R., 1998], chapitre 9. Schrödinger affirme également en 1959 qu'il n'avait pas connaissance du théorème de Poincaré.

[1203] [BORN, M., 1955], p. 79.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

de connaître la situation. En physicien, il réclame une meilleure prise en compte de l'instabilité et de "l'incertitude naturelle de toutes observations" [1204] , considérant qu'elles conduisent à une certaine "indétermination". Born propose de représenter les systèmes classiques selon une description statistique, sous forme d'amplitude de probabilités, même pour les systèmes à une seule particule.

Par contraste avec les débats de la fin du XIXème siècle, il est évident que les questions de déterminisme et d'indéterminisme, d'instabilité en mécanique sont débattues avec beaucoup plus de liberté. Naturellement, le contexte des années 1950 n'est en rien comparable à la situation en 1900, du simple fait que la Mécanique quantique a bousculé les conceptions classiques. La prise en compte de l'"incertitude" et des amplitudes de probabilités n'a de sens qu'en rapport avec les concepts quantiques qui forment désormais l'arrière-plan de toutes ces discussions, pour Born comme pour Brillouin.

Cependant, leurs idées restent très générales. Elles ont une portée philosophique certaine, en accordant de l'importance à l'instabilité en Mécanique classique, mais les répercussions en termes de théorie physique sont très limitées. L'évolution est tout de même notable et traduit un état d'esprit plus ouvert et plus à même de saisir les nouveautés proposées par les mathématiques et les expériences numériques.

Une rupture : le théorème KAM

De manière très symbolique, la lettre que S. Ulam adresse à Brillouin, le 18 décembre 1964, illustre la rupture entre les conceptions reposant sur le théorème de Poincaré et les nouvelles idées sur l'ergodicité. Ulam vient de recevoir le Scientific Uncertainty and Information de Brillouin :

"Connaissez-vous les résultats récents de Kolmogorov et Jürgen Moser à New York sur les propriétés des systèmes dynamiques ? Je pense qu'ils sont pertinents par rapport à votre chapitre sur le sujet ! Comme vous le savez, il y a quelques temps Oxtoby et moi-même avons prouvé que l'ergodicité est 'une règle' pour les flots satisfaisant la condition de Liouville. D'un autre côté, des travaux sur des problèmes spéciaux comme celui réalisé par Fermi et moi-même […] ont montré une remarquable absence d'ergodicité […] Kolmogorov en Russie et Moser ici ont montré plusieurs autres cas présentant ces deux situations." [1205]

Ulam, bien placé pour parler des expériences FPU, fait donc découvrir à Brillouin, en 1964, ce monde connu de quelques physiciens-mathématiciens occidentaux. Cette lettre amicale de Ulam à Brillouin révèle l'ampleur du travail de diffusion encore à accomplir et le dépassement des conceptions de la Mécanique classique à opérer. C'est dans ces

[1204] "What I mean is that a physical situation must be described by means of real numbers in such a way that the natural uncertainty in all observations is takin into account.", [BORN, M., 1955], p. 81.

[1205] ***"Do you know the recent results of Kolmogorov and Jurgen Moser in New York on properties of dynamical systems ? I think they have relevance to your chapter on this subject! As you know, some time ago Oxtoby and I proved that ergodicity is "a rule" for flows satisfying Liouville's condition. On the other hand, some work on special problems like the one done by Fermi and myself [...] showed remarkably lack of such [...] Kolmogorov in Russia and Moser here have shown more cases of both." (Correspondance entre S. Ulam et L. Brillouin, Folder 7 Box 7, Papers of Leon Brillouin, 1877-1972, Niels Bohr Library).***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

mêmes années que le prosélytisme en faveur des nouvelles conceptions sur l'instabilité et l'ergodicité va commencer, pour arriver à éclosion dans les années 1970, sous une forme en particulier, les conceptions de chaos.

Il est vrai que la Mécanique quantique, et les réflexions de Born et Brillouin facilitent la mise en question de la place très centrale de la stabilité en théorie physique. Cependant, avec Fermi, Brillouin participe à l'interprétation du théorème de Poincaré qui est le point d'achoppement des conceptions classiques sur l'ergodicité. En effet, comme le texte de Chirikov de 1979 l'explicite très clairement, le théorème KAM rend caduques les interprétations du théorème de Poincaré et rompt avec les conceptions classiques. Le théorème KAM affirme que la non intégrabilité des systèmes n'induit pas nécessairement une instabilité et au contraire, stabilité et instabilité coexistent. La portée des travaux de Brillouin et son interprétation du théorème de Poincaré sont donc à nuancer [1206] .

Dans les démarches de renversement de tendance sur l'ergodicité et l'instabilité, nous allons nous focaliser sur le travail de J. Ford. Notre choix est de toute façon assez limité puisque très peu d'occidentaux ont contribué à ce mouvement. Du fait de ses relations avec B. Chirikov et de sa participation active dans le champ du chaos, notre sélection nous paraît très légitime.

c. Joseph Ford (1927-95) et les expériences numériques sur le problème FPU

Le physicien américain Joseph Ford a une activité à deux facettes inséparables, la dynamique non linéaire et la physique statistique, dont la combinaison a fait le succès de son approche. Le début du parcours scientifique de Ford dans la dynamique non linéaire peut se résumer par une réorientation initiale, comme ses amis et collaborateurs l'ont souligné :

"Joe Ford est venu au nouveau champ de la dynamique chaotique après avoir été détourné de la mécanique statistique 'conventionnelle' par le célèbre problème de Fermi-Pasta-Ulam." [1207]

En effet, c'est un artisan de la convergence des expériences numériques de FPU et des résultats mathématiques du type du théorème KAM. Ignorant le résultat de Kolmogorov, il est déjà en 1961, sur la piste d'une explication aux expériences de Fermi-Pasta-Ulam : la non équipartition de l'énergie dans le système non linéaire serait le fait de l'indépendance linéaire des modes de vibration du système [1208] . Tout le travail est réalisé sur la base des méthodes de perturbation de Kryloff et Bogoliuboff [1209] , interprétées physiquement en termes d'interactions entre oscillateurs : l'indépendance des modes signifie qu'aucun

[1206] Les affirmations de R. Mosseri ([MOSSERI, R., 1998], chapitre 9) relatives à la postérité de L. Brillouin dans le domaine des systèmes dynamiques nous paraissent vraiment exagérées. Comme le montre la lettre de Ulam, Brillouin est loin de maîtriser les théories KAM, les mathématiques des théories ergodiques et ne connaît vraisemblablement rien des notions de stochasticité. L'influence de Brillouin dans l'histoire du chaos se limite, à notre avis, à ses appels en direction de la communauté des physiciens à ne pas négliger l'instabilité mécanique (sur un argument remis en question par le théorème KAM) et à éviter de se focaliser sur une épistémologie strictement déterministe en mécanique.

[1207] ***"Joe Ford came to the new field of chaotic dynamics after having been diverted from 'conventional' statistical mechanics by the famous Fermi-Pasta-Ulam problem." [FLASCHKA, H., CASATI, G., 1988], p. vii.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

oscillateur ne force un autre à sa fréquence de résonance, handicapant ainsi le processus de partage de l'énergie.

En arrière-plan de ces considérations, il se trouve donc de la Mécanique non linéaire, des oscillations non linéaires, et, de manière un peu plus lointaine mais absolument essentielle, l'interrogation sur l'approche de l'équilibre en Mécanique statistique. Ce texte précoce reflète également l'embarras des physiciens face au résultat inattendu de l'expérience FPU [1210] .

Au fil des années 1960, Ford participe de manière essentielle aux tentatives visant à donner un sens aux résultats généraux comme le théorème KAM. Sa démarche suit une triple voie : l'expérimentation numérique, la recherche des propriétés d'ergodicité des systèmes non linéaires et une pédagogie du non linéaire et des mathématiques associées.

Le texte rédigé avec Grayson Walker en 1969, résume les évolutions réalisées et les perspectives de changement offertes par la théorie KAM, en physique. En premier lieu, Ford et quelques autres physiciens ont produit des modèles, et les expériences numériques nécessaires, pour illustrer le phénomène le plus recherché dans ces systèmes non linéaires conservatifs : la **transition des phénomènes quasi-périodiques aux propriétés ergodiques**. La théorie KAM promet la persistance des comportements réguliers (les tores, c'est-à-dire les mouvements quasi-périodiques), mais laisse imaginer la domination progressive de l'instabilité et l'irrégularité. Dans leurs systèmes simplifiés les physiciens parviennent à **caractériser l'évolution en termes de résonances** et à **évaluer la transition**. La théorie KAM n'est plus seulement un monument mathématique et elle engage à une critique des visions "classiques" [1211] .

En outre, l'étude des résonances, suggérée par la théorie KAM entre dans une nouvelle phase : le **critère de recouvrement des résonances** permet d'expliquer la

[1208] [FORD, J., 1961]. Pour être plus précis : "A system of harmonic oscillators weakly coupled by nonlinear forces will not achieve equipartition of energy as long as the uncoupled frequencies w_k are linearly independent on the integers i.e., as long as there is no collection of integers $\{n_k\}$ for which $\Sigma n_k.w_k = 0$ other than $n_k=0$.", ibid., p. 387.

[1209] Reprises de la traduction de leur opuscule Introduction to nonlinear mechanics ([KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1949]) et l'ouvrage de Minorsky, dans sa première version de 1947, [MINORSKY, N., 1947].

[1210] "The results of the computer calculations of UFP thus appear to be in sharp contrast, if not in actual contradiction, to the widely held notions concerning the approach to equilibrium.[..] aside from any element of contradiction, a number of physicists have been puzzled by the failure of Eq. (1) to lead to equilibrium behavior.", [FORD, J., 1961], p. 387. (UFP correspond à FPU et l'Eq. (1) est l'équation du modèle (cf. ci-dessus, p. 495)).

[1211] Ford et Walker soulignent l'importance des zones d'instabilité, enchevêtrées dans les zones de stabilité, et offrant des propriétés d'ergodicité : "It is thus quite possible that KAM instability can be made a cornerstone for statistical mechanics.", [WALKER, G.H., FORD, J., 1969], p. 430. Dans la note 33, p. 432 du texte ils ajoutent : "Physicists have long sought an underlying physical explanation for the purely mathematical probability arguments used to derive statistical mechanics from classical mechanics. The KAM zones of instability have an obvious random element in the positions of the unstable periodic orbits. The erratic path followed by a system trajectory may be attributed to "collisions" with these randomly positioned unstable periodic orbits."

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

naissance d'une instabilité macroscopique.

Avec ce texte, qui est aussi un exercice pédagogique de Ford et Walker, les conséquences des expériences FPU et de Hénon-Heiles sont considérablement éclaircies grâce à une mise en perspective avec la théorie KAM. Le modèle de Hénon-Heiles devient en quelque sorte leur drosophile pour les expériences numériques. Le texte produit une vision nouvelle des phénomènes non linéaires, de leur instabilité et de leurs propriétés statistiques. En montrant comment les résonances s'invitent dans des systèmes d'oscillateurs non linéaires très simples, toute la complexité des comportements, inattendue quelques années auparavant, est mise en évidence.

Une partie des développements de l'école soviétique est donc importée. Il faut signaler que la rencontre [1212] en 1966 entre Ford et le physicien Boris Chirikov (né en 1928) oriente certainement les recherches dans le sens de l'étude des résonances. En effet, Chirikov, physicien russe, travaillant depuis 1958 à l'Institut de Physique Nucléaire de Novossibirsk (Sibérie), est celui qui a donné le critère de recouvrement des résonances. Après des études expérimentales, il a analysé, de manière théorique, la stochasticité observée dans certains plasmas confinés. Dès 1960 le critère est imaginé puis développé pour constituer le critère de recouvrement effectivement utilisé par Ford [1213]. Cet exemple est une expression de plus de cette culture du stochastique en URSS.

Les autres développements théoriques soviétiques sur l'instabilité sont progressivement portés à l'attention des physiciens. A. Wightman en fait une rapide recension au cours du colloque de 1969 [1214] ; le physicien Joël Lebowitz fait de même en 1971 dans la conférence de l'IUPAP de Chicago sur la Mécanique statistique [1215].

Ford, avec le physicien Gary Lunsford cette fois, misant toujours sur les résultats "empiriques" à propos du système Hénon-Heiles, publient deux articles en 1970 et 1972 [1216]. Ils s'engagent dans des simulations plus précises, en même temps que les concepts des systèmes dynamiques interviennent plus abondamment. L'ouvrage d'Arnold et Avez s'avère la référence indispensable et ils en reprennent d'ailleurs le vocabulaire : l'instabilité locale est mise en avant, les C-systèmes entrent en jeu. Cependant les C-systèmes ne sont que des éléments heuristiques pour pénétrer les propriétés des systèmes Hamiltoniens ; c'est la structure de l'ensemble des orbites périodiques, stables et instables, qui est analysée en vue de caractériser les zones stochastiques.

J. Ford produit un texte de synthèse en 1973 : "The transition from analytic dynamics

[1212] Nous nous référons aux allocutions données au colloque en l'honneur du 70ème anniversaire de Chirikov, en 1998 : [BELLISSARD, J., SHEPELYANSKI, D., 1999].

[1213] Le critère est explicité sous une forme plus achevé dans : [IZRAILEV, F.M., CHIRIKOV, B., 1966].

[1214] Nous renvoyons page 485 à la citation de Wightman (tirée de [COHEN, E.G.D., UHLENBECK, G.E., 1971], p. 1-32).

[1215] Lebowitz intervient à la 6ème conférence de l'International Union of the Pure and Applied Physics. Les comptes-rendus sont publiés dans : [RICE, S.A., FREED, K.F., LIGHT, J.C.., 1972].

[1216] [FORD, J., LUNSFORD, G.H., 1970] et [LUNSFORD, G.H., FORD, J., 1972].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

to statistical mechanics". C'est une nouvelle étape et un nouvel appel de Ford en direction des physiciens [1217]. Il y fait un réquisitoire contre l'attitude des physiciens travaillant en physique statistique qui ont ignoré la théorie ergodique ou y sont devenus hostiles [1218]. Ford critique sévèrement la communauté physicienne qui est incapable de reprendre à son compte les avancées mathématiques, au premier rang desquelles il place la démonstration de Sinaï de l'ergodicité et du caractère mélangeant du billard de sphères dures [1219]. Dans le contexte de la Mécanique statistique, il introduit, de manière simplifiée, les concepts de la dynamique, la notion de C-système en particulier. La notion d'instabilité locale, de divergence exponentielle des trajectoires voisines, est maintenant récurrente dans la présentation car elle autorise l'ergodicité, le mélange. Plus que les K-systèmes ou C-systèmes généraux, ce sont les systèmes de Bernoulli qui sont, pour Ford, les archétypes des problèmes et des perspectives suscités par les nouvelles théories en Mécanique statistique [1220].

Enfin, un dernier point fait l'objet d'études empiriques-numériques : le problème de l'intégrabilité des systèmes non linéaires, qui prend la forme de la recherche des intégrales du mouvement. Cette question s'avère cruciale dans le projet général de sélectionner les systèmes aptes à être décrits par la Mécanique statistique : pour Ford les systèmes non intégrables et stochastiques sont les "bons" systèmes pour la Mécanique statistique.

Ford propose une étude sur les applications bidimensionnelles préservant les aires (pensées comme section de Poincaré). C'est une sorte de prolongement aux analyses rudimentaires de Hénon sur l'existence d'une "troisième intégrale" dans le mouvement stellaire. En 1973, plusieurs critères [1221] sont utilisés numériquement pour évaluer la conservation d'une relative intégrabilité, comme le théorème KAM le suggère. Il y a le repérage visuel des courbes fermées (voir figure de Hénon-Heiles en 1964) qui signent une intégrale, l'étude de la divergence des trajectoires voisines (comme Hénon l'avait

[1217] Voir en particulier la courte introduction et la discussion finale de Ford [FORD, J., 1973], p. 155 et p. 183.

[1218] Ford stigmatise l'ouvrage "classique" de Landau et Lifshitz, Statistical Physics. Ouvrage et travail soviétique, on pourrait en attendre plus de profondeur de vue ; mais il faut voir qu'il s'agit d'une édition quelque peu viellie (même si elle fait référence), celle de 1958. De plus, si Landau et Lifshitz partagent le pessimisme de leur compatriote Krylov sur l'impossibilité de fonder la mécanique statistique uniquement sur la mécanique, ils arguent des "grands nombres" plutôt que de l'instabilité. Enfin, Landau, qui a proposé l'idée d'une turbulence naissant par accumulation de mouvements quasi-périodiques, ne semblait pas avoir beaucoup de notions de système dynamique, comme Kolmogorov le laissait penser (cf. note 1170, p. 490, correspondant à son intervention de 1954).

[1219] Cf. p. 483.

[1220] Ce n'est qu'une transcription de résultats de divers travaux que l'on trouve notamment dans l'ouvrage [ARNOLD, V., AVEZ, A., 1967]. Dans l'exercice de 1973, Ford insiste particulièrement sur la transformation du Boulanger, laquelle est isomorphe à un décalage de Bernoulli.

[1221] Nous renvoyons à l'exposé de Ford, donné au colloque sur les transformations ponctuelles, à Toulouse en 1973 : [MIRA, C., LAGASSE, J., 1976], p. 123-134.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

pressenti), et, plus sophistiqué, l'étude des séparatrices et des homoclines qui, si elles existent, assurent que le comportement est non intégrable, au moins localement. Ford ajoute l'étude de certaines orbites périodiques et de leur stabilité, présentant son critère comme le meilleur moyen numérique pour détecter l'intégrabilité.

De la stochasticité au chaos

Aux Etats-Unis, avec J. Ford, la reconnaissance de l'instabilité et du théorème KAM prend donc la voie de l'expérience numérique. Les résultats généraux promus par les conceptions d'origine soviétique sont sublimés dans des systèmes plus simples, plus concrets, expérimentables, qui avaient suscité l'étonnement des physiciens. Prolongeant le théorème KAM, les idées en physique ont évolué considérablement : la non intégrabilité n'est plus synonyme d'ergodicité et ne s'oppose plus de manière dichotomique à l'intégrabilité. La stochasticité intègre les conceptions scientifiques occidentales, de manière encore restreinte, mais significative : les travaux de Chirikov sont exploités au niveau numérique, la stochasticité devient le "bon" ingrédient pour la Mécanique statistique. Les concepts de la théorie ergodique, comme les systèmes de Bernoulli, deviennent des archétypes dans la Mécanique statistique théorique.

Animateur du mouvement des théories de la stochasticité et du non linéaire auprès des physiciens aux Etats-Unis, Ford participe naturellement au bouillonnement de la fin des années 1970, dans le champ du chaos. Il est organisateur, avec le physicien italien Giulio Casati, de la première conférence internationale sur les questions de stochasticité en 1977. Le groupe organisé entre autres par Ford et Chirikov trouve son plein essor au moment où les problèmes stochastiques sont absorbés dans le champ du chaos, autour de 1980. Dans la continuité des années 1970, l'activité de Ford est caractérisée par une perpétuelle interrogation sur le hasard, prolongée dans le "chaos quantique", avec Chirikov. Il se définit alors lui-même comme un "évangéliste du chaos" prêchant la nouvelle parole, aux côtés de Paul Davies dans La nouvelle physique, par exemple [1222] .

7.4. Un premier bilan : l'ergodicité dans le chaos

Le mouvement conceptuel axé sur la stochasticité, dont l'ossature est constituée en partie par les travaux de Ford et Chirikov pour leurs composantes occidentalisées, admet au cours des années 1970 plusieurs directions. Par rapport aux conceptions du chaos il est clair que la plus importante et la plus remarquable est la perspective suivie par David Ruelle, teintée de Mécanique statistique et de théorie ergodique. Après avoir reliés l'ergodicité et le chaos au parcours intellectuel et scientifique de Ruelle, nous pourrons esquisser un bilan plus général sur la place de l'ergodicité dans le chaos.

[1222] Signalons simplement deux textes de Ford. Dans "How random is a coin toss ?" de 1981 Ford s'interroge sur la notion de hasard (et reprend à cette occasion la notion de complexité algorithmique de Kolmogorov) et sur les limites de la prédictibilité dans les systèmes chaotiques. Le texte correspond à un exposé donné dans un colloque organisé à Austin (Université du Texas) sous l'égide du groupe de Prigogine : [HORTON, C.W. Jr, REICHL, L.E., SZEBEHELY, V.G., 1983]. Le second texte s'intitule "Qu'est-ce que le chaos, pour que nous l'ayons à l'esprit ?" : c'est une réflexion épistémologique, sans prétention, mais qui souhaite mettre en valeur les spécificités du chaos, dans la perspective adoptée par Ford depuis les années 1970 ([FORD, J., 1989]).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

David Ruelle et la théorie ergodique du chaos

David Ruelle a en effet débuté sa carrière comme physicien théoricien et il s'est engagé dans des recherches en physique statistique à la fin des années 1960. Il a notamment publié un ouvrage très remarqué en 1969 : Statistical Physics: Rigourous results [1223] . Dans le contexte de l'IHES, Ruelle s'intéresse au problème de la transition vers la turbulence, mais n'oublie pas la Mécanique statistique. Au contraire, dans la culture des systèmes dynamiques créée à l'IHES, il devient l'un des meilleurs spécialistes, au niveau international, de la théorie ergodique des systèmes dynamiques. Ruelle s'inscrit ainsi dans une double perspective historique : les mathématiques des systèmes dynamiques, développées par Smale aux Etats-Unis, et l'école soviétique de l'ergodicité et de la stochasticité, représentée en quelque sorte par Arnold, visiteur occasionnel de l'IHES. Alors que dans les années 1960 les travaux de Smale étaient orientés vers la dynamique, avec Ruelle cette perspective s'enrichit de Mécanique statistique, au cours des années 1970. Ruelle incarne d'une certaine manière les tendances mathématico-physiques discernées dans la culture de la stochasticité en URSS.

Ses travaux se comprennent à la lumière de cette histoire brièvement résumée. Par exemple, le théorème ergodique pour les attracteurs Axiome A, établi en 1975 [1224] en collaboration avec Rufus Bowen (issu de l'école Smale), s'inscrit dans cette perspective. De manière plus significative encore Ruelle réalise le processus de transfert de l'instabilité, de la sensibilité aux conditions initiales, des exposants de Lyapounov entre 1975 et 1977 : venues des préoccupations de Mécanique statistique et de systèmes stochastiques, ces notions intègrent la turbulence, les systèmes dissipatifs, le chaos. Cela ne doit pas occulter les problématiques plus centrées sur le démarrage de la turbulence et les instabilités hydrodynamiques, en voie de développement par ailleurs sur le plan théorique et expérimental, mais la perspective historique est incomplète sans ces développements concernant l'ergodicité.

Pour symboliser l'aboutissement dans les conceptions du chaos, rien ne paraît plus adéquat que l'article de Ruelle et Eckmann de 1985, dont le titre est sans ambiguïtés : "Ergodic theory of chaos and strange attractors" [1225] . Il cristallise les deux perspectives caractérisant la démarche de Ruelle (et Eckmann) au sujet du chaos : le point de vue des mathématiques des systèmes dynamiques (avec les attracteurs étranges) et le point de vue statistique (de la théorie ergodique). Il illustre par ailleurs le "paradigme" inauguré vers 1982, sur la base des idées de Ruelle et la synthèse proposée par Eckmann.

Du XIXème siècle au chaos : un bilan

[1223] Comme le titre l'indique, il s'agit de résultats "rigoureux" : Ruelle développe le cadre mathématique de la mécanique statistique, laissant présagé de ses futures contributions en la matière. [RUELLE, D., 1969].

[1224] Outre les travaux antérieurs de Bowen, fortement impliqué sur le sujet, ils utilisent les résultats de Ya. Sinaï "Gibbs measure in ergodic theory" ([SINAI, Y., 1972]), qui apporte une composante moscovite à ces recherches.

[1225] [ECKMANN, J.P., RUELLE, D., 1985].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

A travers la très longue évolution décrite, et malgré la diversité des contextes culturels, de nombreux questionnements sont apparus comme récurrents dans l'histoire du chaos. Parmi eux, les interrogations sur les fondements de la Mécanique statistique constituent indéniablement une problématique porteuse et fructueuse : les notions d'ergodicité et de stochasticité, avant d'être exportées dans le cadre du chaos dissipatif, en sont des produits très directs. Le chaos lui-même, tel qu'il est édifié dans son premier "paradigme", est inspiré de cette voie de recherche. Chronologiquement, il est un successeur de la stochasticité, épistémologiquement, il est, en partie, le produit d'une interrogation sur la Mécanique statistique, l'ergodicité et l'instabilité.

Les *themata* du hasard, du déterminisme et de l'instabilité nous permettent d'esquisser les principales lignes directrices philosophiques de cette histoire. L'interrogation sur le hasard devient par exemple un thème déterminant après les premières conceptions sur la Mécanique statistique et constitue un moteur de la stochasticité en Union Soviétique. Si nous ajoutons le développement de la Mécanique quantique et des théories des probabilités, il apparaît que le XXème siècle est traversé par un renouvellement régulier des conceptions sur le hasard. Le *themata* du déterminisme n'est pas à évincer pour autant, bien au contraire. Avec les théories sur les systèmes dynamiques et la stochasticité, le mécanisme a tendance à s'assouplir ; des scientifiques comme Birkhoff et Andronov réagissent à la Mécanique quantique par des positions "déterministes", tout du moins "dynamiques". Visiblement, nous touchons là à un point très sensible de la pensée scientifique. Quant à l'instabilité, elle s'installe au XXème siècle entre hasard et déterminisme, et devient un véritable *themata*. A la fin du XIXème les enjeux philosophiques prévalaient dans les débats à ce sujet, mais avec l'avènement de la stochasticité et du chaos, ce thème s'est métamorphosé en une problématique scientifique. Tous ces éléments, fruits d'un cheminement intellectuel très complexe, s'inscrivent en rupture de la vieille dichotomie hasard et déterminisme, et offrent une vision du monde plus complexe.

Pour ajouter à cette diversité peut-être faudrait-il également se demander si le chaos n'est pas lui-même en train de devenir un *themata*. Les positionnements variés adoptés par les scientifiques entre 1975 et 1982, nous laissent penser qu'il est pertinent de poser cette question et ils ouvrent un champ problématique non exploré par les historiens et les épistémologues.

Enfin, il convient de mentionner que l'épisode d'émergence du chaos correspond à une période de débats sur ces trois *themata*, rappelant d'ailleurs ceux de la fin du XIXème siècle. L'opposition entre R. Thom et I. Prigogine autour de 1980 cristallise une partie des enjeux philosophiques de cette science du chaos.

En effet, en 1979, Prigogine a fait paraître, avec I. Stengers, La Nouvelle Alliance [1226], réflexion philosophico-scientifique appelant à une reconsidération du "dogme" de la science classique, déterministe, mécaniste. L'argumentaire développé est fortement inspiré par les nouvelles théories sur la stochasticité et la Mécanique statistique [1227]. Sur ces exemples, Prigogine et Stengers concluent à un "nécessaire" abandon du déterminisme, à la prise en compte de l'irréversibilité et du temps dans la théorie

[1226] [PRIGOGINE, I., STENGERS, I., 1979].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

physique, à une pensée "complexe".

A l'opposé de ces convictions, le mathématicien R. Thom réagit en publiant un article "Halte au hasard, silence au bruit" défendant très vigoureusement le déterminisme et condamnant les positions non déterministes comme "anti-scientifiques" [1228] . Le sujet est sensible et montre que le déterminisme est un *themata* bien ancré, et très tranché, dans les épistémologies scientifiques. Le débat lancé par Thom se poursuit pendant quelques années et Ruelle intervient dans les controverses avec "Hasard et déterminisme : le problème de la prédictibilité" [1229] .

Les polémiques entre Thom et Prigogine sont imprégnées des questionnements de fond à propos du chaos et de la stochasticité. Elles cristallisent deux visions opposées du monde et de la science. Le débat nous paraît également montrer la difficulté de positionner philosophiquement ces nouvelles conceptions **entre** le hasard et le déterminisme. Prigogine a tendance à projeter ces enjeux sur l'indéterminisme (rappelant en cela les idées de Brillouin) ; Thom choisit l'option déterministe, à mettre en perspective avec l'histoire des systèmes dynamiques (à laquelle il a participé) ; Ruelle se positionne en "statisticien", insistant sur l'instabilité qui transcende cette dichotomie, et reste prudent et réservé quant aux positions de Prigogine.

En définitive, ce pan de l'histoire du chaos nous aura montré dans quelle mesure les positionnements philosophiques, mis en valeur judicieusement avec les *themata*, informent la pensée scientifique. Comme certains commentateurs l'ont affirmé, on peut voir les débats plus récents comme le fruit de la tentation de produire un discours philosophique à partir des nouveautés de la science. Nous préférons dire qu'ils traduisent un malaise vis-à-vis de nouvelles conceptions scientifiques qui ne rentrent pas dans les cadres philosophiques et épistémologiques standard.

[1227] Pour s'en donner une idée, disons que les préoccupations de J. Ford nous paraissent les plus proches de ces considérations. Prigogine utilise la transformation du Boulanger comme exemple paradigmatique de la stochasticité et de l'inséparabilité des perspectives dynamiques et probabilistes dans leur description. Tout ceci s'appuie sur un ensemble de travaux mathématiques réalisés avec des collaborateurs de Prigogine. Misra, Prigogine et Courbage publient notamment : "From deterministic to probabilistic descriptions" [MISRA, B., PRIGOGINE, I., COURBAGE, M., 1979], puis spécifiquement sur les systèmes de Bernoulli : "On the equivalence between Bernoulli dynamical systems and stochastic Markov processes" ([COURBAGE, M., MISRA, B., 1980]). Pour mettre davantage en perspective ces idées, il faut rappeler que Prigogine est investi depuis les années 1960 dans les théories de la mécanique statistique, et de la thermodynamique. Nous renvoyons à notre chapitre 10 (page 630) où les rapports entre ses préoccupations thermodynamiques, les "structures dissipatives" et la mécanique statistique sont présentés.

[1228] Les participations au débat, dont les notes de Thom et les réponses de Prigogine, ont été publiées dans Le Débat, et font l'objet d'une publication les regroupant, intitulée La querelle du déterminisme, [POMIAN, K., 1994] : "Halte au hasard, silence au bruit" de R. Thom (p. 61-78), la réponse de I. Prigogine "Loi, histoire… et désertion" (P. 102-112). On peut également consulter, dans le même volume : "La querelle du déterminisme, six ans après" de I. Prigogine et I. Stengers (p. 247-265) et "En guise de conclusion" de R. Thom (p. 138-149).

[1229] Ibid., p. 153-162.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Quatrième partie. Les pratiques du non linéaire et du chaos

PRÉLIMINAIRE

Les mathématiques qualitatives et la topologie interviennent à différents niveaux dans l'histoire du chaos, dans les conceptualisations proposées entre 1975 et 1982 mais également bien avant, au cœur des mathématiques des systèmes dynamiques et de la théorie des oscillations. L'abstraction règne souvent dans ces recherches, comme celles conduites à l'IHES ou par l'école de Lefschetz, et a permis la construction d'objets mathématiques tels que les attracteurs étranges, avec Ruelle et Takens. Les relations aux sciences empiriques et à la technique restent assez lointaines dans les exemples que nous avons abordés jusqu'à présent. L'historiographie dans son ensemble participe à ce maintien d'une distance et plus souvent encore d'une subordination de la technique à ces théorisations.

Pourtant, le contexte de l'URSS, assez peu étudié et pour lequel il reste beaucoup de zones d'ombres, devrait inciter à plus de considérations. La notion de "système grossier" a été mise en exergue car elle a généré des efforts de recherche sur la modélisation et les mathématiques des systèmes dynamiques. Mais rappelons le, elle est le produit d'une

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

interrogation de physiciens. Peut-on imaginer d'autres conceptions, d'autres travaux résultant de ces interactions entre mathématiques et physique ?

Nous allons montrer dans cette partie que, dans des contextes plus accessibles à l'historien que celui de l'URSS, les relations à l'empirisme et à la technique ont été déterminantes dans l'émergence de la science du non linéaire et du chaos. Des pratiques scientifiques multiples ont été façonnées au cours du XXème siècle et ont autorisé ces mathématiques à se perpétuer et à s'impliquer dans la théorie des oscillations non linéaires et dans la théorie des oscillations chimiques. Dans ces pratiques nous retrouverons plusieurs constantes dont l'omniprésence du calcul et des raisonnements par analogie. Vu l'importance de la pratique du calcul et des analogies dans l'effort de 1975 à 1982, cela n'a rien d'étonnant *a priori*.

Dans les trois chapitres qui suivent nous allons analyser différentes pratiques aux répercussions majeures dans la science du non linéaire et du chaos. Dans le premier nous nous focaliserons sur le calcul analogique. Il se développe de manière importante à partir des années 1930, au moment de l'émergence des oscillations non linéaires, avec Van der Pol notamment. Grâce à l'analyse des travaux de Minorsky, et quelques autres exemples dans l'après seconde guerre mondiale, nous comprendrons comment le calcul analogique a permis le développement occidental des recherches sur les oscillations non linéaires et en partie sur le chaos.

Dans un second chapitre, nous montrerons la percée du calcul numérique électronique dans les mathématiques. Avec Ulam se développe une pratique des "expériences de mathématiques", dont l'influence a été importante. Lorenz profite également de l'utilisation courante des ordinateurs en météorologie pour parvenir à ses travaux célèbres de 1963-64. Le dernier chapitre de cette partie est consacré à une étude de cas, celui de la chimie des oscillations et de la réaction de Belousov-Zhabotinsky. Rappelons que ces dispositifs sont les premiers systèmes expérimentaux testés vers 1980 à propos de la reconstruction des attracteurs étranges. Ils sont également au cœur des conceptions de Rössler. Grâce à une analyse historico-épistémologique nous montrerons le cheminement des concepts et des pratiques qui ont abouti aux développements spectaculaires postérieurs à 1975.

CHAPITRE 8. LES OSCILLATIONS NON LINÉAIRES ET LES ANALOGIES

Les premières recherches importantes sur les oscillations non linéaires ont émergé dans les années 1930, avec Van der Pol et Andronov. Si elles sont à l'origine de la théorie générale des oscillations, elles ne se limitent pas aux mathématiques des équations différentielles détaillées au chapitre 6 : ces travaux ont d'abord contribué à façonner deux approches et deux pratiques des oscillations. Les idées de Van der Pol vont, en effet, irriguer les études sur le sujet en Europe occidentale, en France notamment, avec les "oscillations de relaxation" et ses analogies mathématiques. Andronov a généré une

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

culture des "auto-oscillations", moins étudiée du fait des problèmes de langue et de distance des archives. La comparaison est instructive et nous permettra de comprendre pourquoi les conceptions de Van der Pol sont les seules à être reprises, hors d'URSS.

Par la suite nous chercherons à expliquer le processus de diffusion des idées d'Andronov aux Etats-Unis. Ici l'analogie et le calcul analogique ont une place très particulière et c'est en mettant en évidence le rôle de l'ingénieur N. Minorsky et ses "analogues dynamiques" que nous comprendrons en quoi ces pratiques ont été déterminantes. Enfin, les interactions entre les mathématiques de Poincaré et le calcul s'opèrent dans au moins deux contextes favorables que nous analyserons : la "dynamique théorique" au sein du groupe de physiciens français du CNRS dirigé par Théodore Vogel, et le groupe du japonais Chihiro Hayashi. Ainsi, leurs résultats sur les oscillations non linéaires, notamment les " oscillations aléatoires" et l'"attracteur japonais" de Ueda, pourront être mis en perspective avec le développement des pratiques du calcul scientifique.

8.1. Les années 1930 et la théorie des oscillations

Les années 1930 sont le creuset des pratiques qui vont prendre de l'importance à partir des années 1940, sur le plan des analogies et des mathématiques. Dans un premier temps, il paraît nécessaire de resituer le développement des questions d'oscillation, dans les nouveaux enjeux techniques.

a. Les nouveaux enjeux techniques

Les questions d'oscillations non linéaires émergent après la première guerre mondiale ; de nombreux physiciens et mathématiciens s'y intéressent en France, à partir de 1919 [1230] : Un des premiers systèmes construits et répondant à ces besoins date de 1919 : le multivibrateur des physiciens français Abraham et Bloch [1231] . L'espoir de développements nouveaux en télécommunications réside dans les potentialités de la radiophonie. Cela nécessite le développement de dispositifs capables de générer des oscillations de fréquences variables, facilement utilisables et contrôlables.

Un changement technique, fondamental pour ce qui touche aux oscillations, intervient avec le développement des **lampes triodes** au début du XXème siècle [1232] . Elles permettent de confectionner des dispositifs élaborés, des amplificateurs, mais introduisent une composante inhabituelle : **une non linéarité**. Les équations mathématiques

[1230] Nous avons réalisé une analyse systématique des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, pour suivre le développement, en France, de la question des oscillations non linéaires, de 1900 à 1940. En France, la radio se développe depuis 1910, grâce à l'action du général Ferrié. Il s'entoure de remarquables physiciens et ingénieurs, dont Henri Abraham, Eugène Bloch, Léon Brillouin, qui permettront un développement de l'industrie radioélectrique. Pour de plus amples détails, nous renvoyons à l'ouvrage sur l'histoire de l'électricité en France. [LEVY-LEBOYER, M., MORSEL, H., 1994], p. 455-70 (ce second tome couvre la période 1914-39 ; voir le chapitre III : "L'évolution scientifique et technique").

[1231] Henri Abraham (1868-1943) est alors le directeur du département de physique de l'ENS, Eugène Bloch sera son successeur. Abraham est connu pour la lampe T.M., une des premières lampes triode. (Voir note précédente, n° 1230).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

permettant de modéliser le comportement des circuits sont modifiées, au point de devenir difficilement intégrables. La situation rappelle celle de Léauté sur un point : l'introduction de non linéarité rend impossible un traitement simple des systèmes mathématiques. C'est, en fait, à travers le domaine de la régulation des machines, de la radio, et aussi de l'horlogerie, que le non linéaire s'installe, mais les enjeux dans la radiotechnique sont plus importants et, comme le dit Van der Pol, les ingénieurs de la radio sont confrontés presque tous les jours à des phénomènes que la théorie linéaire ne peut faire comprendre [1233] .

Pour étudier ces phénomènes, les calculs sont approchés, numériquement ou graphiquement, et l'analyse mathématique est fastidieuse et limitée [1234] . Ces limites sont le lot commun des astronomes, cherchant à calculer différentes éphémérides, à partir des équations de la Mécanique céleste, irrémédiablement non linéaires. Les développements perturbatifs sont alors l'unique moyen de faire des prédictions. Les méthodes développées par Poincaré permettent de résoudre quantitativement et qualitativement certains problèmes, mais elles ne pénètrent le domaine des oscillations non linéaires qu'avec l'impulsion d'Andronov.

Il faut encore préciser que les systèmes électroniques possèdent des propriétés différentes des systèmes de la Mécanique (céleste en particulier) : les échelles de temps. Les phénomènes électroniques jouent sur des fractions de seconde, propulsant presque instantanément le circuit dans son état asymptotique, sans comparaison avec les échelles de temps astronomiques. Ce qui implique que l'analyse mathématique soit concentrée sur l'état asymptotique plutôt que sur le régime transitoire. En outre, les techniciens de la radio sont intéressés par la stabilité des régimes oscillants, leur période, leur amplitude et sont demandeurs de précision dans ces évaluations.

Enfin, il ne s'agit pas seulement d'une question de renouvellement de méthodes mathématiques. Pour reprendre Diner, depuis le XIXème siècle, les phénomènes d'oscillations s'inscrivent dans le paradigme de l'oscillateur harmonique, prototype de l'oscillation linéaire. Les phénomènes physiques oscillants sont analysés à partir de ces comportements périodiques simples : l'analyse harmonique ou analyse de Fourier, est le prototype même de cette démarche. Avec l'ouvrage célèbre de Lord Rayleigh, Theory of Sound, de 1877, cette analyse linéaire est à son apogée. Le cadre scientifique et épistémologique du début du XXème siècle est ainsi fixé et nous permettra de saisir les transformations induites par les techniques de la radio.

[1232] Lee de Forest a inventé la lampe à trois électrode (ou triode) en 1906. Elle a transformé la Télégraphie sans Fil (TSF). Plus généralement, les lampes représentent l'introduction de l'électronique et l'essor d'une nouvelle filière technique en matière d'électricité. [LEVY-LEBOYER, M., MORSEL, H., 1994], p. 453 et suivantes. Voir également [ESCUDIE, B., GAZANHES, C., TACHOIRE, H., TORRA, V., 2001], (Chapitre 9) pour son influence dans les dispositifs d'analyse harmonique.

[1233] "[…] many oscillation phenomena which the radio worker almost daily encounters, and which cannot be understood on the basis of the elementary linear theory.", [VAN DER POL, B., 1934], p. 1052.

[1234] Pour les réflexions sur les problèmes de calcul, leur place entre théorie et expériences et les débats épistémologiques, nous renvoyons à [LEVY-LEBOYER, M., MORSEL, H., 1994], p. 442-452.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

b. Vers les oscillations de relaxation de Van der Pol

Les travaux de Balthasar Van der Pol (1889-1959) sont décisifs dans la mutation des années 1930. Il s'est fait une spécialité des analyses des dispositifs électroniques de la radio. Il a été formé à la physique à l'université d'Utrecht, a passé deux années à Cambridge chez J.J. Thomson, puis est retourné en Hollande, chez H.A. Lorentz. En 1920 il achève sa thèse sur la propagation des ondes radio dans un gaz ionisé, réalisée sur la base d'expériences faites à Cambridge [1235] . Il est embauché chez Philips en 1922, où il fait le reste de sa carrière et mène des recherches pour lesquelles il aime à mêler le travail de conception de l'ingénieur, du physicien et du mathématicien.

Dès 1920 il s'engage (avec E. Appleton) dans une "théorie non linéaire générale" [1236] pour les générateurs à triode, analysant les propriétés de stabilité des oscillations et leurs conditions de production, combinant les développements approchés aux résolutions graphiques. Son analyse de 1926 va induire l'idée d'un **mécanisme général** des "oscillations de relaxation" lui permettant de **multiplier les analogies et de proposer une pratique nouvelle**. Le cadre de l'analyse harmonique est dépassé à tous les niveaux.

Au départ, en 1926, il s'agit d'étudier l'équation d'oscillation d'un circuit à triode [1237] :

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0\,.$$

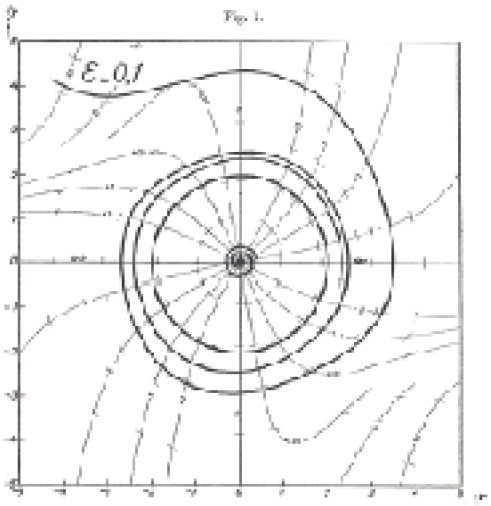
Dans les conditions habituelles d'expérimentation le paramètre correspond à $\varepsilon<<1$; Van der Pol cherche ce qui peut se passer pour $\varepsilon>>1$. Par les mathématiques il s'engage en quelque sorte à faire cette expérience, qu'il n'envisage pas, dans un premier temps, de réaliser électroniquement. Il ne parvient qu'à établir des solutions graphiques, dont voici le premier exemplaire :

[1235] Biographie de H.B.G. Casimir dans [VAN DER POL, B., 1960a], p. VII. A Cambridge il travaille avec Edward Appleton (1892-1965), prix Nobel de Physique en 1954 (pour ses études sur la haute atmosphère). Entouré des prix Nobel J.J. Thomson (1906) et H.A. Lorentz (1902), on peut raisonnablement dire que Van der Pol a eu une formation des plus idéales.

[1236] "A general non-linear theory of a simple generator is developed, from which the possible and stable amplitudes of the generator may be determined when the form of the oscillation characteristic is given.", [VAN DER POL, B., APPLETON, E.V., 1921], p. 192. Les principaux articles en relation avec le sujet sont : [VAN DER POL, B., 1920], [VAN DER POL, B., APPLETON, E.V., 1921 / 1922].

[1237] Son premier article sur le sujet, "On "relaxation oscillations"", est une étude assez complète, qu'il reprendra dans beaucoup de ses interventions ultérieures. L'équation se trouve dans [VAN DER POL, B., 1926], p. 979. Depuis, du fait de ses propriétés étranges découvertes par le physicien néerlandais, elle est appelée "équation de Van der Pol".

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est



[VAN DER POL, B., 1926], p. 985.

Bien que Van der Pol connaisse une partie des travaux de Poincaré [1238] , il ne fait pas le rapprochement avec un cycle limite de Poincaré. Par une analyse qualitative de la physique du phénomène, il explique le comportement oscillant : celui-ci a une période qui décroît asymptotiquement, comme un phénomène de relaxation, et il est baptisé "oscillation de relaxation".

La notion d'oscillation de relaxation, en 1926, est directement liée à l'équation qu'il considère comme "l'équation générale pour les oscillations de relaxation" [1239] . C'est ce qui l'engage à rechercher des phénomènes électriques soumis à la même équation, ce qu'il juge facile à faire : il reprend le multivibrateur d'Abraham et Bloch, construit un second dispositif et imagine déjà que les oscillations des tubes néons pourront rentrer dans cette catégorie [1240] .

Rapidement, dans l'esprit de Van der Pol, les oscillations de relaxation ont une certaine généralité. En 1930, invité à une conférence à Paris [1241] , Van der Pol fait un rapide inventaire montrant l'importance de ces oscillations. Il y affirme :

"Une oscillation de relaxation a lieu, d'une manière générale, toutes les fois qu'un mécanisme, contenant une source d'énergie continue, permet à un phénomène essentiellement apériodique de se répéter automatiquement un nombre infini de fois. Un grand nombre de phénomènes des plus familiers rentrent dans ce schéma, par exemple : le grattement d'un couteau sur une assiette, le grincement d'un tiroir ou d'une porte, la claquement d'un drapeau, le chant d'une bouilloire, d'un tuyau de distribution d'eau, la ligne pointillée qu'on peut faire à la craie sur

[1238] En 1928 il a publié une étude de la stabilité dans l'équation de Mathieu, dans laquelle il reprend des méthodes de Poincaré issues des Méthodes Nouvelles, [VAN DER POL, B., STRUTT, M.J.O., 1928].

[1239] Voir note suivante, n° .

[1240] [VAN DER POL, B., 1926], paragraphe 6 et 7. "Now that the general equation (4) for relaxation-oscillations is known, it is easy matter to devise further electrical systems of the same type", ibid., p. 991.

[1241] 11 mars 1930 à l'Ecole Supérieure d'Electricité, publiée dans [VAN DER POL, B., 1930].

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

un tableau noir...etc." [1242]

Van der Pol propose beaucoup d'analogies. Elles reposent sur deux éléments : un mécanisme général et l'indépendance des modèles mathématiques par rapport au support matériel des oscillations. En conclusion de son intervention, il résume son projet :

"J'espère avoir ainsi montré comment l'étude des principes mathématiques qui gouvernent un mode de fonctionnement très général dans la nature, conduit à relier entre eux un grand nombre de phénomènes particuliers qui paraissent, à première vue, étranger les uns aux autres" [1243]

En réalité, Van der Pol suggère des rapprochements plus qu'il n'approfondit ces relations, mais il donne un exemple particulièrement détaillé : le battement du coeur. En effet, il publie en 1928, avec J. Van der Mark, un article sur "Le battement du coeur considéré comme oscillation de relaxation et un modèle électrique du coeur" [1244] . Le "modèle électrique du coeur" est un système de trois circuits de relaxation couplés, représentant trois parties du coeur : sinus, oreillette et ventricule. Le dispositif permet de simuler des électrocardiogrammes, et d'imaginer des anomalies dans le rythme cardiaque.

La démarche est particulièrement intéressante : on ne s'intéresse qu'aux oscillations du système, pas au fonctionnement biologique du coeur et le modèle électrique n'a pas prétention à représenter le mécanisme cardiaque, mais seulement à l'imiter. L'analogie porte sur la **dynamique** des systèmes cardiaques / électriques laquelle est sous-tendue par l'équation mathématique des oscillations de relaxation.

Pour Giorgio Israël, Van der Pol témoigne de conceptions modélistes nouvelles, en construisant un **modèle sous forme d'analogie mathématique**. Nous pensons avec lui, que Van der Pol fait abstraction du mécanisme biologique et qu'il modélise le coeur comme un ensemble d'équations de relaxations, permettant de reproduire ses comportements. Mais si Israël s'intéresse surtout à la question de la modélisation, nous ne pouvons pas considérer ici que la modélisation soit une fin en soi. En effet, il ne faut pas perdre de vue que la simulation est l'objectif premier et que **l'analogie est construite avec l'espoir d'imiter la dynamique du coeur**. En 1960, dans sa courte biographie de Van der Pol, le physicien Hendrik Casimir affirmait :

"Avec Van der Mark, il a conçu un circuit dont les oscillations imitent au plus près un électrocardiogramme […] Ce travail, outre qu'il montre l'intérêt de Van der Pol pour la médecine, fournit un exemple d'une tendance qui est présente à travers tout son travail : la tendance à chercher des phénomènes différents qui sont décrits par les mêmes équations. Cette façon de pensée conduit souvent à des 'ordinateurs analogiques' pratiques." [1245]

Casimir pointe une originalité de l'approche de Van der Pol : la pratique de l'analogie, si elle constitue une démarche générale chez Van der Pol, ne doit pas être déconnectée des

[1242] ***[VAN DER POL, B., 1930], p. 586.***

[1243] ***[VAN DER POL, B., 1930], p. 598.***

[1244] L'article est publié dans L'onde électrique en français, comme compte rendu d'une conférence donnée par Van der Pol, à Paris le 24 mai 1928 (à l'invitation de la Société des Amis de la T.S.F., de la Société Française des Electriciens et de la Société de Biologie). [VAN DER POL, B., VAN DER MARK, J., 1928].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

possibilités de conduire au calcul et à la simulation. Van der Pol le signifie particulièrement bien dans la conférence de 1930. En comparant les relevés expérimentaux de trois évolutions dynamiques, le régime permanent d'une triode, une population de drosophiles et la croissance d'un tournesol, il conclut :

"La ressemblance intime de ces phénomènes, physiquement si dissemblables, mais mathématiquement analogues, ne saurait être niée. Il est donc très vraisemblable que des problèmes de population plus compliqués, dont la solution analytique serait difficile à obtenir (nous en verrons d'autres exemples par la suite) pourront être résolus expérimentalement en laboratoire à l'aide des oscillations des lampes triodes. Car dès que nous sommes assurés que nos équations représentent correctement un certain problème de population, il est le plus souvent assez simple d'établir un réseau électrique comprenant des lampes et satisfaisant à ces équations, et comme il est beaucoup plus facile d'expérimenter avec des courants électriques qu'avec la matière inerte (sans parler de la matière vivante) la méthode électrique suggérée ci-dessus peut être utilisée avec avantage." [1246]

Cette citation souligne le **renversement épistémologique**, parfaitement assumé par Van der Pol, réalisé grâce à l'analogie mathématique et à l'analogie avec les circuits électroniques. A propos du battement du coeur, on peut donc voir la démarche de Van der Pol comme la construction d'un modèle mathématique, il nous paraît plus intéressant de le comprendre comme un "modèle électrique" et la réalisation d'une simulation analogique du coeur reposant sur une analogie mathématique.

En tout cas, par ces analogies mathématico-électriques, Van der Pol complète sa théorie non linéaire mathématique un peu rudimentaire et il donne les moyens d'analyse des dynamiques non linéaires et des oscillations de différents phénomènes naturels. C'est la meilleure expression de l'alchimie entre physique, mathématique et ingénierie électrique produite par Van der Pol.

Van der Pol n'a jamais recours à l'oscillateur harmonique et n'envisage même pas d'établir un spectre de Fourier de l'oscillation. Ceci illustre une prise de conscience du fait que les phénomènes non linéaires ne peuvent pas être correctement expliqués par ces outils typiques du linéaire, ainsi que son analyse mathématique l'a montré. Pour mieux signifier le changement, il nous paraît pertinent d'affirmer que dans l'esprit de Van der Pol l'oscillation de relaxation joue, pour les oscillations non linéaires, le rôle que l'oscillateur harmonique a dans la théorie linéaire.

Van der Pol introduit donc une pratique de l'analogie dans l'étude des oscillations. Le parallèle avec Otto Rössler nous paraît facile à faire, même si de multiples développements en théorie des oscillations le séparent de Van der Pol. En outre, le calcul

[1245] ***"Together with Van der Mark he designed a circuit whose <u>oscillations closely imitate</u> an electro-cardiogram. [...] This work, besides showing Van der Pol's medical interests, affords an example of a tendency that is present throughout his work : the tendency to look for different phenomena that are described by the same equations. This way of thinking often leads to practical 'analogue computers'.", [VAN DER POL, B., 1960a], p. VIII, introduction de Casimir (nous mettons en évidence).***

[1246] ***[VAN DER POL, B., 1930], p. 578 (nous mettons en évidence).***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

analogique électronique n'en est qu'à ses balbutiements dans les années 1930 et la démarche de Van der Pol reste limitée par le développement technique.

Absentes des travaux de Van der Pol, les méthodes de Poincaré intègrent l'étude des oscillations durant le plein développement des oscillations de relaxation. Ce moment est associé, au départ, à des questions de physique : il s'agit des travaux de l'école d'Andronov, dont nous n'aborderons pas les aspects relatifs à la modélisation, renvoyant pour cela à au chapitre 6.

c. Les "auto-oscillations", en URSS

Dans le contexte de la Russie puis de l'Union Soviétique, une autre approche des systèmes non linéaires est née, connue sous le nom d'"école d'Andronov". En réalité, le premier scientifique russe ayant impulsé une culture du non linéaire est Leonid Mandelstam (1879-1944), maître d'Andronov. En particulier, avec N. Papalexi, Mandelstam a contribué à la théorie du multivibrateur et d'autres systèmes oscillants de l'électrotechnique [1247] . Mandelstam a fait ses études universitaires et a travaillé à Strasbourg, pendant plusieurs années (1899-1914), chez Karl Braun (1850-1918) lequel s'est intéressé lui-même aux problèmes de la TSF et aux circuits électriques oscillants [1248] . Selon Diner, Mandelstam s'était fait le champion d'une approche "vibratoire" de la physique et souhaitait la création d'une véritable "pensée physique non linéaire". Il va faire école à Moscou avec les physiciens Andronov, Vitt, Khaikin et bien d'autres [1249] .

Andronov, lancé sur les traces de Mandelstam, va faire un pas décisif et contribuer à l'émergence d'un nouveau "paradigme" pour les oscillations. En 1929, il reconnaît que les oscillations, comme celles de Van der Pol, correspondent, dans l'espace des phases, à un cycle limite de Poincaré, ouvrant ainsi la voie à l'utilisation des théories mathématiques de Poincaré, mais aussi de Lyapounov et Birkhoff. Selon Diner, Andronov va tout de suite attribuer un caractère très général à ces oscillations, baptisées "auto-oscillations", qui ont des propriétés particulières : l'amplitude et la fréquence des oscillations ne dépendent pas des conditions initiales, il n'y a pas besoin d'une excitation périodique extérieure, la dissipation est compensée par la source d'énergie extérieure, contrôlée par rétroaction [1250] . Une telle combinaison peut donner naissance à des phénomènes beaucoup plus compliqués que l'oscillateur harmonique et les oscillations de relaxation. Andronov, installé à Gorki à partir de 1931, cherche à développer et à promouvoir une théorie générale de ces oscillations : nous avons vu qu'une des particularités du pan théorique de cette activité mathématique tient à son caractère **qualitatif**.

L'ambition d'Andronov est difficilement comparable à celle de Van der Pol et

[1247] Ils continuent dans les années 1930, sur les oscillations de relaxation notamment, les démultiplications de fréquences et d'autres sujets : [MANDELSTAM, L., PAPALEXI, N., 1932].

[1248] Pour ces travaux, Karl Braun a eu le prix Nobel en 1909.

[1249] Voir [DINER, S., 1992], p. 339.

[1250] [ANDRONOV, A., 1929], p. 560. Voir [DINER, S., 1992], p. 340.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'aboutissement théorique de l'ouvrage Théorie des oscillations de 1937, n'a rien de commun avec les calculs de Van der Pol. Les analogies de Van der Pol semblent même plutôt timides à côté de la notion, voulue très générale, d'auto-oscillation. Le terme de paradigme n'est peut-être pas trop fort pour signifier l'importance de l'évolution. Cependant, ces analyses partagent un point commun incontestable : elles sont le fruit de scientifiques préoccupés de physique, de technique et de mathématiques. En résumé, il se construit en URSS, un **paradigme des auto-oscillations**, reposant sur des **moyens théoriques** associant qualitatif et quantitatif, et une **vision du monde** très éloignée du "monde linéaire". Dans la pratique, il est bien difficile d'évaluer la place du calcul et de l'analogie : les seules "archives" dont nous disposons se limitent à quelques publications éparses, et ce pôle de développement mériterait une vraie analyse historique et épistémologique. Cependant, vu la perspective de mathématiques très poussées, développée pour les systèmes dissipatifs, tout incite à penser qu'il existe une interaction très forte entre mathématique, physique et technique, à l'image de ce que feront Minorsky ou Vogel quelques années plus tard [1251] .

d. Les oscillations en France dans les années 1930

La France est au carrefour des réflexions de Van der Pol et de celles d'origine soviétique, avec Andronov, Kryloff et Bogoliuboff. Nous pouvons légitimement nous interroger sur l'activité déployée en matière d'oscillations non linéaires. En effet, Van der Pol est en communication régulière avec la communauté française des physiciens. Malgré quelques publications en Europe, le travail réalisé à Gorki, reste confiné à l'URSS, et ne sera traduit de manière extensive que dans les années 1940. Cependant, deux notes aux Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris, portent à la connaissance des physiciens occidentaux l'idée d'auto-oscillations. En 1929, Andronov annonce le parallèle entre auto-oscillations et cycles limites, expliquant quelles méthodes de Poincaré peuvent être utiles [1252] . En 1930, Andronov et A. Vitt transmettent une note "Sur la théorie mathématique des auto-oscillations", dans laquelle ils affirment que les "mouvements stationnaires des systèmes auto-oscillatoires sont des *mouvements récurrents de Birkhoff* [que des] considérations physiques conduisent à exiger que le mouvement auto-oscillatoire possède une *stabilité à la Lyapounov*" et expliquent que la recherche des solutions périodiques peut s'inspirer des Méthodes Nouvelles de Poincaré [1253] . En outre, toutes ces contributions occidentales, ainsi que les résultats de Van der Pol semblent s'intégrer facilement dans les travaux soviétiques.

En étant concis, il faut bien avouer que l'innovation théorique n'est pas à la hauteur des propositions de Van der Pol, encore moins de celles des soviétiques. Au fond, les travaux français naviguent au gré des apports théoriques extérieurs, tout en contribuant

[1251] Nous abordons les analyses de Minorsky page 533, et celles de Vogel page 551.

[1252] [ANDRONOV, A., 1929]. Comme exemple d'oscillations auto-entretenues, Andronov cite les oscillations de Van der Pol, les systèmes de Lotka, les oscillations chimiques, le pendule de Froude.

[1253] [ANDRONOV, A., WITT, A., 1930], p. 256-7 (en italique dans le texte).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

d'une part aux développements expérimentaux et d'autre part aux aspects très mathématiques.

En outre, à côté de quelques notes éparses sur les oscillations électriques, la recherche sur le sujet dans les années 1930, est pratiquement cadrée par le "paradigme" de Van der Pol, c'est-à-dire qu'il y a, d'un côté, les oscillations harmoniques, de l'autre les oscillations entretenues, dites de relaxation. Ceci aide à comprendre la présence régulière de Van der Pol en France et le relatif engouement pour les oscillations de relaxation ; l'enthousiasme de Van der Pol par rapport à ses oscillations n'est certainement pas étranger au développement d'études mathématiques sur le sujet en France. L'ingénieur Philippe Le Corbeiller est le meilleur avocat des oscillations de relaxation en France [1254]. D'autres scientifiques déjà cités, y participent : Jules Haag est certainement le plus prolifique avec ses multiples articles sur l'"étude asymptotique des oscillations de relaxation" [1255] ; en 1928, Alfred Liénard [1256] reprend l'équation de Van der Pol pour proposer une méthode géométrique permettant de construire le cycle correspondant à l'oscillation du système ; sans compter les études plus mathématiques de Dulac ou Denjoy [1257] et les analyses d'Yves Rocard [1258].

Mais il est un point étonnant : la notion de cycle limite n'est quasiment pas reprise dans les travaux sur les oscillations non linéaires, ni en France, ni par Van der Pol. Le plus souvent il s'agit d'une mention de la note d'Andronov, combinée à la reproduction de la figure du "cycle limite" de Van der Pol [1259]. En parfait accord avec ce constat, il faut reconnaître que nulle part les méthodes qualitatives de Poincaré ne sont utilisées, malgré les remarques d'Andronov et Vitt. On pourrait penser que ces aspects ont été trop timidement présentés, mais le cas des travaux de Kryloff et Bogoliuboff réfute cette idée. D'une part, la "Mécanique non linéaire" de Kiev, ne souffre pas d'une diffusion réduite. Nicolas Kryloff est correspondant de l'académie des sciences et il y fait paraître des notes régulières sur les méthodes mathématiques de la physique, bien avant que ces questions d'oscillations non linéaires ne se développent [1260]. Dans les années 1930, avec Bogoliuboff les notes et articles, intégralement en français, sont nombreux sur les

[1254] Outre l'analyse [LE CORBEILLER, P., 1932], Le Corbeiller (Ingénieur en chef des télégraphes au Laboratoire National de radio-électricité) a donné une conférence au CNAM en 1931 (6-7 Mai) sur "Les systèmes auto-entretenus et les oscillations de relaxation", publié dans [LE CORBEILLER, P., 1931].Van der Pol a beaucoup d'estime pour Le Corbeiller, qui semble être le contact et le relais de ses travaux en France, lorsqu'il ne s'y déplace pas lui-même.

[1255] Longue étude publiée en 1943, qui contient une synthèse de ses analyses mathématiques : [HAAG, J., 1943]. Pour les travaux antérieurs, voir [HAAG, J., 1934 / 1936 / 1937 /1938].

[1256] [LIENARD, A., 1928]. Voir également le chapitre 6, p. 405.

[1257] Nous renvoyons au chapitre 6, p. 406.

[1258] Voir page 548.

[1259] Haag utilise la notion de cycle limite mais pour mieux se focaliser sur un perfectionnement des méthodes de Liénard : [HAAG, J., 1934 / 1936].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

oscillations non linéaires, traitant de divers sujets, aussi bien expérimentaux que d'analyse mathématique. Leur projet général est "d'attirer l'attention des chercheurs sur les fondements de la "Mécanique non linéaire" dans leurs applications à la radiotechnique" [1261] . D'autre part, la situation est assez étonnante puisque pratiquement aucun français ne semble s'y intéresser. Jules Haag, idéalement placé pour reprendre ces méthodes, développe ses propres approches asymptotiques. Van der Pol les découvrent assez tardivement (bien après 1930) et n'en a pas repris les travaux pour autant.

L'hypothèse que tous ces développements soient passés inaperçus ne tient pas, au moins pour les années antérieures à 1934. Après 1934, la situation est plus compréhensible : les textes sont publiés essentiellement en russe et peu sont sortis d'URSS. Ce qui ne veut pas dire que rien n'a été publié hors d'URSS, puisque Kryloff et Bogoliuboff éditent leur célèbre travail sur la théorie de la mesure appliquée à la Mécanique non linéaire, en 1937 dans Annals of Mathematics [1262] . Plusieurs hypothèses sont imaginables et, signalons le tout de suite, les aspects politiques n'ont vraisemblablement pas joué ici : leur origine "soviétique" ne paraît pas avoir été un frein. Le manque de repères par rapport aux travaux de Poincaré pourrait l'expliquer [1263] . Les scientifiques se sont désintéressés de ces travaux peut-être parce qu'ils ont eu des difficultés à se les approprier ou parce qu'ils n'en ont pas saisi l'importance.

Il peut s'agir aussi d'un manque d'intérêt pour une perspective qualitative, notamment dans le cas des auto-oscillations d'Andronov, mais qui n'explique rien en ce qui concerne les méthodes très quantitatives de Kryloff et Bogoliuboff. Un certain cloisonnement entre physiciens et mathématiciens pourrait être mis en cause, mais il paraît bien difficile de maintenir cette distinction avec des scientifiques comme Haag en France, et bien sûr Van der Pol. Rappelons que la recherche française avant la seconde guerre mondiale est un peu moribonde et les relations entre scientifiques et industriels ne sont pas courantes [1264] , le contexte général n'est pas favorable à un véritable élan scientifique sur quelque sujet que ce soit. Cependant, sur les questions d'électricité, le nombre de physiciens et de mathématiciens engagés est assez élevé. Par ailleurs, Van der Pol bénéficie d'un environnement industriel propice et profite du réseau scientifique français. Le cadre institutionnel défaillant ne donne pas d'explication satisfaisante.

[1260] Depuis la fin de la première guerre mondiale, à peu près.

[1261] [KRYLOFF, N., BOGOLIUBOFF, N., 1933], p. 19 (publié dans la Revue générale des sciences pures et appliquées)

[1262] [KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1937], sans compter d'autres notes transmises aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences en 1935 et 1936 : [KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1935 / 1936].

[1263] En 1934, dans un article de synthèse Van der Pol, dans les dernières lignes de son texte, regroupe les références aux travaux russes, en signalant, que contrairement à l'approche qu'il a détaillée, certains scientifiques, essentiellement en URSS ont développé des méthodes sur la base du tome premier des Méthodes Nouvelles de Poincaré. Van der Pol semble **consciemment** avoir écarté ces méthodes. [VAN DER POL, B., 1934], p. 1082.

[1264] Consulter par exemple [PESTRE, D., 1985] et [PICARD, J.-F., 1990].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Alors, pourquoi ne pas le justifier par une incompatibilité de "paradigmes" : l'analyse des textes montre à quel point la notion d'oscillation de relaxation est considérée comme le prototype des oscillations entretenues dans la plupart des textes français : beaucoup de contributions visent à préciser les périodes des oscillations, leur amplitude, les conditions de mise en place des oscillations, etc. Van der Pol lui-même reste figé dans son cadre théorique, cherchant des propriétés toujours plus précises sur les oscillations de relaxation. Il ne semble pas exagéré de parler d'un épisode de science normale dans les oscillations non linéaires, après le texte fondateur de Van der Pol en 1926. Kryloff, Bogoliuboff, Andronov et leurs compatriotes s'accordent, eux, sur un autre paradigme, la notion d'auto-oscillations. Ainsi, lorsque la notion de cycle limite s'invite au milieu des oscillations de relaxation, elle ne trouble pas la matrice conceptuelle "européenne". Après tout, en écartant la machinerie des auto-oscillations, il n'y a là qu'un simple parallèle entre un phénomène oscillant et une notion mathématique. Ce qui nous renvoie à Léauté et à Liénard, qui ont tous les deux établi le même parallèle, entre cycle fermé et oscillation. En revanche, la théorie d'Andronov dans son ensemble est plus "révolutionnaire" et il est clair qu'à travers deux notes aux Comptes Rendus, il semble difficile d'imaginer qu'elle soit acceptée et reprise par la communauté scientifique internationale.

En résumé, l'URSS et l'Europe connaissent deux cultures non linéaires parallèles. La première travaille au développement d'une théorie générale des oscillations, sur la base des travaux de Poincaré ; l'autre s'emballe pour les oscillations de relaxation, ignorante de l'essentiel des travaux de Poincaré, mais développe une pratique analogique, même si elle est encore assez limitée. Le fait de ne pas avoir su reprendre les idées mathématiques de Poincaré étonne, d'autant plus que, nous l'avons vu, certains mathématiciens connaissent bien ses travaux en France. Manque de communication entre scientifiques, entre disciplines ou défaut de formation, il est difficile de trouver une raison simple à cet écueil.

e. La fin des années 1930

Entre 1926 et 1940, hors d'URSS, la question des oscillations non linéaires n'évolue guère. La méconnaissance des méthodes qualitatives pour les équations différentielles persiste et le décalage avec les travaux soviétiques est toujours plus important. Ainsi, lorsque les perfectionnements de la radiotechnique pour le RADAR nécessitent une étude plus approfondie des équations différentielles du type de Van der Pol, Mary Cartwright et John Littlewood s'engagent en 1938 dans le problème mathématique sans connaissances des travaux ni de Poincaré, ni de Kryloff et Bogoliuboff. Il faudra attendre les travaux de Levinson à partir de 1943-1944. Lefschetz ne traduit l'ouvrage de Kryloff et Bogoliuboff qu'en 1942 (publié en 1943) et ne déploie vraiment son activité qu'à partir de 1944 avec les résultats essentiellement mathématiques que l'on sait [1265].

Minorsky est l'ingénieur qui va permettre cette transition vers des considérations mathématiques plus adaptées à la théorie des oscillations. Il travaille aux Etats-Unis et il va intervenir au croisement de trois domaines : la Mécanique, l'électricité et les mathématiques. Au préalable, il nous paraît intéressant de préciser la situation des

[1265] Ce que nous avons détaillé au chapitre 6, p. 411.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

physiciens et des ingénieurs, en matière de Mécanique.

En un mot, dans le domaine, il n'y a pas eu de "choc" équivalent à l'apparition d'un dispositif comme la triode, mais le non linéaire s'impose progressivement. Il ne se trouve pas d'équivalent de Van der Pol en Mécanique et les mathématiques de Poincaré sont tout autant ignorées. Aux Etats-Unis, le non linéaire en Mécanique concerne surtout les phénomènes de vibrations. La théorie s'installe principalement à travers les travaux de Stephen Timoshenko (1878-1972) et de Jacob Pieter Den Hartog (1901-1989). Le premier [1266], d'origine russe, a fréquenté de multiples milieux scientifiques européens, avant d'émigrer aux Etats-Unis dans les années 1920, où il commence à travailler pour la firme Westinghouse. Il est un habile mathématicien, un spécialiste de Mécanique et il va devenir une des références en matière d'ingénierie mécanique en publiant son ouvrage Vibration problems in Engineering, en 1928 [1267]. En 1927 il a un poste à l'Université du Michigan (chaire de recherches en Mécanique). Il y organise des sessions annuelles d'école d'été pour les professeurs de Mécanique ; Ludwig Prandtl et Theodore Von Karman y participent, aux côtés de J.P. Den Hartog. Cette période est propice à la formation d'une communauté et d'une éducation à la Mécanique aux Etats-Unis. C'est aussi le moment où Timoshenko produit ses théories sur les matériaux, l'élasticité, les ressorts, avec des accents de théories non linéaires.

Den Hartog (né à Java) est d'origine néerlandaise [1268]. Il reçoit une formation d'ingénieur électricien à l'Université de Delft, puis émigre aux Etats-Unis en 1924, où il a la chance de trouver un emploi chez Westinghouse. Timoshenko y donne ses cours, repère assez rapidement Den Hartog, bien formé aux mathématiques, et lui offre la place d'assistant dans le département de Mécanique de Westinghouse. En trois ans, Den Hartog est reconverti en ingénieur en Mécanique, spécialiste des vibrations. En parallèle il obtient sa thèse de l'Université de Pittsburgh, en 1929, sur le thème : "Nonlinear Vibration with Coulomb Damping". Après une année passée à Göttingen, chez Prandtl, il obtient un poste à Harvard, en 1932.

Ces deux ingénieurs ont constitué la matrice conceptuelle de la théorie des vibrations, telle qu'elle se développe jusqu'à la pénétration des idées des oscillations non linéaires, avec Minorsky. A travers leurs ouvrages, il est possible de montrer que le paradigme des années 1930 est très proche des problèmes contemporains de la radiotechnique en Europe, avant les oscillations de relaxation. Ainsi, certaines spécificités des comportements non linéaires sont reconnues, mais le traitement théorique suit les alternatives classiques : approximations graphiques, méthodes des petites oscillations, et

[1266] Nous renvoyons à deux courtes notices biographiques : http://ece.clemson.edu/crb/misc/scientists/timoshenko.htm et http://smitu.cef.spbstu.ru/timoshenko_en.htm . La seconde page a été réalisée par l'Université Polytechnique d'Etat de Saint-Pétersbourg, où Timoshenko a été élève, puis professeur.

[1267] La première édition est publiée en 1928, la seconde en 1937. Nous renvoyons à la traduction française de la seconde édition : [TIMOSHENKO, S., 1939].

[1268] Un de ses anciens élèves, Stephen H. Crandall a laissé un témoignage sur Den Hartog, disponible sur http://books.nap.edu/html/biomems/jdenhartog.html

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

calculs numériques approchés. En fait, les méthodes développées par Rayleigh dans Theory of sound ont été adaptées par Timoshenko, reprises par Den Hartog, et constituent d'ailleurs le premier chapitre de son ouvrage de référence, Mechanical Vibrations [1269] : le modèle de l'oscillateur harmonique domine. En 1937 en tout cas, lorsque Timoshenko remet à jour son ouvrage de référence sur les vibrations, la théorie "moderne" des oscillations ne semble pas avoir pénétré la Mécanique. Il signale l'existence des développements sur les problèmes de la radiotechnique dans une note. Les éléments les plus en pointe dans son ouvrage concernent les méthodes développées par N. Kryloff dans l'approximation numérique des solutions des problèmes non linéaires [1270] . Il est un peu étonnant que Timoshenko, qui est russe, n'ait pas cherché davantage.

A travers les exemples de la radiotechnique en Europe et ceux de la Mécanique aux Etats-Unis, il ressort que les phénomènes non linéaires prennent de l'importance dans chaque discipline, lesquelles développent leurs propres méthodes. L'importance des mathématiques est reconnue progressivement, plus rapidement en Europe qu'aux Etats-Unis, et selon les spécificités des disciplines. Autrement dit, il n'y a rien d'équivalent à la "Mécanique non linéaire" de Kryloff et Bogoliuboff, dont l'ambition est de servir dans tous les domaines de l'ingénieur.

Un des textes importants, rompant avec ce cloisonnement est l'oeuvre de Theodore Von Karman. En 1940, il a donné un séminaire à l'American Mathematical Society, publié ensuite sous le titre "The engineer grapples with non-linear problems". Il attire l'attention sur ces problèmes en prenant à témoin les mathématiciens. Il ne traite pas que des oscillations et aura son importance dans la prise de conscience des spécificités du non linéaire, sur le plan des concepts, des méthodes, des pratiques.

Les années 1930 laissent donc un double héritage dans la question des oscillations non linéaires : la possibilité d'utiliser les mathématiques qualitatives de Poincaré, et l'idée de faire des simulations analogiques des oscillations grâce à la maîtrise des circuits électroniques. Mais il faut bousculer les habitudes théoriques, pratiques, expérimentales et intellectuelles, qui, nous l'avons vu, ont du mal à évoluer et à intégrer tous ces changements. Nous allons voir en quoi l'action de Nicolas Minorsky est déterminante dans le développement des oscillations non linéaires, autour de 1940.

8.2. Nicolas Minorsky et les "analogues dynamiques"

Les mathématiques de Poincaré, et les transformations soviétiques, parviennent aux Etats-Unis essentiellement grâce à Minorsky. L'historiographie fait croire à un renouveau non problématique dans les années 1940 : Minorsky écrit son rapport, Lefschetz y participe et s'alerte du sous-développement des mathématiques des équations

[1269] La première traduction française parait en 1936 : [DEN HARTOG, J.P., 1936]..

[1270] En rapport avec les méthodes présentées pour le calcul numérique des solutions approchées, Timoshenko cite deux ouvrages en russe, de Kryloff ([TIMOSHENKO, S., 1939], p. 132 et 133). A propos des "phénomènes plus compliqués" (comme les systèmes non linéaires forcés), il fait référence à un article de Van der Pol ([VAN DER POL, B., 1927] qui ne concerne pas les "oscillations de relaxations"), à la note d'Andronov de 1929 et aux travaux de Mandelstam et Papalexi (1931), Kryloff et Bogoliuboff (1934).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

différentielles puis engage une action. Mais l'essentiel n'a pas été expliqué : pourquoi cet intérêt pour les mathématiques alors que tout le monde persiste à y faire référence sans les utiliser ? On peut avancer qu'il parle russe, qu'il est ingénieur et maîtrise des mathématiques déjà sophistiquées.

Les raisons qui poussent Minorsky à s'intéresser au qualitatif sont plus subtiles que cela. Minorsky est, en fait, impliqué dans un projet très personnel de construction de calculateur analogique : les machines à calculer sont destinées à l'étude des systèmes non linéaires, que Minorsky rencontre notamment dans les questions de stabilisation des navires. La situation rappelle les travaux de Van der Pol avec quelques nuances.

L'historiographie a escamoté tout ce rapport complexe à la technique, pour se limiter, comme nous l'avons volontairement fait au chapitre 6, à inférer que les problèmes techniques "nécessitent" l'emploi des mathématiques.

a. Un ingénieur de la Marine

La vie de Minorsky est assez mouvementée [1271] . Il est né en Russie, à Korcheva, en 1885. Sa carrière commence dans l'armée, à l'Académie Navale Russe, de 1903 à 1908. Il est ensuite formé, à l'université de Nancy, en ingénierie électrique et en science, avant de retourner en Russie, à l'Ecole Polytechnique Impériale de Petrograd en 1912-14. Sa formation est très complète en électricité et Mécanique, et il est ingénieur et docteur en sciences appliquées. De 1914 à 1917 il sert dans la marine russe. En 1918, il émigre aux Etats-Unis, vraisemblablement par contrecoup à la révolution de 1917, où il est embauché chez General Electric.

La question des problèmes non linéaires, laquelle occupe le reste de sa vie scientifique, lui vient avec un premier problème technique très particulier : **la conduite automatique des navires**, problème de la Marine qu'il aborde en 1922. Un dispositif de conduite réclame simultanément un contrôle des déviations, une stabilisation des navires, et la mise en place d'un couplage entre gyroscopes, moteurs et gouvernail. Les formulations du problème sont faites avec des équations différentielles. Minorsky produit une analyse mathématique tentant de conserver les aspects non linéaires des équations, avec les moyens limités des années 1920 [1272] . En 1923, Minorsky conçoit un système, dépose un brevet, et fait les premiers tests sur le navire USS New Mexico. Malgré les résultats encourageants, les autorités de la Marine ont fait comprendre après les essais que "le personnel opérant en mer était, vigoureusement et de manière très déterminée, opposé au pilotage automatique [...]" [1273] . Jusqu'à la fin des années 1930, le problème est mis de côté, par Minorsky tout du moins.

[1271] Dans sa correspondance avec Von Karman, Minorsky lui a transmis un *curriculum vitae* (Archives Von Karman, n° 20.34). Il existe également un court article sur les travaux de Minorsky : [BENNETT, S., 1984].

[1272] Voir [BENNETT, S., 1984] pour les détails techniques et mathématiques du montage mis en place par Minorsky.

[1273] Le capitaine H.S. Howard de la Marine américaine : "[...] the operating personnel at sea were very definitely and strenuously opposed to automatic steering, and they wished us to have nothing further to do with it after these test were completed", [BENNETT, S., 1984], p. 13.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Sa carrière se poursuit à l'université de Pennsylvanie, comme assistant professeur puis professeur, en électronique et physique appliquée, de 1923 à 1934 [1274], date à laquelle il rejoint le MIT pour deux ans, puis le Naval Research Laboratory, au David Taylor Model Basin (à Bethesda, dans le Maryland, à côté de Washington D.C.), à partir de 1936. C'est d'ailleurs à cet endroit qu'il va côtoyer Den Hartog : celui-ci s'engage en 1939 dans la Marine et il va s'occuper des vibrations dans les navires.

L'activité de Minorsky qui nous intéresse débute en 1936 dans ce contexte. Pour la Marine, il s'occupe des problèmes de **stabilisation des navires**, et il reprend ses systèmes de contrôle automatique. Il acquiert de l'aisance à traiter des problèmes non linéaires. Mais c'est surtout le croisement avec son intérêt pour les circuits électroniques qui provoque une nouvelle orientation de recherche vers les oscillations non linéaires et les mathématiques des équations différentielles.

b. Les "analogues dynamiques"

Ses relations avec les physiciens Vannevar Bush et Theodore Von Karman sont significatives de son activité. Il correspond avec Von Karman, un connaisseur des problèmes non linéaires et une autorité scientifique [1275]. Minorsky a travaillé au MIT, dans le département d'ingénierie, dirigé par V. Bush. Bush peut être considéré comme le principal promoteur du calcul analogique, depuis Lord Kelvin. Il prônait un principe d'analogie qui peut se résumer ainsi : pour étudier les équations d'un problème, il faut mettre au point un système qui lui soit dynamiquement équivalent et dont la solution permette d'élucider le problème d'origine. Ce sont des systèmes analogues, modulo les constantes spécifiques de chaque système [1276]. Bush est célèbre pour son "Differential Analyser", réalisé en 1930, une **machine mécanique** permettant l'intégration de divers systèmes différentiels.

Dans une lettre à Von Karman, Minorsky explique le démarrage de son projet [1277]. En 1935, au MIT, il a eu l'idée de confectionner une machine électrique pour intégrer les équations différentielles. L'idée était d'utiliser "un **analogue dynamique** dans le but d'intégrer une équation différentielle du second ordre (linéaire et non linéaire)" [1278]. Alors, le "Dr V. Bush s'est intéressé à cette idée et un modèle très grossier de l'instrument a été

[1274] Minorsky est un peu touche-à-tout : il a par exemple passé l'année 1927-28 en Europe, pour se former à la mécanique quantique, à Göttingen, avec Max Born. Il a fréquenté le Courant Institute pour acquérir des connaissances sur les méthodes mathématiques de la physique. En 1933-34, il est chez Langevin, pour préparer une thèse de physique sur "la conduction et l'ionisation trochoïdale". (*Curriculum vitae* de Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34).

[1275] En effet, ils échangent une correspondance pendant la guerre, au fil des années 1940-45. Minorsky soumet ses idées à Von Karman et le sollicite pour des conseils. Von Karman fera le déplacement au laboratoire de la Marine où Minorsky travaille à la stabilisation des navires. (Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34).

[1276] Sur V. Bush, ses travaux et le principe d'analogie, nous renvoyons à [RAMUNNI, G., 1989a], p. 31-32.

[1277] Cette lettre n'est pas datée, mais plusieurs indices laissent penser qu'elle a été écrite à la fin de l'année 1940. (Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

construit" [1279] . Ceci traduit bien l'attention de Bush pour les nouveautés techniques susceptibles d'améliorer les dispositifs de calcul. Minorsky a lancé un étudiant sur le projet, M. Henshaw : c'est lui qui a construit la machine en question pour réaliser une étude de l'équation de Mathieu [1280] .

Minorsky publie une étude des analogues dynamiques et les possibilités d'en faire des moyens efficaces de calculs, en 1936. De manière assez surprenante, l'étude n'est parue publiquement qu'en France ! Une note à l'Académie des Sciences précède la publication étendue dans la Revue Générale d'Electricité [1281] . Le principe de Minorsky est assez simple. La machine de Bush calcule grâce à des "analogies cinématiques", dit-il. Il veut faire intervenir la **dynamique**. Pour expliquer son principe il prend l'exemple du pendule amorti, dont on connaît l'équation différentielle régissant le mouvement. Alors on peut envisager le problème d'"un point de vue légèrement différent et dire que le pendule amorti est susceptible de tracer l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants" [1282] . Le principe de Minorsky est de généraliser cela à n'importe quelle équation du second ordre, c'est-à-dire de chercher un "pendule" dont le mouvement représente la solution de l'équation. Rappelons qu'il a été formé comme ingénieur en électricité et sa maîtrise de ces dispositifs l'a certainement incité à imaginer un système électromagnétique [1283] . L'enregistrement du **mouvement**, par photographie par exemple, donne la solution. Pour les équations non linéaires, Minorsky détaille le principe permettant d'introduire la non linéarité voulue dans le dispositif.

Minorsky réalise des analogies où les mathématiques et la dynamique du système sont centrales, comme chez Van der Pol. Mais plus encore qu'avec Van der Pol, les analogies sont destinées au calcul et aux mathématiques des équations différentielles.

De 1936 à 1940, Minorsky s'occupe quasiment exclusivement de la stabilisation des navires pour la Marine, et délaisse la question des "analogues dynamiques". Ce n'est que

[1278] "idea of using a dynamical analogue for the purpose of integration of differential equations of the second order (linear and non linear)", Lettre de N. Minorsky à T. Von Karman, non datée, probablement de fin 1940 dans : Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34 (nous mettons en évidence).

[1279] "Dr V. Bush became interested in the idea and a very crude model of the instrument was completed", Lettre de N. Minorsky à T. Von Karman, non datée, probablement de fin 1940 dans : Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34.

[1280] L'équation de Mathieu est l'équation du type général :
(w, α sont des constantes).

[1281] Minorsky est en contact régulier avec la France : outre que sa femme est française, il a travaillé avec Langevin, et c'est probablement ce dernier qui a du le convaincre de publier en France (la note aux Comptes Rendus est d'ailleurs transmise par Langevin). Il reste difficilement compréhensible que Minorsky ne l'ait jamais fait paraître aux Etats-Unis, mais à distance, nous n'avons pas pu déterminer si une étude de Minorsky a été publiée et déposée dans les archives du MIT.

[1282] [MINORSKY, N., 1936b], p. 787.

[1283] Schématiquement le "pendule" est une petite bobine parcourue par un courant alternatif, placée dans un solénoïde lui-même parcouru par un autre courant alternatif ; c'est un mouvement de rotation sur lui-même et non pas un balancement.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

lorsque le projet de la Marine est pratiquement à son terme, qu'il y revient. A Von Karman il dit avoir décidé de "passer en revue le sujet, en particulier au regard du fait que ma connaissance des circuits s'est considérablement étendue" [1284]. Il annonce que son "intérêt premier est centré sur les équations non linéaires" et ajoute : "Actuellement, je suis intéressé seulement par équations différentielles ordinaires – pas aux dérivées partielles – parce qu'elles sont les seules atteignables par l'"analogue", tel que je le conçois" [1285].

Minorsky, à ce moment là, en 1940, est au carrefour du non linéaire, du calcul analogique et des mathématiques des équations différentielles. Le non linéaire est la motivation du projet car dans les dispositifs anti-roulis et de stabilisation réalisés pour la Marine, "la plupart des problèmes sont non linéaires" [1286]. Ceci explique le rapprochement qu'il engage avec Von Karman [1287].

De 1940 à 1942, Minorsky se concentre donc à nouveau sur ses analogues dynamiques, avec une attention particulière pour les équations non linéaires. Ces deux années sont **décisives** et se font **sans intention** de se lancer dans un projet de recension des travaux sur les oscillations non linéaires, lequel sera commandé seulement en 1942.

Minorsky perfectionne sa théorie des analogues. Mais il le fait d'un triple point de vue, technique, physique et mathématique, qui va le conduire à la théorie des oscillations non linéaires et au point de vue de Poincaré. Dès le début de son projet, il avait signifié l'avantage qu'il donnait à ses machines par rapport au "Differential Analyser" de Bush ; il le répète à Von Karman :

"Le principal avantage de cet instrument, à mon avis, réside dans le fait qu'il est capable de donner toute la famille des courbes intégrales (en fait chaque oscillation du pendule donne une courbe) comme fonction d'un paramètre, alors qu'il faut un temps relativement long pour tracer les courbes intégrales sur des analyseurs différentiels mécaniques, même si la précision de ces derniers est probablement supérieure." [1288]

Autrement dit, son instrument de calcul permet de donner un **portrait global des solutions des équations différentielles** et non pas d'intégrer une solution particulière

[1284] "I decided to review this subject, particularly in view of the fact that my own knowledge of electronic circuits has extended considerably", Lettre de N. Minorsky à T. Von Karman, non datée, probablement de fin 1940 dans : Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34.

[1285] "at present I am interested only in ordinary – not in partial – differential equations since only these are within the reach of the analogue as it is conceived by me at present", Lettre de N. Minorsky à T. Von Karman, non datée, probablement de fin 1940 dans : Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34 (souligné dans le texte).

[1286] Lettre de N. Minorsky à Von Karman, 21 octobre 1940 : "most of our problems are non linear". (Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34).

[1287] Plus précisément, il contacte Von Karman pour lui demander une copie de "The engineer grapples with non linear problems", ibid., (Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

avec précision. Le second point d'intérêt de ses analogues est qu'ils permettent de déterminer les singularités des équations, ce qu'il développe dans un deuxième temps.

c. 1942 : des "analogues dynamiques" à la théorie des oscillations non linéaires

Au regard de la correspondance avec Von Karman, 1941 est l'année où les théories de Minorsky se précisent. Au début de 1942, il intervient au Colloque de Physico-mathématique à l'Université Brown [1289] et produit un texte de synthèse, envoyé à Von Karman : "Mechanical integration of ordinary differential equations by means of dynamical analogues". C'est une étape importante dans l'évolution des intérêts mathématiques de Minorsky vers la théorie des oscillations. En effet, il existe un rapport direct entre les mathématiques des équations différentielles, utilisées par Minorsky, et les aspects théoriques de ses "analogues dynamiques". Si Minorsky a étudié les textes soviétiques (Andronov, Kryloff et Bogoliuboff), mais également Poincaré et Birkhoff, l'intérêt qu'il y voit est lié aux résultats espérés de ses calculateurs. Le texte poursuit l'idée que les **calculateurs fournissent le portrait des équations mathématiques dans l'espace des phases**. C'est ce qui motive Minorsky dans une problématique où se mêlent mathématiques et calcul analogique.

Prenons trois exemples : l'équation de Mathieu, l'oscillateur de Van der Pol et les points singuliers des équations différentielles.

Dans le premier cas, l'équation est assez simple et l'analogue dynamique a été construit. Minorsky résume en disant qu'en faisant varier les paramètres du dispositif "la gamme des solutions de l'équation de Mathieu avec des zones stables et instables, la périodicité, les exposants caractéristiques, etc. – peut être explorée expérimentalement" [1290]. L'expérience physique permet de calculer les propriétés mathématiques **globales** de l'équation : nous sommes au croisement du calcul analogique et des mathématiques de Poincaré.

Pour l'équation de Van der Pol, l'analogue doit être plus sophistiqué et Minorsky n'a pas construit la machine correspondante. Mais le principe et le résultat sont les mêmes : il est possible d'expérimenter l'équation généralisée de Van der Pol, en faisant varier les paramètres de l'hypothétique dispositif. Il reprend un exemple d'équation de Van der Pol tiré de l'ouvrage d'Andronov et Khaikin [1291], dans lequel la démarche analytique montre

[1288] ***"The principal advantage of this instrument, in my opinion, lies in the fact that it is capable of giving the whole family of integral curves (in fact each oscillation of the pendulum gives one curve) as a function of a parameter, whereas it takes relatively long time to trace these integral curves on mechanical differential analysers, although the accuracy of the latter is probably higher.", Lettre de N. Minorsky à T. Von Karman, non datée, probablement de fin 1940 dans : Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34***

[1289] Le 16 janvier 1942. Lettre de N. Minorsky à Von Karman, du 22 janvier 1942.

[1290] "[…] the range of solutions of the Mathieu equation with stable or unstable zones, periodicity, characteristic exponents, etc. – can easily be explored experimentally in this case.", Note de Minorsky de 1942, p. 14 (Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

qu'il y a un cycle limite de Poincaré. Cette démarche est "plutôt compliquée" [1292] au goût de Minorsky et il défend sa méthode permettant de tracer les solutions avec la possibilité de les reporter dans l'espace des phases [1293] . Minorsky maîtrise l'aspect mathématique du problème et présente son alternative, celle du calcul. Il critique donc le caractère abstrait, tout en étant dans le même esprit qualitatif.

Le chapitre sur les points singuliers est le plus nouveau, et ici les méthodes topologiques, reposant sur l'espace des phases sont davantage exploitées. La motivation de Minorsky est double : il sait qu'il s'agit d'un problème mathématiquement intéressant [1294] et surtout il imagine un moyen de les étudier concrètement. En effet, dans ses analogues dynamiques, **un point singulier est un point d'équilibre du système** [1295] : ils sont donc faciles à repérer, alors que les singularités sont les points d'achoppement de l'intégration par le "Differential Analyser" [1296] . En outre, le voisinage des points singuliers est délicat à étudier mathématiquement : avec les analogues de Minorsky il n'y a pas de difficulté particulière. Pour compléter son discours, il dresse l'ensemble des analogies entre les points singuliers, en deux dimensions, et les pendules.

Les mathématiques sont à la fois un but et un moyen pour Minorsky. Les analogues dynamiques visent à intégrer les équations différentielles, d'une part. D'autre part, les mathématiques qu'il apprend de Poincaré et d'Andronov, lui servent à affiner ses considérations et à les orienter.

En résumé, il se produit une convergence entre les mathématiques d'Andronov et les potentialités des analogues dynamiques de Minorsky. Les mathématiques abstraites de Poincaré, l'espace des phases, le point de vue global, trouvent un pendant dans les analogues dynamiques et inversement. C'est la différence majeure avec la situation des années 1930 en Europe : entre 1940 et 1942, les interprétations d'Andronov coïncident avec les intérêts de Minorsky. Son calcul analogique permet de rendre opérationnelles les méthodes topologiques car il est "global" par essence. Il faut, bien sûr, mettre en perspective ces réflexions sur le calcul et les mathématiques, avec les questions du non linéaire intéressant Minorsky.

[1291] Ibid., p. 30-31 : "Differential equation of a thermionic generator with inductive coupling between the anode and the grid circuits".

[1292] "The oscillation approaches in this case the limit-cycle of Poincaré but the analytical method is rather complicated.", Ibid., p. 30.

[1293] Il n'emploie pas le terme "espace des phases", mais, d'après ce qui suit, il n'y a pas de doute qu'il a cette notion en tête.

[1294] C'était le sujet principal du premier article de Poincaré sur les équations différentielles du plan, en 1881. [POINCARE, H., 1881].

[1295] "In this manner the points of equilibrium of a dynamical system are indicative of the corresponding singular points of the differential equation determining the motion of that system." (avec quelques exceptions ajoute-t-il), Note de Minorsky de 1942, p. 34 (Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34).

[1296] D'après Minorsky, Bush lui-même a reconnu cette difficulté, ibid., p. 49.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

d. Le rapport de 1944 et conséquences

Le travail de Minorsky à partir de 1942, sur commande de la Marine, est de réaliser une synthèse des travaux mathématiques susceptibles d'intéresser son employeur. On peut dire que la Marine a su choisir le bon interlocuteur. La coïncidence de circonstances est étonnante et il est difficile de dire ce qui pèse dans la décision parmi ceux-ci : Minorsky parle russe et français, son projet de stabilisation de navire a été interrompu [1297] et il est donc sans autre projet avec la Marine ; il connaît V. Bush, le coordonnateur des recherches scientifiques durant la guerre, correspond avec Von Karman, dont le texte sur le non linéaire a suscité beaucoup d'intérêts. Minorsky manifeste un constant souci de travailler dans la recherche pour le militaire [1298] . En outre, il vient de se frotter aux travaux soviétiques, mais il est difficile de dire si cela a une quelconque importance dans la constitution du projet de 1942.

Le rapport produit en 1944 pour la Marine, et publié pour le public des chercheurs en 1947, contient l'essentiel des méthodes topologiques, des méthodes de Kryloff et Bogoliuboff et les travaux sur la stabilité, dans la veine des considérations de Lyapounov, traduits en anglais. Trois remarques s'imposent.

Premièrement, il porte les marques de Minorsky et de la Marine. Les explications préliminaires de Minorsky montrent que le rapport est destiné à la fois aux mathématiciens et aux ingénieurs : Minorsky pratique depuis longtemps ce mélange de mathématiques et de technique et il décrit souvent "la brèche entre les mathématiciens et les ingénieurs" qui "est assez large" [1299] . Minorsky inclut les exemples qu'il connaît : stabilisation et contrôle non linéaire des navires.

Deuxièmement, il rompt avec la spécialisation disciplinaire, qu'on a pu constater avant guerre. Même si Minorsky privilégie la Mécanique, il introduit des méthodes pour les équations différentielles non linéaires, dont il montre qu'elles sont utilisables par tous les ingénieurs et indispensables pour ne pas perdre l'essence des phénomènes non linéaires [1300] .

Enfin, dernier point remarquable, il n'est plus du tout question d'analogues dynamiques. Le rapport est plus orienté vers des méthodes immédiatement

[1297] Minorsky affirme que 90% du projet était terminé, en novembre 1940. Lettre de N. Minorsky à Von Karman, 18 septembre 1945 (Correspondance avec N. Minorsky, archives Von Karman, n° 20.34).

[1298] Son *curriculum vitae* explicite les multiples projets réalisés avec la Marine (russe, puis américaine). Après la seconde guerre mondiale encore, il fait des demandes pour occuper un poste au service de la défense nationale américaine (Lettre de N. Minorsky à Vannevar Bush, non datée, au sujet de son rapport au président ; lettre de N. Minorsky à Von Karman, du 18 septembre 1945, sur le même sujet. Archives Von Karman, n° 20.34).

[1299] Cette citation est tirée d'une lettre de N. Minorsky à Von Karman du 3 octobre 1944 : "the gap between the mathematicians and the engineers is quite wide". Minorsky s'en plaint souvent. En 1943 il a soumis un article au Quarterly of Applied Mathematics, ("Quasi-discontinuous Relaxation oscillations") : l'article contenant des circuits électriques a été confié à un relecteur spécialisé. Minorsky a écrit sept pages de critiques à propos des commentaires du relecteur, expliquant en substance que, visiblement, le relecteur ne connaît rien aux mathématiques.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

opérationnelles et les analogues n'ont pas leur place, car ils sont restés au stade de la théorie. Cette absence est sans doute à l'origine de l'idée selon laquelle Minorsky n'a été qu'un simple traducteur des travaux soviétiques.

Pourtant, Minorsky continue de s'intéresser à ses "analogues" et communique à Von Karman, en 1946, sa mise à jour : "Note on graphical integration of ordinary differential equations by analogues" [1301] . Il réfléchit encore aux moyens d'améliorer les performances théoriques des analogues. Les deux années passées à recenser les travaux soviétiques sur les oscillations non linéaires ont légèrement modifié sa perception du problème. Les aspects qualitatifs sont beaucoup plus affichés.

"Une fois que le mouvement est produit, on a l'image qualitative des solutions. Dans ce cas, le fait que les solutions sont connues, disons à 1 ou 2 pourcent de précision, ne sera probablement d'aucune importance tant que le principal objet de ces études sera d'initier un argument purement mathématique une fois que l'aspect général qualitatif des courbes intégrales a été validé." [1302]

Les relations à la physique sont soulignées. Minorsky insiste sur le fait que "l'analogue produit un vrai phénomène physique, une oscillation d'un système dynamique" [1303] . Il défend ce point en rapport avec les singularités notamment, en affirmant que les concepts mathématiques tels que les cycles limites, ou d'autres concepts d'origine physique, apparaissent naturellement dans le système, alors que les autres systèmes de calculs les traitent plus difficilement : il vise, en 1946, la machine de Bush, mais aussi les systèmes "arithmétiques", c'est-à-dire les futurs ordinateurs [1304] .

Dans l'esprit de Minorsky se superposent plusieurs problèmes : les mathématiques et les "sciences appliquées", lorsqu'elles travaillent de concert, peuvent être fructueuses aux deux. Et il juge regrettable que l'écart entre mathématiciens et techniciens soit devenu important. Sa défense des analogues s'inscrit dans l'idée qu'ils fournissent des images physiques, utiles pour les mathématiques. L'étude systématique des analogues qu'il appelle de ses voeux, renvoie donc à une conception dans laquelle, la physique doit avoir une rôle actif dans le développement des mathématiques. Pour Minorsky, l'exemple de l'équation de Van der Pol, qui a stimulé une recherche sur les méthodes topologiques des équations différentielles, en est une bonne illustration [1305] .

[1300] C'est en substance, le message donné en préface et introduction (p. 1) de son ouvrage publié en 1947, [MINORSKY, N., 1947].

[1301] Lettre de N. Minorsky à Von Karman du 27 mars 1946 (Archives Von Karman, n° 20.34).

[1302] "Once this motion is produced, one has by this very fact the qualitative picture of solutions. In this case the fact that the solutions are known to within say, 1 or 2 per cent of accuracy, will be probably of no importance inasmuch as the principal object of these studies will be to initiate a purely mathematical argument once the general qualitative aspect of integral curves has been ascertained.", note attachée à la lettre de N. Minorsky à Von Karman (27 mars 1946), p. 35. (Archives Von Karman, n° 20.34).

[1303] "[…] the analogue produces a real physical phenomenon, an oscillation of a dynamical system.", ibid., p. 33.

[1304] Ibid., p.33.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

e. N. Minorsky et le calcul

Les travaux de Minorsky montrent l'importance du calcul dans l'histoire des systèmes dynamiques et du chaos, au sens où l'analyse topologique et le calcul sont très complémentaires lorsque la résolution exacte d'un problème non linéaire est impossible. C'est pour cette raison que ce sont deux ressorts essentiels d'une histoire qu'il n'est certainement pas possible de résumer aux mathématiques des systèmes dynamiques et leurs applications. Minorsky nous montre également que le calcul se pense à la frontière des mathématiques et de la physique. Il est un digne successeur de Lord Kelvin et Vannevar Bush à ce sujet.

Cependant, si sa synthèse sur les oscillations non linéaires va connaître un énorme succès et sera réactualisée par lui-même dans les années 1960, les "analogues dynamiques" sont restés inconnus. Plusieurs raisons peuvent l'expliquer. D'abord, Minorsky travaille seul sur le sujet, dès lors qu'il a quitté le MIT en 1936 et il se plaint de son isolement pour ce qui touche à tous les problèmes mathématiques des équations non linéaires. Les travaux "concrets" pour la Marine doivent suffisamment l'occuper de toute façon.

En outre, il existe d'autres systèmes de calcul concurrents. Même si les machines, telles que Minorsky les imaginent, laissent présager de remarquables possibilités, elles ne sont pas très précises. Dans la course entre analogique et numérique, ce sera un facteur décisif en faveur des machines digitales, beaucoup plus précises. Tant que l'intérêt des résultats qualitatifs n'est pas perçu, les machines de Minorsky ont peu de chance de susciter l'attention. Lorsque la théorie des oscillations non linéaires prendra sa pleine expansion, à la fin des années 1940 et grâce à Minorsky, le rapport au calcul analogique sera important : c'est ce que nous proposons de montrer dans les paragraphes suivants. Enfin, si les machines permettent en théorie de résoudre une grande variété d'équations différentielles, elles restent des machines spécialisées sur ce problème. Nous ne savons pas, par manque d'archives, si Minorsky a persisté longtemps dans ses tentatives de construire des calculateurs [1306] .

f. Minorsky, un relais pour la théorie des oscillations non linéaires

Minorsky a donc su remarquer, reprendre et amener à la connaissance des mathématiciens et des ingénieurs, ce qui, dans les années 1930, avait été écarté. L'impulsion qu'il a donnée a été décisive. Lefschetz, qui a travaillé un an avec Minorsky [1307] , participe aux développements mathématiques aux Etats-Unis. On peut également

[1305] 'It cannot be denied that mathematics, at least in the early stages of its development, did not get a beneficial stimulus from some kind of physical "images" [...] Viewed from this stand point a systematic study of analogues may not only bridge the gaps separating the mathematician and the engineer but may, in some cases, orient a purely analytical argument as well.", ibid., p. 34.

[1306] Quelques informations ont pu être tirées de sa correspondance avec Th. Vogel (Archives personnelles de Th. Vogel). Il apparaît qu'il a lancé en 1949 un projet à Stanford, sous contrat avec l'US Navy : "An electronic analogue for certain difference-differential equations". Le projet suit un précédent contrat "On certain applications of difference-differential equations" de 1948. Il n'a pas été possible de déterminer ce qu'il en est advenu, mais Minorsky quitte Stanford l'année suivante.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

signaler que Levinson est dans le même courant : il travaille au MIT et il s'est lancé dans les problèmes non linéaires avec le texte de Von Karman [1308] .

Dans la lignée de Van der Pol et Andronov, Minorsky est physicien, ingénieur et mathématicien. Sans cela, il n'aurait pas saisi les spécificités du non linéaire, développé ses analogies et analogues dynamiques, et ne se serait pas intéressé aux méthodes mathématiques soviétiques. Dans son ouvrage de référence, il a su également mettre de côté ses analogues dynamiques pour livrer l'essence des méthodes qualitatives.

En outre, Minorsky a une pratique de plusieurs domaines, de l'électricité à la Mécanique. Il a su dépasser les frontières disciplinaires, par le biais des analogies et comprendre que les méthodes mathématiques sont adaptables dans tous ces domaines. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce qu'il défende une double conception des mathématiques appliquées : les mathématiques pour un problème donné (mathématiques "verticales") et les méthodes mathématiques utilisables dans plusieurs problèmes, dont la Mécanique non linéaire est un bon exemple (mathématiques "horizontales") [1309] . Dans son ouvrage de synthèse, il est résolument dans les mathématiques "horizontales".

Retraité en 1950 [1310] , il est certain qu'il continue à s'intéresser à la Mécanique non linéaire, hors du contexte de la Marine [1311] . Ce sera le début d'une correspondance suivi avec un scientifique français : en effet, il se retire dans le sud de la France (vers Aix-en-provence) et entre en contact avec le physicien Théodore Vogel, du CRSIM (laboratoire propre du CNRS), qui développe la théorie des oscillations non linéaires.

8.3. Les oscillations non linéaires après la seconde guerre mondiale

Après la seconde guerre mondiale, dans la continuité des recherches des années 1930

[1307] Lefschetz est mentionné dans une lettre de N. Minorsky à Prager, Brown University, en septembre 1944 (archives Von Karman : la lettre est envoyée à Von Karman à propos d'un problème tout autre). Il est remercié dans l'ouvrage de 1947 (aux côtés d'un certain nombre d'autres collaborateurs dont l'histoire n'a pas retenu le nom).

[1308] Voir les textes de Levinson ([LEVINSON, N., SMITH, O.K., 1942], [LEVINSON, N., 1943 / 1944]) et [CARWRIGHT, M.L., 1952], p. 87.

[1309] Lettre de N. Minorsky au Professeur Prager, du 4 septembre 1944 (disponible dans les archives de Von Karman).

[1310] Après avoir obtenu un poste de professeur au département "Engineering mechanics" à l'Université de Stanford en Californie, en 1947.

[1311] La politique scientifique américaine en 1945, après le projet Manhattan, change d'orientation. La Marine elle-même, comme le dit Minorsky, considère que le travail sur la stabilisation des navires ne nécessite plus les services de Minorsky. C'est pourquoi il prospecte pour une nouvelle activité : il contacte Bush, rédacteur du rapport "Science, the endless frontier" déterminant dans la politique scientifique d'après guerre, pour obtenir un poste de contact avec les sciences étrangères. Plutôt que cette position, qui aurait exploité sa grande culture technique et ses capacités linguistiques, le poste à Stanford lui est offert. On peut faire l'hypothèse que Von Karman, implanté en Californie, au Caltech, (et qui est sollicité par Minorsky pour obtenir un poste universitaire, Lettre de N. Minorsky à Von Karman du 27 mars 1946, Archives Von Karman) a fait jouer ses relations.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

infléchies par Minorsky, vont se développer des pôles de recherche sur les oscillations non linéaires. Il n'est pas dans notre intention de proposer une étude complète, internationale, de cette recherche. Nous en avons déjà donné quelques grandes lignes relativement aux mathématiques des oscillations et des systèmes dynamiques. Dans la perspective lancée par Minorsky, on peut tout de même s'interroger de manière globale sur l'acceptation des analyses topologiques, qualitatives. Quelques grandes tendances se dégagent, très partiellement explorées dans l'historiographie.

a. Quelques exemples

Rappelons que l'école Lefschetz est née dans l'effort de guerre. Lefschetz a été consultant au David Taylor Model Basin et a de fréquents rapports avec Minorsky. Tous deux ont approché l'Office of Naval Research pour initier un "Project on Differential Equations". L'intention de Lefschetz était double : produire des recherches dans le domaine et former de jeunes scientifiques pour aller faire des mathématiques dans l'industrie et la défense [1312] . Le projet débute en 1942, et progressivement le qualitatif vient à dominer les analyses produites. Malheureusement, beaucoup des jeunes formés sont restés dans le monde académique. Lorsque le complexe militaro-industriel s'en mêle et crée le RIAS, la situation a évoluée. A l'heure actuelle cependant, il n'existe pas d'étude approfondie des rapports avec les ingénieurs et la place du calcul analogique ou numérique dans ce cadre institutionnel.

La situation en URSS est encore plus obscure, mais les méthodes topologiques n'y sont pas problématiques. C'est le champ historiographique de la science du non linéaire en URSS, dans son ensemble et dans ses détails, qui est encore très peu exploré. Il promet d'être extrêmement intéressant. En effet, Andronov décède en 1952, mais son école est bien active sur des questions techniques d'actualité, comme la théorie du contrôle et l'automatique [1313] . Depuis les années 1930, les problèmes de fluctuations, l'effet des bruits parasites dans les systèmes auto-oscillants font aussi l'objet d'études [1314] . Selon Diner, à propos des pôles de recherches d'Andronov à Gorki, et d'autres répartis en URSS :

"Il va sans dire que la force scientifique de ces écoles a totalement contribué à la formation de générations d'ingénieurs très qualifiés, qui sont responsables de l'ensemble des créations du complexe militaro-industriel, des tanks sans vibration de la Seconde guerre mondiale aux spoutniks." [1315]

Du côté de Kiev, le flambeau est repris par Yuri Mitropolsky qui va perpétuer l'école de Kiev, avec Bogoliubov. Le manque d'analyses des multiples connexions entre disciplines,

[1312] Voir [AUBIN, D., 1998a], p. 246-7.

[1313] On peut consulter un court texte sur le développement de l'ingénierie du contrôle en URSS : [BISSELL, C., 1998].

[1314] Le texte "fondateur" a été rédigé par Andronov, Pontryagin et Vitt en 1933 et s'intitule : "Sur le traitement statistique des systèmes dynamiques", voir [DINER, S., 1992], p. 343.

[1315] [DINER, S., 1992], p. 344.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

des rapports avec la technique et les ingénieurs, des réseaux scientifiques, constitue la principale lacune de notre histoire.

Le cas de la France va nous occuper plus longuement, pour la période postérieure à 1950, car une petite école d'oscillations non linéaires s'est développée, délaissée par l'historiographie. Entre temps, dans les années 1940, deux scientifiques s'occupent des questions d'oscillations : Yves Rocard (1903-1992) et Jules Haag. Rocard s'intéresse aux oscillateurs en relation à certains problèmes techniques d'ingénieur. En 1928, après sa thèse de physique, il accepte une proposition de La Radiotechnique, et travaille dans l'une des meilleures compagnies françaises de radio, au développement des lampes triodes : c'est un chercheur industriel [1316]. Mais Rocard a plusieurs centres d'intérêt, et une fascination particulière pour la Mécanique des vibrations. Il s'intéresse d'abord aux questions de stabilité des automobiles [1317] et des locomotives [1318]. Rocard est aussi devenu un personnage important dans l'aviation française grâce à ses procédés efficaces de stabilisation des ailes d'avion, mis au point dans l'urgence de la guerre [1319]. A travers ses ouvrages importants, dont Théorie des oscillateurs de 1941 et Dynamique générale des vibrations [1320] de 1943, Rocard est une autorité en la matière [1321]. Mais les méthodes qualitatives ne sont présentes : ce sont les oscillations de relaxation, la référence à Van der Pol et Liénard qui dominent les conceptions les plus avancées, théoriquement [1322].

