



HAL
open science

Observateurs non linéaires pour les systèmes à mesures asynchrones : application robotique mobile

Aïda Feddaoui-Papin

► **To cite this version:**

Aïda Feddaoui-Papin. Observateurs non linéaires pour les systèmes à mesures asynchrones : application robotique mobile. Automatique / Robotique. Université de Toulon, 2020. Français. NNT : 2020TOUL0008 . tel-03232332

HAL Id: tel-03232332

<https://theses.hal.science/tel-03232332v1>

Submitted on 21 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de

l'Université de Toulon

préparée au sein du

Laboratoire d'Informatique et Systèmes

(LIS UMR 7020)

et du laboratoire de

Conception de Systèmes Mécaniques et Robotiques

(COSMER EA 7398)

École Doctorale Mer et Sciences

(ED 548)

Spécialité de doctorat : Automatique, signal, productique, robotique

par

Aïda FEDDAOUI-PAPIN

Observateurs non linéaires pour les systèmes à mesures asynchrones : application à la robotique mobile

Soutenance prévue le 18 mai 2020

Devant le jury composé de :

Dr Hervé GLOTIN	Professeur Université de Toulon, LIS UMR 7020	Président
Dr Sophie TARBOURIECH	Directeur de Recherches LAAS-CNRS Toulouse	Rapporteur
Dr Ali ZEMOUCHE	Maître de Conférence Université de Lorraine, CRAN UMR 7039	Rapporteur
Dr Jean-Luc GOUZE	Directeur de Recherches INRIA Sophia Antipolis	Examineur
Dr Madiha NADRI	Maître de Conférence Université Lyon 1 , LAGEPP UMR 5007	Examineur
Dr Eric BUSVELLE	Professeur Université de Toulon, LIS UMR 7020	Directeur de thèse
Dr Vincent HUGEL	Professeur Université de Toulon, COSMER EA 7398	Co-directeur de thèse
Dr Nicolas BOIZOT	Maître de conférence Université de Toulon, LIS UMR 7020	Co-encadrant de thèse

Aïda FEDDAOUI-PAPIN : *Observateurs non linéaires pour les systèmes à mesures asynchrones : application à la robotique mobile*

Thèse de Doctorat

13 octobre 2020 Toulon, France



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

A Naël

ABSTRACT

The aim of observability studies and observer design is to reconstruct the state of a dynamic system using the measurements available. In particular, the Kalman filter algorithm is considered. This widely-studied and used observer exists in several versions : for linear or nonlinear systems, for discrete, continuous or even continuous-discrete time, in the stochastic or deterministic framework. However, Most of the time, these observers are used with the assumption that the measurements provided by the sensors are synchronous. Most of the time, this assumption can be far from the physical reality, in particular when dealing with robotic systems.

In this memoir, an observer tailored for *nonlinear continuous-discrete asynchronous systems* is presented. These systems are made of a continuous state equation and a multirate sampled output equation. Based on the existing high-gain Extended Kalman Filter for continuous nonlinear systems and continuous-discrete nonlinear systems with synchronous outputs, we develop an ad-hoc formalism and design an observer with a deterministic point of view. Its convergence is proven analytically and illustrated by an application on a mobile robotic system.

RESUMÉ

L'étude de l'observabilité et la synthèse d'observateur ont pour vocation la reconstruction de l'état d'un système à l'aide des mesures reçues. Ces dernières n'apportent généralement qu'une connaissance partielle de cet état. Le filtre de Kalman est un observateur particulièrement étudié et employé. Plusieurs versions existent, adaptées aux systèmes linéaires ou non linéaires, en version discrète, continue voire continue-discrète, dans le cadre stochastique ou déterministe. Ces observateurs reposent cependant sur l'hypothèse que les mesures fournies par les capteurs sont synchrones. Or, cette supposition est assez éloignée de la réalité physique, notamment des problèmes étudiés en robotique.

Nous proposons dans ce manuscrit un observateur adapté aux *systèmes non linéaires continus-discrets asynchrones*. Nous entendons par cela des systèmes dont l'état est continu et les sorties échantillonnées à des fréquences différentes. En nous basant sur le Filtre de Kalman Etendu grand-gain existant pour les systèmes non linéaires continus et continus-discrets synchrones, nous développons un formalisme et construisons un observateur en adoptant un point de vue déterministe. Sa convergence est prouvée analytiquement et illustrée par une application sur un système robotique mobile.

REMERCIEMENT

Après avoir rédigé une thèse, nous pourrions croire que les remerciements sont une simple formalité. Il suffirait de lister tous ceux qui ont joué un rôle durant ces années de thèse et de rendre à chacun ce qui lui appartient. Il n'en est rien. Ces quelques lignes sont les plus personnelles de ce manuscrit et selon moi, les plus difficiles à écrire.

Pour commencer, j'aimerais remercier mes encadrants. J'ai longtemps hésité à m'inscrire en Doctorat, ayant été trop souvent témoin de conflits entre doctorant et directeur de thèse. J'ai pour ma part été extrêmement chanceuse.

Merci Eric pour tes explications, ton humanité et ton soutien moral, en particulier durant cette dernière année.

Merci Vincent d'avoir pris le temps de m'expliquer ce que j'avais à savoir en robotique, alors que je n'avais absolument aucune connaissance dans cette discipline.

Et surtout, merci Nicolas. Merci de m'avoir formée, d'avoir pris tant de temps à m'expliquer les bases sans perdre patience, de m'avoir soutenue moralement depuis mon arrivée. Merci aussi pour tes remises en question et ton intégrité. Merci pour les conversations sans fin, à propos de tout et de rien, pour les conseils musicaux ou culinaires. Merci pour tes conseils concernant l'enseignement et la pédagogie. Souvent, lorsqu'un étudiant m'écrit pour me remercier au sujet de la qualité de mon cours ou pour mon implication, je me dis que c'est à toi que je le dois.

Je ne m'orientais pas forcément vers cette discipline à l'issue de mon Master, mais rien que pour ces rencontres, je suis heureuse de l'avoir fait.

Cette soutenance de thèse s'est déroulée dans des conditions assez inédites et je remercie les membres de mon jury d'avoir accepté de se prêter au jeu.

Merci à Hervé Glotin d'en avoir été le président. Je sais que la théorie du contrôle et la robotique ne sont pas forcément vos disciplines de recherche et que nous vous avons contacté un peu tardivement. Vous avez tout de même accepté et je vous en suis reconnaissante.

Merci à mes rapporteurs, Sophie Tarbouriech et Ali Zemouche. Vous avez été membres de certains de mes comités de suivi de thèse et vos remarques, tout comme celles présentes dans vos rapports,

m'ont été très utiles. Au sujet des comités de suivi de thèse, j'aimerais en profiter pour remercier Frédéric Lafont qui en a fait partie à plusieurs reprises et dont les conseils m'ont été précieux. Je crois que vous avez assisté à ma soutenance en visio-conférence, j'espère que vous avez apprécié mes progrès.

Je remercie également mes examinateurs, Madiha Nadri et Jean-Luc Gouzé. Je ne suis pas parvenue à répondre à toutes vos questions, et nous n'avons malheureusement pas pu en discuter à l'issue de la soutenance, mais je compte bien y réfléchir. Merci pour vos suggestions.

J'aimerais remercier Francesca qui est la première personne du LIS — à l'époque LSIS — que j'ai rencontrée. Merci pour ton soutien, ton intégrité et ta franchise durant toutes ces années.

J'ai une pensée pour Joachim Asch, que je n'ai pas vu depuis des années et qui m'a encadrée durant ma première année de Master. Vous avez cru que j'étais capable de me lancer dans cette aventure et m'avez orientée et conseillée avec franchise. J'ai vraiment apprécié cela.

J'aimerais également remercier Albane Ordrenneau et Adrien Mojica qui ont été stagiaires au sein des laboratoires LIS et COSMER durant ma thèse et m'ont aidée à prendre en main notre petit robot. J'espère que ce que vous faites aujourd'hui vous plaît.

J'ai envie d'écrire un mot au sujet du LIS de Toulon. Il a fallu que je parte pour me rendre compte que j'y étais vraiment bien. Le laboratoire est fermé en raison de la crise sanitaire que nous traversons, et je crains que nous n'ayons pas l'occasion de nous revoir. Alors je profite de ces quelques lignes pour vous remercier de cet accueil.

J'ai une pensée pour mes amis. En particulier Sarah, qui croit en moi depuis vingt ans, et Cyrine qui a été d'un grand soutien ces derniers mois. Je sais que tu étais complètement perdue pour tout ce qui concerne ma thèse et j'ai apprécié tes efforts. Hiba, Oussama, et Hadjer, ces derniers mois ont été difficiles et je ne suis pas sûre que le confinement nous ait réussi. Mais je ne réduirai pas votre soutien, vos conseils et votre amitié à ces deux mois.

Pour finir, je remercie ma famille, ma mère, ma grand-mère et Nael tout particulièrement. C'est durant ces derniers mois que j'ai réalisé combien j'étais soutenue et aidée. Je ne serais pas parvenue à allier mon poste ATER à ma thèse sans votre aide et votre présence. Merci infiniment. Et même si cela est inutile car il ne lira pas ces lignes, j'ai une pensée pour mon grand-père que j'aurais tellement aimé voir le jour de ma soutenance. Je pense qu'il aurait apprécié.

NOMENCLATURE

Notations diverses

χ	sous-ensemble compact de l'espace d'état
$\dot{x}(t)$	dérivée en temps de la variable $x(t)$: $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$
\emptyset	ensemble vide
\mathcal{C}^1	classe des fonctions dérivables et de dérivée continue
\mathcal{C}^ω	classe des fonctions réelles analytiques
s_i	capteur
σ_k	ensemble d'indices indiquant les capteurs disponibles à un instant t_k
$\theta, \theta(t)$	paramètre de grand gain
\mathcal{U}_{adm}	espace des contrôles admissibles
$\ \cdot\ $	sauf mention du contraire : norme euclidienne
$ \cdot $	cardinal d'un ensemble
$\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$	subdivision du temps i.e. suite croissante de nombre réels avec $t_0 = 0$ et $t_k \rightarrow +\infty$ lorsque $k \rightarrow +\infty$
$D_x b(x, u)$	matrice jacobienne d'un champ vectoriel $b(x, u)$ calculée par rapport à x
L^∞	espace vectoriel des fonctions essentiellement bornée

Notations matricielles

$\lambda_{\min}(A)$	plus petite valeur propre de A
A'	transposée de la matrice A

A^{-1}	inverse de la matrice A
Id	matrice identité ayant les dimensions appropriées
$T_r(A)$	trace de la matrice A
$\text{diag}[\nu]$	matrice diagonale dont les éléments sont ceux de ν , ν pouvant être un vecteur ou un ensemble de matrice

Systèmes

\mathcal{S}	ensemble de systèmes
Σ_c	système continu
Σ_{cda}	système continu discret à mesures asynchrones
Σ_{cd}	système continu discret à mesures synchrones

Variables de l'observateur et du système de contrôle

$\hat{x}(t)$	état estimé
\hat{x}_k	état estimé échantillonné
S	matrice solution de l'équation de Riccati
$S_k^{(+)}$	matrice solution de l'équation de Riccati après correction à un instant t_k
$S_k^{(-)}$	matrice solution de l'équation de Riccati à l'issue d'une étape de prédiction et avant correction à un instant t_k
$u(t)$	variable d'entrée
$x(t)$	variable d'état
$y(t)$	variable de sortie
$z(t)$	état estimé exprimé dans des coordonnées normales
z_k	état estimé échantillonné exprimé dans des coordonnées normales
$z_k^{(+)}, x_k^{(+)}$	état estimé à l'issue après correction à un instant t_k
$z_k^{(-)}, x_k^{(-)}$	état estimé à l'issue d'une étape de prédiction et avant correction à un instant t_k

Table des matières

Abstract	v
Resumé	vii
Remerciement	ix
Nomenclature	xi
Table des figures	xv
Introduction générale	1
I Observabilité, observateurs et état de l'art	5
I.1 Observabilité	7
I.1.1 Généralités	7
I.1.2 Forme normale d'observabilité	10
I.1.2.1 Le cas générique	11
I.1.2.2 Le cas non-générique	12
I.2 Observateur	14
I.2.1 Définition	14
I.2.2 Formalisme grand-gain	15
I.2.2.1 Observateur de type Luenberger	15
I.2.2.2 Observateur de type Kalman	16
I.3 Systèmes à mesures asynchrones ou multi-fréquences	17
I.3.1 Robotique	17
I.3.2 Observateur pour un système continu-discret asynchrone	19
I.3.2.1 Système continu-discret et asynchronicité des mesures	19
I.3.2.2 Article de M. Moarref et L. Rodrigues	21
I.3.2.3 Article de Y. Shen, D. Zhang et X. Xia	23

I.3.2.4	Article de L.P. Yan, B.S. Liu et D.H. Zhou	25
II	Filtre de Kalman étendu grand gain pour un système à mesures asynchrones	29
II.1	Systèmes non linéaires	31
II.1.1	Position du problème	31
II.1.2	Définition du filtre de Kalman grand gain asynchrone	34
II.1.3	Preuve de convergence	37
II.2	Borne de la solution de l'équation de Riccati	43
II.2.1	Borne supérieure	43
II.2.2	Borne inférieure	55
II.3	Cas particulier : les systèmes linéaires	65
II.3.1	Position du problème	65
II.3.2	Filtre de Kalman pour un système linéaire	66
II.3.3	Preuve de convergence	67
III	Applications	71
III.1	Exemple académique	73
III.2	Application de l'algorithme à un système 2D en simulation	76
III.3	Application à un système robotique mobile 2D	87
III.3.1	Présentation de la plateforme expérimentale	87
III.3.2	Calibration et vérité terrain	87
III.3.3	Détection des balises	89
III.3.4	Estimation de la trajectoire	90
	Conclusion générale	99
A	Généralités sur les matrices	103
	Bibliographie	105

Table des figures

I.1.	Article de Moarref et Rodrigues : interpolation des sorties	22
I.2.	Article de Yan, Liu et Zhou : échantillonnage et subdivisions	26
III.1.	Ensemble des σ_k et subdivisions	74
III.2.	Sorties du système linéaire	76
III.3.	Convergence de l'état estimé vers l'état réel du système linéaire	77
III.4.	Schéma de pose du bateau	84
III.5.	Signal de sortie et trajectoire du bateau	85
III.6.	Estimation de la trajectoire du bateau	86
III.7.	Turtlebot3 Waffle	88
III.8.	Sorties pour des instructions prédéfinies	90
III.9.	Sorties pour des instructions données par un joystick	91
III.10.	Schéma de l'expérience (vue du dessus)	93
III.11.	Turtlebot3 Waffle et balises J11	93
III.12.	Représentation dans l'espace physique (instructions prédéfinies)	94
III.13.	Estimation dans les coordonnées normales (instructions prédéfinies)	95
III.14.	Représentation dans l'espace physique (joystick)	96
III.15.	Estimation dans les coordonnées normales (joystick)	97
III.16.	Estimation dans les coordonnées cartésiennes (joystick)	98

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie du contrôle est une discipline visant à étudier les systèmes commandés, c'est à dire, les systèmes dynamiques sur lesquels il est possible d'agir en appliquant un contrôle. Afin de modéliser, surveiller ou contrôler de tels procédés, il est souvent nécessaire d'en connaître les propriétés internes. Or, il est rarement possible de mesurer l'intégralité de ces données uniquement grâce à des capteurs, que ce soit en raison des propriétés intrinsèques du système considéré ou du coût élevé des capteurs. De plus, ces derniers peuvent ne pas fournir de mesures fiables, par exemple en raison du bruit de mesure. Dès lors, l'usage d'un observateur, dont le but est d'obtenir une connaissance interne, et donc cachée, à partir de mesures externes et connues, prend toute son importance.

Avant toute chose, il est d'usage de décrire un procédé physique à l'aide d'un ensemble de variables significatives que nous nommons *état du système* et que nous notons x . Nous considérons les systèmes de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

où f est une application de $I \times \mathcal{X}$ et $x_0 \in \mathcal{X}$, avec I un intervalle de \mathbb{R} et \mathcal{X} un sous ensemble de \mathbb{R}^n . L'existence de la variable $x(t)$ solution du système (1) peut être prouvée sous certaines hypothèses de régularité grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz.

Ce système, appelé *système dynamique*, est composé d'une ou plusieurs équations différentielles et de la donnée de la valeur initiale que prend l'état du système. Il nous permet de mieux comprendre le procédé modélisé, de nous interroger sur son évolution et éventuellement d'en prendre le contrôle. Par cela, nous entendons que le système dépend d'un paramètre externe sur lequel il est possible d'agir afin de l'amener d'un état initial donné à un état final souhaité. De tels systèmes sont appelés *systèmes de contrôle*, ou *systèmes commandés* et sont généralement de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(t) = h(t, x(t)) \end{cases} \quad (2)$$

où f est une application de $I \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}_{adm}$, h est une application de $I \times \mathcal{X}$ et $x_0 \in \mathcal{X}$ avec I est un intervalle de \mathbb{R} , \mathcal{X} est un sous ensemble de \mathbb{R}^n , et \mathcal{U}_{adm} ¹ est un sous ensemble de \mathbb{R}^{n_u} . Le paramètre $u(t)$ est le *contrôle* (ou entrée) sur lequel nous pouvons agir afin de commander le système. La variable $x(t)$ est l'*état* du système et la sortie $y(t)$ est le vecteur de *mesure*. C'est ce dernier qui nous donne des informations sur l'évolution du procédé, nous permet de mieux le comprendre et de savoir quel est l'effet du contrôle $u(t)$ qui y est appliqué.

Afin de pouvoir commander ou superviser un système, il est généralement nécessaire de connaître son état $x(t)$. Cependant, comme nous l'avons mentionné plus haut, nous n'avons connaissance que du contrôle $u(t)$ et de la mesure $y(t)$. Nous nous proposons de construire une estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$ sur la base de ces données. C'est sur cet aspect de la théorie du contrôle que se concentre cette thèse.

Nous pourrions simplement résoudre un tel système en exploitant son état initial. Néanmoins, cette donnée est généralement indisponible. Notons de plus que malgré l'effort apporté à la fiabilité de la modélisation, cela ne suffit généralement pas à inverser le problème et entraîne notamment des difficultés en termes de stabilité numérique. Nous procédons alors en deux étapes.

- Nous étudions le vecteur $y(t)$ et nous nous assurons que l'état $x(t)$ du système (2) et son état initial x_0 peuvent être déduits de la connaissance de $y(t)$. En d'autres termes, nos observations suffisent-elles à savoir ce qui se passe réellement au sein du système? Si tel est le cas, le système (2) est dit observable. Sinon, le système n'est pas observable. La conception d'un observateur n'est alors plus possible en utilisant les techniques classiques et cela va au delà du cadre de cette thèse².
- Une fois l'observabilité vérifiée, nous pouvons utiliser les mesures disponibles ainsi que la dynamique du système afin d'estimer sa variable d'état. L'état initial étant inconnu, l'objectif est de reconstruire l'état du système (2) à partir d'un état initial erroné et arbitrairement choisi : l'algorithme permettant d'estimer l'évolution du système est appelé *observateur*.

Le travail de recherche ici décrit, a été réalisé au sein des laboratoires LIS et COSMER. Nous introduisons un formalisme permettant de modéliser les systèmes continus-discrets à mesure asynchrones, un observateur adapté à ce type de systèmes ainsi qu'une preuve de sa convergence. Notre choix s'est porté sur le filtre de Kalman étendu grand gain, dans le cadre déterministe, dans la lignée des observateurs déjà proposés dans [4, 5] pour des systèmes continus et continus-discrets à mesures

1. Pour tout contrôle $u \in L_{loc}^{\infty}(I, \mathbb{R}^{n_u})$, la trajectoire associée $x_u(\cdot)$ est définie sur un intervalle maximal $[0, t_e(u)[$, où $t_e(u) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Si $t_e(u) < +\infty$ alors la trajectoire explose en $t_e(u)$ (théorème d'accompagnement ou d'explosion). Pour tout $T > 0$, $T \in I$, on note \mathcal{U}_{adm} l'ensemble des contrôles admissibles sur $[0, T]$, c'est-à-dire l'ensemble des contrôles tels que la trajectoire associée soit bien définie sur $[0, T]$, autrement dit $T < t_e(u)$. [1]

2. Au sujet de certaines classes de systèmes non observables, cf. [2, 3].

synchrones. Le second volet de cette thèse, plus appliqué, présente, après une illustration sur un modèle de bateau simulé, d'implémenter cet observateur sur un système non simulé, en l'occurrence un robot mobile. Ces résultats ont donné lieu à trois publications :

- **A. Feddaoui, N. Boizot, E. Busvelle and V. Hugel,**
Kalman Filter for Linear Continuous-discrete Systems with Asynchronous Measurements, *CDC 2017*
- **A. Feddaoui, N. Boizot, E. Busvelle and V. Hugel,**
High-gain extended Kalman filter for continuous-discrete systems with asynchronous measurements, *International Journal of Control*, 2018
- **A. Feddaoui-Papin, N. Boizot, E. Busvelle and V. Hugel,**
Continuous-Discrete High-Gain Extended Kalman Filter for Mobile Robots with Asynchronous Outputs, *ICSC 2019*

Ce manuscrit de thèse est conçu de la manière suivante :

- le premier chapitre détaille les notions importantes à sa compréhension. Nous y traitons notamment d'observabilité, de formes normales d'observabilité et d'observateurs. Quelques articles portant sur le traitement des mesures asynchrones en robotique ou sur les observateurs pour systèmes à mesures asynchrones y sont relatés ;
- le second chapitre en est le pivot et porte sur une adaptation du filtre de Kalman dans sa version déterministe, pour des système continus-discrets à mesures asynchrones. La preuve de convergence de cet algorithme y est développée ;
- le troisième et dernier chapitre propose trois applications de l'algorithme. La première est un exemple académique et illustratif simple, la seconde est une simulation et la troisième est réalisée en utilisant les données d'un robot mobile.

OBSERVABILITÉ, OBSERVATEURS ET ÉTAT DE L'ART

I.1	Observabilité	7
I.1.1	Généralités	7
I.1.2	Forme normale d'observabilité	10
I.1.2.1	Le cas générique	11
I.1.2.2	Le cas non-générique	12
I.2	Observateur	14
I.2.1	Définition	14
I.2.2	Formalisme grand-gain	15
I.2.2.1	Observateur de type Luenberger	15
I.2.2.2	Observateur de type Kalman	16
I.3	Systèmes à mesures asynchrones ou multi-fréquences	17
I.3.1	Robotique	17
I.3.2	Observateur pour un système continu-discret asynchrone	19
I.3.2.1	Système continu-discret et asynchronicité des mesures	19
I.3.2.2	Article de M. Moarref et L. Rodrigues	21
I.3.2.3	Article de Y. Shen, D. Zhang et X. Xia	23
I.3.2.4	Article de L.P. Yan, B.S. Liu et D.H. Zhou	25

Ce premier chapitre introduit les notions utiles à la compréhension de ce manuscrit et propose une bibliographie des recherches menées sur les observateurs continus-discrets asynchrones. La Section I.1 propose différentes définitions de l'observabilité et introduit la forme normale d'observabilité. Cette partie prend ses sources dans divers ouvrages et articles. Nous nous sommes notamment basés sur [6, 7, 4, 8, 1]. La Section I.2 traite quant à elle des observateurs et décrit le formalisme grand-gain pour les observateurs de type Luenberger ou Kalman. La Section I.3.1 présente ensuite ce qui motive ce travail de recherche. Enfin, nous achevons ce premier chapitre par la Section I.3.2 dans laquelle nous définissons les systèmes continus-discrets asynchrones et résumons trois articles représentatifs [9–11]. Ces derniers proposent un observateur pour un système à mesures asynchrones, chacun de ces articles ayant une approche différente du problème.

I.1 Observabilité

I.1.1 Généralités

Considérons un système dynamique continu contrôlé de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (\Sigma_c)$$

où :

- $x(t)$ est le vecteur d'état prenant ses valeurs dans un compact $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$,
- $u \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U}_{adm})$ est l'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées dans $\mathcal{U}_{adm} \subset \mathbb{R}^{n_u}$, $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U}_{adm})$ est appelé *espace des entrées* ou *espace des contrôles*,
- $y \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n_y})$ est l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans \mathbb{R}^{n_y} , $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n_y})$ est appelé *espace des sorties* ou *espace des mesures*,
- f et h sont deux fonctions¹ de classe C^∞ telles que $f : \mathcal{X} \times \mathcal{U}_{adm} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$.

Nous désignerons par *systèmes linéaires* les systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) & \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (\Sigma_{c,lin})$$

1. Notons que dans ce chapitre, f peut dépendre ou non du temps. Nous n'écrivons pas cette dépendance afin d'alléger les notations.

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ et A, B, C et D sont des matrices dépendant ou non du temps et définies respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,n_u}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n_y,n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n_y,n_u}(\mathbb{R})$. Si les matrices A, B, C et D ne dépendent pas du temps, on dira que le système $(\Sigma_{c,lin})$ est *invariant en temps*.

Afin d'aborder la notion d'observabilité d'un système, il est important de définir l'indistinguabilité d'une paire d'états.

Définition 1 (Indistinguabilité [12]).

Une paire $(x_0, x'_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ est *indistinguishable* pour le système (Σ_c) si

$$\forall u \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U}_{adm}), \forall t \geq 0, h(\chi_u(t, x_0)) = h(\chi_u(t, x'_0))$$

Un état x'_0 est *indistinguishable* de x_0 si la paire (x_0, x'_0) est *indistinguishable*.

En d'autres termes, si x_0 est indistinguishable de x'_0 , il n'est pas possible, à partir de la connaissance des sorties, de savoir si l'état initial était x_0 ou x'_0 .

Ceci nous mène à une première définition de l'observabilité.

Définition 2 (Observabilité).

Un système (Σ_c) est **observable** (resp. en x_0) si il n'admet aucune paire indistinguishable non triviale (resp. aucun état indistinguishable de x_0).

Cela est équivalent à la définition suivante :

Définition 3 (Observabilité).

Soit l'application état-sortie associée au système (Σ_c) :

$$\begin{aligned} PX_{\Sigma_{c,u}} : X &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n_y}) \\ x_0 &\longmapsto y(\cdot). \end{aligned}$$

Le système (Σ_c) est **observable** si, pour chaque $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{adm}$, l'application état-sortie $PX_{\Sigma_{c,u}}$ est injective.

Cette dernière définition fait intervenir la notion d'injectivité. Or cette propriété est peu stable et est difficile à mettre en pratique [4]. Il suffit en effet de constater que bien que l'application $x \mapsto x^3$ soit injective, ce n'est pas le cas de l'application perturbée $x \mapsto x^3 - \varepsilon x$ pour tout $\varepsilon > 0$. Afin de pallier cette objection, J.-P. Gauthier et I. Kupka ont introduit l'observabilité infinitésimale qui exige l'injectivité de l'application état-sortie $PX_{\Sigma_{c,u}}$ d'une part, et l'injectivité de toutes les applications tangentes de $PX_{\Sigma_{c,u}}$ d'autre part. Définissons dans un premier temps la première variation d'un système.

Définition 4 (Première variation de (Σ_c)).

L'application $PX_{\Sigma_{c,u}}$ est différentiable par rapport à x_0 . Soit donc $TPX_{\Sigma_{c,u}}|_{x_0}$ cette différentielle.

L'application $TPX_{\Sigma_c, u}|_{x_0}$ peut également être vue comme l'application état-sortie d'un autre système TX_{Σ_c} que l'on nomme **première variation** de (Σ_c) :

$$(TX_{\Sigma_c}) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ \dot{\xi}(t) &= D_x f(x(t), u(t))\xi \\ \hat{y}(t) &= D_x h(x(t), u(t))\xi \end{cases}$$

où

- $(x, \xi) \in T\mathcal{X}$ est l'état de TX_{Σ_c} ,
- $D_x h$ est la différentielle de h par rapport à x ,
- $D_x f$ est l'application tangente de f .

Définition 5 (Observabilité infinitésimale).

Le système (Σ_c) est dit **uniformément infinitésimalement observable** si, pour chaque $u(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{U}_{adm})$, chaque $x_0 \in \mathcal{X}$, l'application tangente $TPX_{\Sigma_c, u}|_{x_0}$ est injective. Cela équivaut à ce que l'application état-sortie $TPX_{\Sigma_c, u}$ de la première variation de (Σ_c) soit injective.

Un autre type d'observabilité, a également été introduit par J.-P. Gauthier et I. Kupka. Il s'agit de l'observabilité différentielle. Elle a l'avantage d'être vérifiable de manière pratique. Introduisons tout d'abord les jets d'ordre k .

Définition 6 (Jets d'ordre k).

Les **jets d'ordre k** , que l'on note $j^k u$, d'une fonction lisse u au point $t = 0$ sont définis par

$$j^k u = (u(0), \dot{u}(0), \dots, u^{(k-1)}(0)).$$

Nous définissons également les jets $j^k y$ d'ordre k qui sont l'**extension des jets $j^k u$ d'ordre k à l'application état-sortie** : pour une fonction lisse u et pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$,

$$j^k y = (y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(k-1)}(0)).$$

Définition 7 (Observabilité différentielle).

- Le système (Σ_c) est dit **différentiellement observable** d'ordre k , si pour tout $j^k u$, l'application

$$\begin{aligned} \phi_k^\Sigma : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathbb{R}^{k \times n_y} \\ x_0 &\longmapsto j^k y \end{aligned}$$

est injective.

- Le système (Σ_c) est dit **fortement différentiellement observable** d'ordre k , si pour tout $j^k u$, l'application

$$\begin{aligned} \phi_{k,j^k u}^\Sigma : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathbb{R}^{k \times n_y} \\ x_0 &\longmapsto j^k y \end{aligned}$$

est une immersion² injective.

Dans la pratique, les définitions de l'observabilité et de l'observabilité infinitésimale sont difficiles à vérifier. L'observabilité différentielle est celle que nous utiliserons et que nous prouverons pour les applications du Chapitre III. D'un point de vue pratique, nous procéderons de la manière suivante [7] :

1. Nous considérons le vecteur de sortie $y(t)$ dont l'expression est connue pour tous les temps $t \geq 0$.
2. Le vecteur de sortie est dérivé un certain nombre de fois jusqu'à ce que l'état du système $x(t)$ puisse être déduit de la connaissance de $y(t)$, de ses dérivées successives ainsi que du contrôle $u(t)$.
3. Nous avons donc trouvé une extension des jets d'ordre k du système (Σ_c) (cf Définition 6) qui soit injective. Par conséquent, le système est différentiellement observable.
4. Considérons le théorème suivant :

Théorème 8 ([4]).

Pour un système analytique (Σ_c) , (c'est à dire, avec f et g réelles analytiques — autrement dit de classe C^ω , [13]), les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) (Σ_c) est observable pour toute entrée réelle analytique ;
- (b) (Σ_c) est observable pour toute entrée de classe L^∞ .

Nous pouvons alors en déduire, à supposer que le système soit analytique, qu'il est L^∞ -observable. Etant donné que nos entrées appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U}_{adm})$, l'observabilité est prouvée.

I.1.2 Forme normale d'observabilité

Dans cette partie, nous présentons la notion de forme normale d'observabilité. Cette structure est particulièrement importante dans le sens où elle détermine la construction d'un observateur grand-gain (cf. Chapitre II). A condition que le système étudié soit observable, peut-il toujours être

2. $\phi_{k,j^k u}^\Sigma$ est une **immersion** si toutes ses applications tangentes $T_{x_0} \phi_{k,j^k u}^\Sigma$ sont de rang plein en chaque point.

présenté sous une forme canonique ? Sinon, quels sont les critères requis ? L'étude se décompose en deux cas : le cas générique³ où le nombre de sorties est strictement supérieur à celui des entrées, et le cas non générique où le nombre de sorties est inférieur ou égal à celui des entrées.

I.1.2.1 Le cas générique

Nous considérons les systèmes dont le nombre de sorties est strictement supérieur à celui des entrées et nous notons $\mathcal{S} = \{\Sigma = (f, h)\}$ l'ensemble des systèmes contrôlés de la forme (Σ_c) . Dans cette situation, l'observabilité différentielle forte est une propriété générique.

Théorème 9 (cf [4]).

1. L'ensemble des systèmes fortement différentiellement observables d'ordre $2n + 1$ est résiduel dans \mathcal{S} .
2. L'ensemble des systèmes analytiques fortement différentiellement observables d'ordre $2n + 1$ qui sont également L^∞ -observables est dense dans \mathcal{S} .

Ce théorème a la conséquence suivante :

Théorème 10 (cf [14]).

La propriété suivante est générique sur \mathcal{S} :

Soit $k = 2n + 1$. Pour une fonction $u(\cdot)$ suffisamment lisse, posons $j^k u(t) = (u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(k-1)}(t))$. Choisissons un sous-ensemble Γ de \mathcal{X} ouvert relativement compact et arbitrairement large, et une borne arbitraire pour le contrôle u et ses dérivées successives $(\dot{u}, \dots, u^{(k)})$. Alors, les applications

$$\phi_{k, j^k u}^\Sigma : x(t) \mapsto (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$$

sont des immersions injectives lisses qui associent les trajectoires du système (Σ_c) (restreintes à Γ) à celles du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = z_1 \\ \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{k-1} = z_k \\ \dot{z}_k = \varphi_K(z_1, \dots, z_k, u, \dot{u}, \dots, u^{(k)}). \end{array} \right. \quad (\text{I.1})$$

Le système (I.1) est appelé forme normale d'observabilité de (Σ_c) .

D'après le Théorème 10, à condition de se placer sur un sous ensemble compact suffisamment large, et à condition que le nombre de sorties soit strictement supérieur à celui des entrées, le système

3. Un sous-ensemble est dit *générique* s'il contient un sous ensemble résiduel. Un sous-ensemble de \mathcal{S} est dit *résiduel* s'il est une intersection dénombrable de sous ensembles ouverts denses.

(Σ_c) peut être réécrit sous une forme normale d'observabilité et l'état $x(t)$ du système (Σ_c) peut être reconstruit à partir de l'état $z(t)$ du système (I.1).

I.1.2.2 Le cas non-générique

Dans le cas où le nombre de sorties est inférieur ou égal à celui des entrées, l'observabilité différentielle du système n'est plus une propriété générique. D'après J.P. Gauthier et I. Kupka dans [4], des résultats généraux pour tout $d_u \geq d_y > 1$ sont difficiles à obtenir. Il est uniquement traité dans [4] le cas où $d_y = 1$ et $d_u \geq 1$ ainsi que deux exemples pratiques pour lesquels $d_y = d_u = 2$. De plus, seuls les cas où $d_y = 1$, $d_y = 2$ et $d_y = 3$ sont abordés dans l'article [15]. Ces études et la possibilité d'un résultat plus général étant éloignés du sujet principal de cette thèse, nous ne mentionnerons que le cas où $d_y = 1$ et $d_u \geq 1$, tel qu'il est étudié dans [4] et repris dans [7].

Notons de plus que les exemples traités dans ce manuscrit comporteront plus de sorties que d'entrées. Les systèmes considérés seront à rapprocher des résultats de la section (I.1.2.1).

Lorsque $n_y = 1$:

Définissons tout d'abord le *drapeau canonique de distributions* $D(u)$.

Définition 11 (Drapeau canonique de distributions).

- Soit un système $(\Sigma) = (f, h) \in S$. Le drapeau canonique de distributions $D(u)$ est défini comme suit :

$$\begin{cases} D(u) &= \{D^0(u) \supset D^1(u) \supset \dots \supset D^{n-1}(u)\} \\ D^0(u) &= \text{Ker}(d_x h) \\ D^{k+1}(u) &= D^k(u) \cap \text{Ker}(d_x L_f^{k+1} h) \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

où le contrôle $u(t)$ est considéré comme fixé.

- Si les distributions $D^i(u)$ sont de rang constant $n - i - 1$ et sont indépendantes de $u(\cdot)$, alors $D(u)$ est un drapeau canonique uniforme.

Le théorème suivant établit un lien entre la propriété d'un système de posséder un drapeau canonique uniforme — propriété fortement non générique [4] — et son caractère observable.

Théorème 12 (cf. [7, 16]).

Le système (Σ_c) possède un drapeau canonique uniforme si et seulement si, pour tout $x^0 \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage de coordonnées de $x^0, (V_{x^0}, x)$ tel que dans ces coordonnées, la restriction de (Σ_c) à V_{x^0} peut

être écrite de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = h(x_1, u) \\ \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{array} \right. \quad (\text{I.3})$$

où $\frac{\delta h}{\delta x_1}$ et $\frac{\delta f_1}{\delta x_{i+1}}$, $i = 1, \dots, n-1$ ne s'annulent jamais sur $V_{x^0} \times \mathcal{U}_{adm}$.

Un système sous la forme (I.3) est infinitésimalement observable, observable et différentiellement observable [7].

En résumé, nous voyons apparaître une représentation caractéristique de l'observabilité d'un système non linéaire contrôlé, que nous appellerons *forme normale d'observabilité*. En nous limitant à des systèmes à une seule sortie afin d'alléger les notations de ce chapitre, cette forme canonique sera écrite de la manière suivante :

$$\left(\sum_c^N \right) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(u(t))x(t) + b(x(t), u(t)) \quad \text{avec} \quad x(0) = x_0 \\ y(t) = C(u(t))x(t) \end{array} \right. \quad (\text{I.4})$$

avec

- $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$, \mathcal{X} compact,
- $y(t) \in \mathbb{R}$
- $u(t) \in \mathcal{U}_{adm} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ borné.

Les matrices $A(u(t))$ et $C(u(t))$ sont définies par :

$$A(u(t)) = \begin{pmatrix} 0 & a_2(u(t)) & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n_i}(u(t)) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad C(u(t)) = (a_1(u(t)) \quad 0 \quad \cdots \quad 0),$$

avec $0 < a_m \leq a_i(u(t)) \leq a_M$ pour tout $u(t) \in \mathcal{U}_{adm}$ et $i = 1, \dots, n$.

Le champ vectoriel $b(x(t), u(t))$ est à support compact et a pour expression :

$$b(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} b_1(x_1(t), u(t)) \\ b_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ \vdots \\ b_n(x(t), u(t)) \end{pmatrix}.$$

La matrice Jacobienne $D_b(x, u)$ de $b(x, u)$ est quant à elle bornée supérieurement et le champ vectoriel $b(x, u)$ est Lipschitzien.

I.2 Observateur

I.2.1 Définition

Dès lors que nous souhaitons agir sur un système, il peut être nécessaire de connaître son état $x(t)$. Or, seuls le contrôle $u(t)$ et la mesure $y(t)$ sont généralement connus. L'objectif d'un observateur est donc le suivant : considérant un système (Σ_c) , trouver une estimation $\hat{x}(t)$ de $x(t)$ à partir de la connaissance de $u(\tau)$ et $y(\tau)$ pour $0 \leq \tau \leq t$.

Un tel problème se pose lorsque l'application h n'est pas inversible. Il est possible d'estimer $x(t)$ par feedback (ou rétroaction). Notons tout d'abord que si l'état initial $x(0)$ nous était donné, $x(t)$ serait parfaitement connu en intégrant la première équation de (Σ_c) . L'idée sur laquelle repose le feedback est que si $x(0)$ nous est inconnu, nous pouvons tenter de corriger dynamiquement $\hat{x}(t)$ obtenu de l'intégration de (Σ_c) à partir d'un état initial $\hat{x}(0)$ arbitraire et très probablement erroné. Pour cela, nous calculons l'erreur $h(\hat{x}(t)) - y(t)$ et obtenons \hat{x} , l'estimation de x , en résolvant le système suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + k(t, h(t, \hat{x}(t)) - y(t)) \quad \text{avec} \quad k(t, 0) = 0.$$

Ce système auxiliaire définit un observateur. De manière générale, un observateur répondra à la définition suivante :

Définition 13 (Observateur [6]).

Considérant le système (Σ_c) , un observateur est donné par un système auxiliaire :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= F(X(t), u(t), y(t), t) \\ \hat{x}(t) &= H(X(t), u(t), y(t), t) \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

tel que :

1. $\hat{x}(0) = x(0) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t), \forall t \geq 0$;
2. $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Si (ii) est vérifié pour tout $x(0)$ et $\hat{x}(0)$, l'observateur est à convergence **globale**.

Si (ii) est vérifié et que la convergence est exponentielle, l'observateur est dit à convergence **exponentielle**.

Si (ii) est vérifiée et que la vitesse de convergence peut être réglée, alors l'observateur est dit à convergence **arbitraire**.

I.2.2 Formalisme grand-gain

De nombreux observateurs pour des systèmes non linéaires existent mais ne proposent qu'une convergence locale. Garantir la convergence globale d'un observateur non linéaire peut s'avérer ardu. Le formalisme grand-gain, décrit ci-dessous à travers deux résultats principaux de cette théorie, repose sur la notion de forme normale d'observabilité et propose une réponse à ce problème.

I.2.2.1 Observateur de type Luenberger

Considérons le système (Σ_c^N) défini par le système d'équations (I.4), pour lequel nous supposons que tous les a_i sont égaux à 1, avec $i = \{1, \dots, n\}$.

Un observateur de type Luenberger grand-gain prend la forme suivante [4] :

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + b(\hat{x}, u) - K_\theta(C\hat{x} - y(t)) \quad (\text{I.6})$$

où $\theta \geq 1$ est un réel donné, $K_\theta = \Delta_\theta K$ est le gain de l'observateur, Δ_θ est une matrice diagonale telle que

$$\Delta_\theta = -\text{diag}(\theta I_{d_{d_y}}, \theta^2 I_{d_{d_y}}, \dots, \theta^N I_{d_{d_y}})$$

et K est telle que la matrice $A - KC$ est stable.

Le théorème suivant nous renseigne au sujet de la convergence de cet observateur :

Théorème 14.

[4] Pour tout $a > 0$, il existe un $\theta \geq 1$ suffisamment grand tel que

$$\forall (x_0, \hat{x}_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}, \quad \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq k(\theta)e^{-at}\|\hat{x}_0 - x_0\|,$$

pour un certain polynôme k de degré n , où $\hat{x}(t)$ et $x(t)$ décrivent les solutions à l'instant t de l'observateur (I.6) et du système (Σ_c) dont les états initiaux sont \hat{x}_0 et x_0 .

Notons que nous désignerons par l'expression *observateur de type Luenberger*, les observateurs dont le gain est calculé hors ligne, à la différence des observateurs de type Kalman que nous introduisons ci-dessous.

I.2.2.2 Observateur de type Kalman

Contrairement aux observateurs de type Luenberger décrits précédemment, et pour lesquels le gain K_θ est calculé hors ligne, celui du filtre de Kalman dépend d'une matrice $S(t)$ solution d'une équation de Riccati. Cette dernière dépend de la dynamique du système et de l'estimation en cours et est elle même mise à jour en même temps que la variable d'estimation \hat{x} .

Considérons le système (Σ_c^N) défini par le système d'équations (I.4). Soient Q et R deux matrices symétriques définies positives de dimensions respectives $n \times n$ et $n_y \times n_y$. Soit $D_b(x, u)$ la matrice Jacobienne de $b(x, u)$ par rapport à x . Soient $Q_\theta = \theta^2(\Delta_\theta)^{-1}Q(\Delta_\theta)^{-1}$ avec $\theta \geq 1$ un réel positif et la matrice Δ_θ de la forme

$$\Delta_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\frac{1}{\theta})^{n-1} \end{pmatrix}$$

Le filtre de Kalman étendu grand gain est défini par le système d'équations ci-dessous⁴ :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + b(\hat{x}, u) - S(t)^{-1}C'R^{-1}(C\hat{x} - y(t)) \\ \frac{dS}{dt} = -(A + D_b(\hat{x}, u))'S - S(A + D_b(\hat{x}, u)) + C'R^{-1}C - SQ_\theta S \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

Les deux matrices Q_θ et R_θ , dont la construction est liée à la forme normale d'observabilité caractérisent le filtre de Kalman étendu grand gain. Le paramètre constant θ est le paramètre grand gain. Ces deux matrices peuvent être considérées comme des paramètres de réglage de l'observateur. Une autre façon de considérer ces matrices découle de l'interprétation de la dynamique dans le cadre stochastique : il s'agit alors de matrices de covariance des bruits d'état et de mesure [17].

Notons que nous parlons d'observateur grand-gain lorsque le paramètre θ est supérieur à 1. Si θ valait 1, nous aurions affaire au filtre de Kalman étendu (et non étendu grand gain). Dans ce cas, contrairement au filtre de Kalman étendu grand gain pour lequel la convergence exponentielle est globale [4], la convergence n'est généralement que locale [16, 7].

4. Notons que les équations habituelles font intervenir une matrice de covariance P . Afin de faciliter les calculs, nous avons fait le choix de considérer plutôt la matrice d'information $S = P^{-1}$

Le théorème suivant, également prouvé dans [4] aborde la convergence du filtre de Kalman étendu grand gain.

Théorème 15.

Pour $\theta > 1$ suffisamment grand et pour tout $T > 0$, le filtre de Kalman étendu (I.7) satisfait pour $t \geq \frac{T}{\theta}$:

$$\|z(t) - x(t)\| \leq \theta^{n-1} k(T) \left\| z\left(\frac{T}{\theta}\right) - x\left(\frac{T}{\theta}\right) \right\| e^{-(\theta\omega(T) - \mu(T))\left(t - \frac{T}{\theta}\right)}$$

pour des fonctions continues et positives $k(T)$, $\omega(T)$, $\mu(T)$.

Le travail de recherche présenté dans ce manuscrit se situe dans le cadre de la théorie grand-gain exposée ci-dessus. Nous nous intéressons plus particulièrement aux systèmes continus-discrets à mesures asynchrones présentés dans la Section suivante.

I.3 Systèmes à mesures asynchrones ou multi-fréquences

I.3.1 Robotique

L'une des motivations de ce travail de recherche, réalisé au sein des laboratoires LIS (Laboratoire d'Informatique et Systèmes) et COSMER (COncption de Systèmes Mécaniques et Robotiques), est l'estimation de trajectoire de robots mobiles ou sous-marins. En effet, les mesures de ces derniers sont généralement asynchrones, c'est à dire que les sorties de ces systèmes n'ont pas le même pas d'échantillonnage, et le pas d'échantillonnage n'est pas forcément constant.

Afin de motiver cette étude plus avant, nous détaillerons plus particulièrement les articles [18] et [19] pour lesquels les auteurs font usage du filtre de Kalman, le premier étant orienté vers la robotique mobile et le second s'intéressant au contrôle de drones aériens. Avant cela, l'exemple suivant, issu de [20] et illustrant la problématique de la perte d'observabilité due à l'asynchronicité, est reproduit :

Exemple 16.

Considérons le cercle unité $\Pi = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a^2 + b^2 = 1\}$, l'ensemble $\mathcal{X} = \Pi \times \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++}$ et le système (Σ) , défini sur \mathcal{X} ⁵, comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 x_4 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_4 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 x_3 \\ y_2 = x_2 x_3 \\ y_3 = x_4 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

5. Notons que \mathcal{X} n'est pas un compact.

où $x_3(0) > 0$ et $x_4(0) > 0$.

1. Que ce soit dans le cadre continu ou discret, le système (Σ) est observable. En particulier,

$$y_1^2 + y_2^2 = x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) = x_3^2$$

nous permet de calculer x_3 . Ainsi, y_1 et y_2 sont suffisants pour calculer x_1 et x_2 .

2. Si (Σ) est un système asynchrone, alors il devient non-observable puisque certaines valeurs de $x_4(0)$ rendent x_3 indistinguable. En effet, si nous supposons que y_1 et y_2 sont mesurés alternativement avec une période d'échantillonnage homogène Δt pouvant être arbitrairement petite, l'état de (Σ) est de la forme :

$$\begin{cases} x_1 = \cos(x_4 t + C_1) \\ x_2 = \sin(x_4 t + C_1) \\ x_3 = C_2 \\ x_4 = C_3 \end{cases}$$

Si la période d'échantillonnage est choisie telle que $x_4(0)\Delta t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors :

$$\begin{cases} y_1(0) = x_3 \cos(C_1) \\ y_2(\Delta t) = x_3 \cos(C_1) \\ y_1(2\Delta t) = -x_3 \cos(C_1) \\ y_2(3\Delta t) = -x_3 \cos(C_1) \\ \vdots \end{cases}$$

Dans ce cas, il est donc impossible de distinguer x_3 de C_1 .

Dans leur article [18], M. Blain, S. Lemieux et R. Houde implémentent un filtre de Kalman discret afin d'estimer la position et l'orientation d'un ROV (Remotely Operated underwater Vehicle⁶). Le système de navigation du robot étudié est composé de plusieurs capteurs dont un système acoustique et un Doppler. Le système acoustique fournit la position XYZ d'un sonar monté sur le sous-marin. Seules les coordonnées XY sont utilisées. Quant au Doppler, il fournit les vitesses linéaires en XYZ du sous marin. Les auteurs précisent que la vitesse d'acquisition du Doppler est environ douze fois plus élevée que celle du capteur de position acoustique. Lorsque les deux capteurs fournissent leur mesures en même temps, le filtre de Kalman estime la position du robot. Cependant, onze fois sur

6. En français : Véhicule sous-marin télécommandé

douze, seules les données du Doppler seront disponibles. Les auteurs lèvent le problème en intégrant les données du Doppler afin d'actualiser l'estimation de la position.

De la même manière, dans leur article [19], P.-J. Bristeau, E. Dorveaux, D. Vissière et N. Petit implémentent un filtre de Kalman étendu afin de d'estimer l'état d'un hélicoptère expérimental de modèle réduit, muni de capteurs bon marché. Les données proviennent de plusieurs capteurs dont un magnétomètre, un baromètre, un GPS et une centrale inertielle. Chaque capteur a sa propre fréquence d'acquisition et aucune mesure, excepté celles fournies par la centrale inertielle, n'est horodatée de manière fiable. La centrale inertielle fait donc office d'horloge de référence et fournit des informations de temps fiables. La datation des données se fait en plusieurs étapes :

- à chaque fois qu'une mesure issue d'un capteur autre que la centrale inertielle fait son apparition, le micro-contrôleur mesure le temps écoulé depuis la dernière mesure fournie de la centrale inertielle ;
- ce laps de temps est ajouté au temps de la centrale inertielle ainsi qu'à une trame regroupant diverses informations : les données collectées par les différents capteurs, l'horodatage absolu réalisé par l'horloge interne de la centrale inertielle, un horodatage relatif associé à chaque capteur ;
- un filtre de Kalman étendu est implémenté afin d'estimer l'état du système. Le vecteur de mesures fourni par le micro-contrôleur à l'unité de calcul est composé de données asynchrones. La mise à jour de l'estimation est réalisée par le filtre de Kalman à une fréquence de 75 Hz (fréquence de l'IMU). Étant donné que les autres capteurs n'ont pas la même fréquence, leur sorties sont interpolées afin d'être disponibles aux mêmes instants que les mesures de l'IMU.

Pour finir cette sous-section, citons quelques références complémentaires, notamment [21] qui traite d'un problème de positionnement global, [22] qui se penche sur des procédés chimiques ou [23] sur la concentration de biomasse dans un bioréacteur. De même, et c'est ce qui nous concerne le plus ici, les articles [24, 25] s'intéressent tout comme [18] à la robotique sous-marine. Ceci nous amène à la section suivante où nous décrivons le formalisme des systèmes à mesures asynchrones, et plus précisément, ceux dont l'état est continu et les mesures sont discrètes.

I.3.2 Observateur pour un système continu-discret asynchrone

I.3.2.1 Système continu-discret et asynchronicité des mesures

Pour commencer, notons que nous nous intéresserons désormais à des systèmes sous une forme normale d'observabilité.

Par systèmes continus-discrets, nous désignons les systèmes de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t))x(t) + b(x(t), u(t)) & \text{avec } x(0) = x_0 \\ y_k = C_k x_k \end{cases} \quad (\Sigma_{cd}^N)$$

où

- $x(t), u(t)$ ainsi que la matrice $A(u(t))$ et le champ vectoriel $b(x(t), u(t))$ sont les mêmes que ceux du système (I.4). L'état évolue donc continûment par rapport au temps ;
- les mesures ne sont plus données de manière continue mais suivant une subdivision du temps $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$;
- x_k est la valeur de x à l'instant τ_k et y_k est le vecteur contenant les mesures disponibles en τ_k .

Des observateurs ont déjà été proposés pour ce type de systèmes, notamment dans [26–29, 5]. En particulier, l'article [5] donne une preuve de la convergence du filtre de Kalman étendu grand gain adaptatif pour les systèmes continu-discret à mesures synchrones.

Notons qu'il est logique de considérer un système à mesures asynchrones comme un système à sorties discrètes. Cependant, afin d'alléger les notations de ce chapitre, nous ne formaliserons pas ce type de systèmes dans cette sous-section et ils seront présentés dans le Chapitre II.

Parmi les articles proposés pour des systèmes à mesures asynchrones, citons notamment les articles [9], [10] et [11]. Le premier aborde le cas linéaire continu, le second le cas non linéaire continu-discret et le dernier propose un observateur pour un système à état et sorties discrets. Des différences notables apparaissent entre ces articles et ce que nous proposons. En particulier, si l'article [11] fait usage de l'habituel filtre de Kalman discret, les deux autres proposent des observateurs de type Luenberger.

L'article [30] souligne le fait qu'il existe trois manières différentes d'aborder le problème de l'estimation de l'état d'un système à état continu et à mesures discrètes. La première consiste à modéliser la dynamique du système tout en la supposant discrète, puis d'appliquer un estimateur conçu pour des systèmes à état discret. Il s'agit de l'approche choisie dans [11]. Une autre façon de procéder est de relever les mesures discrètes dans l'espace des fonctions continues à l'aide, par exemple, d'une régression polynomiale. Cette approche peut être trouvée dans [9]. Enfin, il est possible de modéliser la dynamique de l'état du système de manière continue et de conserver les mesures discrètes. L'estimateur utilisé est alors spécialement conçu pour ce type de systèmes. Il s'agit du choix que font les auteurs de [10]. C'est également celui que font H. Zhang, M.V. Basin et M. Skliar dans leur article [30] et ce sera notre point d'attaque. Intéressons nous à présent aux observateurs proposés dans les articles que nous venons de citer.

I.3.2.2 Article de M. Moarref et L. Rodrigues

Dans l'article [9] publié en 2014 par M. Moarref et L. Rodrigues, un observateur de type Luenberger est proposé pour l'estimation de l'état d'un système linéaire dont les sorties sont échantillonnées de manière non homogène. Le système de contrôle considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ et A, B, C, D sont des matrices de dimensions appropriées. L'estimateur que les auteurs souhaitent employer est l'observateur continu de Luenberger de gain L :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - [C\hat{x}(t) + Du(t)]) \\ \quad = A\hat{x}(t) + Bu(t) - LCe(t) \\ \dot{e} = (A + LC)e(t) \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

où $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est l'erreur commise sur l'estimation de $x(t)$. L'observateur choisi par M. Moarref et L. Rodrigues est parfaitement adapté à un système dont l'état et les sorties sont continus. Or, le vecteur de sortie est mesuré grâce à différents capteurs. Les auteurs modélisent les capteurs sous la forme d'échantillonneurs-bloqueurs. Ils associent pour cela à chaque mesure $y_i(t)$, $i \in \{1, \dots, m\}$ un capteur S^i et une subdivision du temps s_k^i avec $0 < \varepsilon < s_{k+1}^i - s_k^i < \tau^i$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le nombre τ^i désigne ici l'intervalle maximal entre deux prises de mesures par le capteur S^i . Les auteurs font le choix d'exprimer les mesures discrètes sous la forme de fonctions continues. Nous nous trouvons donc dans la deuxième situation décrite par l'article [30]. Le temps écoulé depuis qu'un capteur donné a fourni sa dernière mesure est décrit par la fonction en dents de scie $\rho^i(t)$ définie par

$$\rho^i(t) = t - s_k^i, \quad \text{pour } t \in [s_k^i, s_{k+1}^i[.$$

La Figure I.1 issu de l'article [9] permet de mieux comprendre comment sont conçues les subdivisions de temps.

Les sorties étant échantillonnées et asynchrones, elles sont interpolées de la manière suivante :

$$\bar{y}(t) = [y_1'(t - \rho^1(t)) \dots y_m'(t - \rho^m(t))]'.$$

Les matrices \bar{C} et \bar{D} ainsi que les vecteurs $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ et $\bar{y}(t)$ sont calculés ainsi :

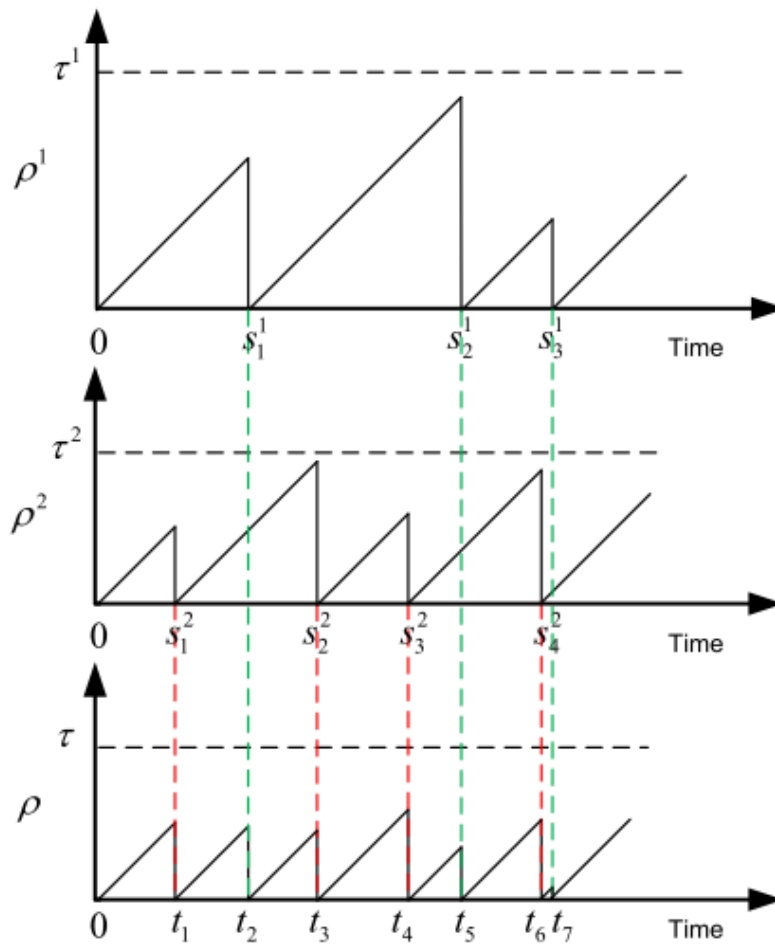


FIGURE I.1 – Les fonctions en dent de scie $\rho^1(t)$, $\rho^2(t)$ et $\rho(t)$ pour un système à deux sorties asynchrones avec $\rho(t) = \min_i \rho^i(t)$ pour $i \in \{1, 2\}$ [9].

- $\bar{C} = \text{diag}[C_1, C_2, \dots, C_m]$ où les C_i représentent la ligne de la matrice C correspondant à la sortie y_i ,
- $\bar{D} = \text{diag}[D_1, D_2, \dots, D_m]$ où les D_i sont construits comme les C_i ,
- $\bar{x}(t) = [x'(t - \rho^1(t)) \dots x'(t - \rho^m(t))]'$,
- $\bar{u}(t) = [u'(t - \rho^1(t)) \dots u'(t - \rho^m(t))]'$,
- $\bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}\bar{u}(t)$.

L'observateur adapté à la structure échantillonnée et asynchrone des sorties du système (I.8) s'écrit donc

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - L\bar{C}\bar{e}(t) \\ \dot{\bar{e}}(t) &= (A + L\bar{C})\bar{e}(t) \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

avec

- $\hat{x}(t) = [\hat{x}'(t - \rho^1(t)) \dots \hat{x}'(t - \rho^m(t))]'$,
- $\bar{e}(t) = [e'(t - \rho^1(t)) \dots e'(t - \rho^m(t))]'$.

Les auteurs démontrent que sous certaines hypothèses et à condition qu'un certain nombre d'inégalités matricielles soient vérifiées, la convergence de l'observateur (I.10) est exponentielle.

Outre le fait que nous proposons un observateur non linéaire, des différences existent entre les résultats de cet article et ceux que nous présentons dans cette thèse :

- la principale différence réside dans le choix de ne pas considérer les sorties telles qu'elles sont vraiment, à savoir échantillonnées, et de les étendre à l'espace des fonctions continues ;
- le choix du type d'observateur diffère également. Étant donné qu'ils considèrent un système linéaire et indépendant du temps, les auteurs ont fait le choix d'un observateur de type Luenberger. Nous n'avons pas retenu cette option qui n'est pas cohérente avec l'estimation d'un système non linéaire.

I.3.2.3 Article de Y. Shen, D. Zhang et X. Xia

Dans l'article [10] datant de 2017, Y. Shen, D. Zhang et X. Xia ont proposé un observateur continu grand gain pour une classe de systèmes non linéaires à sorties multiples. Le pas d'échantillonnage de ces sorties n'est pas uniforme et ces dernières peuvent être transmises en présentant un retard. Le système considéré est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(x(t), u(t)) \\ y(t) &= C(t)x(t) = [C_1x^1(t), \dots, C_mx^m(t)]^T \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ en est le contrôle et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ en est la sortie.
- La partie linéaire du système s'écrit sous la forme de m blocs de taille λ_i , $i = 1, \dots, m$ et $\sum_i \lambda_i = n$.
La matrice A a donc la structure suivante :

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$$

avec

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice C s'écrit $C = \text{diag}(C_1, \dots, C_m)$ avec $C_i = [1, 0, \dots, 0]_{1 \times \lambda_i}$
- $B(x(t), u(t)) = [b^1(x(t), u(t))^T, \dots, b^m(x(t), u(t))^T]^T$ où le $i^{\text{ème}}$ élément de $b^i(\cdot)$, que l'on note $b_j^i(\cdot)$ est supposé Lipschitzien et a la structure suivante :

$$b_j^i(x(t), u(t)) = b_j^i(x^1(t), \dots, x^{i-1}(t), x_1^i(t), \dots, x_j^i(t); u(t)),$$

pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq \lambda_i$. Ceci confère au système une structure cascadée.

Le $i^{\text{ème}}$ bloc du système (I.11) ci dessus est donc donné par l'équation suivante :

$$\dot{x}^i = A_i x^i(t) + b^i(x(t), u(t)) \quad (\text{I.12})$$

Les auteurs supposent que le système dispose de m capteurs auxquels sont associés m subdivisions de temps $\{\{t_k^i\}_{k \geq 0}\}_{i=1, \dots, m}$. Les mesures arrivent donc à ces instants t_k^i auxquels s'ajoute un retard τ_k^i inconnu mais borné.

L'observateur associé au $i^{\text{ème}}$ bloc de $x(t)$ et proposé dans l'article prend la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}^i = A_i \hat{x}^i(t) + b^i(\hat{x}(t), u(t)) + \text{diag}\left(L_1^1 a_1^i, L_1^2 a_2^i, \dots, L_1^{\lambda_i} a_{\lambda_i}^i\right) e_1^i(t_k^i) \quad (\text{I.13})$$

avec $j = 1, 2, \dots, \lambda_i$, $t \in [t_k^i + \tau_k^i, t_{k+1}^i + \tau_{k+1}^i)$, $k \geq 0$ et $e_1^i(t_k^i) = x_1^i(t_k^i) - \hat{x}_1^i(t_k^i)$ est l'erreur commise sur l'estimation de l'état du système (I.12). Enfin, a_j^i et $L_i \geq 1$ sont des réels positifs et L_i est le paramètre de gain de l'observateur.

Les auteurs prouvent qu'à condition de borner les variables a_j^i , L_i^j et le temps écoulé entre deux mesures successives d'une même sortie, l'observateur converge exponentiellement. Cet observateur

est celui se rapprochant le plus du nôtre. Nous pouvons noter quelques différences dont le choix d'un gain fixe contre une structure de type Kalman dans notre cas. De plus, nous mettons en avant dans notre algorithme la notion de capteurs regroupant l'ensemble des sorties toujours disponibles au même instant, ce qui nous permet de prendre en compte d'éventuelles corrélations entre ces sorties.

I.3.2.4 Article de L.P. Yan, B.S. Liu et D.H. Zhou

Dans leur article [11] paru en 2005, L.P. Yan, B.S. Liu et D.H. Zhou proposent d'utiliser le filtre de Kalman dans sa version probabiliste discrète sur un système à état discret et mesures discrètes et asynchrones. Le modèle a notamment été repris dans l'article [31] par S. Safari, F. Shabani et D. Simon. Le système dynamique que l'on considère est muni de N capteurs et vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(N, k+1) = A(k)x(k) + w(k) \\ z(i, k) = C(i, k)x(i, k) + v(i, k), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

où

- $x(N, k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est la variable d'état du système à l'instant indicé par k sur la subdivision de temps N et $x(i, k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est la variable d'état au $k^{\text{ème}}$ temps de la $i^{\text{ème}}$ échelle de temps.
- $x(N, 0)$ est la valeur initiale du vecteur d'état et vérifie :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(x(N, 0)) = x_0 \\ \mathbb{E}(x(N, 0) - x_0)(x(N, 0) - x_0)' = P_0 \end{cases}$$

- $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice du système (I.14) et $C(i, k) \in \mathbb{R}^{q_i \times n}$ est la matrice de mesure.
- $w(N, k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ et $v(i, k) \in \mathbb{R}^{q_i \times 1}$ sont des bruits blancs gaussiens indépendants entre eux et indépendants de $x(N, 0)$
- $z(i, k) \in \mathbb{R}^{q_i \times 1}$, ($q_i \leq n$) est la $k^{\text{ème}}$ mesure observée grâce au capteur i avec un échantillonnage S_i .

Le système est composé de N capteurs. A chacun d'eux est associé une subdivision du temps. Il est à noter que le capteur d'indice N possède la plus haute fréquence d'échantillonnage. Les auteurs demandent de plus que l'échantillonnage de ce capteur d'indice N soit uniforme. Les autres capteurs ont un taux d'échantillonnage moins fin et éventuellement non uniforme.

Il existe donc N suites $(S_l)_{l \in [1, \dots, N]}$ de mesures telles que

$$S_{j+1} = n_j S_j \quad \text{avec } j = 1, \dots, N-1 \quad (\text{I.15})$$

avec n_j un entier positif connu.

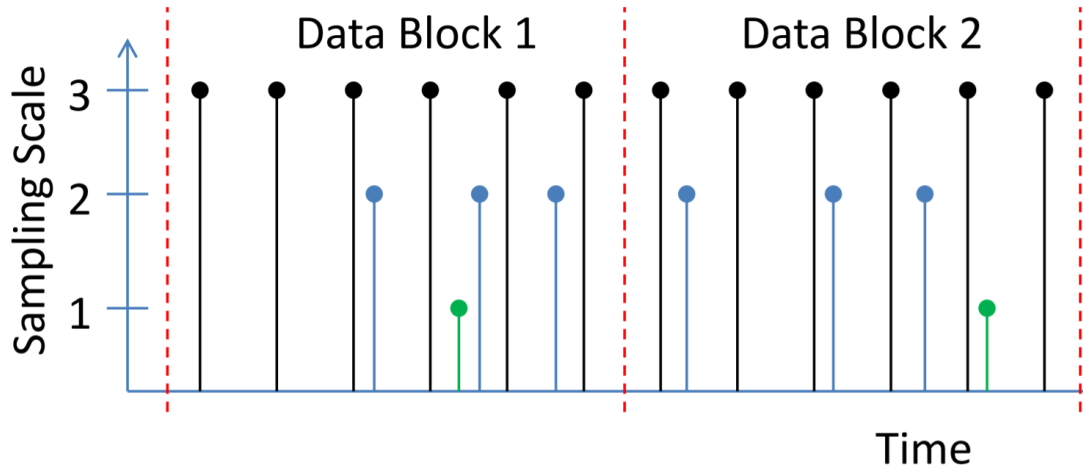


FIGURE I.2 – Trois subdivisions associées à trois capteurs sont représentées ici. On remarque que l'échantillonnage de S_1 est plus grossier que ceux de S_2 ou S_3 . De plus l'échantillonnage de S_3 est le seul à être régulier [31].

Afin d'explicitier au mieux la démarche des auteurs, considérons un exemple de système à trois sorties telles que représentées sur la Figure I.2. Grâce à la relation (I.15), nous écrivons $S_3 = 2S_2$ et $S_2 = 3S_1$. Cela signifie que dans un bloc de données (noté *Data block* sur la Figure I.2), la subdivision S_3 contiendra deux fois plus de points que la subdivision S_2 et la subdivision S_2 contiendra trois fois plus de points que la subdivision S_1 . La subdivision S_3 comptera donc six fois plus de points que la subdivision S_1 . Par conséquent, nous savons qu'à l'arrivée de la première sortie de la subdivision S_2 , il est possible que la sortie correspondant à S_3 soit déjà apparue deux fois. De même, lorsque la deuxième occurrence de la sortie associée à S_2 apparaît, il se peut que S_3 nous ait donné sa quatrième occurrence. Enfin, lorsque la troisième et dernière mesure associée à S_2 apparaît, la sixième mesure de S_3 devrait nous parvenir. Il en va de même pour S_1 . Les auteurs procèdent à une uniformisation des subdivisions S_1 et S_2 afin de les caler au mieux sur S_3 dont l'échantillonnage est régulier et dont la dynamique d'état est décrite par l'équation (I.14).

Deux cas se présentent : celui où la subdivision S_2 est effectivement très proche de la ré-uniformisation des mesures, auquel cas l'approximation des $x(2, k)$, $k \in \mathbb{N}$ est très proche de leur valeur exacte. Ou bien, comme cela est représenté sur la Figure I.2, l'approximation de $x(2, k)$ en certains points de S_2 est très différente de sa valeur réelle. En effet, nous notons que la première occurrence de la deuxième sortie (en bleu) est comprise entre la troisième et la quatrième occurrence de S_3 et non entre la première et la seconde occurrence de S_3 comme le prétend l'approximation. De même la seconde

occurrence de S_2 est comprise entre la quatrième et la cinquième occurrence de S_3 et non entre la troisième et la quatrième occurrence de S_3 . Cependant, même si les deux premières occurrences de S_2 sont mal approximées car elles arrivent trop tard dans le Bloc 1, nous savons que pour que la troisième occurrence de S_2 appartienne également au premier bloc de temps, il est évident qu'elle doit être proche des temps 5 et 6 de S_3 . L'état du système au troisième point de S_2 est donc a priori bien approximé.

L'approximation de l'état du système pour les subdivisions de temps 1 et 2, pour les blocs suivants se fait de la même manière. Ce découpage du temps en blocs rigides permet d'obtenir une structure relativement homogène des subdivisions 1 et 2 et une approximation de l'état du système proche de la réalité pour au moins une occurrence sur trois de la subdivision S_2 .

Notons que plus la subdivision considérée est grossière, moins l'approximation de l'état sera fiable. Cette approche permet d'estimer les sorties $z(i, k)$ du système pour tout $i = 1, 2, \dots, N$. Pour finir, les auteurs proposent grâce à cette approximation une représentation d'état du système et estiment son évolution grâce au filtre de Kalman dans sa version discrète.

De manière générale, pour un système à N capteurs, il est important de remarquer que le système (I.14) décrit uniquement l'évolution de la variable d'état pour l'échelle de temps N . Ces équations ne sont pas applicables pour $x(i, k)$, $i = 1, \dots, N - 1$. Comme nous l'avons expliqué dans l'exemple ci-dessus, l'un des objectifs de cet article est de reformuler les équations (I.14) afin qu'elle s'appliquent à tout $x(i, k)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

A cette fin, les auteurs font le choix d'aborder l'irrégularité de l'échantillonnage des mesures en uniformisant l'échantillonnage de chaque capteur. Pour ce faire, en notant que la relation (I.15) implique que le paramètre n_{N-1} associé à la subdivision la plus fine S_N est un multiple de tous les autres paramètres n_i , la quantité suivante est définie :

$$\tilde{M}_i = \prod_{j=i}^{N-1} n_j.$$

La variable d'état pour la subdivision S_k est calculée de manière à suivre un échantillonnage uniforme et devient alors :

$$x(i, k) \approx \frac{1}{\tilde{M}_i} \sum_{m=0}^{\tilde{M}_i-1} x(N, k\tilde{M}_i - m)$$

L'intérêt de cet article réside dans la manière dont a été traitée l'asynchronicité des mesures. Nous notons cependant que l'approche des auteurs implique une certaine rigidité du modèle. En effet, bien que l'échantillonnage des sorties ne soit pas homogène, les auteurs imposent une certaine régularité

des mesures par *Bloc de données*. Cette régularité n'est que partielle puisqu'elle ne perdure pas sur une fenêtre glissante mais elle reste tout de même une hypothèse assez forte. De plus, l'hypothèse que l'échantillonnage de la subdivision d'ordre le plus élevé soit homogène nous semble quelque peu contraignante.

Nous achevons ici ce premier chapitre introduisant les notions utiles à la compréhension du sujet ainsi qu'une présentation d'articles abordant la question de l'estimation de l'état de systèmes à mesures asynchrones. Le chapitre suivant constitue le pivot de ce manuscrit et propose un observateur adapté aux systèmes continus-discrets asynchrone ainsi que la preuve de sa convergence.

CHAPITRE II

FILTRE DE KALMAN ÉTENDU GRAND GAIN POUR UN SYSTÈME À MESURES ASYNCHRONES

II.1	Systèmes non linéaires	31
II.1.1	Position du problème	31
II.1.2	Définition du filtre de Kalman grand gain asynchrone	34
II.1.3	Preuve de convergence	37
II.2	Borne de la solution de l'équation de Riccati	43
II.2.1	Borne supérieure	43
II.2.2	Borne inférieure	55
II.3	Cas particulier : les systèmes linéaires	65
II.3.1	Position du problème	65
II.3.2	Filtre de Kalman pour un système linéaire	66
II.3.3	Preuve de convergence	67

Ce chapitre constitue le socle de ce manuscrit et introduit un observateur adapté aux systèmes continus-discrets à mesures asynchrones ainsi qu'une étude de convergence. Dans la Section II.1 de ce chapitre, nous proposons une modélisation des systèmes à mesures asynchrones ainsi qu'une adaptation du filtre de Kalman grand-gain et sa preuve de convergence (cf. [32]). Cette démonstration n'est possible qu'à la condition d'avoir prouvé qu'une certaine matrice intervenant dans les équations de l'algorithme est bornée. Cette étude fait l'objet de la Section II.2. Pour finir, la Section II.3 propose une version du filtre de Kalman grand-gain continu-discret asynchrone pour des systèmes linéaires et donne une brève démonstration de sa convergence (cf. [33]).

II.1 Systèmes non linéaires

II.1.1 Position du problème

Considérons un système continu multi-sorties, non-linéaire et observable sous la forme normale d'observabilité suivante¹ :

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = A(u(\tau))x(\tau) + b(x(\tau), u(\tau)) & \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(\tau) = C(\tau)x(\tau) \end{cases} \quad (\Sigma_c)$$

La variable d'état $x(\tau)$ est définie dans un ensemble compact \mathcal{X} de \mathbb{R}^n , la sortie $y(\tau)$ est définie dans \mathbb{R}^{n_y} et le vecteur $u(\tau)$ appartient à $\mathcal{U}_{adm} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ et est borné pour tous temps. La variable d'état est décomposée en n_y sous-vecteurs de la manière suivante :

$$x(\tau) = \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ \vdots \\ x_{n_y}(\tau) \end{pmatrix}$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, n_y\}$, $x_i(\tau)$ est dans le sous ensemble compact $\mathcal{X}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$. Les entiers n_i , $i \in \{1, \dots, n_y\}$ sont tels que la somme de tous les n_i vaut n , la dimension de l'état $x(t)$ du système (Σ_c) . Chaque sous-vecteurs $x_i(\tau)$ est associé à la $i^{\text{ème}}$ sortie $y^i(\tau)$ et s'écrit :

$$x_i(\tau) = \begin{pmatrix} x_i^1(\tau) \\ \vdots \\ x_i^{n_i}(\tau) \end{pmatrix}$$

1. Afin d'alléger les notations, nous avons fait le choix de nous affranchir de certaines dépendances en temps. Cependant, $A(u(\tau))$ et $b(x(\tau), u(\tau))$ pourraient également s'écrire sous la forme de $A(u(\tau), \tau)$ et $b(x(\tau), u(\tau), \tau)$.

La dynamique des $x_i(\tau)$ est donnée par le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(\tau) = A_i(u(\tau))x_i(\tau) + b_i(x(\tau), u(\tau)) \\ y^i(\tau) = C^i(u(\tau))x_i(\tau) \end{cases}$$

- $A_i(u)$ et $C^i(u)$ sont, respectivement, des matrices de dimensions $(n_i \times n_i)$ et $(1 \times n_i)$ de la forme :

$$A_i(u) = \begin{pmatrix} 0 & a_i^2(u) & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_i^{n_i}(u) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } C^i(u) = (a_i^1(u) \ 0 \ \cdots \ 0),$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, n_y\}$ et $j \in \{1, \dots, n_i\}$, $u \in \mathcal{U}_{adm}$, $0 < a_m < |a_i^j(u)| < a_M$. De plus, nous supposons que les éléments de la matrice C^i sont différentiables au moins une fois et ont leur dérivée bornée dans le temps².