Les considérations de Haag connaissent le même défaut. Haag est pourtant beaucoup plus préoccupé de méthodes mathématiques fines, importantes dans son domaine, la chronométrie. Là encore, la perspective des années 1930 persiste [1323].

[1316] Les contributions scientifiques et institutionnelles de Rocard ont été analysées par D. Pestre dans sa contribution ("La création d'un nouvel univers physicien, Yves Rocard et le laboratoire de physique de l'ENS, 1938-1960") au recueil édité par J.-F. Sirinelli, Ecole Normale Supérieure, le livre du bicentenaire : [PESTRE, D., 1994].

[1317] Dans ses Mémoires sans concessions, Rocard dit avoir un ami qui travaillait chez Citroën : [ROCARD, Y., 1988], p. 30-40.

[1318] Après l'accident spectaculaire de St-Hélier (déraillement d'un train en pleine ligne droite), Rocard est appelé dans la commission d'experts. La commission aboutira à la conclusion que la stabilité des wagons est mal étudiée et va créer une dynamique dans l'étude mathématique de la stabilité des chemins de fer. Voir [RIBEILL, G., 1998] pour une étude générale de la question de la stabilité dynamique des chemins de fer, et [ESCUDIE, B., RAMUNNI, G., 1992], concernant l'analyse scientifique et l'avancée dans l'étude des systèmes, générés par cet accident et les expertises de Rocard et E. Julien ([JULIEN, E., ROCARD, Y., 1935]).

[1319] Voir [ROCARD, Y., 1988], p. 40-42 et [PESTRE, D., 1994].

[1320] Pour les deux ouvrages cités : [ROCARD, Y., 1941 / 1943]. Rocard avait également publié antérieurement une synthèse sur les "auto oscillations dans les systèmes hydrauliques" [ROCARD, Y., 1937] (les auto oscillations en question ne correspondent pas aux concepts d'Andronov).

[1321] Le manuel Physique des vibrations à l'usage des ingénieurs, de A. Fouillé (préfacé par Rocard, [FOUILLE, A., 1954]), montre l'aura dont Rocard dispose dès qu'il s'agit des questions pratiques des oscillations.

[1322] Voir par exemple la préface de [ROCARD, Y., 1941].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Cependant, il faut rappeler la situation précaire en France, le manque de communications et d'activité scientifique, durant les années 1940-44. Cela explique en grande partie l'atonie et l'inertie des recherches sur le sujet, même après la guerre.

b. Le Colloque de Porquerolles, 1951

Pour saisir l'évolution vers les méthodes topologiques, il est pertinent d'analyser les travaux du premier colloque international sur les oscillations non linéaires, après la guerre, en 1951. Il est organisé en France, sous l'égide de l'IUTAM (Union Internationale de Mécanique Théorique et Appliquée) et de l'Union Internationale de Radio-Science. Joseph Pérès, patron de la Mécanique en France, est le président du colloque et du comité d'organisation. Quelques grands noms du non linéaire s'y retrouvent : Haag [1324], Van der Pol, Minorsky ; Von Karman ne peut pas s'y rendre [1325], et l'URSS n'est pas représentée [1326]. L'introduction de Pérès est significative d'un domaine de recherche institué, avec ses "fondateurs" et quelques idées "paradigmatiques" :

"Les problèmes que pose la Physique sont, en général, non linéaires et leur linéarisation n'a qu'une valeur de première approximation, correspondant à une schématisation plus ou moins satisfaisante des lois naturelles, schématisation rendue nécessaire par l'insuffisance de nos moyens d'analyse et d'expérimentation." [1327]

Les intentions sont là :

"Les développements théoriques à ce sujet ont leur origine dans l'oeuvre de Henri Poincaré, tant en ce qui concerne les méthodes du calcul des perturbations que pour l'utilisation de considérations topologiques." [1328]

On peut imaginer que Minorsky, dans le comité d'organisation, a peut-être soufflé ce mot à Pérès, lequel n'a vraisemblablement que peu de connaissances dans ce domaine. Il est surtout frappant de constater le décalage entre cette déclaration et la réalité des travaux présentés à Porquerolles : seuls Minorsky et Th. Vogel utilisent ces méthodes [1329]. L'inertie des années 1930 prime encore, et le qualitatif n'a pas modifié les perspectives générales, sauf dans les discours [1330]. Les exemples sont rares et nous nous proposons

[1323] Ses deux volumes sur Les mouvements vibratoires englobent les principales méthodes utilisées en chronométrie et leurs possibles applications générales. [HAAG, J., 1952 / 1955].

[1324] La publication du colloque est dédiée à Haag, décédé quelques temps après le colloque, en 1952.

[1325] [PERES, J., 1951], p. I.

[1326] D'autres sont présents, par exemple : J.J. Stoker (Du Courant Institute), J.P. LaSalle (du groupe de Lefschetz).

[1327] [PERES, J., 1951], p. I (en italique dans le texte).

[1328] Ibid., p. II.

[1329] Un troisième, Luc Gauthier, sans discuter de méthodes qualitatives, aborde ouvertement le sujet. [PERES, J., 1951], p. 257-260.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

d'éclairer deux contextes où se développent effectivement les oscillations non linéaires : le cas de Vogel, en France, et les travaux des japonais Hayashi et Ueda, à Kyoto. Cela nous montrera que lorsque les mathématiques de Poincaré sont appréhendées dans la pratique, elles le sont en rapport avec le calcul analogique.

8.4. Théodore Vogel et les oscillations discontinues

A Marseille, au sein du CNRS, un pôle de recherche sur les oscillations non linéaires se développe après la guerre. Le contexte est particulièrement intéressant car il représente l'environnement "idéal" imaginé par Minorsky et Lefschetz, une culture de mathématiques, de physique et de technique. En outre, Minorsky est devenu un ami de Vogel, vraisemblablement après le colloque de 1951 où ils se sont rencontrés.

Vogel fait école au CRSIM (Centre de Recherches Scientifiques, Industrielles et Maritimes) dans les années 1950. Dans ce contexte nous retrouverons les grandes constantes du développement des oscillations non linéaires, à mettre en perspective avec les années 1930 et le travail de Minorsky. Nous nous proposons ainsi de mettre en évidence le rôle des mathématiques topologiques et du calcul analogique dans la pratique des oscillations au laboratoire, depuis T. Vogel jusqu'aux travaux des années 1970 et ceux de José Argémi qui s'inscrivent dans les recherches sur le chaos en biologie, autour de 1980.

a. Théodore Vogel (1903-1978)

Th. Vogel est né à Breditchev, en Ukraine, en 1903 et issu d'une famille juive. Il arrive en France en 1914. Ses études se font au lycée d'Avignon, à la faculté des Sciences de Marseille puis à l'Ecole Supérieure d'Electricité. De 1924 à 1933 il travaille à l'électrification en Palestine, dans le laboratoire de la Palestine Electric Corporation, puis il devient ingénieur de recherche à la Compagnie des Compteurs de Montrouge de 1934 à 1940. Vogel travaille en électronique, sur les tubes cathodiques et les systèmes de télévision. Pendant ces quelques années, il entreprend de compléter sa formation en mathématiques et physique théorique, en suivant les cours des illustres Léon Brillouin et Louis de Broglie, en particulier.

A l'approche de la guerre, il participe activement à la mobilisation scientifique, en travaillant régulièrement aux laboratoires de Bellevue [1331]. Il semble que son intérêt pour les oscillations de relaxation naisse à ce moment là. En 1940, il se familiarise avec les oscillations non linéaires [1332], puis, contraint à la clandestinité pendant la guerre, il

[1330] Peut-être faut-il rapprocher cela de la "militarisation" du sujet et la nécessité d'avoir des résultats opérationnels sur des systèmes concrets. La maîtrise du qualitatif n'est pas encore suffisante, sauf pour quelques individus comme Minorsky ou Lefschetz, pour transférer ces méthodes vers la technique. L'armée américaine surtout est présente (ONR, US Air Force et le David Taylor Model Basin où travaillait Minorsky).

[1331] A la mobilisation en 1939, Vogel participe aux recherches conduites à l'ONRSI (Office National des Recherches Scientifiques et Industrielles et des inventions), à Bellevue (Archives personnelles de Th. Vogel, 46 ii 37, Agenda 1939. Voir également 46 ii 55, Note Personnelle, liste de publications en rapport avec la Défense Nationale, travaux effectués en 1939-40).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

poursuit en autodidacte [1333] . Il a un intérêt tout particulier pour Henri Poincaré, dont il considère qu'il a été à tort délaissé. Durant la guerre, il a ainsi recopié intégralement, à la main, les trois volumes des Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste [1334] .

Il maîtrise autant d'éléments de mathématiques que de physique sur les oscillations non linéaires. Ainsi, sa courte note d'octobre 1942 [1335] intitulée "Note sur un aspect de la politique de la recherche scientifique en France" [1336] où il montre qu'il est très intéressé par les questions d'organisation de la recherche, fait état de ses préoccupations à propos des oscillations non linéaires. La note montre que Vogel connaît très bien le sujet, il a recensé les publications (il en dénombre 200), affirme que "les bases mathématiques en ont été jetées par Henri Poincaré, vers 1890" et développées, depuis les travaux de Van der Pol et Appleton. Il annonce aussi :

"ses applications dont on ne peut encore qu'entrevoir l'étendue, comprennent les problèmes les plus actuels des techniques des télécommunications et de détection par échos (détection électromagnétique des avions, des icebergs, etc.)" [1337]

ce que nous appelons RADAR, et nous renvoie aux travaux de Cartwright et Littlewood ces mêmes années.

A la fin de la guerre (dès octobre 1944) il se rend à Marseille et se propose comme bénévole pour faire de la recherche au CRSIM, laboratoire propre du CNRS dirigé par François Canac, puis rentre au CNRS en qualité d'Attaché de Recherche en juillet 1945 [1338] , désirant s'écarter du monde de l'industrie [1339] . Sous la direction de Canac et de

[1332] Les archives montrent qu'il commence à rassembler systématiquement les articles sur le sujet, au moins à partir de décembre 1939. Archives personnelles de Th. Vogel, 46 ii 37 (note manuscrite de Vogel).

[1333] Ses thèmes privilégiés sont les mathématiques, les oscillations non linéaires (dont les travaux de Van der Pol), l'électronique (les tubes cathodiques et la télévision), le repérage par le son, la mécanique quantique et plus généralement la physique mathématique.

[1334] Les trois cahiers sont disponibles dans ses archives personnelles. Il a aussi copié la Théorie des quanta de Brillouin et Theory of Sound de Lord Rayleigh. Archives personnelles de Th. Vogel, 46 ii 39.

[1335] Concernant Vogel dans la période 1939-1944, les archives sont pratiquement inexistantes, ceci est dû évidemment à sa situation de clandestin.

[1336] Cette note est une proposition pour dynamiser la recherche française dont l'essentiel est son idée de créer des séminaires et des équipes de recherche jeunes, dont le choix des sujets serait laissé à la compétence d'un conseil de savants. Archives personnelles de Th. Vogel, 46 ii 24.

[1337] ***Ibid., paragraphe 6.***

[1338] Archives personnelles de Th. Vogel, 46 ii 55, Note Personnelle.

[1339] Comme il l'affirme lui-même : "depuis la Libération, dégoûté de l'industrie, je fais de la Recherche, travail qui me passionne". Archives personnelles de Th. Vogel, 46 ii, Lettre du 29 avril 1946.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Joseph Pérès, il travaille à une thèse liant Mécanique et acoustique (achevée en 1947), en parallèle à des questions d'acoustique pour l'aviation. Il est déjà considéré par Canac comme un "sujet exceptionnel" [1340] .

En résumé, Vogel a des compétences scientifiques très étendues en ingénierie électrique, en Mécanique et acoustique, en mathématiques (des équations différentielles en particulier), en physique plus généralement et un intérêt toujours marqué par les oscillations non linéaires [1341] . Il faut ajouter qu'il a un attrait particulier pour le calcul scientifique. En 1948, le colloque international du CNRS sur les "Méthodes de calcul dans des problèmes de mécanique" est organisé à Paris et Marseille. La présence de Vogel nous montre son intérêt pour le sujet et son intervention [1342] illustre ses dispositions pour les mathématiques appliquées. Vogel est à l'initiative, avec Jacques Valensi, de la constitution d'un laboratoire de Calcul Numérique à la Faculté [1343] . Rappelons, en outre, que dans les années 1930, à la Faculté de Marseille, les physiciens Joseph Pérès (directeur de la thèse de Vogel) et Lucien Malavard, avaient inauguré le calcul par analogies électriques [1344] . Vogel est en contact privilégié avec ces deux spécialistes, dont le second dirige le Centre de Calcul Analogique, au sein de l'Institut Blaise Pascal. Il est donc familier de cette pratique de calcul qui consiste à créer des "méthodes expérimentales de résolution, basées sur le fait que des problèmes très divers des différentes branches de la physique sont régis par des équations identiques" où "le calcul numérique est alors remplacé par des mesures" [1345] .

b. Vogel et la théorie des oscillations discontinues

En 1947, Vogel se préoccupe de la théorie des oscillations, et construit la théorie des oscillations "discontinues", depuis plusieurs années [1346] . Sa théorie et ses exposés permettent d'expliciter ses choix pour le point de vue qualitatif : ils sont fortement associés à un cadre épistémologique défini par Vogel et au calcul analogique. Les affinités avec les idées de Minorsky méritent d'être soulignées.

[1340] Archives personnelles de Th. Vogel, 46 ii 55, Lettre de Canac au directeur du CNRS, 12 juillet 1945.

[1341] Il correspond avec Yves Rocard, qu'il considère comme une autorité en la matière. Archives personnelles de Th. Vogel, 46 ii 54.

[1342] Il intervient sur "le problème aux vibrations propres et la méthode de l'escalier", [CNRS, 1948], p. 35-39.

[1343] Il est sollicité par Valensi pour en prendre la responsabilité, mais ne semble pas l'avoir accepté. (Archives personnelles de Th. Vogel, 46 ii 55, lettre de Valensi à Vogel du 25 novembre 1947). Nous ne connaissons pas le destin de ce laboratoire.

[1344] Nous renvoyons à l'intervention de Jacques Valensi dans les actes du colloque de 1948 : [CNRS, 1948], p. 7-10. Ces aspects de l'histoire du CNRS sont évoqués au chapitre 11, p. 652.

[1345] Ibid, p. 8.

[1346] Il est impossible de dire exactement depuis quelle date, mais il le signifie dans une "Note sur les travaux de Th. Vogel" de 1947 (Archives du LMA).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Son intervention [1347] au colloque international de Porquerolles en 1951 nous montre l'originalité de son analyse. Vogel s'intéresse aux oscillations "discontinues", qu'il baptise "oscillations de déferlement" : ce sont les phénomènes tels que le déferlement des vagues, ce qui en explique le nom. Les caractéristiques de ce problème le poussent vers la topologie. Il précise d'abord qu'elles ne sont pas mathématiquement discontinues :

"Un examen plus attentif montre évidement que, pour brusque que soit la transition entre deux phases dans un tel phénomène, elle ne constitue pas en toute rigueur une discontinuité mathématique ; celle-ci apparaît (dans la mesure où l'on admet l'origine expérimentale des notions mathématiques) comme une sublimation de l'observation [...]" [1348]

L'argument est important car il lui permet de considérer que ces oscillations sont continues et de recourir aux mathématiques du continu, des équations différentielles. Mais, des non linéarités très importantes sont en jeu, et les méthodes de Van der Pol ne suffisent plus :

"A côté de sa méthode du petit paramètre, conçue pour les équations assimilables à des équations linéaires troublées, Poincaré a ouvert une voie toute différente qui pénètre beaucoup plus avant dans la connaissance profonde des phénomènes, tout en restant, semble-t-il dans une certaine imprécision numérique qui lui feront, du point de vue quantitatif, préférer la précédente (encore qu'il soit peut-être permis d'en appeler de ce jugement communément admis) : il s'agit de la discussion topologique des trajectoires d'équations différentielles." [1349]

Le discours et le problème posé sont assez peu conventionnels. Il poursuit :

"[...] La discussion est dirigée de façon à mettre en lumière, avant tout, les conditions de possibilité de solutions périodiques (sans lesquelles il n'y a pas d'oscillations à proprement parler), et leur nature qualitative ; mais on espère obtenir, par la même méthode, des informations sur la façon dont ces solutions dépendent d'une déformation topologique de l'espace de représentation, ou, ce qui revient au même, de la constitution du système physique considéré. [...] ce n'est pas un résultat mathématique nouveau que l'on désire apporter, mais un mode de schématisation de phénomènes physiques que l'on propose, et qui doit avant tout paraître acceptable." [1350]

Ces quelques lignes montrent à quel point Vogel sent le besoin de se justifier et laissent penser que l'utilisation d'arguments qualitatifs parmi les physiciens et ingénieurs est loin d'être acquise.

Vogel expose ensuite sa théorie en partant d'un système électronique, un multivibrateur. La démarche est simple : il établit les équations régissant les

[1347] Intitulée "Topologie des oscillations à déferlement", [PERES, J., 1951], p. 237-256.

[1348] ***[PERES, J., 1951], p. 237 (nous mettons en évidence).***

[1349] ***[PERES, J., 1951], p. 238.***

[1350] ***Ibid., p. 238.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

comportements, puis en fait une analyse topologique (par section de Poincaré, analyse des singularités, et recherche des solutions périodiques). L'ultime étape est la confrontation avec l'expérience.

La théorie de Vogel est à la fois mathématique et physique. La théorie topologique indique et explique les comportements qui ne sont visualisables que sur l'écran de l'oscilloscope. Il ne fait aucun calcul sur les équations différentielles : c'est en quelque sorte le dispositif expérimental qui "calcule" et réalise les parties quantitatives de l'analyse. La théorie de Vogel ne serait pas complète sans cette dimension expérimentale.

On retrouve une pratique proche de celle de Minorsky, où la topologie est utilisée non sans raison expérimentale. A la différence de Minorsky il est possible de comprendre cette pratique à l'aune d'une épistémologie dont il donne quelques indices, le premier étant cette idée d'"origine expérimentale des notions mathématiques". Dans une note personnelle [1351] sur l'ouvrage de François Le Lionnais, Les grands courants de la pensée mathématique, il est très incisif. Reprenant la citation d'André Weil ("L'étude de la nature, autrefois l'une des principales sources de grands problèmes mathématiques, semble, dans les dernières années, nous avoir emprunté beaucoup plus qu'elle ne nous a rendu"), Vogel remarque : "Ne voit-il pas qu'il s'agit là d'un des 'risques de famine' qu'il signale lui-même à la garnison du réduit inexpugnable du formalisme ?". Vogel défend un certain empirisme en mathématique.

"Pendant longtemps, le mathématicien a cherché à créer des êtres mathématiques permettant de construire un monde qui sous-tende le monde réel [...] La connaissance d'un être mathématique était ainsi apparentée, il est vrai, à celle (imparfaite mais perfectible) que l'on peut avoir d'un être physique."

Il critique le "jeu formaliste" et, tout en stigmatisant les physiciens, ajoute que les résultats en sont difficilement applicables car

"[…] il n'y a que peu de probabilité pour que le physicien, dont la culture mathématique retarde d'un demi-siècle, propose de lui-même une partie qui se révèle intéressante : celles qui l'ont été autrefois, ce sont des mathématiciens tels qu'Euler, Gauss, Fourier ou Poisson qui sont allés eux-mêmes en choisir les données".

Son épistémologie explicitée est en accord avec sa pratique, résultat d'un parcours singulier, d'une réflexion personnelle et d'une triple compétence d'ingénieur, de physicien et de mathématicien.

Sous l'impulsion de Vogel, qui est le seul à travailler sur le sujet dans son laboratoire, va se mettre en place une recherche sur les oscillations non linéaires. Nous allons voir comment les caractéristiques dégagées à partir de la pratique de Vogel diffusent, font école.

Le premier "élève" de Vogel est Lefteri Sideriades, qui commence une thèse de Docteur-Ingénieur au CRSIM en 1954, dirigé par Canac. Sideriades est d'origine russe, mais a fait toutes ses études en France, où il a obtenu son diplôme d'ingénieur de l'Ecole Nationale Supérieure des Téléommunications, et, en parallèle, une licence en mathématiques et en Mécanique [1352] .

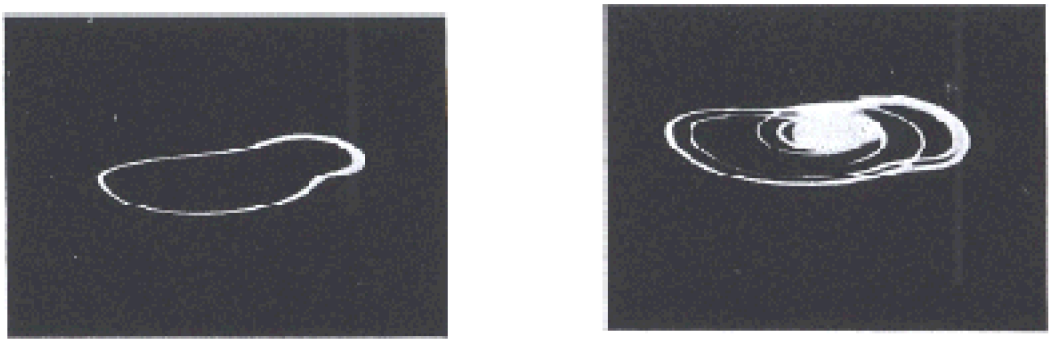
[1351] Archives personnelles de Th. Vogel, 46 ii 48. Toutes les citations suivantes sont tirées de ce texte.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Il fait sa thèse sur les "Méthodes topologiques appliquées à l'électronique" et la soutient en 1956. Mathématiques de Poincaré et circuits électroniques alternent dans cette étude qui porte autant sur les études des équations différentielles que sur les systèmes comme les multivibrateurs. L'introduction de Sideriades suffit à faire comprendre qu'il est dans la droite ligne des travaux de Vogel. Cependant, Sideriades est moins explicite et moins direct que Vogel quant à ses conceptions sur les mathématiques, mais quelques remarques suffisent à deviner que les "mathématiques expérimentales" ne sont pas loin. En fait, la thèse est intégrée dans une épistémologie classique où l'expérience suit la théorie. Sideriades relance plusieurs fois l'idée qu'il veut "maintenir constamment le lien entre la théorie et l'expérience" [1353] . Mais la théorie ici est une théorie mathématique ; bien sûr elle est destinée à expliquer le comportement des circuits, mais l'expérience sert aussi à vérifier ce qui est avancé mathématiquement. Dans la thèse, cette possibilité n'est explicitée que dans une courte note de bas de page, en tête du chapitre intitulé "Etude mathématique des systèmes non linéaires du deuxième ordre". Sideriades dit :

"La méthode présentée est une extension de la méthode des isoclines. Elle n'est donc qu'une méthode approchée pour le tracé graphique des courbes intégrales. [...] Une telle solution est propre à satisfaire le Physicien, l'Ingénieur. De toutes façons, la vérification expérimentale, indispensable, est là pour assurer la sécurité que le Mathématicien demande d'ordinaire à la rigueur de son raisonnement." [1354]

Dans sa pratique on devine que Sideriades a joué allègrement des mathématiques et des circuits, utilisés alternativement comme calculateurs analogiques et comme dispositifs de tests des théories. Dans l'exercice, l'oscillographe permet de visualiser simplement les résultats : en fait, le dispositif permet de visualiser la dynamique du système et la géométrie des solutions qui sont justement les objets des analyses mathématiques.



[SIDERIADES, L., 1956], p. 45

On retrouve les constantes que nous avons mises en évidence. On peut ajouter que

[1352] Dossier Sideriades, archives LMA.

[1353] Ce credo est réaffirmé plusieurs fois, notamment page 31 et page 132, [SIDERIADES, L., 1956].

[1354] [SIDERIADES, L., 1956], p. 73.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Sideriades est intéressé par les systèmes de calcul : à côté de la théorie des oscillations, il a réalisé un "multiplicateur de tension pour calculatrice numérique" [1355] . Plus que cela, sa maîtrise de la théorie des oscillations lui permet d'envisager la construction de circuits électroniques destinés au calcul d'intégrales [1356] .

Sideriades pratique également l'analogie comme moyen de résoudre les problèmes et utilise les méthodes mathématiques sur un problème de cheminée d'équilibre par exemple [1357] . Il développe de surcroît des études des points singuliers de l'espace à trois dimensions [1358] . Les mathématiques et les expériences font bon ménage, mais ses articles sont rédigés selon une épistémologie très conventionnelle, certainement pour ne pas déplaire.

Sideriades quitte le laboratoire en 1960, pour la faculté des sciences et continue d'y travailler régulièrement. Mais déjà une dynamique s'est installée au laboratoire et de nouveaux étudiants arrivent, perpétuant cette pratique, tout en la faisant évoluer, jusque dans les années 1970. La dynamique s'amplifie sous l'effet de diverses évolutions au laboratoire. En 1958, Vogel est nommé directeur du CRSIM : la "Dynamique théorique", c'est ainsi qu'il appelle les théories et la pratique des oscillations non linéaires, devient une section plus autonome [1359] . Un nouveau chercheur fait son apparition : en 1958, José Argémi commence ses travaux sur l'étude topologique des oscillations d'un circuit à transistors et les multivibrateurs à transistors [1360] .

c. Dans les années 1960 : évolution de la pratique et reconnaissance internationale

Avec Vogel comme directeur, le laboratoire se forge une culture de la "dynamique théorique" qui prend son plein essor dans les années 1960. Cela se traduit par une

[1355] Dossier Sideriades et procès-verbal du comité de direction, 29 juin 1957. Archives LMA.

[1356] Rapport au comité de direction du 20 juin 1959. Archives LMA.

[1357] Dans sa thèse il explique que ses résultats sur les équations différentielles sont généralisables à tout système physique, par analogie ([SIDEARIADES, L., 1956], p. 31). A propos des cheminées d'équilibre le problème est le suivant : dans certaines usines hydroélectriques, il existe une conduite qui achemine l'eau d'un réservoir vers la génératrice (turbine) plus bas. Une cheminée, dans laquelle l'eau peut monter, placée au niveau de la turbine sert à équilibrer le débit de la turbine, à condition d'être bien calibrée : il s'agit de régler les paramètres pour entrer dans un régime stable. Les méthodes topologiques appliquées aux équations permettent d'analyser le système. En outre, une machine électronique pour multiplier les signaux a été construite pour répondre à ces questions et un modèle réduit testé (Entretien avec M. Jean, 30 janvier 2003). EDF est intéressé par le projet et y participe (rapport au comité de direction, 20 juin 1962). Ces travaux vont valoir une certaine notoriété à Sideriades, en URSS surtout.

[1358] Rapport au comité directeur, 30 juin 1959. Archives LMA.

[1359] Auparavant, la théorie des oscillations était intégrée au département d'"Acoustique théorique".

[1360] Il passe d'abord un Diplôme d'Etudes Supérieures en électronique (conseil de direction du 15 septembre 1958), puis travaille sur les multivibrateurs (Rapport au comité de direction, 30 juin 1959). Archives LMA.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

diversification des thématiques abordées. Vogel s'intéresse aux "systèmes héréditaires", c'est-à-dire les systèmes dynamiques incluant une mémoire, et développe une théorie de la fatigue des matériaux. Fidèle à son passé d'ingénieur, l'appareillage en vue des expériences associées est construit [1361] . Argémi s'oriente plus résolument vers les mathématiques des systèmes dynamiques, l'étude des points singuliers devient sa spécialité.

Mais par delà la diversification, la pratique scientifique est conservée et Vogel forme les chercheurs en dynamique théorique, de manière presque méthodique et un peu paternaliste [1362] : généralement, ce sont des ingénieurs qui sont ensuite convertis à la recherche. Les sujets de recherche et l'environnement crée par Vogel incitent alors à apprendre les mathématiques de Poincaré. Sideriades, Argémi, bientôt Robert Bouc et Michel Jean, qui deviendront les piliers du département de dynamique théorique suivent ce type de parcours.

A partir de 1962, le laboratoire prend un nouvel élan. De nouveaux locaux ont été construits, il est rebaptisé Centre de Recherches en Physique, témoignant de l'évolution de son activité après vingt années de fonctionnement. Surtout, de nouveaux équipements sont installés : un calculateur analogique Djinn, puis une machine numérique CAB 500, puis deux calculateurs analogiques Analac.

Ils ne sont pas réservés à la dynamique théorique, mais le fait est que ces calculateurs sont immédiatement utilisés pour ces questions. Il nous semble que la sensibilité développée par Vogel, la combinaison des mathématiques et des expériences, a un effet bénéfique. Il paraît donc tout naturel de faire des calculs numériques. En simplifiant un peu, on peut dire que le développement ultérieur des mathématiques appliquées au laboratoire sort grandement de cette facilité à appréhender le calcul scientifique. La théorie des oscillations non linéaires et la pratique de Vogel se développent dans ce contexte, avant une crise et des bouleversements au laboratoire à partir de 1970. Pour signifier cette persistance nous prendrons un seul exemple, celui de Michel Jean.

Michel Jean

Ingénieur formé à l'ESIM à Marseille, Jean vient faire une thèse avec Sideriades. Jean se forme aux mathématiques à la lecture des classiques des oscillations non linéaires, de Poincaré à l'ouvrage de Minorsky. Son travail de thèse est à la fois une analyse mathématique des solutions périodiques de certaines équations mathématiques de la Mécanique, et la réalisation d'un dispositif expérimental. L'enjeu physique est intéressant. Dans certains circuits électriques, avec Robert Bouc, un élève de Vogel, Jean a constaté l'existence de phénomènes de saut : le système oscillant tend vers un régime donné et peut passer dans un autre régime lorsque les conditions initiales sont modifiées. Il n'y pas *a priori* de discontinuité mais un régime transitoire, que le système électrique ne permet pas d'observer, car les phénomènes y sont trop rapides. La construction du dispositif

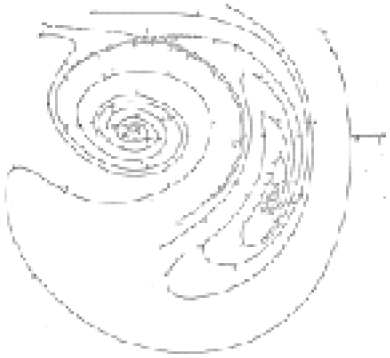
[1361] Rapport au comité de direction, 21 juin 1961. Archives LMA.

[1362] Communication personnelle de R. Bouc : Canac était un directeur plutôt autoritaire, Vogel laissait plus de liberté.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

mécanique répond à ce besoin de connaître la structure des solutions et de "ralentir" le processus [1363].

L'oscillateur mécanique construit répond à l'équation de Duffing et permet d'étudier le plan de phase de l'équation, en lançant le dispositif dans différentes conditions initiales. Il s'agit d'un "oscillateur simulateur d'une équation différentielle non linéaire" :

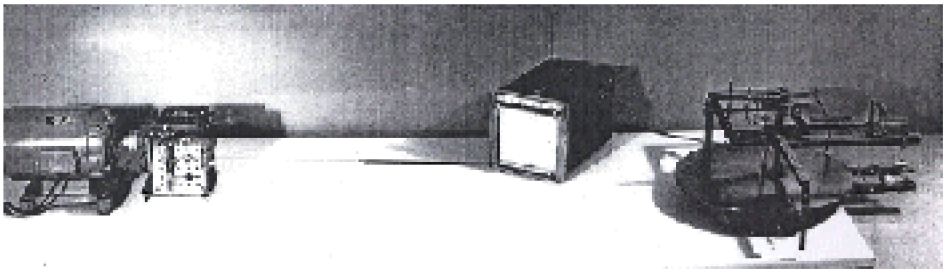


Exemple de portrait de phase de l'équation :

$J\ddot{x} + 2f.\dot{x} + h(x) = C.\cos(wt + \varphi)$ où $h(x)=ax + bx^3$

[LIAN, M., 1964], p. 147-148.

"Oscillateur simulateur de l'équation différentielle"



Une nouvelle fois, les ressorts de l'analogie sont exploités de manière à explorer une question tant mécanique, qu'électrique, que mathématique. Cependant, un peu comme pour l'analyse de Sideradies, la rédaction ne reflète pas tout à fait la démarche intellectuelle ; elle est reconstruite dans la dichotomie mathématique / physique.

Les contacts internationaux

Jusqu'à présent, nous avons beaucoup insisté sur les rapports internes au laboratoire. Néanmoins, le groupe de Vogel ne se développe pas uniquement en interne : pendant les années 1960, le groupe n'a rien d'un groupe restreint et confiné à Marseille. Il bénéficie d'une certaine aura internationale, alors que, sur le plan national, il est vrai que les contacts sont plutôt limités.

Quelques rapports sont entretenus avec Besançon : Raymond Chaléat a succédé à Jules Haag, duquel il perpétue les méthodes, mais la perspective des méthodes topologiques n'est pas très développée. Luc Gauthier, vice-doyen de la faculté de Paris, est l'autre scientifique qui s'intéresse à l'activité du laboratoire, sans apparemment avoir développé lui-même beaucoup de travaux sur le sujet [1364]. En réalité, le CRSIM-CRP est un des rares laboratoires en France qui concentre de bonnes compétences en

[1363] Entretien avec Michel Jean, 30 janvier 2003.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

mathématiques, physique et ingénierie, nécessaires pour développer la question des oscillations non linéaires. Ce problème de sous-développement s'inscrit dans le contexte particulier du CNRS des années 1960, dont nous détaillerons l'évolution au chapitre 11.

Cela se retrouve sur le plan international où les travaux de Vogel, puis de Sideriades sont très largement reconnus [1365]. Le groupe de Vogel est marginal en France, mais bien connu dans la communauté internationale de la "Mécanique non linéaire". Il est représenté dans les grandes conférences de l'IUTAM, dont la première a été celle de Porquerolles. En 1961, à Kiev, à la "Conférence Internationale sur les Oscillations Non linéaires", Vogel et Sideriades exposent leurs résultats. Une conférence internationale du CNRS est organisée au CRP (Centre de Recherches en Physique, nouveau nom du CRSIM après 1962) en septembre 1964, par Vogel et Sideriades sur le thème : "Les vibrations forcées dans les systèmes non linéaires".

Le réseau scientifique dans lequel s'insère le laboratoire peut se lire dans cette conférence. Il y a tout d'abord l'école de Kiev, lancée par Kryloff et Bogoliuboff. Dans les années 1960, Bogoliuboff et Yuri Mitropolsky en sont les leaders. Vogel, d'origine ukrainienne, est un ami de Mitropolsky [1366]. Plusieurs universitaires américains sont présents et sont des participants réguliers : Antosiewicz, Crandall (élève de J.P. Den Hartog), Rosenberg, Lamberto Cesari (groupe de Lefschetz). Il faut ajouter les italiens Sansone et Conti, les belges Janssens et Forbat [1367], et le japonais Chihiro Hayashi. Ceci explique également que ce colloque ait été un tremplin pour les jeunes chercheurs du centre, entre autres Jean, Juricic, Jullien et Bouc.

En 1969, lors de la 5ème conférence sur les oscillations non linéaires à Kiev, Vogel a acquis le statut de référent en la matière. Le comité scientifique international choisi est composé de : N. Bogoliuboff (président), Y. Mitropolsky (vice-président), Th. Vogel, C. Djadkov (URSS), S. Ziemba (Pologne), M. Cartwright et J. LaSalle. Vogel est chargé d'une conférence plénière [1368].

Pour résumer cette situation, le mot de Néel nous paraît très pertinent : Vogel était un "excellent mathématicien" mais "ni normalien, ni polytechnicien, il était, comme beaucoup de provinciaux, plus apprécié à l'étranger qu'en France" [1369]. Le développement du

[1364] Nous l'avons remarqué pour son intervention au colloque de Porquerolles de 1951 (cf. note 1329, p. 550). Il est un spécialiste d'analyse numérique (voir [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 17 et p. 43). En outre, il collabore avec Minorsky (Lettre de Minorsky à Vogel, 16 mai 1962. Archives personnelles de Vogel, 46 ii 57).

[1365] Les travaux de Sideriades sont apparement encensés en URSS, en Belgique (Lettre de Janssens à Vogel, du 2 janvier 1960. Archives personnelles de Vogel, 46 ii 59). Vogel est régulièrement invité à donner des cours, des exposés en Belgique où il est très apprécié. De même il connaît bien Mitropolsky et l'école de Kiev.

[1366] Correspondance avec Mitropolsky (Archives personnelles de Vogel). Mitropolsky semble maîtriser le français.

[1367] Janssens et Vogel sont très proches (Archives personnelles de Vogel, 46 ii 58 et surtout 46 ii 59). Vogel a fait des conférences en 1961 à l'Université Libre de Bruxelles (Archives personnelles de Vogel, 46 ii 59).

[1368] "On evolutionnary systems with nonlinear heritage", [ICNO, 1969], p. 10.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

laboratoire se fait en harmonie avec l'international. Il nous reste à dévoiler celui qui a été le contact le plus régulier de Vogel : Nicolas Minorsky.

Les relations avec N. Minorsky

A la retraite à Aix-en-provence à partir de 1950, il correspond et rencontre souvent Vogel, ils ont sympathisé [1370] . Leur relation est importante à plusieurs titres. D'abord, elle a permis à Vogel d'accéder à de nombreux documents sur ce qui se fait aux Etats-Unis et bien sûr en URSS. Minorsky lui a même transmis un grand nombre de rapports qu'il a fait pour la Marine, dès lors qu'ils ont été disponibles publiquement.

Leur correspondance montre aussi la proximité d'esprit des deux scientifiques, aux origines et formations similaires. Ainsi, les conceptions de Minorsky sur l'organisation scientifique et les rapports entre mathématiciens et ingénieurs est de nature à conforter Vogel dans sa direction de laboratoire. Minorsky stigmatise l'organisation américaine à maintes reprises :

"Ce qui constitue la faiblesse des USA (du point de vue intellectuel) est l'absence de gens comme Thomson & Tait, Maxwell, Poincaré, Boussinesq, Lord Rayleigh –(The Natural Philosophy) qui sont à cheval entre le formalisme mathématique et la vision claire des phénomènes physiques. [...] Nulle part ailleurs le ravin qui sépare les mathématiciens d'une part et les physiciens et les ingénieurs de l'autre n'est aussi grand [...]" [1371]

Minorsky est vraiment très critique à l'égard de l'organisation scientifique américaine, ce qui correspond par exemple au fait que l'école de Lefschetz soit restée dans le monde académique. Il affirme aussi, parmi ses multiples diatribes à l'encontre du système américain :

"[…] je ne suis pas admirateur de dictatures mais on doit dire qu'en ce qui concerne la recherche scientifique, c'est apparemment très bien organisé en USSR (sic) et je ne vois pas du tout comment les américains pourraient les rattraper étant donné leur système qui était bonne (sic) il y a 50, 60 ans et qui est devenu mal approprié aux exigences du moment." [1372] ***"[Aux] USA il y a beaucoup de mathématiciens et très bons mais ils trouvent que c'est 'au dessous de leur dignité' de s'occuper des questions appliquées. Et c'est aussi la raison pourquoi les Russes dépassent [les] USA avec une telle vitesse étonnante (sic)"*** [1373]

Cela aide aussi à saisir l'originalité du contexte du CRSIM-CRP. Minorsky travaille également à Florence avec Sansone et Conti, lesquels intègreront le réseau du CRP [1374] .

[1369] Dans l'autobiographie de Louis Néel (1904-2000), [NEEL, L., 1991].

[1370] Leur première rencontre a probablement été le colloque de Porquerolles de 1951. Les lettres envoyées par Minorsky à Vogel (plus d'une centaine) sont conservées dans les archives personnelles de Vogel (46 ii 57).

[1371] ***Lettre de N. Minorsky à Th. Vogel, du 30 juillet 1954. 46 II 57. Archives personnelles Th. Vogel.***

[1372] ***Lettre de N. Minorsky à Th. Vogel, du 2 mai 1960 (Archives personnelles Th. Vogel 46 ii 57).***

[1373] ***Lettre de N. Minorsky à Th. Vogel, du 18 janvier 1961 (Archives personnelles Th. Vogel 46 ii 57).***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

En retour, Vogel a participé à la réactualisation de l'ouvrage de Minorsky de 1947, publiée en 1962 : il a plusieurs fois discuté du contenu avec lui et a rédigé une partie sur les oscillations discontinues [1375] .

De la dynamique théorique aux mathématiques appliquées

La mutation et l'abandon de cette perspective de recherche commencent à la fin des années 1960. Le laboratoire traverse une crise tant financière qu'organisationnelle, prélude à l'évolution des années 1970, vers le département des Sciences Pour l'Ingénieur (SPI) au CNRS [1376] . Ces changements vont avoir un impact direct sur les thèmes de recherche et les pratiques du laboratoire. Les mathématiques appliquées pénétreront en force dans un laboratoire toujours plus équipé en moyens de calculs : ce sont les modélisations toujours plus complexes des systèmes mécaniques qui incitent au calcul informatique, poussant lui-même à concevoir des modèles sophistiqués. Progressivement la théorie des oscillations, et les subtilités de l'approche topologique, sont marginalisées et, avec le départ de Vogel à la retraite en 1973, une page est tournée. Il est néanmoins important de garder à l'esprit que les élèves de Vogel vont se reconvertir dans la Mécanique selon les nouvelles exigences des mathématiques et du calcul numérique. Le travail des années 1960, combinant mathématique et expériences, se métamorphose grâce à la grande expérience acquise par ces physiciens.

Un seul des élèves de Vogel persévère, au point de se marginaliser au sein du laboratoire à la fin des années 1970, José Argémi. Celui-ci s'est forgé une spécialité en mathématiques des systèmes dynamiques et s'intéresse même à la théorie des catastrophes de René Thom. Mais son expertise n'est plus très utile dans les nouveaux problèmes de la Mécanique. Entre 1974 et 1977 plusieurs solutions sont suggérées pour réorienter ses travaux jugés trop solitaires et les tentatives conduisent à la mise en place d'une collaboration avec l'Institut de Neurophysiologie et Psychophysiologie, laboratoire voisin du LMA [1377] . La thématique du chaos intervient en marge du laboratoire, comme reste de l'ère Vogel.

d. Les mathématiques topologiques et le calcul, un premier bilan

Avec Vogel un potentiel et une équipe de mathématiciens de grande valeur ont été mis sur pied. Dans le cadre SPI, le travail sur contrat se développe et les missions de

[1374] Minorsky détaille ces travaux avec eux dans plusieurs lettres à Vogel (Archives personnelles Th. Vogel 46 ii 57).

[1375] [MINORSKY, N., 1962]. Vogel participe activement au travail de compilation sur la théorie du contrôle, elle aussi organisée par Minorsky et publiée plus tard : [MINORSKY, N., 1969].

[1376] Nous consacrons le chapitre 11 à ces questions. Le département SPI est crée en 1975 et bouleverse l'organisation du CNRS. Le laboratoire est directement touché par les réarrengements et doit s'adapter à cette nouvelle organisation.

[1377] Comme consigné dans le rapport au Comité de direction du 5 mai 1977 : "il a trouvé là des débouchés importants à l'ensemble de ses connaissances sur les systèmes dynamiques, ce qui règle, à notre avis, un problème délicat en souffrance depuis deux ans." (Archives LMA).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

recherche s'orientent sur des problématiques laissant peu de place à des recherches un peu plus spéculatives. Ainsi les problématiques du chaos et de la théorie du chaos, lesquelles auraient pu être développées au laboratoire comme le prouvent les recherches d'Argémi, n'ont pas pu être abordées. Cela ne signifie en rien un échec, puisque le laboratoire a accompli d'autres prouesses remarquables. Mais les ingrédients de la problématique émergente étaient réunis et se sont révélés féconds dans le projet d'Argémi, qui a mis ses connaissances mathématiques au service d'une étude biologique.

Cet exemple nous montre tout le contexte dans lequel les méthodes topologiques pour les oscillations non linéaires sont reprises, au carrefour des mathématiques, de l'électronique et en rapport direct avec le calcul analogique. Les résultats à proprement parler ne sont pas déterminants. Les pratiques du calcul analogique et des méthodes topologiques le sont davantage. Il faudrait idéalement réaliser une étude de chacun des éléments du réseau international des oscillations non linéaires, des relations avec le groupe de Vogel, pour quantifier plus précisément le poids de cette pratique scientifique dans l'histoire générale des oscillations. Nous nous bornerons à expliciter les travaux des Japonais Hayashi et Ueda, pour les mettre en parallèle à ceux du CRSIM-CRP et étayer notre interprétation.

8.5. Hayashi, Ueda et les oscillations électriques

Mathématiques et calcul analogique ont déterminé, en grande partie, l'orientation scientifique vers le chaos, de l'ingénieur-physicien Yoshisuke Ueda (né en 1936). Ueda travaille dans l'environnement crée par Chihiro Hayashi (1911-1987) au département d'ingénierie électrique de l'université de Kyoto qui rappelle un peu celle du CRSIM. Certains, comme Bruce Stewart ont légèrement idéalisé ce point :

"Le chaos a été remarqué et enregistré en premier par Ueda, à la fin de l'année 1961, au cours de ses recherches de thèse sur les oscillateurs forcés, sous la direction de Chihiro Hayashi" [1378]

Ce contexte mérite donc de l'attention. Nous nous proposons de montrer comment le parcours de Ueda est orienté par les simulations sur ordinateur analogique, guidé et infléchi régulièrement par les mathématiques des systèmes dynamiques. Nous retrouverons ainsi une grande constante de notre histoire, sur cet exemple du développement des "oscillations aléatoires" qui deviendront du "chaos" en 1978 : une conjugaison de théorie des oscillations, d'ingénierie électrique et de mathématiques.

a. L'"œuf brisé"

Hayashi est un physicien, spécialiste d'ingénierie électrique, connaisseur des travaux de Lord Rayleigh, Poincaré, Lyapounov, Van der Pol et ayant une culture certaine. C'est entre 1942 et 1948 qu'il a développé ses premières recherches sur les oscillations,

[1378] ***"Chaos was first noticed and recorded by Ueda at the end of 1961 as part of his doctoral thesis research on forced oscillators under the guidance of Chihiro Hayashi", [UEDA, Y., 1992], p. v. Bruce Stewart est un ami de Ueda, rencontré en 1986. Il a souhaité recueillir les données et enregistrements des simulations de Ueda pour les conserver au Brookhaven National Laboratory [UEDA, Y., 1992], p. 210-1.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

lesquelles l'ont conduit à rédiger l'ouvrage qui l'a fait connaître : [HAYASHI, C., 1953]. Mais déjà l'association du calcul analogique et des éléments d'analyse mathématiques de Poincaré est ancrée dans sa pratique [1379].

En 1959, Ueda commence sa thèse au laboratoire. Naturellement, son sujet porte sur les oscillations forcées, sujet de prédilection de Hayashi, dans les équations de Van der Pol et Duffing. Sa problématique consiste en la recherche les états stationnaires des oscillations, c'est ce qui va l'occuper tout au long de ses analyses sur les oscillateurs électriques [1380].

Ueda possède une formation et une culture d'ingénieur en électricité. Plutôt empiriste, il est attaché à l'expérimentation et à l'observation des phénomènes [1381]. En parfaite harmonie avec Hayashi et le physicien Hiroshi Shibayama [1382], il engage ses recherches par des "expériences à l'ordinateur", destinées à saisir les phénomènes d'entraînement dans les oscillateurs forcés [1383]. L'ordinateur utilisé est un ordinateur analogique, construit au laboratoire par Minoru Abe. L'équation choisie par Ueda n'est pas l'équation de Van der Pol forcée : elle n'est pas adaptée à l'ordinateur analogique, en ce sens que les phénomènes à observer auraient lieu sur une plage de paramètres trop étroite pour l'ordinateur. C'est une équation mixte Van der Pol/ Duffing qui est retenue [1384]. En outre, Ueda utilise déjà les méthodes mathématiques de Poincaré les plus simples. Au cours des multiples simulations, il obtient, le 27 novembre 1961, une oscillation au comportement étrange, dont la figure dans l'espace des phases est décrite comme un "oeuf brisé" [1385], lequel deviendra, rétrospectivement, le premier phénomène de chaos observé dans un dispositif technique. Dans sa thèse achevée en 1963, le phénomène est appelé "oscillations de battement" [1386]. Ueda est au fait de la théorie des oscillations

[1379] Nous renvoyons aux quelques mots d'Abraham sur Hayashi, dans [UEDA, Y., 1992], p. iii.

[1380] "What are the possible steady states of a nonlinear system ? – this has always been my question.", [UEDA, Y., 1992], p. 185. Voir aussi [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 60.

[1381] "And my paradigm has always been the phenomena themselves, not papers with their abstractions, but something we can actually observe or quantify.", [UEDA, Y., 1992], p. 185.

[1382] C'est lui qui a introduit Ueda à la recherche, [UEDA, Y., 1992], p. 187.

[1383] "The main purpose of my computer experiment was to simulate the non-autonomous nonlinear differential equation describing frequency entrainment [...] ", [UEDA, Y., 1992], p. 187.

[1384] Ueda détaille tous les problèmes techniques relatifs à l'utilisation de l'ordinateur analogique dans [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 58-60.

[1385] Ueda a publié son histoire dans plusieurs articles, autobiographiques. Il utilise plusieurs qualificatifs pour décrire le phénomène observé : "shattered egg" et "broken egg" reviennent le plus souvent (voir [UEDA, Y., 1992], p. 189, [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 57, p. 65.

[1386] "beat oscillations", et figure 4.7 de sa thèse, qu'on peut trouver dans [UEDA, Y., 1992], p. 58.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

lorsque s'engage une transition au sein du laboratoire.

Une génération de chercheurs formés à l'école Hayashi quitte progressivement le laboratoire dans les années 1960. En 1964, il ne reste pratiquement que Hayashi et Ueda, au niveau des chercheurs confirmés [1387]. En 1964, Hayashi termine la seconde édition de son ouvrage Nonlinear oscillations in physical systems, qui va asseoir sa réputation. La transition au niveau de Ueda est aussi d'ordre méthodologique et conceptuel. En effet, vers 1963, il décide de se former davantage aux mathématiques, en entreprenant la lecture (avec un groupe d'étudiants) des ouvrages de Smirnov [1388]. Le groupe connaissait les applications de premier retour et les avait expérimentées sur divers systèmes, mais les méthodes plus systématiques d'étude des transformations du plan parviennent, par l'intermédiaire de l'article de Levinson, de 1944 [1389], dans les mains de Ueda. Les mathématiques, en particulier les études de Birkhoff, commencent à pénétrer l'analyse et Ueda découvre les notions d'homoclines et d'hétéroclines [1390].

b. Vers les "oscillations aléatoires"

Ces éléments sont utilisés dans l'étude des oscillations. Un dispositif est construit permettant de simuler directement les applications de premier retour sur l'ordinateur analogique [1391] et les systèmes dynamiques discrets sont maintenant au centre des études expérimentales. Grâce à ces connaissances expérimentales et mathématiques, les phénomènes oscillants, mal décrits, sont analysés et réinterprétés. A la conférence internationale sur les oscillations non linéaires de 1967, Ueda et Hayashi (avec leur collègue Kawakami) présentent une étude des orbites périodiques de l'équation de Duffing, grâce aux nouvelles méthodes [1392]. En 1969 à la conférence organisée à Kiev, ils les détaillent dans "Periodic solutions of Duffing's equation with reference to doubly asymptotic solutions" [1393], les solutions homoclines sont simulées, analysées avec les concepts donnés par Levinson, mais aussi du récent article de Smale, de 1967.

Ueda continue en solitaire l'analyse des phénomènes qu'il a observés. Il leur donne plusieurs noms : ils sont tout d'abord appelés "oscillations de battements", puis

[1387] Voir [UEDA, Y., 1992], p. 198-199.

[1388] Le mathématicien russe Vladimir Smirnov a publié une série de cinq volumes de cours de mathématiques (A course in higher Mathematics, pour la traduction en anglais), très connue des étudiants en mathématiques dans ces années. Voir [UEDA, Y., 1992], p. 198.

[1389] Il s'agit de [LEVINSON, N., 1944]. Pour le contexte de développement des théories de Levinson, nous renvoyons au chapitre 6, page 406.

[1390] [UEDA, Y., 1992], p. 199-200.

[1391] L'"automatic mapping device" est conçu par le professeur Abe, celui qui avait déjà construit l'ordinateur analogique.

[1392] "Solution of Duffing's equation using mapping concepts", [HAYASHI, C., UEDA, Y., KAWAKAMI, H., 1967].

[1393] [HAYASHI, C., UEDA, Y., KAWAKAMI, H., 1969].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"oscillations presque-périodiques", et vers la fin de 1970 ils deviennent les "oscillations aléatoires" ou les "phénomènes aléatoirement transitionnels" [1394] . Ueda assume d'abord seul son analyse, qu'il soumet au groupe de mathématiciens du professeur Minoru Urabe [1395] ; Urabe lui fera ultérieurement des commentaires assez négatifs [1396] .

Le caractère expérimental dérange les mathématiciens et la conceptualisation qu'il propose gêne les électriciens [1397] , y compris Hayashi, qui d'après Ueda, reste convaincu qu'il s'agit d'un phénomène dû aux erreurs de calcul. La publication de ses réflexions est d'abord refusée, la version publiée est agrémentée d'une annexe pour les rudiments mathématiques, mais surtout elle est présentée comme une discussion sur le rapport de la simulation d'une équation différentielle aux résultats mathématiques. Au fond, tout le problème est de justifier que les résultats observés, simulés électroniquement, ont un sens : il a des difficultés à faire accepter l'idée d'une solution stationnaire non périodique. L'autre aspect du phénomène est que l'instabilité est la règle. Comment gérer et expliquer l'analyse expérimentale dans ce cas ? Ueda propose une solution reposant sur les mathématiques des systèmes dynamiques, lui donnant les concepts pour expliquer les simulations, alors que la majorité des scientifiques opte pour des erreurs numériques.

c. Ueda et le chaos

L'aboutissement de ces recherches mathématico-expérimentales est la publication de 1978, dans laquelle se trouve ce que Ruelle a baptisé l'"attracteur japonais" :

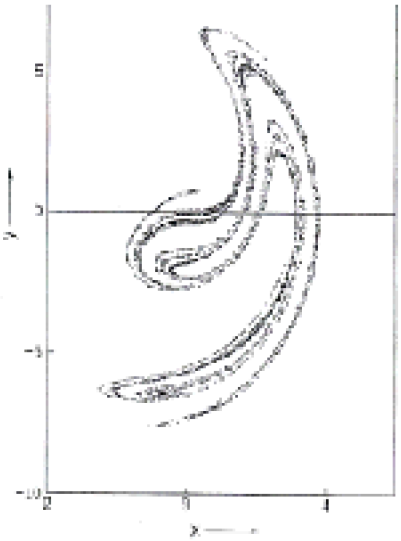
[1394] "Almost-periodic oscillations", correspond à la terminologie de 1969, dans l'article signé avec Hayashi, [HAYASHI, C., UEDA, Y., AKAMATSU, N., ITAKURA, H., 1970]. La traduction française du dernier terme rend difficilement l'idée de Ueda : "randomly transitional phenomena", voir [UEDA, Y., 1992], p. 111. L'article en question a été écrit indépendamment de Hayashi.

[1395] En décembre 1970, Ueda participe au séminaire "Ordinary differential equations and nonlinear dynamics", à l'Institut de Mathématiques de l'université de Kyoto, dirigé par Urabe. [UEDA, Y., 1992], p. 206.

[1396] Ueda rapporte les commentaires (traduits en anglais par lui-même) : "What you saw was simply the essence of quasi-periodic oscillations [...] You are too young to make conceptual observations". Ibid, p. 206.

[1397] Un peu ironique, Ueda fait part, de manière approximative, des critiques de ses collègues : "Your results are of no importance because you have not examined the effects of simulation and/or calculation errors at all" ou "Your paper is of little importance because it is merely an experimental result" ou encore "Your result is no more than an almost periodic oscillation. Don't form a selfish concept of steady states". [UEDA, Y., 1992], p. 130.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.



L'"Attracteur japonais"

Figure de 1978 reproduite dans [UEDA, Y., 1992], p. 124.

Ruelle, en visite au Japon durant l'été 1978, reste celui qui a incité Ueda à publier ses résultats dans le Journal of Statistical Physics [1398] , et a contribué à la promotion de Ueda au niveau international.

En définitive cette série de travaux s'est déroulée dans un environnement où l'empirisme prime sur les abstractions mathématiques, mais elles ont été indispensables à la conceptualisation des "oscillations aléatoires". Hayashi a su développer cette double sensibilité fécondée par la persévérance de Ueda. Pourtant, Hayashi n'a pas vraiment encouragé Ueda dans le sens qu'il souhaitait, le développement du chaos dans le laboratoire s'est fait sans l'approbation de Hayashi, qui ne reprendra pas l'article de Ueda de 1973 (qu'il a pourtant signé) dans sa sélection d'articles sur les oscillations non linéaires, en 1975 [1399] . En fait, d'après Ueda, un de ses rares soutiens s'est trouvé être le physicien Hiromu Momota : il travaillait à l'Institut de Physique des Plasmas et a dit, en substance, à Ueda, en 1974 : "Vos résultats donnent une caractéristique importante en rapport avec les phénomènes stochastiques". Au carrefour du calcul analogique et des mathématiques des systèmes dynamiques, la "stochasticité" très étudiée en URSS et développée en physique nucléaire grâce à Chirikov, rejoint le réseau conceptuel construit par Ueda. Dans les années 1975-77, et en d'autres lieux, ce sont des tendances similaires qui amèneront à développer les premières notions de chaos.

8.6. Un premier bilan : le chaos et le calcul

Les oscillations non linéaires se sont donc développées, au moins en partie, au carrefour des mathématiques des systèmes dynamiques et d'une pratique scientifique combinant mathématiques, physique et calcul analogique. Nous avons très peu évoqué la place du calcul digital, mais dans le cheminement vers la topologie et le qualitatif, il est de moindre

[1398] [UEDA, Y., 1979].

[1399] [HAYASHI, Y., 1975].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

importance. Nées dans les années 1930 ces oscillations sont surtout un produit de physiciens, qui ont développé une sensibilité de mathématiques expérimentales. Epistémologiquement, ils s'appuient sur une conception empirique des mathématiques, explicitée très clairement par Vogel.

Le calcul analogique illustre à la fois l'importance de cette épistémologie des mathématiques et la pratique des analogies mathématiques depuis Van der Pol. Le calcul digital possède des racines communes et a autorisé le développement d'autres questions, comme nous le verrons au chapitre suivant.

Grâce au calcul analogique et au travail de Minorsky, les méthodes de Poincaré se sont diffusées hors d'URSS. Il a permis le maintien et le développement de ces mathématiques et leur utilisation pour les études des phénomènes dynamiques. L'ère du chaos doit énormément à l'impulsion de Minorsky, autant qu'aux considérables travaux de l'école d'Andronov et aux autres pôles de recherches soviétiques. Ceci explique encore que Poincaré est encensé pour ses recherches sur les équations différentielles, avant 1975. Lors de l'anniversaire de 1954, lors du congrès d'Histoire des Sciences en 1968, où Mitropolsky explique l'importance des idées de Poincaré pour les oscillations non linéaires en URSS [1400] .

Les prolongements de ces recherches sont toujours le fait de physiciens. Argémi et Ueda sont directement intégrés au champ de recherche du chaos. On peut pareillement mettre en perspective les travaux de Rössler. Sans être connectés directement aux contextes présentés, il a développé une même sensibilité de physicien, d'expérimentateur des mathématiques, grâce au calcul analogique. On a vu l'importance de la pensée analogique, de ses connaissances en théorie des oscillations, en électronique en particulier. Robert Shaw et Yves Pomeau participent du même état d'esprit, mais débutent plus abruptement dans le domaine de la dynamique. Seul Shaw poursuit le travail sur calculateur analogique après 1980, dans une problématique très particulière. En 1984, dans son Le robinet qui fuit comme système chaotique modèle [1401] , il propose une nouvelle façon d'envisager la modélisation des systèmes chaotiques. Pour modèle, il prend un robinet qui fuit, dont on peut faire varier le débit. Il récupère les données (chute d'une goutte au temps t) en considérant le système comme une boite noire. En parallèle, il réalise des simulations d'équations avec paramètres sur ordinateur analogique : le but est de faire varier les paramètres sur l'ordinateur analogique de manière à reproduire les données de la fuite. Ainsi, une représentation de la dynamique du phénomène est esquissée, directement à partir des mesures. Il ne cherchera pas un modèle fondamental pour expliquer pourquoi et comment l'écoulement se produit, mais se contente de cette simulation du phénomène et sa description en terme des équations et des paramètres trouvés empiriquement. Cela rappelle les "modèles électriques" du cœur de Van der Pol. L'idée est ensuite abandonnée, sans doute parce que le programme d'ordinateurs analogiques est définitivement abandonné [1402] .

[1400] [MITROPOLSKY, Y.A., 1968]. Nous renvoyons à la citation dans le chapitre 1, page 21.

[1401] The dripping faucet as a model chaotic system : [SHAW, R.S., 1984]. On peut également consulter [Gleick, J., 1989] pour plus de détails sur cet épisode.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

CHAPITRE 9. L'ORDINATEUR ET LES MATHÉMATIQUES EXPÉRIMENTALES

Pour les analyses des phénomènes de chaos dans les années 1975-82, comme dans l'évolution de la théorie des oscillations, l'ordinateur, analogique ou numérique, joue un rôle primordial. Nous avons montré au chapitre précédent que l'intervention du calcul analogique n'est pas neutre. D'une part, le calcul a contribué directement à la théorie des oscillations, d'autre part, il a nécessité un travail d'appropriation, réalisé grâce au développement d'une pratique expérimentale et mathématique. La situation est similaire pour le calcul sur les machines digitales. Nous allons voir en effet, que si la simulation numérique devient courante à la fin des années 1970 dans le champ du chaos, elle a son histoire : une réflexion et une pratique se sont développées après la seconde guerre mondiale, conduisant à l'"expérimentation numérique", dont on verra les différences avec les expériences mathématiques analogiques. Plusieurs scientifiques ont participé à ce mouvement. En premier lieu nous singulariserons Michel Hénon, dont la sensibilité de physicien se trouve au cœur de l'approche du calcul et s'est fructifiée dans ses travaux de 1964 (modèle de Hénon-Heiles) et 1976 (attracteur de Hénon). Ensuite, nous nous proposons d'analyser les travaux de Stanislaw Ulam, en particulier ceux concernant les transformations non linéaires, sujet du "Period three implies chaos" de 1975. Son influence a été beaucoup plus générale et c'est avec lui que la notion d'expérience mathématique s'est transformée, sur la base des idées de Von Neumann, pour construire une pratique très répandue. Enfin, si nous associons aujourd'hui l'"attracteur de Lorenz" et l'"effet papillon" au nom d'Edward Lorenz, ces notions masquent en réalité une démarche personnelle un peu reléguée dans l'oubli, combinant modélisation, simulation et les problématiques de la prévision météorologique.

9.1. De l'analogique au numérique : Hénon et les expériences numériques

Hénon est entré à l'ENS en 1950, où il acquiert une formation de physicien (agrégation en 1954). Il est stagiaire de recherche au CNRS, à l'Institut d'Astrophysique de Paris, sous la direction d'Evry Shatzmann en 1954, puis Attaché de Recherche l'année suivante. Les premières spécialités de Hénon sont le calcul analogique, qui est sa principale activité jusque vers 1960, et l'astronomie, qui reprend le dessus pour sa thèse d'Etat [1403]. Ce travail sur les calculateurs analogiques a été déterminant dans sa pratique scientifique, son épistémologie, et ses recherches à base d'"expériences numériques". Ceci nous

[1402] Quelques années plus tard, des scientifiques reviendront sur le problème avec les moyens des ordinateurs numériques. L'intérêt du dispositif se fixe progressivement autour du scénario de transition vers les régimes chaotiques. Les scénarios les plus classiques sont testés, mais il y a une volonté de préciser toujours plus la transition. Voir par exemple : [NEDA, Z., BAKO, B., REES, E., 1996].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

permettra d'éclairer ses travaux célèbres, et ceux qui le sont moins.

a. Hénon et les calculateurs analogiques

Rappelons au préalable qu'en astronomie l'expérimentation directe est impossible. L'observateur n'a pas de prise sur les phénomènes et ne peut pas les reproduire. Le calcul numérique ouvre, *a priori*, une voie particulièrement intéressante. En outre, et contrairement à d'autres domaines avec la même impossibilité de principe, l'astronomie est une discipline déjà très mathématisée, reposant sur la Mécanique. Ceci forme l'arrière-plan des développements détaillés maintenant.

Hénon participe à la construction de plusieurs machines, mais principalement, il conçoit entièrement son propre calculateur [1404], depuis l'étude théorique jusqu'aux analyses électroniques et expérimentales. La machine est construite en plusieurs étapes. Une première partie (dite "linéaire" par Hénon), concernant surtout les intégrateurs, est achevée dès 1956 ; la partie "non linéaire", réalisée durant l'année 1957, permet de faire des calculs complexes, grâce à la possibilité d'introduire des fonctions quelconques, par tables numériques, et de résoudre des équations différentielles [1405].

En parallèle, il a achevé la mise au point du CAREDDOL (Calculateur Analogique pour la Résolution des Equations Différentielles du Deuxième Ordre Linéaires) au laboratoire de Physique de l'ENS en 1955 [1406]. Il a dressé le plan d'une machine pour l'Institut d'Optique et d'une autre pour le calcul des indices complexes [1407].

Les calculs sur sa propre machine commencent véritablement l'année 1957, pour quelques problèmes d'astronomie, puis des problèmes "classiques", de transformée de Fourier, de cristallographie, d'équations de Bloch (physique nucléaire) [1408]. Son calculateur est utilisé à des fins de résolutions numériques, mais pas uniquement. Il lui permet, par exemple, de chercher la meilleure représentation possible des équations de structure interne des étoiles [1409].

Toute cette phase est importante, car elle forme et prépare Hénon à tous les aspects

[1403] Michel Hénon nous a fourni un *curriculum vitae* complet ainsi que l'intégralité de ses rapports d'activité rédigés pour le CNRS. Nous tirons l'essentiel de nos informations de ces documents, complétés par une interview.

[1404] Essentiellement, Hénon a construit sa machine seul. Il dit avoir eu très peu de contacts avec le Centre de Calcul Analogique (CCA). Louis Couffignal, directeur de l'Institut Blaise Pascal (dont dépendait le CCA) était son "parrain de recherche" ; le nom de Lucien Malavard (directeur du CCA), s'il s'en souvient, ne lui évoque rien de particulier aujourd'hui. Entretien avec M. Hénon, 17 mars 2004.

[1405] Rapports d'activité février 1955-février 1960. Archives personnelles de M. Hénon.

[1406] Rapport février 1955 et février 1956. Archives personnelles de M. Hénon.

[1407] La première a été réalisée à l'ENS Saint-Cloud et pour le calcul des pouvoirs de transmission et de réflexion des couches minces. Rapport février 1955. Archives personnelles de M. Hénon.

[1408] Rapport d'activité de février 1959. Archives personnelles de M. Hénon.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

du calcul scientifique. Il connaît les problèmes pratiques de conception d'un calculateur. Mais plus que cela, il sait ce que signifie "faire un calcul" sur une machine analogique : c'est d'abord réaliser une expérience de physique, une mesure sur un dispositif électronique. L'opération n'a rien de banal, car la mise en place des dispositifs demande une analyse à la fois physique et mathématique des circuits électriques, et électroniques : il faut les concevoir, les calibrer, en tester la stabilité, en tirant profit du fait qu'ils sont eux-mêmes régis par certaines équations mathématiques [1410]. Hénon agit en physicien et le revendique. De même qu'il est physicien pour la conception des calculateurs, il est physicien dans leur utilisation. Ce sont plus que de "simples" calculateurs : ils permettent de faire des "expériences numériques", selon le terme utilisé plus tard par Hénon. Pour ne pas se tromper sur le sens de ce terme nous insistons et reprenons Hénon :

" Il est certain qu'on ne peut rien prouver, au sens mathématique du terme, par des calculs de ce genre. Ce travail est à ranger dans la catégorie des expériences numériques, qui à mon avis ont la même valeur, ni plus ni moins, que des expériences de physique." [1411]

Lorsque Hénon emploie ces termes, il est dans une phase ultérieure de ses recherches, l'étude numérique, sur ordinateur digital, des transformations planes (en 1967 pour la citation). En fait, une fois sa machine achevée, il a mis de côté le calcul analogique pour utiliser l'IBM 750, calculateur digital, disponible à Meudon [1412]. Il ne construit plus de machines pour la recherche. Nous pensons que l'origine de cette perception du calcul, comme expérience de physique, se trouve dans sa sensibilité première pour le calcul analogique [1413]. Il faut ajouter qu'il ne fait que peu de différence sur ce point, entre analogique et numérique, ce sont des expérimentations mathématiques dans les deux cas [1414].

[1409] Rapport d'activité de février 1960. Archives personnelles de M. Hénon.

[1410] On peut citer de multiples exemples. Hénon a réalisé un dispositif pour obtenir précisément des résistances d'une quelconque valeur souhaitée (cela a donné lieu à une publication : [HENON, M., 1958]). La publication de la note relative à la machine analogique pour les calculs en optique montre l'analyse mathématique préliminaire au problème [HENON, M., 1955]. Dans l'étude du CAREDDOL Hénon affirme : "La stabilité de la machine, dans ses différentes conditions de foncitonnnement, a posé des problèmes mathématiques qui ont été résolus." (Rapport d'activité février 1956).

[1411] Il s'agit de quelques mots de discussion, inclus en annexe de l'article (il correspond vraisemblablement à un exposé dans un colloque que nous n'avons pas pu déterminer). Hénon répond à une question de "M. Perek" : "It is hardly possible to prove a positive statement by means of numerical methods.", [ROELS, J., HENON, M., 1967], p. 285.

[1412] Pour des raisons de précisions des calculs, l'analogique lui a paru être dépassé par le numérique. Entretien avec M. Hénon, 17 mars 2004.

[1413] Hénon semble assez fasciné par les dispositifs mécaniques analogiques pour le calcul, datant du début du siècle. Entretien avec M. Hénon, 17 mars 2004.

[1414] Entretien avec M. Hénon, 17 mars 2004. Hénon fait valoir que dans un calcul analogique on remplace un phénomène physique par un autre, en s'arrangeant pour avoir les mêmes équations ; "en poussant un peu, c'est la même chose pour l'ordinateur, car c'est aussi un objet physique".

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

b. Les expériences de Hénon et Heiles. Princeton, 1962-63

Dans les années 1960, donc, Hénon expérimente sur différents problèmes d'astrophysique. Pour sa thèse, il avait considéré des questions de dynamique stellaire. Durant son séjour à Princeton, en 1962, il forme le projet d'étudier le problème d'une étoile dans une galaxie asymétrique. Les résultats conduisent à l'article de Hénon et Heiles de 1964 [1415] .

Ce travail relève de l'astronome-expérimentateur, mais aussi des mathématiques expérimentales. Les premières simulations ont révélé des "irrégularités", à peine perceptibles. Il a confié à un étudiant de Princeton, Carl Heiles, la tâche de refaire les calculs, depuis le début, sur une autre machine. Comme un physicien souhaitant évaluer la pertinence de ses résultats, les simulations, parce qu'elles donnent un résultat inattendu, sont reproduites sur une autre machine, indépendamment. Cela montre qu'il connaît toutes les difficultés du calcul : les erreurs peuvent venir de la programmation, des arrondis, de la machine qui est un dispositif physique et, à ce titre, ne peut pas réaliser un calcul "exact", comme il n'y a pas de mesure exacte en physique. Là où d'autres auraient peut-être écartés les phénomènes erratiques, Hénon persiste.

Pour lui, il faut mettre de côté les aspects astronomiques, pour se concentrer sur les propriétés mathématiques des modèles et faire usage des expériences numériques. Plusieurs modèles sont construits, transformés ou simplifiés dans l'objectif de saisir les caractéristiques les plus importantes. Dans ce but, les sections transverses, inspirées du travail de Birkhoff, connues de ces astronomes, sont employées. Des itérations sont ensuite introduites, à la place des équations différentielles [1416] . La simulation numérique sur les machines numériques de Princeton permet d'évaluer la pertinence des choix, de se donner une intuition ("feeling"), de donner des contre-exemples [1417] : c'est ce qui a permis de révéler la "surprise" [1418] du mélange de comportements quasi-périodiques et "ergodiques".

[1415] [HENON, M., HEILES, C., 1964]. Nous renvoyons aux analyses complémentaire du chapitre 7, page 494.

[1416] Cf. [HENON, M., HEILES, C., 1964], p. 77. D'après notre interview, Hénon dit avoir eu l'idée, confirmée ou précisée, semble-t-il, par Martin Kruskal (physicien travaillant sur les accélérateurs de particules). Kruskal a écrit une lettre à Hénon datée du 12 juin 1962, dans laquelle il rapproche les comportements de ce qu'il connaît, à savoir que dans les systèmes où il existe une intégrale "approximative", les courbes peuvent être nettes dans certaines régions, et devenir "fuzzy" dans d'autres. Nous ne savons pas à quoi Kruskal fait exactement référence (itération ? section de Poincaré d'un phénomène expérimental ?), mais il s'agit d'un phénomène effectivement très proche de celui de Hénon. (Archives personnelles de M. Hénon).

[1417] Michel Hénon nous a donné accès aux notes d'un séminaire de recherche, donné à l'Institute for Advanced Studies de Princeton le 28 janvier 1963, qui en dit plus long que l'article publié en 1964. On y trouve les explications de sa démarche et notamment : "Of course, no rigorous proof can be achieved in this way. But this kind of experiments can help very much by providing a "feeling" of the problem. It can also provide useful counter-examples, as we shall see.", à la page 5. (Archives personnelles de M. Hénon).

[1418] "But here comes the surprise", [HENON, M., HEILES, C., 1964], p. 76.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Après les résultats Hénon-Heiles, Hénon s'oriente vers des études numériques du problème des trois corps et des transformations du plan conservant les aires. C'est par analogie avec la question de 1964 qu'il pénètre ces questions de système dynamique. Dans ses travaux, on retrouve deux constantes : l'utilisation des méthodes de Poincaré et Birkhoff. La section transverse est l'outil fondamental pour l'étude des orbites périodiques et générales du problème des trois corps restreint. Les théories de Birkhoff sur les transformations planes donnent des outils théoriques pour guider la recherche expérimentale. L'ordinateur donne la possibilité de résoudre les équations, de manière approchée, mais l'objectif n'est pas celui-ci. Dans le problème de trois corps restreint, Hénon cherche à préciser la classification des trajectoires, réalisant en quelque sorte le projet de Poincaré. Ses longues analyses, réalisées depuis 1963, constituent un de ses plus beaux succès [1419] , en même temps qu'elles prouvent la pertinence des méthodes théoriques de Poincaré pour les expériences numériques.

Le résultat de 1976 est un autre exemple de cette double constante. Hénon transfère les techniques numériques et méthodes théoriques des systèmes conservatifs sur un exemple de système dissipatif. Cela suscitera un intérêt pour les attracteurs étranges, pendant quelques années. L'aspect expérimental de ces recherches convient tout à fait à Hénon, qui ne s'inquiète pas outre mesure du fait de savoir si l'attracteur étrange "existe", mathématiquement, ou non.

c. L'ordinateur dans la science

De l'analogique au numérique, l'intérêt de Hénon pour le calcul et ses connaissances sur les calculateurs expliquent en grande partie les démarches et la pensée "physiciennes" : on la retrouve dans son utilisation de l'ordinateur dans la science, mais aussi, par exemple, dans sa conception de chaos. En effet, il en donne une définition très opérationnelle, visuelle et empirique : sur l'exemple des surfaces de section bidimensionnelles, le chaos correspondrait à la diffusion d'une trajectoire dans l'espace, alors qu'un comportement non chaotique serait illustré par un arrangement des points sur des courbes régulières [1420] ; on peut y ajouter la propriété de divergence des trajectoires voisines.

Hénon est très rapidement conscient de l'opportunité de la démarche, de son originalité aussi.

Pour lui, ce type d'expériences expliquerait d'ailleurs quelques points d'histoire :

"'Pourquoi le chaos n'a-t-il pas été découvert 100 ans plus tôt ?'. C'est une question qui m'a toujours intrigué. L'absence d'ordinateurs n'est absolument pas une explication ; les astronomes faisaient déjà à la main des calculs bien plus longs que l'exploration numérique d'un simple mapping [...] Même avec les techniques de l'époque, il n'aurait fallu que quelques jours de travail pour mettre en évidence un attracteur étrange, par exemple. Je me demande si l'explication

[1419] Celui dont il est le plus fier en tout cas. Il est conscient de l'impact de ses travaux sur le "chaos", mais concède qu'il a consacré beaucoup plus de temps et d'énergie au problème des trois corps. Entretien avec M. Hénon, 17 mars 2004.

[1420] Entretien avec M. Hénon, 17 mars 2004.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

fondamentale n'est pas que le concept même d'expérimentation numérique n'existait pas. C'est une approche qui ne venait à l'idée de personne. La seule méthode concevable était analytique : écrire les équations du problème, puis s'échiner à en trouver la solution générale. Il est assez fascinant de constater sur cet exemple à quel point les modes intellectuelles, les habitudes de pensée peuvent influer sur le développement de la science !" [1421]

Plus que l'ordinateur, c'est une évolution dans les conceptions du calcul et de son utilisation qui aurait marqué l'histoire du chaos. Cette idée est très proche de ce que nous avons démontré au sujet de la place de l'analogie et du calcul analogique dans la théorie des oscillations non linéaires. Ici, le calcul analogique a fortement inspiré le cadre épistémologique de Hénon.

Tout le monde ne partage pas ces conceptions (Hénon ne s'en cache pas). Avec l'analyse plus générale de l'évolution du calcul numérique, nous pourrons mettre l'épistémologie de Hénon en parallèle avec celles d'autres partisans de ces mathématiques expérimentales et tenter d'expliquer les différences de position. On peut également mettre en perspective sa position relativement aux mathématiques abstraites, celles de Bourbaki en particulier, qui le "rebutait un peu" [1422] . L'inverse est aussi vrai : de l'aveu de Hénon, aucun mathématicien ne s'est intéressé directement à ses travaux (avant l'euphorie des années 1970), sauf un, le russe Vladimir Arnold. Rencontré lors du séjour d'Arnold à Paris en 1963-64, Hénon l'a approché et Arnold lui a suggéré divers problèmes à tester sur ses machines [1423] .

Malheureusement, Hénon n'a pas fait véritablement école ; il n'en avait peut-être pas l'envie. Dans le laboratoire de Nice, Froeschlé (qui a fait sa thèse sous la direction de Hénon) et Scheidecker se sont inscrits dans la perspective des systèmes dynamiques et ont participé aux débats sur la stochasticité et le chaos à partir de 1975. Selon toute vraisemblance, Hénon a eu plus d'influence par ses résultats publiés que par la transmission directe de sa pratique. De même, dans la diffusion de la simulation numérique, il n'aura été qu'un maillon parmi d'autres. Les méthodes de Poincaré et Birkhoff ont sans doute davantage profité du vecteur des publications pour se diffuser au niveau des astronomes. Au croisement de ces deux pratiques, Hénon a donné en 1982, une méthode permettant de faciliter le calcul numérique des sections de Poincaré. Outre ces publications, son intervention à l'école d'été des Houches, en 1981 [1424] , a sans doute

[1421] Lettre de M. Hénon à François Lurçat, 18 février 1999 (nous mettons en évidence). Archives personnelles de M. Hénon.

[1422] Entretien avec M. Hénon, 17 mars 2004. Il affirme ne pas avoir voulu entrer dans des lectures de mathématiques trop "abstraites" et dit : "je préfère une démarche inverse à celle de Bourbaki, c'est-à-dire partir de choses concrète et généraliser".

[1423] Hénon est assez élogieux à propos d'Arnold, dont il dit qu'il était très intéressé par les expériences numériques. En 1965, Arnold lui a écrit une longue lettre (10 pages) explicitant différents problèmes susceptibles d'être traités par ces moyens. En outre, pour reprendre Hénon, Arnold "parlait le langage des physiciens" (entretien avec M. Hénon, 17 mars 2004). Issu d'une formation et d'une culture privilégiant ce rapport de la physique et des mathématiques, à l'opposé de beaucoup de "puristes" français, il est facile de comprendre qu'Arnold se soit intéressé à cette démarche. Hénon a publié une étude suivant une de ces recommandations : [HENON, M., 1966d].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

marqué les auditeurs, mais, à ce moment là, la simulation numérique est déjà devenue courante, en particulier dans le domaine du chaos.

9.2. Stanislaw Ulam et les "expériences de mathématiques"

Des analyses des travaux postérieurs à 1975, il émerge que Ulam est considéré comme un des premiers partisans des expériences de mathématiques, un participant des expériences FPU ; ses travaux sur les transformations non linéaires ont eu un impact direct dans les travaux des années 1970, tels l'article de Metropolis, Stein et Stein, sur le phénomène de doublement de période, l'article de Li et Yorke de 1975. Ce n'est qu'un aspect de ses réflexions sur la simulation numérique et leur utilisation en mathématiques. Les débuts de Ulam sur le sujet se font au laboratoire de Los Alamos, en étroite relation avec J. Von Neumann, un des principaux inspirateurs du calcul numérique électronique. Ils développeront la méthode Monte-Carlo, au croisement avec la théorie ergodique, avec laquelle ils sont tous deux familiers. Afin d'évaluer l'apport d'Ulam à l'histoire du chaos, nous nous intéresserons ensuite à son action pédagogique et épistémologique en vue de faire accepter ce genre d'expériences mathématiques.

a. Les simulations Monte-Carlo

La simulation Monte-Carlo s'est développée dans le cadre du laboratoire de Los Alamos [1425] . Le problème posé originellement est une question d'évaluation des propriétés d'un processus de diffusion de neutrons, issus d'un réacteur nucléaire par exemple. Le processus est trop complexe pour être évalué précisément dans son ensemble. La méthode, imaginée d'abord par Ulam en 1946, puis perfectionnée avec Von Neumann et Metropolis, consiste à réaliser un "modèle statistique" du phénomène physique, combinant des "processus stochastiques et déterministes" [1426] . L'intention [1427] est de calculer le cheminement d'une particule selon un processus simplifié : l'"histoire" d'une particule est une chaîne d'évènements, où à chaque étape, la suite de l'"histoire" est tirée au hasard selon une loi connue. En simulant plusieurs parcours, on obtient une idée

[1424] Hénon donne un cours intitulé : "Numerical exploration of Hamiltonian systems", [IOOSS, G., HELLEMAN, R.H.G., STORA, R., 1983], p. 53-170. C'est en quelque sorte un bilan des recherches depuis 1962, sur les expériences numériques des systèmes dynamiques Hamiltoniens.

[1425] Rappelons qu'Ulam a participé aux deux projets de constructions d'armes atomiques, le projet Manhattan et la bombe H, et travaille régulièrement à Los Alamos, où se concentre la recherche en la matière.

[1426] [ULAM, S., VON NEUMANN, J., 1947].

[1427] L'idée serait venue à Ulam, lors d'une convalescence, en jouant au jeu de patience. Se posant la question de la probabilité de réussite du jeu en général, il a pensé qu'il était possible de s'en donner une idée en jouant un certain nombre de partie et en réalisant une statistique (la proportion de succès en l'occurrence). Lors d'un passage de Von Neumann à Los Alamos en 1946, il lui a transmis cette idée de simulation statistique, qui les a conduit à développer une méthode adéquate et des procédures réalisables sur les machines électroniques. Plusieurs récits existent, par Ulam lui-même [ULAM, S., 1976], p. 196-200, par Metropolis (dans [COOPER, N.G., ECKHARDT, R., SHERA, N., 1989], p.125-130) et [ASPRAY, W., 1990], p. 111.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

statistique du comportement dans son ensemble. Les premiers calculs, pour une réaction en chaîne, sont réalisés par Nicolas Metropolis [1428] en 1947, sur l'ENIAC, une des toutes premières machines à calculer électroniques, suffisamment rapide. Ce procédé deviendra la méthode de Monte-Carlo, en 1949 [1429] , et sera appliqué à plusieurs types de problèmes, de la physique atomique aux calculs sur les équations différentielles.

La théorie ergodique représente un fond culturel [1430] et intervient à deux niveaux dans la méthode : pour la justification mathématique et la production de processus aléatoires. Le principe de la justification, qui repose sur des combinaisons de processus probabilistes et déterministes [1431] , est le "Random ergodic theorem" [1432] démontré par Ulam et Von Neumann.

La question de la génération d'un processus aléatoire est plus problématique. Von Neumann privilégiait une approche arithmétique, c'est-à-dire la recherche de fonctions simples, à itérer pour donner des suites de nombres aléatoires [1433] . En 1947, Von Neumann et Ulam prennent un exemple en particulier : l'itération de la fonction $f(x)=4.x(1-x)$, dont on peut ensuite tirer des simulateurs d'aléatoire, selon des distributions de probabilité données. C'est la même itération, la fonction logistique, qui fera l'objet de tant d'attention pour ses propriétés dites chaotiques à partir de 1975.

Les mathématiques investies dans les simulations imaginées sont d'abord des processus probabilistes, mais qui trouvent bon nombre de leurs applications dans des mathématiques plus "déterministes". Ulam a conçu la méthode de calcul d'intégrales multiples. En 1948, Fermi, Ulam et Von Neumann ont réalisé des estimations des valeurs propres de l'équation de Schrödinger [1434] . D'après Aspray, le travail sur les méthodes

[1428] [ASPRAY, W., 1990], p. 112

[1429] [METROPOLIS, N., ULAM, S., 1949]. Metropolis a donné le nom de "Monte-Carlo" à ce procédé de simulation.

[1430] Rappelons que Von Neumann a produit le premier "théorème ergodique" en 1931, et Ulam a proposé un début de classification, avec Oxtoby, en 1941. Nous renvoyons au chapitre 7, page 451 (paragraphe sur les théorèmes ergodiques) et page 466 en particulier.

[1431] Probabiliste ou déterministe, selon Ulam, c'est une affaire d'interprétation, et non pas de méthode mathématique en elle-même. Ulam cite un exemple expliquant cette facilité à les combiner : en prenant l'ensemble des nombres réels, dans leur décomposition binaire, et la transformation *T*, qui consiste à décaler toutes les décompositions d'un cran, la loi des grands nombres et le théorème ergodique de Birkhoff donnent le même résultat. Comme le rappelle Ulam, cela a déjà été constaté par Doob, Hopf et Khinchine, lequel avait donné une "version probabiliste" au théorème de Birkhoff (Cf. chapitre 7, p. 464). Ces explications proviennent de l'exposé d'Ulam au congrès des mathématiciens de 1950 ([ULAM, S., 1974], p. 266).

[1432] [VON NEUMANN, J., ULAM, S., 1947]. La généralisation proposée par Ulam et Von Neumann est de considérer non plus l'itération d'une seule transformation, comme c'est le cas pour le théorème ergodique de Birkhoff, mais une itération pour laquelle, à chaque étape, la transformation est choisie au hasard dans un ensemble donné de transformations. Voir [ULAM, S, 1974], p. 266-7.

[1433] Une autre approche relève davantage de la physique, comme par exemple l'enregistrement d'un processus physique aléatoire (un peu comme un compteur Geiger). Mais des difficultés pratiques émaillent l'utilisation d'un tel procédé. [ASPRAY, W., 1990], p. 113.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Monte-Carlo a intéressé Von Neumann aux propriétés de l'aléatoire : il calculait les décimales de π afin de déterminer leurs déviations statistiques par rapport à un phénomène purement aléatoire [1435] .

Les méthodes Monte-Carlo se développent donc au croisement de la simulation numérique et de la théorie ergodique, et vont susciter chez Ulam la recherche des propriétés ergodiques des transformations, et plus généralement leur comportement asymptotique. Dans l'exploitation des possibilités offertes par l'ordinateur, la présence de Von Neumann est importante, car il réfléchit depuis 1945 à la conception des machines et à leur utilisation pour ses recherches mathématiques. Cela influence Ulam, qui produit par la suite une réflexion, un discours sur les "expériences de mathématiques", inspiré par les idées de Von Neumann, mais qu'il sait adapter au public des mathématiciens.

b. Des expériences de mathématiques

Lorsque Ulam discute des expériences réalisées sur les machines électroniques, en 1959 [1436] , il les présente comme des "aides heuristiques" ; surtout, il les compare, en introduction, à des expériences manuelles que l'on réalise habituellement en mathématique, en théorie des nombres en particulier, à la différence près que les calculs sont plus rapides. Il s'agirait donc de prolonger ces efforts, de faire des tests en plus grands nombres, pour se donner une image plus claire d'un problème. De ce point de vue, on peut considérer ces expériences comme une très légère entorse aux pratiques des mathématiciens.

Cependant, les exemples suivant cette discussion, surtout lorsqu'il s'agit des problèmes de la physique mathématique et des méthodes Monte-Carlo, s'écartent de ce premier modèle. L'expérience est une simulation numérique et relève de beaucoup plus d'empirisme. En outre, la question des erreurs de calcul, dues aux approximations de la méthode ou bien au dispositif physique, est éludée volontairement par Ulam.

Les intentions d'Ulam sont plus clairement exposées dans ses réflexions de 1976. La physique mathématique et la physique théorique sont déconnectées des autres problèmes intéressants les mathématiciens. Dans le premier cas, les expériences sur les ordinateurs sont discutées et mises en perspectives avec les premières réalisations très empiriques, dans l'immédiat après-guerre, pour les mathématiques "pures" le discours est plus modéré [1437] .

Il n'y a pas à douter que Ulam a conscience des problèmes soulevés par ces expériences et il pèse ses mots. Au sujet des erreurs de calcul, il faut rappeler que la

[1434] [ASPRAY, W., 1990], p. 112, (pour la méthode d'Ulam voir : ibid., note 57, p. 289).

[1435] Au point de calculer 2000 décimales de π ou de *e*, sur l'ENIAC : [ASPRAY, W., 1990], p. 114.

[1436] Le chapitre "Computing Machines as a Heuristic Aid" de l'ouvrage Problems in modern mathematics (inclus dans [ULAM, S., 1974], p. 505-670)

[1437] Ulam emploie le terme ""pure" mathematics". Il souligne que l'activité mathématique est de produire des théorèmes, les calculs servant en quelque sorte de point d'appui à des résultats généraux. [ULAM, S., 1976], p. 47-8.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

fiabilité et la précision des machines s'accroît considérablement durant les années 1950, grâce aux efforts des chercheurs-ingénieurs. C'est en connaissant ce contrôle accru des calculs qu'il écarte le sujet lorsqu'il aborde les problèmes "purement" mathématiques. En fait, Ulam est confronté à deux écueils : un "certain conservatisme naturel" [1438] des mathématiciens, et un manque d'informations sur les potentialités des machines. Il veut pallier ce déficit, sans révulser les mathématiciens, et doit donc faire preuve de diplomatie, ce qui explique l'image donnée des expériences mathématiques, plus proches d'"expériences de pensée" que de physique.

Pourtant, les deux types d'expériences s'inscrivent dans une même évolution de la pensée mathématique, incarnée par Ulam, mais dont l'origine et les meilleures explicitations se trouvent chez Von Neumann. Ulam l'exprime dans une interview de 1982, réalisée par Mitchell Feigenbaum, en marge du colloque "Order in chaos" à Los Alamos, colloque que nous avons fixé comme borne aux développements des premières théories du chaos :

"Les mathématiques, qui n'avaient pas changé beaucoup dans leurs aspects formels pendant 2000 ans, sont en train d'évoluer. Les grandes découvertes de ce siècle, celles de Gödel, sont d'une importance philosophique énorme pour les fondements des mathématiques. Gödel a prouvé qu'il y a des assertions qui ont du sens mais dont on ne peut pas démontrer si elles sont vraies ou fausses dans un système donné d'axiomes. Hilbert, naturellement, était le grand promoteur du système formel pour toutes les mathématiques. Il disait, 'nous comprendrons tout, mais tout dépend de la base sur laquelle on se place'. Il n'en est plus ainsi. Vous voyez, les systèmes d'axiomes eux-mêmes changent en conséquence de ce que nous apprenons par des expériences de physique, ou des expérimentations mentales." [1439]

Un bon moyen d'éclairer ces affirmations quant à l'évolution de la pensée mathématique, est de reprendre le texte de Von Neumann de 1947, intitulé "The Mathematician" [1440], car on peut y trouver la pensée originale d'un des principaux promoteurs du changement [1441]. En substance, l'opinion de Von Neuman est que "beaucoup de la meilleure inspiration

[1438] C'est une des raisons avancées par Ulam pour expliquer les réticences à utiliser l'ordinateur en mathématiques : "This may be partly due to a certain natural conservatism", [STEIN, P., ULAM, S., 1964], p. 406.

[1439] ***"Mathematics, which hadn't changed much in its formal aspect in the last 2000 years, is now undergoing some change. The great discoveries of this century, Gödel's, are of tremendous philosophical importance to the foundation of mathematics. Gödel proved there are statements that are meaningful but that are not demonstrably true or false in a given system of axioms. Hilbert, of course, was the great believer of the formal system for all mathematics. He said, 'We will understand everything, but it all depends on what basis'. That is no longer so. You see, the axiom systems themselves change as a result of what you learn by physical experiment or by mental experimentation.", [FEIGENBAUM, M., 1984], p. 469 (nous mettons en évidence). Ulam est interviewé en même temps que Marc Kac, dont on peut voir les positions moins ambitieuses.***

[1440] Le texte est inclus dans les Oeuvres (Collected Works) de Von Neumann : [VON NEUMANN, J., 1961]. Pour plus de détails sur ce texte et sur les conceptions de Von Neumann, on consultera [RAMUNNI, J., 1989] (en particulier le chapitre II, p. 53-88).

[1441] L'autre grand inspirateur est, évidemment, Alan Turing.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

mathématique provient de l'expérience et qu'il est difficilement possible de croire en l'existence d'un concept de rigueur mathématique absolu, immuable, dissocié de toutes les autres expériences humaines" [1442] . Cette idée est en partie le résultat de son parcours personnel, lequel l'a conduit à la frontière des mathématiques et de la physique théorique, d'une part, et à participer aux efforts suscités par le programme de Hilbert d'axiomatisation des mathématiques, d'autre part. Le point de rupture a été le théorème de Gödel qui, selon Von Neumann, a "montré que le programme de Hilbert est essentiellement sans espoir" [1443] .

Posant la question "Les mathématiques sont elles une science empirique ?", il tente de répondre par une confrontation avec les démarches de la physique théorique. Pour Von Neumann, il y a une base empirique aux mathématiques, occultée par les développements ultérieurs, mais quand "des tendances à devenir baroque se font jour, le signal de danger doit être émis" [1444] . Le seul remède est la "réinjection d'idées plus ou moins directement empiriques" [1445] .

Voilà une réflexion qui fait le bilan des travaux de Von Neumann depuis 1922, prélude et explique en partie le développement du calcul numérique électronique et des mathématiques expérimentales. On ne peut s'empêcher de comparer la situation avec le développement du calcul analogique.

Proche de Von Neumann, Ulam est en quelque sorte l'héritier des machines et des réflexions de Von Neumann, il tente de rallier les mathématiciens à ces pratiques. Face à des mathématiciens qui restent attachés à une démarche "pure" et empreinte de rigorisme, on comprend les avancées prudentes de Ulam et ses modulations de la notion de mathématiques expérimentales. Quoi qu'il en soit, Ulam cherche à développer une pratique des expériences, d'abord dans le domaine de la combinatoire et de la théorie des nombres, puis dans le domaine du non linéaire, comme pour faire lui-même la preuve de leur intérêt pour les mathématiques.

c. Les transformations non linéaires

La longue étude produite avec Paul Stein [1446] en 1964 aura un effet bénéfique dans le

[1442] "Much of the best mathematical inspiration comes from experience and that it is hardly possible to believe in the existence of an absolute, immutable concept of mathematical rigor, dissociated from all human experience.", [VON NEUMANN, J., 1961], p. 6.

[1443] "My personnal opinion which is shared by many others is, that Gödel has shown that Hilbert's program is essentially hopeless", [VON NEUMANN, J., 1961], p. 6.

[1444] "[…] when it shows signs of becoming baroque, then the danger signal is up.", ibid., p. 9.

[1445] "In any event, when this stage is reached, the only remedy seems to me to be the rejuvenating return to the source: the reinjection of more or less directly empirical ideas.", ibid., p. 9.

[1446] Paul Stein est un physicien, converti aux mathématiques par Ulam. Il travaille à partir de 1950 à Los Alamos, dans le "Weapons Program". Voir son récit des expériences réalisées avec Ulam, dans [COOPER, N.G., ECKHARDT, R., SHERA, N., 1989], p. 91-106.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

sens de l'analyse systématique et expérimentale de ces transformations. L'absence de solutions analytiques aux problèmes non linéaires en physique et mathématique a été une des motivations essentielles qui a poussé au développement du calcul analogique mais aussi numérique avec les propositions de Von Neumann et H. Goldstine [1447]. Ulam reprend leur credo selon lequel ces problèmes ont suscité trop peu d'analyses, l'expérience FPU en a été un exemple. Dans le cas présent, la motivation est à chercher du côté de la biologie des populations [1448].

Conformément à une démarche expérimentale proche de la physique, les analyses sont destinées à ouvrir des perspectives, à poser des problèmes plutôt qu'à en résoudre. Stein et Ulam cherchent les comportements asymptotiques des itérations pour essayer de les classer [1449]. En outre, le calculateur est branché sur un système permettant la visualisation des itérations. Ainsi, les indices débusqués sont-ils le fruit de résultats soit numériques, soit visuels : par exemple, la convergence vers un ensemble limite sera observée sur l'écran, parce qu'elle n'est pas toujours facilement évaluée numériquement [1450].

Cette pratique permet donc d'obtenir divers résultats, en grand nombre. Pour illustrer la méthode et aussi ses limites on prendra l'exemple de l'itération unidimensionnelle dépendant du paramètre σ :

$y_{n+1} = W(3-3W+\sigma.W^2)$, où $W=3y_n(1-y_n)$

Lorsque σ=0.99004, il existe un ensemble limite de période 14 ; pour σ=0.99005, il en existe un de période 28 ; pour σ=0.99008, aucune période n'est observée, mais il y a un doute inhérent à la finitude du calcul et à la précision limitée de la machine [1451]. En outre, l'analyse révèle une complexité de structure [1452] inattendue dans l'intervalle $0.98 \leq \sigma \leq 1$,

[1447] Leurs idées sont exposées dans leur article [GOLDSTINE, H., VON NEUMANN, J., 1947], dont la version publiée est un remaniement de celle de 1947. Voir [RAMUNNI, J., 1989], p. 69-72, pour plus de détails sur leurs considérations.

[1448] Le modèle initial est celui de l'évolution d'une grande population, où se produisent des accouplements aléatoires et des mutations. Ulam voulait tout faire sur des itérations, non sur des équations différentielles et déterminer les possibilités de convergence, par une approche numérique et mathématique. [COOPER, N.G., ECKHARDT, R., SHERA, N., 1989], p. 92-93.

[1449] La liste plus générale des objectifs est la suivante : "1. Determination of non-attractive fixed points (see section III) 2. Checking for periodicity. 3. Exhibiting some qualitative properties of the mapping, e.g., by showing the images nder the transformation of a family of lines. 4. Determining the dimensions of the limit set. 5. Verifying that low-order periods are attractive (see section III). 6. Examining the dependence of the limit set on initial point.", [STEIN, P., ULAM, S., 1964], p. 420.

[1450] Les auteurs sont plus directs que cela : "Put in the simplest terms, unless one knows precisely what one is looking for, mere lists of numbers are essentially useless. Automatic plotting devices however, - such as an oscilloscope- allow one to tell at a glance what is happening.", [STEIN, P., ULAM, S., 1964], p. 410.

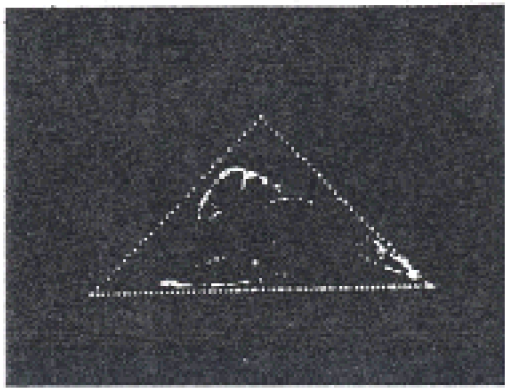
[1451] [STEIN, P., ULAM, S., 1964]. Cette itération est présentée comme illustration des possibilités de la machine MANIAC II (Ibid., p. 413-4), puis discutée en relation avec la limitation de ces possibilités, dans l'annexe I (Ibid., p 464-467).

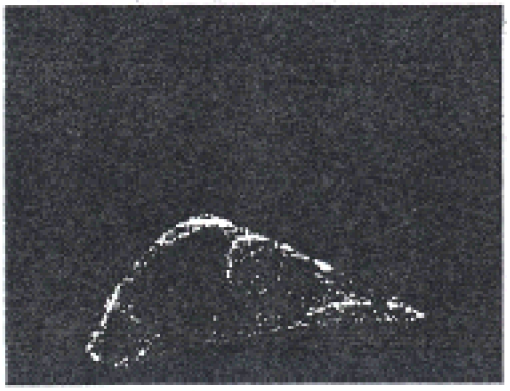
[1452] Le paragraphe 6 de l'annexe I essaye de rendre ces comportements intriqués ("fine-structure"), [STEIN, P., ULAM, S., 1964], p. 465.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

montrant des comportements qualifiés de "pseudo-périodiques" et des débuts de doublement de période [1453].

A titre purement illustratif, voici une série de comportements repérés par les analyses [1454].





Etat asymptotique et agrandissement (x3)
[STEIN, P., ULAM, S., 1964], p. 475

L'analyse et les résultats de Ulam et Stein introduisent une nouvelle façon d'étudier les itérations non linéaires ; ils en montrent expérimentalement la complexité, qui dépasse finalement les propriétés ergodiques connues sur des applications particulières, mais guère plus complexes. L'impulsion de 1964 va se traduire par différentes nouvelles tentatives.

En premier lieu, le groupe des physiciens de Los Alamos, Nicolas Metropolis, Paul Stein et Myron Stein, réalise une étude, suggérée par Ulam, selon les méthodes expérimentales et mathématiques en vigueur. D'abord en 1967, ils analysent une transformation particulière, avec laquelle ils montrent l'existence d'une "série infinie d'"harmoniques"" [1455], (c'est-à-dire des séquences de périodes $2^n.k$, $n=1,2...$lorsqu'il existe une période k) [1456]. Ces résultats préludent à l'étude numérique extensive de 1971-73, beaucoup plus connue des mêmes auteurs, à propos de l'"universalité" de ces harmoniques, dans les transformations [1457]. On peut voir une partie des résultats des

[1453] Ulam et Stein ne relèvent pas les rapports de 2 à 1 trouvés dans plusieurs couples de comportements successifs lorsque σ varie. Cela n'a *a priori* aucune raison d'être significatif. Quant aux comportements "pseudo-periodiques", ils désignent les trajectoires pour lesquelles la machine donnent des périodes qui leur semblent extravagantes. [STEIN, P., ULAM, S., 1964], p. 465-6.

[1454] La transformation est T : $x_1'=x_2^3+3x_1x_2^2+3x_2x_1^2+3x_2x_3^2+3x_3x_2^2x_2'=3x_1x_3^2+3x_3x_1^2+6x_1x_2x_3x_3'=x_1^3+x_3^3$

[1455] "Each finite limit set of order k has associated with it an infinite sequence of "harmonics"", [METROPOLIS, N., STEIN, M.L., STEIN, P.R., 1967], p. 2.

[1456] Nous renvoyons à l'histoire relatée par Paul Stein lui-même dans : [COOPER, N.G., ECKHARDT, R., SHERA, N., 1989], p. 100-2.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

années 1970 comme des concrétisations de l'exemplaire étude de 1964.

Dans un autre contexte, en 1964, Edward Lorenz s'intéresse lui aussi aux itérations : son but est d'étudier les propriétés des équations des modèles mathématiques utilisés en météorologie, pour ce qui est de leur stabilité en particulier. Une équation différentielle peut être approchée par une équation aux différences (un schéma numérique), en simplifiant le problème et dans l'objectif d'esquisser des résultats, cela correspond à une itération [1458] . Lorenz utilise la fonction logistique et analyse les comportements périodiques et non périodiques possibles, notamment l'évolution de la proportion de la seconde catégorie en fonction du paramètre. Les résultats influenceront le "Period three implies chaos" de 1975 et bien d'autres travaux. Ici, il est important de remarquer que Lorenz utilise les analyses de Stein et Ulam [1459] , de même que la méthode défendue par Ulam :

"Nous voyons ainsi que l'ordinateur peut jouer un rôle important, au-delà du simple 'moulinage' de calculs numériques. La machine ne peut pas prouver un théorème, mais elle peut suggérer une proposition à prouver. La proposition peut ensuite être prouvée et établie comme un théorème par des moyens analytiques, mais l'existence du théorème pourrait ne pas être suspectée sans l'aide de la machine. Ulam a discuté le problème général de l'ordinateur comme aide heuristique au raisonnement mathématique, et a présenté des exemples issus de nombreuses branches différentes des mathématiques." [1460]

Ceci nous oriente vers le contexte des analyses météorologiques, dans lesquelles les expériences numériques ont quelque chose de commun avec la démarche d'Ulam et s'inscrivent dans la perspective de Von Neumann.

Pour terminer, il faut ajouter que Ulam a fait des efforts publicitaires importants en matière de non linéaire. Cela inclut les expériences FPU, qu'il a contribuées à faire connaître et discuter aux Etats-Unis. Il ne s'est pas contenté de publier quelques articles sur ces sujets, mais est intervenu dans divers colloques et congrès [1461] , auprès des

[1457] Le "classique" [METROPOLIS, N., STEIN, M., STEIN, P.R., 1973] ; rappelons que Feigenbaum arrive à Los Alamos en 1973 et que Paul Stein le mettra sur la voie de son universalité. Cf. chapitre 5, p. 325.

[1458] Le titre de l'article traduit mieux l'objectif, sans laisser présager ce qu'il contient : "The problem of deducing the climate from the governing equations", [LORENZ, E.N., 1964].

[1459] Lorenz a eu accès à une version de 1963 de leur étude, qui a été apparemment publiée par le Laboratoire de Los Alamos [LORENZ, E.N., 1964], p. 11. La version que nous avons consultée a été publiée en 1964, et est incluse dans une sélection de travaux de Ulam.

[1460] "We thus see that a computing machine may play an important role, in addition to simply grinding out numerical answers .The machine cannot prove a theorem, but it can suggest a proposition to be proven. The proposition may then be proven and established as a theorem by analytic means, but the very existence of the theorem might not have been suspected without the aid of the machine. Ulam has discussed the general problem of the computing machine as a heuristic aid to mathematical reasoning, and has presented examples from a number of different branches of mathematics.", [LORENZ, E.N., 1964], p. 10-11. Lorenz se réfère pour ces aspects, à l'ouvrage de Ulam publié en 1960 : A collection of Mathematical Problems (inclus dans l'ouvrage [ULAM, S., 1974], p. 505-670).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

physiciens et mathématiciens. Parmi les collègues acquis à sa cause, on peut compter M. Kruskal et N. Zabusky à Princeton et Joseph Ford [1462], qui analysera les expériences FPU et travaille en relation avec ces deux derniers chercheurs.

d. Le chaos et les mathématiques expérimentales

De manière générale, la contribution et les démarches d'Ulam ont été déterminantes dans une série de travaux de mathématiques expérimentales, aux Etats-Unis. Cependant, tout ceux dont nous avons évoqué le nom à propos de ces mathématiques sont des **physiciens**, contrairement au souhait d'Ulam peut-être, ayant une très forte propension à faire des mathématiques. La sensibilité pour les mathématiques expérimentales ne s'est que très peu développée chez les mathématiciens "purs", du moins en ce qui concerne le non linéaire, dans cette période.

On pourrait penser que c'est l'aspect empirique qui attire les physiciens : ce sont des problèmes spécifiques, impossibles à résoudre exactement, qui conduisent à une pratique expérimentale. Ford et Lorenz en sont de bons exemples. Ils signent aussi une évolution importante dans la perception de ces calculs : l'ordinateur est quasiment une "boite noire", devenue tellement contrôlable qu'elle banalise l'acte. Le développement technique, qui avait incité Ulam à proposer une version expurgée des expériences mathématiques, assure la perpétuation de cette pratique. Plus que l'empirisme prôné par Von Neumann aux débuts du calcul électronique, c'est une pratique simplifiée et banalisée qui s'installe et qui sous-tend une partie des développements des années 1970, grâce à Ulam. Cette banalisation est perceptible dans les discours courants, un peu rétrospectifs, des années 1980. Ulam trouve également une place privilégiée, dans l'histoire construite par les scientifiques, surtout chez ses compatriotes américains. Hofstadter, dans une des premières vulgarisations du chaos évoquait dès 1981 :

"Un des plus vigoureux partisans de ce style de pratique mathématique a été Stanislaw M. Ulam qui, quand les ordinateurs étaient encore jeunes, n'a pas hésité à les utiliser sur des problèmes d'itérations non linéaires aussi bien que des problèmes de beaucoup d'autres branches des mathématiques. Beaucoup des idées esquissées ici sont venues à la suite des études précoces de Ulam avec Paul Stein." [1463]

Nous prendrons un exemple très symbolique et très symptomatique de l'évolution de la perception du calcul, initiée par Ulam. En 1985, un groupe de physico-mathématiciens [1464] proches de Los Alamos (et du Center for Nonlinear Studies qui y a été crée) esquissait un bilan de l'utilisation de l'ordinateur dans les questions de chaos et de non linéaire en

[1461] Voir l'introduction rédigée par Ulam dans [FERMI, E., PASTA, J., ULAM, S., 1955], p.490.

[1462] Voir le chapitre 7 pour les détails des travaux de Ford, page 504.

[1463] ***[HOFSTADTER, D.R., 1981], p. 17. La citation originale a déjà été donnée note 366, p. 169.***

[1464] Il s'agit des physiciens David Campbell (directeur du Center for Nonlinear Studies), James Crutchfield (Université de Berkeley), Doyne Farmer (au Center for Nonlinear Studies) et de la mathématicienne Erica Jen (University of Southern California). Ils sont les héritiers de la "tradition" Ulam-Metropolis-Stein-Stein.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

général, dans l'article : "Experimental mathematics : the role of computation in nonlinear science".

Par expérience mathématique, ils entendent :

"[…] les investigations des problèmes non linéaires inaccessibles par les méthodes analytiques, reposant sur l'ordinateur. Le mathématicien expérimentateur utilise l'ordinateur pour simuler les solutions d'équations non linéaires et ainsi obtenir un aperçu de leurs comportements et suggérer des directions pour les recherches analytiques futures." [1465]

Ulam est un "pionnier des mathématiques expérimentales" [1466] . Ces conceptions sont validées. Il est également très significatif qu'il soit cité comme pionnier, alors que Von Neumann est le "penseur" original dans cette histoire. En outre, les auteurs donnent une perspective historique générale de cette pratique : elle est malheureusement un peu déformée, car elle ne rend pas le caractère problématique de l'acceptation de l'ordinateur, ni l'importance du développement technique, ni vraiment l'action de conversion d'Ulam. Cependant, à notre avis, le texte cristallise la perception générale des scientifiques, que l'on peut trouver dans les recherches sur le chaos. L'ordinateur est une "boite noire" en laquelle une confiance totale est placée et la pratique des simulations est devenue moins problématique.

9.3. Lorenz et la météorologie numérique

Dire que l'ordinateur est intervenu dans les travaux du météorologue Edward Lorenz relève de la banalité, si on se limite aux petites histoires circulant depuis l'ouvrage de J. Gleick [1467] , à propos des travaux de 1960 à 1963. Il est vrai que ses calculs ont révélé des phénomènes dont l'importance était sous-estimée dans le milieu de la météorologie : les instabilités, associées à des phénomènes non périodiques, sont présentes dans les modèles les plus simples et conduisent à des pertes de "prédictibilité". Le travail de Lorenz s'inscrit en réalité dans une double perspective. D'une part, Lorenz fait usage de l'ordinateur, ce nouvel instrument pour la météorologie dans les années 1950 et l'oriente pour répondre à des questions de méthodologie et d'épistémologie sur la prédiction et la prédictibilité. D'autre part, Lorenz est dans un contexte de débats sur la prédiction, opposant les tenants des prévisions dynamiques aux statisticiens. Comme nous allons le voir, la "surprise" et les textes célèbres de 1963-64 sont le résultat de la combinaison des calculs numériques et de sa démarche critique de la voie statistique.

[1465] ***"[…] computer-based investigations into nonlinear problems that are inaccessible to analytic methods. The experimental mathematician uses the computer to simulate the solutions of nonlinear equations and thereby to gain insights in their behavior and to suggest directions for future analytic research.", [CAMPBELL, D., CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, D., JEN, E., 1985], p. 374.***

[1466] "[...] the noted pionner in experimental mathematics.", Ibid.

[1467] Gleick romance les travaux de Lorenz et présente presque comme un coup de chance les observations numériques de Lorenz. [GLEICK, J., 1991], p. 33-35 en particulier.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

a. L'ordinateur et la météorologie

Le premier projet de météorologie, utilisant les machines électroniques, voit le jour en 1946 à Princeton, sous l'impulsion de Von Neumann et du météorologue Jules Charney [1468] . Von Neumann est convaincu que le potentiel des machines peut être mis au service de la prévision du temps [1469] , dont la seconde guerre mondiale a révélé le caractère stratégique.

Goldstine et Von Neumann destinaient les machines à calculer à deux types d'utilisations : la résolution numérique d'un problème donné sous forme d'équation et une utilisation plus heuristique, pour esquisser des solutions à un problème. Dans le projet de météorologie de Princeton, dirigé par Charney et développé entre 1946 et 1953, ce sont essentiellement les capacités de résolution d'équations qui sont utilisées. En 1953, la prévision numérique du temps est suffisamment avancée pour justifier la constitution de centres de prévisions. Pour parvenir à l'objectif en 1953, plusieurs modèles ont été construits, implémentés et testés sur l'ENIAC notamment. Ce sont bien des modèles, schématisant les évolutions atmosphériques, et non pas directement les équations de l'hydrodynamique, qui sont utilisés. Selon Aspray, il est peut-être juste de dire que l'ordinateur a transformé la météorologie en une science mathématique des phénomènes si complexes et non linéaires [1470] .

Mais il se produit, à partir du milieu des années 1950, un changement dans cette science renouvelée. Nous le voyons comme une résurgence de l'aspect heuristique des expériences mathématiques imaginées par Von Neumann. Charney, dans un exposé à la National Academy of Sciences en 1955, exprime cette transition :

"Le changement radical qui est en train de se produire est dû non pas simplement à la capacité des machines de résoudre des équations connues, avec des conditions initiales et des conditions limites connues, mais plutôt sa capacité à servir de dispositif au service des approches inductives […] La machine, en réduisant les difficultés mathématiques impliquées dans la conduite d'une argument physique vers sa conclusion logique, permet d'émettre des hypothèses physiques et de les tester dans un champ où l'expérience contrôlée est encore un rêve et l'expérience sur des modèles difficile, et ainsi permet une utilisation étendue des méthodes inductives." [1471]

[1468] Nous nous appuyons sur l'ouvrage de W. Aspray, en particulier le chapitre 6 "The origins of Numerical Meteorology". [ASPRAY, W., 1990], pour l'essentiel des questions relatives aux projets de météorologie, après la seconde guerre mondiale, aux Etats-Unis. On peut également consulter [DAHAN, A., 2000].

[1469] A ce moment là, Von Neumann est sur le projet de construction d'une machine, connue sous le nom d'IAS en référence à l'Institute of Advanced Studies de Princeton. Outre l'intérêt que Von Neumann porte aux questions de mécanique des fluides, de turbulence, le météorologue Carl-Gustav Rossby a eu une grande influence sur lui ; Vladimir Zworykin, un ingénieur en électricité, travaille également en 1945 à la construction d'une machine pour prédire le temps, reposant sur le calcul analogique. Von Neumann avait connaissance de ce projet. Aspray détaille tout le réseau dans lequel s'inscrivent les idées de Von Neumann en météorologie [ASPRAY, W., 1990], p. 127-134.

[1470] [ASPRAY, W., 1990], p. 152.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

L'ordinateur permet donc la simulation des modèles, d'une part, et surtout une sorte d'expérimentation dans un domaine où cela n'est pas possible, d'autre part. Il est perçu comme un instrument scientifique pour la météorologie et n'est plus simplement un calculateur surpuissant.

Lorsque le météorologue Edward Lorenz intervient dans les questions de fond sur la prédiction en météorologie, et réalise ses multiples simulations, il participe de cette pratique, à la différence qu'il expérimente des modèles simplifiés et non pas les modèles complexes utilisés pour la prévision. Il commence à tirer parti de l'ordinateur en 1958, lorsque le laboratoire fait l'acquisition de la machine digitale Royal McBee.

b. Lorenz, les prédictions statistiques et l'instabilité

Lorenz est inscrit dans un contexte de débats opposants les tenants de la prédiction statistique aux partisans de la dynamique, d'une part, et d'une réflexion plus générale, et plus épistémologique, sur la "prédictibilité" en météorologie, d'autre part [1472]. Lorenz, au MIT depuis 1948, fait lui-même partie du projet de prévisions statistiques [1473], pour lesquelles la méthode de régression linéaire est utilisée. Aux origines de ce débat, il y a une question de perception des instabilités. Les deux approches renvoient schématiquement aux conceptions de deux des scientifiques les plus influents de ces années : Norbert Wiener et Von Neumann. Le premier, mathématicien spécialiste des problèmes de statistiques mathématiques, s'était prononcé en faveur des méthodes statistiques. Les arguments de Wiener étaient les suivants : "la connaissance complète, qui conduirait à la justification d'une prédiction météorologique purement dynamique, est lointaine de ce qui nous a été donné en fait" [1474]. Et les détails manquants ne sont pas négligeables, car il ne faut pas ignorer "la possibilité très réelle d'auto-amplification des petits détails de la carte du temps" [1475]. Voilà qui rappelle les commentaires de Poincaré dans "Le Hasard" [1476].

1471 "The radical alteration that is taking place in this state of affairs is due not merely to the ability of the machine to solve known equations with known initial and boundary conditions but even more its ability to serve as an inductive device [...] The machine, by reducing the mathematical difficulties involved in carrying a physical argument to its logical conclusion, makes possible the making and testing of physical hypotheses in a field where controlled experiment is still visionary and model experiment difficult, and so permits a wider use of inductive methods.". Cité dans [ASPRAY, W., 1990], p. 152-3.

1472 On pourra consulter le texte d'A. Dahan sur Lorenz [DAHAN, A., 2000]. L'auteur choisit de se focaliser sur la problématique de la modélisation. Sans dénier la pertinence et l'importance de la modélisation, nous complétons cette analyse en insistant davantage sur les problèmes de calcul.

1473 Il participe puis prend la direction du groupe au départ du responsable, Thomas Malone en 1955. [LORENZ, E.N., 1993], p. 130-1.

1474 "This completeness of knowledge, which would lead to the justification of a purely dynamical meteorological prediction, is absurdely far from what has actually been given us.", [WIENER, N., 1950], p. 371.

1475 "[…] the very real possibility of the self-amplification of small details in the weather map.", [WIENER, N., 1950], p. 371.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Wiener suggère qu'il existe une mesure invariante derrière les phénomènes météorologiques et les méthodes de théories des probabilités devraient en rendre compte. Son argumentation, qui reste assez heuristique, est principalement articulée sur des questions de théorie ergodique [1477] et de Mécanique statistique.

Von Neumann est l'avocat de la prédiction dynamique, depuis ses débuts, il est conforté dans ses convictions par les succès du programme de Princeton. Von Neumann a de même défendu l'idée que l'on puisse contrôler le temps, grâce à une connaissance et une utilisation des petites perturbations sur l'état général de l'atmosphère. Au fond, l'opposition repose sur la perception des instabilités et reflète le manque de clarté et de précision dans l'enjeu représenté par ces instabilités.

c. Le congrès de Tokyo, 1960

Au fil de son expérience des statistiques, Lorenz est saisi par le doute quant aux possibilités de faire des prédictions valables. Au congrès de Tokyo en 1960, il présente un exposé, sorte de bilan des investigations réalisées au MIT, intitulé "The statistical prediction of solutions of dynamic equations", critiquant ainsi les interprétations des suggestions faites par Wiener [1478] . Il explique que les projets de statistiques visent à déterminer des procédures de prédiction utilisant des données d'un passé assez proche. Pour tester leur capacité prédictive, des cartes météorologiques sont dressées numériquement, par simulation d'un modèle connu, afin de déterminer si on peut "re-prédire" la situation à partir d'une partie des résultats des calculs, par régression linéaire [1479] . Sa conclusion est qu'il ne faut pas espérer mieux que 24 heures de prédiction et sous-entend que d'autres méthodes sont préférables (par exemple, la prévision statistique non linéaire ou les méthodes dynamiques, rivales). Par des expériences numériques, Lorenz (et son groupe) tentent donc de répondre à une question méthodologique, sans forcément convaincre ses collègues [1480] .

[1476] Wiener cite le proverbe suivant pour illustrer son propos : "For want of a nail, the shoe was lost ; For want of a shoe, the horse was lost ;For want of our horse, the rider was lost ; For want of a rider, the battle was lost ; For want of a battle, the kingdom was lost !" (ibid., p. 372). Ce qui se rapproche aisément du "Une petite cause..." de Poincaré, qui avait ajouté un exemple similaire de problème d'instabilité en météorologie (cf. chapitre 1, page 82).

[1477] "The basis of all this is ergodic theory.", [WIENER, N., 1950], p. 372.

[1478] [LORENZ, N., 1960a], Lorenz met le précédent exposé de Wiener en exergue, pour en relativiser la pertinence à l'égard du point de vue du météorologiste. Les théories de Wiener s'appuient en effet sur la connaissance de tout le présent et le passé d'un phénomène pour proposer des prévisions (p. 629-630).

[1479] Pour les détails sur le modèle utilisé : [LORENZ, N., 1960a], p. 629-630.

[1480] Ils n'expriment pas de doutes quant aux simulations numériques elles-mêmes, ni sur leur nature. Dans la discussion suivant l'article de Lorenz, il s'agit d'une certaine perplexité à l'égard de ce que ce genre de résultats peuvent prouver (par exemple : y a-t-il eu une analyse de l'influence des conditions initiales ?) ([LORENZ, N., 1960a], p. 635). Pour les problèmes de climatologie, la méthode statistique est pleinement réaffirmée dans la discussion finale du colloque, [SIGEKATA, S., 1960].Voir [DAHAN, A., 2000], p. 410.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Lorenz s'était proposé depuis 1956 de mettre en question la valeur des pronostics statistiques. Il était parvenu à se convaincre qu'il fallait un comportement non périodique pour cela. L'exposé de 1960 est l'aboutissement de ses recherches d'un système dynamique, 12 équations différentielles, avec un comportement *a priori* non périodique et dont la statistique ne peut pas faire de prédictions correctes. L'arrivée de l'ordinateur au laboratoire, en 1958, a transformé le projet précis mais difficilement réalisable de 1956, en une problématique nouvelle.

Au colloque de Tokyo, c'est une seconde question qui est débattue dans la discussion finale : celle de la "prédictibilité". Autrement dit, quelle est la capacité des méthodes à donner des prévisions ? Et sur quel intervalle de temps sont-elles valables ? Introduisant le débat, le professeur Arnt Eliassen évoque deux aspects importants : les problèmes d'instabilité (dans les modèles barocliniques et barotropiques utilisés), et les résultats de Phillip Thompson relatifs aux limites de prédictibilité. Eliassen est perplexe :

"La signification de cette instabilité n'est pas claire pour moi parce qu'on ne voit pas dans l'atmosphère, des perturbations se développant à partir de très petites perturbations initiales […], mais on voit plutôt un champ complètement perturbé tout le temps et des interactions non linéaires entre différentes composantes." [1481]

Il doute de la pertinence des instabilités comme facteur limitant car cela n'est pas conforme à ce qui est observé communément en météorologie. Thompson, en 1957, avait posé les questions relatives à l'organisation et à la collecte des données pour la prévision : quelle répartition des relevés et quelle précision adopter, pour faire des prévisions, de manière économique [1482]. La question de la "prédictibilité" était apparue déterminante dans sa problématique. Thompson avait établi un taux de contamination des erreurs sur les données initiales dans la prévision, pour en déduire l'horizon de prédiction. Il envisageait deux méthodes : une étude expérimentale avec des comparaisons de multiples intégrations des modèles, pour des états initiaux ou des données variables, ou bien un traitement plus analytique. Il évoque une possible "indétermination fondamentale du comportement de l'atmosphère" [1483] ; sa thèse principale et de prouver qu'une densité accrue de stations météorologiques ne va pas réduire significativement ce qu'il appelle l'erreur inhérente, due aux incertitudes de l'état initial [1484] et qu'il existe une limite aux prédictions, qu'il évalue à une semaine.

1481 ***"The significance of this instability is not clear to me because we do not see, in the atmosphere, disturbances developing from a very small initial disturbance on the straight current, but we rather see a fully disturbed field all the time and non-linear interactions between various components.", [SIGEKATA, S., 1960], p. 645.***

1482 [THOMPSON, P.D., 1957]. Philip Duncan Thompson est un officier de l'US Air Force, associé au programme Joint Numerical Weather Prediction Unit, mis en place à la suite du programme de Princeton, pour réaliser effectivement des prévisions sur le territoire américain. Il est responsable de la section de Développement. [ASPRAY, W., 1990], p. 148.

1483 "A part of this error, conceivably, might also be due to some fundamental indeterminacy in the behavior of the atmosphere.", [THOMPSON, P.D., 1957], p. 286.

1484 "[...] we see that doubling the cost and oervall density of observing stations would all but eliminate the increase of inherent error", [THOMPSON, P.D., 1957], p. 287.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Saisissantes, ces affirmations se retrouvent au coeur des échanges de Tokyo. Deux réponses sont apportées. Lorenz signale qu'ils ont réalisé une série de 40 simulations du modèle qui a servi à sa démonstration de l'insuffisance des méthodes statistiques, avec des conditions initiales différentes (mais proches). 39 ont divergé rapidement par rapport à la première. Il propose d'adopter une définition : un système est dit instable lorsque des "petites erreurs introduites dans celui-ci croissent avec le temps" [1485] . L'ordinateur est pleinement intégré dans la pratique météorologique et détermine ici une notion opérationnelle d'instabilité.

A l'opposé, Charney est plutôt optimiste et attend une "agréable surprise" du côté de la prévision météorologique.

"Maintenant, il n'y a aucune raison en principe, si nous ne prenons pas en compte les sources d'énergie, pour que les méthodes numériques ne prédisent pas le cycle de vie d'un système singulier." [1486]

Charney est confiant, parce que dix ans auparavant, la simulation d'un modèle avait montré des mouvements "qui ressemblaient aux mouvements naturels" [1487] . Mais il est prudent : "les prévisions pourraient ne pas être très précises" [1488] . En tout cas, il pense que les théories doivent porter, non pas sur les instabilités, mais sur les évolutions vers des états stationnaires ou les oscillations.

d. Le projet de Lorenz

Lorenz doit donc faire face à ces arguments. Ses projets des années 1960 visent à préciser ce qu'il a entrevu avec son modèle à 12 équations. On rappellera que, selon la petite histoire, c'est de manière fortuite que Lorenz a vu l'instabilité dans la simulation du modèle, en 1959, lorsqu'il réalisait les calculs préparatifs à l'exposé de Tokyo [1489] . En revanche, il cherchait un comportement non périodique, et il a rapidement associé cette instabilité avec la non périodicité et les limites de prédictibilité : la démonstration de cette association l'occupe durant les années 1960-64. Au passage, on ne peut s'empêcher de signaler la proximité entre les idées de Lorenz et celles de Thompson [1490] , hormis la non périodicité.

Pour mener à bien son projet, Lorenz suit une démarche novatrice. Elle part de l'hypothèse qu'il est possible d'appréhender des phénomènes de la météorologie à partir de modèles simplifiés. A la manière d'un physicien, Lorenz cherche à isoler dans un

[1485] "[…] small errors placed upon it will grow with time.", [SIGEKATA, S., 1960], p. 647.

[1486] "Now there is no reason in principle, if we take into account energy sources, why numerical methods should not be capable of predicting the life cycle of a single system.", [SIGEKATA, S., 1960], p. 648. Il ajoute : "I think we are very close to being able to predict a single complete life cycle of an actual system in the atmosphere."

[1487] "that looked like nature", [SIGEKATA, S., 1960], p. 649.

[1488] "The forecast may not be very accurate.", [SIGEKATA, S., 1960], p. 648.

[1489] Lorenz l'a expliqué lui-même dans [LORENZ, E.N., 1993], p. 133-6.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

modèle, un phénomène ou un problème météorologique précis. **L'expérimentation numérique aide à construire ce modèle et à en tirer un maximum de propriétés** [1491]. Son objectif est de comprendre les comportements des modèles mathématiques afin d'adapter le modèle aux exigences d'instabilité et de non périodicité. A. Dahan parle à ce sujet d'une "pratique de modélisation" pour cette démarche de Lorenz [1492], laquelle se met en place progressivement, par essais et erreurs. Avec la collaboration de Barry Saltzman, et grâce à ces expériences sur les modèles mathématiques [1493], Lorenz aboutit à un système de trois équations (système de Lorenz) et publie son plus célèbre article "Deterministic nonperiodic flow" de 1963.

Deterministic nonperiodic flow

L'idée à laquelle Lorenz est attachée est de montrer que l'absence de périodicité implique une imprédictibilité dans le système (et non pas seulement qu'il existe une solution non périodique dans le système). Pour cela, il veut prouver l'instabilité des flots non périodiques, ce qu'il tente avec son système d'équation. Lorenz prouve son habileté à gérer les mathématiques en accord avec les calculs numériques. Mais il est aussi météorologue : il vise les prévisions météorologiques au-delà des modèles simples et cherche la non périodicité dans ses modèles car elle est naturelle en météorologie :

"Quand nos résultats concernant l'instabilité du flot non périodique sont appliqués à l'atmosphère, qui est ostensiblement non périodique, ils indiquent que la prédiction d'un futur suffisamment distant est impossible par n'importe quelle méthode, à moins que les conditions présentes ne soient connues exactement." [1494]

[1490] Il ne cite le texte de Thompson que dans des articles ultérieurs, qui concernent eux la question de la prédictibilité, [LORENZ, E.N., 1965] par exemple. Cependant, Lorenz travaille avec le Air Force Cambridge Research Laboratory (la plupart de ses contrats de recherche en émane, il suffit de regarder tous ses articles de la période), où Thompson (cadre de l'Air Force) a travaillé (en 1953, il a dirigé les premières implémentations des modèles pour les simulations du Joint Numerical Weather Prediction Unit, [ASPRAY, W., 1990], p. 148).

[1491] Lorenz développe déjà en 1960 des procédures de simplifications des équations de l'hydrodynamique, à des fins d'analyse de phénomènes donnés ("Maximum simplification of the dynamic equations", [LORENZ, E.N., 1960c]).

[1492] [DAHAN, A., 2000], p. 414.

[1493] Nous passons sur les longs tâtonnements avant d'en arriver au modèle final. En résumé, Lorenz met en place les procédures de simplification avec Saltzmann, qui lui fournit les équations d'un problème de convection (7 équations, voir [SALTZMANN, B., 1962]). La propriété intéressante du modèle tient à l'existence d'un comportement non périodique, relevé par Saltzmann. En mêlant l'analyse numérique et les simulations du modèle, Lorenz et Saltzmann obtiennent le modèle à 3 équations, avec le comportement non périodique recherché. [LORENZ, E.N., 1993], p. 137-139. Voir également [DAHAN, A., 2000], p. 412-7 (pour signaler les spécificités du travail de Lorenz, l'auteur évoque une "pratique de modélisation").

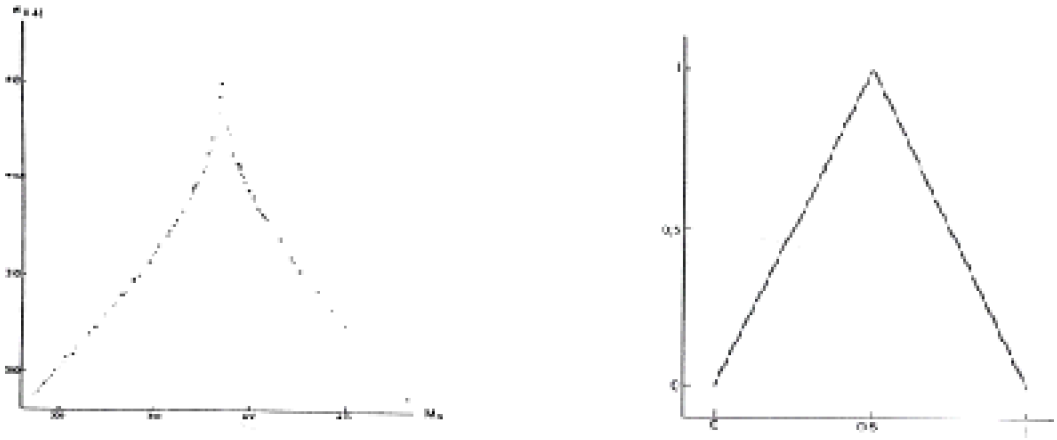
[1494] "When our results concerning the instability of nonperiodic flow are applied to the atmosphere, which is ostensibly nonperiodic, they indicate that prediction of sufficently distant future is impossible by any method, unless the present condition are known exactly", [LORENZ, E.N., 1963a], p. 141.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Il apparaît aussi que la non périodicité a une résonance toute particulière dans le domaine de la météorologie. Alors que dans d'autres contextes, sur les oscillations en particulier, les comportements périodiques sont privilégiés et recherchés.

Au fond, Lorenz est surtout confronté au problème de prouver mathématiquement ce que l'ordinateur peut révéler graphiquement. A ce niveau, ce sont les mathématiques des systèmes dynamiques qui viennent seconder l'analyse expérimentale : Lorenz avait reçu une formation en mathématiques et s'est laissé guider, dans un premier temps, par les travaux de Birkhoff. A la soumission de l'article, un relecteur lui a suggéré la lecture d'un ouvrage plus avancé : celui de Nemytskiiet Stepanoff, Qualitative theory of differential equations (traduction par Lefschetz d'un ouvrage issu de l'école soviétique des systèmes dynamiques).

L'article final est le reflet de ces influences : Lorenz utilise les méthodes topologiques (qui commencent par l'introduction de l'espace des phases) et établit une application de premier retour, dont il cherche à préciser les propriétés. La non périodicité est en fait recherchée dans cette application, qu'il idéalise en une application triangulaire, plus simple et dont il connaît les équations. Dans ce cas, la non périodicité est une propriété générale parmi les conditions initiales possibles et dont il donne une preuve mathématique. Il **extrapole** ensuite aux résultats de simulations, conscient des limites de ses arguments.



"Application de premier retour" et idéalisation pour le traitement mathématique
[LORENZ, E.N., 1963a], p. 139.

L'insistance sur la preuve de la non périodicité vient de sa démonstration introductive : avec les outils de Birkhoff (mouvements centraux, repris dans l'ouvrage de Nemistkii et Stepanoff) il a montré que les flots non périodiques sont instables. Il faut ajouter que l'instabilité dont Lorenz a besoin est une instabilité "pratique", ce qui lui permet d'évacuer certains cas mathématiquement marginaux [1495] : cela illustre sa conception opérationnelle de l'instabilité.

[1495] A la fin de sa discussion, Lorenz ajoute : "In view of the impossibility of measuring initial conditions precisely, and thereby distinguishing between a central trajectory and a nearby noncentral trajectory, all nonperiodic trajectories are effectively unstable from the point of view of practical prediction.", [LORENZ, .E.N., 1963a], p. 133.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Tous ces points montrent le caractère problématique des résultats de Lorenz. Les expériences mathématiques, aussi précises soient-elles, ne remplacent pas un raisonnement mathématique pour ce qui est de la preuve d'un résultat. En outre, il est difficile de tirer des conclusions pour le système atmosphérique vue la simplicité du modèle mis en jeu. Lorenz donne simplement des **indices** nouveaux en faveur d'une certaine instabilité des systèmes météorologiques. Il est facile ainsi de comprendre les réticences vis-à-vis des propositions de Lorenz, qui ont conduit à leur quasi-ignorance dans le milieu des météorologues. Leur aspect très mathématique a pu les rendre certainement absconses, voire douteuses, pour la majorité d'entre eux. Ses idées relatives à l'utilisation de modèles simplifiés, de manière générale, ont du mal à être acceptées comme un moyen de connaissance "réaliste" de l'atmosphère [1496]. Cependant, Jule Charney, qui était plutôt prédisposé à des conclusions inverses de celles de Lorenz, s'est laissé convaincre et en a mesuré l'importance [1497].

Il faudra attendre les années 1970 pour que les résultats de 1963 soient pleinement exploités, par des mathématiciens cette fois. Destiné à un public de météorologistes et publié dans une revue de météorologie (Journal of the Atmospheric Sciences), il est assez logique qu'il n'ait pas été lu par les mathématiciens. Pourtant, il a été remarqué par l'un d'entre eux, Ulam : le texte de Lorenz lui a été confié pour évaluation par la revue [1498]. Lorenz en a personnellement rediscuté avec lui en 1965. Ulam a souligné l'originalité du résultat de Lorenz dans un article, de 1964, destiné à esquisser un tableau des développements mathématiques depuis les travaux de Von Neumann. Dans la perspective des problèmes non linéaires, il inclut les idées de Lorenz :

"E. Lorenz a réussi à styliser des modèles de flots atmosphériques par des formes ressemblant à de telles transformations non linéaires […] Constatant l''imprédictibilité' notoire des phénomènes atmosphériques, on voit encore que des algorithmes déjà très simples (des itérations de transformations algébriques simples) auront un comportement difficilement 'décidable' au bout d'un temps suffisamment long." [1499]

Cependant, Ulam, peut-être pris par d'autres problèmes, ne s'est pas engagé davantage dans la promotion de ces résultats. Par ailleurs, une autre occasion "manquée" a été le

[1496] Dans une interview de Lorenz, celui-ci discute des oppositions à ses démarches et des suspicions sur les conclusions qu'il en tire (Interview with Professor Edward N. Lorenz, at Earth Sciences Building at MIT, by Kristine Harper, November 8, 2000).

[1497] Charney est alors au MIT, un collègue de Lorenz. Lorenz explique que grâce à Charney, ses résultats ont attiré l'attention du milieu de la météorologie. [LORENZ, E.N., 1993], p. 142.

[1498] Dans [DAHAN, A., 2000], p. 418, information tirée d'une interview de Lorenz.

[1499] ***"E. Lorenz succeeded in stylizing some models of flows of the atmosphere into forms resembling such nonlinear transformations […]. Noting the notorious 'unpredictability' of atmospheric phenomena, we see again that already very simple algorithms (iterations of simple algebraic transformations) will after a long time exhibit a behavior which is hardly decidable.", [ULAM, S., 1964], p. 353-4. Ulam se réfère, non pas aux publications dans les journaux, mais à un rapport émanant de l'Air Force Aerospace Center, Bedford (Massachusetts), rédigé par Lorenz et intitulé : "Simplified dynamical equations and their use in the study of atmospheric prediction" (ibid., p. 354).***

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

colloque de 1971, "Statistical methods and turbulence", où Ruelle et Lorenz ont exposé pour l'un, les travaux avec Takens sur le démarrage de la turbulence et l'attracteur étrange, l'autre sur la prédictibilité des mouvements turbulents [1500]. Lorenz n'a pas évoqué ni les équations ni les figures obtenus sur son système réduit. Un peu timide, il n'aurait pas souhaité évoquer le sujet avec Ruelle [1501].

e. Conclusion : quelques constantes de l'histoire du chaos

L'exemple des développements de la météorologie et des travaux de Lorenz nous aura montré une nouvelle fois l'importance des ordinateurs et du calcul, la diversité des utilisations de ces machines et la construction de nouvelles démarches de recherche. Sur la base de considérations issues de la météorologie et des problèmes de prévision, Lorenz a su utiliser les ressources des expériences numériques pour échafauder des modèles à la mesure des problèmes rencontrés et en dégager les propriétés.

La notification des recherches d'Ulam sur les transformations non linéaires n'a rien d'anecdotique, ni de fortuite. Elle prouve que les expériences numériques sont courantes en météorologie. L'article de 1963 consacre aussi l'éloignement de l'empirisme prôné par Von Neumann. Il dégage les limites de l'exercice d'expériences mathématiques, selon Ulam : les mathématiques des systèmes dynamiques sont indispensables à Lorenz, depuis la simple notion d'espace des phases jusqu'aux itérations, pour guider les démarches et assurer les conclusions sur ses modèles. Ueda avait du faire de même.

Ce détour par l'histoire de la météorologie nous a permis de montrer comment la question de l'instabilité et la non périodicité de certains phénomènes a émergé et a été débattue avec détermination par Lorenz. On remarquera que c'est à la frontière de la dynamique et de la statistique que ces questions ont germé, ce qui n'est pas sans rappeler les débats entourant les questions d'ergodicité et de Mécanique statistique. Mais, malgré ces efforts, les résultats de Lorenz peinent à se faire une place. Lorenz tente la vulgarisation de ses idées avec l'"effet papillon" en 1972, auprès des météorologistes. Sans équations, sans mathématiques, il explique sa conviction de l'instabilité de l'atmosphère et de l'effet de petites perturbations sur la prédictibilité. Mais le texte ne sera pas publié avant 1993 [1502]. Le succès viendra avec la rencontre des questions de stochasticité et des mathématiques des systèmes dynamiques car les problèmes d'instabilité sont de plus en plus facilement discutés au cours des années 1960. La situation se renversera alors dans les années 1970, et transformera Lorenz en "père fondateur" du domaine, avec toutes les ambiguïtés que cela suppose.

[1500] Les comptes rendus sont publiés dans [ROSENBLATT, M., VAN ATTA, C.W., 1972]. L'exposé de Ruelle s'intitulait "Strange attractors as a mathematical explanation of turbulence", celui de Lorenz : "Investigating the predictibility of turbulent motion". Ils sont intervenus le même jour, le 17 juillet 1971.

[1501] [DAHAN, A., 2000], p. 418.

[1502] Lorenz a présenté son exposé "Predictability : Does the flap of a Butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas", lors de la 139ème session de l'American Association for the Advancement of Science, le 29 décembre 1972. Le texte est publié dans [LORENZ, E.N., 1993] et [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 91-94.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

9.4. Conclusion : le chaos et le calcul

A travers cette analyse du calcul numérique et analogique, l'idée que le chaos est le produit de l'ère du calcul prend tout son sens. L'historiographie renvoie une image très post-1980 de la place du calcul dans l'histoire du chaos. Pour le philosophe Kellert, le mathématicien Morris Hirsch, pour ne prendre que deux exemples, l'ordinateur a surtout permis de réaliser des calculs infaisables auparavant. Le travail de Lorenz et le chaos, serait d'abord le produit des mathématiques de Poincaré, secondés par des calculs numériques. En un sens, cela n'est pas faux, mais ne correspond à rien de l'évolution historique, épistémologique au niveau de la conception des expériences numériques, de sa pratique, des relations avec les mathématiques des systèmes dynamiques, de la théorie des oscillations. Hénon voit très juste lorsqu'il pointe le défaut d'expériences numériques plutôt que le manque de capacités de calculs.

En outre, avec les exemples de Ulam, des simulations de Monte-Carlo, de Lorenz et des débats entre statistique et dynamique, on s'aperçoit que l'ordinateur a contribué à rompre la dichotomie entre les méthodes probabilistes et déterministes. Lorenz a révélé l'importance de l'instabilité dans cette relation entre dynamique et statistique. Tout ceci participe de déterminants très proches des questions d'ergodicité et de fondements de la Mécanique statistique. L'ordinateur a contribué par la pratique des expériences numériques à modifier la vision du monde opposant hasard et déterminisme.

Le chaos est le résultat de cette convergence de conceptions et de pratiques. Plus philosophiquement, il correspond à un changement dans la pensée mathématique. Ce sont surtout des physiciens qui ont su reprendre à leur compte la mutation engagée par Von Neumann et Ulam. Nous avons là une pratique de physicien, appuyée par un empirisme fortement marqué. Lorsque l'évolution technique a permis un contrôle important des calculs, les positions empiristes se sont faites plus discrètes, et, à partir de 1960, le sens d'"expérience mathématique" acquiert déjà celui qui dominera les années 1980 dans le domaine du chaos. Les mathématiciens se sont difficilement investis dans ce processus. Nous verrons dans le cas de la France et de l'histoire du CNRS (au chapitre 11), comment la pensée bourbakiste a interagi avec ces positions, non orthodoxes, sur le calcul.

CHAPITRE 10. LA CHIMIE DES OSCILLATIONS

Différentes traditions de recherche, disciplines, conceptions et pratiques déterminent l'histoire du chaos, du XIXème siècle jusqu'aux années 1980. Nous en avons exploré les principales lignes, axées sur les mathématiques des systèmes dynamiques et la Mécanique statistique d'une part, les pratiques analogiques et le calcul numérique d'autre part. Les travaux d'Otto Rössler illustrent le fait que d'autres conceptions doivent être intégrées à cette histoire, au niveau de la chimie des oscillations. Pour rendre toute la complexité de notre récit, il nous paraît judicieux de proposer une étude de ce cas. Nous

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

nous proposons donc de montrer comment la chimie des oscillations participe à l'histoire du chaos, s'y rattache et se nourrit des analyses déjà présentées, aussi bien avant 1975, qu'après. L'analogie, la modélisation et la simulation, les mathématiques de Poincaré, entre autres, sont des constantes dans le développement des conceptions sur les oscillations chimiques ; nous en déterminerons l'impact sur le développement du "chaos chimique".

Cette étude porte sur pratiquement tout le XXème siècle [1503] . La première étape dans le cheminement aboutissant au chaos a été celle de l'acceptation de l'existence des oscillations chimiques (homogènes). Par la voie de la modélisation, de l'analogie, mais aussi par un renouvellement des conceptions thermodynamiques, ces réactions sont parvenues à un statut d'objet d'étude légitime. Le plein essor de ces considérations correspond aux années 1970, où une véritable chimie non linéaire se met en place. Nous verrons qu'il s'agit d'un prélude à la phase d'expérimentation du chaos chimique et des interrogations sur la nature de ce chaos.

10.1. Vers les oscillations chimiques

a. Préliminaires

Avant d'engager le parcours à travers cette étude, il faut souligner que notre analyse concerne les oscillations chimiques **homogènes** : cela signifie que le système chimique n'a qu'une seule phase et que dans cette phase, ce sont les quantités d'espèces chimiques en présence qui oscillent.

Deux obstacles majeurs ont handicapé le développement des oscillations chimiques, jusqu'à la fin des années 1960. La première est l'idée selon laquelle il ne peut exister d'oscillations que lorsque le système est hétérogène. La diffusion de cette conception peut être imputée, en grande partie tout du moins, au physico-chimiste allemand Wilhelm Ostwald. Au début du XXème siècle, celui-ci a mis en évidence des oscillations dans des réactions chimiques catalysées : comme pour la plupart des phénomènes de catalyse, tout se déroule en milieu hétérogène et ces oscillations étaient attribuées à des impuretés [1504] . Un élève de Ostwald, G. Bredig travaillait lui sur la décomposition de l'eau oxygénée, qui devient périodique en présence de mercure. En faisant le lien avec les travaux de son maître, dès 1903 il en est arrivé à conclure que le mécanisme est dû essentiellement à

[1503] Faire une histoire plus complète de la chimie des oscillations nous entraînerait dans diverses considérations du XIXème siècle (voire encore antérieurement), ce que nous ne ferons pas ici. A. M. Zhabotinsky évoque des travaux remontant jusqu'à Robert Boyle, au XVIIème siècle. Les plus vieux travaux ne sont sans doute que des observations et ne constituent en rien des travaux "pionniers" du domaine. [ZHABOTINSKII, A.M., 1991]. Pour une étude historique plus fouillée, nous renvoyons à [PACAULT, A., PERRAUD, J.J, 1997], chapitre XIV, p. 118-124.

[1504] Wilhelm Ostwald (1853-1932) est un chimiste allemand, honoré du prix Nobel en 1909 pour ses travaux sur la catalyse. Il est également l'instigateur principal de la chimie-physique moderne. D'après [PACAULT, A., PERRAUD, J.J, 1997] (p. 29), il a donné un exposé à Münich en 1899 : "Vitesses de réactions instables périodiques". Il s'agit de la réaction du chrome dans des solutions acides concentrées, provoquant un dégagement périodique d'hydrogène.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'hétérogénéité de la réaction [1505] . Alors que la question est encore peu discutée, l'hétérogénéité occupe donc déjà une place privilégiée.

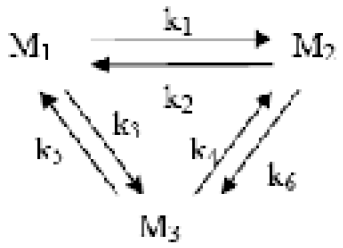
Le second frein est très intériorisé dans la pensée scientifique, et n'est que rarement explicité. La thermodynamique joue un rôle considérable dans ces considérations chimiques et une interprétation un peu sommaire du second principe laisse penser qu'il est impossible d'avoir des oscillations dans un système chimique : il ne peut se produire qu'une évolution monotone vers l'équilibre, conformément à la croissance de l'entropie avec le temps [1506] . Des deux verrous celui-ci a été le plus long à débloquer et avant les travaux de l'école de thermodynamique de Bruxelles, pratiquement aucune remise en question sérieuse n'a été engagée.

b. Premiers éléments favorables : analogies et modélisation

Les premiers éléments en faveur de réactions oscillantes homogènes proviennent des considérations sur quelques modèles mathématiques simples. Alfred Lotka en particulier développe des conceptions et des recherches, assez proches de celles deVan der Pol en un sens, dans lesquelles les analogies et les mathématiques jouent un rôle important. En comparant ces travaux avec l'approche de Hirniak, qui a presque simultanément proposé un exemple d'oscillation, nous pourrons faire ressortir l'originalité de ses travaux.

Julius Hirniak et la conversion entre isomères

En 1910, le chimiste allemand Julius Hirniak a en effet introduit un des premiers systèmes susceptibles de produire une oscillation chimique homogène [1507] . Il s'agit des conversions entre trois isomères selon le schéma suivant :



[HIRNIAK, J., 1910], p. 675
Reproduction de l'illustration originale

L'article de Hirniak est à la fois théorique et revendicatif. D'une part, Hirniak propose une modélisation en terme d'équations différentielles dont il est possible de calculer la solution générale, et il précise quelles configurations pourraient réaliser ces oscillations. Les équations de Hirniak sont suggestives, mais il n'a pas d'expériences réalisant ce

[1505] [BREDIG, G., WEINMAYR, J., 1903]. Voir [PACAULT, A., PERRAUD, J.J, 1997], p. 31 pour d'autres détails.

[1506] En d'autres termes, dans le contexte de la chimie des réactions, les concentrations des différents produits chimiques doivent s'orienter au cours de la réaction, vers une valeur constante, sans osciller. La faiblesse du raisonnement, on le verra, tient au fait qu'il s'agit d'une extrapolation des propriétés des systèmes fermés.

[1507] [HIRNIAK, J., 1910].

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

modèle général. D'autre part, Hirniak est sur la défensive car Lotka a publié un article sur le même thème, la même année. Il cherche à revendiquer la priorité de son travail, engagé depuis 1908 affirme-t-il [1508] . Pour s'en distinguer il insiste notamment sur le caractère "homogène" propre à sa réaction :

"Mon exemple est plus simple et par occasion plus radical que celui de Monsieur A. Lotka […] parce qu'il s'agit d'une réaction périodique dans un système homogène, et qu'une telle réaction est jusqu'à maintenant complètement inconnue. Le cas que Monsieur A. Lotka traite, est peut-être plus à l'ordre du jour dans cette idée, car nous avons urgemment besoin, je voudrais le dire, d'une théorie des réactions dans les systèmes hétérogènes." [1509]

Hirniak est étonnement critique vis-à-vis de Lotka qui, contrairement à ce qu'il pense, travaille aussi sur les réactions homogènes [1510] .

Alfred Lotka(1880-1949) et les oscillations chimiques

Dans un article de 1910, "Contribution to the theory of periodic reactions" [1511] , Lotka avait en effet proposé un modèle à base de processus irréversibles autocatalytiques, qui donnent naissance à des oscillations amorties.

A la base nous avons trois réactions consécutives :

$$1.\ a \rightarrow A$$
$$2.\ A \rightarrow B$$
$$3.\ B \rightarrow C$$

La substance a correspond à la phase vapeur, en contact avec la phase condensée. Cet enchaînement, avec l'hypothèse d'autocatalyse sur la substance B, est modélisable par une équation de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dc_A}{dt} = b - c_A c_B \\ \dfrac{dc_B}{dt} = (c_A - K)c_B \end{cases}$$

(b, K sont des constantes, c_A et c_B les concentrations en A et B)

L'analyse mathématique du système d'équations révèle les conditions pour avoir des oscillations. Mais il s'agit simplement d'un schéma abstrait et Lotka est très réaliste quant à la portée de son modèle :

[1508] Il fait valoir un précédent exposé de 1908 intitulé "Die periodischen chemischen Reaktinonen".

[1509] ***"Mein Beispiel ist einfacher und zufälligerweise radikaler, als das von Herrn A. Lotka […] weil es sich auf eine periodische Reaktion in homogenem Systeme bezieht, und eine solche ist bis jetzt noch vollständig unbekannt. Der Fall, welchen Herr A. Lotka behandelt, ist vielleicht in dieser Beziehung aktueller, da wir einer Theorie des periodischen Reaktionen für heterogene Systeme, ich möchte sagen, dringend benötigen.", [HIRNIAK, J., 1910], p. 680.***

[1510] Son dernier paragraphe est même assez sybillin : "Auch wollen mir einige Vernachlässigungen in der Rechnung des Herrn Lotka nicht ganz einwandfrei erscheinen", [HIRNIAK, J., 1910], p. 680.

[1511] [LOTKA, A., 1910].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"Aucune réaction qui suit la loi précédente n'est connue […] Il semble intéressant, cependant, d'un point de vue purement chimique, de remarquer que dans un système au sein duquel des réactions consécutives prennent place en présence d'une décomposition autocatalytique […] , nous avons la condition requise pour un processus 'périodique'." [1512]

L'abstraction du modèle de Lotka est étonnante mais elle est le produit d'une démarche plus générale, qui se distingue largement de celle d'Hirniak. Avec ce premier exemple déjà, il est remarquable de constater que le **caractère autocatalytique, au centre du processus, est inspiré de la biologie et des propriétés du vivant** :

"La croissance de la matière vivante est, de manière évidente, autocatalytique au moins sur la forme. Il a été démontré […] que la croissance de l'homme et d'autres organismes peut être représentée avec une bonne approximation par la combinaison de deux composants, chacun suivant la loi d'une réaction réversible, monomoléculaire autocatalytique." [1513]

Plusieurs analogies émaillent les travaux de Lotka. La facilité à produire ce type d'analogies peut s'expliquer par le parcours singulier de leur auteur. Lotka est une sorte d'amateur (très) éclairé de la science au sens où il n'est rattaché à aucune institution scientifique. Il était superviseur du bureau de statistique de la Metropolitan Life Insurance Company de New York [1514] ; il maîtrisait les théories des probabilités et des statistiques et avait en outre de bonnes connaissances en chimie et biologie.

En 1907, il a publié un article "Studies of the mode of growth of Material Aggregates", où ses prédilections pour les statistiques, la chimie et la biologie sont déjà exprimées. Il présentait le projet d'utiliser des méthodes statistiques en vue d'étudier des comportements d'agrégation, que ce soit pour des individus (population) ou des molécules (chimiques). Lotka voyait là des méthodes d'analyse de l'évolution organique ou inorganique [1515] .

Lotka explicite ses idées à propos de la "dynamique chimique" qu'il considère comme "un cas particulier d'un problème plus large" [1516] . La dynamique chimique est l'étude des

[1512] ***"No reaction is known which follows the above law, and as a matter of fact the case here considered was suggested by the consideration of matters lying outside the field of physical chemistry. It seems interesting, however, also from a purely chemical point of view, to note that in a system in which consecutive reactions take place in the presence of an autocatalytic decomposition-product, we have the requisite conditions for the occurrence of a 'periodic' process", [LOTKA, A., 1910], p. 274.***

[1513] ***"The growth of living matter is obviously autocatalytic at least in form. It has been shown […] that the growth of man and other organisms can be represented with close approximation as the resultant of two components, each following the law of a reversible monomolecular autocatalytic reaction.", [LOTKA, A., 1910], p. 274.***

[1514] Voir [ISRAEL, G., 1996], p. 67.

[1515] Le parallèle construit entre la théorie de l'évolution et les réactions chimiques est étonnant : "this is because, in the "struggle for existence", the stabler (fitter) molecules A have the advantage, and are, on an average, "longer-lived". Viewed in this way, chemical action clearly presents itself as a case of "Inorganic evolution".", [LOTKA, A., 1907], p. 208. (La molécule "A" renvoit à une réaction chimique discutée par ailleurs dans le texte).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

lois d'un problème chimique, celui de la répartition de matière dans les composants chimiques. Mais ce n'est qu'une incarnation d'un problème de physique plus vaste, celui de la répartition de matière parmi des substances de **nature quelconque** (des agrégats). Tel est le problème d'évolution formulé dans toute sa généralité. Lotka privilégie les statistiques dans cette réflexion de 1907 où la généralité des situations est soulignée. Dans l'article de 1910 il traite le problème en théoricien de la chimie, en écartant la statistique mais sans perdre de vue cette généralité qui lui permet de produire ses analogies.

L'analyse mathématique des modèles construits par analogie constitue le second volet de la démarche de Lotka. En 1910, les oscillations présentées sont abstraites et ne correspondraient qu'à des oscillations amorties : un système chimique répondant à ces caractéristiques convergerait vers un équilibre au bout d'un certain temps. Lotka pensait même que des oscillations continues étaient improbables [1517] .

Mais en 1920, il présente un schéma réactionnel et les équations issues de la dynamique chimique montrant que cette improbabilité n'est pas une impossibilité. Le système est connu sous le nom de Lotka-Volterra [1518] :

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1}{dt} = a_1 X_1 - a_2 X_1 X_2 \\ \dfrac{dX_2}{dt} = a_2 X_1 X_2 - b_2 X_2 \end{cases}$$

Soulignons que le schéma réactionnel reprend le caractère autocatalytique du précédent système de Lotka. C'est le suivant :

$$A + X_1 \xrightarrow{a_1} 2X_1$$
$$X_1 + X_2 \xrightarrow{a_2} 2X_2$$
$$X_2 \xrightarrow{b_2} B$$

(où A et B, a_1, a_2, b_2 sont supposées constantes)

L'analyse de Lotka est doublée d'une étude mathématique très **qualitative** des équations différentielles. Il n'utilise pas vraiment les méthodes de Poincaré mais il

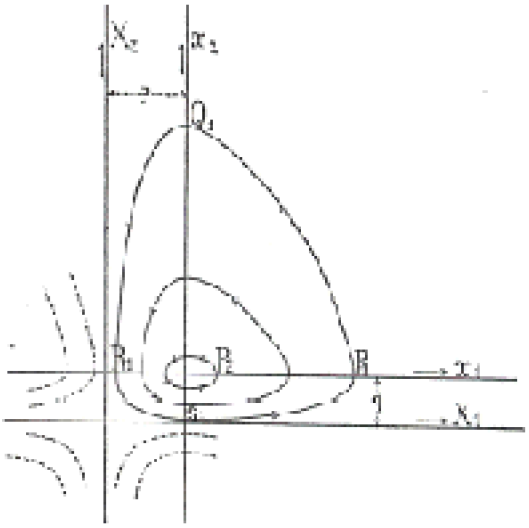
[1516] "chemical dynamics as a special case of a wider problem: the former is the study of the laws governing the changes in the distribution of matter among different chemical compounds, as determined mainly by their chemical character; the latter is the study of the laws governing the distribution of matter among complexes of any specified kind, as determined by their general physical character", [LOTKA, A., 1907], p. 216.

[1517] Il faudrait une circonstance très particulière selon lui: "it seemed to demand a very special numerical relation between the reaction constants", [LOTKA, A., 1920a], p. 1595.

[1518] [LOTKA, A., 1920a], p. 1596. A. Lotka et V. Volterra ont découvert indépendamment le système. Pour une analyse de cette découverte simultanée nous renvoyons à [ISRAEL, G., 1996]. Volterra travaillait sur une question de dynamique des populations : leur système est souvent appelé modèle proie / prédateur, pour cette raison.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

raisonne dans l'espace des phases de manière très élémentaire, sur les courbes des équations. Il étudie la nature des points d'équilibres, dans le cas présent un "centre d'oscillation" et un point selle qui correspond à un équilibre instable [1519] . Sans aucun calcul de solutions il construit le portrait suivant :



[LOTKA, A., 1920a], p. 1597

Cette étude de 1920 est étrangement contemporaine des travaux de Van der Pol et de la proposition d'Andronov d'associer cycle limite et oscillations. Sans ces conceptions qui datent de la fin de la décennie, Lotka met en relation une courbe fermée avec une oscillation continue, de la même manière que Léauté en 1885 et Liénard en 1928. C'est un exemple supplémentaire au fait que ce parallèle suffit (au moins dans un premier temps) à la théorie des oscillations non linéaires, hors d'URSS. Ce système est d'autant plus important que Van der Pol et Andronov l'ont remarqué [1520] . En outre, Lotka ne perd pas de vue ses analogies : il précise que ces "phénomènes rythmiques" [1521] ont un intérêt tout particulier en biologie, par exemple le battement du cœur. La convergence d'intérêts et de pratiques au sujet des phénomènes périodiques oscillants est remarquable. Lotka ajoute ainsi des facettes chimiques et biologiques à des questions focalisées en premier lieu sur les oscillations électriques.

L'impact des travaux de Lotka

Les arguments théoriques de Hirniak et Lotka sont fécondés par l'approche plus expérimentale du chimiste américain William Bray. Dans ce registre il propose en 1921, une description des oscillations dans la décomposition catalytique de l'eau oxygénée en

[1519] "The crest corresponds to a center of oscillation. The saddle point corresponds to a position of unstable equilibrium.", [LOTKA, A., 1920a], p. 1599. Lotka ne précise pas d'où il a pris ce vocabulaire, mais il est fortement probable qu'il ait des connaissances plus importantes sur le sujet que ce que l'article laisse apparaître.

[1520] Andronov le cite aux côtés des oscillations de relaxation de Van der Pol, [ANDRONOV, A., 1929], p. 557.

[1521] "Ryhtmic phenomena are of particular interest in connection with biological systems (e.g. heart-beat).", [LOTKA, A., 1920a], p. 1599.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

présence d'un couple iode/iodate, en milieu homogène. Bray est très proche des travaux de Bredig et en connaissant les thèses de ce dernier, il lance une interprétation en terme de catalyse homogène. Pour cela il fait sienne l'analyse de Lotka concernant la présence d'autocatalyse et émet l'hypothèse de l'existence d'un tel mécanisme dans sa réaction. Cependant en 1921, Bray ne dispose pas de suffisamment de résultats sur les mécanismes en jeu pour assurer cette interprétation.

En outre, les analyses de Bray s'attirent l'hostilité des partisans de la thèse de l'hétérogénéité. Les travaux de Ostwald et Bredig ont encore toute leur importance et plusieurs tentatives de réfutation des idées de Bray voient le jour : Ernest Hedges et James Myers en 1924, Francis Rice et Orland Reiff en 1927, prétextent la présence de poussière (et donc d'une catalyse hétérogène) ou de sursaturation [1522].

Bray dirigeant un étudiant sur ce sujet, Hermann Liebhafsky [1523], persiste. Ils cherchent probablement les mécanismes responsables des oscillations mais leurs tentatives sont limitées par un problème d'ordre technique. D'après Pacault et Perraud en effet, les dispositifs expérimentaux étaient adaptés aux questions de la cinétique chimique mais l'apparition d'un comportement oscillant est plutôt susceptible de perturber ces analyses [1524]. Finalement, leur projet est abandonné. Bray est en quelque sorte désarmé en même temps que gagne un certain désintérêt pour le sujet à la fin des années 1920.

D'autres analogies

Plusieurs autres analogies concernant l'étude des fibres nerveuses ont conduit à l'étude des oscillations chimiques, en parallèle à cet intérêt pour la catalyse chimique et les réactions abstraites. Vers 1900, W. Ostwald, et ses étudiants avaient déjà perçu l'analogie entre la propagation de l'influx nerveux et la propagation d'une région oxydée le long d'un fil de chrome (ou de fer) plongée dans l'acide sulfurique [1525].

Le physiologiste Ralph Lillie est le premier à reprendre le parallèle pour étudier les réactions plus en détails et en tirer diverses analogies avec l'excitabilité des nerfs [1526]. Parmi ces comportements il en est un périodique. On notera que Lillie compare volontiers le régime périodique d'émission d'ondes avec les systèmes vivants, comme le battement périodique du cœur.

De manière plus systématique, l'allemand Karl Friedrich Bonhoeffer (1868-1948) reprend cette analogie. Bonhoeffer était tout à la fois psychiatre, neurologue et chimiste, ce qui explique son intérêt pour la question. Différents métaux, dans divers acides ont été

[1522] [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 31-33.

[1523] Voir par exemple leur article : [BRAY, W.C., LIEBHAFSKY, H.A., 1931].

[1524] [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 33.

[1525] Les étudiants en question sont Eberhard Brauer et Henry Heathcote. Pour tous les détails sur cet épisode, voir [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 38-39.

[1526] Les différentes analogies sont produites dans les articles : [LILLIE, R.S., 1920], [LILLIE, R.S., 1925] et [LILLIE, R.S., 1936].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

testés et évalués du point de vue de la production de signal périodique. De 1941 à 1948 il établit même des mécanismes de ces réactions chimiques oscillantes [1527] .

Avec Bonhoeffer plusieurs des tendances évoquées se concentrent. Il faut remarquer tout d'abord qu'il s'appuie sur les travaux de Lotka pour affirmer l'importance de l'étape autocatalytique dans l'obtention des oscillations. Il critique également les affirmations de Bray à propos de son autocatalyse homogène, car elles ne lui paraissent pas suffisamment justifiées. Par ailleurs, Bonhoeffer fait valoir que les aspects homogènes ou hétérogènes ne font que peu de différences : les oscillations sont possibles dans les deux cas.

Bonhoeffer adhère également aux idées de Van der Pol et Lillie selon lesquelles les oscillations de relaxation décrivent des oscillations comme celles du cœur. Leurs affinités se retrouvent également dans les modèles électro-biologiques que Bonhoeffer construit, suivi en cela par un des ses étudiants, Ulrich Franck [1528] . Enfin, ajoutons que Rössler s'inscrit dans cette perspective lorsqu'il reprend les oscillateurs de Bonhoeffer par sa démarche analogique combinant électricité et biochimie. Les travaux de Bonhoeffer sont donc un aboutissement des recherches à la frontière de la biologie et de la chimie, et un tremplin pour une série nouvelle de conceptions sur les oscillations.

En définitive, à travers ces éléments un peu dispersés il est possible de saisir une certaine contemporanéité, et une certaine cohérence, avec la pratique des oscillations de relaxation. Analogies et tentatives de modélisation mathématique sous forme d'équations différentielles jouent un rôle parallèle dans ces questions et conduisent à un début d'acceptation des oscillations chimiques homogènes, longtemps boudées. Cependant, l'obstacle fondamental, celui de la thermodynamique, n'est pas encore levé. Ce n'est qu'au croisement du développement de la réaction de Belousov-Zhabotinsky et des nouvelles théories thermodynamiques que l'évolution va se faire.

10.2. La réaction de Belousov-Zhabotinsky et la thermodynamique non linéaire

Avant de s'imposer et de devenir une "drosophile" des réactions chimiques oscillantes, puis du chaos chimique dans les années 1970, la réaction de Belousov-Zhabotinsky a une histoire assez agitée. La naissance du schéma réactionnel et l'acceptation de ces oscillations surtout ont été laborieuses. Nous nous proposons de montrer comment cette réaction bénéficie en fait d'un renouvellement théorique plus général avant d'émerger véritablement ; ce cadre théorique établi vers 1970 est constitué de modèles, de simulations et d'analyses mathématiques des équations des modèles, complétés par des expériences maîtrisées et surtout par un nouveau "paradigme" de thermodynamique non linéaire.

[1527] Pour tout ce qui concerne Bonhoeffer, nous nous en remettons au travail plus étendu de Pacault et Perraud ([PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 39-41) ainsi qu'à la biographie de Bonhoeffer : [NEUMARKER, K.J., 1990].

[1528] Nous renvoyons à [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 40-41.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

a. Les débuts difficiles d'une réaction oscillante

Produite pour la première fois vers 1951 par Boris Pavlovich Belousov (1893-1970), la réaction ne s'insère pas directement dans l'histoire des oscillations chimiques que nous avons fait remonter à Lotka. Cette intégration est le fruit des efforts ultérieurs d'Anatol Zhabotinsky, en matière de modélisation notamment.

La réaction de Boris Belousov

Revenons sur les premiers temps de la découverte de Belousov dans le contexte de l'Union Soviétique. L'histoire des travaux de Belousov et les obstacles semés sur son parcours sont connus dans leurs grandes lignes [1529]. Belousov a été formé à la chimie lors de son exil à Zürich [1530] au début du XXème siècle. A son retour en Russie, au cours de la première guerre mondiale, il cherche à s'engager dans l'armée et il est placé comme chimiste dans un laboratoire militaire contrôlé par l'Armée Rouge. A son départ de l'armée, il intègre un autre laboratoire de biophysique rattaché au ministère de la santé en URSS. C'est dans ce cadre, où il s'intéresse à la toxicologie, qu'il met en évidence sa fameuse réaction chimique au détour de recherches sur des analogues du cycle de Krebs [1531] : afin de titrer l'acide citrique produit au cours de la réaction il mélange les différents ingrédients qui conduisent à l'oscillation. En outre, les options choisies pour l'opération maintiennent la réaction dans un système homogène (y compris le phénomène de catalyse). Il n'avait *a priori* aucun intérêt particulier pour les oscillations chimiques, la réaction est découverte par hasard, mais il décide de l'étudier et cherche tout de suite à en déterminer le mécanisme.

La publication de cette découverte, tentée une première fois en 1951, est rejetée : le comité de lecture n'adhère pas à cette idée d'oscillations chimiques. Cette impossibilité supposée est à rapprocher des affirmations relatives aux contraintes thermodynamiques créées par le second principe. Les six mois suivants, Belousov précise sa réaction et tente une nouvelle publication, également refusée [1532]. Belousov s'écarte ensuite définitivement du sujet. Seul l'intérêt du biochimiste Simon Schnoll à Moscou permet de ne pas faire tomber la réaction dans l'oubli. Schnoll a eu vent de l'expérience de Belousov [1533] et obtient, difficilement, des notes de celui-ci sur ce thème. Il encourage également

[1529] A.M. Zhabotinsky a livré son témoignage dans [ZHABOTINSKY, A.M., 1991] et dans l'introduction de [FIELD, R.J., BÜRGER, M., 1985]. On trouvera des détails plus nombreux dans [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], chapitre VII. On peut également consulter une page Internet pour quelques informations peu accessibles autrement : http://people.musc.edu/~alievr/belous.html (qui reprend un article russe de S. Schnoll, relatant ce qu'il connaît sur Belousov et référencé sous le titre : "The Discovery by Combrig", Scientific newspaper "Eureka", #3, 1993).

[1530] Belousov est issue d'une famille d'opposants au régime tsariste. A la suite de la révolution de 1905, la famille est obligée de s'exiler, en Suisse.

[1531] Le cycle de Krebs, où cycle de l'acide citrique, a été analysé par Hans Adolf Krebs (1900-1981) ; c'est une suite de réactions chimiques très importante en biochimie (Krebs a obtenu le prix Nobel de Médecine en 1953). Le cycle est essentiel dans les organismes utilisant l'oxygène pour la respiration cellulaire. Il est associé à la dégradation des sucres, protéines et lipides.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Belousov à publier son manuscrit dans une revue un peu obscure (le Journal des références de médecine des radiations) où la publication se fait sans comité de lecture. "Une réaction périodique et son mécanisme" paraît finalement en 1958 [1534] .

Le travail d'Anatol Zhabotinsky

Sur la suggestion de Schnoll, Anatol Zhabotinsky (né en 1938) prend le relais de l'étude de cette oscillation chimique. Ce jeune russe formé à la biophysique se lance dans une thèse en 1961. Différents arrangements et de nouveaux ingrédients par rapport à la réaction originale donneront la réaction de Belousov-Zhabotinsky : l'action du bromate de sodium sur l'acide malonique, en présence de ferroïne, dans un milieu sulfurique concentré.

Le travail de Zhabotinsky a plusieurs facettes. Il propose d'abord de montrer l'homogénéité de la réaction et d'en décomposer les mécanismes. Les premières parutions de ses travaux datent de 1964 [1535] . La seconde étape, réalisée avec le concours de M.D. Korzuhkin et les conseils de A.M. Molchanov, a vu le développement de modèles pour cette réaction. En 1965 ils publient, sur la base d'un modèle de Lotka-Volterra modifié, un système à quatre variables capable de générer des oscillations. Ce sont encore des modèles abstraits qu'il est difficile de relier aux mécanismes effectifs dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky et le premier modèle phénoménologique est conçu en 1967. Zhabotinsky et son groupe [1536] s'inscrivent donc dans une perspective dont l'histoire est déjà ancienne.

Zhabotinsky a étudié un autre aspect de la question concernant la propagation des ondes chimiques. La propagation de l'influx nerveux, depuis Ostwald et Lillie, était analysée en milieu hétérogène. Après plusieurs essais infructueux, un système pour étudier la propagation des ondes, en milieu homogène, est mis en place par le groupe de Zhabotinsky : une boite de Pétri, contenant une mince couche de solution de Belousov-Zhabotinsky modifiée afin de réaliser un système de réaction-diffusion

[1532] Outre les préjugés thermodynamiques il faut tout de même signaler que l'article de Belousov est très descriptif. Il ne s'encombre pas de théorie ou même de considérations thermodynamiques : sans chercher à "excuser" ceux qui ont évalué le travail de Belousov, on peut comprendre une partie de leurs réticences.

[1533] Par un autre heureux hasard semble-t-il : Belousov est l'oncle d'un de ses étudiants. [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 44.

[1534] On peut trouver la traduction en anglais de cet article dans [FIELD, R.J., BÜRGER, M., 1985], p. 605-613.

[1535] Voir [FIELD, R.J., BÜRGER, M. 1985], p. 2-3. La première note était prête en 1962 mais n'a été publiée effectivement que deux années plus tard dans Biofizka : [ZHABOTINSKY, A.M., 1964a]. Zhabotinsky montre que la substitution de l'acide citrique par de l'acide malonique produit un comportement similaire et élucide une partie du mécanisme d'oscillation. Dans la seconde, [ZHABOTINSKY, A.M., 1964b], il donne un mécanisme plus complet et diverses recettes analogues à la précédente réaction.

[1536] V. Vavilin, Alex Zaikin, Valentin Krinsky ont chacun collaboré aux différentes recherches sur les oscillations chimiques suggérées par Zhabotinsky. En un sens il s'est constitué un groupe, sans équivalent hors d'Union Soviétique.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

homogène. Les ondes spirales obtenues en 1970 ont fait une grande partie de la réputation de ces chimistes, en particulier celle de Zhabotinsky [1537] .

Le passage à l'Ouest

Naturellement la promotion de ce travail en URSS est assurée par les publications du groupe et les deux colloques de Pushino (où le groupe travaille après son déménagement de Moscou) en 1966 et 1970. Cependant la réaction reste longtemps connue exclusivement en URSS. Au niveau international et dans le monde occidental en particulier, la reconnaissance de ces découvertes s'est faite progressivement et plutôt lentement. Le tout premier article non écrit en russe date de 1967 seulement : il est signé par le chimiste danois Hans Degn, dans la prestigieuse revue Nature [1538] . Il y a encore très peu de diffusion de ces découvertes et peu de scientifiques concernés par le sujet. La chimie des oscillations gagne également la science occidentale par l'intermédiaire d'un colloque Est-Ouest organisé à Prague en 1968. Profitant du printemps de Prague, des biologistes et des biochimistes occidentaux ont décidé de mettre en place une rencontre "Biological and biochemical oscillators" entre le 19 et 21 juillet 1968 à Held, à proximité de Prague [1539] . Cet intérêt pour les oscillations biologiques n'est pas subit. Autour de Britton Chance (né en 1913) il existe en effet un groupe de recherche à l'université de Philadelphie s'occupant des oscillations apparaissant dans le phénomène de glycolyse. Ces études remontent au milieu des années 1950 et c'est dans le courant des années 1960 qu'elles prennent de l'importance : l'intérêt porté à ce thème convainc les protagonistes d'organiser un colloque. Benno Hess, un chercheur collaborant avec le groupe de Chance, est le relais qui a permis d'associer les chercheurs soviétiques, grâce à ses relations privilégiées avec Schnoll, tissées au colloque de Pushino de 1966 auquel il a participé [1540] .

L'institut de Pushino se déplace en nombre à Prague pour exposer ses travaux très orientés vers la réaction de Belousov-Zhabotinsky. Naturellement, cet ensemble de présentation suscite beaucoup d'intérêts et d'interrogations auprès d'auditeurs peu au fait de ces questions. Une seconde rencontre est ensuite organisée en 1969 en Finlande mais plusieurs chercheurs soviétiques ne seront pas autorisés à y participer (notamment Zhabotinsky).

[1537] Le résultat est publié dans Nature et contient la notion de "structure-cible" ("target–pattern" en anglais): [ZAIKIN, A.N., ZHABOTINSKY, A.M., 1970].

[1538] [DEGN, H., 1967]. Heinrich Busse a publié un second article en 1969 [BUSSE, H.G., 1969]. Un autre groupe publiera, en 1971 seulement, un troisième article sur le thème : [KASPEREK, J.G., BRUICE, T.C., 1971]. Ce sont des données quantitatives relatives au mécanisme de la réaction de Belousov-Zhabotinsky.

[1539] Les instigateurs de ce colloque sont des chercheurs travaillant au laboratoire de la Johnson Research Foundation de l'université de Philadelphie, dirigé par Britton Chance. Cela inclut Kendall Pye, Amal Ghosh et Benno Hess (biochimiste allemand). Les comptes rendus du colloque de Held et de Finlande ont été publiés dans [CHANCE, B., 1973].

[1540] Voir [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 49-53 pour plus de détails.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Pour autant, il semble que la langue plus que des questions de restrictions de déplacements ou de mise au secret, soit le principal obstacle à la diffusion de ces travaux hors d'URSS. Peu de scientifiques lisent le russe et compulsent les revues soviétiques ce qui explique que seuls quelques chercheurs isolés, comme Degn ou encore l'allemand Heinrich Busse, en aient eu connaissance et soient par conséquent un peu marginaux dans la science occidentale.

Pour comprendre cette diffusion progressive à la fin des années 1960 il convient de la relier aux nouvelles théories thermodynamiques se développant à ce moment là. En effet, l'importance accordée à la réaction Belousov-Zhabotinsky tient au fait qu'elle donne une assise expérimentale à ces théories et qu'elle en ressort fortement accréditée. Avant d'aborder la rencontre de ces deux voies de recherche, revenons rapidement sur la réévaluation des concepts thermodynamiques, dans le cadre de l'Ecole (de thermodynamique) de Bruxelles, qui a abouti à la **thermodynamique non linéaire**.

a. La thermodynamique non linéaire

L'école de Bruxelles s'est construite autour du physicien Théophile De Donder (1872-1957), auteur d'un ouvrage important sur l'affinité chimique en 1927 [1541]. La réflexion sur les phénomènes irréversibles est au cœur de l'activité du groupe, en particulier d'Ilya Prigogine (1917-2003), destiné à devenir le leader de cette école. Cet intérêt est très clairement exprimé dans son ouvrage de 1947 :

"Une thermodynamique de la réaction chimique sera nécessairement une thermodynamique des phénomènes irréversibles […] Quand on réfléchit à ces différents points, on est amené inévitablement à la conclusion que la thermodynamique classique constitue une doctrine admirable sans aucun doute, mais fragmentaire, et que ce caractère fragmentaire provient de ce qu'elle n'est applicable qu'aux seuls états d'équilibre des systèmes fermés. Il faut dès lors chercher à fonder une théorie plus vaste qui englobe les états de non-équilibre et les états d'équilibre." [1542]

On peut constater deux choses. Les états oscillants (qui sont des états de non-équilibre) trouvent leur place dans le projet. Dans une moindre mesure, il s'agit également d'un programme pour la thermodynamique parallèle aux ambitions d'Andronov qui souhaitait construire une théorie pour les oscillations englobant l'essentiel des oscillations.

Ici, l'objectif affiché n'est pas de trouver un arrangement à la thermodynamique classique, mais de fonder une nouvelle thermodynamique, valable pour des systèmes ouverts et prenant en compte l'irréversibilité. De la même manière que la thermodynamique macroscopique classique est phénoménologique, tous ces développements sont de l'ordre de la phénoménologie.

La première étape dans cette démarche a été de construire une **thermodynamique**

[1541] L'ouvrage est simplement intitulé L'Affinité, [DE DONDER, T., 1927]. De Donder suivait également de près les travaux d'Einstein et participait conjointement au développement de la relativité générale et de la thermodynamique.

[1542] [PRIGOGINE, I., 1947], p. 4-5 (en italique dans le texte). Cette publication de 1947 correspond en fait à la thèse d'agrégation soutenue par Prigogine en 1945.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

linéaire des processus irréversibles (ou encore, thermodynamique proche de l'équilibre). L'école de Bruxelles, en même temps que le physicien norvégien Lars Onsager (1903-1976), a défini l'essentiel des notions de cette thermodynamique. Onsager a établi les relations dites de réciprocité en 1931 [1543] . Prigogine a démontré le théorème de la production minimale d'entropie. Le tout repose sur l'hypothèse de l'équilibre local : l'état thermodynamique local est voisin d'un état d'équilibre.

Le système dans sa globalité évolue de manière irréversible et localement on applique les équations valables pour l'état d'équilibre. Dans ce cas il est possible de définir avec Onsager, des grandeurs flux et forces généralisées [1544] . L'autre concept central est la notion de **production d'entropie**. Le théorème de Prigogine stipule qu'un système physicochimique soumis à de faibles contraintes permanentes (pour rester dans le cadre d'une approximation du premier ordre), interdisant l'accès à l'équilibre mais seulement un état stationnaire de non-équilibre, s'accompagne d'une production d'entropie décroissante qui atteint sa valeur minimale à l'état stationnaire.

Les hypothèses retenues correspondent à une **relation linéaire entre les grandeurs flux et force**, grandeurs qui caractérisent la thermodynamique proche de l'équilibre [1545] .

L'extension dans le domaine éloigné de l'équilibre engage à reconsidérer ce point de vue. Le cadre du développement de ces travaux est évidement celui des systèmes ouverts. Paul limite et George Van Lerberghe avaient dès les années 1930 proposé une théorie des systèmes ouverts, mais insatisfaisante aux yeux de Prigogine [1546] . Dans son ouvrage de 1947 Prigogine annonce que le point de départ, l'hypothèse d'équilibre local, reste le même [1547] . Le travail de longue haleine se poursuit les années suivantes grâce à une collaboration entre Prigogine et limite notamment. La difficulté est bien supérieure au cas linéaire car il est impossible de construire un principe variationnel général, autrement dit rien ne remplace simplement la production d'entropie et le théorème de Prigogine.

L'aboutissement [1548] est la publication de leur traité commun : Structure, stabilité et

[1543] Ce résultat est présenté dans deux articles restés très célèbres qui ont valu à son auteur une "moitié" de prix Nobel : [ONSAGER, L., 1931a], [ONSAGER, L., 1931b]. L'autre moitié est due à son résultat sur le modèle d'Ising, considéré comme un des résultats les plus importants de physique théorique au XXème siècle (voir [BRUSH, S.G., 1986]).

[1544] Voir les explications dans [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 22-24.

[1545] En termes techniques, si on note J_i les flux irréversibles (transports de chaleur, de matière, vitesses des réactions chimiques…) et X_i les forces généralisées (affinités chimiques, gradients…) on a pour définition de la production d'entropie (locale $\sigma(S)$ et globale $P[S]$) :
L'approximation linéaire s'exprime par $J_i = L_{ij} X_j$ où L_{ij} sont les coefficients phénoménologiques. La relation de réciprocité de Onsager affirme : $L_{ij} = L_{ji}$. Pour plus de précisions et un exposé technique, voir [GLANSDORFF, P., PRIGOGINE, I., 1971], Chapitre 1-4 et [GLANSDORFF, P., 1979].

[1546] Il considérait que ce cadre introduisait des hypothèses non justifiées physiquement : [PRIGOGINE, I., 1947], p. 6.

[1547] [PRIGOGINE, I., 1947], p. 6-7. Evidement cela impose une restriction aux critères construits par la suite. Les milieux raréfiés, les effets quantiques à très basses températures par exemple, sont exclus du cadre. Voir [GLANSDORFF, P., 1979].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

fluctuations en 1971. L'objectif est de chercher à dépasser les approximations du linéaire c'est-à-dire de produire une "**extension de la thermodynamique au domaine non linéaire**" [1549] . Leur ambition est d'englober ces situations non linéaires et les questions d'instabilités connues, apparaissant en hydrodynamique notamment.

Le titre de l'ouvrage donne trois des éléments clés abordés par limite et Prigogine pour les fondements d'une telle physique macroscopique. Car il s'agit bien là du développement de tout un pan de la physique macroscopique quelque peu délaissé par la communauté physicienne. Une seule phrase suffit à montrer l'intrication des trois éléments :

"[…] une nouvelle 'structure' est toujours la conséquence d'une instabilité. Elle est engendrée par une fluctuation." [1550]

Les auteurs distinguent deux types de structures : les structures d'équilibres, bien connues dans le cadre de la thermodynamique classique (l'exemple le plus simple étant le cristal) et les **structures dissipatives**. Cette dernière notion deviendra le symbole du travail de limite et surtout de Prigogine.

Autour de 1970, en une sorte de préliminaire à l'interaction entre ces théories et la réaction de Belousov-Zhabotinsky se produit une convergence conceptuelle entre les théories de la stabilité thermodynamique, les mathématiques de Lyapounov et les cycles limites de Poincaré, associée à un croisement avec les expériences chimiques et numériques.

Stabilité et fluctuations

D'après limite et Prigogine, la thermodynamique généralisée se doit d'inclure une théorie de la stabilité et des fluctuations car selon eux une structure est le produit d'une amplification des fluctuations. Or dans le cadre classique, on s'intéresse aux phénomènes de régression des fluctuations, qui sert d'ailleurs à définir la condition de stabilité.

En conséquence leur projet intègre diverses préoccupations de la physique macroscopique. Les théories des fluctuations d'Einstein, élaborées à propos du mouvement brownien, permettent par exemple de donner la probabilité des fluctuations autour d'un équilibre. La stabilité en thermodynamique classique est réévaluée. En effet, cette théorie classique correspond à la construction et à l'utilisation des potentiels thermodynamiques dont l'idée remonte à J.W. Gibbs. Prigogine et limite ont montré qu'en fait la notion de potentiel ne peut pas se généraliser aux situations hors-équilibre. Au voisinage de l'équilibre la notion clé est la production d'entropie ; loin de l'équilibre c'est la **production d'entropie d'excès**. La théorie de la stabilité de Lyapounov intervient ici car

[1548] Ce qu'il convient d'appeler "seconde étape" dans le développement de la thermodynamique des processus irréversibles atteint un premier cap en 1954 avec la publication d'un résultat dans la revue Physica : [GLANSDORFF, P., PRIGOGINE, I., 1954]. En effet, ils dégagent un principe d'évolution universel ne reposant pas sur un potentiel et dont la notion de production d'entropie et le théorème de Prigogine sont des cas particuliers.

[1549] [GLANSDORFF, P., PRIGOGINE, I., 1971], p. 2 (nous mettons en évidence).

[1550] [GLANSDORFF, P., PRIGOGINE, I., 1971], p. 3.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

la production d'entropie d'excès est considérée comme un "équivalent" d'une "seconde fonction de Lyapounov", permettant l'étude effective de la stabilité.

Dans le cadre théorique dessiné, deux notions de stabilité sont donc intégrées : une instabilité correspondant à l'amplification des fluctuations et une stabilité de la structure formée. Une structure dissipative serait la concrétisation de cette combinaison.

Modélisation et simulation : instabilité, cycle limite et "Bruxellateur"

Ce cadre général novateur est court en arguments dans un premier temps. Ce n'est qu'à travers le développement d'une réaction chimique abstraite et son analyse, puis le rapprochement établi avec la réaction de Belousov-Zhabotinsky qu'il accèdera à une reconnaissance véritable. René Lefever est un des artisans du schéma abstrait, appelé "Bruxellateur" par la suite, aidé dans sa tâche par Prigogine et Grégoire Nicolis. Deux modèles connus, ceux de Lotka et Turing, ont servi de point de départ à la recherche d'une réaction permettant de mettre en évidence les caractères si particuliers des structures dissipatives. L'instabilité est recherchée en même temps que les **cycles limites de Poincaré** : **ce sont eux qui correspondent, au niveau des modèles mathématiques, aux structures susceptibles de s'établir**.

En effet, en 1967, avec Nicolis et Prigogine, Lefever publie un article détaillant le comportement du système de Lotka et montrant qu'il ne présente pas d'instabilité. Cette analyse cristallise toutes les tendances du moment : il s'agit d'une étude thermodynamique des oscillations chimiques selon les méthodes de l'école de Bruxelles et prises sous forme de schéma abstrait [1551] .

Un autre modèle mathématique présentant des propriétés d'instabilités supposées est celui d'Alan Turing pour la morphogenèse. Dans son célèbre article de 1952, "The chemical basis of morphogenesis", Turing développe des modèles de réaction-diffusion. Son objectif est le suivant :

"Il est suggéré qu'un système de substances chimiques, appelé morphogènes, réagissant entre elles et se diffusant à travers un tissu, est adéquat pour rendre compte du phénomène principal de morphogenèse. Un tel système, bien qu'il puisse être originellement assez homogène, pourrait développer ultérieurement un motif ou une structure due à une instabilité de l'équilibre homogène, qui est déclenchée par des perturbations aléatoires. […] L'analyse concerne au premier chef l'enclenchement de l'instabilité." [1552]

Turing insiste sur l'instabilité comme étant génératrice de structure et se rapproche ainsi

[1551] A ce moment là, ils ne font référence qu'aux travaux effectués hors d'URSS et surtout aux problèmes de la biologie comme ceux traités par le groupe de Chance (renvoi) et les horloges biologiques. [LEFEVER, R., NICOLIS, G., PRIGOGINE, I., 1967], p. 1045.

[1552] ***"It is suggested that a system of chemical substances, called morphogens, reactiong together and diffusing through a tissue, is adequate to account for the main phenomena of morphogenesis. Such a system, although it may originally be quite homogeneous, may later develop a pattern or structure due to an instability of the homogeneous equilibrium, which is triggered off by random disturbances. […] The investigation is chiefly concerned with the onset of instability.", [TURING, A.M., 1952], p. 37.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

des idées du groupe de Bruxelles [1553] . Cependant pour les recherches de Prigogine et de ses collaborateurs, le modèle de Turing présentait des imperfections du point de vue de la cinétique chimique [1554] . Dans sa recherche d'un modèle plus adapté, Lefever choisit de modifier les schémas de réaction, en espérant introduire l'instabilité par des étapes autocatalytiques, comme dans le modèle de Lotka, et il obtient un schéma satisfaisant en implémentant une étape à trois molécules :

$A \rightarrow X$

$2X+Y \rightarrow 3X$

$B+X \rightarrow Y+D$

$X \rightarrow E$

Ce système, mathématisé selon les lois de la cinétique chimique, est le "Bruxellateur" [1555] qui fera le principal objet de la thèse de doctorat de Lefever en 1968. En séjour post-doctoral à Austin, il pratiquera la simulation numérique, pour analyser le modèle [1556] . L'ordinateur est alors utilisé pour **construire et améliorer les modèles** dans le but d'observer une organisation spatiale et temporelle [1557] .

La dimension expérimentale, chimique, de ces recherches est la dernière lacune dans cette approche. La participation de Lefever au colloque de Prague en juillet 1968 est probablement un exercice de collecte d'information pour combler ce déficit et appuyer ses thèses [1558] . Une ultime étape décisive est franchie en 1969 au cours d'une rencontre, organisée en Bavière et où Lefever, Nicolis et Prigogine exposent leurs résultats, leurs modèles et leurs idées générales sur les structures dissipatives : Hermann Busse leur présente alors la réaction de Belousov-Zhabotinsky qu'il est un des rares à connaître hors d'URSS [1559] .

La réaction est un système expérimental particulièrement simple et illustratif des comportements recherchés par l'école belge mais inattendus pour la plupart des physiciens et chimistes. C'est ce qui fait le caractère décisif de cette rencontre entre la thermodynamique non linéaire et les oscillations chimiques du type de la réaction de

[1553] D'après Pacault et Perraud, Prigogine et Turing se sont même rencontrés en 1952 mais sans parvenir à faire converger leurs idées.

[1554] [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 55.

[1555] Ou "Brusselator" en anglais. C'est J.J. Tyson qui l'a baptisé ainsi en 1973, [TYSON, J.J., 1973].

[1556] Prigogine obtient un poste de professeur à l'Université du Texas, à Austin. Lefever le suit en 1968. Là-bas, il a été initié au calcul numérique par Robert Schechter.

[1557] [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 56.

[1558] [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 55. Cf. page 618.

[1559] Busse a publié la "recette" de la réaction la même année dans [BUSSE, H.G., 1969].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Belousov-Zhabotinsky, dans leurs aspects théoriques, expérimentaux et de simulations numériques. Cette réaction est le meilleur vecteur d'objectivation des théories bruxelloises.

En 1970, l'analyse des systèmes est encore perfectionnée par l'emploi des théories des oscillations non linéaires et de la notion de cycle limite en particulier [1560] . Le cycle limite a une double importance pour le groupe de Bruxelles. Il représente une oscillation et il a une propriété d'"ergodicité" : l'état final d'oscillation ne dépend pas des conditions initiales. Pour ces thermodynamiciens qui s'intéressent par ailleurs à la Mécanique statistique, l'analogie est importante [1561] .

En définitive, la construction et l'étude du "Bruxellateur" auront mobilisé de nombreuses voies de recherches, de la thermodynamique, à la théorie des oscillations, en passant par les mathématiques des systèmes dynamiques. La complexité du modèle recherché et les non linéarités omniprésentes [1562] expliquent l'utilisation de ces notions. Les expériences numériques ont permis une mise en oeuvre effective de ces conceptions. Le Structure, stabilité et fluctuations de 1971 et le concept de structure dissipative cristallisent la convergence conceptuelle, touchant directement la thermodynamique classique. Ils représentent ce renouveau et inaugurent la période de développements considérables qui a abouti au "chaos chimique".

10.3. Les années 1970 : vers le chaos chimique

Au début des années 1970, malgré une évolution conceptuelle importante, les réticences à l'égard des oscillations chimiques subsistent. En 1972, Degn commente la situation :

"Bien qu'il semble maintenant exister une abondance de preuves en faveur de l'existence de réactions chimiques homogènes, il y a toujours des théoriciens pour résister à cette idée, et aussi quelques expérimentateurs qui pensent que ces oscillations homogènes présumées sont causées par des particules résiduelles, alors que personne n'a expliqué comment." [1563]

[1560] [LEFEVER, R., NICOLIS, G., 1971], soumis en 1970.

[1561] "Au point de vue de la thermodynamique, la grande importance du concept de cycle limite, tient à son "ergodicité". En effet, quelles que soient les conditions initiales imposées, l'état final est toujours le même et il est représenté par une trajectoire périodique. Sous ce rapport, on observe une étroite analogie avec les processus ergodiques de la mécanique statistique, lorsque le système tend vers un état d'équilibre quelle que soit la condition initiale.", [GLANSDORFF, P., PRIGOGINE, I., 1971], chapitre XIV, paragraphe 6 ("Le cycle limite").

[1562] Glansdorff explique les origines des non linéarités, responsables de la formation de structures dissipatives : "Les causes principales de non linéarité responsables de leur formation résultent principalement de la présence d'étapes catalytiques ou d'effets similaires du type "feedback" dans les cinétiques chimiques. Cependant, elles proviennent parfois également des effets d'inertie en mécanique des fluides.", [GLANSDORFF, P., 1979], p. 8.

[1563] "Although there now seems to be abundant evidence for the existence of homogeneous oscillating reactions, there are still theoreticians who resist the idea, and also a few experimentalists think that alleged homogeneous oscillations are caused by dust particles, although nobody has explained how.", in [DEGN, H., 1972], p. 302.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Les preuves en question sont à la fois les résultats expérimentaux entourant la réaction de Belousov-Zhabotinsky et les nouvelles dispositions théoriques échafaudées par l'Ecole de Bruxelles. Les positions avancées par l'école belge ne satisfont pas tout le monde. Ainsi en 1969, des chimistes, comme C.J. Swartz, considèrent que le second principe de la thermodynamique oblige à renoncer à l'idée d'oscillations homogènes [1564] . Le verrou thermodynamique est partiellement levé mais les considérations nouvelles n'ont pas le poids de l'histoire et ne bénéficient pas encore de toute la publicité du prix Nobel attribué en 1977 à Prigogine.

L'impulsion de la fin des années 1960 va néanmoins se prolonger dans une reconnaissance plus large des oscillations chimiques grâce aux développements théoriques et expérimentaux concernant la réaction de Belousov-Zhabotinsky, appuyés sur le mécanisme FKN. Au fil des années 1970 se dessine ainsi une véritable **chimie non linéaire**, dont les conceptions et les pratiques transparaîtront dans l'analyse du chaos chimique.

a. Le mécanisme FKN pour les oscillations de Belousov-Zhabotinsky

En 1970, l'entreprise de donner un mécanisme détaillé de la réaction de Belousov-Zhabotinsky est entamée. Jusque-là, les modèles dominants restent abstraits (Lotka, Bruxellateur) et difficiles à mettre en rapport avec la chimie de la réaction. L'exercice est en fait loin d'être trivial et tel qu'il se réalise entre 1970 et 1974, il nécessite la combinaison d'expériences, de simulations numériques et de mathématiques des oscillations, avant d'aboutir au mécanisme FKN et à un modèle dérivé, l'"Oregonator".

En 1969, la réaction de Belousov-Zhabotinsky est exportée aux Etats-Unis, à l'Université d'Eugene (Oregon) par Robert Mazo [1565] . Deux étudiants de Mazo, Richard Field et Richard Noyes (1919-1997) s'intéressent aux expériences et se lancent dans cette recherche avec le soutien d'un autre chimiste arrivant de Hongrie, Endre Köros. Leur démarche est résolument empirique. Ils essaient d'extraire un maximum d'informations sur les processus chimiques en réalisant des expériences, puis construisent un mécanisme général en conservant l'essentiel de la chimie déduite de l'expérience.

De 1970 à 1972, ces trois chimistes coopèrent [1566] et obtiennent un premier mécanisme complet à la fin de l'année 1971. Deux publications de 1972 [1567] donnent tous les détails de cette machinerie que l'on retient depuis sous le nom "mécanisme FKN" du nom de leurs inventeurs. 15 espèces chimiques et 11 réactions intermédiaires forment le

[1564] [SWARTZ, C.J., 1969]. Voir [DEGN, H., 1972] ou [WINFREE, A., 1984] donnant quelques exemples des hésitations de la communauté des chimistes au début des années 1970.

[1565] Mazo est professeur de chimie à l'université d'Eugene. Il passe une année sabbatique universitaire à l'Université de Bruxelles de 1968 à 1969, attiré par leur notoriété, et c'est au contact direct et prolongé des thermodynamiciens qu'il se forge une connaissance des structures dissipatives et de la réaction de Belousov-Zhabotinsky. Voir [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p.57.

[1566] Ils travaillent d'abord à Eugene, puis de manière dispersée entre Eugene (Noyes), Oxford (Noyes) et Budapest (Körös). Ils font face également à une concurrence venant du groupe des fondateurs, Zhabotinksy en premier.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

corps du schéma. Un schéma supposé reproduire l'essentiel de la réaction avec seulement 5 équations et 3 réactions intermédiaires a été extrait du mécanisme FKN par la suite, il s'agit de l'"Oregonator", obtenu par Field et Noyes en 1974 [1568]. Mécanisme FKN et "Oregonator" constituent les deux éléments essentiels du "paradigme" des oscillations dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky.

Il serait fastidieux de détailler les étapes de ces recherches, les divers systèmes expérimentaux implémentés et mécanismes testés [1569]. Nous soulignerons seulement l'utilisation de l'ordinateur. Depuis les travaux de Lefever la simulation joue un rôle important. Ainsi, le mécanisme FKN est rapidement décomposé en réactions élémentaires et traduit en système différentiel afin d'effectuer des simulations numériques. Edelson, Field et Noyes améliorent les étapes intermédiaires et font des simulations dès 1975, qu'ils poursuivent jusqu'en 1979. Ils engagent la perspective des numériques "lourdes", choisies par plusieurs groupes de recherche.

Les simulations numériques ne se résument pas aux calculs de ce genre. Dans les premières analyses pour construire et valider l'"Oregonator" les études des équations différentielles combinent habilement mathématiques et simulations. Field et Noyes affirment ainsi mettre en évidence un cycle limite dans l'Oregonator ; ils considèrent que leurs calculs numériques font office de "démonstration" [1570] du caractère oscillatoire de l'Oregonator et du mécanisme FKN, par extrapolation.

De manière plus générale, la simulation est au cœur des démarches visant à établir des mécanismes, confronter les modèles aux données expérimentales et intégrer les données empiriques dans les mécanismes. Pratiquement rien de ce qui a été fait n'aurait été imaginable sans les simulations numériques.

Ici la thermodynamique venue de Bruxelles est finalement reléguée au second plan. Les nouvelles conceptions ont légitimé les analyses des oscillations chimiques mais les recherches sont réalisées selon d'autres perspectives s'inspirant d'une démarche du type de celle de Lotka, doublée de simulations numériques. Cependant, la thermodynamique ouvre d'autres voies dans l'expérimentation chimique notamment. Les dispositifs pour réaliser des réactions en milieu ouvert sont développés et fourniront des moyens pour les études expérimentales du chaos. En parallèle, à Bruxelles Prigogine cherche à étendre les considérations théoriques, sur un mode plus spéculatif.

Des expériences poussées

[1567] Les deux publications sont [NOYES, R.M., FIELD, R.J., KÖRÖS, E., 1972] et [FIELD, R.J., KÖRÖS, E., NOYES, R.M., 1972]. La seconde est la plus importante car la plus complète, l'autre n'étant qu'une brève note.

[1568] [FIELD, R.J., NOYES, R.M., 1974].

[1569] Pour des détails sur ces points, sur la collaboration entre Field, Noyes et Körös et la compétition internationale qui se livret au sujet des mécanismes de la réaction, nous renvoyons à [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 58-60.

[1570] [FIELD, R.J., NOYES, R.N., 1974]. Le paragraphe central de l'article qui est consacré aux résultats numériques, s'intitule : "Calculations demonstrating oscillatory behaviour", p. 1879-1881.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Les développements théoriques engendrés par l'école de Bruxelles ont modifié les exigences expérimentales dans le sens où il est devenu de plus en plus important de réaliser des réactions chimiques en milieu ouvert. Du point de vue technique et expérimental cela n'est pas aussi simple que de constituer un milieu fermé mais c'est une question de génie chimique qui ne date pas des années 1970. L'invention du dispositif CSTR (Continuous Stirred Tank Reactor) remonte à 1935 : c'est un dispositif permettant de faire réagir des substances chimiques en maintenant une alimentation continue en produit et une agitation permanente, et donc de constituer un système ouvert contrôlable [1571] .

Dans les années 1970 plusieurs groupes ont utilisé un tel dispositif soit parce qu'ils en connaissaient le principe, soit en construisant un système équivalent. Les comportements nouveaux observés avec ces dispositifs sont pléthores. Zaikin et Zhabotinsky font une tentative dès 1968, à Prague et à Urbana d'autres chimistes élaborent des solutions mettant en évidence des comportements ondulatoires, des bipériodicités ou d'autres phénomènes un peu sophistiqués, aux alentours de 1975. Les réactions connues comme celles de Bray et de Belousov-Zhabotinsky sont reproduites et analysées avec toujours plus de détails.

Plusieurs équipes qui participeront à l'épisode du chaos expérimental développent ces techniques dans les années 1970. Par exemple, au sein de l'équipe du Centre de Recherche Paul-Pascal (CRPP) du CNRS à Bordeaux, Adolphe Pacault [1572] entouré de De Kepper, Boissonade et Hanusse mettent en place un réacteur chimique permettant le contrôle et le maintien hors-équilibre du système.

Entre théories, mécanismes, simulations et expériences, nous pouvons dire que les années 1970 marquent l'avènement d'une véritable chimie non linéaire, dont la réaction de Belousov-Zhabotinsky est la meilleure illustration. Elle se sublimera dans la problématique du chaos.

b. L'évolution des théories à Bruxelles

Au fil des années 1970, une partie des réflexions produites à Bruxelles tend à s'écarter de la chimie des oscillations. Dans le registre de la théorie physique, les études des structures dissipatives sont prolongées par des considérations plus proches de la Mécanique statistique. Ce sont en fait des idées cohérentes avec l'histoire de cette école et fortement développées par Prigogine, lequel va devenir la figure emblématique de cette école.

En 1971, dans Structure, stabilité et fluctuations, Prigogine et Glansdorff discutaient déjà de la question de la stabilité, en ces termes :

"Un des aspects les plus remarquables de la théorie de la stabilité tient à sa situation frontière entre une description déterministe du comportement de la

[1571] Pour un petit historique nous renvoyons à [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 69-70.

[1572] Pacault est l'initiateur de ce projet de recherche à Bordeaux : le thème "Thermodynamique des processus irréversibles" entre au laboratoire à la suite de ses rencontres avec l'école de Bruxelles en 1971.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

matière à l'aide d'équations macroscopiques (telles que l'équation du mouvement de Navier-Stokes…) et la théorie des processus aléatoires. […] dans le cas des systèmes stables, l'intervention des fluctuations est sans grande importance, puisque ces dernières régressent. […] La situation est radicalement différente lorsque des instabilités se présentent. Dans ce dernier cas, les fluctuations sont amplifiées et atteignent un niveau macroscopique. Lorsque un nouvel état stable est ainsi atteint, la description macroscopique devient de nouveau valable, que cet état soit stationnaire ou non. Toutefois, même lorsqu'il en est ainsi, le caractère statistique de l'évolution au cours du temps reste essentiel parce que l'état stable nouveau qui apparaît peut dépendre du type initial aléatoire de la fluctuation." [1573]

Les auteurs en appellent donc, pour l'étude des situations où une instabilité (c'est-à-dire une amplification des fluctuations) existe, à la combinaison d'une approche déterministe et d'une approche stochastique, de manière à décrire à la fois l'aspect macroscopique et les fluctuations dues au caractère atomique microscopique. Cette approche a ses limites : l'introduction des fluctuations telle qu'elle est faite, c'est-à-dire de manière *ad hoc*, ne permet pas d'estimer des durées de transitions, par exemple.

Pour comprendre cette autocritique et le projet auquel le groupe aspire, il suffit de rappeler les ambitions de Prigogine, sans doute le principal moteur de ces réflexions. Dans son ouvrage de 1947, il avait déjà évoqué son projet de constituer une théorie unifiée des phénomènes physiques macroscopiques, la plus générale possible. L'introduction de l'ouvrage de 1971 montre la même volonté d'unification, de rapprochement de la physique et de la biologie, et son insistance sur la notion de temps [1574] . En parallèle il participe au développement d'une Mécanique statistique hors-équilibre et il publie un ouvrage important sur le sujet en 1962 [1575] . Prigogine mobilise en fait une vision du monde centrée sur le temps et l'irréversibilité qu'il appelle à prendre davantage en considération dans les théories physiques.

La question des instabilités est marquée par ce projet de Prigogine, par son intérêt pour la Mécanique statistique en particulier. Dans un premier temps, l'irréversibilité se mue en une accentuation de l'importance des fluctuations. Ceci peut se lire dans les intentions de Prigogine, et Glansdorff, en 1971, qui cherchent à constituer une théorie unifiée sur les équations stochastiques [1576] .

[1573] [GLANSDORFF, P., PRIGOGINE, I., 1971],chapitre VIII, paragraphe 5 (nous mettons en évidence)

[1574] Donnons quelques citations tirés de l'ouvrage de l'introduction de [GLANSDORFF, P., PRIGOGINE, I., 1971]: "la tentation devient grande d'accorder à de semblables considérations, un rôle essentiel dans l'effort poursuivi de combler le fossé séparant aujourd'hui la biologie et la physique." "Déjà la thermodynamique classique avait apporté une contribution essentielle au concept de temps par la distinction entre réversibilité et irréversibilité." "Un des caractères les plus attrayants de la Thermodynamique a toujours été sa puissance d'unification par la réduction d'une très large catégorie de phénomènes à quelques idées simples. L'effort accompli dans la présente monographie tend à maintenir cette tradition tout en élargissant sa portée."

[1575] Non-equilibrium statistical mechanics, [PRIGOGINE, I., 1962].

[1576] "Il serait naturellement beaucoup plus satisfaisant de se servir d'une approche plus unifiée basée uniquement sur l'équation stochastique.", [GLANSDORFF, P., PRIGOGINE, I., 1971], chapitre VIII, paragraphe 5.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Ensuite, le groupe est bien conscient des bouleversements engendrés par leur approche théorique nouvelle reposant sur les structures dissipatives. Mais leurs prétentions à ce sujet vont aller croissantes, et leur radicalité avec. Ainsi, Glansdorff, en 1979 soulignait :

"En bref, le rôle actif de l'irréversibilité, la création d'un ordre par fluctuations, leur caractère aléatoire, l'historicité associée aux processus en cascade, constituent un ensemble de propriétés remarquables et caractéristiques des grands écarts à l'équilibre, qui justifient amplement leur classification dans une catégorie séparée sous le nom de structures dissipatives." [1577]

Les ambitions de Prigogine se lisent facilement en filigrane de cette citation. Il est vrai que leurs théories sont fortement accréditées par le prix Nobel de chimie de 1977, attribué au seul Prigogine, pour l'ensemble de ses travaux réalisés au sein de l'école de Bruxelles. Son discours à la remise du prix, puis l'ouvrage rédigé avec Isabelle Stengers en 1979, La Nouvelle Alliance, témoignent d'un ton de plus en plus "révolutionnaire".

Pour l'expliquer, il faut remettre ces développements dans le contexte de la rencontre entre la Mécanique statistique et les approches en matière de stochasticité et de théorie ergodique des systèmes dynamiques (ce qui nous avons détaillé au chapitre 7). A la fin des années 1970, ces nouvelles théories sur l'instabilité croisent les intérêts de Prigogine, et La Nouvelle Alliance reflète une tentative de changement général de paradigme au carrefour du chaos, de l'instabilité, de l'irréversibilité et des théories de la Mécanique statistique [1578]. D'un côté les oscillations chimiques font de moins en moins partie de ces préoccupations plus ambitieuses et plus générales. D'un autre, elles constituent, avec la notion de structure dissipative, un élément important du discours car elles donnent une assise expérimentale aux nouvelles théories thermodynamiques. Les oscillations chimiques ont ainsi participé à ce mouvement de conceptualisation de la "complexité" et ont bénéficié de l'émergence du champ du chaos.

10.4. Le chaos chimique

Nous avons annoncé que les oscillateurs chimiques interviennent dans le champ du chaos et nous en avons donné un avant-goût. Ce domaine de la chimie a en fait joué un rôle à plusieurs niveaux, en premier lieu dans les tentatives précoces de développements expérimentaux et en rapport avec les nouvelles idées sur la turbulence. Cette chimie a également participé aux développements conceptuels de Rössler et en a bénéficié avec les travaux de Hudson. Mais au tournant des années 1980, la question latente posée au sujet de la chimie des oscillations, sans vraiment être explicitée en ces termes, est plutôt celle de savoir si le "chaos chimique" ou la "turbulence chimique" existe vraiment, ce qui rappelle les débats concernant les oscillations en milieu homogène.

Ruelle et la turbulence chimique

[1577] ***[GLANSDORFF, P., 1979], p. 11.***

[1578] Pour les débats engendrés par les prises de positions assez radicales de Prigogine, nous renvoyons au chapitre 7, page 510.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Ces problèmes sont bien illustrés par la démarche de Ruelle auprès des chimistes. Dans l'article de Ruelle et Takens de 1971, la possibilité d'obtenir des dépendances temporelles compliquées dans les oscillations chimiques est déjà mentionnée [1579]. Comme il l'explique dans son ouvrage de 1991 [1580], il a eu vent des expériences des biologistes du groupe de Britton Chance sur les oscillations chimiques dans le processus biologique de glycolyse [1581]. En 1971, Ruelle s'est rendu à Philadelphie pour le rencontrer et lui expliquer qu'il est possible que des comportements plus compliqués que les oscillations périodiques apparaissent dans les réactions chimiques. Chance n'a pas choisi de donner suite à cette idée et Ruelle s'est orienté vers un de ses collaborateurs, Kendall Pye. Ce dernier lui aurait affirmé qu'un tel signal expérimental, s'il venait à être débusqué dans une réaction chimique, serait rapidement écarté comme peu pertinent.

En 1973, David Ruelle récidive en émettant l'hypothèse de l'existence d'une "turbulence chimique", dans une note passée alors assez inaperçue [1582]. La présentation de Ruelle est essentiellement mathématique. En substance il affirme que les concentrations dans les réactions chimiques sont décrites par des équations différentielles non linéaires. Par conséquent, cette nature non linéaire devrait permettre l'apparition de turbulence chimique dans des conditions appropriées. La référence à "On the nature of turbulence" de 1971 est sans équivoque. La propriété de turbulence est une propriété en quelque sorte "universelle" des modèles mathématiques, valables pour les modèles de l'hydrodynamique comme pour ceux de la chimie.

Cet épisode montre les réticences des chimistes qui ont déjà du mal à se dépêtrer des questions d'homogénéité. Les théories de Ruelle sur la turbulence ne provoquent pas plus d'enthousiasme que dans le domaine de la turbulence hydrodynamique mais pour des raisons différentes. Comme celui de 1971, l'article de Ruelle sera d'ailleurs refusé, dans un premier temps.

Rössler et les analyses de Hudson

La chimie des oscillations marque de manière beaucoup plus profonde les conceptions de Rössler, comme nous l'avons vu au chapitre 4. Pour le dire brièvement, on peut voir la collaboration de Rössler et Seelig [1583] comme un aboutissement des recherches sur les réactions chimiques abstraites depuis Lotka, en passant par Turing et le Bruxellateur. Ces modèles comptent d'ailleurs parmi les éléments clés de la classification proposée par

[1579] [RUELLE, D., TAKENS, F., 1971], p. 176 (note 22).

[1580] Voir [RUELLE, D., 1991], p. 93.

[1581] Pour les travaux de Chance, voir page 618.

[1582] [RUELLE, D., 1973]. La note repose sur son article avec F. Takens de 1971, lui-même encore peu populaire parmi les scientifiques. Dans les travaux des chimistes des années 1970 s'occupant des questions d'oscillation, il n'est pratiquement (pour ne pas dire jamais) question de cet appel de Ruelle.

[1583] Voir chapitre 4, p. 243.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Rössler.

Winfree, qui a orienté Rössler vers le thème du chaos en 1975, a lui aussi participé à cet élan. Il peut être considéré comme le grand pédagogue des oscillations chimiques hors d'URSS et le publicitaire de la réaction de Belousov-Zhabotinsky [1584] . Ainsi ses photographies des ondes spirales obtenues dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky en 1970 font la une du magazine Science en 1972 [1585] .

Spirales de Winfree
Couverture de la revue Science n° 175, 1972

(reprise de [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 10)

Dans les démarches expérimentales sur le chaos, les systèmes chimiques sont les systèmes tout naturellement testés par Rössler, la réaction de Belousov-Zhabotinsky en premier lieu. En 1978, en collaboration avec Klaus Wegmann il s'agit alors de chercher du chaos dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky grâce au catalogue de comportements dressé par Rössler. Nous avons vu quelles limites techniques cette recherche a rencontrée, concernant le relevé des signaux expérimentaux en nombre suffisant notamment. Les tests expérimentaux n'ont pas abouti sous cette forme et ont laissé en suspens la question de l'existence du chaos chimique.

Les analyses de Rössler ont été reprises par un groupe de chimistes américains pour interpréter un signal irrégulier : R.A. Schmitz, K.R. Graziani, J.L Hudson, de l'Université de l'Illinois. Leur article de 1977 combine des expériences sur la réaction de Belousov-Zhabotinsky réalisées en système ouvert, grâce à un réacteur de type CSTR, et les analyses topologiques de Rössler [1586] . Ils construisent une interprétation des signaux expérimentaux en termes de trajectoires sur une structure en *S*, celle que Rössler avait lui-même utilisée dans son premier article sur le chaos en 1976.

[1584] Rappelons qu'il est arrivé dans ce monde, par la biologie. Il a participé pour cette raison au colloque de Prague de 1968.

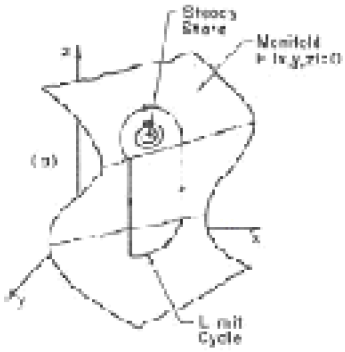
[1585] Voir [WINFREE, A., 1972]. Le numéro de Science est le 175, daté du 11 février 1972. Les expériences de Zhabotinsky et Zaikin sont en fait publiées, en russe, dans les comptes-rendus du colloque de Pushino en 1970, ce que Winfree ignorait. En revanche il s'est appuyé sur un article de Zhabotinsky et Zaikin publié en 1970 dans Nature, concernant les "structures-cibles" : [ZAIKIN, A.N., ZHABOTINSKY, A.M., 1970].

[1586] D'après Pacault et Perrault, les séries expérimentales étaient déjà obtenues en 1975 pour la thèse de Graziani, un élève de Hudson. Mais, sans interprétation théorique, elles n'ont pas été publiées tout de suite et la lecture des travaux de Rössler a débloqué la situation ([PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 87).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Figure 1 (a) et 4(a)

[SCHMITZ, R.A., GRAZIANI, K.R., HUDSON, J.L., 1977], p. 3041 et 3043.



Avec quelques approximations parfaitement assumées, les chimistes tentent d'associer une trajectoire de l'espace des phases avec un type de comportement observé : le pic brusque dans le signal correspondrait à la chute du plan supérieur vers le plan inférieur (voir figures). Le chaos, c'est-à-dire une trajectoire non périodique ici, est rapporté à la "réinjection" [1587] de trajectoire suggérée par Rössler. Cependant, la question de l'existence du chaos chimique ne peut pas être résolue ainsi [1588] . Les auteurs ne prétendent pas qu'il n'y a qu'un phénomène "intrinsèque" mais indiquent ou suggèrent des ressemblances entre les propositions de Rössler et leurs diagrammes issus de simulations numériques. Avec M. Hart et D. Marinko, John Hudson poursuit les recherches d'oscillations non périodiques, en termes expérimentaux, avec un certain succès, même si les conclusions restent limitées. L'ensemble des expériences où les comportements périodiques côtoient un chaos chimique est publié en 1979.

De Bordeaux à Austin

La détection d'un attracteur étrange dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky a été un indice supplémentaire en faveur du chaos chimique et du concept d'attracteur étrange lui-même, comme nous l'avons vu. Soulignons que les premiers attracteurs reconstruits le sont dans le domaine des oscillations chimiques. Cette réalisation expérimentale a été le fruit d'une rencontre [1589] entre les chimistes du CRPP de Bordeaux et le physicien Harry

[1587] Cf. Chapitre 4, p. 255.

[1588] Les auteurs en sont tout à fait conscients : "Experimental evidence of the type presented here may never be completely convincing that truly intrinsic non-periodic behavior exists", [SCHMITZ, R.A., GRAZIANI, K.R., HUDSON, J.L., 1977], p. 3042). Ils s'appuient sur les arguments donnés par Rössler autant pour les considérations théoriques que les doutes émis sur les interprétations.

[1589] J.C. Roux et C. Vidal à Bordeaux avaient rencontré des problèmes d'oscillations complexes non reproductibles avant de se familiariser avec les nouvelles conceptions sur la turbulence et le chaos. Roux a rencontré Swinney lors du colloque sur la Synergétique, organisé par Hermann Haken en 1979, auquel Rössler participait également. Roux a ainsi pu découvrir les expériences réalisées sur les systèmes hydrodynamiques, rappelant les phénomènes observés en chimie. Vidal et Roux ont alors décidé d'envoyer leurs résultats à Ruelle, lequel les a invités à la conférence de New York de 1979, "Nonlinear dynamics". Swinney y participait également et a proposé à Vidal de venir à Austin étudier ces instabilités chimiques ; Vidal a laissé sa place à Roux. Toutes les anecdotes sont relatées dans [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997].

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Swinney qui avait expérimenté le scénario de Ruelle et Takens avec Jerry Gollub en 1975. Les connaissances des chimistes et des hydrodynamiciens se sont croisées pour aboutir à Austin, puis à Bordeaux [1590], à la reconstruction de portrait de phase d'une réaction de Belousov-Zhabotinsky, selon la méthode de Crutchfield, Packard, Farmer et Shaw [1591].