- $b_i(x, u)$ est un champ vectoriel à support compact, dont les éléments appartiennent à C^1 et dont le dernier élément peut dépendre de la totalité de l'état de (Σ_c) :

$$b_i(x, u) = \begin{pmatrix} b_i^1(x_i^1, u) \\ b_i^2(x_i^1, x_i^2, u) \\ \vdots \\ b_i^{n_i-1}(x_i^1, \dots, x_i^{n_i-1}, u) \\ b_i^{n_i}(x, u) \end{pmatrix}$$

Nous supposons que, pour tout i , $D_x b_i(x, u)$, la matrice Jacobienne de $b_i(x, u)$, calculée par rapport à x , est majorée par $L_b > 0$. Par conséquent, $b_i(x, u)$ est Lipschitzienne par rapport à x (uniformément par rapport à u) : $\|b_i(x_i(t), u) - b_i(\tilde{x}_i(t), u)\| \leq L_b \|x_i(t) - \tilde{x}_i(t)\|$.

2. Bien que restrictive, cette condition est nécessaire afin de pouvoir appliquer le lemme 29 à une matrice C variant en temps.

Pour finir, la dynamique globale du système (Σ_c) est donnée par

$$A(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n_y} \end{pmatrix},$$

$$b(x, u) = \begin{pmatrix} b_1(x, u) \\ \vdots \\ b_{n_y}(x, u) \end{pmatrix},$$

$$\text{et } C(u) = \text{diag}[C^1, \dots, C^{n_y}].$$

Nous associons à (Σ_c) le système continu-discret asynchrone suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = A(u(\tau))x(\tau) + b(x(\tau), u(\tau)) & \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(\tau_k) = C_{\sigma_k} x(\tau_k) \end{cases} \quad (\Sigma_{cda})$$

Nous entendons par continu-discret que l'état du système (Σ_{cda}) dépend continûment du temps tout comme l'état du système (Σ_c) , mais que le vecteur de sortie y est discret : les mesures ne sont pas disponibles pour tous les temps $t \in \mathbb{R}_+$ mais pour certains τ_k appartenant à une subdivision du temps. De plus, ces mesures sont asynchrones, c'est à dire que pour des sorties issues de plusieurs capteurs physiques, ces sorties n'apparaissent pas forcément toutes au même instant et leur échantillonnage n'est pas uniforme.

Afin de généraliser au mieux les résultats, le caractère asynchrone des mesures ne sera pas modélisé par rapport à chacune des sorties mais nous regrouperons ensemble les sorties toujours disponibles au même instant.

1. Désignons par *capteur* un sous-ensemble non vide $s_i \subset \{1, \dots, n_y\}$. Nous associons à chaque capteur s_i un vecteur $y^{(s_i)}(\tau) = \{y^j(\tau) : j \in s_i\}$. Nous notons n_s le nombre de capteurs, avec $0 < n_s \leq n_y$ ³. Tout au long de ce chapitre, nous supposons que l'ensemble de tous les capteurs de (Σ_{cda}) forme une partition de l'ensemble $\{1, \dots, n_y\}$. Nous admettrons de plus qu'un capteur est constitué d'un ensemble successif d'indices, moyennant une ré-indexation des sorties et des variables d'état.

3. Une extension possible de cette étude serait de considérer le cas où certaines mesures seraient redondantes, c'est-à-dire où plusieurs capteurs fourniraient une même mesure dans des conditions distinctes.

La matrice de sortie correspondant au capteur s_i sera notée $C^{(s_i)}$, de dimensions $(|s_i| \times n)$ et définie comme suit :

$$y^{(s_i)}(\tau) = C^{(s_i)}x(\tau).$$

2. Une subdivision du temps $\{s_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ est associée à chaque capteur s_i , et la subdivision de temps globale $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}} := \bigcup_{i=1}^{n_s} \{s_l^{(i)}\}_{l \in \mathbb{N}}$$

où les éléments communs à plusieurs subdivisions $\{s_l^{(i)}\}$ ne sont pris en compte qu'une seule fois.

3. Par construction, pour chaque τ_k , il existe au moins un capteur s_i tel que $s_l^{(i)} = \tau_k$ pour un certain indice l . Soit σ_k l'ensemble de ces indices :

$$\sigma_k = \left\{ i \in \{1, \dots, n_s\} \mid \exists l \in \mathbb{N} \text{ tel que } s_l^{(i)} = \tau_k \right\}.$$

Il est probable que l'indice l mentionné plus haut diffère de l'indice k , et ne soit pas le même d'un capteur à l'autre. Aussi, pour tout $i \in \sigma_k$, $l_k^{(i)}$ représente l'indice $l \in \mathbb{N}$ tel que $s_l^{(i)} = \tau_k$.

La matrice C_{σ_k} associée à l'ensemble σ_k est la matrice de dimensions $(\sum_{i \in \sigma_k} |s_i| \times n)$ qui correspond aux sorties disponibles à l'instant τ_k et construite à partir des matrices $C^{(s_i)}$, $i \in \sigma_k$:

$$C_{\sigma_k} = \begin{pmatrix} \vdots \\ C^{(s_{i_1})} \\ \vdots \end{pmatrix}_{i \in \sigma_k}.$$

Par conséquent, le vecteur de sortie disponible à l'instant τ_k est défini par :

$$y_k = y(\tau_k) = C_{\sigma_k}x(\tau_k).$$

II.1.2 Définition du filtre de Kalman grand gain asynchrone

Le filtre de Kalman grand-gain continu-discret asynchrone est défini en deux parties :

1. deux équations de prédiction pour $\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k[$, $k \in \mathbb{N}^*$, avec pour valeurs initiales $z_{k-1}^{(+)}$ et $S_{k-1}^{(+)}$;
2. deux équations de correction à l'instant τ_k .

Notations :

- $z(\tau)$ est l'état estimé pour tout $\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k[$;
- $z_k^{(-)}$ est l'état estimé à l'instant τ_k , à l'issue d'une étape de prédiction et avant une étape de correction;
- $z_k^{(+)}$ est l'état estimé à l'instant τ_k , à l'issue d'une étape de correction. Ainsi, $z_k^{(+)}$ est l'état estimé initial pour le nouvel intervalle de prédiction $[\tau_k, \tau_{k+1}[$.

Équations de prédiction

$$\begin{cases} \dot{z}(\tau) = A(u)z(\tau) + b(z, u) \\ \dot{S}(\tau) = -(A(u) + D_x b(z, u))' S(\tau) - S(\tau)(A(u) + D_x b(z, u)) - (SQ_\theta S)(\tau) \end{cases} \quad (\mathcal{O}_1)$$

Équations de correction

$$\begin{cases} z_k^{(+)} = z_k^{(-)} - S_k^{(+)-1} \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} (R_\theta^{(s_i)})^{-1} (C^{(s_i)} z_k^{(-)} - y_k^{(s_i)}) \left(s_{i_k}^{(i)} - s_{i_k}^{(i)-1} \right) \\ S_k^{(+)} = S_k^{(-)} + \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} (R_\theta^{(s_i)})^{-1} C^{(s_i)} \left(s_{i_k}^{(i)} - s_{i_k}^{(i)-1} \right) \end{cases} \quad (\mathcal{O}_2)$$

Les équations de prédiction (\mathcal{O}_1) ont pour objectif d'estimer l'état du système entre deux prises de mesures. La dynamique du système est prise en compte et fait intervenir une matrice Q_θ décrivant le bruit présent dans le système. A l'issue d'une prédiction, lorsque arrive une mesure, l'état estimé issu des équations (\mathcal{O}_1) est corrigé à l'aide des équations (\mathcal{O}_2). Ces équations font intervenir quant à elles une matrice $R_\theta^{(s_i)}$ contenant le bruit de mesure. A un instant τ_k donné, une correction est réalisée par rapport à chaque mesure $y_k^{(s_i)}$ disponible à cet instant et l'erreur entre chaque mesure et son estimation est pondérée par le temps écoulé depuis la dernière fois que la sortie en question a été mesurée.

Les matrices Q_θ et $R_\theta^{(s_i)}$ peuvent dépendre du temps⁴ à condition que les contraintes (II.1)-(II.2) soient vérifiées et elles sont de la forme

$$Q_\theta = \theta \Delta^{-1} Q \Delta^{-1} \quad \text{et} \quad R_\theta^{(s_i)} = \frac{1}{\theta} \delta^{(s_i)} R^{(s_i)} \delta^{(s_i)}$$

4. Cette dépendance en temps n'est pas écrite de manière explicite dans les équations de l'observateur afin d'alléger les notations.

où :

- Q et $R^{(s_i)}$ sont des matrices symétriques définies positives, de dimensions respectives $(n \times n)$ et $(|s_i| \times |s_i|)$ et définies dans les sous-ensembles compacts suivants

$$\underline{q} \text{ Id} \leq Q \leq \bar{q} \text{ Id} \quad \text{avec} \quad 0 < \underline{q} < \bar{q} \quad (\text{II.1})$$

$$\underline{r}_i \text{ Id} \leq R^{(s_i)} \leq \bar{r}_i \text{ Id} \quad \text{avec} \quad 0 < \underline{r}_i < \bar{r}_i \quad (\text{II.2})$$

- $\delta^{(s_i)}$ et Δ sont deux matrices diagonales construites en posant tout d'abord la quantité $n^* = \max(n_1, n_2, \dots, n_{n_y})$ et un scalaire fixé $\theta \geq 1$ puis en définissant :

$$\Delta = \text{diag}[\Delta_1, \dots, \Delta_{n_y}] \quad \text{avec} \quad \Delta_i = \text{diag}\left[\frac{1}{\theta^{n^*-n_i}}, \dots, \frac{1}{\theta^{n^*-1}}\right]$$

$$\text{et} \quad \delta^{(s_i)} = \text{diag}[\{\theta^{n^*-n_j} : j \in (s_i)\}].$$

Pour finir,

$$R = \text{diag}[R^{(s_1)}, \dots, R^{(s_{n_s})}]$$

et

$$R_\theta = \text{diag}[R_\theta^{(s_1)}, \dots, R_\theta^{(s_{n_s})}],$$

ou bien, de manière équivalente :

$$R_\theta = \frac{1}{\theta} \delta R \delta$$

avec $\delta = \text{diag}[\delta^{(s_1)}, \dots, \delta^{(s_{n_s})}]$.

Remarque 1.

Bien que les définitions de Δ et δ puissent paraître inutilement complexes, elles sont nécessaires afin de simplifier les calculs à venir, et permettent notamment de conserver la constante de Lipschitz du champ vectoriel $b(x, u)$, en dépit du changement de variable réalisé au début de la preuve de convergence (cf Section II.1.3).

La valeur initiale de l'observateur est formée de l'état initial estimé $z(0) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ et de $S(0)$ une matrice symétrique définie positive réelle de dimensions $(n \times n)$.

Nous proposons le théorème de convergence suivant :

Théorème 17.

Considérons le système continu-discret à mesures asynchrones (Σ_{cda}) construit à partir d'un système continu non-linéaire observable (Σ_c) et vérifiant les hypothèses énoncées ci-dessus. Soient $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ et $y(\tau) \in \mathbb{R}^{n_y}$ les vecteurs d'état et de sortie de (Σ_{cda}) . Soit $n_s \geq 1$ un entier tel que $y(\tau)$ soit composé de n_s sous-vecteurs. Pour un indice $i \in \{1, \dots, n_s\}$ donné, la dimension du sous-vecteur de $y(\tau)$ correspondant est

notée n_i et une subdivision du temps, éventuellement non-uniforme, notée $\{s_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ indique lorsqu'une mesure est disponible. Pour chaque i , l'élément $\delta t^{(i)}$ dénote le pas d'échantillonnage maximal de la subdivision du temps $\{s_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Le filtre de Kalman étendu grand-gain asynchrone adapté au système (Σ_{cda}) est donné par les équations (\mathcal{O}_1) - (\mathcal{O}_2) et son état est noté $z(\tau) \in \mathbb{R}^n$.

Alors, pour tout $T > 0$, il existe des constantes positives $K_1 > 0, K_2 > 0, K_3 > 0, \theta_0 > 1$ et $\mu_i > 0$, pour $i = 1, \dots, n_s$, tels que pour tout $\theta > \theta_0$ et $\theta \delta t^{(i)} < \mu_i$, l'inégalité suivante est vraie pour tout $\tau \geq \frac{T}{\theta}$:

$$\|z(\tau) - x(\tau)\|^2 \leq \left\| z\left(\frac{T}{\theta}\right) - x\left(\frac{T}{\theta}\right) \right\|^2 \theta^{2(n^*-1)} K_1 e^{(K_2 - \theta K_3)\left(\tau - \frac{T}{\theta}\right)} \quad (\text{II.3})$$

avec $n^* = \max_{i \in \{1, \dots, n_s\}} \{n_i\}$.

II.1.3 Preuve de convergence

Cette section est dédiée à la preuve de convergence de l'observateur (\mathcal{O}_1) - (\mathcal{O}_2) . Elle repose sur l'analyse de la dynamique de l'erreur $\tilde{e}(\tau) = z(\tau) - x(\tau)$ commise sur l'estimation et est divisée en deux parties : la préparation de la preuve et la convergence exponentielle.

Préparation de la preuve

Considérons tout d'abord le changement de variables suivant :

- $\tilde{x} = \Delta x$,
- $\tilde{z} = \Delta z$,
- $\tilde{e} = \Delta e$.

Nous définissons également

- $\tilde{b}(\cdot, u) = \Delta b(\Delta^{-1} \cdot, u)$,
- $D_x \tilde{b}(\cdot, u) = \Delta D_x b(\Delta^{-1} \cdot, u) \Delta^{-1}$,
- $\tilde{S} = \Delta^{-1} S \Delta^{-1}$.

Lemme 18.

[4]

1. Le champ vectoriel $\tilde{b}(\tilde{x}, u)$ a la même constante de Lipschitz que $b(x, u)$.
2. La matrice Jacobienne $D_x \tilde{b}(\tilde{x}, u)$ a la même borne que $D_x b(x, u)$.
3. Nous avons également les relations suivantes :

- $\Delta A = \theta A \Delta$, et $A \Delta^{-1} = \theta \Delta^{-1} A$;
- $\delta^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \Delta^{-1} = C^{(s_i)}$;
- $\Delta^{-1} C^{(s_i)'} R_{\theta}^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)'} \Delta^{-1} = \theta C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)}$.

Ce changement de variables nous permet de nous affranchir de la dépendance en θ des matrices $R_{\theta}^{(s_i)}$ et Q_{θ} . Grâce aux propriétés mentionnées dans le Lemme 18, les équations (\mathcal{O}_1) - (\mathcal{O}_2) de l'observateur deviennent :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}(\tau) = \theta A(u) \tilde{z}(\tau) + \tilde{b}(\tilde{z}, u) \\ \dot{\tilde{S}}(\tau) = -(\theta A(u) + D_x \tilde{b}(\tilde{z}, u))' \tilde{S} - \tilde{S} (\theta A(u) + D_x \tilde{b}(\tilde{z}, u)) - \theta \tilde{S} Q \tilde{S} \end{cases} \quad (\tilde{\mathcal{O}}_1)$$

$$\begin{cases} \tilde{z}_k^{(+)} = \tilde{z}_k^{(-)} \\ \quad - \theta \tilde{S}_k^{(+)^{-1}} \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} (\tilde{z}_k^{(-)} - \tilde{x}(\tau_k)) \left(s_{l_k^{(i)}}^{(i)} - s_{l_k^{(i)}-1}^{(i)} \right) \\ \tilde{S}_k^{(+)} = \tilde{S}_k^{(-)} + \theta \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \left(s_{l_k^{(i)}}^{(i)} - s_{l_k^{(i)}-1}^{(i)} \right) \end{cases} \quad (\tilde{\mathcal{O}}_2)$$

Afin de mener la preuve à bien, nous souhaitons borner tous les éléments de $\theta A(u) + D_x \tilde{b}(\tilde{z}, u)$, indépendamment de θ . Cela est vérifié pour la borne inférieure puisque $\theta \geq 1$, mais la borne supérieure ne peut être obtenue aussi facilement. Nous répondons à cette question grâce à une reparamétrisation en temps.

Soit $\bar{\tau}$ tel que $\bar{\tau} = \theta \tau$. Cela entraîne la modification suivante sur les subdivisions $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{s_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n_s\}$: $\bar{\tau}_k = \theta \tau_k$, et $\bar{s}_k^{(i)} = \theta s_k^{(i)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, nous notons $\bar{\tilde{z}}(\bar{\tau}) = \tilde{z}(\tau)$.

L'observateur se réécrit à présent sous la forme de deux systèmes d'équations $(\bar{\mathcal{O}}_1)$ - $(\bar{\mathcal{O}}_2)$:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\tilde{z}}(\bar{\tau})}{d\bar{\tau}} = A(\bar{u}) \bar{\tilde{z}}(\bar{\tau}) + \frac{1}{\theta} \tilde{b}(\bar{\tilde{z}}, \bar{u}) \\ \frac{d\bar{\tilde{S}}(\bar{\tau})}{d\bar{\tau}} = -\left(A(\bar{u}) + \frac{1}{\theta} D_x \tilde{b}(\bar{\tilde{z}}, \bar{u}) \right)' \bar{\tilde{S}} - \bar{\tilde{S}} \left(A(\bar{u}) + \frac{1}{\theta} D_x \tilde{b}(\bar{\tilde{z}}, \bar{u}) \right) - \bar{\tilde{S}} Q \bar{\tilde{S}} \end{cases} \quad (\bar{\mathcal{O}}_1)$$

$$\begin{cases} \bar{\tilde{z}}_k^{(+)} = \bar{\tilde{z}}_k^{(-)} - \bar{\tilde{S}}_k^{(+)^{-1}} \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} (\bar{\tilde{z}}_k^{(-)} - \bar{x}(\bar{\tau}_k)) \left(\bar{s}_{l_k^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)}-1}^{(i)} \right) \\ \bar{\tilde{S}}_k^{(+)} = \bar{\tilde{S}}_k^{(-)} + \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)}-1}^{(i)} \right) \end{cases} \quad (\bar{\mathcal{O}}_2)$$

Convergence exponentielle

La suite de la preuve repose sur l'étude d'une fonction de Lyapunov.

Définition 19.

Soit x_e un point d'équilibre du système (Σ_c) . Une fonction de Lyapunov pour (Σ_c) dans un voisinage de x_e est une fonction V définie dans un voisinage de x_e telle que

- $V(x) > 0$ pour tout $x \neq x_e$
- $V(x_e) = 0$
- V est une fonction différentiable et ses dérivées sont continues et telles que $\dot{V} \leq 0$.

Celle que nous retenons ici est $V(\bar{\varepsilon}(\bar{\tau})) = (\bar{\varepsilon}' \bar{S} \bar{\varepsilon})(\bar{\tau})$. A condition que $\bar{S}(\bar{\tau})$ reste symétrique définie positive pour tout $\tau \in \mathbb{R}_+$ alors $V(\bar{\varepsilon}) > 0$ pour tout $\bar{\varepsilon} \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Aussi, après avoir énoncé un théorème (il sera prouvé dans la section II.2) assurant la stabilité de la matrice \bar{S} , nous calculerons la dérivée temporelle de $V(\bar{\varepsilon})$ afin de démontrer la convergence exponentielle de l'observateur proposé.

Théorème 20.

Soit l'équation de Riccati de l'observateur continu-discret asynchrone (\bar{O}_1) - (\bar{O}_2) , c'est à dire le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{d\bar{S}(\bar{\tau})}{d\bar{\tau}} = -\mathcal{A}'\bar{S} - \bar{S}\mathcal{A} - \bar{S}Q\bar{S} \\ \bar{S}_k^{(+)} = \bar{S}_k^{(-)} + \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)}-1}^{(i)} \right) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

avec $\mathcal{A} = A(\bar{u}) + \frac{1}{\theta} D_x \tilde{b}(\bar{z}, \bar{u})$ et (\mathcal{A}, C) , une paire observable de matrices dépendant du temps. Nous supposons que tous les éléments des matrices \mathcal{A} et C appartiennent à $L^\infty([0, T], \mathbb{R})$, et sont uniformément bornés par un scalaire $B > 0$ par rapport à la norme L^∞ .

De plus, tous les éléments de C sont différentiables au moins une fois et leur dérivée est bornée dans le temps. Alors, $\bar{S}(\bar{\tau})$ est bien définie et est symétrique définie positive pour tout temps. En outre, pour tout $\bar{T} > 0$, il existe des constantes $\mu_i > 0$, $i \in \{1, \dots, n_s\}$ et $0 < \alpha < \beta$, telles que, pour toutes subdivisions $\{\bar{s}_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ avec $(\bar{s}_k^{(i)} - \bar{s}_{k-1}^{(i)}) \leq \mu_i$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\alpha Id \leq \bar{S}(\bar{\tau}) \leq \beta Id \quad \text{pour tout } \bar{\tau} \geq \bar{T}$$

Les constantes α et β sont indépendantes de θ ainsi que des subdivisions de temps.

Démonstration. La preuve est détaillée dans la section II.2 de ce chapitre. □

Reprenons à présent l'étude de convergence de l'observateur, en calculant $\frac{d}{d\bar{\tau}}V(\bar{\varepsilon})$:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{d\bar{\tau}}(\bar{\tau}) = \frac{d}{d\bar{\tau}}(\bar{z} - \bar{x})(\bar{\tau}) = A(\bar{u})\bar{\varepsilon} + \frac{1}{\theta} (b(\bar{z}, \bar{u}) - b(\bar{x}, \bar{u})) \quad (\text{II.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\bar{\tau}}(\bar{\varepsilon}) &= \frac{d(\bar{\varepsilon}'\bar{S}\bar{\varepsilon})}{d\bar{\tau}}(\bar{\tau}) \\ &= \left[A(\bar{\tau})\bar{\varepsilon}(\bar{\tau}) + \frac{1}{\theta}(\tilde{b}(\bar{z}, u) - \tilde{b}(\bar{x}, u)) \right]' \bar{S}\bar{\varepsilon}(\bar{\tau}) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

$$\begin{aligned} &+ \bar{\varepsilon}'(\bar{\tau}) \left[-(A(u) + \frac{1}{\theta}\tilde{D}_b(\bar{z}, u))'\bar{S}(\bar{\tau}) - \bar{S}(\bar{\tau})(A(u) + \frac{1}{\theta}\tilde{D}_b(\bar{z}, u)) - (\bar{S}Q\bar{S})(\bar{\tau}) \right] \bar{\varepsilon}(\bar{\tau}) \\ &+ \bar{\varepsilon}'(\bar{\tau})\bar{S}(\bar{\tau}) \left[A(\bar{\tau})\bar{\varepsilon}(\bar{\tau}) + \frac{1}{\theta}(\tilde{b}(\bar{z}, u) - \tilde{b}(\bar{x}, u)) \right] \\ &= \frac{2}{\theta} (\bar{\varepsilon}'\bar{S}) (\tilde{b}(\bar{z}, \bar{u}) - \tilde{b}(\bar{x}, \bar{u}) - D_x \tilde{b}(\bar{z}, \bar{u})\bar{\varepsilon}) - (\bar{\varepsilon}'\bar{S}Q\bar{S}\bar{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Déterminons ensuite l'expression de $V_k^{(+)}$, i.e. $V(\bar{\tau}_k)$ après une étape de prédiction :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_k^{(+)} &= \bar{z}_k^{(+)} - \bar{x}(\bar{\tau}_k) \\ &= \bar{z}_k(-) - \bar{S}_k(+)^{-1} \sum_{i \in \sigma_k} \bar{C}_k^{(s_i)'} (\bar{R}_k^{(s_i)})^{-1} \bar{C}_k^{(s_i)} (\bar{z}_k(-) - \bar{x}(\bar{\tau}_k)) \left(\bar{s}_{l_k}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right) - \bar{x}(\bar{\tau}_k) \\ &= \left[Id - \bar{S}_k^{(+)-1} \sum_{i \in \sigma_k} \bar{C}_k^{(s_i)'} \bar{R}_k^{(s_i)-1} \bar{C}_k^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right) \right] \bar{\varepsilon}_k^{(-)} \end{aligned}$$

Ainsi, à l'instant $\bar{\tau}_k$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_k^{(+)} &= (\bar{\varepsilon}'\bar{S}\bar{\varepsilon})_k^{(+)} \\ &= \bar{\varepsilon}_k^{(-)'} \left[Id - \bar{S}_k^{(+)-1} \sum_{i \in \sigma_k} \bar{C}_k^{(s_i)'} (\bar{R}_k^{(s_i)})^{-1} \bar{C}_k^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right) \right]' \bar{S}_k^{(+)} \\ &\quad \times \left[Id - \bar{S}_k^{(+)-1} \sum_{i \in \sigma_k} \bar{C}_k^{(s_i)'} (\bar{R}_k^{(s_i)})^{-1} \bar{C}_k^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right) \right] \bar{\varepsilon}_k^{(-)} \\ &= \bar{\varepsilon}_k^{(-)'} \left[\bar{S}_k^{(+)} - \sum_{i \in \sigma_k} \bar{C}_k^{(s_i)'} (\bar{R}_k^{(s_i)})^{-1} \bar{C}_k^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i \in \sigma_k} \bar{C}_k^{(s_i)'} (\bar{R}_k^{(s_i)})^{-1} \bar{C}_k^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right) + \sum_{i \in \sigma_k} \bar{C}_k^{(s_i)'} (\bar{R}_k^{(s_i)})^{-1} \bar{C}_k^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right) \bar{S}_k^{(+)-1} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{i \in \sigma_k} \bar{C}_k^{(s_i)'} (\bar{R}_k^{(s_i)})^{-1} \bar{C}_k^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right) \right] \bar{\varepsilon}_k^{(-)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\varepsilon}'_k(-) [\bar{S}_k(+)-2(\bar{S}_k(+)-\bar{S}_k(-))+(\bar{S}_k(+)-\bar{S}_k(-))\bar{S}_k(+)^{-1}(\bar{S}_k(+)-\bar{S}_k(-))] \tilde{\varepsilon}_k(-) \quad (\text{II.8}) \\
&= \tilde{\varepsilon}'_k(-) [\bar{S}_k(-)\bar{S}_k(+)^{-1}\bar{S}_k(-)] \tilde{\varepsilon}_k(-) \\
&= \tilde{\varepsilon}'_k(-) [\bar{S}_k(-)^{-1}\bar{S}_k(+)\bar{S}_k(-)^{-1}]^{-1} \tilde{\tilde{\varepsilon}}_k(-)
\end{aligned}$$

La seconde équation du système ($\tilde{\mathcal{O}}_2$) nous permet d'écrire que :

$$\begin{aligned}
\bar{S}_k^{(-)^{-1}}\bar{S}_k^{(+)}\bar{S}_k^{(-)^{-1}} &= \bar{S}_k^{(-)^{-1}} \left[\bar{S}_k^{(-)} + \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right) \right] \bar{S}_k^{(-)^{-1}} \\
&= \bar{S}_k^{(-)^{-1}} + \underbrace{\bar{S}_k^{(-)^{-1}} \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right)}_{(*)} \bar{S}_k^{(-)^{-1}}
\end{aligned}$$

Afin de pouvoir employer le lemme d'inversion matricielle 31 rappelé dans l'Annexe A, il est nécessaire d'exprimer la somme de matrices désignée par l'expression (*) comme un produit de matrices. Tout d'abord, notons :

$$R_{\sigma_k} = \text{diag}[\{R^{(s_i)} : i \in \sigma_k\}] \text{ et } I_{\sigma_k} = \text{diag}\left[\left\{\left(\bar{s}_{l_k^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)}\right) Id : i \in \sigma_k\right\}\right]$$

La somme intervenant dans (*) peut s'exprimer sous forme de matrices par bloc comme ceci :

$$\sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_k^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right) = C'_{\sigma_k} R_{\sigma_k}^{-1} I_{\sigma_k} C_{\sigma_k}$$

Par définition, I_{σ_k} est inversible, et en faisant appel⁵ au Lemme 31 :

$$\begin{aligned}
\left[\bar{S}_k^{(-)^{-1}} \bar{S}_k^{(+)} \bar{S}_k^{(-)^{-1}} \right]^{-1} &= \left[\bar{S}_k^{(-)^{-1}} + \bar{S}_k^{(-)^{-1}} C'_{\sigma_k} R_{\sigma_k}^{-1} I_{\sigma_k} C_{\sigma_k} \bar{S}_k^{(-)^{-1}} \right]^{-1} \\
&= \bar{S}_k^{(-)} - C'_{\sigma_k} \left(R_{\sigma_k} I_{\sigma_k}^{-1} + C_{\sigma_k} \bar{S}_k^{(-)^{-1}} C'_{\sigma_k} \right)^{-1} C_{\sigma_k}
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc le système suivant, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \frac{dV}{d\bar{\tau}}(\bar{\varepsilon}) = \frac{2}{\theta}(\bar{\varepsilon}'\bar{S})[\tilde{b}(\bar{z}, \bar{u}) - \tilde{b}(\bar{x}, \bar{u}) - D_x \tilde{b}(\bar{z}, \bar{u})\bar{\varepsilon}] - (\bar{\varepsilon}'\bar{S}Q\bar{S}\bar{\varepsilon}) & \text{pour } \bar{\tau} \in [\bar{\tau}_{k-1}, \bar{\tau}_k[\\ V_k^{(+)} = (\bar{\varepsilon}'\bar{S}\bar{\varepsilon})_k^{(-)} - \bar{\varepsilon}_k^{(-)'} C'_{\sigma_k} \left(R_{\sigma_k} I_{\sigma_k}^{-1} + C_{\sigma_k} \bar{S}_k^{(-)^{-1}} C'_{\sigma_k} \right)^{-1} C_{\sigma_k} \bar{\varepsilon}_k^{(-)} & \text{pour } \bar{\tau} = \bar{\tau}_k \end{cases}$$

5. Notons que les matrices R_{σ_k} et $I_{\sigma_k}^{-1}$ commutent. En effet, par définition, à chaque bloc de la matrice R_{σ_k} correspond un bloc de la matrice $I_{\sigma_k}^{-1}$ composé du produit d'une matrice identité avec un paramètre constant.

Puisque $\tilde{b}(\cdot, \bar{u})$ est Lipschitzienne dans son premier argument (uniformément par rapport à \bar{u}) et que $D_x \tilde{b}(\cdot, \bar{u})$ est supérieurement bornée :

$$\begin{aligned} \|\tilde{b}(\bar{z}, \bar{u}) - \tilde{b}(\bar{x}, \bar{u}) - D_x \tilde{b}(\bar{z}, \bar{u})\bar{\varepsilon}\| &\leq L_b \|\bar{z} - \bar{x}\| + L_b \|\bar{\varepsilon}\| \\ &= 2L_b \|\bar{\varepsilon}\| \end{aligned}$$

Le Théorème 20 garantissant que \bar{S} est bornée pour des temps supérieurs à un certain $\bar{T} > 0$ fixé, ainsi que les contraintes sur la matrice Q énoncée en (II.1), entraînent alors :

$$\frac{dV}{d\bar{\tau}}(\bar{\varepsilon}) \leq \left(\frac{4}{\theta} \frac{\beta}{\alpha} L_b - \alpha \underline{q} \right) (\bar{\varepsilon}' \bar{S} \bar{\varepsilon}).$$

Puisque $\bar{S}(\bar{\tau})$ est définie positive, la dérivée de $V(\bar{\varepsilon})$ est négative lorsque θ est choisi tel que $\frac{4}{\theta} \frac{\beta}{\alpha} L_b - \alpha \underline{q} < 0$. De plus, il est aisé de démontrer que $V_k^{(+)} \leq V_k^{(-)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet :

$$V_k^{(+)} = V_k^{(-)} - \bar{\varepsilon}_k^{(-)'} \underbrace{C_{\sigma_k}' \left(R_{\sigma_k} I_{\sigma_k}^{-1} + C_{\sigma_k} \bar{S}_k^{(-) -1} C_{\sigma_k}' \right)^{-1} C_{\sigma_k}}_{(\diamond)} \bar{\varepsilon}_k^{(-)}$$

Puisque les matrices $\bar{S}(\bar{\tau})$ et $R_{\sigma_k} I_{\sigma_k}^{-1}$ sont symétriques définies positives pour tout temps, la matrice (\diamond) est au moins semi-définie positive et :

$$V_k^{(+)} = (\bar{\varepsilon}' \bar{S} \bar{\varepsilon})_k^{(+)} \leq (\bar{\varepsilon}' \bar{S} \bar{\varepsilon})_k^{(-)} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \quad (\text{II.9})$$

Ceci prouve la convergence asymptotique de l'observateur. En outre, cette convergence est exponentielle. En effet, soit $\bar{\tau}_k^* = \min_{k \in \mathbb{N}} \{ \bar{\tau}_k : \bar{\tau}_k > \bar{T} \}$, alors pour $\bar{\tau} \in]\bar{T}, \bar{\tau}_k^* [$:

$$\begin{aligned} (\bar{\varepsilon}' \bar{S} \bar{\varepsilon})(\bar{\tau}) &= (\bar{\varepsilon}' \bar{S} \bar{\varepsilon})(\bar{T}) + \left(\frac{4}{\theta} \frac{\beta}{\alpha} L_b - \alpha \underline{q} \right) \int_{\bar{T}}^{\bar{\tau}} (\bar{\varepsilon}' \bar{S} \bar{\varepsilon})(v) dv \\ &\leq (\bar{\varepsilon}' \bar{S} \bar{\varepsilon})(\bar{T}) e^{(L_b \frac{4}{\theta} \frac{\beta}{\alpha} - \alpha \underline{q})(\bar{\tau} - \bar{T})} \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

où (II.10) découle du Lemme de Grönwall.

A l'instant $\bar{\tau} \in [\bar{\tau}_k, \bar{\tau}_{k+1}[$, l'inégalité (II.10) est vraie en remplaçant \bar{T} par $\bar{\tau}_k$. Grâce à la relation (II.9), nous montrons par itération que (II.10) est vraie pour tout $\bar{\tau} > \bar{T}$, indépendamment des subdivisions

$$\left\{ \bar{s}_k^{(i)} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left\{ \bar{\tau}_k^{(i)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Puisque $\bar{\varepsilon}(\bar{\tau}) = \tilde{\varepsilon}(\tau)$, l'inégalité (II.10) devient :

$$\|\tilde{\varepsilon}(\tau)\|^2 \leq \frac{\beta}{\alpha} \left\| \tilde{\varepsilon} \left(\frac{\bar{T}}{\theta} \right) \right\|^2 e^{(4L_b \frac{\beta}{\alpha} - \theta \alpha \underline{q})(\tau - \frac{\bar{T}}{\theta})} \quad \text{pour tout } \tau > \frac{\bar{T}}{\theta}$$

Pour finir, en utilisant la définition de $\varepsilon(\tau) = \Delta^{-1} \tilde{\varepsilon}(\tau)$, et puisque $\|\Delta^{-1}\| \leq \theta^{n^*-1}$ et $\|\Delta\| \leq 1$, nous concluons que :

$$\|\varepsilon(\tau)\|^2 \leq \theta^{2(n^*-1)} \frac{\beta}{\alpha} \left\| \tilde{\varepsilon} \left(\frac{\bar{T}}{\theta} \right) \right\|^2 e^{(4L_b \frac{\beta}{\alpha} - \theta \alpha \underline{q})(\tau - \frac{\bar{T}}{\theta})} \quad \text{pour tout } \tau > \frac{\bar{T}}{\theta}$$

II.2 Borne de la solution de l'équation de Riccati

La preuve du théorème 20 se divise en deux parties.

- Dans un premier temps, pour un $T^* > 0$ donné, nous prouvons l'existence d'une borne supérieure pour les temps supérieurs à T^* . Ici, le principal argument de preuve repose sur la régularité de \bar{S} , et la borne dépend du pas maximal de la subdivision de temps $\{\bar{\tau}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ quelles que soient les subdivisions sous-jacentes $\{\bar{s}_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$.
- Dans un second temps, nous prouvons l'existence d'une borne inférieure pour des temps plus grands que $T_* > T^*$. Dans cette seconde partie, le résultat découle de l'observabilité du système continu (Σ_c) à partir duquel (Σ_{cda}) est construit et nécessite que les subdivisions $\{\bar{s}_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ aient un pas de temps suffisamment petit.

La valeur \bar{T} qui apparait dans le Theorème 20 est simplement $\bar{T} = T_*$.

Dans un premier temps, nous supposons qu'il existe une solution définie positive $\bar{S}(\bar{\tau})$ sur un petit intervalle de temps, ce qui est assuré grâce au critère de Sylvester. Nous montrerons ensuite que cet intervalle peut en réalité être étendu à \mathbb{R}^+ .

II.2.1 Borne supérieure

Afin de prouver que $\bar{S}_k^{(+)}$ est supérieurement bornée pour des temps plus grands que T^* , rappelons que si \bar{S} est une matrice symétrique semi-définie positive, alors nous avons $\bar{S} \leq \text{Tr}(\bar{S})Id$.

Lemme 21.

[34].

Soit $\bar{S} : [0, T[\rightarrow S_n$ une solution de $\frac{d\bar{S}}{d\bar{\tau}} = -\mathcal{A}'\bar{S} - \bar{S}\mathcal{A} - \bar{S}Q\bar{S}$. Alors, pour presque tout $\bar{\tau} \in [0, T[$:

$$\frac{d}{d\bar{\tau}} Tr(\bar{S}) \leq -a(Tr(\bar{S}(\bar{\tau})))^2 + 2bTr(\bar{S}(\bar{\tau})) \quad \text{où} \quad \begin{cases} a = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{n} \\ b = \sup_{\bar{\tau}} Tr(\mathcal{A}'(\bar{\tau})\mathcal{A}(\bar{\tau}))^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Démonstration. D'après les propriétés de la trace —cf. Annexe A :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} Tr(\bar{S}(\tau)) &= Tr\left(\frac{d}{d\tau}\bar{S}(\tau)\right) \\ &= -Tr(\mathcal{A}'\bar{S}) - Tr(\bar{S}\mathcal{A}) - Tr(\bar{S}Q\bar{S}) \\ &\leq 2|Tr(\bar{S}\mathcal{A})| - Tr(\bar{S}Q\bar{S}) \\ &\leq 2\sqrt{Tr(\bar{S}'\bar{S})}\sqrt{Tr(\mathcal{A}'\mathcal{A})} - Tr(\bar{S}Q\bar{S}) \quad \text{par définition de la norme de Frobenius} \\ &\leq 2(Tr(\mathcal{A}'\mathcal{A}))^{1/2}(Tr(\bar{S})^2)^{1/2} - Tr(\bar{S}Q\bar{S}) \\ &\leq 2\sup_{\tau}(Tr(\mathcal{A}'\mathcal{A}))^{1/2}Tr(\bar{S}) - Tr(\bar{S}Q\bar{S}) \quad \text{car } \bar{S} \text{ est symétrique définie positive} \end{aligned}$$

Or, puisque \bar{S} est symétrique définie positive, $Tr(\bar{S}Q\bar{S}) \geq \frac{q}{n}Tr(\bar{S})^2$ avec $q = \min_{\|x\|=1} x'Qx = \lambda_{\min}(Q)$, la plus petite valeur propre de Q . Nous obtenons donc l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} Tr(\bar{S}(\tau)) &\leq 2\sup_{\tau}(Tr(\mathcal{A}'\mathcal{A}))^{1/2}Tr(\bar{S}) - \frac{q}{n}Tr(\bar{S})^2 \\ &\leq bTr(\bar{S}) - aTr(\bar{S})^2 \end{aligned}$$

avec $a = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{n}$ et $b = \sup_{\tau} Tr(\mathcal{A}'(\bar{\tau})\mathcal{A}(\bar{\tau}))^{\frac{1}{2}}$ □

Lemme 22 ([34]).