Entre 1979 et 1982, les résultats expérimentaux abondent dans ce milieu de physiciens-chimistes qui se saisit des nouvelles conceptions sur la dynamique chaotique. Attracteur étrange, calculs d'exposants de Lyapounov, mesure de perte d'information, doublement de période, intermittences [1592], sont évalués expérimentalement. Cela symbolise toute l'effervescence marquant le début des années 1980 et de manière symptomatique, mais peu étonnante, ce sont les attracteurs étranges et les exposants de Lyapounov qui l'emportent au niveau des conceptions du chaos. Hudson, qui avait pourtant repris les conceptions de Rössler pour ses analyses conclut son article-bilan de 1981 sur la réaction de Belousov-Zhabotinsky par ces propos :

"Le plus significatif cependant tient peut-être au fait qu'apparemment pour la première fois dans un système chimique réel, l'exposant caractéristique de Liapounov et le taux de divergence des trajectoires ont été calculés. La divergence des trajectoires est une des caractéristiques les plus distinctives des comportements chaotiques ; le fait qu'un exposant positif a été trouvé et que ses minima successifs soient divergents indiquent fortement qu'un vrai comportement chaotique a été observé." [1593]

La fin d'une interrogation

Les expériences sur la réaction de Belousov-Zhabotinsky donnent des indices précis et de plus en plus significatifs. Les premières tentatives, hormis les travaux de Hudson, se limitaient comme en hydrodynamique, à la détermination des spectres de Fourier du signal. Les conceptions sont bien plus évoluées et plus opérationnelles en 1982. Cependant, en reprenant Pacault et Perraud, la question de l'existence d'un "véritable" chaos chimique a encore ses détracteurs. La simulation numérique d'un modèle issu du mécanisme FKN en 1987 contribue à donner les derniers arguments en faveur d'un certain chaos chimique [1594]. Le résultat est doublement significatif. Il s'agit d'un résultat

[1590] Cela correspond aux deux publications : [ROUX, J.C., ROSSI, A., BACHELART, S., VIDAL, C., 1980] (Bordeaux) et [TURNER, J.S., ROUX, J.-C., McCORMICK, W.D., SWINNEY, H.L., 1981] (Austin).

[1591] Voir le chapitre 4, p. 308.

[1592] Avec Yves Pomeau : [POMEAU, Y., ROUX, J.C., ROSSI, A., BACHELART, S., VIDAL, C., 1981].

[1593] ***"Of perhaps greatest significance, however, is the fact that apparently for the first time for a real chemical system the Lyapounov characteristic exponent and the rate of divergence of trajectories have been calculated. Divergence of trajectories is one of the most distinctive characteristics of chaotic behavior ; the fact that a positive exponent was found and that successive minima were seen to diverge are strong evidence that true chaotic behavior has been observed.", [HUDSON, J.L., MANKIN, J.C., 1981], p. 6176.***

[1594] [ARGOUL, F., ARNEODO, A., RICHETTI, P., 1987]. Nous renvoyons à [PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997], p. 91.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

numérique alors que les précédents indices étaient issus de l'expérimentation chimique. En outre, ce n'est pas seulement l'aspect numérique qui est déterminant puisque ces résultats sont épaulés par une analyse en terme de systèmes dynamiques, et une recherche d'orbite homocline en particulier. La simulation numérique s'insère donc dans le réseau d'indices entre les expériences et les considérations théoriques qui suggéraient fortement l'existence de ces comportements. La simulation a non seulement droit de citer mais elle participe pleinement à la "preuve" du chaos chimique.

10.5. Conclusion : chaos et oscillations chimiques

En parallèle à la théorie des oscillations non linéaires, les oscillations chimiques ont donc joué un rôle décisif dans l'histoire du chaos. La chimie non linéaire s'est élevée au rang de domaine de recherche dans les années 1970, quelques temps avant que le champ du chaos n'émerge. L'essor de chacun de ces domaines de recherche est associé à l'autre. Les mathématiques des systèmes dynamiques et l'ordinateur sont au centre des développements concernant les oscillations chimiques et conduisant au chaos chimique, lequel prend son sens avec les notions d'attracteur étrange et d'orbite homocline. A travers cet exemple emblématique nous avons également montré que le chaos et les conceptions de Rössler tout particulièrement sont le résultat d'une lente évolution qui prend ses racines dans la chimie des oscillations, aux côtés de multiples disciplines. En outre, le raisonnement analogique s'est illustré une fois de plus dans cette histoire. Dans la lignée de Van der Pol et Lotka, de nombreuses analogies avec les mathématiques, entre la biologie et la chimie, la biologie et l'électricité notamment ont marqué ce cheminement conceptuel prolongé par la pratique analogique de Rössler.

Enfin, le domaine de la science du chaos autour de 1980 témoigne d'une grande facilité à transférer les concepts, les pratiques, les outils, les modèles d'une discipline ou d'un domaine à l'autre : l'hydrodynamique apporte des moyens d'analyse à la chimie, les mathématiques de la dynamique et du chaos orientent les recherches d'attracteurs étranges et leur examen. En y adjoignant les pratiques observées au sujet de la dynamique des populations ou encore des transitions vers le chaos, il semble que la grande mathématisation du domaine du chaos, l'utilisation de la simulation numérique et la focalisation sur la dynamique des systèmes sont les facteurs déterminants de cette grande souplesse dans la science du chaos.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Cinquième partie. Impact sur une institution : l'exemple du CNRS

CHAPITRE 11. LE CHAOS AU CNRS

Notre histoire du chaos, jusqu'à présent, a été axée sur des analyses de plusieurs champs de recherche et de tendances générales, dans une perspective internationale. Ce dernier chapitre portera sur le développement du domaine de recherche du non linéaire et du chaos, dans ses rapports plus étroits avec une institution française, le CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique), et plus généralement avec la société française après la seconde guerre mondiale.

Nous avons choisi d'aborder le cas de la France car elle a été un vivier important dans l'histoire du chaos. En outre, depuis sa création en octobre 1939 et sa restructuration en 1944, le CNRS a pris une place très importante dans la science française et il en est assez représentatif. Pour des raisons de disponibilité et d'accessibilité des archives, la situation se prête à l'analyse générale et synthétique que nous proposons.

L'histoire du développement de la problématique du chaos au sein du CNRS nous permettra en premier lieu de pénétrer l'histoire même du CNRS. Le thème du chaos est

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

un bon révélateur des problèmes liés à son développement historique. En effet, une des premières prérogatives du CNRS a été de soutenir la recherche et de faire émerger les thèmes de recherches novateurs : est-il parvenu à son objectif en ce qui concerne le chaos ? En outre, c'est un organisme pluridisciplinaire : dans quelle mesure cela a-t-il favorisé le développement du chaos, champ bidisciplinaire (mathématiques associées à une autre domaine) par essence et multidisciplinaire dans beaucoup de situations historiques rencontrées ?

En fait, nous allons voir que le développement du chaos en France, au CNRS, a été très problématique. D'une part, le développement a suivi les impératifs de l'évolution de l'institution, pris entre des traditions "lourdes", le souci de s'adapter aux demandes d'une société en évolution et la nécessité de construire une politique scientifique. D'autre part, les scientifiques concernés ont tenté de suivre les problématiques adoptées à un niveau international. Pris entre ces deux tendances, le champ du non linéaire et du chaos est loin d'avoir une histoire sans écueil au CNRS.

Nous allons rapporter le développement du chaos au changement plus général de la science et la technique, et de la société, depuis la seconde guerre mondiale. Les grandes tendances que nous mettrons en avant ont été évoquées dans les chapitres précédents. L'informatique monte en puissance et modifie les pratiques scientifiques ; l'interdisciplinarité va croissante, et les objets d'étude tendent à prendre en compte toujours plus de "complexité" ; les demandes de la société sont intégrées, grâce à la notion de "science de transfert", dans le système scientifique et technique. Ces grandes tendances sont liées, mais elles seront dissociées pour leur présentation. Il s'agit d'un changement très profond de régime scientifique, perceptible au niveau du CNRS : nous allons déterminer la place du chaos dans ce mouvement et montrer qu'il y participe autant qu'il en bénéficie.

Nous avons retenu une périodisation correspondant à plusieurs grandes phases de l'histoire du CNRS, plutôt qu'à l'histoire du chaos ; nous présenterons en parallèle, pour chaque période, l'évolution générale du CNRS et des recherches sur le non linéaire et le chaos. La première période se déploie jusqu'en 1970 environ. Le développement du non linéaire est alors très marginal au CNRS. Nous l'expliquerons en le reliant aux faiblesses structurelles de l'institution et à l'inertie des conceptions sur la recherche, dont il a héritées.

La seconde phase nous renvoie à l'épisode de mise en place du département des Sciences pour l'Ingénieur, au fil des années 1970. Une politique scientifique est esquissée mais paradoxalement, elle va mettre un terme aux quelques pôles de développement du non linéaire au CNRS. Parallèlement, des actions incitatives vont permettre de soutenir une activité sur le chaos, autour de 1980, mais qui ne visait pas au départ cet objectif.

Le champ du chaos intègre vraiment le CNRS à la fin des années 1980, plus de dix années après son émergence et son spectaculaire développement. Cette difficile reconnaissance s'explique par des facteurs historiques, et par la difficile prise en compte globale des nouveaux enjeux et des nouvelles pratiques de la recherche : moyens informatiques, interdisciplinarité, rapports à la société. A une phase d'analyse de la situation, durant les années 1980, succède alors, à partir de 1989-90, une politique

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

ambitieuse et des actions en accord avec l'analyse produite, dans lesquelles nous déterminerons la place du domaine de recherche du chaos.

11.1. Avant les années 1970 : Le CNRS pris dans l'engrenage de l'histoire

L'histoire du non linéaire et du chaos avant les années 1970 est articulée par des conceptions et des pratiques scientifiques variées, allant des mathématiques des systèmes dynamiques à la pratique des expériences numériques et du calcul analogique. Plusieurs domaines de recherche et disciplines sont combinées comme la physique, les mathématiques et l'ingénierie. Nous allons montrer que la gestion de ce type de recherche est délicate au CNRS. Son histoire et ses structures pèsent dans cette difficulté, mais il ne s'agit pas seulement d'accuser le poids des traditions. En réalité, une conception très française du calcul scientifique et de la recherche en mathématiques est en jeu à la fois dans l'institution et dans les recherches menées par les scientifiques. Puisque ce sont deux points clés de l'histoire du chaos, cela préfigure la constitution problématique du champ de recherche au sein du CNRS.

Nous commencerons par analyser le sous-développement des mathématiques dites "pures" au CNRS et ses conséquences dans l'isolement mathématique des quelques groupes les plus actifs en matière de science du non linéaire. Le discours, les conceptions et la pratique des mathématiques sont au cœur de cette évolution. En revanche, une interaction entre Mécanique, mathématique et calcul scientifique se noue au sortir de la guerre. Dans ce milieu interdisciplinaire vont s'épanouir les recherches de Vogel, au sein du CRSIM (Centre de Recherches Scientifiques Industrielles et Maritime), devenu CRP (Centre de Recherche en Physique) en 1962. Nous pourrons mettre en perspective des recherches, déjà analysées dans leurs rapports à l'histoire des oscillations non linéaires et du calcul analogique, avec l'histoire du CNRS et comprendre l'évolution du groupe de Marseille.

Enfin, nous analyserons les problèmes liés au calcul scientifique et à l'informatique au CNRS, dans la perspective de montrer que le non linéaire, comme l'informatique, sont freinés par une absence de réflexion sur les spécificités de ces recherches scientifiques.

a. Un premier regard sur la situation générale

Au préalable, nous proposons une rapide localisation des pôles de recherches sur le chaos, en France, avant 1970, puis une première approche globale du problème, à travers les sections du Comité National.

Des tentatives isolées

A plusieurs reprises, les recherches en matière de non linéaire au CNRS ont déjà été évoquées dans les précédents chapitres. Pour l'essentiel, il s'agit du travail de l'astronome Michel Hénon, qui a fait toute sa carrière au CNRS, à l'Observatoire de Paris-Meudon, puis à celui de Nice [1595] . Deux autres groupes se sont illustrés. Le groupe

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

de "dynamique théorique" au sein du CRSIM-CRP, autour de Théodore Vogel [1596] : ce laboratoire est le premier laboratoire propre du CNRS crée en province en 1941. Christian Mira et Igor Gumowski ont développé une activité sur les récurrences non linéaires, au LAAS (Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes), à Toulouse, également laboratoire propre du CNRS [1597] .

L'autre pôle d'activité en France est l'IHES (Institut des Hautes Etudes Scientifiques), avec René Thom et David Ruelle ; il est inutile de rappeler l'importance de ces recherches en mathématiques des systèmes dynamiques [1598] , et comme il existe très peu de liens avec le CNRS, nous ne nous étendrons pas sur la question. On peut ajouter qu'en termes institutionnels, l'IHES est un institut très singulier et surtout très marginal dans l'ensemble de la recherche française, mieux représentée par le CNRS.

Pour autant, les trois groupes du CNRS mentionnés restent assez isolés sur le plan national [1599] . Les collaborations internationales sont plus développées que les collaborations avec des chercheurs français. De manière assez surprenante au premier abord, il n'y a que très peu de contacts entre ces groupes, chacun poursuivant ses recherches selon ses méthodes, ses problématiques. Un tel isolement demande à être expliqué et il conviendrait d'estimer l'engagement de l'institution CNRS dans ces groupes et dans leur développement.

Premiers éléments d'analyse : à travers le Comité National

Le Comité National, est un organe d'évaluation et de consultation pour le CNRS ; il reflète les choix en matière de politique scientifique de l'organisme de recherche et nous permet d'illustrer les tendances principales de l'évolution du CNRS. Une simple lecture des tableaux des sections du Comité National fait apparaître ce qui a été le premier handicap à l'éclosion de recherches en science du non linéaire et du chaos, au moins jusque dans les années 1970 : le cloisonnement disciplinaire. La conclusion est un peu hâtive en l'état, mais notre analyse montrera l'inertie de cette "disciplinarisation" au CNRS.

[1595] Au chapitre 7 (page 496) nous avons mis en perspective ses recherches par rapport aux problématiques de l'instabilité et au chapitre 9 (page 573), sa pratique du calcul scientifique a été analysée.

[1596] L'activité en matière d'oscillations non linéaires fait l'objet de quelques paragraphes au chapitre 8, page 551.

[1597] Nous avons abordé les questions relatives au doublement de période dans les itérations au chapitre 5, page 320. Dans la suite, nous resituerons l'ensemble de leurs travaux sur les récurrences non linéaires, en rapport avec les problématiques du LAAS.

[1598] Cela a fait l'objet du chapitre 6, en particulier page 431.

[1599] Hénon travaille en solitaire (cf. note , p. 660), le groupe de "dynamique théorique" est plus connu à l'étranger qu'en France (voir p. 560).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Comité **National 1946** 8 groupes, 30 sections	**Comite National** 1950 (Période 1949-59)
Groupe I : Mathématiques - *Mathématiques pures* - *Théories physiques* *Probabilités et applications* - *Mécanique et mathématiques appliquées* Groupe III : Physique - *Optique* *Physique moléculaire* - *Thermodynamique* - *Physique Corpusculaire* - *Electricité, magnétisme*	Groupe I : Mathématiques - *Mathématiques pures* - *Théories physiques, probabilités et applications* - *Mécanique générale et mathématiques appliquées* Groupe II : Physique *Optique, physique moléculaire, instruments* - *Mécanique physique, thermodynamique* - *Physique nucléaire et corpusculaire* - *Electronique, électricité, magnétisme*

Comité **National 1960** (Période 1960-66) 32 sections	**Comité National** 1967 (Période 1967-70) 35 sections
Mathématiques *Section 1 : Mathématiques pures* - *Section 2 : Théories physiques, probabilités et applications* - *Section 3 : Mécanique générale et mathématiques appliquées* Physique - *Section 7 : Optique, physique moléculaire, instruments* *Section 8 : Mécanique physique, thermodynamique* - *section 9 : Physique nucléaire et physique corpusculaire* - *Section 10 : Electronique, électricité, Magnétisme*	Mathématiques *Section 1 : Mathématiques (Mathématiques pures, Logique, Analyse numérique, Informatique)* - *Section 2 : Physique théorique et probabilités* Physique - *Section 3 : Electronique, Electrotechnique, Automatique* - *Section 4 : Mécanique* *Section 5 : Thermodynamique et Cinétique chimique* - *Section 6 : Physique nucléaire et corpusculaire* - *Section 7 : Optique et Physique moléculaire* - *Section 8 : Physique des solides*

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Comité National 1971 (Période 1970-75)	Comité National 1976 (Période 1976-82)
35 sections	41 sections
Mathématiques	Département MPTI
Section 1 : Mathématiques, Informatique	*Section 1 : Mathématiques et Modèles mathématiques*
Physique	- *Section 2 : Physique théorique*
Section 2 : Physique Théorique	- *Section 8 : Physique atomique et moléculaire*
Section 3 : Electronique, Electrotechnique, Automatique	*Section 12 : Physique de la matière condensée - Physique des solides*
- *Section 4 : Mécanique*	- *Section 13 : Physique de la matière condensée - cristallographie*
- *Section 5 : Thermodynamique et cinétique chimique*	Département PNC
Section 6 : Physique Nucléaire et Corpusculaire	- *Section 6 : Physique nucléaire et corpusculaire*
- *Section 7 : Optique et physique moléculaire*	Département SPI
Section 8 : Physique des solides	*Section 2 : Informatique automatique traitement des systèmes numériques du signal*
	- *Section 3 : Electronique, électrotechnique, optique*
	Section 4 : Mécanique, énergétique

Comité National 1983 (Période 1983-1991)	Comité National 1992-2000
Département MPB	Département SPM
- *Section 1 : Mathématiques et modèles mathématiques*	- *Section 1 : Mathématiques et outils de modélisation*
- *Section 4 : Physique théorique*	- *Section 2 : Phénomènes physiques, théories et modèles*
Section 5 : Physique atomique et moléculaire	- *Section 4 : Atomes et molécules ; optique et lasers ; plasmas chauds*
- *Section 6 : Physique de la matière condensée, physique des solides*	- *Section 5 : Matière condensée : organisation et dynamique*
- *Section 7 : Physique de la matière condensée, cristallographie*	- *Section 6 : Matière condensée : structures et propriétés électroniques*
Département SPI	Département SPI
- *Section 8 : Informatique, automatique, signaux et systèmes*	- *Section 7 : Sciences et technologies de l'information (informatique, automatique, traitement du signal)*
- *Section 9 : Optique, électronique*	- *Section 8 : Electronique, semi-conducteurs, photonique, génie électrique*
- *Section 10 : Génie mécanique*	*Section 9 : Mécanique – Génie des matériaux – Acoustique*
- *(Section 11 : Génie des procédés)*	- *Section 10 : Energie, mécanique des milieux fluides et réactifs, génie des procédés*

On peut donner quelques premières explications très brèves à ce découpage, en cherchant du côté des traditions scientifiques françaises. En effet, les premiers comités nationaux sont quasiment des copies conformes de la hiérarchie comtienne des sciences [1600] ; nul besoin de rappeler le poids des conceptions positivistes dans la science française contemporaine. Néanmoins, il peut être surprenant de retrouver cette hiérarchie, plus d'un siècle après la présentation de la doctrine de Comte. En fait, il convient de rappeler que le Comité National est composé d'universitaires en 1945 : le Comité reproduit ainsi cette structure universitaire, qui a elle-même hérité du positivisme.

Les mathématiques, science positive par excellence, bénéficient d'une place privilégiée. Le Comité National fait place à trois sections de mathématiques et l'importance accordée aux mathématiques est manifeste. Nous verrons que c'est

[1600] La classification comtienne organise hiérarchiquement les mathématiques (sciences parvenues à leur stade positif), puis, successivement, la mécanique céleste, astronomie, physique, chimie, biologie, sciences humaines et sciences sociales. La doctrine de Comte est exposée dans son célèbre Cours de Philosophie Positive [COMTE, A., 1975]

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

également une conception des mathématiques qui est en jeu, parallèle aux idées sur les "mathématiques pures" et aux conceptions du groupe Bourbaki. Nous évaluerons l'influence de cette sectorisation sur les développements du non linéaire et du chaos.

b. Les mathématiques pures : entre l'université et Bourbaki

L'organisation des quatre premières sections du Comité National est très significative de la perception des mathématiques par les mathématiciens. Afin de comprendre le développement des mathématiques au CNRS et l'organisation de cette recherche, nous allons détailler l'ensemble des idées dominantes au sujet des mathématiques, avec leurs conséquences. Puisque les "mathématiques pures", c'est-à-dire la section 1 du Comité National, sont au premier rang dans la constitution de ces idées, nous commencerons par resituer leur place au CNRS.

La situation des mathématiques pures

Pour le dire simplement, le CNRS est maintenu dans une position où il ne décide de pratiquement rien de la recherche en mathématiques pures en France, jusqu'à la fin des années 1980. La situation est donc la suivante.

En 1948, il y a 32 chercheurs en mathématiques "pures" au CNRS, et 35 en 1960 [1601]. Ce sont essentiellement des Attachés de Recherche (AR), c'est-à-dire, pour la plupart, des doctorants. Ces chiffres, très faibles par rapport aux autres sections, traduisent le peu d'ancienneté de ces chercheurs au sein du CNRS : on ne fait que transiter par le CNRS en "mathématiques pures", avant de prendre un poste à l'université. La situation en 1969 n'a guère évolué : il y a 15 Attachés de Recherche (AR), 4 Maîtres de Recherche (MR) et un Directeur de Recherche (DR) temporaire au CNRS, contre 150 maîtres de conférence et 197 professeurs de mathématiques dans les Facultés de France [1602]. Cela est corrélé au fait qu'il n'y a pas de laboratoire propre de mathématiques pures au CNRS.

Le CNRS a une place très limitée dans la communauté des mathématiques pures et la situation se maintient pour plusieurs raisons. La première d'entre elles est liée à un certain idéal de la recherche en mathématiques "pures". Les idées développées par le groupe Bourbaki, dont les membres comptent parmi les plus éminents de cette communauté, ont joué un rôle important dans la persistance de ces idées. Nous allons voir que les conceptions générales des universitaires, sans être nécessairement inspirées par Bourbaki, participent de cet idéal commun et surtout expliquent partiellement l'"abandon" du non linéaire par les mathématiques pures, non sans paradoxe.

L'Ecole Normale Supérieure et Bourbaki

Le groupe Bourbaki est né en 1935 de la réunion de quelques jeunes mathématiciens issus de l'Ecole Normale Supérieure (ENS) [1603]. Au sortir de la seconde guerre mondiale,

[1601] On dénombre, en 1948 : 29 Attachés de Recherche (AR), un Chargé de Recherche (CR), 2 Maîtres de Recherche (MR). En 1960 : 32 AR, 2 CR, un Directeur de Recherche (DR).

[1602] Rapport de conjoncture du CNRS 1969, section 1, p. 14.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

ils sont en position de force dans les mathématiques en France. Parmi les membres du groupe on trouve des grands noms des mathématiques : Henri Cartan, André Weil, Jean Dieudonné, René de Possel, Jean-Pierre Serre, Laurent Schwartz.

L'aspect qui nous intéresse ici tient plus au style et aux choix du groupe qu'aux travaux mathématiques de Bourbaki. La démarche du groupe est caractérisée par l'axiomatisation et une vision structurale. Un certain nombre de disciplines se prêtent mal à cette vision : le groupe Bourbaki est amené à écarter les domaines de l'analyse numérique, théorie des probabilités, informatique théorique, théorie des jeux, etc. et prend pour credo la défense des mathématiques "pures" [1604] .

L'influence de Bourbaki est difficile à quantifier. Il est hors de doute que ses idées ont eu un impact intellectuel et culturel très important des années 1950 aux années 1970 [1605] . Sur le plan institutionnel Bourbaki tient la citadelle de l'ENS, avec Henri Cartan, jusqu'en 1965 [1606] : le sujet de mathématiques fétiche et noble (car "bourbachique") sera la géométrie algébrique pour quelques années. Le leadership s'étend très au-delà de l'ENS : Serre est au collège de France en 1956, Schwartz, Choquet, Chevalley, Godement à la Sorbonne, Grothendieck à l'IHES. Pour ce qui est du CNRS, outre l'influence indirecte des membres, il faut ajouter qu'ils ont aussi leur place dans la section 1 du Comité National [1607] . Les idées de Bourbaki participent également de conceptions plus générales

[1603] Nous renvoyons au dossier de Pour la Science, consacré à Bourbaki : [BOURBAKI, 2000]. La constitution du groupe entre les deux guerres tient à deux facteurs : la guerre 14-18 avait creusé un fossé de génération chez les mathématiciens français et l'impression dominait que les mathématiques françaises étaient moribondes face à la grande vitalité des mathématiques allemandes. En réaction aux cours un peu dépassés, proposés alors à ces jeunes mathématiciens, germe l'idée de rédiger d'abord un traité d'analyse au goût du jour puis une collection de traité (les "Eléments de mathématiques") couvrant un ensemble toujours plus vaste de notions.

[1604] Le porte-parole le plus zélé du groupe, Jean Dieudonné, est l'auteur de plusieurs publications exprimant cette hiérarchie au sein des mathématiques, par leur "contenu bourbachique". Dans son opuscule de 1987, Pour l'honneur de l'esprit humain ; les mathématiques aujourd'hui, ([DIEUDONNE, J., 1987]) il persiste et maintient son parti pris pour les mathématiques pures. L'épigraphe de l'ouvrage est d'ailleurs le très célèbre mot de Gustav Jacobi: "M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question de système du monde.".

[1605] Rappelons que l'enseignement des mathématiques "modernes" à l'école dans les années 1960-70 en est un dérivé (même si les membres du groupe Bourbaki n'en sont pas directement responsables). [POUR LA SCIENCE, 2000].

[1606] D'après Kropfinger, en 1976, la plupart des mathématiciens de moins de 35 ans en activité (université et CNRS) ont été formés par ce bourbakiste. Voir : Les mathématiques au CNRS dans les années 70, par Gwénaël Kropfinger, consultable sur : http://picardp1.ivry.cnrs.fr/Kropfinger.html

[1607] En quelques chiffres : en 1953 le Comité de la section 1 compte Cartan et Schwartz (sur 12 membres au total). En 1960 : Cartan, Dieudonné, Schwartz et Serre (sur 19 membres au total). En 1969 : Schwartz et Serre (sur 22 membres au total). La proportion diminue, mais ces chiffres ne comptent pas les sympathisants, ni les opposants, car cela est bien souvent difficile à évaluer.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

répandues parmi les mathématiciens, comme les "applications des mathématiques" : celles-ci se sont développées sans Bourbaki, qu'il ne faut donc pas rendre responsable de tous les maux, mais Bourbaki leur a apporté un écho important.

Les applications des mathématiques

Les rapports du Comité National pendant les années 1960 nous permettent de mieux saisir l'idéologie sous-jacente aux "mathématiques pures". Elle est appuyée par différents arguments relevant de l'histoire et repose sur une épistémologie un peu simplifiée.

L'argument récurrent en faveur de la pratique de mathématiques "pures" est l'idée selon laquelle les mathématiques sont souvent à l'origine des découvertes fondamentales. Une histoire des sciences un peu déformée sert de démonstration à cette idée :

"[...] la plus formidable source d'énergie actuellement connue n'a pu être soupçonnée qu'à la suite de travaux purement mathématiques d'Einstein [...] les théories quantiques n'auraient pas vu le jour sans les connaissances alors acquises sur les espaces de Hilbert." [1608] ***.***

Dans l'esprit des auteurs de ces rapports, tout semble se résumer au fait qu'on applique les théories mathématiques dans différentes situations. Les mathématiques "pures" sont donc à la racine de toute la connaissance, en quelque sorte la science la plus "fondamentale". Il y a **les mathématiques pures et les applications des mathématiques**. Les mathématiques pures peuvent se livrer à l'exercice de spéculation, dont les applications viendront "plus tard". On retrouve certaines idées de Bourbaki, notamment celles exprimées par J. Dieudonné [1609] . L'idée d'"application" se résume à une notion de transfert, à sens unique, des mathématiques pures vers la physique par exemple. Les évolutions futures marqueront les limites de cette idée d'"application".

Ressassé à longueur de rapports, l'autre aspect de ces "mathématiques pures" définies par opposition aux "applications" est le discours sur l'impossibilité d'orienter les recherches dans le domaine. Après les exemples d'Einstein, de la Mécanique quantique et d'autres en Mécanique des fluides, vient l'argument :

"Si l'on voit sur ces exemples, qu'il est impossible de prévoir quelles connaissances mathématiques seront pratiquement nécessaires demain, il est plus fondamental encore de comprendre à quel point toute prétention à définir des urgences ou des priorités serait absurde et plus encore funeste." [1610]

En résumé, on ne sait pas ce qui est susceptible d'être appliqué, donc il faut développer tous les fronts simultanément et donner aux mathématiciens les moyens qu'ils réclament pour cela [1611] .

[1608] ***Rapport de conjoncture 1960, section 1, p.9. Repris dans les Rapports de conjoncture de 1963/64.***

[1609] Dans [DIEUDONNE, J., 1987], par exemple.

[1610] ***Rapport de conjoncture du CNRS 1960, section 1, p. 10.***

[1611] La suite du rapport 1960 est effectivement une liste des problèmes d'ordre pratique à résoudre.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Les conséquences

Ces conceptions ont trois conséquences importantes. La première, issu du rapport entre le pur et l'appliqué tel qu'il est imaginé, se rapporte à la question de la technique, perçue de manière extrêmement simpliste :

"Il est vital pour l'avenir de la recherche de faire connaître aux mathématiciens les problèmes qui se posent ou semblent se poser dans les domaines techniques et d'accélérer l'application technique des nouveaux résultats de mathématiques pures [...]" [1612] **.**

En d'autres termes, les techniciens, une fois que les résultats mathématiques leur sont rendus accessibles, n'ont qu'à les utiliser pour résoudre leurs problèmes. Tout semble donc se jouer au niveau de l'information. Il faut "développer à côté des mathématiciens purs, une catégorie de chercheurs qui s'efforceraient de déceler les problèmes, les préciser et les résoudre" [1613] . Par ailleurs "la Commission préconise l'organisation d'un cycle de conférences à l'usage des physiciens" [1614] .

La surprise vient de ce que, parmi les exemples choisis dans le rapport de 1960, on trouve le nom de Poincaré et les questions de mathématiques des équations différentielles :

"Certains milieux scientifiques américains attribuent l'avance des Soviétiques en matière d'astronautique à leur connaissance des problèmes d'équations différentielles et de cycle limite, introduits par Henri Poincaré au début du siècle" [1615]

Il y a donc une reconnaissance de l'importance de ces mathématiques, dans la section la plus concernée par ces questions. Mais, enfermés dans leurs discours, les mathématiciens estiment qu'il suffit d'en informer les techniciens et former des scientifiques spécialisés dans ces applications. C'est "vital pour l'avenir de la recherche" ; l'exemple des "découvertes de Henri Poincaré et des grands chercheurs de son temps donnent lieu aujourd'hui, mais bien souvent aujourd'hui seulement, à beaucoup d'utilisations pratiques" [1616] en est la preuve. En tout état de cause, les techniciens "ne cherchent pas assez souvent auprès des mathématiciens les réponses aux questions qui les intéressent" [1617] . Les autres rapports des années 1960 contiennent des arguments équivalents, et les mathématiciens, sans eux-mêmes faire les démarches vers l'"appliqué", enjoignent les techniciens et les physiciens à les écouter pour qu'ils leur

[1612] ***Ibid., p. 13.***

[1613] Ibid., p. 13.

[1614] Ibid., p. 13.

[1615] ***Ibid., p. 9. Les avancées en astronautique renvoient au Spoutnik, mis en orbite en 1957.***

[1616] Ibid., p. 13.

[1617] Rapport de conjoncture du CNRS 1960, section 1, p. 13.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

expliquent comment procéder en la matière.

Comment ne pas être saisi par le décalage entre ces injonctions des mathématiciens "purs" et le travail entamé par Vogel au CRSIM depuis 1950 ? Il est vrai que ce laboratoire ne dépend pas de la même section et ne fait pas de mathématiques "pures".

En tout cas, les appels des mathématiciens ne semblent pas avoir reçu d'échos. Il faut dire qu'une telle condescendance à l'égard des techniciens et des physiciens, suscite difficilement des vocations et n'aide pas à franchir les frontières entre disciplines. Plus largement, les mathématiques pures ont tendance à s'isoler : cela peut apparaître paradoxal, vu qu'il y a une volonté d'ouverture vers les autres disciplines, mais ces velléités sont desservies par leur discours. En particulier les autres sections de mathématiques travaillent déjà en étroite collaboration avec les physiciens, mécaniciens, ingénieurs : elles sont dans un état d'esprit bien différent, comme nous allons le voir sur l'exemple de la section 3.

Enfin, troisième conséquence, ces discours maintiennent le CNRS dans son état d'acteur mineur des mathématiques pures. Il est l'agence de moyen [1618] au service des universitaires, dont les demandes sont parfois extravagantes [1619]. En tout cas l'idée de développer les mathématiques au CNRS est aux antipodes des intentions de la section 1 du Comité National, préférant privilégier les financements de thèses :

"Il est indispensable qu'un nombre croissant de jeunes particulièrement doués puissent [...] faire rapidement des thèses comme chercheurs au CNRS, et que les assistants de Mathématiques...puissent, une fois leurs recherches avancées, trouver au CNRS la possibilité de terminer leur travail, en étant débarrassés de leurs lourdes charges universitaires" [1620] .

Conclusion : peu de mathématiques de la dynamique non linéaire au CNRS

Le décalage entre l'information disponible concernant la recherche sur les équations différentielles, dont l'enjeu est décrit comme stratégique, et l'action conduite

[1618] Les rapporteurs n'hésitent pas à faire une allusion au système américain de la "National Science Foundation" (NSF), agence de moyens pour la recherche, laquelle donne un salaire, des frais de publication, de voyage aux chercheurs pour justifier l'attribution de facilités matérielles aux jeunes chercheurs. "Sans préjuger du fait que de tels types de contrats puissent ou doivent être envisagés dans l'avenir par le CNRS, il n'en reste pas moins qu'il n'est pas logique de ne pas envisager, au moins pour de jeunes chercheurs, des fonds pour des dépenses professionnelles". Rapport de conjoncture du CNRS 1962-63, p. 13.

[1619] Le premier rôle confié au CNRS se limite à de l'appoint : améliorer le fonctionnement des instituts de mathématiques en employant bibliothécaires et secrétaires, mettre au goût du jour les périodiques français, inviter des conférenciers pour des colloques. Mais parfois les demandes sont disproportionnées. En 1959, par exemple, la section 1 demande la création de 49 postes de secrétaires-bibliothécaires pour les Instituts de mathématiques (l'effectif CNRS correspondant à la section est de 41 au total), demandes reformulées les années ultérieures (en proportion plus raisonnable toutefois). Les appels au CNRS en 1964 incluent la création de 20 postes de collaborateurs techniques par an, 4 traducteurs, 12 millions de Frs pour les Instituts de Recherche mathématique, 2 millions de Frs pour le Centre de Rencontre et d'Etudes Mathématiques (le budget total du CNRS est d'environ 400 millions de Frs). A quoi s'ajoute, jusqu'en 1970 au moins, 10 postes de chercheurs par an !

[1620] Rapport de conjoncture du CNRS 1962-63, p. 12.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

effectivement est étonnant. Les conceptions sur la recherche handicapent lourdement les chances de créer une interaction avec les mathématiques "pures". Il n'y aura donc pas de mathématiciens, de la section 1, orientés spécifiquement sur ce type de problème, ni sur un autre d'ailleurs. Les moyens du CNRS sont tout entier réservés pour suppléer l'université. En cela, le CNRS se contente de suivre les recommandations du Comité National censées dynamiser le secteur [1621] et ce d'autant plus que l'effort financier à fournir n'est pas énorme, relativement aux autres sections.

Le credo universitaire n'est pas réservé aux mathématiques, cependant, il n'a pas si bien résisté qu'en section 1. Les discours ne suffisent pas à expliquer cette situation et on peut penser que les spécificités de la recherche en mathématiques "pures" en font un bastion facile à défendre : en termes financiers, par exemple, les demandes se limitent à des bibliothèques et des financements de thèse, plutôt qu'à de gros équipement ou des structures importantes. Matériellement, rien n'oblige à fixer des priorités ou des orientations, ce qui ne veut pas dire qu'il soit impossible ou "funeste" d'en donner. On peut même trouver une contradiction dans le fait de classer les disciplines selon leur "contenu bourbachique" (et par là fixer ce qui relève des mathématiques pures et qu'il faut approfondir) et cette idée qu'on ne fixe pas de priorités : en quoi la hiérarchie établie est-elle moins arbitraire que des orientations déterminées sur d'autre critères ? En définitive, qui doit fixer ce qu'il faut ou ne faut pas traiter ? Avec Bourbaki, tout porte à croire que ce sont les mathématiciens eux-mêmes, selon une dynamique interne des mathématiques qu'ils perçoivent, et certainement pas des décisions extérieures, surtout d'ordre économique ou politique. Très critiqués par la suite, par des membres du groupe également [1622] , ces positions ont eu des conséquences sur le sous-développement du non linéaire, en matière de mathématiques, en France. Plus généralement, les mathématiques appliquées, les probabilités et les statistiques ont beaucoup souffert des discours négligeant ces activités [1623] .

c. Mécanique, mathématique et calcul scientifique

[1621] Le CNRS accède régulièrement à ce type de souhaits formulés par la section 1. Pour ne donner que quelques exemples, des thèses et des colloques importants sont financés. Dès 1947, avec les fonds Rockefeller, des colloques CNRS avaient été organisés sur les thèmes de la "Topologie algébrique" ou "Analyse harmonique" (Colloques organisés en juin 1947 respectivement par A. Denjoy, à Paris et par S. Mandelbrojt, à Nancy). Par la suite, un colloque sur la "Topologie algébrique et géométrie différentielle" se déroule à Lille en 1959 (Organisé par le professeur Deheuvels, Faculté des sciences de Lille). Ou encore le colloque de mathématiques pures à Grenoble en 1963 : "Systèmes différentiels et structures feuilletées" (Organisateurs : M. Reeb, Professeur à la Faculté de Grenoble et M. Ehresmann, Professeur à la Faculté de Paris).

[1622] Par exemple, Laurent Schwartz s'est laissé aller à quelques regrets : "Bourbaki s'est écarté des probabilités, les a rejetées, les a considérées comme non rigoureuses et par son influence considérable, a dirigé la jeunesse hors du sentier des probabilités. Il porte une lourde responsabilité, que je partage, dans le retard de leur développement en France.", cité dans [POUR LA SCIENCE, 2000].

[1623] En témoigne le peu de recherches de ce type développées à l'université : la première chaire d'analyse numérique n'est crée à Paris qu'en 1959. Voir [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 42.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Malgré le faible développement des mathématiques pures au CNRS, il se développe des recherches telles que celles lancées par Vogel au CRSIM. Nous avons vu l'investissement personnel de Vogel, appuyé par le directeur du laboratoire Canac. En réalité, cet effort s'inscrit également dans les spécificités de la recherche en Mécanique au CNRS, jusque dans les années 1960. En effet, nous allons voir que Mécanique, "mathématiques appliquées" et calcul scientifique se sont associés, au sein de la section 3. L'origine et le développement de ces interactions méritent des explications et permettront de comprendre l'émergence des problématiques d'oscillations non linéaires. Cependant, cette émulation a une fin, qui correspond à une évolution des disciplines concernées et nous en verrons les répercussions sur le CRP, qui s'étendent bien au-delà de l'année 1970.

Les mathématiques découpées en trois sections

Un retour sur les distinctions opérées en 1945, reconduites dans les sections du Comité National, s'impose car elles sont en fait un prolongement d'une vision très française des différentes activités de mathématiques. On avait, par exemple, attribué une chaire de théorie physique et calcul des probabilités à Poincaré, à la fin du XIXème (première chaire de physique mathématique en France) : l'idée que les probabilités relèvent de la physique théorique a perduré dans la section 2. Par ailleurs la Mécanique est considérée, au moins depuis le XIXème siècle, comme une branche des mathématiques en France (contrairement aux pays étrangers, où la Mécanique est une discipline de la physique). En outre, les personnalités décidées à réorganiser le CNRS après guerre ont eu un poids important dans la création des sections.

Ainsi, la section "Mécanique générale et mathématiques appliquées" (section 3 de 1948 à 1967) est tout à l'image de son instigateur principal, Joseph Pérès (1890-1962), spécialiste des mathématiques appliquées à la Mécanique. Pérès est le directeur adjoint du CNRS (1945-49) et président de la section de 1950 à son décès le 12 février 1962. La présence de ses élèves et personnalités fortes, Malavard [1624] et Valensi [1625], dans la même section, ajoute du poids à ses conceptions. Rappelons que Pérès a été le maître de Mécanique de Vogel (avant la guerre), et son directeur de thèse de 1944 à 1947.

La section 3 se rapporte à deux communautés scientifiques et trois activités : la Mécanique et les mathématiques appliquées, avec un ascendant pour la Mécanique. Sous la dénomination "mathématiques appliquées" se trouve une activité de

[1624] Lucien Malavard est ingénieur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Aéronautique, élève de J. Pérès, spécialiste de calcul analogique et mécanique des fluides, nommé professeur en 1952 à la faculté des sciences de Paris (chaire d'aviation). Il est membre de la section 3 de 1956 à 1966, puis de celle de mécanique. En 1967, il préside le comité scientifique de l'AC "calculateurs", siège au Conseil Scientifique et Conseil d'Administration de l'IRIA (Institut de Recherche en Informatique et Automatique). Il est directeur de la DRME (Direction des Recherches et Moyens d'Essais) de 1961 à 1965, de l'ONERA de 1962 à 1965, et membre du Directoire du CNRS entre 1967 et 1969.

[1625] Jacques Valensi est un mécanicien, élève de Pérès et directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides, crée en 1930 par Pérès. Il est intéressé par les questions de mathématiques appliquées et calcul scientifique (l'IMF possède alors un centre de calcul). [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 33.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

mathématiques et de calcul scientifique. Les recherches en matière de calcul sont conduites à l'Institut Blaise Pascal (IBP), dirigé par Pérès. L'institut, fondé en 1946, est le produit d'une fusion du laboratoire d'analogies électriques de Pérès et du laboratoire de calcul mécanique de Louis Couffignal. L'ancien laboratoire de Pérès devient le laboratoire de **calcul expérimental analogique**, dirigé par Lucien Malavard [1626] . Couffignal prend la tête du laboratoire de calcul mécanique [1627] , de 1946 à 1957.

La coexistence de ces trois recherches au sein d'une même section s'explique par le fait qu'elles sont toutes considérées comme des **applications des mathématiques**. En outre, Pérès, patron incontesté de la section jusqu'en 1962, favorise une recherche interdisciplinaire, axée sur la Mécanique, dans un dialogue avec les mathématiques.

Vogel est un élève très respectueux de Pérès et qui, en définitive, applique les recettes de Pérès aux questions d'oscillations non linéaires, au CRSIM. Il mène une recherche en Mécanique non linéaire, très guidée par les mathématiques de Poincaré ; il s'intéresse et participe au développement du calcul scientifique et de l'analyse numérique, à Marseille, aux côtés de Valensi. **L'école Vogel prolonge l'école de Mécanique de Pérès , en créant une branche de recherches sur le non linéaire**.

Cette situation nous montre que l'idée d'application des mathématiques est partagée même par ceux qui disent la pratiquer. La différence avec les mathématiques "pures" est justement le fait qu'elle soit associée à une véritable pratique, combinant Mécanique, mathématique et calcul. L'idée en elle-même n'est pas nécessairement néfaste, mais elle reste stérile si elle se limite à des discours. Le manque cruel de rapports avec les mathématiques "pures" est encore plus évident dans les appels lancés par la section 3. Deux citations du rapport de conjoncture de 1960 sont confondantes : "l'étude théorique des systèmes différentiels ordinaires – spécialement dans le cas non linéaire – offre un grand intérêt au point de vue des applications" [1628] . Dans l'optique de revitaliser la recherche en Mécanique des solides en France : "il existe en France des traditions en matière d'étude des systèmes différentiels [...] Il suffit d'intéresser quelques groupes de théoriciens aux problèmes présentant un intérêt plus pratique, en particulier à la dynamique des systèmes non linéaires" [1629] .

L'entreprise de Vogel a donc une signification toute particulière. Elle incarne les tendances souhaitées par la commission. Les initiatives de Vogel contribuent à créer un milieu interdisciplinaire au CRSIM, conformément à ses idées et celles de Pérès. Son

[1626] Le laboratoire est lié à l'ONERA (Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautique, qui héberge le laboratoire à partir de 1951) et effectue des calculs pour l'aéronautique. Cette activité ne se résume pas à faire des calculs à longueurs de temps : il s'agit d'un travail sur les méthodes et les procédés qui conduit à des résultats tant mathématiques (résolution d'équations différentielles, analyse harmonique) que pratiques. Rapport d'activité du CNRS, 1951/52, p. 27

[1627] Les recherches portent à la fois sur les machines à calculer mécaniques et sur les méthodes de calcul qui permettent de rendre les calculs mécanisables : une partie des recherches est donc consacrée à de l'analyse numérique.

[1628] Rapport de conjoncture du CNRS 1960, p. 38.

[1629] Rapport de conjoncture du CNRS 1960, p. 39-40.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

investissement personnel profite de circonstances très favorables. Mais ces conditions ne vont pas durer.

Evolution de la Mécanique

Au sein de la commission, Pérès maintient la cohésion entre mathématique et Mécanique, mais elle a ses limites car au fil des années 1960, la Mécanique a tendance à s'autonomiser. La situation évolue, conduisant à des situations assez invraisemblables, mais dans les années 1960 encore, le CRP reste dans la ligne Pérès.

En réalité, le rapport de conjoncture de l'année 1960 signe déjà la fin du dialogue général au sein de la commission et le début des dissensions entre Mécanique et mathématiques appliquées. La commission opérera même en deux sous-commissions pour le rapport de 1963-64, lui aussi présenté en deux chapitres séparés.

Ces ruptures reflètent d'abord une évolution dans les orientations de recherches effectuées en Mécanique et informatique. La Mécanique a tendance à s'écarter de son carcan mathématique déjà bien formé. Les problématiques de la Mécanique s'élargissent et vont de la formalisation très poussée à une recherche de physique, incluant le recours à l'expérience (et donc les moyens importants que cela réclame, par exemple les souffleries en aérodynamique) et en relation avec d'autres champs de la physique (thermodynamique, chimie notamment). En anticipant sur les évolutions à venir, la Mécanique devient progressivement une Science Pour l'Ingénieur et a de plus en plus recours à la simulation numérique. De l'autre côté, l'informatique (ou calcul automatique ou mathématiques appliquées) entame le processus inverse : si au départ, il s'agissait d'une recherche technologique, la problématique s'est élargie à la recherche d'une formalisation, d'algorithmes et de méthodes (une informatique théorique). Le développement de l'informatique au CNRS a été initié autour des mathématiques et à tendance à rester majoritairement dans cette voie [1630]. Mécanique et informatique, proches dans l'esprit, dans les années suivant la guerre et sous l'impulsion de Pérès, tendent à se distinguer.

Progressivement, le groupe de Mécanique va prendre de l'autonomie. Les rapports arguent régulièrement du fait que la Mécanique est un secteur stratégique et mérite une priorité. La Mécanique des solides est présentée comme un secteur très défavorisé [1631]. Il est intéressant alors de constater que les solutions paraissent simples : "dans ce domaine tout n'est qu'une question d'orientation et d'effectif de chercheurs" [1632]. Les auteurs semblent considérer que la recherche théorique et mathématique est à un bon niveau en

[1630] [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 36.

[1631] "La Mécanique des solides souffre en France d'une désaffection certaine ; les Centres spécialisés en Métallurgie mis à part, l'équipement en matériel des Centres français est particulièrement pauvre, l'effectif des chercheurs est singulièrement faible, les travaux théoriques et originaux singulièrement rares. Cette situation est grave ; non seulement pour le prestige du pays dans le domaine de la recherche fondamentale, mais aussi, pour l'avenir de son progrès technique. Il faut souligner qu'à l'étranger, la Mécanique des Solides connaît une grande faveur, qui ne cesse de croître ; un savant britannique éminent rappelait récemment que "cette partie de la Mécanique est, probablement, la branche des Mathématiques Appliquées qui se développe le plus rapidement à l'heure actuelle".", Rapport de conjoncture du CNRS 1960, p. 39.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

France, mais qu'il faut capter l'attention les théoriciens dans ce domaine. C'est le signe que, tout en cherchant son indépendance, la Mécanique doit faire face à des défis où les mathématiques jouent un rôle important.

Dans le rapport 1962-63, les auteurs insistent sur les mêmes points et le "manque d'une école française se préoccupant des questions théoriques, se rapportant à l'élasticité, à la plasticité et à la stabilité" [1633] . Ce constat pourrait paraître anodin, mais il montre déjà que les problèmes d'orientations ne sont certainement pas réglés (les nouveaux thèmes de l'élasticité et plasticité ne sont sans doute pas encore très "académiques"). Ce sont **des problèmes importants de mathématiques de la Mécanique qui émergent au moment où la scission s'opère entre mathématiciens et mécaniciens**. Le dialogue, qui avait été entretenu par l'école Pérès, ne semble déjà plus d'actualité. On peut également se demander à quoi sert une forte tradition mathématique française si elle n'est pas canalisée sur les problèmes décisifs.

Le rapport de 1964 offre la possibilité à la discipline Mécanique de s'afficher comme autonome [1634] . La liste des recommandations en matière de Mécanique est longue et on relève ici uniquement l'importance accordée aux mathématiques et au calcul : comme antérieurement, les questions de vibrations, de plasticité, de viscoélasticité, des équations de comportement rentrent dans les grands axes prioritaires (les mathématiques sont la clef de voûte de ce type de recherche). Le développement de procédés de calcul analogique, hybride et automatique, s'ajoute à cette liste : le détachement concomitant des mathématiques appliquées et de l'informatique ne semble pas aller dans le sens de plus de coopération.

La situation est finalement assez étonnante : les dissensions entre Mécanique, mathématiques et informatique se font jour au moment où la Mécanique est appelée à recourir massivement aux mathématiques et à l'informatique. Cependant, l'élan donné par Pérès ne se tarit pas immédiatement après son décès. Au CRP les recherches mathématico-mécaniques se poursuivent [1635] avec Vogel aux commandes du laboratoire. Le meilleur exemple reste certainement le Laboratoire de calcul électronique analogique dirigé par Malavard. En 1962, il se désolidarise de l'IBP pour devenir le Centre de Calcul Analogique, toujours dirigé par Malavard. Vogel fait partie du comité de direction de 1964 à 1973 [1636] . Fin 1964, Malavard réoriente le laboratoire vers le calcul hybride en couplant

[1632] Rapport de conjoncture du CNRS 1960, p. 40.

[1633] Rapport de conjoncture du CNRS 1962-63, p. 32. Il s'agit d'un constat dressé par l'Association Nationale de Recherche Technique.

[1634] "La Mécanique, considérée tantôt comme une branche particulière de la Physique, tantôt comme une application des Mathématiques [...] la Mécanique constitue maintenant une science autonome au domaine de recherche bien défini.", Rapport de conjoncture du CNRS 1963-64, p. 64.

[1635] Le Rapport de conjoncture de 1961-62 le cite en exemple des équipes qui s'orientent dans une bonne voie.

[1636] Notons que le comité de direction accueille les meilleurs spécialistes de mécanique-informatique : Paul Germain, René de Possel, Jacques-Louis Lions, Jean Kuntzmann, entre autres.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

les calculs analogiques avec des calculateurs numériques [1637] . La recherche au laboratoire tourne autour de deux axes : la Mécanique (aérodynamique, hydrodynamique) et les systèmes informatiques. Le laboratoire devient en 1972 le LIMSI (Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur) dont le titre reflète au mieux l'activité qui s'y développe. Il sera, naturellement, intégré au département des Sciences pour l'Ingénieur (SPI).

La situation du CRP devient plus problématique lorsque la section de Mécanique (section 4) est crée, en 1967. Malgré la scission interne à la section 3, l'activité de la "dynamique théorique" se maintient jusque-là, sans problème majeur. Mais la fin des années 1960 est le début d'une crise au laboratoire. Il ne s'agit pas simplement d'une conséquence du redécoupage des sections mais d'une interrogation très générale sur les missions du laboratoire et plus généralement sur l'organisation et la politique scientifique du CNRS. Avant d'en venir à ce débat, il convient d'insister sur les problèmes posés par l'informatique au CNRS, avant les années 1970.

d. Le problème de l'informatique au CNRS

Le développement du calcul scientifique a été un des moteurs de l'histoire du chaos. Or au CNRS, l'informatique trouve difficilement sa place et si il existe des projets de machines à calculer, les réalisations ne sont pas au rendez-vous. Le retard à ce niveau s'accumule en France et plusieurs programmes sont lancés pour le combler. Dans la perspective de comprendre le développement des pôles de recherche du non linéaire, il paraît pertinent de déterminer l'impact des choix opérés dans cette politique scientifique, qu'ils mènent à une réussite ou à des échecs.

Rattraper le retard

Avant guerre, les spécialistes français du calcul automatique sont déjà en retard sur leurs homologues étrangers. L'accélération de la recherche hors de France pendant la guerre, ne fait qu'augmenter le retard des chercheurs français en 1945 [1638] . Dans l'immédiat après guerre, la création de l'IBP illustre l'attention portée au calcul automatique et constitue une tentative de rattraper ce retard. L'objectif est double : développer des recherches sur les machines à calculer et constituer un centre de calcul au service de la communauté scientifique [1639] . Dès les premiers temps on pense que l'IBP "sera, si nous réussissons dans nos desseins, un centre de mathématiques appliquées unique au monde" [1640] .

Les années suivantes sont marquées par le creusement de l'écart entre la recherche

[1637] Procès verbal de la réunion du comité de direction du CCA, 21 décembre 1964. G850001 Art 31. L'idée est alors d'associer une machine du genre CAB 500 pour certaines phases du calcul de résolution d'équations aux dérivées partielles, par exemple. Le CNRS est d'ailleurs sollicité pour des crédits spéciaux.

[1638] Nous renvoyons à l'étude de G. Ramunni, consacrée aux problèmes de l'informatique au CNRS, et au parcours vers la "non construction" du premier calculateur électronique au CNRS : [RAMUNNI, G., 1989b].

[1639] [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 134.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

dans le domaine en France par rapport à l'étranger, surtout aux Etats-Unis. L'anti-héros de cette histoire est Louis Couffignal [1641] . Son projet de faire du calcul mécanique (lancé en 1947) se met en place à contre-courant de ce qui se fait ailleurs, contre les idées de certains opposants tels Léon Brillouin (partisan de suivre ce qui se fait aux Etats-Unis en matière de calcul électronique). La machine de Couffignal se fait attendre, mais les partis pris de Couffignal la rendent quasiment impossible à mettre en œuvre. En 1951, lors d'un colloque à l'IBP, la situation est claire : alors que d'autres machines sont en voie d'industrialisation, l'IBP en est encore à des spéculations. Cet échec accentue le retard en France, puisque cinq années ont été perdues dans un investissement pour une machine non viable et cinq années de "dépression" suivront à l'IBP [1642] .

Ces années 1950 voient, par ailleurs, la suppression des commissions de spécialités voulues par Frédéric Joliot lors de la réorganisation du CNRS après la guerre, et des fluctuations dans la composition de la section 3 (Mécanique générale et mathématiques appliquées), puisque Pérès est seul, avant que Malavard, puis Kuntzmann, puis de Possel ne le rejoignent [1643] .

En 1960, la situation n'a guère évolué : l'informatique est devenue indispensable à un pays moderne, mais la France est considérablement en retard [1644] (ce qui signe au passage un constat d'échec du CNRS, lequel a été incapable d'assumer son rôle dans l'émergence de ce domaine). En conséquence, il faut faire des efforts en matière d'équipement : la stratégie est de fournir une machine modeste (les machines CAB 500 vont proliférer) dans les centres de calcul nouveaux puis les développer lorsque les scientifiques ont pris conscience de l'utilité des moyens de calcul. Dans le même temps il faut équiper de machines puissantes les centres déjà importants (Paris, Grenoble, Toulouse).

Nous voulons souligner deux points : le manque d'équipements et le travail à accomplir pour faire prendre conscience de leur utilité. Le Rapport de conjoncture de 1964 vient ajouter :

"[…] l'emploi des machines est entré dans la vie scientifique normale. Nous venons d'assister à la naissance d'un processus irréversible et inéluctable. Les machines sont nécessaires pour certaines activités (aéronautique, automatisme

[1640] Séance plénière du Comité National, 2 juin 1948 (Archives du CNRS).

[1641] Les détails reportés ici sont tirés de l'article de G. Ramunni. Couffignal avait fait sa thèse en 1938, sur la théorie des machines à calculer, et mêle réflexion théorique et projets de machines. Directeur du laboratoire de calcul scientifique de l'IHP (Institut Henri Poincaré) sous le CNRSA (Centre National de la Recherche Scientifique Appliquée, création éphémère de 1938), ses projets de construction de machine à calculer mécanique sont retardés par la guerre, cependant qu'il conquiert une place institutionnelle importante.

[1642] [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 16.

[1643] Malavard, Kuntzmann et de Possel siègeront jusqu'en 1966, moment du redécoupage. [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 22.

[1644] Rapport de conjoncture du CNRS 1960, section 3.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

industriel, documentation automatique, etc.) et donneront à d'autres activités un nouveau visage (physique, gestion, médecine, etc.)" [1645] ***.***

Les multiples problèmes posés par l'utilisation de ces équipements sont mis en exergue et les auteurs rappellent que :

"[…] les machines analogiques sont encore assez peu utilisées en calcul scientifique […] Quoi qu'il en soit, on ne peut que constater un manque de liaison entre les usagers des machines numériques et ceux des machines analogiques" [1646] ***.***

Cependant, il convient de relativiser cet état de fait : le CNRS est pris dans un processus dont les orientations sont décidées par un autre organe, la DGRST [1647] . Le "Plan calcul", nouvelle opération dont l'ambition est de mettre en place des capacités de calcul adaptées aux nouvelles exigences scientifiques, est lancé en 1966 dans ce cadre mais il n'aura pas beaucoup plus de succès que les tentatives précédentes.

L'informatique et la préhistoire du chaos

Les travaux réalisés par Hénon, Vogel et son groupe, Mira et Gumowski s'inscrivent dans ce contexte. Ils permettent également de suivre l'évolution et préciser les problèmes liés à l'informatique en France.

Michel Hénon commence sa construction d'un ordinateur analogique vers 1955, en plein désarroi à l'IBP et décribilisation de Couffignal (parrain de recherche de Hénon). Les calculs analogiques de Malavard se développent bon gré, mal gré, mais en forte relation avec l'ONERA. Ainsi, il existe très peu de structures en France susceptibles d'aider Hénon et il travaille seul sur sa machine [1648] . Le CNRS fournit tout de même les crédits pour la machine [1649] . Lorsqu'il arrive aux Etats-Unis en 1962, Hénon trouve une toute autre gamme d'ordinateurs, sans comparaison de performances avec ceux disponibles en France. Ces potentialités lui offriront la possibilité d'expérimenter, en 1962, le modèle de Hénon-Heiles.

De retour à Meudon, Hénon est témoin du remplacement de l'IBM 650, par une machine "équivalente" aux machines américaines, une IBM 7040. Cependant, comme il le dit, les astrophysiciens étaient encore obligés d'aller faire une partie de leurs calculs en

[1645] ***Rapport de conjoncture du CNRS 1963-64, p. 94.***

[1646] ***Ibid., p. 92.***

[1647] La Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique, mise en place en 1958, est l'ancêtre du Ministère de la Recherche.

[1648] Son projet aboutit, mais la machine est déjà presque dépassée lorsqu'elle est achevée ; un temps de réalisation plus court aurait peut-être permis de rentabiliser l'effort. Cependant, il faut ajouter que Hénon apprécie le travail un peu solitaire, comme il le fera par la suite sur d'autres sujets. Les soutiens techniques lui sont venus des astronomes et astrophysiciens qui connaissaient l'électronique du fait des manipulations d'autres instruments d'observations (Entretien avec Michel Hénon, 17 mars 2004).

[1649] Entretien avec Michel Hénon, 17 mars 2004.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Belgique [1650] . A son arrivé à Nice en 1968, la situation n'est guère plus glorieuse. L'IBM 7040 de Meudon est transféré progressivement là-bas. Mais c'est un autre écueil qui attend l'observatoire : dans le cadre du "plan calcul", c'est une machine française qui est destinée à équiper le centre, une machine Solar. Les problèmes rencontrés avec la machine détournent les astronomes du calculateur et les orientent vers des études plus théoriques [1651] .

Au CRSIM, la situation est différente puisqu'il n'y a même pas de centre de calcul équivalent à celui de l'observatoire. Vogel est très intéressé par le calcul scientifique, connaît Malavard et il est le demandeur des premiers calculateurs au CRSIM. Un calculateur analogique (Djinn) et une CAB 500 arrivent au début des années 1960. L'utilisation des calculateurs est révélatrice des problèmes rencontrés avec l'informatique. D'un côté Vogel souligne que son intention est de faire travailler les chercheurs sur ces machines à calculer, mais qu'il est difficile de trouver des chercheurs qui conviennent ou qui s'intéressent à ces questions [1652] . D'un autre, la situation en 1965 est la suivante : les utilisateurs sont essentiellement les chercheurs pratiquants les mathématiques (dynamique théorique, élasticité et mathématiques appliquées). Les machines sont donc plutôt mobilisées pour des résolutions d'équations différentielles, en vue d'études théoriques plus que pratiques. Le calcul analogique est bien exploité (2 machines sont utilisées), la machine CAB 500 est déjà saturée et son remplacement est envisagé [1653] .

Comme cela a été indiqué au niveau général du CNRS, il y a un problème de puissance de calcul disponible et de volonté, de capacité à s'investir dans l'utilisation des ordinateurs. Ici, ce sont des scientifiques **formés aux mathématiques** qui en font usage. La disponibilité des calculateurs est le seul paramètre qui bride l'expérimentation numérique en "dynamique théorique" dans les années 1960.

Enfin, à Toulouse, au LAAS, le contexte est encore différent. Avant le LAAS, crée en 1967 seulement, Mira et Gumowski travaillent au Laboratoire de Génie Electrique. Ils profitent, au moins avant 1970, d'un environnement propice à leurs études d'autant plus qu'il existe à Toulouse un centre de calcul développé et renforcé par le CNRS. En outre, le LAAS a dès sa création, une politique de développement des moyens de simulation analogique et numérique [1654] .

Dans cette situation nous retrouvons plusieurs constantes. Nous sommes renvoyés dans un premier temps aux grandes lignes esquissées à propos de la pratique du calcul : les utilisateurs ont une double formation, ce sont des physiciens connaissant bien les mathématiques. Pour le CRSIM et le LAAS ils sont aussi des ingénieurs.

[1650] Un système s'était organisé : une collecte des programmes, puis un voyage en Belgique, chacun son tour. Entretien avec Michel Hénon, 17 mars 2004.

[1651] Cette machine était apparemment difficile à programmer, au point que pratiquement tout le monde au laboratoire a renoncé au calcul numérique.

[1652] Procès verbal du Comité de Direction, 20 décembre 1962.

[1653] Rapport au Comité de Direction, Février 1965.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

L'expérimentation numérique se développe dans des milieux où se cultive une certaine interdisciplinarité, ouverte à l'électronique d'un côté, aux mathématiques de l'autre.

Deuxièmement, si les mathématiques semblent indispensables dans l'utilisation précoce des moyens informatiques, cela ne suffit pas, comme nous le rappellent les opinions courantes en section 1. Outre que la commission du Comité National ne compte pratiquement aucun spécialiste d'informatique, ils considèrent plutôt que c'est de la "basse cuisine" [1655] .

Enfin, les travaux numériques expérimentaux sont directement liés, ne serait-ce qu'en termes quantitatifs, aux moyens de calcul accessibles à un laboratoire. Les conséquences de l'absence de machine française performante sont difficiles à évaluer, mais il est certain que ces lacunes ont restreint les tentatives d'expériences numériques. On est bien loin du laboratoire de Los Alamos où Ulam profite des machines intégrant les dernières avancées de la technique.

En réalité, ces constantes ne sont que le reflet d'un problème "unique", plus profond, épistémologique : la perception de l'informatique en France.

Perception de l'informatique en France

L'informatique est confrontée à un problème quant à son statut institutionnel et épistémologique, les deux étant fortement liés. Dans le milieu des années 1960, se pose la question d'un réarrangement des disciplines de la section 3, sous l'effet d'une scission progressive de la Mécanique et la croissance démographique de la section 10 (électronique et automatique), aux problématiques assez proches. Les projets formés, et le redécoupage de 1967, reflètent à la fois les enjeux de pouvoir entre disciplines et le positionnement des scientifiques français relativement à cette nouvelle science : l'informatique est accolée aux mathématiques. Plus fondamentalement, nous allons voir que les débats révèlent les difficultés à situer l'informatique dans les cadres épistémologiques classiques, entre le pur et l'appliqué, les mathématiques et la physique. Nous devrons mettre en perspective ces débats avec les pratiques du non linéaire, où les mathématiques expérimentales sont courantes. Cela réaffirmera l'aspect problématique de l'acceptation de l'outil informatique dans la pratique scientifique.

Plusieurs projets d'arrangements des sections sont débattus à partir de 1964.

[1654] Il s'agit de "mettre le paquet" à ce sujet (Procès verbal du comité de direction du LAAS, 12 Octobre 1968. Archives du CNRS, G 850001 Art 7). Les premières années vont être effectivement marquées par l'importance de l'équipement en moyens de calcul. Si à ces débuts le laboratoire a recours aux moyens disponibles à l'Institut de Calcul Numérique (un calculateur IBM 7044, remplacé ensuite par un CII 10070) à Toulouse et ceux de l'Ecole Nationale Supérieure d'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE) (un autre CII 10070), le nombre croissant d'utilisateurs et d'heures de calculs incite à chercher d'autres moyens, plus puissants. Il devient vite "absolument nécessaire" au laboratoire de posséder une machine de type IBM 1130 permettant la mise au point de programmes envoyés ensuite au CIRCE (Centre Inter-Régional de Calcul Electronique, à Orsay) : un tel terminal est opérationnel en septembre 1971 et résout partiellement le problème. (Rapport au comité de direction, novembre 1971. Archives du CNRS, G 850001 Art 7).

[1655] [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 19 (Interview de F.H. Raymond). F.H. Raymond est le premier industriel informaticien français ; il est nommé dans la commission en 1960, mais il y est assez isolé.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Un projet de **regroupement centré sur les mathématiques appliquées et l'informatique**, incluant également l'automatique, les probabilités et les statistiques (de la section 2) a été proposé : ce projet a les faveurs des informaticiens et des mathématiciens appliqués qui veulent une autonomie. En même temps, les mathématiciens appliqués ne veulent pas d'un rapprochement avec les mathématiques pures, qui selon eux, freinerait l'expansion des mathématiques et mettrait les mathématiques appliquées en minorité. Ils ne travaillent pas avec les mêmes exigences et critères d'évaluation et estiment que la construction d'ordinateurs et l'automatique ne relèvent pas des mathématiques, mais de l'électronique et de la physique. Le projet est loin de recueillir la faveur générale [1656] .

Probabilités et statistique, Mécanique (section 3 et 8) semblent avoir été les principaux adversaires du projet et ils ont défendu l'idée de **regroupement des mathématiques pures et appliquées** [1657] . Les mécaniciens arguent du fait que les mathématiques pures ne doivent pas rester isolées, qu'il n'y aura pas de risque de conflits, que cela donnera une place privilégiée à l'analyse numérique [1658] . L'opération est stratégique pour les mécaniciens : le regroupement des mathématiques pourrait ouvrir la voie à la création d'une commission de Mécanique.

Un autre projet, plus discret et moins débattu, a existé : **accoler l'informatique à l'électronique**. Evidemment, cela requiert que des informaticiens-mathématiciens (analyse numérique) aillent travailler avec les physiciens ou que l'analyse numérique se sépare de l'informatique. Cette solution aurait eu le mérite de rapprocher les mathématiques appliquées de l'automatique et des études de composants. Les idées de G. Jobert (directeur adjoint du CNRS, mathématicien de formation) vont dans ce sens, pour un premier temps [1659] . Les mathématiques appliquées, autres que l'informatique, auraient fusionné avec les mathématiques pures. En définitive, Jobert contribuera plus à l'intégration de l'informatique en mathématiques "parce qu'il est nécessaire de sélectionner rigoureusement les chercheurs en Analyse Numérique", et pour "revivifier les mathématiques pures", dont le splendide isolement était suicidaire, à terme [1660] .

[1656] Des membres de la section 1 et 5 (Minéralogie et Cristallographie) voient ce projet d'un bon œil. Mais il ne fait pas l'unanimité. Probabilistes et statisticiens ne sont pas disposés à se joindre à une telle commission : ils craignent d'y être en nette minorité. L'automatique n'a pas l'intention de s'intégrer non plus à une section dominée par les mathématiques appliquées : selon la section 10, cette solution poserait le problème de mettre de côté les aspects physiques du développement et le but industriel de l'automatique. [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 53.

[1657] Paradoxalement, probabilistes et statisticiens n'entendent pas non plus participer à ce groupe de mathématiques et préfèrent rester en section 2. Leur situation en section 2 est singulière. Ils sont écrasés par la physique théorique, physique des hautes énergies et ne bénéficient que "des miettes". Cependant ils parviennent à tirer plus de profits des moyens considérables de ce domaine de recherche, que ce qui est attribué aux autres sections de mathématiques. [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 54.

[1658] [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 55.

[1659] Une commission "informatique-électronique" a sa faveur car "il est normal que ceux qui s'occupent de théorie de l'information soient en contact avec ceux qui réalisent les structures des machines", [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 57.

[1660] [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 57.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

On peut mentionner l'idée de commission transversale, solution idéale au regard des spécificités de l'informatique. Il est tout à fait envisageable de mettre en place un groupe avec des experts de diverses sections, mais qui n'a pas de réel pouvoir : il aurait fallu en soustraire aux commissions traditionnelles. La proposition reste donc lettre morte [1661].

Les décisions sont prises en 1965 : il y aura une **commission mathématique-informatique**. Lors d'une réunion inter-sections de "mathématique" [1662] on était arrivé à conclure à l'association des activités d'analyse numérique et de logique avec les mathématiques pures : dans l'esprit de ces mathématiciens la recherche en informatique semble se limiter à l'analyse numérique [1663]. Cette décision nie en quelque sorte l'existence de l'informatique comme domaine scientifique et méconnaît son importance stratégique [1664]. Elle condamne l'informatique et le calcul scientifique à s'éloigner de la physique.

Dans ces débats, les positions relèvent d'une stratégie institutionnelle, mais aussi de la réponse apportée à cette question : qu'est-ce que l'informatique ?

A travers les discussions il ressort que l'informatique, sous le nom officiel de "mathématiques appliquées", ne parvient pas à sortir de la dichotomie entre mathématique et physique. Pour les physiciens, l'informatique se réduit souvent à des outils de calculs et n'est qu'une utilisation particulière de l'outil mathématique. Du point de vue des mathématiciens, c'est une application des mathématiques. Il y a donc un problème d'ordre institutionnel mais aussi, et surtout, épistémologique. Pris dans les catégories pur / appliqué, mathématique / physique, l'informatique ne trouve pas de place. En rappelant les réflexions de Von Neumann et l'histoire qui a conduit à développer le calcul électronique il est raisonnable de penser que l'informatique ne peut pas entrer dans cette catégorisation. En effet, l'ordinateur est un **instrument** pour les physiciens et à ce titre il serait naturel que les physiciens travaillent à son perfectionnement (comme ils le font alors avec le microscope électronique). En même temps, l'aide des mathématiciens leur est indispensable dans ce travail. Les réalisations américaines, depuis l'ENIAC et les projets de Von Neumann (le First Draft) [1665], illustrent l'importance de cette combinaison. En France, les multiples querelles institutionnelles occultent cette problématique, et automatique, informatique, mathématique et physique ne se trouvent jamais sur la même longueur d'onde.

[1661] [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 57-58.

[1662] Elle réunit, le 20 mars 1965, des représentants des section 1, 2, 3 et d'autres issus de la mécanique physique, astronomie et sciences économiques. [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 60.

[1663] [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 60.

[1664] [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 61.

[1665] L'ENIAC est le premier calculateur électronique construit et opérationnel en octobre 1945 (Voir [RAMUNNI, G., 1989a], p. 42-52). Le First Draft of a report on the EDVAC de Von Neumann rassemblent ses réflexions sur les améliorations à apporter à l'ENIAC pour son successeur, l'EDVAC. Le First Draft a servi ensuite d'élément de base dans la construction des ordinateurs, depuis sa publication en 1945. Voir [RAMUNNI, G., 1989a], p. 62□72.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Pour signifier l'importance de ces considérations épistémologiques, il suffit de les mettre en perspective avec les positions de Hénon ou Vogel. Le cadre épistémologique, rappelons le, est défini par une grande sensibilité aux questions d'expériences mathématiques, et une approche assez empiriste des mathématiques [1666]. Les pratiques du non linéaire, et de ces mathématiques expérimentales, combinent mathématiques et physique sans entrer dans l'une ou l'autre catégorie exclusivement. Le calcul scientifique transcende cette division classique, comtienne.

L'interaction entre mathématiques et physique est un maillon important du développement du non linéaire, de la "dynamique théorique" aux récurrences non linéaires, comme de l'informatique. Dans des contextes particuliers, préparés épistémologiquement, l'interdisciplinarité s'est enclenchée, et le calcul scientifique s'est intégré naturellement, pour donner des résultats eux-mêmes difficiles à faire rentrer dans les catégorisations disciplinaires.

e. Conclusions : le retard du non linéaire et de l'informatique avant 1970

Cela éclaire le développement général du non linéaire au CNRS. Hénon, Vogel et le groupe de Toulouse ont développé leurs propres conditions d'un travail interdisciplinaire. Mira et Gumowksi ont pu profiter d'une circonstance assez rare en France. Mais comme pour Hénon, ces recherches sont faites "malgré" le CNRS, qui n'a pas participé délibérément au développement des conditions favorables. Finalement, seul le CRSIM a profité du cadre institutionnel du CNRS, en s'associant aux idées sur la Mécanique et les mathématiques appliquées. Le CNRS a donc participé à cette première phase en choisissant d'appuyer Pérès (lequel est d'ailleurs lui-même directement aux postes de responsabilités) et Vogel.

De manière plus générale, la gestion de l'interdisciplinarité, et même plus simplement de la pluridisciplinarité, est problématique au niveau du CNRS. L'exemple du non linéaire et plus encore de l'informatique, sont symptomatiques. Pour reprendre Mounier-Kuhn "l'emprise des disciplines universitaires "traditionnelles" (mathématiques, physique) sur l'organisation du Comité National, catégories à la fois mentales et institutionnelles, a contribué de façon essentielle à freiner l'émergence de l'informatique sous forme d'une science autonome en France" [1667].

On peut incriminer un défaut d'interrogation épistémologique à propos de l'informatique, et du calcul scientifique, aux conséquences non négligeables : leurs spécificités ne sont pas reconnues, la question de la conception des machines n'a pas été approfondie. Le développement et l'utilisation des moyens de calcul sont limités. Les pôles de développement du chaos sont de bons exemples des aspects problématiques liés au calcul. Le laboratoire de calcul analogique de Malavard s'inscrit dans une même logique.

[1666] Cf. chapitre 8, p. 554.

[1667] [MOUNIER-KUHN, P.E., 1987], p. 64. On peut ajouter que la décision du redécoupage, prise après consultation d'une inter-section "mathématique" est tout à fait révélatrice : une telle commission est tout le contraire d'une commission interdisciplinaire et renforce plutôt l'unité des mathématiques ; il n'y a là rien qui puisse favoriser l'émergence d'une pratique interdisciplinaire.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Cependant, la faiblesse de l'interdisciplinarité ne suffit pas à expliquer les carences en matière d'informatique en France. Le manque de liens entre le monde académique et l'industrie est certainement le plus gros handicap [1668] .

Les conséquences principales en sont les retards et le sous-développement des expériences numériques là où elles auraient pu être engagées. Egalement, le CNRS n'a engagé aucune action en faveur des oscillations non linéaires, des mathématiques des systèmes dynamiques ou d'autres domaines en plein essor avant les années 1970. L'interdisciplinarité nécessaire et l'importance de l'utilisation des mathématiques et de l'ordinateur sont des facteurs extrêmement limitatifs de ce qui aurait pu être instauré, si, en outre, le CNRS avait eu les capacités d'engager une véritable politique scientifique.

Toute cette évolution tient aussi au rôle très particulier des mathématiques au CNRS et dans le Comité National, avant les années 1970. Les mathématiques "pures" ont "abandonné" les autres sections à leurs problèmes mathématiques, alors que le Comité National était conscient du développement des mathématiques des équations différentielles et de son importance dans le domaine technique.

Mais cette dissociation a ses limites et l'effort théorique à porter en Mécanique par exemple, dépasse les seules capacités des mécaniciens. Les mathématiques sont de plus en plus pressées de se rapprocher des autres disciplines. Dans ce sens, l'évolution de 1967 est importante. Les mathématiciens doivent désormais partager postes et moyens avec l'informatique. L'analyse numérique entre de plein pied dans la section de mathématiques. Les ouvertures se concrétiseront au cours des années 1970. Cependant, relativement au CRP et LAAS, il est déjà un peu tard car le mouvement de transformation radicale vers les Sciences pour l'Ingénieur débute vers 1970 et mettra un terme aux recherches de "dynamique théorique" et sur les récurrences non linéaires au CNRS.

En définitive, la préhistoire du chaos au CNRS est, pour partie, en phase avec l'évolution générale du CNRS, au niveau du calcul numérique en tout cas. Néanmoins, les scientifiques bénéficient d'une grande liberté dans leurs recherches : les engagements et leurs intérêts personnels ont beaucoup joué dans cette période.

11.2. Les années 1970 et les Sciences pour l'Ingénieur

Le début des années 1970 est marqué, au CNRS, par les débats sur l'organisation de la recherche, ses enjeux et la politique scientifique. Incontestablement la réorganisation du CNRS avec la mise en place du département SPI (Sciences pour l'Ingénieur) en 1975, constitue un évènement touchant au plus profond du CNRS. Etant donné que le CRP et le LAAS notamment, sont intégrés dans ce mouvement, il est important de comprendre les enjeux et les paramètres de la nouvelle organisation, pour en déterminer les conséquences multiples sur le domaine du non linéaire, du chaos, sur les mathématiques,

[1668] C'est un fait souligné régulièrement dans les rapports de conjoncture, où l'exemple américain est cité comme une référence. Les laboratoires français se rabattent alors sur les constructeurs étrangers pour s'équiper. L'IRIA (Institut de Recherches en Informatique et Automatique) crée en 1967, prendra en charge cette collaboration avec l'industrie, alors que le CNRS poursuivra dans l'informatique théorique.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

et sur le CNRS en général.

Les tendances qui président à ces changements peuvent être observées dans le rapport de conjoncture de 1969 qui reflète une prise de conscience importante de la communauté scientifique vis-à-vis des nouveaux enjeux de la recherche.

a. Les nouveautés d'un rapport : le Rapport de conjoncture de 1969

Le rapport de conjoncture de 1969 est produit après une année de troubles, notamment dans les universités, et sur la fin de la période gaullienne. Au niveau national, la politique des années 60 est marquée par une priorité donnée à l'industrialisation du pays, confirmée lors de l'arrivée de Georges Pompidou à la Présidence de la République. Il est acquis que le développement économique se fonde sur de nouveaux produits industriels, mais aussi sur la recherche scientifique.

La différence de ton par rapport au précédent rapport de 1964 est frappante, les analyses produites sont plus tranchées, les solutions proposées sont à la mesure de la situation, elle-même présentée comme alarmante par les auteurs de différentes sections. Le rapport de la section de mathématiques et informatique est très symbolique de ces changements et mérite une analyse séparée. A travers les différentes sections, on peut également détecter quelques tendances profondes, qui vont marquer les évolutions vers les SPI, et au-delà nous montre que la recherche scientifique est en train de changer.

Le rapport de la section 1

Dans la section 1, l'effet du rapprochement de 1967 entre mathématiques et informatique ne se fait pas attendre. La commission change de nature en accueillant des membres de différents horizons : mathématique, informatique, public, privé [1669] .

En substance, les auteurs affirment que le système traditionnel universitaire s'est perpétué mais "sans réellement s'adapter ni aux besoins de la recherche mathématique "industrielle", ni à l'accroissement énorme des tâches d'enseignement de masse par lesquelles ont été progressivement submergées les universités depuis dix ans [...]" [1670] .

Les analyses se font sans concession et un point en particulier est très en décalage par rapport à la période passée : la conception et l'orientation scientifique de la recherche.

[1669] Le président est Jacques-Louis Lions, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, spécialiste d'analyse numérique, théoricien de l'automatique et l'un des premiers de la communauté des mathématiques pures qui ait saisi l'importance de la révolution informatique. Notons qu'il dirige depuis 1967 le département "Informatique numérique" à l'IRIA, avant d'y créer le Laboria et de diriger l'institut en 1980. Outre d'autres universitaires de Paris et Province (dont J.P. Serre et L. Schwartz, spécialiste d'analyse) et quelques chercheurs du CNRS, on trouve Albert Amouyal (Chef du service de Calcul du CEA de Saclay, Centre d'Etudes Nucléaires), F. Genuys (Conseiller scientifique pour IBM à Paris), R. Lattes, directeur de la SEMA et d'autres "informaticiens".

[1670] Rapport de conjoncture du CNRS 1969, section 1, p. 11. Ces affirmations font écho à une précédente phrase : "[...] on peut dire que la recherche mathématique française, y compris la recherche appliquée qui se développe en dehors des facultés, est encore aujourd'hui (à la fin de 1968) presqu'entièrement dominée par le système traditionnel de la recherche universitaire [...] lequel se trouve à la fois dépassé par les besoins actuels de la recherche, et démantelé par la crise de l'Université.", ibid., p. 10.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Selon les auteurs, la recherche mathématique est trop souvent perçue comme imposée par la nécessité de publier pour faire carrière et pas assez comme participation au développement de la connaissance. L'orientation des recherches laisse à désirer, il existe des travaux disparates, des thèmes de recherche fabriqués artificiellement. En outre,

"[...] les orientations individuelles de recherche sont encore souvent déterminées sans coordination les unes avec les autres ou avec les problèmes que posent les utilisateurs des mathématiques ; en particulier le clivage entre mathématiques pures et mathématiques appliquées est encore très sensible et rares sont les mathématiciens purs qui se penchent sérieusement sur des problèmes à motivation appliquée [...]" [1671]

Le redécoupage de 1967 est d'ailleurs jugé bénéfique car cela permet de favoriser les relations entre ces disciplines à motivations appliquées et les recherches de mathématiques pures, "ce dont ces dernières ont grand besoin" [1672] .

Pour répondre à ces enjeux, les auteurs proposent d'orienter, en partie, les recherches en mathématiques [1673] . En cela, ils pensent à un encouragement à regrouper des efforts autour de sujets concrets, soit pour approfondir des domaines déjà défrichés soit à motivation appliquée. Ceci pourrait se combiner à une conception "saine" du travail de recherche mathématique :

"[…] rétablir ou renforcer le goût - et la valeur de la découverte - de la recherche à propos des problèmes les plus élémentaires et pas seulement des plus complexes ou des plus abstraits (les écoles américains et russes actuelles en donnent à ce sujet un remarquable exemple). Il importe de plus de noter que c'est le plus souvent à propos de l'étude de problèmes concrets que se font les découvertes importantes en mathématiques." [1674] ***.***

L'analyse contraste avec les précédents rapports.

Des grandes tendances

Quelques grandes tendances marquent le rapport de conjoncture. Tout d'abord, les **frontières disciplinaires et de la dichotomie pur / appliqué se troublent**. D'une certaine manière, la section 1 illustre la tendance générale. La classification du Comité National est stigmatisée. Il est, par exemple, difficile d'établir des frontières entre électronique, physique du solide, physique atomique, mais également entre physique théorique et applications. Les correspondances avec la réalité de la recherche sont remises en question.

En outre, la **simulation numérique trouve une vraie place en physique**. Ainsi, aux

[1671] ***Rapport de conjoncture du CNRS 1969, section 1, p. 12 (nous mettons en évidence).***

[1672] Ibid., p. 18

[1673] Les auteurs prennent la peine de préciser : "[…] dans la mentalité traditionnelle de l'Université française, c'est toujours avec réticence que les mathématiciens entendent parler d'orientation scientifique concernant leurs travaux" (Ibid., p. 21).

[1674] ***Ibid., p. 21.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

côtés des recherches de fondations rigoureuses, de développements formels, les auteurs de la section 2, très enthousiastes, insistent sur la Mécanique statistique.

"L'avènement des grands ordinateurs a ouvert pour la Mécanique Statistique, un domaine nouveau : on peut maintenant étudier numériquement, sans qu'on ait à faire d'approximations, les propriétés de systèmes denses de plusieurs milliers de particules. Ces calculs constituent de véritables 'expériences' souvent instructives. La venue à la Mécanique statistique d'un certain nombre d'hommes formés en mathématiques ou en théorie des champs est un phénomène heureux, qui pourrait s'amplifier, et tendre à dissiper le très néfaste et très répandu préjugé selon lequel il n'y aurait de physique théorique noble que dans le domaine des particules fondamentales. Ce regain d'intérêt pour la Mécanique statistique a déjà porté ses fruits, et l'on peut prévoir que la tendance physique mathématique continuera à mener à des résultats importants dans les années à venir. Le développement des calculs sur ordinateurs peut être considérable […] Les bornes de ce secteur d'études [les systèmes de longues molécules et applications en biologie] seront essentiellement fixées par les possibilités techniques des grandes calculatrices, pour lesquelles on peut prévoir des améliorations considérables, et aussi naturellement par les possibilités financières des laboratoires intéressés [...]" [1675]

Pour la commission de Mécanique, le facteur le plus évident d'évolution de la discipline est l'ordinateur, sans négliger les mathématiques :

"[…] l'utilisation systématique des progrès mathématiques et des moyens de calcul se généralise […] Le développement de l'analyse numérique et fonctionnelle rend au discontinu la primauté que lui avait ravie le progrès du calcul infinitésimal ; pour de nombreuses questions, la discrétisation fournit des solutions naturelles et directement utilisables. Par ailleurs, grâce à la puissance des calculatrices, aussi bien qu'au progrès des méthodes d'enregistrement simultané de données expérimentales nombreuses, on peut envisager de résoudre effectivement des problèmes à très grand nombre de paramètres ; le traitement des informations permet, par une analyse exhaustive, de vérifier si le phénomène réel est correctement représenté par telle ou telle théorie." [1676]

Ces deux longues citations permettent de saisir que l'ordinateur est en train de transformer la science. Il n'est pas qu'un simple calculateur : en Mécanique statistique, il est envisagé comme instrument pour faire des expériences sur des modèles mathématiques. L'ordinateur permet de se confronter à des **phénomènes plus "complexes"**, plus proches de la réalité. C'est la troisième tendance très générale observée dans le rapport de 1969. Ainsi, en physique théorique :

"Il serait souhaitable, et possible, de maintenir une répartition équilibrée des chercheurs entre les différentes grandes tendances, de poursuivre des travaux de mathématiques quasi-pures et aussi des calculs sur ordinateurs, d'étudier des modèles simples d'intérêt théorique et aussi les systèmes plus complexes qui se présentent dans la nature" [1677] ***.***

[1675] ***Rapport de conjoncture du CNRS 1969, section 2, p. 19 (nous mettons en évidence).***

[1676] ***Ibid., p. 12-13.***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Les instruments sont très perfectionnés [1678] , le traitement du signal est bien développé. Les moyens informatiques interviennent à tous ces niveaux et assurent cette recherche sur les phénomènes complexes. Le rapport aux applications n'est pas négligeable dans cette prise en compte. Le développement de nouveaux domaines de la physique des solides émergent dans cette perspective :

"- les structures amorphes : les verres, les liquides dont les implications technologiques sont évidentes ; - les macromolécules – les agrégats (cristaux liquides et savons) – les cristaux moléculaires ; ce domaine pourrait être une ouverture vers la biophysique." [1679]

Un premier bilan

Le rapport de 1969 est le fruit d'ouvertures sur l'industrie, le monde socio-économique et sur la société, y compris dans les mathématiques. Le contexte politique et social n'a pu qu'influencer le sens pris par les débats, surtout en terme d'ouverture sur la société. En un sens, il est associé à un changement dans la société française. Le rapport signe également un changement dans la science, avec l'instrument informatique, qui transforme les habitudes expérimentales, invite à de nouvelles pratiques et à la prise en compte des objets dans toute leur complexité. 1969 n'est en fait qu'une étape dans un changement de mentalité, plus évident dans les années 1970.

a. Les Sciences pour l'Ingénieur

La création du département des SPI confirme ces tendances et les institutionnalise partiellement. Le Comité National est découpé en de nouvelles sections et le département des Sciences Physiques pour l'Ingénieur apparaît : il inclut la section II (informatique, automatique, analyse des systèmes, traitement du signal), section III (électronique, électrotechnique, optique), section IV (Mécanique, énergétique). Le département Physique Nucléaire et Corpusculaire (PNC) est crée et le "reste" de la physique rejoint les mathématiques dans le département Mathématiques et Physique de Base (MPB). Cette organisation est le résultat de beaucoup de réflexions depuis 1969 et reflète un changement des mentalités. C'est une politique scientifique qui est en train de se construire dans les années 1970 au CNRS, touchant le département des SPI en première instance, avant d'avoir des répercussions plus globales sur l'institution.

Des réflexions de fond

Au fond, la réflexion sur la recherche entamée vers 1970 est articulée par une mise en question de la dichotomie fondamental / appliqué qui commence à apparaître trop rigide

[1677] ***Rapport de conjoncture du CNRS 1969, section 2, p. 19 (nous mettons en évidence).***

[1678] Les sections de Physique des solides (section 8) et d'Optique et physique moléculaire (section 7) consacrent une grande partie de leur rapport à ces questions. L'instrument, l'équipement mi-lourd, les microscopes électroniques, les systèmes cryogéniques et le projet de réacteur à haut flux franco-allemand (le futur Institut Laüe-Langevin) sont en discussion.

[1679] ***Ibid., p. 12***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

pour assurer un développement harmonieux de la recherche scientifique et de l'industrialisation [1680] . Les analyses produites grâce à la "recherche sur la recherche", à un niveau international, vont dans ce sens. Au cœur du problème se trouve le lien entre science et technique : il devient évident qu'il n'y a pas de relation linéaire de la science vers la technique, au contraire de ce qui était couramment pensé. Un objet technique est la somme de plusieurs petites inventions et un domaine technique fait appel à plusieurs domaines de recherche scientifique. Parler de "recherche appliquée" est donc trompeur et il est illusoire de placer la recherche technologique en prolongement de l'activité de recherche fondamentale (ce qui est d'ailleurs impossible en fait). La recherche technologique passe par un dialogue constant avec la recherche fondamentale, qui devient un réservoir de connaissances dans lequel on puise.

D'autres questions se font jour, notamment celle de la planification de la recherche : comment assurer à la fois le développement interne en autonomie de la science et faire profiter le monde socio-économique de cette recherche ? Plus généralement, les rapports entre la science et la société sont questionnés. Le Rapport de Conjoncture du Comité National de 1974, appuyé par le rapport de l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Economiques) de 1971, "Science, croissance et société", laisse filtrer un sentiment de crise au niveau de la société :

"Science et technologie ont été les outils privilégiés de la croissance. Mais cette croissance n'a pas été canalisée sur des objectifs sociaux clairement définis, et s'est effectuée d'une façon quelque peu anarchique et inégale. Les sociétés des pays industrialisés ont ainsi été envahies, submergées et bousculées par un développement technologique non orienté sur des finalités sociales, et ont subi en quelque sorte une croissance qu'elles n'ont pas su maîtriser" [1681] .

L'analyse développée met en avant cette absence de finalités sociales comme une des racines de la crise, qui se traduit aussi par la confusion entre développement technologique (et son déterminisme) et développement de la société. Les conséquences de cette crise ne doivent évidemment pas être le démantèlement de la recherche scientifique, mais selon les auteurs, il s'agit désormais de concilier recherche et société. Le modèle de développement scientifique et technique, hérité du XIXème siècle, est donc battu en brèche par ces analyses.

La mise en place des SPI au CNRS

Au sein du CNRS, sous l'impulsion de H. Curien (Directeur du CNRS, 1969-73) s'engage, en janvier 1972, une réflexion pour réformer le Comité National en vue de l'adapter à la nouvelle ambition d'"avoir désormais une politique de la recherche" et donc d'accepter une planification de la recherche [1682] . Le groupe de réflexion avance plusieurs

[1680] Pour davantage de détails, nous renvoyons à l'ouvrage de G. Ramunni, consacré à l'histoire des SPI : [RAMUNNI, G., 1995].

[1681] Rapport de conjoncture du CNRS 1974 p. 22 (mis en évidence dans le texte).

[1682] Il s'agit de redéfinir les missions du Comité National, dont la première devra être celle d'élaborer un Rapport de conjoncture base de définition d'une politique de la science au sein du CNRS.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

déterminants pour cette évolution. D'une part, il faut rompre avec l'ancienne classification du Comité National en disciplines cloisonnées. D'autre part, il ressort qu'à côté de la mission de production de connaissance le CNRS ne participe pas assez à l'"application" (valorisation, transfert au monde socio-économique) et à la diffusion de la connaissance.

En conséquence, le CNRS doit développer des collaborations avec d'autres organismes tout en déployant une activité propre. La nouvelle typologie en trois secteurs, "sciences d'analyse", "sciences d'action" et celui, intermédiaire, des "sciences pour l'ingénieur" viendrait remplacer le schéma classique obsolescent.

Les réformes de 1975 concrétisent ces propositions. L'action du CNRS doit désormais s'appuyer sur la science d'analyse et pour l'ingénieur. Cela traduit un changement de perception de l'activité de recherche : ce n'est plus une simple accumulation de connaissances, mais une perpétuelle "invention de nouvelles techniques, surtout de nouveaux modèles, *capables d'appréhender une réalité expérimentale toujours plus complexe*" [1683] . Au fond le problème est de créer une chaîne allant de la recherche fondamentale à la société (et inversement). Si bon nombre de propositions sont faites [1684] , la mise en place pratique, au niveau des laboratoires, est encore à faire en 1975.

Le Rapport de conjoncture 1974

La lecture du Rapport de conjoncture de 1974, nous renseigne sur les pratiques scientifiques en train de se mettre en place en "science de transfert". Outre que les SPI sont ouvertes sur la société, **elles incluent la prise en compte de problèmes toujours plus de complexes et utilisent l'informatique**. Ainsi :

"La mise au point par les scientifiques de programmes concernant les problèmes les plus complexes de la mécanique, de l'électrotechnique et l'automatique a contribué à rendre rapidement opérationnelles au niveau de l'ingénieur les méthodes élaborées dans les laboratoires" [1685] ***.***

L'informatique est également perçue comme un moyen de transfert rapide vers les ingénieurs. En outre, les collaborations interdisciplinaires se développent entre physiciens, chimistes et ingénieurs, pour réaliser des analyses grâce à des instruments conçus pendant les dix années précédentes et promouvoir une approche "de plus en plus réaliste de la physique des solides" [1686] .

[1683] [RAMUNNI, G., 1995], p. 36 (en italique dans le texte).

[1684] Le rapport de conjoncture 1974 abonde en suggestions et orientations : la formation à la recherche, par la recherche, le prolongement de l'effort en science d'analyse et surtout attirer vers les sciences pour l'ingénieur. Dans un contexte de crise énergétique et de morosité économique, les auteurs préconisent par exemple : "une approche des problèmes liés à la crise de croissance qui ont été évoqués plus haut, nécessite un stock énorme de connaissances au niveau justement des sciences de transfert. Il importe donc au premier chef de leur attribuer la place à laquelle elles doivent accéder et un effort essentiel doit être fait en ce sens pour motiver les chercheurs à s'orienter dans cette voie", Rapport de conjoncture du CNRS 1974, p. 25.

[1685] ***Rapport de conjoncture du CNRS 1974, p. 16.***

[1686] Rapport de conjoncture du CNRS 1974 p. 16.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Le rapport de 1974 est en ligne directe de celui de 1969, tout en proposant une vision plus large du système scientifique et technique. L'exemple de la Mécanique illustre ces continuités. La Mécanique des solides par exemple témoigne d'un esprit de "science de transfert" très prononcé. Le rapport rappelle également l'importance des théories mathématiques et demande le développement de mathématiques adaptées, en harmonie avec la Mécanique. L'informatique est vue comme un moyen de développement des recherches fondamentales et comme un moyen de faciliter le rapprochement entre théoriciens et ingénieurs. L'exemple du LMA (nouveau nom du CRP après 1974) nous permettra de détailler davantage ces relations entre Mécanique, mathématique, informatique, au cœur de l'évolution des SPI.

Le contexte de crise des années 1970 pousse à une redéfinition très large des pratiques scientifiques et des missions du CNRS. Elle s'est appuyée sur une analyse épistémologique et une réflexion du domaine des Sciences Humaines et Sociales, sur la science et le système de recherche français. En 1975, seuls quelques domaines de recherches sont concernés et le département MPB, nous le verrons, se tient à l'écart de la transformation. Mais du côté du département des SPI la mutation s'opère promptement et les conséquences ne se font pas attendre.

c. Les premières conséquences : l'exemple du LMA

Nous avons présenté la transition vers les SPI de manière très globale, à travers les décisions plénières du CNRS. Au niveau des laboratoires, le changement est beaucoup plus problématique et l'exemple du CRP de Vogel va nous montrer la variété des problèmes rencontrés. En un mot, le laboratoire, après un épisode de flottement et de décisions difficiles, abandonne quasiment entièrement la perspective de "dynamique théorique". Cependant, plutôt qu'un abandon il se produit une reconversion, au sens où le potentiel constitué par Vogel est adapté aux nouvelles exigences des SPI.

Vogel et la fin du Centre de Recherches en Physique

Pour comprendre la difficile transition il faut préciser les idées de Vogel relatives à la recherche scientifique et à son organisation. Avec lui, l'ancien laboratoire de Canac, très tourné vers les applications (militaires surtout), a intégré une recherche théorique non nécessairement orientée : Vogel offre des libertés aux scientifiques dans leurs sujets de recherche [1687] . Dès sa prise de fonction de directeur en 1958, la question de la part des recherches fondamentales et appliquées dans l'activité du laboratoire avait été posée. Vogel considère que le laboratoire doit se limiter à un éventuel prototype, si une industrialisation est envisagée [1688] . Ses idées restent bien articulées par la dichotomie fondamental / appliqué, et ainsi il y a les équipes de recherche et les équipes de service et d'essais [1689] . Son opposition aux idées de type SPI se laisse deviner. La "dynamique théorique" s'est épanouie dans ce cadre mais en dernier ressort, cette activité de

[1687] Communication personnelle de R. Bouc. Dans une certaine mesure, Vogel adhère à l'idée que l'activité scientifique se développe pour "l'honneur de l'esprit humain". On trouve ces affirmations dans une discussion avec L. Brillouin, lors de son passage au LMA en octobre 1966 (Archives du LMA).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

mathématiques développée grâce à Vogel aura un impact très favorable dans l'issue du processus.

Les discussions relatives aux SPI s'engagent très tôt, en 1971. Le laboratoire traverse une crise financière : les moyens sont insuffisants pour maintenir toutes les activités. Le comité de direction du 27 Mai 1971 cristallise l'opposition entre les idées de Vogel et les nouvelles tendances, incarnées par Robert Chabbal, qui a grandement participé à l'échafaudage des SPI au CNRS. Vogel se plie aux volontés de la direction de s'ouvrir aux industriels, par des contrats, et de réfléchir à la constitution d'équipes par sujet. Mais, s'il fait son possible, Vogel part à la retraite en 1973, sans avoir eu le temps de modifier les structures du laboratoire. Son successeur, Bernard Nayroles sera chargé de transformer le laboratoire, ce qu'il va faire radicalement et en profondeur.

B. Nayroles et le Laboratoire de Mécanique et Acoustique

Bernard Nayroles (né en 1937) est ingénieur de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures (1959), formé aux mathématiques et à la Mécanique [1690]. Il a une expérience de direction de laboratoire, et ajoutons, comme il le dit lui-même, un goût pour l'équilibre entre théorie, instrumentation et expérimentation [1691]. Ces points sont d'une grande importance pour cerner la période Nayroles (1973-1984).

Nayroles a été choisi pour réorganiser le laboratoire, qui change rapidement de nom pour LMA, Laboratoire de Mécanique et Acoustique [1692]. Le nouveau laboratoire doit, selon lui, avoir une organisation souple et une hiérarchie réduite aux deux chefs de département. Le principe qu'il veut mettre en place est celui de créer des équipes, pour une période de temps suffisante à l'exécution d'un projet [1693]. Les idées concordent avec

[1688] Archives LMA, Procès verbal du Conseil de direction 13 décembre 1958. Vogel se plaint des coûts pour le laboratoire : il affirme que l'argent versé par les demandeurs n'est pas attribué au laboratoire mais redistribué au CNRS (information que nous ne sommes pas parvenu à vérifier). Au conseil de direction, Vogel s'oppose aux idées de Néel et Coulomb qui considèrent qu'il faut emmener la recherche au point où on peut la passer à un industriel.

[1689] Le service d'essais est considéré comme un service public et doit aider à la "propagande (sic)" auprès des architectes, industriels et demandeurs d'études (Procès verbal du Comité de direction, 5 janvier 1960).

[1690] Nayroles est docteur ès Sciences Mathématiques en 1965 : sa spécialité en arrivant au LMA est la mécanique théorique des solides, mécanique des milieux continus. Son parcours institutionnel passe par un poste d'Attaché de Recherche au CNRS, par l'ONERA (pendant son service militaire), puis Chargé de Recherche et enfin Maître de Conférence à Poitiers (IUT). Il est le responsable de la création et du développement du Département de Génie Mécanique de l'IUT. Renseignements tirés d'un *curriculum vitae* de Nayroles, Archives du LMA.

[1691] Rapport d'Activité de recherche- Période 1977-1984, B. Nayroles (Archives du LMA). B. Nayroles a une conception très pragmatique de la recherche et se rapproche de l'idée selon laquelle une théorie est bonne si elle permet de faire des calculs numériques pour les confronter à l'expérience.

[1692] Au départ, il devait s'appeler LAM, mais Nayroles pense que l'acoustique est une partie de la mécanique et que LMA est donc plus approprié. Compte rendu du Conseil de laboratoire du 27 septembre 1973 (Archives du LMA).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

les souhaits émis par la direction du CNRS (celles de Chabbal notamment) et sont en rupture avec les anciennes pratiques du laboratoire.

Le LMA en 1975 a donc deux départements et 12 équipes [1694] . Parmi elles, l'équipe "Equations différentielles fonctionnelles et modèles de la mécanique" succède à la dynamique théorique. M. Jean et R. Bouc, anciens élèves de Vogel, se retrouvent dans l'équipe "Endommagement, fatigue et fissuration". L'ancien service d'élasticité et mathématiques appliquées devient "dynamique des structures" et "matériaux composites" et il se constitue une dernière équipe "Dynamique des systèmes continus".

Nayroles amène ses thèmes de recherche et cherche à développer les contacts avec les industriels. Cependant, durant les années 1970, le dialogue et les négociations en matière de SPI avec les industriels sont difficiles et témoignent de beaucoup de mécompréhensions réciproques [1695] . On serait tenté de dire que les idées de Nayroles cadrent d'emblée avec la recherche SPI et donnent le ton de la recherche SPI au LMA. Mais le bouleversement ne se limite pas à cela : ce sont aussi **les pratiques de recherche qui ont été modifiées**, notamment par l'avènement de l'informatique sous l'impulsion de Nayroles.

L'informatique au LMA

Vogel était parvenu à implanter des moyens de calcul au CRP, utilisés par les plus mathématiciens des chercheurs, en "dynamique théorique" notamment. Cependant, sans renouvellement, sans politique forte de développement, sans soutien particulier du CNRS, les moyens déployés sont très modestes. Nayroles est lui aussi partisan de développer l'informatique au laboratoire [1696] . Au prix de quelques sacrifices financiers, la décision est

[1693] "Je souhaiterais voir se constituer naturellement des équipes traitant un programme allant de la théorie la plus abstraite à l'expérience la plus concrète" (Compte rendu du Conseil de laboratoire, 27 septembre 1973, Archives du LMA). Nayroles juge que l'organisation précédente est trop rigide : associer un Maître de Recherche à un service, avec des moyens et un matériel propre rend difficile toute réorientation. Il conçoit l'organisation ainsi : le "but à atteindre est l'accomplissement d'un programme de recherche : pour chacun on constitue une équipe et l'existence de celle-ci se limite au temps nécessaire à son exécution." (Rapport au Comité de direction, 14 juin 1974, Archives du LMA). Le budget de fonctionnement et le matériel sont répartis globalement, les contrats de chaque équipe sont redistribués au laboratoire pour effacer les disparités.

[1694] Le département d'acoustique est organisé en cinq équipes, plus compactes que précédemment : théories acoustiques / acoustique appliquée / acoustique aérodynamique / acoustique musicale / propagation en milieu liquide. La mécanique compte sept équipes.

[1695] Avant les années 1980 les contrats privés sont en fait peu nombreux et sans comparaison avec la manne représentée par la DGRST et la DRME (Direction des Recherches et Moyens d'Essais), de loin les principaux pourvoyeurs de contrats du LMA. Par la suite, les contrats associant le secteur privé au cours des années 1980, seront le fait des "gros industriels" comme Renault ou Peugeot tant parce qu'ils sont bien dotés, que parce qu'ils sont demandeurs de cette recherche "fondamentale" pour l'ingénieur.

[1696] Il affirme lui-même avoir "un goût particulièrement prononcé pour les systèmes informatiques", et sa femme, qui travaille aussi au LMA, est informaticienne professionnelle (normalienne, agrégé de mathématiques, elle s'est tournée vers la mécanique puis l'informatique). (Lettre du 18 mai1978 de B. Nayroles à P. Stefanou, Compagine IBM France, Archives du LMA).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

prise en 1974 d'installer une station de calcul (MITRA 15) [1697] . Plusieurs facteurs expliquent ce choix.

Les modèles mathématiques employés en Mécanique sont toujours plus sophistiqués : pour en assurer la simulation, les calculateurs doivent être puissants. Cette situation n'est d'ailleurs pas limitée à la Mécanique, mais touche toute la physique à ce moment-là (par exemple en Mécanique statistique [1698]).

Au LMA, l'informatique est nécessaire pour deux autres activités : le contrôle d'expérience, le traitement de données (incluant la collecte automatisée des signaux et leur traitement) [1699] . En fait, ce sont les nécessités des SPI qui obligent à informatiser les recherches. Les développements des SPI et de l'informatique sont indissociables. En 1979, Nayroles en est parfaitement conscient et il oriente le LMA vers l'informatique en écartant les pratiques classiques : au comité de direction en Mai 1979, il est ainsi décidé d'abandonner l'équipement mécanique lourd au profit d'un investissement massif en informatique (couvrant 2/3 du budget d'équipement), ce qui est d'autant plus audacieux que cette fin des années 1970 est marquée par une nouvelle pénurie budgétaire. En quelques années, le laboratoire va développer son propre centre de calcul (avec l'achat d'un PDP 11-60). La transformation de l'activité et des pratiques du laboratoire est radicale.

La réorganisation des mathématiques appliquées

Les mathématiciens de l'ère Vogel et la "dynamique théorique" ont un rôle dans cette évolution. La culture mise en place par Vogel est un élément moteur de la double évolution des SPI et de l'informatique au laboratoire. Le point clé est le développement de la modélisation mathématique, lequel ne se fait pas sans mathématiciens de bon niveau, ni sans moyens de calculs et les capacités de les utiliser, ni sans perspectives d'application concrète. Le laboratoire en 1970 est la conjonction de tout cela.

Avant tout, l'importance du concret est ancrée dans l'esprit des chercheurs : on peut le voir comme culture du laboratoire depuis Canac et revivifiée par la politique Vogel en matière de recrutement et son choix d'intégrer des ingénieurs qui seront ensuite formés à la recherche. Ensuite, l'équipe de mathématiciens (dont L. Sideriadès, M. Jean, J. Argémi, R. Bouc ont fait partie) est une richesse inestimable pour le laboratoire. Ils maîtrisent les mathématiques des équations différentielles, théorie mathématique centrale pour la modélisation des phénomènes mécaniques et acoustiques. Il faut rappeler aussi que

[1697] Procès verbal du Conseil de laboratoire du 12 et 14 février 1975, Archives du LMA. Un mois après son entrée au laboratoire, Nayroles avait déjà choisi d'implanter un terminal connecté au Centre de Calcul du Pharo (Centre de Calcul Universitaire implanté à Marseille) (Procès verbal du Conseil de Laboratoire, 23 novembre 1973). L'objectif de l'installation du MITRA 15 est de concevoir des programmes finalisés au laboratoire, transmis ensuite au Pharo.

[1698] Comme il a été signalé dans le Rapport de conjoncture de 1969 par exemple. Cf. p. 671.

[1699] La thermographie infrarouge, technique d'analyse des résistances de matériaux, nécessite l'exploitation numérique d'images, du traitement du signal très poussé. Le projet A3 (Absorption Acoustique Active), projet phare en acoustique, mobilise beaucoup de traitement du signal et d'informatique.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Vogel a ce souci de maintenir le dialogue entre mathématiques, théories et expériences [1700] . Aux tentatives de "dynamique théorique", on peut ajouter les nouvelles orientations lancées en 1964 avec le service "Elasticité et mathématiques appliquées", l'élargissement des activités mathématiques aux vibrations des solides, systèmes évolutifs aléatoires, etc. En 1973, l'activité de mathématiques est donc très diversifiée.

Nayroles recycle le noyau construit par Vogel et le fait fructifier différemment. Il collabore avec Jean et Bouc sur un projet [1701] ; l'équipe "Equations différentielles fonctionnelles et modèles de la mécanique" est rapidement constituée. Il lance des idées de rapprochement des mathématiques appliquées universitaires [1702] . Plus fondamentalement, l'action de Nayroles consiste en un **recentrage et une réorganisation de l'activité de mathématique**.

C'est une réponse aux nouveaux enjeux posés, à un niveau très général en Mécanique, par la mise en place des SPI (recherches partiellement financées par des contrats) et le recours à l'informatique (simulation numérique des modèles mathématiques ici). Ces tendances se cristallisent au LMA dans les impératifs de concrétisation et du travail sur contrats, d'une part, dans la mathématisation croissante des problèmes (due à la place d'une modélisation mathématique elle-même de plus en plus centrale) ayant recours à des éléments de mathématiques très perfectionnés, d'autre part. Fondamentalement, ces deux tendances ne peuvent plus se concilier au **niveau individuel** : un chercheur ne peut plus mener une recherche en mathématique, assez abstraite, et se préoccuper d'une finalisation de sa recherche. Les questions de la Mécanique et des mathématiques appliquées sont devenues beaucoup trop complexes, en conséquence de la possibilité d'exploiter plus directement et rapidement les résultats mathématiques avec l'ordinateur. Le problème n'est plus de faire des calculs "à la main", des approximations des équations mathématiques, mais de donner des résultats mathématiques fins, nécessitant une formation mathématique avancée.

Les changements par rapport au temps de Vogel sont importants : il n'était pas question de contrats de recherche, les mathématiques appliquées restaient "abordables" par des ingénieurs [1703] ; la faiblesse des moyens de calcul obligeait les chercheurs à se cantonner à des modèles simples, exploitables.