Soient a et b deux constantes positives. Soit $x : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^+$ (éventuellement $T = +\infty$) une fonction absolument continue satisfaisant pour presque tous $0 < \tau < T$, l'inégalité suivante :

$$\dot{x}(\tau) \leq -ax^2(\tau) + 2bx(\tau)$$

Les racines de $-aX^2 + 2bX$ sont $\frac{2b}{a}$ et 0. La solution $x(\tau)$ est telle que :

$$x(\tau) \leq \max\left\{x(0), \frac{2b}{a}\right\} \quad \text{pour tout } \tau \in [0, T[$$

De plus, si $x(0) > \frac{2b}{a}$ alors, pour tout $\tau \in]0, T[$, nous avons les deux inégalités suivantes :

$$x(\tau) \leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\tau} - 1} \quad (\text{II.11})$$

$$x(\tau) \leq \frac{2bx_0e^{2b\tau}}{ax_0(e^{2b\tau} - 1) + 2b} \quad (\text{II.12})$$

Démonstration. Supposons que $x(\tau) > \frac{2b}{a}$ et définissons l'ensemble $E = \{\tau \in [0, T] : x(\tau) > \frac{2b}{a}\} \neq \{\emptyset\}$. Soit $] \alpha, \beta[$, une composante connexe de E tel que $\alpha > 0$. Si $\beta = T$ alors $x(\beta) \geq \frac{2b}{a}$ et $x(\alpha) = \frac{2b}{a}$.

Si $\beta < T$ alors $x(\beta) = \frac{2b}{a} = x(\alpha)$. Dans les deux cas, $x(\alpha) \leq x(\beta)$.

Soit $F = \{\tau \in] \alpha, \beta[\mid \dot{x}(\tau) > 0\}$.

F est de mesure positive, i.e. F n'est pas vide. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas, alors x serait décroissante pour tout τ compris entre α et β et $x(\alpha) > x(\beta)$ ce qui n'est pas possible. Il existe donc au moins un élément $\tau \in] \alpha, \beta[$ telle que x soit croissante.

Cependant, pour tout $\tau \in] \alpha, \beta[\subset E$, $x(\tau) > \frac{2b}{a}$, alors $-ax^2 + 2bx < 0$ pour tout

$x(\tau) > \frac{2b}{a}$. Donc $\dot{x}(\tau) \leq -ax^2(\tau) + 2bx(\tau) < 0$ et τ n'appartient pas à F pour tout $\tau \in] \alpha, \beta[\subset E$.

Il y a donc une contradiction, ce qui implique que soit $\alpha = 0$, soit $E = \emptyset$, ce qui revient à dire que $x(\tau) \leq \frac{2b}{a}$ pour tout τ , et il est alors immédiat que $x(\tau) \leq \max\{x(0), \frac{2b}{a}\}$.

Si $\alpha = 0$ alors $E = [0, \tau_1[$, $\tau_1 > 0$ et $x(\tau) \leq \max(x(0), \frac{2b}{a})$ pour $\tau \geq \tau_1$, et on a :

$$\dot{x}(\tau) \leq -ax^2(\tau) + 2bx(\tau) = \underbrace{a}_{>0} \underbrace{\left(\underbrace{-x(\tau) + \frac{2b}{a}}_{>\frac{2b}{a}} \right)}_{<0} \underbrace{x(\tau)}_{>\frac{2b}{a} > 0} \leq 0,$$

pour tout $0 \leq \tau \leq \tau_1$. Ceci implique que x est décroissante sur $[0, \tau_1[$ (i.e. $x(\tau) < x(0)$). On en déduit que $x(\tau) \leq \max\left(x(0), \frac{2b}{a}\right)$, pour tout $\tau \in [0, \tau_1[$.

Supposons à présent que $x_0 > \frac{2b}{a}$ et donc que $x(\tau) > \frac{2b}{a}$ pour tout $\tau \in [0, \tau_1[$.

$$\dot{x}(\tau) \leq a \left(\frac{2b}{a} - x(\tau) \right) x(\tau), \quad \text{i.e.} \quad \frac{\dot{x}(\tau)}{a \left(\frac{2b}{a} - x(\tau) \right) x} \geq 1.$$

Notons que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{x}{x - \frac{2b}{a}} \right) \right] &= \frac{\left(x - \frac{2b}{a} \right) - x}{\left(x - \frac{2b}{a} \right)^2} \times \frac{x - \frac{2b}{a}}{x} \\ &= \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dx} \left[\ln \left(\frac{x}{x - \frac{2b}{a}} \right) \right] = \frac{-\frac{2b}{a}}{x \left(x - \frac{2b}{a} \right)}, \end{aligned}$$

$$\text{soit } \frac{a}{2b} \frac{d}{d\tau} \left[\ln \left(\frac{x}{x - \frac{2b}{a}} \right) \right] = \frac{\frac{dx}{d\tau}}{x \left(x - \frac{2b}{a} \right)} = \frac{\dot{x}}{x \left(x - \frac{2b}{a} \right)} \geq \frac{a \left(x - \frac{2b}{a} \right)}{\left(x - \frac{2b}{a} \right)} = a$$

Intégrons par rapport à τ :

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2b} \ln \left(\frac{x}{x - \frac{2b}{a}} \right) - \frac{a}{2b} \ln \left(\frac{x_0}{x_0 - \frac{2b}{a}} \right) \geq a\tau \\ \text{i.e. } & \ln \left(\frac{x}{x - \frac{2b}{a}} \right) \geq a\tau \frac{a}{2b} + \ln \left(\frac{x_0}{x_0 - \frac{2b}{a}} \right) \\ \Rightarrow & \exp \left(\ln \left(\frac{x}{x - \frac{2b}{a}} \right) \right) \geq \exp \left(a\tau \frac{a}{2b} + \ln \left(\frac{x_0}{x_0 - \frac{2b}{a}} \right) \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{x - \frac{2b}{a}} \geq \frac{x_0}{x_0 - \frac{2b}{a}} \exp(2b\tau) \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Or, $x(\tau) > \frac{2b}{a}$, donc $\frac{x}{x - \frac{2b}{a}} > 0$ et $\frac{x_0}{x_0 - \frac{2b}{a}} > 1$.

On en déduit que $\frac{x}{x - \frac{2b}{a}} > \exp(2b\tau)$,

$$\begin{aligned} \text{i.e. } x & \geq \left(x - \frac{2b}{a} \right) \exp(2b\tau) = x \exp(2b\tau) - \underbrace{\frac{2b}{a} \exp(2b\tau)}_{\leq x(1 - \exp(2b\tau))} \\ & \leq -\frac{2b}{a} \exp(2b\tau) \frac{1}{1 - \exp(2b\tau)} = -\frac{2b}{a} \frac{\exp(2b\tau)}{1 - \exp(2b\tau)} \\ & = \frac{2b}{a} \left(-1 + \frac{1}{1 - \exp(2b\tau)} \right) \\ & = \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{1 - \exp(2b\tau)} \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité (II.11). D'autre part, en reprenant (II.13) :

$$\begin{aligned} x & \geq \left(x - \frac{2b}{a} \right) \frac{x_0}{x_0 - \frac{2b}{a}} \exp(2b\tau) \\ \Rightarrow x & \left(1 - \frac{x_0}{x_0 - \frac{2b}{a}} \exp(2b\tau) \right) \geq -\frac{2b}{a} \frac{x_0}{x_0 - \frac{2b}{a}} \exp(2b\tau) \\ \Rightarrow x & \leq \frac{x_0 - \frac{2b}{a}}{x_0(1 - \exp(2b\tau)) - \frac{2b}{a} \exp(2b\tau)} \left(\frac{-2b}{a} \right) \frac{x_0}{x_0 - \frac{2b}{a}} \exp(2b\tau) \\ \Rightarrow x & \leq \frac{2bx_0 \exp(2b\tau)}{ax_0(\exp(2b\tau) - 1) + 2b \exp(2b\tau)} \quad \text{car } \frac{x_0}{x_0 - \frac{2b}{a} \exp(2b\tau)} > 1. \end{aligned}$$

□

Soit $r = \sup_{i,k} \left(\text{Tr} \left(C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \right) \right)$. D'après l'équation (II.4) et les lemmes précédents, démontrer que \bar{S} est supérieurement bornée revient à prouver que $x_k^{(+)}$, solution de

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -ax^2 + 2bx \\ x_k^{(+)} = x_k^{(-)} + r \sum_{i \in \sigma_k} \left(\bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)}-1}^{(i)} \right) \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

est bornée pour tout $\bar{\tau}_k > T^*$, $k \in \mathbb{N}$, indépendamment des subdivisions choisies.

Ceci mène au Lemme 23.

Lemme 23.

La solution de l'équation (II.14) vérifie l'inégalité suivante :

$$x(\bar{\tau}) \leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}} - 1} + n_s r \bar{\tau},$$

pour tout $\bar{\tau} > 0$, avant ou après un pas de discrétisation.

Démonstration. La borne (II.11) entraîne :

$$x_1^{(+)} \leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1} - 1} + r \sum_{i \in \sigma_1} \left(\bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_1^{(i)}-1}^{(i)} \right).$$

Notons $\chi_k = r \sum_{j=1}^k \sum_{i \in \sigma_k} \left(\bar{s}_{l_k^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)}-1}^{(i)} \right)$ et l'inégalité précédente se réécrit :

$$x_1^{(+)} \leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1} - 1} + \chi_1. \quad (\text{II.15})$$

Nous remarquons que (II.15) mène à l'inégalité ci dessous :

$$x_1^{(+)} \leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1} - 1} + n_s r \bar{\tau}_1. \quad (\text{II.16})$$

Généralisons cette inégalité pour tout $k \in \mathbb{N}$. Afin de procéder ainsi et obtenir une majoration des $x_i^{(+)}$ de la forme (II.16) par récurrence, il est nécessaire dans un premier temps que les inégalités soient de la forme (II.15) et non de la forme (II.16). En effet, majorer $x_2^{(+)}$ en utilisant l'expression (II.16) et donc le terme $n_s r \bar{\tau}_1$ entraînerait une sur-majoration de $x_2^{(+)}$ et l'impossibilité de majorer les $x_k^{(+)}$, $k > 2$ par une expression de la forme (II.16).

Reformulons la borne (II.12) comme suit $[\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2]$:

$$x_2^{(-)} \leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{x_1^{(+)} - \frac{2b}{a}}{x_1^{(+)} (e^{2b(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)} - 1) + \frac{2b}{a}} = \frac{2bx_1^{(+)} e^{2b(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)}}{ax(e^{2b(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)} - 1) + 2b}. \quad (\text{II.17})$$

Nous souhaitons remplacer $x_1^{(+)}$ par la borne supérieure proposée en (II.15).

Nous définissons la fonction

$$h(x) = \frac{2bx e^{2b\bar{\tau}}}{ax(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b},$$

dont la dérivée par rapport à x est

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{e^{2b\bar{\tau}} 2b [ax(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b] - a(e^{2b\bar{\tau}} - 1)x e^{2b\bar{\tau}} 2b}{[ax(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b]^2} \\ &= \frac{e^{2b\bar{\tau}} (2b)^2}{[ax(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b]^2}. \end{aligned}$$

Puisque la dérivée est positive pour tout $\bar{\tau} > 0$, nous pouvons remplacer $x_1^{(+)}$ par sa borne supérieure donnée dans l'expression (II.17) :

$$\begin{aligned} x_2^{(-)} &\leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{[\frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1 - 1}} + \chi_1] - \frac{2b}{a}}{[\frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1 - 1}} + \chi_1] (e^{2b(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)} - 1) + \frac{2b}{a}} \\ &\leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1 - 1}} \frac{1}{[\frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1 - 1}} + \chi_1] (e^{2b(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)} - 1) + \frac{2b}{a}} \\ &\quad + \frac{2b}{a} \frac{\chi_1}{[\frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1 - 1}} + \chi_1] (e^{2b(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)} - 1) + \frac{2b}{a}}. \end{aligned}$$

Nous bornons inférieurement le dénominateur du dernier terme par :

$$\left[\frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1 - 1}} + \chi_1 \right] (e^{2b(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)} - 1) + \frac{2b}{a} \geq \frac{2b}{a}$$

ainsi que le dénominateur du second par :

$$\left[\frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1 - 1}} + \chi_1 \right] (e^{2b(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)} - 1) + \frac{2b}{a} \geq \left[\frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1 - 1}} \right] (e^{2b(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)} - 1) + \frac{2b}{a}$$

Nous simplifions également par $(2b/a)$ ces deux termes :

$$\begin{aligned} x_2^{(-)} &\leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1 - 1}} \frac{1}{\left(\left[1 + \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_1 - 1}} \right] (e^{2b(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)} - 1) + 1 \right)} + \chi_1 \\ &\leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_2} - e^{2b\bar{\tau}_1} + e^{2b\bar{\tau}_1} - 1} + \chi_1 \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} x_2^{(+)} &\leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_2} - 1} + \chi_1 + r \sum_{i \in \sigma_2} \left(\bar{s}_{l_2^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_2^{(i)}-1}^{(i)} \right) \\ &\leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_2} - 1} + \chi_2, \end{aligned}$$

$$\text{avec } \chi_2 = r \left(\sum_{i \in \sigma_1} \left(\bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_1^{(i)}-1}^{(i)} \right) + \sum_{i \in \sigma_2} \left(\bar{s}_{l_2^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_2^{(i)}-1}^{(i)} \right) \right).$$

En exploitant la définition des σ_k , notons que pour $i \in \sigma_1$, $\bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} = \bar{\tau}_1$, pour $i \in \sigma_2$, $\bar{s}_{l_2^{(i)}}^{(i)} = \bar{\tau}_2$, et ainsi de suite pour tout $i \in \sigma_k$, $k \in \mathbb{N}$, $\bar{s}_{l_k^{(i)}}^{(i)} = \bar{\tau}_k$. A l'instant $\bar{\tau}_2$, pour un capteur s_i donné, i appartient à l'un des quatre sous-ensembles suivants :

1. $\sigma_1 \cap \sigma_2$,
2. $\sigma_2 \setminus \sigma_1$,
3. $\sigma_1 \setminus \sigma_2$,
4. $\{1, \dots, n_s\} \setminus \sigma_1 \setminus \sigma_2$.

Considérons le premier cas, avec $i \in \sigma_1 \cap \sigma_2$:

- Soit $\lambda_2^{(i)}$ défini par $\lambda_2^{(i)} = \max\{l \in \mathbb{N} \text{ tel que } s_l^{(i)} \leq \tau_2\}$, alors $\lambda_2^{(i)} = 2$;
- Rappelons que les indices $l_k^{(i)}$ sont tels que

$$\sigma_k = \left\{ i \in \{1, \dots, n_s\} \mid \exists l_k^{(i)} \in \mathbb{N} \text{ tel que } s_{l_k^{(i)}}^{(i)} = \tau_k \right\},$$

$$\text{alors, } \bar{s}_{l_2^{(i)}}^{(i)} = \bar{s}_2^{(i)} = \bar{\tau}_2, \bar{s}_{l_2^{(i)}-1}^{(i)} = \bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} = \bar{s}_1^{(i)} = \bar{\tau}_1 \text{ et } \bar{s}_{l_1^{(i)}-1}^{(i)} = \bar{s}_{l_0^{(i)}}^{(i)} = \bar{\tau}_0 = 0$$

- Les sorties associées au capteur s_i interviennent dans l'expression de χ_2 sous la forme suivante :

$$r \left[\left(\bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_1^{(i)}-1}^{(i)} \right) + \left(\bar{s}_{l_2^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_2^{(i)}-1}^{(i)} \right) \right] = r \sum_{j=1}^{\lambda_2^{(i)}} \left(\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)} \right).$$

De la même manière, en nous penchant sur le cas $i \in \sigma_2 \setminus \sigma_1$, nous trouvons :

- $\lambda_2^{(i)} = 1$, $\bar{s}_{l_2^{(i)}}^{(i)} = \bar{s}_1^{(i)} = \bar{\tau}_2$, et $\bar{s}_{l_2^{(i)}-1}^{(i)} = \bar{s}_0^{(i)} = 0$;
- Dans ce cas, la contribution du capteur s_i à χ_2 est de la forme :

$$r \left(\bar{s}_{l_2^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_2^{(i)}-1}^{(i)} \right) = r \sum_{j=1}^{\lambda_2^{(i)}} \left(\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)} \right).$$

Considérons à présent le troisième cas, lorsque $i \in \sigma_1 \setminus \sigma_2$. Nous obtenons :

$$\text{— } \lambda_2^{(i)} = 1, \bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} = \bar{s}_1^{(i)} = \bar{\tau}_1, \text{ et } \bar{s}_{l_1^{(i)}-1}^{(i)} = \bar{s}_0^{(i)} = 0;$$

— La contribution du capteur \mathfrak{s}_i à χ_2 prend alors la forme :

$$r \left(\bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_1^{(i)}-1}^{(i)} \right) = r \sum_{j=1}^{\lambda_2^{(i)}} \left(\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)} \right).$$

Pour finir, lorsque $i \in \{1, \dots, n_s\} \setminus \sigma_1 \setminus \sigma_2$, c'est à dire lorsque le capteur \mathfrak{s}_i ne donne de mesure ni à l'instant $\bar{\tau}_1$, ni à l'instant $\bar{\tau}_2$, nous écrivons :

$$\text{— } \lambda_2^{(i)} = 0 \text{ et nous posons } \bar{s}_{l_2^{(i)}}^{(i)} = \bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} = 0;$$

— Par convention, lorsque $\lambda_2^{(i)} = 0$, nous considérons que la somme $\sum_{j=1}^{\lambda_2^{(i)}} \left(\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)} \right) = 0$. D'où

$$0 = r \left[\left(\bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_0^{(i)}}^{(i)} \right) + \left(\bar{s}_{l_2^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} \right) \right] = r \sum_{j=1}^{\lambda_2^{(i)}} \left(\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)} \right).$$

Nous trouvons donc que les sorties associées au vecteur \mathfrak{s}_i apparaissent toujours dans l'expression de χ_2 sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{\lambda_2^{(i)}} \left(\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)} \right), \quad (\text{II.18})$$

et χ_2 peut être reformulé comme :

$$\chi_2 = r \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{\lambda_2^{(i)}} \left(\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)} \right) \leq r n_s \bar{\tau}_2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} x_2^{(+)} &\leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_2} - 1} + r \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{\lambda_2^{(i)}} \left(\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)} \right) \\ &\leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_2} - 1} + r n_s \bar{\tau}_2. \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Nous pouvons généraliser par induction les expressions (II.18) et (II.19) à tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour cela, nous définissons $\lambda_k^{(i)} = \max\{l \in \mathbb{N} \text{ tel que } s_l^{(i)} \leq \tau_k\}$ et, lorsque $\lambda_k^{(i)} = 0$, nous utilisons la convention

$\sum_{j=1}^{\lambda_k^{(i)}} (\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)}) = 0$. Cela mène à :

$$\chi_k = r \sum_{j=1}^k \sum_{i \in \sigma_k} \left(\bar{s}_{l_k^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)}-1}^{(i)} \right) = r \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{\lambda_k^{(i)}} (\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)}) \leq r n_s \bar{\tau}_k, \quad (\text{II.20})$$

et $x_k^{(+)} \leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}_i} - 1} + r n_s \bar{\tau}_k$.

De plus, cette inégalité peut être étendue pour tout $\bar{\tau} > 0$, avant et après une correction.

$$x(\bar{\tau}) \leq \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}} - 1} + r n_s \bar{\tau}. \quad \square$$

Lemme 24 ([34]).

Définissons les fonctions

$$\begin{aligned} \phi(\bar{\tau}) &= \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}} - 1} + n_s r \bar{\tau}, \\ \psi_{x_0}(\bar{\tau}) &= \frac{2b x_0 e^{2b\bar{\tau}}}{a x_0 (e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b} + n_s r \bar{\tau}. \end{aligned}$$

Il existe $\mu_\phi > 0$ tel que $\phi(\bar{\tau})$ est une fonction décroissante pour $\bar{\tau} \in]0, \mu_\phi]$. De même existe $\mu_\psi(x_0) > 0$ tel que $\psi_{x_0}(\bar{\tau})$ est une fonction décroissante pour $\bar{\tau} \in [0, \mu_\psi(x_0)]$.

En outre, la borne $\mu_\psi(x_0)$ croît lorsque x_0 augmente.

Démonstration. 1) Soit $\phi(\bar{\tau}) = \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2b\bar{\tau}} - 1} + n_s r \bar{\tau}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\bar{\tau}}(\bar{\tau}) &= -\frac{2b}{a} \frac{2be^{2b\bar{\tau}}}{(e^{2b\bar{\tau}} - 1)^2} + n_s r \\ &= \frac{-4b^2 e^{2b\bar{\tau}} + n_s r a (e^{2b\bar{\tau}} - 1)^2}{a(e^{2b\bar{\tau}} - 1)^2} \\ &= \frac{a n_s r (e^{2b\bar{\tau}})^2 - (4b^2 + 2a n_s r) e^{2b\bar{\tau}} + a n_s r}{a(e^{2b\bar{\tau}} - 1)^2} \\ &= \frac{a n_s r X^2 - (4b^2 + 2a n_s r) X + a n_s r}{aX - 1)^2} \quad \text{avec } X = e^{2b\bar{\tau}}. \end{aligned}$$

Soit le polynôme $\mathcal{P}(X) = a n_s r X^2 - (4b^2 + 2a n_s r) X + a n_s r$. Son discriminant $\Delta = 16b^2(b^2 + r n_s a)$ est positif et \mathcal{P} possède donc deux racines X_1^ϕ et X_2^ϕ . La somme et le produit de ces racines étant positifs, on en déduit que X_1^ϕ et X_2^ϕ sont positives, avec $X_1^\phi < X_2^\phi$, et que $\mathcal{P}(X)$ est décroissant sur $[X_1^\phi, X_2^\phi]$.

De plus

$$\begin{aligned}
X_1^\phi &= \frac{2rn_s a + 4b^2 - \sqrt{(2rn_s a + 4b^2)^2 - 4(rn_s a)^2}}{2rn_s a} \\
&= \frac{\sqrt{(2rn_s a + 4b^2)^2 - 4(rn_s a)^2} + 4(rn_s a)^2 - \sqrt{(2rn_s a + 4b^2)^2 - 4(rn_s a)^2}}{2rn_s a} \\
&\leq \frac{\sqrt{(2rn_s a + 4b^2)^2 - 4(rn_s a)^2} + \sqrt{4(rn_s a)^2} - \sqrt{(2rn_s a + 4b^2)^2 - 4(rn_s a)^2}}{2rn_s a} \\
&\leq \frac{\sqrt{4(rn_s a)^2}}{2rn_s a} = 1 = e^{2b \times 0},
\end{aligned}$$

et

$$X_2^\phi = \frac{2rn_s a + 4b^2 + \sqrt{(2rn_s a + 4b^2)^2 - 4(rn_s a)^2}}{2rn_s a} > 1.$$

Puisque $\mathcal{P}(X)$ est décroissant sur $[1, X_2^\phi] \subset [X_1^\phi, X_2^\phi]$, il découle des calculs précédents que ϕ est décroissante pour $\tau \in]0, \mu_\phi]$ avec $\mu_\phi = \ln(X_2^\phi)/2b$.

2) D'autre part, soit $\psi_{x_0}(\bar{\tau}) = \frac{2bx_0 e^{2b\bar{\tau}}}{ax_0(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b} + n_s r \bar{\tau}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\bar{\tau}} \psi_{x_0}(\bar{\tau}) &= \frac{4b^2 x_0 e^{2b\bar{\tau}} (ax_0(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b)}{(ax_0(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b)^2} - \frac{2bx_0 e^{2b\bar{\tau}} \times 2abx_0 e^{2b\bar{\tau}}}{(ax_0(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b)^2} + n_s r \\
&= \frac{a^2 x_0^2 n_s r (e^{2b\bar{\tau}})^2}{(ax_0(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b)^2} + \frac{(8b^3 x_0 - 4ab^2 x_0^2 - 2a^2 x_0^2 n_s r + 4abx_0 n_s r) e^{2b\bar{\tau}}}{(ax_0(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b)^2} \\
&\quad + \frac{ax^2 x_0^2 n_s r + 4b^2 n_s r - 4abx_0 n_s r}{(ax_0(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b)^2} \\
&= \frac{a^2 x_0^2 n_s r (e^{2b\bar{\tau}})^2 + x_0(ax_0 - 2b)(4b^2 + 2arn_s) e^{2b\bar{\tau}} + n_s r (ax_0 - 2b)^2}{(ax_0(e^{2b\bar{\tau}} - 1) + 2b)^2}.
\end{aligned}$$

Soit le polynôme

$$\mathcal{P}(X) = a^2 x_0^2 n_s r X^2 + x_0(ax_0 - 2b)(4b^2 + 2arn_s)X + n_s r (ax_0 - 2b)^2.$$

Son discriminant $\Delta = x_0^2(ax_0 - 2b)^2(4b^2 + 2n_s r a)^2 - 4n_s^2 r^2 a^2 x_0^2 (ax_0 - 2b)^2$ est positif et comme précédemment, nous montrons que le produit et la somme des racines de \mathcal{P} sont positifs en utilisant le fait que $x_0 > \frac{2b}{a}$ (cf. Lemme 22). Le polynôme \mathcal{P} est donc de signe négatif sur l'intervalle $[X_1^\psi, X_2^\psi]$.

De plus,

$$\begin{aligned}
X_1^\psi &= \frac{x_0(ax_0 - 2b)(4b^2 + 2n_s r a) - \sqrt{x_0^2(ax_0 - 2b)^2(4b^2 + 2n_s r a)^2 - 4n_s^2 r^2 a^2 x_0^2(ax_0 - 2b)^2}}{2n_s r a^2 x_0^2} \\
&= \frac{\sqrt{x_0^2(ax_0 - 2b)^2(4b^2 + 2n_s r a)^2 + 4n_s^2 r^2 a^2 x_0^2(ax_0 - 2b)^2 - 4n_s^2 r^2 a^2 x_0^2(ax_0 - 2b)^2}}{2n_s r a^2 x_0^2} \\
&= \frac{\sqrt{x_0^2(ax_0 - 2b)^2(4b^2 + 2n_s r a)^2 - 4n_s^2 r^2 a^2 x_0^2(ax_0 - 2b)^2}}{2n_s r a^2 x_0^2} \\
&\leq \frac{\sqrt{4n_s^2 r^2 a^2 x_0^2(ax_0 - 2b)^2}}{2n_s r a^2 x_0^2} = \frac{ax_0 - 2b}{ax_0} = 1 - \frac{2b}{ax_0} < 1 = e^{2b \times 0},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
X_2^\psi &= \frac{x_0(ax_0 - 2b)(4b^2 + 2n_s r a) + \sqrt{x_0^2(ax_0 - 2b)^2(4b^2 + 2n_s r a)^2 - 4n_s^2 r^2 a^2 x_0^2(ax_0 - 2b)^2}}{2n_s r a^2 x_0^2} \\
&\geq \frac{ax_0^2(4b^2 + 2n_s r a) + \sqrt{x_0^2(ax_0 - 2b)^2(4b^2 + 2n_s r a)^2 - 4n_s^2 r^2 a^2 x_0^2(ax_0 - 2b)^2}}{2n_s r a^2 x_0^2} \\
&= \frac{4ab^2 x_0^2 + 2a^2 x_0^2 n_s r + \sqrt{x_0^2(ax_0 - 2b)^2(4b^2 + 2n_s r a)^2 - 4n_s^2 r^2 a^2 x_0^2(ax_0 - 2b)^2}}{2n_s r a^2 x_0^2} \\
&= 1 + \frac{4ab^2 x_0^2 + \sqrt{x_0^2(ax_0 - 2b)^2(4b^2 + 2n_s r a)^2 - 4n_s^2 r^2 a^2 x_0^2(ax_0 - 2b)^2}}{2n_s r a^2 x_0^2} > 1.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{P}(X)$ est négatif sur l'intervalle $]1, X_2^\psi] \subset [X_1^\psi, X_2^\psi]$, la fonction $\psi'_{x_0}(\bar{\tau})$ l'est également sur $]0, \mu_\psi(x_0)]$ où $\mu_\psi(x_0) = \frac{\ln(X_2^\psi)}{2b}$ et $\psi_{x_0}(\bar{\tau})$ est donc décroissante sur cet intervalle.

Assurons nous à présent que $\mu_\psi(x_0)$ est une fonction croissante en x_0 .

$$\begin{aligned}
X_2^\psi(x_0) &= \frac{x_0(ax_0 - 2b)(4b^2 + 2n_s r a) + \sqrt{x_0^2(ax_0 - 2b)^2(4b^2 + 2n_s r a)^2 - 4n_s^2 r^2 a^2 x_0^2(ax_0 - 2b)^2}}{2n_s r a^2 x_0^2} \\
&= \frac{\left(a - \frac{2b}{x_0}\right)(4b^2 + 2n_s r a) + \sqrt{\left(a - \frac{2b}{x_0}\right)^2(4b^2 + 2n_s r a)^2 - 4n_s^2 r^2 a^2 \left(a - \frac{2b}{x_0}\right)^2}}{2n_s r a^2} \\
&= \frac{\left(a - \frac{2b}{x_0}\right)(4b^2 + 2n_s r a) + \sqrt{\left(a - \frac{2b}{x_0}\right)^2 [(4b^2 + 2n_s r a)^2 - 4n_s^2 r^2 a^2]}}{2n_s r a^2} \\
&=: \frac{A + \sqrt{B}}{C}.
\end{aligned}$$

- Par définition de r et n_s , le dénominateur C est positif.

- $\left(a - \frac{2b}{x_0}\right)$ est une fonction croissante de x_0 , donc A l'est également.
- Le terme de droite de B est positif tandis que celui de gauche est une fonction croissante de x_0 . B l'est donc également.

On en déduit que $X_2^\psi(x_0)$ est une fonction croissante de x_0 et puisque $\mu_\psi(x_0) = \frac{\ln(X_2^\psi)}{2b}$, la borne $\mu_\psi(x_0)$ l'est également. \square

Lemme 25 ([34]).

Considérons l'équation de Riccati (II.4) ainsi que les hypothèses du Theorème 20. Soit $T^* > 0$ fixé. Il existe deux scalaires $\beta_2 > 0$ et $\mu > 0$ tels que

$$\bar{S}_k^{(+)} \leq \beta_2 Id$$

pour tout $T^* \leq \bar{\tau}_k$, $k \in \mathbb{N}$, pour toutes subdivisions $\{\bar{s}_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\tau}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $\bar{\tau}_k - \bar{\tau}_{k-1} < \mu$. Cette borne reste vraie durant les intervalles de prédiction.

Démonstration. Soit T^* un scalaire arbitrairement fixé. Nous définissons

$$B(T^*) = \frac{2b}{a} + \frac{2b}{a} \frac{1}{e^{2bT^*} - 1} + n_s r T^*.$$

D'après le Lemme 23, $x(T^*) \leq B(T^*)$ indépendamment du choix de la subdivision $\{\bar{\tau}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Soit μ la plus grande valeur telle que les fonctions $\phi(\bar{\tau})$ et $\psi_{B(T^*)}(\bar{\tau})$ du lemme précédent sont toutes deux décroissantes sur l'intervalle $]0, \mu]$. Notons que μ dépend de $B(T^*)$.

Nous affirmons que $\beta_2 = B(T^*) + n_s r \mu$ est solution du problème.

En effet, soit une subdivision du temps $\{\bar{\tau}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\bar{\tau}_k - \bar{\tau}_{k-1} < \mu$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrons tout d'abord que si $x_k(+) \leq \beta_2$, alors $x_{k+1}(+) \leq \beta_2$.

1. Si $x_k(+) \leq \frac{2b}{a}$ alors, d'après le Lemme 22, $x_{k+1}(-) \leq \max\left(\frac{2b}{a}, x_k(+)\right) = \frac{2b}{a}$. D'où $x_{k+1} \leq \frac{2b}{a} + n_s r \mu \leq \beta_2$.
2. Si $x_k(+) \geq \frac{2b}{a}$, et $x_k(+) \leq B(T^*)$, nous utilisons de nouveau le Lemme 22 pour obtenir l'inégalité $x_{k+1}(-) \leq \max\left(\frac{2b}{a}, x_k(+)\right) \leq B(T^*)$. Cela entraîne que $x_{k+1}(+) \leq B(T^*) + n_s r \mu = \beta_2$.
3. Si $x_k(+) \geq \frac{2b}{a}$, et $x_k(+) \geq B(T^*)$, alors, d'après le Lemme 22, $x_{k+1} \leq \psi_{x_k}(\bar{\tau}_k + 1 - \bar{\tau}_k)$. D'après le Lemme 24, cette fonction est décroissante et de la remarque précédente, nous obtenons $x_{k+1}(+) \psi_{x_k}(0) \leq \beta_2$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{\tau}_{k-1} < T^* \leq \bar{\tau}_k$. Montrons que $x_k(+) \leq \beta_2$.

1. Si $T^* \in]0, \bar{\tau}_1]$, puisque μ est tel que la fonction $\phi(\bar{\tau})$ soit décroissante sur $[0, \bar{\tau}_1[\subset [0, \mu]$, il découle du Lemme 23 :

$$x_1(+) \leq \phi(\bar{\tau}_1) \leq \phi(T^*) \leq \beta_2,$$

2. si $\bar{\tau}_{k-1} > 0$, alors, par définition, $x(T^*) \leq B(T^*)$. D'après (II.14) et le Lemme 22, nous trouvons :

$$\text{— si } x(T^*) \leq \frac{2b}{a} \text{ alors } x_k(-) \leq \frac{2b}{a} \leq B(T^*),$$

$$\text{— sinon, si } x(T^*) \geq \frac{2b}{a}, \text{ alors } \frac{dx}{d\bar{\tau}} \text{ est négatif d'après l'équation (II.14), } x \text{ est décroissante et } x_k(-) \leq B(T^*).$$

Dans les deux cas, $x_k(+) \leq B(T^*) + \mu n_s r = \beta_2$.

Pour conclure, il existe deux constantes positive β_2 et μ telles que $S_k(+) \leq \beta_2 Id$ pour tout $\bar{\tau}_k \geq T^*$, $k \in \mathbb{N}$. Cela est vérifié pour toute subdivision $\{\bar{\tau}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, telle que $\bar{\tau}_i - \bar{\tau}_{i-1} \leq \mu$, pour tout i . \square

II.2.2 Borne inférieure

Démontrons à présent que $\bar{S}(\bar{\tau})$ est également inférieurement borné pour les temps plus grands qu'un $T_* > T^*$ fixé.

Lemme 26.

[34, 4] Soit $\bar{S} : [0, T[\rightarrow S_m$ (éventuellement avec $T = +\infty$), une solution de

$$\frac{d\bar{S}}{d\bar{\tau}} = -\mathcal{A}'(\bar{\tau})\bar{S} - \bar{S}\mathcal{A}(\bar{\tau}) - \bar{S}Q\bar{S}.$$

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et pour tout $\bar{\tau} \in [0, T[$:

$$\begin{aligned} \bar{S}(\bar{\tau}) &= e^{-\lambda\bar{\tau}} \varphi_a(\bar{\tau}, 0) \bar{S}_0 \varphi'_a(\bar{\tau}, 0) \\ &\quad + \lambda \int_0^{\bar{\tau}} e^{-\lambda(\bar{\tau}-v)} \varphi_a(\bar{\tau}, v) \left(\bar{S}(v) - \frac{\bar{S}(v)Q\bar{S}(v)}{\lambda} \right) \varphi'_a(\bar{\tau}, v) dv, \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

$$\text{où } \varphi_a(\bar{\tau}, s) \text{ est telle que : } \begin{cases} \frac{d\varphi_a(\bar{\tau}, s)}{d\bar{\tau}} = -\mathcal{A}'(\bar{\tau})\varphi_a(\bar{\tau}, s) \\ \varphi_a(s, s) = Id \end{cases}$$

Démonstration. Considérons une équation de la forme

$$\frac{d}{d\bar{\tau}} X(\bar{\tau}) = -\mathcal{A}'(\bar{\tau})X - X\mathcal{A}(\bar{\tau}) - XQX. \quad (\text{II.22})$$

$\varphi_a(\bar{\tau}, s)$ est la résolvante du système $\frac{dx}{d\bar{\tau}} = -\mathcal{A}x$ et l'on a :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_a(\bar{\tau}, s)}{d\bar{\tau}} = -\mathcal{A}'(\bar{\tau})\varphi_a(\bar{\tau}, s) \\ \varphi_a(s, s) = Id \end{cases}$$

Cherchons une solution de (II.22) de la forme $X(\bar{\tau}) = \varphi_a(\bar{\tau}, s)h(\bar{\tau})\varphi_a'(\bar{\tau}, s)$.