[1700] Nous l'avons mis en perspective avec l'école de mécanique française (p. 654) et analysé plus en détail dans le chapitre 8, p. 551.

[1701] Nayroles lance ces deux spécialistes des équations différentielles sur un problème de mécanique des solides (progression des fissures dans les aubes de turbo-réacteurs, en collaboration avec J. Lemaitre à l'ONERA puis à l'ENSET). Notons aussi que c'est le problème mathématique qui est traité dans cette optique. (B. Nayroles, Bref exposé des travaux scientifiques, 24 Févier 1977, Archives du LMA).

[1702] Procès verbal du Comité de direction, 14 juin 1974, Archives du LMA. Il s'agit d'un projet soumis en 1974 dont nous ne connaissons pas l'issue.

[1703] Les interviews des chercheurs actuels montrent bien que les mathématiques sont devenues complexes au point qu'il faut s'y consacrer entièrement pour être au niveau.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Les SPI et l'informatique ont poussé les deux tendances à s'affirmer comme contradictoires à moins que l'organisation ne soit repensée : les mathématiques appliquées demandent un investissement total, difficilement compatible, au niveau d'un seul chercheur, avec une autre activité de recherche. Nayroles en est parfaitement conscient [1704] . La notion d'équipe "à la Nayroles" intégrant les activités de la plus théorique et mathématique à la plus concrète, devient une modalité presque inévitable. D'autant que les mathématiciens sont peu nombreux et que le laboratoire, face à ces nouveaux enjeux, ne peut pas se permettre de se disperser.

La fin de la dynamique théorique

L'ère Vogel aura préparé le terrain aux SPI et à l'informatique, malgré les réticences de Vogel lui-même. Sur le plus long terme, on peut voir cette continuité comme la persistance de l'école Pérès où Mécanique et mathématiques appliquées ont été associées. Nayroles, proche de Paul Germain, et Vogel sont issus de cette tradition française. Nayroles et Germain sont d'ailleurs les organisateurs du congrès de 1975, "Applications de l'analyse fonctionnelle aux problèmes de mécanique", destiné à susciter une rencontre entre mathématiciens et mécaniciens. Il est vrai qu'avec l'éclatement de la section 3 les liens entre les deux communautés se sont un peu distendus, chacun développant ses thématiques séparément. Quelques scientifiques ont maintenu la tendance initiale, tout en sachant l'adapter aux nouveaux enjeux des SPI.

Le sort de la "dynamique théorique" au LMA est scellé. Avec l'intégration sous forme d'équipe, il n'y a plus de place pour ces travaux trop théoriques, un peu désintéressés. La fin de ces recherches est le résultat des nécessités d'organiser la recherche, de faire des SPI et la conséquence du faible nombre de chercheurs en mathématiques appliquées : avec Vogel, la liberté de choix de chacun présidait aux recherches menées au CRP ; désormais, à moins de se marginaliser, chaque chercheur s'inscrit dans un projet. Dans les faits, un seul cas de marginalisation est constaté : celui de José Argémi. Elève de Vogel, il est devenu un spécialiste des mathématiques des systèmes dynamiques, s'intéresse à la théorie des catastrophes et se rapproche du "mathématicien pur". A la fin des années 1970 il s'intègrera dans une autre recherche, indépendante de celle réalisée au LMA.

La fin de la "dynamique théorique" correspond à l'avènement d'un nouveau régime pour la science, au CNRS : l'ère de la science "lourde", très organisée, où la division du travail est importante, et incarnée par les SPI. La "dynamique théorique" aura participé, non pas au développement du chaos, mais à un renouveau du LMA. On peut penser qu'il y a une certaine "logique" à cet abandon : dans le système des "sciences de transfert" et des "sciences d'analyse", la science du chaos, dans ses premiers temps, comme la "dynamique théorique", ont plus leur place au niveau de l'analyse que du transfert. Le CRP incarnait les deux types de recherches et s'est orienté vers les SPI, assez naturellement au regard de l'activité développée en Mécanique et en acoustique depuis

[1704] Bref exposé des travaux scientifiques, B. Nayroles, Archives du LMA. Il présente comment son travail, depuis sa thèse jusqu'à son arrivée au LMA, s'est construit sur des mathématiques de plus en plus sophistiquées et il fait part de son incapacité à mener de front cette recherche et les projets tels que A3.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

sa création.

d. L'évolution du LAAS

A Toulouse, le LAAS traverse le même épisode de conversion aux SPI. Naturellement, le contexte est différent, le laboratoire a ses spécificités mais on retrouve quelques grandes constantes. Les travaux de Mira et Gumowski, commencés en 1958, affrontent ce processus, dont l'issue n'est pas plus favorable qu'à la "dynamique théorique". Dans ce cas, Mira, le seul des deux affecté au LAAS, va simplement quitter le laboratoire pour poursuivre son activité. Les contraintes du nouveau régime de SPI sont à ce prix.

Le contexte

Le Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales (LAAS) est crée le 10 juillet 1967 selon une volonté commune du CNES et du CNRS, au sein du complexe Aérospatial à Toulouse. Il est construit en partie sur la base des équipes du Laboratoire de Génie Electrique (LGE) existant depuis 1957 à Toulouse. La direction du nouveau laboratoire propre est confiée à Jean Lagasse, professeur à l'université de Toulouse, et futur directeur du département des SPI (novembre 1975-février 1979).

Les missions du laboratoire sont initialement des études d'Automatique [1705] et leurs applications dans le domaine industriel (conduite des processus) et spatial (commande d'altitude notamment) [1706] . La recherche est organisée par groupes : théorie et simulation / systèmes logiques et techniques numériques / composants électroniques / systèmes et signaux [1707] . Les recherches entreprises au LAAS font donc appel aux domaines des mathématiques, de l'informatique, de la physique du solide et des sciences et techniques spatiales.

Dès l'installation du laboratoire la question des moyens informatiques est perçue comme déterminante. Les machines locales, incluant le Centre de Calcul, ne suffisant plus, il devient même vite "absolument nécessaire" au laboratoire de posséder une machine type IBM 1130 permettant la mise au point de programmes envoyés ensuite au CIRCE [1708] : un tel terminal est opérationnel en septembre 1971 et résout partiellement le problème [1709] . La pénurie de moyens informatiques n'est pas le souci au LAAS et c'est dans ce contexte que se développent les recherches de Mira et Gumowski, sur les récurrences non linéaires.

[1705] Ce qui inclut : théorie et simulation, traitement du signal, composants et fiabilité, électronique appliquée aux automatismes

[1706] Travaux et publications du LAAS-CNRS et de sa section associée le Laboratoire de Génie Electrique, année 1968. Archives du CNRS, G850001 Art 7.

[1707] Rapport au comité directeur, 11 octobre 1969, G 850001 Art 7, Archives du CNRS. Deux services complètent l'activité du LAAS : un service Mesures, Capteurs et Instrumentation, un autre Simulation et Traitement de l'Information.

[1708] Centre Inter-Régional de Calcul Electronique, installé en 1969, sur le site de l'Université d'Orsay.

[1709] Rapport au comité directeur, novembre 1971, G 850001 Art 7, Archives du CNRS.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Le contact avec les questions de dynamiques complexes est venu, au laboratoire de Génie Electrique en 1958, avec l'étude des circuits électriques. Gumowski arrive en octobre 1958, pour deux années à Toulouse ; c'est grâce à lui, qui a déjà des connaissances étendues en matière de non linéaire, et en collaboration avec Mira, que la recherche se développe. A partir de 1963, ce sont les récurrences linéaires (les applications bidimensionnelles non inversibles en premier lieu) dont s'occupe Mira, en rapport avec des questions pratiques : il s'agit de déterminer le domaine de perturbation qu'un système peut subir sans changer qualitativement ce qui correspond à déterminer les frontières des bassins de conditions initiales caractérisant ces dynamiques [1710]. D'après Mira, rétrospectivement, les premiers attracteurs étranges ont été obtenus dès 1968 sur des systèmes de récurrence. Il est hors de propos de présenter l'impressionnante quantité de résultats obtenus sur un thème finalement très peu abordé avant les années 1960 [1711]. Nous soulignerons simplement les caractéristiques des recherches, à la fois originales et proches de considérations contemporaines. Avant tout, les recherches au LGE-LAAS sont caractérisées par une abondance de simulations numériques et des motivations autant du domaine des mathématiques que de l'électronique. En un sens, elles sont proches des travaux d'Ulam sur les transformations non linéaires : le sujet est semblable, mais la perspective est moins celle de l'ergodicité et de la classification générale des transformations, que de développer des moyens d'analyse d'un comportement donné par un modèle. Par ailleurs, Gumowski a attiré l'attention du groupe sur les travaux de Hayashi et son groupe : on peut noter la proximité autant sur les méthodes qualitatives et quantitatives employées à Toulouse et à Kyoto, que sur le sujet de l'ingénierie électrique [1712]. Les travaux japonais sont réalisés sur ordinateur analogique à propos des équations différentielles, alors qu'à Toulouse ce sont des machines numériques, traitant des itérations discrètes.

Dans les années 1960, le groupe de Toulouse est donc en pointe dans son domaine et, avant 1975, les moyens de visualisation et d'analyse des phénomènes de type du chaos sont déjà en place. La meilleure illustration de la reconnaissance des travaux de Mira et Gumowski est le colloque organisé à Toulouse, en 1973 : "Transformations ponctuelles et leurs applications". Il fait partie de la série des colloques internationaux du CNRS (n° 229) et réunit les meilleurs spécialistes : on retrouve M. Hénon, J. Ford, B. Chirikov, M. Urabe, J.H. Bartlett parmi beaucoup d'autres. Le groupe de Toulouse est à son apogée et le colloque montre que leurs travaux sont très appréciés à l'étranger.

Vers les SPI

Malgré les libertés autorisées par le cadre du CNRS, les recherches de Mira et Gumowski s'inscrivent dans l'évolution générale du LAAS. Or le LAAS est en plein cœur de la mise

[1710] Mira détaille les principaux systèmes étudiés et les résultats de ces premières études dans [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], Paragraphe 3, p. 103-115.

[1711] Voir note précédente (n° 1710).

[1712] Hayashi et Gumowski ont eu une longue et amicale collaboration ([ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 97).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

en place des SPI et son directeur J. Lagasse est un des artisans du secteur SPI, au niveau national. D'une certaine manière, dès sa création, le LAAS a été un prototype des laboratoires SPI car ses missions couvraient une recherche en Automatique tant théorique qu'appliquée et ouverte sur le domaine spatial et économique. La vocation de laboratoire SPI est affirmée dès 1972, dans le rapport d'activité annuel qui souligne les efforts du laboratoire d'ouverture vers la communauté scientifique et le secteur économique, ainsi que l'équilibre entre "recherche spéculative" et "recherche d'adaptation". Cependant, cette vocation est aussi une construction dans le temps. Elle passe par des réorganisations successives. Le schéma d'organisation du laboratoire, d'abord calqué sur les missions, évolue en deux divisions "Automatique" et "Composants Electroniques" [1713], puis vers trois divisions de recherche "Systèmes complexes", "Structure des systèmes de commande automatique", "Composants électroniques" [1714].

Cette évolution et le changement de nom du laboratoire en novembre 1972 (pour devenir le Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes) indiquent une mutation de l'activité de recherche au sein du laboratoire. Par une conduite de recherche selon des opérations de recherche, le laboratoire décloisonne les divisions et s'assure une grande mobilité thématique. L'activité du laboratoire est marquée durant les années 1970, par des évolutions rapides de thématiques, au gré de l'intérêt suscité par tel ou tel résultat [1715]. L'effort d'ouverture se concrétise rapidement en contacts et contrats de recherches [1716].

La modélisation des systèmes "complexes" et le développement des moyens informatiques sont emblématiques de l'évolution du LAAS. Les scientifiques s'intéressent à la question de l'automatisation des systèmes complexes [1717]. Le meilleur exemple est celui de l'étude de régulation de trafic urbain dans la ville de Toulouse : le LAAS réalise un simulateur de trafic couplé à un calculateur numérique permettant d'expérimenter différentes politiques de commandes du trafic. Cette réalisation incarne le souci de traiter un problème tout à fait concret, de mettre au service de l'automatique les moyens

[1713] Rapport au comité directeur, novembre 1974, G 850001 Art 7, Archives du CNRS.

[1714] Rapport au comité directeur, novembre 1976, G 850001 Art 7, Archives du CNRS.

[1715] L'année 1975 voit l'arrêt de quatre opérations et la création de quatre nouvelles. Les opérations "stabilisation d'attitude des satellites déformables", "Propulsion électrique dans ses applications spatiales", "Réacteur en lit fluide", "Quadripolaires" sont stoppées. Les opérations "Modélisation des structures logiques", "Sécurité et diagnostic", "Filtrage et Estimation", "Transmission de données" sont crées. Rapport au comité directeur, novembre 1974, G 850001 Art 7, Archives du CNRS.

[1716] Pratiquement circonscrits aux CNES et DGRST, les contacts s'élargissent avec des ouvertures vers d'autres entreprises : SNCF, ALSTHOM, CGA (Compagnie Générale d'Automatique) ou organismes comme le CERN.

[1717] Les automaticiens proposent une définition : les systèmes complexes "font intervenir un grand nombre de variables sans qu'il soit toujours possible de les spécifier précisément a priori. La mesure des variables utilisées n'est jamais simple et l'expérimentation le plus souvent impossible. L'énergie proprement dite ne joue qu'un rôle secondaire au point de vue de leur fonctionnement. Ils ont un caractère stochastique marqué et souvent l'intervention humaine y joue un rôle fondamental", Rapport d'activité du CNRS 1974, p. 225.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

informatiques et de simulation. Aussi, les recherches de la division "Systèmes complexes" (crée en 1975) s'orientent tant vers la modélisation, la simulation stochastique que vers les problèmes de décomposition et stabilité des systèmes interconnectés, de grande dimension.

L'évolution globale du laboratoire va donc dans le sens de l'utilisation d'outils informatiques toujours plus puissants et adaptés au traitement de problèmes "réels", issus du monde socio-économique. Pour cela le LAAS est très représentatif des bouleversements entamés dans les années 1970.

1974, le départ de Mira

Dans ce nouveau contexte, il est facile de comprendre la position inconfortable des recherches sur les récurrences non linéaires, qui se revendiquent être autant des mathématiques que de l'électronique. Mira affirme lui-même que ses projets de développement de la thématique ont été refusés sous prétexte que cela n'intéresse personne [1718]. On peut comprendre qu'entre les recherches orientées par les contrats et la forte mobilité thématique, les recherches approfondies en matière de récurrence n'ont pas vraiment leur place.

Cependant, Mira le reconnaît, l'équipement et l'environnement étaient parfaitement appropriés pour ces recherches. Il a quitté le LAAS en 1974, pour passer deux ans au Brésil, un an après le grand succès du colloque international sur le sujet fétiche de Mira et Gumowski. A son retour Mira prend un poste "en face" du LAAS, à l'Université de Toulouse et à l'INSA. La situation lui assure plus de liberté [1719] de recherche et met un terme au développement de la question au LAAS ; avec Gumowski, ils constituent un "Groupe systèmes dynamiques non linéaires" à la Faculté des Sciences de Toulouse [1720].

e. Fin de la "préhistoire du chaos"

Avec le départ de Mira les efforts entretenus jusque là en plein cœur du CNRS, au sujet du non linéaire, d'un point de vue théorique et un peu désintéressé, se terminent pour ce qui rentre dans le cadre SPI. Par une petite ironie de l'histoire, deux rapports de l'année 1974 rendent hommage à ce qui est abandonné. Dans le Rapport de conjoncture de 1974, au chapitre sur les SPI, la Mécanique non linéaire et le travail au LMA sont soulignés [1721]. Le rapport d'activité du CNRS, consacré à la section "Electronique, Automatique, Informatique" est, quant à lui, illustré, en première page, par une magnifique

[1718] "So my projects of developing this topic and applications were systematically refused during the "prehistoric" times of "chaos", with the argument "nobody is interested by such a matter", which I frequently heard.", [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 188.

[1719] Plus de liberté, mais moins de moyens financiers, un environnement "neutre" et sans grand enthousiasme, d'après Mira : [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 188.

[1720] En parallèle, à l'INSA, ils mettent en place un "Groupe d'Etudes des systèmes non linéaires et applications", [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 96.

[1721] Rapport de Conjoncture de 1974, p. 93.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

figure construite par le groupe de Mira, représentant les "zones stochastiques" d'un système de récurrence (qu'on qualifiera d'attracteur étrange quelques temps après) [1722] .

"Zones stochastiques" dans une récurrence non linéaire

Rapport d'Activité du CNRS, 1974, p. 220.

Mais plutôt qu'un abandon, il s'agit d'une conversion d'un acquis dans le mouvement des SPI. Nous l'avons dit, le développement de ces considérations dans les années 1970 relève plus logiquement du département MPB que des SPI. Cependant, rien après cette fin précipitée, ne vient relayer directement ces travaux réalisés avant 1975, au CNRS.

En un sens, le CNRS qui avait pour prérogative de favoriser l'émergence de nouveaux champs d'activité n'aura pas rempli sa mission dans la "préhistoire du chaos". Son rôle a même été extrêmement limité. Le développement des nouvelles problématiques au sein du CNRS est plus le fruit d'actions individuelles, de personnalités attachées à leur indépendance et au choix de leurs thèmes de recherche, que d'une volonté de l'institution. Cependant cette liberté a de moins en moins de place dans une science organisée comme les Sciences pour l'Ingénieur. Le CNRS aura marqué l'évolution en ce sens, par la réorientation volontariste vers les SPI. A la fin des années 1970, cependant, nous verrons que quelques tentatives de redynamiser le champ se sont faites ressentir.

11.3. Au département des Mathématiques et Physique de Base (MPB), jusqu'en 1980

Par un concours de circonstances, le champ de recherche du chaos se constitue à une échelle internationale au moment où les SPI transforment le CNRS et délaissent les deux principaux récepteurs potentiels de ces développements. L'avènement du champ du chaos, évident à la fin des années 1970, interroge : le CNRS peut-il rester à la marge ?

[1722] On peut consulter également [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 121-4, pour des détails entourant la création de cette image en particulier.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Quelles décisions sont prises au sujet de recherches qu'il est possible de conduire dans le cadre du département MPB ?

Nous allons voir que l'action du CNRS, du MPB en l'occurrence, n'a que peu d'ampleur avant la fin des années 1980. Cette faiblesse doit être mise en perspective avec les difficultés de mettre en place une politique scientifique au CNRS. Si les concrétisations du rapport de 1969 ont été remarquables en matière de SPI, les promesses sont loin d'être tenues au MPB : les schémas de pensée "traditionnels" persistent, le manque d'interactions entre disciplines et un relatif isolement des recherches, au sein du MPB perdure. Le rapport de conjoncture de 1974 reflète déjà ces propensions au conservatisme.

a. Les sciences d'analyse dans le Rapport de conjoncture de 1974

Le rapport des "sciences d'analyse" montre deux tendances au niveau des développements les plus d'actualité : diversification et complexité [1723]. Il y a "le souci de décrire des structures réelles et leurs évolutions en précisant leurs déviations par rapport à des modèles simples" [1724]. Cependant, les modalités du développement scientifique et les relations avec les SPI restent figés dans les discours classiques. En effet, pour les auteurs, "la fertilisation croisée des divers domaines de la physique reste le moyen le plus sûr pour progresser" [1725] : cela ne témoigne pas de velléités d'ouverture de la physique. Il y a pourtant un souci affiché de communiquer avec les autres domaines de recherche, en particulier avec les SPI ; mais les modalités de la communication restent assez ambiguës. L'idée essentielle est que la physique conditionne le développement des autres disciplines : les SPI "se nourrissent continûment des progrès les plus récents de la physique" [1726]. Pour les autres disciplines telles que la chimie, les sciences de la vie, "les apports grandissants de la physique [...] en font un point clé des études interdisciplinaires". On peut s'interroger sur l'opportunité de ce dernier terme : s'agit-il d'établir un dialogue entre disciplines ou un transfert à sens unique de la physique vers

[1723] Au fil du rapport, il est souligné que la variété de systèmes étudiés (en physique nucléaire, atomique ou physique des milieux condensés, à propos des matériaux tels que les amorphes, paracristaux, composites, etc.) est le résultat de la mise en œuvre de nouveaux instruments et le perfectionnement de nouvelles techniques d'observation et de détection, dont les lasers, le rayonnement synchrotron, les techniques neutroniques notamment. L'informatique joue également un rôle de plus en plus évident.

[1724] Rapport de conjoncture du CNRS 1974, p. 9.

[1725] Selon les auteurs, cette conclusion est expliquée par l'"importante mutation" amorcée au sein de la physique : celle de la remarquable unité des concepts et des modèles dans la physique (théorique). Différents domaines de la physique ont pu par exemple croiser leurs approches et s'interféconder ou s'approprier des concepts et méthodes issus d'autres branches de la physique (utilisation de méthodes de théorie des champs pour comprendre les transitions de phase, par exemple). Rapport de conjoncture du CNRS 1974, p. 9.

[1726] La physique "commande, par ses concepts, toute la science des matériaux, elle marque profondément la science des systèmes et des télécommunications et enfin, une de ces grandes vocations n'est elle pas de trouver l'énergie dans la matière et de la libérer de cette dernière". Ibid.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

les SPI et autres disciplines ?

La dichotomie fondamental / appliqué marque encore profondément l'esprit des physiciens et la présentation des bilans selon ce schéma est évidente [1727] . On peut donc s'interroger sur l'impact véritable de la mise en place des SPI. Ce changement est-il enregistré comme une carte blanche au développement d'une recherche fondamentale, dont le transfert incombe désormais aux seules SPI ? Se pourrait-il que ces secteurs de la physique se soient contentés de remplacer les anciennes "sciences appliquées" par les nouvelles SPI dans leur vision de l'activité scientifique ? Le rapport de 1974 donne un état des lieux trop circonstancié pour y répondre, mais laisse beaucoup de doutes.

b. Le département MPB en 1976

Le département MPB, regroupant les "sciences d'analyse" en physique et mathématique, est constitué sur la base d'un reste du découpage de la physique en SPI et PNC. Dans les rapports d'activité nationaux, il s'agit des "autres domaines de la physique" ou de la "physique (hors physique nucléaire) (sic)" [1728] . Le regroupement se fait par défaut, sans véritable cohésion. Le rapprochement avec les mathématiques pour constituer le département MPB traduit le fait que le qualificatif "science d'analyse" désigne une activité précise (l'analyse) mais recouvre un champ (de disciplines et de spécialités) extensible à volonté. En un sens, le département MPB est dans la continuité de l'ancien système : sa mission d'analyse était celle attribuée antérieurement à la recherche CNRS, le redécoupage des sections au sein du MPB est un "changement dans la continuité" (des nouvelles sections reprenant partiellement les anciennes). Au niveau des mathématiques, la situation est on ne peut plus claire.

Les mathématiques

La même impression de statu quo domine. Les rapports d'activité entre 1969 et 1974 se répètent et reproduisent le schéma de pensée "classique". Après l'introduction traditionnelle, "l'activité de recherche mathématique française est brillante", les rapports servent des discours sur l'"ouverture" souhaitée par les mathématiques. Le CNRS est félicité pour son action en faveur des recrutements, le financement des colloques, etc. Tout se passe comme si le rapport de conjoncture de 1969 était déjà oublié. Le rapport de conjoncture de 1974 témoigne même d'un retour en arrière sur certaines positions de 1969. Le CNRS est renvoyé à son rôle traditionnel : assurer des services de documentation, un effort de traduction scientifique, les colloques [1729] . Un paragraphe est consacré aux aspects prospectifs, dont le message est simple : on ne peut et ne doit pas en faire, l'investissement doit être global [1730] .

[1727] C'est également la tonalité du rapport concernant la physique atomique et moléculaire d'une part (ibid., p.29), la physique des milieux condensés d'autre part (ibid., p.41).

[1728] Rapport d'activité du CNRS 1972, p. 150, Rapport d'activité du CNRS 1974, p. 111. Voir également les Rapport d'activité du CNRS 1973, Rapport de conjoncture du CNRS 1974.

[1729] Rapport de conjoncture du CNRS 1974, Mathématiques pures et méthodologie mathématique, p. 13.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Il faut ajouter qu'en 1974 les mathématiques (pures et méthodologie mathématique) et l'informatique (et moyens de calculs polyvalents) sont séparées. Deux intentions s'inscrivent cependant dans les tendances de ces années : le développement de "mathématiques numériques" (analyse numérique) est souhaité, discrètement et l'effort envisagé vers les autres disciplines qui ont des "besoins en mathématiques" est affiché. Il s'agit de faciliter la réception des problèmes et le travail des mathématiciens sur ces sujets, dont "l'intérêt est difficilement reconnu" en mathématiques [1731].

c. Une évolution "internalisante"

Les discours s'arrangent bien de la situation de confusion créée par la naissance des SPI. L'ouverture est affichée, dans toutes les disciplines, mais fondamentalement la notion de "science de transfert" est plutôt enregistrée comme une notion de "science appliquée". Plus exactement nous allons voir qu'au sein du MPB, en mathématiques comme en physique, jusqu'aux années 1980, les développements se replient sur des problématiques internes. D'une part, la "complexité" des objets de la physique est prise en compte ; d'autre part, cela se fait sans orientation de recherche, mais au gré des volontés. En conséquence, aucune orientation n'est fixée, ni au niveau général ni vers des thématiques émergentes comme le chaos ou la dynamique non linéaire.

"Complexité" et "réalité" en physique

De manière très parallèle à l'évolution du secteur SPI, la décennie 1970 est celle de l'arrivée dans le champ de la physique d'"analyse" de problèmes dits complexes, plus proches du réel, étudiés grâce aux ordinateurs et aux instruments nouveaux, dont les Très Grands Equipements. Précisons toutefois que la réalité évoquée avec les SPI inclut la réalité socio-économique, alors qu'ici elle désigne une "réalité physique". Cette réalité physique va des constituants élémentaires aux milieux condensés et la physique atomique et moléculaire se situe en quelque sorte à l'intermédiaire, "au niveau du dialogue entre l'élémentaire et le complexe" [1732]. Les objets de la physique se complexifient aux extrêmes de l'échelle et par multiplication des niveaux d'étude intermédiaires.

La matière condensée soumise à l'examen n'est plus celle des débuts de la physique du solide. Les cristaux simples, périodiques ont cédé la place à une nouvelle gamme de phénomènes et d'explications théoriques. Les recherches se portent sur des phases "mal ordonnées" ou intermédiaires comme les cristaux liquides, polymères et autres matériaux amorphes. Les transitions de phase et l'étude des phénomènes critiques sont des thèmes d'études de pointe en physique théorique : on retrouve les réflexes culturels des

[1730] Pour en résumer l'esprit : "Le libre cours de l'imagination des mathématiciens, et le désir de résoudre des conjectures qui sont nées des résultats déjà acquis, constituent pour l'essentiel, la seule prospective acceptable", Rapport de conjoncture du CNRS 1974, Mathématiques pures et méthodologie mathématique, p. 13.

[1731] Rapport de conjoncture du CNRS 1974, Mathématiques pures et méthodologie mathématique, p. 14.

[1732] Rapport d'activité 1974, Physique, p. 29.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

physiciens pour les questions de classification et d'unification des phénomènes critiques, parfois même regroupés sous la bannière "théorie des systèmes complexes" [1733] .

La Mécanique statistique

La Mécanique statistique constitue la théorie essentielle sous-tendant l'évolution vers les systèmes complexes. Elle est sollicitée au cœur des questions de la physique de la matière condensée et d'autres domaines comme l'hydrodynamique ou les plasmas. Il s'agit aussi d'une confirmation puisque le rapport de conjoncture de 1969 l'avait déjà mise en avant [1734] .

La Mécanique statistique est également très symbolique de l'évolution de la physique. Elle participe des rapprochements sur le plan des méthodes et des objets d'étude : par exemple pour les phénomènes hors équilibre (physique statistique et physique nucléaire) ou pour l'étude des polymères (Mécanique statistique et théorie des champs). Les approches traditionnelles de la complexité par la Mécanique statistique sont complétées, avec l'arrivée, dans les années 1980 des automates cellulaires, des théories des verres de spin, des modèles fractals ; les questions de systèmes dynamiques ou encore de systèmes désordonnés se développent en parallèle [1735] . En outre, la Mécanique statistique et les études des phénomènes complexes réclament toujours plus de moyens de calcul ; c'est d'ailleurs le principal handicap posé à son évolution car les besoins croissants sont loin d'être satisfaits, comme cela est signalé régulièrement [1736] .

La meilleure confirmation de cette percée de la complexité, associée à la Mécanique statistique, est sans doute la création en 1988 du Laboratoire de Physique Statistique (LPS), au sein de l'Ecole Normale Supérieure, en association avec le CNRS [1737] . Les thèmes sont focalisés sur l'étude des propriétés macroscopiques de systèmes désordonnés, fluides ou solides [1738] . Le dénominateur commun à ces recherches est

[1733] Rapport d'activité 1977-78, p. 198.

[1734] Au niveau des rapports sur la physique théorique, la mécanique statistique tend même à prendre la première place à la physique mathématique et à la relativité, par exemple dans le Rapport d'activité de 1972 concernant la physique théorique (aux pages 186-194).

[1735] Rapport d'activité 1985, Rapport de conjoncture 1984.

[1736] Dans le rapport de conjoncture de 1969, l'importance des moyens de simulation était déjà mis en avant. Dans celui de 1984, par exemple, le décalage entre les besoins et la disponibilité des machines est souligné (Rapport de conjoncture du CNRS 1984, p. 13).

[1737] Il s'agit d'un regroupement de chercheurs issus du groupe de Physique des solides de l'ENS, du Laboratoire de spectroscopie Hertzienne de l'ENS et de chercheurs d'autres horizons, notamment du CEA. Au départ, l'effectif rassemble 17 chercheurs CNRS pour 7 enseignants-chercheurs.

[1738] Réseau de neurones formels et automates cellulaires / études de problèmes à frontières libres / études théoriques en hydrodynamique / études expérimentales de systèmes non linéaires / étude de la croissance des cristaux.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

l'emploi de concepts avancés en Mécanique statistique. L'activité est aussi bien théorique, qu'expérimentale avec en plus "un abondant recours aux simulations numériques appliquées aussi bien à des systèmes réalistes qu'à des modèles simplifiés" [1739] .

En interne

En tout état de cause, les recherches au MPB, malgré les discours, restent majoritairement des développements "internes" jusque dans les années 1980. Ce sont avant tout de la physique pour les physiciens et des mathématiques pour mathématiciens. Les collaborations entre disciplines se font rarement. Les catégories mentales du fondamental et de l'appliqué sont encore très présentes et servent à justifier ces attitudes. Les raisonnements s'apparentent tout à fait aux développements qu'on peut trouver dans les années 1960 : la recherche fondamentale donnera des applications [1740] .

Encore en 1981 le MPB se définit comme un secteur où on fait de la recherche fondamentale, qui "n'exclut pas pour autant un intérêt de plus en plus marqué [...] pour des sujets présentant un caractère appliqué" [1741] . Les choix du département se font en conséquence, sur l'originalité et la qualité des projets de recherche.

Jusqu'au début des années 1980 cette position est une constante et seules quelques collaborations avec le secteur SPI se sont fait jour, comme l'activité concernant les matériaux [1742] . Ces collaborations sont à rapprocher de l'action du secteur SPI en direction des autres pour les inciter à ne pas se replier sur eux-mêmes [1743] . Le secteur SPI est au centre d'un réseau de relations impliquant le MPB sur quelques points, en plus des matériaux, comme la physique des lasers et des semi-conducteurs, notamment. Tout ceci laisse penser que la relation SPI-MPB, lorsqu'elle existe, n'est qu'un prolongement

[1739] Ces détails sont issus de La Lettre du MPB, Septembre-octobre 1988 qui consacre un dossier à ce laboratoire.

[1740] L'exemple de la présentation de synthèse du rapport d'activité 1977-78 en est symptomatique. Le raisonnement développé a pour but d'expliquer les spécificités, l'importance des recherches en physique et de montrer que la physique de base devrait avoir une place dans les actions prioritaires (ce qu'elle n'a pas eu les années précédentes). Ainsi, les recherches en physique ne "sont pas menées hors de tout contact avec le reste du monde. De nombreux concepts physiques trouvent un champ d'application plus vaste dans d'autres domaines de la science [...] De même les physiciens profitent des progrès des autres disciplines qui peuvent leur fournir des exemples de systèmes modèles particulièrement bien adaptés pour tester leurs idées [...] les physiciens sont à l'affût de développements technologiques : matériaux, instruments, et jouent, sans complaisance, un rôle de critique pour l'industrie nationale car ils sont très exigeant quant à la qualité et aux performances des appareillages" (p. 197).

[1741] Rapport d'activité 1981-82, p. 25.

[1742] En 1980 débute le programme "Science des matériaux", mis au point au CNRS et soutenu par la DGRST, qui entend développer des thèmes comme la plasticité, la physico-chimie des surfaces et interfaces, les milieux aléatoires macroscopiques, etc. Le programme est construit sur les relations entre la physique (de base et pour l'ingénieur) et la chimie : ici, la physique de la matière condensée s'inscrit naturellement dans ces thèmes et y participe activement. Le Rapport d'activité 1979-80 donne des détails sur la première année du programme au niveau du MPB.

[1743] [RAMUNNI, G., 1995], p. 90.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

d'une situation de recherches sur des thèmes auparavant non dissociés en analyse / transfert. Il ne semble pas y avoir de collaborations entièrement nouvelles. Mais cette situation n'est-elle pas naturelle dans le sens où il n'y a pas d'incitation particulière, plus précisément pas de politique générale de la physique au CNRS qui pourrait ouvrir sur de telles interactions ?

d. Le chaos au MPB et l'ATP sur les instabilités

En grande partie, la recherche au MPB se fait dans la continuité des années 1960. Comme lorsque les travaux de Poincaré étaient mis en exergue par la section 1 de mathématiques pures, le rapport de conjoncture de 1974 nous montre le suivi des recherches liées à la théorie ergodique des systèmes dynamiques : "Ruelle (avec Takens) a travaillé sur l'existence de mesures invariantes au voisinage d'un attracteur sous l'hypothèse A de Smale" [1744] . Cependant, cette remarque est intégrée au flux de résultats mathématiques importants, soulignés dans divers domaines des mathématiques, et non présentée comme une activité particulièrement stratégique.

Il y a une absence quasi totale d'orientation de la recherche mais quelques actions commencent à être entreprises : les ATP, "Action Thématique Programmée", mises en place en 1971. Les idées présidant au choix d'organiser des ATP sont arrêtées dès 1969 : elles doivent permettre de relier les recherches à une finalité définie et un axe de recherche déterminé, de prévoir sur plusieurs années les moyens suffisants et être un effort commun de réflexion pour des scientifiques appartenant *a priori* à des disciplines différentes [1745] . Les ATP s'inscrivent dans l'"esprit" SPI, avant la lettre, en droite ligne du constat de crise de 1969 ; il s'agit de décloisonner les recherches, de leur donner une certaine flexibilité.

Concernant le champ du chaos, ce sont deux actions qui vont avoir un effet conséquent : l'ATP "Instabilité et turbulence dans les fluides et les plasmas" et les ATP de Mathématiques. Ce second ensemble d'actions fait l'objet du paragraphe suivant.

La première [1746] est instituée de 1973 à 1976 et a un rôle déterminant dans la structuration de la communauté des spécialistes des instabilités en France ; l'hydrodynamique, thématique importante du champ du chaos, en profitera pleinement. Pierre-Gilles de Gennes est un des principaux instigateurs du projet. Avant l'ATP sur les instabilités, de Gennes s'occupe de physique des cristaux liquides, à l'Université d'Orsay. Une ATP lancée en 1971 ("Physique des fluides moléculaires" [1747]) a permis de

[1744] Rapport de conjoncture 1974, Mathématiques pures et méthodologie mathématique, p. 10.

[1745] Elles s'inspirent des actions concertées DGRST et se caractérisent par l'ouverture sur l'extérieur et le travail interdisciplinaire. Voir par exemple l'introduction du Rapport d'activité du CNRS de 1969 et [RAMUNNI, G., 1995], p. 41-42.

[1746] On peut consulter le passage de [AUBIN, D., 1998a] (p. 626-647) consacré à cette ATP et au rôle de P.G. de Gennes en particulier.

[1747] Elle est inséré dans l'objectif "Matériaux" et rentre dans le VIème plan. Voir le Rapport d'activité du CNRS 1971, p. 54, et [AUBIN, D., 1998a], p. 626-630.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

constituer ce groupe. De Gennes est le président du comité gérant l'ATP et il va créer et organiser un environnement de recherche interdisciplinaire. L'action de De Gennes est d'autant plus importante en rapport avec le champ du chaos qu'il s'oriente vers les nouvelles problématiques de la turbulence et de l'hydrodynamique. Les cristaux liquides sont, en fait, au carrefour des transitions de phase et des instabilités hydrodynamiques et progressivement, de Gennes va adopter et promouvoir les conceptions de D. Ruelle, poursuivies par P.C. Martin sur le démarrage de la turbulence [1748] .

C'est dans ce contexte que l'ATP sur les instabilités est constituée et mise en place en mai 1973. Suite aux désaccords entre les sections représentées (physique du solide, Mécanique, physique théorique, électronique) l'ATP est abandonnée en 1976. Cependant, outre les projets financés [1749] , l'ATP aura permis le financement de deux colloques importants en 1975 : celui d'Orsay ("Turbulence and the Navier-Stokes Equations") et de Dijon ("Hydrodynamique physique et instabilités") [1750] . Surtout, le rapprochement occasionné par ces recherches interdisciplinaires a conduit à faire connaître les conceptions de Ruelle et Takens et à fédérer une petite communauté, de laquelle émergera une partie des travaux français sur la turbulence et le chaos en hydrodynamique, avec P. Bergé, M. Dubois, P. Manneville et Y. Pomeau.

Cependant, avec cette ATP, le cadre institutionnel du CNRS est largement dépassé. Les recherches impliquent surtout des universitaires et des chercheurs du CEA (Commissariat à l'Energie Atomique). Le CNRS agit nationalement et joue son rôle de moteur de l'émergence de recherches novatrices. Les ATP sont très adaptées à cette action, comme l'exemple des ATP de mathématiques viendra le confirmer.

Enfin, on pressent déjà que le développement de la thématique du chaos est associé à l'émergence d'autres problématiques sur les systèmes "complexes". Ici il s'agit des cristaux liquides, des instabilités en hydrodynamique (cellules de Rayleigh-Bénard) et, du côté théorique, de la Mécanique statistique. Nous verrons l'importance de ce mouvement vers la complexité, esquissé dès la fin des années 1960, dans la place du champ de recherche du chaos au CNRS.

11.4. Le chaos et les ATP de mathématiques

Au niveau des recherches dans les laboratoires du CNRS, comme au niveau national, l'ATP lancée en 1977 sur le thème des "Mathématiques pour l'ingénieur" connaîtra un franc succès. Leur objectif est de développer les interactions entre les mathématiques et les autres disciplines. En ce sens, l'enjeu en rapport au champ du chaos est évident.

[1748] Pour quelques détails, nous renvoyons à [AUBIN, D., 1998a], p. 637-643.

[1749] 13 projets en 1974, 9 projets en 1975 (voir [AUBIN, D., 1998a], p. 644-646).

[1750] Ce sont deux des conférences que nous avons soulignées en rapport avec la constitution du champ du chaos (cf. p. 157). La première s'est déroulée les 12 et 13 juin 1975, et les actes sont publiés dans [TEMAM, R., 1976]. La seconde a eu lieu entre le 30 juin et le 4 juillet 1975. Les comptes rendus sont parus dans [MARTINET, A., 1976]. P.C. Martin y a fait sa communication relative aux scénarios de transition vers la turbulence (cf. chapitre 5, p. 319).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Cependant, l'action n'est pas précisément destinée à soutenir ce champ en émergence. Nous allons voir que les recherches sur le chaos s'insèrent dans les projets et bénéficient de sources de financements et de solutions salutaires, comme par exemple pour les travaux d'Argémi, au LMA. C'est également la première action à l'encontre des mathématiques qui se dessine avant la véritable réflexion engagée dans les années 1980.

a. La mise en place des ATP de mathématiques

La partition SPI-MPB a conduit à la fusion des mathématiques pures et appliquées dans une commission unique, alors que les mathématiques appliquées et l'informatique avaient été associées auparavant, induisant une certaine émulation. Les ATP imaginées en 1976 répondent originellement à la volonté de développer les interactions des mathématiques avec d'autres disciplines et à recréer les conditions d'une saine émulation pour les mathématiques appliquées qui sont perçues comme prioritaires. De manière très ambitieuse, le but de l'ATP "Mathématiques pour l'ingénieur" est de coupler les mathématiciens aux chercheurs des autres disciplines et leur fournir des moyens de calcul. L'appel d'offre d'octobre 1976 est très clair quant aux motivations du projet : "...l'approche par voie numérique de questions abordées auparavant uniquement de façon théorique a ouvert ou activé quantité de champs de recherche pour les mathématiciens" [1751] .

"Dans de nombreux domaines des sciences et des techniques, l'utilisateur dispose de méthodes numériques éprouvées s'appuyant sur des résultats théoriques rigoureux [...] Cette situation n'est cependant pas générale : si les exemples où les résultats mathématiques existants sont peu ou mal exploités dans la pratique deviennent de plus en plus rares, fréquents sont les cas où le praticien se trouve démuni devant un problème qui n'offre aucune approche numérique satisfaisante, faute d'avoir été analysé et soumis à la réflexion de mathématiciens compétents." [1752]

L'ATP se veut un projet pour remédier à cet état de fait. Le premier appel d'offre est axé avant tout sur les équations différentielles, ce qui s'explique par le "nombre et la diversité des disciplines où la modélisation mathématique conduit à des problèmes différentiels ou intégro-différentiels" [1753] . Ajoutons qu'il s'agit autant d'obtenir des résultats théoriques que de construire des méthodes numériques. La collaboration de mathématiciens avec d'autres scientifiques n'est pas un impératif, mais seulement hautement souhaitable.

Notons que l'action est assez modeste : 0,6 millions de Frs sont consacrés en 1977 aux ATP pour "accélérer" l'action. Mais **elle se développe et se perpétue en ATP "Applications des mathématiques", jusqu'en 1985**. La création en 1985 de l'ATP "Mathématiques, informatique et applications" [1754] en est une sorte de prolongement, avec

[1751] ATP, Appels d'offres – Octobre 1976 (Disponible dans les Archives du LMA).

[1752] Ibid.

[1753] Ibid.

[1754] Rapport d'activité 1985, p. 14.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

la particularité qu'elle est constituée en accord MPB-SPI. Signe du succès de l'opération 9 projets sont acceptés en 1977, déjà 26 en 1978 et il se trouve toujours 20 à 30 ATP fonctionnant entre 1980 et 1983 (28 ATP évaluées en 1981). Cela ne décompte pas les refus, dont nous n'avons malheureusement pas toutes les traces.

b. Les ATP sur le chaos

L'action, même si elle est mineure, correspond véritablement à un besoin et une demande générale pour des théories mathématiques. Au niveau des problématiques du chaos (et de la turbulence) les besoins sont importants et ces recherches profitent de cette aubaine. A travers les multiples projets financés, nous allons voir dans quelle mesure les ATP répondent aux attentes de ce champ de recherche, en France. Voici l'essentiel de la liste des ATP de 1977 à 1982 concernant le sujet.

• Le premier mouvement, en 1977, voit une ATP "Etude théorique et numérique des systèmes non linéaires", constituée de la fusion de trois sous projets : "Etude qualitative de l'évolution d'une classe de système dynamique" (dirigé par C. Bruter, Maître de Conférence à l'Université de Brest), "Modélisation non linéaire d'un système déformable" (dirigé par Carasso, Maître de Conférence en Mathématiques Appliquées à Saint-Étienne) et "Traitement spécifique des singularités" dont s'occupe I. Gumowski. De manière assez symbolique, le groupe de Mira et Gumowski participe à cette toute première ATP "Mathématique pour l'ingénieur" [1755] , en étant institutionnellement détaché du LAAS.

• Les attributions de 1978 sont plus étendues et donnent lieu à une multiplication des disciplines investies (physique, Mécanique, automatique, biophysique, géologie, astrophysique). Le thème du chaos est présent dans un projet intitulé "Systèmes dynamiques". Il réunit deux thématiques : "Stochasticité des systèmes dynamiques déterministes", organisée par Jean Coste (Directeur de Recherche au Laboratoire de Physique de la Matière Condensée (LPMC) à Nice) [1756] et "Etude numérique et analytique de systèmes non linéaires non intégrables" (projet géré par Froeschlé et Montes, à l'Observatoire de Nice) [1757] . Dans le premier cas, il s'agit du groupe de Coullet et Tresser [1758] , le second se développe au laboratoire dans lequel travaille M. Hénon.

• Le renouvellement de l'offre en 1979 trouvent des échos encore plus importants sur la thématique. En effet, l'appel d'offre est lancé sur le thème "Méthode de calcul ; Modélisation ; Phénomènes stochastiques" et l'essentiel des projets proposés sont orientés vers le non linéaire, la stochasticité dans les systèmes déterministes et quelques variantes. Pêle-mêle on cite [1759] : "Modélisation et résolution numérique de problèmes non linéaires" [1760] , conduit par P. Raviart, "Equations non linéaires : Méthodes de

[1755] Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.

[1756] Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.

[1757] Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.

[1758] Nous renvoyons au chapitre 5 et à nos analyses concernant les travaux de P. Coullet et C. Tresser (cf. p. 329).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

cheminement et stabilité" [1761] , "Aspects théoriques et numériques de la transition vers la turbulence et / ou la stochasticité" [1762] , dirigé par Gérard Iooss.

• Les projets engagés les années suivantes (1980-83 pour notre étude) privilégient les mêmes thématiques, en parfait accord avec les appels d'offre (l'ATP "Application des mathématiques pures" en 1981 est lancée sur les thèmes : théorie et application des bifurcations, problèmes stochastiques de la physique théorique, Equations aux dérivées partielles non linéaires de la physique mathématique). Concernant spécifiquement le thème du chaos, on peut citer quelques ATP ciblées :

* l'ATP proposée par José Argémi, du LMA, sur laquelle nous reviendrons.

* "Systèmes dynamiques – Analyse différentielle et application de la bifurcation" en 1982 (conduite par G. Iooss, à Nice)

* "Systèmes dynamiques modèles et transition vers la turbulence", en 1981, gérée par Arnéodo, Coullet et Tresser, au LPMC, à Nice.

* en 1982, "Stochasticité et exposants de Lyapounov des systèmes dynamiques à nombre variable de degrés de liberté – Applications à la mécanique céleste" (projet de J.C. Fernandez et C. Froeschlé à l'Observatoire de Nice) [1763] .

L'analyse de tous ces projets permet de dégager plusieurs tendances. Tout d'abord, il existe autour de 1980 un potentiel de recherche dispersé en France, sur le thème du chaos et du non linéaire. Dans plusieurs cas, comme l'observatoire de Nice, le groupe de Toulouse, le LMA, il ne s'agit pas de recherches de circonstances, mais le résultat d'une histoire. Pour d'autres, comme Coullet et Tresser, le financement, sans être décisif dans leurs recherches, arrive à point, quelques temps après leurs débuts sur l'universalité dans le chaos.

[1759] Parmi les demandes, nous en ajoutons une, dont nous ne savons pas si elle a abouti, "Etudes des phénomènes stochastiques". Il s'agit d'un projet dirigé par B. Souillard avec l'idée de constituer un "Groupe de travail mathématiciens-physiciens sur les phénomènes stochastiques" en collaboration avec le Centre de Physique Théorique, le Laboratoire de Physique des milieux ionisés de l'Ecole Polytechnique et le Laboratoire de Calcul des Probabilités de Paris VI. Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.

[1760] Cela inclut trois projets de P. Raviart (Laboratoire d'Analyse Numérique Paris VI), Cabannes (Laboratoire de Mécanique théorique, sur un projet : "Vibrations non linéaires avec frottement et avec obstacle"), Euvrard (Laboratoire d'Hydrothermodynamique, sur : "Mise au point d'un code de calcul pour les efforts hydrodynamiques s'exerçant sur les structures off-shore"). Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.

[1761] Associe J-M Lasry (CEREMADE, Université Paris IX), Mignot (Université Lille I) et Maître (Ecole Centrale de Lyon). Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.

[1762] Le projet met en collaboration plusieurs laboratoires : l'Equipe de mécaniciens théoriciens et numériciens du Laboratoire J.A. Dieudonné, Nice / l'Equipe de Mécanique Statistique de la Faculté des Sciences de Nice / l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille / l'Observatoire de Nice / le Laboratoire d'Aérothermie du CNRS. Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.

[1763] Ce sont quelques exemples pris dans les dossiers d'ATP, parmi les plus représentatifs de notre perspective. Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Sur les ATP en question, il faut aussi remarquer qu'une grosse partie des sommes engagées concerne l'achat de machines à calculer ou d'heures de calcul (sur CIRCE notamment) [1764] . Les ATP répondent manifestement à un manque sur ce point, dont on a vu qu'il est récurrent en France.

D'une manière générale, on peut affirmer que le thème du chaos a profité des ATP de mathématiques ; il était par excellence le sujet au carrefour des mathématiques, des simulations numériques et des autres disciplines. Pour ces recherches atypiques, les demandes de financement ont été importantes [1765] et il existait peu d'alternatives pour obtenir des crédits pour ce type de recherches.

Quelle importance l'action a-t-elle eu pour le champ du chaos en France ? Il est difficile de l'estimer autrement que très globalement, mais il est symptomatique que, mis à part les scientifiques de l'IHES (Ruelle et ses collaborateurs) et du CEA (Pomeau et Manneville, Bergé et Dubois) qui bénéficient de leur circuits de financement (et de l'ATP précédente sur les instabilités), les chercheurs investis dans le chaos ont tous profité de l'occasion.

Une ATP en marge du LMA : José Argémi et la neurophysiologie

Le projet élaboré par José Argémi, chercheur au LMA, est un bon exemple, assez symbolique, de l'utilisation de ces ATP. L'activité d'Argémi est caractérisée par un relatif isolement dans son laboratoire : la réorganisation (et certainement les choix de ce chercheur) n'a pas permis son intégration véritable à une équipe de recherches. C'est grâce à une collaboration extérieure avec un chercheur de l'Institut de Neuro-Physiologie (INP) sur la thématique du chaos et travaux connexes qu'une solution est trouvée. Ceci donne lieu à une ATP "Bifurcations de solutions périodiques pour des modèles neurophysiologiques" [1766] intégrée à l'appel d'offre "Théorie et applications de la bifurcation". Le projet est la suite donnée à une collaboration de quatre années entre le LMA et l'INP (entre J. Argémi et M. Gola) et implique désormais un groupe de mathématiciens plus large (de l'IRMA de Strasbourg notamment) et un électronicien.

Le projet est chargé d'histoire locale et empreint d'une démarche rappelant celle de Vogel. L'intérêt du projet est résumé par les auteurs :

"Ainsi, le mathématicien familiarisé avec la théorie des systèmes dynamiques apporte au neurophysiologiste, qui établit ses modèles à partir d'expériences et d'observations concrètes, des éléments prédictifs non négligeables, et à son tour, le neurophysiologiste fertilise la recherche mathématique en exhibant des

[1764] Un sondage dans l'ensemble des dossiers (et non pas uniquement les ATP sur le "chaos") nous le confirme.

[1765] Le budget par projet n'est pas très important (entre 5000 Frs et 200 000 Frs pour de très rares projets), mais la multiplication de ces faibles budgets dépasse le budget global fixé. L'attribution pour chaque dossier correspond à peu près à une réduction de 20% par rapport à ce qui est demandé (ce qui n'a rien d'étonnant en soi). Vu les sommes très faibles allouées globalement aux ATP de Mathématique, ce décalage, qui relève d'une simple question de partage, est tout à fait compréhensible.

[1766] Elle s'étale sur 2 ans, est financé à hauteur de 40 KF et se veut une recherche "à vocation pluridisciplinaire". Projet d'ATP présenté par J. Argémi, septembre 1980. Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

problèmes dont la solution nécessite l'élaboration de nouvelles méthodes d'approche." [1767]

Le bilan de 1983 reflète le relatif succès du projet et la pratique scientifique très particulière à l'œuvre dans ces travaux à base de théorie des systèmes dynamiques. Au niveau des résultats, il y a tout d'abord une petite surprise : "un résultat quelque peu inattendu a été la mise en évidence [...] de solutions qui deviennent chaotiques par doublement de période" [1768] . Quant à la démarche, elle est qualitative, globale et vise à prendre en compte la complexité du problème :

"[…] il s'agit non seulement de décrire un comportement complexe en termes d'interactions d'éléments simples, mais aussi de déterminer les éléments pertinents du modèle probatoire. Pour cela, l'aide d'un calculateur est indispensable mais le grand nombre de paramètres manipulés rend impossible une étude exhaustive de leurs influences respectives. L'appel à des méthodes qualitatives et plus globales est donc indispensable" [1769] ***.***

Par ailleurs, les chercheurs ont été amenés à développer des programmes d'intégration numérique pour leurs problèmes.

Aucun cadre institutionnel ni l'INP, ni le LMA n'est propice au développement d'une telle recherche. Les ATP ont donc facilité ces collaborations particulières, mais finalement communes au sujet du chaos. L'ATP est un relais financier, une aide pour élargir les collaborations [1770] , un soutien à des recherches marginalisées, sans issue institutionnelle.

b. Un bilan général sur les ATP de mathématiques

Un regard plus global sur les ATP et leur évolution laisse penser que l'impulsion n'a pas été réellement canalisée, qu'elle ne correspond pas à une politique volontariste et, en réalité, le financement des projets sur le chaos est une sorte de dérive par rapport à l'intention de 1976. En effet, l'évolution des thèmes et des appels d'offre passent des "Mathématiques pour l'Ingénieur" aux "Applications des mathématiques" voire "Applications des mathématiques pures" (selon les rapports consultés) vers 1979. Les ATP sont *a priori* ouvertes à toutes les sections mais les projets sont tous inscrits en MPB (sans doute parce qu'il s'agit avant tout de mathématiques). Le SPI n'est donc pas impliqué directement et peu de laboratoires SPI y participent : le LMA et le LAAS sont quasiment les seuls laboratoires SPI de l'ATP. Le LIMSI et quelques autres interviennent marginalement. En revanche, les laboratoires de mathématiques appliquées (CNRS et université) trustent les contrats, ce qui est en parfait accord avec les appels d'offres qui s'orientent plus naturellement vers les mathématiques appliquées et physique théorique

[1767] ***Plan de recherche de l'ATP, p. 3. Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.***

[1768] Rapport final de l'ATP, 28 février 1983, p. 3. Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.

[1769] ***Ibid., p. 1.***

[1770] L'aide financière permet les contacts et les rencontres avec R. Thom (qu'Argémi semble bien connaître), es déplacements pour exposer les résultats (à l'IHES et au Laboratoire de Mécanique Théorique à Paris). Rapport final de l'ATP, 28 février 1983. Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

que les SPI.

Comment interpréter l'abandon des "Mathématiques pour l'ingénieur" ? La majorité des projets venant des laboratoires de SPI s'attachent à la mise en œuvre de méthodes numériques plutôt que de "vraies" analyses mathématiques de modèles. Nous pouvons l'interpréter comme un déficit de mathématiques en SPI, ce à quoi l'ATP entendait répondre. Néanmoins, au final, les ATP n'ont pas servi à mobiliser des chercheurs dans ce sens. Ces actions ont été "récupérées" au profit des mathématiques et de projets un peu atypiques, pluridisciplinaires, mais en restant au sein du MPB ; les recherches sur le chaos en font partie. Comme si les mathématiques sont une affaire trop sérieuse pour être laissée aux SPI. Ceci témoigne de la faiblesse d'une action ATP qui n'est pas maîtrisée et oublie son objectif initial. Il nous semble que cela n'est pas sans rapport avec l'absence de politique scientifique en MPB, ni en physique, ni en mathématiques.

Cependant, le CNRS a su répondre à une demande forte des scientifiques et les financer des projets de mise en place de structures légères, souples et éphémères. L'interdisciplinarité, et ici plus spécifiquement une bidisciplinarité, si difficile à mettre en œuvre au CNRS bénéficie d'un soutien financier et institutionnel.

Enfin l'action ATP, intéressante sur le moment car elle vient pallier un manque précis, montre ses limites sur quelques années d'"utilisation". Le rapport de conjoncture 1989, avec un peu de recul, dresse un bilan global des ATP : les inconvénients sont les mêmes pour toutes les actions menées, à savoir qu'il s'agit d'une action ponctuelle mais pas sur le long terme et que rien ne les a ensuite relayées [1771] . Dans le cas des ATP de mathématiques, un contrat de 2 ans en appelle souvent un second, voire un troisième sur un sujet connexe [1772] : le CNRS reste dans ce cas une source de moyens pour recherches un peu marginales ou pour lesquelles il suffit d'une structure très légère. L'esprit ATP voudrait qu'un financement court lance une dynamique sur un sujet, mais dans la majorité des cas, la fin du financement marque la fin du projet de collaboration. Les recherches et les collaborations auraient dues être poursuivies dans le cadre des laboratoires, sur leur financement propre. Ce qui ne fait que renvoyer au problème initial : ces recherches interdisciplinaires, un peu atypiques, rentrent difficilement dans les programmes des laboratoires.

11.5. Les mathématiques dans les années 1980 : préliminaire à une politique scientifique

Les années 1970 sont marquées par une continuité avec les anciennes pratiques au

[1771] Nous renvoyons à notre analyse du Rapport de conjoncture 1989 et de la situation à la fin des années 1980, page 716.

[1772] On peut reprendre l'exemple précédent du projet d'Argémi-Gola. Une ATP "Stochasticité et exposants de Lyapounov des systèmes dynamiques à nombre variable de degré de liberté" est organisée par Froeschlé de janvier 1982 à décembre 1983, relayée par un autre projet en collaboration avec J.C. Fernandez (Observatoire de Nice) en 1983 (sur un thème proche : "Stochasticité et exposants de Lyapounov des systèmes dynamiques à nombre variable de degrés de liberté - Applications à la mécanique céleste"). Notons que Fernandez était lui-même organisateur d'une ATP (janvier 1981-juin 1982) "Perturbation forte d'ondes solitaires". Archives du CNRS, G-850117 Art 4-7. Plusieurs autres groupes ont jonglé avec ce type de financements.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

MPB : pas de priorités fixées, disciplinarisation au sein du MPB, peu d'ouverture vers les SPI et le monde socio-économique. Les années 1980 entament le renversement de la situation, qui se cristallise en 1989, dans le rapport de conjoncture, et dans les actions entreprises durant la décennie suivante. En anticipant sur la suite, on peut dire que l'interdisciplinarité entre au cœur des débats, avec les questions de simulations numériques et de la complexité : c'est dans ce contexte que le chaos entrera vraiment au CNRS. Nous allons voir tout d'abord qu'en arrière-plan de cette évolution, il y a un renforcement de la place du CNRS dans les mathématiques en France, une volonté d'ouverture plus franche et des débats à différents niveaux sur la place des mathématiques dans la recherche.

a. Le CNRS s'implique en mathématiques

En mathématiques, une vague priorité avait été accordée aux "mathématiques appliquées" dans les années 1970. Autour de 1980, les chercheurs CNRS ne représentent que 6% de l'ensemble des chercheurs en mathématique en France et le CNRS fait du saupoudrage de moyens [1773]. On en reste à une division entre mathématiques "pures" et appliquées, avec un développement de mathématiques très "internaliste" [1774]. Ce qui ne veut pas dire que l'activité est décadente : la médaille Fields est attribuée à Alain Connes en 1982 (Directeur de Recherche au CNRS). Mais elle n'est pas adaptée aux nouvelles exigences.

A ce moment là, fait unique depuis la création du CNRS, il apparaît que les recrutements en mathématiques au CNRS sont en hausse : 1983 marque une accélération (17 recrutements signalés), confirmée l'année suivante (10 recrutements supplémentaires). Plus globalement, sur la période 1980-97, les effectifs mathématiciens croissent régulièrement, avec deux légères inflexions en 1985 et 1991 [1775]. En 1987, le

[1773] Demandé par les mathématiciens, le CIRM (Centre International de Rencontres Mathématiques) à Marseille, est construit et inauguré en juin 1981 (Rapport d'activité du CNRS, 1981-82, p. 26). Le CNRS est également un pourvoyeur de fonds pour les multiples colloques internationaux (il suffit de consulter les Rapports d'activité du CNRS de 1974 à 1982). Voir aussi la note .

[1774] Il est d'ailleurs symptomatique de voir la médaille d'or du CNRS remise à Henri Cartan en 1976 (la précédente en mathématiques remonte à celle d'Hadamard en 1956). Son discours est une confirmation de toutes ces tendances : "C'est précisément le caractère imprévisible de la découverte en mathématique qui rend vain tout projet de planification de la recherche fondamentale dans ce domaine. Que les autorités responsables du CNRS veuillent bien ne pas s'offusquer d'une telle situation ! Le seul moyen de favoriser la recherche mathématique consiste à assurer aux chercheurs l'indispensable liberté d'esprit et la possibilité de contacts fréquents qui permettent l'échange des idées. Il n'y a pas de meilleure justification pour la création tant attendue du centre international de recherche de Luminy. […] La recherche mathématique peut et doit être considérée comme partie intégrante de la "recherche fondamentale", de cette recherche fondamentale dont on reconnaît à nouveau le rôle éminent parce qu'elle conditionne les applications techniques." (Quelques extraits du discours prononcé le 1er février 1977, Archives du CNRS).

[1775] Nous nous appuyons sur quelques chiffres, souvent globaux au MPB, et une Lettre du SPM (n° 31, Juillet-août 1997) dans laquelle est publié un très court dossier "L'évolution, depuis 30 ans, de la place des mathématiciens au CNRS, et du rôle du CNRS en mathématiques".

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

recrutement, même faible, a déjà permis de maintenir à flot l'"école française" (80% des mathématiciens de moins de 32 ans sont au CNRS, 80% des plus de 32 ans sont à l'université). Les effectifs évoluent pour deux raisons essentiellement : le recrutement universitaire est en perte de vitesse et le CNRS s'engage à combler les lacunes et à prendre des jeunes chercheurs [1776].

L'action du CNRS en mathématique se diversifie. Les financements de projets de toutes sortes [1777] sont devenus presque une servitude, le CNRS intervient ponctuellement au niveau de l'équipement informatique [1778].

Les années 80, avec le renforcement des mathématiques au CNRS, sont les années d'un apprentissage de l'ouverture, déjà marqué par les ATP de mathématiques. Un changement s'opère ensuite dans ces ATP : l'ATP "Mathématiques et biologie" est crée en 1984 [1779], "Mathématiques, informatique et applications", en 1985, en commun avec le SPI. Ces actions corroborent les discours fixant une priorité pour les mathématiques au CNRS. Cette priorité s'incarne par ailleurs dans la mise sur pied d'une prospective et d'une réflexion sur les mathématiques.

b. La prospective en mathématiques

L'idée est lancée en 1983 [1780] et se concrétise avec la rédaction d'un premier Rapport de

[1776] En suivant l'article précédent (cf. note précédente n° 1775), plusieurs paramètres rentrent en ligne de compte. D'abord le recrutement universitaire et les départs du CNRS vers l'université sont de plus en plus faibles. Ainsi, les années 1970 sont des années de "quasi-arrêt" du recrutement (en 1979, 10 mathématiciens sont recrutés pour 3500 au total !) ; le CNRS ne peut pas encore compenser ce manque dans le renouvellement de générations. En parallèle, les départs du CNRS se tarissent franchement (28 en 1972, 11 en 1975, 7 en 1981), avec une conséquence importante : les mathématiciens demandent à faire "carrière" au CNRS (ce qui était impensable auparavant). La population constituée surtout d'AR s'étoffe en CR et DR au cours des années 1970 (en 1982, ils dépassent en nombre les AR). Le CNRS ouvre alors peu de postes nouveaux avant les années 1980. Pour prendre le relais de l'université et faire face à un vieillissement de la population de chercheurs en mathématiques, le CNRS s'engage ensuite dans un recrutement important de jeunes chercheurs, qui explique la croissance des effectifs dans les années 1980.

[1777] En parallèle au CIRM (voir note 1773), il existe un projet de redonner à l'Institut Henri Poincaré (IHP) sa vocation de lieu de rencontre entre mathématiciens et physiciens théoriciens. Au niveau des colloques, on peut constater une présence croissante du MPB dans les questions de mathématiques : si de 1980 à 1985 peu de colloques internationaux du CNRS sont consacrés aux mathématiques, à la fin des années 1980 un grand nombre de réunions nationales ou internationales sont financées (ou co-financées) par le CNRS (par exemple, en 1987, 6 colloques sont financés par le MPB et 5 autres sont associés au MPB).

[1778] L'action entre dans le cadre des opérations "équipements mi-lourds" du MPB, à hauteur de un ou deux équipements par an sur la fin des années 1980. Par exemple, 380 000 Frs sont versés en 1987 pour l'équipement de l'Unité Associée 305, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, dirigée par G. Métivier (Lettre MPB n° 6, Juin –juillet 1987) ; 1,2 millions de Frs en 1989 (Lettre MPB n°10, Novembre-décembre 1989, p.11). La part de mini-informatique, pour les mathématiques comme pour la physique, augmentera sensiblement seulement dans les années 1990.

[1779] Rapport d'activité du CNRS 1984, p. 26.

[1780] On trouve une première trace de cette intention dans le Rapport d'activité du CNRS, 1983. Si on parle de prospective en mathématiques avant, c'est souvent pour souligner l'impossibilité de faire de la prospective.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Prospective en mathématique en 1985 [1781] . Le rapport est difficile à analyser parce qu'il semble pris entre de multiples tendances. Selon les spécialités, le texte est tout différent : au sujet de la "théorie des nombres", on reste dans le développement internalisant et l'analyse se limite à la conjoncture. L'ouverture est par contre manifeste sur des thèmes plus naturellement tournés vers l'extérieur comme la "physique théorique", "théorie des jeux et applications économiques" ou "les applications des mathématiques à la biologie".

Les propositions et les suggestions sont finalement peu originales et le monde académique domine le rapport à quelques exceptions près, mais qui font tout l'intérêt du document : les équations aux dérivées partielles et la Mécanique. A ce sujet, les propos sont les premiers échos véritables de ce qui avait été souligné en 1969. Les mathématiques dites appliquées sont à l'honneur dans cette partie, associées à l'ordinateur, la modélisation et la simulation numérique.

Ainsi "l'apparition, sur une grande échelle, des équations aux dérivées partielles dans le monde industriel est, bien entendu, avant tout une conséquence de l'évolution des ordinateurs" [1782] . L'usage grandissant de l'ordinateur est le résultat de la complexité des équations, de l'impossibilité d'en trouver des solutions explicites (même pour des équations simples) : ceci n'est que le reflet de questions industrielles elles-mêmes plus difficiles. Les investissements et la compétition dans différents domaines ont conduit à développer des activités de simulation, moins coûteuses, dont la réalisation nécessite le plus souvent une analyse mathématique. Et de tirer deux conclusions :

"[…] les problèmes de la physique macroscopique et en particulier ceux qui sont issus de préoccupations industrielles sont appelées à prendre une place de plus en plus grande dans les activités des mathématiciens appliqués (ou même purs) ; le rôle de ce type de problème devient comparable à celui tenu dans les années précédentes par la Physique Théorique. […] la séparation qui existe en France entre Mathématiques pures et appliquées, si elle permet de rédiger des rapports est par ailleurs grotesquement excessive ; le succès des EDP devrait susciter des expériences vers les applications dans bien d'autres domaines (Analyse de Fourier, Géométrie Différentielle et même Théorie des Nombres)." [1783]

En outre, les auteurs du chapitre de Mécanique (et météorologie) insistent sur le rôle moteur que joue la Mécanique dans les relations avec les "sciences appliquées à la technique". Incontestablement, l'"esprit SPI" a bien pénétré ce domaine qui présente la notion de transfert comme déterminante [1784] .

Ce rapport est en fait inscrit dans un mouvement plus général d'évolution des mathématiques et de débats sur la place des mathématiques dans la science, l'industrie

[1781] Il a été publié aux Editions du CNRS : [CNRS, 1985].

[1782] [CNRS, 1985], p. 50.

[1783] [CNRS, 1985], p. 52.

[1784] "Un difficile équilibre doit être trouvé entre la production, la demande et le transfert de connaissances" ce dernier point devant faire l'objet d'un effort particulier, par la rédaction de travaux de synthèse et des échanges bannissant tout pratique ésotérique. [CNRS, 1985], p. 55.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

et la société. L'exemple de réflexion le plus achevé est certainement le colloque de 1987, "Mathématiques à venir. Quels mathématiciens pour l'an 2000" [1785], organisé par la Société Mathématique de France et la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, qui se veut un colloque de prospective. Toutes les tendances analysées précédemment s'y retrouvent, largement plus développées, analysées et approfondies. Insistons rapidement sur quelques points. D'abord le faible poids donné à des exposés sur les mathématiques "pures" et, en comparaison, l'importance des autres branches de la science, de l'industrie et de la société. Ensuite les intervenants ne sont pas exclusivement des universitaires ou des chercheurs CNRS mais aussi des industriels (Elf Aquitaine, IBM, Thomson-CSF, etc.). Enfin, la modélisation et l'informatique sont véritablement au cœur des principales problématiques. On pourrait dire que ce colloque constitue un complément unique aux prospections établies par le Comité National, beaucoup plus contraint par un découpage en disciplines et spécialités.

c. Les mathématiques dans la recherche

Clairement, les discours sur les mathématiques s'écartent des invocations de la "brillante école française de mathématiques" : "Les mathématiques constituent l'un des thèmes privilégiés du CNRS et plus particulièrement les mathématiques appliquées, insuffisamment développées en France [...]" [1786]. Les mathématiques reviennent en force pour diverses raisons : parce qu'elles "apportent un appui considérable à l'effort de théorisation des autres disciplines" [1787], qu'elles sont un "enjeu pour les années à venir, qui fait l'objet d'une évolution ressentie mondialement" [1788]. Les raisons les plus profondes et les conséquences qui en seront tirées sont explicitées dans le rapport de conjoncture de 1989. Un avant-goût se trouve dans le Rapport d'activité 1988 du MPB :

"En mathématiques comme en physique, l'ouverture a été importante ces dernières années, par suite d'une avancée considérable vers la compréhension des systèmes complexes. Ce couplage important entre problèmes réels et recherche très fondamentale prépare les véritables innovations des années à venir, comme l'ont été, par exemple, les lasers et les matériaux magnétiques dans les années 60." [1789]

La place des mathématiques dans la recherche a donc évolué considérablement dans les années 1980, passant d'une activité plutôt académique à un "enjeu" véritable (rétrospectivement, la Mécanique apparaît un peu comme un signe avant-coureur de cette évolution). Autre façon de le dire, selon Daniel Thoulouze, directeur du MPB en 1988 :

[1785] "Mathématiques à venir", Bulletin de la SMF, tome 115, supplément 1987.

[1786] Rapport d'activité du CNRS 1984, p. 26.

[1787] Rapport d'activité du CNRS 1985, p. 2.

[1788] Rapport d'activité du CNRS 1986, p. 44.

[1789] ***Rapport d'activité du CNRS 1988 (nous mettons en évidence).***

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"Dans la plupart des pays industrialisés les mathématiques sont de plus en plus reconnues comme un élément stratégique de leur développement. Longtemps perçues comme un objet d'études en soi, voire comme un exercice intellectuel à l'usage exclusif d'initiés, perception due pour une large part à la manière dont elles sont trop souvent enseignées, elles apparaissent aujourd'hui autant comme science appliquée que comme science fondamentale." [1790]

La création d'un poste de directeur adjoint pour les mathématiques en 1988 semble véritablement entériner l'importance nouvelle de la recherche en mathématiques dans le système de recherche, au CNRS et au MPB [1791] : le premier adjoint est J.P. Ferrier [1792].

L'ensemble de ces réflexions sur la place des mathématiques se poursuit jusqu'en 1989. Le Rapport de conjoncture produit la même année est en quelque sorte une synthèse des leçons à tirer de la situation nouvelle, pour les questions de mathématiques. Déjà la forme du rapport de conjoncture de 1989, indique qu'il ne sera pas dans la lignée de ses prédécesseurs : la réflexion se construit sur la base de commissions transdisciplinaires dont une est consacrée aux mathématiques et intitulée "Les interactions des mathématiques".

d. Le domaine du chaos, années 1980

L'évolution souhaitée au niveau des mathématiques devrait trouver des résonances importantes avec la question du chaos, qui s'épanouit pleinement depuis 1980. Mais il est très difficile d'en évaluer l'impact au niveau de la production des résultats. Nous en avons suivi la trace grâce aux ATP de mathématiques, qui s'arrêtent en 1985 : il est certain que la demande ne s'est pas tarie, mais les ATP ont eu tendance à se systématiser, au point de perdre leur âme de moyen financier provisoire. Sur la période des années 1980, à l'heure actuelle, nous n'avons pu récolter que quelques indices.

Ils convergent pour laisser penser que la thématique trouve un écho favorable au MPB. En 1983, une priorité s'est dessinée avec l'ATP "Physique fondamentale". Elle est destinée à dynamiser la physique de base et aider au développement de thèmes spécifiques : la dynamique non linéaire fait partie des sujets retenus [1793]. Le thème du non linéaire fait partie de la politique de développement du MPB [1794] et les résultats en matière de systèmes dynamiques sont remarqués. Ils sont systématiquement présentés dans le chapitre "Physique théorique", sur un pied d'égalité avec les "grands"

[1790] ***Lettre MPB, Novembre-décembre 1988, p.2.***

[1791] Selon la Lettre MPB (n° 31) évoquée plus haut (note 1775), la création de ce poste serait aussi le résultat d'un conflit opposant la direction du département avec la commission de mathématique, laquelle formulerait des demandes de plus en plus agressives, du fait des problèmes des "carrières" des chercheurs en mathématiques au CNRS. La création du poste n'aurait pourtant rien changé à cette situation de crise.

[1792] Lettre MPB, Novembre-décembre 1988. Jean-Pierre Ferrier, professeur à Nancy depuis 1971 à la chaire de méthodes mathématiques de la physique, a un profil intéressant pour ce poste : "Ses activités d'enseignement l'ont conduit vers des secteurs moins traditionnels de l'université, comme l'enseignement pour les élèves-ingénieurs, où il a participé à une expérience originale de coopération entre mathématiciens et physiciens" (ibid.).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

thèmes classiques [1795] : physique des particules, physique nucléaire, physique statistique, etc. Le souci constant de présenter la recherche en systèmes dynamiques montre que le thème occupe une "vraie" place au MPB.

Les rapports de conjoncture donnent des compléments d'information. Dans le rapport de 1984 tout d'abord, la question des systèmes dynamiques fait l'objet de deux paragraphes séparés : un pour la conjoncture en mathématiques [1796], le second pour la physique théorique. Le rapport de physique ne regroupe pas tout dans un même paragraphe et s'attache à préciser quelles recherches ont recours à ce genre d'analyse : l'hydrodynamique physique et la turbulence sont les principales. Le rapport de prospective en mathématiques de 1985 en revanche, ne consacre pas de chapitre particulier sur le sujet des systèmes dynamiques. Ils ont leur place dans le chapitre "Physique théorique", mais l'état des lieux se révèle sans surprise. D'autres réflexions sont dispersées dans les différents chapitres et l'importance de la théorie ergodique par exemple est soulignée [1797].

Pour résumer la situation, il est pleinement reconnu que les systèmes dynamiques sont devenus un enjeu scientifique à inscrire entre les mathématiques et la physique. Cependant, aucune action incitative n'est décidée ni sur le thème, ni dans l'espoir de susciter des collaborations nouvelles ; les ATP ne sont pas remplacées par un système plus adéquat.

La réflexion menée sur les mathématiques au cours des années 1980 aura permis d'acquérir une conscience de l'importance des moyens de simulation numérique, des interactions entre disciplines, d'une ouverture nécessaire vers les SPI et la prise en compte de la complexité des objets en science et technique. D'une part le champ du chaos et des systèmes dynamique a bénéficié de la vague qui agite le CNRS, en discours tout au moins, et des quelques actions limitées comme les ATP. D'autre part, de manière plus discrète, le développement du chaos aura joué le rôle de révélateur de ces nouvelles pratiques : il a donné en particulier une certaine visibilité à l'interaction entre disciplines et avec les mathématiques.

11.6. Le rapport de conjoncture de 1989

[1793] Cette ATP s'inscrit dans une réflexion prospective initiée au début des années 1980 en physique. Les thèmes privilégiés ne se limitent pas au non linéaire : physique des matériaux, électronique et optoélectronique (on notera que ce sont des thématiques couplées aux SPI), physique du laser en sont d'autres exemples. Les sujets analysés de manière prospective sont l'optique et la fusion par confinement magnétique dans les plasmas.

[1794] Rapport d'activité du CNRS 1983, p. 28. Dans les grandes priorités du MPB en 1986 on trouve, à la suite des mathématiques pour les autres disciplines : "Développer l'étude théorique et expérimentale des systèmes dynamiques". Rapport d'activité du CNRS 1986, p. 30.

[1795] Des présentations synthétiques sont publiées dans les rapports d'activité du CNRS de 1983, 1984 et 1985.

[1796] Rapport de conjoncture du CNRS 1984, p. 10.

[1797] [CNRS, 1985], p. 84-85.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Une étude beaucoup plus étendue du CNRS des années 1980 montre que cette évolution traverse tout le MPB, et non pas seulement les mathématiques. Les mentalités ont évolué, les nouveaux enjeux de la recherche sont clairement perçus, la collaboration avec les SPI est plus suivie. L'exercice de prospective et l'esquisse d'une politique scientifique sont généralisés au MPB. Pour ne pas nous écarter de notre perspective principale, nous ne détaillerons pas davantage ce point.

En revanche pour éclairer la situation de la science en France et de ses enjeux en 1989, nous nous focaliserons sur le rapport de conjoncture de la même année. Il est également un formidable révélateur des évolutions de la science depuis les années 1970. Dans la perspective de comprendre la place acquise par le domaine du chaos à partir de 1989, il est utile de détailler les principales tendances explicitées dans le rapport.

a. Avant propos

A l'occasion du rapport de conjoncture, l'organisation a été repensée, en rapport avec la demande formulée au Comité National, par le MPB (et on doit pouvoir dire le CNRS dans son ensemble). Il s'agit de produire une analyse de la conjoncture et une réflexion prospective, autour d'un thème central, l'**interdisciplinarité**, justifié par le fait que : "la seule raison d'être d'un organisme de la taille du CNRS […] est de favoriser les relations entre celles-ci [les disciplines scientifiques] en maintenant une cohérence dans un contexte national et international" [1798] . L'introduction place le rapport effectivement sur cette voie, en rupture, déjà sur la forme, avec les précédents rapports : "Afin de sortir de ce cloisonnement, le CNRS a, pour la première fois, organisé la réflexion autour de thèmes interdisciplinaires" [1799] .

L'avant-propos en est un reflet et insiste sur quelques points clés dont l'interdisciplinarité, la modélisation et la simulation numérique, les mathématiques. Pour n'en citer qu'un exemple :

"Les rapports sur les interactions des mathématiques ou encore sur l'ordre et le chaos dans la matière montrent le caractère fructueux d'un dialogue permanent et renouvelé entre mathématiciens et chercheurs des sciences de la nature. Il n'est jusqu'au rapport sur la simulation et la formalisation appliquées aux phénomènes sociaux qui ne souligne la pertinence de la modélisation quant à l'éclairage de champs pourtant très variés" [1800] .

Les thèmes 2 ("Interaction des mathématiques") et 4 ("L'ordre et le chaos dans la matière") développent ces problématiques et nous permettront de comprendre l'évolution

[1798] Lettre MPB, Janvier-février 1989, p. 2.

[1799] Rapport de conjoncture 1989, p. 5. L'organisation des thèmes, pour ce qui touche aux mathématiques et à la physique est la suivante : Thème 1 "Univers, Noyaux, Particules", Thème 2 "Interactions des mathématiques", Thème 3 "De l'atome au matériau : propriétés, interactions", Thème 4 "L'ordre et le chaos dans la matière", Thème 5 " Surfaces, Interfaces, Dimensionnalité réduite", Thème 7 "Informatique, Robotique, Electronique, Optique", Thème 8 "Science et génie des matériaux", Thème 9 "Génie mécanique, acoustique, thermique, énergétique des procédés".

[1800] Rapport de conjoncture 1989, p. 9.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

du chaos au CNRS.

b. L'"Interaction des mathématiques"

L'ampleur de la réflexion est sans précédent dans les rapports de conjoncture en mathématiques. Le rapport commence par l'analyse des enjeux des mathématiques en 1989. Deux mots résument la situation : interaction, modélisation.

"En ce qui concerne les interactions des mathématiques avec les autres sciences, les années 80 sont marquées par l'utilisation de plus en plus répandue de modèles destinés à rendre compte de l'évolution de systèmes de plus en plus complexes, que ce soit dans la recherche fondamentale ou l'industrie, dans les sciences exactes, naturelles ou humaines. L'étude de ces modèles, qui s'expriment le plus souvent dans le langage mathématique, comporte en général plusieurs phases : étude de leur cohérence, existence de solutions, comportements des solutions, résolution ou simulation sur ordinateur. Toutes ou presque font appel à des concepts et à des outils mathématiques élaborés, souvent très spécialisés, dont certains sont d'introduction récente" [1801] ***.***

Conséquence de la pratique de modélisation-simulation, les enjeux industriels sont renouvelés. Si aux yeux des industriels les mathématiques sont longtemps restées limitées à une question de service (calcul) la situation a changé considérablement pendant la dernière décennie :

"Sous la pression de la compétition économique et des défis technologiques, les progrès de la modélisation et des méthodes numériques, et surtout l'augmentation considérable de la puissance des ordinateurs, ont changé la nature et la portée des mathématiques utilisées dans l'industrie [...] La modification des outils correspond à un changement de complexité des problèmes abordés ; alors qu'au XIXème siècle les modèles étaient unidimensionnels ou linéaires, les problèmes abordés maintenant sont multidimensionnels et non linéaires. En même temps que l'accent se déplaçait du faisable vers l'optimal, l'intérêt s'est déplacé des équations différentielles ordinaires aux équations aux dérivées partielles, des interpolations et extrapolations aux problèmes inverses. Cette sophistication est indispensable dans les contrôles de qualité, qui sont bien souvent la clef de la compétitivité d'une entreprise aujourd'hui" [1802] ***.***

La modélisation et l'expérimentation numérique présentent aussi l'avantage considérable d'économiser des expériences physiques trop coûteuses ou à la limite du possible. Enfin, le rapport aux problèmes industriels ne se comprend plus en terme d'application, mais de dialogue [1803]. La modélisation et la simulation sont au coeur des enjeux plus strictement scientifiques [1804].

[1801] ***Rapport de conjoncture 1989, p. 41 (nous mettons en évidence).***

[1802] ***Rapport de conjoncture 1989, p. 42 (nous mettons en évidence).***

[1803] "On peut dire que, de plus en plus, les besoins industriels influencent et motivent une partie de la recherche mathématique", ce qui explique la demande forte de mathématiciens dans l'industrie. (Rapport de conjoncture 1989, p. 42).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

La question des interactions des mathématiques est le noyau des problèmes évoqués. Le rapport avec ce qui précède est clair : la modélisation est un mode d'interaction, en forte croissance. Elle permet de donner des structures à des phénomènes, conduit à une économie de pensée puisqu'elle fournit dans les meilleurs cas des procédures de résolution. Aussi, "par les rapprochements qu'elle autorise entre modèles isomorphes, elle permet de faire passer l'intuition et la problématique d'un domaine dans un autre" [1805] .

L'importance des interactions est soulignée par des exemples historiques. De nombreux développements en mathématiques ont une origine dans des interactions : ondelettes [1806] , **systèmes dynamiques, fractales pour les plus récents**. La frontière entre mathématiques et d'autres disciplines est parfois très ténue, le dialogue est fructueux : **l'exemple donné est celui de Poincaré (Mécanique céleste), Lorenz (météorologie) et les mathématiques des systèmes dynamiques** [1807] .

L'autre versant du rapport traite de la création et du développement des interactions, très délicates, d'autant plus qu'il faut tenir compte des spécificités, des objectifs et de l'état d'esprit des mathématiciens [1808] .

Enfin la commission appelle le CNRS à prendre une part importante dans la mise en œuvre d'interactions, dans la suppression des limites entre domaines de recherches [1809] . Le CNRS mis à l'écart pendant de nombreuses années, hérite de cette tâche difficile.

[1804] Les mathématiques sont sollicitées pour de multiples problèmes. Les modèles théoriques font souvent appel à des mathématiques encore en cours de création et beaucoup de chercheurs utilisent des outils mathématiques pour le traitement de données expérimentales, l'estimation de paramètres. "La simulation numérique enfin, qui s'impose comme une approche fructueuse (souvent parallèle et complémentaire à l'expérimentation de laboratoire ou in situ) demande souvent des outils et techniques mathématiques d'un autre ordre (analyse numérique, méthodes stochastiques, algorithmique numérique...)", Rapport de conjoncture 1989, p. 43. On peut dire que tous les secteurs sont touchés et parmi eux distinguer les créateurs / utilisateurs de mathématiques (mécanique céleste, mécanique des milieux continus, etc.) et les nouveaux espaces venus à la modélisation mathématique intensive (écologie, biologie, chimie).

[1805] Les auteurs insistent aussi sur la place à donner aux mathématiques dans la pratique : "Une bonne modélisation demande donc des scientifiques très expérimentés en mathématiques pour pouvoir s'affranchir des problèmes techniques au moment de la conception de leur modèle" (Rapport de conjoncture 1989, p. 53). Ils mettent également en garde : les mathématiques sont une aide irremplaçable, mais ne peuvent se substituer à une réflexion sur le phénomène étudié.

[1806] Les ondelettes par exemple ont été le fruit de recherches d'ingénieurs, de physiciens théoriciens et appliqués, de spécialistes du traitement du signal et de mathématiciens, chacun apportant en quelque sorte sa compétence. (Rapport de conjoncture 1989, p. 52). Pour une histoire du traitement du signal, incluant ce procédé, nous renvoyons à [ESCUDIE, B., GAZANHES, C., TACHOIRE, H., TORRA, V., 2001].

[1807] Rapport de conjoncture 1989, p. 50. Comme souvent, les exemples donnés ont été un peu simplifiés. Le fait que les trois exemples proviennent des idées historiques sur le "chaos" nous paraît tout de même très significatif.

[1809] "[…] il peut et devrait avoir un rôle moteur pour favoriser ses interactions. Il ne faut pas que son faible effectif actuel en mathématiques, notamment en cadres A, se transforme en un handicap durable pour le rôle à jouer qui devrait être le sien dans le développement de ces interactions.", Rapport de conjoncture 1989, p. 59.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

D'une certaine manière, c'est une reconnaissance du renforcement des mathématiques au CNRS, qui a déjà sauvé les mathématiques universitaires de l'engorgement [1810]. Mais, vu la faiblesse persistante du CNRS par rapport à l'Université, en mathématiques, on peut se demander si la tâche n'est pas démesurée [1811].

La comparaison avec le rapport de conjoncture 1969 montre le chemin parcouru par les mathématiques depuis les années 1970. Il est un aboutissement et un héritage des années 1980. Au centre, le rôle déjà ancien de la modélisation mathématique s'est considérablement étendu poussant les mathématiques vers plus de mathématiques appliquées et à développer des interactions avec quasiment tous les domaines de recherche scientifique. La commission résume en conclusion, l'évolution accomplie par les mathématiciens : "pour répondre aux besoins industriels et aux demandes des autres disciplines, les mathématiciens sont sortis de leur isolement" [1812]. L'ouverture, les enjeux industriels, la mise à mal de la dichotomie pur / appliqué et la redéfinition des pratiques scientifiques ont été les facteurs essentiels de cette évolution. Le développement des SPI a suivi des déterminants équivalents et probablement indiqué la voie pour le développement d'une partie des mathématiques. Le domaine du chaos, tel qu'il s'est développé au CNRS a participé à la reconnaissance de ces enjeux et profite alors de la dynamique institutionnelle établie. Le thème 4, "L'ordre et le chaos dans la matière", nous en révèle davantage à ce sujet.

c. "L'ordre et le chaos dans la matière"

Sous cet intitulé sont regroupés différentes problématiques : oscillations non linéaires, turbulence, rhéologie des matériaux, dynamique du climat, plasmas chauds, etc. L'enjeu est la compréhension des systèmes dont l'évolution n'est plus simplement stationnaire ou périodique, ni décrit par la limite thermodynamique. Le cœur de la problématique est la **complexité**. L'interdisciplinarité, l'informatique et les mathématiques sont, là encore, les

[1808] Les difficultés de communications entre "cultures" différentes sont bien connues, ainsi que le problème plus général des instances d'évaluation. Mais le rapport critique les mathématiciens, de manière globale. Leur nombre limité et leur volonté de publier des résultats "profonds" ne créent pas des conditions favorables aux interactions. Les mathématiciens "se suffisent du déroulement harmonieux d'une théorie, ils sont moins sensibles par formation à la notion de paramètre pertinent et aux limites de la modélisation" (Rapport de conjoncture 1989, p. 51). Ils sont "plus sensibles à la difficulté du résultat qu'à son utilité" (Ibid.). Le rapport est assez sévère à leur égard, ajoutant que la distinction entre mathématiques appliquées et mathématiques pures est "plus une question d'état d'esprit que d'applicabilité réelle des résultats ou de qualification des outils de travail" (Ibid.).

[1810] Le rapport souligne la création de laboratoires non-universitaires (Ecole Polytechnique, ENS Paris et Lyon), avec l'aide du CNRS qui a permis l'ouverture vers les applications industrielles et une réévaluation de la politique en mathématiques. Ce qui fait du CNRS "une force d'initiation, de proposition" malgré un trop faible apport financier et un nombre encore réduit de chercheurs. (Rapport de conjoncture 1989, p. 56.). Dans cette même idée, il est "indispensable de maintenir un recrutement important de mathématiciens au CNRS (notamment des jeunes)" (ibid., p. 60).

[1811] D'autant plus que l'université gère la formation, un point finalement crucial dans les changements à opérer et qui n'est que très peu discuté.

[1812] Rapport de conjoncture 1989, p. 60.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

lignes de forces du champ. L'interdisciplinarité est au centre même des recherches car

l'"enjeu théorique est qu'un nombre restreint de concepts et de méthodes ait valeur universelle et permette d'unifier des domaines scientifiques a priori très différents. Les vingt dernières années ont vu ainsi se créer des notions et un langage communs en dépit de la tendance générale à l'hyper-spécialisation" [1813] **.**

En outre, des problèmes équivalents, d'instabilité, de chaos et de turbulence, se retrouvent dans de nombreux domaines. Les mathématiques se trouvent en filigrane du discours car de nombreux concepts mathématiques constituent des outils indispensables à ce type de recherches et participent à l'unification soulignée. Le plus cité dans le rapport est la notion de fractale, très à la mode à cette époque, il faut le souligner.

Au regard du développement du chaos au CNRS, le rapport est particulièrement intéressant. L'unification des domaines, décrite en 1989, permet en fait d'intégrer le champ du chaos dans un domaine beaucoup plus large, qui porte le titre de la section. Des aspects conceptuels soutiennent cette idée d'unification mais en sus, un long historique vient appuyer ces thèses. De manière succincte, quelques grands mouvements théoriques et conceptuels sont présentés, ainsi que leurs différents rapprochements : les rapports entre la Mécanique statistique et l'hydrodynamique, les polymères, les transitions de phase ; la thermodynamique des processus irréversibles ; les fractales permettant la description des structures désordonnées, etc. L'histoire du chaos a sa place. Elle est sujette à quelques déformations classiques [1814] et des affirmations bien senties. Mais, de manière générale, le point de vue est très rétrospectif : cet historique est destiné à construire un noyau, une culture commune pour le thème 4 et le procédé fonctionne de manière remarquable, en écrasant la réalité et la complexité de l'histoire [1815] .

En revanche, la place de l'ordinateur dans l'histoire et dans l'activité de 1989, est bien mise en avant. L'informatique a été au cœur du cheminement depuis les années 1970 [1816] :

"l'apparition des super-ordinateurs qui ont rendu possibles un certain nombre de calculs (exposants critiques de la conductivité) et ouvert la voie à l'expérimentation sur des systèmes modèles, produits de la réflexion théorique (réseau de neurones) ou de la simplification de situations réelles souvent inaccessibles à l'expérimentation de laboratoire (écoulements géophysiques et

[1813] ***Rapport de conjoncture 1989, p. 77.***

[1814] Au sujet de Lorenz et Hénon par exemple. L'ouvrage de Gleick (La théorie du chaos : vers une nouvelle science) est paru en 1987, traduit en français en 1989. Nous pensons que la concordance avec les partis pris de Gleick n'est pas un hasard. Les deux "historiques" ont une source commune puisque Gleick a écrit son livre à partir des opinions et de ses interviews de scientifiques. Inspiré ou non par l'ouvrage très populaire de Gleick, le rapport en possède quelques traits.

[1815] Comme dans bon nombre d'historiques, on trouve les "quelques précurseurs de génie" (Rapport de conjoncture 1989, p. 79) dont Poincaré, Boltzmann, Rayleigh, Taylor, etc.

[1816] On peut ajouter la remarque au sujet des recherches de Lorenz et Hénon : "Ces deux travaux précurseurs qui ont stimulé nombre de recherches théoriques par la suite sont aussi des produits d'une démarche, l'expérimentation numérique, pratiquement inconnue au début des années 60.", Rapport de conjoncture 1989, p. 80.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

astrophysiques)" [1817]

En outre, on peut signaler que dans le domaine "la possibilité de visualiser graphiquement les comportements des systèmes simulés s'est avérée à la fois un outil d'analyse très efficace et un stimulant très puissant de la réflexion qui a engendré un retour à la pensée géométrique" [1818]. L'importance de l'informatique est manifeste tout au long du rapport et laisse comprendre que les équipements informatiques sont "insuffisamment répandus" ; ils doivent bénéficier d'un soutien pour ne pas être "défavorisés par rapport aux concurrents" [1819].

Par ailleurs, la commission met en avant la spécificité française. D'une part, l'importance des mathématiques est une "marque française" dans cette activité [1820]. D'autre part, le rapport souligne que les idées récentes sur le chaos n'ont, par exemple, pas pénétré de façon appréciable le milieu industriel, contrairement à ce qui se passe aux Etats-Unis.

Au niveau de la situation de 1989, il nous reste à souligner un point. Diverses propositions sont avancées pour stimuler le domaine, mais le champ présente l'inconvénient de la jeunesse : il évolue encore très rapidement, ce qui écarte pour les auteurs, l'idée de créer des grandes structures, peu adaptées. C'est ce qui explique le regret [1821] des actions de type ATP : elles ont joué un rôle dynamique important (ce qu'on pourrait relier au fait que le "développement pluridisciplinaire très fécond du domaine s'est fait principalement sur des bases personnelles en dehors de cadres structuraux préexistants" [1822]). Le CNRS est donc appelé à développer des financements à moyen terme de petites équipes, des financements légers à l'affût des développements de la recherche de pointe [1823].

d. Le champ du chaos en 1989

Dans les discours de 1989, le domaine du chaos accède à une pleine reconnaissance. En

[1817] ***Rapport de conjoncture 1989, p. 80.***

[1818] Ibid., p. 80-81.

[1819] Ibid., p. 89.

[1820] Les auteurs expliquent que si le domaine "s'est tout particulièrement développé en France, c'est en partie grâce à la nature théorique et mathématique (qui n'a donc pas que des inconvénients) de la formation scolaire et universitaire des chercheurs qui a facilité l'assimilation des concepts nouveaux", Rapport de conjoncture 1989, p. 86.

[1821] D'après la commission, les Groupements de Recherche remplissent leur rôle pluridisciplinaire, "mais ne sauraient remplacer pas les ATP". Ibid., p. 88.

[1822] Ibid., p. 88.

[1823] Ibid., p. 88. Peu d'autres choses sont réclamées au CNRS si ce n'est d'assurer la transmission et le regroupement d'information (vis-à-vis des programmes internationaux) et de tenter d'alléger les "pesanteurs" et "rigidités" dues à la gestion publique (Ibid., p. 89).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

réalité, il est intégré à un domaine plus vaste, "l'ordre et le chaos dans la matière", que les notions de chaos, aux côtés de nombreuses considérations sur la "complexité", ont contribué à établir.

Ce champ de recherche est le produit d'une longue évolution, dont les racines apparentes remontent au moins à 1969. Cette évolution est la manifestation d'une prise de conscience des nouvelles tendances de la recherche scientifique : l'interdisciplinarité, la complexité, les simulations numériques, la place des mathématiques. En ce sens le chaos, par les conceptions déployées mais aussi par la publicité l'entourant, a participé à donner une visibilité aux nouveaux enjeux. En 1989 il profite d'un retour des choses et bénéficie de la dynamique instaurée pour pénétrer les discours généraux.

Il est vrai que la reconnaissance est tardive, relativement à l'identification du premier "paradigme" officiel pour le chaos, en 1982. Localement et ponctuellement, les recherches sur les systèmes dynamiques non linéaires et le chaos ont été reconnues et soutenues depuis la fin des années 1970, en phase avec les problématiques internationales. Cependant la reconnaissance qu'un nouveau domaine de recherche a émergé, avec ses problématiques, ses méthodes, ses enjeux et ses perspectives (ceux admis en 1982) a été retardée au niveau des instances du CNRS et du Comité National. Le domaine du chaos entre de plein pied dans leurs considérations par le fait d'une prise de conscience beaucoup plus globale d'un changement de régime scientifique, dont le chaos peut être vu comme un avatar.

Le rapport de conjoncture de 1989 traduit ce nouveau contexte et la volonté réelle de coordonner les recherches aux frontières des mathématiques. Il reste à déterminer les actions menées en conséquence de cette vaste mise en question de l'organisation des recherches, au MPB en particulier. En effet, le champ de "L'ordre et du chaos dans la matière", qui s'affiche pour la première fois comme tel, est certes le résultat d'une évolution en profondeur, mais l'unification proposée par le discours suffit-elle a en assurer la pérennité ? Y aura-t-il de nouvelles remises en cause de cette structure interdisciplinaire qui n'est finalement qu'un nouveau découpage ? En outre, le champ ne coïncide pas avec le découpage du Comité National car ce dernier n'a été arrangé que pour la circonstance du rapport. Les discours de 1989 promettent beaucoup de changements ; nous verrons ce qu'il en sera, avec la transformation opérée au début des années 1990.

L'année spéciale "Système dynamique" au CNRS

Avant cela, pour tourner la page des années 1980, il convient de signaler une initiative de l'année 1989-90. Sans liaison directe avec une demande du rapport de conjoncture, elle a été décrétée "année spéciale" pour les systèmes dynamiques au CNRS [1824] . Sous la responsabilité de R. Moussu et R. Roussarie, neuf colloques spécialisés sont organisés, choisis pour représenter différents courants dans la discipline. Trois manifestations sont consacrées à la formation des jeunes chercheurs (Ecole d'été "Séries divergentes", et deux sessions "Systèmes Dynamiques" par A. Douady et R. Roussarie). Les meilleurs spécialistes français et étrangers assurent ces exposés. L'année est conclue par un

[1824] Lettre MPB, n°15 – avril 1991, p. 9-10.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

colloque international à l'ENS Lyon "Systèmes Dynamiques" (organisé par E. Ghys et R. Moussu). On notera que la répartition des évènements est destinée à un certain rééquilibrage Paris-province (un tiers des manifestations se tiennent à Paris). Au final, cette année aura au moins permis à la communauté de s'organiser et de se rencontrer (l'action coordinatrice est soulignée et il est évidemment souhaité qu'elle se poursuive). Cependant, la recherche dans le domaine ne bénéficie pas de beaucoup plus de soutien du CNRS et comme il est souligné dans le rapport de 1989, rien n'est venu remplacer les ATP, qui ont été l'unique instrument adapté aux spécificités du champ.

11.7. Les années 1990 : le département SPM et la complexité

Au niveau des structures du CNRS, une évolution rapide se fait dans le sens du rapport de conjoncture 1989. Le département des Sciences Physiques et Mathématiques est crée en 1991 et organise désormais la première politique scientifique dans le domaine. Cette création est probablement inspirée du rapport, mais elle est aussi le fruit d'une longue maturation et des circonstances. Nous allons voir comment le domaine du chaos s'inscrit dans cette histoire.

a. Vers le département des Sciences Physiques et Mathématiques (SPM)

Le redécoupage du Comité National se négocie dans l'année 1990-91. Dès les premières moutures, le découpage

"est asservi à une logique d'évolution scientifique fondée sur l'organisation des sciences en champs scientifiques réassociant les disciplines. Les futures sections seront donc élargies avec une ouverture de leurs thématiques, de l'amont à l'aval. La possibilité d'existence de sections aux interfaces entre plusieurs départements, susceptibles de développer des domaines nouveaux, est un élément important de cette évolution (Plasmas, matière molle,...)" [1825] ***.***

Le projet définitif de septembre 1991 traduit le changement de définition annoncé. Il est présenté par le directeur du département, Daniel Thoulouze, dans une lettre du MPB-SPM [1826] . Désormais, les départements ne sont plus construits à partir des sections du Comité National mais "à partir des thématiques et des laboratoires qui leur sont attachés" [1827] . L'évaluation se fera par les sections du Comité National, qui peuvent être communes à deux départements [1828] .

"Au-delà de cet aspect formel, il n'y a plus de mathématiques ou physique de base, mais les mathématiques et la physique dans leur globalité, de l'amont à l'aval, du fondamental aux applications, qui irriguent l'ensemble des disciplines."

[1825] ***Lettre MPB, n° 14, Décembre 1990, p. 2. La discussion concerne le projet provisoire arrêté au 22 novembre 1990.***

[1826] Lettre MPB, n° 16, Juillet-août 1991.

[1827] Ibid., p. 2.

[1828] Les sections 4 et 8 sont communes SPI-SPM, la 15 est commune SPM-SC.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

[1829]

En arrière-plan de ces intentions, il y a l'idée que les mathématiques et la physique fournissent un bon nombre de concepts pour étudier des systèmes complexes, proches de la réalité. Un comité de la physique sera crée pour coordonner les actions au CNRS, dans différents départements et un Comité des interactions des mathématiques pour développer les interfaces avec les autres disciplines [1830] : informatique, robotique, économie, biologie, mécanique, atmosphère, etc. "Des thématiques nouvelles peuvent apparaître à partir des problèmes réels qui se posent aux ingénieurs. Un continuum devrait exister dans les laboratoires entre les sujets de la recherche fondamentale et leurs applications" [1831] .

Les rapports avec le monde socio-économique ne sont plus tabous :

"Il est souhaitable, dans ces conditions, qu'un couplage important s'établisse dans de nombreux domaines, entre les entreprises et nos laboratoires. Nous devons nous rapprocher des préoccupations des entreprises pour faire émerger les points sensibles où des difficultés importantes restent à résoudre. Nous pourrons ainsi mieux appliquer nos connaissances à des sujets pertinents" [1832] .

Enfin,

"il ne s'agit pas pour nos laboratoires, d'obtenir seulement des moyens supplémentaires. Une telle démarche de 'recherche accompagnée' est certainement un des meilleurs moyens d'ouvrir notre recherche fondamentale et de diffuser la Science dans la société" [1833] .

En un mot, la constitution du SPM est l'aboutissement de plusieurs années d'évolutions et de réflexions, latentes dans les années 1980 et cristallisées dans le rapport de conjoncture 1989. Dans l'absolu, la mise en place d'une telle coordination aurait pu être décidée plus tôt, dans le courant des années 1980 ; elle aurait pu aussi tarder encore. C'est là que la volonté de l'équipe dirigeante, du directeur du CNRS, François Kourilsky (de 1988 à 1994) au directeur du département des MPB-SPM a joué et provoqué cette réorganisation. D. Thoulouze était en effet attaché à définir une politique de la science volontariste, pragmatique ; il est en phase avec Kourilsky sur ce point [1834] .

Le changement ne se limite pas à la constitution d'un département. A un niveau

[1829] ***Ibid., p. 2.***

[1830] Nous ne sommes pas parvenu à suivre l'évolution de ce comité (a-t-il été un comité éphémère ?). Toujours est-il que de la première réunion en 1992 il ressort surtout (ce n'est pas nouveau) qu'il y a nécessité d'associer les mathématiques à d'autres sciences pour une interaction efficace, "contrairement à une idée trop répandue ces dernières années suivant laquelle des mathématiciens purs pourraient être à l'écoute directe des industriels", (Lettre SPM, n° 19, Juillet-août 1992, p. 24). La remontée vers les mathématiques est insuffisante et la mesure préconisée est la suivante : il faudrait "immerger des individus ou équipes de mathématiciens dans des laboratoires de ces disciplines" (informatique, météorologie, économie...) (Ibid.).

[1831] Lettre MPB, n° 16, Juillet-août 1991.

[1832] ***Ibid.***

[1833] ***Ibid.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

général, il se construit une politique scientifique en mathématiques et physique au département SPM, et au niveau local, plusieurs actions sont entreprises.

Le plan d'action 1991-93 du SPM

Le plan d'action pour le SPM correspond à un schéma stratégique pour les années 1991-93, défini à un niveau global pour le CNRS [1835]. Le plan se découpe en cinq points :

I. Interactions des mathématiques

II. L'ordre et la complexité – Modélisation

III. Les échelles intermédiaires : de la molécule aux systèmes macroscopiques

IV. Optique et lasers

V. Orientations de politique générale

Ces choix valident le rapport de 1989 (les titres des chapitres en sont largement inspirés). L'interdisciplinarité est à l'honneur puisqu'un certain nombre de thèmes sont choisis pour créer des interactions, par exemple, les mathématiques de l'informatique, les systèmes mésoscopiques, les interfaces. La modélisation [1836] et l'ouverture des mathématiques sur les autres sciences sont devenues une condition de leur compétitivité, par la modélisation des structures, du système atmosphère-océan, de la dynamique des populations entre autres. En un mot, tout le CNRS est concerné [1837]. En outre, la simulation est bien la troisième voie dans l'étude des phénomènes complexes [1838]. Les interactions avec le monde socio-économique sont également encouragées [1839].

Ce plan stratégique constitue donc **la première définition d'une politique**

[1834] Entretien avec D. Thoulouze, 18 juin 2003. Nous renvoyons à la thèse de C. Vilkas [VILKAS, C., 2001], consacrée en partie à la gestion de la recherche au MPB-SPM.

[1835] Ces informations ne sont que les officialisations des décisions prises : les archives sont encore restreintes en accès. Nous nous appuyons sur le résumé du schéma stratégique et le plan d'action publiés dans la Lettre SPM, n° 17, janvier 1992.

[1836] Dans le plan, il est convenu de renforcer le domaine de la modélisation et celui, connexe, de l'analyse numérique. Les compétences mathématiques doivent être mises en commun avec celles des physiciens théoriciens et informaticiens. Lettre SPM, n° 17, janvier 1992, p. 7.

[1837] Lettre SPM, n° 17, janvier 1992, p. 13.

[1838] L'étude des échelles intermédiaires entre microscopique et macroscopique repose sur ces possibilités "expérimentales" (Lettre SPM, n° 17, janvier 1992, p. 9), qui se combinent avec les pratiques conceptuelles et théoriques.

[1839] En écho à l'éditorial de D. Thoulouze il s'agit de créer un continuum amont-aval, en développant les laboratoires sur une thématique, en montant des collaborations avec les autres départements, dont le SPI, et en intéressant les entreprises : des liens forts permettraient de définir des orientations nouvelles et seraient source d'inspiration. Le SPM est "désireux d'accompagner les entreprises dans les recherches à long terme par des contrats partagés"(Lettre SPM, n° 17, janvier 1992, p. 14). Il cherche à développer aussi les actions communes avec le CEA notamment, le CNET (Centre National d'Etudes des Télécommunications), l'ONERA (Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales), la DRET (Direction des Recherches, Etudes et Techniques).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

scientifique globale et cohérente en mathématiques et physique (au SPM et en lien avec le SPI). Il est un premier jet destiné à être précisé et à s'infléchir au gré des rapports de conjoncture, durant les années 1990. Nous dirons en quelques mots les suites données à cette initiative.

Par ailleurs, le chaos s'insère dans ce mouvement global au MPB-SPM. Il fait partie des thèmes de "L'ordre et la complexité – Modélisation" et parmi les objectifs cités, le premier est la théorie des systèmes dynamiques, au sujet de laquelle les performances françaises sont signalées. Mais l'action la plus probante du département en la matière, depuis les ATP de mathématiques, est la création de l'INLN.

b. La création de l'Institut Non Linéaire de Nice (INLN)

L'INLN est construit à Nice, en 1991, lieu où Hénon, qui a travaillé longtemps sur les systèmes dynamiques conservatifs (avec d'autres astrophysiciens comme Cl. Froeschlé et J.P. Scheidecker) exerce depuis 1968, et où Coullet et Tresser ont développé leurs idées sur l'universalité du chaos, en 1977-8. Depuis il s'est crée un pôle de recherche sur la dynamique non linéaire, qui a profité de quelques ATP de mathématiques [1840]. Le nouveau laboratoire vient entériner une histoire, une culture locale du non linéaire et du chaos.

Il est également le fruit du changement de politique au niveau du CNRS. En effet, le laboratoire est une initiative du CNRS, financée au départ par le CNRS, qui deviendra unité mixte CNRS-Université. Il est en quelque sorte le produit d'un dialogue à trois : Daniel Thoulouze, Pierre Coullet et Gérard Iooss, les deux premiers directeurs du laboratoire. Le CNRS a eu un impact décisif au sens où l'université locale n'était pas assez dynamique pour fédérer le potentiel important qui existait alors à Nice [1841].

L'INLN nous donne l'occasion de saisir les difficultés d'institutionnaliser l'interdisciplinarité et les nouvelles pratiques scientifiques. En effet, il s'agit d'un institut de recherches pluridisciplinaires dont les missions sont l'étude de la dynamique des systèmes et de la complexité qui peut en résulter, et l'enseignement des mathématiques, de la Mécanique et de la physique (avec un accent tout particulier pour l'utilisation des technologies de l'information). Nous nous appuyons sur quelques informations distillées dans une Lettre SPM de 1995 [1842] :

"Le pari fait par ses fondateurs était de mettre en contact mathématiciens et physiciens expérimentateurs avec une population intermédiaire de mathématiciens appliqués, de mécaniciens et de physiciens théoriciens" [1843] sur le thème commun de la dynamique.

Une autre spécificité de l'Institut est que "La simulation numérique, en particulier sous une

[1840] Nous renvoyons page 701.

[1841] Nous nous appuyons sur nos entretiens, réalisés séparément, avec D. Thoulouze, P. Coullet et G. Iooss.

[1842] La Lettre SPM n°26, Avril-mai 1995 consacre un article à l'INLN.

[1843] Lettre SPM n°26, Avril-mai1995, p. 10.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

forme interactive et visuelle où l'aspect qualitatif l'emporte sur les aspects quantitatifs" [1844] . Et de conclure naturellement : "Les résultats obtenus à ce jour montrent que ce pari a été gagné" [1845] .