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\bar{\tau}} &= \left(\frac{d}{d\bar{\tau}}\varphi_a(\bar{\tau}, s) \right) h(\bar{\tau})\varphi_a'(\bar{\tau}, s) + \varphi_a(\bar{\tau}, s)h(\bar{\tau}) \left(\frac{d}{d\bar{\tau}}\varphi_a'(\bar{\tau}, s) \right) \\ &\quad + \varphi_a(\bar{\tau}, s)\frac{dh}{d\bar{\tau}}(\bar{\tau})\varphi_a'(\bar{\tau}, s) \\ &= \mathcal{A}'\varphi_a(\bar{\tau}, s)h(\bar{\tau})\varphi_a'(\bar{\tau}, s) - \varphi_a(\bar{\tau}, s)h(\bar{\tau})\varphi_a'(\bar{\tau}, s)\mathcal{A} \\ &\quad + \varphi_a(\bar{\tau}, s)\frac{dh}{d\bar{\tau}}(\bar{\tau})\varphi_a'(\bar{\tau}, s) \\ &= -\mathcal{A}'X(\bar{\tau}) - X(\bar{\tau})\mathcal{A} + \varphi_a(\bar{\tau}, s)\frac{dh}{d\bar{\tau}}(\bar{\tau})\varphi_a'(\bar{\tau}, s). \end{aligned}$$

Donc $\varphi_a(\bar{\tau}, s)\frac{dh}{d\bar{\tau}}(\bar{\tau})\varphi_a'(\bar{\tau}, s) = F(\bar{\tau})$ et

$$\begin{aligned} h(\bar{\tau}) &= h(0) + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_a^{-1}(v, s)F(v)\varphi_a^{-1'}(v, s)dv \\ &= h(0) + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_a(s, v)F(v)\varphi_a'(s, v)dv. \end{aligned}$$

Puisque $X(\bar{\tau}) = \varphi_a(\bar{\tau}, s)h(\bar{\tau})\varphi_a'(\bar{\tau}, s)$, alors $\varphi_a(s, 0)X(0)\varphi_a'(s, 0) = h(0)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} X(\bar{\tau}) &= \varphi_a(\bar{\tau}, s)h(0)\varphi_a'(\bar{\tau}, s) + \varphi_a(\bar{\tau}, s) \left(\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_a(s, v)F(v)\varphi_a'(s, v)dv \right) \varphi_a'(\bar{\tau}, s) \\ &= \varphi_a(\bar{\tau}, s)\varphi_a(s, 0)X(0)\varphi_a'(s, 0)\varphi_a'(\bar{\tau}, s) + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_a(\bar{\tau}, v)F(v)\varphi_a'(\bar{\tau}, v)dv \\ &= \varphi_a(\bar{\tau}, 0)X_0\varphi_a'(\bar{\tau}, 0) + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_a(\bar{\tau}, v)F(v)\varphi_a'(\bar{\tau}, v)dv. \end{aligned}$$

Posons $\hat{S} = e^{\lambda\bar{\tau}}S$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ quelconque. L'équation différentielle associée à \hat{S} est alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{\tau}}\hat{S}(\bar{\tau}) &= \lambda e^{\lambda\bar{\tau}}S + e^{\lambda\bar{\tau}}\frac{dS}{d\bar{\tau}} \\ &= \lambda\hat{S}(\bar{\tau}) - \mathcal{A}'\hat{S}(\bar{\tau}) - \hat{S}(\bar{\tau})\mathcal{A} - e^{-\lambda\bar{\tau}}\hat{S}(\bar{\tau})Q\hat{S}(\bar{\tau}) \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme (II.22), avec $F(\bar{\tau}) = \lambda \hat{S}(\bar{\tau}) - e^{-\lambda \bar{\tau}} \hat{S} Q \hat{S}$.

Nous obtenons donc

$$\hat{S}(\bar{\tau}) = \varphi_a(\bar{\tau}, 0) \hat{S}(0) \varphi_a(\bar{\tau}, 0) + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_a(\bar{\tau}, \nu) [\lambda \hat{S}(\nu) - e^{-\lambda \nu} \hat{S} Q \hat{S}] \varphi_a'(\bar{\tau}, \nu) d\nu,$$

d'où

$$S(\bar{\tau}) = \varphi_a(\bar{\tau}, 0) S_0 \varphi_a'(\bar{\tau}, 0) e^{-\lambda \bar{\tau}} + \lambda \int_0^{\bar{\tau}} e^{-\lambda(\bar{\tau}-\nu)} \varphi_a(\bar{\tau}, \nu) \left[S - \frac{SQS}{\lambda} \right] \varphi_a(\bar{\tau}, \nu) d\nu.$$

□

Lemme 27 ([34, 4]).

Soit $\bar{S} : [0; e(\bar{S})[\rightarrow S_m$ une solution maximale semi-définie positive de

$$\frac{d}{d\bar{\tau}} \bar{S} = -\mathcal{A}' \bar{S} - \bar{S} \mathcal{A} - \bar{S} Q \bar{S}.$$

Si $\bar{S}(0) = \bar{S}_0$ est définie positive

$$e(\bar{S}) = +\infty \text{ et } \bar{S}(\bar{\tau}) \text{ est définie positive pour tout } \bar{\tau} \geq 0.$$

Démonstration. Supposons que \bar{S} ne soit pas toujours définie positive. Soit

$$\theta = \inf(\bar{\tau} \text{ tel que } \bar{S}(\bar{\tau}) \notin S_m(+)).$$

En d'autres termes, $\bar{S}(\bar{\tau}) \in S_m(+)$ pour tout $\bar{\tau} \in [0, \theta[$. D'après le Lemme 21,

$$\frac{d}{d\bar{\tau}} \text{Tr}(\bar{S}) \leq -a \text{Tr}(\bar{S})^2 + 2b \text{Tr}(\bar{S}).$$

Cette inégalité combinée au Lemme 22, entraîne que $\text{Tr}(\bar{S}) \leq \max\left(\text{Tr}(S_0), \frac{2b}{a}\right)$ et

$$|\bar{S}| = \sqrt{\text{Tr}(\bar{S}^2)} \leq \sqrt{\text{Tr}(\bar{S})^2} = \text{Tr}(\bar{S}) \leq \max\left(\text{Tr}(S_0), \frac{2b}{a}\right).$$

Choisissons un scalaire λ tel que $\lambda > |Q| \max\left(\text{Tr}(S_0), \frac{2b}{a}\right)$ et appliquons le Lemme 26 :

$$\bar{S}(\bar{\tau}) = e^{-\lambda \bar{\tau}} \varphi_a(\bar{\tau}, 0) \bar{S}(0) \varphi_a'(\bar{\tau}, 0) + \int_0^{\bar{\tau}} e^{-\lambda(\bar{\tau}-\nu)} \varphi_a(\bar{\tau}, \nu) \left(\bar{S}(\bar{\tau}) - \frac{\bar{S}(\bar{\tau}) Q \bar{S}(\bar{\tau})}{\lambda} \right) \varphi_a'(\bar{\tau}, \nu) d\nu.$$

Fixons $\bar{\tau} = \theta$, alors $\bar{S}(\theta) = (I) + (II)$ avec

$$(I) = e^{-\lambda \theta} \varphi_a(\theta, 0) \bar{S}_0 \varphi_a'(\theta, 0),$$

$$(II) = \int_0^\theta e^{-\lambda(\theta-v)} \varphi_a(\theta, v) \left(\bar{S}(\theta) - \frac{\bar{S}(\theta)Q\bar{S}(\theta)}{\lambda} \right) \varphi'_a(\theta, v) dv.$$

(I) est défini-positif.

(II) dépend de $\left(\bar{S} - \frac{\bar{S}Q\bar{S}}{\lambda} \right)$ qui peut se réécrire sous la forme de $\sqrt{\bar{S}} \left(Id - \frac{\sqrt{\bar{S}Q}\sqrt{\bar{S}}}{\lambda} \right) \sqrt{\bar{S}}$ puisque $\bar{S}(\bar{\tau})$ est définie positive pour tout $0 < \bar{\tau} < \theta$. Par conséquent, la positivité de (II) dépend de $\left(Id - \frac{\sqrt{\bar{S}Q}\sqrt{\bar{S}}}{\lambda} \right)$. En utilisant la définition de λ , nous obtenons

$$\frac{\sqrt{\bar{S}Q}\sqrt{\bar{S}}}{\lambda} < Id.$$

Nous en déduisons que (II) est définie positive, tout comme $\bar{S}(\theta)$. Ceci est en contradiction avec la définition de θ qui est le plus petit temps $\bar{\tau}$ tel que $\bar{S}(\bar{\tau}) = \bar{S}(\theta)$ n'est pas définie positive. Par conséquent, $\bar{S}(\bar{\tau})$ est toujours définie positive dès lors que \bar{S}_0 l'est.

Considérons une subdivision arbitraire du temps $\{\bar{\tau}_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$, et $j \in \mathbb{N}$. Supposons que $\bar{S}_j(+)$ est symétrique définie positive. Alors $\bar{S}_{j+1}(+)$ est également symétrique définie positive, ce qui prouve le résultat par récurrence. □

Remarque 2.

Par conséquent, la solution de l'équation de Riccati associée au système continu-discret asynchrone est définie positive pour tout temps, et le Lemme 25 est également valide pour tous les temps. La fin de cette section est consacrée à la démonstration de l'existence d'une borne inférieure de la forme αId , avec α un scalaire positif.

D'après le Lemme 26, et pour un $\lambda > 0$ fixé, $\bar{S}_1^{(+)}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{S}_1^{(+)} &= e^{-\lambda\bar{\tau}_1} \varphi_a(\bar{\tau}_1, 0) \bar{S}_0 \varphi'_a(\bar{\tau}_1, 0) \\ &\quad + \lambda \int_0^{\bar{\tau}_1} e^{-\lambda(\bar{\tau}_1-v)} \varphi_a(\bar{\tau}_1, v) \left(\bar{S}(v) - \frac{\bar{S}(v)Q\bar{S}(v)}{\lambda} \right) \varphi'_a(\bar{\tau}_1, v) dv \\ &\quad + \sum_{i \in \sigma_1} C^{(s_i)'} R^{(s_i)-1} C^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_1^{(i)}-1}^{(i)} \right). \end{aligned} \quad (II.23)$$

A l'instant $\bar{\tau}_2$, la formule du Lemme 26 entraîne :

$$\begin{aligned} \bar{S}_2^{(+)} &= e^{-\lambda(\bar{\tau}_2-\bar{\tau}_1)} \varphi_a(\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_1) \bar{S}_1^{(+)} \varphi'_a(\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_1) \\ &\quad + \lambda \int_{\bar{\tau}_1}^{\bar{\tau}_2} e^{-\lambda(\bar{\tau}_2-v)} \varphi_a(\bar{\tau}_2, v) \left(\bar{S}(v) - \frac{\bar{S}(v)Q\bar{S}(v)}{\lambda} \right) \varphi'_a(\bar{\tau}_2, v) dv \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i \in \sigma_2} C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_2^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_2^{(i)}-1}^{(i)} \right).$$

En remplaçant $\bar{S}_1^{(+)}$ par l'expression obtenue en (II.23), $\bar{S}_2^{(+)}$ devient :

$$\begin{aligned} \bar{S}_2^{(+)} &= e^{-\lambda \bar{\tau}_2} \varphi_a(\bar{\tau}_2, 0) \bar{S}_0 \varphi_a'(\bar{\tau}_2, 0) \\ &+ \lambda \int_0^{\bar{\tau}_2} e^{-\lambda(\bar{\tau}_2 - \nu)} \varphi_a(\bar{\tau}_2, \nu) \left(\bar{S}(\nu) - \frac{\bar{S}(\nu) Q \bar{S}(\nu)}{\lambda} \right) \varphi_a'(\bar{\tau}_2, \nu) d\nu \\ &+ e^{-\lambda(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)} \varphi_a(\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_1) \sum_{i \in \sigma_1} C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_1^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_1^{(i)}-1}^{(i)} \right) \varphi_a'(\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_1) \\ &+ \sum_{i \in \sigma_2} C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \left(\bar{s}_{l_2^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_2^{(i)}-1}^{(i)} \right). \end{aligned}$$

En réitérant cette procédure, nous obtenons l'expression de $S_k(+)$ pour tout k :

$$\begin{aligned} \bar{S}_k^{(+)} &= e^{-\lambda \bar{\tau}_k} \varphi_a(\bar{\tau}_k, 0) \bar{S}_0 \varphi_a'(\bar{\tau}_k, 0) \\ &+ \lambda \int_0^{\bar{\tau}_k} e^{-\lambda(\bar{\tau}_k - \nu)} \varphi_a(\bar{\tau}_k, \nu) \left(\bar{S}(\nu) - \frac{\bar{S}(\nu) Q \bar{S}(\nu)}{\lambda} \right) \varphi_a'(\bar{\tau}_k, \nu) d\nu \\ &+ \sum_{j=1}^k \sum_{i \in \sigma_j} e^{-\lambda(\bar{\tau}_k - \bar{\tau}_j)} \varphi_a(\bar{\tau}_k, \bar{\tau}_j) C^{(s_i)'} R^{(s_i)^{-1}} C^{(s_i)} \varphi_a'(\bar{\tau}_k, \bar{\tau}_j) \left(\bar{s}_{l_j^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_j^{(i)}-1}^{(i)} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Cette dernière équation est de la forme $S_k(+)= (I) + (II) + (III)$.

(I) Puisque \bar{S}_0 est définie positive, (I) est au moins semi-définie positive

(II) Choisissons $\lambda > \beta \bar{q}$, alors $\left(\bar{S}(\nu) - \frac{\bar{S}(\nu) Q \bar{S}(\nu)}{\lambda} \right)$ est définie positive et (II) est au moins semi-définie positive.

Intéressons nous à présent au terme (III) et montrons que cette quantité est bornée inférieurement pour tout $\bar{\tau} > \bar{T}^*$.

Soient⁶ :

1. l'instant $0 < \rho < \bar{\tau}_k$ tel que $\bar{\tau}_k - \rho = T_*$;
2. l'indice $\lambda_\rho^{(i)}$ tel que $\lambda_\rho^{(i)} = \max\{l \in \mathbb{N} : \bar{s}_l^{(i)} \leq \rho\}$ qui existe dès lors que $\bar{\tau}_k > T_*$.

6. ρ est défini par rapport à k et doit être interprété comme ρ_k , étant donné que nous avons besoin que nos bornes restent valides pour tout $\bar{\tau}_k$ assez grand. Cette dernière notation ne sera cependant pas employée afin de ne pas perdre en lisibilité.

En utilisant la relation (II.20) qui apparait dans le Lemme 23, le terme (III) se réécrit ainsi :

$$(III) = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{\lambda_k^{(i)}} e^{-\lambda(\bar{\tau}_k - \bar{s}_j^{(i)})} \varphi_a(\bar{\tau}_k, \bar{s}_j^{(i)}) C^{(s_i)'} R^{(s_i)-1} C^{(s_i)} \varphi_a'(\bar{\tau}_k, \bar{s}_j^{(i)}) (\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)}).$$

Etant donné que chaque terme de la somme (III) est une matrice symétrique semi-définie positive, nous écrivons :

$$(III) \geq \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=\lambda_\rho^{(i)}+1}^{\lambda_k^{(i)}} e^{-\lambda(\bar{\tau}_k - \bar{s}_j^{(i)})} \varphi_a(\bar{\tau}_k, \bar{s}_j^{(i)}) C^{(s_i)'} R^{(s_i)-1} C^{(s_i)} \varphi_a'(\bar{\tau}_k, \bar{s}_j^{(i)}) (\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)}).$$

Grâce aux propriétés de la résolvante φ_a , l'inégalité ci-dessus peut être reformulée, avec $\bar{a}(\bar{\tau}) = a(\bar{\tau} + \rho)$:

$$(III) \geq \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=\lambda_\rho^{(i)}+1}^{\lambda_k^{(i)}} e^{-\lambda(\bar{\tau}_k - \bar{s}_j^{(i)})} \varphi_{\bar{a}}(\bar{\tau}_k - \rho, \bar{s}_j^{(i)} - \rho) C^{(s_i)'} R^{(s_i)-1} C^{(s_i)} \\ \times \varphi_{\bar{a}}'(\bar{\tau}_k - \rho, \bar{s}_j^{(i)} - \rho) (\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)}).$$

Si nous notons μ_i le pas de temps maximal d'une subdivision $\{s_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$, nous remarquons que $e^{-\lambda(\bar{\tau}_k - \bar{s}_j^{(i)})} \geq e^{-\lambda(T_s + \mu_i)}$. Puisque $\bar{R}_{\sigma_k}^{-1}$ est défini dans un ensemble compact, il est nécessaire de borner l'expression suivante :

$$\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=\gamma_k^{(i)}+1}^{\lambda_k^{(i)}} \varphi_{\bar{a}}(\bar{\tau}_k - \bar{s}_{\gamma_k^{(i)}}^{(i)}, \bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{\gamma_k^{(i)}}^{(i)}) C^{(s_i)'} C^{(s_i)} \varphi_{\bar{a}}'(\bar{\tau}_k - \bar{s}_{\gamma_k^{(i)}}^{(i)}, \bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{\gamma_k^{(i)}}^{(i)}) (\bar{s}_j^{(i)} - \bar{s}_{j-1}^{(i)}).$$

Redéfinissons les subdivisions de la manière suivante :

- soit $\hat{s}_j^{(i)} = \bar{s}_{j+\lambda_\rho^{(i)}}^{(i)} - \rho$, avec $\hat{s}_0^{(i)} = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n_s\}$;
- chaque nouvelle subdivision $\{\hat{s}_j^{(i)}\}$ possède $k_*^{(i)} + 1$ éléments, avec $k_*^{(i)} = \lambda_k^{(i)} - \lambda_\rho^{(i)}$. D'où, $\hat{s}_{k_*^{(i)}}^{(i)} = \bar{s}_{\lambda_k^{(i)}}^{(i)} - \rho$ pour tout $i \in \{1, \dots, n_s\}$;
- nous définissons la subdivision $\{\hat{\tau}_j\}$ comme étant $\{\hat{\tau}_j\} = \bigcup_i \{\hat{s}_j^{(i)}\}$. Les éléments appartenant à plusieurs subdivisions ne sont comptabilisés qu'une seule fois.

Nous pouvons donc démontrer que (III) est inférieurement borné si nous parvenons à prouver que

$$\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{k_*^{(i)}} \varphi_{\bar{a}}(T_*, \hat{s}_j^{(i)}) C^{(s_i)'} C^{(s_i)} \varphi_{\bar{a}}'(T_*, \hat{s}_j^{(i)}) (\hat{s}_j^{(i)} - \hat{s}_{j-1}^{(i)}) \quad (\text{II.25})$$

l'est, pour toutes subdivisions $\{\hat{\tau}_j\}$ et $\{\hat{s}_j^{(i)}\}$, $i \in \{1, \dots, n_s\}$, dont le pas de temps maximal est noté μ_i . Soit $\psi_{\bar{a}}(\bar{\tau}, s) = (\varphi_{\bar{a}}^{-1}(\bar{\tau}, s))'$, qui correspond à la résolvante du système $\dot{x} = \mathcal{A}(\bar{\tau})x(\bar{\tau})$. Puisque $\psi_{\bar{a}}(\bar{\tau}, s) = \psi_{\bar{a}}^{-1}(s, \bar{\tau})$, (II.25) peut se réécrire comme ceci :

$$G_{cda}(T_*) = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{k_*^{(i)}} \psi_{\bar{a}}'(\hat{s}_j^{(i)}, T_*) C^{(s_i)'} C^{(s_i)} \psi_{\bar{a}}(\hat{s}_j^{(i)}, T_*) (\hat{s}_j^{(i)} - \hat{s}_{j-1}^{(i)}) \quad (\text{II.26})$$

Cette dernière quantité définit le Grammien d'observabilité continu-discret asynchrone associé à un instant $T^* > 0$. C'est grâce à lui que nous pouvons démontrer que la matrice \bar{S}_k solution de l'équation de Riccati est inférieurement bornée. Dans ce qui suit, nous montrons qu'à condition que les pas de temps soient suffisamment petits, la matrice $G_{cda}(T_*)$ est aussi proche que souhaité du Grammien d'observabilité en temps continu. Pour cela, nous faisons appel aux deux lemmes qui suivent.

Lemme 28 ([4]).

Soit $\Psi_a(\tau, s)$ la résolvante du système non-stationnaire observable suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = \mathcal{A}(\tau)x(\tau) \\ y(\tau) = C(\tau)x(\tau) \end{cases}$$

où tous les éléments des matrices \mathcal{A} et C appartiennent à $L^\infty([0, T], \mathbb{R})$, et sont uniformément bornés par rapport à la norme L^∞ par un scalaire positif $B > 0$. Pour un $T > 0$, le Grammien d'observabilité continu est défini par :

$$G_c(T) = \int_0^T \psi_a'(v, T) C' C \psi_a(v, T) dv \quad (\text{II.27})$$

Alors, il existe des scalaires positifs $0 < a < b$ qui dépendent de B et de T uniquement, tels que

$$aId \leq G_c(T) \leq bId$$

Lemme 29.

Soit $m(t)$, $t \in [0, T]$, une matrice symétrique de dimensions $(n \times n)$, différentiable au moins une fois.

Soit μ une constante positive et $\{\bar{\tau}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, une subdivision arbitraire de $[0, T]$ telle que $\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_{j-1} \leq \mu$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, avec $\bar{\tau}_0 = 0$ et $\bar{\tau}_k$ l'élément maximal de la subdivision tel que $T - \bar{\tau}_k \leq \mu$. Nous supposons

que tous les coefficients de $m(t)$ ont leur dérivée bornée dans le temps.

Alors

$$\int_0^T m(v)dv - \sum_{j=1}^k m(\bar{\tau}_j)(\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_{j-1}) \leq \mu(KT + L)Id,$$

où $L = \sup_{\bar{\tau}} \|m(\bar{\tau})\|_2$, avec $\|\cdot\|_2$ la norme de matrice induite par la norme euclidienne, $K = \frac{n}{2} \max_{k,l,\bar{\tau}} \left(\left| m'_{k,l}(\bar{\tau}) \right| \right)$, avec $m'_{k,l}(\bar{\tau})$ l'élément de la $k^{\text{ème}}$ ligne et de la $l^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\dot{m}(\bar{\tau})$.

Démonstration. La preuve de ce lemme se base principalement sur celle du Lemme 3.11 de l'article [34], avec de petites différences détaillées dans la Remarque 3. Soit $M(t)$ la matrice primitive de $m(t)$, c'est à dire, la matrice dont les éléments sont les primitives de ceux de $m(t)$. Nous avons l'égalité suivante :

$$\int_0^T m(v)dv = M(T) - M(0) = \sum_{j=1}^k [M(\bar{\tau}_j) - M(\bar{\tau}_{j-1})] + \int_{\bar{\tau}_k}^T m(v)dv.$$

Nous pouvons procéder à un développement de Taylor-Lagrange sur chaque élément M_{kl} :

$$M_{kl}(\bar{\tau}_{i-1}) = M_{kl}(\bar{\tau}_i) + (\bar{\tau}_{i-1} - \bar{\tau}_i) m_{kl}(\bar{\tau}_i) + \frac{(\bar{\tau}_{i-1} - \bar{\tau}_i)^2}{2} \dot{m}_{kl}(\xi_{kl,i}),$$

où $\xi_{kl,i} \in [\bar{\tau}_{i-1}, \bar{\tau}_i]$. Cela entraîne la relation :

$$\sum_{i=1}^k M(\bar{\tau}_{i-1}) = \sum_{i=1}^k M(\bar{\tau}_i) + \sum_{i=1}^k m(\bar{\tau}_i)(\bar{\tau}_{i-1} - \bar{\tau}_i) + \sum_{i=1}^k \left(\frac{(\bar{\tau}_{i-1} - \bar{\tau}_i)^2}{2} \mathfrak{R}_i \right),$$

avec $(\mathfrak{R}_i)_{kl} = \dot{m}_{kl}(\xi_{kl,i})$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^T m(v)dv - \sum_{i=1}^k m(\bar{\tau}_i)(\bar{\tau}_i - \bar{\tau}_{i-1}) &= \sum_{i=1}^k [M(\bar{\tau}_i) - M(\bar{\tau}_{i-1})] - \sum_{i=1}^k (\bar{\tau}_i - \bar{\tau}_{i-1}) m(\bar{\tau}_i) + \int_{\bar{\tau}_k}^T m(v)dv \\ &= \int_{\bar{\tau}_k}^T m(v)dv - \sum_{i=1}^k \left(\frac{(\bar{\tau}_{i-1} - \bar{\tau}_i)^2}{2} \mathfrak{R}_i \right) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \end{aligned}$$

Nous utilisons à présent la définition d'inégalité matricielle afin de borner supérieurement \mathfrak{B} . Soit x un élément non nul de \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned}
x' \left[- \sum_{i=1}^k \left(\frac{(\bar{\tau}_{i-1} - \bar{\tau}_i)^2}{2} \mathfrak{R}_i \right) \right] x &= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left((\bar{\tau}_{i-1} - \bar{\tau}_i)^2 x' \mathfrak{R}_i x \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left((\bar{\tau}_{i-1} - \bar{\tau}_i)^2 \sum_{k,l} |x_k| |\mathfrak{R}_i|_{kl} |x_l| \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \mu \max_{k,l,i} (|\mathfrak{R}_i|_{kl}) \left(\sum_{i=1}^k \bar{\tau}_{i-1} - \bar{\tau}_i \right) \left(\sum_{k,l} |x_k| |x_l| \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \mu \max_{k,l,i} (|\mathfrak{R}_i|_{kl}) \left(\sum_{i=1}^k \bar{\tau}_{i-1} - \bar{\tau}_i \right) \frac{1}{2} \left(\sum_{k,l} |x_k|^2 + |x_l|^2 \right) \\
&\leq \mu \frac{n}{2} \max_{k,l,i} (|\mathfrak{R}_i|_{kl}) T \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Bornons maintenant la matrice \mathfrak{A} . Puisque $m(\bar{\tau})$ est symétrique, pour un $\bar{\tau} \in \mathbb{R}^+$ fixé, $m(\bar{\tau}) \leq \|m(\bar{\tau})\|_2 Id$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme matricielle induite par la norme euclidienne, i.e. $\|m(\bar{\tau})\|_2 = \sup_{\|x\|_2} \|m(\bar{\tau})x\|_2$.

Ainsi,

$$\int_{\bar{\tau}_k}^T m(\bar{\tau}) \leq \sup_{\bar{\tau}} \|m(\bar{\tau})\|_2 \mu Id.$$

Ces deux bornes supérieures nous permettent de conclure. □

Les deux lemmes qui précèdent nous permettent de parachever la preuve.

Lemme 30.

Considérons l'équation de Riccati (II.4), ainsi que les hypothèses données dans le Théorème 20. Soit $T_\star > T^\star$ fixé.

Alors, il existe des constantes $\mu_i > 0$, $i \in \{1, \dots, n_s\}$, et $\alpha_2 > 0$ telles que, pour toutes les subdivisions $\{\bar{s}_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{\tau}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ avec $(\bar{s}_k^{(i)} - \bar{s}_{k-1}^{(i)}) \leq \mu_i$,

$$\alpha_2 Id \leq \bar{S}_k^{(+)} \quad \text{dès lors que} \quad \bar{\tau}_k > T_\star.$$

Démonstration. Rappelons l'équation (II.26), du Grammien d'observabilité continu-discret asynchrone à l'instant $T^\star > 0$:

$$G_{cda}(T_\star) = \sum_{i=1}^{n_s} G_{cda}^{(i)}(T_\star) = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{k_\star^{(i)}} \psi_{\bar{a}}'(\hat{s}_j^{(i)}, T_\star) C^{(s_i)'} C^{(s_i)} \psi_{\bar{a}}(\hat{s}_j^{(i)}, T_\star) (\hat{s}_j^{(i)} - \hat{s}_{j-1}^{(i)}).$$

Considérons également le Grammien d'observabilité continu $G_c(T^*)$, défini dans le Lemme 28, et qui peut s'écrire :

$$G_c(T^*) = \sum_{i=1}^{n_s} \psi'_a(v, T^*) C^{(s_i)'} C^{(s_i)} \psi_a(v, T^*) = \sum_{i=1}^{n_s} G_c^{(i)}(T^*).$$

D'après le Lemme 29, pour tout $i \in \{1, \dots, n_s\}$, il existe des constantes $L > 0$ et $K_i > 0$ telles que :

$$G_c^{(i)}(T^*) - G_{acd}^{(i)}(T^*) \leq \mu_i(K_i T^* + L) Id. \quad (\text{II.28})$$

Appliquons le Lemme 28 sur $G_c(T^*)$:

$$\begin{aligned} \alpha Id &\leq G_c(T^*) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_s} G_c^{(i)}(T^*) - \sum_{i=1}^{n_s} G_{acd}^{(i)}(T^*) + \sum_{i=1}^{n_s} G_{acd}^{(i)}(T^*) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_s} G_{acd}^{(i)}(T^*) + \sum_{i=1}^{n_s} \mu_i(K_i T^* + L) Id. \end{aligned}$$

D'où

$$\left[\alpha - \sum_{i=1}^{n_s} \mu_i(K_i T^* + L) \right] Id \leq G_{acd}(T^*).$$

Par conséquent, si tous les μ_i sont tels que $(\alpha - \sum_{i=1}^{n_s} \mu_i(K_i T^* + L)) > 0$, alors, indépendamment de la structure des subdivisions $\{\hat{s}_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{\hat{\tau}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, il existe un α_2 positif tel que :

$$\alpha_2 Id \leq \bar{S}_k^{(+)}.$$

Cette borne est également valable durant les intervalles de prédiction. □

Remarque 3 (Erratum pour [34]).

La raison pour laquelle nous proposons le Lemme 29 plutôt que de simplement réutiliser le Lemma 3.11 de [34] vient du fait que le Lemme 29 aurait dû être démontré également dans [34]. En effet, l'erreur suivante — bien que n'invalidant pas le principal résultat de l'article et étant corrigée par le Lemme 29 — a été commise dans [34].

La fin de la Proposition 3.12, qui correspond au Lemme 30 du présent article repose sur la relation suivante

$$\alpha Id \leq G_c(T^*) \leq G_c(T^* + \varepsilon) \quad \text{pour } \varepsilon > 0 \quad (\text{II.29})$$

En nous penchant à nouveau sur la définition du Grammien d'observabilité (II.27), nous constatons que l'argument de $G_c(\cdot)$ joue un rôle à la fois dans la borne supérieure d'intégration, mais également dans la

définition de la matrice résolvante ψ_a . De ce fait, les intégrandes de $G_c(T^*)$ et de $G_c(T^* + \varepsilon)$ ne sont pas les mêmes fonctions, ce qui implique que II.29 n'est pas toujours vraie.

Cependant cette erreur est résolue par la méthode employée dans l'équation (II.28) ci-dessus.

II.3 Cas particulier : les systèmes linéaires

Bien que chronologiquement, nous ayons traité le cas non-linéaire [35] après le cas linéaire [33], ce dernier peut-être vu comme un cas particulier découlant du premier. L'étude de la convergence du filtre de Kalman pour des systèmes linéaires continu-discrets à mesures asynchrones repose également sur le Lemme 20 sans qu'aucune modification ne soit à y apporter. En effet, comme nous le verrons dans la section II.3.2, l'équation de Riccati est sensiblement la même dans les cas linéaire et non linéaire.

Contrairement à ce qui a été proposé dans l'article [33] présenté au CDC 2017, nous avons souhaité dans ce manuscrit généraliser la preuve à des capteurs multi-sorties. Dans l'article [33], les corrections étaient réalisées par rapport à chaque sortie et la matrice R était nécessairement diagonale. Dans ce chapitre, les capteurs pourront être associés à un groupement de sorties et la matrice R , à l'instar de celle proposée dans le cas non-linéaire présenté ci-dessus, aura la possibilité d'être diagonale par bloc.

II.3.1 Position du problème

Soit

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau), & \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(\tau) = C(\tau)x(\tau) \end{cases} \quad (\Sigma_c^l)$$

un système linéaire continu avec $\tau \in \mathbb{R}^+$, $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$, $y(\tau) \in \mathbb{R}^{n_y}$, $u(\tau) \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n \times n_u}$, $C \in \mathcal{M}_{n_y \times n}$. Nous supposons que le système (Σ_c^l) est observable dans le sens classique (cf. par exemple [36]), que les éléments de $A(\tau)$, $B(\tau)$ et $C(\tau)$ sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et sont uniformément bornés par une constante $\tilde{B} > 0$. De plus, nous supposons que tous les éléments de $C(\tau)$ sont dérivables au moins une fois et que leur dérivée est bornée dans le temps⁷.

Ce système est associé au système linéaire continu-discret à mesures asynchrones décrit ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau), & \text{with } x(0) = x_0 \\ y_k = C_{\sigma_k} x_k \end{cases} \quad (\Sigma_{cda}^l)$$

où

7. De la même façon que dans le cas non-linéaire, cette condition est nécessaire dans l'application du Lemme 29 lorsque la matrice C varie en temps

- à chaque capteur s_i est associé une subdivision de temps $\{s_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $i \in \{1, \dots, n_s\}$ et un vecteur $y^{(s_i)}(\tau) = \{y^j(\tau) : j \in s_i\}$. L'entier n_s désigne le nombre de capteurs.
- la subdivision de temps globale $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}} := \bigcup_{i=1}^{n_s} \{s_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}},$$

- où chaque élément appartenant à plusieurs subdivisions $\{s_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ n'apparaît qu'une seule fois ;
- σ_k est un ensemble et $l_k^{(i)}$ est un indice défini comme suit

$$\sigma_k = \{i \in \{1, \dots, n_s\} \mid \exists l_k^{(i)} \in \mathbb{N} \text{ tel que } s_{l_k^{(i)}}^{(i)} = \tau_k\};$$

- $x_k = x(\tau_k)$ et y_k est défini à l'aide de la matrice $C_{\sigma_k} = \begin{pmatrix} \vdots \\ C_k^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}_{i \in \sigma_k}$, où $C_k^{(i)}$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de $C(\tau_k)$, et donc $y_k^{(i)} := C_k^{(i)} x_k$. En d'autres termes, C_{σ_k} est composée des lignes de $C(\tau_k)$ correspondant aux sorties mesurées à l'instant τ_k , et $y_k \in \mathbb{R}^{|\sigma_k|}$.

II.3.2 Filtre de Kalman pour un système linéaire

Le filtre de Kalman continu-discret asynchrone est défini en deux parties pour tout $k \in \mathbb{N}$:

1. deux équations de prédiction définies pour tout $\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k[$ et ayant pour valeurs initiales $\hat{x}_{k-1}^{(+)}$ et $S_{k-1}^{(+)}$,
2. deux équations de correction à l'instant τ_k .

Nous notons

- $\hat{x}(t)$ l'état estimé pour tout $\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k[$,
- $\hat{x}_k^{(-)}$ l'état estimé à la fin d'une étape de prédiction et avant une étape de correction,
- $\hat{x}_k^{(+)}$ l'état estimé après une étape de correction. Notons que $\hat{x}_k^{(+)}$ est également l'état estimé initial du nouvel intervalle de prédiction $[\tau_k, \tau_{k+1}[$.

Equations de prédiction

$$(K_1) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(\tau) = A(\tau)\hat{x}(\tau) + B(\tau)u(\tau) \\ \dot{S}(\tau) = -A(\tau)'S(\tau) - S(\tau)A(\tau) - (SQS)(\tau) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Equations de correction

$$(K_2) \quad \begin{cases} \hat{x}_k^{(+)} = \hat{x}_k^{(-)} \\ -S_k^{(+)-1} \sum_{i \in \sigma_k} C_k^{(s_i)'} R_k^{(s_i)-1} (C_k^{(s_i)} \hat{x}_k^{(-)} - y_k^{(s_i)}) (s_{l_k}^{(i)} - s_{l_k-1}^{(i)}) \\ S_k^{(+)} = S_k^{(-)} + \sum_{i \in \sigma_k} C_k^{(s_i)'} R_k^{(s_i)-1} C_k^{(s_i)} (s_{l_k}^{(i)} - s_{l_k-1}^{(i)}) \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

En d'autres termes, les corrections sont effectuées par rapport à chaque capteur s_i fournissant des mesures à l'instant τ_k et sont pondérées par le temps écoulé depuis la dernière fois que ce capteur spécifique a fourni une mesure

Nous supposons que Q et R sont des matrices symétriques définie positive. En particulier, R est une matrice diagonale par bloc. Ces deux matrices se trouvent dans un sous-ensemble compact de la forme :

$$\begin{aligned} \underline{q} \text{ Id} &\leq Q \leq \bar{q} \text{ Id}, \quad \text{avec } 0 < \underline{q} < \bar{q}, \\ \underline{r}_i \text{ Id} &\leq R_k^{(s_i)} \leq \bar{r}_i \text{ Id}, \quad \text{avec } 0 < \underline{r}_i < \bar{r}_i, \end{aligned}$$

où $R_k^{(s_i)}$ est le $i^{\text{ème}}$ bloc de la diagonale de la matrice R . En outre, nous supposons que $S(0)$ est une matrice symétrique définie positive choisie dans un compact.

II.3.3 Preuve de convergence

De même que dans le cas non-linéaire, la preuve de convergence est plutôt immédiate dès lors que le Lemme 20 a été prouvé. Notons qu'il suffirait de se reporter à la Section II.1.3 afin de prouver la convergence de l'algorithme dans le cas linéaire, les deux preuves étant très similaires. Cependant, afin que cette Section II.3.3 se suffise à elle-même, la preuve de convergence est détaillée ci-après. Le lecteur s'intéressant uniquement à la démonstration dans le cas linéaire pourra s'y référer sans avoir à chercher des éléments de preuve ailleurs.

Nous allons prouver ici que l'état estimé $\hat{x}(\tau)$ calculé par le filtre de Kalman (II.30)-(II.31) converge vers $x(\tau)$, l'état réel de (Σ_{cda}^l) . Pour ce faire, nous définissons l'erreur d'estimation $\varepsilon(\tau) = (\hat{x} - x)(\tau)$, et nous nous intéressons à la fonction de Lyapunov $V(\varepsilon(\tau)) = (\varepsilon' S \varepsilon)(\tau)$.

Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}(\tau_k) &= (\dot{\hat{x}} - \dot{x})(\tau) = A(\tau)\varepsilon(\tau) \\
\varepsilon_k^{(+)} &= \hat{x}_k^{(+)} - x(\tau_k) \\
&= \hat{x}_k^{(-)} - x(\tau_k) - S_k^{(+)-1} \sum_{i \in \sigma_k} C_k^{(s_i)'} R_k^{(s_i)-1} (C_k^{(s_i)} \hat{x}_k^{(-)} - y_k^{(s_i)}) \left(s_{l_k^{(i)}}^{(i)} - s_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right) \\
&= \varepsilon_k^{(-)} \\
&\quad - S_k^{(+)-1} \sum_{i \in \sigma_k} C_k^{(s_i)'} R_k^{(s_i)-1} C_k^{(s_i)} \varepsilon_k^{(-)} \left(s_{l_k^{(i)}}^{(i)} - s_{l_k^{(i)-1}}^{(i)} \right).
\end{aligned} \tag{II.32}$$

Cette dernière équation peut être réécrite de manière plus compacte grâce aux notations suivantes. Tout d'abord, soit I_{σ_k} la matrice diagonale ci-dessous, avec $m_k = |\sigma_k|$:

$$I_{\sigma_k} := \begin{pmatrix} s_{l_k^{(i_1)}}^{(i_1)} - s_{l_k^{(i_1)-1}}^{(i_1)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & & s_{l_k^{(i_{m_k})}}^{(i_{m_k})} - s_{l_k^{(i_{m_k})-1}}^{(i_{m_k})} \\ & 0 & & \end{pmatrix}.$$

De plus, la matrice R_{σ_k} est définie de la même manière que C_{σ_k} :

$$R_{\sigma_k} = \text{diag} \left[\left\{ R_k^{(s_i)} : i \in \sigma_k \right\} \right].$$

Notons $\bar{R}_{\sigma_k}^{-1} := R_{\sigma_k}^{-1} I_{\sigma_k}$. Cette dernière matrice est bien définie puisque I_{σ_k} est clairement inversible grâce à la définition d'une subdivision de temps. L'équation ci-dessus peut alors être reformulée :

$$\varepsilon_k^{(+)} = \varepsilon_k^{(-)} - S_k^{(+)-1} C_{\sigma_k}' \bar{R}_{\sigma_k}^{-1} C_{\sigma_k} \varepsilon_k^{(-)}. \tag{II.33}$$

Il est à présent nécessaire de calculer la dérivée de $V(\varepsilon)$ par rapport au temps, ainsi que l'expression de $V(\varepsilon)$ après une étape de correction.