Onze années plus tard, les mots de 2002 montrent l'ampleur et la difficulté des changements. Le laboratoire est organisé en équipes, dont on peut consulter les rapports [1846] . Par exemple, l'équipe 1 ("Instabilité et Phénomènes hors d'équilibre") se veut fortement pluridisciplinaire (biologie, physique du solide, Mécanique des fluides, optique) et cherche une relation très forte à la fois avec les mathématiciens et les expérimentateurs. L'équipe 2 ("Bifurcations et systèmes dynamiques") rappelle également que la présence des mathématiciens de la dynamique non linéaire est déterminante (depuis le début de l'INLN). Les auteurs poursuivent :

"Ceci ne veut pas dire que nous attendions nécessairement des publications communes entre chercheurs dont les disciplines (Mathématiques, Physique, Mécanique) sont gérées par des instances très monodisciplinaires (aussi bien au CNRS qu'à l'université) [...] La pluridisciplinarité est certes encouragée officiellement (et oralement), mais les structures de recrutement ne sont visiblement pas encore adaptées." [1847]

Ceci relativise considérablement les discours sur l'interdisciplinarité servis depuis la fin des années 1980 et on peut insister sur ce point : il ne s'agit pas tant des mentalités des chercheurs que des structures d'évaluation et de recrutement qui sont mises en accusation.

En outre, l'importance des mathématiques dans cet institut est pleinement reconnue. L'équipe d'expérimentateurs [1848] souligne :

"La présence de mathématiciens à l'intérieur de l'Institut (Equipe 2) est également un atout essentiel et une grande source d'inspiration face à la complexité des phénomènes étudiés et constitue un facteur clef de compétitivité à l'échelle internationale" [1849] ***.***

En définitive, l'interdisciplinarité n'est pas qu'une question de décret. Elle se cultive et l'INLN nous montre qu'une installation fructueuse repose sur l'existence d'un potentiel très fort, ayant pu s'exercer pendant plusieurs années à la confrontation (et à la symbiose) des

[1844] Ibid., p. 11.

[1845] Ibid., p. 11.

[1846] Les rapports sont disponibles en ligne sur le site du laboratoire : www.inln.cnrs.fr

[1847] ***Rapport de l'UMR 6618 publié sous la direction du Professeur Jorge Tredicce en juillet 2002 et couvrant la période 1999-2002, Equipe 2, p. 3.***

[1848] Il s'agit de l'équipe 6, "Approche expérimentale des phénomènes hors d'équilibre" dont l'intitulé avant 2002 était "Expérimentation des Systèmes Dynamiques Réels".

[1849] ***Rapport de l'UMR 6618 publié sous la direction du Professeur Jorge Tredicce en juillet 2002 et couvrant la période 1999-2002, Equipe 6, p. 3.***

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

disciplines. D'un autre côté, le CNRS a favorisé cette création dans le cadre d'une action volontariste axée sur l'interdisciplinarité mais la pleine réussite de l'initiative demande, en plus du changement de mentalité opéré, un changement très global des structures d'évaluation et de recrutement. L'INLN est tout de même une réussite pour le SPM et le groupe du non linéaire de Nice [1850] .

c. Systèmes dynamiques et complexité

Les actions du SPM ont une autre densité que celles du MPB. Outre l'INLN, des laboratoires sont formés ou restructurés [1851] ; des Groupements de Recherche sont constitués de manière à fédérer les activités ; les recrutements au CNRS sont soumis à un fléchage important, de manière à orienter les activités.

Le plan d'action 1994-96 [1852] , vient faire un premier bilan de trois années d'actions. L'INLN est déjà "un des points forts" dans le thème "ordre et complexité-modélisation" avec ses composantes de modélisation, de simulation et d'expérimentation. Les quatre thèmes prioritaires entérinent les tendances qui se sont dessinées : simulation numérique et modélisation / ouverture des mathématiques / structures et dynamique des systèmes complexes / optique, lasers et semi-conducteurs.

En outre, en se reportant au thème "structure et dynamique des systèmes complexes" de ce plan, on s'aperçoit que la dynamique non linéaire est au cœur du problème car l'évolution des recherches dans le domaine s'appuie "sur des possibilités expérimentales qui ont réellement explosé et sur des progrès remarquables dans les concepts et les modèles, liés aussi au domaine de la dynamique non linéaire" [1853] . Un paragraphe sur les apports français en la matière est d'ailleurs ajouté à ce sujet et un second rappelle la multiplicité des points de vue, nécessaire à de tels progrès [1854] .

La dynamique non linéaire a sa place dans le domaine appelé "systèmes complexes", aux côtés d'un grand nombre de domaines de recherches comme la matière "molle", les milieux hétérogènes, les interfaces, la nanophysique. La notion de "système complexe" désigne en fait ici en grande partie les recherches effectuées à l'échelle

[1850] Pierre Coullet se laisse tout de même aller à quelques regrets (quelques "naïvetés") : le groupe interagissait avec plusieurs autres laboratoires, en France notamment. La création de l'INLN a concentré à Nice un potentiel local important, mais a réduit par là même ces interactions externes si fructueuses. Entretien avec P. Coullet, 12 mars 2004.

[1851] Très symboliquement, le premier laboratoire propre de mathématiques du CNRS est crée à ce moment là : le Laboratoire de Mathématiques Discrètes à Luminy (Marseille).

[1852] Plan d'action 1994-1996, Archives du CNRS.

[1853] Ibid., p. 15.

[1854] La dynamique non linéaire "représente un vaste domaine de recherche où l'école française joue un rôle de premier plan. Historiquement héritière de Poincaré, elle a été à l'origine de nombreuses percées dans les vingt dernières années. […] Une des raisons de ce dynamisme résulte du fait que les chercheurs qui ont participé à ce développement venaient de domaines différents et ont apporté une grande diversité de points de vue et de compétences théoriques, numériques et expérimentales.", ibid., p. 25.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

intermédiaire entre le niveau moléculaire et la description macroscopique. Encore une fois, les thèmes du chaos et du non linéaire sont à rapprocher du mouvement plus général vers la "complexité".

11.8. Conclusion : les difficultés de l'interdisciplinarité

L'histoire du domaine du chaos au CNRS est l'histoire de la conciliation de deux dynamiques. D'un côté, les tendances des recherches au niveau international ont constitué progressivement un champ de recherche, avec ses problématiques et ses perspectives, auquel les chercheurs français s'efforcent de participer. De l'autre, l'évolution institutionnelle est contrainte par le développement et l'action du CNRS. Ainsi, localement, plusieurs chercheurs et équipes du CNRS ont contribué aux recherches sur le non linéaire d'abord, le chaos par la suite, et sont reconnues internationalement. Au sein de l'institution, le domaine ne peut que se plier aux décisions plus générales : avec la constitution du département des SPI, par exemple, la "dynamique théorique" est évacuée du CNRS. La reconnaissance du domaine du chaos au CNRS est donc le fruit d'une maturation, d'une histoire et d'un contexte particulier : la modélisation et la simulation sont entrées dans les mœurs, les sciences de la complexité occupent une place importante, les mathématiques s'ouvrent.

A la fin des années 1980 seulement, les conditions sont réunies au niveau des discours. L'action suivra mais avec quelques années de retard. Il est assez paradoxal de voir que le CNRS a favorisé ponctuellement, mais "involontairement" grâce aux ATP, l'essor du champ de recherche, mais n'a pas su développer une action plus ample, comme celle menée aux Etats-Unis, avec la création du "Center for Nonlinear Studies" à Los Alamos au début des années 1980.

Les difficultés du CNRS peuvent s'expliquer par plusieurs facteurs. En premier lieu, les recherches interdisciplinaires ont longtemps été difficiles à conduire à une échelle dépassant l'individu ou la petite équipe. L'exemple de l'INLN nous a montré les écueils rencontrés encore pendant les années 1990. Le travail à la frontière avec les mathématiques n'a pas bénéficié de circonstances favorables, sauf dans les interactions de l'école Pérès après la guerre, et lorsque le CNRS s'est engagé vraiment en mathématiques dans les années 1980. L'interdisciplinarité a été freinée par les mentalités et les structures du CNRS. Il convient de reconnaître que le domaine du chaos a participé à rendre visible ces pratiques, et en a bénéficié lorsqu'elles ont été admises.

Le changement dans la science est en fait plus profond et les difficultés du CNRS se situent plus fondamentalement au niveau de la perception de ces nouveaux enjeux. La création du département SPI avait entériné la volonté d'adapter la science au monde socio-économique et à la société. Les décisions concernaient alors un nombre restreint de domaines, les plus en prise avec ces aspects, comme l'électronique ou la Mécanique. Le département des MPB s'en était tenu à l'écart. Pour ces disciplines de mathématique et physique, l'évolution post-1989 et le rapprochement de l'"extérieur" relève d'ambitions similaires au département des SPI de 1975.

D'autres éléments ont déterminé l'évolution vers les SPI comme le travail en équipe

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

et l'utilisation de l'informatique. Ce sont les deux bouleversements les plus symptomatiques de la science récente. Au niveau du CNRS, la "révolution" de l'ordinateur a été peut-être le changement le plus difficile à prendre en compte, comme en témoigne le laborieux développement de l'informatique dans l'institution. En outre, chaos et dynamique non linéaire, s'ils s'appuient sur des travaux mathématiques remontant à la fin du XIXème siècle, n'en sont pas moins les produits de l'ère de l'ordinateur. Or, il se pose des questions de nature épistémologique car l'ordinateur a fissuré la frontière entre les mathématiques et la physique. Cette difficulté à reconnaître et analyser les ruptures épistémologiques est en partie responsable de la pénurie de recherches en informatique au CNRS jusqu'aux SPI, du sous-développement du non linéaire en son sein, et plus généralement de toute activité utilisant reposant sur l'"expérience numérique".

Le chaos au CNRS est donc inscrit dans une histoire très complexe et les quelques années de retard pris pour le développement de la recherche en dynamique non linéaire sont peut-être dues à une lenteur dans l'analyse du système de recherche, dans la prospective, dans la remise en question des pratiques et à un défaut d'interrogation épistémologique, qui est souvent évincée des questions de gestion de la recherche.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Conclusion

Notre tableau de l'histoire du chaos nous amène à tenter d'apporter des réponses à deux d'interrogations "classiques" : pourquoi a-t-il fallu tant de temps pour voir le chaos émerger alors que Poincaré en avait déjà esquissé des contours mathématiques en 1890 ? Dans quelle mesure peut-on parler d'une "révolution scientifique" au sujet du chaos ? Le statut historique de la notion de chaos est en jeu et nous pensons que les éléments d'historiographie sont bien insuffisants pour proposer des réponses recevables.

Selon Kuhn, une révolution scientifique correspond à l'avènement d'un nouveau paradigme, incommensurable avec son prédécesseur. Or notre analyse a pointé la difficulté qu'il y aurait à singulariser un paradigme pour le chaos, même après 1982. Assurément, l'incommensurabilité n'est pas de mise entre les sciences du linéaire et du non linéaire : elles coexistent et les concepts ainsi que les méthodes du non linéaire complètent le linéaire, sans pour autant les rendre caduques.

La situation actuelle, vingt années après l'émergence de la perspective axée sur les propositions de Ruelle, ne dissipe pas les doutes. Quelques indices nous ont fait pressentir une résurgence des considérations de Rössler dans les années 1990, sans pour autant remplacer les thèmes de Ruelle [1855]. Nous manquons encore d'éléments d'analyse relatifs à cette période mais, d'ores et déjà, il paraît difficile de croire à une uniformisation des conceptions du chaos. Un rapide sondage auprès des scientifiques en activité aujourd'hui suffit à indiquer la variété conceptuelle à l'oeuvre, reflétant en outre la sociologie très complexe du champ du chaos [1856].

Peut être faut-il remettre en question la catégorisation proposée par Kuhn. La notion

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

de paradigme est-elle encore pertinente au sujet de la science très contemporaine, science de masse, hyper-spécialisée ? Si un paradigme désigne une vision du monde partagée par un groupe de scientifiques on constate aujourd'hui que la division du savoir et le cloisonnement dominent la science, autorisant une grande latitude conceptuelle et une variabilité technique importante. Des généralisations comme les paradigmes sont impropres à rendre compte de cette diversité, autant épistémologique que sociale, à moins de caricaturer.

A notre avis, l'aspect révolutionnaire du chaos se situe au niveau d'une évolution plus culturelle de la science. Sur le plan conceptuel, comme sur le plan de la pratique scientifique, le chaos correspond à une prise en compte de l'instabilité, des non linéarités et d'une certaine complexité, ainsi que nous l'avons vu dans le dernier chapitre. L'ordinateur a été le moteur de cette évolution, conjointement au développement des théories mathématiques, sans lesquelles la science du chaos n'aurait pas fait un usage si précoce de l'informatique.

L'histoire du chaos est donc une histoire de la science contemporaine, qui s'est elle-même métamorphosée dans son ensemble sous l'impulsion d'un instrument scientifique révolutionnaire. De toute évidence, l'ordinateur a induit des bouleversements très généraux dans les pratiques scientifiques, mais il a également autorisé des conceptions scientifiques nouvelles, modifié le régime de la science au niveau des institutions, de son organisation et de ses rapports à la société. Parce qu'il a participé de manière active à cette révolution culturelle de la science, le chaos, et son histoire, incarnent clairement ces mutations.

Dès lors que l'histoire du chaos est mise en perspective avec l'évolution générale de la science, la première question, celle du retard aux conceptions du chaos, semble dénuée de sens. Cependant, en faisant abstraction des contingences historiques, sans se borner non plus au strict plan des mathématiques, il paraît étonnant que les notions d'instabilité et de courbes homoclines n'aient pas été perçues plus rapidement comme un enjeu de recherche. Dans l'évolution vers le chaos nous avons précisé l'aspect décisif des expériences numériques, de la théorie mathématique de la dynamique et de la Mécanique statistique, lesquelles ont autorisé les conceptualisations du chaos. C'est en se révélant progressivement que ces éléments ont transformé des "curiosités" en des enjeux nouveaux. Il existe donc une forte historicité des concepts comme des perceptions des

[1855] Ce sont surtout des constats de bibliométrie, relatifs aux citations des articles de Rössler. Nous avons entamé une analyse plus approfondie des textes, mais l'ampleur du travail nous a contraint à ne réaliser qu'un sondage. Si l'analyse "topologique" du chaos semble aller croissante, dans une perspective qui mêle les travaux de Rössler à ceux de Williams et Birman par exemple, une partie des citations n'est destinée qu'à renvoyer au système de Rössler, pour sa simplicité plus que pour l'analyse produite par Rössler.

[1856] Par oral, par questionnaire, par e-mail, nous avons demandé leur position à différents acteurs du chaos, en France et à l'étranger. Des "phénomènes intrinsèquement imprévisibles" (dont on se demande ce qu'ils désignent), aux "systèmes dynamiques déterministes, non périodiques, sensibles aux conditions initiales" (conception revenant régulièrement, certainement la plus précise), en passant par le "désordre ordonné" et "de petites causes engendrent de grands effets", il est bien difficile de catégoriser toutes ces notions.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

enjeux, et la première question ainsi que ses variantes tendent à l'évacuer trop rapidement.

D'autres questions, qui complexifient encore les rapports avec l'histoire, ont été laissées en suspens. Les rapports du chaos à la Mécanique quantique ont, par exemple, été très peu abordés. Historiquement, la Mécanique quantique a-t-elle été un obstacle ou un stimulant au développement du chaos ? Dans un premier temps, on peut se demander dans quelle mesure la problématique des théories quantiques a occulté la question des instabilités ; c'est un problème de sociologie des sciences. Par ailleurs, la rupture proclamée avec les conceptions du XIXème siècle a placé les conceptions à propos du hasard et de l'indéterminisme au centre des débats scientifiques, or, au moment où la théorie quantique se construit, Birkhoff et Andronov affichent leur volonté de maintenir une vision dynamique, mécaniste dans la théorie physique. La stochasticité, en Union Soviétique, pourrait s'interpréter comme une forme de refus du monde indéterministe de la Mécanique quantique (cf. chapitre 7). Th. Vogel, spécialiste de la théorie des oscillations, se situe, avec son ouvrage Pour une théorie mécaniste renouvelée [1857] , dans une perspective similaire. Se pourrait-il que les notions de "chaos déterministe" se soient constituées en réaction à la Mécanique quantique ? La question est légitime, mais l'analyse à conduire est loin d'être simple. Comme il existe des connaissances tacites, difficiles à enregistrer, on peut imaginer, dans cette situation, une réticence implicite, car les éléments épistémologiques et philosophiques présidant à de tels choix sont sûrement fortement intériorisés et relèvent presque de la psychologie. Les réponses promettent d'être d'autant plus intéressantes. Elles permettraient à la fois de saisir l'importance de la philosophie mécaniste et de la stabilité dans la pensée scientifique, et de comprendre dans quelle mesure l'un a été un stimulant des théories du chaos, et l'autre, un frein à l'émergence des questions sur l'instabilité.

L'histoire du chaos n'a pas livré tous ses mystères, loin de là, et notre analyse dégage autant de perspectives de recherche qu'elle n'apporte de réponses. Nous présentons ici quelques voies ouvertes à l'exploration, que nous avons déjà entreprise, et qui constituent un programme de recherches pour les années à venir.

En premier lieu, nos analyses du cas français méritent d'être élargies et confrontées à des études équivalentes de plusieurs autres contextes. Le calcul scientifique, dont l'histoire très problématique a été déterminante dans l'évolution du chaos en France, a certainement été approché différemment aux Etats-Unis, par exemple. Il conviendrait d'établir des histoires comparatives pour dépasser les discours simplifiés sur l'importance du calcul dans l'histoire du chaos, qui ne se résume pas à une utilisation non problématique des ordinateurs. De même, nos conclusions relatives aux changements de politiques scientifiques, leur impact sur le développement du chaos ou encore l'intégration des questions liées à la complexité, peuvent-elles s'étendre à d'autres institutions, en Europe, aux Etats-Unis, au Japon ?

Plus généralement, l'histoire toute récente, celle des années 1990, a été

[1857] [VOGEL, T., 1973]. Appuyé par ses théories sur les systèmes dynamiques, Vogel propose une réflexion philosophico-scientifique, sur les "lois de la nature", dont il propose de rendre compte "rigoureusement" par les moyens du "mécanisme renouvelé" suggéré par les systèmes dynamiques.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

insuffisamment étudiée. Nous avons esquissé la tendance au développement global des questions de complexité, incluant le chaos, au sein du CNRS. Nos observations plus sociologiques du groupe des spécialistes français du chaos, à l'heure actuelle, nous permettent d'être plus précis [1858]. A cette globalisation répondent une spécialisation du domaine du chaos et une technicité toujours plus importante, ce qui n'étonnera personne. Aujourd'hui, le chaos est un domaine de recherche qui accueille de nouveaux chercheurs formés spécifiquement à la problématique. Les travaux ne sont plus le fait d'excursions temporaires à partir d'une ligne de recherche plus ou moins connexe, comme cela a pu être le cas dans les années 1980. Du fait de la jeunesse du domaine, sa population actuelle est encore hybride.

On peut formuler l'hypothèse que cette évolution est corrélée aux perspectives en matière de théorie du chaos. Au début des années 1980, le chaos et la théorie du chaos ont pénétré le domaine expérimental en physique et chimie notamment ; parallèlement, le CNRS a tenté de rapprocher les mathématiques des sciences pour l'ingénieur, dans l'espoir d'un transfert de "technologies mathématiques". Aujourd'hui, les applications techniques effectives de ces nouvelles conceptions en sont encore à leurs balbutiements. Cependant, à travers une série de colloques organisés ces dix dernières années, il est manifeste qu'il y a une volonté de dépasser le domaine de l'académisme. De la Marine américaine [1859], aux questions des Sciences pour l'Ingénieur [1860], le chaos et les théories du chaos intéressent divers domaines techniques et couvrent également le champ de l'économie, de la biologie et de la médecine [1861]. Les recherches sur le contrôle du chaos, l'utilisation des concepts du chaos pour les systèmes de communication, pour le cryptage de données [1862] laissent imaginer les répercussions espérées en termes de technologie. Il est difficile d'y voir clair entre ce qui est en voie de réalisation, de ce qui est espéré raisonnablement ou encore au stade de projets très spéculatifs, mais il nous paraît intéressant d'évaluer dans quelle mesure ces enjeux nouveaux ont pesé sur le champ du chaos et ses perspectives d'évolution.

[1858] Nous nous appuyons sur notre participation aux deux derniers colloques sur le chaos temporel et le chaos spatio-temporel : le 4ème colloque a été organisé le 15-16 décembre 2003, à Rouen, le précédent, à l'université du Havre, le 24-25 septembre 2001.

[1859] Elle est l'organisatrice d'une des premières sessions résolument orientées vers les questions de l'ingénieur, en 1993 (actes publiés dans [KATZ, R.A., 1994]) : The chaos paradigm : developments and applications in engineering and science. Le contrôle du chaos et l'analyse des signaux sont deux thèmes prédominants de ce colloque, placé sous l'égide de l'ONR (Office of Naval Research) et du NUWC (Naval Undersea Warfare Center).

[1860] Sans avoir l'ampleur du précédent exemple américain, la thématique se développe en France. Citons simplement le colloque de 1997 Les applications des théories du chaos en Sciences pour l'Ingénieur ([PONS, M.N., 1997]).

[1861] Par exemple : [HERBERT, D.E., CROFT, P., SILVER, D.S., WILLIAMS, S.G., WOODALL, M., 1996]. Tout récemment, les "rencontres du non linéaire" organisées à l'Institut Henri Poincaré étaient consacrées cette année (10-12 mars 2004) au "non linéaire en médecine et en biologie" (voir : http://pnl.lps.u-psud.fr/pnl/Infos-res-articles2004.html).

[1862] Nous renvoyons à l'article "Le chaos chiffrant" dans [POUR LA SCIENCE, 2002] et la thèse de Laurent Larger de 1997 : Cryptage de signaux par chaos en longueur d'onde [LARGER, L., 1997].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Malgré le sentiment d'avoir élaboré une histoire déjà très vaste, nous avons donc l'impression que le champ de recherche pour l'historien et l'épistémologue est extrêmement ouvert. Par ailleurs, trois années de recherches sur l'histoire du chaos nous aurons appris les difficultés à écrire une histoire si récente. Pour suivre le travail actuel dans le domaine du chaos et écrire l'histoire de ses dernières années, il nous paraît plus que jamais indispensable de posséder une double formation en sciences "dures" et en sciences humaines et sociales. La technicité impose en effet d'interagir, de dialoguer avec les scientifiques, tout en étant capable d'appréhender les enjeux de nature épistémologique et sociologique.

La médiatisation et la vulgarisation des problématiques du chaos ont produit ce que nous voudrions justement éviter en la matière. En effet, la publicité accordée au chaos en a fortement limité la portée, en réduisant le message à quelques images. Il est vrai que la recherche sur le chaos est grande productrice d'images spectaculaires, d'attracteurs étranges notamment ; elle est souvent associée aux fractales et leur esthétique surprenante. Une autre métaphore a fini par intégrer le langage courant, celle de l'"effet papillon". Mais à force de simplifications elle se restreint à signifier que "des petites causes ont de grands effets", à la manière des extraits du texte de Poincaré, déformés dans leur signification. De la discussion proposée par Lorenz en 1972, il ne reste donc que son titre !

Un tel décalage interroge sur les moyens à mettre en œuvre pour dépasser ce stade d'une vulgarisation réduite à faire circuler des images sans leur épaisseur conceptuelle et historique. Plus généralement, c'est le transfert de telles notions d'un domaine scientifique à un autre qui pose question.

L'histoire du chaos a montré à quel point les transferts sont courants, fructueux, et très circonstanciés. Entre diverses problématiques fortement mathématisées le processus s'est mis en place très régulièrement. Cependant, on peut penser que ces concepts pourraient être utiles dans des domaines moins formalisés, de manière peut-être plus heuristique, comme moteur de conceptualisations nouvelles. Nos recherches sur la littérature existante nous amènent à faire état d'une déception au niveau des sciences humaines et sociales [1863] . Sans trop caricaturer, l'exercice se borne soit à évoquer l'"effet papillon", soit à utiliser les méthodes de l'analyse des signaux expérimentaux grâce aux algorithmes définis par P. Grassberger et I. Procaccia en 1984 (cf. chapitre 4). Dans le second cas, la densité technique et conceptuelle est évacuée : le résultat sous forme de dimension fractale d'un hypothétique attracteur étrange, même s'il est quantitatif et reproductible, n'est rapporté à aucun cadre interprétatif [1864] .

[1863] En matière de philosophie de l'histoire, G. Reisch et M. Shermer ont proposé de réévaluer la "contingence et la nécessité", ainsi que la "narration" à l'aune des conceptions du chaos. Malheureusement, les métaphores ont bien du mal à dépasser l'"effet papillon" et les images sont très loin d'épuiser la variété conceptuelle produite par les spécialistes du chaos. Cf. [REISCH, G., 1991], [SHERMER, M., 1993].

[1864] On peut évoquer le rappel à l'ordre de Ruelle en 1989, à propos de ces "dérives" dans son article : "Deterministic chaos : the science and the fiction" [RUELLE, D., 1990]. Il soulignait l'impossibilité de conclure sur la base de l'analyse de séries temporelles limitées de signaux d'origine biologique ou financière, à partir d'une simple application des algorithmes.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Au fond, ces transferts, pour être fructueux, nécessitent des connaissances dans plusieurs domaines et une culture scientifique et technique importante ; c'est une leçon de l'histoire. Dans l'environnement scientifique actuel, malgré les discours axés sur l'interdisciplinarité, il est encore difficile, au moins en France, de s'engager dans de tels projets. Cependant, le CNRS, sous l'impulsion de scientifiques préoccupés par les potentialités de ces transferts, a entrepris une action de formation de chercheurs en Sciences Humaines et Sociales. Nous avons nous-même participé, à la fois en spectateur-épistémologue et historien intéressé par ces problématiques, à l'école d'Hiver intitulée "Dynamique des systèmes complexes et applications aux SHS : concepts, modèles, méthodes", en mars 2004. Les difficultés posées par les transferts et les interactions sont apparues au grand jour. Ces expériences si particulières, l'association à des problématiques tout à fait d'actualité, ont rendu d'autant plus intéressant et passionnant l'exercice de l'histoire. Espérons que le lecteur de cette thèse aura partagé notre enthousiasme à interroger et analyser la science très contemporaine.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Annexes

1. Le dernier théorème géométrique de Poincaré

A la toute fin de sa vie Poincaré est revenu sur le problème des trois corps et la question de la densité des solutions périodiques. Nous avons vu au chapitre 1 que Poincaré s'était lancé dans son étude du problème des trois corps avec la conviction de l'existence d'une infinité de solutions périodiques et de leur densité. C'est l'objet de ce dernier théorème, dont il laisse la démonstration inachevée, que d'apporter des éléments de réponse dans un cas élargi : il ne considère plus de restriction sur le paramètre μ, la masse du troisième corps dans le problème restreint. Le résultat partiel est publié quelques semaines avant sa mort, en 1912 [1865] . Il a travaillé deux années déjà sur le problème [1866] . En introduction il indique d'emblée à quel point le résultat lui paraît important mais aussi qu'il ne parvient pas à le démontrer pleinement, malgré de nombreux efforts déployés.

Ce dernier théorème est l'aboutissement de toute une construction à propos des solutions du problème des trois corps. Poincaré échafaude une série de transformations

[1865] [POINCARE, H., 1912b].

[1866] Voir [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 169-174 pour une présentation simplifiée du théorème et quelques détails sur les circonstances de l'"événement".

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

et d'équivalents au problème pour arriver à simplifier la difficulté. Il parvient à convertir le sujet en une question de transformation ponctuelle plane dont il suffit d'étudier les points fixes. Son théorème géométrique peut s'énoncer ainsi : imaginons une transformation d'un anneau (portion comprise entre deux cercles de rayons différents) vers lui-même, qui fait tourner les cercles frontières en sens opposé et qui conserve les aires, alors elle admet deux points fixes.

Le théorème est démontré quelques temps après, en 1913, par G. D. Birkhoff, un jeune mathématicien américain [1867]. Par son élégante démonstration du théorème, Birkhoff s'inscrit dans la lignée de Poincaré au sujet de l'étude qualitative des équations différentielles, dès ce début de XXème siècle.

2. Les bifurcations

En préliminaire du chapitre 1, nous avions annoncé que la notion de bifurcation faisait partie des éléments de la future théorie du chaos, comme cela est confirmé au fil des chapitres 5 et 6 notamment. Poincaré a abordé le sujet dans deux contextes différents, celui des figures d'équilibre de masse fluide en rotation et dans le cadre de l'étude des solutions périodiques du problème des trois corps. Ces résultats sont doublement intéressants. D'abord, ils inaugurent la question des bifurcations, poursuivie et développée considérablement au XXème siècle. Ils abondent également dans le sens d'un point de vue global et qualitatif en mathématique, sur un point un peu détaché de la perspective générale qualitative sur les équations différentielles.

a. La figure des planètes et les formes de bifurcation

A côté des grandes réflexions sur le problème des trois corps, Poincaré se penche sur un autre sujet de Mécanique céleste, la figure des planètes. Les astronomes cherchaient à expliquer la formation des planètes en supposant qu'elles étaient constituées initialement comme des masses fluides en rotation soumises à leur propre potentiel de gravitation *F*. Plusieurs questions controversées sont associées à ce problème, notamment la formation de la Lune et l'origine de l'Univers [1868]. Poincaré ne participe pas directement à ces controverses mais balise le terrain de quelques réflexions mathématiques.

Au cours de l'année 1885, Poincaré écrit ses premières notes à ce sujet, destinées à

[1867] Cette démonstration fait sensation, d'autant plus qu'il s'agit de la première publication importante du jeune Birkhoff : [BIRKHOFF, G.D., 1913].

[1868] Au sujet de l'origine de la Lune, l'astronome G. Darwin a été très inspiré par les figures piriformes (en forme de poire), et Poincaré lui donne les formules qui, selon lui, permettent de conclure quant à la stabilité de telles figures. Les calculs de Darwin laissent penser que cette forme est stable, mais le mathématicien Lyapounov montre tout le contraire en 1905, avec des méthodes différentes. Il faudra attendre 1924 et un complément à la démonstration de Lyapounov par Elie Cartan pour en arriver à conclure que la figure est instable. [POUR LA SCIENCE, 2000].

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

débattre des résultats nouveaux décrits dans le Treatise on Natural Philosophy [1869] de Tait et Thomson, "sans aucune démonstration" [1870] . Ceux-ci avaient annoncé des nouvelles formes possibles pour l'équilibre des masses fluides en rotation, s'ajoutant aux formes déjà connues : les formes sphéroïdales, l'ellipsoïde de Maclaurin (ellipsoïde de révolution aplati) et l'ellipsoïde de Jacobi (trois axes inégaux). La démarche de Poincaré est tout à fait analogue à la démarche globale et qualitative élaborée au sujet des équations différentielles et à l'ensemble de leurs solutions. Comme le fait remarquer Hadamard :

"[…] on se convaincra que tous les progrès réalisés par Poincaré sur cette question sont dus à ce qu'il n'envisage pas une figure d'équilibre, un ellipsoïde de Maclaurin ou de Jacobi déterminé, en elle-même, mais bien dans ses relations avec les figures d'équilibre voisines" [1871]

Ainsi Poincaré est-t-il amené à introduire la notion d'**équilibre de bifurcation** (ou **forme de bifurcation**, ou **bifurcation**, selon les textes) qui sont des points d'où émergent des nouvelles formes, à partir des ellipsoïdes connus. Les premiers résultats de Poincaré, en 1885, se résument ainsi :

"Les formes d'équilibre du système considéré sont données par les équations [F est le potentiel gravitationnel]:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

Ces n équations auront un certain nombre de solutions réelles et quand y [paramètre variable dont dépend l'évolution] variera d'une façon continue, ces solutions varieront elles-mêmes d'une façon continue de manière à former diverses séries linéaires de formes d'équilibre. Il pourra d'ailleurs arriver qu'une même forme d'équilibre appartienne à la fois à deux ou plusieurs séries linéaires. Nous dirons alors que c'est une forme de bifurcation. On peut, en effet, pour une valeur de y infiniment voisine de celle qui correspond à cette forme, trouver deux formes d'équilibre qui diffèrent infiniment peu de la forme de bifurcation." [1872]

Autrement dit, les ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi appartiennent à deux séries linéaires et peuvent se rencontrer à une forme de bifurcation, qui est, par définition, en même temps un ellipsoïde de Maclaurin et de Jacobi.

Le second problème posé par les figures d'équilibre est leur stabilité. Les coefficients de stabilité, une série finie de termes, servent à caractériser cet équilibre. Ils permettent de préciser le minimum du potentiel *F* (les coefficients renvoient à la décomposition en carré d'une certaine forme quadratique). La condition de stabilité correspond la positivité

[1869] [THOMSON, W., TAIT, P.G., 1879] : le célèbre "T&T".

[1870] [POINCARE, H., 1885a], p. 41.

[1871] [HADAMARD, J., 1913], p. 2017.

[1872] [POINCARE, H., 1885a], p. 49-50. En italique dans le texte. Le paramètre en question peut être le moment angulaire de rotation de la masse fluide.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

de tous les coefficients. L'annulation d'un seul coefficient renvoie alors à une forme de bifurcation. En suivant une série linéaire et l'évolution des coefficients, lorsqu'on aboutit à un coefficient nul, on reconnaîtra qu'il existe une autre série à laquelle la forme de bifurcation appartient.

En outre, il se produit un phénomène d'échange de stabilité au niveau des bifurcations. Si sur l'une des deux séries se rejoignant il ne se trouve que des figures stables, alors, après la bifurcation, toutes les figures seront instables : les figures stables passeront dans l'autre série.

Cette recherche des formes d'équilibre est entreprise également par A. Lyapounov, par ailleurs théoricien des mathématiques de la stabilité, dont l'importance apparaît au cours du XXème siècle. Il ne s'agit plus de question de bifurcation mais de notions de stabilités et de formes particulières que Lyapounov met en évidence au fil de ses travaux [1873]. Poincaré, dès 1887 [1874], a connaissance de ces travaux. Il signale d'ailleurs que parmi les recherches inspirées par Thomson et Tait "les plus importantes sont, sans contredit, celles de M. Liapounoff" [1875]. Plus que les résultats de Lyapounov, c'est le rapprochement des problématiques de Poincaré et Lyapounov autour de la stabilité qui est intéressant.

Le dernier sujet à mettre en avant, dans la perspective "cosmogonique" de ces réflexions mathématiques, est la question des anneaux de Saturne. Elle ne serait qu'une anecdote dans les travaux de Poincaré si, autour de ce thème, ne s'étaient développées plusieurs réflexions, dont celles de J.C. Maxwell (1855) [1876]. La constitution des anneaux et leur stabilité font problèmes : sont-ils solides ou fluides ? sont-ils constitués d'un grand nombre de masses ? [1877] D'une part Maxwell a participé aux réflexions de type masse fluide en rotation. D'autre part, et c'est peut-être plus important, ce problème lui a donné l'idée de sa méthode "statistique" et de son application aux phénomènes reposant sur un grand nombre de masse en interactions [1878].

[1873] Lyapounov fait une synthèse de ses travaux sur les ellipsoïdes de Maclaurin, Jacobi et leur stabilité, en quatre parties, publiées, en français, entre 1906 et 1914 : [LIAPOUNOFF, A., 1906], [LIAPOUNOFF, A., 1909], [LIAPOUNOFF, A., 1912], [LIAPOUNOFF, A., 1914]. Le mémoire de Lyapounov sur la stabilité du mouvement, publié en 1907, correspond à des travaux en fait bien antérieurs (1892).

[1874] Poincaré publie une note au Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, au sujet d'un résultat de stabilité de Lyapounov, qu'il démontre par un méthode alternative : [POINCARE, H., 1887].

[1875] [POINCARE, H., 1892b], p. 45. Il n'évoque pas directement les résultats de Lyapounov dans ce compte rendu.

[1876] Le sujet est l'exercice soumis au prix Adams en 1855, auquel Maxwell participe : il gagne le prix en 1857 pour son mémoire "The Motions of Saturn's Rings". [CAMPBELL, L., GARNETT, W., 1969], p. 505.

[1877] Dans l'article de synthèse [POINCARE, H., 1892] (p. 54-58) Poincaré donne les grandes lignes de la réflexion de Maxwell, donnant les conditions de stabilité selon les modèles adoptés.

[1878] L'"origine" de la méthode statistique se trouverait dans ce problème : [CAMPBELL, L., GARNETT, W., 1969], p. 569.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

b. Les solutions périodiques de second genre

L'étude des solutions périodiques dans le problème des trois corps a ouvert différents chantiers et parmi ceux-là, Poincaré est amené à aborder un problème de type "bifurcation" [1879] . Dans tout ce qui suit, Poincaré ne fait pas référence aux figures d'équilibre des masses fluides en rotation, ni n'évoque le terme "bifurcation" utilisé en 1885. S'ils concernent des chapitres différents de la Mécanique céleste les résultats sont néanmoins fortement analogues.

La question soulevée par Poincaré est la suivante : qu'advient-il d'une trajectoire périodique lorsque les paramètres du système varient (en l'occurrence la masse μ) ? Poincaré l'envisage dans le cas d'un système conservatif à deux degrés de liberté, sur lequel il démontre des propriétés remarquables et essentielles. Le raisonnement se construit sur les exposants caractéristiques des solutions périodiques, ce qui ramène l'étude à des considérations algébriques (sur la base de propriétés élémentaires des racines $p^{ième}$ de l'unité). Plusieurs cas se présentent lors du franchissement d'un seuil, noté μ_0. Par des raisonnements sur les exposants caractéristiques, Poincaré montre que s'il existe une solution périodique pour $\mu \leq \mu_0$ et pas pour $\mu > \mu_0$, la disparition a été la conséquence de la coalescence de deux orbites périodiques, de même période, à $\mu = \mu_0$. Ainsi les solutions périodiques apparaissent et disparaissent par paires comme les racines d'une équation algébrique [1880] .

Les transitions imaginables ne sont pas restreintes à des fluctuations de nombre de solutions périodiques. Il est possible que la stabilité d'une solution évolue avec μ. Ces transitions de $\mu < \mu_0$ (solution stable) à $\mu > \mu_0$ (solution instable) suivent certaines règles établies, toujours, avec les exposants caractéristiques (de la forme $e^{\alpha T}$). Selon Poincaré, le seuil, $\mu = \mu_0$ ne peut correspondre qu'à deux cas : exposant 1 ou -1, c'est-à-dire à $\alpha = 0$ ou $i\pi/T$ (T est la période de la solution à $\mu < \mu_0$).

• Pour $\alpha = 0$, il se produit une collision avec une orbite de même période T et les deux orbites échangent leur stabilité [1881] .

• Pour $\alpha = i\pi/T$, la situation est un peu plus complexe, car il apparaît une **solution périodique du deuxième genre**, de période $2T$.

Le phénomène d'apparition d'orbite périodique du deuxième genre n'est pas limité à ce "doublement de période". En fait, il s'agit même de la définition des solutions du deuxième genre :

" Si les équations de la Dynamique admettent une solution périodique de période T et telle que l'un des exposants caractéristiques soit voisin de 2k##(-1)/pT, elles

[1879] Les paragraphes 378 à 380 sont consacrés au problème en question : [POINCARE, H., 1899], p. 343-351.

[1880] La comparaison n'est pas qu'une suggestion : la preuve par les exposants caractéristiques est bel et bien algébrique. En termes contemporains il s'agit d'une bifurcation nœud-col.

[1881] Aujourd'hui appelée bifurcation transcritique.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

admettront également des solutions périodiques de période pT peu différentes de la solution de période T et se confondant avec celles-ci quand l'exposant caractéristique devient égal à 2k##(-1)/pT. Ce sont les solutions périodiques du deuxième genre." [1882]

Il est intéressant de voir que Poincaré démonte, sur cette question, un mécanisme de "doublement de période" qui a marqué, depuis la fin des années 1970, une étape importante dans la recherche des scénarios dit de "transition vers le chaos" [1883]. Restons prudent toutefois puisque Poincaré ne s'est pas étendu plus sur la notion de bifurcation et n'a pas cherché à en élargir le champ d'application. L'application directe de ses théorèmes se limite à la question des orbites de George Darwin [1884].

Hadamard est plus dithyrambique que lui [1885]. Si Poincaré n'a pas usé du terme "bifurcation", Hadamard n'hésite pas à faire le rapprochement entre les figures des planètes et les solutions périodiques. Outre le fait qu'il baptise "bifurcation" les phénomènes de variation de nombre ou de stabilité des solutions, il se charge de faire les analogies entre les outils utilisés : par exemple, les coefficients de stabilité ici sont les exposants caractéristiques là [1886].

L'étude des bifurcations est une facette de plus de l'étude qualitative des équations différentielles ; quoi de plus naturel que le grand architecte et promoteur du qualitatif en soit aussi un initiateur.

3. Une question technique : les oscillations des machines hydrauliques. Henry Léauté (1885).

[1882] ***[POINCARE, H., 1899], p. 243-245, voir aussi les paragraphes 333 à 335.***

[1883] Le scénario en question est celui appelé "cascade de Feigenbaum" ou "cascade de doublements de période" : la multiplication, en cascade, de telles bifurcations aboutit à un état de chaos. Le "doublement de période" a été étudié par bien d'autres scientifiques. Nous renvoyons au chapitre 5 et aux paragraphes consacrés à cette question, à partir de la page 320.

[1884] George Darwin, second fils de Charles Darwin, est astronome à Cambridge. On notera que celui-ci est un admirateur de Poincaré (Cf. [BARROW-GREEN, J., 1997], p. 193 pour d'autres détails biographiques). Par ailleurs, il a participé lui aussi aux débats sur les masses fluides en rotation. Darwin a entrepris un certain nombre de calculs sur les orbites périodiques du problème des trois corps permettant d'expliciter les propriétés d'échanges de stabilité et de bifurcations, découvertes par Poincaré. Notamment, Poincaré reprend son exemple, dans les Méthodes Nouvelles : celui d'un système constitué d'un Soleil, d'une planète de masse dix fois plus petite en orbite circulaire autour du Soleil et d'un satellite de masse nulle orbitant dans le plan Soleil-planète. [POINCARE, H., 1899], p. 352-361.

[1885] Rien d'étonnant à cela : les propos sont tenus dans un article sur l'"Oeuvre mathématique de Poincaré". [HADAMARD, J., 1921].

[1886] [HADAMARD, J., 1921], p. 1983.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Les travaux de Léauté sont intéressants dans la mesure où nous pouvons les rapporter aux travaux mathématiques de Poincaré et à l'histoire des oscillations non linéaires au XXème siècle. Avant d'aborder la question technique, intéressons nous à l'ingénieur et savant contemporain de Poincaré, Henry Léauté.

a. L'ingénieur Henry Léauté (1847-1916)

Le *curriculum vitae* de Léauté est relativement simple. Il est né le 26 avril 1847, entre à l'Ecole Polytechnique en 1866 où il est formé comme ingénieur (Manufactures de l'Etat) et débute des travaux de mathématique (spécialisés en Analyse Mathématique, sur les fonctions elliptiques et les équations aux dérivés partielles [1887]). Par la suite il s'oriente vers la Mécanique, discipline à laquelle il se consacre jusqu'à sa mort en 1916. Il devient professeur de Mécanique à l'Ecole Polytechnique de 1895 à 1904 et est élu à l'Académie des Sciences (section de Mécanique) en 1890.

La nécrologie lue à l'Académie des sciences nous indique par ailleurs que son œuvre "est la meilleure réponse à ceux qui s'imaginent qu'il y a divorce entre la théorie et la pratique, et que les savants, s'ils ne sont pas nuisibles au progrès de l'industrie, sont du moins incapables de la servir utilement." [1888] . Il reste que les centres d'intérêt de Léauté vont tout de même plus à la théorie qu'à la pratique : il fait partie de la classe des ingénieurs savants, plus intéressés par le rôle des mathématiques et méprisant un peu la pratique [1889] .

Ainsi Léauté est ingénieur, formé aux mathématiques, intéressé par la théorie et quelques problèmes tirés de la technique. Ce sont des qualités que nous soulignons et dont le caractère est récurrent dans notre histoire du chaos, comme avec Andronov ou Vogel (chapitres 6 et 8).

b. Les oscillations des machines, 1885

Léauté s'est intéressé au fonctionnement des machines en général. Pour ce que nous voulons inscrire en parallèle aux travaux de Poincaré, c'est son mémoire de 1885 que nous retiendrons [1890] . Il s'agit d'une étude des machines actionnées par des moteurs hydrauliques, moins utilisées et moins maîtrisées que les machines à vapeur. Elles

[1887] Il soutient sa thèse le 15 février 1876, sur une "Etude géométrique du problème de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre et à trois variables". Le rapport sur la thèse de Léauté est publié dans [GISPERT-CHAMBAZ, H., 1991], p. 325-326.

[1888] [JORDAN, C., 1916]. Le mathématicien Camille Jordan est l'auteur de cette nécrologie.

[1889] Voir l'article de Belhoste et Chatzis sur "L'enseignement de la mécanique appliquée au début du XXème siècle" dans [FONTANON, C., 1998], p. 29-46.

[1890] [LEAUTE, H., 1885] "Sur les oscillations à longues périodes dans les machines activées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations" par H. Léauté.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

prennent néanmoins une place grandissante dans le système technique : Léauté entend combler un vide laissé par les savants sur la question des oscillations dans la vitesse fournie par ces machines. Le but de son mémoire est d'étudier les oscillations continues de la vitesse du moteur et de définir des moyens de stopper ces oscillations. La question n'est pas tout à fait neuve : les oscillations apparaissent également dans les machines à vapeur, mais le problème est suffisamment différent du cas présent pour que les théories déjà développées ne puissent pas être transposées simplement.

Une question technique est donc au cœur de l'étude de Léauté en 1885. L'intérêt pratique en est souligné d'emblée. Les données théoriques manquent et les constructeurs en sont réduits à "combattre ces oscillations sans bien se rendre compte des causes qui les produisent" [1891] : le mémoire présenté par Léauté vise ainsi à "mieux saisir le mécanisme", en "fixer les causes" et à "chercher les moyens d'y remédier" [1892]. Léauté cherche donc une théorie pour ces machines afin de mettre un terme à un certain empirisme dans la pratique de l'élimination des oscillations. Plus que les résultats effectifs, son cadre théorique, l'analyse mathématique et la discussion des résultats nous intéressent au premier chef.

Expliquons brièvement le problème posé par ces machines. Une machine hydraulique est composée d'un moteur et d'une admission d'eau, réglée par une vanne et commandée par un régulateur. Ceci est valable également pour les machines à vapeur. La différence essentielle entre les deux types de machines est la suivante : avec les machines à vapeur, il y a une action **directe** du régulateur sur la vanne, alors que pour les machines hydrauliques cette action est **indirecte**. Dans le second cas, le régulateur commande un système d'embrayage du système d'ouverture de la vanne. Une fois embrayé, le système d'ouverture et fermeture de la vanne est **actionné grâce à l'énergie produite par la machine** (autrement dit une partie de la puissance développée par la machine est utilisée pour actionner la vanne).

Sous action indirecte, le système vanne-régulateur-moteur n'entre pas toujours dans un régime de vitesse d'équilibre. Les problèmes surviennent lorsque la puissance demandée est perturbée (enclenchement d'une machine outil par exemple) : une modification de la résistance altère le régime de vitesse installé. Il faut ensuite déterminer s'il va converger vers une nouvelle position d'équilibre ou entrer en oscillation (les deux possibilités ont été observées empiriquement).

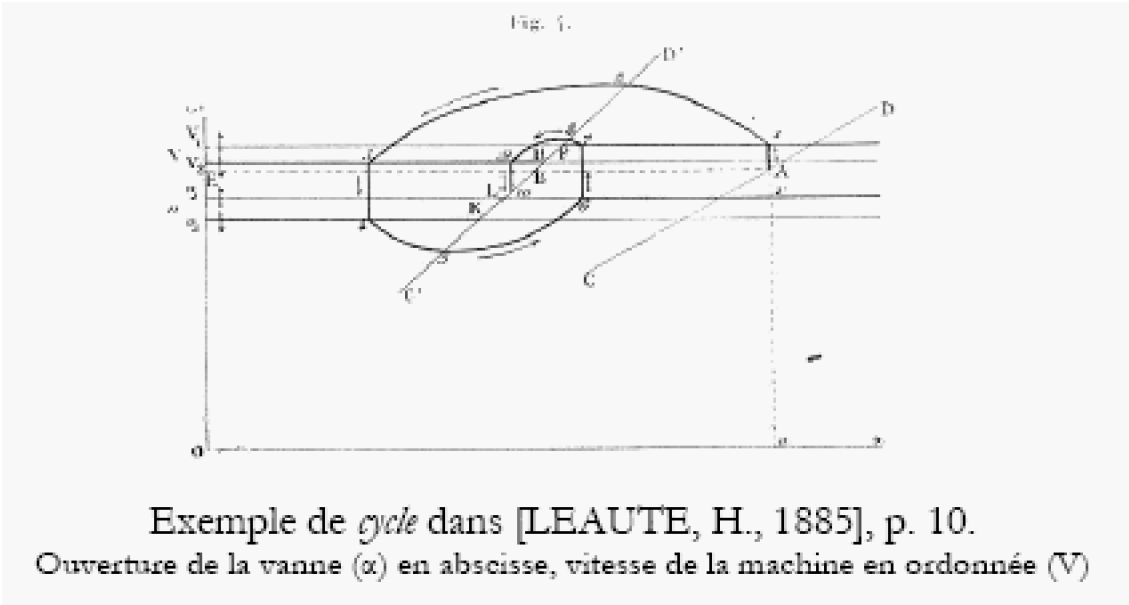
Léauté propose de voir l'évolution de la machine dans un diagramme plan, où l'axe des abscisses correspond à l'ouverture de la vanne, l'ordonnée à la vitesse du régime du moteur. Il définit une notion de **cycle** : "un circuit représentatif formé de quatre périodes : période d'immobilité de la vanne à vitesse croissante, période de fermeture, période d'immobilité de la vanne à vitesse décroissante, période d'ouverture" [1893].

[1891] Ibid., p. 2.

[1892] Ibid., p. 4.

[1893] Ibid., p. 13.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est



Exemple de *cycle* dans [LEAUTE, H., 1885], p. 10.
Ouverture de la vanne (α) en abscisse, vitesse de la machine en ordonnée (V)

Plusieurs définitions lui succèdent. Celle de **cycle fermé** : "il peut arriver que le point terminal du cycle coïncide avec le point initial et que, dès lors, on soit en présence d'oscillations se reproduisant indéfiniment dans des conditions identiques, c'est le cas du *cycle fermé*" [1894] . Cette correspondance entre oscillation et cycle fermé est toute naturelle dans l'esprit de Léauté, c'est en tout cas l'impression qui se dégage de la suite de définitions et de remarques sur les cycles.

L'étude du régime des vitesses revient ainsi à l'étude des cycles. C'est pourquoi Léauté s'attache à déterminer les équations des portions de cycles et en cherche les propriétés [1895] . Il compte établir des résultats d'une certaine généralité en mettant de côté les particularités relevant d'un moteur donné. Citons quelques conclusions de Léauté, d'ailleurs appelées "théorèmes" :

"Théorème I. – Deux courbes de déplacement quelconques, appartenant ou non à une même ligne figurative, ne se coupent jamais à moins de coïncider." [1896]

De quoi il conclut : "les différents cycles correspondant à une ligne figurative s'enveloppent toujours sans se rencontrer" [1897] . Le problème est, rappelons-le, de déterminer l'état final de la machine ayant subie une perturbation de la résistance, laquelle a induit un changement de régime. Ainsi, il tire une conséquence particulièrement évocatrice au sujet de ce problème :

[1894] Ibid., p. 14 (En italique dans le texte).

[1895] Sur la figure, les courbes à déterminer, mathématiquement, sont celles de fermeture et d'ouverture de la vanne, obtenues moyennant quelques approximations.

[1896] Ibid., p. 71. La "ligne figurative" correspond à la ligne suivie, sur le diagramme, par l'état de la machine. Un cycle, tel que le définit Léauté, est une ligne figurative qui a effectué un tour sur elle-même (retour à la même ordonnée que celle du point initial (voir la Figure).

[1897] Ibid., p. 72.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

"s'il existe un cycle fermé représentant l'état final de la machine à la suite d'une perturbation, les cycles successifs qui constituent la ligne figurative de cette perturbation s'en rapprochent indéfiniment, soit par l'intérieur, soit par l'extérieur, puisqu'ils ne peuvent se couper entre eux ou couper le cycle fermé limite." [1898]

En complément, et après plusieurs résultats, il en arrive à une seconde conclusion :

"lorsqu'il existe un cycle fermé, il n'en existe qu'un seul, et que ce cycle, complètement indépendant de l'état initial de la machine, est la ligne asymptotique de toutes les lignes figuratives quand on les parcourt dans le sens convenable." [1899]

Toute la suite du travail de Léauté est alors orientée vers la recherche de conditions pour qu'il n'existe pas de cycle fermé, et donc pas d'oscillations possibles.

c. Quelques explications

Plusieurs rapprochements s'imposent, mais il faut rester très prudent pour ne pas tomber dans l'anachronisme. On aura facilement compris la similitude graphique existant entre les "cycles fermés limites" définis par Léauté et les "cycles limites" de Poincaré. En outre, le lien établi par Léauté entre ses cycles et les oscillations de la machine ne peut que rappeler les travaux d'Andronov à la fin des années 1920 : Andronov a proposé de rapprocher les cycles limites de Poincaré des oscillations observées par Van der Pol dans des circuits électriques. Il faut signaler qu'Andronov connaît le travail de Léauté et le cite dans son ouvrage de "référence" en matière de théorie des oscillations, Theory of oscillations de 1937 [1900] .

Ce sont là des rapprochements volontairement forcés et qui ont le mérite d'exprimer clairement la portée du travail de Léauté. Aussi, tant qu'à établir des parallèles, nous en proposons un qui éclairera sans doute la question technique traitée. Nous avons insisté, en suivant les propos de Léauté, sur la différence entre machine à vapeur et machines à moteur hydraulique, et plus exactement sur les notions d'action régulatrice directe et indirecte. La différence de nature fondamentale entre les deux tient à l'effet **rétroactif** présent dans l'action indirecte. En effet, la machine produit elle-même la puissance nécessaire à l'action de la vanne. Autrement dit une partie de l'énergie (et de la vitesse) produite par la machine est ponctionnée pour contrôler cette vitesse, perturbant et déstabilisant ainsi le régime de vitesse. Le terme de rétroaction ne fait pas partie du vocabulaire de Léauté mais il a compris que se joue là l'origine des oscillations de la machine et la difficulté théorique. Les analyses traitant de l'action directe ne s'appliquent pas à cette question, d'une toute autre nature. Pour le dire encore différemment, l'action directe correspond à un mécanisme linéaire (proportionnalité entre vitesse de la machine

[1898] ***Ibid., p. 72.***

[1899] ***Ibid., p. 76.***

[1900] [ANDRONOV, A.A., KHAIKIN, S.E., 1949] : il s'agit de la traduction de l'ouvrage russe original de 1937. Pour les détails sur ces travaux nous renvoyons au chapitre 8, p. 524.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

et le débit de l'admission) alors que l'action indirecte introduit une non linéarité.

Il faut cependant relativiser ces assertions et réaffirmer que tout ceci est en partie une interprétation au goût du jour du problème soulevé par Léauté. Reprenons le diagnostic établi par Léauté pour préciser sa pensée.

La caractéristique principale de la théorie de Léauté est d'être *ad hoc*. Le but recherché et les travaux menés concernent une classe de machine particulière. Sa notion de cycle est liée au fonctionnement des machines. Dans la définition il évoque par exemple une période d'immobilité de la vanne, ce qui nous renvoie à une contrainte technique de l'embrayage : il faut en effet un temps non nul pour réaliser l'embrayage ce qui introduit un décalage temporel entre la perturbation en vitesse et l'activation de la vanne.

En tout état de cause, il ne s'agit pas d'une théorie générale des oscillations, telle qu'Andronov l'envisage, mais d'une étude plus modeste, technique et précise. L'ambition est de réduire le phénomène d'oscillation : dans la mesure du possible, il étudie les oscillations non pas pour elles-mêmes mais pour en caractériser le mécanisme de production et trouver des conditions susceptibles de les éliminer.

L'analyse du mémoire de Léauté suscite plusieurs interrogations. Et d'abord un étonnement. En 1885 Léauté choisi le terme "cycle fermé limite" pour désigner les comportements de la machine. Comment ne pas céder à la tentation de le rapprocher des cycles limites de Poincaré de 1881 ? Il y a certes une différence dans ce que chaque "cycle" représente. Dans le cas de Poincaré, il s'agit d'un cycle propre à une équation différentielle donnée, représenté dans l'espace des phases de l'équation. Pour Léauté, c'est un cycle de la machine représenté graphiquement dans un diagramme plan, commode car il permet de figurer les variables intéressantes (vitesse / ouverture de la vanne : il s'agit d'une sorte d'espace des états de la machine). Le cycle ne correspond pas à un phénomène dynamique unique mais est la succession de plusieurs phénomènes dont Léauté détermine les équations d'évolution. Il s'agit d'une dynamique par morceaux. Enfin, un cycle de Léauté n'est pas nécessairement un cycle fermé.

Cela dit, Léauté possédait suffisamment de notions de mathématiques pour comprendre, ne serait-ce que vaguement, la notion de cycle limite de Poincaré ; à vrai dire, il n'y a pas besoin de beaucoup de notions mathématiques pour ce qu'il utilise. Il n'est pas inimaginable qu'il ait pu s'en inspirer, même si les travaux de Poincaré ne bénéficient pas encore de toute leur publicité et notoriété en 1885. Néanmoins, aucune mention du travail de Poincaré n'émaille le mémoire de Léauté. Même les travaux ultérieurs de Léauté ne font aucune allusion au cycle limite de Poincaré.

Pour être plus complet il faut rappeler ici que la finalité de la recherche de Léauté est technique, et en particulier quantitative. Le qualitatif est un moyen annexe de son étude, un détour qu'il prend dans sa théorisation, mais il ne perd pas de vue que l'objectif est de donner des règles très précises de conception des machines. Les objets mathématiques construits n'ont pas besoin d'avoir la portée et la généralité de ceux imaginés par Poincaré.

En outre, l'inspiration de Léauté est d'ordre empirique plus que mathématique et construite sur l'association d'une oscillation et d'un cycle. Peut-être est-il préférable de ne

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

pas chercher si l'un a repris le concept de l'autre, mais plutôt si cette notion de cycle ne participe pas d'une intuition plus générale dépassant les deux cadres d'études. A nos yeux, les associations entre cycle et oscillation, couplés par l'intermédiaire d'une illustration graphique, peuvent trouver deux "antécédents" : les courbes de Lissajous et plus vraisemblablement, les cycles thermodynamiques.

Au sujet des courbes de Lissajous, liées à la question des vibrations, il est évident que ces deux élèves de l'Ecole Polytechnique ont suivi un cours de physique consacré à la question. En outre l'expérience de Lissajous [1901] est un résultat marquant du milieu du XIXème siècle en matière de vibration et acoustique, devenue rapidement un classique : le "Cours de Physique de l'Ecole Polytechnique" [1902] de M. Jamin, 2nd tome (publié en 1859) consacre un chapitre relatif à l'obtention graphique et l'étude des courbes. Nous pourrions encore plus simplement évoquer le traité très remarqué de Lord Rayleigh, Theory of Sound [1903] de 1877, dédié à l'étude des vibrations et de l'acoustique.

Nous n'affirmons pas qu'il existe un lien direct entre les notions de cycle et les courbes de Lissajous mais que l'association entre des vibrations et des courbes géométriques (cercles et ellipses notamment) a été ouverte par ce biais. Nous sommes tout à fait conscient qu'une courbe de Lissajous traduit le phénomène de superposition de deux vibrations et se distingue des oscillations discutées jusqu'à présent. Cependant le procédé de Lissajous est lui aussi destiné à l'analyse des vibrations.

La thermodynamique et les cycles de Carnot donnent un argument plus convaincant, au moins en ce qui concerne Léauté. En effet, la notion de cycle de Léauté est assez proche de la notion de cycle thermodynamique. Deux ingrédients de la théorie de Léauté s'apparentent à des outils de thermodynamicien : le diagramme plan, permettant la figuration de l'état de la machine et la constitution d'un cycle par branches de régimes différents. Léauté traite d'une question de machines et il n'est pas imaginable qu'il ne maîtrise pas totalement les théories thermodynamiques correspondantes.

Le cas de Poincaré est malheureusement plus délicat. A la seule lecture de son article, il est impossible de construire une hypothèse solide quant à une intuition extra-mathématique. De plus la démonstration mathématique constitue certainement une rationalisation du cheminement et de la construction de l'objet qui devient quasiment " naturel" au sein de sa théorie. Les cycles de Léauté et Poincaré sont donc liés de manière ténue et indirecte.

d. Conclusion

Quelle trace cette étude a-t-elle laissée dans l'étude des machines et plus largement dans

[1901] [LISSAJOUS, J.A., 1857a] et [LISSAJOUS, J.A., 1857b]. Jules Antoine Lissajous (1822-1880), physicien français, élève de l'Ecole Normale Supérieure (1841).

[1902] [JAMIN, N., 1859], p. 526-529. Dans un autre cours de physique, de Verdet, on trouve quasiment les mêmes chapitres ([VERDET, E., 1868] p. 104-108).

[1903] [RAYLEIGH, J.W.S., 1877], p. 26-30.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

la science et la technique ? Signalons tout d'abord que Léauté est suffisamment reconnu dans son activité. La nécrologie de Jordan, en 1916, retrace son parcours dans l'étude des machines et se termine par un résumé des résultats à propos des oscillations à longue période dans les machines hydrauliques :

"Construisant alors une courbe ayant pour abscisses l'ouverture de la vanne et pour ordonnée la vitesse correspondante de la machine, il a reconnu que ces oscillations se produisent seulement lorsque ladite courbe est fermée. L'intégration de l'équation différentielle du problème lui fait connaître les cas où cette circonstance se présente." [1904]

Sa position à l'Ecole Polytechnique et à l'Académie des Sciences indique qu'il est un scientifique bien établi. Jordan (membre de la section de géométrie de l'Académie des Sciences) connaît divers aspects de régulation des machines. Sans doute, les travaux de Léauté constituent-ils des références pour la plupart des mécaniciens de son temps. Sur la question des oscillations il est aussi au contact des problèmes de locomotives pour lesquelles oscillations et perturbations entraînent leur déraillement [1905] . Il ne fait guère de doute que Léauté fait figure d'autorité en matière de machines et plus largement en Mécanique.

Quant à sa postérité, il suffit de rappeler qu'Andronov, dans les années 20 (plus de 35 ans après) fera référence à ce travail en particulier. Les théories des machines de Léauté sont également citées dans le Traité de Mécanique Rationnelle [1906] de Paul Appell en 1904 : un chapitre est consacré aux oscillations dans les machines, sans évoquer néanmoins explicitement le mémoire de 1885. Sur ce dernier exemple la situation devient encore plus étonnante. En effet, cet ami de longue date de Poincaré, mathématicien de surcroît, connaît sans aucun doute possible la théorie des cycles limites de Poincaré.

En définitive, plusieurs des remarques précédentes laissent penser que l'association entre oscillation et cycle (fermé ou limite) s'est faite "naturellement", un peu comme si tout cela était dans l'"air du temps". Dans l'esprit de Léauté il s'agit peut-être d'une évidence sur laquelle il n'y a pas lieu de s'étendre ou, plus vraisemblablement, qui n'est pas susceptible d'apporter des éléments neufs et intéressants. On peut ajouter que Léauté, avec ce mémoire, a apporté des solutions pratiques au problème de départ. La question technique est en quelque sorte résolue, il n'y a plus lieu de s'interroger davantage sur les oscillations dans les machines. D'ailleurs, les travaux ultérieurs (d'Andronov notamment) seront entrepris en réponse à de nouvelles questions techniques d'oscillations (électriques et non plus seulement mécaniques).

En outre, lorsqu'il s'agit d'étudier des oscillations, l'ouvrage de Rayleigh, Theory of

[1904] [JORDAN, C., 1916], p. 502. Camille Jordan (1838-1922) est un mathématicien français. Le texte de Jordan transforme légèrement les affirmations de Léauté. Il insiste plus que Léauté lui-même sur la relation oscillation / cycle fermé. Ce qui était naturel pour Léauté, devient une quasi-découverte aux yeux de Jordan.

[1905] Voir les trois notes [MARIE, G., 1905a], [MARIE, G., 1905b], [MARIE, G., 1905c]. Léauté est chargé de la présentation des travaux de Marié, sur les locomotives, à l'Académie.

[1906] [APPELL, P., 1904], [APPELL, P., 1953]. Paul Appell, mathématicien français, 1855-1930.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

sound fait figure de référence. Or ces méthodes utilisées sont conçues sur le paradigme de l'oscillateur harmonique : les oscillations se conçoivent comme des superpositions d'oscillateurs harmoniques et diverses approximations permettent de réduire les oscillations à ce comportement. Il n'est nul besoin d'invoquer des théories plus complexes. La question des machines à moteur hydraulique et l'étude de Léauté sont donc assez inhabituels.

Pour ce qui est de la question de la "rétroaction", il semble bien que Léauté a saisi, au moins partiellement, un aspect essentiel du phénomène. Il a compris que la source des oscillations à longue période est là et que la nature de l'action indirecte implique que les travaux "classiques" ne sont pas capables d'en rendre compte. Léauté caractérise cette différence grâce à des considérations géométriques, puisque sur le même diagramme il trace la "ligne figurative" d'une machine à action directe et montre que, suite à une perturbation, un régime d'équilibre est atteint. Il obtient cette conclusion sans faire aucun calcul, en associant la géométrie aux propriétés de la machine.

Pour en terminer, insistons encore sur ce dernier point. Lorsqu'il étend ses propositions à des situations moins idéalisées (avec un rendement des machines plus réaliste et fluctuant), il sait que l'intégration numérique relève quasiment de l'impossible :

"[…] les calculs deviennent beaucoup plus compliqués et seraient presque impraticables si l'on voulait employer exclusivement la méthode analytique. Nous allons montrer comment on peut résoudre la question d'une façon suffisamment exacte à l'aide de tracés graphiques" [1907] **.**

Le recours à des procédés graphiques, classiques pour réaliser des calculs mathématiques de toute sorte, révèle d'autant mieux un constant intérêt pour la géométrie. Il avait auparavant utilisé des paraboles pour approcher numériquement les portions de cycle ; il ne lui reste plus qu'à montrer ensuite que le résultat peut s'obtenir par un "procédé plus géométrique qu'il est bon d'indiquer" [1908] . En outre, le choix des paraboles ne tient pas à la seule simplicité des expressions mathématiques, mais aussi à l'opportunité de s'aider de ces figures géométriques parfaitement connues dans l'analyse des cycles.

Son intérêt pour une vision géométrique des problèmes ne date pas de ce mémoire. Déjà sa thèse soutenue en 1876 contenait une forte composante géométrique : il envisageait alors "au point de vue géométrique le problème de l'intégration des équations différentielles partielles" et il a su "tirer un parti ingénieux des considérations géométriques sur lesquelles repose son travail" [1909] . Cependant, si Léauté utilise beaucoup de raisonnements géométriques, ils se distinguent de la perspective globale

[1907] ***[LEAUTE, H., 1885], p. 122.***

[1908] [LEAUTE, H., 1885], p. 52.

[1909] [GISPERT-CHAMBAZ, H., 1991], p. 325 et p. 326. Le mathématicien et mécanicien Victor Puiseux a rédigé le rapport. Il ajoute en outre : "M. Léauté aurait peut-être dû développer un peu plus quelques parties de son mémoire, afin de mettre les raisonnements à l'abri de toute objection. Mais ils sont exacts au fond, ainsi que les conclusions, et l'auteur a su tirer un parti ingénieux des considérations géométriques…".

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

adoptée par Poincaré. Léauté vise l'intégration approchée, par les moyens de la géométrie et les raisonnements élémentaires (sur les paraboles par exemple). Il existe une certaine contemporanéité entre les travaux de Léauté et quelques éléments mathématiques de Poincaré mais c'est seulement avec Andronov que ces relations sont approfondies dans le cadre élargi de la théorie des oscillations non linéaires.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Sources

Dépôts d’archives consultés

· NBL American Institute of Physics, Center for History of Physics, Niels Bohr Library (College Park, Maryland – USA, http://www.aip.org/history)

– Papers of Léon Brillouin

- Correspondence with L. de Broglie
- Correspondence with D. Gabor
- Correspondence with E. Schrödinger
- Correspondence with S. Ulam
- Correspondence with T. Vogel
- Correspondence with B. Van der Pol
- Souvenirs sur Henri Abraham
- La limite de validité des théories physiques, 1966
- Poincaré-notes

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

- California Institute of Technology, Institute Archives (Pasadena CA 1125 – USA, http://archives.caltech.edu/)

  – Archives Th. Von Karman

  - "The engineer grapples with non linear problems" (B124 F5)
    - Correspondance avec N. Minorsky(B20 F 34 et B130 F2).
    - Correspondance avec George Birkhoff (B3 F3)

- Archives R. A. Millikan : correspondance avec N. Minorsky

- Archives du CNRS **(**1 avenue de la Terrasse – Bâtiment 19 – 91198 Gif-sur-Yvette**)**

  – Fonds documentaire sur le CNRS :

  - Art 23-24 : Rapports de conjoncture du Comité National
    - Art 41 : Lettres des départements Scientifiques SPI et MPB / SPM
    - Art 48 : Fonds sur le département SPI
    - Art 49 : Fonds sur le département MPB / SPM
    - Art 57 : CNRS Info (1981-99)
    - Art 62 : Le Journal du CNRS (1988-99)
    - Art 64 à 66 : Rapports annuels d'activité du CNRS

- Contrats ATP 1977-82 (G 850117 Art 4 à 7)
- Fonds sur les Laboratoires (G850001) :

  - Art 7 : Laboratoire d'Automatique de d'Analyse des Systèmes (Toulouse)
    - Art 31 Centre Inter-Régional de Calcul Electronique (CIRCE, Centre de calcul analogique (CCA), Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI)
    - Art 44 : Laboratoire de Physique Théorique (LPT, Paris)

- Archives du LMA (Groupe des Laboratoires de Marseille – 31 chemin Joseph Aiguier – 13402 MARSEILLE CEDEX)

  – Archives répertoriées : Fonds François Canac
  – Le reste des archives n'est pas répertorié : archives administratives, rapports d'activités, contrats, dossiers de chercheurs…etc.

- Archives Municipales de la Ville de Marseille (10, rue Clovis Hugues – 13003 MARSEILLE)

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

– Fonds 46 ii : Archives personnelles de Théodore Vogel

· Archives personnelles de Michel Hénon (Observatoire de Nice) (Boulevard de l'Observatoire – 06304 NICE Cedex 4)

Archives orales

Entretiens avec les acteurs

(en cours de dépôt à l'Institut des Sciences de l'Homme – 14 Avenue Berthelot – 69363 LYON CEDEX 7)

· Robert Bouc (8 juillet 2002, au Laboratoire de Mécanique et Acoustique, Marseille ; non enregistré)
· Pierre Coullet (le 12 mars 2004,à l'Institut Non Linéaire de Nice)
· Martine Culioli (30 janvier 2003, au Laboratoire de Mécanique et Acoustique, Marseille)
· Michel Hénon (le 17 mars 2004, à l'Observatoire de Nice)
· Gérard Iooss (le 11 mars 2004, à l'Institut Non Linéaire de Nice)
· Michel Jean (30 janvier 2003, au Laboratoire de Mécanique et Acoustique, Marseille)
· Georges Lochak (24 septembre 2003, à la Fondation Louis de Broglie, Paris)
· Paul Lucet (30 janvier 2003, au Laboratoire de Mécanique et Acoustique, Marseille)
· Otto E. Rössler (réalisé avec Christophe Letellier, le 14 août 2003, au CORIA, Université de Rouen ; non enregistré)
· Daniel Thoulouze (le 18 juin 2003, au Musée du CNAM, Paris)
· Charles Tresser (le 12 mars 2004,à l'Institut Non Linéaire de Nice)

Entretiens réalisés par Cyrille Foasso (réalisés en juin-août 1997)

(Disponibles dans les archives du Laboratoire de Mécanique et Acoustique, Groupe des Laboratoires de Marseille – 31 chemin Joseph Aiguier – 13402 MARSEILLE CEDEX)

· Robert Bouc
· Claude Gazanhes
· Michel Jean
· Paul Lucet

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

- Frédéric Mazerolle
- François Santon

Archives du CNRS (1 avenue de la Terrasse – Bâtiment 19 – 91198 Gif-sur-Yvette)

- Jean Lagasse (18 novembre 1986. par Pierre-Eric Mounier-Kuhn, J.-F. Picard) disponible dans le Fonds documentaire sur le CNRS
- Hubert Curien (26 septembre 1986, par J.-F. Picard) disponible dans le Fonds documentaire sur le CNRS et sur : http://picardp1.ivry.cnrs.fr/Curien.htm
- André Lichnérowicz (14 mai 1986, par J.-F. Picard et Antoine Prost) disponible dans le Fonds documentaire sur le CNRS et sur : http://picardp1.ivry.cnrs.fr/Lichne.htm)

NBL American Institute of Physics, Center for History of Physics, Niels Bohr Library (College Park, Maryland – USA, http://www.aip.org/history)

- Interview with Professor Edward N. Lorenz, at Earth Sciences Building at MIT, by Kristine Harper, November 8, 2000

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Quelques sigles

- **CEA** : Commissariat à l'Energie Atomique
- **CNAM** : Conservatoire National des Arts et Métiers
- **CNET :** Centre National d'Etudes des Télécommunications
- **CNRS** : Centre National de la Recherche Scientifique
- **CRP** : Centre de Recherches en Physique
- **CRSIM** : Centre de Recherches Scientifiques, Industrielles et Maritimes
- **DRET :** Direction des Recherches, Etudes et Techniques
- **DRME** : Direction des Recherches et Moyens d'Essais
- **ENS** : Ecole Normale Supérieure
- **IAS :** Institute of Advanced Study
- **IHES** : Institut des Hautes Etudes Scientifiques
- **INLN** : Institut Non Linéaire de Nice
- **LAAS** : Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes
- **LMA** : Laboratoire de Mécanique et Acoustique
- **MIT :** Massachussets Institute of Technology
- **ONERA** : Office National d'études et de recherches aéronautique
- **ONR** : Office of Naval Research

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

- **ONRSI** : Office National des Recherches Scientifiques et Industrielles et des inventions

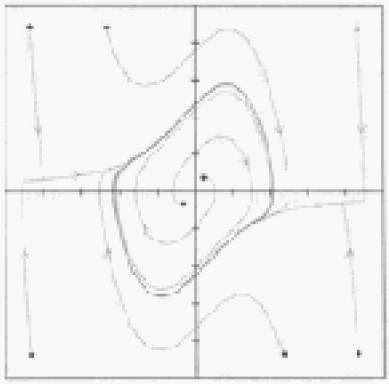
protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Glossaire

Nous voulons donner ici quelques idées sur les concepts souvent très techniques rencontrés au cours de cette thèse. Nous reprenons la présentation des scientifiques, en essayant de simplifier au maximum ce qui peut l'être.

- **Attracteurs :** par attracteur on désigne l'état vers lequel tend un système dynamique en temps "long" (il s'agit d'un système dissipatif) : la notion est bien illustrée dans l'espace de phase où les trajectoires semblent "attirées" par l'attracteur. Les attracteurs les plus communs sont les points (par exemple, un pendule amorti tend vers sa position d'équilibre vertical, qui est l'attracteur du système). En dimension 2, le portrait de phase peut avoir des configurations plus complexes. Certaines trajectoires finissent par s'enrouler autour d'une courbe fermée (par exemple un cercle) : la courbe en question s'appelle cycle limite. Le théorème de Poincaré-Bendixson assure que ce sont les seuls attracteurs (hormis les points et droites) possibles en dimension 2.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

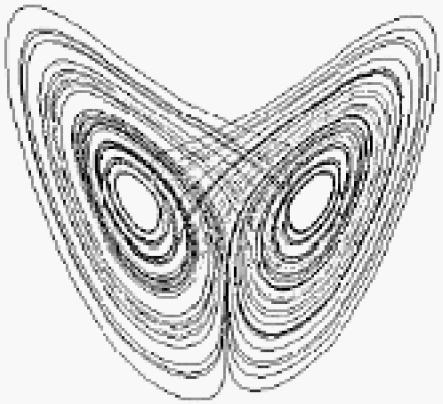


Un exemple de cycle limite

L'attracteur de van der Pol

- **Attracteurs étranges, étirements et repliements** : dans les dimensions supérieures à 2, de nouvelles formes d'attracteurs apparaissent. Ce sont les **attracteurs étranges**, à la géométrie très complexe (elle peut être fractale).

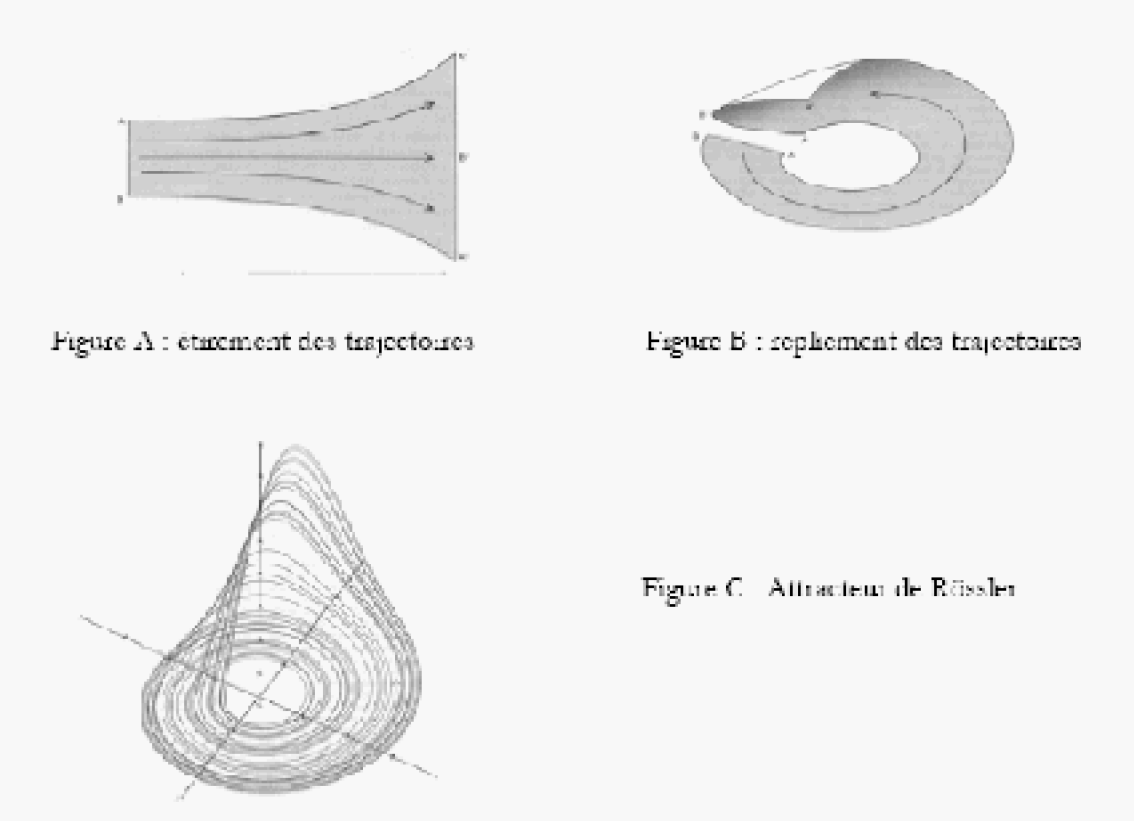
Exemple :



Attracteur de Lorenz

Les notions d'**étirements-repliements** permettent de mieux comprendre la formation de tels attracteurs. L'**étirement** (figure A) correspond au phénomène de "sensibilité aux conditions initiales" c'est-à-dire à l'écartement de trajectoires voisines. Le **repliement** (figure B) est le résultat du confinement du système : si les trajectoires prennent dix fois plus de place parce qu'elles sont étirées, il faut les replier pour les faire rentrer dans le même espace. La conséquence de ces deux tendances est le mélange très rapide de toutes les trajectoires et la formation d'un attracteur (figure C : l'attracteur de Rössler).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est



- Axiome A (ou Axiom A) : voir page 367.

L'Axiome A, pour un difféomorphisme *f*, est le suivant : "(a) l'ensemble *Ω* des points non-errants est hyperbolique. (b) les points périodiques de *f* sont denses dans *Ω*." (cf. [SMALE, S., 1967], p. 777). Lorsque f vérifie l'axiome, on dit aussi que f est hyperbolique.

Un ensemble invariant *Ω* est hyperbolique lorsque le faisceau tangent de la variété *M*, restreint à l'ensemble *Ω*, peut se scinder en deux parties, sur lesquelles la dérivée de l'application opère comme une contraction sur l'une, une expansion sur l'autre.

- **Bifurcation** : une bifurcation est un changement qualitatif de la dynamique d'un système suite à une faible variation d'un paramètre. La transition est brusque alors qu'habituellement la variation d'un paramètre implique une variation graduée de la dynamique. Enfin, parmi les critères qualitatifs les plus intéressants à observer au cours de ces transformation, la stabilité des solutions du système est la plus importante.
- **Chaîne de Markov :** suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ telles que la loi de probabilité de X_n dépende des épreuves précédentes (dans le cas le plus simple, X_n ne dépend que de X_{n-1}). Exemple : marche aléatoire avec un nombre fini de positions possibles.
- **Démon de Maxwell** (voir également p. 91)

L'expérience imaginée par Maxwell est la suivante. Deux enceintes contenant des molécules d'un gaz : A est l'enceinte "chaude", B la "froide" ; elles sont reliées par un

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

clapet. Un petit être intelligent est capable de discerner les vitesses des molécules. A l'approche de molécules de A dont la vitesse est inférieure à la moyenne des vitesses de B, il ouvre le clapet (sans dépense de travail). Il réalise l'opération inverse avec les molécules de B plus rapides que celles de A. L'énergie de l'enceinte A augmente, celle de B diminue ; autrement dit l'enceinte A a été chauffée en même temps que B a été refroidie, sans fournir de travail pour cela. L'intention de Maxwell est de montrer que le second principe ne repose que sur une certitude statistique et sur notre incertitude vis-à-vis des phénomènes microscopiques. [SKLAR, L., 1993], p. 38-39.

- **Déterminisme au sens de Laplace (déterminisme laplacien) et déterminisme "scientifique" :** dans un mémoire de 1776, repris en 1814 dans ces Essais philosophiques sur les probabilités, Laplace expose ce qui est communément considéré comme la conception laplacienne du déterminisme :

" L'état présent du système de la Nature est évidemment une suite de ce qu'il était au moment précédent, et si nous concevons une intelligence qui, pour un instant donné, embrasse tous les rapports des êtres de cet Univers, elle pourra déterminer pour un temps quelconque pris dans le passé ou dans l'avenir la position respective, les mouvements et, généralement, les affections de tous ces êtres. L'astronomie physique, celle de toutes nos connaissances qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain, nous offre une idée, quoique imparfaite, de ce qui serait une semblable intelligence. La simplicité de la loi qui fait mouvoir les corps célestes, les rapports de leurs masses et de leurs distances permettent à l'Analyse de suivre, jusqu'à un certain point, leurs mouvements, et pour déterminer l'état du système de ces grands corps dans les siècles passés ou futurs, il suffit au géomètre que l'observation lui donne leur position et leur vitesse pour un instant quelconque : l'homme doit alors cet avantage à la puissance de l'instrument qu'il emploie et au petit nombre de rapports qu'il embrasse dans ses calculs, mais l'ignorance des différentes causes qui concourent à la production des événements, et leur complication jointe à l'imperfection de l'Analyse, l'empêchent de se prononcer avec la même certitude sur le plus grand nombre des phénomènes…"

Les idées exposées par Laplace sont en fait une justification de l'usage de la "science des hasards ou des probabilités", car, selon lui, les faiblesses de l'esprit humain l'empêchent d'accéder à une prédiction absolue.

Popper, dans [POPPER, K., 1984], donne deux définitions du déterminisme "scientifique" qui sont le produit de ses réflexions sur le déterminisme laplacien :

"Le déterminisme 'scientifique' est la doctrine selon laquelle l'état de tout système physique clos à tout instant futur peut être prédit, même de l'intérieur du système, avec n'importe quel degré de précision stipulé, en déduisant la prédiction de théories, en conjonction avec des conditions initiales dont le degré requis de précision peut toujours être calculé dès lors que le projet de prédiction est donné."

C'est la version faible du déterminisme scientifique. La version forte inclut la capacité à "prédire, pour tout système, si un événement d'un type donné y aura jamais lieu".

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

- **Dimension (fractale) :** une droite, un cercle sont de dimension 1, un plan est de dimension 2 ; un ensemble de Cantor peut avoir une dimension fractale (au sens de fractionnaire), par exemple le triadique de Cantor (de dimension ln2/ln3≈0,63…).
- **Effet papillon :** idée souvent résumée par une affirmation du type : "un battement d'aile de papillon au Brésil peut engendrer une tornade au Texas". Dans son exposé ("Predictibility : does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?"), les propos de Lorenz en 1972 sont plus nuancés. Nous reproduisons les paragraphes essentiels :

"1. Small errors in the coarser structure of the weather pattern – those features which are readily resolved by conventional observing networks – tend to double in about three days. As the errors become larger the growth rate subsides. This limitation alone would allow us to extend the range of acceptable prediction by three days every time we cut the observation error in half, and would offer the hope of eventually making good forecasts several weeks in advance. 2. Small errors in the finer structure – e.g., the positions of individual clouds – tend to grow much more rapidly, doubling in hours or less. This limitation alone would not seriously reduce our hopes for extended-range forecasting, since ordinarily we do not forecast the finer structure at all. 3. Errors in the finer structure, having attained appreciable size, tend to induce errors in the coarser structure. […] Cutting the observation error in the finer structure in half – a formidable task- would extend the range of acceptable prediction of even the coarser structure only by hours or less. The hopes for predicting two weeks or more in advance are thus greatly diminished. 4. Certain special quantities such as weekly average temperatures and weekly total rainfall may be predictable at a range at which entire weather patterns are not." [ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000], p. 92-3.

- **Ergodicité** : Pour s'en donner une idée simple de l'"hypothèse ergodique", destinée à légitimer le traitement statistique de la Mécanique et l'unicité de la distribution stationnaire (microcanonique), on peut retenir deux formulations : la moyenne temporelle d'une observable du système égale sa moyenne spatiale (dans l'espace des phases) / le temps passé par une trajectoire de l'espace des phases dans une région est proportionnel à la taille de cette région. (Pour des détails sur les origines de cette notion, voir chapitre 2, p. 97).
- **Ensemble de Cantor** : un exemple (simple) est l'ensemble triadique de Cantor, construit en 1883 par Georges Cantor (1845-1918). C'est un ensemble infini de points qui demeurent à la suite du partage d'un segment en tiers fait d'une façon indéfinie : un segment est d'abord tracé, il est partagé en trois parties. La partie du centre est effacée. L'opération est réitérée pour aboutir à l'ensemble de Cantor :

Les ensembles ont une dimension fractale (ln2/ln3≈0,63…).

☞ **Entropie (thermodynamique)** : elle peut se définir soit comme une expression de la qualité du travail qu'un système peut fournir (elle correspond à $\int \frac{dQ}{T}$ entre les instants considérés), soit comme une fonction du nombre d'états accessibles au système (définition statistique, $S = k \log W$). (Voir également les travaux de Boltzmann présentés p. 90)

- **Espace des phases, degré de liberté :** pour un système décrit mathématiquement on ne considère qu'un nombre limité de variables d'état du système. Par exemple pour une particule classique la position et la vitesse sont les deux paramètres pertinents. L'**espace des phases** est l'espace dans lequel ces variables évoluent: pour une particule, c'est un plan (2 variables : position en abscisse, vitesse en ordonnée). Pour un ensemble de deux particules, les 4 variables parcourent un espace à 4 dimensions.

Une coordonnée de l'espace des phases d'un système correspond à un **degré de liberté**. La notion de degré de liberté est à peu près claire pour les systèmes dissipatifs, mais parfois ambiguë quand il s'agit de systèmes Hamiltoniens : dans ce cas, un degré de liberté correspond à une paire de variables dites canoniques.

- **Linéaire :** le terme **linéaire** traduit essentiellement une proportionnalité entre causes et effets. Mathématiquement, ceci se reflète dans les équations du type : "Y=a.X".

Une équation différentielle est linéaire s'il a une relation linéaire entre la fonction et ses dérivées. La propriété la plus remarquable est qu'on sait souvent résoudre analytiquement ce type d'équation.

- **Méthode de Monte-Carlo** : Le problème posé originellement est une question d'évaluation des propriétés d'un processus de diffusion de neutrons, issus d'un réacteur nucléaire par exemple. Le processus est trop complexe pour être évalué précisément dans son ensemble. La méthode, imaginée d'abord par Ulam en 1946, puis perfectionnée avec Von Neumann et Metropolis, consiste à réaliser un "modèle statistique" du phénomène physique, combinant des "processus stochastiques et déterministes". L'intention est de calculer le cheminement d'une particule selon un processus simplifié : l'"histoire" d'une particule est une chaîne d'évènements, où à chaque étape, la suite de l'"histoire" est tirée au hasard selon une loi connue. En simulant plusieurs parcours, on obtient une idée statistique du comportement dans son ensemble. (Voir page 495).
- Mouvement brownien : voir page 114.
- **Non linéaire :** tout ce qui n'est pas linéaire. Le non linéaire est caractérisé par la non proportionnalité des effets par rapport aux causes. Il ouvre la porte à des catastrophes engendrées par des causes minuscules. Contrairement aux équations différentielles linéaires, dans la plupart des cas on ne sait pas résoudre les équations différentielles non linéaires.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

- **Paradoxe de Loschmidt** : Le "paradoxe de réversibilité" (où "paradoxe de Loschmidt") affirme qu'un retournement instantané des vitesses des atomes d'un gaz devrait conduire, mécaniquement, à un retour en arrière du système et donc voir l'entropie décroître. Pour Loschmidt, il y a une contradiction avec le second principe. (Cf. page 93 pour plus de détails).
- **Paradoxe de Zermelo-Planck** : En 1896, Zermelo affirme qu'en vertu du théorème de récurrence un système mécanique doit revenir infiniment souvent, aussi près qu'on veut de la situation initiale. Pour lui, il y a contradiction avec le second principe. L'attaque, inspirée par Planck, vise avant tout la vision statistique du second principe, qu'il considère pour sa part comme une "vraie" loi de la physique (non une loi valable statistiquement). Elle participe d'un rejet des conceptions de Boltzmann, en l'occurrence sa vision mécaniste, atomiste du monde. (Cf. page 94 pour plus de détails).
- **Portrait de phase :** pour une condition initiale fixée, le système évolue dans un sous-ensemble de son espace des phases. Pour une particule, lancée à une vitesse v_0 à la position x_0, les seuls points de l'espace atteints seront sur la droite de pente v_0 passant par x_0 : c'est une trajectoire de l'espace des phases. Le portait de phase est l'ensemble de ces trajectoires.
- **Problème des trois corps** : le système Terre-Lune-Soleil est un exemple de système de trois corps massifs. La Mécanique newtonienne permet d'en écrire des équations d'évolution en terme d'équations différentielles. La résolution mathématique du problème est appelée **problème des trois corps**. Tout le problème est que les équations sont non linéaires et leur résolution est impossible analytiquement. (Ce problème des trois corps est simple en apparence, mais il a fallu attendre Poincaré pour montrer qu'on ne trouverait pas de solution explicite au problème et les développements scientifiques du XXème siècle pour comprendre que le problème peut devenir chaotique).
- **Second principe de la thermodynamique** : il en existe plusieurs formulations. Par exemple : "La chaleur ne passe pas spontanément d'un corps froid sur un corps chaud" (formulation de R. Clausius) ou "avec une seule source de chaleur, on ne peut réaliser une machine thermique motrice" (énoncé de Lord Kelvin). Ou encore : "L'entropie d'un système isolé est un fonction croissante du temps".
- **Sensibilité aux conditions initiales (SCI), exposants de Lyapounov :** étant donné un système mathématiquement déterministe, ce système vérifie la propriété de sensibilité aux conditions initiales si deux conditions initiales infiniment proches donnent, au bout d'un temps suffisamment long, deux états totalement différents (signalons tout de suite que le terme "initial" est trompeur. Il faudrait plutôt retenir qu'il s'agit du temps auquel une perturbation est introduite). L'exemple choisi par Poincaré dans son texte "Le Hasard" [POINCARE, H., 1907] illustre ce fait : un cône placé sur sa pointe est sensible à la moindre perturbation et tombera du côté ou le pousse la perturbation. Le système amplifie la perturbation.

Plus précisément, il y a sensibilité aux conditions initiales (au sens de Ruelle) lorsque la

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

croissance des perturbations est exponentielle. Cette croissance est alors mesurée par les exposants de Lyapounov.

- **Séries temporelles :** ce sont des séquences de données recueillies sur un système à des intervalles de temps réguliers. Ces séries de mesures permettent de reconstruire et d'étudier la dynamique du système en question.
- **Stabilité structurelle** : ce concept permet de définir la "robustesse" d'un système. Un système dynamique est structurellement stable lorsqu'il demeure topologiquement équivalent sous l'effet d'une petite perturbation de ses équations. Deux systèmes sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme transformant les trajectoires d'un système dans l'autre. (Voir également p. 348 et p. 357)
- **Systèmes complexes – Complexité** : ce sont des systèmes non linéaires, étendus spatialement et/ou temporellement, caractérisés par des propriétés collectives différentes des comportements de chaque partie du système. Pour résumer, le comportement du tout n'est pas égal à la somme des évolutions des parties.
- **Système déterministe :** un système dynamique est dit déterministe si la donnée de l'état du système à un instant initial détermine entièrement l'état du système, à n'importe quel instant. C'est un déterminisme mathématique définit en opposition aux systèmes dynamiques stochastiques pour lesquels l'évolution est aléatoire.
- **Système dynamique : s**chématiquement, c'est un système régi par des équations différentielles dont la variable d'évolution est le temps. Mathématiquement, un système dynamique est la donnée d'un espace de phase et d'une règle qui stipule la dynamique, c'est-à-dire l'évolution des variables étant donnée une valeur initiale. Le temps dans ces systèmes peut être continu ou discret, ce qui change complètement leur nature.
- **Systèmes dissipatifs, conservatifs et Hamiltoniens** : un système physique (ou mathématique) dans lequel une quantité se conserve (par exemple, l'énergie, le moment cinétique…) est appelé **système conservatif**. A l'opposé, un **système dissipatif** ne possède aucune propriété de ce genre. Parmi les systèmes conservatifs, il existe une classe de systèmes importants pour la physique : les **systèmes Hamiltoniens**, qui sont régis par des équations canoniques, et pour lesquels la quantité appelée Hamiltonien se conserve.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Index des noms

A

- Abe, M., 483, 484
- Ahlers, G., 274, 310
- Andersson, K.G., 47
- Andoyer, H., 61, 62
- Andrade, J., 61, 63, 74, 125
- Andronov, A., 23, 64, 71, 209, 213, 217, 330, 331, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 352, 353, 355, 357, 360, 361, 366, 389, 420, 443, 444, 449, 450, 451, 452, 453, 455, 461, 462, 466, 467, 468, 487, 520, 527, 625, 636, 638, 639, 642, 643
- Anosov, D., 166, 245, 366, 367, 368, 414, 415, 416
- Appell, P., 63, 642
- Appleton, E., 445, 471
- Argémi, J., 470, 476, 477, 481, 482, 487, 581, 583, 596, 598, 599, 600, 602
- Arnéodo, A., 199, 296, 300, 302, 303, 598

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

- Arnold, V., 24, 25, 48, 58, 133, 134, 186, 193, 194, 198, 366, 367, 374, 410, 413, 414, 415, 416, 417, 421, 423, 427, 434, 437, 494
- Aspray, W., 496, 497, 505, 506, 508, 509
- Aubin, A., 8, 20, 23, 24, 121, 127, 128, 129, 135, 160, 175, 240, 273, 275, 280, 285, 310, 318, 348, 351, 353, 356, 362, 365, 367, 371, 372, 373, 374, 375, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 385, 386, 387, 467, 594, 595

B

- Bachelier, L., 114
- Barrow-Green, J., 28, 29, 30, 31, 33, 35, 36, 41, 45, 46, 47, 50, 51, 52, 53, 70, 335, 336, 630, 634
- Batterson, S., 360, 361
- Belousov, B., 132, 210, 213, 215, 220, 228, 229, 235, 238, 240, 267, 316, 325, 442, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 529, 530, 531, 533, 534, 535, 539, 540, 541, 542
- Bendixon, I., 39, 61, 232
- Benettin, G., 244, 246, 247, 248, 250, 295, 427
- Bergé, 9, 138, 139, 141, 297, 310, 314, 595, 599
- Bernard, C., 81, 82, 83, 84
- Bernoulli, D., 29
- Bernoulli, J., 413
- Besicovitch, A., 241, 242, 248
- Birkhoff, G.D., 24, 59, 64, 103, 107, 142, 143, 200, 226, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 346, 347, 348, 350, 351, 352, 353, 354, 360, 361, 363, 364, 365, 369, 372, 373, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 420, 426, 427, 428, 449, 451, 461, 484, 492, 493, 495, 496, 511, 625, 630, 644
- Bloch, A., 19, 20, 212, 444, 446, 490
- Bogoliuboff, N.N., 16, 349, 350, 351, 355, 395, 400, 401, 432, 450, 452, 453, 454, 455, 456, 461, 463, 479
- Boltzmann, L., 49, 75, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 110, 111, 112, 114, 115, 116, 200, 201, 394, 399, 415, 429, 613, 653
- Bonhoeffer, K.F., 213, 522
- Borel, E., 97, 103, 116, 117, 118, 119, 351, 399, 429
- Born, M., 97, 430, 431, 457

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

- Bouc, R., 15, 477, 579, 645
- Bouquet, J.C., 35, 38, 45
- Bourbaki, N., 368, 386, 494, 551, 552, 553, 556, 557
- Boussinesq, J., 75, 79, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 93, 199, 274, 480
- Bowen, R., 166, 167, 193, 201, 250, 295, 371, 379, 387, 437
- Braun, K., 449
- Bray, W., 521, 522, 535
- Bredig, G., 516, 521
- Breton, P., 82, 93
- Brillouin, L., 111, 428, 429, 430, 431, 439, 444, 470, 471, 562, 578, 644
- Brillouin, M., 95, 108
- Briot, C., 35, 38, 45
- Brush, S.G., 87, 89, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 105, 111, 114, 527
- Burburry, S.H., 95
- Burke, W., 253

C

- Campanino, M., 292
- Campbell, L., 90, 136, 144, 633
- Canac, F., 471, 472, 474, 477, 557, 577, 581, 645
- Canguilhem, G., 122
- Cartan, H., 552, 553, 603, 631
- Cartwright, M.L., 351, 352, 356, 359, 361, 363, 454, 471, 479
- Casati, G., 130, 191, 436
- Casimir, H., 445, 448
- Cesari, L., 359, 387, 479
- Chabbal, R., 578, 579
- Chance, B., 526, 530, 538
- Charney, J., 505, 509, 512
- Chaundy, T.W., 277
- Chazy, J., 61, 62, 63, 64, 74, 350, 420
- Chenciner, A., 287, 290, 291, 294, 299, 380

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

- Chirikov, B., 58, 131, 134, 143, 172, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 202, 244, 245, 246, 247, 250, 251, 306, 403, 412, 418, 421, 422, 423, 431, 433, 435, 436, 486, 585
- Clairaut, A., 29
- Clausius, R., 89, 90, 101, 111, 114
- Collet, P., 283, 292, 302, 319
- Connes, A., 603
- Coste, J., 285, 597
- Couffignal, L., 490, 558, 562, 564
- Coullet, P., 15, 136, 199, 242, 265, 278, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 305, 307, 309, 317, 326, 598, 599, 618, 619, 620, 645
- Cournot, A.A., 84, 85
- Crutchfield, J., 252, 267, 503, 541
- Curien, H., 576, 646
- Curlverwell, E.P., 93, 95

D

- d'Alembert, J., 29
- Dahan, A., 8, 9, 20, 23, 24, 44, 79, 80, 81, 84, 121, 127, 128, 129, 240, 280, 285, 310, 318, 345, 348, 351, 356, 357, 358, 359, 360, 380, 505, 506, 507, 510, 512, 513
- Darlu, A., 84
- Darwin, G., 634
- Davies, P., 436
- De Donder, T., 527
- de Possel, R., 552, 561, 563
- Deakin, M.A.B., 155, 157
- DeBaggis, H., 357, 358
- Degn, H., 157, 526, 532, 533
- Delaunay, C., 31, 32, 54, 62
- Delboeuf, J., 84
- Den Hartog, J.P., 454, 455, 457, 479
- Derrida, B., 279

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

- Devaney, R., 143, 199
- Diacu, F., 9, 25, 26, 70, 124, 364, 368
- Dieudonné, J., 552, 553, 554, 598
- Diner, S., 9, 347, 348, 408, 409, 421, 445, 449, 467
- Dubois, M., 9, 141, 297, 310, 314, 595, 599
- Duffing, G., 47, 478, 483, 484
- Dugas, R., 94, 99, 108, 113
- Duhem, 26, 67, 68, 70, 72, 76, 87, 429
- Duhem, P., 68, 69

E

- Eckmann, J.P., 272, 273, 283, 292, 302, 317, 318, 319, 320, 321, 323, 387, 437
- Ehrenfest (P. ou T.), 97, 99, 103, 104, 391, 393, 394, 396, 428
- Ehrenfest, P. et T., 88, 97, 98, 99, 100, 101, 103, 107, 108, 115, 116, 117, 119, 390, 399, 404
- Einstein, A., 99, 114, 115, 293, 527, 529, 553, 554
- Eliassen, A., 508
- Epstein, H., 292
- Euler, L., 29, 30, 474

F

- Farmer, J.D., 249, 252, 267, 503, 541
- Feigenbaum, M., 131, 138, 140, 141, 265, 272, 276, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 298, 299, 300, 302, 305, 307, 308, 309, 310, 311, 316, 317, 319, 321, 326, 498, 502, 634
- Feit, S.D, 198, 247
- Fermi, E., 423, 424, 425, 428, 430, 431, 432, 497
- Ferrier, J.P., 606
- Field, R., 533, 534
- Fock, V.A., 404, 409

- Ford, J., 130, 134, 191, 423, 425, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 438, 503, 585
- Fouillée, A., 84
- Franceschelli, S., 8, 9, 311, 314, 315
- Franck, U., 210, 522
- Frisch, U., 176
- Froeschlé, C., 191, 246, 247, 494, 597, 602, 618
- Fuchs, L., 35, 45
- Fukunaga, K., 242

G

- Gabor, D., 256, 429, 430, 644
- Galgani, L., 244, 247
- Gallavotti, G., 101, 103, 135
- Gervois, A., 279
- Gibbs, J.W., 97, 100, 101, 108, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 396, 397, 402, 408, 415, 437, 529
- Gilain, C., 36, 37, 40, 44
- Giraud, A., 306
- Glansdorff, P., 528, 529, 532, 536, 537
- Gleick, 9, 141, 145, 150, 240, 252, 253, 278, 280, 281, 283, 504
- Gleick, J., 252, 278, 293, 487, 504, 613
- Gola, M., 600, 602
- Goldstine, H., 500, 505
- Gollub, J.P., 136, 141, 160, 167, 240, 241, 265, 273, 274, 310, 541
- Gouy, L.G., 79, 114
- Grassberger, P., 252, 269, 323, 628
- Graziani, K.R., 540
- Grossman, S., 171, 278, 290
- Guckenheimer, J., 172, 174, 226, 258, 284, 294, 295, 302, 303, 304, 387
- Gumowski, I., 129, 146, 155, 284, 305, 306, 307, 308, 309, 317, 547, 564, 565, 583, 584, 585, 587, 597
- Gürel, O., 131, 142
- Gutzwiller, M., 131

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

- Gyldén, H., 31, 32, 54
- Gyldèn, H., 31

H

- Haag, J., 350, 451, 452, 453, 468, 469, 478
- Hacking, I., 79
- Hadamard, J., 26, 35, 59, 62, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 87, 112, 113, 331, 334, 337, 340, 369, 398, 406, 414, 603, 631, 635
- Haken, H., 131, 136, 228, 541
- Hale, J., 359, 360, 387
- Halmos, P., 411, 412
- Hausdorff, F., 241, 248, 261, 262, 288
- Hayashi, C., 443, 470, 479, 482, 483, 484, 485, 486, 585
- Hedlund, G., 398, 405, 414
- Heiles, C., 144, 176, 245, 246, 423, 425, 433, 434, 435, 489, 492, 493, 564
- Helleman, R.H.G., 73, 74, 131, 132, 133, 134, 136, 137, 143, 145, 146, 172, 178, 179, 180, 182, 186, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 202, 203, 204, 244, 246, 422, 495
- Helmholtz, H., 100, 104, 105, 112
- Hénon, M., 15, 141, 142, 143, 144, 175, 176, 177, 178, 189, 197, 198, 199, 245, 246, 247, 249, 251, 269, 277, 283, 287, 289, 291, 327, 423, 425, 426, 427, 433, 434, 435, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 514, 547, 548, 564, 568, 569, 585, 598, 613, 618, 645
- Hermite, C., 35, 37, 45
- Herschel, J., 89
- Hess, B., 526
- Hill G.W., 34
- Hill, G.W., 31, 33, 34, 35, 42, 46
- Hirniak, J., 516, 517, 518, 521
- Hirsch, M., 129, 131, 318, 362, 514
- Hofstadter, D., 138, 139, 145, 327, 503
- Holmes, P., 9, 25, 26, 70, 124, 364, 368
- Holton, G., 29, 73
- Hopf, E., 131, 145, 319, 348, 352, 353, 382, 383, 384, 389, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 405, 406, 411, 414, 415, 420, 496

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

- Hudson, J., 228, 538, 539, 540, 541, 542
- Hudson, J.L., 157, 540, 541

I

- Ibanez, J.L., 175, 311
- Iooss, G., 15, 136, 146, 495, 598, 619, 645
- Israël, G., 61, 518, 519
- Izraelev, F.M., 191

J

- Jean, M., 15, 477, 478, 579, 645

K

- Kaplan, J., 198, 248, 249
- Khaikin, S.E., 209, 217, 347, 348, 449
- Khinchin, A., 399, 400, 401, 402, 412
- Kloeden, P., 155, 156, 157
- Kolmogorov, A., 24, 48, 58, 116, 131, 133, 186, 190, 191, 198, 244, 245, 246, 247, 251, 256, 295, 345, 349, 366, 399, 400, 402, 412, 413, 414, 416, 418, 419, 420, 421, 422, 425, 427, 431, 432, 434, 436
- Koopman, B.O., 392, 393, 394, 395, 396, 411
- Köros, E., 533
- Kourilsky, F., 617
- Kovalevskaya, S., 35
- Krumhansl, 134
- Kruskal, M., 134, 492, 503
- Kryloff, 16, 349, 350, 351, 355, 395, 400, 432, 450, 452, 453, 454, 455, 456, 461, 463, 479

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

- Krylov, N.S., 16, 180, 190, 191, 398, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 414, 415, 417, 420, 421, 422, 434
- Kuczma, M., 155
- Kuhn, T., 624

L

- Lagasse, J., 306, 583, 585, 646
- Lagrange, J.-L., 29, 30, 32, 34, 104
- Landau, L., 159, 166, 273, 274, 382, 383, 384, 386, 420, 434
- Lanford, O., 161, 173, 175, 199, 219, 243, 275, 283, 292, 302
- Laplace, P.-S., 30, 31, 32, 33, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 92
- LaSalle, J., 359, 360, 469, 479
- Lasota, A., 154, 170
- Léauté, H., 70, 71, 74, 444, 453, 520, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643
- Lebesgue, H., 49
- Lebowitz, J., 134, 434
- Leonard, W., 286, 287
- Leray, J., 382
- Letellier, C., 207, 208, 209, 210, 213, 215, 216
- Levi-Civita, T., 61, 331
- Levinson, N., 351, 352, 354, 356, 359, 360, 361, 363, 364, 372, 454, 466, 484, 485
- Li, T.Y., 127, 137, 140, 143, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 160, 161, 163, 164, 168, 169, 170, 171, 172, 191, 199, 205, 215, 216, 217, 218, 221, 222, 223, 225, 229, 230, 231, 239, 244, 276, 277, 279, 280, 286, 294, 300, 309, 317, 387, 495
- Libchaber, A., 141, 285, 291, 292, 293, 310, 312
- Liénard, A.M., 350, 351, 451, 452, 453, 468, 520
- Lindstedt, A., 31, 32, 33, 41, 43, 44, 48, 54, 57, 58
- Liouville, J., 49, 431
- Lissajous, J.A., 98, 102, 640, 641
- Littlewood, J., 351, 352, 359, 361, 363, 372, 454, 471
- Lord Kelvin, 93, 106, 458, 465
- Lord Rayleigh, 98, 115, 445, 471, 480, 483, 641

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

- Lorenz, E., 13, 131, 139, 140, 141, 142, 144, 145, 153, 154, 157, 160, 161, 162, 163, 165, 166, 167, 168, 169, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 178, 189, 198, 215, 216, 223, 226, 230, 243, 248, 249, 251, 253, 254, 258, 261, 263, 269, 271, 275, 277, 290, 291, 296, 297, 301, 302, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 400, 441, 489, 502, 503, 504, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 611, 613, 628, 646
- Lorenz, K., 206
- Loschmidt, J., 82, 93, 94, 117, 653
- Lotka, A., 179, 210, 451, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 525, 530, 531, 533, 534, 539, 542
- Lozi, R., 178
- Lusin, N., 345, 399, 400
- Lyapounov, A., 64, 65, 172, 191, 197, 201, 230, 239, 241, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 257, 258, 260, 265, 266, 267, 268, 269, 272, 295, 296, 298, 301, 322, 324, 325, 331, 346, 347, 348, 350, 355, 356, 359, 360, 416, 437, 449, 451, 463, 483, 529, 541, 599, 602, 631, 632, 633

M

- MacDonald, M., 137, 138, 238
- Malavard, L., 472, 490, 558, 561, 563, 564, 570
- Mandelbrot, B., 242, 243, 270, 285
- Mandelstam, L., 345, 346, 449, 455
- Manneville, 9, 141, 175, 265, 297, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 595, 599
- Marinko, D., 540
- Martin, P.C., 131, 134, 136, 160, 175, 241, 274, 275, 276, 277, 293, 356, 422, 492, 595
- Mather, J., 368, 375, 380
- Maurer, J., 141, 291, 292, 312
- Maxwell, J.C., 75, 79, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 96, 97, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 111, 112, 114, 115, 118, 119, 394, 480, 633, 650
- May, R.M., 131, 137, 138, 139, 140, 143, 148, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 158, 162, 177, 215, 231, 276, 277, 286, 287, 299, 300, 308, 309, 310, 317
- Mazo, R., 533
- McLaughlin, J., 274, 277
- Metropolis, N., 153, 154, 277, 278, 279, 280, 290, 299, 495, 496, 501, 503, 652
- Minorsky, 22, 23, 28, 36, 209, 213, 215, 355, 432, 441, 443, 450, 454, 455, 456, 457,

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 469, 470, 473, 474, 477, 479, 480, 481, 487, 644

- Mira, C., 129, 146, 155, 284, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 317, 547, 564, 565, 569, 583, 584, 585, 587, 597
- Mitropolsky, Y., 23, 479, 487
- Mittag-Leffler, G., 45, 46, 48, 50, 51
- Momota, H., 486
- Mori, H., 248, 249
- Morse, 24, 331, 332, 340, 341, 342, 392
- Morse, M., 24, 331, 335, 340, 342, 362, 364, 365, 368, 380, 398
- Moser, J., 24, 25, 48, 58, 133, 134, 186, 198, 294, 353, 360, 421, 427, 431
- Mosseri, R., 430, 431
- Mounier-Kuhn, P.E., 569, 646
- Myrberg, P.J., 155, 277, 306, 309

N

- Nagashima, T., 248
- Naville, E., 84
- Nayroles, B., 578, 579, 580, 581, 582
- Nemytskii, V.V., 400, 416, 511
- Newhouse, S., 131, 156, 177, 294, 319, 371, 387
- Newton, I., 29, 80
- Nitecki, Z., 135, 199
- Novikov, 134, 366
- Noyes, R., 533, 534

O

- Olsen, D., 242
- Onsager, L., 527, 528
- Oono, Y., 157

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

- Ornstein, D., 413
- Oseledec, V., 244, 245, 250, 258, 416
- Ostwald, W., 94, 112, 516, 521, 525
- Ott, E., 244, 249

P

- Pacault, A., 521, 522, 531, 535, 540, 542
- Packard, N., 249, 267, 287, 541
- Palis, J, 364, 371
- Papalexy, N., 23, 449, 455
- Pearson, K., 115
- Peixoto, M., 358, 362, 374, 379, 380
- Pérès, J., 469, 472, 557, 558, 559, 560, 561, 563, 569, 582, 622
- Perraud, J.J., 521, 522, 531, 542
- Perrin, J., 115
- Peyraud, J., 285, 287
- Philipps, E., 277
- Phrägmen, E., 46, 50, 51
- Picard, E., 61, 351, 646
- Plancherel, M., 116, 428
- Planck, M., 93, 94, 96, 97, 99, 105, 106, 112, 206, 394, 653
- Poincaré, H., 7, 12, 13, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 88, 91, 92, 94, 100, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 116, 118, 119, 121, 122, 123, 124, 125, 129, 137, 142, 143, 144, 145, 147, 154, 161, 169, 175, 184, 185, 186, 188, 189, 194, 195, 198, 199, 213, 216, 217, 218, 219, 222, 223, 224, 225, 231, 232, 233, 234, 258, 291, 300, 301, 304, 314, 327, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 339, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 355, 356, 358, 359, 360, 361, 363, 364, 366, 372, 383, 384, 387, 388, 391, 393, 394, 396, 397, 398, 399, 406, 408, 409, 418, 419, 420, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 435, 443, 444, 446, 449, 450, 452, 453, 454, 456, 460, 461, 462, 469, 470, 471, 473, 475, 477, 480, 483, 487, 492, 493, 494, 506, 514, 515, 520, 529, 530, 554, 555, 557, 558, 562, 594, 603, 611, 613, 621, 624, 627, 628, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 663

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

- Poisson, S.-D., 30, 32, 40, 49, 55, 64, 79, 80, 81, 84, 107, 183, 334, 339, 474
- Pomeau, Y., 9, 138, 139, 141, 163, 175, 176, 219, 265, 273, 279, 285, 291, 293, 297, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 326, 487, 541, 595, 599
- Pompidou, G., 571
- Prandtl, L., 455
- Prigogine, I., 213, 436, 438, 439, 527, 528, 529, 530, 531, 533, 535, 536, 537
- Procaccia, I., 269, 628
- Pye, K., 526, 538

R

- Rabinovitz, P.H., 136
- Ramunni, G., 458, 468, 499, 500, 562, 568, 575, 576, 593, 594
- Rashevsky, N., 208, 212, 227
- Renouvier, C., 84
- Rocard, Y., 451, 468, 472
- Rose, H., 136, 144
- Rosen, R., 208, 209
- Rosenbluth, 134
- Rosenthal, A., 116, 117
- Rössler, O.E., 12, 15, 131, 141, 143, 153, 157, 164, 173, 175, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 252, 255, 258, 259, 262, 263, 264, 265, 267, 268, 271, 303, 304, 305, 317, 322, 323, 325, 326, 327, 442, 449, 487, 515, 522, 538, 539, 540, 541, 542, 624, 645, 649
- Roux, J.C., 541
- Ruelle, D., 12, 26, 72, 128, 131, 134, 135, 138, 139, 140, 141, 142, 144, 148, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 179, 191, 193, 198, 199, 201, 204, 205, 219, 222, 230, 231, 239, 240, 243, 244, 247, 249, 250, 251, 252, 254, 255, 260, 265, 266, 267, 268, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 277, 291, 292, 297, 311, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 330, 353, 373, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 436, 437, 439, 441, 485, 486, 512, 513, 538, 539, 541, 547, 594, 595, 599, 624, 628, 663

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

S

- Saint-Venant, A.J.C.B., 79, 81, 83, 84, 85, 86
- Saltzman, B., 510
- Scheidecker, J.P., 246, 618
- Schnoll, S., 524, 525, 526
- Schrödinger, E., 343, 344, 429, 430, 497, 644
- Schwartz, L., 552, 553, 557, 571
- Seelig, F.F., 210, 212, 213, 227, 539
- Sel'kolv, E., 210
- Serre, J.P., 552, 553, 571
- Sharkovsky, A.N., 155, 156, 157, 222, 279, 290, 306, 309
- Shaw, R.S., 12, 205, 239, 242, 248, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 267, 268, 271, 305, 317, 322, 323, 326, 327, 487, 541
- Shepard, R., 242
- Shilnikov, L.P., 194, 303, 304
- Shimada, I., 248
- Sibirsky, K.S., 155
- Sideradies, L., 478
- Sideriades, L., 474, 475, 476, 477, 479
- Sinaï, Y., 134, 190, 191, 201, 247, 250, 256, 366, 367, 412, 414, 415, 416, 417, 434, 437
- Smale, S., 24, 128, 129, 131, 141, 144, 154, 160, 169, 172, 173, 175, 194, 195, 198, 199, 200, 201, 204, 215, 218, 219, 226, 230, 231, 263, 280, 330, 343, 344, 352, 354, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 379, 380, 381, 384, 385, 386, 414, 415, 416, 417, 437, 485, 594
- Smoluchowski, M., 115
- Spiegel, E., 253
- Stefan, P., 155, 156, 277, 292
- Stein, M., 501
- Stein, P., 145, 278, 501
- Stengers, I., 438, 439, 537
- Stepanoff, V.V., 400, 416, 511
- Stewart, I., 9, 25, 26, 70, 124, 482

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

- Strelcyn, J.M., 244, 247
- Sturm, C., 36, 37
- Swinney, H., 141, 160, 167, 240, 241, 265, 273, 274, 310, 541

T

- Takens, F., 128, 140, 141, 142, 159, 160, 161, 164, 201, 222, 231, 239, 240, 243, 254, 255, 265, 267, 271, 272, 273, 274, 275, 277, 291, 297, 311, 317, 319, 330, 353, 373, 379, 382, 383, 384, 385, 386, 441, 513, 538, 541, 594, 595
- Teilhard de Chardin, P., 207, 208
- Thom, R., 80, 128, 160, 175, 213, 285, 292, 353, 362, 366, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 438, 439, 481, 547, 600
- Thomae, S., 171, 277, 278, 290
- Thompson, P., 508, 509
- Thoulouze, D., 15, 606, 616, 617, 618, 619, 645
- Timoshenko, S., 454, 455
- Tirkel, A.Z., 155, 157
- Toulouse, G., 285
- Tresser, C., 15, 136, 199, 242, 265, 278, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 307, 309, 317, 326, 598, 599, 618, 645
- Trunk, G.D., 242
- Turing, A., 212, 216, 217, 227, 228, 499, 530, 531, 539

U

- Ueda, Y., 443, 470, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 513
- Ulam, S., 13, 144, 145, 153, 327, 390, 401, 423, 424, 425, 430, 431, 432, 441, 489, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 512, 513, 514, 566, 585, 644, 652

V

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

- Valensi, J., 472, 558
- Van der Mark, J., 352, 447, 448
- Van der Pol, B., 213, 215, 256, 350, 352, 355, 361, 441, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 459, 461, 464, 466, 468, 469, 471, 473, 483, 487, 488, 520, 522, 542, 638, 644
- Verne, J., 32
- Vidal, C., 541
- Vitt, A.A., 209, 217, 347, 348, 449, 451, 452, 467
- Vogel, T., 22, 443, 450, 465, 466, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 487, 547, 555, 557, 558, 559, 561, 564, 568, 569, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 600, 626, 636, 644, 645
- Von Karman, T., 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 469, 644
- Von Neumann, J., 103, 107, 389, 390, 391, 392, 393, 395, 399, 400, 401, 411, 420, 428, 489, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 512, 513, 514, 568, 652
- Von Plato, J., 100, 101, 102, 108, 399

W

- Waddington, C.H., 375, 376
- Wegmann, K., 228, 539
- Weierstrass, K., 45, 48
- Weil, A., 474, 552
- Wiener, N., 114, 390, 397, 401, 402, 403, 506, 507
- Wightman, A.S., 417, 434
- Williams, R., 131, 172, 173, 174, 226, 243, 258, 262, 268, 301, 302, 303, 304, 624
- Winfree, A., 214, 215, 539

Y

- Yorke, J.A., 127, 131, 137, 140, 143, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 160, 161, 163, 164, 168, 169, 170, 171, 172, 191, 198, 199, 205, 215, 216,

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

217, 218, 221, 222, 223, 225, 229, 230, 231, 239, 244, 248, 249, 276, 277, 279, 280, 286, 294, 300, 309, 317, 387, 495

Z

- Zabusky, N., 503
- Zeeman, E.C., 234, 374, 375, 379, 381
- Zermelo, E., 93, 94, 104, 105, 106, 394, 653
- Zhabotinsky, A., 132, 210, 213, 215, 220, 228, 229, 235, 238, 240, 267, 316, 325, 442, 515, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 529, 530, 531, 533, 534, 535, 539, 540, 541, 542

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Bibliographie

Bibliographie classée par ordre alphabétique des noms d'auteurs

Pour les sources imprimées auxquelles nous renvoyons dans le cours du texte, nous avons choisi les conventions suivantes :

- Pour les renvois à cette bibliographie, nous avons retenu le format suivant : entre crochets sont indiqués le nom et les initiales de(s) prénom(s) de ou des auteurs, ainsi que l'année de publication du document que nous avons consulté (*Exemple : [UEDA, Y., 1992]*).
- S'il y a ambiguïté sur la référence, nous rajoutons une lettre a, b, c, etc. à la suite de l'année en question (*Exemple : [POINCARE , H., 1897a]*). Pour un renvoi simultané à plusieurs ouvrages d'un même auteur, nous indiquons les années de publication en les séparant par "/" (*Exemple : [RUELLE , D., 1979 / 1990]*).
- Les dates des autres éditions, qu'il s'agisse de traductions ou non, ne sont pas indiquées dans ce raccourci, mais figurent dans les détails de la bibliographie.

Abréviation : nous employons la notation C.R.A.S. pour Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

ABRAHAM, H., BLOCH, E., 1919, "Mesure en valeur absolue des périodes des oscillations électriques de haute fréquence", Annales de Physique, 9ème série, T. XII, Septembre-Octobre 1919, pp. 237-302.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

ABRAHAM, R., MARSDEN, J.E., 1987, Foundations of mechanics, New-York, Addison-Wesley, 1987, 806 p.

ABRAHAM, R., SHAW, C.D., 1984a, Dynamics : the geometry of behavior, Part 2 : Chaotic behavior, Santa Cruz, Aerial Press, 1984, 137 p.

ABRAHAM, R., SHAW, C.D., 1984b, Dynamics : the geometry of behavior, Part 3 : the global behavior, Santa Cruz, Aerial Press, 1984, 123 p.

ABRAHAM, R., UEDA, Y., 2000, The chaos avant-garde. Memories of the early days of chaos theory, Singapore, World Scientific, 2000, 232 p.

ACHESON, D., 1997, From calculus to chaos, an introduction to dynamics, Oxford, Oxford University Press, 1997.

ADEM, J., CESARI, L., LASALLE, J.P., LEFSCHETZ, S., LLUIS, E., 1960, Symposium Internacional de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Mexico, 7-13 Sept.1959, Ed. Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, 1960.

ADLER, R.L., KONHEIM, A.G., McANDREW, M.H., 1965, "Topological entropy", Transactions of the American Mathematical Society, n° 114, 1965, pp. 309-319.

AHLERS, G., 1974, "Low-temperature studies of the Rayleigh-Benard instability and turbulence", Physical Review Letters, 33, 1974, pp. 1185-8.

ALBERT, A., 1995, Chaos and Society, Amsterdam, IOS Press, 1995, 386 p.

ANDERSSON, K.G., 1994, "Poincaré's discovery of Homoclinic points", Archive for history of exact siences, 48, 1994, pp. 133-147.

ANDLER, M., 1994, "Les mathématiques à l'Ecole Normale Supérieure au XXème siècle : une esquisse." in SIRINELLI, J.F., E.N.S. Le livre du Bicentenaire, Paris, PUF, 1994, pp. 351-404.

ANDRADE, J., 1914, "Sur le mouvement d'un corps soumis à l'attraction newtonienne de deux corps fixes", Journal de l'Ecole Polytechnique, 60ème cahier, 1914, pp.1-57.

ANDRADE, J., 1904, "L'enseignement scientifique aux Ecoles Professionnelles et les ‘Mathématiques de l'ingénieur’", Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8 bis 11 august 1904, Leipzig, Teubner, 1905.

ANDRADE, J., 1890, Sur le mouvement d'un corps soumis à l'attraction newtonienne de deux corps fixes, et sur l'extension d'une propriété des mouvements képlériens, Paris, Gauthier-Villars, Thèse soutenue le 14 Juillet 1890 à la faculté des Sciences de Paris, 59 p.

ANDRONOV, A., 1929, "Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto#entretenues", C.R.A.S., 189, 1929, pp. 557-561.

ANDRONOV, A.A., 1956, Sobranie Trudoc (Collected Works), Moscow, Izdat Akad Nauk SSSR, 1956.

ANDRONOV, A.A., KHAIKIN, S.E., 1949, Theory of oscillations, Princeton, P.U.P., 1949 (traduit du russe par S. Lefschetz, éd. russe : 1937).

ANDRONOV, A.A., LEONTOVIC, E.A., 1959, "Generation of limit cycles from a separatrix forming a loop and from the separatrix of an equilibrium state of saddle-node type", in ANDRONOV, A.A. et al., Nine Papers on differential equations,

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

two on information theory, Providence, AMS, 1963, pp. 189-232.

ANDRONOV, A.A., LEONTOVIC, E.A., GORDON, I.I., MAIER, A.G., 1971, Theory of dynamic systems on a plane, Jerusalem, Israel Program of Scientific translations, 1973 (traduction de l'édition russe de 1966).

ANDRONOV, A.A., LEONTOVIC, E.A., GORDON, I.I., MAIER, A.G., 1973, Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane, New York, John Wiley, 1973 (traduction de l'édition russe de 1967).

ANDRONOV, A.A., VITT, A.A., 1930, "Sur la théorie mathématique des auto-oscillations", C.R.A.S., 190, 1930, pp. 256-8.

ANDRONOV, A. A., VITT, A. A., KHAIKIN, S. E. , 1966, Theory of oscillators, Reading (Massachusetts), Addison-Wesley Publishing Company, 2ème éd., 1966, (éd. russe : 1959).

ANOSOV, D.V., 1962, "Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature", Soviet Mathematics Doklady, 3, 1962, pp. 1068-70.

ANOSOV, D.V., 1963, "Ergodic properties of geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature", Doklady Akademii Nauk URSS, 151, 1963, pp. 1250-53 (traduit dans Soviet Mathematics Doklady, Vol.4, n°4, 1963, p. 1153-56).

ANSELONE, P.M., 1964, Nonlinear integral equations : proceedings of an advanced seminar, conducted by the Mathematics Research Center, US Army, at the University of Madison, April 22#24, 1963, Madison, University of Wisconsin Press, 1964, 378 p.

ANTONIOU, I.E., PRIGOGINE, I., 1993, "Intrinsic irreversibility and integrability of dynamics", Physica A, 192, 1993, pp. 443-464.

APPELL, P., 1953, Traité de Mécanique Rationnelle, Dynamique des Systèmes-Mécanique analytique, Paris, Gauthier-Villars, 1953 (T. 2, 6ème éd.).

ARGEMI, J., 1978, "Approche qualitative d'un problème de perturbations singulières dans R^4", in CONTI, R., SESTINI, G., VILLARI, G., Equa Diff 78, Convegno Int. Su Equazioni Differenziali Ordinarie ed Equazioni Funzionali, Firenze, Italia, 1978, pp. 333-340.

ARGEMI, J., JURICIC, H., 1963, "Existence et stabilité de certaines solutions périodiques multiformes d'une équation de Duffing", C.R.A.S., 257, 1963, pp. 2064-5.

ARGOUL, F., ARNEODO, A., RICHETTI, P., 1987, "Experimental evidence for homoclinic chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction", Physics Letters A, 120 (6), 1987, pp. 269-75.

ARNEODO, A., COULLET, P., TRESSER, C., 1980, "Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations", Physics Letters A, 79, 4, 1980, pp. 259-263.

ARNEODO, A., COULLET, P., TRESSER, C., 1981a, "A possible new mechanism for the onset of turbulence", Physics Letters A, Vol.81, n° 4, 1981, pp. 197-201.

ARNEODO, A., COULLET, P., TRESSER, C., 1981b, "Possible new strange attractors with spiral structure", Communications in Mathematical Physics, 79, 1981, pp. 573-9.

ARNEODO, A., COULLET, P., TRESSER, C., 1982, "Oscillators with Chaotic behavior : an illustration of a theorem by Shil'nikov", Journal of Statistical Physics, Vol. 27, n° 1, 1982, pp. 171-182.

ARNEODO, A., COULLET, P., TRESSER, C., LIBCHABER, A., MAURER, J.,

d'HUMIERES, D., 1983, "On the observation of an uncompleted cascade in a Rayleigh-Bénard experiment", Physica D, 6, 1983, pp. 385-392.

ARNOLD, V., AVEZ, A., 1967, Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Paris, Gauthier-Villars, 1967.

ARNOLD, V., AVEZ, A., 1968, Ergodic problems of classical mechanics, New York, Benjamin, 1968, 286 p.

ARNOLD, V.I., 1963, "Proof of Kolmogorov's theorem on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian", Uspehi matematiceskih nauk, 18, 1963, pp. 9-36.

ARNOLD, V.I., 1964, "Instability of dynamical systems with several degrees of freedom", Soviet Mathematics Doklady, 5, 1964, pp. 581-5.

ARNOLD, V.I., SINAI, Y.G., 1962, "Small perturbations of the automorphisms of the Torus", Soviet Mathematics Doklady, 3, 1962, pp. 783-87.

ASPRAY, W., 1990, John von Neumann and the origins of modern computing, Cambridge Mass., MIT Press, 1990, 376 p.

ASSAF, D., GADBOIS, S., 1992, "Definition of chaos", American Mathematical Monthly, n°99, Vol. 2, 1992, p. 865.

ATKINSON, F.V., LANGFORD, W.F., MINGARELLI, A.B., 1986, Oscillation, bifurcation and chaos, Proceedings of the 1986 Annual Seminar held July 13-25, 1986, Providence R.I., published by the American Mathematical Society for the Canadian Mathematical Society, 1987.

ATTEN, P., BERGE, P., DUBOIS, M., 1987, "L'ordre chaotique", La Recherche, 185, Février 1987, pp. 190-201.

AUBIN, D., 1998a, A cultural history of catastrophes and chaos : around the "Institut des hautes Etudes Scientifiques", France, 1998, Ph. D. de l'Université de Princeton (Département d'Histoire, programme d'Histoire des sciences), Janvier 1998.

AUBIN, D., 1998b, "Un pacte singulier entre mathématiques et industrie", La Recherche, n° 313, Octobre 1998.

AUBIN, D., DAHAN DALMEDICO, A., 2002, "Writing the History of Dynamical Systems and Chaos : Longue Durée and Revolution, Disciplines and Cultures", Historia Mathematica 29, 2002, pp. 273-339.

AVEZ, A., BLAQUIERE, A., MARZOLLO, A., 1982, Dynamical systems and Microphysics, New-York, Academic Press, 1982, 465 p. (Proceedings of the 2nd International Seminar on Mathematcial Theory of Dynamical Systems and Microphysics held at the International Center for Mechanical Sciences at Udine, Italy, Sept 1-11, 1981).

BABARY, J-P., MIRA, C., 1969, "Sur un cas critique pour une récurrence autonome du deuxième ordre", C.R.A.S., A, 268, 1969, pp. 129-132.

BADII, R., BRUN, E., FINARDI, M., FLEPP, L., HOLZNER, R., PARISI, J., REYL, C., SIMONET, J., 1994, "Progress in the analysis of experimental chaos through periodic orbits", Reviews of Modern Physics, Vol. 66, n° 4, Oct. 1994, pp. 1389-1415.

BAIER, G., KLEIN, M., 1991, A chaotic hierarchy, Singapore, World Scientific, 1991.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

BAKER, G.L., GOLLUB, J.P., 1996, Chaotic dynamics, an introduction, Cambridge, Cambridge University Press, 2nd ed., 1996.

BALIAN, R., 1996, Physique Statistique, T. 1, Polycopié du Cours de l'Ecole Polytechnique, Département de Physique, éd. 1996.

BANKS, J., BROOKS, J., CAIRNS, G., DAVIS, G., STACEY, P., 1992, "On Devaney's definition of chaos", American Mathematical Monthly, n° 99, Vol. 1, 1992, pp. 332-4.

BAR-ELI, K., NOYES, R.M., 1988, "Computations simulating experimental observations of complex bursting patterns in the Belousov-Zhabotinsky system", Journal of Chemical Physics, 88 (6), 15 March 1988, pp. 3646-54.

BARROW-GREEN, J., 1994, "Oscar II's Prize Competition and the error in Poincaré's Memoir on the Three Body Problem", Archive for the history of exact sciences, 48, 1994, pp. 107-131.

BARROW-GREEN, J., 1997, Poincaré and the three body problem, American Mathematical Society : Providence, 1997. (History of Mathematics, volume 11)

BASS, J., 1999, "Les méthodes probabilistes de la turbulence au milieu du XXème siècle", MATAPLI, n° 58, Avril 1999, pp. 49-56.

BASS, T.A., 2000, The Eudaemonic Pie, Lincoln, Backinprint.com, 2000, 325 p.

BASS, T.A., 2002, Ils ont battu Wall Street !, Paris, Editions Village Mondial, 2002, 332 p.

BATTERMAN, R.W., 1990, "Irreversibility and statistical mechanics: a new approach ?", Philosophy of Science, 57, 1990, pp. 395-419.

BATTERMAN, R.W., 1991, "Randomness and probability in dynamical theories: on the proposal of the Prigogine school", Philosophy of Science, 58, 1991, pp. 374-400.

BATTERMAN, R.W., 1993, "Defining chaos", Philosophy of Science, 60, 1993, pp. 43-66.

BATTERMAN, R.W., 1998, "Why equilibrium statistical mechanics works: Universality and the renormalization group", Philosophy of Science, 65, 1998, pp. 183-208.

BATTERSON, S., 2000, Stephen Smale : The mathematican who broke the dimension barrier, Providence R.I., American Mathematical Society, 2000.

BEDDINGTON, J.R., FREE, C.A., LAWTON, J.H., 1975, "Dynamic complexity in predator-prey models framed in difference equations", Nature, Vol. 255, 1975, pp. 58-60.

BELOT, G., EARMAN, J., 1997, "Chaos out of Order: Quantum Mechanics, the Correspondence Principle and Chaos", Studies in History and Philosophy of Modern Physics, Vol. 28, n° 2, 1997, pp. 147-182.

BELOUSOV, B.P., 1958, "A periodic reaction and its mechanism", 1958 ; traduit du russe (en anglais) dans FIELD, R.J., BURGER, M., Oscillations and travelling waves in chemical systems, New-York, Wiley, 1985.

BENDIXSON, I., 1901, "Sur les courbes définies par des équations différentielles", Acta Mathematica, 24, 1901, pp. 1-89.

BENEDEK, G., BILZ, H., ZEYHER, R., 1983, Statics and dynamics on nonlinear systems : proceedings of a workshop at the Ettore Majorana Centre, Erice, Italy, 1-11

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

July 1983, Berlin, Springer, 1983, 311 p.

BENETTIN, G., CASARTELLI, M., GALGANI, L., GIORGILLI, A., STRELCYN, J.M., 1978, "On the reliability of the numerical studies of stochasticity: I. Existence of time averages", Nuovo Cimento, 44B, 1978, p. 183.

BENETTIN, G., CASARTELLI, M., GALGANI, L., GIORGILLI, A., STRELCYN, J.M., 1979, "On the reliability of the numerical studies of stochasticity: II. Identification of time averages", Nuovo Cimento, 50B, 1979, p. 211.

BENETTIN, G., CERCIGNANI, C., GALGANI, L., GIORGILLI, A., 1978, "Tous les nombres caractéristiques de Lyapounov sont effectivement calculables", C.R.A.S., 286 A, 1978, p. 431.

BENETTIN, G., GALGANI, L., STRELCYN, J.M., 1976, "Kolmogorov entropy and numerical experiments", Physical Review A, Vol. 14, n° 6, Déc 1976, pp. 2338-2345.

BENETTIN, G., STRELCYN, J.M., 1978, "Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: stochastic transition entropy", Physical Review A, 17, 1978, p. 773.

BENNETT, S., 1984, "Nicolas Minorsky and the Automatic steering of ships", IEEE Control Systems Magazine, 4-4, 1984, pp. 10-15.

BERGE, P., DUBOIS, M., MANNEVILLE, P., POMEAU, Y., 1980a, "Intermittency in Rayleigh-Bénard convection: a transition to turbulence", Optics communications, 19, 1980, pp. 129-133.

BERGE, P., DUBOIS, M., MANNEVILLE, P., POMEAU, Y., 1980b, "Intermittency in Rayleigh-Bénard convection", Journal de Physique Lettres, T. 41, n° 15, 1980, pp. 341-5.

BERGE, P., DUBOIS, M., POMEAU, Y., 1997, Des rythmes au chaos, Paris, Odile Jacob, 1997.

BERGE, P., POMEAU, Y., 1980, "La turbulence", La Recherche, n° 11, 1980, pp. 422-432.

BERGE, P., POMEAU, Y., VIDAL, C., 1988, L'ordre dans le chaos : vers une approche déterministe de la turbulence, Paris, Hermann, 1988, 352 p.

BERNARD, Cl., 1865, Introduction à la médecine expérimentale, Paris, J.B. Baillière, 1865, 400 p.

BERNARD, Cl., 1867, Rapport sur la marche et les progrès de la physiologie générale en France, Paris, Imprimerie Nationale, 1867.

BERNARD, P., RATIU, T.S., 1977, Turbulence Seminar, Berkeley 1976-77, New York, Springer-Verlag, 1977, 155 p.

BERTHON, M-E., 2000, Les grands concepts scientifiques et leur évolution, France, Presse Universitaire, 2000, 495 p.

BEYERCHEN, A., 1990, "Nonlinear science and the unfolding of a new intellectual vision", Papers on comparative Studies, Vol. 6, 1990, pp. 25-49.

BEYERCHEN, A., 1992, "Clausewitz, Nonlinearity, and the unpredictability of war", International Security, Vol. 17, n° 3, Winter 1992-93, pp. 59-90.

BILLINGSLEY, P., 1965, Ergodic theory and information, New-York, Wiley, 1965, 111 p.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

BIRKHOFF, G., 1912, "Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques", Bulletin de la Société Mathématique de France, 40, 1912, pp. 305-323.

BIRKHOFF, G.D., 1913, "Proof of Poincaré's geometric theorem", Transactions of the American Mathematical Society, 14, 1913, pp. 14-22.

BIRKHOFF, G.D., 1915, "The restricted problem of three bodies", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 39, 1915, pp. 265-334.

BIRKHOFF, G.D., 1917, "Dynamical systems with two degrees of freedom", Transactions of the American Mathematical Society, 18, 1917, pp. 199-300.

BIRKHOFF, G.D., 1920, "Surface transformations and their dynamical applications", Acta Mathematica, 1920, n° 43, pp.1-119.

BIRKHOFF, G.D., 1926, "Über gewisse Zentralbewegungen dynamischer Systeme", Nachrichten Math.-Phys. Kl., July, 1926, (in BIRKHOFF, G.D., Collected Mathematical Papers, II, New-York, Dover, 1968, pp. 283-294).

BIRKHOFF, G., 1927a, Dynamical Systems, Providence (Rhode Island), American Mathematical Society, 1927, 305 p.

BIRKHOFF, G.D., 1927b, "A mathematical critique of some physical theories", Bulletin of the American Mathematical Society, March-April, 1927, Vol. 33, pp. 165-181.

BIRKHOFF, G.D., 1927c, "The Hydrogen atom and the Balmer formula", Proceedings of the National Academy of Science USA, March, 1927, Vol. 13, pp. 165-169.

BIRKHOFF, G.D., 1927d, "On the periodic motions of dynamical systems", Acta Mathematica, Oct. 1927, Vol. 50, pp. 359-379.

BIRKHOFF, G.D., 1931a, "Proof of a recurrence theorem for strongly transitive systems", Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 17, 1931, pp. 650-655.

BIRKHOFF, G.D., 1931b, "Proof of the ergodic theorem", Proceedings of the National Academy of Science USA, 17, 1931, pp. 656-660.

BIRKHOFF, G.D., 1932a, "Sur l'existence de régions d'instabilité en Dynamique", Annales de l'I.H.P., Vol. 2, 1932, pp. 369-386.

BIRKHOFF, G.D., 1932b, "Probability and physical systems", Bulletin of the American Mathematical Society, June 1932, Vol. 38, pp. 361-379 (in BIRKHOFF, G.D., Collected Mathematical Papers, II, New-York, Dover, 1968).

BIRKHOFF, G.D., 1932c, "Sur quelques courbes fermées remarquables", Bulletin de la Société Mathématique de France, 60, 1932, pp. 1-26.

BIRKHOFF, G.D., 1933, "Some remarks concerning Schrödinger's wave equation", Proceedings of the National Academy of Science USA, Vol. 19, n° 3, March 1933, pp. 339-344.

BIRKHOFF, G.D., 1935a, "Sur le problème restreint des trois corps (Premier mémoire)", Annali della R. Scuola Normale Superiore Pisa (2), 4, pp. 237-306.

BIRKHOFF, G.D., 1935b, "Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques", Memoriae Pontificia Academiae Scientiarum Nove Lyncaei 3-1, 1935, pp. 85-216.

BIRKHOFF, G.D., 1936, "Sur le problème restreint des trois corps (Deuxième mémoire)", Annali della R. Scuola Normale Superiore Pisa, (2), 5, pp. 1-42.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

BIRKHOFF, G.D., 1938, "Electricity as a fluid", Journal of the Franklin Institute, Vol. 226, Sept. 1938, pp. 315-325.

BIRKHOFF, G.D., 1941, "Some unsolved problems of theoretical dynamics", Science, December 1941, Vol. 94, pp. 598-600 (in BIRKHOFF, G.D., Collected Mathematical Papers, New-York, Dover, 1968, pp. 710-712).

BIRKHOFF, G.D., 1943, "Sir Joseph Larmor and modern mathematical physics", Science, Vol. 97, 1943, pp. 77-79.

BIRKHOFF, G.D., 1944, "The Mathematical Nature of Physical Theories", American Scientist, 1944 (in BIRKHOFF, G.D., Collected Mathematical Papers, New-York, Dover, 1968, pp. 890-919)

BIRKHOFF, G.D., 1968, Collected Mathematical Papers, New-York, Dover, 1968, 3 tomes.

BIRKHOFF, G.D., KOOPMAN, B.O., 1932, "Recent contribution to the ergodic theory", Proceedings of the National Academy of Sciences, 18, 1932, pp. 276-82.

BIRKHOFF, G.D., SMITH, P.A., 1928, "Structure Analysis of Surface Transformations", Journal de Mathématiques (Liouville), 1928, Série 9, Vol. 7, pp. 345-379.

BIRMAN, J.S., WILLIAMS, R.F., 1983, "Knotted periodic orbits in dynamical systems-I: Lorenz's equations", Topology, Vol. 22, n° 1, 1983, pp. 47-82.

BISSELL, C., 1998, "A.A. Andronov and the development of Soviet Control Engineering", I.E.E.E. Control Systems Magazine, Vol. 18, n°1, 1998, pp. 56-62.

BLANC-LAPIERRE, A., FORTET, R., 1953, Théorie des fonctions aléatoires, Masson, Paris, 1953, 694 p.

BLAQUIERE, A., FER, F., MARZOLLO, A., 1980, Dynamical Systems and Microphysics, New-York, Springer-Verlag, 1980, 412 p. (CISM Courses and Lectures, n° 261).

BLOCH, M., BLOCH, E., LE GOFF, J., 1997, Apologie pour l'historien ou le métier d'historien, Paris, A. Colin, 1997, 159 p.

BLOCK, L., GUCKENHEIMER, J., MISIUREWICZ, M., YOUNG, L.-S., 1979, "Periodic points and topological entropy", in NITECKI, Z., ROBINSON, C., Global theory of dynamical systems, New York, Springer, 1980, pp. 18-34.

BOERI, F., SIDERIADES, L., 1964, "Résonance non linéaire, du type Duffing, d'un ensemble de deux circuits électriques couplés", C.R.A.S., 258, 1964, pp. 3828-31.

BOERSMA, F.K., 2003, "Structural ways to embed a research laboratory into the company: a comparison between Philips and General Electric 1900-1940", History and Technology, Vol. 19, 2003, pp. 109-126.

BOGOLIUBOV, N.N., 1990, Selected Works, Vol.1. (Dynamical theory), New-York, Gordon and Breach Sci. Pub., 1990, (Ed. N.N. Bogoliubov, A.M. Kurbatov).

BOGOLIUBOV, N.N., MITROPOLSKY, Y.A., 1962, Asymptotic methods in Non-linear oscillations, New York, Gordon & Breach, 2nd ed., 1962, (éd. russe : 1958).

BOGOLIUBOV, N.N., MITROPOSLKI, Y., 1962, Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires, Gauthier-Villars, Paris, 1962 (Monographies internationales de mathématiques modernes).

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

BOLTZMANN, L., 1868, "Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten", in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. I, p. 49.

BOLTZMANN, L., 1871a, "Über des Druckkräfte, welche auf Ringewirksam sind, die in bewegte Flüssigkeit tauchen", Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 73, 1871, pp. 111-134.

BOLTZMANN, L., 1871b, "Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht", Sitzungberichte, K. Akademie des Wissenschaften, Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, 63, 1871, pp. 679-711.

BOLTZMANN, L., 1872, "Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen", in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. I, p. 316.

BOLTZMANN, L., 1877, "Über die Beziehung zwischen des zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und des Wahrscheinlichketisrechnung, respective den Satzen über des Wärmegleichgewicht", Sitzungsberichte, K. Akademie des Wisssenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, 76, 1877, pp. 373-435.

BOLTZMANN, L., 1884, "Über die Eigenschaften monozyklisher und anderer damit verwandter Systeme", in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, pp. 122-152.

BOLTZMANN, L., 1887a, "Über die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik", 1887 in HASENOHRL, F., Wissenschaftliche Abhandlungen, New York, Chelsea, 1968, Vol. III, pp. 258-271.

BOLTZMANN, L., 1887b, "Neuer Beweis zweier Sätze über das Wärmegleichgewicht unter mehratomigen Gasmolekülen", 1887, in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, pp. 272-282.

BOLTZMANN, L., 1895a, "On the Minimum Theorem in the Theory of Gases", Nature, 52, 1895, in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, p. 546.

BOLTZMANN, L., 1895b, "Nochmals das Maxwellsche Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten", in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, pp. 532-534.

BOLTZMANN, L., 1895c, "On certain Questions of the Theory of Gases", Nature, 51, 1895, in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, pp. 535-544.

BOLTZMANN, L., 1895d, "Erwiderung an Culverwell", Nature, 51, 1895, in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, p. 545.

BOLTZMANN, L., 1896a, "Sur la théorie des gaz. Lettre à M. Bertrand. I.", 1896, in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, pp. 564-565.

BOLTZMANN, L., 1896b, "Sur la théorie des gaz. Lettre à M. Bertrand. II.", 1896, in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, p. 566.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

BOLTZMANN, L., 1896c, "Entgegnung auf die wärmetheoretischen Betrachtungen des Hrn E. Zermelo", 1896, in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, pp. 567-578.

BOLTZMANN, L., 1897a, "Zu Hrn Zermelos Abhandlung ‘Über die mechanische Erklärung irreversibler Vorgänge’", 1897, in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, pp. 579-586.

BOLTZMANN, L., 1897b, "Über einen mechanischen Satz Poincaré's", 1897, in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, pp. 587-595.

BOLTZMANN, L., 1897c, "Über irreversible Strahlungsvorgänge I.", 1897, in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, pp. 615-617.

BOLTZMANN, L., 1897d, "Über irreversible Strahlungsvorgänge II.", 1897, in HASENOHRL, F.P., Wissenschaftliche Abhandlungen, New-York, Chelsea, 1968, Vol. III, pp. 618-621.

BOLTZMANN, L., 1902, Leçons sur la théorie des gaz, 1ère partie, Paris, Gauthiers-Villars, 1902.

BOLTZMANN, L., 1905, Leçons sur la théorie des gaz, 2ème partie, Paris, Gauthiers-Villars, 1905.

BOLTZMANN, L., 1990, Lectures on natural philosophy 1903-1906, New-York, Springer-Verlag, 1990, 303 p.

BOLTZMANN, L., HASENOHRL, F., 1968, Wissenschaftliche Abhandlungen, Vol. III, New-York, Chelsea, 1968, 706 p.

BONHOEFFER, K.F., 1943, "The theory of electrical excitation", Naturwissenschaften, 31, 1943, p. 270.

BOREL, E., 1906, "Sur les principes de la théorie cinétique des gaz", Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 3ème série, T. 23, 1906 (in BOREL, E., Œuvres de Emile Borel, Paris, Ed du CNRS, 1972, pp. 1669-1692).

BOREL, E., 1913, "La mécanique statistique et l'irréversibilité", Journal de Physique, série 5, T. 3, 1913, in BOREL, E., Œuvres de Emile Borel, Paris, Ed du CNRS, 1972, pp. 1697-1704.

BOREL, E., 1914, "Sur quelques problèmes de probabilités géométriques et les hypothèses de continuité", C.R.A.S., 158, 1914, pp. 27-29.

BOREL, E., 1920, "Radioactivité, probabilité et déterminisme", Revue du Mois, T. 21, 1920 (in BOREL, E., Œuvres de Emile Borel, Paris, Ed du CNRS, 1972, p. 2189-96).

BOREL, E., 1925, "Henri Poincaré", Bulletin Société Mathématique France, 1925 (in BOREL, E., Œuvres de Emile Borel, Paris, Ed du CNRS, 1972, T. 4, pp. 2453-8).

BOREL, E., 1949a, "Probabilité et certitude", Dialectica, T. 3, 1949 (in BOREL, E., Œuvres de Emile Borel, Paris, Ed du CNRS, 1972, pp. 2185-8).

BOREL, E., 1949b, "Allocution de M. Emile Borel", Congrès International de Philosophie des Sciences, Paris, 1949 (in BOREL, E., Oeuvres de Emile Borel, Paris, Ed du CNRS, 1972, T. 4, pp. 2461-4).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

BOREL, E., 1972, Oeuvres de Emile Borel, Paris, Ed du CNRS, 1972, 4 tomes.

BOREL, E., EHRENFEST, P., EHRENFEST, T., 1915, "Mécanique statistique", in MOLK, J., Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, T. IV, Vol. 1, Editions Jacques Gabay, 1992, pp. 188-292 (fac-similé de l'édition de Paris, Gauthier-Villars, 1915).

BORN, M., 1955, "Is classical mechanics in fact deterministic ?", Physikalische Blätter, Vol. II, n° 9, 1955, pp. 49-54.

BORN, M., 1969, Physics in my generation, New-York, Springer, 1969, 232 p.

BOULEAU, N., 1999a, "Modèles probabilistes ou modèles déterministes. Le cas du changement global", MATAPLI, n° 58, avril 1999, pp. 37-42.

BOULEAU, N., 1999b, Philosophies des mathématiques et de la modélisation. Du chercheur à l'ingénieur, Paris, Harmattan, 1999, 363 p.

BOURBAKI, 2000, Bourbaki, Pour la Science. Hors-Série : Les génies de la science n° 2, Février-Mai 2000.

BOUSSINESQ, J., 1877, "Sur la conciliation de la liberté morale avec le déterminisme scientifique", C.R.A.S., 84, 1877, pp. 362-4.

BOUSSINESQ, J., 1878, Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale, Paris, Gauthier-Villars, 1878 (Extrait des Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille, T. VI, 4ème série).

BOUSSINESQ, J., 1879, Etude sur divers points de la philosophie des sciences, Paris, Gauthier-Villars, 1879 (Extrait des Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille, T. VII, 4ème série)

BOUTOT, A., 1991, "La philosophie du chaos", Revue philosophique de la France et de l'étranger, Avril-Mai 1991, n° 2, pp. 145-178.

BOUTOT, A., 1993, L'invention des formes. Chaos, catastrophes, fractales, structures dissipatives, attracteurs étranges, Paris, Odile Jacob, 1993.

BOWEN, R., 1971, "Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces", Transactions of the American Mathematical Society, 153, 1971, pp. 401-414.

BOWEN, R., 1973, "Topological entropy for noncompact sets", Transactions of the American Mathematical Society, 184, 1973, pp. 125-136.

BOWEN, R., 1975, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, New York, Springer-Verlag, 1975, 108 p.

BOWEN, R., 1977, "A model for Couette flow data", in BERNARD, P., RATIU, T.S., Turbulence Seminar, Berkeley 1976-77, New York, Springer-Verlag, 1977, pp. 117-134.

BOWEN, R., RUELLE, D., 1975, "The ergodic theory of Axiom A flows", Inventiones Mathematicae, 29, 1975, pp. 181-202.

BRAY, W.C., 1921, "A periodic reaction in homogeneous solution and its relation to catalysis", Journal of the American Chemical Society, 43, 29 March 1921, pp. 1262-7.

BRAY, W.C., LIEBHAFSKY, H.A., 1931, "Reactions involving hydrogen peroxide, iodine and iodate ion. I. Introduction", Journal of Physical Chemistry, 53, 1931, pp. 38-48.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

BREDIG, G., WEINMAYR, J., 1903, "Eine periodische Kontaktkatalyse", Zeitschrift für physik. Chemie, 42, 1903, pp. 601-611.

BRETON, P., 1876, La Réversion, ou le Monde à l'envers, Paris, Librairie des Mondes, 1876.

BREZIN, E., GERVAIS, J.L., 1979, "Non-perturbative aspects in quantum-field theory", Physics Reports, 49, n° 2, 1979, pp. 91-272.

BRICMONT, J., 1996, "Science of chaos or chaos in science ?", http://www.xxx.lpthe.jussieu.fr/find/chao-dyn/1/bricmont/0/1/0/1996/3/0, 22 March 1996.

BRICMONT, J., DÜRR, D., GALAVOTTI, M.C., GHIRARDI, G., PETRUCCIONE, F., ZANHGI, N., 2001, Chance in Physics. Foundations and Perspectives, Berlin, Springer, 2001, 288 p. (Lecture Notes in Physics, n° 574).

BRIDGMAN, P.W., 1927, The logic of modern physics, New-York, The MacMillan Company, 1927.

BRILLOUIN, L., 1947, "Les grandes machines mathématiques. Les machines américaines", Annales des Télécommunications, T. 2, n° 11, 1947, pp. 331-346.

BRILLOUIN, L., 1964a, Scientific Uncertainty and Information, New York, Academic Press, 1964, 164 p.

BRILLOUIN, L., 1964b, "Indéterminisme dans la Mécanique rationnelle et rôle des discontinuités de Poincaré", Journal de Mathématiques pures et appliquées, Fasc. 3, T. XLIII, 1964, pp. 275-305.

BROUZENG, P., 1987, Duhem, Paris, Belin, Octobre 1987 (Collection : Un savant, Une Epoque).

BROWDER, F.E., 1983, The mathematical heritage of H. Poincaré, Providence, AMS, 1983 (Proceedings of symposia in pure mathematics ; Vol. 39-1).

BRU, B., 1998, "Schémas probabilistes d'urnes et physique", MATAPLI, n° 56, Octobre 1998, pp. 37#45.

BRUSH, S.G., 1983, Statistical physics and the atomic theory of Matter, from Boyle and Newton to Landau and Onsager, Princeton, Princeton series in Physics, 1983.

BRUSH, S.G., 1986, The kind of motion we call Heat, Amsterdam, North Holland Personal Library, 1986, (2 Vol.).

BRYAN, G.H., 1895, "The Kinetic Theory of Gases", Nature, 52, 1895, p. 244.

BURBURY, S.H., 1890, "On some problems in the kinetic theory of gases", Philosophical Magazine, serie 5, 30, 1890, pp. 298-317.

BURBURY, S.H., 1895a, "Boltzmann's Minimum Function", Nature, 51, 1895, p. 320.

BURBURY, S.H., 1895b, "Boltzmann's Minimum Function", Nature, 52, 1895, pp. 104-5.

BYLOV, B.F., VINOGRAD, R.E., GROBMAN, D.M., NEMYTSKII, V.V, 1966, The theory of Lyapounov exponents and its applications to the problem of stability, Moscou, Nauka, 1966.

CALLOT, J-L, DIENER, F., DIENER, M., 1978, "Le problème de la ‘chasse au canard’", C.R.A.S., A, 286, 5 Juin 1978, p. 1059-1061.

CAMBEL, A.B., 1993, Applied chaos theory : a paradigm for complexity, Boston,

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Academic Press, 1993, 246 p.

CAMPANINO, M., EPSTEIN, H., 1981, "On the existence of Feigenbaum's fixed point", Communications in Mathematical Physics, 79, 1981, pp. 261-302.

CAMPANINO, M., EPSTEIN, H., RUELLE, D., 1982, "On Feigenbaum's functional equation", Topology, 21, 1982, pp. 125-129.

CAMPBELL, D., CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, D., JEN, E., 1985, "Experimental mathematics: the role of computation in nonlinear science", Communications of the ACM, Vol. 28, n°4, 1985, pp. 374-84.

CAMPBELL, D., ROSE, H., 1983, "Order in chaos. Proceedings of the international conference on order in chaos held at the Centre for nonlinear studies, Los Alamos, New Mexico 87545, USA, 24-28 May 1982", Physica D, 7, 1983.

CAMPBELL, L., GARNETT, W., 1969, The life of James Clerk Maxwell, New-York, Johnson reprint corporation, 1969, 662 p.

CANGUILHEM, G., 1994, Etudes d'Histoire et de philosophie des sciences, Paris, Vrin, 1994 (1ère éd. 1968).

CARTAN, E., CARTAN, H., 1925, "Note sur la génération des oscillations entretenues", Annales des P.T.T., 14, 1925, pp. 1196-1207.

CARTWRIGHT, M.L., 1948, "Forced oscillations in nearly sinusoidal systems", Journal of the I.E.E. (Institution of Electrical Engineers), 95 (3), 1948, pp. 88-96.

CARTWRIGHT, M.L., 1950, "Forced oscillations in non-linear systems", Contributions to the theory of Nonlinear Oscillations, 1950 (Princeton, Princeton University Press, 1952).

CARTWRIGHT, M.L., 1952, "Non-linear vibrations: a chapter in mathematical history", The Mathematical Gazette, n° 216, Vol. XXXVI, May 1952, pp. 81-8.

CARTWRIGTH, M.L., LITTLEWOOD, J.E., 1945, "On nonlinear differential equations of the second order", Journal of the London Mathematical Society, 20, 1945, pp 180-9.

CARTWRIGTH, M.L., LITTLEWOOD, J.E., 1947, "On nonlinear differential equations of the second order", Annals of Mathematics, 48, 1947, pp. 472-494.

CASARTELLI, M., DIANA, E., GALGANI, L., SCOTTI, A., 1976, "Numerical computation on a stochastic parameter related to Kolmogorov entropy", Physical Review, A 13, 1976, p. 1921.

CASATI, G., 1982, "Chaos in quantum Mechanics", in HAKEN, H. (ed.), Order and chaos in physics, chemistry and biology, Berlin, Springer-Verlag, 1982.

CASATI, G., FORD, J., 1979, Stochastic in classical and quantum Hamiltonian systems, Volta Memorial Conference, Como, Italy, 1977, Berlin, Springer-Verlag, 1979 (Lecture notes in Physics, 93).

CASDAGLI, M., 1989, "Nonlinear prediction of chaotic time series", Physica D, 35, 1989, p. 335-356.

CESARI, L., 1959, Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Berlin, Springer-Verlag, 271 p.

CESARI, L., HALE, J., LASALLE, J., 1976, Dynamical systems, an international symposium, New York, Academic Press, 1976 (2 Vol.).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

CHABERT, J-L., 1990, "Un demi-siècle de fractales : 1870-1920", Historia Mathematica, 17, 1990, pp. 339-365.

CHALMERS, A.F., 1982, What is this thing called science ?, Milton Keynes, Open University Press, 2ème éd., 1982.

CHANCE, B., 1973, Biological and biochemical oscillators, New York, Academic Press, 1973, 534 p.

CHANDRA, J., 1984, Chaos in nonlinear dynamical systems : proceedings of a workshop held at the U.S. Army Research Office, Research Triangle Park, North Carolina, March 13-15, 1984, Philadelphia, SIAM, 1984, 191 p.

CHANDRA, J., SCOTT, A., 1983, Coupled nonlinear oscillators : proceedings of the Joint U.S. Army-Center for Nonlinear Studies workshop, held in Los Alamos, New Mexico, 21-23 July, 1981, Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1983, 124 p.

CHANDRASEKAR, S., 1943, "Stochastic problems in physics and astronomy", Reviews of Modern Physics and Astronomy, 97, 1943, pp. 1-89.

CHAUNDY, T.W., PHILLIPS, E., 1936, "The convergence of sequences defined by quadratic recurrence-formulae", Quarterly Journal of Mathematics, 1936, pp. 74-80.

CHAZY, J., 1910, Sur les équations différentielles de troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Thèse de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Paris, 1910.

CHAZY, J., 1913a, "Sur certaines trajectoires du problème des *n* corps", C.R.A.S., 157, 1913, pp. 688-691.

CHAZY, J., 1913b, "Sur les points singuliers de l'intégrale générale du problème des n corps", C.R.A.S., 157, 1913, pp. 1398-1400.

CHAZY, J., 1920, "Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment", C.R.A.S., 170, 1920, pp. 1560-3.

CHAZY, J., 1921, "Sur les courbes définies par les équations différentielles du second ordre", C.R.A.S., 173, 1921, pp. 435-6.

CHAZY, J., 1922, "Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment", Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 3ème série, T. 39, 1922, pp. 29-130.

CHAZY, J., 1929, "Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 8, 1929, pp. 354-380.

CHAZY, J., 1952, "Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment", Bulletin Astronomique, T. 8, 1952, pp. 403-436.

CHENCINER, A., 1977, "Comportement asymptotique de systèmes différentiables du type compétition d'espèces", C.R.A.S., 284, 1977, pp. 313-5

CHIRIKOV, B., 1979, "A universal instability of many-dimensional oscillator system", Physics Reports, n° 52, 1979, pp. 263-379.

CHUA, L.O., 1988, "Chaotic systems", Proceedings of the IEEE, Vol. 75, n° 8, 1987 (Special issue).

CILIBERTO, S., DAUXOIS, T., DROZ, M., 1995, Physics of complexity, Gif-sur-Yvette, Editions Frontières, 1995, 238 p. (3ème séminaire rhodanien de physique, Dolomieu

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

(France), Mars 1995).

CLAIRAUT, A.C., 1747, "Du Système du Monde dans les Principes de la Gravitation Universelle", Mémoire de l'Académie royale des Sciences de Paris, 1747, pp. 329-364.

CLAIRAUT, A.C., 1749, "Du Système du Monde dans les Principes de la Gravitation Universelle", Mémoire de l'Académie royale des Sciences de Paris, 1749, p. 549.

CLAUSIUS, R., 1864, Abhanlungen über die mechanische Wärmetheorie, Braunschweig, F. Vieweg, 1864.

CNRS, 1948, Méthodes de calcul dans les problèmes de mécanique, Marseille 30 Mars-6 Avril 1948, Paris 8-9 Avril 1948, Paris, Ed. du CNRS, 1949, 104 p.

CNRS, 1985, Rapport de prospective en mathématiques, Paris, Ed. du CNRS, 1985, 112 p.

COFFMAN, K.G., McCORMICK, W.D., NOSZTICZIUS, Z., SIMOYI, H.L., 1987, "Universality, multiplicity and the effect of iron impurity in the Belousov-Zhabotinskii reaction", Journal of Chemical Physics, 86, 1987, p. 119.

COHEN, E.G.D., UHLENBECK, G.E., 1971, Statistical Mechanics at the turn of the decade, New-York, M. Dekker, 1971, 235 p.

COLLET, P., ECKMANN, J.P., 1980, Iterated maps on the interval as dynamical systems, Basel, Birkhäuser, 1980, 248 p.

COLLET, P., ECKMANN, J.P., LANFORD III, O., 1980, "Universal properties of maps on an interval", Communications in Mathematical Physics, Vol. 76, 1976, p. 211-254.

COMPANINO, M., 1980, "Two remarks on the computer study of differential dynamical systems", Communications of Mathematical Physics, Vol. 74, 1980, p. 15.

COMTE, A., 1975, Cours de philosophie positive, Paris, Hermann, 1975 (2 Vol.).

CONRAD, M., GÜTTINGER, W., DAL CIN, M., 1974, Physics and mathematics of the nervous system: proceedings of the Summer School Physics and Mathematics of the Nervous system, Trieste, August 21-31 1973, Berlin, Springer-Verlag, 1974, 584 p.

COOPER, N.G., ECKHARDT, R., SHERA, N., 1989, From cardinals to chaos, Cambridge, CUP, 1989, 318 p.

CORNFELD, I.P., FOMIN, S.V., SINAI, Ya.G., 1982, Ergodic theory, New York, Springer-Verlag, 1982.

COSNARD, M., DEMONGEOT, J., 1985, "Attracteurs : une approche déterministe", C.R.A.S., 300, Série I, n° 15, 1985, pp. 551-6.

COSTE, J., PEYRAUD, J., COULLET, P., CHENCINER, A., 1978a, "Quelques propriétés des systèmes de Volterra", Journal de Physique, Colloque C5, 39, 1978, pp. 45-7.

COSTE, J., PEYRAUD, J., COULLET, P., CHENCINER, A., 1978b, "About the theory of competing species", Theoretical Population Biology, 14 (2), 1978, pp. 165-84.

COSTE, J., PEYRAUD, J., COULLET, P., 1979, "Asymptotics behaviors in the dynamics of competing species", SIAM Journal of Applied Mathematics, 36 (3), 1979, pp. 516-543.

COUFFIGNAL, L., 1947, "Les grandes machines mathématiques. Les travaux français",

Annales des Télécommunications, T. 2, n° 12, 1947, pp. 376-386.

COUFFIGNAL, L., 1968, La cybernétique, Paris, PUF, 3ème ed., 1968, 128 p. ("Que sais-je ?" n° 638).

COULLET, P., 1998, "Le pendule et le coquillage", La Recherche, n° 305, Janvier 1998.

COULLET, P., TRESSER, C., 1978, "Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation", Journal de Physique C, 5, T. 39, 1978, pp. 25-8.

COULLET, P., TRESSER, C., 1980, "Critical transition to stochasticity for some dynamical systems", Journal de Physique-Lettres, T. 41, n° 11, 1980, pp. 255-8.

COULLET, P., TRESSER, C., ARNEODO, A., 1979, "Transition to stochasticity for a class of forced oscillations", Physics Letters A, Vol.72, n° 4-5, 1979, pp. 268-70.

COULLET, P., TRESSER, C., ARNEODO, A., 1980, "Topological Horseshoe and numerically observed chaotic behavior in the Henon mapping", Journal of physics, 13A, 1980, pp. L123-L127.

COURBAGE, M., 1983, "Intrinsic irreversibility of Kolmogorov dynamical systems", Physica A, 122, 1983, pp. 459-482.

COURBAGE, M., MISRA, B., 1980, "On the equivalence between Bernouilli dynamical systems and stochastic Markov processes", Physica A, 104, 1980, pp. 359-377.

COURNOT, A.A., 1841, Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal, Paris, Hachette, 1841.

CRAMER, H., 1962, "A.I. Khinchin's work in mathematical probability", Annals of Mathematical Statistics, 33, 1962, pp. 1227-37.

CROQUETTE, V., 1982, "Déterminisme et chaos", Pour la Science, 62, Décembre 1982, pp. 62-77.

CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, D., PACKARD, N., SHAW, T., JONES, G., DONNELLY, R.J., 1980, "Power spectral analysis of a dynamical system", Physics Letters, 76 A, 1980, pp. 1-4.

CRUTCHFIELD, J.P., HUBERMAN, B.A., 1980, "Fluctuations and the onset of chaos", Physics Letters, 77 A, 1980, pp. 407-10.

CRUTCHFIELD, J.P., MACNAMARA, B.S., 1987, "Equations of motion from a data series", Complex Systems, 1, 1987, p. 417.

CRUTCHFIELD, J.P., NAUENBERG, M., RUDNICK, J., 1981, "Scaling for external noise at the onset of chaos", Physical Review Letters, Vol. 46, n° 14, 6 April 1981, pp. 933-5.

CRUCHFIELD, J.P., PACKARD, N.H., 1982, "Symbolic dynamics of one-dimensional maps. Entropies, finite precision and noise", International Journal of Theoretical Physics, 21, 1982, pp. 433-466.

CURLVERWELL, E.P., 1890, "Note on Boltzmann's kinetic theory of gases, and on Sir W. Thomson's address to section A, British Association, 1884", Philosophical Magazine, serie 5, 30, 1890, pp. 95-9.

CURRY, J.H., 1979a, "On the Henon transformation", Communications in Mathematical Physics, 68, 1979, p. 129-140.

CURRY, J.H., 1979b, "An algorithm for finding closed orbits", in NITECKI, Z.,

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

ROBINSON, C., Global theory of dynamical systems, New York, Springer, 1980, p. 111-120.

CURRY, J.H., 1980, "On some systems motivated by the Lorenz equations : numerical results", in OSTERWALDER, K., Mathematical problems in theoretical physics, New York, Springer, 1980, (Lecture Notes in Physics, 116), pp. 316-30.

CURRY, J.H., 1981, "On computing the entropy of the Henon attractor", Journal of Statistical Physics, 26, 1981, pp. 683-95.

CURRY, J.H., YORKE, J.A., 1978, "A transition from Hopf bifurcation to chaos: computer experiments with maps of R^2", in MARKLEY, N.G., MARTIN, J.C., PERRIZO, W., The structure of attractors of dynamical systems, New York, Springer-Verlag, 1978, pp. 48-66.

CVITANOVIC, P., 1989, Universality in chaos, London, Institute of Physics Publication, 2ème éd., 1989.

CVITANOVIC, P., 1991, "Periodic orbits as the Skeleton of classical and quantum chaos", Physica D, 51, 1991, pp. 138-51.

CVITANOVIC, P., 1992, "Periodic orbit theory in classical and quantum mechanics", Chaos, 2 (1), 1992, pp. 1-4.

CVITANOVIC, P., GASPARD, P., SCHREIBER, T., 1992, "Investigation of the Lorentz gas in terms of periodic orbits", Chaos, 2 (1), 1992, p. 85-90.

DACUNHA-CASTELLE, D., 1996, Les chemins de l'aléatoire, Paris, Flammarion, 1996, 265 p. (Collection Champs).

DAHAN DALMEDICO, A., 1994, "La renaissance des systèmes dynamiques aux USA après la 2nde guerre mondiale : l'action de S. Lefschetz", Supplemento al Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1994, pp. 133-166.

DAHAN DALMEDICO, A., 1996, "L'essor des mathématiques appliquées aux Etats-Unis : l'impact de la seconde guerre mondiale", Revue d'Histoire des mathématiques, 2, 1996, pp. 149-213.

DAHAN DALMEDICO, A., 2000, "L'image ‘fin de siècle’ des sciences", La Recherche, 237, Janvier 2000, pp. 58-61.

DAHAN DALMEDICO, A., 2001, "History and Epistemology of Models: Meteorology (1946-1963) as a Case Study", Archive for History of Exact Sciences, n° 55, 2001, pp. 395-422.

DAHAN, A., CHABERT, J-L., CHEMLA, K., 1992, Chaos et déterminisme, Paris, Seuil, 1992, 416 p.

DAHAN, A., PESTRE, D., 2004, Les sciences pour la guerre - 1940-1960, Paris, Editions EHESS, 2004, 404 p.

DARMOIS, G., 1957, Notice sur la vie et les travaux de Jean Chazy (1882-1955), Paris, Palais de l'Institut, 1957, 12 p.

DAVIES, P.C.W., La Nouvelle Physique, Paris, Flammarion, 1993 (trad. de DAVIES, P.C.W., The New Physics, Cambridge, C.U.P., 1989).

DAVIS, H.T., 1962, Introduction to nonlinear differential and integral equations, New-York, Dover, 1962, 566 p.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

DE DONDER, T., 1927, L'Affinité, Bruxelles, M. Lamertin, 1927, 94 p.

DE KEPPER, P., BAR-ELI, K., 1983, "Dynamical properties of the Belousov-Zhabotinskii reaction in a flow system. Theoretic and experimental analysis", Journal of Physical Chemistry, 87, 1983, p. 480.

DE KEPPER, P., BOISSONADE, J., 1981, "Theoretical and experimental analysis of phase diagrams and related dynamical properties in the Belousov-Zhabotinskii system", Journal of Chemical Physics, 75, 1981, p. 189.

DE REGT, H.W., 1996, "Philosophy and the kinetic theory of gases", British Journal of Philosphy of Science, 47, 1996, pp. 31-62.

DEAKIN, M.A.B., 1990, "Modeling biological systems", in VINCENT, T.L., MEES, A.I., JENNINGS, L.S., Dynamics of complex interconnected biological systems, Berlin, Birkhäuser, 1990, pp. 2-16.

DEBAGGIS, H., 1952, "Dynamical systems with stable structure", Contributions to the theory of Nonlinear oscillations, 1952, Vol. 2 (Princeton, Princeton University Press, 1952).

DECAUX, B., LE CORBEILLER, P., 1931, "Sur un système électrique auto-entretenu utilisant un tube à néon", C.R.A.S., 193, 1931, pp. 723-5.

DEGN, H., 1967, "Effect of Bromine derivatives of malonic acid on the oscillation reaction of malonic acid, cerium ions and bromate", Nature, 213, 1967, pp. 589-90.

DEGN, H., 1972, "Oscillating chemical reactions in homogeneous phase", Journal of Chemical Education, 49, 1972, pp. 302-7.

DEGN, H., 1991, "Determinism in a world of non-invertible transformations", in BAIER, G., KLEIN, M., A chaotic hierarchy, Singapore, World Scientific, 1991, pp. 145-151.

DELAHAYE, J-P., 2002, L'intelligence et le calcul, de Gödel aux ordinateurs quantiques, Paris, Belin#Pour la Science, 2002, 192 p.

DELAUNAY, C., 1846, "Nouvelle théorie analytique de la lune", C.R.A.S., 23, 1846, pp. 968-70.

DELAUNAY, C., 1860, "Théorie du mouvement de la lune I", Mémoire de l'Académie des Sciences, 28, 1860, pp. 1-883.

DELAUNAY, C., 1867, "Théorie du mouvement de la lune II", Mémoire de l'Académie des Sciences, 29, 1867, pp. 1-931.

DELL'AGLIO, L., ISRAEL, G., 1989, "La théorie de la stabilité et l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires dans les mathématiques Italiennes : le point de vue de Tullio Levi-Civita", Cahiers de Séminaire d'Histoire des mathématiques, 10, 1989, pp. 283-321.

DEMARNE, P., ROUQUEROL, M., 1961, Les ordinateurs électroniques, Paris, PUF, 2ème ed., 1961, 128 p. ("Que sais-je ?" n° 832).

DEMONGEOT, J., 1998, "Le déterminisme en biologie contemporaine", in LESIEUR, M. (Dir.), Turbulence et déterminisme, Grenoble, P.U.G., 1998, pp. 159-181.

DEN HARTOG, J.P., 1936, Vibrations et mouvements vibratoires dans l'industrie mécanique moderne, Paris, Dunod, 1936.

DEN HARTOG, J.P., 1960, Vibrations mécaniques, Paris, Masson, 1960.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

DEN HARTOG, J.P., 1985, Mechanical Vibrations, New York, Mac Graw-Hill, 4ème éd., 1985, 436 p. (1ère éd. : 1934).

DENJOY, A., 1932, "Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du Tore", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 11, série 9, 1932, pp. 333-75.

DERRIDA, B., GERVOIS, A., POMEAU, Y., 1978, "Iteration of endomorphisms on the real axis and representation of numbers", Annales de l'Institut Henri Poincaré, Vol. XXIX, n° 3, 1978, pp. 305-56.

D'ESPAGNAT, B., 2001, (dir.), Implications philosophiques de la science contemporaine, 1. Le chaos, le temps, le principe anthropique. Rapport du groupe de travail de l'Académie des Sciences morales et politiques, Paris, PUF, 2001, 102 p.

DEVANEY, R., NITECKI, Z., 1979, "Shift automorphisms in the Henon mapping", Communications in Mathematical Physics, 67, 1979, pp. 137-146.

DIACU, F., HOLMES, P., 1996, Celestial encounters: the origin of chaos and stability, Princeton, Princeton University Press, 1996, 233 p.

DIENER, M., 1980, "Deux nouveaux ‘phénomènes-canard’", C.R.A.S., A, 290, 24 Mars 1980, pp. 541-4.

DIEUDONNE, J., 1988, Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui, Paris, Hachette, 1988, 316 p. (Collection Pluriel)

DILIBERTO, S.P., 1950, "On systems of ordinary differential equations", Contributions to the theory of non-linear oscillations, Vol. I, pp. 1-38 (Annals of Mathematical Studies, n°20, Princeton).

DINER, S., 1992, "Les voies du chaos déterministe dans l'école russe", in DAHAN, A., CHABERT J.L., CHEMLA K., Chaos et déterminisme, Paris, Seuil, 1992, pp. 331-370.

DINER, S., FARGUE, D., LOCHACK, G., 1986, Dynamical Systems : A renewal of mechanism, Singapore, World Scientific, 1986, 284 p.

DITTO, W.L., RAUSEO, S.N., SPANO, M.L., 1990, "Experimental control of chaos", Physical Review Letters, Vol. 65, n° 26, 1990, p. 3211-3214.

DIU, B., GUTHMANN, C., LEDERER, D., ROULET, B., 1997, Physique Statistique, Paris, Hermann, 1997, 1001 p.

DRACH, J., 1929, "Henri Andoyer", C.R.A.S., 188, 1929, pp. 1577-8.

DRAGT, A.J., 1965, "Trapped orbits in a magnetic dipole field", Reviews of Geophysics, n° 3, 1965, pp. 255-298.

DUBOIS, M., RUBIO, M.A., BERGE, P., 1983, "Experimental evidence of intermittencies associated with a subharmonic bifurcation", Physical Review Letters, 51, 1983, pp. 1446-9.

DUGAS, R., 1959, La théorie physique au sens de Boltzmann et ses prolongements modernes, Paris, Dunod (éd. du Griffon), 1959, 308 p.

DUHEM, P., 1906, La théorie physique, son objet, sa structure, Paris, 1906 ; réédition Vrin (Paris), 1989.

DULAC, H., 1912, "Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage

de valeurs singulières", Bulletin de la Société Mathématique de France, 40, 1912, pp. 324-92.

DULAC, H., 1923, "Sur les cycles limités", Bulletin de la Société Mathématique de France, 51, 1923, p. 45-138.

DULAC, H., 1937, "Recherche des cycles limites", C.R.A.S., 204, 1937, p. 1704-6.

DÜRR, D., GOLDSTEIN, S., ZANGHI, N., 1992, "Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty", Journal of Statistical Physics, 67, 1992, pp. 843-907.

EARMANN, J., 1986, A primer on determinism, Dordrecht, Reidel, 1986.

EARMANN, J., REDEI, M., 1996, "Why ergodic theory does not explain the success of equilibrium statistical mechanics", British Journal of Philosophy of Science, 47, 1996, pp. 63-78.

ECKMANN, J.P., 1981, "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems", Reviews of modern physics, 53, 1981, pp. 643-654.

ECKMANN, J.P., RUELLE, D., 1985, "Ergodic theory of chaos and strange attractors", Reviews of Modern Physics, Vol. 57, n° 3, part 1, July 1985, pp. 617-656.

ECKMANN, J.P., RUELLE, D., 1992, "Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems", Physica D, 56, 1992, pp. 185-7.

EHRENFEST, P., EHRENFEST, T., 1911, The conceptual foundations of Statistical Mechanics, Ithaca, Cornell UP, 1959. (traduction de "Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik", Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Vol. IV)

EKELAND, I., 1984, Le calcul, l'imprévu. Les figures du temps de Kepler à Thom, Paris, Seuil, Janv. 1984, 170 p. (Points Sciences).

EKELAND, I., 1996, Le chaos, Paris, Flammarion, 1996 (Domino).

EKELAND, I., 1997, "La théorie des catastrophes", La Recherche, n° 301, 1997.

EKELAND, I., 2000, Au hasard. La chance, la science et le monde, Paris, Seuil, 2000, 203 p. (réédition Points Science 136).

EPSTEIN, J.R., POJMAN, J.A., 1998, An introduction to nonlinear chemical dynamics. Oscillations, waves, patterns and chaos, Oxford, Oxford University Press, 1998, 392 p.

ESCUDIE, B., GAZANHES, C., TACHOIRE, H., TORRA, V., 2001, Des cordes aux ondelettes, Aix#en#Provence, Pub. De l'Université de Provence, 2001, 482 p.

ESCUDIE, B., RAMUNNI, G., 1992, "Un accident ferroviaire génère une analyse scientifique et une avancée dans l'étude des systèmes", Revue d'histoire des chemins de fer, hors-série n° 3, 1992, pp. 125-143.

FARMER, D., OTT, E., YORKE, J.A., 1983, "The dimension of chaotic attractors", Physica D, 7, 1983, pp. 153-180.

FARMER, J.D., 1982, "Chaotic attractors of an Infinite-Dimensional Dynamical System", Physica D, Vol.4, 1982, pp. 366-393.

FARMER, J.D., SIDOROWICH, J.J., 1987, "Predicting chaotic time series", Physical Review Letters, Vol. 59, n° 8, 1987,pp. 845-8.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

FATOU, P., 1928, "Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période", Bulletin de la Société Mathématique de France, 56, 1928, p. 98.

FEIGENBAUM, M.J., 1978, "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations", Journal of Statistical Physics, 19, 1978, pp. 25-52.

FEIGENBAUM, M.J., 1979a, "The universal metric properties of nonlinear transformations", Journal of Statistical Physics, 21, 1979, pp. 669-706.

FEIGENBAUM, M.J., 1979b, "The onset spectrum of turbulence", Physics Letters, 74 A, 1980, pp. 375-8.

FEIGENBAUM, M.J., 1979c, "Metric universality in nonlinear recurrence", in CASATI, G., FORD, J., Stochastic in classical and quantum Hamiltonian systems, Volta Memorial Conference, Como, Italy, 1977, Berlin, Springer-Verlag, 1979, pp. 163-6.

FEIGENBAUM, M.J., 1980a, "The transition to aperiodic behavior in turbulent systems", Communication in Mathematical Physics, 77, 1980, pp. 65-86.

FEIGENBAUM, M.J., 1980b, "Universal behavior in nonlinear systems", Los Alamos science, 1, 1980, pp. 4-27.

FEIGENBAUM, M., 1985, "An interview with Stan Ulam and Mark Kac", Journal of Statistical Physics, Vol. 39, n° 5-#6, 1985, pp. 455-476.

FEIGENBAUM, M.J., KADANOFF, L.P., SHENKER, S.J., 1982, "Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis", Physica D, 5, 1982, p. 370-386.

FEIT, S.D., 1978, "Characteristic exponents and strange attractors", Communications in Mathematical Physics, 61, 1978, pp. 249-260.

FENSTERMACHER, R., SWINNEY, H.L., GOLLUB, J.P., 1977, "Transition to turbulence in fluid flows", in HAKEN, H., Synergetics: A workshop, Berlin, Springer-Verlag, 1977, p. 60.

FERMI, E., 1923, "Beweis dass ein mechanisches normalsysteme in algemein quasi-ergodish ist", Physikalishe Zeitschrift, 24, 1923, pp. 261-5.

FERMI, E., PASTA, J., ULAM, S., 1955, "Studies of non linear problems", 1955, in ULAM, S., Sets, Numbers and Universe, Selected Works, Cambridge, the AIT Press, 1974, pp. 490-501.

FIELD, R.J., BURGER, M., 1985, Oscillations and travelling waves in chemical systems, New York, Wiley, 1985.

FIELD, R.J., KÖRÖS, E., NOYES, R.M., 1972, "Oscillations in chemical systems", Journal of the American Chemical Society, 94, 1972, p. 8649.

FIELD, R.J., NOYES, R.M., 1974, "Oscillations in chemical systems. IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction", Journal of Chemical Physics, 60, 1974, pp. 1877-1884.

FLASCHKA, H., CHIRIKOV, B. (Ed.), 1988, "Progress in chaotic dynamics. Essays in honor of Joseph Ford's 60th Birthday", Physica D, 33, n°1-3, 1988.

FONTANON, C., 1998, Histoire de la mécanique appliquée. Enseignement, recherche et pratiques mécaniciennes en France après 1880, Fontenay aux roses, ENS Editions, 1998, 206 p.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

FORD, J., 1961, "Equipartition of Energy for Nonlinear systems", Journal of Mathematical Physics, Vol. 2, n° 3, May-June 1961, pp. 387-393.

FORD, J., 1973, "The transition from analytic dynamics to statistical mechanics", Advances in Chemical Physics, 24, 1973, p. 155-185.

FORD, J., 1989, "Qu'est-ce que le chaos, pour que nous l'ayons à l'esprit ?", in DAVIES, P.C.W., La Nouvelle Physique, Paris, Flammarion, 1993 (trad. de DAVIES, P.C.W., The New Physics, Cambridge, C.U.P., 1989), pp. 348-372.

FORD, J., LUNSFORD, G.H., 1970, "Stochastic behavior of Resonant Nearly Linear Oscillator Systems in the Limit of Zero Nonlinear Coupling", Physical Review A, Vol. 1, n° 1, Jan 1970, pp. 59-70.

FOUILLE, A., 1954, Physique des vibrations à l'usage des ingénieurs, Paris, Dunod, 1954, 546 p.

FOUILLEE, A., 1872, La liberté et le déterminisme, Paris, Ladrange, 1872.

FRANCESCHELLI, S., 2001, Construction de signification physique dans le metier de physicien : le cas du chaos déterministe, 2001, Thèse de Doctorat, Université Paris VII, sous la direction de M. Paty (soutenue le 21 Février 2001).

FRANCESCHELLI, S., ROQUE, T., 2001, "L'attracteur étrange entre physique et mathématique", XXI ème congrès International d'Histoire des Sciences, Mexico, 8-14 Juillet 2001.

FRANCESCHINI, V., RUSSO, L., 1981, "Stable and unstable manifolds of the Henon mapping", Journal of Statistical Physics, 25, 1981, p. 757.

FRANCESCHINI, V., TEBALDI, C., 1979, "Sequences of infinite bifurcations and turbulence in a five-mode truncation of the Navier-Stokes equations", Journal of Statistical Physics, Vol. 21, n° 6, 1979, pp. 707-726.

FRANKS, J., 1989a, "Chaos : Making a New Science by James Gleick", The Mathematical Intelligencer, Vol. 11, n° 1, 1989, pp. 65-69.

FRANKS, J., 1989b, "Comments on the responses to my review of Chaos", The Mathematical Intelligencer, Vol. 11, n° 3, 1989, pp. 12-13.

FREDERICKSON, P., KAPLAN, J.L., YORKE, E.D., YORKE, J.A., 1983, "The Lyapounov dimension of strange attractors", Journal of Differential Equations, 49, 1983, pp. 185-207.

FRIEDMAN, Y., 1994, L'univers erratique, Paris, PUF, 1994.

FROEHLING, H., CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, D., PACKARD, N.H., SHAW, R., 1981, "On determining the dimension of chaotic flows", Physica D, 3, 1981, pp. 605-617.

FROESCHLE, C., 1968a, "Etude numérique de transformations ponctuelles conservant les aires", C.R.A.S., 266, 1968, p. 747.

FROESCHLE, C., 1968b, "Etude numérique de transformations ponctuelles planes conservant les aires", C.R.A.S., 266, 1968, p. 846.

FROESCHLE, C., 1970a, "Numerical study of Dynamical System with Three degrees of freedom, I. Graphical Displays of Four Dimensional Sections", Astronomy and Astrophysics , 4, 1970, p. 115.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

FROESCHLE, C., 1970b, "Numerical study of Dynamical System with Three degrees of freedom, I. Numerical Displays of Four Dimensional Sections", Astronomy and Astrophysics , 4, 1970, p. 177.

FROESCHLE, C., 1970c, "A numerical study of the stochasticity of Dynamical Systems with Two degrees of freedom", Astronomy and Astrophysics, 9, 1970, p. 15.

FROESCHLE, C., 1971, Contribution à l'étude des systèmes dynamiques à 2 et 3 degrés de liberté, Thèse d'Etat, Université de Nice, 1971.

FROESCHLE, C., 1972, "Numerical Study of a Four Dimensional mapping", Astronomy and Astrophysics, 16, 1972, p. 172.

FROESCHLE, C., 1973, "Numerical Study of a Four Dimensional mapping", Celestial Mechanics, 8, 1973, n° 2.

FROESCHLE, C., SCHEIDECKER, J.P., 1975, "Stochasticity of dynamical systems with increasing number of degrees of freedom", Physical Review A, Vol. 12, n° 5, 1975, pp. 2137-43.

FUKUNAGA, K., 1972, Introduction to statistical pattern recognition, New York, Academic Press, 1972, 369 p.

FUKUNAGA, K., OLSEN, D.R., 1971, "An algorithm for finding intrinsic dimensionality of data", IEEE Transactions on Computers, 20 (2), 1971, pp. 176-193.

GABOR, D., 1946, "Theory of communication", Journal of the Institution of Electrical Engineers, part III, 93, 1946, pp. 429-457.

GABOR, D., WILBY, W.P., WOODCOCK, R., 1960, "A universal nonlinear filter, predictor and simulator which optimizes itself by a learning process", Proceedings of the IEEE, B 108, 1960, p. 422.

GALLAVOTTI, G., 1994, "Ergodicity, ensembles, irreversibility in Boltzmann and beyond", http://xxx.lanl.gov/abs/chao-dyn/9403004

GALLAVOTTI, G., 1998a, "Mécanique statistique hors équilibre : l'héritage de Boltzmann", http://xxx.lanl.gov/abs/chao-dyn/9802012

GALLAVOTTI, G., 1998b, "Chaotic dynamics, fluctuations, nonequilibrium ensembles", Chaos 8 (2), 1998, pp. 384-392.

GALLAVOTTI, G., KEANE, M.S., RUELLE, D., 1976, International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics, Rennes, 1975, Sept 14-21, Paris, Société Mathématique de France, 1976, 192 p. (Astérisque n° 40).

GANAPATHISUBRAMANIAN, N., NOYES, R.M., 1982, "Bromate-driven oscillations in the presence of excess silver ion", Journal of Chemical Physics, 86, 1982, p. 5155.

GARBACZEWSKI, P., WOLF, M., WERON, A., 1995, Chaos : the interplay between stochastical and deterministic behaviour ; proceedings of the XXXI st Winter school of Theoretical physics, held in Karpacz Poland, 13-24 February 1995, Berlin, Springer, 1995, 571 p. (Lecture notes in Physics n° 457).

GARRIDO, L., 1983, Dynamical systems and chaos, proceedings of the Sitges Conference on Statistical Mechanics, Sitges, September 5-11, 1982, Berlin, Springer-Verlag, 1983, 298 p.

GARRIDO, M.S., VILELA MENDES, R., 1992, Complexity in Physics and Technology,

Singapore, World Scientific, 1992.

GASPARD, P., ARNEODO, A., KAPRAL, R., SPARROW, C., 1993, "Homoclinic chaos. Proceedings of a NATO Advanced Research Workshop held at the Centre for Nonlinear Phenomena and complex system, University of Brussels, Belgium, 6-9 May 1991", Physica D, 62, n°1-4, Janvier 1993.

GAUTHIER, L., 1962, Applications des équations non linéaires à la physique théorique, Paris, Editions de la Revue d'optique théorique et instrumentale, 1962, 172 p.

GAYON, J., 1998, "Le déterminisme : origines d'un mot, évaluation d'une idée.", in LESIEUR, M. (Dir.), Turbulence et déterminisme, Grenoble, P.U.G., 1998, pp. 183-197.

GAZANHES, C., 2000, "Du Laboratoire de la Guerre Sous-Marine de Toulon au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille", Revue pour l'Histoire du CNRS, n° 2, Mai 2000, pp. 24-35.

GEYMONAT, G., LIONS, J-L., 2001, "Rôle des instruments mathématiques et numériques dans la modélisation", MATAPLI, n° 65, avril 2001, pp. 51-62.

GIBBS, H.M., HOPF, F.A., KAPLAN, D.L., SHOEMAKER, R.L., 1981, "Observation of chaos in optical bistability", Physical Review Letters, Vol. 46, n° 7, 16 February 1981, pp. 474-7.

GIBBS, J.W., 1902, Elementary principles in statistical mechanics, London, Arnold, 1902, 216 p.

GILAIN, C., 1991, "La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles" in GISPERT-CHAMBAZ, H., La France Mathématique : la Société Française de Mathématique 1872-1914, Paris, SFHST-SMF, 1991, pp. 215-242.

GILMORE, R., 1998, "Topological analysis of chaotic dynamical systems", Review of Modern Physics, Vol. 70, n° 4, Oct 1998, p. 1455-1529.

GIRAUD, A., 1969, Applications des récurrences à l'étude des systèmes de commande, Thèse de docteur-ingénieur, Faculté des Sciences de Toulouse, Avril 1969.

GISPERT-CHAMBAZ, H., 1991, La France Mathématique : la Société Française de Mathématique 1872-1914, Paris, SFHST-SMF, 1991.

GLANSDORFF, P., 1979, "Origine et perspectives des structures dissipatives", in PACAULT, A., VIDAL, C. (eds), Synergetics : Far from equilibrium, Berlin, Springer, 1979, 175 p. (Proceedings of the conference Far from equilibrium : instabilities and structures, Bordeaux, France, September 27-29, 1978).

GLANSDORFF, P., PRIGOGINE, I., 1954, "Sur les propriétés différentielles de la production d'entropie", Physica, XX, 1954, pp. 773-780.

GLANSDORFF, P., PRIGOGINE, I., 1971, Structure, stabilité et fluctuations, Paris, Masson, 1971.

GLASS, L., MACKEY, M.C., 1988, From clocks to chaos : the rythms of life, Princeton, Princeton University Press, 1988.

GLEICK, J., 1989, "James Gleick replies", The Mathematical Intelligencer, Vol. 11, n° 3, 1989, pp. 8-9.

GLEICK, J., 1991, La théorie du chaos, Paris, Flammarion, 1991, 431 p. (traduction de

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Chaos, New-York, Viking Press, 1ère éd., 1987).

GOLDBETER, A., 1990, Rythmes et chaos dans les systèmes biochimiques et cellulaires, Paris, Masson, 1990, 304 p. (préface de I. Prigogine).

GOLDSTINE, H., VON NEUMANN, J., 1947, "On the principles of large scale computing machines", in VON NEUMANN, J., Collected Works of John Von Neumann, New-York, Pergamon Press, 1963, Vol. 5, pp. 1-32.

GOLLUB, J.P., BENSON, S.V., 1980, "Many routes to turbulent convection", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 100, part 3, 1980, pp. 449-470.

GOLLUB, J.P., SWINNEY, H.L., 1975, "Onset of turbulence in a rotating fluid", Physical Review Letter, 35, 1975, pp. 927-930.

GONDA, J., JELINEK, F., 1967, Nonlinear oscillations : Proceedings of the fourth conference on nonlinear oscillations, held in Prague, 5-9 September 1967, Prague, Academia, 1968, 609 p.

GONZALEZ, D.L., PIRO, O., 1983, "Chaos in a nonlinear driven oscillator with exact solution", Physical Review Letters, Vol. 50, n° 12, 1983, pp. 870-872.

GOODRICH, K., GUSTAFSON, K., MISRA, B., 1980, "On converse to Koopman's lemma", Physica A, 102, 1980, pp. 379-388.

GOROFF, D., 1993, New methods of celestial mechanics, introduction of Daniel Goroff, Woodbury, American Institute of Physics, 1993 (History of Modern Physics and Astronomy, Vol. 13).

GOTTSCHALK, W.H., HEDLUND, G.A., 1955, Topological dynamics, Providence R.I., American Mathematical Society, 1955, 151 p. (American Mathematical Society Colloquium Publ., Vol. 36).

GOUY, L., 1888, "Note sur le mouvement Brownien", Journal de Physique, série II, 7, 1888, pp. 561-4.

GRASMAN, J., VELING, E.J.M., WILLEMS, G.M., 1976, "Relaxation oscillations governed by a van der Pol equation with periodic forcing term", SIAM Journal of Applied Mathematics, 31, 1976, p. 667.

GRASSBERGER, P., 1983a, "On the fractal dimension of the Henon attractor", Physics Letters, 97 A, 1983, pp. 224-6.

GRASSBERGER, P., 1983b, "Generalized dimensions of strange attractors", Physics Letters, 97 A, 1983, pp. 227-230.

GRASSBERGER, P., 1986, "Do climatic attractors exist?", Nature, Vol. 323, Oct. 1986, pp. 609-611.

GRASSBERGER, P., PROCACCIA, I., 1983a, "Measuring the strangeness of strange attractors", Physica D, 9, 1983, pp. 189-208.

GRASSBERGER, P., PROCACCIA, I., 1983b, "Characterization of strange attractors", Physical Review Letter, 50, 1983, pp. 346-9.

GRASSBERGER, P., PROCACCIA, I., 1983c, "Estimation of Kolmogorov entropy from a chaotic signal", Physical Review, A 28, 1983, pp. 2591-3.

GRAY, P., SCOTT, S.K., 1994, Chemical oscillations and instabilities. Nonlinear chemical kinetics, Oxford, Clarendon Press, 1994, 453 p.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

GREBOGI, C., 1982, "Chaotic attractors crisis", Physical Review Letters, 48, n° 22, 1982, pp. 1507-10.

GREENE, J.M., 1968, "Two dimensional Measure-Preserving Mappings", Journal of Mathematical Physics, Vol. 9, n° 5, 1968, p. 760-8.

GREENSPAN, D., 1966, Numerical solutions of nonlinear differential equations: proceedings of an advanced symposium conducted by the Mathematics Research Center, US Army, University of Wisconsin, Madison, May 9-11, 1966, New-York, J. Wiley, 1966, 347 p.

GROSSMANN, S., MAYER-KRESS, G., 1989, "Chaos in the international arms race", Nature, Vol. 337, 23 Feb. 1989, pp. 701-4.

GROSSMANN, S., THOMAE, S., 1977, "Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes", Zeitschrift für Naturforschung, 32, 1977, pp. 1353-63.

GUCKENHEIMER, J., 1976, "A strange, strange attractor", in MARSDEN, J.E., McCRACKEN, M., The Hopf bifurcation, New York, Springer, 1976, pp. 368-381.

GUCKENHEIMER, J., 1979a, "Sensitive dependence to Initial conditions for One Dimensional Maps", Communications in Mathematical Physics, 70, 1979, pp. 133-160.

GUCKENHEIMER, J., 1979b, "The growth of topological entropy for one dimensional maps", in NITECKI, Z., ROBINSON, C., Global theory of dynamical systems, New York, Springer, 1980, pp. 216-223.

GUCKENHEIMER, J., MOSER, J., NEWHOUSE, S.E., 1980, Dynamical systems : C.I.M.E. lectures, Bressanone, Italy, June 1978, Cambridge MA, Birkhaüser Boston, 1980, 289 p. (Progress in Mathematics Vol. 8).

GUCKENHEIMER, J., WILLIAMS, R.F., 1979, "Structural stability of the Lorenz attractor", Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., n° 50, 1979, pp. 307-320.

GUEVARA, M.R., GLASS, L., SHRIER, A., 1981, "Phase locking, period-doubling bifurcations, and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells", Science, 214, 1981, pp. 1350-3.

GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1965, "Sur un algorithme de détermination du domaine de stabilité d'un point double d'une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variables réelles", C.R.A.S., 260, 1965, pp. 6524-7.

GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1969, "Sensitivity problems related to certain bifurcations in non-linear recurrence relations", Automatica, Vol. 5, 1969, pp. 303-17.

GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1972, "Sur la distribution des cycles d'une récurrence ou transformation ponctuelle, conservative du deuxième ordre", C.R.A.S., A, 274, 1972, pp. 1271-4.

GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1975b, "Accumulations de bifurcations dans une récurrence", C.R.A.S., A, 281, 1975, pp. 45-8.

GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1975a, "Sur les récurrences, ou transformations ponctuelles, du premier ordre, avec inverse non unique", C.R.A.S., A, 280, 1975, pp. 905-8.

GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1978, "Bifurcation déstabilisant une solution chaotique d'un endomorphisme du deuxième ordre", C.R.A.S., A, 286, 1978, pp. 427-430.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1980a, Dynamique chaotique, Toulouse, CEPADUES : Collection Nabla, 1980, 478 p.

GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1980b, Recurrences and discrete dynamic systems, Berlin, Springer-Verlag, 1980, 272 p. (Lecture notes in mathematics n° 809).

GUMOWSKI, I., MIRA, C., 1988, "Solutions "chaotiques" bornées d'une récurrence ou transformation ponctuelle du deuxième ordre, à inverse non unique", C.R.A.S., A, 285, 1988, pp. 477-480.

GUMOWSKI, I., MIRA, C., RIBERI, E., 1967, "Sur la frontière du domaine de stabilité d'un point double d'une récurrence non linéaire, lorsque cette frontière ne contient pas de point double", C.R.A.S., A, 265, 1967, pp. 59-62.

GÜREL, O., RÖSSLER, O.E., 1979, Bifurcation theory and applications in scientific disciplines, New York, Annals of the New York Academy of Science, 1979, 708 p.

GUYON, E., HULIN, J.P., 1997, Granites et fumées : un peu d'ordre dans le mélange, Paris, Odile Jacob, 1997.

GYLDEN, H., 1893, "Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes", Acta Mathematica, 17, 1893, pp. 1-168.

GYÖRGYI, L., FIELD, R.J., NOSZTICZIUS, Z., MCCORMICK, W.D., SWINNEY, H.L., 1992, "Confirmation of High-Flow Rate chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction", Journal of Physical Chemistry, 96, 1992, p. 1228.

GYÖRGYI, L., REMPE, S.L., FIELD, R.J., 1991, "A novel model for the simulation of chaos in Low-Flow Rate CSTR experiments with the Belousov-Zhabotinskii reaction: A chemical mechanism for two frequency oscillations", Journal of Physical Chemistry, 95, 1991, p. 3159.

GYÖRGYI, L., TURANYI, T., FIELD, R.J., 1990, "Mechanistic details of the oscillatory Belousov-Zhabotinskii reaction", Journal of Physical Chemistry, 94, 1990, p. 7162.

HAAG, J., 1929, "Théorie générale de la synchronisation", C.R.A.S., 189, 1929, p. 1244-6.

HAAG, J., 1934, "Sur les oscillations auto-entretenues", C.R.A.S., 199, 1934, pp. 906-9.

HAAG, J., 1936, "Sur l'étude des oscillations de relaxation", C.R.A.S., 292, 1936, pp. 102-4.

HAAG, J., 1937, "Sur la théorie des oscillations de relaxation", C.R.A.S., 204, 1937, pp. 932-4.

HAAG, J., 1938, "Formules asymptotiques concernant les oscillations de relaxation", C.R.A.S., 204, 1938, pp. 1235-7.

HAAG, J., 1943, "Etude asymptotique des oscillations de relaxation", Annales Scientifiques de l'E.N.S., 1943, n° 60, Vol. 1, pp. 35-111.

HAAG, J., 1944, "Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillations de relaxation", Annales Scientifiques de l'E. N. S., 61, 1944, pp. 73-118.

HAAG, J., 1952, Les mouvements vibratoires (Vol. 1), Paris, PUF, 1952, 268 p.

HAAG, J., 1955, Les mouvements vibratoires (Vol. 2), Paris, PUF, 1955, 253 p.

HACKING, I., 1983, "Nineteenth century cracks in the concept of determinism", Journal of the history of ideas, July 1983, pp. 455-475.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

HADAMARD, J., 1897, "Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique", Journal de mathématiques pures et appliquées, (5) 3, 1897, pp. 331-7.

HADAMARD, J., 1898, "Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques", Journal de maths pures et appliquées, 4, 1898, pp. 27-73, (in HADAMARD, J., Œuvres de Jacques Hadamard, Paris, Ed. du CNRS, 1968, T. 2, pp.729-775).

HADAMARD, J., 1901a, Notice sur les travaux scientifiques de Jacques Hadamard. I. 1884-1901, Paris, Gauthier-Villars, 1912, 67 p. (Republication de la Notice publiée en 1901 par Hadamard, annotée).

HADAMARD, J., 1901b, "Sur l'itération et solutions asymptotiques des équations différentielles", Bulletin de la Société Mathématique de France, 29, 1901, pp. 224-8.

HADAMARD, J., 1906a, "La mécanique statistique", Bulletin of the American Mathematical Society, XII, 1906, pp. 194-210.

HADAMARD, J., 1906b, "Sur les transformations ponctuelles", Bulletin de la Société Mathématique de France, 34, 1906, pp. 349-363.

HADAMARD, J., 1912, Notice sur les travaux scientifiques de Jacques Hadamard. I. 1901-1912, Paris, Gauthier-Villars, 1912, 91 p.

HADAMARD, J., 1913, "Henri Poincaré et le problème des trois corps", Revue du Mois, 16, 1913, pp. 385-419 (in HADAMARD, J., Œuvres de Jacques Hadamard, Paris, Ed. du CNRS, 1968, T. 4, pp. 2007-2041).

HADAMARD, J., 1921, "L'œuvre mathématique de Poincaré", Acta Mathematica, 39, 1921, (in HADAMARD, J., Œuvres de Jacques Hadamard, Paris, Ed. du CNRS, 1968, T. 4, pp. 1921-2006).

HADAMARD, J., 1927, "L'œuvre de Duhem dans son aspect mathématique", Mémoire de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, 1, 1927, pp. 636-665.

HADAMARD, J., 1944, "Two works on iteration and related questions", Bulletin de la Société Mathématique de France, 50, 1944, pp. 67-75.

HADAMARD, J., 1968, Œuvres de Jacques Hadamard, Paris, Ed. du CNRS, 1968, 4 tomes, 2295 p.

HAKEN, H., 1977, Synergetics A workshop: proceedings of the international Workshop on Synergetics at Schloss Elmau, Bavaria, May 2-7, 1977, Berlin, New-York, Springer-Verlag, 1977, 274 p.

HAKEN, H., 1981, Chaos and order in nature, Berlin, Springer-Verlag, 1981. (Springer series in Synergetics n°11).

HAKEN, H., 1982, Evolution of order and chaos in physics, chemistry and biology (proceedings of the International Symposium on synergectics at Schloss Elmaus, Bavaria, April 26-May 1 1982), Berlin, Springer-Verlag, 1982 (Springer series in Synergetics n°17).

HAKEN, H., 1983, Synergetics, an Introduction, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer-Verlag, 3ème éd., 1983, 371 p. (2nde éd : 1976).

HAKEN, H., MIKHAILOV, A.S., 1992, Interdisciplinary approaches to nonlinear complex systems (Workshop, Bielefeld, 1992), Berlin, New York, Springer-Verlag, 1993, 237 p.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

HAKEN, H., MIKHAILOV, A.S., 1993, Interdisciplinary Approaches to non linear complex systems, Berlin, Springer-Verlag, 1993.

HALE, J.K., 1963, Oscillations in Nonlinear Systems, New York, MacGraw-Hill, 1963, 180 p.

HALE, J.K., LASALLE, J.P., 1967, Differential equations and dynamical systems, Proceedings of the international symposium at the University of Puerto Rico, Mayaguez, Dec 27-30 1965, New York, Academic Press, 1967.

HALMOS, P., 1944, "In general, a measure preserving transformation is mixing", Annals of mathematics, 45, 1944, pp. 786-92.

HALMOS, P., VON NEUMANN, J., 1942, "Operator methods in classical mechanics II", Annals of Mathematics, 43, 1942, pp. 332-350.

HAO, B-L., 1985, Chaos, Singapore, World Scientific, 1985.

HAO, B-L., 1983, "U-sequences in the periodically forced Brusselator", Communication in Theoretical physics, Vol. 2, n° 3, 1983, pp. 1075-1080.

HAO, B-L., ZHANG, S-Y., 1982, "Hierarchy of chaotic bands", Journal of Statistical Physics, Vol. 28, n° 4, 1982, pp. 769-792.

HASEGAWA, H.H., DRIEBE, D.J., 1994, "Intrinsic irreversibility and the validity of the kinetic description of chaotic systems", Physical Review E, Vol. 50, n° 3, Sept. 1994, p. 1781-1809.

HASEGAWA, H.H., SAPHIR, W.C., 1992, "Unitarity and irreversibility in chaotic systems", Physical Review A, Vol. 46, n° 12, Dec. 1992, p. 740-7423.

HAUSDORFF, F., 1919, "Dimension und äu#eres Ma#", Mathematische Annalen, 79, 1919, pp. 157-179.

HAYASHI, C., 1953, Forced oscillations in non-linear systems, Osaka, Nippon Printing and Publishig Co., 1953, 164 p.

HAYASHI, C., 1964, Nonlinear oscillations in Physical Systems, New-York, McGraw-Hill, 1964, 392 p.

HAYASHI, C., 1975, Selected papers on non linear oscillations, Osaka, Nippon Printing and Publishing Co., 1975.

HAYASHI, C., UEDA, Y., AKAMATSU, N., ITAKURA, H., 1970, "On the behavior of self-oscillatory systems with external force", Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan, Vol. 53-A, n° 3, pp. 150-8 (in UEDA, Y., The road to chaos, Santa Cruz, Aerial Press, 1992, pp. 73-92).

HAYASHI, C., UEDA, Y., KAWAKAMI, H., 1967, "Solution of Duffing's equation using mapping concepts", in GONDA, J., JELINEK, F., Nonlinear oscillations : Proceedings of the fourth conference on nonlinear oscillations, held in Prague, 5-9 September 1967, Prague, Academia, 1968, pp. 25-40.

HAYASHI, C., UEDA, Y., KAWAKAMI, H., 1969, "Periodic solutions of Duffing's equation with reference to doubly asymptotic solutions", Proceedings of the 5 th Conference on Nonlinear oscillations, Kiev 1969, pp. 507-520.

HEDLUND, G., 1939, "The dynamics of geodesic flows", Bulletin of the American Mathematical Society, 45, 1939, pp. 241-60.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

HEIMS, S.J., 1980, John von Neumann and Norbert Wiener : from mathematics to the technologies of life and death, Cambridge, MIT Press, 1980, 547 p.

HELLEMAN, R.H.G., 1980a, "Nonlinear dynamics (International Conference on Nonlinear Dynamics, New York Academy of Sciences, 1979)", Annals of the New-York Academy of Sciences, Vol. 357, Dec. 1980.

HELLEMAN, R.H.G., 1980b, "Self-generated chaotic behavior in nonlinear mechanics", in COHEN, E.G.D., Fundamental Problems in Statistical Mechanics, Vol. 5, New York, North Holland, 1980, pp. 165-223 (Reproduit dans CVITANOVIC, P., Universality in Chaos, London, Institute of Physics Pub., 1989, pp. 420-488).

HEMPEL, C., 1997, Eléments d'épistémologie, Paris, Armand Collin, Collection Cursus, 2nde éd., 1997.

HENON, M., 1955, "Machine analogique pour le calcul de l'indice complexe d'un corps à partir de son pouvoir réflecteur", C.R.A.S., 240, 1955, pp. 1305-6.

HENON, M., 1958, "Sur une série de résistances donnant par combinaison une valeur quelconque à 2% près", L'onde électrique, 38, 1958, pp. 48-54.

HENON, M., 1965a, "Exploration numérique du problème restreint. I. Masses égales, orbites périodiques", Annales d'Astrophysique, T. 28, n° 3, Mai-Juin 1965, pp. 499-511.

HENON, M., 1965b, "Exploration numérique du problème restreint. II. Masses égales, stabilité des orbites périodiques", Annales d'Astrophysique, T. 28, n° 6, Nov-Dec 1965, pp. 992-1007.

HENON, M., 1966a, "Numerical exploration of the restricted three-body problem", International Astronomical Union, Symposium n° 25, 1966.

HENON, M., 1966b, "Exploration numérique du problème restreint. III. Masses égales, orbites non périodiques", Bulletin Astronomique, série 3, T. 1, Fasc. 1, 1966, pp. 57-79.

HENON, M., 1966c, "Exploration numérique du problème restreint. IV. Masses égales, orbites non périodiques (Fin)", Bulletin Astronomique, série 3, T. 1, Fasc. 2, 1966, pp. 49-66.

HENON, M., 1966d, "Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier", C.R.A.S., 262, Série A, 1966, pp. 312-4.

HENON, M., 1969a, "Numerical exploration of the Restricted Problem. V. Hill's case: Periodic Orbits and their Stability", Astronomy and Astrophysics, 1, 1969, pp. 223-238.

HENON, M., 1969b, "Numerical Study of Quadratic Area-preserving Mappings", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XXVII, n° 3, Oct. 1969, pp. 291-311.

HENON, M., 1976, "A two-dimensional Mapping with a Strange Attractor", Communications in Mathematical Physics, 50, 1976, pp. 69-77.

HENON, M., 1982, "On the numerical computation of Poincaré Maps", Physica D, 5, 1982, pp. 412-4.

HENON, M., HEILES, C., 1964, "The applicability of the Third Integral of Motion: some numerical experiments", Astronomical Journal, 69, n°1, 1964, pp. 73-9.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

HENON, M., POMEAU, Y., 1976, "Two strange attractors with a simple structure", in TEMAM, R., Turbulence and Navier-Stokes equations, Berlin, Springer-Verlag, 1976, pp. 29-68.

HERBERT, D.E., CROFT, P., SILVER, D.S., WILLIAMS, S.G., WOODALL, M., 1996, Chaos and the changing Nature of science and medicine: an introduction, Woodbury, NY, AIP Press, 1996, 203 p. (AIP Conference Proceedings n° 376).

HERWALD, S.W., 1984, "Recollections of the early development of servomechanism and control systems", IEEE Control Systems Magazine, 4-4, 1984, pp. 29-32.

HEUDIN, J-C., 1998, L'évolution au bord du chaos, Paris, Hermes, 1998, 185 p.

HILL, G.W., 1878, "Researches in the Lunar Theory", American Journal of Mathematics, 1, 1878, pp. 5-26.

HILL, G.W., 1877, "On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon", Cambridge, John Wiley & Son, 1877, (réimprimé dans Acta Mathematica, 8, 1886, pp. 1-36).

HIRNIARK, J., 1910, "Zur Frage des periodischen Reaktionen", Zeitschrift für Physikalische Chemie, 76, 1910, pp. 675-680.

HIRSCH, J.E., HUBERMAN, B.A., SCALAPINO, D.J., 1982, "Theory of intermittency", Physical Review A, Vol. 25, n° 1, 1982, pp. 519-532.

HIRSCH, J.E., NAUENBERG, M., SCALAPINO, D.J., 1982, "Intermittency in the presence of noise: a renormalization group formulation", Physics Letters, Vol. 87A, n° 8, 1982, pp. 391-3.

HIRSCH, M.W., 1984, "The dynamical system approach to differential equations", Bulletin of the American Mathematical Society, n.s. 11, 1984, 1984, pp. 1-64.

HIRSCH, M.W., 1989, "Chaos, rigor, and hype", The Mathematical Intelligencer, Vol. 11, n° 3, 1989, pp. 6-8.

HIRSCH, M.W., MARSDEN, J.E., SHUB, M., 1993, From topology to computation: proceedings of the Smalefest, New York, Springer-Verlag, 1993, 605 p.

HOFSTADTER, D.R., 1981, "Strange attractors : mathematical patterns delicately poised between order and chaos", Scientific American, Vol. 245, Nov 1981, pp. 16-29.

HOFSTADTER, D.R., 1996, Gödel, Escher, Bach : les termes d'une guirlande éternelle, Paris, Interéditions, 1996, 883 p.

HOLDEN, A., 1986, Chaos, Manchester, Manchester University Press, 1986.

HOLMES, P., 1990, "Poincaré, celestial mechanics, dynamical system theory and "chaos"", Physics Reports, 193, n° 3, 1990, pp. 137-163.

HOLMES, P.J., MOON, F.C., 1983, "Strange attractors and chaos in Nonlinear Mechanics", Journal of applied mechanics, 50, 1983, pp. 1021-1032.

HOLTE, J., 1993, Chaos: The new science, Nobel Conference XXVI 1990, Gustavus Adolphus College, University Press in American, 1993.

HOLTON, G., 1978, L'invention scientifique, 1ère éd., Paris, PUF, 1982, Coll. Croisées (traduit de Thematic origins of scientific thought, Harvard, Harvard University Press, 1973 et de The scientific imagination, Cambridge, Cambridge University Press,

1978).

HOPF, E., 1932a, "On the time average theorem in dynamics", Proceedings of the National Academy of Sciences, 18, 1932, pp. 93-100.

HOPF, E., 1932b, "Complete transitivity and the ergodic principle", Proceedings of the National Academy of Sciences, 18, 1932, pp. 204-9.

HOPF, E., 1932c, "Proof of Gibbs hypothesis on the tendency toward statistical equilibrium", Proceedings of the National Academy of Sciences, 18, 1932, pp. 333-340.

HOPF, E., 1934, "On causality, statistics and probability", Journal of Mathematics and Physics (MIT), 13, 1934, pp. 51-102.

HOPF, E., 1937, Ergodentheorie, Berlin, J. Springer, 1937, 83 p.

HOPF, E., 1939, "Statistik der geodetischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativen Krümmung", Berichten des Mathematisch-Physischen Klasse des Sächcischen Akademie der Wissenshaften zu Leipzig, 91, 1939, pp. 261-306.

HOPF, E., 1942, "Abzweigung einer periodischen Lösung von eine stationären Lösung eines Differentialsystems", Berichten des Mathematisch-Physischen Klasse des Sächcischen Akademie der Wissenshaften zu Leipzig, 94, 1942, pp. 1-22 (traduit dans MARSDEN, J.E., McCRACKEN, M., The Hopf bifurcation and its applications, New York, Springer, 1976, pp. 162-193).

HOPF, E., 1948, "A mathematical example displaying features of Turbulence", Communications in Applied Mathematics, 1, 1948, pp. 303-322 (dont un extrait dans HAO, B.-L., Chaos, Singapore, World Scientific, 1985, pp. 112-118).

HOPF, E., 2002, Selected works of Eberhard Hopf with commentaries, Providence, American Mathematical Society, 2002, 396 p.

HORTON, C.W. Jr, REICHL, L.E., SZEBEHELY, V.G., 1983, Long-Time prediction in dynamics, New York, Wiley, 1983, 496 p. (Nonequilibrium problems in the physical sciences and biology).

HU, B., RUDNICK, J., 1982, "Exact solutions to the Feigenbaum renormalization-group equations for intermittency", Physical Review Letters, Vol. 48, n° 24, 14 June 1982, p. 1645-8.

HU, Y., MEYER, P.A., 1988, "Chaos de Wiener et intégrale de Feynman", in Séminaire de Probabilités XXII, Lecture notes in mathematics, Vol. 1321, New York, Springer, 1988, pp. 51-71.

HUBERMAN, B.A., RUDNICK, J., 1981, "Scaling behavior of chaotic flows", Physical review Letters, 45, 1980, pp. 154-6.

HUDSON, J.L., HART, M., MARINKO, D., 1979, "An experimental study of multiple peak periodic and non periodic oscillations in the Belousov-Zabhotinskii reaction", Journal of Chemical Physics, 71 (4), 15 Aug. 1979, pp. 1601-6.

HUDSON, J.L., MANKIN, J.C., 1981, "Chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction", Journal of Chemical Physics, 74, 1981, p. 6171.

HUNT, E.R., 1982, "Comment on a driven nonlinear oscillator", Physical Review Letters, Vol. 49, n° 14, 4 October 1982, p. 1054.

IBANEZ, L., POMEAU, Y., 1978, "A simple case on non-periodic (strange) attractor",

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics, 3, 1978, pp. 135-152.

ICNO, 1969, International Conference on Nonlinear Oscillations, 5 th, Kiev 1969, Kiev, Izd. Instituta Matematiki AN USSR, 1970, 734 p.

ILYASHENKO, Y.S., 1985, "Dulac's memoir 'On limit cycles' and related problems of the local theory of differential equations", Russian Mathematical Survey, 1985, pp. 1-49.

INAUDI, D., COLONNA DE LEGA, X., DI TULLIO, A., FORNO, C., JACQUOT, P., LEHMANN, M., MONTI M., VURPILLOT, S., 1995, "Chaos : evidence for the Butterfly effect", Annals of Improbable Research, Vol. 1, Issue 6, November-December 1995, pp. 60-62.

IOOSS, G., HELLEMAN, R.H.G., STORA, R., 1983, Comportement chaotique des systèmes déterministes (Les Houches Ecoles d'Ete de Physique Théorique, session XXXVI, 29 Juin-31 Juillet 1981), Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1983.

ISRAEL, G., 1996, La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique, Paris, Seuil, 1996, 364p.

ISRAEL, G., 2000, Le jardin au noyer : pour un nouveau rationalisme, Paris, Seuil, Collection Science ouverte, 2000.

IZRAILEV, F.M., CHIRIKOV, B., 1966, "Statistical properties of a nonlinear string", Soviet Physics-Doklady, Vol. 11, n° 1, 1966, pp. 30-2.

JAMIN, N., 1858, Cours de Physique de l'Ecole Polytechnique, T. 1, Paris, Mallet-Bachelier, 1858.

JAMIN, N., 1859, Cours de Physique de l'Ecole Polytechnique, T. 2, Paris, Mallet-Bachelier, 1859.

JANZ, R.V., VANECEK, D.J., FIELD, R.J., 1980, "Composite double oscillations in a modified version of the Oregonator model of the Belousov-Zhabotinskii reaction", Journal of Chemical Physics, 73, 1980, p. 3132.

JEAN, M., 1965, Sur les solutions périodiques des équations différentielles de la Mécanique, Thèse soutenue à la Faculté des sciences de l'Université d'Aix-Marseille, le 6 Juillet 1965.

JENSEN, R.V., 1987b, "Classical chaos", American Scientist, 75, 1987, pp. 168-181.