Pour $\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} V(\varepsilon) &= \frac{d\varepsilon' S \varepsilon}{d\tau} \\
&= \dot{\varepsilon}' S \varepsilon + \varepsilon' (\dot{S} \varepsilon + S \dot{\varepsilon}) \\
&= \varepsilon' A' S \varepsilon + \varepsilon' (-A' S - S A - S Q S) + \varepsilon' S A \varepsilon \\
&= -\varepsilon' S Q S \varepsilon.
\end{aligned}$$

A l'instant τ_k ,

$$\begin{aligned} (\varepsilon' S \varepsilon)_k^{(+)} &= \varepsilon_k^{(-)'} [S_k^{(+)} - 2C'_{\sigma_k} \bar{R}_{\sigma_k}^{-1} C_{\sigma_k} \\ &+ C'_{\sigma_k} \bar{R}_{\sigma_k}^{-1} C_{\sigma_k} S_k^{(+)-1} C'_{\sigma_k} \bar{R}_{\sigma_k}^{-1} C_{\sigma_k}] \varepsilon_k^{(-)} \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

$$= \varepsilon_k^{(-)'} [S_k^{(-)-1} S_k^{(+)} S_k^{(-)-1}]^{-1} \varepsilon_k^{(-)}, \quad (\text{II.35})$$

où la transition entre (II.34) et (II.35) découle de (II.31) réécrite sous la forme :

$$S_k^{(+)} - S_k^{(-)} = C'_{\sigma_k} \bar{R}_{\sigma_k}^{-1} C_{\sigma_k}.$$

En utilisant de nouveau (II.31) :

$$S_k^{(-)-1} S_k^{(+)} S_k^{(-)-1} = S_k^{(-)-1} + S_k^{(-)-1} C'_{\sigma_k} \bar{R}_{\sigma_k}^{-1} C_{\sigma_k} S_k^{(-)-1}.$$

Le lemme d'inversion matricielle (cf. Lemme 31, Annexe A) entraîne

$$\begin{aligned} [S_k^{(-)-1} S_k^{(+)} S_k^{(-)-1}]^{-1} &= [S_k^{(-)-1} + S_k^{(-)-1} C'_{\sigma_k} \bar{R}_{\sigma_k}^{-1} C_{\sigma_k} S_k^{(-)-1}]^{-1} \\ &= S_k^{(-)} - C'_{\sigma_k} (\bar{R}_{\sigma_k} + C_{\sigma_k} S_k^{(-)-1} C'_{\sigma_k})^{-1} C_{\sigma_k} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} (\varepsilon' S \varepsilon)_k^{(+)} &= (\varepsilon' S \varepsilon)_k^{(-)} \\ &- \varepsilon_k^{(-)'} C'_{\sigma_k} (\bar{R}_{\sigma_k} + C_{\sigma_k} S_k^{(-)-1} C'_{\sigma_k})^{-1} C_{\sigma_k} \varepsilon_k^{(-)} \\ \frac{d\varepsilon' S \varepsilon}{d\tau}(\tau) &= -(\varepsilon' S Q S \varepsilon)(\tau) \end{cases}$$

A l'instant τ_k , le second terme de l'expression de droite de (II.36) est semi-défini positif, puisque $S(\tau)$ est défini positif pour tout $\tau \in \mathbb{R}^+$ d'après le Lemme 20. Par conséquent,

$$(\varepsilon' S \varepsilon)_k^{(+)} \leq (\varepsilon' S \varepsilon)_k^{(-)}.$$

Puisque $\frac{dV}{d\tau} < 0$ est décroissante sur l'intervalle $[\tau_{k-1}, \tau_k[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ainsi qu'après un pas de temps discret, nous en concluons que $\frac{dV}{d\tau} < 0$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}^+$. Par conséquent, $\varepsilon = (\hat{x} - x)(\tau) = 0$ est un point asymptotiquement stable.

De plus, cette convergence est exponentielle. En effet, grâce au Lemme 20 :

$$\frac{d\varepsilon' S \varepsilon}{d\tau}(\tau) = -(\varepsilon' S Q S \varepsilon)(\tau)$$

$$\begin{aligned}
& \leq -\alpha\bar{q}(\varepsilon'S\varepsilon)(\tau) \\
\varepsilon'S\varepsilon(\tau) & \leq (\varepsilon'S\varepsilon)(0)e^{-\alpha\bar{q}\tau} \\
\|\varepsilon(\tau)\|^2 & \leq \frac{\beta}{\alpha}\|\varepsilon(0)\|^2 e^{-\alpha\bar{q}\tau}.
\end{aligned}$$

□

Nous avons proposé dans ce chapitre une adaptation du filtre de Kalman étendu grand-gain pour des systèmes à mesures asynchrones et nous avons prouvé sa convergence. Celle-ci est possible dès lors que la matrice S solution de l'équation de Riccati intervenant dans les équations de l'algorithme est inférieurement et supérieurement bornée. Ces bornes, difficiles à quantifier, dépendent de constantes de Lipschitz et de bornes de compacité. Elles permettent cependant d'affirmer qu'à condition que les mesures ne soient pas trop distantes les unes des autres dans le temps — c'est à dire que le pas maximal d'échantillonnage de chaque capteur ne doit pas être trop grand—, il est possible de choisir un gain θ suffisamment grand tel que l'algorithme converge vers zéro — i.e. tel que l'erreur entre l'état estimé fourni par l'observateur et l'état réel du système tende vers zéro. Nous étudierons dans le chapitre suivant quelques mises en pratique de cet algorithme.

APPLICATIONS

III.1 Exemple académique	73
III.2 Application de l'algorithme à un système 2D en simulation	76
III.3 Application à un système robotique mobile 2D	87
III.3.1 Présentation de la plateforme expérimentale	87
III.3.2 Calibration et vérité terrain	87
III.3.3 Détection des balises	89
III.3.4 Estimation de la trajectoire	90

Ce chapitre a pour objectif de présenter des applications de notre adaptation du filtre de Kalman pour des systèmes continus-discrets asynchrones. La Section III.1 expose un exemple académique simple et permet de mieux appréhender les notations introduites dans le chapitre précédent. La Section III.2 propose une application à un système 2D en simulation. Pour cela, nous simulons à l'aide du logiciel Matlab la trajectoire d'un bateau dans le plan et en proposons une estimation pour un état initial choisi arbitrairement. Les mesures utilisées sont construites de toutes pièces afin de reproduire le signal détecté par un capteur d'angle embarqué et sont par construction asynchrones et alternées. La Section III.3 propose de transposer cette étude à un système robotique mobile 2D et de se confronter à la réalité physique. Bien que le robot soit modélisé par les mêmes équations que le bateau de la Section III.2, la principale difficulté réside dans le traitement des mesures. Pour les deux expériences menées sur ce robot, le filtre de Kalman continu-discret asynchrone est implémenté hors ligne et sa convergence illustrée.

III.1 Exemple académique

Afin de mieux comprendre les notations employées dans le chapitre précédent et introduire les applications en simulation et sur robot des Sections III.2 et III.3 de ce chapitre, un exemple académique est proposé ici. Nous considérons dans cette section un système linéaire à quatre états et à deux sorties, construit de telle manière que le système est observable lorsque nous obtenons des mesures des deux sorties simultanément, mais qui cesse de l'être lorsqu'une seule sortie est disponible.

Les équations d'état sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & 0 & \sin(t) \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\sin(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix} x(t) \\ &= A(t)x(t). \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Le vecteur de sorties $y(t_k) \in \mathbb{R}^2$ est donné par :

$$\begin{aligned} y(t_k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t_k) \\ &= Cx(t_k). \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Afin d'illustrer la convergence de notre observateur continu-discret asynchrone, nous faisons le choix de ne pas obtenir ces deux mesures aux mêmes instants. Les mesures correspondant à la première composante du vecteur de sortie nous sont données par un capteur noté s_1 et celles correspondant à la seconde ligne, par un capteur s_2 . Chacun de ces capteurs possède sa propre subdivision de temps.

L'échantillonnage de ces capteurs n'est pas uniforme et a été généré en modifiant un échantillonnage régulier — de période de 0.3 pour la sortie $y^{(1)}(t)$, et 0.25 pour la sortie $y^{(2)}(t)$ — de manière aléatoire. Le pas d'échantillonnage maximum obtenu est de 0.41 pour la subdivision $\{s_k^{(1)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, de 0.40 pour la subdivision $\{s_k^{(2)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ et le pas maximal de la subdivision de temps globale $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est quant à lui égal à 0.35. La Figure III.1 met en évidence la structure de ces trois subdivisions. Elle illustre notamment la construction des σ_k . En effet, à un instant τ_k donné — les τ_k sont lisibles en abscisse —, l'ordonnée des points colorés ayant la même abscisse que τ_k constituent les éléments de σ_k .

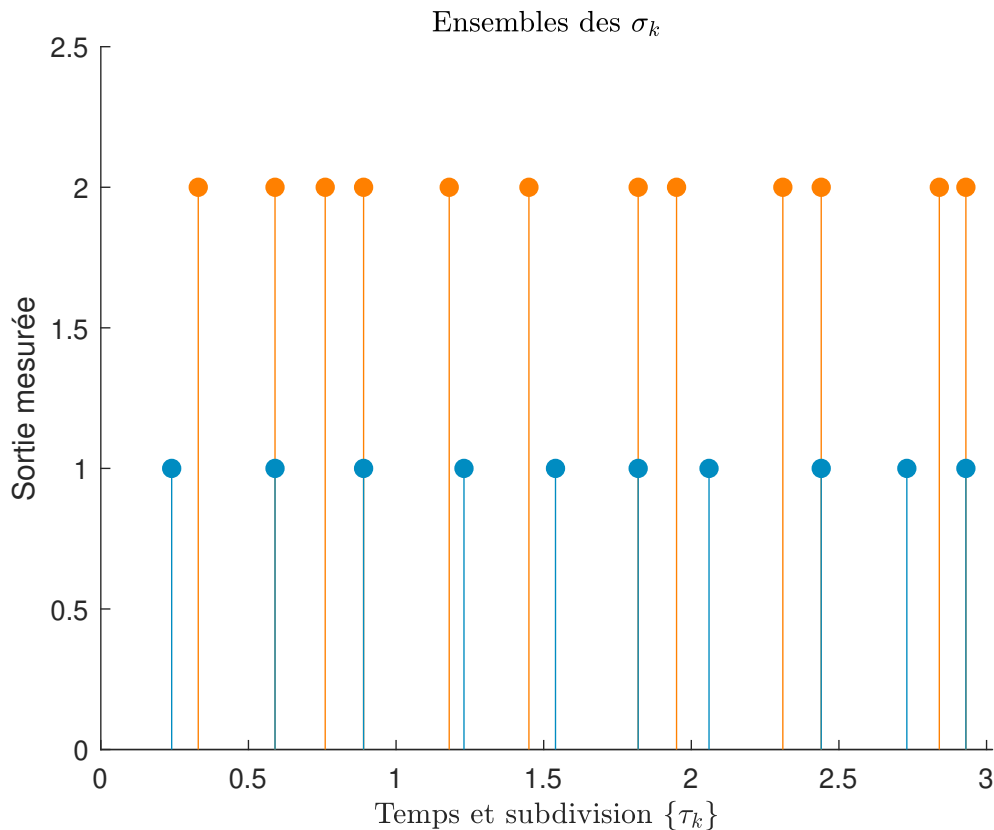


FIGURE III.1 – Ensemble des σ_k et subdivisions : chaque point correspond à une sortie mesurée.

Ce schéma nous indique qu'à l'instant τ_1 , seule la mesure du premier capteur est donnée. L'ensemble σ_1 contient donc l'indice 1. Nous notons $\sigma_1 = \{1\}$ et $\tau_1 = s_1^{(1)}$. A l'instant τ_2 , seule la sortie 2 intervient. Donc $\sigma_2 = \{2\}$ et $\tau_2 = s_1^{(2)}$. A l'instant τ_3 , nous constatons que les deux sorties sont disponibles. Cela se traduit par $\sigma_3 = \{1, 2\}$ et $\tau_3 = s_2^{(1)} = s_2^{(2)}$. Nous voyons apparaître un décalage entre les indices de la subdivision globale $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et les subdivisions $\{s_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2\}}$. C'est ce décalage qui a motivé la création de subdivisions associées aux capteurs et leur dissociation de la subdivision τ_k .

La Figure III.2 représente les courbes des sorties $y^{(1)}(t)$, et $y^{(2)}(t)$, continues et échantillonnées, les courbes continues n'étant tracées qu'à titre indicatif.

D'après [36, 37], il est aisé de se s'assurer que le système continu composé des équations (III.1)-(III.2) est observable^{1 2}. Cependant, l'observabilité est perdue dès lors que la matrice $C(t)$ est réduite à une seule de ses deux lignes.

La Figure III.3 illustre le résultat d'une simulation de l'observateur asynchrone linéaire. L'état initial du système est $x(0) = (1, 1, 1, 1)$. L'état initial de l'observateur est fixé à $\hat{x}(0) = (3, 4, 5, 6)$. Nous choisissons les matrices Q et R égales à l'identité.

1. D'après [36], Chapitre 6, si les matrices A et C sont réelles analytiques sur un intervalle $\mathcal{I} = [\sigma, \tau]$ et si $t_0 \in \mathcal{I}$ est un point arbitrairement choisi sur cet intervalle alors l'observabilité du système sur \mathcal{I} est équivalente à

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C_0(t_0) \\ C_1(t_0) \\ \dots \\ C_k(t_0) \end{pmatrix} = n \quad \text{pour un certain } k,$$

avec

$$C_0(t) := C(t)$$

et

$$C_{i+1}(t) := -C_i(t)A(t) - \frac{d}{dt}C_i(t)$$

pour $t \in \mathcal{I}$.

$$\begin{aligned} C_0(t) &= C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ C_1(t) &= -C_0(t)A(t) - \frac{d}{dt}C_0(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & 0 & \sin(t) \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\sin(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice $\begin{pmatrix} C_0(t_0) \\ C_1(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang plein et le système continu composé des équations (III.1)-(III.2)

est donc observable.

2. En particulier, d'après les notations de [37], l'index d'observabilité vaut 2.

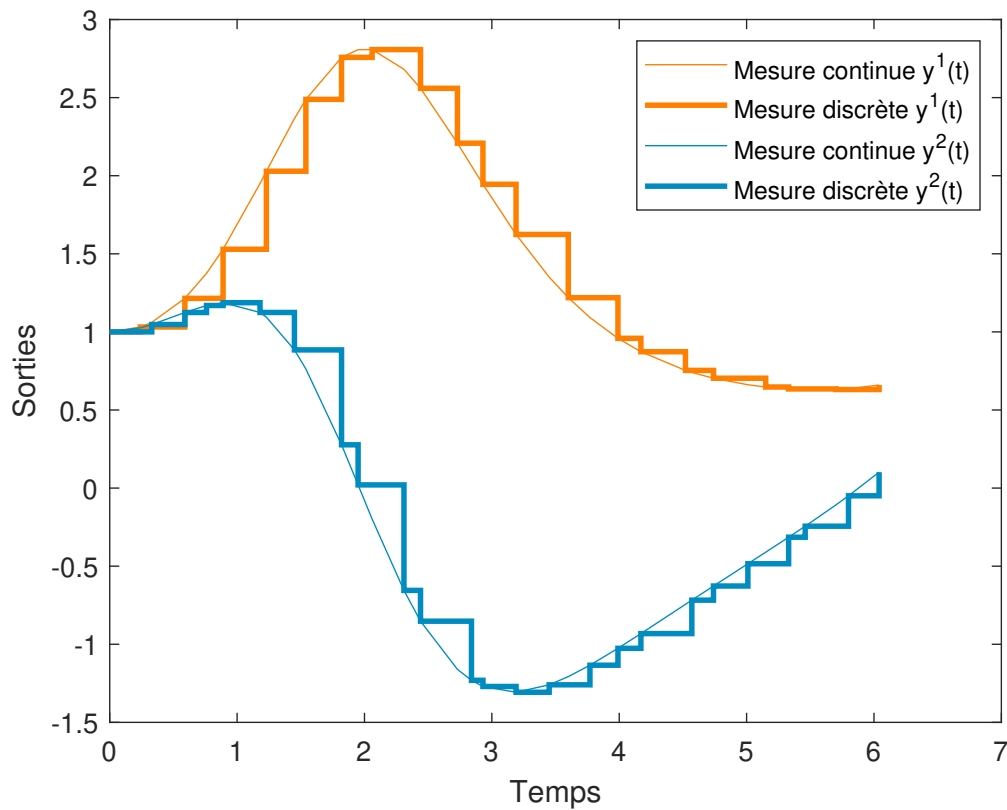


FIGURE III.2 – Sorties mesurées (les sorties continues sont données à titre indicatif).

Afin de débiter l'expérience avec une matrice $S(0)$ adéquate, nous avons tout d'abord exécuté l'observateur pour une matrice $S(0)$ égale à la matrice solution de l'équation de Riccati algébrique à l'instant $t = 0$. Cette procédure nous a fourni une matrice solution de l'équation de Riccati stabilisée qui est celle utilisée en tant que $S(0)$ dans notre expérience.

III.2 Application de l'algorithme à un système 2D en simulation

Pour cette simulation, nous considérons un bateau évoluant dans un espace délimité par deux balises que nous nommons A et B (cf. Figure III.4). Nous notons :

- \mathcal{X}^r , le repère orthonormé centré en A dont l'axe des abscisses \mathcal{X}_1^r est donné par la direction du vecteur directeur de la droite reliant la balise A à la balise B,
- $(x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$ la position du bateau par rapport au repère \mathcal{X}^r ,
- \mathcal{X}_1^b définit l'axe des abscisses du référentiel lié au bateau,

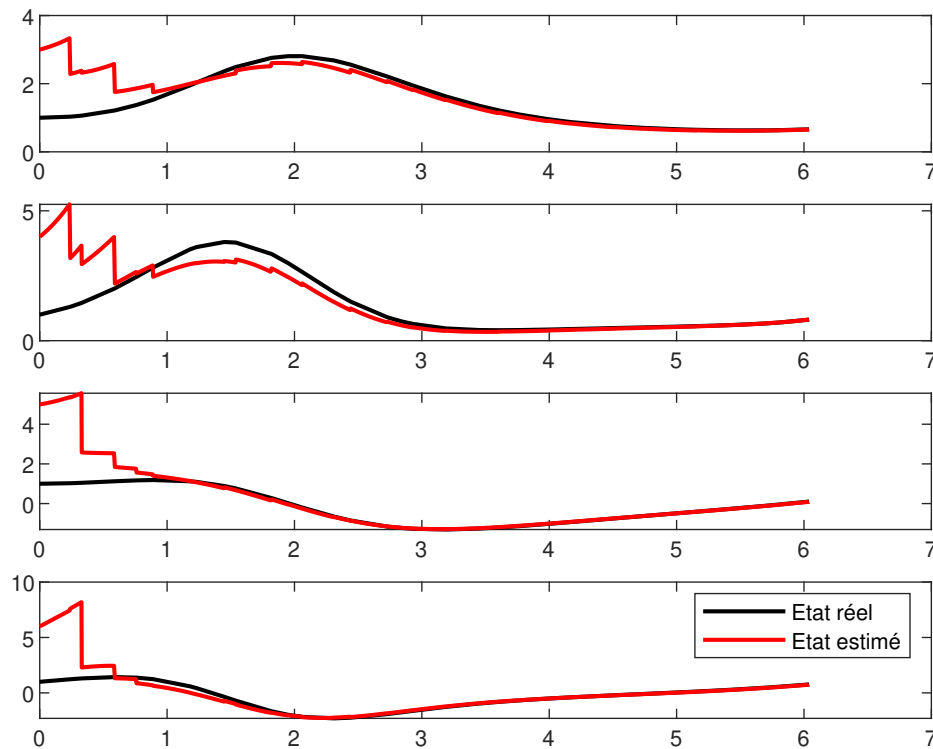


FIGURE III.3 – Convergence de l'état estimé vers l'état réel du système.

- $\gamma \in \mathbb{R}$ est l'orientation du bateau , i.e. l'angle formé par les axes \mathcal{X}_1^r et \mathcal{X}_1^b , représentés sur la Figure III.4a,
- $X = (x_1, x_2, \gamma)' \in \mathbb{R}^3$ l'état du système³.

Chacune des balises émet un signal détecté par un capteur d'angle embarqué. Ce dernier consiste en une cavité orientée en rotation qui guide le signal jusqu'à un capteur électronique. Ainsi, le signal émis par une balise donnée est détecté lorsque la cavité orientée est sur la droite bateau-balise correspondante⁴. Ce mécanisme fournit une mesure de l'angle formé par l'axe \mathcal{X}_1^b et la droite bateau-balise. De plus, nous supposons que le signal émis par la balise A fournit la distance entre la balise A et le bateau.

3. L'angle γ est exprimé en radians. Cependant, puisqu'il s'agit d'une simulation, il n'est pas vraiment pertinent de préciser les unités de x_1 et x_2

4. Droite bateau-balise : il s'agit de la droite passant par $(x_1, x_2)'$ et le centre de la balise en question.

La dynamique du bateau est modélisée par le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(\tau) = v(\tau) \cos(\gamma(\tau)) \\ \dot{x}_2(\tau) = v(\tau) \sin(\gamma(\tau)) \\ \dot{\gamma}(\tau) = u(\tau) \end{cases} \quad (\Sigma_{\text{Bateau}})$$

où $u(\tau)$ et $v(\tau)$ correspondent respectivement à la vitesse linéaire et à la vitesse de rotation données en entrée.

Les équations de sortie sont les suivantes

$$\begin{cases} \varphi_1(\tau) = \arctan\left(\frac{y(\tau)}{x(\tau)}\right) + \pi - \gamma \\ \rho_1(\tau) = \sqrt{(x(\tau))^2 + (y(\tau))^2} \\ \varphi_2(\tau) = \arctan\left(\frac{y(\tau)}{x(\tau) - x_B}\right) + \pi - \gamma \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

où φ_1 est l'angle entre l'axe \mathcal{X}_1^b et la droite qui relie le bateau à la balise $A = (0, 0)$, ρ_1 est la distance du bateau à la balise A et φ_2 est l'angle que forme le bateau avec la balise $B = (x_B, 0)$.

Afin de simplifier les équations de sortie, le système est réécrit sous la forme de deux systèmes en coordonnées polaires, l'un centré sur la balise A et l'autre centré sur la balise B – cf Figure III.4. Nous définissons les angles α_1 et α_2 ainsi que les distances ρ_1 et ρ_2 comme suit :

- $x_1 = \rho_1 \cos(\alpha_1)$ et $x_2 = \rho_1 \sin(\alpha_1)$,
- $x_1 = x_B + \rho_2 \cos(\alpha_2)$ et $x_2 = \rho_2 \sin(\alpha_2)$.

La dynamique du bateau ainsi que son vecteur de sortie $y(t)$ s'expriment alors en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1$ ou ρ_2 .

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho}_1 \cos \alpha_1 - \rho_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 = v \cos \gamma \\ \dot{y} = \dot{\rho}_1 \sin \alpha_1 + \rho_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 = v \sin \gamma \\ \dot{x} = \dot{\rho}_2 \cos \alpha_2 - \rho_2 \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 = v \cos \gamma \\ \dot{y} = \dot{\rho}_2 \sin \alpha_2 + \rho_2 \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 = v \sin \gamma \end{cases} \quad \text{et} \quad y(t) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \rho_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} \pi + \alpha_1 - \gamma \\ \rho_1 \\ \pi + \alpha_2 - \gamma \end{pmatrix}$$

Calculons la valeur de $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\rho}_1$ et $\dot{\rho}_2$. Tout d'abord, nous savons que $\rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Donc,

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{1}{2}(2x\dot{x} + 2y\dot{y}) \\ &= v\rho_1(\cos \alpha_1 \cos \gamma + \sin \alpha_1 \sin \gamma) \frac{1}{\rho_1^2(\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1)} \end{aligned}$$

$$= v \cos(\alpha_1 - \gamma). \quad (\text{III.4})$$

Remplaçons à présent $\dot{\rho}_1$ par (III.4) dans les expressions de \dot{x} et \dot{y} .

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho}_1 \cos \alpha_1 - \rho_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 = v \cos \gamma \\ \dot{y} = \dot{\rho}_1 \sin \alpha_1 + \rho_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 = v \sin \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 \sin \alpha_1 \dot{\alpha}_1 = -v \cos \gamma + v \cos(\alpha_1 - \gamma) \cos \alpha_1 \\ \rho_1 \cos \alpha_1 \dot{\alpha}_1 = v \sin \gamma - v \cos(\alpha_1 - \gamma) \sin \alpha_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 \sin \alpha_1 \dot{\alpha}_1 = -v \cos \gamma + v \cos^2 \alpha_1 \cos \gamma + v \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \sin \gamma & (\text{L1}) \\ \rho_1 \cos \alpha_1 \dot{\alpha}_1 = v \sin \gamma - v \cos^2 \alpha_1 \cos \gamma \sin \alpha_1 - v \sin^2 \alpha_1 \sin \gamma & (\text{L2}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\text{L1}) \Leftrightarrow \dot{\alpha}_1 &= \frac{-v \cos \gamma (\cos^2 \alpha_1 - 1) + v \sin \alpha_1 \sin \gamma \cos \alpha_1}{\rho_1 \sin \alpha_1} \\ &= \frac{-v \cos \gamma \sin^2 \alpha_1 + v \sin \alpha_1 \sin \gamma \cos \alpha_1}{\rho_1 \sin \alpha_1} \\ &= \frac{v}{\rho_1} [-\cos \gamma \sin \alpha_1 + \sin \gamma \cos \alpha_1] \\ &= \frac{v}{\rho_1} \sin(\gamma - \alpha_1). \end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{\rho}_2 = -v \cos(\alpha_2 - \gamma) \\ \dot{\alpha}_2 = \frac{v}{\rho_2} \sin(\gamma - \alpha_2). \end{cases}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, la dynamique du bateau ainsi que son vecteur de sortie $y(t)$ s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \frac{v}{\rho_1} \sin(\gamma - \alpha_1) \\ \dot{\rho}_1 = v \cos(\gamma - \alpha_1) \\ \dot{\alpha}_2 = \frac{v}{\rho_2} \sin(\gamma - \alpha_2) \\ \dot{\rho}_2 = v \cos(\gamma - \alpha_2) \\ \dot{\gamma} = u \end{cases} \quad \text{et} \quad y(t) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \rho_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi + \alpha_1 - \gamma \\ \rho_1 \\ \pi + \alpha_2 - \gamma \end{pmatrix}. \quad (\text{III.5})$$

Exprimons le système sous une forme normale d'observabilité. Pour cela, posons $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \rho_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$.

Alors, en notant que $\gamma - \alpha_1 = \pi - z_1$ et $\gamma - \alpha_2 = \pi - z_3$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{\alpha}_1 - \gamma + \pi \\ = \frac{v}{z_2} \sin(\pi - z_1) - \gamma + \pi \\ \dot{z}_2 = \dot{\rho}_1 = v \cos(\pi - z_1) \\ \dot{z}_3 = \dot{\alpha}_2 - \gamma + \pi \\ = \frac{v}{\tilde{\rho}_2} \sin(\pi - z_3) - \gamma + \pi \end{cases}$$

où $\tilde{\rho}_2$ s'exprime en fonction de z_1, z_2 et z_3 grâce à la formule d'Al-Kashi. Soit $\xi = z_3 - z_1$ l'angle que forme le bateau avec les balises A et B. La formule d'Al-Kashi entraine :

$$\begin{aligned} \text{distance}_{AB}^2 &= \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \xi \\ \Leftrightarrow x_B^2 &= z_2^2 + \rho_2^2 - 2z_2\rho_2 \cos \xi \\ \Leftrightarrow \rho_2^2 + z_2^2 - x_B^2 - 2z_2 \cos \xi \rho_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta &= 4z_2^2 \cos^2 \xi - 4(z_2^2 - x_B^2) = 4(x_B^2 - z_2^2 \sin^2 \xi) \end{aligned}$$

La distance ρ_2 peut alors prendre l'une des deux formes suivantes : $\rho_{2,1} = z_2 \cos \xi - \sqrt{x_B^2 - z_2^2 \sin^2 \xi}$ ou $\rho_{2,2} = z_2 \cos \xi + \sqrt{x_B^2 - z_2^2 \sin^2 \xi}$. Afin que ρ_2 soit toujours positive, nous faisons le choix de retenir l'expression $\rho_{2,2}$. En effet, $\rho_{2,1}$ n'est une quantité positive que si $z_2 > x_B$, ce qui n'est pas toujours garanti. Nous posons donc $\tilde{\rho}_2 = \rho_{2,2} = z_2 \cos \xi + \sqrt{x_B^2 - z_2^2 \sin^2 \xi}$ qui est toujours positif à condition que le bateau évolue dans l'espace défini dans la Figure III.4.

La forme normale d'observabilité du système (III.5) que nous obtenons est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v \sin(z_1)}{z_2} - u \\ -v \cos(z_1) \\ \frac{v \sin(z_3)}{\tilde{\rho}_2(z_1, z_2, z_3)} - u \end{pmatrix}. \quad (\Sigma_N)$$

Puisque notre objectif est d'estimer la trajectoire du bateau, il est indispensable de s'assurer que le système (Σ_{Bateau}) est observable. A cette fin, montrons qu'il est possible de trouver un changement de coordonnées transformant (Σ_N) en (Σ_{Bateau}) .

En effet la position exacte du bateau peut être obtenue de la connaissance de φ_1, φ_2 et ρ_1 (plus exactement, de la connaissance de $\varphi_2 - \varphi_1$). L'orientation du bateau en découle assez facilement.

Vérifions que le système est observable, i.e. que nous retrouvons la position du bateau (x, y, θ) dans le repère cartésien grâce à la connaissance de (z_1, z_2, z_3) . Les distances ρ_1, ρ_2 et R_C correspondent respectivement aux rayons des cercles de centre A, B et C où C est le centre du cercle circonscrit au triangle A-B-Bateau. Les coordonnées (x_C, y_C) de ce point C sont donc variantes en temps.

$$\begin{cases} z_2^2 = x^2 + y^2 \\ \tilde{\rho}_2^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \\ R_C^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_2^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x = \sqrt{z_2^2 - y^2} & \text{si nous supposons que } x > 0, \\ & \text{i.e. si le robot ne traverse pas l'axe } \mathcal{X}_2^r, \\ \tilde{\rho}_2^2 = (\sqrt{z_2^2 - y^2} - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \\ R_C^2 = (\sqrt{z_2^2 - y^2} - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x = \sqrt{z_2^2 - y^2} \\ \tilde{\rho}_2^2 = \sqrt{z_2^2 - y^2}^2 + x_B^2 - 2\sqrt{z_2^2 - y^2}x_B + y^2 + y_B^2 - 2yy_B & \text{(L2)} \\ R_C^2 = \sqrt{z_2^2 - y^2}^2 + x_C^2 - 2\sqrt{z_2^2 - y^2}x_C + y^2 + y_C^2 - 2yy_C & \text{(L3)} \end{cases}$$

$$x_C(\text{L2}) - x_B(\text{L3})$$

$$\Rightarrow z_2^2 x_C + x_C x_B^2 - 2yy_B x_C + y_B^2 x_C - z_2^2 x_B - x_B x_C^2 + 2yy_C x_B - y_C^2 x_B = \tilde{\rho}_2^2 x_C - R_C^2 x_B$$

$$\begin{aligned}
&\implies 2y(y_C x_B - y_B x_C) = +z_2^2 x_C - x_C x_B^2 - y_B^2 x_C + z_2^2 x_B + x_B x_C^2 + y_C^2 x_B + \tilde{\rho}_2^2 x_C - R_C^2 x_B \\
&\implies y = \frac{z_2^2 x_C - x_C x_B^2 - y_B^2 x_C + z_2^2 x_B + x_B x_C^2 + y_C^2 x_B + \tilde{\rho}_2^2 x_C - R_C^2 x_B}{2(y_C x_B - y_B x_C)}, \tag{III.6}
\end{aligned}$$

avec

$$(x_C, y_C) = \left(\frac{y_B - y_A + \tan \xi (x_A + x_B)}{2 \tan \xi}, \frac{x_A x_B + \tan \xi (y_A + y_B)}{2 \tan \xi} \right)$$

et

$$\begin{aligned}
R_C = &\left(\frac{y_B - y_A + \tan \xi (x_A + x_B)}{2 \tan \xi} \right)^2 + \left(\frac{x_B - x_A + \tan \xi (y_A + y_B)}{2 \tan \xi} \right)^2 \\
&+ \frac{1}{\tan \xi} (y_A x_B - y_B x_A) - x_A x_B - y_A y_B.
\end{aligned}$$

Les quantités $\tilde{\rho}_2, x_C, y_C$ et R_C dépendent donc uniquement de la position des balises A et B ainsi que des variables z_1, z_2, z_3 . D'après l'expression (III.6), $y(t)$ peut donc être déduit de l'état du système sous la forme normale d'observabilité (Σ_N). L'égalité $x = \sqrt{z_2^2 - y^2}$ permet d'obtenir $x(t)$ à partir de

$y(t)$ et de $z_2(t)$. Pour finir, étant donné que $\begin{cases} x = \rho_1 \cos \alpha_1 \\ y = \rho_1 \sin \alpha_1 \end{cases}$, nous calculons $\alpha_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ et

puisque $z_1 = \pi + \alpha_1 - \gamma$, nous obtenons $\gamma(t)$ aisément. Le système étudié est donc observable.

Cependant, sans la mesure des deux angles φ_1 et φ_2 à un instant donné, l'observabilité est perdue. Étant donné que le capteur d'angle et de distance est en rotation, les mesures obtenues sont nécessairement asynchrones. L'algorithme proposé dans cette thèse peut donc être employé afin d'estimer la trajectoire du bateau.

Les sorties du système (III.5) ci-dessus sont décomposées sous la forme de deux capteurs « virtuels » ayant chacun une période d'échantillonnage différente : d'une part, $s_1 = \{1, 2\}$ regroupant les mesures φ_1 et ρ_1 et d'autre part, $s_2 = \{3\}$ correspondant à la mesure φ_2 .

Nous considérons la trajectoire du bateau représentée sur la Figure III.5a. La vitesse du bateau (i.e. $v(\tau)$) est maintenue constante excepté lorsque $\tau \in [5, 10]$ pour lesquels $v(\tau)$ est augmenté à une valeur constante supérieure. L'état initial du système est $X(0) = (1, 6, 1)$ et l'état initial de l'observateur est arbitrairement choisi dans les coordonnées normales⁵. La valeur initiale de $S(0)$ solution de l'équation de Riccati est paramétrée en résolvant une équation algébrique de Riccati utilisant les informations disponible à l'instant $t = 0$.

La trajectoire estimée est comparée à la trajectoire réelle du bateau sur la Figure III.6. Nous savons que plus le gain θ est élevé, plus la convergence de l'observateur est rapide. Nous avons

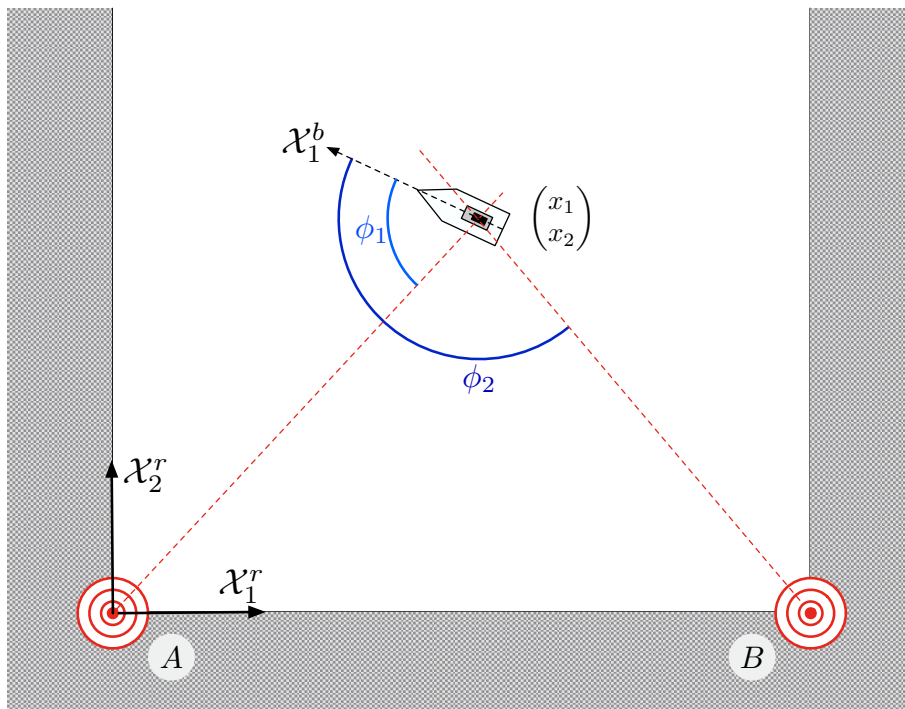
5. Il en résulte que l'état estimé initial manque de consistance par rapport au problème physique, ce qui rend la tâche plus ardue pour l'observateur.

réalisé différentes simulations pour différentes valeurs de θ . Comme cela est attendu par la théorie, nous avons constaté une convergence plus rapide pour un paramètre de grand gain plus élevé. La Figure III.6a illustre cela à travers deux estimations pour deux valeurs différentes de θ . Lors des simulations, nous avons noté que l'observateur ne parvient pas à converger pour une valeur de grand gain égale à 1. Ceci est en accord avec la théorie qui prouve uniquement la convergence locale du filtre de Kalman étendu. La Figure III.6b met en valeur les performances de l'observateur lorsqu'un bruit additif est injecté dans le vecteur de sortie. Nous utilisons un bruit gaussien⁶ coloré par un filtre discret du premier ordre, et illustré dans la Figure III.5b. En raison de la sensibilité au bruit bien connue des observateurs grand-gain, nous n'avons considéré que la plus faible valeur du paramètre grand-gain lors de cette seconde expérience. Il pourrait être intéressant d'étudier ce compromis entre l'efficacité de convergence du filtre de Kalman étendu grand gain pour des systèmes continu-discrets à mesures asynchrones et sa robustesse par rapport au bruit de mesure. Cette étude pourrait être réalisée à l'aide d'un schéma adaptatif pour le paramètre de grand gain, dans l'esprit des articles [5, 38, 39].