JENSEN, R.V., 1992, "Quantum chaos", Nature, 355, 1992, pp. 311-318.

JOHNSON, B.R., SCOTT, S.K., THOMPSON, B.W., 1997, "Modeling complex transient oscillations for the B-Z reaction in a batch reactor", Chaos, 7 (2), 1997, pp. 350-8.

JORDAN, C., 1916, "Notice nécrologique sur H. Léauté", C.R.A.S., 163, 1916, pp. 501-2.

JORDAN, P., 1949, "On the process of measurement in Quantum Mechanics", Philosophy of Science, 16, 1949, p. 269-278.

JOSEPHSON, P.R., 1991, Physics and Politics in Revolutionary Russia, Berkeley, University of California Press, 1991, 423 p.

JULIEN, E., ROCARD, Y., 1935, La stabilité des roues des locomotives, Paris, Hermann, 1935.

KAC, M., 1959, Probability and related topics in physical sciences, London, Interscience Publishers, 1959, 266 p.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

KADANOFF, L.P., 1993, From order to chaos. Essays : critical, chaotic, and otherwise, Singapore, World Scientific, 1993, 555 p. (Word Scientific series on Nonlinear Science, Series A, Vol. 1).

KAHANE, J.P., 1966, "Norbert Wiener et l'analyse de Fourier", Bulletin of the American Mathematical Society, n° 72, 1966, pp. 42-7.

KAPLAN, J.L., YORKE, J.A., 1979a, "Chaotic behavior of mutidimensional difference equations", in PEITGEN, H.O., WALTHER, H.O. Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points, New York, Springer Verlag, 1979, pp. 204-227 (Lecture Notes in Mathematics n° 730).

KAPLAN, J.L., YORKE, J.A., 1979b, "Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of Lorenz", Communications in Mathematical Physics, 67, 1979, p. 93-108.

KARAKOSTAS, V., 1996, "On the Brussels school's arrow of time in quantum theory", Philosophy of science, 63, 1996, pp. 374-400.

KASPEREK, J.G., BRUICE, T.C., 1971, "Observations on an oscillating reaction. The reaction of potassium bromate, ceric sulfate and dicarboxylic acid", Inorganic Chemistry, 10, 1971, pp. 382-6.

KATOK, A., 1980, "Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms", Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., 51, 1980, pp. 137-173.

KATZ, R.A., 1994, The chaos paradigm : developments and applications in engineering and science, New-York, AIP Press, 1994, 299 p. (AIP Conference Proceedings 296).

KELLERT, S.H., 1993, In the wake of chaos : unpredictable order in dynamical systems, Chicago, University of Chicago Press, 1993.

KEOLIAN, R., TURKEVICH, L.A., PUTTERMAN, S.J., RUDNICK, I., RUDNICK, J.A., 1981, "Subharmonic sequences in the Faraday experiment: departures from period doubling", Physical Review Letters, Vol. 47, n° 16, 19 October 1981, pp. 1133-6.

KEVLES, D.J., 2001, The physicists. The history of a Scientific Community in Modern America, Cambridge, Harvard University Press, 1995 (6th printing 2001), 489 p.

KHINCHIN, A.I., 1932, "Zur Birkhoff's Lösung des Ergodenproblems", Mathematische Annalen, 107, 1932, pp. 485-8.

KHINCHIN, A.I., 1933, "Zur mathematischen Begrüdung der statistichen Mechanik", Zeitschrift fir Angewandte Mathematik und Mechanik, 13, 1933, pp. 101-3.

KHINCHIN, A.I., 1934, "Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse", Mathematische Annalen, 109, 1934, pp. 604-615.

KHINCHIN, A.I., 1949, Mathematical foundations of statistical mechanics, New York, Dover Publications, 1949, 179 p.

KIRKPATRICK, S., SWENDSEN, R.H., 1985, "Statistical Mechanics and disordered systems", Communications of the ACM, Vol. 28, n° 4, 1985, pp. 363-373.

KLEIN, M.J., 1972, "Gibbs, Josiah Willard" in GILLISPIE, C.C., Dictionary of Scientific Biography, New-York, Scribner, Vol. 5, 1972, pp. 386-393.

KLEIN, M.J., 1990, "Maxwell, His demon, and the Second Law of Thermodynamics", in LEFF, H.S., REX, A.F., Maxwell's demon : entropy, information, computing, Princeton, P.U.P., 1990, pp. 75-88.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

KLOEDEN, P., DECKIN, M.A.B., TRIKEL, A.Z., 1976, "A precise definition of chaos", Nature, 264, 1976, p. 295.

KOLMOGOROV, A.N., 1937, "Ein vereinfachter Beweis des Birkhoff-Khintchinschen Ergodensatz", Recueil Mathématique, 2, 1937, pp. 366-68.

KOLMOGOROV, A.N., 1953, "On dynamical systems with an integral invariant on a torus", Dokl. Akad. SSSR, 93 : 5, 1953, pp. 763-6 (reproduit dans TIKHOMIROV, V.M., Selected Works of A.N. Kolmogorov, T. 1 Mathematics and mechanics, Dordrecht, Kluwer Academic Pub., 1991, pp. 344-8).

KOLMOGOROV, A.N., 1954a, "On the preservation of conditionally periodic motions under small variations of the Hamilton function", Dokl. Akad. SSSR, 98 : 4, 1954, pp. 527-530 (reproduit dans TIKHOMIROV, V.M., Selected Works of A.N. Kolmogorov, T. 1 Mathematics and mechanics, Dordrecht, Kluwer Academic Pub., 1991, pp. 349-354).

KOLMOGOROV, A.N., 1954b, "The general theory of dynamical systems and classical mechanics", Proceedings of the International Congress in Mathematics, Vol.1, 1954, pp. 315-333 (reproduit dans TIKHOMIROV, V.M., Selectd Works of A.N. Kolmogorov, T. 1 Mathematics and mechanics, Dordrecht, Kluwer Academic Pub., 1991, pp. 355-374).

KOLMOGOROV, A.N., 1959, "Theory of transmission of information" in ANDRONOV, A.A. et al., Nine Papers on differential equations, two on information theory, Providence, AMS, 1963, pp. 291-322.

KOOPMAN, B.O., 1931, "Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space", Proceedings of the National Academy of Sciences USA, Vol. 17, 5, 1931, p. 315-318.

KOOPMAN, B.O., VON NEUMANN, J., 1932, "Dynamical systems of continuous spectra", Proceedings of the National Academy of Sciences, 18, 1932, pp. 255-263.

KOPERSKI, J., 1998, "Models, confirmation and chaos", Philosophy of science, 65, 1998, pp. 624-648.

KOPERSKI, J., 2001, "How Chaos has been explained", British Journal for the Philosophy of Science, 52, 2001, pp. 683-700

KRANTZ, S.G., 1989, "Fractal Geometry", The Mathematical Intelligencer, Vol. 11, n° 4, 1989, pp. 12-16.

KRUSKAL, M., 1962, "Asymptotic theory of Hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic", Journal of Mathematical Physics, Vol. 3, n° 4, July-August 1962, pp. 806-838.

KRYLOFF, N., 1932, Les problèmes fondamentaux de la physique mathématique et de la science d'ingénieur, Kiev, Tekhnichne vidavnitstuo, 1932, 250 p. (en russe).

KRYLOFF, N., BOGOLIUBOFF, N., 1933, "Problèmes fondamentaux de la mécanique non linéaire", Revue générale des sciences pures et appliquées, Vol. 44, 1933, pp. 9-19.

KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1934, Les méthodes de la mécanique non linéaire appliquées à la théorie des oscillations stationnaires, Académie des Sciences d'Ukraine, Kiev, 1934.

KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1935, "Les mesures invariantes et la transitivité",

C.R.A.S., 201, 1935, p. 420.

KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1936, "Les mesures invariantes et transitives dans la mécanique non linéaire", Recueil de Mathématiques, 1936, pp. 707-711.

KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1937a, "La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude de la dynamique des systèmes de la mécanique non linéaire", Annals of Mathematics, 38 (1), 1937, pp. 65-113.

KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1937b, "Les propriétés ergodiques des suites de probabilités en chaîne", C.R.A.S., 204, 1937, pp. 1454-6.

KRYLOV, N.M., BOGOLIUBOV, N.N., 1949, Introduction to non-linear mechanics, P.U.P., Princeton, 1949 (1ère ed : 1943, traduction de S. Lefschetz).

KRYLOV, N.S., 1979, Works on the foundations of statistical physics, Princeton, Princeton University Press, 1979, 283 p.

KUCZMA, M., 1968, Functional equations in a single variable, Varsovie, PWN-polish Scientific Publisher, 1968, 383 p.

KUHN, T., 1992, La structure des révolutions scientifiques, Paris, Flammarion, Collection Champs, 1992, 288 p., (traduction de la 2ème édition de 1970 ; 1ère édition : 1962).

KURAMOTO, Y., 1984, Chaos and Statistical Methods : proceedings of the Sixth Kyoto Summer Institute, Kyoto, Japan, September 12-15 1983, Berlin, Springer, 1984, 273 p.

LA RECHERCHE, 1991, "La science du désordre", La Recherche, Hors-série, Mai 1991.

LA RECHERCHE, 2002, La science et la guerre, Hors-Série n° 7, La Recherche, Avril-Juin 2002.

LABRO, H., 1998, Application de la dynamique des systèmes à la cinétique chimique, 1998, Thèse de doctorat, Physique, spécialité : énergétique, Université de Rouen, soutenue le lundi 19 Octobre 1998.

LAGASSE, J., MIRA, C., 1972, "Study of recurrence relationships and their applications by the Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales", in Proceedings of the Fifth IFAC World Congress, Paris, 12-17 Juin 1972, Pittsburgh, Instrument society of America, 4 Vol., 1972.

LAGRANGE, J-L., 1788, Mécanique Analytique, Paris, Desaint, 1788 (reproduit en fac-similé, Sceaux, J. Gabay, 1989, 512 p.).

LANDAU, L., PYATIGORSKII, L., 1940, Mekhanika, Gostekhizdat, Moscow, Leningrad, 1940 (en russe).

LANDAU, L.D., 1944, "On the problem of turbulence", 1944 (in HAO, B.-.L., Chaos, Singapore, World Scientific, 1985, pp. 107-111).

LANDAU, L.D., LIFSCHITZ, E.M., 1959, Fluid mechanics, Oxford, Pergamon, 1959.

LANFORD III, O.E., 1982, "A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures", Bulletin of the American Mathematical Society, 6, 1982, pp. 427-434.

LANFORD, O., 1974, "Time evolution in large classical systems", in MOSER, J., Dynamical systems, theory and applications (Battelle Seattle Rencontres 1974),

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Berlin, Springer-Verlag, 1975, (Lecture Notes in Physics, n° 38), pp. 1-111.

LANGER, R.E., 1959, On numerical approximation : proceedings of a symposium conducted by the Mathematics Research Center, US Army, University of Wisconsin, Madison, April 21-23, 1958, Madison, University of Wisconsin, 1959, 462 p.

LANGER, R.E., 1968, "George David Birkhoff, 1884-1944", in BIRKHOFF, G.D., Collected Mathematical Papers, USA, Dover, 1968, p. xiii.

LANGTON, C.G., 1990, "Computation at the edge of chaos: phase transitions and emergent computation", Physica D, 42, 1990, pp. 12-37.

LAPLACE, P.S., 1785, "Théorie de Jupiter et de Saturne", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1785 (in LAPLACE, P.S., Œuvres Complètes de Laplace, Paris, Gauthier-Villars, 1878-1912, T. 11).

LAPLACE, P.S., 1820, Théorie analytique des Probabilités, Paris, Veuve Courcier, 3ème ed., 1820 (in LAPLACE, P.S., Œuvres Complètes de Laplace, Paris, Gauthier-Villars, T. 7, 1886).

LAPLACE, P.S., 1986, Essai philosophique sur les probabilités, Paris, C. Bourgeois, 1986.

LAPLACE, P.S., 1992, Œuvres complètes de Laplace, Paris, Gauthier-Villars, 1878-1912, 14 volumes.

LARGER, L., 1997, Cryptage de signaux par chaos en longueur d'onde, Thèse de Doctorat en Science pour l'Ingénieur, Université de Franche Comté, sous la direction de J.P. Goedgebuer, 1997, 202 p.

LASALLE, J.P., 1949, "Relaxation oscillations", Quarterly of applied Mathematics, 1949.

LASALLE, J.P., LEFSCHETZ, S., 1963, International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics 31 July-4 August 1961, New York, Colorado Springs Acad. Press, 1963.

LASOTA, A., YORKE, J., 1973, "On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations", Transactions of the American Mathematical Society, 186, 1973, pp. 481-8.

LAUTERBORN, W., CRAMER, E., 1981, "Subharmonic route to chaos observed in Acoustics", Physical Review Letters, Vol. 47, n° 20, 16 November 1981, pp. 1445-8.

LE CORBEILLER, P., 1931, Les systèmes auto-entretenus et les oscillations de relaxation, Paris, Hermann, 1931.

LE CORBEILLER, P., 1932, "Le mécanisme de production des oscillations", Annales des P.T.T., 21, 1932, p. 697.

LEAUTE, H., 1885, "Sur les oscillations à longues périodes dans les machines activées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations", Journal de l'Ecole Polytechnique, 55, 1885, pp. 1-125.

LEBESGUE, H., 1902, "Intégrale, longueur, aire", Annali di Matematica Pura et Apllicata (3), 7, 1902, pp. 231-259.

LEBOWITZ, J.L., 1993, "Boltzmann's entropy and time's arrow", Physics Today, 46, n° 9, 1993, pp. 32-8.

LECOURT, D., 1999, Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences, Paris, PUF,

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

1999.

LEFEBVRE, J.H., GOODINGS, D.A., KAMATH, M.V., FALLEN, E.L., 1993, "Predictability of normal heart beat rhythms and deterministic chaos", Chaos, 3 (2), 1993, p. 267-276.

LEFEVER, R., 1968, "Stabilité des structures dissipatives", Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, n° 54, 1968, pp. 712-9.

LEFEVER, R., NICOLIS, G., 1971, "Chemical instabilities and sustained oscillations", Journal of Theoretical Biology, 30, 1971, p. 267.

LEFEVER, R., NICOLIS, G., PRIGOGINE, I., 1967, "On the occurrence of oscillations around the steady state in systems of chemical reactions far from equilibrium", Journal of Chemical Physics, Vol. 17, n° 3, August 1967, pp. 1045-7.

LEFF, H.S., REX, A.F., 1990, Maxwell's demon : entropy, information, computing, Princeton, P.U.P., 1990, 349 p.

LEFSCHETZ, S., 1957, Differential equations: geometric theory, New York, Interscsience Publications, 1957.

LEFSCHETZ, S., 1959, Contributions to the theory of non-linear oscillations, Princeton, Princeton University Press, 1959, 4 Vol.

LEFSCHETZ, S., LASALLE, J.P., 1961, Stability by Lyapunov's direct method with applications, New York, Academic Press, 1961, 134 p.

LERAY, J., 1933, "Etudes de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique", Journal de mathématiques pures et appliquées, 12, 1933, pp. 1-82.

LERAY, J., 1934a, "Essais sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois", Journal de mathématiques pures et appliquées, 13, 1934, pp. 331-418.

LERAY, J., 1934b, "Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace", Acta Mathematica, 63, 1934, pp. 193-248.

LESIEUR, M., 1994, La turbulence, Grenoble, Presse Universitaire Grenobloise, Collection Grenoble Sciences, 1994.

LETELLIER, C., 1994, Caractérisation topologique et reconstruction d'attracteurs étranges, Thèse de doctorat, spécialité Physique, Université Paris VII, soutenue le 11 Mai 1994.

LETELLIER, C., à paraître, Otto E. Rössler : from the origin of life to the architecture of chaos, Berlin, Springer, à paraître.

LEVI-CIVITA, T., 1901, "Sopra alcuni criteri di instabilità", Annali di Mathematica Pura et Applicata (3), 5, 1901, pp. 221-307.

LEVI-CIVITA, T., 1903a, "Sur les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps", C.R.A.S., 136, 1903, p. 82.

LEVI-CIVITA, T., 1903b, "Condition du choc dans le problème restreint des trois corps", C.R.A.S., 136, 1903, p. 221.

LEVI-CIVITA, T., 1906, "Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps", Acta Mathematica, 30, 1906, pp. 305-327.

LEVINSON, N., 1943, "On the existence of periodic solutions of second order

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

differential equations with a forcing term", 1943, in LEVINSON, N., Selected papers of Norman Levinson, Boston, Birkhäuser, 1998, pp. 91-98.

LEVINSON, N., 1944, "Transformation theory of non-linear differential equations of the second order", Annals of Mathematics, Vol. 45, n° 4, 1944, pp. 723-737.

LEVINSON, N., 1949, "A second order differential equation with singular solutions", Annals of Mathematics, Vol. 30, n° 1, January 1949, pp. 127-153.

LEVINSON, N., 1998, Selected papers of Norman Levinson (2 Vol.), Boston, Birkhäuser, 1998.

LEVINSON, N., SMITH, O.K., 1942, "A general equation for relaxation oscillations", 1942, in LEVINSON, N., Selected papers of Norman Levinson, Boston, Birkhäuser, 1998, pp. 69-90.

LEVY-LEBLOND, J-M., 1990, "Physique et mathématiques", Encyclopédia Universalis, 3ème ed, 1990, T. 19, pp. 270-4.

LEVY-LEBOYER, M., MORSEL, H., 1994, Histoire de l'électricité en France, Tome deuxième : 1919-1946, Paris, Fayard, 1994, 1438 p.

LI, T.-Y., 1976, "Finite approximation for the Frobenius-Perron operator - A solution to Ulam's conjecture", Journal of Approximation Theory, 17, 1976, pp. 177-186.

LI, T.-Y., YORKE, J., 1974, "The ‘simplest’ dynamical system", 1974, in CESARI, L., HALE, J., LASALLE, J.P., Dynamical systems, an international symposium, New York, Academic Press, 1976, Vol. 2, pp. 203-6.

LI, T.-Y., YORKE, J., 1975, "Period three implies chaos", American Mathematical Monthly, 82, 1975, pp. 985-992.

LI, T.-Y., YORKE, J., 1978, "Ergodic transformation from an interval to itself", Transactions of the American Mathematical Society, 235, 1978, pp. 183-192.

LIAPOUNOFF, A., 1906, Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation, tome 1, Saint-Petersbourg, Impr. de l'Académie des Sciences, 1906, 231 p.

LIAPOUNOFF, A., 1907, "Problème général de la stabilité du mouvement", Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Vol. 9, 1907.

LIAPOUNOFF, A., 1909, Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation, tome 2, Saint-Petersbourg, Impr. de l'Académie des Sciences, 1909, 210 p.

LIAPOUNOFF, A., 1912, Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation, tome 3, Saint-Petersbourg, Impr. de l'Académie des Sciences, 1912, 235 p.

LIAPOUNOFF, A., 1914, Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation, tome 4, Saint-Petersbourg, Impr. de l'Académie des Sciences, 1914, 119 p.

LIBCHABER, A., LAROCHE, C., FAUVE, S., 1982, "Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement", Journal de Physique-Lettres, 43, 1982, pp. 211-6.

LIBCHABER, A., MAURER, J., 1978, "Local probe in a Rayleigh-Bénard experiment in

liquid helium", Journal de Physique Lettres, 31, 1978, pp. 369-372.

LIBCHABER, A., MAURER, J., 1979, "Rayleigh-Bénard experiment in liquid helium : frequency locking and the onset of turbulence", Journal de Physique Lettres, 40, 1979, pp. 419-423.

LIBCHABER, A., MAURER, J., 1980, "Une expérience de Rayleigh-Bénard de géométrie réduite : multiplication, accrochage et démultiplication de fréquences", Journal de Physique, 41, Colloque C3, 1980, pp. 51-6.

LIBCHABER, A., MAURER, J., 1982, "A Rayleigh Bénard experiment : helium in a small box", in RISTE, T., Nonlinear phenomena at phase transitions ans instabilities : proceedings of the NATO advanced study institute, Geilo, Norway, March 1981, (reproduit dans CVITANOVIC, P., Universality in chaos, London, Institute of Physics Publication, 2ème éd., 1989, pp. 109-136).

LICHTENBERG, A.J., LIEBERMAN, M.A., 1992, Regular and chaotic dynamics, New York, Springer-Verlag, 2ème éd., Applied Mathematical Sciences n°38, 1992.

LIENARD, A., 1928, "Etude des oscillations entretenues", Revue générale d'électricité, XXIII, n° 21, Mai 1928, pp. 901-912.

LILLIE, R.S., 1920, "The recovery of transmissivity in passive iron wires as a model of recovery processes in irritable living systems (Part I)", The Journal of General Physiology, 3, 1920, pp. 107-128.

LILLIE, R.S., 1925, "Factors affecting transmission and recovery in the passive iron nerve model", The Journal of General Physiology, 7, 1925, pp. 473-507.

LILLIE, R.S., 1936, "The passive iron wire model of protoplasmic and nervous transmission and its physiological analogues", Biological Reviews, 16, 1936, pp. 181-209.

LINDBERG, D., TURNER, J.S., BARKLEY, D., 1990, "Chaos in the Showalter-Noyes-Bar-Eli model of the Belousov-Zhabotinskii reaction", Journal of Chemical Physics, 92, 1990, p. 3238.

LIOUVILLE, J., 1838, "Note sur la théorie de la variation des constantes arbitraires", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 3, 1838, pp. 342-9.

LISSAJOUS, J.A., 1857a, "Rapport sur un mémoire de M. Lissajous intitulé : Mémoire sur l'étude optique des mouvements vibratoires", C.R.A.S., 45, 1857, pp. 48-52.

LISSAJOUS, J.A., 1857b, "Mémoire sur l'étude optique des vibrations", Annales de Chimie et de Physique, 51, 1857, pp. 147-231.

LO BELLO, A., 1983, "On the origin and history of ergodic theory", Bolletino di storia delle scienze matematiche, Vol. 3, 1983, pp. 37-75.

LOCHAK, G., 1962, "Sur le second principe de la Thermodynamique et la stabilité asymptotique au sens de Lyapounov", C.R.A.S., 254, 1962, pp. 4436-8.

LOCHAK, G., 1979, "L'irréversibilité en physique", Bulletin d'information des Ingénieurs IEN-ENSEM, n° 31, 1er trimestre 1979, pp. 3-16.

LOCHAK, G., 1994, La géométrisation de la physique, Paris, Flammarion, 1994, 272 p. (Collection Champs).

LOCHAK, G., 2002, "René Thom (1923-2002)", Annales de le Fondation de Broglie,

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Vol. 27, n° 4, 2002, pp. 565-573.

LORENZ, E.N., 1955, "Available potential energy and the maintenance of general circulation", Tellus, n°7, 1955, p. 155.

LORENZ, E.N., 1960a, "The statistical prediction of solutions of dynamic equations", in SIGEKATA, S., Proceedings of the international symposium on numerical weather prediction, Tokyo 1960, Tokyo, Meteorological Society of Japan, 1962, pp. 629-635.

LORENZ, E.N., 1960b, "Energy and numerical weather prediction", Tellus, n° 12, 1960, pp. 364-373.

LORENZ, E.N., 1960c, "Maximum simplification of the dynamic equations", Tellus, n° 12, 1960, pp. 243-254.

LORENZ, E.N., 1963a, "Deterministic non-periodic flow", Journal of the Atmospheric Sciences, 20, 1963, pp. 130-141.

LORENZ, E.N., 1963b, "The mechanics of vacillation", Journal of the Atmospheric Sciences, 20, 1963, pp. 448-464.

LORENZ, E.N., 1964, "The problem of deducing the climate from the governing equations", Tellus, XVI, 1, 1964, pp. 1-11.

LORENZ, E.N., 1965, "A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model", Tellus, XVII, 3, 1965, pp. 321-333.

LORENZ, E.N., 1969, "The predictability of a flow which possesses many scales of motion", Tellus, XXI, 3, 1969, pp. 289-307

LORENZ, E.N., 1970, "Climate change as a mathematical problem", Journal of Applied Meteorology, n° 9, 1970, p. 325-329.

LORENZ, E.N., 1979, "On the prevalence of aperiodicity in simple systems", in GRMELA, M., MARSDEN, J.E., Global Analysis, Berlin, Springer-Verlag, 1979, pp. 53-74 (Lecture Notes in Mathematics n° 755).

LORENZ, E.N., 1980, "Noisy periodicity and reverse bifurcation", Annals of the New York Academy of Sciences, 357, 1980, pp. 282-91.

LORENZ, E.N., 1984, "Irregularity: a fundamental property of the atmosphere", Tellus, A, n° 36, 1984, pp. 98-110.

LORENZ, E.N., 1993, The essence of chaos, Seattle, University of Washington Press, 1993.

LOTKA, A.J., 1907, "Studies of the mode of growth of Material Aggregates", American Journal Science, 4th series, Vol. XXIV, n° 141, Sept. 1907, pp. 199-216.

LOTKA, A.J., 1910, "Contribution to the theory of periodic reactions", Journal of Physical Chemistry, 14, 1910, pp. 271-4.

LOTKA, A.J., 1920a, "Undamped oscillations derived from the law of mass action", Proceedings of the National Acdemy of Sciences, 27, 1920, pp. 1595-9.

LOTKA, A.J., 1920b, "Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems", Proceedings of the National Academy Science, 6, 1920, pp. 410-5.

LOTKA, A.J., 1925, Elements of physical biology, Baltimore, Williams & Wilkins, 1925.

LOZI, R., 1978, "Un attracteur étrange (?) du type attracteur de Hénon", Journal de Physique, C5, T. 39, 1978, pp. 9-10.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

LOZI, R., 2000, "La preuve d'un certain chaos", La Recherche, n° 337, Déc. 2000, pp. 24-25.

LUBKIN, G.B., 1981, "Period-doubling route to chaos shows universality", Physics Today, 1981, 34 (3), 1981, pp. 17-19.

LUNSFORD, G.H., FORD, J., 1972, "On the stability of periodic orbits for nonlinear oscillator systems in regions exhibiting stochastic behavior", Journal of Mathematical Physics, Vol. 13, n° 5, May 1972, pp. 700-5.

MACDONALD, N., 1978, "The prevalence of chaos", Nature, Vol. 271, 26 Jan. 1978, pp. 305-6.

MACKEY, M.L., 1992, Time's arrow : the origins of thermodynamic behaviour, New York, Springer-Verlag, 1992.

MACLANE, S., 1994, "Jobs in the 1930s and the views of George D. Birkhoff", The Mathematical Intelligencer, 16 (3), 1994, pp. 9-10.

MAINZER, K., 1993, "Philosophical foundations of nonlinear complex systems", in HAKEN, H., MIKHAILOV, A., Interdisciplinary approaches to nonlinear complex systems, Berlin, Springer-Verlag, 1993, pp. 32-43.

MALAMENT, D.B., ZABELL, S.L., 1980, "Why Gibbs phase averages work - The role of ergodic theory", Philosophy of Science, 47, 1980, pp. 339-349.

MALRAISON, B., ATTEN, P., BERGE, P., DUBOIS, M., 1983, "Dimension of strange attractors; an experimental determination for the chaotic regime of two convective systems", Journal de Physique Lettres, 44, 1983, p. 897.

MANDELBROT, B., 1975, Les objets fractals : formes, hasard et dimension, Paris, Flammarion, 1975, 190 p.

MANDELBROT, B., 1976, "Géométrie fractale de la turbulence. Dimension de Hausdorff, dispersion et nature des singularités du mouvement des fluides", C.R.A.S., 282, 1976, pp. 119-120.

MANDELBROT, B., 1977, Fractals : Form, Chance and Dimension, San Francisco, Freeman, 1977, 365 p.

MANDELBROT, B., 1978, "Les objets fractals", La Recherche, n° 85, Vol. 9, 1978, pp. 5-13.

MANDELBROT, B., 1986, "Comment j'ai découvert les fractales", La Recherche, n° 175, Vol. 17, 1986, pp. 420-4.

MANDELBROT, B., 1989a, "Chaos, Bourbaki, and Poincaré", The Mathematical Intelligencer, Vol.11, n° 3, 1989, pp. 10-12.

MANDELBROT, B., 1989b, "Some ‘Facts’ that evaporate upon examination", The Mathematical Intelligencer, Vol.11, n° 4, 1989, pp. 17-19.

MANDELBROT, B., 1995, Les objets fractals. Formes, hasard et dimension, Paris, Flammarion, Collection Champs, 4ème éd., 1995.

MANDELSTAM, L., PAPALEXI, N., 1932, "Über Resonanzerscheinungen bie Frequenzteilung", Zeitschrift für Physik, 73, 1932, pp. 223-248.

MANKIEWICZ, R., 2001, L'histoire des mathématiques, Paris, Seuil, 2001, 192 p.

MANNEVILLE, P., 1980a, "Intermittency, self-similarity and 1/f spectrum in dissipative

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

dynamical systems", Journal de Physique, 41, 1980, pp. 1235-1243.

MANNEVILLE, P., 1980b, "Intermittency in dissipative dynamical systems", Physics Letters, Vol. 79A, n° 1, 1980, pp. 33-35.

MANNEVILLE, P., 1991, Structures dissipatives, chaos et turbulence, Gif-sur-Yvette, Aléa Saclay, 1991, 419 p.

MANNEVILLE, P., POMEAU, Y., 1979, "Intermittency and the Lorenz model", Physics Letters, 75 A, 1979, pp. 1-2.

MANNEVILLE, P., POMEAU, Y., 1980, "Different ways to turbulence in dissipative systems", Physica D, 1, 1980, pp. 219-226.

MARIE, G., 1905a, "Oscillation des véhicules de chemin de fer sur leurs ressorts de suspension", C.R.A.S., 140, 1905, pp. 637-9.

MARIE, G., 1905b, "Oscillations des véhicules de chemin de fer à l'entrée en courbe et à la sortie", C.R.A.S., 140, 1905, pp. 1222-4.

MARIE, G., 1905c, "Oscillations des locomotives sous l'action de diverses forces perturbatrices", C.R.A.S., 140, 1905, pp. 1435-7.

MARKLEY, N.G., MARTIN, J.C., PERRIZO, W., 1978, The structure of attractors in dynamical systems, New York, Springer-Verlag, 1978, 264 p. (Lecture Notes in Mathematics, n° 668).

MARKUS, M., MULLER, S.C., NICOLIS, G., 1988, From chemical to biological organization, New York, Springer-Verlag, 1988.

MAROTTO, F.R., 1979, "Chaotic behavior in the Henon mapping", Communications in Mathematical Physics, 68, 1979, pp. 187-194.

MARSDEN, J.E., McCRACKEN, M., 1976, The Hopf bifurcation and its applications, New York, Springer, 1976.

MARTIN, P.C., 1976, "Instabilities, oscillations, and chaos", Journal de Physique, Colloque C1, supplément au n°1, T. 37, Janv .1976, pp. 57-66.

MARTINET, A., 1976, "Hydrodynamique physique et instabilités, Dijon, 30 Juin- 4 Juillet 1975", Journal de Physique Colloque C1, T. 37, 1976, p. C1-1.

MASANI, P.R., 1990, Norbert Wiener, 1894-1964, Boston, Birkhäuser, 1990, 426 p.

MAWHIN, J., 1996, "The early reception in France of the work of Poincaré and Lyapounov in the qualitative theory of differential equations", Philosophia Scientiae, 1 (4), 1996, pp. 119-133.

MAXWELL, J.C., 1860, "Illustrations of the dynamical theory of gases", 1860, in MAXWELL, J.C., NIVEN, W.D., The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, Cambridge, C.U.P., 1890, Vol. 1, p. 377.

MAXWELL, J.C., 1867, "On the dynamical theory of gases", 1867, in MAXWELL, J.C., NIVEN, W.D., The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, Cambridge, C.U.P., 1890, Vol. 2, p. 26.

MAXWELL, J.C., 1873, "Does the progress of physical science tend to give any advantage to the opinion of necessity (or determinism) over that of the contingency of events and the freedom of will?", 1873, in CAMPBELL, L., GARNETT, W., The life of James Clerk Maxwell, New-York, Johnson reprint corporation, 1969, pp. 434-444.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

MAXWELL, J.C., 1877, The theory of heat, London-New York, Longmans (Green), 1877, 333 p.

MAXWELL, J.C., 1879, "On Boltzmann's theorem on the average distribution of energy in a system of material points", Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 12, 1879, pp. 547-570.

MAY, R., LEONARD, W., 1975, “Nonlinear aspects of competition between three species”, SIAM Journal of Applied Mathematics, 29, n° 2, 1975, pp. 243-253.

MAY, R.M., 1972, "Limit cycles in Predator-Prey communities", Science, Vol.177, 1972, pp. 900-2.

MAY, R.M., 1973, Stability and Complexity in Model Ecosystems, Princeton, PUP, 1973, 235 p.

MAY, R.M., 1974, "Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable points, Stable cycles, and Chaos", Science, 186, November 1974, pp. 645-7.

MAY, R.M., 1975, "Deterministic models with chaotic dynamics", Nature, Vol. 256, July 1975, pp. 165-6.

MAY, R.M., 1976, "Simple mathematical models with very complicated dynamics", Nature, Vol. 261, June 1976, pp. 459-467.

MAY, R.M., 1986, "When Two and Two do not make four, nonlinear phenomena in ecology", Proceedings of the Royal Society B, 228, 1986, p. 241.

MAY, R.M., 1991, "Le chaos en biologie", La Recherche, 232, Mai 1991, Vol. 22, pp. 588-598.

MAY, R.M., 2001, "Complexity and Real world problems", Bulletin of the Santa Fe Institute, Vol.16, n° 1, Summer 2001, 2001.

MAY, R.M., LEONARD, W.J., 1975, "Nonlinear aspects of competition between three species", SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 26, n°2, September 1975, pp. 243-253.

MAY, R.M., OSTER, G.F., 1976, "Bifurcations and Dynamic complexity in simple ecological models", The American Naturalist, Vol. 110, n° 974, July-August 1976, pp. 573-599.

McLAUGHLIN, J.B., MARTIN, P.C., 1974, "Transition to turbulence of a statically stressed fluid", Physical Review Letters, Vol. 33, n° 20, 1974, pp. 1189-1191.

McLAUGHLIN, J.B., MARTIN, P.C., 1975, "Transition to turbulence in a statically stressed fluid system", Physical Review, A12, n°1, 1975, pp. 186-203.

McMURREN, S.L., TATTERSALL, J., 1996, "The mathematical collaboration of M.L. Cartwright and J.E. Littlewood", American Mathematical Monthly, 103, 1996, pp. 833-845.

McMURREN, S.L., TATTERSALL, J., 1999, "Mary Cartwright (1900-1998)", Notices of the American Mathematical Society, 47 (2), 1999, pp. 214-220.

MEES, A.I., 1990, "Modeling complex systems", in VINCENT, T.L., MEES, A.I., JENNINGS, L.S., Dynamics of complex interconnected biological systems, Berlin, Birkhäuser, 1990, pp. 104-124.

MEES, A.I., 1986, "Chaos in feedback systems", in HOLDEN, A., Chaos, Manchester,

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

Manchester University Press, 1986, pp. 99-110.

METROPOLIS, N., STEIN, M.L., STEIN, P.R., 1967, "Stable states of a Non-Linear Transformation", Numerische Mathematik, 10, 1967, pp. 1-19.

METROPOLIS, N., STEIN, M., STEIN, P.R., 1973, "On finite limit sets for transformations on the unit interval", Journal of Combinatorial Theory, A 15, 1973, pp. 25-44.

METROPOLIS, N., ULAM, S., 1949, "The Monte-Carlo method", Journal of the American Statistical Association, Vol. 44, 1949, pp. 335-341.

METROPOLIS, N., ULAM, S., 1953, "A property of randomness of an arithmetical function", American Mathematical Monthly, 60, 1953, pp. 252-3.

MILLIONSHCHIKOV, V.M., 1968, "Metric theory of linear systems of differential equations", Mathematics of the USSR-Sbornik, 6, 1968, pp. 149-158.

MINORSKI, N., 1954, "Influence d'Henri Poincaré sur l'évolution moderne de la théorie des oscillations non linéaires", Conférence aux ingénieurs civils, 18 Mai 1954, in POINCARE, H., Œuvres Complètes, Paris, Gauthier-Villars, 1954, T. XI, 3ème partie, pp. 120-6.

MINORSKY, N., 1936a, "Une méthode d'intégration de quelques équations différentielles par un procédé électrique", C.R.A.S., 202, 1936, pp. 293-5.

MINORSKY, N., 1936b, "Application des circuits électriques à l'intégration graphique de quelques équations différentielles", Revue Générale d'Electricité, T. 34, n° 22, 1936, pp. 787-794.

MINORSKY, N., 1947, Introduction to Non-linear Mechanics, J.W. Edwards, Ann Arbor, 1947.

MINORSKY, N., 1962, Nonlinear oscillations, Princeton, Van Nostrand Co, 1962.

MINORSKY, N., 1969, Introduction to nonlinear control systems, New York, Van Nostrand, 1969, 330 p.

MIRA, C., 1963, "Extension des notions de points singuliers aux équations aux différences", C.R.A.S., 256, 1963, pp. 3809-12.

MIRA, C., 1965, "Détermination pratique du domaine de stabilité d'un point d'équilibre d'une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variables réelles", C.R.A.S., A, 261, 1965, pp. 5314-7.

MIRA, C., 1966, "Sur quelques propriétés de la frontière du domaine de stabilité d'un point double d'une récurrence du deuxième ordre à variables réelles et sur un cas de bifurcation de cette frontière", C.R.A.S., 262, 1966, pp. 951-5.

MIRA, C., 1969a, "Traversée d'un cas critique, pour une récurrence du deuxième ordre, sous l'effet d'une variation de paramètre", C.R.A.S., A, 268, 1969, pp. 621-4.

MIRA, C., 1969b, "Etude d'un premier cas d'exception pour une récurrence ou une transformation ponctuelle, autonome du deuxième ordre à variables réelles", C.R.A.S., A, 269, 1969, pp. 1006-9.

MIRA, C., 1970a, "Etude d'un second cas d'exception pour une récurrence, ou une transformation ponctuelle, autonome du deuxième ordre, à variables réelles", C.R.A.S., A, 270, 1970, pp. 332-5.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

MIRA, C., 1970b, "Sur les cas d'exception d'une récurrence ou une transformation ponctuelle, autonome, du deuxième ordre à variables réelles", C.R.A.S., A, 270, 1970, pp. 466-9.

MIRA, C., 1976a, "Structures de bifurcation ‘boites emboîtées’ dans les récurrences, ou transformations ponctuelles du premier ordre, dont la fonction présente un seul extremum. Application à un problème de ‘chaos’ en biologie", C.R.A.S., A, 282, 1976, pp. 219-222.

MIRA, C., 1976b, "Etude d'un modèle de croissance d'une population biologique en l'absence de recouvrement de générations", C.R.A.S., A, 282, 1976, pp. 1441-4.

MIRA, C., 1976c, "Sur la double interprétation, déterministe et statistique, de certaines bifurcations complexes", C.R.A.S., 283, 1976, pp. 911-4.

MIRA, C., 1990, Systèmes asservis non linéaires ; Aspects continus et discrets, Paris, Hermès, 1990 (Traité des Nouvelles Technologies, série Automatique).

MIRA, C., LAGASSE, J., 1976, Transformations ponctuelles et leurs applications. Colloque international CNRS, Toulouse, 10-14 Septembre 1973, Paris, Editions du CNRS, 1976.

MISRA, B., PRIGOGINE, I., 1983, "Irreversibility and nonlocality", Letters in Mathematical Physics, 7, 1983, pp. 421-9.

MISRA, B., PRIGOGINE, I., COURBAGE, M., 1979, "From deterministic to probabilistic descriptions", Physica A, 98, 1979, pp. 1-26.

MITROPOLSKI, Y. A., 1966, Problèmes de la théorie asymptotique des oscillations non stationnaires, Gauthier-Villars, Paris, 1966.

MITROPOLSKY, Y.A., 1968, "Le développement des idées de la mécanique non-linéaire en U.R.S.S. H. Poincaré et la théorie des oscillations non-linéaires", Actes du XIIème congrès international d'Histoire des Sciences, Paris, 1968, tome IV, Paris, A. Blanchard, 1971.

MONOD, J., 1970, Le hasard et la nécessité, Paris, Seuil, 1970.

MOON, F., 1987, Chaotic vibrations, New-York, John Wiley & Sons, 1987.

MOORE, D., SPIEGEL, E., 1966, "A thermally excited non-linear oscillator", Astrophysical Journal, 143 (3), 1966, pp. 871-887.

MOORE, D.R., TOOMRE, J., KNOBLOCH, E., WEISS, N.O., 1983, "Period doubling and chaos in partial differential equations for thermosolutal convection", Nature, Vol. 303, 21 June 1983, p. 663-667.

MORI, H., 1980, "Fractal dimensions of chaotic flows of autonomous dissipative systems", Progress of Theoretical Physics, 63, 1980, pp. 1044-7.

MORSE, M., 1968, "George David Birkhoff and his mathematical work", 1946, in BIRKHOFF, G.D., Collected Mathematical Papers, USA, Dover, 1968, pp. xxiii-lvii.

MOSER, J., 1962, "On invariant curves of Area-preserving mappings of an annulus", Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. 2, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1, 1962, pp. 1-20.

MOSER, J., 1973, Stable and random motion in dynamical systems, Princeton, PUP, 1973, 198 p.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

MOSER, J., 1975, Dynamical systems, theory and applications (Battelle Seattle Rencontres 1974), Berlin, Springer-Verlag, 1975, 624 p. (Lecture Notes in Physics, n° 38).

MOSSERI, R, 1998, Léon Brillouin 1889-1969, Paris, Belin, 255 p.

MOUNIER-KUHN, P.E., 1987, Le comité National et l'émergence de nouvelles disciplines au CNRS : le cas de l'informatique (1946-1976), Mémoire de DEA soutenu le 3 Avril 1987, sous la direction du Professer J.J. Salomon.

MOUNT, W.D., 1960, "On predictability at 500 mb as a Function of Density and Type of Information", in SIGEKATA, S., Proceedings of the international symposium on numerical weather prediction, Tokyo 1960, Tokyo, Meteorological Society of Japan, 1962, pp. 297-305.

MURRAY, J.D., 1989, Mathematical biology, New York, Springer-Verlag, 1989.

MYRBERG, P.J., 1962, "Sur l'itération des polynômes réels quadratiques", Journal de Mathématiques, Vol. XLI, 1962, pp. 339-351.

MYRBERG, P.J., 1963, "Iteration des reellen Polynome zweiten Grades III", Annales Academiae Scientarum Fennicae, 336-3, 1963, pp. 1-10.

NAGASHIMA, T., SHIMADA, I., 1977, "On the C-System-like property of the Lorenz system", Progress of the Theoretical Physics, Vol. 58, 1977, pp. 1318-1320.

NAUENBERG, M., RUDNICK, J., 1981, "Universality and the power spectrum at the onset of chaos", Physical Review B, 24, 1981, pp. 493-5.

NAVILLE, E., 1898, Le libre arbitre : étude philosophique, Paris, F. Alcan, 1898.

NEDA, Z., BAKO, B., REES, E., 1996, "The dripping faucet revisited", Chaos, 6 (1), 1996, p. 59-62.

NEEL, L., 1991, Un siècle de physique, Paris, Odile Jacob, 1991, 365 p.

NEIMARK, Iu. I, LANDA, P.S., 1992, Stochastic and chaotic oscillations, Dordrecht Boston, Kluwer Academic Pub., 1992, 500 p.

NEMYTSKII, V.V., STEPANOFF, V.V., 1960, Qualitative theory of differential equations, Princeton, Princeton University Press, 2eme éd., 1960 , 523 p. (traduction de la 1^{ere}éd. : 1949 ; 2eme éd. en russe : 1949).

NEUMARKER, K.J., 1990, Karl Bonhoeffer : Leben und Werk eines deutschen Psychiatrers und Neurologen in seiner Zeit, Berlin- New York, Springer, 1990.

NEWHOUSE, S., 1980, "The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets of diffeomorphisms", Publications mathématiques de l'IHES, 50, 1980, p. 101.

NEWHOUSE, S., RUELLE, D., TAKENS, F., 1978, "Occurrence of strange Axiom A attractors near quasi-periodic flows on T^m, m#3", Communication in Mathematical Physics, 64, 1978, pp. 34-40.

NEWMAN, D.V., 1996, "Emergence and strange attractors", Philosophy of Science, 63, June 1996, pp. 245-261.

NICOLIS, G., 1995, Introduction to nonlinear science, Cambridge, C.U.P., 1995, 254 p.

NICOLIS, G., DAEMS, D., 1998, "Probabilistic and thermodynamic aspects of dynamical systems", Chaos, 8(2), 1998, pp. 311-320.

NICOLIS, C., NICOLIS, G., 1984, "Is there a climatic attractor ?", Nature, Vol. 311, Oct

1984, pp. 529-532.

NICOLIS, C., NICOLIS, G., 1987, "Evidence for climatic attractors", Nature, Vol. 326, April 1987, p. 523.

NICOLIS, G., PRIGOGINE, I., 1977, Self-organization in non-equilibrium systems, New-York, Wiley, 1977.

NICOLIS, G., PRIGOGINE, I., 1989, Exploring complexity, New-York, Freeman, 1989.

NITECKI, Z., ROBINSON, C., 1980, Global theory of dynamical systems : proceedings of an international conference held at Northwestern University, Evanston, Illinois, June 18-22, 1979, New York, Springer, 1980, 499 p. (Lecture Notes in Mathematics n° 819).

NOUVEL, P., 2002, Enquête sur le concept de modèle, Paris, PUF, 2002, 246 p.

NOYES, R.M., FIELD, R.J., KÖRÖS, E., 1972, "Oscillations in chemical systems. I. Detailed Mechanism in a system showing temporal oscillations", Journal of the American Chemical Society, 94, 1972, pp. 1394-5.

OLSEN, L.F., DEGN, H., 1977, "Chaos in an enzyme reaction", Nature, n° 267, 12 May 1977, pp. 177-278.

OLSEN, L.F., HOFMANN FRISCH, L-L., SCHAFFER, W.M., 1991, "The peroxidase-oxidase reaction : a case for chaos in the biochemistry of the cell", in BAIER, G., KLEIN, M., A chaotic hierarchy, Singapore, World Scientific, 1991.

ONSAGER, L., 1931a, "Reciprocal relations in irreversible processes, I", Physical Review, 37, 1931, pp. 405-426.

ONSAGER, L., 1931b, "Reciprocal relations in irreversible processes, II", Physical Review, 38, 1931, pp. 2265-2279.

OONO, Y., 1978a, "A heuristic approach to the Kolmogorov entropy as a disorder parameter", Progress of Theoretical Physics, 60, 1978, pp. 1944-46.

OONO, Y., 1978b, "Period # 2^n implies chaos", Progress of the Theoretical Physics, 59 1978, pp. 1028-30.

OONO, Y., KOHDA, T., YAMAZAKI, H., 1980, "Disorder parameter for chaos", Journal of the Physical society of Japan, Vol. 48, n° 3, 1980, pp. 738-745.

ORNSTEIN, D.S., 1970, "Two Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic", Advances in mathematics, 55, 1970, p. 3339-3348.

ORNSTEIN, D.S., 1974, Ergodic Theory, Randomness and Dynamical Systems, New Haven, Yale University Press, 1974, 141 p.

OSELEDEC, V.I., 1968, "A multiplicative ergodic theorem: Lyapounov characteristic numbers for dynamic systems", Transactions of the Moscow Mathematical Society, Vol. 19, 1968, pp. 197-236.

OSTWALD, W., 1895, "La déroute de l'atomisme contemporain", Revue générale des sciences pures et appliquées, 15 Nov. 1895, pp. 953-8.

OTT, E., 1981, "Strange attractors and chaotic motion in dynamical systems", Reviews of Modern Physics, 53, 1981, pp. 655-671.

OTT, E., GREBOGI, C., YORKE, J.A., 1990, "Controlling chaos", Physical Review Letters, Vol. 64, n° 1, 1990, pp. 1196-9.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

OUYANG, Q., SWINNEY, H.L., 1991, "Transition to chemical turbulence", Chaos, 1(4), 1991, pp. 411-420.

OXTOBY, J., ULAM, S., 1941, "Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity", Annals of Mathematics, 42, 1941, pp. 874-920.

PACAULT, A., 1979, "Evolution chimique loin de l'équilibre : concepts, modèles et réel", in PACAULT, A., VIDAL, C., Synergetics : Far from equilibrium, Berlin, Springer, 1979, 175 p. (Proceedings of the conference Far from equilibrium : instabilities and structures, Bordeaux, France, September 27-29, 1978), pp. 128-146.

PACAULT, A., PERRAUD, J.J., 1997, Rythmes et formes en Chimie, Paris, PUF, 1997, 127 p. (Que sais-je ? n° 3235).

PACKARD, N.H., CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, J.D., SHAW, R.S., 1980, "Geometry from time series", Physical Review Letter, 45, 1980, p. 712.

PAGELS, H.R., 1985, "Is the irreversibility we see a fundamental property of nature?", Physics Today, Jan. 1985, pp. 97-98.

PAIS, A., 2000, The Genius of Science - A portrait gallery, Oxford, Oxford University Press, 2000, 364 p.

PALIS, J., 1969, "On Morse-Smale Dynamical Systems", Topology, 8, 1969, pp. 385-405.

PALIS, J., 1993, "On the contribution of Smale to dynamical systems", in HIRSCH, M.W., MARSDEN, J.E., SHUB, M., From topology to computation : proceedings of the Smalefest, New York, Springer-Verlag, 1993,p. 165-178.

PARKER, M.W., 1998, "Did Poincaré really discover chaos ?", Studies in the History and Philosophy of Modern Physics, 29 (4), 1998, pp. 575-588.

PARROCHIA, D., 1997, Les grandes révolutions scientifiques du XX ème siècle, Paris, PUF, 1997.

PATY, M., 2003, La physique du XX ème siècle, Les Ulis, EDP Science, 2003, 318 p.

PEINKE, J., PARISI, J., ROSSLER, O.E., STOOP, R., 1992, Encounter with chaos, Berlin, Springer-Verlag, 1992, 289 p.

PEITGEN, H-O, JURGENS, H., SAUPE, D., 1992, Chaos and Fractals. New Frontiers of science, New-York, Springer-Verlag, 1992, 984 p.

PEIXOTO, M., 1959, "On structural stability", Annals of Mathematics, 69, 1959, pp. 189-222.

PEIXOTO, M., 1973, Dynamical systems, proceedings of a symposium held at the university of Bahia, July 26-Aug 14, 1971, New York, Academic Press, 1973.

PENROSE, R., 1994, "On the second law of thermodynamics", Journal of Statistical Physics, 77, 1994, p. 217.

PERES, J., 1951, Actes du colloque International des vibrations non linéaires, Ile de Porquerolles, 18-21 Septembre 1951, Paris, Service de documentation et d'information technique, 1953, 297 p. (Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air)

PESIN, Ya.B., 1976, "Lyapounov characteristic exponent and ergodic properties of smooth dynamical systems with an invariant measure", Soviet Mathematic Doklady,

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

17, 1976, pp. 196-199.

PESTRE, D., 1985, Physique et physiciens en France, 1918-1940, Paris, Edit. des Archives Contemporaines, 1985, 356 p.

PESTRE, D., 1990, "Louis Néel, le magnétisme et Grenoble", Cahiers pour l'Histoire du CNRS, n° 8, 1990, 188 p.

PESTRE, D., 1992, "Les physiciens dans les sociétés occidentales de l'après-guerre. Une mutation des pratiques techniques et des comportements sociaux et culturels", Revue d'Histoire Moderne et contemporaine, 39-1, janvier-mars 1992, p. 56-72.

PESTRE, D., 1994, "La création d'un nouvel univers physicien, Yves Rocard et le laboratoire de physique de l'ENS, 1938-1960", in SIRINELLI, J.F., Ecole Normale Supérieure, le livre du bicentenaire, Paris, PUF, 1994, pp. 405-422.

PICARD, E., 1891, Traité d'analyse, Paris, Gauthiers-Villars, tome 1 : 1891; tome 2 : 1893 ; tome 3 : 1896.

PICARD, E., 1914, "Quelques réflexions sur certains résultats de Henri Poincaré concernant la mécanique analytique", Bulletin des Sciences Mathématiques, 2ème série, n° 38, pp. 320-326.

PICARD, J.-F., 1990, La République des savants. La recherche française et le CNRS, Paris, Flammarion, 1990, 339 p.

PIKOSKY, A.S., 1981, "A dynamical model for periodic and chaotic oscillations in the Belousov#Zhabotinsky reaction", Physics Letters, Vol. 85 A, n° 1, 1981, pp. 13-16.

PLANCHEREL, M., 1913, "Beweis der Unmöglichkeit ergodischer mechanischer Systeme", Annalen der Physik, 4, n° 42, 1913, pp. 1061-64.

POINCARE, H., 1879, "Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles", 1879, in POINCARE, H., Œuvres Complètes, Paris, Gauthiers-Villars, 1952-1956, T. 1, pp. XLIX-CXXIX.

POINCARE, H., 1880, "Sur les courbes définies par une équation différentielle", C.R.A.S., 90, 1880, pp. 673-5.

POINCARE, H., 1881, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", Journal de Mathématiques (3), 7, 1881, pp. 375-422 (in POINCARE, H., Œuvres Complètes, Paris, Gauthiers-Villars, 1952-1956, T. I, pp. 3-44).

POINCARE, H., 1882a, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", Journal de Mathématiques (3), 8, 1882, pp. 251-296 (in POINCARE, H., Œuvres Complètes, Paris, Gauthiers-Villars, 1952-1956, T. I, pp. 44-84).

POINCARE, H., 1882b, "Sur l'intégration des équations différentielles par les séries", C.R.A.S., 94, 1882, pp. 577-8.

POINCARE, H., 1884, "Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps", Bulletin Astronomique, 1, 1884, pp. 65-74.

POINCARE, H., 1885a, "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", Acta Mathematica, VII, 1885 (in POINCARE, H., Œuvres Complètes, Paris, Gauthiers-Villars, 1952#1956, T. VII, p. 40).

POINCARE, H., 1885b, "Sur les courbes définies par les équations différentielles", Journal de Mathématiques (4), 2, 1885, pp. 167-244 (in POINCARE, H., Œuvres Complètes, Paris, Gauthiers-Villars, 1952-1956, T. I, pp. 90-161).

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

POINCARE, H., 1885c, "Sur les séries trigonométriques", C.R.A.S., 101, 1885, pp. 1131-4.

POINCARE, H., 1886a, "Sur une méthode de M. Lindstedt", Bulletin Astronomique, 3, 1886, pp. 57-61.

POINCARE, H., 1886b, "Sur les courbes définies par les équations différentielles", Journal de Mathématiques (4), 2, 1886, (in POINCARE, H., Œuvres Complètes, Paris, Gauthiers-Villars, 1952-1956, T. I, pp. 167-222).

POINCARE, H., 1887, "Sur un théorème de M. Liapounoff relatif à l'équilibre d'une masse fluide", C.R.A.S., 104, 1887, pp. 622-5.

POINCARE, H., 1889a, "Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la Thermodynamique", C.R.A.S., 108, 1889, pp. 550-3.

POINCARE, H., 1889b, "Sur les séries de M. Lindstedt", C.R.A.S., 108, 1889, pp. 21-4.

POINCARE, H., 1890, "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique", 1890 (in POINCARE, H., Œuvres Complètes, Paris, Gauthiers-Villars, 1952-1956, T. VII, pp. 262-479).

POINCARE, H., 1891, "Le problème des trois corps", Bulletin Astronomique, T 8, 1891 (in POINCARE, H., L'analyse et la recherche. Choix de textes et introduction de G. Ramunni, Paris, Hermann, 1991, p. 31-42).

POINCARE, H., 1892a, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, Gauthiers-Villars, T. 1, 1892, 373 p.

POINCARE, H., 1892b, "Les formes d'équilibre des masses fluides en rotation", Revue générale des sciences, T. 3, 1892 (in POINCARE, H., L'analyse et la recherche. Choix de textes et introduction de G. Ramunni, Paris, Hermann, 1991, pp. 43-59).

POINCARE, H., 1892c, "Réponse à P.G. Tait", Nature, T. 45, 1892, p. 485.

POINCARE, H., 1893a, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, Gauthiers-Villars, T. 2, 1893, 480 p.

POINCARE, H., 1893b, "Le mécanisme et l'expérience", Revue de métaphysique et de morale, Nov. 1893 (in POINCARE, H., L'analyse et la recherche. Choix de textes et introduction de G. Ramunni, Paris, Hermann, 1991, pp. 87-91).

POINCARE, H., 1893c, "Sur une objection à la théorie des gaz", C.R.A.S., 116, 189, pp. 1017-1021.

POINCARE, H., 1894, "Sur la théorie cinétique des gaz", Revue générale des Sciences, T. 5, 1894 (in POINCARE, H., L'analyse et la recherche. Choix de textes et introduction de G. Ramunni, Paris, Hermann, 1991, pp. 92-113).

POINCARE, H., 1897a, "Les idées de Hertz sur la mécanique", Revue générale des Sciences, T. 8, 1897 (in POINCARE, H., L'analyse et la recherche. Choix de textes et introduction de G. Ramunni, Paris, Hermann, 1991, pp. 61-86).

POINCARE, H., 1897b, "Rapport sur un mémoire de M. Hadamard : Sur les courbes géodésiques de surfaces à courbures négatives", C.R.A.S., 2, 1897, pp. 589-591.

POINCARE, H., 1898, "Sur la stabilité du système solaire", Revue scientifique, T. 9, 1898 (in POINCARE, H., Œuvres Complètes, Paris, Gauthiers-Villars, 1952-1956, T. VIII, pp. 538-545).

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

POINCARE, H., 1899a, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, Gauthiers-Villars, T. 3, 1899, 414 p.

POINCARE, H., 1899b, "Réflexions sur le calcul des probabilités", Revue Générale des Sciences, T. 10, 1899 (in POINCARE, H., L'analyse et la recherche. Choix de textes et introduction de G. Ramunni, Paris, Hermann, 1991, pp. 115-134).

POINCARE, H., 1900, "Les relations entre la physique expérimentale et la physique mathématique", Revue générale des sciences, 11, 1900, pp. 1163-1175.

POINCARE, H., 1902, La science et l'hypothèse, Paris, Flammarion, 1902, 252 p. (réédition 1999, collection Champs).

POINCARE, H., 1905a, La valeur de la science, Paris, Flammarion, 1905, 190 p. (réédition 1998, collection Champs).

POINCARE, H., 1905b, "Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes", Transactions of the American Mathematical Society, 6, 1905 (in POINCARE, H., Œuvres Complètes, Paris, Gauthiers-Villars, 1952-1956, T. VI, pp. 38-84)

POINCARE, H., 1905c, "Sur la méthode horistique de Gyldén", Acta Mathematica, 29, 1905, pp. 235-271.

POINCARE, H., 1906a, "Réflexions sur la théorie cinétique des gaz", Journal de Physique, 4ème série, T. 5, 1906, pp. 369-403

POINCARE, H., 1906b, "Allocution à la séance publique annuelle du 17 décembre 1906", C.R.A.S., 143, 1906, p. 997.

POINCARE, H., 1907, "Le Hasard", La revue du Mois, 19 Mars 1907 (in POINCARE, H., L'analyse et la recherche. Choix de textes et introduction de G. Ramunni, Paris, Hermann, 1991, p. 135-156).

POINCARE, H., 1908, Science et méthode, Paris, Flammarion, 1908.

POINCARE, H., 1912a, Calcul des probabilités, Paris, Gabay, 1912, 336 p. (Les grands classiques Gauthiers-Villars).

POINCARE, H., 1912b, "Sur un théorème de géométrie", Rendiconti Circolo matematico di Palermo, 33, 1912 (in POINCARE, H., Œuvres Complètes, Paris, Gauthiers-Villars, 1952-1956, T. VI, pp. 499-538).

POINCARE, H., 1956, Œuvres Complètes, Paris, Gauthiers-Villars, 1952-1956.

POINCARE, H., 1991, L'analyse et la recherche. Choix de textes et introduction de G. Ramunni, Paris, Hermann, 1991.

POISSON, S.-D., 1806, "Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et des équations aux différences", Journal de l'Ecole Polytechnique, 6, cahier 13, 1806.

POMEAU, Y., 1980, "Intermittency: a simple mechanism of continuous transition from order to chaos" in BARDOS, C., DESSIS, D., Bifurcation Phenomena in Mathematical Physics and Related Topics, Boston, D. Reidel Pub. Co., 1980, pp. 155-162.

POMEAU, Y., MANNEVILLE, P., 1980, "Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems", Communications in Mathematical Physics, 74, 1980, pp. 189-197.

POMEAU, Y., ROUX, J.C., ROSSI, A., BACHELART, S., VIDAL, C., 1981, "Intermittent

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

behaviour in the Belousov-Zhabotinsky reaction", Journal de Physique-Lettres, 42, 1981, pp. 272-3.

POMIAN, K., 1990, La querelle du déterminisme. Philosophie de la science d'aujourd'hui, Paris, Gallimard, 1990.

PONS, M.N., 1997, Les Applications des théories du chaos en Sciences pour l'Ingénieur, Cachan, Diff. Technique et Documentation Lavoisier, 1997, 277 p. (Coll. Récents Progrès en Génie des Procédés, Vol. 11, n° 50).

POPPER, K.R., 1982, Quantum theory and the schism in physics, Totowa (New Jersey), Rowman & Littlefield, 1982, 229 p.

POPPER, K.R., 1984, L'univers irrésolu : Plaidoyer pour l'indéterminisme, Paris, Hermann, 1984 (traduction de The postcript to the Logic of Scientifc discovery, Londres, Hutchinson, 1982).

POPPER, K.R., 1990, La logique de la découverte scientifique, Paris, Payot, 1990, 480 p.

POUR LA SCIENCE, 1997, L'ordre du chaos, Paris, Pour la Science, 1997 (Bibliothèque Pour la Science).

POUR LA SCIENCE, 2000, Poincaré, philosophe et mathématicien, Hors-Série Les génies de la science n° 4, Pour la Science, Août-Novembre 2000.

POUR LA SCIENCE, 2002, L'art du secret - la cryptographie, Dossier Pour la Science, n° 36, Juillet 2002.

PRIGOGINE, I., 1947, Etude thermodynamique des phénomènes irréversibles, Liège, Desoer, 1947.

PRIGOGINE, I., 1962, Non-equilibrium statistical mechanics, New-York, Wiley-Interscience Pub., 1962, 319 p.

PRIGOGINE, I., 1968, Introduction à la thermodynamique des processus irréversibles, Paris, Dunod, 1968.

PRIGOGINE, I., 1980, Physique, temps et devenir, Masson, Paris, 1980, 275 p.

PRIGOGINE, I., 1994, Les lois du chaos, Paris, Flammarion, 1994, 128 p.

PRIGOGINE, I., STENGERS, I., 1979, La Nouvelle Alliance, Paris, Gallimard, 1986, 443 p. (1ère éd. 1979).

PRIGOGINE, I., STENGERS, I., 1992, Entre le temps et l'éternité, Paris, Flammarion, 1992, 224 p.

PRIGOGINE, I., STENGERS, I., 1996, La fin des certitudes : temps, chaos et lois de la nature, Paris, Odile Jacob, 1996, 234 p.

RABINOWITZ, P.H., 1977, Applications of Bifurcation Theory, Proceedings of an Advanced Seminar conducted by Mathematics Research Center, The University of Wisconsin at Madison, October 27-29, 1976, New York, Academic Press, 1977.

RAMUNNI, G., 1981, Les conceptions quantiques de 1911 à 1927, Paris, Vrin, 1981, 196 p.

RAMUNNI, G., 1989a, La physique du calcul : histoire de l'ordinateur, Paris, Hachette, 1989, 287 p.

RAMUNNI, G., 1989b, "La non-construction du premier calculateur électronique au

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

CNRS", Cahiers pour l'histoire du CNRS, n° 4, 1989, pp. 113-142.

RAMUNNI, G., 1995, Les Sciences pour l'Ingénieur : Histoire du rendez-vous des Sciences et de la Société, Paris, CNRS Ed., 1995, 150 p.

RAND, D., OSTLUND, S., SETHNA, J., SIGGIA, E.D., 1982, "Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems", Physical Review Letters, Vol. 49, n° 2, 12 July 1982, pp. 132-135.

RAND, D.A., YOUNG, L-S., 1981, Dynamical Systems and Turbulence : proceedings of a symposium hald at Warwick 1979-80, Berlin, Springer-Verlag, 1981, 390 p. (Lecture Notes in Mathematics, 898).

RASHEVSKY, N., 1938, Mathematical Biophysics, Chicago, University of Chicago Press, 1938.

RAYLEIGH, J.W.S., 1871, "Note on the explanation of coronas, as given in Verdet's Leçons d'optique physique, and other works", Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. III, 1871 (in RAYLEIGH, J.W.S., Scientific Papers, Cambridge, University Press, 1899-1920, Vol. 1, pp. 267-9).

RAYLEIGH, J.W.S., 1877, Theory of sound (Vol. 1), London, MacMillan & co, 1877.

RAYLEIGH, J.W.S., 1878, Theory of sound (Vol. 2), London, MacMillan & co, 1878.

RAYLEIGH, J.W.S., 1880, "On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase", Philosophical Magazine, X, 1880 (in RAYLEIGH, J.W.S., Scientific Papers, Cambridge, University Press, 1899-1920, Vol.1, pp. 491-6).

RAYLEIGH, J.W.S., 1891, "Dynamical problems in illustration of the theory of gases", Philosophical Magazine, XXXII, 1891 (in RAYLEIGH, J.W.S., Scientific Papers, Cambridge, University Press, 1899-1920, Vol. 3, pp. 473-490).

RAYLEIGH, J.W.S., 1903, "On the spectrum of an irregular disturbance", Philosophical Magazine, 6th serie, Vol. 5, 1903, pp. 238-243.

RAYMOND, F.H., 1950, "L'électronique et les mathématiques expérimentales", L'onde Electrique, 1950, pp. 30-44.

REEB, G., 1955, "Sur la théorie générale des systèmes dynamiques", Annales de l'Institut Fourier, 6, 1955-56, pp. 89-115.

REISCH, G., 1991, "Chaos, History and narrative", History and Theory, Vol. 30, 1991, pp.1-20.

RIBEILL, G., 1998, "Les questions de stabilité dynamique dans les chemins de fer. Expériences et/ou théories à l'épreuve d'un siècle à l'autre", in FONTANON, C., Histoire de la mécanique appliquée. Enseignement, recherche et pratiques mécaniciennes en France après 1880, Fontenay aux roses, ENS Editions, 1998, pp. 137-159.

RICE, S.A., FREED, K.F., LIGHT, J.C., 1972, Statistical mechanics ; new concepts, new problems, new applications : proceeding of the 6th IUPAPA conference on statistical mechanics, Chicago, The University of Chicago Press, 1972, 423 p.

RICHETTI, P., ARNÉODO, A., 1985, "The periodic-chaotic sequences in chemical reactions : a scenario close to homoclinic conditions ?", Physics Letters A, 109, 1985, pp. 359-366.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

RICHETTI, P., ROUX, J.C., ARGOUL, F., ARNEODO, A., 1987, "From quasi-periodicity to chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction II : modeling and theory", Journal of Chemical Physics, 86, 1987, p. 3339.

RIIT, J.F., 1918, "Sur l'itération des fonctions rationnelles", C.R.A.S., 166, 1918, pp. 380-1.

RIKITAKE, T., 1958, "Oscillations of a system of disk dynamos", Proceedings of the Cambridge philosophical society, 54, 1958, pp. 89-105.

RINZEL, J., TROY, W.C., 1982, "Bursting patterns in a simplified Oregonator flow system model", Journal of Chemical Physics, 76, 1982, p. 1775.

ROBERT, R., 2001, "L'effet papillon n'existe plus !", Pour la Science, 283, Mai 2001, pp. 28-35.

ROCARD, Y., 1932, L'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz, Paris, Gauthier-Villars, 1932.

ROCARD, Y., 1937, Phénomènes d'auto-oscillations dans les installations hydrauliques, Paris, Hermann, 1937.

ROCARD, Y., 1941, Théorie des oscillateurs, Paris, Revue Scientifique, 1941.

ROCARD, Y., 1943, Dynamique générale des vibrations, Paris, Masson, 1ère éd., 1943.

ROCARD, Y., 1954, L'instabilité en mécanique : automobiles, avions, ponts suspendus, Paris, Masson, Collection Evolution des sciences, 1954.

ROCARD, Y., 1988, Mémoires sans concessions, Paris, Grasset, 1988, 302 p.

ROELS, J., HENON, M., 1967, "Recherche des courbes invariantes d'une transformation ponctuelle plane conservant les aires", Bulletin astronomique, série 3, T II, 1967, pp.267-285.

ROKHLIN, V.A., 1948, "In general, a measure preserving transformation is not mixing", Doklady Akademii Nauk SSSR, 60, 1948, pp. 349-351.

ROMANENKO, E.Yu., FEDORENKO, V.V., 2003, "Alexander Sharkovsky", Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 9, n° 3-4, 2003.

ROSEN, R., 1970, Dynamical System Theory in Biology, New-York, Wiley Interscience, 1970, Vol. I, 302 p.

ROSEN, R., 1991, Life itself : a comprehensive inquiry into nature, origin and fabrication of life, New York, Columbia University Press, 1991, 285 p.

ROSENBLATT, M., VAN ATTA, C.W., 1972, Statistical models and turbulence : proceedings of a symposium held at the University of california, La Jolla, 15-21 July, 1971, Berlin, Springer, 1972, 492 p.

ROSENTHAL, A., 1913, "Beweis der Unmöglichkeit ergodischer Gassysteme", Annalen der Physik, 4, n° 42, 1913, p. 796-807.

RÖSSLER, O.E., 1971, "Ein systemtheoretisches Modell zur Biogenese", Zeitschrift für Naturforschung, 26b, 1971, pp. 741-6.

RÖSSLER, O.E., 1972a, "Grundschaltungen von flüssigen Automaten und Relaxationssytemen", Zeitschrift für Naturforschung, 27b, 1972, pp. 333-343.

RÖSSLER, O.E., 1972b, "Model of a chemical Reaction Flip-Flop with one Unique

Switching Input", Zeitschrift für Naturforschung, 27b, 1972, pp. 1441-4.

RÖSSLER, O.E., 1972c, "A Rashevsky-Turing System as a Two-cellular Flip-flop", Zeitschrift für Naturforschung, 27 b, 1972, pp. 1444-8.

RÖSSLER, O.E., 1974, "A synthetic approach to exotic kinetics (with examples)", in CONRAD, M., GÜTTINGER, W., DAL CIN, M., Physics and mathematics of the nervous system : proceedings of the Summer School Physics and Mathematics of the Nervous system, Trieste, August 21-31 1973, Berlin, Springer-Verlag, 1974, pp. 546-582.

RÖSSLER, O.E., 1976a, "Chaotic behavior in simple reaction systems", Zeitschrift für Naturforschung, 31 A, 1976, pp. 259-264.

RÖSSLER, O.E., 1976b, "An equation for continuous chaos", Physics Letters, 57 A, 1976, pp. 397-8.

RÖSSLER, O.E., 1976c, "Different types of chaos in Two simple Differential Equations", Zeitschrift für Naturforschung, 31a, 1976, pp. 1664-1670.

RÖSSLER, O.E., 1976d, "Chemical Turbulence : Chaos in a Simple Reaction-Diffusion System", Zeitschrift für Naturforschung, 31a, 1976, pp. 1168-1172.

RÖSSLER, O.E., 1977a, "Horseshoe-map chaos in the Lorenz Equation", Physics Letters, 60 A, n° 5, 1977, pp. 392-4

RÖSSLER, O.E., 1977b, "Toroidal oscillation in a 3-variable abstract reaction system", Zeitschrift für Naturforschung, 32a, 1977, pp. 299-301.

RÖSSLER, O.E., 1977c, "Chaos in abstract kinetics : two prototypes", Bulletin of mathematical biology, Vol. 39, 1977, pp. 275-289.

RÖSSLER, O.E., 1977d, "Continuous chaos", in HAKEN, H., Synergetics a Workshop (Proceedings of the international workshop on Synergectics at Scloss Elmau, Bavaria, May 2-7, 1977), Berlin, Springer-Verlag, 1977, pp. 184-199.

RÖSSLER, O.E., 1977e, "Chemical Turbulence", in HAKEN, H., Synergetics a Workshop (Proceedings of the international workshop on Synergectics at Scloss Elmau, Bavaria, May 2-7, 1977), Berlin, Springer-Verlag, 1977, pp. 174-184.

RÖSSLER, O.E., 1977f, ""Syncope implies Chaos" in Walking-stick maps", Zeitschrift für Naturforschung, 32a, 1977, pp. 607-613.

RÖSSLER, O.E., 1978, "Chaotic oscillations in a 3-variable quadratic mass action system" in YAMAGUTI, M., TERAMOTO, E., International Symposium on Mathematical Topics in Biology, Sept. 11-12 1978, Kyoto, Kyoto, Research Institute for mathematical sciences Kyoto University Publications, 1978, pp. 131-135.

RÖSSLER, O.E., 1979a, "Winfree meandering in a 2-dimensional 2-variable excitable medium", Zeitschrift für Naturforschung, 34a, 1979, pp. 565-570.

RÖSSLER, O.E., 1979b, "Chaos", in BUTTINGER, W., EIKEMEIER, H., Structural Stability in Physics (Proceedings of Two International Symposia on Applications of Catastrophe Theory and topological Concepts in Physics, Tübingen, Fed. Rep. Of Germany, May 2-6 and Dec. 11-14 1978), Berlin, Springer-Verlag, 1979, pp. 290-309.

RÖSSLER, O.E., 1979c, "Chaos and Strange Attractor in chemical kinetics", in PACAULT, A., VIDAL, C., Synergetics : Far from equilibrium (Proceedings of the Conference Far from equilibrium : instabilities and structures, Bordeaux, France,

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

September 27-29, 1978), Berlin, Springer, 1979, pp. 107-113.

RÖSSLER, O.E., 1979d, "An Equation for Hyperchaos", Physics Letters, Vol. 71A, 1979, pp. 155-7.

RÖSSLER, O.E., 1979e, "Continuous chaos - Four prototype equations", in HELLEMAN, R.H.G., "Nonlinear dynamics (International Conference on Nonlinear Dynamics, New York Academy of Sciences, 1979)", Annals of the New-York Academy of Sciences, Vol. 357, Dec 1980, pp. 184-199.

RÖSSLER, O.E., 1980, "Irregular oscillations in a realistic abstract quadratic mass action system", Zeitschrift für Naturforschung, 35a, 1980, pp. 317-8.

RÖSSLER, O.E., 1981, "The gluing-together principle and chaos" in ATTEIA, N., BANCEL, D., GUMOWSKI, I., Nonlinear problems of analysis in geometry and mechanics, Boston, Pitman Advanced Pub. Program, 1981, pp. 50-6.

RÖSSLER, O.E., 1986, "How chaotic is the universe ?", in HOLDEN, A., Chaos, Manchester, Manchester University Press, 1986, pp. 315-320.

RÖSSLER, O.E., 1994, "Chaos-the Surprises of smooth flows", in YAMAGUTI, M., Towards the harnessing of chaos, Elsevier Science, 1994, 435 p.

RÖSSLER, O.E., 1998, Endophysics, Singapore, World Scientific, 1998.

RÖSSLER, O.E., HOFFMAN, D., 1972, "Repetitive hard bifurcation in a homogeneous reaction system", in HEMKER, H.C., HESS, B., Analysis and Simulations of Biochemical Systems, Amsterdam, Elsevier, 1972, pp. 91-102.

RÖSSLER, O.E., ORTOLEVA, P.J., 1978, "Strange Attractors in 3-variable reaction systems", in HEIM, R., PALM, G., Lecture Notes in Biomathematics 21, Berlin, Springer, 1978, pp. 67-73.

RÖSSLER, O.E., WEGMANN, K., 1978, "Chaos in the Zhabotinskii reaction", Nature, 271, 1978, pp. 89-90.

ROUX, J.C., ROSSI, A., BACHELART, S., VIDAL, C., 1980, "Representation of a strange attractor from an experimental study of chemical turbulence", Physics Letters, 77 A, 1980, pp. 391-393.

ROUX, J.C., ROSSI, A., BACHELART, S., VIDAL, C., 1981, "Experimental observations of complex dynamical behavior during a chemical reaction", Physica D, 2, 1981, pp. 395-403.

ROUX, J.C., SIMOYI, R.H., SWINNEY, H.L., 1983, "Observation of a strange attractor", Physica D, 8, 1983, pp. 257-266.

ROUX, J.C., SWINNEY, H.L., 1981, "Topology of chaos in a chemical reaction", in VIDAL, C., PACAULT, A. (ed.), Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics, Berlin, Springer-Verlag, 1981, p. 38.

RUELLE, D., 1969, Statistical Physics: Rigorous results, New York, W.A. Benjamin, 1969.

RUELLE, D., 1973, "Some comments on chemical oscillations", Transactions of the New-York Academy of Sciences, 35, 1973, p. 66.

RUELLE, D., 1975, "The Lorenz attractor and the problem of turbulence" in TEMAM, R., Turbulence and Navier-Stokes equations : proceedings of the conference held at the University of Paris-Sud, Orsay, 12-13 Juin 1975, Berlin, Springer-Verlag, 1976, pp.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

146-157 (reproduction d'une communication faite au symposium "Quantum Dynamics : Models and Mathematics", Bielefeld, Sept. 8-12, 1975).

RUELLE, D., 1976, "A measure associated with Axiom A attractors", American Journal of Mathematics, 98, 1976, pp. 619-654.

RUELLE, D., 1978a, "What are the measures describing turbulence?", Supplement to the Progress of Theoretical Physics, n° 64, 1978, pp. 339-345.

RUELLE, D., 1978b, "Dynamical systems with turbulent behavior", in DELL'ANTONIO, G.F., DOPLICHER, S., JONA-LASINIO, G., Mathematical problems in theoretical physics, proceedings Rome 1977, Berlin, Springer, 1978, pp. 341-360.

RUELLE, D., 1979a, "Sensitive dependence on initial condition and turbulent behavior of dynamical systems", Annals of the New-York Academy of Science, 1979, pp. 408-416.

RUELLE, D., 1979b, "Ergodic theory of differentiable dynamical systems", Publications Mathématiques de l'IHES, 50, 1979, pp. 275-306.

RUELLE, D., 1980a, "Strange attractors", The Mathematical Intelligencer, 2, 1980, p. 126.

RUELLE, D., 1980b, "Measures describing a turbulent flow", Annals of the New-York Academy of sciences, Vol. 357, Déc. 1980, pp. 1-9.

RUELLE, D., 1980c, "Les attracteurs étranges", La Recherche, n° 108, Février 1980, p. 132-146.

RUELLE, D., 1981a, "Differentiable dynamical systems and the problem of turbulence", Bulletin American Mathematical Society, 5, 1981, pp. 29-42.

RUELLE, D., 1981b, "Small Random Perturbations of Dynamical Systems and the Definition of Attractors", Communications in Mathematical Physics, 82, 1981, pp. 137-151.

RUELLE, D., 1984, "Déterminisme et prédictibilité", Pour la Science, 82, Août 1984, pp. 58-67.

RUELLE, D., 1990, "Deterministic chaos: the science and the fiction", Proceedings of the Royal Society of London, A 427, 1990, pp. 241-8.

RUELLE, D., 1991, Hasard et Chaos, Paris, Odile Jacob, Collection Sciences, Septembre 1991.

RUELLE, D., 1992, Turbulence, strange attractors and chaos, Singapore, World Scientific, 1992.

RUELLE, D., 2000, "Les attracteurs étranges", La Recherche, n° 331, Mai 2000, pp. 66-9.

RUELLE, D., TAKENS, F., 1971, "On the Nature of Turbulence", Communications in Mathematical Physics, 20, 1971, pp. 167-192.

RUSSEL, D., HANSON, J.D., OTT, E., 1980, "Dimension of Strange Attractors", Physical Review Letters, Vol. 45, n° 14, 1980, pp. 1175-1178.

SAINT-VENANT, A.J.C.B. de, 1877, "Accord des lois de la Mécanique avec la liberté de l'homme dans son action sur la matière", C.R.A.S., 84, 1877, pp. 419-423.

SALTZMAN, B., 1962, "Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem-I",

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

Journal of the Atmospheric Sciences, 19, 1962, pp. 329-341.

SAPERSTEIN, A.M., 1984, "Chaos - a model for the outbreak of war", Nature, Vol. 309, 24 May 1984, pp. 303-5.

SCHEPS, R., 1996, Les sciences de la prévision, Seuil, Paris, 1996, 222 p. (Points Sciences n° 116).

SCHMITZ, R.A., GRAZIANI, K.R., HUDSON, J.L., 1977, "Experimental evidence of chaotic states in the Belousov-Zhabotinskii reaction", The Journal of Chemical Physics, Vol. 67, n° 7, Oct 1977, pp. 3040-4.

SCHRÖDER, K., REISSIG, R., MAESS, G., MÜLLER, W., ROTHKIRCH, H., 1965, III. Konferenz über nichtlineare schwingungen, Berlin vom 25 bis 30 Mai 1964 (2 Vol.), Berlin, Akademie-Verlag, 1965.

SCHUSTER, H., 1984, Deterministic chaos, Veinheim, VCH, Collection Physik, 1984, 270 p.

SEGAL, J., 1998, Théorie de l'information : sciences, techniques et société de la seconde guerre mondiale à l'aube du XXI ème siècle, 1998, Thèse de Doctorat, Faculté d'Histoire de l'Université Lyon II, Chaire Interuniversitaire d'Histoire des sciences et des Techniques, sous la direction de G. Ramunni, 3 Vol.

SFP, 1977, "Rencontre entre physiciens et mathématiciens sur quelques problèmes non linéaires et leurs applications, Colloque SFP, Nice 26-30 Septembre 1977", Journal de Physique, Colloque C5, supplément au n°8, T. 39, août 1978.

SHAFER, G., 1998, "Book review: Jan von Plato, Creating modern probability", The annals of probability, Vol. 26, n° 1, 1998, pp. 416-24.

SHANKS, N., JOPLIN, K.H., 1999, "Redundant complexity: A critical analysis of Intelligent design in Biochemistry", Philosophy of science, 66, 1999, pp. 268-282.

SHARKOVSKY, A.N., 1964, "Coexistence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself", Ukrainskii Matematichevskii Zhurnal, 16, 1964, pp. 61-71 (en Russe).

SHARKOVSKY, A.N., 1965, "On cycles and the structure of continuous mappings", Ukrainskii Matematichevskii Zhurnal, 17, 1965, pp. 104-111 (en Russe).

SHAW, R., 1981a, "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow", Zeitschrift für Naturforschung, 36a, 1981, pp. 80-112.

SHAW, R.S., 1984, The dripping faucet as a model chaotic system, Santa Cruz, Aerial Press, 1984, 111 p.

SHAW, R.S., 1981b, "Modeling chaotic systems", in HAKEN, H., Chaos and Order in Nature, New York, Springer-Verlag, 1981, pp. 218-231.

SHEFFER, V., 1976, "Géométrie fractale de la turbulence. Equations de Navier-Stokes et dimension de Hausdorff", C.R.A.S., 282, 1976, pp. 121-2.

SHEPARD, R.N., 1962a, "The analysis of proximities: Multidimensional scaling with unknown distance function. Part I", Psychometrika, 27, 1962, pp. 125-140.

SHEPARD, R.N., 1962b, "The analysis of proximities: Multidimensional scaling with unknown distance function. Part II", Psychometrika, 27, 1962, pp. 219-246.

SHEPARD, R.N., 1980, "Multidimensional scaling, tree-fitting and clustering", Science, Vol. 210, October 1980, pp. 390-8.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

SHERMER, M., 1993, "The chaos of history: on a chaotic model that represents the role of contingency and necessity in historical sequences", Nonlinear Science Today, Vol. 2, n° 4, 1993, pp. 2-13.

SHIMADA, I., NAGASHIMA, T., 1978, "The iterative transition phenomenon between periodic and turbulent states in a dissipative dynamical system", Progress of the Theoretical Physics, Vol. 59, 1978, p. 1033-7.

SHIMADA, I., NAGASHIMA, T., 1979, "A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems", Progress of Theoretical Physics, Vol. 61, n° 6, June 1979, pp. 1605-1616.

SHINBROT, T., GREBOGI, C., OTT, E., YORKE, J.A., 1993, "Using small perturbations to control chaos", Nature, Vol. 363, 3 June 1993, pp. 411-417.

SHINBROT, T., OTT, E., GREBOGI, C., YORKE, J.A., 1990, "Using chaos to direct trajectories to targets", Physical Review Letters, Vol. 65, n° 26, 1990, p. 3215-8.

SHOWALTER, K., NOYES, R.M., BAR-ELI, K., 1978, "A modified Oregonator model exhibiting complicated limit cycle behavior in a flow system", Journal of Chemical Physics, 69, 1978, p. 2514.

SHRAIMAN, B., WAYNE, C.E., MARTIN, P.C., 1981, "Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos", Physical Review Letters, Vol. 46, n° 14, April 1981, pp. 935-9.

SIBIRSKY, K.S., 1976, Introduction to topological dynamics, Leyden, Noordhoff Int. Pub., 1976, 163 p. (traduction de Vvedenie v topologicheskuiu dinamiku, 1970).

SIDERIADES, L., 1956, Méthodes topologiques appliquées à l'électronique, Thèse de Doctorat en Physique, Faculté des Sciences de l'Université d'Aix-Marseille, soutenue le 20 Décembre 1956.

SIDERIADES, L., 1959a, "Sur une solution exceptionnelle d'un oscillateur à relaxation de genre triode", Journal de Physique, T. 20, 1959, pp. 766-8.

SIDERIADES, L., 1959b, "Méthodes topologiques et applications", Annales des Télécommunications, T. 14, n° 7-8, 1959, pp. 185-207.

SIEBER, M., 1992, "Applications of periodic-orbit theory", Chaos, 2 (1), 1992, pp. 35-42.

SIGEKATA, S., 1960, Proceedings of the international symposium on numerical weather prediction, Tokyo 1960, Tokyo, Meteorological Society of Japan, 1962.

SIL'NIKOV, L.P., 1965, "A case of the existence of a countable number of periodic motions", Soviet Mathematics Doklady, 6, 1965, pp. 163-6.

SIMOYI, R.H., WOLF, A., SWINNEY, H.L., 1982, "One-dimensional dynamics in a multicomponent chemical reaction", Physical Review Letters, 49, 1982, p. 245-8.

SINAI, Y., 1959, "On the concept of entropy of a dynamical system", Doklady Akademii Nauk USSR, 124, 1959, pp. 768-771.

SINAI, Y., 1963, "On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics", Doklaldy Akademii Nauk USSR, 153, 6, 1963 (traduit dans Soviet Mathematics Doklady, V4, n°6, 1963, p. 1818-1822).

SINAI, Y., 1972, "Gibbs measure in ergodic theory", Russian Mathematical Survey, 27 (4), 1972, pp. 21-69.

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

SIRINELLI, J.F., 1994, Ecole Normale Supérieure, le livre du bicentenaire, Paris, PUF, 1994, 456 p.

SITNIKOV, K., 1961, "The existence of oscillatory motions in the three-body problem", Doklady Akademii Nauk SSSR, Vol.133, n° 2, Juillet 1960, pp. 303-306 (traduit dans Soviet Physics Doklady, 5, 1961, pp. 647-650).

SKLAR, L., 1973, "Statistical explanation and ergodic theory", Philosophy of Science, Vol. 40, n° 2, June 1973, pp. 194-212.

SKLAR, L., 1993, Physics and chance : philosophical issues in the foundations of statistical mechanics, Cambridge, C.U.P., 1995, 437 p.

SMALE, S., 1960, "Morse inequalities for a Dynamical System", Bulletin of the American Mathematical Society, 66, 1960, pp. 43-49.

SMALE, S., 1962, "Dynamical systems and the Topological Conjugacy Problem for Diffeomorphisms", in Proceedings of the International Congress of Mathematicians held in Stokholm, 1962, Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963, pp. 490-6.

SMALE, S., 1965, "Diffeomorphisms with many periodic points" in CAIRNS, S.S., Differential and combinatorial topology, Princeton, Princeton University Press, 1965, p. 63.

SMALE, S., 1966, "Structurally stable systems are not dense", American Journal of Mathematics, 88, 1966, pp. 491-496.

SMALE, S., 1967, "Differentiable Dynamical Systems", Bulletin of the American Mathematical Society, 23, 1967, pp. 747-857.

SMALE, S., 1972, "Personal perspectives on Mathematics and Mechanics" in SMALE, S., The Mathematics of Time, New York, Springer-Verlag, 1980, pp. 95-105.

SMALE, S., 1980, The mathematics of time : essays on dynamical systems, economic processes and related topics, New York, Springer, 1980.

SMALE, S., 1990, "The story of the higher dimensional Poincaré Conjecture (What actually Happened on the beaches of Rio)", The Mathematical Intelligencer, Vol. 12, n° 2, 1990, pp. 44-51.

SMALE, S., 1998, "Finding a Horseshoe on the beaches of Rio", The Mathematical Intelligencer, Vol. 20, n° 1, 1998, pp. 39-44.

SMF-SMAI, 1987, "Mathématiques à venir. Quels mathématiciens pour l'an 2000 ?", Bulletin de la Société Mathématique de France, T. 115, supplément 1987.

SMOLUCHOWKSI, M., 1918, "Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitgesetze in der Physik", Die Naturwissenschaften, 6, 1918, pp. 253-263.

SOKAL, A., BRICMONT, J., 1997, Impostures intellectuelles, Odile Jacob, Paris, Oct. 1997, 276 p.

SOLER, L., 2000, Introduction à l'épistémologie, Paris, Ellipses, 2000, 240 p.

SPARROW, C., 1982, The Lorenz equations : bifurcations, chaos and strange attractors, New York, Springer-Verlag, 1982, 269 p.

SPIRE, A., COHEN-TANNOUDJI, G., BENSAID, D., MORIN, E., 1999, La pensée-Prigogine, Paris, Desclée de Brouwer, 1999.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

STEFAN, P., 1977, "A theorem of Sharkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphisms of the Real Line", Communication in Mathematical Physics, 54, 1977, pp. 237-248.

STEIN, P., ULAM, S., 1964, "Non-linear transformation studies on electronic computers", 1964, in ULAM, S., Adventures of a mathematician, New-York, Scribner, 1976, pp. 401-483.

STEPANOFF, V.V., 1936, "Sur une extension du théorème ergodique", Compositio Mathematica, 3, 1936, pp. 239-253.

STEWART, I., 1998, Dieu joue-t-il aux dés ? Les nouvelles mathématiques du chaos, Paris, Flammarion, 2ème éd., 1998, 599 p. (1ère éd. 1992 ; traduction de Does God play with dice ? The new mathematics of chaos, 1989).

STURM, C., 1836, "Mémoire sur les équations différentielles linéaires du 2nd ordre", Journal de maths pures et appliquées, 1, 1836, pp. 106-186.

STURM, C., 1863, Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique (Vol. 1), 2nde éd., Paris, Mallet#Bachelier, 1863.

STURM, C., 1864, Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique (Vol. 2), 2 nde éd., Paris, Mallet#Bachelier, 1864.

SUGIHARA, G., MAY, R.M., 1990, "Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series", Nature, Vol. 344, April 1990, pp. 734-741.

SWARTZ, C.J., 1969, "On chemical kinetics", Journal of Chemical Education, 46, 1969, pp. 308-9.

SWINNEY, H.L., GOLLUB, J.P., 1978, "Transition to turbulence", Physics Today, 31, 1978, p. 41.

TABOR, M., 1989, Chaos and integrability in nonlinear dynamics, New York, Wiley-Interscience, 1989.

TAKENS, F., 1981, "Detecting strange attractors in turbulence", RAND, D.A., YOUNG, L.S., Dynamical Systems and Turbulence : proceedings of a symposium hald at Warwick 1979-80, Berlin, Springer-Verlag, 1981, p. 336.

TATON, R., 1995a, La science contemporaine. Le XIX ème siècle, Paris, PUF, 1995, 757 p.

TATON, R., 1995b, La science contemporaine. Le XX ème siècle, années 1900-1960, Paris, PUF, 1995, 1072 p.

TEILHARD DE CHARDIN, P., 1955, Le Phénomène Humain, Paris, Seuil, 1955.

TEL, T., GASPARD, P., NICOLIS, G., 1998, "Chaos and irreversibility: Introductory comments", Chaos, 8 (2), 1998, p. 309.

TEMAM, R., 1976, Turbulence and Navier-Stokes equations : proceedings of the conference held at the University of Paris-Sud, Orsay, 12-13 Juin 1975, Berlin, Springer-Verlag, 1976, 194 p.

TESTA, J., PEREZ, J., JEFFRIES, C., 1982a, "Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator", Physical Review Letters, Vol. 48, n° 11, 15 March 1982, pp. 714-7.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

TESTA, J., PEREZ, J., JEFFRIES, C., 1982b, "Testa, Pérèz, Jeffries respond", Physical Review Letters, Vol. 49, n° 14, 4 October 1982, p. 1055.

THOM, R., 1968, "Une théorie dynamique de la morphogénèse", in WADDINGTON, C.H. (ed), Towards a Theoretical Biology, I : Prolegomena, Edinburgh, Edinburgh University Press, 1968, pp. 152-166.

THOM, R., 1972, Stabilité structurelle et morphogénèse : essai d'une théorie générale des modèles, Reading, Benjamin, 1972, 362 p.

THOM, R., 1973, Stabilité structurelle et morphogénèse : essai d'une théorie générale des modèles, Paris, Ediscience, 1973, 362 p.

THOM, R., 1974, Modèles mathématiques de la morphogenèse. Recueil de textes sur la théorie des catastrophes et ses applications, Paris, U.G.E., 1974.

THOM, R., 1983, Paraboles et catastrophes, Paris, Flammarion, 1983, 189 p.

THOM, R., 1991, Prédire n'est pas expliquer (entretiens avec E. Noël), Paris, E.S.H.E.L., 1991, 175 p.

THOMPSON, P.D., 1957, "Uncertainty of Initial State as a Factor in the Predictability of large scale Atmospheric Flow patterns", Tellus, IX, 3, 1957, pp. 275-295.

THOMSON, W., TAIT, P.G., 1879, Treatise on Natural Philosophy, Cambridge, University Press, 2 Vol., 1879-83.

THOMSON, W.T., 1950, Mathematical vibrations, G.B., G. Allen & Unwin, 1950, 222 p.

THUAN, T.X., 1998, Le chaos et l'Harmonie, Paris, Gallimard, 1998, 603 p.

TIKHOMIROV, V.M., 1991, Selected Works of A.N. Kolmogorov, T. 1 Mathematics and mechanics, Dordrecht, Kluwer Academic Pub., 1991, 551 p.

TIMOSHENKO, S., 1939, Théorie des vibrations à l'usage des ingénieurs, Paris Liège, Ch. Béranger, 1939, 482 p.

TONG, H., 1995, Chaos and Forecasting : Proceedings of the Royal Society Discussion Meeting, London, 2-3 March 1994, Singapore, World Scientific, 1995, 345 p.

TRESSER, C., 1984, "Homoclinic orbits for flows in R^3", Journal de Physique, n°45, 1984, pp. 837-841.

TRESSER, C., COULLET, P., 1978, "Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation", C.R.A.S., A, 287, 1978, pp. 577-580.

TRESSER, C., COULLET, P., 1980, "On the existence of hysteresis in a transition to chaos after a single bifurcation", Journal de Physique Lettres, 41, 1980, pp. L243-L246.

TRITTON, D.J., 1977, Physical Fluid Mechanics, New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1977, 362 p.

TRUNK, G.V., 1968, "Statistical estimation of the intrinsic dimensionality of data collections", Infformation and Control, 12 (5-6), 1968, pp. 508-525.

TRUNK, G.V., 1976, "Statistical estimation of the intrinsic dimensionality of a noisy signal collection", IEEE Transactions on Computers, 25 (2), 1976, pp. 165-171.

TSONIS, A.A., ELSNER, J.B., 1988, "The weather attractor over very short timescales", Nature, Vol. 333, June 1988, pp. 545-547.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

TURING, A.M., 1952, "Chemical Basis of Morphogenesis", Philosophical Transaction of the Royal Society London, Vol. 237, 1952, pp. 37-72.

TURNER, J.S., ROUX, J.-C., McCORMICK, W.D., SWINNEY, H.L., 1981, "Alternating periodic and chaotic regimes in a chemical reaction - experiment and theory", Physics Letters, 85 A, 1981, pp. 9-12.

TYSON, J.J., 1973, "Some further studies of nonlinear oscillations in chemical systems", Journal of Chemical Physics, 58, 1973, pp. 3919-3930.

TYSON, J.J., 1976, The Belousov-Zhabotinskii reaction, Berlin, Springer-Verlag, 1976 (Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 10).

UEDA, Y., 1968, Some problems in the theory of nonlinear oscillations, Osaka (Japon), Nippon Printing and Pub. Co., 1968.

UEDA, Y., 1979, "Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation", Journal of Statistical Physics, 20, 1979, pp. 181-196.

UEDA, Y., 1992, The road to chaos, Santa Cruz, Aerial Press, 1992, 223 p.

ULAM, S., 1958, "John von Neumann, 1903-1957", Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 64, 2, 1958, pp. 1-49

ULAM, S., 1964, "Combinatorial analysis in infinite sets and some physical theories", SIAM Review, Vol. 6, n° 4, Oct. 1964, pp. 343-355.

ULAM, S., 1974, Sets, Numbers, and Universes. Selected Works, MIT, MIT Press, 1974, 709 p.

ULAM, S., 1976, Adventures of a mathematician, New-York, Scribner, 1976, 317 p.

ULAM, S., REYNOLDS, M.C., ROTA, G-C., 1986, Science, computers and people : from the tree of mathematics, Cambridge, Birkhäuser, 1986, 264 p.

ULAM, S.M., VON NEUMANN, J., 1947, "On combinations of stochastic and deterministic processes", Bulletin of the American Mathematical Society, 53, 1947, p. 1120.

VAN DER POL, B., 1920, "A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations", Radio Review, 1, 1920, p. 701.

VAN DER POL, B., 1926, "On "relaxation-oscillation"", Philosophical Magazine, serie 7, 2, 1926, p. 978.

VAN DER POL, B., 1927, "Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance", Philosophical Magazine, 3, 1927, p. 65.

VAN DER POL, B., 1930, "Oscillations sinusoïdales et de relaxation", L'onde Electrique, 9, 1930, (reproduit dans VAN DER POL, B., Selected Scientific Papers, Amsterdam, North Holland Pub. Co., pp. 567-598)

VAN DER POL, B., 1934, "The nonlinear theory of electric oscillations", Proceedings of the Institute of Radio Engineers, Vol. 22, n° 9, 1934, pp. 1051-1086.

VAN DER POL, B., 1948, "Mathematics and Radio Problems", Philips Research Reports, 3, 1948, pp. 174-190.

VAN DER POL, B., 1960a, Selected Scientific Papers, Amsterdam, North Holland Pub. Co., 1960.

VAN DER POL, B., 1960b, "Biological Rhythms Considered as Relaxation Oscillations",

 Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est

in VAN DER POL, B., Selected Scientific Papers, Amsterdam, North Holland Pub. Co., 1960, pp. 1088-1099.

VAN DER POL, B., APPLETON, E.V., 1921, "On the form of free Triode vibrations", Philosophical Magazine, 42, Aug. 1921, p. 201.

VAN DER POL, B., APPLETON, E.V., 1922, "On a type of Oscillation-Hysteresis in a simple Triode Generator", Philosophical Magazine, 43, Jan. 1922, p. 177.

VAN DER POL, B., STRUTT, M.J.O., 1928, "On the stability of the solutions of Mathieu's equation", Philosophical Magazine, 5, 1928, pp. 18-38

VAN DER POL, B., VAN DER MARK, M., 1927, "Frequency demultiplication", Nature, 120, 1927, pp. 363-4.

VAN DER POL, B., VAN DER MARK, M., 1928, "Le battement du cœur considéré comme oscillation et un modèle électrique du cœur", L'onde électrique, 7, 1928, p. 365 (reproduit dans VAN DER POL, B., Selected Scientific Papers, Amsterdam, North Holland Pub. Co., pp. 419-446 ; traduction anglaise : Philosophical Magazine, 6, 1928, pp. 763-775).

VAN DER WAALS, J.D., 1901, "Sur l'explication des lois de la Nature sur la base de la mécanique statistique", Physikalische Zeitschrift, 12, 1901, pp. 547-9.

VAVILIN, V.A., ZHABOTINSKY, A.N., ZHAIKIN, A.N., 1973, "A study of a self-oscillatory chemical reaction I : the autonomous system", in CHANCE, B., PYE, E.K., GHOSH, A.K., HESS, B., Biological and Biochemical oscillators, New York, Academic Press, 1973, pp. 71-79.

VEBLEN, O., 1968, "George David Birkhoff", in BIRKHOFF, G.D., Collected Mathematical Papers, USA, Dover, 1968, p. xv.

VERDET, E., 1868, Cours de Physique professé à l'Ecole Polytechnique, Paris, Imprimerie Impériale, 1868-69, 2 tomes.

VERNE, J., 1865, De la terre à la lune. Trajet direct en 97 heures 20 minutes, Paris, Hachette, 1966, 364 p.

VIDAL, C., BACHELART, S., ROSSI, A., 1982, "Bifurcations en cascade conduisant à la turbulence dans la réaction de Belousov-Zhabotinskii", Journal de Physique, 43, 1982, p. 7.

VIDAL, C., DEWEL, G., BORCKMANS, P., 1994, Au-delà de l'équilibre, Paris, Hermann, 1994.

VIDAL, C., LE MARCHAND, H., 1988, La réaction créatrice, Paris, Hermann, 1988.

VIDAL, C., ROUX, J.C., 1980, "La turbulence chimique existe-t-elle ? ", La Recherche, 11, 1980, p. 66.

VIDAL, C., ROUX, J.C., BACHELART, S., ROSSI, A., 1980, "Experimental study of the transition to turbulence in the Belousov-Zhabotinskii reaction", Annals of the New-York Academy of Sciences, 357, 1980, p. 377.

VILKAS, C., 2001, L'art de gouverner la science dans le système public français : le cas du CNRS. Représentation, évaluation, direction de quatre disciplines, Thèse de Doctorat de l'Institut d'Etudes Politiques de Paris, Sociologie, sous la direction de Pierre GREMION, soutenue le 4 Mai 2001.

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

VOGEL, T., 1948, "Mesure des vitesses initiales des projectiles sur le champ de bataille", Mémorial de l'Artillerie Française, 1948, 1er fasc., pp. 171-190.

VOGEL, T., 1951, "Les méthodes topologiques de discussion des problèmes aux oscillations non linéaires", Annales des Télécommunications, 6, n° 1, Janvier 1951.

VOGEL, T., 1953, "Vérifications expérimentales de la théorie des systèmes déferlants", Journal de Physique, 14, 1953, p. 593.

VOGEL, T., 1972, "Sur quelques problèmes non linéaires en physique mathématique", Cours donné au C.I.M.E.(Centro Internazionale Matematico Estivo), 4-13 Juin 1972.

VOGEL, T., 1973, Pour une théorie mécaniste renouvelée, Paris, Gauthier-Villars, 1973, 142 p.

VOLTERRA, V., 1931, Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, Paris, Gauthier-Villars, 1931.

VON NEUMANN, J., 1929, "Beweis des Ergodensatzes und des H-Theorems in der neuen Mechanik", Zeitschrift für Physik, 57, 1929, pp. 30-70.

VON NEUMANN, J., 1932a, "Proof of the quasi-ergodic hypothesis", Proceedings of the National Academy of Sciences, 18, 1932, pp. 70-82.

VON NEUMANN, J., 1932b, "Physical applications of the ergodic hypothesis", Proceedings of the National Academy of Sciences, 18, 1932, pp. 263-66.

VON NEUMANN, J., 1961, "The mathematician", in VON NEUMANN, J., Collected Works of John Von Neumann, New-York, Pergamon Press, T 1, 1961, pp. 1-9.

VON NEUMANN, J., 1963a, Collected Works of John Von Neumann, New-York, Pergamon Press, 1961-63, 6 volumes.

VON NEUMANN, J., 1963b, "The future of high-speed computing", in VON NEUMANN, J., Collected Works of John Von Neumann, New-York, Pergamon Press, T. 5, 1963, p. 236.

VON PLATO, J., 1991, "Boltzmann's Ergodic hypothesis", Archives for the History of Exact Sciences, 42, 1991, pp. 71-89.

VON PLATO, J., 1994, Creation of modern probabilities : its mathematics, physics and philosophy in historical perspective, Cambridge, Cambridge University Press, 1994, 323 p.

WADDINGTON, C.H., 1957, The strategy of the genes: A discussion of some aspects of theoretical biology, London, George Allen & Unwin, 1957.

WALGRAEF, D., 1988, Structures spatiales loin de l'équilibre, Paris, Masson, 1988.

WALKER, G.H., FORD, J., 1969, "Amplitude instability and ergodic behavior for conservative nonlinear oscillator systems", Physical review, Vol. 188, n° 1, Dec. 1969, pp. 416-432.

WEGMANN, K., RÖSSLER, O.E., 1978, "Different kinds of Chaotic oscillations in the Belousov-Zhabotinskii reaction", Zeitschrift für Naturforschung, 33a, 1978, pp. 1179-1183.

WEINGARTNER, P., 1998, "Are statistical laws genuine laws ? A concern of Poincaré and Boltzmann", Philosophia Scientiae, Vol. 3, N° 2, 1998-1999.

WEINGARTNER, P., SCHURZ, G., 1996, Law and prediction in the light of chaos

protégé en vertu de la loi du droit d'auteur.

research, Berlin, Springer, 1996 (Lecture Notes in Physics, Vol.473).

WHEELER, L.P., 1998, Josiah Willard Gibbs : the history of a great mind, Woodbridge, Ox Bow Press, 1998, 270 p.

WHITE, L.J., KSIENSKI, A.A., 1974, "Aircraft identification using a bilinear surface representation of radar data", Pattern Recognition, Vol. 6, n° 1, 1974, p. 35.

WIENER, N., 1930, "General Harmonic Analysis", Acta Mathematica, Vol. 55, 1930, pp. 177-258.

WIENER, N., 1938, "The homogeneous chaos", American Journal of Mathematics, 60, 1938, p. 897-936. (in WIENER, N., Collected Works With Commentaries (ed. P. Masani), Cambridge, CUP, 1976, pp. 1572-1611)

WIENER, N., 1950, "Nonlinear Prediction and Dynamics", Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability III, 1950, (in WIENER, N., Collected Works With Commentaries (ed. P. Masani), Cambridge, CUP, 1976, pp. 371-376).

WIENER, N., 1956, I am a mathematician, the later life of a prodigy, Garden City (New York), Doubleday, 1956, 380 p.

WIENER, N., 1958, Nonlinear problems in random theory, Cambridge, MIT, Chapman and Hall, 1958, 131 p.

WIENER, N., 1976, Collected Works With Commentaries, ed. P. Masani, Cambridge, CUP, 1976.

WIENER, N., WINTNER, A., 1943, "The discrete Chaos", American Journal of Mathematics, 65, 1943, p. 279-298. (in WIENER, N., Collected Works With Commentaries (ed. P. Masani), Cambridge, CUP, 1976, pp. 614-633)

WILLIAMS, R.F., 1979, "The structure of Lorenz attractors", Publications Mathématiques de l'IHES, n° 50, 1979, pp. 321-347.

WILSON, M., 1989, "Critical Note : John Earman's A Primer on determinism", Philosophy of Science, 56, 1989, pp. 502-532.

WINFREE, A.T., 1972, "Spiral waves of chemical activity", Science, Vol. 175, Feb. 1972, pp. 634-635.

WINFREE, A.T., 1984, "The prehistory of the Belousov-Zhabotinsky oscillator", Journal of Chemical Education, 61, 1984, pp. 661-3.

WINFREE, A.T., 2003a, "Obituaries ; Arthur Taylor Winfree", Physics Today, Vol. 56, June 2003.

WINFREE, A.T., 2003b, "Obituary ; Arthur Taylor Winfree", SIAM News, Vol. 36, n° 1, Jan.-Feb. 2003.

WINNIE, J.A., 1992, "Computable chaos", Philosophy of science, 59, 1992, pp. 263-275.

WOLFRAM, S., 1994, Cellular Automata and Complexity, Collected Papers, Reading, Addison-Wesley Pub. Co., 1994, 596 p.

WRIGHT, J., SCHULT, R.L., 1993, "Recognition and classification of nonlinear chaotic signals", Chaos 3 (3), 1993, pp. 295-304.

XIA, Z., 1994, "Arnold Diffusion and Oscillatory Solutions in the Planar Three-Body

Problem", Journal of Differential Equations, n° 110, 1994, pp. 289-321.

ZABUSKY, N.J., 1962, "Exact solution for the vibrations of non linear continuous model string", Journal of Mathematical Physics, Vol. 3, n° 5, Sept-Oct. 1962, pp. 1028-1039.

ZABUSKY, N.J., KRUSKAL, M.D., 1965, "Interaction of ‘solitons’ in a collision plasma and the recurrence of initial states", Physical Review Letters, Vol. 15, n° 6, 1965, pp. 240-243.

ZAIKIN, A.N., ZHABOTINSKY, A.M., 1970, "Concentration Wave Propagation in Two-dimensional Liquid-phase self-oscillating system", Nature, Vol. 225, Feb. 1970, pp. 535-7.

ZAIKIN, A.N., ZHABOTINSKY, A.M., 1973, "Autowave processes in a distributed chemical system", Journal of Theoretical Biology, 40, 1973, pp. 45-61.

ZASLAVSKII, G.M., 1985, Chaos in dynamic systems, New York, Harwood Academic Publisher, 1985, 370 p.

ZASLAVSKY, G., 1995, "From Maxwell's demon to Hamiltonian chaos", Chaos, 5 (4), 1995, pp. 653-661.

ZEEMAN, E.C., 1965, "Topology of the brain" in Mathematics and computer science in biology and medecine, Symposium sponsored by the Medical Research Council, Oxford, July 1964, London, Her Majesty's stationery office, 1965, pp. 277-292.

ZHABOTINSKII, A.M., 1964a, "Periodic processes of the oxidation of malonic acid in solution (Study of the kinetics of Belousov's reaction)", Biofizika, 9, 1964, pp. 306-311.

ZHABOTINSKII, A.M., 1964b, "Periodic liquid phase reaction", Proceedings of the Academy of Sciences, USSR, 157, 1964, p. 392.

ZHABOTINSKY, A.M., 1991, "A history of chemical oscillations and waves", Chaos, 1 (4), 1991, pp. 379-386.

ZHANG, D., GYORGYI, L., PELTIER, W.R., 1993, "Deterministic chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction: experiments and simulations", Chaos, 3 (4), 1993, pp. 723-745.

ZIEMBA, S., SKOWRONSKI, J.M., SZADKOWSKI, J., 1964, Nonlinear vibration problems (Second Conference on nonlinear vibrations, Warsaw, September 18-21 1962), Warszawa, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1964, 661 p.

ZURECK, W.H., 1989, "Algorithmic randomness and physical entropy", Physical Review A, Vol. 40, n° 8, 1989, pp. 4731-51.

Copyright PETITGIRARD Loïc et Université Lumière - Lyon 2 - 2004.Ce document est