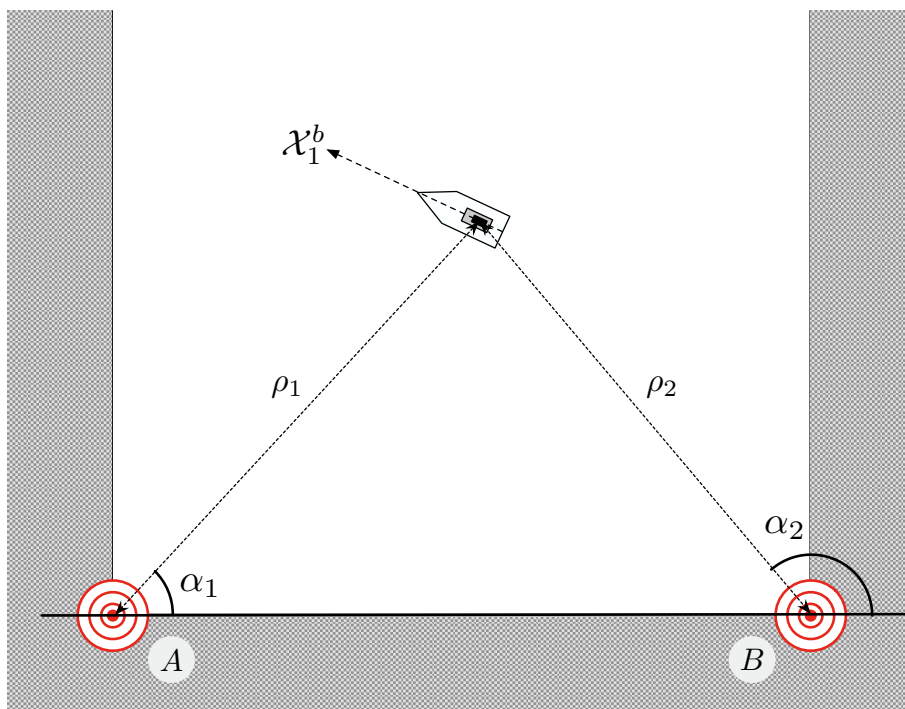
Pour finir, nous présentons dans la troisième et dernière partie de ce chapitre une application en robotique mobile. Dans le cadre de cette expérience, nous utilisons un robot 2D non holonome dont la mission est de naviguer sur un terrain plat comportant deux balises cylindriques .

6. De déviation standard égale à 0.1 radian pour les mesures d'angle, et de 1 unité pour les mesures de distance. Cette valeur nous a semblé significative pour un angle en radian. Pour ce qui est de la distance, cette déviation nous a paru conséquente pour le capteur de distance. Ce choix a été motivé par les observations suivantes :

- la transformation non linéaire permettant d'exprimer la trajectoire en coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées normales est davantage sensible aux variations d'angle qu'aux variations de distance,
- lors des expériences menées en conditions réelles (cf Section III.3), nous avons constaté que les mesures de distances sont moins fiables que les mesures d'angles.

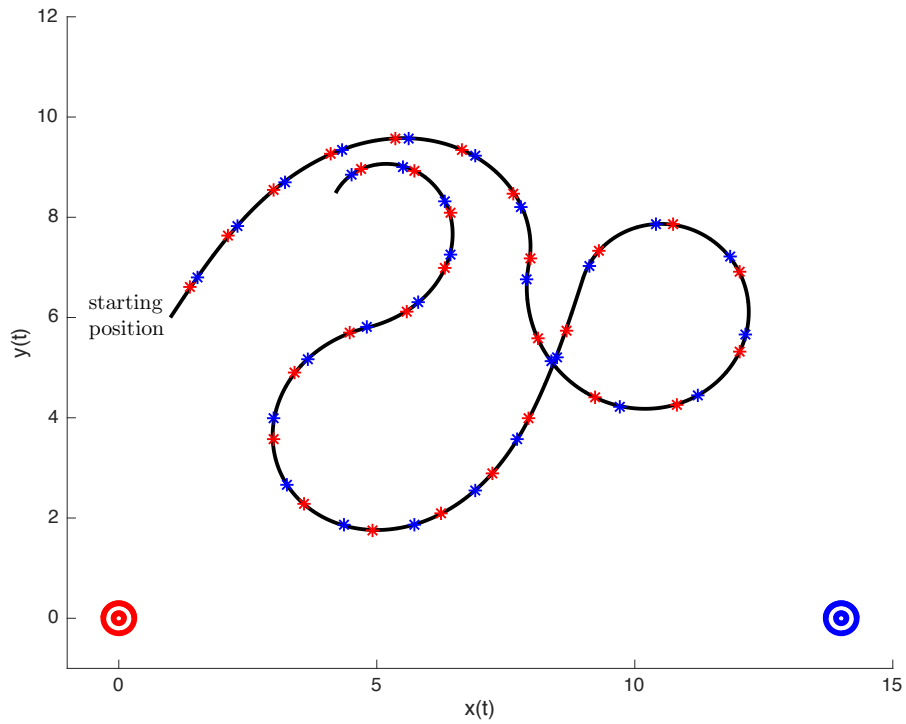


(a) Notations (coordonnées cartésiennes).

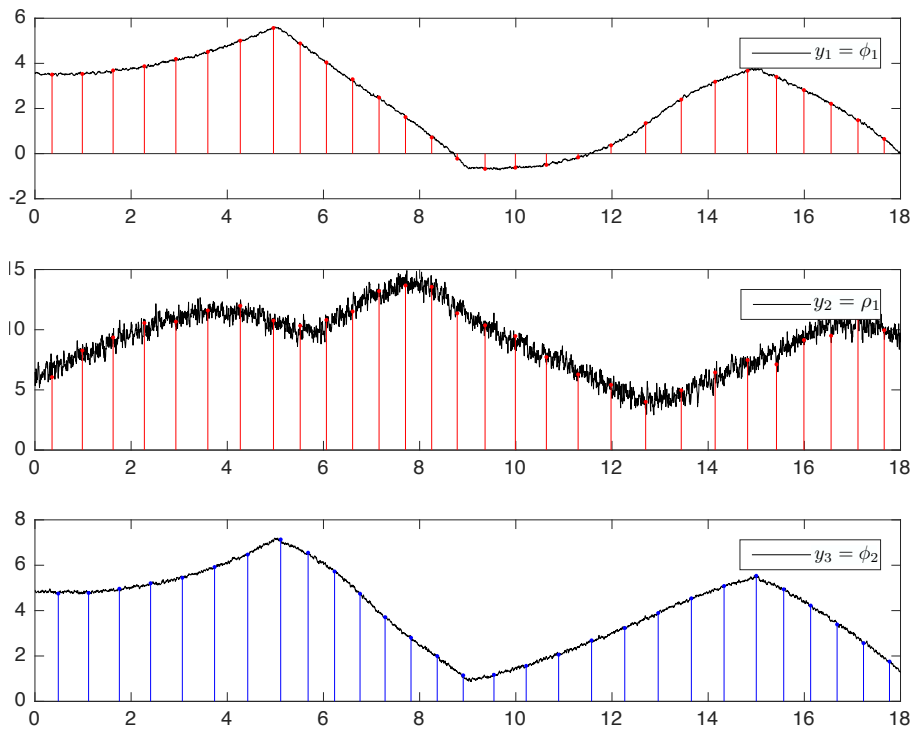


(b) Notations (coordonnées polaires).

FIGURE III.4 – Schéma de pose du bateau

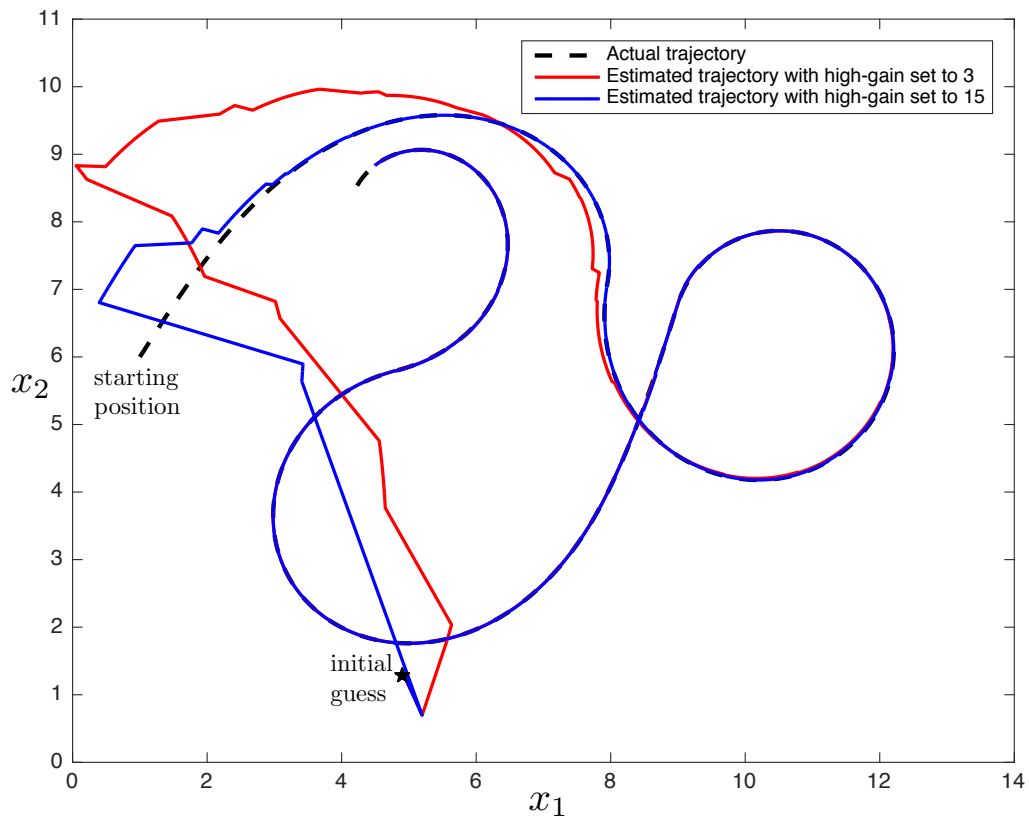


(a) Trajectoire du bateau indiquant sa position aux instants d'échantillonnage.

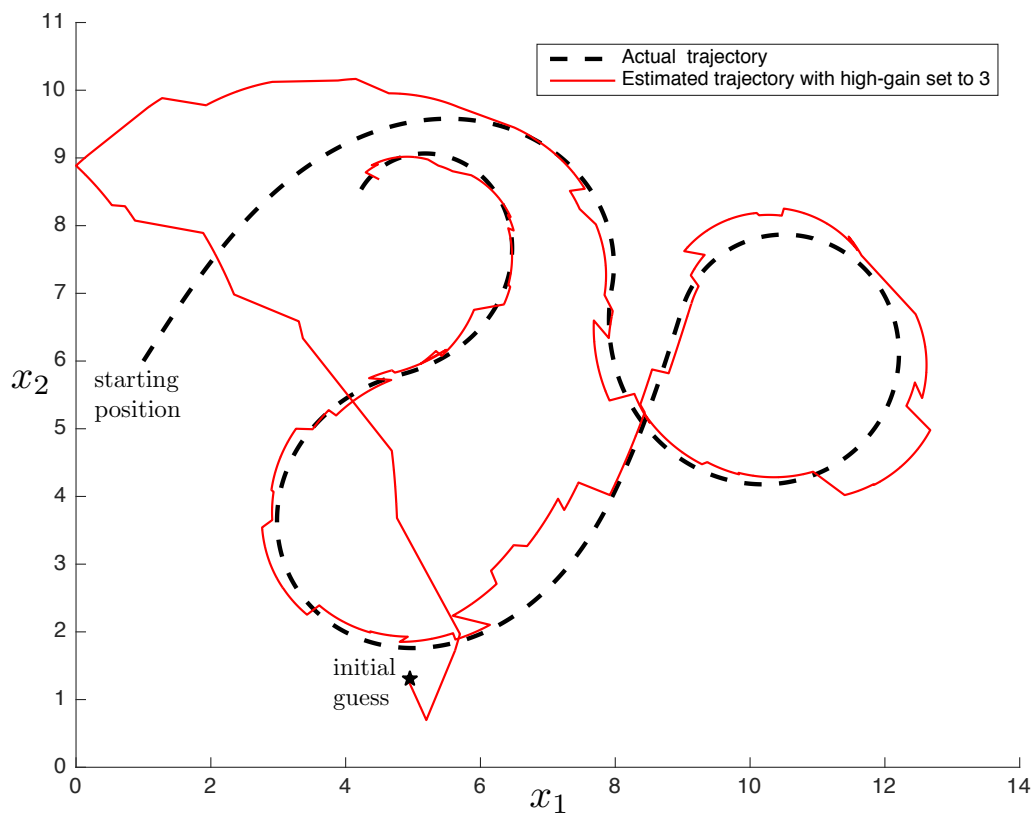


(b) Signal de sortie du système avec un bruit additif. Les marqueurs verticaux illustrent les instants d'échantillonnage.

FIGURE III.5 – Les informations relatives au premier (resp. second) amer sont indiquées en rouge (resp. en bleu)



(a) Estimation de la trajectoire sans bruit de mesure.



(b) Estimation de la trajectoire avec injection de bruit dans les mesures —cf. Figure III.5b.

FIGURE III.6 – Estimation de la trajectoire du bateau pour différents gains, avec et sans bruit de mesure

III.3 Application à un système robotique mobile 2D

III.3.1 Présentation de la plateforme expérimentale

Le Turtlebot3 Waffle est un petit robot mobile produit par Robotis (cf. [40]) et dont les dimensions sont données dans la Figure.III.7. Il est équipé d'un ordinateur mono-carte Intel Joule™570x et d'un micro-contrôleur 32-bit ARM Cortex-M7. La trajectoire de ce robot est modélisée par les équations de la voiture de Reeds-Shepp⁷ proposées dans la Section III.2. Les mesures obtenues grâce à un LIDAR⁸ sont utilisées pour l'implémentation de l'observateur et les capteurs d'odométrie nous fournissent la vérité terrain. De plus, le robot tourne sous le système d'exploitation ROS (cf. [41]). Les commandes sont transmises par le biais d'un script python interprétant soit des instructions générées par un joystick, soit des instructions préalablement programmées. Pour chaque expérience, les données du LIDAR, l'odométrie et les commandes sont enregistrées dans un journal (fichier .bag). Ce journal est ensuite converti en une série de fichiers .csv qui sont traités afin d'être exploités par l'observateur⁹.

Le LIDAR que nous avons retenu est un RPLIDAR A2, produit par Slamtec[42], à mi chemin entre le LIDAR LDS-01 d'entrée de gamme fourni avec le robot et un LIDAR de la marque SICK, haut de gamme mais bien trop coûteux dans le cadre de notre expérience. Le LIDAR a été placé au milieu de l'axe des roues¹⁰ afin de pouvoir utiliser le modèle de la voiture de Reeds-Shepp. Sa précision a été vérifiée grâce à une série d'expériences faisant intervenir des balises de différents diamètres et de différents matériaux. En comparant les distances mesurées à l'aide d'un mètre ruban et celles fournies par le LIDAR, nous avons mis en évidence un biais moyen de 1 cm, ayant une variance de 1.5 cm, sur les mesures de distance.

III.3.2 Calibration et vérité terrain

Avant de pouvoir mener et valider une expérience, nous nous sommes assurés que le robot était bien calibré. A cette fin, les points suivants ont été vérifiés :

- le zéro de l'odométrie correspond bien à la pose initiale du robot,
- le LIDAR est bien calibré et rend les mesures d'angles et de distance attendus
- la trajectoire issue de l'odométrie est en accord avec celle filmée par une caméra bien calibrée.

7. Le modèle de la voiture de Reeds-Shepp ou unicycle décrit le déplacement d'un robot muni de deux roues motrices et possédant éventuellement un certain nombre de roues folles assurant sa stabilité. Le Turtlebot3 Waffle vérifie cette description. Afin de valider ce choix de modélisation, des expériences ont été menées et ont notamment permis d'associer les vitesses linéaire et angulaire transmises au robot aux paramètres u et v du modèle de la voiture de Reeds-Shepp.

8. Light Detection And Ranging

9. Par commodité et pour la mise au point, l'observateur est utilisé hors-ligne.

10. Sur la Figure III.7, il s'agit de l'intersection des deux lignes bleues en pointillés.

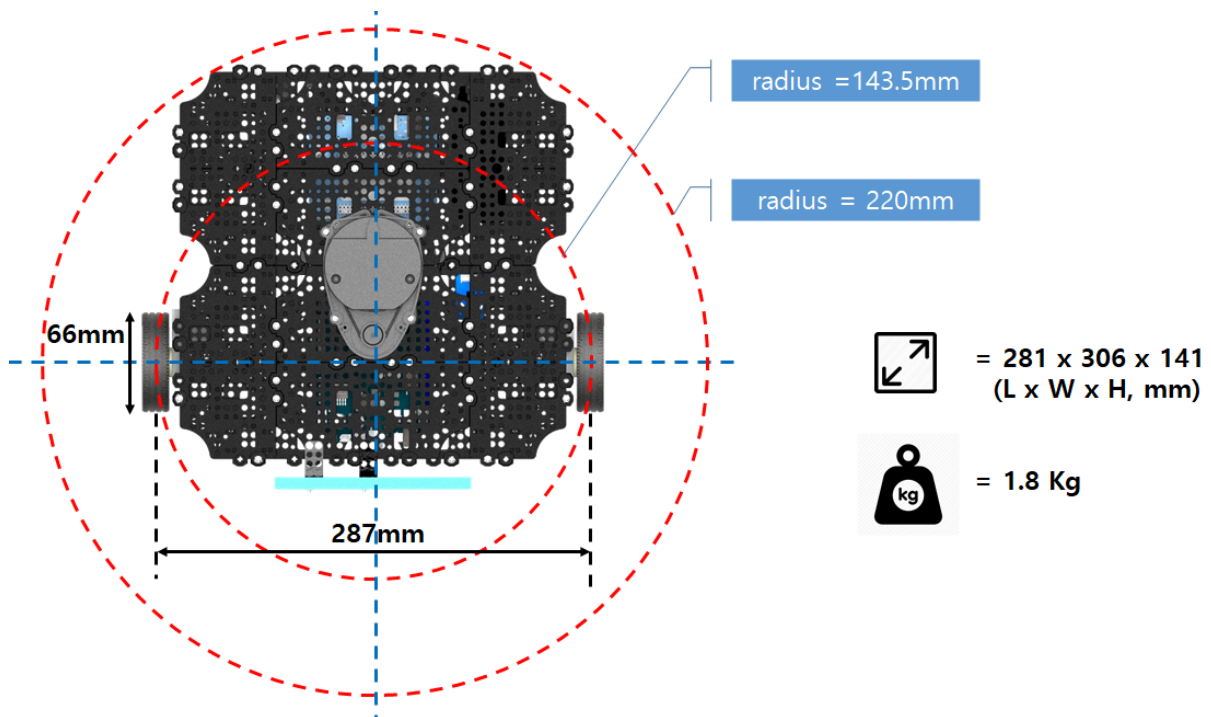


FIGURE III.7 – Turtlebot3 Waffle (source : [40])

Pour ce faire, nous avons mené les expériences suivantes :

- Afin de valider les distances rendues par le LIDAR, nous avons comparé des mesures prises par le LIDAR avec des mesures réalisées à l'aide d'un mètre ruban. En utilisant des balises métalliques d'un demi centimètre de diamètre situées à 21 centimètres du centre du LIDAR, la distance mesurée rendue était en moyenne de 22.06 centimètres. La distance minimale mesurée était de 20.6 centimètres et la distance maximale mesurée était de 23.5 centimètres. Notons que ni le robot, ni les balises n'avaient bougé durant l'expérience et que les distance auraient dû être bien plus homogènes. En utilisant des balises en carton blanc, plus larges, de sept centimètres de diamètre, et en supposant que la mesure à retenir est la plus petite distance d'une suite successive de mesures pour un tour donné, la distance rendue par le capteur était de 25.8 centimètres au lieu de 23 centimètres. Cependant, avec ces balises-ci, l'erreur était la même à chaque tour de LIDAR.
- Des balises ont été placées à 90 et 270 degrés par rapport à la direction privilégiée du Turtlebot. Nous avons enregistré les données LIDAR tout en laissant le robot à l'arrêt. Nous avons mis en évidence un biais compris entre 59.6 degrés et 62.87 degrés en utilisant des balises de sept centimètres de diamètre et un biais compris entre 61.023 et 63.93 degrés avec des balises d'un demi centimètre.

- Deux balises ont été posées de part et d'autre du robot, dans la continuité de l'axe reliant les deux roues, à égale distance du centre et nous ont permis de nous assurer que le LIDAR est bien centré sur l'axe des roues.
- La vérité terrain est fournie grâce aux données d'odométrie que nous avons validé à l'aide d'une caméra filmant la scène du dessus. Après une étape de calibration de la caméra se basant sur le modèle du sténopé, la trajectoire du robot a été extraite des données vidéo. Pour une trajectoire carrée de 82 cm de côté, les graphes issus des données vidéo et des données d'odométrie restent dans un ruban d'une largeur de 0.5 cm.

Remarque 4.

Notons qu'afin d'être aussi précis que possible, la pose du robot et des balises a été réalisée à l'aide d'un niveau laser formant une croix orthogonale. Initialement effectuées avec un LIDAR LDS-01, les expériences réalisées ont montré que ce capteur manque de fiabilité, en particulier sur la mesure des distances, avec parfois des erreurs de mesure de l'ordre de plus de 9%. Toutes les données traitées sont issues du LIDAR le plus fiable que nous ayons à notre disposition, le RPLIDAR A2.

III.3.3 Détection des balises

Afin d'obtenir des mesures de distance plus fiables, nous avons opté pour des balises J11¹¹ de 19.9 centimètres de diamètre, et avons placé leur bande réfléchissante de sorte à ce qu'elles soient balayées par le LIDAR. Puisque ce dernier a une résolution de un degré, 359 mesures sont prises par tour. Lorsqu'il balaie une balise, celle-ci est détectée plusieurs fois, et ce nombre peut varier d'un tour à un autre. Si le robot restait immobile, ces mesures successives d'une même balise prendraient la forme d'un arc de cercle. Cependant, bien que le robot soit en mouvement, nous faisons l'hypothèse que cet arc de cercle n'est pas trop déformé étant donnée la vitesse peu élevée du robot — dans le cas de notre première expérience, la vitesse linéaire est de 0.08 mètre/seconde et la vitesse de rotation s'élève à 0.316 radian/seconde et dans le cas de la seconde expérience, la vitesse linéaire maximale est de 0.17 mètre/seconde et la vitesse de rotation maximale atteint 1.259 radian/seconde. Par conséquent, un algorithme de *curve fitting* (ajustement de courbe) est utilisé afin de reconstruire le centre des balises, de déterminer l'angle correspondant et d'étiqueter chaque mesure de manière à savoir à quelle balise correspond chacune d'elles. Les mesures d'angles incohérentes avec les détections précédentes sont tout simplement supprimées. Cette approche donne de meilleurs résultats que nos premières tentatives qui consistaient à ne conserver sur une série de mesures successives d'une balise que la distance la plus courte au robot et à additionner cette distance au rayon de la balise concernée, ou

11. Il s'agit de balises utilisées pour la sécurité routière afin de matérialiser les zones interdites à la circulation (cf. Figure III.11).

encore l'approche qui consistait à prendre la moyenne des angles que forme la direction privilégiée du robot avec la droite le reliant à cette balise. La méthode retenue nous permet également de discriminer les balises des artefacts, ainsi que cela est illustré sur les Figures III.8 et III.9. Ces dernières représentent chacune trois courbes rouge, bleue et noire. Les courbes rouge et bleue correspondent à la position des deux balises au fil du temps lorsque nous nous plaçons dans le référentiel du robot. Les courbes et points noirs illustrent les obstacles repérés par le LIDAR qui ne sont pas cohérents avec la position attendue des balises. Notons que les expériences ont été réalisées dans des conditions de laboratoire. Ainsi, il était aisé de labelliser chacune des balises, puisque nous savions laquelle serait détectée en premier. Cependant, sans cette connaissance, la technique consistant à reconstruire le centre d'une balise donnée peut être utilisée afin de discriminer deux balises, à conditions que leur diamètre soit suffisamment différent l'un de l'autre.

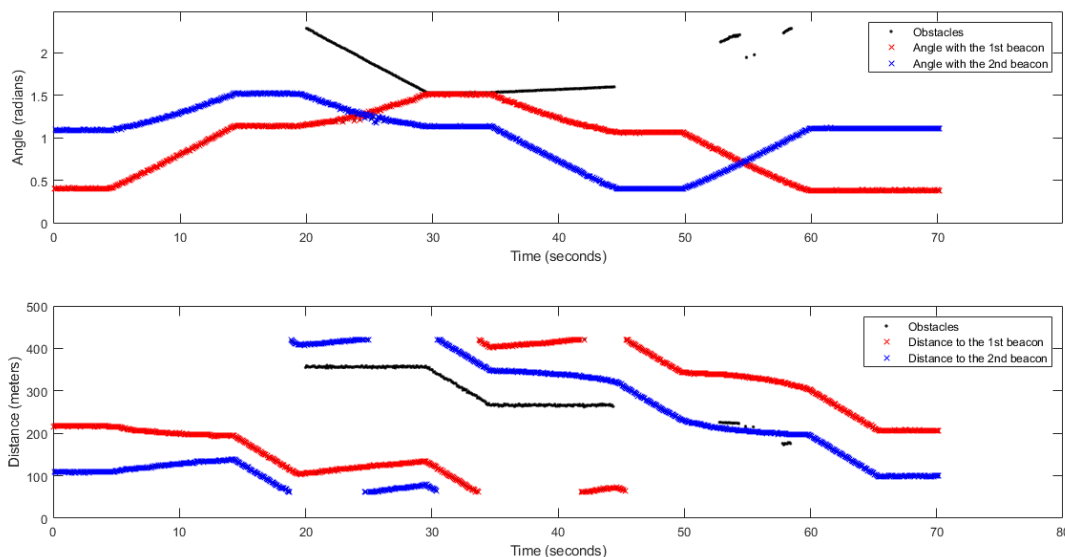


FIGURE III.8 – Sorties pour des instructions prédéfinies : reconstruction du vecteur de sortie et suppression des artefacts (en noir)

III.3.4 Estimation de la trajectoire

Deux expériences sont présentées dans cette section et débutent par la pose du robot entre deux balises J11 que nous notons *A* et *B*. Nous faisons évoluer le robot de manière à ce qu'il ne traverse pas l'axe des balises *AB* (cf. Figures III.10 et III.11). Dans la première expérience, le robot suit des instructions en boucle ouverte prédéfinies dans un script Python et créant une trajectoire se rapprochant d'un carré —i.e. la courbe en tirets noirs sur la Figure III.12—, avec une vitesse linéaire de 0.08 mètre/seconde

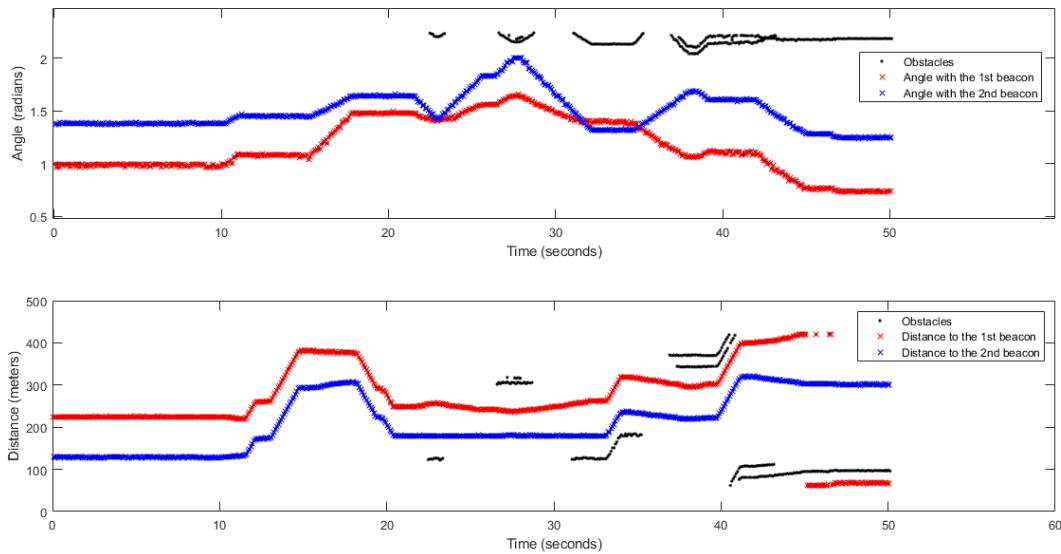


FIGURE III.9 – Sorties pour des instructions données par un joystick : reconstruction du vecteur de sortie et suppression des artefacts (en noir)

et une vitesse angulaire de 0.316 radian/seconde. Dans la seconde expérience, le robot est contrôlé à l'aide d'un joystick. La trajectoire erratique qui en découle est représentée par la courbe en tirets noirs de la Figure III.14. La vitesse linéaire maximale du robot est alors de 0.17 mètre/seconde et sa vitesse angulaire maximale s'élève à 1.259 radians/seconde. Les paramètres de l'observateur ont été choisis empiriquement comme ceci :

- $\theta = 2.5$ pour la première expérience, $\theta = 1.5$ pour la seconde ;
- $Q = 10^{-2} Id_3$;
- $R^{(1)} = Id_2$, et $R^{(2)} = 1$.

Les trajectoires estimées sont représentées en rouge sur les Figures III.12 et III.14 dans l'espace physique. De plus, les Figures III.13 et III.16 soulignent l'erreur commise entre l'état estimé dans sa forme normale d'observabilité et les angles ϕ_1, ρ_1 et ϕ_2 issus des données d'odométrie.

Notons que sur la Figure III.12, la courbe rouge rejoint la courbe noire après un début de trajectoire en ligne droite. Ceci correspond à l'instant auquel le robot, après avoir roulé en ligne droite et tourné à gauche, commence à rouler droit de nouveau.

Ces deux expériences mettent en évidence l'efficacité de convergence de notre observateur. Nous notons cependant une convergence moins bonne pour la variable z_2 durant la première expérience. Nous supposons que cela est dû à une erreur de modèle. D'autre part, nous notons sur la Figure III.12 des difficultés de convergence sur la première ligne droite de la trajectoire. Cela est probablement dû

non pas au manque d'efficacité de l'observateur mais au changement de variables permettant de passer des coordonnées normales aux coordonnées cartésiennes. Ce changement de variable est fortement non linéaire et entraîne d'importantes déformation de distances. D'autre part, concernant la seconde expérience, nous constatons une divergence locale en début d'expérience, tout particulièrement autour de l'instant $t = 12$ secondes pour la variable z_2 . Cela correspond au moment où l'angle θ décroît fortement et que le robot s'éloigne de la balise A. De nouveau nous attribuons cela à la forte non linéarité du plongement permettant d'obtenir la forme normale d'observabilité. Cela peut être également dû à une moins bonne observabilité sur les trajectoires rectilignes orientées le long d'une droite passant par une balise. Il serait intéressant d'étudier l'estimation que nous obtiendrions en mesurant ρ_2 au lieu de ρ_1 voire ρ_1 et ρ_2 à la fois. Notons qu'il s'agit là d'une faiblesse liée à ce type d'observateurs : la difficulté de trouver une forme normale d'observabilité d'une part, et les erreurs numériques que cela engendre, d'autre part, constituent deux de ses défauts.

En conclusion, ce chapitre présente trois applications, de la plus simple à la plus compliquée. Le premier exemple, académique, illustre la convergence de l'observateur pour un système linéaire. La seconde simulation montre l'application de l'observateur dans sa version non linéaire sur le modèle de la voiture de Reeds-Shepp, avec et sans bruit. Pour finir, nous avons utilisé l'observateur sur un système robotique mobile 2D également modélisé par les équations de la voiture de Reeds-Shepp. La forme normale d'observabilité ayant déjà été trouvée pour la seconde application, la difficulté principale réside dans le traitement des sorties. Les résultats obtenus globalement satisfaisants permettent d'illustrer la convergence de l'algorithme proposé dans le chapitre précédent.

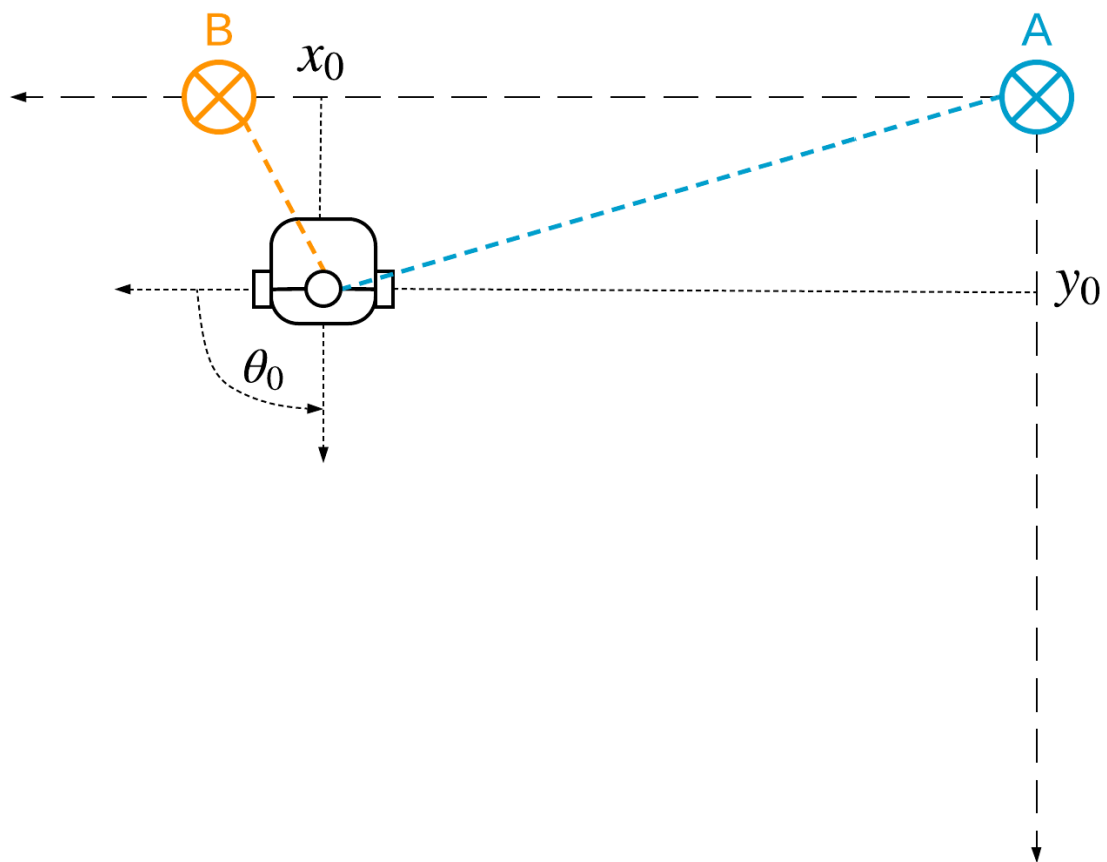


FIGURE III.10 – Schéma de l'expérience (vue du dessus)

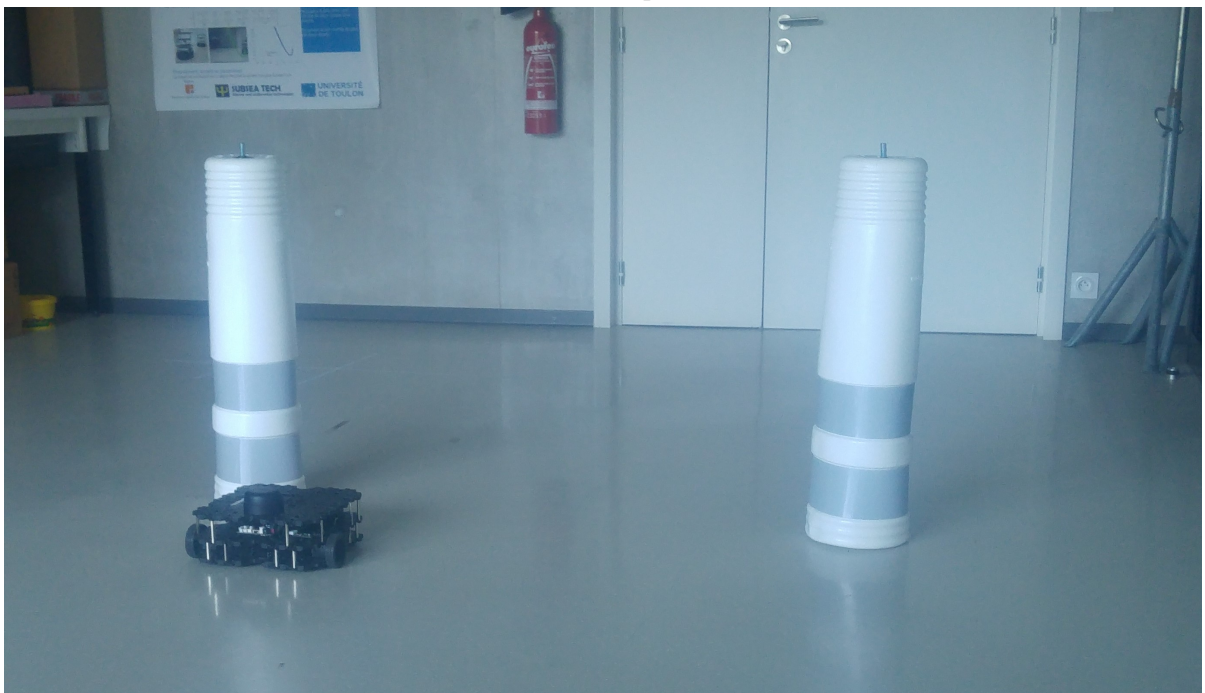


FIGURE III.11 – Turtlebot3 Waffle et balises J11

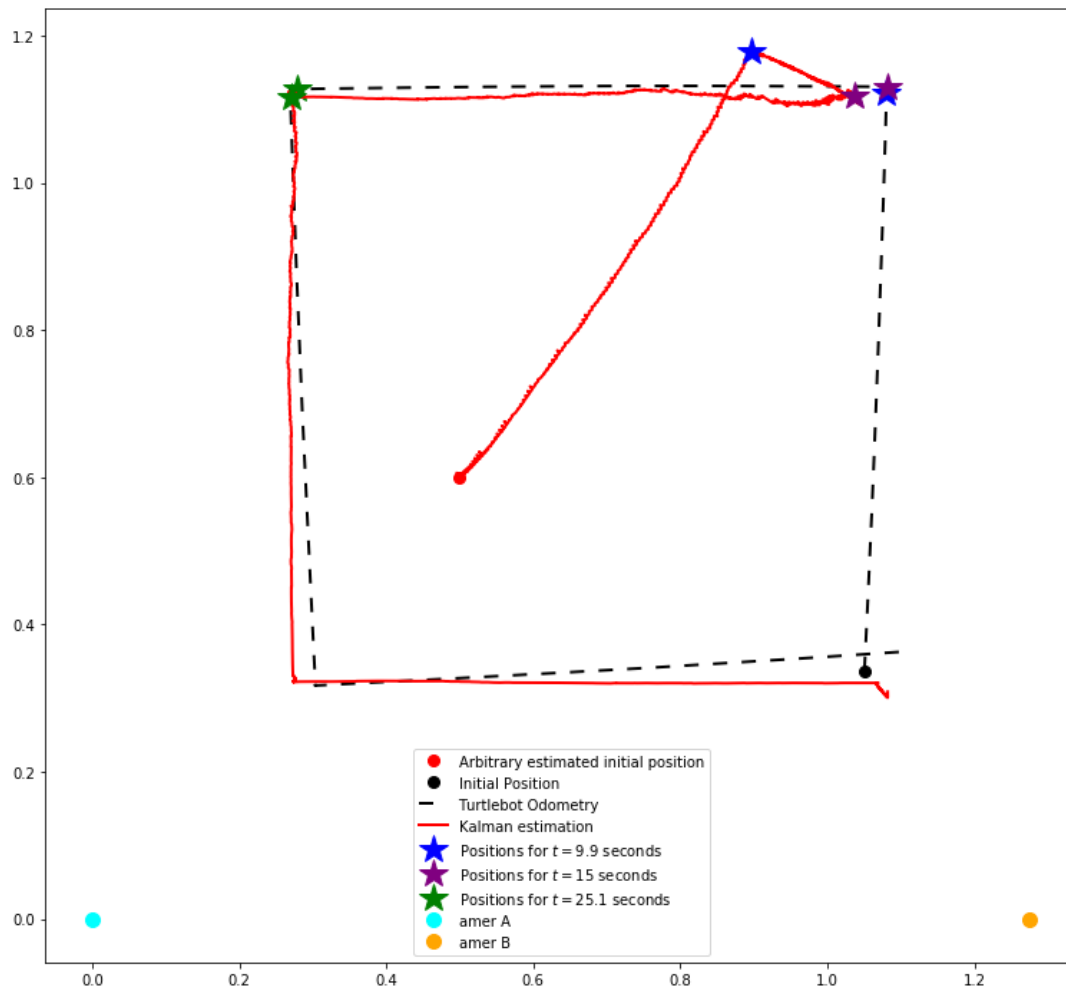


FIGURE III.12 – Trajectoire pour des instructions prédéfinies : représentation dans l'espace physique.

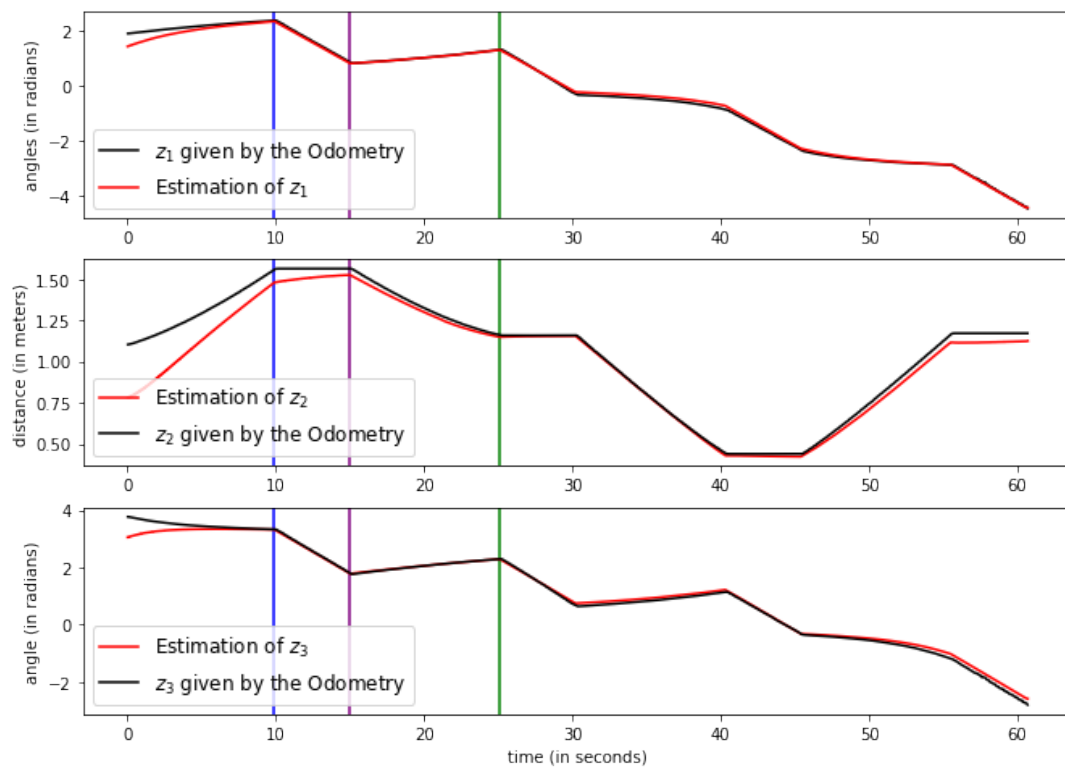


FIGURE III.13 – Trajectoire pour des instructions prédéfinies : représentation dans les coordonnées normales.

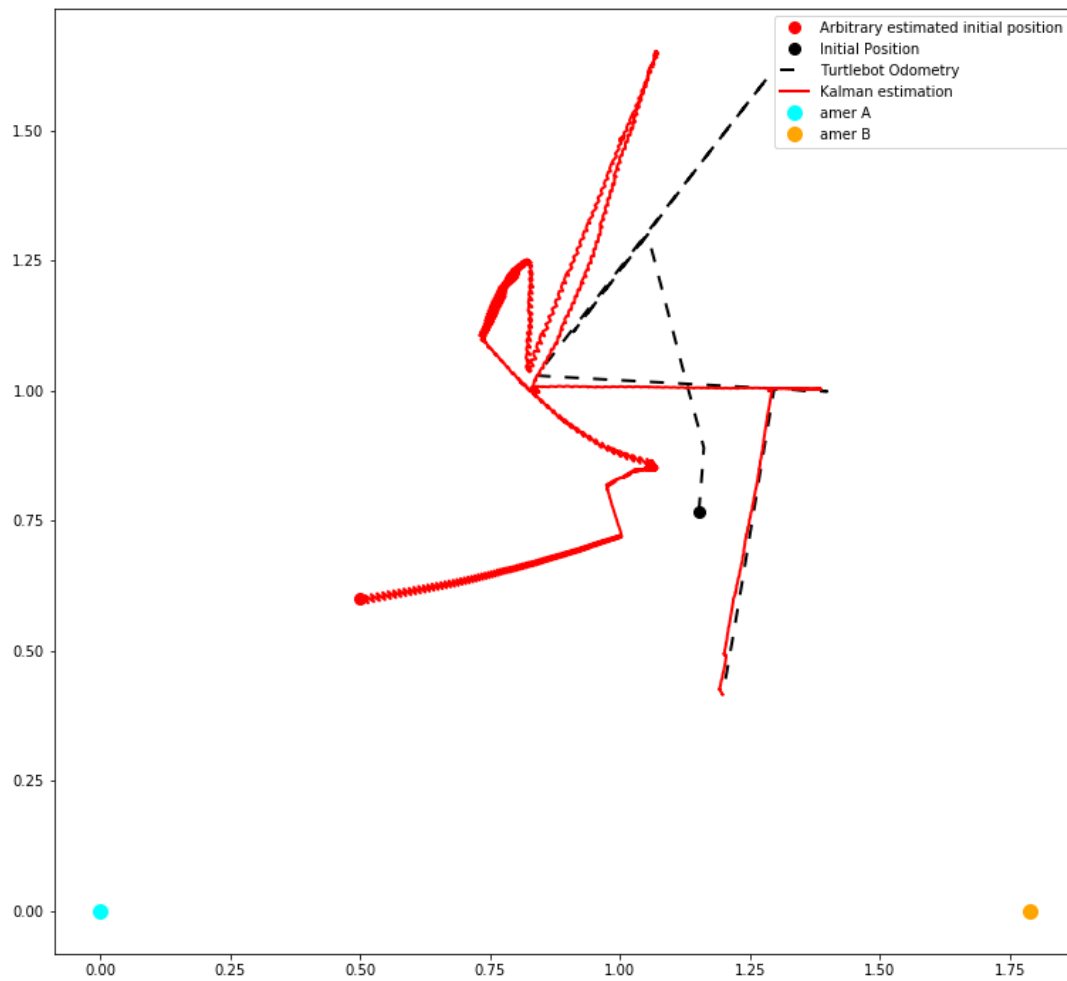


FIGURE III.14 – Trajectoire pour des instructions fournies grâce à un joystick : représentation dans l'espace physique.

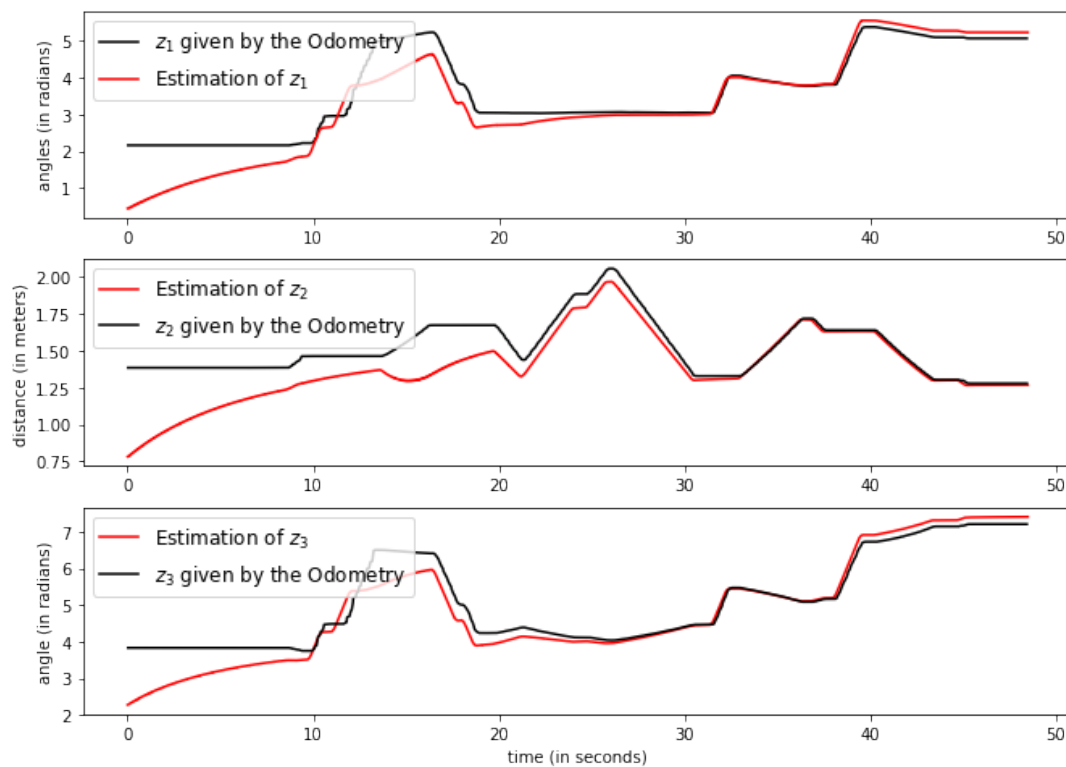


FIGURE III.15 – Trajectoire pour des instructions fournies grâce à un joystick : représentation dans les coordonnées normales.

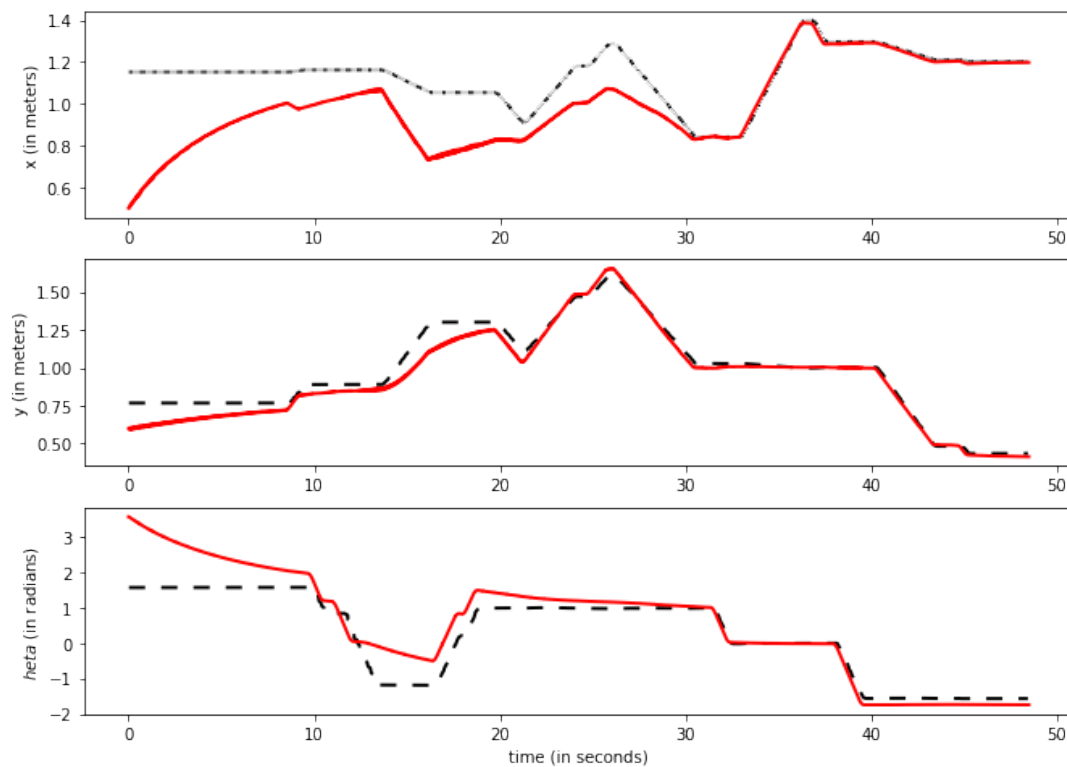


FIGURE III.16 – Trajectoire pour des instructions fournies grâce à un joystick : représentation dans les coordonnées cartésiennes.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'estimation de l'état d'un système robotique mobile requiert un formalisme adapté à ses sorties asynchrones. Il est en effet peu probable que ses capteurs — le LIDAR, les capteurs d'odométrie ou l'IMU par exemple — fournissent toutes leurs mesures aux mêmes instants. La littérature met en évidence que les observateurs utilisés pour les applications en robotique sont généralement conçus pour des systèmes dont les mesures sont synchrones, et les sorties sont alors traitées de manière à ce qu'elles se rapprochent de données synchrones — notamment par une intégration des sorties ou par interpolation. Notre approche est différente et consiste à introduire un observateur ne nécessitant pas une transformation des sorties et prenant en charge l'asynchronicité des capteurs. L'observateur que nous avons développé est un observateur de type Kalman qui a l'avantage, dans sa version linéaire, d'être optimal.

Le filtre de Kalman étendu, utilisé quant à lui pour les systèmes non linéaires, est un très bon observateur local mais sa convergence n'est pas prouvée globalement. Nous nous sommes orientés pour cette raison vers le formalisme grand-gain. L'observateur que nous proposons consiste en une adaptation du filtre de Kalman étendu grand-gain. Ce dernier, étudié dans [7, 4] pour des systèmes non linéaires continus ou continus-discrets à mesures synchrones, a l'avantage de converger globalement dès lors que le paramètre de grand-gain choisi est suffisamment élevé.

Ce manuscrit de thèse détaillait la conception d'un observateur pour des systèmes non linéaires à mesures asynchrones et proposait à la fois une étude théorique de convergence et un volet applicatif. L'objectif du premier chapitre de ce manuscrit était de rappeler les notions importantes au sujet de l'observabilité d'un système et de la théorie des observateurs, en particulier le formalisme grand-gain. Une bibliographie portant sur l'utilisation des observateurs dans le domaine de la robotique ainsi qu'une brève revue des observateurs conçus pour des systèmes à mesures asynchrones ont été proposées.

Dans le second chapitre a été introduit un formalisme pour les systèmes continus discrets à mesures asynchrones. Les équations de notre observateur ont ensuite été détaillées et sa convergence prouvée analytiquement. La démonstration reposait sur l'étude d'une fonction de Lyapunov grâce à laquelle nous montrions que l'erreur entre l'estimation \hat{x} et l'état x du système convergeait vers

zéro. L'argument principal de cette preuve résidait dans l'existence de bornes supérieure et inférieure pour la matrice S solution de l'équation de Riccati du filtre de Kalman. En réalité, toute la difficulté de prouver la convergence de l'algorithme se trouvait dans la démonstration de l'existence de ces deux bornes. Nous avons de plus noté qu'à mesure que nous dégénérons les sorties d'un système — sorties discrètes synchrones [7] et non plus continues [4], sorties discrètes asynchrones et non plus synchrones dans le cas de cette thèse —, la difficulté de démontrer l'existence de ces bornes s'accroît, tout comme la complexité des équations du filtre de Kalman.

De plus, nous avons mis en évidence qu'à condition que le système continu associé au système continu-discret asynchrone que nous considérons soit observable, alors ce dernier l'est également dès lors que chacune de ses sorties est disponible assez fréquemment. Cette fréquence minimale d'apparition des sorties est quantifiée par une borne qui dépend notamment de la borne inférieure du grammien continu ainsi que de la dérivée d'un produit matriciel entre la matrice C , la résolvante du système et leurs transposées respectives.

Le Chapitre 3, pour finir, détaillait le volet applicatif de cette thèse. Nous avons illustré la convergence de notre algorithme en trois étapes. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à un système linéaire simple et académique. L'intérêt de cet exemple était d'illustrer clairement le formalisme introduit dans le chapitre précédent et de tester une première fois la convergence de l'observateur sur un cas simple. La seconde application était une simulation mettant en scène un bateau évoluant sur une surface délimitée par deux balises. Enfin, la troisième application constituait l'un des objectifs initiaux de ce travail de recherche et consistait à estimer hors ligne la trajectoire d'un système robotique.

Un certain nombre de perspectives s'offrent à nous, d'ordre pratique, d'une part, et théorique de l'autre. Concernant l'aspect expérimental, il serait intéressant de :

- comparer nos résultats à ceux que nous obtiendrions si nous considérions le cas où les sorties sont les angles formés par la direction privilégiée du robot avec la direction apparente des deux balises, ainsi que la distance du robot à la balise B . En particulier, cela pourrait améliorer l'estimation de la trajectoire le long du premier déplacement en ligne droite de la première expérience que nous avons menée avec des instructions prédéfinies,
- comparer nos résultats à ceux que nous obtiendrions si nous considérions le cas où les sorties sont les angles formés par la direction privilégiée du robot avec la direction apparente des deux balises, ainsi que la distance du robot aux deux balises A et B ,
- étudier la question dans le cas de deux sorties angulaires uniquement. Cela permettrait de s'affranchir de mesures de distance très bruitées. Cependant cela impliquerait de se reposer

davantage sur le modèle mathématique et donc sur une forme normale d'observabilité fortement non linéaire,

- embarquer l'observateur sur le robot mobile afin d'évaluer ses performances en temps réel,
- tester cet observateur sur un robot sous-marin. La difficulté serait de passer d'une approche bidimensionnelle avec trois variables d'état (position dans \mathbb{R}^2 et orientation) à un environnement tridimensionnel avec un minimum de six variables d'état (position dans \mathbb{R}^3 , roulis, tangage, lacet) et gérer différents capteurs - la vérité au sol ne pouvant plus être obtenue en utilisant les capteurs d'odométrie.

L'aspect théorique, enfin, pourrait être développé. Nous gardons à l'esprit les extensions suivantes :

- considérer le cas où certaines mesures seraient redondantes, c'est-à-dire lorsque plusieurs capteurs fournissent une même mesure dans des conditions distinctes,
- considérer un paramètre de grand-gain adaptatif tel que proposé dans [5] ou un paramètre de grand-gain différent pour chacun des capteurs,
- étudier notre formalisme avec d'autres approches. Citons notamment l'approche par LMI (Inégalité matricielle linéaire)[43, 44], l'approche *enhanced high-gain* [45], le formalisme hybride [46] et l'approche Luenberger [47],
- étudier les conditions d'observabilité des systèmes à datations incertaines et proposer une extension de l'observateur. Nous entendons par systèmes à datations incertaines des systèmes continus-discrets pour lesquels les instants de prise de mesures ne sont pas connus avec exactitude. Ce cas de figure est relativement fréquent lorsque l'information délivrée par les capteurs est transmise sur un réseau de capteurs dont les protocoles n'assurent pas toujours une véritable transmission temps-réel.

GÉNÉRALITÉS SUR LES MATRICES

Un certain nombre de propriétés matricielles sont employées tout au long de ce manuscrit. Elles sont regroupées dans cette annexe et proviennent de [7, 48]. Nous supposons la matrice A de dimensions $n \times n$:

Norme matricielle

- Pour toute matrice A , $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$ désigne la norme induite par la norme euclidienne. Nous noterons $\|S\|$ pour plus de simplicité.
- Pour toute matrice A , $|A| = \sqrt{T_r(A'A)}$ définit la norme de Frobenius. Notons que si A est symétrique alors $|A| = \sqrt{T_r(A^2)}$.
- $\|A\| \leq |A| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
- Si A est symétrique alors $A \leq \|A\|Id \leq |A|Id$.

Trace

- Si A et B sont deux matrices de dimensions $(n \times n)$, alors $|T_r(AB)| \leq \sqrt{T_r(A'A)}\sqrt{T_r(B'B)}$.
- Si A est une matrice symétrique semi-définie positive de dimensions $(n \times n)$, alors $T_r(A^2) \leq T_r(A)^2$.
- Si A est une matrice symétrique semi-définie positive de dimensions $(n \times n)$, alors $T_r(A^2) \geq \frac{1}{n}T_r(A)^2$.
- Si A est une matrice symétrique semi-définie positive de dimensions $(n \times n)$, alors $T_r(AQA) \geq \frac{q}{n}T_r(A)^2$ avec $q = \min_{\|x\|=1} x'Qx$ et Q symétrique définie positive.
- Par conséquent, si A est une matrice symétrique semi-définie positive de dimensions $(n \times n)$, alors il existe $l, m < 0$ tels que $l\|A\| \leq T_r(A) \leq m\|A\|$.

Le lemme suivant sera utilisé dans le Chapitre II.

Lemme 31 (Lemme d'inversion matricielle).

Soit M une matrice symétrique définie positive et R une matrice inversible. Alors

$$(M + MC'R^{-1}CM)^{-1} = M^{-1} - C'(R + CMC')^{-1}C.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie et applications*. Vuibert, Paris, 2008. ISBN 978-2-7117-2219-8. OCLC : 918392070.
- [2] Ludovic Sacchelli, Lucas Brivadis, Vincent Andrieu, Ulysse Serres, and Jean-Paul Gauthier. Dynamic Output Feedback Stabilization of Non-uniformly Observable Dissipative Systems. *arXiv :1911.07595 [math]*, November 2019. URL <http://arxiv.org/abs/1911.07595>. arXiv : 1911.07595.
- [3] Lucas Brivadis, Jean-Paul Gauthier, Ludovic Sacchelli, and Ulysse Serres. Avoiding observability singularities in output feedback bilinear systems. *arXiv :1907.02311 [math]*, July 2019. URL <http://arxiv.org/abs/1907.02311>. arXiv : 1907.02311.
- [4] Jean-Paul Gauthier and Ivan Kupka. *Deterministic observation theory and applications*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2001. ISBN 978-0-521-80593-3.
- [5] Nicolas Boizot, Eric Busvelle, and Jean-Paul Gauthier. Adaptive-gain extended Kalman filter : Extension to the continuous-discrete case. In *2009 European Control Conference (ECC)*, pages 4570–4575, Budapest, August 2009. IEEE. ISBN 978-3-9524173-9-3. doi : 10.23919/ECC.2009.7075121. URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/7075121/>.
- [6] Gildas Besançon, editor. *Nonlinear observers and applications*. Number 363 in Lecture notes in control and information sciences. Springer, Berlin ; New York, 2007. ISBN 978-3-540-73502-1. OCLC : ocn166214280.
- [7] Nicolas Boizot. *Adaptive high-gain extended kalman filter and applications*. PhD thesis, Université du Luxembourg, Université de Bourgogne, 2010. URL <https://orbilu.uni.lu/handle/10993/15672>.
- [8] Sabeur Ammar. *Observabilité et systèmes discrets*. PhD thesis, Ecole doctorale IAEM Lorraine, 2003. URL https://www.researchgate.net/publication/324435311_Observabilite_et_systemes_discrets.
- [9] Miad Moarref and Luis Rodrigues. Observer design for linear multi-rate sampled-data systems. In *2014 American Control Conference*, pages 5319–5324, Portland, OR, USA, June 2014. IEEE. ISBN 978-1-4799-3274-0 978-1-4799-3272-6 978-1-4799-3271-9. doi : 10.1109/ACC.2014.6858838. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/6858838/>.
- [10] Yanjun Shen, Daoyuan Zhang, and Xiaohua Xia. Continuous observer design for a class of multi-output nonlinear systems with multi-rate sampled and delayed output measurements. *Automatica*, 75 :127–132, January 2017. ISSN 00051098. doi : 10.1016/j.automatica.2016.09.028. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0005109816303739>.
- [11] Liping Yan, Baosheng Liu, and Donghua Zhou. The modeling and estimation of asynchronous multirate multisensor dynamic systems. *Aerospace Science and Technology*, 10(1) :63–71, January 2006. ISSN 12709638. doi : 10.1016/j.ast.2005.09.001. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1270963805001227>.

- [12] Robert Hermann and Arthur J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5) :728–740, October 1977. ISSN 0018-9286. doi : 10.1109/TAC.1977.1101601. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/1101601/>.
- [13] Francis Hirsch and Gilles Lacombe. *Éléments d'analyse fonctionnelle : cours et exercices avec réponses*. 2009. ISBN 978-2-10-053594-1. OCLC : 1039912394.
- [14] Eric Busvelle and Jean-Paul Gauthier. Observation and identification tools for non-linear systems : application to a fluid catalytic cracker. *International Journal of Control*, 78(3) :208–234, February 2005. ISSN 0020-7179, 1366-5820. doi : 10.1080/00207170500036027. URL <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00207170500036027>.
- [15] Salowa Methnani, Jean-Paul Gauthier, and Frederic Lafont. Sensor fault reconstruction and observability for unknown inputs, with an application to wastewater treatment plants. *International Journal of Control*, 84(4) :822–833, April 2011. ISSN 0020-7179, 1366-5820. doi : 10.1080/00207179.2011.582156. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207179.2011.582156>.
- [16] Eric Busvelle and Jean-Paul Gauthier. High-gain and non high-gain observers for nonlinear systems. In *Contemporary Trends in Nonlinear Geometric Control Theory and Its Applications*, pages 257–286. WORLD SCIENTIFIC, January 2002. ISBN 978-981-02-4841-3 978-981-277-807-9. doi : 10.1142/9789812778079_0010. URL http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812778079_0010.
- [17] Andrew H. Jazwinski. *Stochastic processes and filtering theory*. Dover books on engineering. Dover Publications, Mineola, N.Y, dover ed edition, 1970. ISBN 978-0-486-46274-5. OCLC : ocn124165739.
- [18] Michel Blain, Sylvain Lemieux, and Régis Houde. Implementation of a ROV navigation system using acoustic/Doppler sensors and Kalman filtering. In *Oceans 2003. Celebrating the Past ... Teaming Toward the Future (IEEE Cat. No.03CH37492)*, pages 1255–1260 Vol.3, San Diego, CA, USA, 2003. IEEE. ISBN 978-0-933957-30-5. doi : 10.1109/OCEANS.2003.178033. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/1282546/>.
- [19] Pierre-Jean Bristeau, Eric Dorveaux, David Vissière, and Nicolas Petit. Hardware and software architecture for state estimation on an experimental low-cost small-scaled helicopter. *Control Engineering Practice*, 18(7) :733–746, July 2010. ISSN 09670661. doi : 10.1016/j.conengprac.2010.02.014. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0967066110000742>.
- [20] Kenneth Sebesta. *Optimal observers and optimal control : improving car efficiency with Kalman et Pontryagin*. PhD thesis, Université du Luxembourg, Université de Bourgogne, 2010.
- [21] Pushkin Kachroo and David Mayhew. Multirate sensor fusion for GPS using Kalman filtering, fuzzy methods, and map matching. page 440, Boston, MA, January 1999. doi : 10.1117/12.335722. URL <http://proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?doi=10.1117/12.335722>.
- [22] Srinivas Tatiraju, Masoud Soroush, and Babatunde A. Ogunnaike. Multirate nonlinear state estimation with application to a polymerization reactor. *AIChE Journal*, 45(4) :769–780, April 1999. ISSN 00011541, 15475905. doi : 10.1002/aic.690450412. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/aic.690450412>.
- [23] Oscar. Barrero, J. Petersen, and S.B. Jorgensen. Multirate Data Assimilation in a Cultivation Process. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2) :11433–11438, 2008. ISSN 14746670. doi : 10.3182/20080706-5-KR-1001.01937. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1474667016408050>.

- [24] Corina Barbēlatē, Valerio De Carolis, Matthew W. Dunnigan, Yvan Petillot, and David Lane. An adaptive controller for autonomous underwater vehicles. In *2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 1658–1663, Hamburg, Germany, September 2015. IEEE. ISBN 978-1-4799-9994-1. doi : 10.1109/IROS.2015.7353590. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/7353590/>.
- [25] Divine Maalouf, Ahmed Chemori, and Vincent Creuze. L1 Adaptive depth and pitch control of an underwater vehicle with real-time experiments. *Ocean Engineering*, 98 :66–77, April 2015. ISSN 00298018. doi : 10.1016/j.oceaneng.2015.02.002. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0029801815000219>.
- [26] Tarek Ahmed-Ali, Iasson Karafyllis, and Francoise Lamnabhi-Lagarrigue. Global Exponential Sampled-Data Observers for Nonlinear Systems with Delayed Measurements. *arXiv :1207.1061 [cs, math]*, July 2012. URL <http://arxiv.org/abs/1207.1061>. arXiv : 1207.1061.
- [27] Vincent Andrieu and Madiha Nadri. Observer design for Lipschitz systems with discrete-time measurements. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6522–6527, Atlanta, GA, USA, December 2010. IEEE. ISBN 978-1-4244-7745-6. doi : 10.1109/CDC.2010.5718046. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/5718046/>.
- [28] Vincent Andrieu, Madiha Nadri, Ulysse Serres, and Jean-Claude Vivalda. Continuous Discrete Observer with Updated Sampling Period. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(23) :439–444, 2013. ISSN 14746670. doi : 10.3182/20130904-3-FR-2041.00084. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1474667016316998>.
- [29] Madiha Nadri, Hassan Hammouri, and Carlos Astorga Zaragoza. Observer Design for Continuous-Discrete Time State Affine Systems up to Output Injection. *European Journal of Control*, 10(3) :252–263, January 2004. ISSN 09473580. doi : 10.3166/ejc.10.252-263. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0947358004703659>.
- [30] Huichai Zhang, Michael V. Basin, and Mikhail Skliar. Itô–Volterra Optimal State Estimation With Continuous, Multirate, Randomly Sampled, and Delayed Measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(3) :401–416, March 2007. ISSN 0018-9286. doi : 10.1109/TAC.2007.892383. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/4132911/>.
- [31] Sajjad Safari, Faridoon Shabani, and Dan Simon. Multirate multisensor data fusion for linear systems using Kalman filters and a neural network. *Aerospace Science and Technology*, 39 : 465–471, December 2014. ISSN 12709638. doi : 10.1016/j.ast.2014.06.005. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1270963814001126>.
- [32] Aïda Feddaoui, Nicolas Boizot, Eric Busvelle, and Vincent Hugel. High-gain extended Kalman filter for continuous-discrete systems with asynchronous measurements. *International Journal of Control*, pages 1–14, October 2018. ISSN 0020-7179, 1366-5820. doi : 10.1080/00207179.2018.1539525. URL <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00207179.2018.1539525>.
- [33] Aïda Feddaoui, Nicolas Boizot, Eric Busvelle, and Vincent Hugel. A Kalman filter for linear continuous-discrete systems with asynchronous measurements. In *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 2813–2818, Melbourne, Australia, December 2017. IEEE. ISBN 978-1-5090-2873-3. doi : 10.1109/CDC.2017.8264068. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/8264068/>.
- [34] Nicolas Boizot and Eric Busvelle. On the stability of a differential Riccati equation for continuous-discrete observers. *International Journal of Control*, 89(2) :322–336, February 2016. ISSN 0020-7179, 1366-5820. doi : 10.1080/00207179.2015.1076937. URL <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00207179.2015.1076937>.
- [35] Aïda Feddaoui-Papin, Nicolas Boizot, Eric Busvelle, and Vincent Hugel. Continuous-Discrete High-Gain Extended Kalman Filter for Mobile Robots with Asynchronous Outputs. In *2019*

- 8th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, pages 46–51, Marrakesh, Morocco, October 2019. IEEE. ISBN 978-1-72811-938-0. doi : 10.1109/ICSC47195.2019.8950614. URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/8950614/>.
- [36] Eduardo D Sontag. *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*. Springer, New York, NY, 2013. ISBN 978-1-4612-6825-3. OCLC : 903438934.
- [37] Leangs San Shieh, Sekar Ganesan, and Jose Mariano Navarro. Transformations of a class of time-varying multivariable control systems to block companion forms. *Computers & Mathematics with Applications*, 14(6) :471–477, 1987. ISSN 08981221. doi : 10.1016/0898-1221(87)90059-9. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0898122187900599>.
- [38] Mondher Farza, Monia Oueder, Ridha Ben Abdennour, and Mohammed M'Saad. High gain observer with updated gain for a class of MIMO nonlinear systems. *International Journal of Control*, 84(2) :270–280, February 2011. ISSN 0020-7179, 1366-5820. doi : 10.1080/00207179.2010.550014. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207179.2010.550014>.
- [39] Mohammad Rashedi, Jinfeng Liu, and Biao Huang. Distributed adaptive high-gain extended Kalman filtering for nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(18) :4873–4902, December 2017. ISSN 10498923. doi : 10.1002/rnc.3838. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/rnc.3838>.
- [40] emmanual.robotis.com.
- [41] Morgan Quigley, Brian Gerkey, and William D. Smart. *Programming robots with ROS*. O'Reilly & Associates Incorporated, Sebastopol, first edition edition, 2015. ISBN 978-1-4493-2389-9. OCLC : ocn895728559.
- [42] www.slamtec.com.
- [43] Ali Zemouche and Mohamed Boutayeb. On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, 49(2) :585–591, February 2013. ISSN 00051098. doi : 10.1016/j.automatica.2012.11.029. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0005109812005651>.
- [44] A. Zemouche. Observer design for nonlinear systems by using high-gain and LPV/LMI-based technique. In *2017 American Control Conference (ACC)*, pages 2624–2629, Seattle, WA, USA, May 2017. IEEE. ISBN 978-1-5090-5992-8. doi : 10.23919/ACC.2017.7963348. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/7963348/>.
- [45] Angelo Alessandri and Ali Zemouche. On the enhancement of high-gain observers for state estimation of nonlinear systems. In *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6278–6283, Las Vegas, NV, USA, December 2016. IEEE. ISBN 978-1-5090-1837-6. doi : 10.1109/CDC.2016.7799235. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/7799235/>.
- [46] Antonino Sferlazza, Sophie Tarbouriech, and Luca Zaccarian. Time-varying Sampled-data Observer with Asynchronous Measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 1–1, 2018. ISSN 0018-9286, 1558-2523. doi : 10.1109/TAC.2018.2839974. URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/8362947/>.
- [47] Pauline Bernard and Vincent Andrieu. Luenberger Observers for Nonautonomous Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(1) :270–281, January 2019. ISSN 0018-9286, 1558-2523, 2334-3303. doi : 10.1109/TAC.2018.2872202. URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/8472168/>.
- [48] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, New York, NY, second edition, corrected reprint edition, 1985. ISBN 978-0-521-54823-6 978-0-521-83940-2.

Abstract

The aim of observability studies and observer design is to reconstruct the state of a dynamic system using the measurements available. In particular, the Kalman filter algorithm is considered. This widely-studied and used observer exists in several versions : for linear or nonlinear systems, for discrete, continuous or even continuous-discrete time, in the stochastic or deterministic framework. However, Most of the time, these observers are used with the assumption that the measurements provided by the sensors are synchronous. Most of the time, this assumption can be far from the physical reality, in particular when dealing with robotic systems.

In this memoir, an observer tailored for *nonlinear continuous-discrete asynchronous systems* is presented. These systems are made of a continuous state equation and a multirate sampled output equation. Based on the existing high-gain Extended Kalman Filter for continuous nonlinear systems and continuous-discrete nonlinear systems with synchronous outputs, we develop an ad-hoc formalism and design an observer with a deterministic point of view. Its convergence is proven analytically and illustrated by an application on a mobile robotic system.

Resumé

L'étude de l'observabilité et la synthèse d'observateur ont pour vocation la reconstruction de l'état d'un système à l'aide des mesures reçues. Ces dernières n'apportent généralement qu'une connaissance partielle de cet état. Le filtre de Kalman est un observateur particulièrement étudié et employé. Plusieurs versions existent, adaptées aux systèmes linéaires ou non linéaires, en version discrète, continue voire continue-discrète, dans le cadre stochastique ou déterministe. Ces observateurs reposent cependant sur l'hypothèse que les mesures fournies par les capteurs sont synchrones. Or, cette supposition est assez éloignée de la réalité physique, notamment des problèmes étudiés en robotique.

Nous proposons dans ce manuscrit un observateur adapté aux *systèmes non linéaires continus-discrets asynchrones*. Nous entendons par cela des systèmes dont l'état est continu et les sorties échantillonnées à des fréquences différentes. En nous basant sur le Filtre de Kalman Etendu grand-gain existant pour les systèmes non linéaires continus et continus-discrets synchrones, nous développons un formalisme et construisons un observateur en adoptant un point de vue déterministe. Sa convergence est prouvée analytiquement et illustrée par une application sur un système robotique mobile.